



UFPE

Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Pós-graduação em Matemática

TENSORES INTEGRAIS EM ÁLGEBRAS DE HOPF

Marcilio Ferreira dos Santos

Dissertação de Mestrado

Recife
2013

UFPE
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Marcilio Ferreira dos Santos

TENSORES INTEGRAIS EM ÁLGEBRAS DE HOPF

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da UFPE
como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre
em Matemática.*

Orientador: *Prof. Dr. Eduardo Shirlippe Góes Leandro*
Co-orientador: *Prof. Dr. André Luiz Meireles Araújo*

Recife
2013

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Santos, Marcilio Ferreira dos
Tensores integrais em álgebras de Hopf / Marcilio Ferreira
dos Santos. - Recife: O Autor, 2013.
177 f.

Orientador: Eduardo Shirlippe Góes Leandro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CIn, Ciência da Computação, 2013.

Inclui referências e apêndice.

1. Matemática. 2. Álgebra. 3. Álgebra não comutativa. 4.
Álgebra de Hopf. I. Leandro, Eduardo Shirlippe Góes
(orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

MEI2014 – 137

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: _____

Eduardo Shirlippe Goes Leandro, UFPE
Orientador

Aron Simis, UFPE

Bruno Carneiro da Cunha, UFPE

TENSORES INTEGRAIS EM ÁLGEBRAS DE HOPF

por

Marcilio Ferreira dos Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária - Tels. (081) 2126-8414 – Fax: (081)2126-8410
Recife – Brasil
Agosto – 2013

Agradecimentos

- Agradeço aos meus pais, Marcelo Ramos dos Santos e Dulcinéa Ferreira dos Santos, e a toda minha família que me apoiou;
- Agradeço a minha namorada e companheira Andreza dos Santos Rodrigues de Melo;
- Agradeço ao professor André Luiz Meireles Araújo e ao Professor Eduardo Leandro.
- Agradeço ao Professor Fernando José Oliveira de Souza pela disponibilidade em ajudar no desenvolvimento deste trabalho.
- Aos professores (e ex-professores) do DMAT-UFPE;
- Aos amigos pessoais Jonas Felício, Hugo Jorge, Leonardo Chaves, Handerson Marinho.
- Agradeço, em especial, aos amigos Thiago Albuquerque e Stéfano Oliveira, que sofreram comigo na graduação. Agradeço ainda a Carlos André por ter ajudado a mim e a outros a vencer juntos a defasagem escolar;
- Agradeço aos professores da Escola Municipal Hugo Gerdau que me incentivaram;
- Agradeço aos funcionários do DMAT e CCEN pelos serviços prestados. Em especial, agradeço a Tânia Maranhão por ter me ajudado em problemas burocráticos algumas vezes;
- Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

O estudo de álgebras de Hopf foi iniciado por Heinz Hopf em 1941, como uma estrutura na topologia algébrica. Uma álgebra de Hopf H é uma álgebra sobre um corpo $\mathbb{k}$ tal que H tem uma estrutura dual compatível (dita coálgebra) e um antiendomorfismo S que generaliza a ideia de inversão multiplicativa. Os tensores integrais das álgebras de Hopf estão intimamente relacionados com a sua estrutura algébricas. Esta estrutura é uma peça chave de um programa de pesquisa para a classificação das álgebras de Hopf, eles são um ingrediente de grande importância na topologia quântica das variedades tridimensionais. Nesta dissertação, estudamos algumas construções de álgebras de Hopf e algumas classes de exemplos consagradas tais como a álgebra de um grupo, o envelope de uma álgebra de Lie, e alguns grupos quânticos. Também estudamos a estrutura dos tensores integrais em álgebras de Hopf e verificamos alguns teoremas notáveis e cálculos diagramáticos sobre eles baseando-nos nos trabalhos de David Radford e Greg Kuperberg dentre outros. Em particular, discutimos a reconstrução da estrutura de uma álgebra de Hopf involutória ($S^2 = I$) a partir dos tensores traço e cotraço. Para explicarmos estes temas, fizemos uma apresentação da estrutura categórica (diagramática) subjacente e ao conceito de traço quântico aqui empregado.

Palavras-chave: Álgebra de Hopf. Teoria tensorial. Traços. Integrais. Semissimplicidade.

Abstract

The study of Hopf algebras have initiated by Heinz Hopf in 1941 as a structure in algebraic topology. A Hopf algebra $\mathbb{H}$ is a algebra over a field such that $\mathbb{H}$ has a compatible dual structure (known like coalgebra) and an antiendomorfismo S that generalizes the notion multiplicative of the inversion. The integral tensors of Hopf algebra are closely related with its algebraic structure. This estructure is a key to the research program to the classification of Hopf algebras, they are a very important ingredient in quantum topology of manifolds. In this thesis, we study some constructions of Hopf algebras and some classes of examples such as consecrated algebra of a group, the envelope of a Lie algebra, and some quantum groups. We also study the structure of the tensor integrals in Hopf algebras and we found some remarkable theorems and diagrammatic calculations on them based on the works of David Radford and Greg Kuperberg among others. In particular, we discuss the reconstruction of the structure of a Hopf algebra involutory ($S^2 = I$) with the tensors trace and cotrace. To explain these issues, we made a presentation of the categorical (diagrammatic) structure behind them and the concept of quantum trace used here.

Keywords: Hopf Algebra. Tensorial theory. Trace Function. Integrals. Semisimplicity.

Sumário

1	Introdução	9
2	Conceitos Introdutórios da Teoria	12
2.1	Álgebras	12
2.2	Coálgebras	14
2.3	Álgebras e Coálgebras Duais	17
2.3.1	A Álgebra Dual de Uma Coálgebra	17
2.3.2	A Coálgebra Dual de uma Álgebra de Dimensão Finita	18
2.4	Biálgebras	19
2.5	Produto de Convolução e Antípoda	20
2.6	Álgebras de Hopf: Biálgebras com Antípoda	22
2.7	Módulos e Comódulos	30
2.8	Módulos Racionais	33
2.9	Módulos de Hopf	39
3	Integrais e Cointegrais	43
3.1	Ações de Álgebras de Hopf	43
3.2	Integrais e Cointegrais	44
3.3	A Estrutura de $\mathbb{H}^{*rat}$ e Sua Relação Com a Integral da Álgebra de Hopf	46
3.4	Cálculos Algébricos de Traços	52
3.4.1	O Traço Quântico: Cálculos Algébricos	55
3.4.2	Ordem da Antípoda	58
3.5	Versão Diagramática: Álgebra de Hopf	66
3.6	Tensores Integrais: Existência e Unicidade	72
3.7	Construção da Estrutura Tensorial para Álgebras Involutórias	82
4	Álgebras de Hopf	91
4.1	Extensões de Ore	91
4.2	Classes de Exemplos	97
4.2.1	Álgebras de Grupo	97
4.2.2	Álgebra de Hopf de Matrizes. As álgebras de Hopf $GL(2)$ e $SL(2)$	99
4.2.3	Álgebra de Hopf ‘Divided Powers’ (Graus Dissociados)	102
4.2.4	Álgebra de Hopf de Sweedler	104
4.2.5	Álgebra de Taft	106
4.2.6	Coálgebra Colivre sobre um espaço vetorial	110
4.2.7	Álgebras Tensoriais, Simétricas e Exteriores	112

4.2.8	Álgebra Envelope de Uma Álgebra de Lie	116
4.2.8.1	Álgebra $\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(M_2(\mathbb{K})))$	122
4.2.9	A Álgebra de Hopf $GL_q(2)$ e $SL_q(2)$	126
4.2.10	Grupos Quânticos Através de Quantização por Deformação	131
A	Apêndice: Preliminares de Álgebra	141
A.1	Álgebra Multilinear	141
A.2	Álgebras Graduadas	144
A.2.1	Álgebra Tensorial, Álgebra simétrica e Álgebra Exterior	144
A.3	Teoremas Elementares de Álgebra Abstrata	146
A.3.1	A Estrutura dos Grupos de Matrizes	146
A.3.2	Álgebras de Lie	146
A.3.3	Extra de Álgebras e Coálgebras	147
A.4	Coálgebra Colivre	148
A.5	Combinatória Quântica	150
A.5.1	Polinômio de Gauss e a Fórmula q -binomial	150
A.5.2	A Estrutura de $M_q(2)$	152
A.6	Fundamentos de Categorias	153
A.6.1	Funtor	153
A.6.2	Transformação Natural	155
A.7	A Estrutura Diagramática dos Tensores	155
A.7.1	Movimentos Sobre as Aresta e Vértices	156
A.7.2	Emaranhados, Tranças, Links e nós	158
A.7.3	Grafos de Vértices Rígidos (VR)	160
A.8	Categorias Livres	162
A.8.1	Notação Dual de Penrose	164
A.9	Conceito de Categorias Monoidais	166
A.9.1	Funtorialidade e Naturalidade	169
A.10	Categorias Trançadas e Simétricas	169
A.10.1	Funtorialidade	171
A.11	Categorias Com Dualidade	172
A.11.1	Categorias com Traço	173
A.11.2	Categorias ‘Ribbon’	175

CAPÍTULO 1

Introdução

Diz-se que $\mathbb{H}$ é uma $\mathbb{k}$ -álgebra, se este conjunto $\mathbb{H}$ é um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial com um produto $M : \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ linear, associativa e com unidade. A estrutura dual à $\mathbb{k}$ -álgebra denomina-se $\mathbb{k}$ -coálgebra, e trata-se de um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial com coproduto $\Delta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ linear, coassociativa e counidade¹. Uma biálgebra é um espaço vetorial $\mathbb{H}$ que possui ao mesmo tempo uma estrutura de álgebra com unidade $(\mathbb{H}, M, 1)$ e coálgebra com counidade $(\mathbb{H}, \Delta, \epsilon)$ e o coproduto Δ deve ser um morfismo de álgebra. Por fim, para ser considerada uma álgebra de Hopf, esta biálgebra deve possuir uma generalização da inversão multiplicativa $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, que denomina-se antípoda. A princípio, esta definição poderia ser considerada muito restritiva, mas existe um resultado devido à [BDG99] que garante que a existência de um número infinito de tipos de álgebras de Hopf. Esta estrutura tão particular tem demonstrado grande aplicabilidade em matemática e áreas afins. Nesta dissertação, apresentaremos esta estrutura de forma sucinta, todavia de maneira bastante informativa e formal.

Estas álgebras de Hopf surgiram como álgebras graduadas em topologia algébrica e a partir do estudo dos anéis de cohomologia de grupos de Lie. Logo se identificaram exemplos sem graduação tais como as álgebras de grupo, envelopes universais de álgebras de Lie e álgebras de Hopf afins.

Na década de 1980, relações entre álgebras de Hopf, topologia e física quântica foram descobertas, formando um estudo interdisciplinar denominado matemática quântica². Estes estudos incorporaram os grupos quânticos³, que são álgebras de Hopf não-comutativas e não-cocomutativas. Os grupos quânticos têm uma forte relação com estudo das soluções da equação de Yang-Baxter, que é uma condição necessária para a solubilidade de modelos mecânicos-estatísticos. Através da ‘quantização’ do envelope universal⁴ de álgebras de Lie, criaram-se certos grupos quânticos. Estas relações justificam o atual interesse dos físicos por esta estrutura. Por outro lado, o estudo da matemática quântica contribuiu para a teoria combinatória e para teoria da representação e para outros ramos da álgebra quântica, para a topologia quântica, para a álgebra comutativa [Eis95] e para geometria não-comutativa.

As álgebras de Hopf têm uma teoria de representação muito sofisticada devido às estruturas categóricas adicionais⁵ que estão presentes na categoria de seus módulos.

Quanto a classificação, o estudo das álgebras de Hopf se dividiu em duas direções: As álgebras

¹Uma counidade é uma aplicação $\epsilon : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{k}$ que satisfaz $(\epsilon \otimes id_{\mathbb{H}}) \circ \Delta \simeq id_{\mathbb{H}} \simeq (id_{\mathbb{H}} \otimes \epsilon) \circ \Delta$.

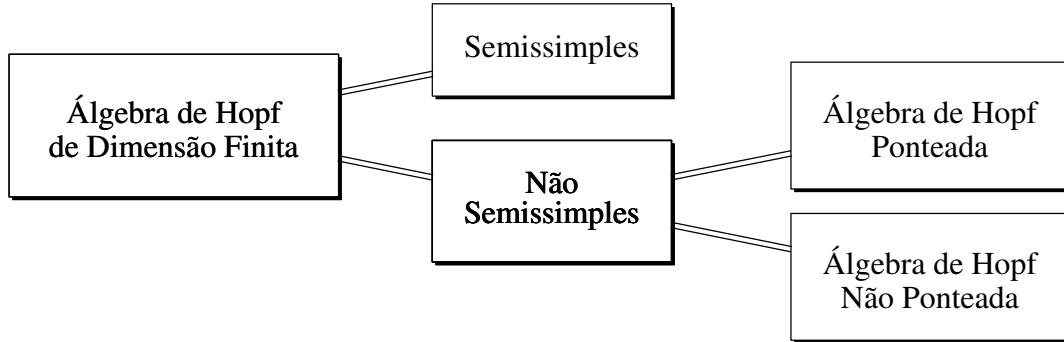
²Vladimir Drinfeld (Carcóvia, 14 de fevereiro de 1954) recebeu a Medalha Fields em 1990 por suas contribuições em matemática quântica e física-matemática.

³Vários autores contribuíram para a criação deste conceito.

⁴Pode-se dizer: ‘quantização’ por deformação por um parâmetro. Faremos isto na Seção 4.2.10.

⁵Por exemplo, produto tensorial e, eventualmente, entrelaçamento, dualidade, traço, etc. Apresentamos um pouco destas estruturas no apêndice B, com objetivo apenas de ilustrar.

de Hopf semissimples e não-semissimples.



No caso não-semissimples, a subclasse das álgebras de Hopf ponteadas foi intensivamente estudada e ainda é matéria de pesquisa.

Sejam $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf e p um número primo, temos que parte da classificação de $\mathbb{H}$ é conhecida para os casos $\dim \mathbb{H} = p$, p^2 , $2p$ e $2p^2$ com p ímpar. As álgebras de Hopf de dimensão p^3 ainda são um problema parcialmente aberto. Muitos autores contribuíram com a sua classificação e já se conseguiu catalogar as álgebras de Hopf semissimples e ponteadas nestas condições. Conjectura-se que toda álgebra de dimensão p^3 ou é semissimples ou é ponteadas ou é a álgebra dual de uma álgebra ponteadas. Assumindo-se algumas hipóteses adicionais, provou-se que esta conjectura é verdadeira em [Gar05].

As integrais ⁶, que é um invariante algébrico das álgebras de Hopf, contribuíram para classificação das álgebras de Hopf. Nas Seção 3.2, desenvolveremos a teoria das integrais e reuniremos vários fatos importantes sobre as integrais e sua aplicação na classificação de álgebras de Hopf.

Se $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf com integral não nula, então $\mathbb{H}$ é chamada álgebra **cofrobénus** e, não necessariamente, tem dimensão finita.

Outro problema clássico das álgebras de Hopf de dimensão finita, diz respeito à ordem da sua antípoda. Desde então, passou a se estudar as potências das antípodas. Radford foi o responsável por encontrar uma importante fórmula para S^4 , que basicamente fechou o estudo da conjectura ⁷. Como resultado desta fórmula, temos o seguinte corolário.

Corolário 1. *A ordem da antípoda de uma álgebra de Hopf de dimensão finita é finita.*

Além disso, o traço de S^2 está intimamente relacionado com a semisimplicidade de $\mathbb{H}$. A seguir temos o resultado que relaciona o quadrado da antípoda com a semisimplicidade da álgebra.

Teorema 1 ([LR94],[LS69]). *Se a característica de $\mathbb{k}$ é zero, as seguintes condições em uma álgebra de Hopf de dimensão finita $\mathbb{H}$ são equivalentes:*

1. $\mathbb{H}$ é semissimples.
2. $\mathbb{H}$ é cosemissimples, isto é, $\mathbb{H}^*$ é semissimples.
3. $\mathbb{H}$ é involutória, isto é, $S^2 = I$.

⁶Retornaremos a esta definição na Seção 2.3.

⁷Vide a [Rad94].

Como consequência, uma subálgebra e/ou a álgebra quociente de uma álgebra semissimples é também semissimples.

Na topologia de baixa dimensão, os grupos quânticos e suas generalizações têm sido uma grande fonte de coeficientes algébricos para os invariantes conhecidos como invariantes quânticos. Esta especialidade teve início na década de 1980 e partiu da aplicação de técnicas típicas da física teórica a objetos topológicos e, gradualmente, abstraiu seus métodos para o nível de categorias. Neste trabalho, não estaremos focados nesta pluralidade, mas no estudo específico dos tensores integrais, que se mostraram muito úteis em topologia de baixa dimensão. As pesquisas sobre álgebras de Hopf em si mantêm-se com grande vitalidade até hoje. Por exemplo, o programa de classificação de Andruskiewitsch-Schneider⁸ se mantém produtivo e atuante.

Cálculos gráficos são utilizados em muitas ciências com objetivo de visualizar fórmulas, simplificar demonstrações e extrair resultados. Sua ubiquidade é devida à natureza diagramática de diversas categorias com estruturas adicionais. A cerca de 20 anos, cálculos gráficos específicos para álgebras de Hopf, módulos de Hopf e suas generalizações em categorias com estrutura adicional têm sido elaborados e mostram muito valor teórico. Daí, descobriram-se álgebras de Hopf (categóricas) universais, que foram denominadas de objetos do tipo Hopf [Kup96]. Estes objetos são de natureza diagramática e nos permitem provar teoremas sobre álgebra de Hopf em contextos bastante gerais. Estas técnicas inspiraram a construção de mais invariantes topológicos que desempenharam papel importante no desenvolvimento do programa de investigação que já conseguiu algebrizar parcialmente as 3-variedades fechadas⁹.

O objetivo geral desta dissertação foi estudar as estruturas do tipo álgebras de Hopf. Bem como estudar seus invariantes e propriedades elementares. Como objetivo específico, temos o estudo das integrais de álgebras de Hopf. O estudo das integrais possibilitam encontrar fórmulas para demonstrar que a ordem da antípoda é finita. Além disso, o estudo da categoria dos objetos do tipo Hopf é rico e se mostrou útil na classificação de 3-variedades fechadas [Kup96] e [Kup89].

⁸No início de 2012, Nicolás Andruskiewitsch e Sonia Natalie visitaram o departamento de matemática da UFPE. E ministraram minicursos durante o curso de verão. Andruskiewitsch discursou sobre os seus trabalhos de classificação de álgebra de Hopf de dimensão finita junto a Hans Jürgen Schneider.

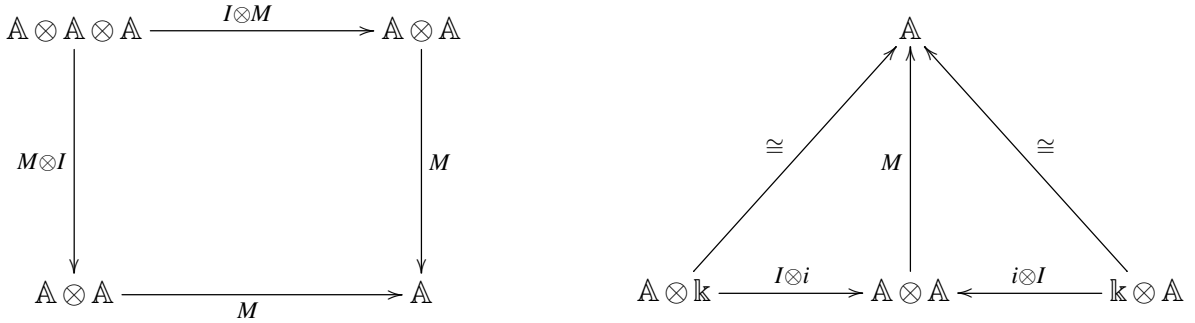
⁹Existe uma página no *impa* onde, dentre outras coisa, podemos encontrar videos onde se expõem as relações entre as 3-variedades topológicas e os grupos quânticos. O leitor interessado pode encontrar os videos em <http://video.impa.br/index.php?page=quantum-groups-and-3-manifold-invariants>.

Conceitos Introdutórios da Teoria

Neste Capítulo, introduziremos os conceitos de álgebra, coálgebra, biálgebra e álgebra de Hopf. Tomamos como referência os livros [Kas95], [DNR00], [Swe69a]. O objetivo deste Capítulo é apresentar estas estruturas de forma detalhada. Cabe ressaltar que as álgebras de Hopf possuem uma antípoda S e um produto de convolução, que entenderemos melhor na Seção 2.5.

2.1 Álgebras

Definição 2.1 (Álgebra). Uma $\mathbb{k}$ -álgebra associativa com unidade é uma tripla $(\mathbb{A}, M, i)$, onde $\mathbb{A}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{k}$ e os morfismos $M: \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ e $i: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{A}$ são transformações lineares, tais que os seguintes diagramas comutam.



Denomina-se M de multiplicação e i de unidade. Observamos que, sendo estes diagramas comutativos, equivale a afirmar que a álgebra é associativa com unidade. Podemos escrever os axiomas da associatividade e da unidade da seguinte maneira $M \circ (I \otimes M) = M \circ (M \otimes I)$ e $M \circ (i \otimes I) = M \circ (I \otimes i) = I$.

Definição 2.2. Denomina-se *subálgebra* um subespaço $\mathbf{S}$ de uma álgebra $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}}, i_{\mathbb{A}})$ tal que, para todos $a, b \in \mathbf{S}$, temos que

$$M_{\mathbf{S}}(a \otimes b) = M_{\mathbb{A}}(a \otimes b) \in \mathbf{S} \quad \text{e} \\ i_{\mathbf{S}}(1_{\mathbb{k}}) = i_{\mathbb{A}}(1_{\mathbb{k}})$$

Definição 2.3. Denomina-se o subespaço vetorial I da álgebra $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}}, i_{\mathbb{A}})$ de *ideal* de $\mathbb{A}$, se $M_{\mathbb{A}}(I \otimes \mathbb{A} + \mathbb{A} \otimes I) \subset I$.

Com o ideal I de uma álgebra $\mathbb{A}$, define-se a álgebra quociente $\mathbb{A}/I$. Para isto, definimos o conjunto $\mathbb{A}/I = \{x + I | x \in \mathbb{A}\}$ e as operações $\bar{M}: \mathbb{A}/I \otimes \mathbb{A}/I \rightarrow \mathbb{A}/I$ e $i: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{A}/I$, que estão bem

definidas, no sentido que seus resultados independem dos representantes das classes do conjunto quociente e a verificação deste fato não é diferente do que é feito em anéis quocientes e em módulos quocientes com os quais o leitor já deve ter familiaridade.

Dada uma multiplicação M podemos definir a multiplicação repetida, que se trata de uma aplicação linear nos moldes da multiplicação, tal que $M^n : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}$, satisfaz $M^n \circ (I^n \otimes i) = M^{n-1}$ e $M^{n+1} = M \circ (I \otimes M^n) = M \circ (M^n \otimes I)$. Definiremos este morfismo recursivamente por:

$$M^0 := I, M^1 = M \quad \text{e} \quad M^{n+1} := M \circ (I \otimes M^n)$$

Proposição 2.1. Para todos $n \geq 1$ e com $r \in \mathbb{N}$, temos que $M^n := M^{n-1} \circ (I^r \otimes M \otimes I^{n-r})$.

Demonstração. No caso $n = 1$, ou seja, $M^2 = M \circ (I \otimes M) = M \circ (M \otimes I)$. Fixado $n \in \mathbb{N}$, suponha que, para $0 \leq r \leq n$, vale $M^n = M^{n-1} \circ (I^r \otimes M \otimes I^{n-1-r})$. Então, para todo $1 \leq r \leq n+1$, provaremos que $M^{n+1} = M^n \circ (I^r \otimes M \otimes I^{n-r-1})$.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \circ (I \otimes M^n) \\ &= M \circ (I \otimes M^{n-1} \circ (I^r \otimes M \otimes I^{n-1-r})) \\ &= M \circ (I \otimes M^{n-1}) \circ (I \otimes I^r \otimes M \otimes I^{n-r-1}) \\ &= M^n \circ (I^{r+1} \otimes M \otimes I^{n-r-1}) \end{aligned}$$

Logo provamos, por indução, o resultado que queríamos. $\square$

Proposição 2.2. Seja $(\mathbb{A}, M, i)$ uma álgebra. Então a unidade i é única.

Demonstração. Sejam i, i' duas unidades para uma álgebra $\mathbb{A}$ e para a multiplicação M . Então temos que

$$i'(1_{\mathbb{K}}) = M(i'(1_{\mathbb{K}}) \otimes i(1_{\mathbb{K}})) = i(1_{\mathbb{K}})$$

Logo as transformações lineares i, i' são iguais, pois o são na base $\{1_{\mathbb{K}}\}$ de $\mathbb{K}$. $\square$

Definição 2.4. Sejam $(\mathbb{A}, M, i), (\mathbb{A}', M', \epsilon')$ duas álgebras. Uma aplicação linear $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ é denominada de *morfismo de álgebras*, se satisfaz

$$M' \circ (f \otimes f) = f \circ M \quad \text{e} \quad f \circ i = \epsilon'.$$

Calculando os coeficientes de estrutura¹ temos que, fixada uma base β_i para a álgebra $\mathbb{A}$, $M(\beta_i \otimes \beta_j) = \sum c_k \beta_k$ e denotamos $M_{i,j}^k = c_k$ os coeficientes de estrutura da multiplicação.

Exemplo 2.1.1. (álgebra trivial) Esta álgebra é dada por $(\mathbb{K}, \cdot, 1_{\mathbb{K}})$, onde $\cdot$ é a multiplicação de $\mathbb{K}$ e $1_{\mathbb{K}}$ sua unidade.

Exemplo 2.1.2 (Álgebra Oposta). Para toda álgebra $(\mathbb{A}, M, i)$, podemos definir a álgebra $\mathbb{A}^{op} = (\mathbb{A}, M^{op}, i)$, satisfazendo

$$M^{op} = M \circ \tau_{\mathbb{A}, \mathbb{A}}$$

ou seja, $M^{op}(a \otimes b) = M(b \otimes a)$. E, assim, verificamos que

$$M^{op} \circ (I \otimes M^{op})(a_i \otimes b_i \otimes c_i) = M(a_i \otimes M(c_i \otimes b_i)) = M(M(c_i \otimes b_i) \otimes a_i) = M^{op} \circ (M^{op} \otimes I)(a_i \otimes b_i \otimes c_i)$$

Uma álgebra tal que $M^{op} = M$ é denominada álgebra comutativa, ou seja, as álgebras comutativas são as álgebras tais que $M^{op} = M \circ \tau_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}} = M$.

¹Leia a Seção A.1.

Exemplo 2.1.3 (Produto Tensorial de Álgebras). Sejam $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}}, i_{\mathbb{A}})$ e $(\mathbb{A}', M_{\mathbb{A}'}, i'_{\mathbb{A}})$ duas álgebras quaisquer. A partir destas álgebras, podemos definir a álgebra $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}', M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}, i_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'})$, satisfazendo $M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'} = (M_{\mathbb{A}} \otimes M_{\mathbb{A}'}) \circ (I \otimes \tau_{\mathbb{A}, \mathbb{A}'} \otimes I)$ e $i_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'} = i_{\mathbb{A}} \otimes i'_{\mathbb{A}}$ e, verificamos que:

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}(I_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'} \otimes M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'})((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \otimes (a_{(3)} \otimes b_{(3)})) &= \\ = M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} a_{(3)} \otimes b_{(2)} b_{(3)})) &= \\ = a_{(1)}(a_{(2)} a_{(3)}) \otimes b_{(1)}(b_{(2)} b_{(3)}). \end{aligned}$$

para não carregar a notação, denotaremos $M(a \otimes b)$ simplesmente por ab . Da mesma forma, verificamos que

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}(M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'} \otimes I_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'})((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \otimes (a_{(3)} \otimes b_{(3)})) &= \\ = M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}((a_{(1)} a_{(2)} \otimes b_{(1)} b_{(2)}) \otimes (a_{(3)} \otimes b_{(3)})) &= \\ = (a_{(1)} a_{(2)}) a_{(3)} \otimes (b_{(1)} b_{(2)}) b_{(3)} \end{aligned}$$

e, portanto, a multiplicação assim definida é associativa devido às álgebras $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ serem associativas, ou seja, vale que $a_{(1)}(a_{(2)} a_{(3)}) = (a_{(1)} a_{(2)}) a_{(3)}$ e $b_{(1)}(b_{(2)} b_{(3)}) = (b_{(1)} b_{(2)}) b_{(3)}$.

$$M_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}(i_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'} \otimes I_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}) = M_{\mathbb{A}} \circ (i_{\mathbb{A}} \otimes I_{\mathbb{A}}) \otimes M_{\mathbb{A}'} \circ (i_{\mathbb{A}'} \otimes I_{\mathbb{A}'})) = I_{\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}'}.$$

A outra relação para a identidade é simples e deixamos ela a cargo do leitor.

2.2 Coálgebras

As coálgebras, como o próprio nome faz referência, são estruturas definidas a partir do dual de álgebras. Seus axiomas são os duais dos axiomas de definição de álgebras como o leitor poderá observar a seguir:

Definição 2.5 (Coálgebra). Uma $\mathbb{k}$ -coálgebra (coassociativa com counidade) é uma tripla $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$ na qual $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{k}$ e os morfismos $\Delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ e $\varepsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{k}$ são transformações lineares tais que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \\ \Delta \downarrow & & \downarrow I \otimes \Delta \\ \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\Delta \otimes I} & \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C} & & \\ & \nearrow \cong & \downarrow & \nwarrow \cong & \\ \mathbb{C} \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{I \otimes \varepsilon} & \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{\varepsilon \otimes I} & \mathbb{k} \otimes \mathbb{C} \end{array}$$

Denomina-se Δ por comultiplicação e ε por counidade. O primeiro diagrama ser comutativo é o que define a coassociatividade da coálgebra. Podemos expressar estes diagramas da seguinte maneira $(I \otimes \Delta) = (\Delta \otimes I) \circ \Delta = I$. Já o fato expresso pela comutatividade do segundo diagrama

define a propriedade essencial do morfismo counidade, ou seja, $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = \phi$ ². Para a comultiplicação Δ , denotaremos a ação deste morfismo sobre x por

$$\Delta(x) = \sum_i x_{(1)i} \otimes x_{(2)i}.$$

Esta notação é chamada de notação de Heyneman-Sweedler. Contudo, é costume suprimir o índice i e, muitas vezes, até mesmo o símbolo do somatório³. Assim a sentença resultante é

$$\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)} = x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

A coassociatividade escrita segundo a notação de Heyneman-Sweedler é

$$(I \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = x_{(1)} \otimes (x_{(2)(1)} \otimes x_{(2)(2)}) = (x_{(1)(1)} \otimes x_{(1)(2)}) \otimes x_{(2)} = (\Delta \otimes I) \circ \Delta(x)$$

e, pelo que vimos, podemos simplificar mais a notação levando em consideração a igualdade anterior para escrever:

$$(I \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)} = (\Delta \otimes I) \circ \Delta(x)$$

No caso do morfismo ε , a notação de Heyneman-Sweedler para $(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(x) = (I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = I$ é dada por

$$\sum \varepsilon(x_{(1)})x_{(2)} = x = \sum x_{(1)}\varepsilon(x_{(2)}). \quad (2.1)$$

Definição 2.6. Denomina-se de *subcoálgebra* um subespaço $\mathbf{S}$ de uma coálgebra tal que, para todo $a \in \mathbf{S}$, temos

$$\Delta_{\mathbf{S}}(a) = \Delta_{\mathbb{C}}(a) \in \mathbf{S} \otimes \mathbf{S} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{\mathbf{S}}(a) = \varepsilon_{\mathbb{C}}(a)$$

Definição 2.7. Denomina-se o subespaço I da coálgebra $(\mathbb{C}, M_{\mathbb{C}}, i_{\mathbb{C}})$ de *coideal* de $\mathbb{C}$, se $\Delta_{\mathbb{C}}(I) \subset I \otimes \mathbb{C} + \mathbb{C} \otimes I$ e $\varepsilon_{\mathbb{C}}(I) = 0$.

A partir do coideal, definimos uma estrutura de coálgebra no espaço vetorial quociente $\mathbb{C}/I = \{x+I | x \in \mathbb{C}\}$. Basta observar que as aplicações

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}: \mathbb{C}/I &\longrightarrow \mathbb{C}/I \otimes \mathbb{C}/I & \bar{\varepsilon}: \mathbb{C}/I &\longrightarrow \mathbb{C}/I \otimes \mathbb{C}/I \\ \bar{c} &\longmapsto \Delta(\bar{c}) = \overline{\Delta(c)} & \bar{c} &\longmapsto \varepsilon(\bar{c}) = \overline{\varepsilon(c)} \end{aligned}$$

estão bem definidas. Observe que $\Delta(x+I) = \Delta(x) + I \otimes \mathbb{C} + \mathbb{C} \otimes I$, portanto a classe $\overline{\Delta(x+I)} = \overline{\Delta(x)}$. De maneira similar, $\overline{\varepsilon(x+I)} = \varepsilon(x)$, ou seja, $\bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}$ estão bem definidas. A coassociatividade $\bar{\Delta}$ segue da coassociatividade de Δ , tendo em vista que

$$\bar{\Delta}(\bar{x}) = \sum \bar{x}_{(1)} \otimes \bar{x}_{(2)}.$$

Para a counidade, temos

$$(\bar{\varepsilon} \otimes I) \circ \bar{\Delta} = \sum \varepsilon(\bar{x}_{(1)}) \otimes \bar{x}_{(2)} = \sum \overline{\varepsilon(x_{(1)}) \otimes x_{(2)}} = \bar{x}.$$

²Essa igualdade, na verdade, faz uso do isomorfismo natural $\mathbb{k} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{k}$.

³A supressão do símbolo do somatório é devida à notação proposta por Einstein.

Analogamente, se verifica que $\sum \bar{x}_{(1)} \otimes \varepsilon(\bar{x}_{(2)}) = \bar{x}$.

Dada uma coálgebra, podemos definir a comultiplicação repetida, que é uma aplicação linear nos moldes da comultiplicação tal que $\Delta^n : A \rightarrow A^{\otimes n}$ e que é definida a partir da própria comultiplicação. Definiremos estes morfismos do seguinte modo

$$\begin{cases} \Delta^1 &= \Delta; \\ \Delta^{n+1} &= (I \otimes \Delta^n) \circ \Delta \end{cases}$$

Proposição 2.3. Para todos $n \in \mathbb{N}$ e com $1 \leq r \leq n-1$, temos que $\Delta^n := (I^r \otimes \Delta \otimes I^{n-r-1}) \circ \Delta^{n-1}$.

Demonstração. Sabemos que $(I \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I) \circ \Delta$ pela coassociatividade. Suponha que valha $\Delta^n := (I^r \otimes \Delta \otimes I^{n-r-1}) \circ \Delta^{n-1}$ para $1 \leq r \leq n-1$, então podemos concluir que

$$\begin{aligned} \Delta^{n+1} &:= (I \otimes \Delta^n) \circ \Delta \\ &= (I \otimes (I^r \otimes \Delta \otimes I^{n-r-1}) \Delta^{n-1}) \circ \Delta \\ &= (I \otimes (I^r \otimes \Delta \otimes I^{n-r-1})) \circ (I \otimes \Delta^{n-1}) \circ \Delta \\ &= (I^{r+1} \otimes \Delta \otimes I^{n-r-1}) \circ \Delta^n. \end{aligned}$$

Logo provamos, por indução finita, o resultado que queríamos. □

Proposição 2.4. Seja $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra. Então a counidade ε é única.

Demonstração. Sejam $\varepsilon, \varepsilon'$ duas counidades para uma coálgebra $\mathbb{C}$ com relação a comultiplicação Δ . Então temos que, como ε é uma counidade, $(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta = I$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{C}$ vale que $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Nesta caso, podemos assumir que $\{x_{(1)}\}, \{x_{(2)}\}$ são conjuntos linearmente independentes. Portanto aplicando a propriedade da counidade $\sum \varepsilon(x_{(1)})x_{(2)} = x = \sum \varepsilon'(x_{(1)})x_{(2)}$. Além disto, temos que $\sum x_{(1)}\varepsilon(x_{(2)}) = x$ implica em x ser gerado por $\{x_{(1)}\}$. Escolhamos uma base $\{x_j\}$ de $\mathbb{C}$, sabemos que $\Delta(x_j) = \sum_{1 \leq i \leq k_j} x_{(1)i} \otimes x_{(2)i}$, portanto o conjunto $\{x_{(1)i}\}_{1 \leq i \leq k_j}$ gera x_j , e como vimos nestes conjuntos vale $\varepsilon(x_{(1)i}) = \varepsilon'(x_{(1)i})$. Temos que, como $\{x_j\}$ gera $\mathbb{C}$, então $\{x_{(1)i}\}$ gera $\mathbb{C}$. Por fim, temos que, como vale que $\varepsilon(x_{(1)i}) = \varepsilon'(x_{(1)i})$ para todo j , segue facilmente que $\varepsilon(x_j) = \varepsilon'(x_j)$. Logo as transformações lineares $\varepsilon, \varepsilon'$ são iguais, pois o são na base x_j . □

Com respeito à Proposição 2.4, podemos parafrasear [Kup89] e afirmar que a "a carne" da coálgebra está em Δ , ou seja, a comultiplicação define uma única counidade.

Definição 2.8. Sejam $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$ e $(\mathbb{C}', \Delta', \varepsilon')$ duas coálgebras. Uma aplicação linear $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$ é denominada um *morfismo de coálgebras*, se satisfaz

$$(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f \quad \text{e} \quad \varepsilon' \circ f = \varepsilon.$$

Calculando os coeficientes de estrutura e fixando uma base β_i para a coálgebra $\mathbb{C}$, temos que $\Delta(\beta_i) = \sum c_{j,k}(\beta_j \otimes \beta_k)$ e denotamos $\Delta_i^{j,k} = c_{j,k}$ os coeficientes de estrutura da comultiplicação.

Exemplo 2.2.1 (Coálgebra Co-oposta). Para toda coálgebra $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$, podemos definir outra coálgebra $(\mathbb{C}, \Delta^{cop}, \varepsilon)$ onde

$$\Delta^{cop} = \tau_{\mathbb{C}, \mathbb{C}} \circ \Delta$$

ou seja, $\Delta^{cop}(a) = \tau_{\mathbb{C}, \mathbb{C}} \circ \Delta(a) = \tau_{\mathbb{C}, \mathbb{C}}(\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}) = \sum a_{(2)} \otimes a_{(1)}$.

$$(I \otimes \Delta^{cop}) \circ \Delta^{cop}(a) = \sum a_{(3)} \otimes a_{(2)} \otimes a_{(1)} = (\Delta^{cop} \otimes I) \circ \Delta^{cop}(a) \quad (2.2)$$

Uma coálgebra tal que $\Delta^{op} = \Delta$ é dita uma álgebra cocomutativa, ou seja, $\tau_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}} \circ \Delta = \Delta$.

Exemplo 2.2.2 (Produto tensorial de coálgebras). Sejam as coálgebras $(\mathbb{C}, \Delta_{\mathbb{C}}, \varepsilon_{\mathbb{C}})$ e $(\mathbb{C}', \Delta_{\mathbb{C}'}, \varepsilon_{\mathbb{C}'})$. Então podemos definir a produto tensorial destas coálgebras $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}', \Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'}, \varepsilon_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'})$, onde $\Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'} = (I \otimes \tau_{\mathbb{C}, \mathbb{C}'} \otimes I) \circ (\Delta_{\mathbb{C}} \otimes \Delta_{\mathbb{C}'})$ e $\varepsilon_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'} = \varepsilon_{\mathbb{C}} \otimes \varepsilon_{\mathbb{C}'}$.

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'} \otimes I_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'}) \circ \Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'}(a \otimes b) &= (\Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'} \otimes I_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'})((a_{(1)} \otimes b_{(2)}) \otimes (a_{(1)} \otimes b_{(1)})) \\ &= (a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \otimes (a_{(3)} \otimes b_{(3)}) \\ &= (\Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'} \otimes I_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'})((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})) \\ &= (I_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'} \otimes \Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'}) \circ \Delta_{\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'}(a \otimes b). \end{aligned}$$

2.3 Álgebras e Coálgebras Duais

Nesta seção, dualizaremos as álgebras $\mathbb{A}$ (coálgebras $\mathbb{C}$) para obter a coálgebra $\mathbb{A}^*$ (resp. álgebra $\mathbb{C}^*$) definida a partir da transposta da aplicação M (resp. Δ) de $\mathbb{A}$. Ressaltamos que para dualizar as álgebras a dimensão do espaço vetorial faz diferença como será explicado na Seção 2.3.2. Esta aplicação τ não é invertível sempre, mas apenas nos casos onde $\mathbb{A}$ tem dimensão finita. Contudo, nos restringiremos às álgebras de dimensão finita para evitar o problema da cardinalidade.

2.3.1 A Álgebra Dual de Uma Coálgebra

Dada uma coálgebra $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$ e seja a comultiplicação $\Delta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$. Queremos definir uma álgebra a partir da estrutura original de coálgebra. Para isto, tomemos a aplicação adjunta $\Delta^* : (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ e definamos a multiplicação em $\mathbb{C}^*$ por:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{C}^* \otimes \mathbb{C}^* &\longrightarrow (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})^* \\ (f \otimes g) &\longmapsto f \cdot g : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{k}, \end{aligned}$$

satisfazendo $(f \cdot g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$. Deste modo, podemos definir as funções $M_{\mathbb{H}^*} = \Delta^* \circ \alpha$ e $i_{\mathbb{C}^*} = \varepsilon^*$, que tornam o conjunto $(\mathbb{C}^*, M_{\mathbb{C}^*}, i_{\mathbb{C}^*})$ uma álgebra. Basta verificar que $M_{\mathbb{H}^*}$ é associativo, ou seja,

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{C}^*} \circ (I \otimes M_{\mathbb{C}^*})(f \otimes g \otimes h)(x) &= \alpha(f \otimes M_{\mathbb{C}^*}(g \otimes h)) \circ \Delta(x) \\ &= \sum f(x_{(1)}) M_{\mathbb{C}^*}(g \otimes h)(x_{(2)}) \\ &= \sum f(x_{(1)}) g(x_{(2)(1)}) h(x_{(2)(2)}) \\ &= \sum f(x_{(1)(1)}) g(x_{(1)(2)}) h(x_{(2)}) \\ &= M_{\mathbb{C}^*} \circ (M_{\mathbb{C}^*} \otimes I)(f \otimes g \otimes h)(x \otimes y \otimes z). \end{aligned}$$

Além disso, precisamos verificar o axioma da counidade

$$\begin{aligned}
 M_{\mathbb{H}^*} \circ (I \otimes i_{\mathbb{C}^*})(f \otimes 1_{\mathbb{k}})(x) &= \sum f(x_{(1)}) i_{\mathbb{C}^*}(1_{\mathbb{k}})(x_{(2)}) \\
 &= \sum f(x_{(1)}) (\varepsilon(x_{(2)})) \\
 &= f(\sum \varepsilon(x_{(2)}) x_{(1)}) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

Analogamente ao que fizemos antes, vale que

$$\begin{aligned}
 M_{\mathbb{H}^*} \circ (i_{\mathbb{C}^*} \otimes I)(1_{\mathbb{k}} \otimes f)(x) &= \sum i_{\mathbb{C}^*}(1_{\mathbb{k}})(x_{(1)}) f(x_{(2)}) \\
 &= \sum f(x_{(2)}) (\varepsilon(x_{(1)})) \\
 &= f(\sum \varepsilon(x_{(1)}) x_{(2)}) \\
 &= f(x).
 \end{aligned}$$

Temos que o dual de uma coálgebra é uma álgebra e, portanto, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 2.5. *Seja $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra. Então $(\mathbb{C}^*, M_{\mathbb{C}^*}, i_{\mathbb{C}^*})$, como definimos acima, é uma álgebra.*

2.3.2 A Coálgebra Dual de uma Álgebra de Dimensão Finita

Se tentarmos obter uma coálgebra a partir do dual de uma álgebra, teremos um problema com o fato da função $\alpha : \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{A}^* \rightarrow (\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})^*$ ⁴ não ser invertível, em geral, quando $\dim \mathbb{A} = \infty$. No contexto deste trabalho, estamos interessados, com poucas exceções, nas álgebras de Hopf de dimensão finita. Pois, não precisamos nos preocupar com a função α ; tendo em vista que α é sempre invertível nestas condições.

Para álgebras de dimensão finita, temos sempre como definir a coálgebra $(\mathbb{A}^*, \Delta_{\mathbb{A}^*}, \varepsilon_{\mathbb{A}^*})$, onde $\Delta_{\mathbb{A}^*} = \alpha^{-1} \circ M^*$, sendo $M^* : \mathbb{A}^* \rightarrow (\mathbb{A} \otimes \mathbb{A})^*$. Verificaremos a coassoociatividade desta operação

$$(I \otimes \Delta_{\mathbb{A}^*}) \circ \Delta_{\mathbb{A}^*}(f) = (I \otimes \Delta_{\mathbb{A}^*})(\sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}) = \sum f_{(1)} \otimes (f_{(2)(1)} \otimes f_{(2)(2)})$$

Ora, sendo α' um isomorfismo

$$\begin{aligned}
 \alpha' : \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{A}^* \otimes \mathbb{A}^* &\longrightarrow (\mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{A})^* \\
 f \otimes g \otimes h &\longmapsto f(x)g(y)h(z) = u(x \otimes y \otimes z)
 \end{aligned}$$

temos que, pela propriedade do produto tensorial Definição A.2, existe uma única transformação linear $u : \mathbb{A}^{\otimes 3} \rightarrow \mathbb{k}$ com esta propriedade. Neste caso, vale que

$$f(M(x \otimes y)) = \sum f_{(1)}(x) f_{(2)}(y), \quad f_{(1)}(M(x \otimes y)) = f_{(1)(1)}(x) f_{(1)(2)}(y)$$

⁴Quando $\mathbb{A}$ tiver dimensão infinita, então a cardinalidade de $\mathbb{A}^*$ é maior. Mas, com dimensão finita, temos Corolário A.2.

e, portanto,

$$\sum f_{(1)(1)}(x)f_{(1)(2)}(y)f_{(2)}(z) = \sum f_{(1)}(M(x \otimes y))f_{(2)}(z) = f(M(M(x \otimes y) \otimes z)).$$

Analogamente, segue que

$$\sum f_{(1)}(x)f_{(2)(1)}(y)f_{(2)(2)}(z) = f(M(x \otimes M(y \otimes z))).$$

Pelo que vimos, existe um morfismo único

$$u : \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{k} \quad \text{tal que} \quad u = f \circ M(I \otimes M) = f \circ M(M \otimes I).$$

Logo, como α' é um isomorfismo, temos que $\sum f_{(1)} \otimes (f_{(2)(1)} \otimes f_{(2)(2)}) = \sum (f_{(1)(1)} \otimes f_{(1)(2)}) \otimes f_{(2)}$, ou seja, o morfismo Δ^* é coassociativo segundo a Definição 2.5.

Para a counidade, queremos demonstrar que vale $\sum f_{(1)} \otimes i^*(f_{(2)}) = f = \sum f_{(1)} \otimes f_{(2)} \circ i(1_{\mathbb{k}})$ e, pela propriedade do produto tensorial, temos que:

$$\sum f_{(1)}(x)f_{(2)}(i(1_{\mathbb{k}})) = f \circ M(x \otimes i(1_{\mathbb{k}})) = f(x) \quad \text{e} \quad \sum f_{(1)}(i(1_{\mathbb{k}}))f_{(2)}(x) = f(M(i(1_{\mathbb{k}}) \otimes x)) = f(x).$$

Então $i^* : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{k}$ satisfaz o axioma de counidade. E a proposição a seguir está demonstrada:

Proposição 2.6. *Seja $(\mathbb{A}, M, i)$ uma álgebra. Então $(\mathbb{A}^*, \Delta_{\mathbb{A}^*}, \varepsilon_{\mathbb{A}^*})$, como definimos acima, é uma coálgebra.*

2.4 Biálgebras

Suponha que tenhamos um espaço vetorial $\mathbb{B}$ que possua uma estrutura de álgebra $(\mathbb{B}, M, i)$ e uma estrutura de coálgebra $(\mathbb{B}, \Delta, \varepsilon)$. Seja $\mathcal{X}$ um conjunto de geradores de $\mathbb{B}$ como álgebra, ou seja, um conjunto multiplicativo que gere por soma e produtos de elementos neste conjunto $\mathcal{X}$ o espaço vetorial $\mathbb{B}$. Ora, seria conveniente que tivessemos $\Delta(M(a \otimes b)) = \Delta(a)\Delta(b)$, pois assim, a partir desta definição e do valor de Δ nos demais elementos de $\mathcal{X}$, obteríamos o valor do morfismo para todo elemento da álgebra.

Proposição 2.7. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *As transformações Δ, ε são morfismos de álgebras;*
- (b) *As transformações M, i são morfismos de coálgebras.*

Demonstração. Assumindo que vale (a) e, se $\Delta : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}$ é um morfismo de álgebra; então temos que, como

$$(\mathbb{B} \otimes \mathbb{B}, (M \otimes M) \circ (I \otimes \tau \otimes I), i \otimes i, (I \otimes \tau \otimes I) \circ (\Delta \otimes \Delta), \varepsilon \otimes \varepsilon),$$

vale que

$$(M \otimes M) \circ (I \otimes \tau \otimes I) \circ (\Delta \otimes \Delta) = \Delta \circ M, \quad \Delta \circ i = i \otimes i, \quad (\varepsilon(a)\varepsilon(b)) = \varepsilon(a, b) \quad \text{e} \quad \varepsilon \circ i = I_{\mathbb{k}}.$$

Portanto temos que M, i são morfismos de coálgebras, ou seja, (a) $\Rightarrow$ (b). Deste modo, a recíproca é verdadeira. Logo (i) $\Leftrightarrow$ (ii). $\square$

Definição 2.9 (Biálgebra). Seja $\mathbb{B}$ um conjunto com as estruturas de álgebra $(\mathbb{B}, M, i)$ e coálgebra $(\mathbb{B}, \Delta, \epsilon)$ e que satisfaça um dos itens da Proposição 2.7 (e, portanto, ambos os itens). Então denomina-se $(\mathbb{B}, M, i, \Delta, \epsilon)$ de biálgebra.

Definição 2.10. Denomina-se de *Sub-biálgebra* um subconjunto S de uma biálgebra $(\mathbb{B}, M_{\mathbb{B}}, i_{\mathbb{B}}, \Delta_{\mathbb{B}}, \epsilon_{\mathbb{B}})$ tal que S é uma subálgebra e subcoálgebra e vale que $\Delta_S : S \rightarrow S \otimes S$ é um morfismo de álgebras como na Proposição 2.7.

Definição 2.11. Denomina-se o subconjunto I da álgebra $(\mathbb{A}, M_{\mathbb{A}}, i_{\mathbb{A}})$ de *ideal da biálgebra* $\mathbb{A}$, se S é um ideal e um coideal de $\mathbb{A}$.

Proposição 2.8. *Seja $\mathbb{H}$ uma biálgebra. Então $\mathbb{H}^*$ admite uma estrutura de biálgebra.*

Demonstração. Seja $\mathbb{H}$ uma biálgebra. Podemos definir uma estrutura de coálgebra (álgebra) em $\mathbb{H}^*$ a partir do morfismo M (resp. Δ), como vimos na Seção 2.3. Então vale que $\Delta \circ M = (M \otimes M) \circ (I \otimes \tau_{\mathbb{H}, \mathbb{H}} \otimes I) \circ (\Delta \otimes \Delta)$. Denotaremos $\Delta(f) = \sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ e $\Delta(g) = \sum g_{(1)} \otimes g_{(2)}$. E, assim, podemos calcular

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{B}^*} \circ M_{\mathbb{B}^*}(f \otimes g)(x \otimes y) &= \alpha(M_{\mathbb{B}^*}(f \otimes g) \circ M(x \otimes y)) \\ &= \alpha(\sum f(x_{(1)}y_{(1)})g(x_{(2)}y_{(2)})) \\ &= \alpha(\sum f_{(1)}(x_{(1)})f_{(2)}(y_{(1)})g_{(1)}(x_{(2)})g_{(2)}(y_{(2)})) \\ &= \sum f_{(1)}(x_{(1)})g_{(1)}(x_{(2)}) \otimes f_{(2)}(y_{(1)})g_{(2)}(y_{(2)}) \\ &= \alpha(f_{(1)} \otimes g_{(1)}) \circ M(\sum x_{(1)}x_{(2)}) \otimes \alpha(f_{(2)} \otimes g_{(2)}) \circ M(\sum y_{(1)}y_{(2)}) \\ &= (M_{\mathbb{B}^*} \otimes M_{\mathbb{B}^*}) \circ (I \otimes \tau_{\mathbb{B}^*, \mathbb{B}^*} \otimes I) \circ (\Delta_{\mathbb{B}^*} \otimes \Delta_{\mathbb{B}^*})(f \otimes g)(x \otimes y). \end{aligned}$$

Logo $\mathbb{H}^*$ é uma biálgebra. □

2.5 Produto de Convolução e Antípoda

Sejam uma álgebra $(\mathbb{A}, M, i)$ e uma coálgebra $(\mathbb{C}, \Delta, \epsilon)$. Definiremos uma transformação bilinear, que denomina-se *convolução*, no espaço vetorial $\text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{A})$ de transformações lineares de $\mathbb{C}$ para $\mathbb{A}$.

$$\begin{aligned} \star : \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{A}) \times \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{A}) &\longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{A}) \\ (f, g) &\longmapsto f \star g := M \circ (f \otimes g) \circ \Delta \end{aligned}$$

Usando a notação sigma de Sweedler, temos

$$(f \star g)(x) = \sum_x f(x_{(1)}) \cdot g(x_{(2)}) = f(x_{(1)}) \cdot g(x_{(2)}). \quad (2.3)$$

Proposição 2.9. *Sejam $\mathbb{A}$ uma álgebra, $\mathbb{C}$ uma coálgebra e $\mathbb{A}^*$, $\mathbb{C}^*$ são seus duais⁵. Então:*

(a) *A tripla $(\text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{A}), \star, i \circ \epsilon)$ é uma álgebra.*

⁵Calculamos na Seção 2.3.

(b) A transformação $\lambda_{\mathbb{C}, \mathbb{A}} : \mathbb{A} \otimes \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}, \mathbb{A})$ (onde $\lambda_{\mathbb{C}, \mathbb{A}}(a \otimes \alpha) = \alpha(x)a$ é tal que $x \in \mathbb{C}$ e $(a \otimes \alpha) \in \mathbb{A} \otimes \mathbb{C}^*$) é um morfismo de álgebras, onde $\mathbb{A} \otimes \mathbb{C}^*$ é o produto tensorial das álgebras $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}^*$ ⁶.

Demonstração. (a) Dados $f, g \in \text{Hom}(C, A)$, temos que $f \star g = M \circ (f \otimes g) \circ \Delta \in \text{Hom}(C, A)$. Basta verificar que, para todo $f \in \text{Hom}(C, A)$, segue que $f \star (i \circ \varepsilon) = M \circ (f \otimes (i \circ \varepsilon)) \circ \Delta = M \circ (I \otimes i) \circ (f \otimes I) \circ (I \otimes i \circ \varepsilon) \circ \Delta = f$.

(b) Queremos verificar que $\lambda_{C, A}(ab \otimes (\alpha \cdot \beta)) = \lambda_{C, A}(a \otimes \alpha) \star \lambda_{C, A}(b \otimes \beta)$ para isto faremos

$$\begin{aligned} \lambda_{C, A}(ab \otimes (\alpha \cdot \beta)) &= (\alpha \cdot \beta)(x)ab \\ &= \alpha(x_{(1)})\beta(x_{(2)})ab \\ &= M \circ (\alpha a \otimes \beta b) \circ \Delta(x) \\ &= \alpha a \star \beta b \\ &= \lambda_{C, A}(a \otimes \alpha) \star \lambda_{C, A}(b \otimes \beta) \end{aligned}$$

Por outro lado, observe que

$$\lambda_{C, A}(1 \otimes \varepsilon)(x) = \varepsilon(x)1 = \varepsilon(x)i(1) = i \circ \varepsilon(x).$$

Isto mostra que $\lambda_{C, A}$ é um morfismo de álgebra. □

Definição 2.12. Seja $(\mathbb{H}, M, i, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Um endomorfismo S de $\mathbb{H}$ é chamado de antípoda da biálgebra $\mathbb{H}$, se

$$S \star I_{\mathbb{H}} = i \circ \varepsilon = I_{\mathbb{H}} \star S.$$

Algebricamente, temos que estas relações se reduzem a expressões

$$\sum_{(x)} S(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon(x)1 = \sum_{(x)} x_{(1)}S(x_{(2)}). \quad (2.4)$$

Uma biálgebra não necessariamente tem uma antípoda. Mas, se uma biálgebra tiver uma antípoda, então esta será única. Basta notar que:

$$S = S \star i\varepsilon = S \star (I_{\mathbb{H}} \star S') = (S \star I_{\mathbb{H}}) \star S' = S'$$

Seja β_i uma base para a biálgebra $\mathbb{H}$. Então $S(\beta_i) = \sum_j c_j \beta_j$ e os coeficientes de estrutura da antípoda são $S_{\beta_i}^{\beta_j} = c_j$

Lema 2.1 (Radford). *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita e S sua antípoda sobre um corpo $\mathbb{k}$. Então S é bijetiva.*

Demonstração. Provaremos este lema por indução na dimensão da álgebra de Hopf. No caso onde $\dim \mathbb{H} = 1$, temos que a bijeção é trivialmente satisfeita. Suponha que, para toda álgebra de Hopf com $\dim \mathbb{H} < n$, vale que S é uma bijeção. Então, seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão igual à n , considere a álgebra de Hopf $\mathbb{H}' = S(\mathbb{H})$ com antípoda $S' = S|_B$. Se $B = A$, então $S = S'$ e

⁶Esta última conforme construímos na Seção 2.3.

temos que ela é sobrejetiva. Portanto S' é bijetiva. Caso $\mathbb{H} \neq \mathbb{H}'$, então $S' : \mathbb{H}' \rightarrow \mathbb{H}'$ é uma bijeção pela nossa hipótese de indução. Neste caso, teremos $\mathbb{H} = \ker S \oplus \mathbb{H}'$ como espaços vetoriais.

Seja $\pi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}'$ a projeção linear sobre $\mathbb{H}'$ com núcleo igual à $\ker S$. Como π, S e $\varepsilon = \varepsilon \circ S = \varepsilon$ se anulam em $\ker S$ e $\Delta(\ker S) \subset \ker S \otimes \mathbb{H} + \mathbb{H} \otimes \ker S$ (Observe que este conjunto se anula em $S \otimes S$ e $\ker(S \otimes S) = \ker S \otimes \mathbb{H} + \mathbb{H} \otimes \ker S$) concluímos que $\pi \star S = i \circ \varepsilon$ em $\ker S$. Como $\pi \equiv I_{\mathbb{H}}$ em $\mathbb{H}'$ e $\Delta(B) \subset B \otimes B$. Observe que, para todo $b \in \mathbb{H}'$, temos que $b = S(a)$ com $a \in \mathbb{H}$ e, portanto, $\Delta(b) = \Delta \circ S(a) = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}(a) \subset \mathbb{H}' \otimes \mathbb{H}'$ concluímos que $\pi \star S = i \circ \varepsilon$ em B . Portanto $\pi \star S = i \circ \varepsilon$ que significa que π é uma inversa à esquerda para S na convolução de álgebra $End_{\mathbb{K}}(A)$. Portanto $\pi = I_{\mathbb{H}}$ ou, equivalentemente, $\ker S = 0$. Mostramos que S é injetiva. Isto implica em S ser bijetiva como queríamos demonstrar. $\square$

2.6 Álgebras de Hopf: Biálgebras com Antípoda

Em essência, uma álgebra de Hopf trata-se de uma biálgebra com uma antípoda S . Nesta seção, finalmente caracterizaremos completamente as álgebras de Hopf.

Definição 2.13 (Álgebra de Hopf). Seja $(\mathbb{H}, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$. Dizemos que $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf, se $(\mathbb{H}, M, i, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra ⁷ e S uma antípoda ⁸.

Como vimos podemos obter outras estruturas duais a partir de álgebras (Proposição 2.6), coálgebras (Proposição 2.5) ou biálgebras (Proposição 2.8) pelas construções vistas nas respectivas seções. Isto ainda é verdade para álgebras de Hopf e, dentre outras coisas, verificaremos nesta seção a estrutura da álgebra de Hopf dual. Embora tenhamos reservado a Seção 4.2 para a maioria dos exemplos de álgebra de Hopf.

Proposição 2.10. Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita e S sua antípoda. Então a biálgebra $\mathbb{H}^*$ é uma álgebra de Hopf com o antiendomorfismo (antípoda) S^* .

Demonstração. O endomorfismo $S^* : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{H}^*$ é a transposta da antípoda S . Provemos que S^* é uma antípoda para H , verificando a Definição 2.12. Para todo $\alpha \in \mathbb{H}^*$, temos que

$$\left(\sum_{(\alpha)} \alpha_{(1)} S^*(\alpha_{(2)}) \right)(x) = \left(\sum_{(\alpha)(x)} \alpha_{(1)}(x_{(1)}) S^*(\alpha_{(2)})(x_{(2)}) \right) = \left(\sum_{(\alpha)(x)} \alpha_{(1)}(x_{(1)}) (\alpha_{(2)})(Sx_{(2)}) \right).$$

Pela definição da coálgebra dual, temos que $\sum_{(\alpha)} \alpha_{(1)}(x) \alpha_{(2)}(y) = \alpha(xy)$. Portanto:

$$\left(\sum_{(\alpha)} \alpha_{(1)} S^*(\alpha_{(2)}) \right)(x) = \alpha \left(\sum_{(x)} x_{(1)} Sx_{(2)} \right) = \alpha(i\varepsilon(x)) = \varepsilon^* i^*(\alpha)(x)$$

Analogamente, mostramos que $\sum_{(\alpha)} S^*(\alpha_{(1)}) \alpha_{(2)} = \varepsilon^* i^*$. Logo S^* é uma antípoda para o dual da álgebra de Hopf. $\square$

Agora, dada uma álgebra de Hopf $\mathbb{H}$ de dimensão finita, podemos definir $\mathbb{H}^*$. Faremos algumas construções deste tipo no Capítulo 4. Por exemplo, encontramos as álgebras de Hopf duais da álgebra de grupos, da álgebra de Sweedler, da álgebra de Taft e de algumas poucas álgebras quociente de polinômios. Agora estudaremos algumas propriedades da antípoda e as propriedades das álgebras de Hopf que este morfismo nos transmite.

⁷Vide Definição 2.9.

⁸Vide Definição 2.12.

Teorema 2.1. *Seja $(\mathbb{H}, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ uma álgebra de Hopf. Então:*

(a) *S é um morfismo de biálgebra de $\mathbb{H}$ para $\mathbb{H}^{op\ cop}$, i. e, temos que*

$$S(xy) = S(y)S(x), \quad (2.5)$$

para todo $x, y \in \mathbb{H}$, e

$$(S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{op} \circ S \quad (2.6)$$

(b) *As afirmações seguintes são equivalentes:*

(i) *Temos $S^2 = I_{\mathbb{H}}$;*

(ii) *Para todo $x \in \mathbb{H}$, temos $\sum_{(x)} S(x_{(2)})x_{(1)} = \varepsilon(x)1$;*

(iii) *Para todo $x \in \mathbb{H}$, temos $\sum_{(x)} x_{(2)}S(x_{(1)}) = \varepsilon(x)1$.*

(c) *Se $\mathbb{H}$ é comutativa e cocomutativa, então $S^2 = I_{\mathbb{H}}$*

Demonstração. Começaremos definindo as aplicações lineares

$$\nu(x \otimes y) = S(y)S(x) \quad \text{e} \quad \rho(x \otimes y) = S(xy),$$

onde $x, y \in \mathbb{H}$. Para provar o resultado, precisamos verificar que $\nu \equiv \rho$. Para isto, basta provar que $\rho \star M = M \star \nu = i \circ \varepsilon$, pois $\rho = \rho \star (i \circ \varepsilon) = \rho \star (M \star \nu) = (\nu \star M) \star \nu = (i \circ \varepsilon) \star \nu = \nu$.

$$\begin{aligned} (\rho \star M)(x \otimes y) &= \sum_{x \otimes y} \rho((x \otimes y)_{(1)})M((x \otimes y)_{(2)}) \\ &= \sum_{(x)(y)} \rho(x_{(1)} \otimes y_{(1)})M(x_{(2)} \otimes y_{(2)}) \\ &= \sum_{(x)(y)} S(x_{(1)}y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)} \\ &= \sum_{(x)(y)} S((xy)_{(1)})(xy)_{(2)} \\ &= i\varepsilon(xy) \end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
M \star v(x \otimes y) &= \sum_{x \otimes y} M((x \otimes y)_{(1)}) v((x \otimes y)_{(2)}) \\
&= \sum_{(x)(y)} M(x_{(1)} \otimes y_{(1)}) v(x_{(2)} \otimes y_{(2)}) \\
&= \sum_{(x)(y)} x_{(1)} y_{(1)} S(y_{(2)}) S(x_{(2)}) \\
&= \sum_{(x)} x_{(1)} \left(\sum_{(y)} y_{(1)} S(y_{(2)}) \right) x_{(2)} \\
&= \sum_{(x)} x_{(1)} (i\varepsilon(y)) x_{(2)} \\
&= i\varepsilon(y) i\varepsilon(x) \\
&= i(\varepsilon(x) \varepsilon(y)) \\
&= i\varepsilon(xy)
\end{aligned}$$

ou seja, as duas convoluções dão as mesmas respostas e, por isso, temos que

$$\begin{aligned}
\rho(x \otimes y) &= (\rho \star i\varepsilon)(x \otimes y) \\
&= \rho \star (M \star v(x \otimes y)) \\
&= (\rho \star M) \star v(x \otimes y) \\
&= (i\varepsilon \star v)(x \otimes y) \\
&= v(x \otimes y)
\end{aligned}$$

implica em $S(xy) = S(y)S(x)$, ou seja, S é um antiendomorfismo de álgebra. Aplicando $(I \star S)(x) = i \circ \varepsilon(x)$ a $x = 1$, obtemos $S(1) = 1$. Isto prova a equação (2.5). Queremos mostrar que $\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}$. Nos moldes da demonstração anterior, denominamos $\rho = \Delta \circ S$ e $v = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}$. Estas aplicações vão de $\mathbb{H}$ para $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. Desejamos mostrar que $\rho = v$. Isto segue da relação $\rho \star \Delta = \Delta \star v = (i \otimes i)\varepsilon$ que devemos verificar. Por um lado, pela Definição 2.5 na parte referente à counidade, temos que:

$$\begin{aligned}
(\rho \star \Delta)(x) &= \sum_{(x)} \Delta(S(x_{(1)})) \Delta(x_{(2)}) \\
&= \Delta\left(\sum_{(x)} S(x_{(1)}) x_{(2)}\right) \\
&= \Delta(i\varepsilon(x)) \\
&= (i(1) \otimes i(1))\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{H}$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
 (\Delta \star \mathbf{v})(x) &= \sum_{(x)} \Delta(x_{(1)})((S \otimes S) \circ \Delta^{op}(x_{(2)})) \\
 &= \sum_{(x)} (x_{(1)} \otimes x_{(2)})(S(x_{(4)}) \otimes S(x_{(3)})) \\
 &= \sum_{(x)} (x_{(1)}S(x_{(4)}) \otimes x_{(2)}S(x_{(3)})) \\
 &= \sum_{(x)} (x_{(1)}S(x_{(3)}) \otimes \epsilon(x_{(2)})1) \\
 &= \sum_{(x)} (x_{(1)}S(\epsilon(x_{(2)})x_{(3)}) \otimes 1) \\
 &= \sum_{(x)} (x_{(1)}S(x_{(2)}) \otimes 1) \\
 &= (\epsilon(x)1 \otimes 1) \\
 &= \epsilon(x)(1 \otimes 1) \\
 &= (i \otimes i)(\epsilon(x)).
 \end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, podemos mostramos que $\rho = \mathbf{v}$

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= (\rho \star (i \otimes i)(\epsilon(x))) \\
 &= (\rho \star (\Delta \star \mathbf{v}))(x) \\
 &= ((\rho \star \Delta) \star \mathbf{v})(x) \\
 &= (i \otimes i)(\epsilon(x)) \star \mathbf{v}(x) \\
 &= \mathbf{v}(x).
 \end{aligned}$$

Então podemos deduzir que

$$\begin{aligned}
 \epsilon(S(x)) &= \epsilon(S(\sum_{(x)} (\epsilon(x_{(1)})x_{(2)}))) \\
 &= \epsilon(\sum_{(x)} (\epsilon(x_{(1)})S(x_{(2)}))) \\
 &= \epsilon(i\epsilon(x)) \\
 &= \epsilon(x)\epsilon(i(1_{\mathbb{K}})) \\
 &= \epsilon(x)1_{\mathbb{K}}.
 \end{aligned}$$

Isto completa a demonstração do item (a).

(b) Provaremos primeiro que (ii) $\Leftrightarrow$ (i). Pela unicidade da inversa, é bastante mostrar que S^2 é a inversa à direita de S na convolução, do mesmo modo que I é a inversa de S . Agora usaremos a

expressão de (ii) para verificar isto.

$$\begin{aligned}
 (S \star S^2)(x) &= \sum_{(x)} S(x_{(1)}) S^2(x_{(2)}) \\
 &= S\left(\sum_{(x)} (x_{(1)}) S(x_{(2)})\right) \\
 &= S(\epsilon(x) 1) \\
 &= \epsilon(x) S(1) \\
 &= \epsilon(x) 1.
 \end{aligned}$$

Isto implica em $S \star S^2 = i \circ \epsilon$, portanto $S^2 = I$. Provemos a recíproca: Se $S^2 = I$, então

$$\begin{aligned}
 \sum_{(x)} S(x_{(2)}) x_{(1)} &= S^2\left(\sum_{(x)} S(x_{(2)}) x_{(1)}\right) \\
 &= S\left(\sum_{(x)} S(x_{(1)}) S^2(x_{(2)})\right) \\
 &= S\left(\sum_{(x)} S(x_{(1)}) I(x_{(2)})\right) \\
 &= S(\epsilon(x) 1) \\
 &= \epsilon(x) S(1).
 \end{aligned}$$

Podemos provar de modo análogo que (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

(c) Evocamos a Definição ?? da antípoda para mostrar que

$$\sum_{(x)} S(x_{(1)}) x_{(2)} = i(\epsilon(x)) = \sum_{(x)} x_{(1)} S(x_{(2)}),$$

para todo $x \in \mathbb{H}$. Isto implica em $S^2 = I$ pela parte (b) de (ii). Quando $\mathbb{H}$ é cocomutativa, então a segunda equação se torna

$$i \circ \epsilon(x) = \sum_{(x)} S(x_{(2)}) x_{(1)}. \quad (2.7)$$

A equação (2.7) implica outra vez que $S^2 = I$, em vista do item (3)(iii). $\square$

Denomina-se de **álgebra de Hopf involutória** uma álgebra de Hopf que tenha $S^2 = I$.

Obs.: 2.6.1. Na Seção 3.7, voltaremos a estudar as álgebras de Hopf involutórias e suas propriedades. Algumas álgebras involutórias importantes são as álgebras de grupos e a álgebra de Gelaki. Nos dedicamos a estudar a álgebra de grupos na Seção 4.2.1 verificaremos algumas de suas propriedades.

Como consequência do Teorema 2.1, temos o seguinte corolário:

Corolário 2.1. *Seja $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, M, i, \Delta, \epsilon, S)$ uma álgebra de Hopf. Então:*

$$\mathbb{H}^{op, cop} = (\mathbb{H}, M^{op}, i, \Delta^{op}, \epsilon, S)$$

é uma álgebra de Hopf e $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{op, cop}$ é um morfismo de álgebras de Hopf. Se, além disso, S for um isomorfismo com inversa S^{-1} , então

$$\mathbb{H}^{op} = (\mathbb{H}, M^{op}, i, \Delta, \varepsilon, S^{-1}) \quad \text{e} \quad \mathbb{H}^{cop} = (\mathbb{H}, M, i, \Delta^{op}, \varepsilon, S^{-1})$$

são álgebras de Hopf isomorfas e este isomorfismo é dado por S .

Demonstração. Seja $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{op\,cop}$ a antípoda. Queremos mostrar que S é um morfismo de álgebras de Hopf. É bastante para isto, observar que

$$S \circ M = M^{op} \circ (S \otimes S) \quad \text{e} \quad (S \otimes S) \circ \Delta^{op} = \Delta \circ S$$

Sendo assim temos que S é um morfismo das biálgebras $\mathbb{H}, \mathbb{H}^{op\,cop}$. Além disso, é trivial S comutar com ela própria e, portanto, S é um morfismo de álgebras de Hopf. Como vimos, se S for um isomorfismo com inversa S^{-1} , então S é um isomorfismo de biálgebras. Além disso, trocamos H por H^{op} , teremos que $S^{-1} : \mathbb{H}^{op} \rightarrow \mathbb{H}^{cop}$. Pois

$$S \circ M^{op} = M \circ (S \otimes S) \quad \text{e} \quad (S \otimes S) \circ \Delta = \Delta^{cop} \circ S$$

e S^{-1} , evidentemente, comuta com S^{-1} e, portanto, trata-se de um isomorfismo. $\square$

Um endomorfismo T de uma álgebra $\mathbb{H}$ é chamado um *skew-antípoda* (lit. antípoda enviesada) de $\mathbb{H}$, se vale

$$\sum_{(x)} T(x_{(2)})x_{(1)} = \varepsilon(x)1 = \sum_{(x)} x_{(2)}T(x_{(1)}).$$

Podemos afirmar ainda que, dada uma biálgebra $\mathbb{H}$, temos que T é uma antípoda para $\mathbb{H}^{op}$ e $\mathbb{H}^{cop}$. Pelo Corolário 2.1, vimos que, caso exista, S^{-1} é uma skew-antípoda. O próximo resultado nos permite afirmar, se uma função é uma antípoda do modo mais simples.

Lema 2.2. *Sejam $\mathbb{H}$ uma biálgebra e $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^{op}$ um antiendomorfismo de álgebra. Assuma que $\mathbb{H}$ é uma álgebra gerada por um subconjunto X tal que*

$$\sum_{(x)} S(x_{(1)})x_{(2)} = \varepsilon(x)1 = \sum_{(x)} x_{(1)}S(x_{(2)}),$$

para todo $x \in \mathcal{X}$. Então S é uma antípoda para $\mathbb{H}$.

Demonstração. Se $\mathbb{H}$ é gerado como álgebra por $\mathcal{X}$, então qualquer elemento z de $\mathbb{H}$ é da forma $\sum x_i \cdot y_i$, com $x_i \in \mathcal{X}$ e $y_i \in \mathbb{H}$. Deste modo, basta verificar que, se vale para $x \in \mathcal{X}$; então, para qualquer y , vale que $\sum_{(xy)} S((xy)_{(1)})(xy)_{(2)} = \varepsilon(xy)1 = \sum_{(xy)} (xy)_{(1)}S((xy)_{(2)})$. Vejamos a seguir:

$$\begin{aligned} \sum_{(xy)} (xy)_{(1)}S((xy)_{(2)}) &= \sum_{(x)(y)} x_{(1)}y_{(1)}S(x_{(2)}y_{(2)}) \\ &= \sum_{(x)(y)} x_{(1)}y_{(1)}S(y_{(2)})S(x_{(2)}) \\ &= \sum_{(x)} x_{(1)} \left(\sum_{(y)} y_{(1)}S(y_{(2)}) \right) S(x_{(2)}) \\ &= \sum_{(x)} x_{(1)}(\varepsilon(y)1)S(x_{(2)}) \\ &= \varepsilon(y) \sum_{(x)} x_{(1)}S(x_{(2)}) \\ &= \varepsilon(y)\varepsilon(x) \end{aligned}$$

Analogamente, podemos verificar

$$\begin{aligned}
\sum_{(xy)} S((xy)_{(1)})(xy)_{(2)} &= \sum_{(x)(y)} S(x_{(1)}y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)} \\
&= \sum_{(x)(y)} S(y_{(1)})S(x_{(1)})x_{(2)}y_{(2)} \\
&= \sum_{(y)} S(y_{(1)})\left(\sum_{(x)} S(x_{(1)})x_{(2)}\right)y_{(2)} \\
&= \sum_{(x)} S(y_{(1)})(\epsilon(x)1)y_{(2)} \\
&= \epsilon(y) \sum_{(y)} S(y_{(1)})y_{(2)} \\
&= \epsilon(y)\epsilon(x)
\end{aligned}$$

Nestas condições, concluímos que S é uma antípoda para álgebra. $\square$

Para verificar que $\mathbb{H}^*$ é uma álgebra de Hopf com as estruturas dual, precisamos verificar que S^* é uma antípoda para $\mathbb{H}^*$.

Proposição 2.11. *Sejam $\mathbb{H}^*$ uma biálgebra com a estrutura definida na Seção 2.4 e S uma antípoda para $\mathbb{H}$. Então S^* é uma antípoda para $\mathbb{H}^*$.*

Demonstração. Já verificamos na Seção 2.4 que no caso de dimensão finita vale que $\mathbb{H}^*$ é uma biálgebra. Basta verificar que S^* satisfaz o axioma da antípoda

$$(S^*(\alpha_{(1)})\alpha_{(2)})(x) = \sum \alpha_{(1)}(S(x_{(1)}))\alpha_{(2)}(x_{(2)}) = \alpha(S(x_{(1)})x_{(2)}) = \alpha(1)\epsilon(x)$$

e, para o outro lado da definição de antípoda, temos que

$$(\alpha_{(1)}S^*(\alpha_{(2)}))(x) = \sum \alpha_{(1)}(x_{(1)})\alpha_{(2)}(S(x_{(2)})) = \alpha(x_{(1)}S(x_{(2)})) = \alpha(1)\epsilon(x).$$

Logo S^* é uma antípoda para a álgebra de Hopf $\mathbb{H}^*$. $\square$

Definição 2.14. O elemento ‘**grouplike**’⁹ da coálgebra $(\mathbb{H}, \Delta, \epsilon)$, i.e., um elemento $x \neq 0$ tal que

$$\Delta(x) = x \otimes x. \quad (2.8)$$

O conjunto dos elementos ‘**grouplike**’ é definido por $G(\mathbb{H}) = \{x \in \mathbb{H} | x \in \mathbb{H}, \Delta(x) = x \otimes x\}$.

Este conjunto tem a propriedade abaixo.

Proposição 2.12. *Seja $\mathbb{H}$ uma biálgebra. Então $G(\mathbb{H})$ é um monoide da multiplicação de $\mathbb{H}$ com unidade $1_{\mathbb{H}}$. Se, além disso, $\mathbb{H}$ tem uma antípoda invertível S , então todo elemento ‘**grouplike**’ x tem um inverso em $G(\mathbb{H})$ que é $S(x)$. Consequentemente, $G(\mathbb{H})$ é um grupo.*

⁹Tradução: tipo grupo.

Demonstração. Sejam x, y um elemento do $G(\mathbb{H})$, então temos que $\Delta(M(x \otimes y)) = xy \otimes xy$ e, além disso, $1 = i_{\mathbb{H}}(1_{\mathbb{k}})$ é a unidade do conjunto $G(\mathbb{H})$, ou seja, $G(\mathbb{H})$ é um monoide. Para a segunda parte, temos que $\Delta(S(x)) = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}(x)$. Segue que, se $x \in G(\mathbb{H})$, então $S(x)$ pertence a $G(\mathbb{H})$ (porque $\Delta(S(x)) = S(x) \otimes S(x)$). Para completar a prova, basta verificar que $\varepsilon(x) = 1_{\mathbb{k}}$, quando x é grouplike e usamos o fato que $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(x) = x \otimes \varepsilon(x)$, que implica em $\varepsilon(x) = 1$. Portanto $xS(x) = S(x)x = i \circ \varepsilon(x) = 1$. Assim, para todo $x \in G(\mathbb{H})$, temos que $\exists x^{-1} = S(x) \in \mathbb{H}$ tal que $xS(x) = S(x)x = 1$. Logo $G(\mathbb{H})$ é um grupo. $\square$

Obs.: 2.6.2. Sejam x um elemento grouplike e y seu inverso em $G(\mathbb{H})$. Então podemos afirmar que, como S é bijetiva, existe um $b \in \mathbb{H}$ tal que $y = S(b)$. Como $xS(x) = xy = xS(b)$, então $x(S(x-b)) = 0$. Por outro lado, $S(x)xS(x-b) = S(x-b) = 0$. Portanto $S(x) = S(b)$, que implica em $x = b$. Logo $y = S(x)$.

Resta observar que, se $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então teremos como consequência o resultado a seguir segundo o [Kup96]

Proposição 2.13. A antípoda fixa a unidade e a counidade.

Demonstração. Seja $M(S \circ i \otimes I)(1_{\mathbb{k}} \otimes b)$. Então temos que, como $\mathbb{H}$ tem dimensão finita, S é invertível e, portanto, podemos dizer que $b = S(b_{(1)})$ (S é bijetiva). Assim temos que

$$\begin{aligned} M(S \circ i \otimes I)(1_{\mathbb{k}} \otimes b) &= M(S \circ i \otimes I)(1_{\mathbb{k}} \otimes S(b_{(1)})) \\ &= M \circ (S \otimes S) \circ (i \otimes I)(1_{\mathbb{k}} \otimes b_{(1)}) \\ &= S \circ M^{op}(i \otimes I)(1_{\mathbb{k}} \otimes b_{(1)}) \\ &= S \circ M(b_{(1)} \otimes i(1_{\mathbb{k}})) \\ &= S(b_{(1)}) \\ &= b. \end{aligned}$$

Analogamente, vemos que $M(i \circ S \otimes I)(b \otimes 1_{\mathbb{k}}) = b$. Portanto $S \circ i$ é uma identidade e segue que, como a unidade é única, $i = S \circ i$. Já para o morfismo counidade, temos $\sum \varepsilon(S(a_{(1)}))a_{(2)}$. Como S é invertível, podemos aplicar S a soma (S é injetiva). Assim temos que

$$\begin{aligned} S(\sum \varepsilon(S(a_{(1)}))a_{(2)}) &= \sum \varepsilon(S(a_{(1)}))S(a_{(2)}) \\ &= (\varepsilon \circ S \otimes I)(\sum a_{(1)} \otimes S(a_{(2)})) \\ &= \phi(\varepsilon \otimes I) \circ (S \otimes S) \circ \Delta(a) \\ &= \phi(\varepsilon \otimes I) \circ \Delta^{op}(S(a)) \\ &= \phi(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(S(a)) \\ &= S(a) \end{aligned}$$

Assim, aplicando S^{-1} aos dois lados da expressão acima, obtemos

$$\begin{aligned} \sum \varepsilon(S(a_{(1)}))a_{(2)} &= S^{-1}(S(\sum \varepsilon(S(a_{(1)}))a_{(2)})) \\ &= S^{-1}(S(a)) = a. \end{aligned}$$

E, analogamente, $\sum a_{(1)}\varepsilon(S(a_{(2)})) = a$. Portanto $\varepsilon \circ S$ é uma counidade e como vimos, na seção de coálgebra, a counidade é única, ou seja, $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Logo a antípoda fixa a unidade e a counidade. $\square$

2.7 Módulos e Comódulos

Pela dualização, obtemos a noção de comódulos sobre uma coálgebra. Seja, então, $(\mathbb{C}, \Delta, \epsilon)$ uma $\mathbb{k}$ -coálgebra conforme definimos na Definição 2.5.

Definição 2.15. Um $\mathbb{C}$ -comódulo à direita é um par (M, ρ) , onde M é um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial e $\rho : M \rightarrow M \otimes \mathbb{C}$ é um morfismo de $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais, onde $\mathbb{C}$ é uma coálgebra e os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes \mathbb{C} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \otimes I \\ M \otimes \mathbb{C} & \xrightarrow{I \otimes \Delta} & M \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & M \otimes \mathbb{C} \\ I \otimes \epsilon \swarrow & & \uparrow \rho \\ M \otimes \mathbb{k} & & M \\ \simeq \searrow & & \end{array}$$

Obs.: 2.7.1. Em outras palavras, os morfismos $\rho : M \rightarrow \mathbb{C} \otimes M$ e ϵ satisfazem as relações $(\Delta \otimes I) \circ \rho = (I \otimes \rho) \circ \rho$ e $(\epsilon \otimes I)\rho = \phi$, onde ϕ é o isomorfismo canônico (como podemos ver em Proposição A.4).

Definição 2.16. Um $\mathbb{C}$ -comódulo à esquerda é um par (M, ρ) , onde M é um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial e $\rho : M \rightarrow \mathbb{C} \otimes M$ é um morfismo de $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais, onde $\mathbb{C}$ é uma coálgebra e os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & \mathbb{C} \otimes M \\ \rho \downarrow & & \downarrow I \otimes \rho \\ \mathbb{C} \otimes M & \xrightarrow{\Delta \otimes I} & \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{C} \otimes M \\ \epsilon \otimes I \swarrow & & \uparrow \rho \\ \mathbb{k} \otimes M & & M \\ \simeq \searrow & & \end{array}$$

Obs.: 2.7.2 (A notação de comódulo:). Seja M um $\mathbb{C}$ -comódulo à direita com a aplicação estrutural $\rho : M \rightarrow M \otimes \mathbb{C}$. Então, para todo elemento $m \in M$, denotaremos

$$\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}. \quad (2.9)$$

Os elementos na primeira entrada do produto tensorial do lado direito da equação (2.9) são os $m'_{(0)}s \in M$ e os elementos na segunda do produto tensorial do lado direito da equação (2.9) são os $m'_{(1)}s \in \mathbb{C}$. Caso M seja um $\mathbb{C}$ -comódulo à esquerda com a aplicação estrutural $\rho : M \rightarrow \mathbb{C} \otimes M$, denotaremos

$$\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_{(0)}.$$

onde $m_{(-1)} \in \mathbb{C}$ e $m_{(0)} \in M$.

As relações que definem o comódulo à direita podem ser escritas usando a notação sigma de Heyneman-Sweedler adaptada abaixo.

$$\sum (m_{(0)})_{(0)} \otimes (m_{(0)})_{(1)} \otimes m_{(1)} = \sum m_{(0)} \otimes (m_{(0)})_1 \otimes (m_{(1)})_2 = \sum \varepsilon(m_{(1)}) m_{(0)} = m.$$

Definição 2.17. Um morfismo de $\mathbb{C}$ -comódulos $f : (M, \mu_M) \rightarrow (M', \mu_{M'})$ é uma aplicação $f : (M, \rho) \rightarrow (M, \rho')$ de M para M' , tal que

$$(I \otimes f) \circ \rho = \rho' \circ f.$$

Obs.: 2.7.3. Um morfismo de $\mathbb{C}$ -comódulos bijetivo é denominado isomorfismo de comódulos.

Da mesma forma que fazíamos antes para coálgebras, definiremos a coação à esquerda repetida por

$$\rho^1 := \rho \quad \text{e} \quad \rho^n := (I_{n-1} \otimes \rho) \circ \rho^n \quad (2.10)$$

Podemos provar que a coação repetida adotada desta forma é equivalente à $\rho^n := (I_s \otimes \rho \otimes I_{n-s})$, por indução finita, de forma análoga ao que fizemos para a multiplicação e comultiplicação.

Definição 2.18. Seja um subespaço vetorial N' de um $\mathbb{C}$ -comódulo (N, ρ_N) . N' é denominado um subcomódulo de (N, ρ) , se $\rho_N(N') = \rho_{N'}(N') \subset \mathbb{C} \otimes N'$.

Para colocar uma estrutura de comódulo no produto tensorial de dois comódulos, precisamos uma biálgebra estrutura.

Definição 2.19. Sejam $(\mathbb{H}, M, i, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra e (M, ρ_M) e (N, ρ_N) $\mathbb{H}$ -comódulo à esquerda. Então $(M \otimes N, \rho_{M \otimes N})$ é um $\mathbb{H}$ -comódulo à esquerda onde

$$\rho_{M \otimes N} = (\mu \otimes I_{M \otimes N})(I_{\mathbb{H}} \otimes \tau_{M, \mathbb{H}} \otimes I_N)(\rho_M \otimes \rho_N).$$

Desde que $\mathbb{H}$ seja uma biálgebra, a aplicação $\rho_{M \otimes N}$ dota o produto tensorial $M \otimes N$ com uma estrutura de $\mathbb{H}$ -comódulos.

É conveniente, usar para comódulos o mesmo tipo de notação que foi introduzida para coálgebras na Seção 2.5. Sejam $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra e (N, Δ, ε) um $\mathbb{C}$ -comódulo. Por convenção, escreveremos

$$\Delta_N(x) = \sum_{(x)} x_{\mathbb{C}} \otimes x_N,$$

para qualquer $x \in N$. A equação (2.9) é equivalente à

$$\sum_{(x)} (x_{\mathbb{C}})_{(1)} \otimes (x_{\mathbb{C}})_{(2)} \otimes x_N = \sum_{(x)} x_{\mathbb{C}} \otimes (x_N)_C \otimes (x_N)_N,$$

para todo $x \in N$, onde $x_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}$ e $x_N \in N$. Relação é equivalente a

$$\sum_{(x)} \varepsilon(x_{\mathbb{C}}) \otimes x_N = x$$

Uma aplicação linear $f : N \rightarrow N'$ é um morfismo de $\mathbb{C}$ -comódulos, se

$$\sum_{(x)} x_{\mathbb{C}} \otimes f(x_N) = \sum_{(x)} f(x)_{\mathbb{C}} \otimes f(x)_{N'}.$$

A partir deste ponto estamos assumindo que $(\mathbb{A}, M, i)$ é uma $\mathbb{k}$ -biálgebra conforme definimos na Seção 2.4. Trabalharemos com a noção de módulo sobre uma biálgebra.

Definição 2.20. Um $\mathbb{A}$ -módulo à direita é um par (X, μ) , onde X é um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial e $\mu : X \otimes \mathbb{A} \rightarrow X$ é um morfismo de $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais, tais que $\mathbb{A}$ é uma álgebra e os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} & \xrightarrow{\mu \otimes I} & X \otimes \mathbb{A} \\ \downarrow I \otimes M & & \downarrow \mu \\ X \otimes \mathbb{A} & \xrightarrow{\mu} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & X \otimes \mathbb{A} \\ & \nearrow I \otimes i & \downarrow \mu \\ X \otimes \mathbb{k} & \xleftarrow{\cong} & X \end{array}$$

Obs.: 2.7.4. Em outras palavras, os morfismos μ e ε satisfazem as relações $\mu \circ (I \otimes \mu) = \mu \circ (M \otimes I)$ e $\mu \circ (i \otimes I) = \phi$, onde $\phi : \mathbb{k} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ é o isomorfismo canônico.

Definição 2.21. Um $\mathbb{A}$ -módulo à esquerda é um par (X, μ) , onde X é um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial e $\mu : \mathbb{A} \otimes X \rightarrow X$ é um morfismo de $\mathbb{k}$ -espaços vetoriais tal que os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A} \otimes \mathbb{A} \otimes X & \xrightarrow{I \otimes \mu} & \mathbb{A} \otimes X \\ \downarrow M \otimes I & & \downarrow \mu \\ \mathbb{A} \otimes X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{A} \otimes X \\ & \nearrow i \otimes I & \downarrow \mu \\ \mathbb{k} \otimes X & \xleftarrow{\cong} & X \end{array}$$

Sejam $\mathbb{A}$ uma álgebra e M, N módulos sobre a álgebra $\mathbb{A}$. Temos que o produto tensorial $M \otimes N$ é uma $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$ módulo, onde $\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}$ tem a estrutura de álgebra do produto tensorial de álgebras. Basta ver que

$$\begin{aligned} ((a \otimes a')(b \otimes b'))(u \otimes v) &= (ab \otimes a'b')(u \otimes v) \\ &= abu \otimes a'b'v \\ &= (a \otimes a')((b \otimes b')(u \otimes v)), \end{aligned}$$

para todos $a, a', b, b' \in \mathbb{A}$ e $u \in M, v \in N$. Seja $(\mathbb{H}, M, i, \Delta, \varepsilon)$ uma biálgebra. Temos que Δ torna $M \otimes N$ um $\mathbb{A}$ -módulo. Basta ver que

$$\begin{aligned} (ab) \cdot (u \otimes v) &= \Delta(ab)(u \otimes v) \\ &= \Delta(a)\Delta(b)(u \otimes v) \\ &= \Delta(a)(b \cdot (u \otimes v)) \\ &= a \cdot (b \cdot (u \otimes v)), \end{aligned}$$

para todos $a, b \in \mathbb{A}, u \in M$ e $v \in N$. Observe que a estrutura necessária para que $M \otimes N$ seja um $\mathbb{A}$ -módulo é exatamente a requerida na definição de biálgebra. Observe que ε dota o espaço vetorial N , com uma estrutura trivial de $\mathbb{A}$ -módulo dada por $av = \varepsilon(a)v$.

2.8 Módulos Racionais

Suponha que sejam $\mathbb{C}$ uma coálgebra, $\mathbb{C}^*$ a álgebra dual de $\mathbb{C}$ e $\omega : M \rightarrow M \otimes \mathbb{C}$ qualquer morfismo que defina a coálgebra. Definiremos o morfismo $\psi_\omega : \mathbb{C}^* \otimes M \rightarrow M$ que defina a estrutura de módulo pela composta

$$\mathbb{C}^* \otimes M \xrightarrow{I \otimes \omega} \mathbb{C}^* \otimes M \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\tau \otimes I} M \otimes \mathbb{C}^* \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{I \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle} M \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{\phi} M$$

τ denota a aplicação ‘torção’ dada por $c^* \otimes m \rightarrow m \otimes c^*$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a valoração, que é definida por $c^* \otimes c \rightarrow \langle c^*, c \rangle$. (2.10)

Temos que ϕ é o isomorfismo canônico. Se $\omega(m) = \sum_i m_i \otimes c_i$, então $\psi_\omega(c^* \otimes m) = \phi \circ (I \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle) \circ (\tau \otimes I) \circ (I \otimes \omega)(c^* \otimes m) = \sum_i c^*(c_i)m_i$.

Definição 2.22. Seja (M, ω) um comódulo. Defina

$$\psi = \phi \circ (I \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle) \circ (\tau \otimes I) \circ (I \otimes \omega).$$

Proposição 2.14. Seja $\mathbb{C}$ uma coálgebra. Então (M, ω) é um $\mathbb{C}$ -comódulo à direita se e somente se (M, ψ_ω) é um $\mathbb{C}^*$ -módulo à esquerda.

Obs.: 2.8.1. Chamamos a atenção para o fato que $\mathbb{C}$, neste caso, não necessariamente tem dimensão finita.

Demonstração. Assuma que (M, ω) seja um $\mathbb{C}$ -comódulo. Denotemos por $c^* \cdot m = \psi_\omega(c^* \otimes m)$, temos $c^* \cdot m = \sum c^*(m_{(1)})m_{(0)}$, para todo $c^* \in \mathbb{C}^*$, $m \in M$. Primeiramente, temos que, pela definição de um comódulo,

$$1_{\mathbb{C}^*} \cdot m = \varepsilon \cdot m = \sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m,$$

ou seja, $1_{\mathbb{C}^*} = \varepsilon$ é uma unidade para a estrutura de módulo. Então, para $c^*, d^* \in \mathbb{C}^*$ e $m \in M$,

$$\begin{aligned} c^* \cdot (d^* \cdot m) &= c^* \cdot \left(\sum d^*(m_{(1)})m_{(0)} \right) \\ &= \sum d^*(m_{(1)})(c^* \cdot m_{(0)}) \\ &= \sum d^*(m_{(1)}) \sum c^*((m_{(0)})_{(1)})(m_{(0)})_{(0)} \\ &= \sum d^*(m_{(2)})c^*(m_{(1)})m_{(0)} \\ &= \sum (c^*d^*)(m_{(1)})m_{(0)} \\ &= (d^*c^*) \cdot m, \end{aligned}$$

mostra que M é um $\mathbb{C}^*$ -módulo à esquerda.

Assuma agora que (M, ψ_ω) é uma estrutura de $\mathbb{C}^*$ -módulo à esquerda. Mostraremos que $\omega(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ satisfaz a condição de comódulo. Na álgebra dual $\mathbb{C}^*$, temos que $1 = \varepsilon$ é a unidade para o módulo. Portanto, $\phi(1 \otimes m) = 1 \cdot m = \varepsilon \cdot m = m$, e segue que $\sum \varepsilon(m_{(1)})m_{(0)} = m$. Portanto a segunda condição para a definição de comódulo está verificada. Se $c^*, d^* \in \mathbb{C}^*$ e $m \in M$, então

$$\begin{aligned} (c^* d^*) \cdot m &= \sum (c^* d^*)(m_{(1)})m_{(0)} \\ &= \sum c^*((m_{(1)})_{(1)})d^*((m_{(1)})_{(2)})m_{(0)} \\ &= \phi(I \otimes c^* \otimes d^*)(I \otimes \Delta)\omega(m), \end{aligned}$$

onde $\phi : M \otimes \mathbb{k} \otimes \mathbb{k} \rightarrow M$ é um isomorfismo canônico, e I é a identidade de M . Podemos verificar ainda

$$\begin{aligned} c^* \cdot (d^* \cdot m) &= c^* \cdot (\sum d^*(m_{(1)})m_{(0)}) \\ &= \sum d^*(m_{(1)})(c^* \cdot m_{(0)}) \\ &= d^*(m_{(1)})c^*((m_{(0)})_{(1)})(m_{(0)})_{(0)} \\ &= \phi(I \otimes c^* \otimes d^*)(\omega \otimes I)\omega(m). \end{aligned}$$

Denotando

$$y = (I \otimes \Delta)\omega(m) - (\omega \otimes I)\omega(m) \in M \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$$

temos $(I \otimes c^* \otimes d^*)(y) = 0$ para todo $c^*, d^* \in \mathbb{C}^*$. Mas isto mostra que $y = 0$. Porque, se denotamos por $(e_i)_i$ uma base de $\mathbb{C}$, então podemos escrever $y = \sum_{i,j} m_{ij} \otimes e_i \otimes e_j$ para alguns $m_{ij} \in M$. Fixe i_0 e j_0 e considere as transformações lineares $e_i^* \in \mathbb{C}^*$, que não necessariamente formam uma base de $\mathbb{C}^*$, definida por $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ para qualquer j . Então $m_{i_0 j_0} = (I \otimes e_{i_0}^* \otimes e_{j_0}^*)(y) = 0$ e chegamos à $y = 0$. $\square$

Considere agora M um c^* -módulo à esquerda e $\phi_M : \mathbb{C}^* \otimes M \rightarrow M$ a aplicação que dá a estrutura de módulo de M . Definimos

$$\begin{aligned} \rho_M : M &\longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^*, M) \\ m &\longmapsto \rho_M(m)(c^*) = c^* m. \end{aligned}$$

Seja $j : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{**}, j(c)(c^*) = c^*(c)$ o mergulho canônico (não necessariamente bijetivo, contudo de $\mathbb{C}$ tem dimensão finita j é bijetiva), e definiremos outra aplicação dada por

$$\begin{aligned} f_M : M \otimes \mathbb{C}^{**} &\longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^*, M) \\ m \otimes c^{**} &\longmapsto f_M(m \otimes c^{**})(c^*) = c^{**}(c^*)m, \end{aligned}$$

que é um morfismo injetivo, pois

$$f_M(m_i \otimes c_i^{**}) = c_i^{**}(c^*)m_i = 0$$

e podemos encontrar vetores c_i^* tais que $c_j^{**}(c_i^*) = \delta_{ij}$. E assim, temos, para todo i , que $m_i = 0$, ou seja, $m_i \otimes c_i^{**} = 0$. Segue que a aplicação

$$\begin{aligned} \zeta_M : M \otimes \mathbb{C} &\longrightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^*, M) \\ m \otimes c &\longmapsto \zeta_M(m \otimes c) = f_M(I \otimes j)(m \otimes c) \end{aligned} \quad (2.11)$$

é injetiva, pois f_M, j são injetivas. É natural a definição $\mu_M(m \otimes c)(c^*) = c^*(c)m$ para $c \in \mathbb{C}$, $c^* \in \mathbb{C}^*$, $m \in M$.

Definição 2.23. O $\mathbb{C}^*$ -módulo à esquerda M é chamado *racional*, se

$$\rho_M(M) \subset \zeta_M(M \otimes \mathbb{C}),$$

onde ζ_M é a aplicação que definimos antes.

Obs.: 2.8.2. (1) M é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional se e somente se, para todo $m \in M$, existem duas famílias finitas de elementos $(m_i)_i \subset M$ e $(c_i)_i \subset \mathbb{C}$ tal que $c^*m = \sum_i c^*(c_i)m_i$ para qualquer $c^* \in \mathbb{C}^*$.

(2) Se M é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional e para um elemento $m \in M$, existem dois pares de famílias $(m_i)_i, (c_i)_i$ e $(m'_j)_j, (c'_j)_j$ como em (1); então $\sum_i m_i \otimes c_i = \sum_j m'_j \otimes c'_j$, tendo em vista que $\zeta_M(\sum_i m_i \otimes c_i) = \zeta_M(\sum_j m'_j \otimes c'_j)$ e que ζ_M é injetivo.

Podemos escrever $\rho'(m) = \zeta_M^{-1}(\rho_M(m)) = \sum m_i \otimes c_i$ (Isto faz sentido porque $\rho_M(m)$ está, por definição, na imagem de ζ_M). Como vimos nas observações, a aplicação ρ'_M está bem definida. Em consequência, segue a proposição abaixo.

Proposição 2.15. Se M é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional, então (M, ρ') é um $\mathbb{C}$ -comódulo à direita.

Demonstração. É fácil verificar que a estrutura original da aplicação $\psi: \mathbb{C}^* \otimes M \rightarrow M$ é a mesma composição abaixo

$$\mathbb{C}^* \otimes M \xrightarrow{I \otimes \rho'} \mathbb{C}^* \otimes M \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\tau \otimes I} M \otimes \mathbb{C}^* \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{I \otimes \langle \cdot, \cdot \rangle} M \otimes \mathbb{k} \xrightarrow{\cong} M$$

que é exatamente a definição do morfismo ψ , conforme pode ser visto na Definição 2.22, todavia com $\omega = \rho'$. Pois, como M é racional, existe $\sum c_i \otimes m_i \in \mathbb{C} \otimes M$ tal que $\rho(m) = c^*(c_i)m_i$. Assim, tendo em vista que ψ é uma estrutura de $\mathbb{C}^*$ -módulo à esquerda, segue que ρ nos dá uma estrutura de $\mathbb{C}$ -comódulo à direita. $\square$

Obs.: 2.8.3. As Proposição 2.14 e Proposição 2.15 juntas estabelecem uma bijeção entre o conjunto dos $\mathbb{C}$ -comódulos à direita (M, ω) com os $\mathbb{C}^*$ -módulos racionais (M, ψ_ω) , i.e., se ρ' é definida a partir do módulo racional (M, ψ_ω) , então $\rho = \omega$ pela Proposição 2.15. Por outro lado, dado um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional (M, ψ) , se ρ é a estrutura de $\mathbb{C}$ -comódulo definida a partir de (M, ψ) como na Proposição 2.14, então $\psi = \psi_\rho$.

Segue o teorema chave dos módulos racionais. Módulos racionais serão de grande importância no estudo das integrais definidas no Capítulo 2.

Teorema 2.2. Sejam $\mathbb{C}$ uma coálgebra e $L, M, \bar{M}$ $\mathbb{C}^*$ -módulos à esquerda com $M, \bar{M}$ sendo módulos racionais. Então:

- (i) $N \subset M$ é um $\mathbb{C}^*$ -submódulo à esquerda $\Leftrightarrow \rho'(N) \subset N \otimes \mathbb{C}$, i.e., N é submódulos racional. Em particular, todo submódulo de um módulo racional é ainda racional.
- (ii) Um submódulo cíclico de um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional tem dimensão finita.
- (iii) Se M é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional e N é um $\mathbb{C}^*$ -submódulo de M , então M/N é um módulo racional.

- (iv) Se $(M_i)_{i \in I}$ é uma família de $\mathbb{C}^*$ -módulos racionais, então $\bigoplus_{i \in I} M_i$ é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional.
- (v) Todo $\mathbb{C}^*$ -módulo L tem um único submódulo racional maximal que é igual à soma de todos submódulos racionais de L e é também igual à $\rho_L^{-1}(L \otimes \mathbb{C})$, onde $\rho_L : L \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}^*, L)$ é o descrito ρ_L acima para o módulo L . Estes submódulos maximal é chamado L^{rat} .
- (vi) $f : M \rightarrow \bar{M}$ é um morfismo de módulo $\Leftrightarrow f$ é um morfismo de comódulo. Mais precisamente, L^{rat} é a soma de todos submódulos racionais de L .

Além disso, a correspondência $L \rightarrow L^{rat}$ define um funtor exato à esquerda $\text{Rat} : \mathbb{C}^* \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^* \mathcal{M}$.

Demonstração. Para o item (i): Para todo $n \in N$, seja $\rho(n) = \zeta(\sum n_i \otimes c_i)$, então $\rho'(n) = \sum n_i \otimes c_i$, $n_i \in N$, $c_i \in \mathbb{C}$. Assim, para todo $c^* \in \mathbb{C}^*$, temos que $c^* \cdot n = \sum \langle c^*, c_i \rangle n_i$ pela definição de ρ' como vimos na observação 1.8.1. Lembramos que o ρ' dá uma estrutura de comódulo para um módulo racional, como vimos na Proposição 2.15. Por isso, ρ' também dá uma estrutura de comódulo para N . Se temos que $(\rho' \otimes I) \circ \rho'(m) = (I \otimes \Delta) \circ \rho'(m)$, para todo $m \in M$, i.e., M é um módulo racional; então, em particular, valerá para todo $n \in N \subset M$ que $(\rho' \otimes I) \circ \rho'(n) = (I \otimes \Delta) \circ \rho'(n)$. Portanto, pela Proposição 2.14, $c^* \cdot n \in N$ e N é um submódulo à esquerda. Reciprocamente, assumamos que $N \subset M$ é um submódulo. Suponha, por contradição, que $\rho'(n) \notin N \otimes \mathbb{C}$, para algum $n \in N$, e escreva $\rho(n) = \sum m_i \otimes c_i \in M \otimes \mathbb{C}$. Podemos assumir que os c_i são linearmente independente e que $m_1 \notin N$. Escolha $c^* \in \mathbb{C}^*$ com $\langle c^*, c_i \rangle = \delta_{i1}$, então $c^* \cdot n = \sum m_i \langle c^*, c_i \rangle = m_1 \notin N$. Isto implicaria em N não ser um $\mathbb{C}^*$ -submódulo de M . Portanto, $\rho'(N) \subset N \otimes \mathbb{C}$. Logo o item (i) está demonstrado.

Para o item (ii): Seja $m \in M$, Seja $\rho(m) = \sum_{i=1}^s m_i \otimes c_i$. Então $c^* \cdot m = \sum_{i=1}^s m_i \langle c^*, c_i \rangle \in \sum_{i=1}^s \mathbb{k} m_i$, ou seja, $\langle m \rangle \subset \mathbb{k} m_1 + \dots + \mathbb{k} m_s$ está contido em subespaço vetorial de M de dimensão finita e, portanto, tem dimensão finita sobre $\mathbb{k}$.

Para o item (iii): Seja M/N o quociente em questão, $\pi : M \rightarrow M/N$ é a projeção natural. Seja T a composição abaixo

$$M \xrightarrow{\rho'} M \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\pi \otimes I} M/N \otimes \mathbb{C}$$

Então, pelo Apêndice A seção extra de álgebras e coálgebra, existe uma única estrutura de comódulo $\bar{\rho}$ para M/N que torna $\pi : M \rightarrow M/N$ uma aplicação de comódulos pelo item (b) da Proposição A.10. Isto implica, pela teoria de módulos, que $\bar{\rho}$ induz uma estrutura de $\mathbb{C}^*$ -módulo em M/N que é a mesma como o quociente da estrutura de $\mathbb{C}^*$ -módulo em M/N .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & M \otimes \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & \searrow T & \downarrow \pi \otimes I \\ M/N & \xrightarrow{\bar{\rho}} & M/N \otimes \mathbb{C} \end{array}$$

Assim como existe $\sum m_i \otimes c_i$ tal que $\sum c^*(c_i) m_i$, então existe $\sum c_i \otimes \bar{m}_i \in \mathbb{C} \otimes M/N$ é tal que $c^* \cdot \bar{m} = c^*(c_i) \otimes \bar{m}_i$, ou seja, M/N é racional. Isto demonstra o item (iii).

Para o item (iv): Seja $q_j : M_j \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} M_i$ uma inclusão canônica de M_j na soma direta, e $m = \sum_{i \in \mathcal{J}} q_i(m_i)$ um elemento de $\bigoplus_{i \in \mathcal{J}} M_i$. Seja $\mathcal{F}$ um subconjunto finito de $\mathcal{J}$. Para todo $i \in \mathcal{F}$,

o módulo M_i é racional, portanto existe duas famílias de elementos $(c_{ij})_{i \in \mathcal{F}} \subset \mathbb{C}$ e $(m_{ij})_{i \in \mathcal{F}} \subset M_i$, tal que $c^* \cdot m_i = \sum_{i \in \mathcal{F}} c^*(c_{ij})m_{ij}$ para qualquer $c^* \in \mathbb{C}^*$. Então

$$c^* \cdot m = \sum_{i \in \mathcal{F}} q_i(c^* \cdot m_i) = \sum_{i \in \mathcal{F}} \sum_{j \in F_i} q_i(c^*(c_{ij})m_{ij}) = \sum_{i \in F} \sum_{j \in F_i} c^*(c_{ij})q_i(m_{ij})$$

e, portanto, existe $\sum c_{ij} \otimes q_i(m_{ij})$ tal que $\zeta_M(\sum c_{ij} \otimes q_i(m_{ij})) = c^* \cdot m$ e agora $\bigoplus_{i \in I} M_i$ é racional pela parte (1) da observação 1.8.1.

Para o item (v): seja $\psi : \mathbb{C}^* \otimes L \rightarrow L$ a aplicação estrutural do $\mathbb{C}$ -módulo. Defina $L^{rat} = (\rho'_L)^{-1}(L \otimes \mathbb{C}) \subset L$ como sendo o conjunto maximal tal que L^{rat} tal que $\rho'(M) \subset M \otimes \mathbb{C}$. Clamamos que L^{rat} é um submódulo racional.

Para $\alpha \in L^{rat}$, seja $\rho'_L(\alpha) = \sum \alpha_i \otimes c_i \in L \otimes \mathbb{C}$. Pela relação de ρ'_L para a ação de $\mathbb{C}^*$, $c^* \cdot \alpha = \sum_i \alpha_i \langle c^*, c_i \rangle$ para todo $c^* \in \mathbb{C}^*$. Portanto

$$\begin{aligned} (c^* d^*) \cdot \alpha &= \sum \alpha_i \langle c^* d^*, c_i \rangle \\ &= \sum \alpha_i \langle c^* \otimes d^*, \Delta(c_i) \rangle \\ &= \sum \alpha_i \langle c^*, c_{i(1)} \rangle \langle d^*, c_{i(2)} \rangle \\ &= \sum \alpha_i \langle c^*, (\langle d^*, c_{i(2)} \rangle c_{i(1)}) \rangle \\ &= \sum \alpha c^*(c_{i(1)}) d^*(c_{i(2)}). \end{aligned}$$

A relação de ρ'_L , que satisfaz a ação de $\mathbb{C}^*$ sobre M , permite que, para todo $c^* \in \mathbb{C}^*$, $c^* \cdot \alpha = \sum \alpha_i \langle c^*, c_i \rangle$. Então temos que $\rho'_L(\alpha) = \sum \alpha_i \otimes c_i$. Desde que L seja um módulo, a expressão acima é também igual à $c^* \cdot (d^* \cdot \alpha)$.

$$c^*(d^* \cdot m) = c^*(\sum d^*(c_i)m_i) = \sum d^*(c_i)c^*(c_{ij})\alpha_{ij}.$$

Portanto, com $d^* \cdot \alpha$ desempenhando o papel de α , obtemos

$$\begin{aligned} \rho'_L(d^* \cdot \alpha) &= \rho'_L(\sum_i d^*(c_i)\alpha_i) \\ &= \sum_i d^*(c_i)\rho'_L(\alpha_i) \\ &= \sum_i \sum_j d^*(c_i)(\alpha_{ij} \otimes c_{ij}) \\ &= \sum_i \sum_{(c_i)} d^*(c_{i(2)})(\alpha_i \otimes c_{i(1)}) \\ &= \sum_i \sum_{(c_i)} \alpha_i \otimes [\langle d^*, c_{i(2)} \rangle c_{i(1)}] \\ &= \sum \alpha_j \otimes d_j \in L \otimes \mathbb{C}, \end{aligned}$$

onde $\alpha_j \in L$ e $d_j \in \mathbb{C}$. Portanto, para todo $d^* \in \mathbb{C}^*$, $d^* \cdot \alpha \in (\rho'_L)^{-1}(L \otimes \mathbb{C}) = L^{rat}$, i.e., L^{rat} é um submódulo de L . Podemos verificar, neste ponto, que

$$\rho_L(L^{rat}) \subset L^{rat} \otimes \mathbb{C}$$

(já paralelamente a prova da segunda parte de (i) acima). Pela definição de ρ_L e $\rho_{L^{rat}}$, portanto segue que $\rho_{L^{rat}} = \rho_L|_{L^{rat}} : L^{rat} \rightarrow L^{rat} \otimes \mathbb{C}$. Assim L^{rat} é um submódulo racional de L . Suponha

que T seja um submódulo de L racional, então o morfismo $\rho'_T : T \rightarrow T \otimes \mathbb{C}$. Pelas definições de ρ_T, ρ_L e dos mergulhos $T \otimes \mathbb{C} \subset L \otimes \mathbb{C} \subset \text{Hom}(\mathbb{C}^*, L)$, segue que $\rho_L|_T = \rho_T : T \rightarrow T \otimes \mathbb{C}$. Assim $\rho_L(T) \subset T \otimes \mathbb{C} \subset L \otimes \mathbb{C}$ e, por definição de L^{rat} , temos que $T \subset L^{rat}$. Portanto L^{rat} é o único submódulo maximal racional, então $L^{rat} = \sum_T T$ é a soma de todos submódulos racionais de L onde T é um submódulo racional de L .

Para o item (vi): Suponha que f é um morfismo de comódulos. Com a estrutura de comódulo de M e N , se $m \in M, n \in N, c^* \in \mathbb{C}^*$,

$$c^* \cdot m = \sum_{(m)} m_{(0)} \langle c^*, m_{(1)} \rangle, \quad c^* \cdot n = \sum_{(n)} n_{(0)} \langle c^*, n_{(1)} \rangle.$$

Aquele f será um morfismo de comódulos. Isto implica em

$$\sum_{(f(m))} f(m)_{(0)} \otimes f(m)_{(1)} = \sum_{(m)} f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$$

Assim

$$\begin{aligned} c^* \cdot f(m) &= \sum_{(f(m))} f(m)_{(0)} \langle c^*, f(m)_{(1)} \rangle \\ &= \sum_{(m)} f(m_{(0)}) \langle c^*, m_{(1)} \rangle \\ &= \sum_{(m)} f(m_{(0)}) \langle c^*, m_{(1)} \rangle \\ &= f(c^* \cdot m), \end{aligned}$$

tal que f é um morfismo de módulos. Se f é um morfismo de módulos, então igualando $c^* \cdot f(m)$ e $f(c^* \cdot m)$ mostramos que

$$\sum_{(f(m))} f(m)_{(0)} \langle c^*, f(m)_{(1)} \rangle = \sum_{(m)} f(m_{(0)}) \langle c^*, m_{(1)} \rangle,$$

para todos $c^* \in \mathbb{C}^*$. Como observado na prova da parte (v), temos que, para qualquer $m \in M$, o lado esquerdo da expressão anterior implica em

$$\rho_N(f(m)) = \sum_{(m)} f(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$$

e, pelo lado direito, temos $\rho_N(f(m)) = (f \otimes I) \circ \rho_M(m)$. Assim f é um morfismo de comódulo. Isto completa a prova do teorema. $\square$

Corolário 2.2. *Todo módulo racional finitamente gerado tem dimensão finita.*

Demonstração. Este resultado é consequência direta do item (ii) da Proposição 2.14; pois, se o submódulo M' é um finitamente gerado, $M' = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}^* \cdot x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^s m_{ij} \langle c^*, c_i \rangle \in \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s \mathbb{k} \cdot m_{ij}$, ou seja, M' tem dimensão finita sobre $\mathbb{k}$. $\square$

Exemplo 2.8.1. Seja $\mathbb{C}$ um espaço vetorial com base $\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Defina $\Delta(c_n) = \sum_{i=0}^n c_i \otimes c_{n-i}$ e $\varepsilon(c_n) = \delta_{0,n}$. Então $(\mathbb{C}, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra. Seja x^i definido por $x^i(c_j) = \delta_{i,j}$ em $\mathbb{C}^*$. Note que $\varepsilon = 1_{\mathbb{C}^*} = x^0$ está em $\mathbb{C}^*$ e que $\langle x^i x^j, c_n \rangle = \delta_{i+j,n}$ tal que $x^i x^j = x^{i+j}$. Então $\mathbb{C}^* = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i x^i \mid \lambda_i \in \mathbb{k} \right\}$ e isto dá um isomorfismo entre $\mathbb{C}^*$ e a série de potência de uma variável¹⁰.

Seja L um $\mathbb{C}^*$ -módulo. Então L é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional se e somente se, para cada $\alpha \in L$, existe um n dependente em α , onde

$$0 = (x^1)^n \cdot \alpha = x^n \cdot \alpha.$$

Assim $\mathbb{C}^*$ não é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional à esquerda, que também pode ser visto pelo fato do módulo cíclico gerado por 1 ter dimensão finita.

2.9 Módulos de Hopf

Nesta seção, $\mathbb{H}$ será sempre uma álgebra de Hopf com antípoda S e iremos definir o espaço covariante, que terá muita importância na Seção 3.3.

Definição 2.24. Um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial M é chamado de um $\mathbb{H}$ -módulo de Hopf à direita, se $\mathbb{H}$ tem uma estrutura de $\mathbb{H}$ -módulo à direita (a ação de um elemento $h \in \mathbb{H}$ em um elemento $m \in M$ será denotada por $m \cdot h$) e a estrutura de um $\mathbb{H}$ -comódulo à direita, dada pela aplicação $\rho : M \rightarrow M \otimes \mathbb{H}$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ tal que, para todo $m \in M$, $h \in \mathbb{H}$

$$\rho(m \cdot h) = \sum m_{(0)} h_1 \otimes m_{(1)} h_2.$$

Obs.: 2.9.1. Diagramaticamente, podemos interpretar a definição da seguinte maneira

$$\begin{array}{ccccc} M \otimes \mathbb{H} & \xrightarrow{\quad \cdot \quad} & M & \xrightarrow{\quad \rho \quad} & M \otimes \mathbb{H} \\ \downarrow \rho \otimes \Delta & & & & \uparrow \cdot \otimes M_{\mathbb{H}} \\ M \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} & \xrightarrow{\quad I \otimes \tau \otimes I \quad} & M \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} & & \end{array}$$

Obs.: 2.9.2. É fácil verificar que $M \otimes \mathbb{H}$ tem uma estrutura de módulo à direita sobre $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ ¹¹, definida por $(m \otimes h)(g \otimes p) = mg \otimes hp$, para todo $m \otimes h \in M \otimes \mathbb{H}$, $g \otimes p \in \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. Considerando o morfismo de álgebra $\Delta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, vemos que $M \otimes \mathbb{H}$ se torna um $\mathbb{H}$ -módulo à direita. Esta estrutura é dada por $(m \otimes h)g = \sum mg_1 \otimes hg_2$ para todos $m \otimes h \in M \otimes \mathbb{H}$, $g \in \mathbb{H}$. Com esta estrutura, observamos que a compatibilidade das relações da definição de módulos de Hopf significa que ρ é um morfismo de $\mathbb{H}$ -módulos à direita. Existe uma interpretação dual desta relação. Considere

¹⁰Observe que as cardinalidades de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ não são as mesmas.

¹¹Aqui $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ tem a estrutura de álgebra no produto tensorial de álgebras.

$\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ como o produto tensorial com estrutura de coálgebras. Então $M \otimes \mathbb{H}$ tem uma estrutura natural de comódulo à direita sobre $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, definida por $m \otimes h \mapsto \sum m_{(0)} \otimes h_1 \otimes m_{(1)} \otimes h_2$. A multiplicação $\mu : \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ da álgebra $\mathbb{H}$ é um morfismo de coálgebra; então, pela restrição dos escalares $M \otimes \mathbb{H}$, torna-se um $\mathbb{H}$ -comódulo com $m \otimes h \mapsto \sum m_{(0)} \otimes h_1 \otimes m_{(1)} h_2$. Então a compatibilidade das relações da definição precedente pode ser expressada pelo fato que a aplicação $\phi : M \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, que é uma estrutura de $\mathbb{H}$ -módulo à direita de M , é um morfismo de $\mathbb{H}$ -comódulo.

Podemos definir uma categoria tendo como objetos os $\mathbb{H}$ -módulos de Hopf à direita e como morfismos entre dois tais objetos todas as aplicações lineares que são morfismos de $\mathbb{H}$ -módulos à direita e morfismos de $\mathbb{H}$ -comódulos à direita. Esta categoria, que denotamos por $\mathcal{M}_{\mathbb{H}}^{\mathbb{H}}$, será chamada de **categoria de $\mathbb{H}$ -módulos de Hopf à direita**. É claro que, nesta categoria, um morfismo é um isomorfismo se e somente se é bijetivo.

Exemplo 2.9.1. Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial. Então definimos em $\mathbb{V} \otimes \mathbb{H}$ uma estrutura de $\mathbb{H}$ -módulos, para todo $v \in \mathbb{V}$, $h, g \in \mathbb{H}$, por $(v \otimes h)g = v \otimes hg$ e uma estrutura de $\mathbb{H}$ -comódulo à direita dada pela aplicação $\rho : \mathbb{V} \otimes \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, $\rho(v \otimes h) = \sum v \otimes h_1 \otimes h_2$ para todo $v \in \mathbb{V}$, $h \in \mathbb{H}$. Então $\mathbb{V} \otimes \mathbb{H}$ tornar-se um $\mathbb{H}$ -módulo de Hopf à direita com estas duas estruturas. Portanto

$$\begin{aligned} \rho((v \otimes h)g) &= \rho(v \otimes hg) \\ &= \sum v \otimes (hg)_1 \otimes (hg)_2 \\ &= \sum v \otimes h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 \\ &= \sum ((v \otimes h_1)g_1) \otimes h_2 g_2 \\ &= \sum (v \otimes h)_{(0)} g_1 \otimes (v \otimes h)_{(1)} g_2 \end{aligned}$$

provando a compatibilidade das relações.

Mostraremos que os exemplos de $\mathbb{H}$ -módulos de Hopf do exemplo anterior são (sobre o isomorfismo) todos $\mathbb{H}$ -módulos de Hopf. Precisaremos para isto da definição abaixo; que, além disso, servirá para o Capítulo 2 e nos permitirá demonstrar um dos principais resultados que envolve integrais, que diz respeito a relação das integrais com a semissimplicidade da álgebra.

Definição 2.25. Seja M um $\mathbb{H}$ -comódulo à direita com estrutura de comódulo dada pela aplicação $\rho : M \rightarrow M \otimes \mathbb{H}$. O conjunto

$$M^{co\mathbb{H}} = M' = \{m \in M \mid \rho(m) = m \otimes 1\}$$

é um subespaço vetorial de M , que é chamado o espaço dos covariantes de M .

Exemplo 2.9.2. Seja $\mathbb{H}$ dada a estrutura de $\mathbb{H}$ -comódulo, que é induzida por $\Delta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. Então $\mathbb{H}^{co\mathbb{H}} = \mathbb{k} \cdot 1$, onde 1 é o elemento identidade de $\mathbb{H}$. Portanto, se $h \in \mathbb{H}^{co\mathbb{H}}$, então $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2 = h \otimes 1$. Aplicando ε na primeira posição obtemos $h = \varepsilon(h) \cdot 1 \in \mathbb{k} \cdot 1$. Reciprocamente, se $h = \alpha \cdot 1$ para um escalar α , então $\Delta(h) = \alpha \cdot 1 \otimes 1 = h \otimes 1$.

Obs.: 2.9.3. Para todo $c \in \mathbb{k}$ e $m, m' \in M$, temos que $\rho(c \cdot m) = c\rho(m) = c(m \otimes 1) = (cm \otimes 1)$ e $\rho(m + m') = \rho(m) + \rho(m') = m \otimes 1 + m' \otimes 1 = (m + m') \otimes 1$, ou seja, M' é um subespaço vetorial.

Teorema 2.3 (O teorema fundamental dos módulos de Hopf). *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf e M uma $\mathbb{H}$ -Hopf módulo à direita. Então a aplicação*

$$\begin{aligned} f : M' \otimes \mathbb{H} &\longrightarrow M, \\ m' \otimes h &\longmapsto m' \cdot h \end{aligned}$$

definida por

$$f(m' \otimes h) = m' \cdot h,$$

para todo $m' \in M'$ e $h \in \mathbb{H}$, é um isomorfismo de módulos de Hopf¹².

Demonstração. Denotamos a aplicação dando a estrutura de comódulo de M por $p : M \rightarrow M \otimes \mathbb{H}$, $\rho(m) = \sum m_{(0)} \otimes m_{(1)}$. Considere a aplicação $g : M \rightarrow M$, que é definida por $g(m) = \sum m_{(0)} S(m_{(1)})$, para todo $m \in M$. Se $m \in M$, temos

$$\begin{aligned} \rho(g(m)) &= \rho(\sum m_{(0)} S(m_{(1)})) \\ &= \sum (m_{(0)})_{(0)} (S(m_{(1)}))_1 \otimes (m_{(0)})_{(1)} (S(m_{(1)}))_2 \\ &= \sum (m_{(0)})_{(0)} S((m_{(1)})_2) \otimes (m_{(0)})_{(1)} S((m_{(1)})_1) \\ &= \sum m_{(0)} S(m_{(3)}) \otimes m_{(1)} S(m_{(2)}) \\ &= \sum m_{(0)} S(m_{(2)}) \otimes (m_{(1)})_1 S((m_{(1)})_2) \\ &= \sum m_{(0)} S(m_{(2)}) \otimes \varepsilon(m_{(1)}) 1 \\ &= \sum m_{(0)} S(m_{(2)}) \varepsilon(m_{(1)}) \otimes 1 \\ &= \sum m_{(0)} S((m_{(1)})_2 \varepsilon((m_{(1)})_1)) \otimes 1 \\ &= \sum m_{(0)} S(m_{(1)}) \otimes 1 \\ &= g(m) \otimes 1, \end{aligned}$$

que mostra que $g(m) \in M^{coH}$, para qualquer $m \in M$. Então faz sentido definir a aplicação $F : M \rightarrow M^{coH} \otimes \mathbb{H}$ por $F(m) = \sum g(m_{(0)}) \otimes m_{(1)}$, para qualquer $m \in M$. Mostraremos que F é o inverso de f . Portanto, se $m \in M^{coH}$ e $h \in \mathbb{H}$, temos

$$\begin{aligned} Ff(m \otimes h) &= F(mh) \\ &= \sum g((mh)_{(0)}) \otimes (mh)_{(1)} \\ &= \sum g(m_{(0)h_1}) \otimes m_{(1)}h_2 \\ &= \sum g(mh_1) \otimes h_2 \\ &= \sum (mh_1)_{(0)} S((mh_1)_{(1)}) \otimes h_2 \\ &= \sum m_{(0)}(h_1)_1 S(m_{(1)}(h_1)_2) \otimes h_2 \\ &= \sum m(h_1)_1 S((h_1)_2) \otimes h_2 \\ &= \sum m \varepsilon(h_1) \otimes h_2 \\ &= m \otimes h \end{aligned}$$

¹²Em $M' \otimes \mathbb{H}$, consideramos a estrutura de $\mathbb{H}$ -módulo de Hopf definida como no exemplo anterior para o espaço vetorial M' .

portanto $Ff = Id$. Reciprocamente, se $m \in M$, então

$$\begin{aligned}
 fF(m) &= f(\sum m_{(0)})S(m_{(1)} \otimes m_{(2)}) \\
 &= \sum m_{(0)}S(m_1)m_{(2)} \\
 &= \sum m_{(0)}S((m_{(1)})_1)(m_{(1)})_2 \\
 &= \sum m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)}) \\
 &= m,
 \end{aligned}$$

que mostra que $fF = Id$. Resta mostrar que f é um morfismo de $\mathbb{H}$ -módulos de Hopf, i.e., é um morfismo de $\mathbb{H}$ -módulos à direita e um morfismo de $\mathbb{H}$ -comódulos à direita. A primeira afirmação é clara, desde que

$$f((m \otimes h)h') = f(m \otimes hh') = mhh' = f(m \otimes h)h'.$$

Primeiro, mostramos que f é um morfismo de $\mathbb{H}$ -comódulo à direita. Temos, portanto, que provar o diagrama a seguir

$$\begin{array}{ccc}
 M^{coH} \otimes \mathbb{H} & \xrightarrow{f} & M \\
 \downarrow I \otimes \Delta & & \downarrow \rho \\
 M^{coH} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} & \xrightarrow{f \otimes} & M \otimes \mathbb{H}
 \end{array}$$

é comutativo. Isto é imediato, desde que

$$\begin{aligned}
 (\rho f)(m \otimes h) &= \rho(mh) \\
 &= \sum mh_1 \otimes h_2 \quad (\text{desde que } m \in M^{coH}) \\
 &= \sum (f \otimes I)(m \otimes h_1 \otimes h_2) \\
 &= (f \otimes I)(I \otimes \Delta)(m \otimes h).
 \end{aligned}$$

Logo o teorema está demonstrado. □

Integrais e Cointegrais

Neste Capítulo, definiremos o conjunto dos elementos integrais de uma álgebra de Hopf. Este subespaço vetorial de $\mathbb{H}$ é unidimensional, se $\dim \mathbb{H} < \infty$. Para podermos definir uma estrutura de álgebra de Hopf em $\mathbb{H}^*$, consideraremos $\dim \mathbb{H} < \infty$ e, portanto, $\mathbb{H}^* \simeq \mathbb{H}$. Como invariante, as integrais são muito importantes no estudo da estrutura e da classificação das álgebras de Hopf; conforme veremos no decorrer deste Capítulo. Os morfismos das álgebras de Hopf dão origem à uma estrutura gráfica e esta estrutura herda as propriedades das álgebras de Hopf. Toda a teoria básica das integrais deste Capítulo usa como referência [Swe69a]; contudo a parte principal deste Capítulo se encontra nos artigos [Kup96], [Kup89], [KR00], [Rad94] e na tese de PhD [Sou02].

3.1 Ações de Álgebras de Hopf

Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf. Então defini-se a **ação transposta** em $\mathbb{H}^*$ por:

Definição 3.1. $(a \rightharpoonup p)(b) = p(ba)$ e $(p \leftharpoonup a)(b) = p(ab)$,

para todos $a, b \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$. Da mesma forma, para álgebra $\mathbb{H}^*$, pode-se definir a **ação transposta** em $\mathbb{H}$ (usando $\mathbb{H}^{**} = \mathbb{H}$) descrita por:

Definição 3.2. $p \rightharpoonup a = \sum a_{(1)} p(a_{(2)})$ e $a \leftharpoonup p = \sum p(a_{(1)}) a_{(2)}$,

para todos $p \in \mathbb{H}^*$ e $a \in \mathbb{H}$.

Ora, queremos ressaltar que estas ações são, na realidade, equivalentes entre si.

$$\begin{aligned} (p \rightharpoonup a)(q) &= a(qp) \\ &= qp(a) \\ &= \sum q(a_{(1)}) p(a_{(2)}) \end{aligned}$$

e, analogamente, $(p \leftharpoonup a)(q) = q(a_{(2)}) p(a_{(1)})$. Assim, como $(p \rightharpoonup a)(q) = q(p \rightharpoonup a)$, temos que $p \rightharpoonup a = \sum p(a_{(2)}) a_{(1)}$, ou seja, as definições se confundem à nível de seus duais. Por curiosidade, veremos que

$$\begin{aligned} (a \rightharpoonup p)(b) &= (\sum p_{(1)} a(p_{(2)}))(b) \\ &= \sum p_{(1)}(b) p_{(2)}(a) \\ &= (ab)(p). \end{aligned}$$

Seja $a \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$. Definimos $r(a), r(p) \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H})$ por $r(a)(b) = ba$ e $r(p)(b) = b \leftharpoonup p$ para $b \in \mathbb{H}$ e, similarmente, defini-se $l(a), l(p) \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H})$ por $l(a)(b) = ab$ e $l(p)(b) = p \rightharpoonup b$.

Seja $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ um endomorfismo de álgebra e seja $g : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ um antiendomorfismo de álgebra. Então defini-se a **ação adjunta** como abaixo:

Definição 3.3. $a \rightharpoonup_{f,g} b = \sum f(a_{(2)})bg(a_{(1)})$ e $b \leftharpoonup_{f,g} a = \sum g(a_{(2)})bf(a_{(1)})$, para $a, b \in \mathbb{H}$.

Como, para $a, b \in \mathbb{H}$, $ab = a \rightharpoonup_{l,\varepsilon} b$ e $ba = b \leftharpoonup_{l,\varepsilon} a$, então as multiplicações à esquerda e direita em $\mathbb{H}$ são ações adjuntas.

Para a Seção 3.4.2, precisaremos passar pela seguinte definição:

Definição 3.4. $p \triangleleft a = \sum S(a_{(1)}) \rightharpoonup p \leftharpoonup a_{(2)}$ e $a \triangleright p = \sum a_{(1)} \rightharpoonup p \leftharpoonup S(a_{(2)})$.

O espaço $\mathbb{H}^*$ é um $\mathbb{H}$ -módulo à esquerda via a ação transposta ‘torcida’ pelo antiendomorfismo S de álgebras. Este módulo à esquerda é, portanto, definido por:

Definição 3.5. $(a \rightharpoonup p)(b) = p(S(a)b)$, para todos $a, b \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$.

3.2 Integrais e Cointegrais

Dada uma biálgebra $(\mathbb{H}, M, i, \Delta, \varepsilon)$ de dimensão finita (Denotaremos, neste Capítulo, sempre $1 = 1_{\mathbb{H}} = i(1_{\mathbb{k}})$). A aumentação será denotado por $\langle \cdot, 1 \rangle : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{k}$, de modo que tem-se $\langle h, 1 \rangle = h(1)$ e, segundo vemos em [Swe69a], define-se uma integral como se segue:

Definição 3.6. $\lambda_l \in \mathbb{H}^*$ é chamado integral à esquerda de $\mathbb{H}^*$, se $M_{\mathbb{H}^*}(h^* \otimes \lambda_l) = h^* \cdot \lambda_l = h^*(1)\lambda_l$.

Obs.: 3.2.1. Ressaltamos que, em $(\mathbb{H}^*, M_{\mathbb{H}^*}, i_{\mathbb{H}^*}, \Delta_{\mathbb{H}^*}, \varepsilon_{\mathbb{H}^*})$ temos que $\varepsilon_{\mathbb{H}^*}(h^*) = h^*(1)$, segundo o que vimos na Seção 2.3. Assim pode-se dizer que $h^* \lambda_l = \varepsilon_{\mathbb{H}^*}(h^*) \lambda_l$ e, neste sentido, as integrais e cointegrais são análogas como veremos.

Seja $\mathcal{M}$ qualquer $\mathbb{H}^*$ -módulo à esquerda tal que $h^* \cdot m = h^*(1)m$ para todo $h^* \in \mathbb{H}^*$ e $m \in \mathcal{M}$. Então $\mathcal{M}$ é um $\mathbb{H}^*$ -módulo racional. Verifica-se isto facilmente, pela definição da estrutura de comódulo em $\mathcal{M}$, dada por $\psi : m \rightarrow m \otimes 1 \subset \mathcal{M} \otimes \mathbb{H}$. Defina $\phi : \mathcal{M} \otimes \mathbb{H}^* \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{H}^*, \mathcal{M})$ de modo que, para todo c^* , temos que $\phi(m \otimes 1) = c^*(1)m \in \text{Hom}(\mathbb{H}^*, \mathbb{M})$. É fácil ver que ϕ é injetivo. Assim $\rho = \phi \circ \psi$ é um mergulho definido por $\rho(m) = c^*(1)m = \zeta_{\mathcal{M}}(m \otimes 1)$, para todo $c^* \in \mathbb{H}^*$, ou seja, temos que $\rho(\mathcal{M}) \subset \zeta_{\mathcal{M}}(\mathcal{M} \otimes \mathbb{H})$, onde $\zeta_{\mathcal{M}}$ conforme foi definida em 2.11, mostra que $\mathcal{M}$ é um $\mathbb{H}^*$ -módulo racional. verifica-se facilmente que a ação do $\mathbb{H}^*$ -módulo definida a partir de ψ corresponde a ação original do módulo. Em particular, o conjunto

$$\int_l = \{\lambda \in \mathbb{H}^* \mid h^* \cdot \lambda = h^*(1)\lambda \quad \forall x \in \mathbb{H}^*\},$$

que denomina-se integral à esquerda, é um ideal à esquerda (além de ser um módulo racional) de $\mathbb{H}^*$. Assim $\int_l \subset \mathbb{H}^{*rat}$ é chamado o *espaço das integrais*.

Analogamente, definiremos também a integral à direita e conjunto destes elementos, denotado por:

Definição 3.7. $\lambda_r \in \mathbb{H}^*$ é chamado integral à direita, se $M_{\mathbb{H}^*}(\lambda_r \otimes h^*) = \lambda_r \cdot h^* = h^*(1)\lambda_r$.

$$\int_r = \{\lambda \in \mathbb{H}^* \mid \lambda \cdot h^* = h^*(1)\lambda \quad \forall x \in \mathbb{H}^*\}$$

Proposição 3.1. *Suponha que $\mathbb{H}$ é uma biálgebra e que x é uma integral à direita em $\mathbb{H}^*$. Então, para todo $a \in \mathbb{H}$ e $g^*, h^* \in \mathbb{H}^*$, valem as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad \langle g^*, a \leftarrow h^* \rangle = \langle h^* g^*, a \rangle;$$

$$(ii) \quad \langle x, h \leftarrow h^* \rangle = h^*(1) \langle x, h \rangle.$$

Demonstração. (i) Para todos $g^*, h^* \in \mathbb{H}^*$ e $h \in \mathbb{H}$, temos

$$\begin{aligned} \langle g^*, h \leftarrow h^* \rangle &= \sum_{(h)} \langle g^*, \langle h^*, h_{(1)(2)} \rangle \rangle \\ &= \langle g^*, \sum_{(h)} \langle h^*, h_{(1)} \rangle h_{(2)} \rangle \\ &= \sum_{(h)} \langle h^*, h_{(1)} \rangle \langle g^*, h_{(2)} \rangle \\ &= \langle h^* g^*, h \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Pela relação (i), temos que

$$\begin{aligned} \langle x^*, h \leftarrow h^* \rangle &= \langle h^* x, h \rangle \\ &= \langle h^*(1)x, h \rangle \\ &= h^*(1) \langle x, h \rangle. \end{aligned}$$

Logo segue o resultado da proposição como queríamos. $\square$

Uma biálgebra não necessita ter um elemento integral não-nulo. Em particular, como $\int \subset \mathbb{H}^{*,rat}$, se $\mathbb{H}^*$ não tem ideais racionais, então ela não terá integrais não-nulas. Como vimos no Teorema 2.2, $\mathbb{H}^{*,rat}$ é o submódulo racional maximal que é a soma dos submódulos racionais de $\mathbb{H}^*$. Citamos aqui um exemplo de uma tal biálgebra, no Capítulo 3, a álgebra de Hopf divided power ¹.

Se $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então $\mathbb{H}^*$ e $\mathbb{H}^{**}$ são álgebras de Hopf de dimensão finita e o isomorfismo é linear de $\mathbb{H}$ para $\mathbb{H}^{**}$, definido por

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H}^{**} \\ v &\longmapsto v^{**}, \end{aligned}$$

onde $\iota(v) = v^{**} \in \mathbb{H}^*$, e vale, para todo $u^* \in \mathbb{H}^*$, que $v^{**}(u^*) = u^*(v)$. Basta verificar que $(\iota \circ S)(x)(u^*) = (S^{**} \circ \iota)(x)(u^*)$. Começemos verificando que

$$\begin{aligned} (\iota \circ S)(x)(u^*) &= \iota(S(x))(u^*) \\ &= (S(x))^{**}(u^*) \\ &= u^*(S(x)). \end{aligned}$$

¹Para entender este exemplo veja Seção 4.2.3 correspondente no próximo Capítulo.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 (S^{**} \circ \iota(x))(u^*) &= (S^{**}(x^{**}))(u^*) \\
 &= (x^{**} \circ (S^*))(u^*) \\
 &= x^{**}(S^*(u^*)) \\
 &= x^{**}(u^* \circ S) \\
 &= u^*(S(x))
 \end{aligned}$$

portanto ι é uma aplicação de álgebra de Hopf. Tomamos o isomorfismo $\mathbb{H} \cong \mathbb{H}^{**}$ como uma identificação dos espaços e, nestas condições, poderemos generalizar o conceito e definir a *cointegral* em $\mathbb{H}$.

Definição 3.8. $\Lambda_l \in \mathbb{H}$ é chamado integral à esquerda, se $M(h \otimes \Lambda_l) = h\Lambda_l = \varepsilon(h)\Lambda_l$.

$$\int_l^* = \{\Lambda \in \mathbb{H} \mid h\Lambda = \varepsilon(h)\Lambda \ \forall x \in \mathbb{H}\}$$

Definição 3.9. $\Lambda_r \in \mathbb{H}$ é chamado integral à direita, se $M(\Lambda_r \otimes h) = \Lambda_r h = \varepsilon(h)\Lambda_r$.

$$\int_r^* = \{\Lambda \in \mathbb{H} \mid \Lambda h = h(1)\Lambda \ \forall x \in \mathbb{H}\}$$

Assim fica claro que os conceitos de integral e cointegral são análogos e a ordem na qual foram

apresentados tem como única motivação a ordem em que foram definidos no livro [Swe69a]. Desta maneira que definimos, temos que $\Lambda_r : \mathbb{k} \mapsto \int \subset \mathbb{H}$, definido por $\Lambda_r(1) = \Lambda_r \in \mathbb{H}$, é um morfismo sobrejetivo sobre o conjunto das integrais. A partir da Seção 3.4, onde definiremos os tensores integrais, faremos uso constante das aplicações Λ_r e Λ_l .

3.3 A Estrutura de $\mathbb{H}^{*rat}$ e Sua Relação Com a Integral da Álgebra de Hopf

Nesta seção, abordaremos a semissimplicidade e cosemissimplicidade (vide a Definição 3.11) e as suas relações com as integrais e cointegrais das álgebras de Hopf de dimensão finita. Veremos, no decorrer desta seção que: se para uma cointegral $\Lambda \neq 0$ temos $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$, então a álgebra de Hopf é semissimples. Analogamente, se para uma integral $\lambda \neq 0$ temos $\lambda(1) \neq 0$, então a álgebra de Hopf é cosemissimples, ou seja, $\mathbb{H}^*$ é semissimples.

Sabemos que $\mathbb{H}^{*rat}$ é um $\mathbb{H}^*$ -módulo racional à esquerda. E isto induz uma estrutura de $\mathbb{H}$ -comódulo à direita em $\mathbb{H}^{*rat}$, conforme definimos na Seção 2.8, dada por $\rho : \mathbb{H}^{*rat} \rightarrow \mathbb{H}^{*rat} \otimes \mathbb{H}$, $\rho(h^*) = \sum h_{(0)}^* \otimes h_{(1)}^*$ tal que $g^* h^* = \sum g^*(h_{(1)}^*) h_{(0)}^*$ para todo $g^* \in \mathbb{H}^*$.

Obs.: 3.3.1. Seja o subespaço vetorial $\mathbb{H}^{*rat}$. Então denotaremos o morfismo $\rho : \mathbb{H}^{*rat} \rightarrow \mathbb{H}^{*rat} \otimes \mathbb{H}$ definido acima por

$$\rho(h) = h_{(2)} \otimes h_{(1)}, \quad (3.1)$$

onde $h_{(2)} \in \mathbb{H}^{*rat}$, $h_{(1)} \in \mathbb{H}$.

Lema 3.1. Para todo $h \in \mathbb{H}, g^*, h^* \in \mathbb{H}^*$, temos

$$g^* \cdot (h^* \leftharpoonup h) = \sum g^*(h_{(1)}^* h_2)(h_{(0)}^* \leftharpoonup h_1) \quad (3.2)$$

Demonstração. Mostraremos que ambos os lados da igualdade, quando substituirmos $b \in \mathbb{H}$, dão no mesmo. Portanto ‘ $\cdot$ ’ denota a multiplicação em $\mathbb{H}^*$ induzida por Δ .

$$\begin{aligned} (\sum g^*(h_{(1)}^* h_2)(h_{(0)}^* \leftharpoonup h_1))(b) &= \sum g^*(h_{(1)}^* h_2)h_{(0)}^*(bS(h_1)) \\ &= \sum (h_2 \rightharpoonup g^*)(h_{(1)}^*)h_{(0)}^*(gS(h_1)) \\ &= \sum ((h_2 \rightharpoonup g^*)h^*)(gS(h_1)) \\ &= \sum (h_2 \rightharpoonup g^*)((gS(h_1))_1)h^*((gS(h_1))_2) \\ &= \sum (h_2 \rightharpoonup g^*)(g_1S(h_1)_1)h^*(g_2S(h_1)_2) \\ &= \sum (h_3 \rightharpoonup g^*)(g_1S(h_2))h^*(g_2S(h_1)) \\ &= \sum g^*(g_1S(h_2)h_3)h^*(g_2S(h_1)) \\ &= \sum g^*(g_1\varepsilon(h_2))h^*(g_2S(h_1)) \\ &= \sum g^*(g_1)h^*(g_2S(h)) \\ &= (g^*(h^* \leftharpoonup h))(g). \end{aligned}$$

Isto prova a relação que queríamos. Além disso, mostramos que $h^* \leftharpoonup h \in \mathbb{H}^{*rat}$. E, além disso, temos que

$$\rho(h^* \leftharpoonup h) = \sum h_{(0)}^* \leftharpoonup h_1 \otimes h_{(1)}^* h_2,$$

i.e., $\mathbb{H}^{*rat}$ é um $\mathbb{H}$ -módulo de Hopf à direita. □

Obs.: 3.3.2. Como comentamos anteriormente, a convolução coincide $\langle f \cdot g, a \rangle$, i.e.,

$$\langle f \cdot g, a \rangle = \sum_{(a)} f(a_{(1)})g(a_{(2)}).$$

Definição 3.10. Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf com antípoda. Definiremos $\mathbb{H}^\square := \mathbb{H}^{*rat}$.

Seja $\mathbb{H}^\square$ um $\mathbb{H}^*$ -módulo racional, então $\mathbb{H}$ é um $\mathbb{H}$ -comódulo à direita. Seja $\rho: \mathbb{H}^\square \rightarrow \mathbb{H}^\square \otimes \mathbb{H}$ a estrutura de comódulos e, portanto, como escrevemos usualmente, $\sum_{(h^\square)} h_{(0)}^\square \otimes h_{(1)}^\square = \rho(h^\square)$, ρ

faz de $\mathbb{H}^\square$ um $\mathbb{H}$ -módulo de Hopf.

Teorema 3.1. A álgebra $\mathbb{H}^\square$ é um $\mathbb{H}$ -submódulo à direita de $\mathbb{H}^*$ sobre $\leftharpoonup$. Além disso, $\leftharpoonup$ e ρ tornam $\mathbb{H}^\square$ um $\mathbb{H}$ -módulo de Hopf.

Demonstração. Basta estabelecer, para todos $g^* \in \mathbb{H}^*$, $h^\square \in \mathbb{H}^\square$ e $a \in \mathbb{H}$, que

$$g^* \cdot (h^\square \leftharpoonup a) = \sum_{(h^\square, (a))} (h_{(0)}^\square \leftharpoonup a_{(1)}) \langle g^*, h_{(1)}^\square a_{(2)} \rangle. \quad (3.3)$$

Por hipótese, isto é verdade. Então a equação (3.3) implica em

$$\rho(h^\square \leftharpoonup a) = \sum_{(h^\square, (a))} (h_{(0)}^\square \leftharpoonup a_{(1)}) \otimes h_{(1)}^\square a_{(2)}. \quad (3.4)$$

Assim, $h^\square \leftharpoonup a \in \rho^{-1}(\mathbb{H}^* \otimes \mathbb{H}) = \mathbb{H}^{*rat} \equiv \mathbb{H}^\square$, veja o Teorema 2.2 item (v). Além disso, a equação (3.4) é justamente a condição da definição dos módulos de Hopf. Agora, pelo Lema 3.1 e pela equação (3.2),

$$g^* \cdot (h^\square \leftharpoonup a) = \sum_{(a)} ((a_{(2)} \rightharpoonup g^*) \cdot h^\square) \leftharpoonup a_{(1)}.$$

Desde $h^\square \in \mathbb{H}^\square$, por um lado, é exatamente

$$\sum_{(a), (h^\square)} (h_{(0)}^\square \langle a_{(2)} \rightharpoonup g^*, h_{(1)}^\square \rangle) \leftharpoonup a_{(1)} = \sum_{(a), (h^\square)} (h_{(0)}^\square \leftharpoonup a_{(1)}) \langle g^*, h_{(1)}^\square a_{(2)} \rangle$$

tal que equação (3.3) é verdade. Completando a prova deste teorema. $\square$

Pelo Teorema 2.3, $\mathbb{H}^\square = (\mathbb{H}^\square)' \otimes H$ visto como módulos de Hopf, onde $(\mathbb{H}^\square)' = \{h^\square \in H^\square \mid \rho(h^\square) = h^\square = h^\square \otimes 1\}$. Observe que isto é exatamente $\{h^* \in \mathbb{H}^* \mid g^* \cdot h^* = \pi(g^*)h^*, \forall g^* \in \mathbb{H}^*\}$, que implica em $(\mathbb{H}^\square)' = \int$. Explicitamente, vemos pelo Teorema 2.3 que o isomorfismo $\int \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}^\square$ é dado por $x \otimes h \rightarrow (x \leftharpoonup h)$ e segue que:

Teorema 3.2. *Seja $\mathbb{H}$ uma Hopf álgebra. Então temos que:*

$$\mathbb{H}^{*rat} \simeq \int \otimes \mathbb{H} \quad e \quad \int = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{H}^{*rat} = 0.$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ O isomorfismo é mostrado no Teorema 2.3 pelo teorema fundamental dos módulos de Hopf, e o fato de $\int = 0$ implica em $\mathbb{H}^{*rat} = 0$.

$(\Leftarrow)$ Se $\mathbb{H}^{*rat} = 0$; então, como $\int \subset \mathbb{H}^{*rat}$, temos que $\int = 0$. $\square$

Antes de dar uma caracterização teórica de $\mathbb{H}^\square$, introduziremos a ação do módulo transposto. Dados $\mathbb{A}$ uma álgebra e M um $\mathbb{A}$ -módulo à direita. Então $M^* = Hom_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ pode ser feito através de um $\mathbb{A}$ -módulo à esquerda via $\langle a \cdot m^*, m \rangle \equiv \langle m^*, m \cdot a \rangle$.

Neste caso, diz-se que M^* tem uma *estrutura de módulo transposto*. Em particular, se $\mathbb{C}$ é uma coálgebra e M um $\mathbb{C}$ -comódulo à esquerda, então M tem uma estrutura de $\mathbb{C}^*$ -módulo induzida pela estrutura de $\mathbb{C}$ -comódulo. E temos o seguinte:

Lema 3.2. *Segundo a definição acima, se M tem dimensão finita, então o $\mathbb{C}^*$ -módulo M^* (com a estrutura transposta) é um $\mathbb{C}^*$ -módulo racional.*

Demonstração. Seja $\lambda : M \rightarrow \mathbb{C} \otimes M$ a estrutura de comódulo de M . Como M supostamente tem dimensão finita, então existe um isomorfismo linear $Hom(M, \mathbb{C} \otimes M) \cong M^* \otimes \mathbb{C} \otimes M$. Se λ corresponde a $\sum_i f_i^* \otimes c_i \otimes m_i$, então

$$\lambda(m) = \sum_i \langle f_i^*, m \rangle c_i \otimes m_i,$$

e, para $c^* \in C^*$, temos que

$$m \cdot c^* = \sum_i \langle f_i^*, m \rangle \langle c^*, c_i \rangle m_i.$$

Isto implica, para $m^* \in M^*$, $c^* \in C^*$, que

$$c^* \cdot m^* = \sum_i f_i^* \langle c^*, c_i \rangle \langle m^*, m_i \rangle.$$

Assim, pelo Teorema 2.2, a ação a esquerda de c^* em M é racional com estrutura dada por

$$m^* \rightarrow \sum_i f_i \otimes c_i \langle m^*, m_i \rangle.$$

Observe que $\sum_i f_i \otimes c_i \langle m^*, m_i \rangle$ é um elemento de $M^* \otimes C$ tal que $\sum_i f_i \otimes c^*(c_i) \langle m^*, m_i \rangle = \rho(m) \in \text{Hom}(C^*, M)$. $\square$

Teorema 3.3. *Seja $\mathbb{C}$ uma coálgebra qualquer. Os seguintes conjuntos são iguais:*

- (1) $\mathbb{C}^{*rat}$;
- (2) A soma de todos ideais à esquerda de $\mathbb{C}^*$ com dimensão finita;
- (3) $\{c^* \in \mathbb{C}^* \mid \ker c^* \text{ contém um } \mathbb{C} \text{-coideal à esquerda}\}$.

Demonstração. Submódulos cíclicos de módulos racionais tem dimensão finita pelo Teorema 2.2 item (ii) e, portanto, (1) $\subset$ (2). Pois, para todo $x \in \mathbb{C}^{*rat}$, temos que $\bigcup_{x \in \mathbb{C}^{*rat}} \langle x \rangle$ e os ideais $\langle x \rangle$ tem dimensão finita. Portanto $\mathcal{C}^{*rat} \subset \{I \mid \text{ideal de } \mathbb{C}^* \text{ à esquerda com dimensão finita}\}$

Dizemos que $x \in$ (2). Então, para algum J $\mathbb{C}^*$ -ideal de dimensão finita, $x \in J$. Pela Proposição A.9 da Seção A.3.3, $J^\perp$ é um coideal à esquerda em $\mathbb{C}$ e $J^\perp$ tem dimensão finita. Mas $x \in J$, implica em $\ker x \subset J^\perp$. Assim (2) está contido em (3).

Agora suponha que $x \in$ (3). Seja N um coideal à esquerda cofinito em $\mathbb{C}$, que esteja contido em $\ker x$, i.e., $x \in N^\perp$. O conjunto $\mathbb{C}$ é um $\mathbb{C}^*$ -módulo via $c \leftarrow c^* = \sum_{(c)} \langle c^*, c_{(1)} \rangle c_{(2)}$. Note que $\mathbb{C}^*$ é uma ação à esquerda pela multiplicação induzida por Δ , que é exatamente a ação decorrente de $\leftarrow$. Desde que N seja um coideal à esquerda, i. e., (sobre $\leftarrow$) um $\mathbb{C}^*$ -submódulo racional a direita. Portanto $\mathbb{C}/N$ é um $\mathbb{C}^*$ -módulo. Dado $(\mathbb{C}/N)^*$, temos que a transposta da $\mathbb{C}^*$ -estrutura, verifica-se facilmente que a sequência exata

$$0 \longrightarrow (\mathbb{C}/N)^* \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{C}^*$$

induzida por

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/N \longrightarrow 0$$

é, de fato, uma sequência exata de $\mathbb{C}^*$ -aplicações. Como $\mathbb{C}/N$ tem dimensão finita, então $(\mathbb{C}/N)^*$ é racional pelo Lema 3.2. Mas, a imagem em $\mathbb{C}^*$ de $(\mathbb{C}/N)^*$ na sequência (a) é exatamente $N^\perp$. Já que, como a imagem é um módulo racional, então ela própria é racional. Como $x \in N^\perp$, provamos que (3) está contida em (1). Logo todos os conjuntos são iguais. $\square$

Corolário 3.1. *Se $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S , então:*

- 1) $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}^\square (= \mathbb{H}^{*rat})$;
- 2) $\int$ é unidimensional;
- 3) S é bijetivo.

Demonstração. (1) A álgebra de $\mathbb{H}^*$ é um H^* -ideal de dimensão finita e como resultado, pelo Teorema 3.3, temos que $H^\square = H$, pois $H^\square$ é a soma dos ideais. (2) e (3): $x \otimes h \rightarrow S(h) \rightarrow x = x \leftarrow h$, dando um isomorfismo de $\int \otimes \mathbb{H}$ com $\mathbb{H}^\square = \mathbb{H}^*$. Isto implica em S injetiva, já que $\int \otimes S$ está no núcleo de $\int \otimes \mathbb{H} = \mathbb{H}^\square$. Como $\dim \mathbb{H} < \infty$, S é bijetivo visto que S é injetiva. $\square$

Corolário 3.2. Para $\mathbb{H}$ toda álgebras de Hopf com antípoda S , $\int = 0$ se e somente se $\mathbb{H}^*$ tem somente zero como um ideal à esquerda de dimensão finita. Se $\int \neq 0$, então S é injetiva.

Demonstração. A primeira afirmação segue do Teorema 3.3 e do isomorfismo $\int \otimes H \cong \mathbb{H}^{*rat}$. A segunda é um fato provado no item (3) do Corolário 3.2, onde a parte do corolário referente à injetividade, não assumimos que $\mathbb{H}$ tem dimensão finita. $\square$

Se $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então $\mathbb{H}^*$, como vimos (na Seção Aqui definiremos a importante noção de semissimplicidade:

Definição 3.11. Seja M um módulo sobre uma $\mathbb{k}$ -álgebra de Hopf. Seguem as definições:

- 1) Um módulo M sobre uma $\mathbb{k}$ -álgebra $\mathbb{H}$ é chamada **simples**, se não tiver submódulos não triviais, isto é, o único submódulo de M são (0) e M ele mesmo.
- 2) Um módulo M sobre uma $\mathbb{k}$ -álgebra $\mathbb{H}$ é chamada **semisimples**, se todo submódulo $U \subset M$ tomando um complemento D , isto é, se podemos encontrar qualquer submódulo U um submódulo D tal que $D \oplus U = M$.
- 3) Uma álgebra é chamada **semisimples**, se ela é semisimples como um módulo de Hopf sobre ele próprio.

Proposição 3.2. Seja $\mathbb{H}$ uma $\mathbb{k}$ -álgebra e M um $\mathbb{H}$ -módulo. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) M é a soma direta de submódulos simples.
- (ii) M é uma soma (não necessariamente) de módulos semisimples.
- (iii) M é semisimples, isto é, todo submódulo $U \subset M$ tem um complemento D .

Corolário 3.3. Todo quociente ou submódulo de um módulo semisimples é semisimples.

Agora o teorema que relaciona a integral (ou cointegral) de uma álgebra de Hopf com sua semissimplicidade.

Teorema 3.4. Uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Temos que $\mathbb{H}$ é semisimples como álgebra se e somente se $\epsilon(\int) \neq 0$.

Demonstração. Se $\mathbb{H}$ é semissimples, então existe um ideal à esquerda I tal que

$$\mathbb{H} = I \oplus \varepsilon.$$

Para $x \in \ker \varepsilon$ e $y \in I$, temos que $xy \in \ker \varepsilon \cap I$ e, portanto, $xy = 0 = \varepsilon(x)y$. Então, para qualquer $h \in \mathbb{H}$, $h = (h - \varepsilon(h)1) + \varepsilon(h)1$; então, para todo $h \in \mathbb{H}$, $h = (h - \varepsilon(h)1) \in \ker \varepsilon$. Assim $I \subset \mathcal{J}$, que é um subespaço unidimensional, portanto $I = \mathcal{J}$. Como $H = I \oplus \ker \varepsilon$, concluímos que $\varepsilon(\mathcal{J}) \neq 0$.

Reciprocamente, se $\varepsilon(\mathcal{J}) \neq 0$, escolha $z \in \mathcal{J}$, onde $\varepsilon(z) = 1$. Pelo uso deste z , mostraremos que todo $\mathbb{H}$ -módulo é completamente redutível (semissimples). Digamos que M seja um $\mathbb{H}$ -módulo à esquerda e N um submódulo de M . Seja $E : M \rightarrow N$ qualquer projeção linear que é a identidade em N . Definamos $P : M \rightarrow N$ por

$$P(m) = \sum_{(z)} z_{(1)} \cdot E(S(z_{(2)}) \cdot m).$$

Em particular, para $n \in N$, temos que

$$P(n) = \sum_{(z)} z_{(1)} E(S(z_{(2)}) \cdot n) = \sum_{(z)} z_{(1)} S(z_{(2)}) \cdot n = \varepsilon(z) \cdot n = n$$

Então P é uma projeção sobre N e, portanto, $M = N \oplus \ker(P)$ como espaço vetorial. De fato, clamamos que P é um morfismo de módulos. Isto completaria a demonstração tendo em vista que a soma direta acima seria então uma soma de $\mathbb{H}$ -módulos.

Veremos que P é um morfismo de módulos, dado $h \in H$, $m \in M$. Então

$$\begin{aligned} h \cdot P(m) &= h \cdot \left(\sum_{(z)} z_{(1)} \cdot E(S(z_{(2)}) \cdot m) \right) \\ &= \sum_{(z)} h z_{(1)} \cdot E(S(z_{(2)}) \cdot m) \\ &= \sum_{(z), (h)} h_{(1)} z_{(1)} \cdot E((S(z_{(2)}) \varepsilon(h_{(2)})) \cdot m) \\ &= \sum_{(z)(h)} h_{(1)} z_{(1)} \cdot E(S(h_{(2)} z_{(2)}) \cdot h_{(2)} \cdot m) \end{aligned}$$

é fácil verificar que

$$\begin{aligned} \sum_{(z), (h)} h_{(1)} z_{(1)} \otimes S(h_{(2)} z_{(2)}) \otimes h_{(3)} &= (I \otimes S \otimes I) \left(\sum_{(h)} \Delta(h_{(1)} z) \otimes h_{(2)} \right) \\ &= I \otimes S \otimes I \left(\sum_h \Delta(\varepsilon(h_{(1)}) v) \otimes h_{(2)} \right) \\ &= I \otimes S \otimes I (\Delta(z) \otimes h) \\ &= \sum_{(z)} z_{(1)} \otimes S(z_{(2)}) \otimes h \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pela última equação (3.5), temos que a igualdade dos tensores implica em

$$h \cdot P(m) = \sum_{(z)} z_{(1)} \cdot E(S(z_{(2)}) \cdot h \cdot m) = P(h \cdot m).$$

Isto completa a prova. □

Analogamente a cossemisimplicidade, ou seja, a simissimplidade da álgebra de Hopf $\mathbb{H}^*$ está analogamente relacionada com a integral λ .

Teorema 3.5. *Uma álgebra de Hopf de dimensão finita. Temos que $\mathbb{H}$ é cosemissimples como álgebra se e somente se $\lambda(1) \neq 0$.*

3.4 Cálculos Algébricos de Traços

Definiremos aqui os traços de morfismo e os calcularemos para alguns morfismos da álgebra de Hopf. Nesta seção, veremos como podemos obter as integrais e cointegrais a partir do traço. Além disso, construiremos a antípoda a partir de uma integral λ e uma cointegral Λ , tais que $\lambda(\Lambda) = 1$. Aqui também veremos alguns dos teoremas que usaremos nas próximas duas seções em versões diagramáticas. Além disso, usaremos estes resultados para construir os tensores integrais e suas consequências.

Definição 3.12. O espaço $\mathbb{H}$ é dito unimodular, se as integrais à esquerda e à direita de $\mathbb{A}$ são as mesmas.

Obs.: 3.4.1. *Uma álgebra de Hopf semissimples é unimodular, ou seja, os elementos que são cointegrais à direita também são elementos cointegrais à esquerda.*

$$\mathbb{H} \text{ é semissimples} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon(\Lambda_r) \neq 0 \\ \varepsilon(\Lambda_l) \neq 0. \end{cases}$$

Como as cointegrais são unidimensionais, temos que $\int_r = \langle \Lambda_r \rangle$ e $\int_l = \langle \Lambda_l \rangle$. Podemos supor que $\Lambda_r \neq \Lambda_l \Rightarrow \int_r \cap \int_l = \{0\}$

$$\mathbb{H} \text{ é semissimples} \Leftrightarrow \begin{cases} \Lambda_l \cdot a = \varepsilon(a)\Lambda_l \\ a \cdot \Lambda_r = \varepsilon(a)\Lambda_r \end{cases} \quad (3.6)$$

Temos que $\Lambda_r \Lambda_l \in \int_r \cap \int_l = \{0\}$. Observe que $\Lambda_r \Lambda_l \cdot a = \Lambda_r(\varepsilon(a)\Lambda_l)$ e $a \cdot \Lambda_r \Lambda_l = (\varepsilon(a) \cdot \Lambda_r)\Lambda_l$. Além disso, $\varepsilon(\Lambda_r \Lambda_l) = \varepsilon(\Lambda_r)\varepsilon(\Lambda_l) \neq 0 \Rightarrow \Lambda_r \Lambda_l \neq 0$, e, portanto, $\int_r = \int_l$. Em virtude do Teorema 3.2 e Corolário 3.2, existe uma aplicação $\phi : H \rightarrow H^*$ que é simultaneamente um isomorfismo de H -módulos à esquerda e um isomorfismo de H^* -módulo à direita.

Teorema 3.6. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o corpo $\mathbb{k}$. Então existe um isomorfismo linear $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^*$, que satisfaz $\phi(ab) = a \rightarrow \phi(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{H}$, e satisfaz $\phi^{-1}(pq) = \phi^{-1}(p) \leftarrow q$ para $p, q \in \mathbb{H}^*$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2, temos um morfismo $\phi' : \mathbb{H} \otimes \int \rightarrow \mathbb{H}^\square$ é definido por $\phi'(h \otimes \lambda_R) = h \rightarrow \lambda_R$. Temos que ϕ' é um isomorfismo de módulos (de Hopf). Além disso, como $\mathbb{H}$ tem dimensão finita, temos, pelo Corolário 3.1, que $\mathbb{H}^* \cong \mathbb{H}^\square$ e $\dim \int = 1$. Assim podemos definir o morfismo $\iota(h) = h \otimes \lambda$, que é uma bijeção. Portanto, definindo $\phi = \phi' \circ \iota$, temos um isomorfismo. E, por definição, vale que $\phi(ab) = a \rightarrow \phi(b)$.

Por outro lado, temos que o morfismo ϕ^{-1} existe. Seja $p \in \mathbb{H}^*$, temos pela bijeção que existe um único $a \in \mathbb{H}$ tal que $p(x) = \lambda_R(S(a)x)$ e assumimos que Λ_L é uma cointegral à esquerda tal que $\lambda_R(\Lambda_L) = 1$. Denote

$$\begin{aligned} b &= \Lambda_L \leftarrow p \\ &= \sum \lambda_R(S(a)\Lambda_{L,(1)})\Lambda_{L,(2)} \\ &= \lambda_R(S(a_{(1)})\varepsilon(a_{(1)})\Lambda_{L,(1)})\Lambda_{L,(2)} \\ &= \lambda_R(S(a_{(2)})\Lambda_{L,(1)})\varepsilon(a_{(1)})\Lambda_{L,(2)} \\ &= \sum a\lambda_R(\Lambda_{L,(1)})\Lambda_{L,(2)}. \end{aligned}$$

onde $\sum \lambda_R(\Lambda_{L,(1)})\Lambda_{L,(2)} = 1$, pois

$$p(\sum \lambda_R(\Lambda_{L,(1)})\Lambda_{L,(2)}) = \sum p(\Lambda_{L,(2)})\lambda_R(\Lambda_{L,(1)}) = p(1)\lambda_R(\Lambda_L)$$

Logo $\phi^{-1} = \Lambda_L \leftarrow p$ e, portanto, ϕ^{-1} também satisfaz $\phi^{-1}(pq) = \phi^{-1}(p) \leftarrow q$ para $p, q \in \mathbb{H}^*$. $\square$

Como consequência do Teorema 3.6, temos os importantes resultados a seguir que usaremos no decorrer desta seção. Além disso, sempre que não houver confusão, e como normalmente identificamos no enunciado dos resultados a notação adotada, Λ (resp. λ) denotará a cointegral ou integral de $\mathbb{H}^*$ (integral ou integral de $\mathbb{H}$) à direita ou à esquerda conforme mencionarmos no enunciado. Antes denotaríamos por Λ_L e Λ_R as cointegrais à direita ou esquerda e por λ_L, λ_R as integrais à direita ou esquerda (conforme a Seção 3.2 deste Capítulo). Escrevendo deste jeito para simplificar a notação.

Proposição 3.3. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita e S a antípoda sobre um corpo $\mathbb{k}$ e seja $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}^*$ o isomorfismo do Teorema 3.6. Defina $\Lambda = \phi^{-1}(\varepsilon)$ e $\lambda = \phi(1)$. Então:*

- (a) Λ é uma cointegral de $\mathbb{H}$ e λ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^*$;
- (b) $\phi(a) = a \rightarrow \lambda$ para $a \in \mathbb{H}$ e $\phi^{-1}(p) = \Lambda \leftarrow p$ para $p \in \mathbb{H}^*$. Assim $(\mathbb{H}^*, \rightarrow)$ é um $\mathbb{H}$ -módulo livre à esquerda com λ como base e $(\mathbb{H}^*, \lambda)$ é um $\mathbb{H}^*$ -módulo livre à direita com Λ como base;
- (c) S é bijetiva;
- (d) $\Lambda \leftarrow (a \rightarrow \lambda) = a$ para $a \in \mathbb{H}$ e $(\Lambda \leftarrow p) \rightarrow \lambda = p$ para $p \in \mathbb{H}^*$;
- (e) $\lambda(\Lambda) = 1 = \lambda(S(\Lambda))$;
- (f) O ideal da integral à esquerda (ou à direita) de $\mathbb{H}$ é unidimensional. Portanto ϕ é o único a menos de um múltiplo escalar.

Demonstração. Para provar o item (a), basta observar que

$$\begin{aligned} \phi(a\Lambda) &= a \rightarrow \phi(\Lambda) \\ &= a \rightarrow \varepsilon \\ &= \varepsilon(a)\varepsilon = \phi(\varepsilon(a)\Lambda), \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{H}$, tendo em vista que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Portanto $a\Lambda = \varepsilon(a)\Lambda$, para todo $a \in \mathbb{H}$, visto que ϕ é injetivo. Analogamente, podemos verificar que $\phi^{-1}(\lambda p) = \phi^{-1}(p(1)\lambda)$ e, assim, $\lambda p = p(1)\lambda$, para todo $p \in \mathbb{H}^*$. Isto termina a demonstração do item (a).

O item (b), basicamente, é o resultado da observação de que $\phi(a) = \phi(a1) = a \rightarrow \phi(1)$, para todo $a \in \mathbb{H}$, e que $\phi^{-1}(p) = \phi^{-1}(\varepsilon p) = \phi^{-1}(\varepsilon) \leftarrow p$, para $p \in \mathbb{H}^*$.

Para mostrar o item (c), observe que $\phi(a)(b) = (a \rightarrow \lambda)(b) = \lambda(S(a)b)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{H}$, pelo que vimos no item (b). Assim, $S(a) = 0$ implica em $a = 0$, pois ϕ é um morfismo injetivo. Caso contrário, se $S(a) = S(b)$, então $\phi(a)(x) = \phi(b)(x)$ (contradizendo a injetividade de ϕ !).

As equações do item (d) são outro modo de escrever $\phi^{-1}(\phi(a)) = a$ e $\phi(\phi^{-1}(p)) = p$ respectivamente (usando também o item (b)).

O item (e) é uma aplicação direta da parte (d). Aplicação ε em ambos os lados da equação do item (d), quando $a = 1$, resulta em $\lambda(\Lambda) = 1$. Por outro lado, aplicando ambos os lados da segunda equação do item (d) em 1, quando $p = \varepsilon$ resulta que $\lambda(S(\Lambda)) = 1$.

Para provar o item (f), seja $\Lambda' \in \mathbb{H}$ uma integral à esquerda, temos que S é bijetiva pela parte (c). Agora dado $\alpha = \phi(\Lambda')(1)$, temos

$$\begin{aligned} \phi(\Lambda')(a) &= \phi(\Lambda')(S(S^{-1}(a))1) \\ &= (S^{-1}(a) \rightarrow \phi(\Lambda'))(1) \\ &= \phi(S^{-1}(a)\Lambda')(1) \\ &= \phi(\varepsilon(S^{-1}(a))\Lambda')(1) \\ &= \varepsilon(a)\alpha \\ &= (\phi(\Lambda))(a)\alpha \\ &= (\phi(\alpha\Lambda))(a) \end{aligned}$$

para todo $a \in A$ e, portanto, $\Lambda' = a\Lambda$. Para completar a prova da parte (f), note que $S(a)$ é uma integral à esquerda de $\mathbb{H}$, se a é uma integral de $\mathbb{H}$ à direita, tendo em vista que S é bijetiva e que $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Assim o ideal das integrais à direita de $\mathbb{H}$ é unidimensional também. Como $\phi(a) = a \rightarrow \lambda' = a \rightarrow c\lambda$. Isto completa a prova de (f) e, portanto, a completamos a demonstração desta proposição. $\square$

Obs.: 3.4.2. É fácil ver que uma álgebra de Hopf semissimples é sempre unimodular. Basta verificar que, se Λ_r é uma integral à direita e respectivamente Λ_l é uma cointegral à esquerda, então $\varepsilon(\Lambda_r)\Lambda_l = \Lambda_r\Lambda_l = \varepsilon(\Lambda_l)\Lambda_r$, ou seja, $\Lambda_l = \varepsilon(\Lambda_l)(\varepsilon(\Lambda_r))^{-1}\Lambda_r$ e, portanto, $\int_r^* = \int_l^*$.

Como que S e S^{-1} são anti-endomorfismos de álgebra, sobrejetivos e $\varepsilon \circ S = \varepsilon = \varepsilon \circ S^{-1}$, segue que, se $S(\Lambda)$ e $S^{-1}(\Lambda)$, são integrais à direita de $\mathbb{H}$, então Λ deve ser uma integral à esquerda de $\mathbb{H}$. Analogamente, como S é antiendomorfismo de cóálgebra e $S(1) = 1$, segue que $\lambda \circ S$ é uma integral à esquerda da álgebra $\mathbb{H}^*$, então λ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^*$. Assim, pelos itens (e) e (f) da Proposição 3.3, segue o seguinte corolário:

Corolário 3.4. Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf sobre um corpo $\mathbb{k}$. Se Λ é um integral à esquerda ou à direita de $\mathbb{H}$ e λ é uma integral à direita ou à esquerda não nula de $\mathbb{H}^*$ então $\lambda(\Lambda) \neq 0$.

Demonstração. Este resultado é uma consequência direta do Proposição 3.3 item (e). $\square$

Como estamos trabalhando com álgebras de Hopf de dimensão finita, assumimos que S bijetiva. Portanto existe um antiendomorfismo S^{-1} e com este morfismo existem as álgebras de Hopf $(\mathbb{H}^{op}, M, i, \Delta, \epsilon, S^{-1})$ e $(\mathbb{H}^{cop}, M, i, \Delta, \epsilon, S^{-1})$. Isto já foi discutido e demonstrado no primeiro Capítulo Proposição 2.1.

Corolário 3.5. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra Hopf de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{k}$.*

- (a) *Suponha que Λ é uma integral não nula à direita ou à esquerda de $\mathbb{H}$. Então $(\mathbb{H}, \leftarrow)$ e $(\mathbb{H}, \rightarrow)$ são $\mathbb{H}^*$ -módulos livres com base Λ .*
- (b) *Suponha que λ é uma integral não nula à esquerda ou à direita de $\mathbb{H}^*$. Então $(\mathbb{H}^*, \leftarrow)$ e $(\mathbb{H}^*, \rightarrow)$ são $\mathbb{H}$ -módulo com base λ .*

Demonstração. (a) Como vimos no Teorema 3.6 e na Proposição 3.4, $\mathbb{H}$ é gerado por Λ_l como $\mathbb{H}^*$ -módulo, ou seja, $(\mathbb{H}, \leftarrow)$ é um módulo livre como base Λ_L . Analogamente, $(\mathbb{H}, \rightarrow)$ é um $\mathbb{H}^*$ -módulo livre com no Teorema 3.6 e Corolário 3.4 em $\mathbb{H}^{cop}$. Justamente porque $\phi : \mathbb{H}^{cop} \rightarrow (\mathbb{H}^{cop})^*$ e, portanto, pelo teorema podemos concluir que $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{cop}$ é gerado como módulo e tem base Λ_R . (b) Também pelo Teorema 3.6, λ_R gera $\mathbb{H}^*$ como $\mathbb{H}$ -módulo livre. Analogamente, em $\mathbb{H}^*$, temos que λ_R em $\mathbb{H}^{op}$ temos que $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{op}$ é gerado por λ_L . Observe que $(\lambda_R \leftarrow a)(b) = \lambda_R(b \cdot a) = \lambda(ab) = (a \rightarrow \lambda)(b)$, ou seja, gera todos os elementos de $\mathbb{H}^*$. $\square$

Generalizaremos as fórmulas e os resultados anteriores em uma álgebras de Hopf de dimensão finita $\mathbb{H}$ para as álgebras de Hopf de $\mathbb{H}^{op}$, $\mathbb{H}^{cop}$ e $\mathbb{H}^{op\,cop}$ e, em muitos casos, dando novas fórmulas e resultados para $\mathbb{H}$. É interessante notar que a antípoda S pode ser expressada em termos das integrais e cointegrais. Seja Λ uma integral à esquerda $\mathbb{H}$ e seja λ uma integral à direita de $\mathbb{H}^*$ tal que $\lambda(\Lambda) = 1$. Como $S^{-1}(a) \rightarrow \lambda = \lambda \leftarrow a$ para $a \in \mathbb{H}$, pelo item (d) da Proposição 3.3, temos que

$$S^{-1}(a) = \Lambda \leftarrow (\lambda \leftarrow a) = \sum \lambda(a\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}, \quad (3.7)$$

para $a \in \mathbb{H}$. Agora seja Λ' uma integral à direita $\mathbb{H}$ tal que $\lambda(\Lambda') = 1$. Então equação (3.7) para a álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op}$ é

$$S(a) = \Lambda' \leftarrow (a \rightarrow \lambda) = \sum \lambda(\Lambda'_{(1)}a)\Lambda'_{(2)}, \quad (3.8)$$

para todo $a \in \mathbb{H}$, quando expressado em termos de $\mathbb{H}$.

3.4.1 O Traço Quântico: Cálculos Algébricos

Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o corpo $\mathbb{k}$. Computaremos o traço de um endomorfismo linear $f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H})$ e mostraremos a relação com as integrais e cointegrais de várias maneiras. Através de traços, calcularemos integrais e cointegrais. Existem importantes aplicações das funções traços de álgebras de Hopf. Na próxima seção, por exemplo, mostraremos que os traço e cotraço de morfismos definem os tensores integrais e reconstruiremos a estrutura de uma álgebra involutória a partir dos tensores traço e cotraço.

Definição 3.13. *Seja $f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H})$. Conhecemos o isomorfismos $\text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H}) \cong \mathbb{H}^* \otimes \mathbb{H}$ e, portanto, $f \mapsto \sum p_i \otimes a_i$. A função traço $\text{Tr} : \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H}) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k})$ é tal que $\text{Tr}(f) = \sum p_i(a_i)$.*

Obs.: 3.4.3. No caso das transformações lineares $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$, temos que, fixada uma base $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n}$, temos que $T(v_i) = \sum a_{ij} v_j$ e dada uma base do espaço vetorial dual $v^j(v_i) = \delta_{ij}$, podemos escrever que $T = \sum a_{ij} v^i v_j$. Pelo isomorfismo $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}) \cong \mathbb{V}^* \otimes \mathbb{V}$, temos que $T = \sum_j (\sum_i a_{ij} v^i) \otimes v_j$. Assim temos que $Tr(f) = \sum_j (\sum_i a_{ij} v^i(v_j)) = \sum_j a_{jj}$.

A base da computação de traços em termos das integrais é o item (d) da Proposição 3.3. Logo a seguir mostramos como calcular o traço de um endomorfismo:

Teorema 3.7. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que Λ é uma cointegral à esquerda de $\mathbb{H}$ e que λ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^*$ tal que $\lambda(\Lambda) = 1$. Então:*

$$\begin{aligned} Tr(f) &= \sum \lambda(S(\Lambda_{(2)})f(\Lambda_{(1)})) \\ &= \sum \lambda((S \circ f(\Lambda_{(2)}))\Lambda_{(1)}) \\ &= \sum \lambda((f \circ S(\Lambda_{(2)}))\Lambda_{(1)}), \end{aligned}$$

para $f \in End_{\mathbb{K}}(\mathbb{H})$.

Demonstração. Sem perder generalidade, como estamos identificando $\mathbb{H}^* \otimes \mathbb{H} \cong End_{\mathbb{K}}(\mathbb{H})$, podemos assumir que $f \cong p \otimes a$; pois, se $f = \sum p_i \otimes a_i$, podemos fazer $tr(f) = \sum p_i(a_i)$. Podemos assumir que Λ e λ são as integrais segundo a Proposição 3.3. Assumimos que $f(a) \cong (p \otimes a)(b) = p(b)a$, onde $p \in \mathbb{H}^*$ e $a, b \in \mathbb{H}$. Observe que nestas condições $Tr(p \otimes a) = p(a)$. A equação $\sum \lambda(S(\Lambda_{(1)}))f(\Lambda_{(1)}) = Tr(f)$ é deduzida pela aplicação em ambos os lados da segunda equação da Proposição 3.3 do item (d) ao elemento $a \in \mathbb{H}$,

$$\begin{aligned} ((\Lambda \leftarrow p) \rightarrow \lambda)(a) &= ((\sum p(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}) \rightarrow \lambda) \\ &= \sum \lambda(S(\sum p(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)})a) \\ &= \sum \lambda(S(\sum p(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}))a \\ &= \sum \lambda(\sum p(\Lambda_{(1)})S(\Lambda_{(2)})a) \\ &= \sum \lambda(\sum S(\Lambda_{(2)})p(\Lambda_{(1)})a) \\ &= \sum \lambda(\sum S(\Lambda_{(2)})f(\Lambda_{(1)})). \end{aligned}$$

Como temos que $((\Lambda \leftarrow p) \rightarrow \lambda)(a) = p(a) = Tr(f)$ e como $f(\Lambda_{(1)}) \in \mathbb{K}$ temos a primeira igualdade. Já a equação $Tr(f) = \sum \lambda((S \circ f(\Lambda_{(2)}))\Lambda_{(1)})$ é deduzida pela aplicação $p \in \mathbb{H}^*$ para ambos os lados da primeira equação do item (d) da Proposição 3.3. Por outro lado, podemos fazer

$$\begin{aligned} p((\Lambda \leftarrow (a \rightarrow \lambda))) &= p(\Lambda \leftarrow (\lambda(S(a)-))) \\ &= p(\sum (\lambda(S(a)\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)})) \\ &= \sum (\lambda(S(a)\Lambda_{(1)})p(\Lambda_{(2)})) \\ &= \sum (\lambda(p(\Lambda_{(2)})S(a)\Lambda_{(1)})) \\ &= \sum (\lambda(S(p(\Lambda_{(2)})a)\Lambda_{(1)})) \\ &= \sum (\lambda(S(f(\Lambda_{(2)}))\Lambda_{(1)})). \end{aligned}$$

Temos que $p(\Lambda \leftarrow (a \rightarrow \lambda)) = Tr(f)$. Isto conclui a prova do teorema. $\square$

Obs.: 3.4.4. O resultado anterior pode ser interpretado diagramaticamente e faremos isto na Seção 3.6. Podemos ver em [Sou02] que o Teorema 3.7 pode ser traduzido diagramaticamente pelo lema a seguir para os tensores dos objetos do tipo Hopf, que generalizam o resultado para a álgebras de Hopf. Objetos do tipo Hopf generalizam os diagramas das álgebras de Hopf categoricamente e através disto podemos demonstrar resultados em álgebras de Hopf em um contexto mais geral. Daremos um sentido diagramático para a aplicação traço de f .

O traço é uma função que leva um endomorfismo de $\mathbb{H}$ para um endomorfismo de $\mathbb{k}$, ou melhor, $tr(f) : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{k}$. No caso de operadores lineares, temos que $tr(f)(1_{\mathbb{k}}) = \sum a_{ii}$. No lema a seguir, denotamos por $P_{RL} = \lambda_R \otimes \Lambda_L$ o produto tensorial de uma cointegral à esquerda Λ_L com uma integral à direita λ_R .

Proposição 3.4. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S sobre o corpo $\mathbb{k}$. Suponha que Λ é uma cointegral à esquerda para $\mathbb{H}$ e que λ é uma integral à direita para $\mathbb{H}^*$ tal que $\lambda(\Lambda) = 1$. Então:*

- (a) $Tr(r(a) \circ S^2 \circ r(p)) = \lambda(a)p(\Lambda)$ para $a \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$.
- (b) $\lambda'(a) = Tr(r(a) \circ S^2)$ para $a \in \mathbb{H}$ é uma integral à direita. Mais ainda $\lambda' \neq 0$ se e somente se $\mathbb{H}$ é semissimples.
- (c) $Tr(S^2) = \lambda(1)\varepsilon(\Lambda)$. Portanto $Tr(S^2) \neq 0$ se e somente se $\mathbb{H}$ e $\mathbb{H}^*$ são semissimples.

Demonstração. Os itens (b) e (c) seguem diretamente de (a). Para provar o item (a), primeiro observaremos que $\sum S(a_{(2)})S^2(a_{(1)}) = S(\sum S(a_{(1)})a_{(1)}) = S(\varepsilon(a)1) = \varepsilon(a)1$ para todo $a \in \mathbb{H}$, e que $\Delta(a \leftarrow p) = \sum (a_{(1)} \leftarrow p) \otimes a_{(2)}$ para $a \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$. Usaremos agora o Teorema 3.7 para calcular

$$\begin{aligned} Tr(r(a) \circ S^2 \circ r(p)) &= \sum \lambda(S(\Lambda_{(2)})S^2(\Lambda_{(1)} \leftarrow p)a) \\ &= \sum \lambda(S(\Lambda \leftarrow p)_{(2)})S^2((\Lambda \leftarrow p)_{(1)}a)) \\ &= \lambda(\varepsilon(\Lambda \leftarrow p)a) \\ &= \lambda(a)p(\Lambda), \end{aligned}$$

para $a \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$.

Para provar (b), assumamos que $\lambda'(a) = Tr(r(a) \circ S^2) = Tr(r(a) \circ S^2 \circ r(\varepsilon)) = \lambda(a)\varepsilon(\Lambda)$ e que $r(a) \circ S^2 \circ r(\varepsilon) = r(a) \circ S^2$, temos que

$$\begin{aligned} \sum f(x_{(1)})\lambda'(x_{(2)}) &= \sum f(x_{(1)})\lambda(x_{(2)})\varepsilon(\Lambda) \\ &= f(1)(\lambda(x)\varepsilon(\Lambda)) \\ &= f(1)\lambda'(x), \end{aligned}$$

ou seja, λ' é uma integral à direita. Para a segunda parte de (b), temos que, se $\lambda' \neq 0$, então $\lambda(a) = \lambda(a)p(\Lambda) \neq 0$. E isto implica em $\varepsilon(\Lambda)$. Logo, pelo Teorema 3.7, A álgebra de Hopf $\mathbb{H}$ é semissimples.

Para provar (c), podemos começar verificando que $S^2 = r(1) \circ S^2 \circ r(\varepsilon)$ e, portanto, $Tr(S^2) = Tr(r(1) \circ S^2 \circ r(\varepsilon)) = \lambda(1)\varepsilon(\Lambda)$. Segue que se $Tr(S^2) = \lambda(1)\varepsilon(\Lambda) \neq 0$ implica em $\lambda(1) \neq 0$ e assim $\mathbb{H}^*$ é semissimples e $\varepsilon(\Lambda) \neq 0$. Isto conclui a prova da proposição. $\square$

A Proposição 3.4 mostra que podemos expressar integrais por meio da função traço. E que, através da mesma função traço, podemos identificar se uma álgebra é semissimples. Na seção seguinte, discutiremos o tensor a existência dos tensores integrais que tem propriedades relacionadas com o resultado anterior.

3.4.2 Ordem da Antípoda

Vimos a definição do conjunto grouplike² e denotamos este conjunto por $G(\mathbb{H})$. Temos que $G(\mathbb{H}^*) = \text{Alg}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H}, \mathbb{k})$ que denota o grouplike de $\mathbb{H}^*$. Para entender esta igualdade, basta observarmos que $\Delta^*(f) = f \otimes f$ se e somente se $f(M(x \otimes y)) = f(x)f(y)$, ou seja, f é um endomorfismo de álgebra. Nesta seção, definiremos o conceito de **grouplike destacado** que foi usado para estudar a ordem da antípoda.

No artigo [Rad85], temos como um de seus resultados que

Afirmção 3.4.1. *existe uma bijeção entre $G(\mathbb{H})$ e o conjunto dos ideais unidimensionais de $\mathbb{H}$ dada por*

$$g \mapsto L_g = \{p \in \mathbb{H}^* \mid px = p(g)x\}.$$

Assim temos que, como o conjunto $\int$ das integrais à direita é unidimensional. Portanto existe um $g \in G(\mathbb{H})$ tal que $L_g = \int$. Isto implica em, para todo elemento $\lambda \in \int$, $p\lambda = p(g)\lambda$. Como, neste caso, $\mathbb{H}$ tem dimensão finita vale o análogo para $\mathbb{H}^*$, ou seja, $\Lambda a = \alpha(a)\Lambda$. Este resultado original pode ser encontrado em [Rad76].

Sejam $\Lambda \neq 0$ uma cointegral à esquerda de $\mathbb{H}$ e $\lambda \neq 0$ uma integral à direita $\mathbb{H}^*$. Pela Proposição 3.3 item (f), o ideal das integrais à esquerda (ou à direita) é unidimensional. Portanto existe um $\alpha \in \text{Alg}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H}, \mathbb{k}) = G(\mathbb{H}^*)$, independente da escolha de Λ tal que $\Lambda a = \alpha(a)\Lambda$ para $a \in \mathbb{H}$.

Definição 3.14. Existe um $\alpha \in \text{Alg}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H}, \mathbb{k}) = \mathcal{G}(\mathbb{H})$, independe da escolha de Λ tal que $\Lambda a = \alpha(a)\Lambda$ para $a \in \mathbb{H}$. A este elemento se dá o nome de **grouplike destacado de $\mathbb{H}^*$** .

Definição 3.15. Existe um $g \in \text{Alg}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H}^*, \mathbb{k}) = \mathcal{G}(\mathbb{H})$, independe da escolha de λ tal que $p\lambda = p(g)\lambda$ para $p \in \mathbb{H}^*$. A este elemento se dá o nome de **grouplike destacado de $\mathbb{H}$** .

O resultado principal deste trabalho envolverá essas definições. Através da fórmula que Radford desenvolveu foi possível estudar a ordem das antípodas de álgebras de Hopf de dimensão finita.

Proposição 3.5. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita e antípoda S , $\Lambda \in \mathbb{H}$ uma integral à esquerda e $\lambda \in \mathbb{H}^*$ uma integral à direita; onde g um elemento grouplike destacado de $\mathbb{H}$ e seja α um elemento grouplike de $\mathbb{H}^*$. Então:*

- (a) $S(\Lambda) = \alpha \rightharpoonup \Lambda$ e $S(\Lambda)^{-1} = \Lambda \leftharpoonup \alpha$.
- (b) $\lambda \circ S = \lambda \leftharpoonup g$ e $\lambda \circ S^{-1} = g \rightharpoonup \lambda$.
- (c) $\Lambda \leftharpoonup \alpha = \alpha(g)(\alpha \rightharpoonup \Lambda)$ e $g \rightharpoonup \lambda = \alpha(g)(\lambda \leftharpoonup g)$.

²Vimos a definição do elemento grouplike na equação (2.14) no primeiro Capítulo. $g \in G(\mathbb{H})$, se $\Delta(g) = g \otimes g$.

$$(d) \quad S^2(\Lambda) = \alpha \rightharpoonup \lambda \leftarrow \alpha^{-1} = \alpha(g^{-1})\Lambda \quad e \quad \lambda \circ S^2 = g^{-1} \rightharpoonup \lambda \leftarrow g = \alpha(g^{-1})\lambda.$$

Demonstração. Podemos assumir que $\lambda(\Lambda) = \lambda(S(\Lambda)) = 1$ conforme Proposição 3.3. Pelo item 1 (f), integrais à esquerda ou direita são únicas a menos de múltiplos escalares. Portanto quaisquer dois elementos entre $S(\Lambda)$, $\alpha \rightharpoonup \Lambda$ ou $\alpha \leftarrow \Lambda$ formam um conjunto linearmente dependente. Do mesmo modo, quaisquer dois elementos dentre $\lambda \circ S$, $g \rightharpoonup \lambda$, e $\lambda \leftarrow g$ formam um conjunto linearmente independente.

Mostraremos primeiro o item (a). Desde que $S(\Lambda)$ e $\alpha \rightharpoonup \Lambda$ sejam linearmente dependentes, o fato que $\lambda(S(\Lambda)) = 1$ e os cálculos $\lambda(\alpha \rightharpoonup \Lambda) = \lambda(\sum \alpha(\Lambda_{(2)})\Lambda_{(1)}) = \sum \lambda(\Lambda_{(1)})\alpha(\Lambda_{(2)}) = \alpha(1)\lambda(\Lambda) = 1$ estabelece que $S(\Lambda) = \alpha \rightharpoonup \Lambda$. Equivalentemente a última equação, na álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{cop}$ $\mathbb{H}^{cop}$ é $S^{-1}(\Lambda) = \Lambda \leftarrow \alpha$, quando expressado em termos de $\mathbb{H}$. Ou seja, seja $S' = S^{-1}$ a antípoda de $\mathbb{H}^{cop}$ temos que vale a relação $S^{-1}(a) = S'(\Lambda) = \alpha \rightharpoonup_{cop} \Lambda = \sum \alpha(\Lambda_{(2)})\Lambda_{(1)} = \Lambda \leftarrow \alpha$ quando exposto em termos de $\mathbb{H}$.

O item (b) é uma versão do item (a) em $\mathbb{H}^{cop,*}$. Pois, seja $(S^{-1})^* = S'$ a antípoda de $\mathbb{H}^{cop,*}$, temos pelo item (a) que $\lambda(S^{-1}) = S'(\lambda) = g \rightharpoonup_{cop} \lambda = \sum g(\lambda_{(2)})\lambda_{(1)} = \sum \lambda_{(2)}(g)\lambda_{(1)} = \lambda \circ r_g$, ou seja, $\lambda(S^{-1})(x) = S'(\lambda)(x) = (\lambda \leftarrow g)(x)$. Analogamente, verifica-se que $\lambda \circ S^{-1} = g \rightharpoonup \lambda$.

Para mostrar a parte (c), usaremos o fato que $\Lambda \leftarrow \alpha$ e $\alpha \rightharpoonup \Lambda$ são linearmente dependentes. Pois, como sabemos, ambos são integrais à direita. Concluiremos que $\Lambda \leftarrow \alpha = \alpha(g)(\alpha \rightharpoonup \Lambda)$ pois $\lambda(\Lambda \leftarrow \alpha) = \alpha(\sum \alpha(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}) = \sum \alpha(\Lambda_{(1)})\lambda(\Lambda_{(2)}) = \alpha\lambda(\Lambda) = \alpha(g)\lambda(\Lambda) = \alpha(g)$. Segue, portanto, que $\lambda \leftarrow \alpha = \alpha(g)(\alpha \rightharpoonup \Lambda)$. Temos, na álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op,cop,*}$, que esta relação passa a ser $g \rightharpoonup \lambda = \alpha(g)(\lambda \leftarrow g)$, quando exposto em termos de $\mathbb{H}^*$.

Para mostrar o item (d), notamos que a primeira equação em $\mathbb{H}^{op,cop,*}$ é a segunda, quando expressamos em termo de $\mathbb{H}^*$. Assim basta provar a primeira relação. Temos que

$$\begin{aligned} \alpha \rightharpoonup \Lambda \leftarrow \alpha^{-1} &= (\alpha(g)^{-1}(\Lambda \leftarrow \alpha)) \leftarrow \alpha^{-1} \\ &= \alpha(g)^{-1}((\Lambda \leftarrow \alpha) \leftarrow \alpha^{-1}) \\ &= \alpha(g)^{-1}\Lambda \leftarrow (\alpha \leftarrow \alpha^{-1}) \\ &= \alpha(g)^{-1}\Lambda \leftarrow \varepsilon \\ &= \alpha(g)^{-1}\Lambda. \end{aligned}$$

Observe que $S^2(\Lambda)$ também é uma integral à direita de $\mathbb{H}$. Consequentemente, $S^2(\Lambda)$ e Λ são linearmente dependentes. Assim é suficiente mostrar que $\lambda(S^2(\Lambda)) = \alpha(g^{-1})$. Já que $S(g) = g^{-1}$, segue pelo item (b) que

$$\begin{aligned} \lambda(S^2(\Lambda)) &= \lambda \circ S(S(\Lambda)) \\ &= (\lambda \leftarrow g)(S(\Lambda)) \\ &= \lambda(gS(\Lambda)) \\ &= \lambda(S(\Lambda g^{-1})) \\ &= \alpha(g^{-1})\lambda(S(\Lambda)) \\ &= \alpha(g^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto $S^2(\Lambda) = \alpha(g^{-1})\Lambda$, e a prova do item (d) está completa. Isto termina a prova da proposição. $\square$

Lema 3.3. *Seja Λ uma integral à esquerda de $\mathbb{H}$. Então*

$$\sum \Lambda_{(1)} \otimes a \Lambda_{(2)} = \sum S(a) \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} \quad \text{para } a \in \mathbb{H} \quad (3.9)$$

Demonstração. para ver isto observamos que

$$\begin{aligned} \sum b_{(1)} \otimes a b_{(2)} &= \sum (\varepsilon(a_{(1)}) 1) b_{(1)} \otimes a_{(2)} b_{(2)} \\ &= \sum S(a_{(1)}) a_{(2)} b_{(1)} \otimes a_{(3)} b_{(2)} \\ &= \sum S(a_{(1)}) (a_{(2)} b)_{(1)} \otimes (a_{(2)} b)_{(2)} \end{aligned}$$

Então para

$$\begin{aligned} \sum \Lambda_{(1)} \otimes a \Lambda_{(2)} &= \sum S(a_{(1)}) (a_{(2)} \Lambda)_{(1)} \otimes (a_{(2)} \Lambda)_{(2)} \\ &= \sum S(a_{(1)}) (\varepsilon(a_{(2)}) \Lambda)_{(1)} \otimes (\varepsilon(a_{(2)}) \Lambda)_{(2)} \\ &= \sum S(a_{(1)}) \varepsilon(a_{(2)}) \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} \\ &= \sum S(a) \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)} \end{aligned}$$

para $a, b \in \mathbb{H}$. □

Façamos o seguinte cálculo

$$\begin{aligned} (\Lambda \triangleright b) S^2(a) &= \sum \Lambda_{(2)} b S(\Lambda_{(1)}) S^2(a) \\ &= \sum \Lambda_{(2)} b S(S(a) \Lambda_{(1)}) \end{aligned}$$

pela equação (3.9), temos que $\sum \Lambda_{(2)} b S(S(a) \Lambda_{(1)}) = M \circ (I \otimes b S)(\sum S(a) \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda_{(2)}) = M \circ (I \otimes b S)(\sum \Lambda_{(1)} \otimes a \Lambda_{(2)})$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} (\Lambda \triangleright b) S^2(a) &= \sum \Lambda_{(2)} b S(S(a) \Lambda_{(1)}) \\ &= \sum a \Lambda_{(2)} b S(\Lambda_{(1)}) \\ &= a(\Lambda \triangleright b), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$(\Lambda \triangleright b) S^2(a) = a(\Lambda \triangleright b) \text{ para } a, b \in \mathbb{H}.$$

(3.10)

Tendo em vista que a antípoda de uma álgebra de Hopf leva os elementos grouplike em seus inversos, deduzimos que

$$S \circ r(\alpha) = l(\alpha^{-1}) \circ S \quad \text{e} \quad S \circ l(\alpha) = r(\alpha^{-1}) \circ S \quad \text{para} \quad \alpha \in G(\mathbb{H}^*) \quad (3.11)$$

Desde que S seja um antiendomorfismo de coálgebra, deduzimos que

$$S \circ r(a) = l(a^{-1}) \circ S \quad \text{e} \quad S \circ l(a) = r(a^{-1}) \circ S \quad \text{para} \quad a \in G(\mathbb{H}) \quad (3.12)$$

onde S é um antiendomorfismo de álgebra (antípoda).

Proposição 3.6. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S . Suponha que Λ é uma integral à esquerda de $\mathbb{H}$ e que λ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^*$ tal que $\lambda(\Lambda) = 1$. Seja g o elemento grouplike destacado de $\mathbb{H}$ e seja α o elemento grouplike destacado de $\mathbb{H}^*$. Então para $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{H})$:*

- (a) $Tr(f \circ S \circ r(\alpha)) = \sum \lambda(\Lambda_{(1)} f(\Lambda_{(2)}))$.
- (b) $Tr(r(g) \circ S \circ f) = \sum \lambda(f(\Lambda_{(1)}) \Lambda_{(2)})$.
- (c) $Tr(f \circ S^{-2} \circ r(\alpha^{-1})) = \sum \lambda(f(\Lambda_{(1)}) S(\Lambda_{(2)}))$.
- (d) $Tr(r(g^{-1}) \circ S^{-2} \circ f) = \sum \lambda(S(\Lambda_{(1)}) f(\Lambda_{(2)}))$.
- (e) $Tr(f \circ l(g) \circ S^{-1} \circ l(\alpha)) = \sum \lambda(\Lambda_{(2)} f(\Lambda_{(1)}))$.
- (f) $Tr(l(g^{-1}) \circ l(\alpha^{-1}) \circ f) = \sum \lambda(f(\Lambda_{(2)}) S(\Lambda_{(1)}))$.

Demonstração. Para mostrar (a), observamos que $\alpha \rightharpoonup \Lambda$ é uma integral à esquerda, conforme vimos antes em Proposição 3.5, e λ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^{op,*}$ tal que $\lambda(\alpha \rightharpoonup \Lambda) = 1$. Portanto aplicando o Teorema 3.7 à álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op}$ temos (sabendo que a antípoda neste caso S^{-1})

$$\begin{aligned} Tr(f) &= \sum \lambda((f \circ S^{-1}(\alpha \rightharpoonup \Lambda)_{(2)}) \cdot (\alpha \rightharpoonup \Lambda)_{(1)}) \\ &= \sum \lambda(\Lambda_{(1)} (f \circ S^{-1}(\alpha \rightharpoonup \Lambda_{(2)}))). \end{aligned}$$

Pela equação (3.11) segue que $S \circ r(\alpha) = l(\alpha^{-1}) \circ S$ e, portanto, $Tr(f \circ S \circ r(a)) = Tr(f \circ l(\alpha^{-1}) \circ S)$.

$$\begin{aligned} Tr(f \circ l(\alpha^{-1}) \circ S) &= \sum \lambda(\Lambda_{(1)} (f \circ l(\alpha^{-1}) \circ S) \circ S^{-1}(\Lambda_{(2)})) \\ &= \sum \lambda(\Lambda_{(1)} (f \circ l(\alpha^{-1}))(\alpha \rightharpoonup \Lambda_{(2)})) \\ &= \lambda(\Lambda_{(1)} f(\Lambda_{(2)})). \end{aligned}$$

Para mostra o item (b), observamos que $\Lambda \leftharpoonup \alpha$ é uma integral à esquerda de $\mathbb{H}^{op,cop}$ e $\lambda \leftharpoonup g$ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^{op,cop,*}$ tal que $(\lambda \leftharpoonup g)(\Lambda \leftharpoonup \alpha) = 1$ pela Proposição 3.4. Portanto o item (a) para a álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op,cop}$ expressado em termo de $\mathbb{H}$. Primeiramente $\alpha^{-1} = S(\alpha)$ é o grouplike destacado; pois, se Λ é uma integral à esquerda, temos que

$$\begin{aligned} S(\Lambda) \cdot a &= aS(\Lambda) \\ &= S(S^{-1}(a))S(\Lambda) \\ &= S(\Lambda S^{-1}(a)) \\ &= S(\Lambda \alpha(S^{-1}(a))) \\ &= \alpha(S^{-1}(a))S(\Lambda) \\ &= ((S^{-1})^*(\alpha))(a)S(\Lambda) \\ &= \alpha^{-1}(a)S(\Lambda) \end{aligned}$$

tendo em vista $S^*(\alpha) = (S^*)^{-1}(\alpha) = \alpha^{-1}$. Observe que em $\mathbb{H}^{op, cop, *}$ vale que a antípoda nesta álgebra de Hopf é igual a S^* e $(S^*)^{-1}(\alpha) = S^*(\alpha) = \alpha \circ S$ e $(S^*)^{-1}(\alpha) = \alpha \circ S^{-1}$, portanto $(S^* \circ (S^*)^{-1})(\alpha) = S^*(\alpha \circ S^{-1}) = \alpha \circ S^{-1} \circ S = \alpha$. Logo, como neste caso α^{-1} é um grouplike destacado, temos que

$$\begin{aligned} (f \circ S \circ r(\alpha^{-1}))(b) &= f(S(\sum \alpha^{-1}(b_{(2)})b_{(1)})) \\ &= f \circ S(\alpha^{-1} \rightharpoonup b) \\ &= (f \circ S \circ l(\alpha^{-1}))(b) \end{aligned}$$

Portanto vale que

$$\begin{aligned} Tr(f \circ S \circ l(\alpha^{-1})) &= \sum (\lambda \leftarrow g)((\Lambda \leftarrow \alpha^{-1})_{(2)} \cdot f((\Lambda \leftarrow \alpha^{-1})_{(2)})) \\ &= \sum \lambda(g(f(\Lambda_{(1)} \leftarrow \alpha^{-1})\Lambda_{(2)})). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\begin{aligned} Tr(l(g^{-1}) \circ f \circ r(\alpha^{-1}) \circ S \circ r(\alpha^{-1})) &= \sum \lambda(g((l(g^{-1}) \circ f \circ r(\alpha^{-1}))(\Lambda_{(1)} \leftarrow \alpha)\Lambda_{(2)})) \\ &= \sum \lambda(g((g^{-1}f((\Lambda_{(1)} \leftarrow \alpha) \leftarrow \alpha^{-1})\Lambda_{(2)})) \\ &= \sum \lambda(f(\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}). \end{aligned}$$

Mas, pela equação (3.9) e pela equação (3.11) segue que $Tr(l(g^{-1}) \circ f \circ r(\alpha^{-1}) \circ S \circ l(\alpha^{-1})) = Tr(l(g^{-1}) \circ f \circ S) = Tr(r(g) \circ S \circ f)$.

Para mostrar o item (c), observamos que $S(\Lambda)$ é uma integral à esquerda para $\mathbb{H}^{op}$ e que λ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^{op, *}$ tal que $\lambda(S(\Lambda)) = 1$. Assim o item (a) para a álgebra $\mathbb{H}^{op}$, quando expressados em termos de $\mathbb{H}$, se traduz por

$$\begin{aligned} Tr(f \circ S^{-1} \circ r(\alpha^{-1})) &= \sum \lambda(S(\Lambda)_{(1)} \cdot f(S(\Lambda)_{(2)})) \\ &= \sum \lambda(f(S(\Lambda_{(1)}))S(\Lambda_{(2)})). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} Tr(f \circ S^{-2} \circ r(\alpha^{-1})) &= Tr(f \circ S^{-1} \circ S^{-1} \circ r(\alpha^{-1})) \\ &= \sum \lambda(f \circ S^{-1}(S(\Lambda_{(1)}))S(\Lambda_{(2)})) \\ &= \sum \lambda((f(\Lambda_{(1)})S(\Lambda_{(2)})). \end{aligned}$$

Para mostrar o item (d), observamos que $S(\Lambda)$ é uma integral de $\mathbb{H}^{op, cop}$ e $g \rightharpoonup \lambda$ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^{op, cop, *}$ tal que $(g \rightharpoonup \lambda)(S(\Lambda)) = 1$ pela Proposição 3.4. Aplicando o Teorema 3.7 para a álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op, cop}$ segue que

$$\begin{aligned} Tr(f) &= \sum (g \rightharpoonup \lambda)((f \circ S(S(\Lambda)_{(1)})) \cdot S(\Lambda)_{(2)}) \\ &= \sum \lambda(S(\Lambda_{(1)})(f \circ S(S(\Lambda_{(2)})))g) \\ &= \sum \lambda(S(\Lambda_{(1)})(f \circ S^2(\Lambda_{(2)})))g. \end{aligned}$$

Pela equação (3.12) segue que $Tr(r(g^{-1}) \circ S^{-1} \circ f) = Tr(r(g^{-1}) \circ f \circ S^{-2}) = \sum \lambda(S(\Lambda_{(1)})f(\Lambda_{(2)}))$.

Para mostrar a parte (e), observemos que Λ é uma integral à esquerda de $\mathbb{H}^{cop}$ e $\lambda \leftarrow g$ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^{cop,*}$ tal que $(\lambda \leftarrow g)(\Lambda) = 1$. Assim o item (a) da álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{cop}$ quando expressado em termos de $\mathbb{H}$ é

$$\begin{aligned} Tr(f \circ S^{-1} \circ l(\alpha)) &= \sum (\lambda \leftarrow g)(\Lambda_{(2)}f(\Lambda_{(1)})) \\ &= \sum \lambda(g\Lambda_{(2)}f(\Lambda_{(1)})) \end{aligned}$$

Portanto $Tr(f \circ S^{-1} \circ l(\alpha)) = \sum \lambda(\Lambda_{(2)}f(g^{-1}\Lambda_{(1)}))$ pela equação (3.9). Onde a última equação segue da equação (3.9) já que $S(g) = g^{-1}$. Portanto $Tr(f \circ l(g) \circ S^{-1} \circ l(\alpha)) = \sum \lambda(\Lambda_{(2)}f(\Lambda_{(1)}))$.

Para mostrar a parte (f), relembramos da prova da parte (d) que $S(\Lambda)$ é uma integral à esquerda de $\mathbb{H}^{op,cop}$ e que $g \rightarrow \lambda$ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^{op,cop,*}$ tal que $(g \rightarrow \lambda)(S(\Lambda)) = 1$. Portanto o item (a) da álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op,cop}$ quando expressado em termos de $\mathbb{H}$ é

$$\begin{aligned} Tr(f \circ S \circ l(\alpha^{-1})) &= \sum g \rightarrow \lambda(S(\Lambda)_{(2)} \cdot f(S(\Lambda)_{(1)})) \\ &= \sum \lambda(f(S(\Lambda_{(2)}))S(\Lambda_{(1)}))g \end{aligned}$$

Então $Tr(f \circ S \circ l(\alpha^{-1})) = \sum \lambda(f(S(\Lambda_{(2)}))S(g))S(\Lambda_{(1)}) = \sum \lambda(f(S(\Lambda_{(2)}))g^{-1})S(\Lambda_{(1)})$ que segue de $S(\Lambda)$ ser uma integral à direita e $\sum \Lambda_{(1)} \otimes \Lambda a = \sum S(a)\Lambda_{(1)} \otimes \Lambda$ para todo $a \in \mathbb{H}$. Onde a última equação segue da equação (3.9). Agora $Tr(f \circ l(g^{-1}) \circ l(\alpha^{-1})) = Tr(f \circ S^{-1} \circ S \circ l(\alpha^{-1})) = \sum \lambda(f(\Lambda_{(2)})S(\Lambda_{(1)}))$ pela equação (3.12). Isto termina a demonstração da proposição. $\square$

As fórmulas de traço da Proposição 3.6 pode ser deduzida diretamente sem recorrer a $\mathbb{H}^{op}$, $\mathbb{H}^{cop}$ ou $\mathbb{H}^{op,cop}$, mas não abordaremos isto nesta dissertação.

O próximo teorema teve muitas aplicações na pesquisa das relações entre cointegrais de $\mathbb{H}$ e integrais de $\mathbb{H}^*$ e também com a ordem da antípoda de $\mathbb{H}$. O item (a) segue de [Rad76]. Nesta dissertação, daremos duas outras demonstração para itens (a), segundo a demonstração de [Radford, 1994]. A primeira é baseada na equação (3.7) e na equação (3.8). A segunda é uma computação do traço baseada na definição dos elementos grouplike destacados α de $\mathbb{H}^*$ e na Proposição 3.4. Na segunda demonstração, em um determinado ponto, usamos a seguinte relação simples

$$r(p) \circ r(a) = \sum r(a_{(2)}) \circ r(a_{(1)} \rightarrow p) \text{ para } p \in \mathbb{H}^* \text{ e } a \in \mathbb{H}, \quad (3.13)$$

que segue pelo cálculo de $ba \leftarrow p = \sum p(b_{(1)}a_{(1)})b_{(2)}a_{(2)} = \sum (a_{(1)} \rightarrow p(b_{(1)})b_{(2)})a_{(2)}$ para $a, b \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$.

Teorema 3.8. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf álgebra com antípoda S sobre o corpo $\mathbb{k}$. Suponha que Λ é uma integral à esquerda de $\mathbb{H}$ e que λ é uma integral à direita de $\mathbb{H}^*$. Seja g um grouplike destacado de $\mathbb{H}$ e seja α elemento grouplike destacado de $\mathbb{H}^*$. Então:*

- (a) $\lambda(ab) = \lambda(S^2(b \leftarrow \alpha)a)$ para $a, b \in \mathbb{H}$.
- (b) $\lambda(ab) = \lambda(bS^2(\alpha^{-1} \rightarrow g^{-1}ag))$ para $a, b \in \mathbb{H}$.
- (c) $\sum \lambda_{(2)} \otimes \lambda_{(1)} = \sum \alpha(\lambda_{(1)} \circ S^2) \otimes \lambda_{(2)}$.
- (d) $\sum \Lambda_{(2)} \otimes \Lambda_{(1)} = \sum \Lambda_{(1)} \otimes S^2(\Lambda_{(2)})g$.

Demonstração. Primeiro mostraremos o item (a). Podemos assumir, pelo Corolário 3.4 que $\lambda(\Lambda) = 1$. Agora $S(b) = \sum \lambda(S^2(b)\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}$ pela equação (3.7), pois $\sum \lambda(S^2(b)\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)} = S^{-1}(S^2(b)) = S(b)$. Por outro lado, como $\Lambda \leftarrow \alpha$ e $\alpha^{-1}\lambda$ são integrais à direita tal que $\alpha^{-1}\lambda(\Lambda \leftarrow \alpha) = 1$, segue pela equação (3.8) que

$$\begin{aligned} S(b) &= \sum \alpha^{-1}\lambda((\Lambda_{(1)} \leftarrow \alpha)b)\Lambda_{(2)} \\ &= \sum \alpha^{-1}\lambda((\Lambda_{(1)} \leftarrow \alpha)(b \leftarrow \alpha^{-1}) \leftarrow \alpha)\Lambda_{(2)} \\ &= \sum \alpha^{-1}\lambda((\Lambda_{(1)}(b \leftarrow \alpha^{-1})) \leftarrow \alpha)\Lambda_{(2)} \\ &= \sum \lambda(\Lambda_{(1)}(b \leftarrow \alpha^{-1}))\Lambda_{(2)}. \end{aligned}$$

Portanto $\sum \lambda(S^2(b)\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)} = \sum \lambda(\Lambda_{(1)}(b \leftarrow \alpha^{-1}))\Lambda_{(2)}$ para $b \in \mathbb{H}$ (Lembre que $\alpha^{-1}\lambda = \lambda \circ r(\alpha^{-1})$ que precisamos para obter a última igualdade e que $(a \leftarrow \alpha)(b \leftarrow \alpha) = (\sum \alpha(a')a_{(2)})(\sum \alpha(a')a_{(2)}) = \sum \alpha(a')\alpha(b')a_{(2)}b_{(2)} = (ab \leftarrow \alpha)$). Aplicando $p \in \mathbb{H}^*$ em ambos os lados da última equação obtemos $\lambda(S^2(b)a) = \lambda(a(b \leftarrow \alpha^{-1}))$ para $a, b \in \mathbb{H}$ pelo Corolário 3.5 item (a), pois $(\mathbb{H}, \leftarrow)$ é um $\mathbb{H}^*$ -módulo com base Λ . E assim o item (a) segue.

Daremos uma segunda prova do item (a) que usa a função traço. Desde que S^2 seja um endomorfismo de álgebra segue que $S^2 \circ r(a) = r(S^2(a)) \circ S^2$ para $a \in \mathbb{H}$. Dado $p \in \mathbb{H}^*$ e $a, b \in \mathbb{H}$, Então pela equação (3.13) segue que $(r(ab) \circ S^2 \circ r(p) = r(a))$

$$\begin{aligned} Tr(r(ab) \circ S^2 \circ r(p)) &= Tr(r(b) \circ r(a) \circ S^2 \circ r(p)) \\ &= Tr(r(a) \circ S^2 \circ r(p) \circ r(b)) \\ &= \sum Tr(r(a) \circ S^2 \circ r(b_{(2)}) \circ r(b_{(1)} \rightarrow p)) \\ &= \sum Tr(r(a) \circ r(S^2(b_{(2)})) \circ S^2 \circ r(b_{(1)} \rightarrow p)) \\ &= \sum Tr(r(S^2(b_{(2)})a) \circ S^2 \circ r(b_{(1)} \rightarrow p)). \end{aligned}$$

Agora suponha que $p(\Lambda) = 1$. Então pela proposição 4.2.1(a) temos

$$\begin{aligned} \lambda(ab) &= p(\Lambda)\lambda(ab) \\ &= Tr(r(ab) \circ S^2 \circ r(p)) \\ &= Tr(r(a) \circ S^2 \circ r(p) \circ r(b)) \\ &= Tr(r(a) \circ S^2 \circ r(\sum b_{(1)} \rightarrow p) \circ r(S^2(b_{(2)}))) \\ &= Tr(r(S^2(b_{(2)})) \circ r(a) \circ S^2 \circ r(\sum b_{(1)} \rightarrow p)) \\ &= Tr(r(aS^2(b_{(2)})) \circ S^2 \circ r(\sum b_{(1)} \rightarrow p)) \\ &= \sum (b_{(1)} \rightarrow p)(\Lambda)\lambda(S^2(b_{(2)})a) \\ &= \sum p(\Lambda b_{(1)})\lambda(S^2(b_{(2)})a) \\ &= \sum p(\Lambda)\lambda(S^2(\alpha(b_{(1)})b_{(2)})a) \\ &= \lambda(S^2(b \leftarrow \alpha)a), \end{aligned}$$

Usamos a relação $r(a) \circ S^2 \circ r(p) \circ r(b) = r(aS^2(b_{(2)})) \circ S^2 \circ r(\sum b_{(1)} \rightarrow p)$ e, portanto, a segunda demonstração do item (a) está completa. Nada que $g \rightarrow \lambda$ é uma integral de $(\mathbb{H}^{op\ cop})^*$, é uma questão simples mostrar que o item (b) é a parte (a) para a álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op\ cop}$ quando expressada em termos de $\mathbb{H}$.

$$\begin{aligned}
(g \rightharpoonup \lambda)(ab) &= (g \rightharpoonup \lambda)(S^2(a \leftarrow \alpha) \cdot b) \\
&= (g \rightharpoonup \lambda)(bS^2(a \leftarrow_{op} \alpha)) \\
&= (g \rightharpoonup \lambda)(bS^2(a \leftarrow_{op} \alpha)) \\
&= \lambda(bS^2(a \leftarrow_{op} \alpha)g) \\
&= \lambda(bS^2(\sum \alpha(a_{(2)})a_{(1)})g) \\
&= \lambda(\sum bg^{-1}S^2(\alpha(a_{(2)})a_{(1)}g)) \\
&= \lambda(bS^2(g^{-1})S^2(\alpha(\sum a_{(2)})a_{(1)}g)) \\
&= \lambda(bS^2(g^{-1}(\sum a_{(2)})a_{(1)}g)) \\
&= \lambda(bS^2(\alpha \rightharpoonup g^{-1}ag))
\end{aligned}$$

O item (c) é equivalente a formulação do item (a) desde $p(ab) = \sum p_{(1)}(a)p_{(2)}(b)$ para $p \in \mathbb{H}^*$ e $a, b \in \mathbb{H}$ pela definição da comultiplicação em $\mathbb{H}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum \lambda_{(1)}(a)\lambda_{(2)}(b) &= \lambda(ab) \\
&= \lambda(S^2(b \leftarrow \alpha)a) \\
&= \sum \lambda_{(1)}(S^2(b \leftarrow \alpha))\lambda_{(2)}(a) \\
&= \sum \lambda_{(1)}(\sum \alpha(b_{(1)}S^2(b_{(2)})))\lambda_{(2)}(a) \\
&= \sum (\alpha(b_{(1)}\lambda_{(1)} \circ S^2(b_{(2)})))\lambda_{(2)}(a) \\
&= \sum \alpha(\lambda_{(1)} \circ S^2)(b)\lambda_{(2)}(a)
\end{aligned}$$

Portanto $\lambda_{(1)}(a) = \lambda_{(2)}(a)$ e $\lambda_{(2)}(b) = \alpha(\lambda_{(1)} \circ S^2)$.

A segunda prova do item (a) pode ser modificada para dar uma prova do item (d). Melhor ainda notar que o item (c) e a dualidade implica na parte (d). Para observar que $S(\Lambda)$ é uma integral à direita de $\mathbb{H} = \mathbb{H}^{**}$ e que a integral à esquerda $\lambda \circ S$ de $\mathbb{H}^*$ satisfazem $(\lambda \circ S)p = p(g^{-1})(\lambda \circ S)$ de $p \in \mathbb{H}^*$. Portanto pelo item (c) temos que $\sum S(\Lambda)_{(2)} \otimes S(\Lambda)_{(1)} = \sum g^{-1}(S^2(S(\Lambda)_{(1)})) \otimes S(\Lambda)_{(2)}$. Como S é antiendomorfismo de biálgebra e $S(g) = g^{-1}$, vejamos que $\sum S(\Lambda_{(1)}) \otimes S(\Lambda_{(2)}) = \sum S(S^2(\Lambda_{(2)})g) \otimes S(\Lambda_{(1)})$ e, portanto, o item (d) é consequência. Isto completa a demonstração do teorema. $\square$

A fórmula para S^4 em (veja [Rad85], prop. 6 radford:1994) é fácil deduzir pelo uso dos itens do teorema Teorema 3.8 (a), (b). Note que isto pode também ser deduzido das formulas de traços da Proposição 3.6 e pelo item (a) do Teorema 3.8. Pelo Teorema 3.8 (a) e a pela Proposição 3.6 itens (d), (f) temos que

$$\begin{aligned}
Tr(r(g^{-1}) \circ S^{-2} \circ f) &= \sum \lambda(s(\Lambda_{(1)})f(\Lambda_{(2)})) \\
&= \sum \lambda(S^2(f(\Lambda_{(2)}) \leftarrow \alpha)S(\Lambda)) \\
&= \sum \lambda((S^2 \circ r(\alpha) \circ f)(S(\Lambda_{(1)}))) \\
&= Tr(l(g^{-1}) \circ l(\alpha^{-1}) \circ S^2 \circ r(\alpha) \circ f)
\end{aligned}$$

para $f \in \text{End}_{\mathbb{k}}(\mathbb{H})$. Portanto $r(g^{-1}) \circ S^2 = l(g^{-1}) \circ l(\alpha^{-1}) \circ S^2 \circ r(\alpha)$. Como S^2 comuta com estes operadores (veja na equação (3.12) e na equação (3.11)), segue que $S^4 = l(g) \circ r(g^{-1}) \circ r(\alpha^{-1}) \circ l(\alpha)$.

$$S^4(a) = g(\alpha \rightharpoonup a \leftarrow \alpha^{-1})g^{-1} \quad \text{para} \quad a \in \mathbb{H}.$$

Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão sobre o corpo $\mathbb{k}$ com antípoda S . Para uma integral não nula à esquerda x , existe um $\alpha \in G(\mathbb{H}^*) = \text{Alg}(A, \mathbb{k})$ satisfazendo $xh = \alpha(h)x$ para todo $h \in \mathbb{H}$,

e seja $a \in G(\mathbb{H})$ o elemento correspondente (à o grouplike destacado) em $\mathbb{A}^*$. Temos como vimos que $S^4(h) = a^{-1}(\alpha \rightharpoonup h \leftharpoonup \alpha^{-1})a$. Disto é possível provar que seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita, então a ordem da antípoda S é finita [Rad76].

3.5 Versão Diagramática: Álgebra de Hopf

Linguagem gráfica: O uso da notação gráfica de operadores nos diagramas é devido à [Pen56]; que dualizam os grafos da notação tradicional, onde os vértices são os objetos e as arestas representam morfismos, e transformam os objetos nas arestas e os morfismos nos vértices.

Considere o seguinte exemplo para explicar a relação dos diagramas com os coeficientes de estrutura. Sejam $M : A \rightarrow B$, $N : B \otimes C \rightarrow D$ e $P : D \rightarrow E$ aplicações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita A, B, C, D, E . Estas aplicações podem ser combinadas. De um modo natural, obtemos uma aplicação linear $F : A \otimes C \rightarrow E$. Na noção funcional, a aplicação F pode ser escrita como

$$F = P \circ N \circ (M \otimes id_C).$$

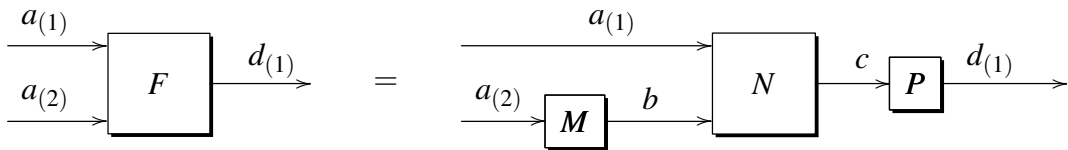
O mesmo pode ser expressado como uma rotulação das arestas por índices, relativos a alguma escolha de base de cada espaço. Na noção matemática, suponha $M = (m_{j,i})$, $N = (n_{l,jk})$, $P = (p_{m,l})$ e $F = (f_{m,ik})$, onde i, j, k, l, m passem sobre a base dos respectivos espaço vetorial. Então

$$F_{m,ik} = \sum_j \sum_l p_{m,l} n_{l,jk} m_{j,i}. \quad (3.14)$$

Daremos preferência a seguinte notação³:

$$F_m^{ik} = P_m^l N_l^{jk} M_j^i. \quad (3.15)$$

Em equação (3.14) e equação (3.15), a ordem dos fatores na multiplicação não é importante, como todas as informações estão contida nos índices. Note também que, enquanto a notação menciona a escolha de bases, a transformação linear gerada a partir destes coeficientes de estrutura são claramente independente de bases.



No diagrama acima, temos uma visualização gráfica e os índices substituídos nas arestas para visualização da fórmula. Normalmente, como visualizamos nossos tensores com grafos de vértices rígidos, enumeramos as entradas como comentamos na Seção A.7.3.

Falaremos agora da definição da **estrutura da álgebra de Hopf**⁴ por diagramas. A partir de agora, queremos descrever a formulação diagramática dos axiomas e teoremas do primeiro Capítulo. Para melhor compreender os diagramas o leitor pode ler o apêndice B, que traz uma apresentação dos diagramas e da categoria dos objetos do tipo Hopf. Em resumo, representaremos:

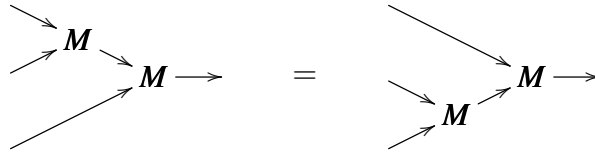
³Em física, é mais comum escrever o índice da coluna sobrescrito e os índices das arestas subscrito. Mais ainda, podemos fazer cair a sumarização usando a notação de Einstein.

⁴Esta definição diagramática define a categoria dos objetos do tipo Hopf. Na prática, usamos esta definição que generaliza os morfismos para demonstrar resultados por diagrama.

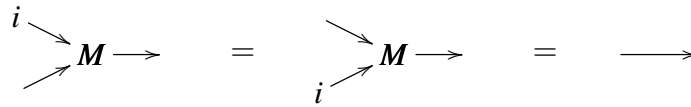
- As arestas são os objetos da categoria ⁵
- Os vértices representam os morfismos das álgebras de Hopf.
- Os diagramas representam, em geral, as propriedades que definem os tensores de uma álgebra de Hopf.

Omitiremos, quando não trouxer confusão para o leitor os objetos nas arestas tendo em vista que o objeto é sempre uma álgebra de Hopf fixada $\mathbb{H}$. Enunciaremos a versão diagramática dos axiomas de álgebra:

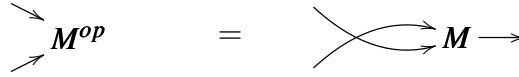
(i) Associatividade:



(ii) Unidade:

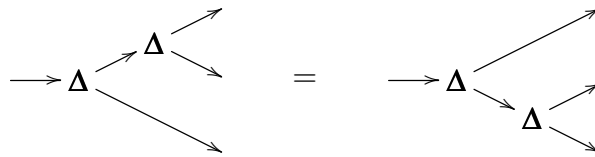


Efetuada um cruzamento⁶ nas entradas do diagrama de M obtemos M^{op} , que pode ser visto abaixo.

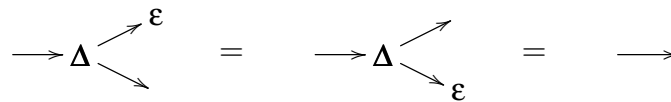


Representaremos a coassociatividade e counidade diagramaticamente abaixo.

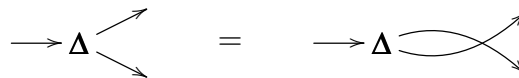
(i) Coassociatividade:



(ii) Counidade:



Diagramaticamente, temos que Δ^{cop} é a aplicação Δ com as saídas cruzadas ⁴ como indica o diagrama a seguir:



⁵A definição de categoria se encontra no apêndice B. No nosso caso, os objetos são a álgebra de Hopf $\mathbb{H}$.

⁶Leia a Seção A.10.

A definição de biálgebra é interpretada pelo conjunto de diagramas abaixo:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow \\ \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow M \longrightarrow \Delta \longrightarrow \\ \longrightarrow M \longrightarrow \Delta \longrightarrow \end{array}, \quad \begin{array}{c} \epsilon \longrightarrow \Delta \longrightarrow \\ \epsilon \longrightarrow \Delta \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \epsilon \longrightarrow \\ \epsilon \longrightarrow \end{array},$$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow M \longrightarrow i \\ \longrightarrow M \longrightarrow i \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow i \\ \longrightarrow i \end{array}, \quad \epsilon \longrightarrow i = 0 = id_{\mathbb{k}}$$

ou seja, se os diagramas de álgebra e coálgebra satisfazem as relações anteriores, então M, i, Δ, ϵ tem uma estrutura de biálgebra.

Por fim, para definir uma álgebra de Hopf, precisamos de diagramas que definam a propriedade da antípoda. Representamos o axioma da antípoda abaixo.

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \xrightarrow{S} M \longrightarrow \\ \longrightarrow \Delta \xrightarrow{S} M \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \xrightarrow{S} M \longrightarrow \\ \longrightarrow \Delta \xrightarrow{S} M \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \epsilon \quad i \longrightarrow \end{array}$$

Lembre que em grafos de vértice rígido fixamos uma ordem para as entradas e saídas Seção A.7.3. Adotamos esta ordem nos diagramas abaixo.

Definição 3.16. Os diagramas a seguir definem a integral à direita e a integral esquerda.

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \xrightarrow{\lambda_R} \\ \longrightarrow \Delta \xrightarrow{\lambda_R} \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \lambda_R \quad i \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \xrightarrow{\lambda_L} \\ \longrightarrow \Delta \xrightarrow{\lambda_L} \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \lambda_L \longrightarrow \quad i \longrightarrow \end{array}$$

De maneira análoga ao que fizemos com as integrais, exibiremos os diagramas que definem as cointegrais.

Definição 3.17. Sejam Λ_L, Λ_R ⁷ são morfismos. Neste contexto, os diagramas que definem a propriedade das cointegrais são

$$\begin{array}{c} \longrightarrow M \longrightarrow \\ \Lambda_L \longrightarrow M \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \epsilon \quad \Lambda_L \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \Lambda_R \longrightarrow M \longrightarrow \\ \Lambda_R \longrightarrow M \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \epsilon \quad \Lambda_R \longrightarrow \end{array}$$

A partir de agora falaremos sobre os tensores ‘Ladders’⁸. O Apêndice ?? explica a natureza dos diagramas, que serão necessários para desenvolver a teoria dos tensores integrais. Contudo, apenas observando as propriedades dos ladders e, com a explicação algébrica que daremos em seguida ao próximo lema, acredito que o leitor terá os subsídios necessário para compreensão do restante da seção.

⁷Cabe ressaltar que Λ_L e Λ_R denotam, neste caso, não as integrais, mas as transformações lineares de $\mathbb{k}$ para $\mathbb{H}$, definidas por $\Lambda_L(1_{\mathbb{k}}) = \Lambda_L$ e $\Lambda_R(1_{\mathbb{k}}) = \Lambda_R$.

⁸No apêndice de categorias, descrevemos os grafos de VR e as propriedades que nossos diagramas têm.

Lema 3.4. (*Ladder de Kuperberg*) Os tensores:

$$\begin{array}{cccc}
 \rightarrow M \rightarrow & \rightarrow M \rightarrow & \leftarrow M \leftarrow & \leftarrow M \leftarrow \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 \rightarrow \Delta \rightarrow & \leftarrow \Delta \leftarrow & \rightarrow \Delta \rightarrow & \leftarrow \Delta \leftarrow
 \end{array}$$

quando vistos como endomorfismo dos espaços $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$, $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}^*$, $\mathbb{H}^* \otimes \mathbb{H}$ e $\mathbb{H}^* \otimes \mathbb{H}^*$, são invertíveis e seus tensores inversos são respectivamente:

$$\begin{array}{cccc}
 \rightarrow M \rightarrow & \rightarrow M \rightarrow & \leftarrow M \leftarrow & \leftarrow M \leftarrow \\
 \uparrow S & \uparrow S & \uparrow S & \uparrow S \\
 \rightarrow \Delta \rightarrow & \leftarrow \Delta \leftarrow & \rightarrow \Delta \rightarrow & \leftarrow \Delta \leftarrow
 \end{array}$$

Demonstração. Analisaremos o primeiro diagrama:

$$(a) \quad \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \\ S \quad \quad \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \rightarrow M \\ \uparrow \quad \curvearrowright \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \varepsilon \quad i \\ \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array}$$

O primeiro diagrama é a composição do tensor com seu ‘candidato’ a tensor inverso. Fizemos na segunda parte o uso da propriedade diagramática da associatividade e da coassociatividade para o tensor. No terceiro diagrama, fizemos uso da propriedade da antípoda. Por fim, usamos a definição diagramática da unidade e da counidade. E, segue a identidade dos diagramas que significa que a justaposição, que simbolicamente é a composição dos morfismos, mantém as entradas originais. Por outro lado, temos que

$$\begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \\ S \quad \quad \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \rightarrow M \\ \uparrow \quad \curvearrowright \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \varepsilon \quad i \\ \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array}$$

ou seja, trocando a ordem também chegamos ao fato que os morfismos justapostos mantêm as entradas originais. Esta composição trata-se, na realidade, da identidade de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$. Os diagramas abaixo seguem o mesmo raciocínio.

$$(b) \quad \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \\ S \quad \quad \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \rightarrow M \\ \uparrow \quad \curvearrowright \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \varepsilon \quad i \\ \uparrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ \uparrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \rightarrow M \\ \uparrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \uparrow \\ \epsilon \quad i \\ \uparrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array} =$$

Agora que vimos os dois itens (a) e (b) podemos resolver sem problemas os itens (c) e (d). Logo os morfismos são invertíveis e os candidatos a ‘inversos’ são realmente seus morfismos inversos como queríamos demonstrar. $\square$

Lema 3.5. *As seguintes identidades são mantidas na álgebra de Hopf:*

$$\begin{array}{ll}
(a) \quad \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \epsilon \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \epsilon \\ \rightarrow \epsilon \end{array} &
(b) \quad \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow S \rightarrow M^{op} \rightarrow \\ \rightarrow S \rightarrow \end{array} \\
(c) \quad \begin{array}{c} i \rightarrow S \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} i \rightarrow \end{array} &
(d) \quad \begin{array}{c} S^{-1} \\ \rightarrow \Delta \quad M^{op} \rightarrow \\ \curvearrowright \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \epsilon \quad i \rightarrow \end{array}
\end{array}$$

Demonstração. (a)

$$\begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \epsilon \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow \epsilon \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \epsilon \end{array}$$

Pelos tensores ‘ladders’ serem invertíveis, como vimos no Lema 3.4, temos que:

$$\begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \epsilon \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \epsilon \quad \epsilon \end{array}$$

E, se colocamos ϵ na entrada livre de Δ , temos que isto implicará na seguinte igualdade entre os morfismos:

$$\begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \epsilon \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \epsilon \\ \rightarrow \epsilon \end{array}$$

Para o item (b), temos que:

$$\begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow M \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow S \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \nearrow \quad \nwarrow \\ \rightarrow S \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \epsilon \\ \rightarrow \epsilon \end{array} i \rightarrow$$

Por outro lado,

$$\begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow S \rightarrow M^{op} \rightarrow M \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow \\ \searrow S \nearrow \\ \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow M \end{array} & = & \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow \\ \searrow S \nearrow \\ \longrightarrow \epsilon \quad i \longrightarrow M \end{array}
 \end{array}$$

E, aplicando a definição de i e a propriedade da antípoda S , chegamos à

$$\begin{array}{c}
 \longrightarrow \epsilon \\
 \qquad \qquad i \longrightarrow \\
 \longrightarrow \epsilon
 \end{array}$$

Portanto concluímos que os seguintes morfismos são iguais:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow \\ \searrow \nearrow \\ \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow S \longrightarrow M \end{array} & = & \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow M \longrightarrow \\ \searrow \nearrow \\ \longrightarrow \Delta \longrightarrow S \longrightarrow S \longrightarrow M^{op} \end{array}
 \end{array}$$

Aplicando os inversos dos tensores ‘ladders’ na parte de cima e na parte de baixo dos tensores anteriores de forma parecida com a que fizemos no itens (a) chegamos à igualdade a seguir.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} M \longrightarrow S \longrightarrow & = & \begin{array}{c} \longrightarrow S \\ \nearrow \searrow \\ \longrightarrow S \end{array} M^{op} \longrightarrow
 \end{array}$$

Para o item (c), calculamos $\longrightarrow S \longrightarrow \epsilon = \longrightarrow \epsilon$ começaremos por:

$$i \longrightarrow S \longrightarrow = \begin{array}{c} i \longrightarrow S \\ \searrow \nearrow \\ i \longrightarrow M \end{array} \longrightarrow = \begin{array}{c} i \longrightarrow \\ \searrow \nearrow \\ i \longrightarrow S^{-1} \end{array} M^{op} \longrightarrow S \longrightarrow = i \longrightarrow$$

Pela definição de unidade e pelo item anterior, segue como vimos no item (c). E assim acabamos de mostrar o item (c). Analogamente, podemos verificar que $\longrightarrow S \longrightarrow \epsilon = \longrightarrow \epsilon$. Como segue abaixo:

$$\longrightarrow S \longrightarrow \epsilon = \longrightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow S \longrightarrow \epsilon \\ \searrow \epsilon \end{array} = \longrightarrow S \longrightarrow \Delta^{cop} \begin{array}{c} \nearrow \epsilon \\ \searrow S^{-1} \longrightarrow \epsilon \end{array} = \longrightarrow \epsilon$$

Portanto temos que $\longrightarrow S \longrightarrow \epsilon = \longrightarrow \epsilon$.

Para os tensores (d), temos:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \xrightarrow{S^{-1}} M^{op} \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \xrightarrow{\quad} M \xrightarrow{S^{-1}} \end{array} \longrightarrow \epsilon \quad i \longrightarrow$$

Analogamente,

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{S^{-1}} \end{array} M^{op} \longrightarrow = \longrightarrow \Delta \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} M \xrightarrow{S^{-1}} \longrightarrow = \longrightarrow \epsilon \quad i \longrightarrow \end{array}$$

Assim vemos que, se assumimos S é invertível, então S^{-1} é uma antípoda para $\mathbb{H}^{op}$. $\square$

Obs.: 3.5.1. Este lema prova uma versão diagramática dos resultados obtidos na seção 1.6. O leitor poderá ver que o item anterior é, por exemplo, a versão diagramática do item (a) do Teorema 2.1. O item (c) é a versão diagramática da Proposição 2.13 e o item (d) é uma versão tensorial do Corolário 2.1.

3.6 Tensores Integrais: Existência e Unicidade

Nesta seção, definiremos o tensor integral à direita P_R (resp. P_L) que funciona ao mesmo tempo como integral e cointegral à direita (resp. integral e cointegral à esquerda). Sendo assim, encontramos as ‘integrais’ de uma álgebra de Hopf sem usar a definição de módulo de Hopf como se fazia antes dos trabalhos de Kuperberg⁹. Na última seção deste Capítulo, retornaremos a usar estas estruturas, de modo particular em álgebras de Hopf involutórias, para reconstruir a estrutura tensorial de uma álgebra de Hopf involutória.

$$\longrightarrow P_R \longrightarrow = \longrightarrow M \begin{array}{c} \nwarrow S \\ \nearrow S \end{array} \Delta \longrightarrow \quad \text{e} \quad \longrightarrow P_L \longrightarrow = \longrightarrow M \begin{array}{c} \nwarrow S \\ \nearrow S \end{array} \Delta \longrightarrow$$

Para discutir os diagramas dos tensores integrais e cointegrais faremos uso do conceito de coeficientes de estrutura como apresentamos na Seção 3.5¹⁰. Os diagramas, na realidade, são uma forma de definir os morfismos de maneira mais simples para que os cálculos dos tensores se tornem tabeláveis.

Seja S a antípoda de $\mathbb{H}$. Suponha que $\lambda \in \int_r$, $\Lambda \in \int_l^*$ são diferentes de zero. Então, se $\lambda(\Lambda) \neq 0$ [Rad94], podemos assumir que $\lambda(\Lambda) = 1$, o item (a) da proposição 2.4.2¹¹ nos dá a equação

$$tr(r(a) \circ S^2 \circ r(p)) = \lambda(a)p(\Lambda) \quad (3.16)$$

para todos $a \in \mathbb{H}$ e $p \in \mathbb{H}^*$. Isto expressa uma conexão fundamental entre a função traço em $End(\mathbb{H})$ e as integrais. Motivados pelas ideias de Kuperberg em [Kup96] e [Kup89], expressaremos equação (3.16) em termos endomorfismo $Q = \lambda \otimes \Lambda$ de A como segue

$$p(Q(a)) = tr(r(a) \circ S^2 \circ r(p)) \quad (3.17)$$

para todo $p \in \mathbb{H}^*$ e $a \in \mathbb{H}$. Descreveremos Q em termo dos coeficientes de estrutura. Podemos omitir o somatório. Assim escrevemos as relações anteriores como segue:

⁹Kuperberg definiu esses tensores para encontrar invariante de 3-variedades fechadas nos artigos [Kup96],[Kup89].

¹⁰Ao leitor que não conhece o conceito aconselhamos ler, além da Seção 3.5, a seção Coeficientes de Estrutura no apêndice B.

¹¹ou o item (a) da proposição 2 de [Rad94].

$$a_i a_j = M(a_i \otimes a_j) = M_{i,j}^k a_l, \quad \Delta(a_k) = \Delta_k^{i,j} a_i \otimes a_j \quad \text{e} \quad S(a_j) = S_j^i a_i.$$

Agora seja $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ uma base dual de $\mathbb{H}^*$ que é a base dual para base $\{a_1, \dots, a_n\}$ de $\mathbb{H}$, ou seja, temos que $\alpha_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Então verificamos facilmente que

$$\begin{aligned} (r(a_j) \circ S^2 \circ r(\alpha_i))(a_l) &= r(a_j) \circ S^2(r(\alpha_i)(a_k)) \\ &= r(a_j) \circ S^2(\Delta_k^{r,v} \alpha_i(a_r) a_v) \\ &= r(a_j) \circ S(\Delta_k^{i,v} S(a_v)) \\ &= r(a_j) (\Delta_k^{i,v} S_v^u S(a_u)) \\ &= r(a_j) (\Delta_k^{i,v} S_v^u S_u^w a_w) \\ &= \Delta_k^{i,v} S_v^u S_u^w (a_w \cdot a_j) \\ &= \Delta_k^{i,v} S_v^u S_u^w m_{w,j}^x a_x \end{aligned}$$

para todos $1 \leq i, j, l \leq n$, ou seja, é um somatório sobre todos os índices livres. Portanto

$$\text{tr}(r(a_j) \circ S^2 \circ r(\alpha_i)) = m_{w,j}^k \Delta_k^{i,v} S_v^u S_u^w$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$. Podemos escrever $Q(a_j) = Q_j^i a_i$, onde $Q_j^i = \alpha_i(Q(a_j))$ para todos $1 \leq i, j \leq n$ fixados. Assim

$$Q_j^i = m_{w,j}^l \Delta_l^{i,v} S_v^u S_u^w \quad (3.18)$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$. Agora etiquetaremos as arestas com os índices que representarão as operações básicas

$$\begin{array}{c} i \\ \swarrow \\ M \xrightarrow{1} \end{array}, \quad \begin{array}{c} 1 \\ \rightarrow \\ \Delta \end{array} \begin{array}{c} i \\ \nearrow \\ j \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} j \\ \rightarrow \\ S \end{array} \begin{array}{c} i \\ \rightarrow \end{array}$$

representa os coeficientes de estrutura $M_{i,j}^l$, $\Delta_l^{i,j}$ e S_j^i respectivamente. Então a equação (3.18) pode ser expressada simbolicamente por

$$\begin{array}{c} j \\ \rightarrow \\ Q \end{array} \begin{array}{c} i \\ \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} S \\ \swarrow \\ u \\ \uparrow \\ w \\ \nearrow \\ S \end{array} \\ \begin{array}{c} j \\ \rightarrow \\ M \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} i \\ \rightarrow \\ \Delta \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \rightarrow \\ Q \end{array} \rightarrow = \begin{array}{c} \begin{array}{c} S \\ \swarrow \\ \nearrow \\ S \end{array} \\ \begin{array}{c} \rightarrow \\ M \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} i \\ \rightarrow \\ \Delta \end{array} \end{array}$$

omitindo-se os índices das linhas temos a igualdade de tensores anterior anterior.

Consideremos o endomorfismo P_R de $\mathbb{H}$ definido por $P_R(a_j) = m_{w,j}^l S_l^u \Delta_u^{v,i} S_v^w a_x$ para todos $1 \leq j \leq n$, ou equivalentemente por

$$(P_R)_j^i = m_{w,j}^l S_l^u \Delta_u^{v,i} S_v^w. \quad (3.19)$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$. Note que P_R pode ser descrito diagramaticamente por

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{j} P_R \xrightarrow{i} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & S & & \\ & w \swarrow & & \nwarrow v & \\ \xrightarrow{j} M & & & & \Delta \xrightarrow{i} \\ & \searrow l & & \nearrow u & \\ & & S & & \end{array} \end{array}$$

Este diagrama foi introduzido por Kuperberg¹² em seus artigos [Kup96],[Kup89]. Ele provou as relações diagramáticas usando uma generalização de uma álgebra de Hopf¹³, como mencionamos na Seção 3.5. Além disso, temos que $\text{tr}(P_R) = 1$ e por consequência teremos que $\lambda_R(\Lambda_R) = 1$.

A partir deste momento, discutiremos a existência e unicidade das integrais. Sejam $\lambda_R \in \mathcal{I}^r$, $\Lambda_R \in \mathcal{I}_r$ e consideremos o endomorfismo $P_R = \lambda_R \otimes \Lambda_R \in \mathbb{H}$. Definamos os tensores

$$P_R(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = P_R(a) \otimes 1 \quad \text{e} \quad (P_R(a))b = \varepsilon(b)P_R(a) \quad (3.20)$$

para todos $a, b \in \mathbb{H}$. A segunda equação segue de Λ_R ser uma integral à direita de $\mathbb{H}$, observe que

$$\begin{aligned} (P_R(a))(1_{\mathbb{K}} \otimes b) &= (\lambda_R(a) \otimes \Lambda_R)(1_{\mathbb{K}} \otimes b) \\ &= \lambda_R(a) \otimes \Lambda_R b \\ &= \lambda_R(a) \otimes \varepsilon(b)\Lambda_R \\ &= \varepsilon(b)(\lambda_R(a) \otimes \Lambda_R) \\ &= \varepsilon(b)(P_R(a)) \end{aligned}$$

para todo $a, b \in \mathbb{H}$. A primeira equação é consequência da definição de Λ_R e do fato que

$$\lambda(a_{(1)})a_{(2)} = \lambda(a)1_{\mathbb{H}} = \lambda(a)i(1_{\mathbb{K}}). \quad (3.21)$$

Observe que, para todo $p \in \mathbb{H}^*$, temos que

$$\begin{aligned} p(\lambda(a_{(1)})a_{(2)}) &= \lambda(a_{(1)})p(a_{(2)}) \\ &= p(1)\lambda(a) \\ &= p(i(1_k))\lambda(a). \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{H}$. Assim sendo temos que, se $p = \varepsilon$, então tomando uma base dual de $\mathbb{H}$ dada por $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, onde $\alpha_i(1) = \delta_{i,1}$, temos que

$$\alpha_k(\lambda(a_{(1)})a_{(2)}) = \lambda(a_{(1)})\alpha_k(a_{(2)}) = \alpha_k(1)\lambda(a) = \delta_{k,1}\lambda(a).$$

Assim temos que $\lambda_R(a_{(1)})a_{(2)} = \lambda(a)1_{\mathbb{H}}$. Agora podemos calcular a primeira equação (3.20) segue da definição de integral à direita de $\mathbb{H}$. Note que

$$\begin{aligned} P_R(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} &= \lambda_R(a_{(1)})a_{(2)} \otimes \Lambda_R \\ &= \Lambda_R \otimes \lambda_R(a_{(1)})a_{(2)} \\ &= \Lambda_R \otimes \lambda_R(a)1_{\mathbb{H}} \\ &= \lambda_R(a)\Lambda_R \otimes 1_{\mathbb{H}} \\ &= P_R(a) \otimes 1_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

¹²Kuperberg usou estes tensores para encontrar invariantes das 3-variedades como se pode ver em [Kup96],[Kup89].

¹³Estas generalizações são citadas no artigo como Objetos do tipo-Hopf.

Agora afirmamos que é fácil ver que qualquer combinação linear das integrais e cointegrais de $\mathbb{H}$ é ainda uma integral e cointegral de $\mathbb{H}$.

Lema 3.6. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{k}$ e suponha que P_R é uma integral não-nula e uma cointegral de $\mathbb{H}$. Escreva $P_R = \sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \Lambda_i \in \mathbb{H}^* \otimes \mathbb{H} = \text{End}(\mathbb{H})$ onde r é tão pequeno quanto possível. Então $\lambda_i \in \int^r$ e $\Lambda_i \in \int_r$ para todos $1 \leq i \leq r$.*

Demonstração. Desde que $P_R \neq 0$ e r seja o natural minimal tal que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ são linearmente independentes. Dado $a \in \mathbb{H}$, então

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i(a_{(1)}) \Lambda_i \otimes a_{(2)} = P_R(a_{(1)}) \otimes a_{(2)} = P_R(a) \otimes 1 = \sum_{i=1}^r \lambda_i(a) \Lambda_i \otimes 1.$$

Isto significa que

$$\sum_{i=1}^r \Lambda_i \otimes \lambda_i(a_{(1)}) a_{(2)} = \sum_{i=1}^r \Lambda_i \otimes \lambda_i(a) 1.$$

Desde que $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_r\}$ seja linearmente independente, temos que $\lambda_i(a_{(1)}) a_{(2)} = \lambda_i(a) 1$ para todos $1 \leq i \leq r$. Assim $\lambda_i \in \int^r$, para todos $1 \leq i \leq r$, pela equação (3.21).

Agora seja $b \in \mathbb{H}$, se $(P_R(a))b = \varepsilon(b)P_R(a)$ ou equivalentemente $\sum_{i=1}^r \lambda_i(a) \Lambda_i b = \sum_{i=1}^r \varepsilon(b) \lambda_i(a) \Lambda_i$ para todos $a \in \mathbb{H}$, segue que $\sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \Lambda_i b = \sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \varepsilon(b) \Lambda_i$. Desde que $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ seja linearmente independente, concluímos que $\Lambda_i b = \varepsilon(b) \Lambda_i$ para todos $1 \leq i \leq r$. Assim $\Lambda_i \in \int_r$ para todos $1 \leq i \leq r$. $\square$

Note que a equação (3.20) pode ser expressada por

$$\begin{array}{c} \leftarrow P_R \\ \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \nwarrow \\ P_R \\ \nearrow \end{array} \quad i \longrightarrow \quad e \quad \begin{array}{c} \rightarrow P_R \\ \downarrow \\ \rightarrow M \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \varepsilon \\ P_R \end{array} \quad (3.22)$$

Analogamente ao que foi feito para os tensores integrais P_R , podemos definir o tensor P_{RL} satisfazendo o seguinte $\rightarrow P_{RL} \rightarrow = \rightarrow \lambda_R \Lambda_L \rightarrow$.

Afirmção 3.6.1. *Os diagramas dos tensores abaixo são equivalentes:*

$$\begin{array}{c} \Delta \xrightarrow{\quad} \\ \searrow S \\ \rightarrow M \rightarrow P_{RL} \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_L \rightarrow \Delta \xrightarrow{\quad} \\ \searrow S \\ \rightarrow M \rightarrow \lambda_R \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \\ S \end{array}$$

Demonstração. Ora, apliquemos S aos dois lados do tensor acima. Teremos que

$$\begin{array}{c} \Lambda_L \rightarrow \Delta \xrightarrow{\quad} \\ \searrow S \\ \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow \lambda_R \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow S \rightarrow \end{array}$$

Segue que, no lado esquerdo, temos:

$$\begin{array}{c} \Lambda_L \rightarrow \Delta \xrightarrow{\quad} \\ \searrow S \\ \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow \lambda_R \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_L \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow \lambda_R \end{array}$$

Como sabemos $\rightarrow S \rightarrow \lambda_R = \rightarrow \lambda_L$ e, portanto:

$$\begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \Lambda_L \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \lambda_L \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \Lambda_L \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \lambda_L \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow \\ \Lambda_L \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow \lambda_L \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_L \rightarrow \lambda_L \\ \rightarrow \varepsilon i \rightarrow \end{array}$$

Aplicando o morfismo o Lema 3.4 de maneira apropriada temos como resultado que

$$\begin{array}{c} \Lambda_L \rightarrow \Delta \rightarrow \\ \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow \lambda_R \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_L \rightarrow \lambda_L \\ \rightarrow S \rightarrow \end{array}$$

Logo, como assumimos S invertível, segue o resultado desejado. $\square$

Lema 3.7. Os tensores abaixo são equivalentes:

$$\begin{array}{c} \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow P_{RL} \\ \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow \lambda_R \\ \Lambda_L \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \rightarrow$$

Demonstração. A demonstração é simples e segue a ideia da afirmação anterior. Deixamos ela a cargo leitor. $\square$

Portanto o teorema abaixo trata-se de uma consequência deste resultado.

Lema 3.8 (Fórmulas do traço de Radford). *Seja P_{RL} o tensor que descrevemos anteriormente. Então, diagramaticamente, para álgebras de Hopf vale que:*

$$\begin{array}{c} \rightarrow f \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow f \rightarrow M \rightarrow P_{RL} \\ \Delta \rightarrow S \rightarrow \end{array} \quad (3.23)$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow f \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow f \rightarrow S \rightarrow M \rightarrow P_{RL} \\ \Delta \rightarrow \end{array} \quad (3.24)$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow f \end{array} = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow S \rightarrow f \rightarrow M \rightarrow P_{RL} \\ \Delta \rightarrow \end{array} \quad (3.25)$$

Demonstração. Para espaços vetoriais e pela Lema 3.7, temos que vale

$$\longrightarrow f \longrightarrow = \Delta \begin{array}{c} \longrightarrow f \longrightarrow \\ \searrow S \\ \longrightarrow M \longrightarrow P_{RL} \end{array}$$

Então tomando o traço em ambos os lados, e aplicando os movimentos permitidos em um grafo VR, para obter a fórmula desejada.

(b) Usando a Lema 3.6.1 para escrever a identidade, obtemos

$$\longrightarrow f \longrightarrow = \longrightarrow f \longrightarrow S \begin{array}{c} \longrightarrow M \longrightarrow P_{RL} \\ \nearrow \Delta \longrightarrow \end{array}$$

Neste diagrama, podemos tomar o traço em ambos os lados, e aplicando os movimentos permitidos nos diagramas VR, obtemos a fórmula desejada.

(c) Vamos usar o fato de $S \circ S^{-1} = S^{-1} \circ S = I$ para escrever a relação abaixo:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow f \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow S^{-1} \longrightarrow S \longrightarrow f \longrightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow S \longrightarrow f \longrightarrow S^{-1} \longrightarrow \end{array} =$$

Neste ponto, aplicando a relação (b) temos que:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow S \longrightarrow f \longrightarrow S^{-1} \longrightarrow M \longrightarrow P_{RL} \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow S \longrightarrow f \longrightarrow M \longrightarrow P_{RL} \end{array}$$

Logo demonstramos a nossa proposição. $\square$

Interpretamos estes tensores do Lema 3.8 com a ajuda dos artigo [KR00], por exemplo, podemos considerar o primeiro tensor do lema anterior colocando $a, b \in \mathbb{H}$ nas entradas do tensor e teremos, traduzindo para a linguagem algébrica, que

$$(ab_{(1)})S(b_{(2)(1)}) \otimes b_{(2)(2)} = a \otimes b = (aS(b_{(1)}))b_{(2)(1)} \otimes b_{(2)}b_{(2)},$$

Substituindo a e b também nos outros diagramas temos

$$(ab_{(1)(2)})S(b_{(2)}) \otimes b_{(1)(1)} = a \otimes b = (aS(b_{(1)(2)}))b_{(2)} \otimes b_{(1)(1)},$$

$$b_{(1)}(S(b_{(2)(1)}a)) \otimes b_{(2)(2)} = a \otimes b = S(b_{(1)})(b_{(2)(1)}a) \otimes b_{(2)(2)}$$

e

$$b_{(1)(2)}(S(b_{(2)})a) \otimes b_{(1)(1)} = a \otimes b = S(b_{(1)(2)})(b_{(2)}a) \otimes b_{(1)(1)}$$

respectivamente para cada um dos outros diagramas. Observemos agora a primeira relação:

$$\begin{aligned}
 (ab_{(1)})S(b_{(2)(1)}) \otimes b_{(2)(2)} &= a(b_{(1)}S(b_{(2)(1)})) \otimes b_{(2)(2)} \\
 &= a(b_{(1)(1)}S(b_{(1)(2)})) \otimes b_{(2)} \\
 &= a(\epsilon(b_{(1)})1) \otimes b_{(2)} \\
 &= a1 \otimes \epsilon(b_{(1)})b_{(2)} \\
 &= a \otimes \epsilon(b_{(1)})b_{(2)} \\
 &= a \otimes b
 \end{aligned}$$

que é a tradução algébrica da primeira parte da demonstração diagramática. A segunda parte vem a seguir:

$$\begin{aligned}
 (aS(b_{(1)}))b_{(2)(1)} \otimes b_{(2)(2)} &= a(S(b_{(1)})b_{(2)(1)}) \otimes b_{(2)(2)} \\
 &= a(S(b_{(1)(1)})b_{(1)(2)}) \otimes b_{(2)} \\
 &= a(\epsilon(b_{(1)})1) \otimes b_{(2)} \\
 &= a1 \otimes \epsilon(b_{(1)})b_{(2)} \\
 &= a \otimes \epsilon(b_{(1)})b_{(2)} \\
 &= a \otimes b.
 \end{aligned}$$

A seguir, temos o resultado que mostra que o tensor P_R satisfaz as condições de ser uma integral à direita e uma cointegral à direita. Além disso, provemos a unicidade deste tensor no item (b) abaixo.

Teorema 3.9. *Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf de dimensão finita e P_R um endomorfismo definido pela equação (3.19). Então:*

- (a) P_R é uma integral e uma cointegral de $\mathbb{H}$ que satisfaz $tr(P_R) = 1$.
- (b) Integrais e cointegrais de $\mathbb{H}$ são únicos a menos de multiplicação por escalar.

Demonstração. Seguimos a prova dada em [Kup96] e decifraremos alguns detalhes no processo. Os seguintes argumentos pode ser visto através dos desenhos na demonstração diagramática, ou eles podem ser vistos como uma prove simbólica prova nestes direito próprio. Para mostrar a parte (a), iniciamos pela primeira equação estabelecida a partir da equação (3.22). É suficiente mostrar que

$$\begin{array}{ccc}
 \leftarrow \Delta \rightarrow P_R & & \\
 \downarrow & & \searrow \\
 \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow & = & S \quad i \rightarrow \cdot
 \end{array}$$

Relembre que, pelo Lema 3.4, vale a relação abaixo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \rightarrow \Delta \rightarrow & \rightarrow \Delta \rightarrow & \rightarrow \Delta \rightarrow \Delta \rightarrow & \rightarrow & \\
 \downarrow S & \circ & \downarrow S & \Rightarrow & \\
 \rightarrow M \rightarrow & \rightarrow M \rightarrow & \rightarrow M \rightarrow M \rightarrow & \Rightarrow & \\
 & & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Observando a relação anterior, obtemos o seguinte resultado pela composição do morfismo inverso.

$$\begin{array}{c} \leftarrow \Delta \cdots \Delta \rightarrow P_R \\ \downarrow S \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \rightarrow M \cdots M \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \swarrow \Delta \nwarrow \\ S \quad S \\ \searrow M \nearrow \end{array} i \longrightarrow \Rightarrow \begin{array}{c} \leftarrow P_R \\ \uparrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \swarrow \quad \nwarrow \\ P_R \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} i \longrightarrow$$

Pelo lema das Lema 3.4, obtemos a primeira equação de (3.22). Na segunda igualdade de **I**, usamos a propriedade a definição da biálgebra. O diagrama mais a direita de **II** é obtido do último diagrama de **I** pela coassociatividade de Δ . A primeira igualdade de **II** é consequência do lema da Lema 3.4. Usando o Lema 3.5, temos que o resultado final.

$$\begin{array}{l} \textbf{I} \\ \begin{array}{c} \leftarrow \Delta \leftarrow P_R \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \rightarrow S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \rightarrow S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \end{array} \end{array} \\ \\ \textbf{II} \\ \begin{array}{c} \leftarrow \Delta \leftarrow S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \rightarrow M \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \Delta \leftarrow S \\ \searrow \quad \swarrow \\ \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} \swarrow \quad \nwarrow \\ S \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} i \longrightarrow$$

Os diagramas nas últimas igualdades não tem ciclos fechados e a última igualdade é algebricamente $S(a_{(1)})_{(2)} \otimes S(a_{(1)})_{(1)} a_{(2)} = S(a) \otimes 1$, quando através destes cálculos usamos a equivalência diagramática dos axiomas de álgebras de Hopf.

Estes cálculos estabelecem a primeira igualdade da equação (3.22) pelo que vimos antes. A segunda igualdade da equação (3.22) é análoga.

$$\begin{array}{l} \textbf{I} \\ \begin{array}{c} P_R \leftarrow M \leftarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} S \leftarrow M \leftarrow M \leftarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \\ \downarrow \\ \rightarrow M \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} S \leftarrow M \leftarrow M \leftarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow M \rightarrow \\ \leftarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \end{array}$$

$$\text{II} \quad \begin{array}{c} S \leftarrow M \leftarrow \\ \downarrow \quad \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow S \rightarrow M \\ \downarrow \quad \quad \uparrow \\ \Delta \rightarrow M \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ \leftarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \end{array} = \begin{array}{c} S \leftarrow M \\ \swarrow \quad \searrow \\ \Delta \rightarrow M \end{array} = \rightarrow \varepsilon \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ S \\ \searrow \end{array}$$

E, aplicando o Lema 3.4, chegamos à

$$\begin{array}{c} \rightarrow P_R \\ \downarrow \\ \rightarrow M \rightarrow \end{array} = \rightarrow \varepsilon \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ P_R \\ \searrow \end{array}$$

Como S é uma antípoda da biálgebra, o equivalente diagramático do axioma da álgebra de Hopf $S(a_{(1)})a_{(2)} = \varepsilon(a)1$ pode ser visto na Seção 3.5¹⁴. Usando isto calculamos:

$$\begin{array}{c} \text{loop } P_R \end{array} = \begin{array}{c} \text{rectangle with } S \text{ at top, } \Delta \text{ at bottom, } M \text{ at left, and } \Delta \text{ at right, with arrows } M \rightarrow S \leftarrow \Delta \text{ and } S \rightarrow \Delta \leftarrow M \end{array} = \begin{array}{c} M \leftarrow \Delta \\ \swarrow \quad \searrow \\ S \end{array}$$

Então o diagrama anterior se reduz à $i \rightarrow S \rightarrow \varepsilon = i \rightarrow \varepsilon$. E isto estabelece que o traço é $\text{tr}(P_R) = 1$. Logo podemos concluir o item (a) da proposição.

Para provar o item (b), primeiro notamos que

$$\begin{array}{c} \lambda_R \leftarrow M \leftarrow \\ \uparrow \\ \Lambda_R \rightarrow \Delta \rightarrow \end{array} = \Lambda_R \rightarrow \lambda_R \quad \begin{array}{c} \swarrow \\ S \\ \searrow \end{array}$$

que é a expressão diagramática da identidade da álgebra de Hopf deduzida por

$$\begin{aligned} \lambda_R(\Lambda_{R(1)}a)\Lambda_{R(2)} &= \lambda_R(\Lambda_{R(1)}\varepsilon(a_{(2)})a_{(1)})\Lambda_{R(2)} \\ &= \lambda_R(\Lambda_{R(1)}a_{(1)})\Lambda_{R(2)}\varepsilon(a_{(2)}) \\ &= \lambda_R(\Lambda_{R(1)}a_{(1)})\Lambda_{R(2)}a_{(2)}S(a_{(3)}) \\ &= \lambda_R((\Lambda_R a_{(1)})_{(1)})(\Lambda_R a_{(1)})_{(2)}S(a_{(2)}) \\ &= \varepsilon(a_{(1)})\lambda_R(\Lambda_{R(1)})\Lambda_{R(2)}S(a_{R(2)}) \\ &= \lambda_R(\Lambda_{R(1)})\Lambda_{R(2)}S(a) \\ &= (\lambda_R(\Lambda_R)1)S(a), \end{aligned}$$

a última equação é consequência da $\lambda_R(\Lambda_{R(1)})\Lambda_{R(2)} = \lambda_R(\Lambda_R)1$. Note que estes cálculos envolvem uma ‘ladder’ inversa; assim a prova diagramática da identidade da álgebra de Hopf naturalmente

¹⁴Vide os diagramas das página 48-49

envolve o lema das Lema 3.4. Multiplicando ambos os lados da expressão pela ‘ladder’ apropriada temos a equação a seguir.

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow \lambda_R & & \Lambda_R \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \lambda_R \end{array} = \begin{array}{ccc} \Lambda_R & \searrow & P_R \\ & \downarrow & \swarrow \\ & \lambda_R & \end{array}$$

que demonstra o item (b). Com isso concluímos a prova do teorema. $\square$

Ora, este teorema é o teorema da existência e unicidade dos tensores integrais. O item (a) mostra que P_R é um tensor integral e o item (b) mostra que nesta condições ele é único.

Lema 3.9 (Existência de integrais). *O tensor:*

$$\longrightarrow P_R \longrightarrow = \longrightarrow M \begin{array}{c} \swarrow S \\ \searrow S \end{array} \Delta \longrightarrow$$

é ao mesmo tempo uma integral à direita e uma cointegral à direita e seu traço é 1.

Corolário 3.6 (Unicidade de integrais). *Dando uma integral à direita λ_R e uma cointegral à direita Λ_R ,*

$$\longrightarrow \lambda_R \quad \Lambda_R \longrightarrow = \begin{array}{c} \Lambda_R \rightarrow \lambda_R \\ \longrightarrow P_R \longrightarrow \end{array}$$

Observamos que, para provarmos a unicidade de P_R , ficou claro a motivação de vermos este tensor como o produto tensorial das integrais. Dadas uma integral λ_R e uma cointegral Λ_R podemos calcular

$$\Lambda_R \rightarrow \Delta \rightarrow M \rightarrow \lambda_R = \begin{array}{c} \Lambda_R \rightarrow \lambda_R \\ \nearrow S \searrow \end{array}$$

a inversa da ‘ladder’ obtemos que

$$\begin{array}{c} \Lambda_R \rightarrow \\ \rightarrow \lambda_R \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_R \rightarrow \Delta \\ \rightarrow M \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow M \\ \rightarrow \Delta \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow \lambda_R \\ \rightarrow \lambda_R \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_R \rightarrow \lambda_R \\ \rightarrow M \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow S \\ \rightarrow S \end{array} \Delta \rightarrow = \begin{array}{c} \Lambda_R \rightarrow \lambda_R \\ \rightarrow P_R \end{array}$$

Diagramaticamente, o endomorfismo P_R de $\mathbb{H}$ pode ser descrito em termos de um endomorfismo $\mathcal{Q}$ de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ e da função traço.

Obs.: 3.6.1. *Seja S' uma antípoda para a álgebra de Hopf $\mathbb{H}^{op}$. Então temos que:*

$$\begin{array}{c} \rightarrow \Delta \end{array} \begin{array}{c} \nearrow S' \\ \searrow S \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow S \\ \rightarrow M \end{array} \rightarrow = \begin{array}{c} \rightarrow \Delta \end{array} \begin{array}{c} \nearrow S' \\ \searrow S' \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow M^{op} \\ \rightarrow S \end{array} \rightarrow = \begin{array}{c} \rightarrow \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow i \end{array} \begin{array}{c} \rightarrow S \end{array} \rightarrow =$$

Os diagramas acima, a menos de ‘torção’, são iguais. Assim sendo, aplicando o tensor inverso a direita do tensor (a), temos que

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_L \rightarrow \Delta \rightarrow & & \Lambda_L \quad i \rightarrow M \rightarrow \\ \downarrow & = & \downarrow \quad \uparrow S \\ \lambda_R \leftarrow M \leftarrow & & \lambda_R \quad \varepsilon \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array}$$

Agora aplicando novamente o tensor inverso à direita, temos que

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_L \rightarrow & & \Lambda_L \rightarrow \\ \downarrow & = & \downarrow \\ \lambda_R \leftarrow & & \lambda_R \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta \\ \swarrow \quad \searrow \\ S \quad S \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_L \rightarrow & & \Lambda_L \rightarrow \\ \downarrow & = & \downarrow \\ \lambda_R \leftarrow & & \lambda_R \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} P_L \end{array},$$

pelo Lema 3.9, Como λ_R e Λ_L são não nulos, a última igualdade mostra que $\lambda_R(\Lambda_L)$ deve ser não nulo. Finalmente, obtemos que:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_L \rightarrow \varepsilon & & \Lambda_L \rightarrow \varepsilon \\ \downarrow & = & \downarrow \\ \lambda_R \leftarrow & & \lambda_R \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta \\ \swarrow \quad \searrow \\ S \quad S \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ M \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_L \rightarrow & & \Lambda_L \rightarrow \\ \downarrow & = & \downarrow \\ \lambda_R \leftarrow & & \lambda_R \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} S^2 \\ \curvearrowright \\ M \end{array}$$

e, como queríamos demonstrar, vimos que os morfismos anteriores se equivalem, ou seja, o morfismo à direita é um múltiplo escalar de uma integral à direita. $\square$

Obs.: 3.7.1. Observamos que, se trocarmos Δ por Δ^{op} e M por M^{op} , temos uma analogia com resultado anterior da seguinte maneira

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_R \rightarrow & & \Lambda_R \rightarrow \\ \downarrow & = & \downarrow \\ \lambda_L \leftarrow & & \lambda_L \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta^{cop} \\ \swarrow \quad \searrow \\ S \quad S \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ M^{op} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_R \rightarrow & & \Lambda_R \rightarrow \\ \downarrow & = & \downarrow \\ \lambda_L \leftarrow & & \lambda_L \leftarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta \\ \swarrow \quad \searrow \\ S \quad S \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ M \end{array}$$

Desta maneira, temos que

$$\begin{array}{c} \Lambda_R \rightarrow \varepsilon \\ \lambda_L \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_R \\ \downarrow \\ \lambda_L \end{array} \begin{array}{c} \Delta \\ \swarrow \quad \searrow \\ S \quad S \\ \searrow \quad \swarrow \\ M \end{array} \begin{array}{c} \varepsilon \\ \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} \Lambda_R \\ \downarrow \\ \lambda_L \end{array} \begin{array}{c} S^2 \\ \curvearrowright \\ M \end{array}$$

Agora nos dedicaremos à construção da estrutura tensorial da álgebra de Hopf *involutórias* (i.e., $S^2 = I$) usando os traços, cotraços e a antípoda de uma maneira baseada em uma versão da tese de [Sou02].

Lema 3.11. Nas álgebras de Hopf involutórias $\mathbb{H}$, As seguintes identidades se mantêm:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \rightarrow P_R \rightarrow \varepsilon = \begin{array}{c} \text{loop on } M \end{array} \quad e \quad \rightarrow P_L \rightarrow \varepsilon = \begin{array}{c} \text{loop on } M \end{array} \\
 (b) \quad & i \rightarrow P_R \rightarrow = \begin{array}{c} \text{loop on } \Delta \end{array} \quad e \quad i \rightarrow P_L \rightarrow = \begin{array}{c} \text{loop on } \Delta \end{array} \\
 (c) \quad & \begin{array}{c} \text{loop on } M \end{array} = \begin{array}{c} \text{loop on } M \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \text{loop on } \Delta \end{array} = \begin{array}{c} \text{loop on } \Delta \end{array}
 \end{aligned}$$

Demonstração. Aplicando o axioma da counidade e usando que $S^2 = I$, segue que

$$\rightarrow P_R \rightarrow \varepsilon = \rightarrow M \begin{array}{c} \swarrow S \\ \searrow S \end{array} \Delta \rightarrow \varepsilon = \rightarrow M \begin{array}{c} \swarrow S \\ \searrow S \end{array} = \begin{array}{c} \text{loop on } M \end{array}.$$

O segundo caso do item (a) e o item (b) inteiro são demonstrados da mesma maneira.

Para demonstra o item (c), primeiramente, verificaremos os diagramas abaixo:

$$\begin{array}{c} \text{loop on } M \end{array} = \begin{array}{c} \text{loop on } M \\ i \nearrow \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \text{loop on } M \end{array} = \begin{array}{c} i \nearrow \\ \text{loop on } M \end{array}$$

Isto nos motiva a considerar a multiplicação repetida abaixo, como a função f na definição do traço de f ¹⁵, aplicando o traço apenas nas setas a e b

$$\begin{array}{c} b \rightarrow f \rightarrow c \end{array} = \begin{array}{c} b \rightarrow M \rightarrow c \end{array}$$

¹⁵Vide o Lema 3.11

Com a equação (3.23) e a equação (3.25) do Lema 3.8, podemos escrever o traço de M por:

$$\text{tr}(M) = \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3} \quad (3.26)$$

Diagram 1: A box labeled M with two incoming arrows from the left and one outgoing arrow to the right.

Diagram 2: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , M^{op} , and P_{RL} .

Diagram 3: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

$$\text{tr}(M) = \text{Diagram 4} = \text{Diagram 5} \quad (3.27)$$

Diagram 4: A box labeled M with two incoming arrows from the left and one outgoing arrow to the right.

Diagram 5: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

onde as segundas igualdades dos diagramas acima resultam da associatividade. Agora, iniciando pelo traço à esquerda abaixo, nós criamos uma aresta extra b via o axioma da unidade, então estamos hábeis para aplicar a equação (3.26):

$$\text{Diagram 6} = \text{Diagram 7} = \text{Diagram 8}$$

Diagram 6: A box labeled M with two incoming arrows from the left and one outgoing arrow to the right.

Diagram 7: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

Diagram 8: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

Então, eliminaremos b e introduziremos uma aresta extra c . Assim, estaremos prontos para aplicar à equação (3.27). Finalmente, eliminaremos a unidade, adicionando o seguinte resultado desejado:

$$\text{Diagram 9} = \text{Diagram 10} = \text{Diagram 11}$$

Diagram 9: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

Diagram 10: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

Diagram 11: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

□

Isto mostra que a categoria da álgebras de Hopf é uma categoria com traço esférico, como discutiremos brevemente no apêndice¹⁶. Além disto, é importante ressaltar que uma versão mais genérica da equação (3.26) e da equação (3.27) envolve uma dada função σ . No caso das álgebras de Hopf, temos que $\sigma = 1$. Agora discutiremos as funções traço e cotraço e verificaremos algumas de suas propriedades. Estes tensores são a base que usaremos para construir os outros morfismos de objetos do tipo Hopf. Lembre-se que os morfismos traço e cotraço foram definidos como abaixo.

Definição 3.18. A função traço T e a função cotraço C são definidas por:

$$T = \text{Diagram 12} = \text{Diagram 13} \quad \text{e} \quad C = \text{Diagram 14} = \text{Diagram 15} \quad (3.28)$$

Diagram 12: A box labeled M with two incoming arrows from the left and one outgoing arrow to the right.

Diagram 13: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

Diagram 14: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

Diagram 15: A box labeled M with an incoming arrow from the left, an outgoing arrow to the right, and a curved arrow from the top to the bottom. Inside the box, there is a sub-diagram involving Δ , S , and P_{RL} .

Agora calcularemos o seguinte corolário usando nossa definição de funções traço e cotraço.

¹⁶Vide Apêndice ??

Corolário 3.7. Os tensores abaixo são equivalentes:

$$\Delta \rightarrow M = \text{Diagrama: um círculo com uma seta curva saindo do topo e entrando no fundo.}$$

Demonstração. Usamos a parte (a) do Lema 3.27, e então tomando o traço de ambos os lados temos que:

$$\text{Diagrama: uma seta curva saindo de } \Delta \text{ e entrando em } M = \text{Diagrama: } \rightarrow M \text{ } i \rightarrow \Rightarrow \text{Diagrama: um círculo com uma seta curva saindo do topo e entrando no fundo.} = i \rightarrow M = \text{Diagrama: um círculo com uma seta curva saindo do topo e entrando no fundo.}$$

□

Definição 3.19. Um diagrama de Hopf T do tipo $(0, 1)$ ¹⁷ é um *função traço* quando sua composição com M igual sua composição com M^{op} (M com a estrutura oposta), e sua composição com S é igual para o próprio t . Análogo, definimos um *função cotraço* substituindo M por Δ .

Mostraremos que $\rightarrow M$ é uma função traço e $\Delta \rightarrow$ é uma função cotraço. Iniciamos com a propriedade relacionada a antípoda:

Proposição 3.7. $\Delta \rightarrow S \rightarrow = \Delta \rightarrow e \rightarrow S \rightarrow M = \rightarrow M$

Demonstração. Construiremos as arestas b e c usando o fato de S ser involutória. A aresta f foi criada segundo Proposição 3.5 aplicando as arestas c e d . Então ‘cancelamos’ a antípoda por esta ser um aplicação involutória. Aplicando os movimentos para o diagrama de VR, identificamos $\rightarrow M$:

$$\begin{aligned} \rightarrow S \rightarrow M &= \rightarrow S \text{ } \text{Diagrama: um círculo com uma seta curva saindo do topo e entrando no fundo.} = \rightarrow S \xrightarrow{d} M \\ &= \text{Diagrama: } S \xrightarrow{b} S \xrightarrow{c} M \text{ } \text{Diagrama: } S \xrightarrow{b} M \xrightarrow{f} S = \text{Diagrama: } S \xrightarrow{b} M \xrightarrow{f} S = \\ &= \text{Diagrama: um círculo com uma seta curva saindo do topo e entrando no fundo.} = \rightarrow M \end{aligned}$$

Logo demonstramos o item $\rightarrow S \rightarrow M = \rightarrow M$. Analogamente, se demonstra que $\Delta \rightarrow S \rightarrow = \Delta \rightarrow$. □

Lema 3.12. Valem as seguintes igualdades de diagramas:

$$(a) \quad \rightarrow S \rightarrow = \text{Diagrama: } \begin{array}{c} M \leftarrow \Delta \rightarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ M \quad \Delta \end{array} = \text{Diagrama: } \begin{array}{c} M \quad \Delta \\ \uparrow \quad \downarrow \\ M \leftarrow \Delta \rightarrow \end{array}$$

$$(b) \quad \rightarrow \varepsilon \text{ } \text{Diagrama: um círculo com uma seta curva saindo do topo e entrando no fundo.} = \text{Diagrama: } \Delta \rightarrow M \rightarrow M = \text{Diagrama: } \Delta \rightarrow M \rightarrow M \text{ e, analogamente,}$$

¹⁷Diagrama com 0 entradas e apenas 1 saída.

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \curvearrowright \end{array} \xrightarrow{i} = \Delta \rightarrow \Delta \begin{array}{l} \nearrow M \\ \searrow \end{array} = \Delta \rightarrow \Delta \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow M \end{array}$$

$$(c) \quad \longrightarrow \alpha = \longrightarrow \varepsilon$$

Demonstração. (a) Primeiro cancelamos as ‘ladders’ no diagrama à esquerda abaixo aplicando a Lema 3.4, chegamos à primeira igualdade. Em seguida aplicando o Corolário 3.6, temos como resultado a segunda igualdade. Por fim, o Corolário 3.7 nos dá a última igualdade:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow M \longleftarrow S \longleftarrow \Delta \longrightarrow \\ \downarrow \quad \quad \uparrow \\ M \longrightarrow \Delta \\ \downarrow \quad \quad \uparrow \\ M \quad \quad \Delta \end{array} = \longrightarrow M \quad \Delta \longrightarrow = \begin{array}{c} \longrightarrow P_R \longrightarrow \\ T \longrightarrow C \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow M \longleftarrow S \longleftarrow \Delta \longrightarrow \\ \searrow \quad \nearrow \\ S \\ \bigcirc \end{array}$$

Cancelando o topo da ‘ladder’ do primeiro e do último diagrama, obtemos:

$$\begin{array}{c} \longrightarrow M \longleftarrow \Delta \longrightarrow \\ \downarrow \quad \uparrow \\ M \quad \Delta \end{array} = \longrightarrow S \longrightarrow \quad \bigcirc$$

A segunda parte segue por analogia.

(b) Então, a partir do item (a), e com o axioma da counidade podemos aplicar a série de operações abaixo.

$$\mathbf{I} \quad \longrightarrow \varepsilon \quad \bigcirc = \longrightarrow S \longrightarrow \varepsilon \quad \bigcirc = \begin{array}{c} \longrightarrow M \longleftarrow \Delta \longrightarrow \varepsilon \\ \downarrow \quad \uparrow \\ M \quad \Delta \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow M \longleftarrow \Delta \\ \downarrow \\ M \end{array}$$

No primeiro diagrama abaixo, inserimos uma antípoda S via Proposição 3.7. Então aplicamos o Lema 3.5.(b), e movimentos no diagrama ¹⁸, absorvendo uma das antípodas segundo a Proposição 3.7.

$$= \begin{array}{c} \xrightarrow{b} M \xleftarrow{c} \Delta \\ \downarrow \\ S \longrightarrow M \end{array} = \begin{array}{c} \xrightarrow{b} S \longrightarrow M \longrightarrow M \\ \Delta \xrightarrow{c} S \nearrow \end{array} = \begin{array}{c} \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow M \\ \Delta \nearrow \end{array}$$

Primeiramente, para mostrar a segunda parte deste resultado, inserimos uma antípoda via a Proposição 3.7. Em seguida, fazendo uma substituição conforme a relação $\mathbf{I}$ já obtida. Finalmente, usamos o fato da álgebra ser involutória:

$$\longrightarrow \varepsilon \quad \bigcirc = \longrightarrow S \longrightarrow \varepsilon \quad \bigcirc = \longrightarrow S \longrightarrow S \longrightarrow M \longrightarrow M = \begin{array}{c} \longrightarrow M \longrightarrow M \\ \Delta \nearrow \end{array}$$

¹⁸Segundo a Seção A.7.

Ora fazendo o mesmo porém usando a segunda parte da (a), podemos demonstrar a segunda parte de (b).

(c) Aplicamos o Corolário 3.7 para usar que α é um elemento grouplike destacado, e que Δ é uma integral à direita. O item (b) dando no mínimo a igualdade abaixo. A invertibilidade da diagrama da dimensão é conduzido para o resultado desejado:

$$\longrightarrow \alpha \quad \bigcirc = \longrightarrow \alpha \quad \Delta \rightarrow M = \begin{array}{c} \longrightarrow M \rightarrow M \\ \nearrow \Delta \end{array} = \longrightarrow \varepsilon \quad \bigcirc$$

Isto prova o item (c). Com isso concluímos a demonstração do teorema. $\square$

Uma versão de uma proposição Proposição 3.8 da Seção 3.4 é dado pela seguinte afirmação:

Teorema 3.10. *Sejam λ_R (resp. Λ_R) uma integral (cointegral) e α (resp. a) uma elemento grouplike destacado. Então:*

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow \lambda_R = \longrightarrow S^{-2} \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \alpha \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow \lambda_R$$

$$\Lambda_R \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} = \Lambda_R \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow a \\ \searrow \end{array} M \rightarrow S^{-2} \rightarrow$$

Disto temos como consequência o lema a seguir:

Lema 3.13. *Valem as seguintes afirmações com relações aos tensores:*

(a) *Para toda integral à direita λ_R (em particular, para $\rightarrow M$):*

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow \lambda_R = \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} M \rightarrow \lambda_R$$

(b) *A multiplicação repetida abaixo é invariante sobre a aplicação de uma permutação cíclica em suas arestas.*

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \\ \vdots \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow M$$

Obs.: 3.7.2. *Um resultado análogo ao anterior é válido para Δ .*

Demonstração. (a) Primeiro usamos a forma geral da transposição das arestas como afirmado no Teorema 3.10. Então usamos o fato da álgebra ser involutória S^{-2} , e aplicamos Lema 3.12 item (c) para as arestas b :

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow \lambda_R = \longrightarrow S^{-2} \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow b \alpha \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow \lambda_R = \longrightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow b \varepsilon \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow \lambda_R$$

Usando o axioma counidade; obtemos a identidade desejada.

(b) Já usamos a associatividade para isolar as entradas para serem trocadas, aplicando o item (a), e reassociando as multiplicações:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} M \rightarrow M \quad := \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \nearrow \\ \vdots \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} M \rightarrow M \quad = \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \nearrow \\ \vdots \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} M \rightarrow M \quad = \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} M \rightarrow M, \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} M \rightarrow M$$

ou seja, a permutação cíclica das aresta não altera o morfismo.

□

Obs.: 3.7.3. Com o Lema 3.13 item (a) e Lema 3.10, temos que $\rightarrow M$ é uma **função traço**¹⁹. Analogamente, concluímos que $\rightarrow \Delta$ é uma **função cotraço**²².

De acordo com o Lema 3.13 item (b), os seguintes diagramas abaixo estão bem definidos sem a referência para suas primeiras extremidades livres.

Definição 3.20. Os diagramas abaixo são chamados os **produtos traciais** e **coprodutos traciais** respectivamente. Os casos com exatamente uma extremidade livre estão na Definição 3.18

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} M \quad := \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \nearrow \\ \vdots \end{array} M \rightarrow M \quad \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \searrow \end{array} \quad := \quad \Delta \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \searrow \end{array}$$

A próxima proposição nos dá uma regra fundamental na prova da invariância e completude do invariante do tipo Hopf involutório de Kuperberg²⁰.

O próximo resultado expressará todos os morfismo que definem o objetos do tipo álgebra de Hopf em termos das integrais e cointegrais:

Proposição 3.8. Os tensores M , i , Δ , ε e S são construídos a partir dos traços e cotraços como segue:

(a) $\begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \nearrow \end{array} M \rightarrow \bigcirc = \begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \nearrow \end{array} M \leftarrow \Delta \rightarrow S \rightarrow \quad e, \text{ de maneira similar, vale que:}$

$$\rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \searrow \end{array} \bigcirc = \rightarrow S \rightarrow M \leftarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \vdots \\ \searrow \end{array}$$

(b) $\bigcirc i \rightarrow = M \leftarrow \Delta \rightarrow S \rightarrow = M \leftarrow \Delta \rightarrow \quad e, \text{ analogamente, vale que:}$

$$\rightarrow \varepsilon \bigcirc = \rightarrow S \rightarrow M \leftarrow \Delta = \rightarrow M \leftarrow \Delta$$

(c) $\rightarrow S \rightarrow \bigcirc = \rightarrow M \leftarrow \Delta \rightarrow$

¹⁹Definida na página 65.

²⁰Kuperberg mostrou que cada classe de isomorfismo das 3-variedades correspondia a um invariante do tipo Hopf unicamente determinado.

CAPÍTULO 4

Álgebras de Hopf

Neste Capítulo, estudaremos exemplos clássicos de álgebras de Hopf de dimensão finita e infinita. No decorrer da Seção 4.2, construiremos os grupos quânticos por extensões de Ore que estudaremos com rigor na Seção 4.1. Calcularemos para algumas álgebras de Hopf seus invariantes clássicos como as integrais, as cointegrais, os grouplike destacados, entre outros; conforme foram apresentados no Capítulo 2. Além disso, daremos explicitamente alguns dos coeficientes de estrutura das classes de exemplos trabalhadas.

4.1 Extensões de Ore

Sejam $\mathbb{A}$ uma álgebra e $\mathbb{A}[t]$ um $\mathbb{A}$ -módulo livre à esquerda consistindo de todos os polinômios da forma

$$P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 t^0$$

com coeficientes em $\mathbb{A}$. Se $a_n \neq 0$, denotaremos o grau $gr(P(t)) = n$ e, por convenção, colocaremos $gr(0) = -\infty$ (como sempre fizemos no anel dos polinômios). O objetivo desta seção é encontrar estruturas de álgebra para $\mathbb{A}[t]$ que sejam compatíveis com a estrutura de álgebra em $\mathbb{A}$ e com uma noção de grau. Precisaremos da definição abaixo para definir estas estruturas que estendam a álgebra $\mathbb{A}$.

Definição 4.1. Seja $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ um endomorfismo de álgebra. Denomina-se uma α -**derivação de** $\mathbb{A}$ o endomorfismo linear δ que satisfaz

$$\delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b, \quad (4.1)$$

para todos $a, b \in \mathbb{A}$.

Obs.: 4.1.1. Observamos que a equação (4.1) implica em $\delta(1 \cdot 1) = \alpha(1)\delta(1) + \delta(1)1$ e, portanto, implica em $\alpha(1)\delta(1) = 0$. Mas, como α é um endomorfismo de álgebras, temos que $\alpha(1) = 1$. Logo temos que $\delta(1) = 0$.

Teorema 4.1. (a) Assuma que $\mathbb{A}[t]$ tem uma estrutura de álgebra tal que a inclusão natural $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A}[t]$ é um morfismo de álgebra e que tenhamos $gr(PQ) = gr(P) + gr(Q)$ para qualquer par de polinômios $P, Q \in \mathbb{A}[t]$. Então $\mathbb{A}$ não tem divisores de zero e existem um único endomorfismo injetivo de álgebra $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ e uma única α -derivação de $\mathbb{A}$, que chamaremos δ , tal que

$$ta = \alpha(a)t + \delta(a) \quad (4.2)$$

para todo $a \in \mathbb{A}$.

(b) Reciprocamente, seja $\mathbb{A}$ uma álgebra sem divisores de zero. Dados $\alpha : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ um endomorfismo injetivo de álgebra e uma α -derivação δ de $\mathbb{A}$, existe uma única estrutura de $\mathbb{A}[t]$ tal que a inclusão de $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{A}[t]$ é um morfismo de álgebra e a equação (4.2) se mantém para todo $a \in \mathbb{A}$.

Obs.: 4.1.2. A álgebra definida pelo Teorema 4.1 parte (b) é denotada por $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$ e denomina-se a tripla $(\mathbb{A}, \alpha, \delta)$ por extensão de Ore de $\mathbb{A}$.

Demonstração. (a) Dados a, b elementos não nulos em $\mathbb{A}$. Segue que $gr(a) = gr(b) = 0$ em $\mathbb{A}[t]$. Temos que, pela propriedade $gr(ab) = gr(a) + gr(b) = 0$, isto implica em $ab \neq 0$. Consequentemente, $\mathbb{A}$ não tem divisores de zero.

Provaremos a partir de agora a existência e unicidade dos endomorfismos α e δ . Para todo elemento não nulo a de $\mathbb{A}$, consideramos o produto ta . Assim temos que $gr(ta) = gr(t) + gr(a) = 1$. Por definição de $\mathbb{A}[t]$, existem elementos unicamente determinados $\alpha(a) \neq 0$ e $\delta(a)$ em $\mathbb{A}$ tais que

$$ta = \alpha(a)t + \delta(a).$$

Isto define as aplicações α e δ de maneira única. Se a multiplicação à esquerda por t for linear, então as aplicações α e δ também serão lineares. E, além disso, α deverá ser injetiva. Para verificar a linearidade, precisamos expandir ambos os lados da igualdade $(ta)b = t(ab)$. Tendo em vista que esta relação é válida em $\mathbb{A}[t]$, verificaremos isto usando a equação (4.2). Portanto, sendo $a, b \in \mathbb{A}$, obtemos o seguinte resultado:

$$\alpha(a)\alpha(b)t + \alpha(a)\alpha(b) + \delta(a)b = \alpha(ab)t + \delta(ab). \quad (4.3)$$

A equação (4.3) implica em

$$\alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b) \quad e \quad \delta(ab) = \alpha(a)\delta(b) + \delta(a)b \quad (4.4)$$

Aplicando a relação (4.2) para $t1 = t$ (lembrando que 1 é a unidade de $\mathbb{A}[t]$) determinamos que $\alpha(1) = 1$ e $\delta(1) = 0$. Segue da equação (4.4) que α é um endomorfismo de álgebra e que δ é uma α -derivação de $\mathbb{A}$.

(b) Claramente, é suficiente conhecer o produto ta , para todo $a \in \mathbb{A}$, para determinarmos o produto em $\mathbb{A}[t]$ completamente. Assim a equação (4.2) define a estrutura de álgebra em $\mathbb{A}[t]$ unicamente.

Provaremos agora a existência de uma estrutura de álgebra em $\mathbb{A}[t]$. Para este fim, mergulhamos $\mathbb{A}[t]$ sobre uma álgebra associativa $\mathcal{M}$, que consiste de todas as matrizes infinitas $(f_{ij})_{i,j \geq 1}$ com entradas na álgebra $End(\mathbb{A})$ dos endomorfismos lineares de $\mathbb{A}$ tal que cada linha e também cada coluna têm somente uma quantidade finita de entradas não nulas. A unidade de $\mathcal{M}$ é uma matriz diagonal infinita I com todas as entradas da diagonal iguais a identidade de $\mathbb{A}$ e tendo todas as outras entradas nulas.

Dado um elemento $a \in \mathbb{A}$, denotamos por $\widehat{a} \in End(\mathbb{A})$ a multiplicação à esquerda por a . As hipóteses fazem α e δ terem as seguintes relações

$$\alpha \circ \widehat{a} = \widehat{\alpha(a)}\alpha \quad e \quad \delta \circ \widehat{a} = \widehat{\alpha(a)}\delta + \widehat{\delta(a)} \quad (4.5)$$

no endomorfismo $End(\mathbb{A})$. Agora, consideremos a matriz infinita abaixo

$$T = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha & \delta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha & \delta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha & \delta & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \delta & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

em $\mathcal{M}$. Segue que este T define uma aplicação linear $\Phi : \mathbb{A}[t] \rightarrow \mathcal{M}$ dada por

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i t^i\right) = \sum_{i=1}^n (\widehat{a_i} I) T^i. \quad (4.7)$$

Lema 4.1. *A aplicação Φ é injetiva.*

Demonstração. Para qualquer inteiro $i \geq 1$, sejam $\{e_i\}_{i \geq 1}$ os vetores coluna infinitos cujas entradas são todas zero com a exceção da i -ésima que deve ser igual à 1 de $\mathbb{A}$. Podemos aplicar a matriz T de $\mathcal{M}$ ao vetor e_i . Como $\delta(1) = 0$ e $\alpha(1) = 1$ verificamos que

$$T(e_i) = e_{i+1} \quad (4.8)$$

para todos $i \geq 1$. Agora, seja $P = \sum_{i=0}^n a_i t^i$ um elemento de $\mathbb{A}$ tal que $\Phi(P) = 0$. Desejamos mostrar que todos os elementos $a_0, \dots, a_n$ são nulos. Aplicando $\Phi(P)$ ao vetor coluna e_1 , pela equação (4.8), obtemos

$$0 = \Phi(P)(e_1) = \sum_{i=0}^n (\widehat{a_i} T^i)(e_1) = \sum_{i=1}^n \widehat{a_i} e_{i+1}. \quad (4.9)$$

Como o conjunto $\{e_i\}_{i \geq 1}$ é linearmente independente, temos que $\widehat{a_i} = 0$ para todo i . Como $\mathbb{A}$ tem uma unidade, obtemos que $a_i = 0$ para todos i , pois $0 = \widehat{a_i}(1) = a_i \cdot 1 = a_i$. Logo concluímos que $P = 0$. $\square$

As relações da equação (4.5) implicam nas seguintes relações nas entradas de $\mathcal{M}$ para todo $a \in \mathbb{A}$:

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha & \delta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \alpha & \delta & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \alpha & \delta & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{a} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \widehat{a} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \widehat{a} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{a} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha(a)\delta + \delta(a)} & 0 & 0 & \cdots \\ \widehat{\alpha(a)\alpha} & \widehat{\alpha(a)\delta + \delta(a)} & 0 & \cdots \\ 0 & \widehat{\alpha(a)} & \widehat{\alpha(a)\delta + \delta(a)} & \cdots \\ 0 & 0 & \widehat{\alpha(a)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Logo, podemos concluir que $T(\widehat{a}I) = (\widehat{\alpha(a)}I)T + (\widehat{\delta(a)}I)$. Esta argumentação esboça a demonstração o próximo lema.

Lema 4.2. *Temos que $T(\widehat{a}I) = (\widehat{\alpha(a)}I)T + (\widehat{\delta(a)}I)$.*

Agora, completaremos a demonstração do item (b) do teorema. Seja S uma subálgebra de M gerada pelos elementos T e $\widehat{a}I$ onde $a \in \mathbb{A}$. Pelo Lema 4.2, está claro que S é a imagem de $\mathbb{A}[t]$ sobre a aplicação Φ . Como Φ é um morfismo injetivo, isto induz um isomorfismo linear de $\mathbb{A}[t]$ sobre a álgebra S . Isto define uma estrutura de álgebra para $\mathbb{A}[t]$ definida a partir do levantamento para a subálgebra S . Logo $\mathbb{A}[t]$ tem uma estrutura de álgebra tal que a inclusão é um morfismo injetivo da álgebra e a equação (4.2) é conservada em vista do lema anterior. $\square$

Extraíremos algumas consequências do Teorema 4.1. Primeiramente, daremos uma formulação geral para o produto em $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$. Considere $P = \sum_{i=1}^n a_i t^i$ e $Q = \sum_{i=0}^m b_i t^i$. Seja $PQ = \sum_{i=0}^{n+m} c_i t^i$. Seja $S_{n,k}$ o endomorfismo linear de $\mathbb{A}$ definido como a soma de todas as $\mathcal{C}_k^n$ possíveis composições de k cópias do morfismo δ com $n-k$ cópias do morfismo α .

Corolário 4.1. *Sobre a hipótese do item (b) do Teorema 4.1, são válidas as seguintes afirmações:*

(a) *Para todo i , com $0 \leq i \leq m+n$, temos que*

$$c_r = \sum_{p=0}^r a_p \sum_{k=0}^p S_{p,k}(b_{r-p+k}) \quad (4.10)$$

e, para todo $a \in \mathbb{A}$ e $n \in \mathbb{N}$, em $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$, vale

$$t^n a = \sum_{k=0}^n S_{n,k}(a) t^{n-k}. \quad (4.11)$$

(b) *A álgebra $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$ não tem divisores de zero. Como um $\mathbb{A}$ -módulo à esquerda, esta álgebra é livre e tem por base $\{t^i\}_{i \in \mathbb{N}}$.*

(c) *Se α é um automorfismo, então $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$ é um $\mathbb{A}$ -módulo livre à direita com mesma base $\{t^i\}_{i \in \mathbb{N}}$.*

Demonstração. (a) Primeiramente, verificaremos, para todo $a \in \mathbb{A}$, que

$$t^i a = \sum S_{j,i}(a) t^{i-j},$$

sempre que valha a relação (4.2). Prossigamos verificando as relações

$$\begin{aligned} t^{i+1} a &= t \left(\sum S_{j,i}(a) t^{i-j} \right) \\ &= \sum (\alpha(S_{j,i})t + \delta(S_{j,i})) t^{i-j} \\ &= \alpha(S_{j,i}) t^{i-j+1} + \delta(S_{j,i}) t^{i-j}. \end{aligned}$$

Basta observar que cada composição de k termos δ com $i+1-k$ termos α pertence ao conjunto dos morfismos $S_{k,i+1} t^{i+1-k}$ ou está na forma $\alpha(S_{j,i}) t^{i-j+1}$, ou na forma $\delta(S_{j,i}) t^{i-j}$. Assim demonstramos que $t^i a = \sum S_{j,i}(a) t^{i-j}$. Para finalizar o item (a), vejamos que

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i t^i \right) \left(\sum_{j=1}^m a_j t^j \right) = \sum a_i t^i b_j t^j = \sum_i a_i \left(\sum_k S(k,i) t^{i-k} \right) t^j = \sum_i a_i \sum_k S(k,i) (b_j) t^{i+j-k} \quad (4.12)$$

Agora, ao fixarmos a potência de t igual r , temos $i + j - k = r$. Neste caso, se fizermos $i = p$ em equação (4.12), temos que

$$c_r = \sum_p a_p \sum_k S(k, p)(b_{r+k-p}).$$

Deste modo, conseguimos demonstrar o item (a).

(b) Isto é uma consequência da existência do grau e da definição de $\mathbb{A}[t]$. Pois sejam $P, Q \neq 0 \in \mathbb{A}[t]$ temos que $gr(PQ) = gr(P) + gr(Q) \geq 0$ e, observando que $P = \sum^n a_i t^i$ e $Q = \sum^m b_i t^i$, temos que

$$PQ = a_n S_{n,0}(b_m) t^{m+n} + \dots = a_n \alpha^n(b_m) t^{m+n} + \dots$$

Portanto, como α é um morfismo injetivo e como $\mathbb{A}$ não tem divisores de zero, então $gr(PQ) = n + m$. Isto implica em $\mathbb{A}[t]$ não ter divisores de zero.

(c) Provaremos, primeiro, que o conjunto $\{t^i\}_{i \geq 1}$ gera $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$ como um R -módulo à direita. Isto significa que todo elemento P de $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$ pode ser escrito como $P = \sum_{i=0}^n t^i a^i$, onde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{A}$. Provemos isto, por indução, no grau $n = gr(P)$. Para $n = 0$, o resultado é claramente verdadeiro. Suponha que também seja verdade, para $1 \leq k < n$, que todo P com grau $gr(P) = k$ possa ser escrito como $\mathbb{A}$ -módulo à direita gerado por $\{t^i\}_{1 \leq k \leq n}$. Seja $P = \sum_{i=0}^n a_i t^i$, temos que

$$t^n \alpha^{-n}(a_n) = a_n t^n + \text{termos de grau menor.} \quad (4.13)$$

Para obter a equação (4.13), já assumimos α invertível e usamos a equação (4.2) para deduzi-la. Assim, podemos isolar $a_n t^n = t^n \alpha^{-n}(a_n) + \text{termos de grau menor}$. Portanto, $P = t^n \alpha^{-n}(a_n) + \text{termos de grau menor}$, ou seja, $P - t^n a_n = t^{n-1} a_{n-1} + \dots + t^0 a_0$. Logo $P = t^n a_n + t^{n-1} a_{n-1} + \dots + t^0 a_0$. Resta provar que o conjunto $\{t^i\}_{i \geq 0}$ é livre. Suponha que este conjunto não seja livre. Então existe uma relação da forma

$$t^n a_n + t^{n-1} a_{n-1} + \dots + t a_1 + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$. Usando equação (4.13), uma vez que obtemos, por indução, a equação gerada como módulo à direita da forma

$$\alpha^n(a_n) t^n + \text{termos de grau menor.}$$

e, pelo item (b), isto implica em $\alpha^n(a_n) = 0$. Como a aplicação α é isomorfismo, obtemos $a_n = 0$ que é uma contradição. Logo está demonstrado o item (c) e, em consequência, o corolário. $\square$

Exemplo 4.1.1 (básico). Considere o caso especial onde $\alpha = id$ e $\delta = 0$. Então a extensão de Ore $\mathbb{A}[t, id_{\mathbb{A}}, 0]$ é claramente isomorfa à álgebra dos polinômios $\mathbb{A}[t]$. No caso de uma derivações genérica, a álgebra $\mathbb{A}[t, id, \delta]$ é uma ‘álgebra de polinômios com operadores diferenciais’. Quando $\mathbb{A} = \mathbb{k}$ e δ é a derivação usual $\frac{d}{dx}$ de polinômios, então $\mathbb{A}[t, id, \delta]$ é a álgebra de Weyl, que é gerada pela duas variáveis x e δ com conhecida relação de Heisenberg $\delta x - x \delta$.

Definição 4.2. Seja $\mathbb{A}$ um anel. Dizemos que $\mathbb{A}$ é um anel Noetheriano¹; se uma, e por consequência ambas, das seguintes propriedades equivalentes forem válidas:

¹No início do século XX, Amy Noether definiu a condição de cadeia ascendente para os anéis comutativos. Em homenagem a autora deste conceito, os anéis que satisfazem a condição de cadeia ascendente são denominados anéis Noetherianos. O conceito é generalizável para módulos, anéis e álgebras comutativos e não-comutativos. Este comportamento para anéis comutativos é conveniente, porque é uma condição suficiente, por exemplo, para garantir a existência de uma decomposição primária para ideais.

- (i) Qualquer ideal à esquerda I de $\mathbb{A}$ é finitamente gerado, i.e., existem $a_1, \dots, a_n$ em I tais que $I = \mathbb{A}a_1 + \dots + \mathbb{A}a_n$
- (ii) (Condição de Cadeia Ascendente (cca)) Toda sequência ascendente $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_i \subset \dots \subset \mathbb{A}$ de ideais à esquerda de $\mathbb{A}$ é finita, i.e., existe um inteiro r tal que $I_r = I_i$, para todo $i \geq 0$.

Como vimos podemos definir anéis Noetherianos de duas maneiras. Contudo, não é difícil verificar que estas condições são equivalentes.

Proposição 4.1. *Seja $\phi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}'$ um morfismo sobrejetivo dos anéis. Se $\mathbb{A}$ é Noetheriano, então $\mathbb{A}'$ também é Noetheriano.*

Demonstração. Seja J um ideal à esquerda de $\mathbb{A}'$. O ideal à esquerda $I = \phi^{-1}(J)$ de $\mathbb{A}$ é gerado pelos elementos $a_1, \dots, a_n$. Portanto $J = \phi(\phi^{-1}(I))$ é gerado por $\phi(a_1), \dots, \phi(a_n)$. $\square$

O teorema a seguir é a versão não-comutativa do teorema da base de Hilbert.

Teorema 4.2. *Sejam $\mathbb{A}$ uma álgebra, α um automorfismo de álgebra e δ uma α -derivação de $\mathbb{A}$. Se $\mathbb{A}$ é Noetheriano, então a extensão de Ore também é Noetheriana.*

Demonstração. Seja I um ideal à esquerda da extensão de Ore $\mathbb{A}[t, \alpha, \delta]$. Temos que provar que I é um ideal finitamente gerado. Dando um inteiro $d \geq 0$, definimos I_d como a união de $\{0\}$ e todos os elementos de $\mathbb{A}$, que são coeficientes líderes dos elementos de grau d de I . Uma simples verificação mostra que I_d é um ideal à esquerda de $\mathbb{A}$, pois a multiplicação à esquerda de um elemento de $c \in I_d$ por um elemento $a \in \mathbb{A}$ resulta em ca , que é o coeficiente para algum polinômio de grau d em I .

Por outro lado, se a é o coeficiente líder de algum polinômio P , então $\alpha(a)$ é o coeficiente líder de tP . Consequentemente, $\alpha(I_d)$ está incluída em I_{d+1} . Portanto temos a cadeia ascendente abaixo

$$I_0 \subseteq \alpha^{-1}(I_1) \subseteq \alpha^{-2}(I_2) \subseteq \dots \subseteq \alpha^{-i}(I_i) \subseteq \dots$$

de ideais à esquerda de $\mathbb{A}$. Desde que $\mathbb{A}$ seja Noetheriano à esquerda, existe um inteiro n tal que $I_{n+i} = \alpha^i(I_n)$ para todos $i \geq 0$.

Para qualquer d com $0 \leq d \leq n$, escolha os geradores $a_{d,1}, \dots, a_{d,p}$ de I_d . Seja $P_{d,i}$ o polinômio de I cujo o coeficiente líder é $a_{d,i}$. Provemos, por indução no grau, que qualquer polinômio P em I pertence ao ideal $I' = \sum_{d,i} \mathbb{A}[t, \alpha, \delta] P_{d,i}$. Isto implicará que $I = I'$ é finitamente gerado,

que implicará no teorema. A hipótese de indução está clara para o caso de grau 0. Suponha que tenhamos provado que todo elemento de grau menor d em I está em I' . Seja P um elemento de grau d de I .

(a) Se $d \leq n$, o coeficiente líder a de P é da forma $a = \sum_{0 \leq i \leq p} r_i a_{d,i}$, onde $r_0, \dots, r_p$ são elementos de $\mathbb{A}$. Consequentemente, $Q = P - \sum_{0 \leq i \leq p} r_i P_{d,i}$ é um elemento de I com grau menor que d . E, por hipótese de indução, Q pertence a I' .

(b) Se $d > n$, o coeficiente líder a de P pertence à $I_d = \alpha^{d-n}(I_n) = (\alpha^{d-n}(a_{n,1}), \dots, \alpha^{d-n}(a_{n,p}))$. O coeficiente líder a pode ser escrito como $a = \sum_0 r_i \alpha^{d-n}(a_{n,i})$ para alguns $r_0, \dots, r_p \in \mathbb{A}$. Considere o polinômio

$$Q = P - \sum_{0 \leq i} r_i t^{d-n} P_{n,i}.$$

O coeficiente do monômio t^d em Q é

$$a - \sum_{0 \leq i \leq p} r_i \alpha^{d-n}(a_{d,i}) = 0.$$

Assim, Q tem grau menor que d . Podemos, portanto, aplicar a hipótese de indução a $Q \in I'$. Logo, $P = Q + \sum_{0 \leq i} r_i t^{d-n} P_{d,i}$ pertence à I' . $\square$

Como uma consequência da Proposição 4.1 e do Teorema 4.2 aplicado ao caso $\alpha = id$ e $\delta = 0$. Temos o seguinte corolário como consequência deste teorema.

Corolário 4.2. Se $\mathbb{A}$ é Noetheriano à esquerda, então para todo ideal $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]/I$ também é Noetheriano.

Demonstração. Seja J um ideal de $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]/I$. Então o ideal gerado pelos elementos

$$\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{A}[X_1, \dots, X_n] \mid \bar{p} \in \mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]/I\},$$

é um ideal de $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ e, portanto, $\mathcal{S}$ é finitamente gerado, ou seja, $\mathcal{S} = (a_1, \dots, a_n)$. Logo $J = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$. Assim, pela arbitrariedade de J , temos que este ideal é finitamente gerado. $\square$

4.2 Classes de Exemplos

Nesta seção, discutiremos em detalhes as classes de exemplos de álgebra de Hopf e calcularemos invariantes segundo o capítulo anterior. Visto a sua importância, encontraremos as integrais das álgebra de Hopf de dimensão finita, faremos os cálculos referentes aos traços como no capítulos anterior. Além disso, tentaremos explicitar as álgebra duais para as álgebras de Hopf sempre que pudermos. No decorrer desta seção, para não carregar a notação, denotaremos $M_{\mathbb{H}^*} = M^*$, $\Delta_{\mathbb{H}^*} = \Delta^*$, $i_{\mathbb{H}} = i^*$ e $\varepsilon_{\mathbb{H}^*} = \varepsilon^*$.

4.2.1 Álgebras de Grupo

Podemos definir uma álgebra de Hopf a partir de um grupo $(G, *, e)$. Tomemos o seguinte conjunto $(\mathbb{k}[G], M, i, \Delta, \varepsilon)$, onde

$$\begin{cases} M(g \otimes h) &= g * h, \\ i(1_{\mathbb{k}}) &= e, \\ \Delta(g) &= g \otimes g, \\ \varepsilon(g) &= 1_{\mathbb{k}}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Para verificar a associatividade e a coassociatividade, não há dificuldade. Pois, pela linearidade de M e Δ , temos que em seus elementos básicos a aplicação M é dada por

$$M(g_i \otimes M(g_j \otimes g_k)) = g_i * (g_j * g_k) = (g_i * g_j) * g_k = M(M(g_i \otimes g_j) \otimes g_k).$$

Por outro lado, aplicando Δ a g temos

$$(\Delta \otimes I) \circ \Delta(g) = g \otimes g \otimes g = (I \otimes \Delta) \circ \Delta(g).$$

Para verificar que as estruturas de álgebra e coálgebra é compatível como biálgebra, faremos

$$\Delta(M(g_i \otimes g_j)) = (g_i * g_j) \otimes (g_i * g_j) = M_{\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}}(\Delta(g_i) \otimes \Delta(g_j))$$

Além disto, faremos o seguinte:

$$\begin{aligned} \varepsilon(M(g_i \otimes g_j)) &= \varepsilon'(g_i * g_j) = 1_{\mathbb{k}}, & \Delta(i(1_{\mathbb{k}})) &= \Delta(e) = e \otimes e = (i \otimes i) \circ \Delta'(1_{\mathbb{k}}) \\ \varepsilon(i(1_{\mathbb{k}})) &= \varepsilon(e) = 1_{\mathbb{k}} = \varepsilon'(1_{\mathbb{k}}). \end{aligned}$$

Logo $\mathbb{H}$ é uma biálgebra ².

É fácil verificar que a aplicação $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ definida por $S(g) = g^{-1}$ é a antípoda de $\mathbb{H}$.

$$M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(g) = M(S(g) \otimes g) = M(g^{-1} \otimes g) = e$$

e, analogamente,

$$M \circ (I \otimes S) \circ \Delta(g) = M(g \otimes S(g)) = M(g \otimes g^{-1}) = e$$

Temos que, conforme definimos, $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf. Temos que, no caso do grupo ser finito, vale o seguinte resultado:

Teorema 4.3 (Teorema de Muschke). *Seja $(G, *, e)$ um grupo finito. temos que:*

$\mathbb{k}[G]$ é uma álgebra de Hopf semissimples $\Leftrightarrow |G|$ não divide a característica do corpo.

Demonstração. $(\Rightarrow)$: Primeiro, é fácil ver que $x = \sum_{g \in G} g$ é uma integral à direita e à esquerda. Pois $M(x \otimes h) = M(\sum_{g \in G} g \otimes h) = \sum_{g \in G} gh = \sum_{g' \in G} g' = \varepsilon(h)(\sum_{g \in G} g) = \varepsilon(h)x$. Como vimos no Capítulo 3, $\int$ é unidimensional, $\int = \langle x \rangle$. Portanto, se $\mathbb{k}[G]$ é semissimples, então $\varepsilon(x) \neq 0$ e, portanto, vale que $\varepsilon(x) = |G|1_{\mathbb{k}} \Rightarrow |G| \neq 0$.

$(\Leftarrow)$: Por outro lado, se $|G|$ não divide a característica de $\mathbb{k}$, então $\varepsilon(x) = |G| \neq 0$. Assim, temos que $\mathbb{k}[G]$ é uma álgebra de Hopf semissimple. Logo demonstramos a equivalência do teorema. $\square$

Observe que $\sum_{g \in G} g$ é também a cointegral à direita da álgebra de grupos.

$$M(h \otimes \sum_{g \in G} g) = \sum_{g \in G} h * g = \sum_{g \in G} g.$$

Construiremos agora a álgebra de Hopf dual de $\mathbb{H} = \mathbb{k}[G]$ dada por $\mathbb{H}^* = \bigoplus_{g \in G} \mathbb{k}g^*$ onde $g^*(g_j) = \delta_{i,j}$ e $g_j \in G$. Observe que a afirmação anterior é trivial, tendo em vista que trabalhamos com um grupo finito.

Explicitaremos os morfismos que definem a álgebra de Hopf dual. Primeiramente, expressaremos $M(g^* \otimes h^*)(c) = g^*(c') \cdot h^*(c'')$, com definido na Seção 2.3. Ora, mas isto implica em

²Lembre que $(\mathbb{k}, M', i', \Delta', \varepsilon)$ é a álgebra de Hopf trivial.

$$M(g^* \otimes h^*)(c) = \begin{cases} g^*, & g^* = h^* \\ 0, & g^* \neq h^* \end{cases}$$

para todos $g^*, h^* \in G$ e $i = \varepsilon^*$ onde $i(1_{\mathbb{K}})(h) = \varepsilon^*(h)$. Por outro lado, definiremos a comultiplicação por $\Delta(g^*) = \lambda^{-1}(g^*(M(h \otimes h')))) = \sum g_{i,(1)}^*(h) \otimes g_{i,(2)}^*(h')$ onde $h, h' \in \mathbb{H}$ e $g_{i,(1)}^*(h)g_{i,(2)}^*(h') = g^*(M(h \otimes h'))$. Portanto, podemos afirmar que

$$\Delta(g^*) = \sum_{h \in G} h^* \otimes (h^{-1}g)^*.$$

E, além disso, $\varepsilon(h^*)(1_{\mathbb{K}}) = h^*(i(1_{\mathbb{K}})) = h^*(1_{\mathbb{H}})$ ³.

Observemos que $\lambda_r = \lambda_l = e^*$ satisfazem a Definição 3.7 e a Definição 3.6.

$$M(e^* \otimes g^*)(c) = \begin{cases} e^* & g^* = e^* \\ 0 & g^* \neq e^* \end{cases}$$

Além disso, temos que, como $g^*(e) = \delta_{g,e}$ onde $g \in \mathbb{H}$ e e é o elemento neutro, então $\lambda_l = \lambda_r = e^*$ são elementos integrais. Veja que $\varepsilon^*(e^*) = \varepsilon^*(e) = 1$ e segue que $\mathbb{H}$ é cossemisimple, ou seja, $\mathbb{H}^*$ é semissimples. Pela equação (3.7) e pela equação (3.8), temos que $S^{-1}(a) = \Lambda \leftarrow (\lambda \leftarrow a) = \sum \lambda(a\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}$ para qualquer $a \in A$.

$$S^{-1}(a) = \sum_{g \in G} e^*(ag)g.$$

Como sabemos que e^* só não se anula quando $ag = e$, então $g = a^{-1}$. Explicitamente, temos

$$S^{-1}(a) = a^{-1}.$$

Analogamente, com $\lambda(\Lambda') = 1$ e sendo Λ' uma cointegral à direita $\mathbb{H}^*$, vale que ⁴

$$S(a) = \Lambda' \leftarrow (a \rightharpoonup \lambda) = \sum \lambda(\Lambda'_{(1)}a)\Lambda'_{(2)}$$

para todo $a \in \mathbb{H}$. Assim, substituindo as integrais e cointegrais temos:

$$S(a) = \sum e^*(ga)g$$

Isto confirma o fato de $S(a) = a^{-1}$, que implica em $S^2 = I$. ⁵

4.2.2 Álgebra de Hopf de Matrizes. As álgebras de Hopf $GL(2)$ e $SL(2)$

Para qualquer álgebra associativa $\mathbb{A}$, denotaremos por $M_2(\mathbb{A})$ uma álgebra de matrizes 2×2 com entradas em $\mathbb{A}$. Como o conjunto $M_2(\mathbb{A})$ está em bijeção com o conjunto das quadruplas de elementos em $\mathbb{A}$. Assim temos a bijeção natural dada por

$$Hom_{Alg}(M(2), \mathbb{A}) \cong M_2(\mathbb{A}), \quad (4.15)$$

³Tudo isto foi visto e justificado na Seção 2.3.

⁴Veja na Seção 3.4.

⁵ $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf involutória. Vide 2.6.

para qualquer álgebra comutativa $\mathbb{A}$, onde $M(2)$ é definida como a álgebra polinomial $\mathbb{k}[a, b, c, d]$. Esta bijeção é um morfismo de álgebra $f : M(2) \rightarrow \mathbb{A}$ para a matriz

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

ou seja, o morfismo de álgebra é definido nos geradores a, b, c e d . Considere o grupo $GL_2(\mathbb{A})$ das matrizes invertíveis na álgebra de matrizes $M_2(\mathbb{A})$. Quando $\mathbb{A}$ é comutativa, sabemos que uma matriz M é invertível se e somente se $\det(M)$ é invertível.

$$GL_2(\mathbb{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{A}) : \alpha\delta - \beta\gamma \in \mathbb{A}^\times \right\}.$$

Define-se $SL_2(\mathbb{A})$ como o subgrupo de $GL_2(\mathbb{A})$ das matrizes com determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Proposição 4.2. Defina a álgebra comutativa pelo quociente

$$GL(2) = M(2)[t]/((ad - bc)t - 1) \quad \text{e} \quad SL(2) = GL(2)/(t - 1) = M(2)/(ad - bc - 1).$$

Para qualquer álgebra $\mathbb{A}$, existem bijeções

$$Hom_{Alg}(GL(2), \mathbb{A}) \cong GL_2(\mathbb{A}) \quad \text{e} \quad Hom_{Alg}(SL(2), \mathbb{A}),$$

que enviam um morfismo de álgebra f para a matriz

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Demonstração. Dado $GL(2)$ como definimos e usando o morfismo $M(2) \rightarrow M_2(\mathbb{A})$ (Sabendo que $M(2) = \mathbb{k}[a, b, c, d]$). Façamos a projeção $\pi : M(2)[t]/((ad - bc)t - 1) \rightarrow M(2)$, onde $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$ e $f(t) \in \mathbb{A}$. Definindo

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Como temos que $f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(c) = \gamma, f(d) = \delta$ e $f(t)$, podemos fazer

$$\begin{aligned} f((ad - bc)t - 1) &= f(ad - bc)f(t) - f(1) \\ &= (f(a)f(d) - f(b)f(c))f(t) - f(1) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)f(t) - 1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

vemos que $f(t) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}$. Portanto, os elementos que estão na imagem deste isomorfismo estão em $GL_2(\mathbb{A})$. Analogamente, temos que, para $M(2) \rightarrow M_2(\mathbb{A})$, vale

$$f(ad - bc - 1) = f(a)f(d) - f(b)f(c) - 1.$$

Portanto a matriz

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

pertence a $SL_2(\mathbb{A})$. Para terminar demonstração da proposição, usaremos o homomorfismo de $GL(2) = M(2)[t]/((ad - bc)t - 1) \rightarrow GL(2)$ que manda $t = 1$ e, portanto, $SL(2) \cong M(2)/(ad - bc - 1) \cong GL(2)/(t - 1)$. $\square$

Queremos verificar que $M(2)$, $GL(2)$ e $SL(2)$ como definidos anteriormente são biálgebras. Usaremos a notação $M(2)^{\otimes 2}$ com $M(2) \otimes M(2)$, $GL(2)^{\otimes 2}$ com $GL(2) \otimes GL(2)$ e $SL(2)^{\otimes 2}$ com $SL(2) \otimes SL(2)$. Definiremos a comultiplicação Δ com a seguir:

$$\Delta(a) = a \otimes a + a \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \quad \Delta(t) = t \otimes t \quad (4.21)$$

$$\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d, \quad (4.22)$$

$$\varepsilon(a) = 1, \quad \varepsilon(b) = 0, \quad \varepsilon(t) = 1 \quad (4.23)$$

$$\varepsilon(c) = 0, \quad \varepsilon(d) = 1. \quad (4.24)$$

A seguir verificaremos que os morfismos de álgebra Δ e ε , como definidos acima, dotam esta álgebra com uma estrutura de uma biálgebra cocomutativa.

Proposição 4.3. *Seja $\Delta : M(2) \rightarrow M(2)^{\otimes 2}$ um morfismo de álgebra definido pelas relações (4.22). Então, para toda álgebra comutativa A , o morfismo Δ corresponde a multiplicação de matriz em $M_2(A)$.*

Demonstração. Mostraremos que a comultiplicação é análoga à multiplicação de matrizes

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \otimes a + b \otimes c & a \otimes b + b \otimes d \\ c \otimes a + d \otimes c & c \otimes b + d \otimes d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

sobre a identificação da equação (4.15). □

É conveniente reescrever as fórmulas de Δ da proposição na forma da multiplicação de matrizes para compactar a fórmula. Veja a seguir

$$\Delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta(a) & \Delta(b) \\ \Delta(c) & \Delta(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$S(a) = td, \quad S(b) = -tb, \quad S(t) = t^{-1} \quad (4.26)$$

$$S(c) = -tc, \quad S(d) = ta. \quad (4.27)$$

Temos que $t^{-1} = ad - bc$ é invertível em $GL(2)$ e $\Delta(t) = t \otimes t$. Primeiramente, provaremos que Δ é coassociativo, pois valem

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I) \circ \Delta(a) &= (\Delta \otimes I)(a \otimes a + b \otimes c) \\ &= \Delta(a) \otimes a + \Delta(b) \otimes c \\ &= (a \otimes a + b \otimes c) \otimes a + (a \otimes b + b \otimes d) \otimes c \\ &= a \otimes (a \otimes a + b \otimes c) + b \otimes (c \otimes a + d \otimes c) \\ &= a \otimes \Delta(a) + b \otimes \Delta(c) \\ &= (I \otimes \Delta) \circ \Delta(a). \end{aligned}$$

Analogamente, se verifica esta igualdade para os outros geradores. Assim se pode concluir que $(I \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes I) \circ \Delta$. Além disso, vale que $\varepsilon(t) = \varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 1$ e $\varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0$ e, portanto, segue que

$$(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(a) = a \otimes \varepsilon(a) + b \otimes \varepsilon(c) \quad \text{e} \quad (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(a) = \varepsilon(a) \otimes a + \varepsilon(b) \otimes c.$$

Analogamente, verifica-se para os outros geradores b , c e d a igualdade da relação. Isto implica em $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta$. Na forma da multiplicação de matrizes, temos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Por fim, verificamos a antípoda como definimos antes. Observamos que as relações da antípoda podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} (I \star S)(a) & (I \star S)(b) \\ (I \star S)(c) & (I \star S)(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(a) & \varepsilon(b) \\ \varepsilon(c) & \varepsilon(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e também

$$\begin{pmatrix} (S \star I)(a) & (S \star I)(b) \\ (S \star I)(c) & (S \star I)(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(a) & \varepsilon(b) \\ \varepsilon(c) & \varepsilon(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e vale que $tS(t) = S(t)t = \varepsilon(t) = 1$, desde que $S(t) = t^{-1} = ad - bc$. Observaremos, por fim, que o morfismo S^2 é tal que

$$\begin{aligned} S^2(a) &= S(td) = S(d)S(t) = a, & S^2(b) &= -S(tb) = -S(b)S(t) = b, & S^2(t) &= S(t^{-1}) = t \\ S^2(c) &= -S(tc) = -S(c)S(t) = c, & S^2(d) &= S(ta) = S(a)S(t) = d. \end{aligned}$$

Portanto a antípoda desta álgebra de Hopf é involutória. Observamos que, como o espaço $\mathbb{H}$ não tem dimensão finita, não podemos reconstruir a estrutura tensorial como fizemos no final da Seção 3.7.

4.2.3 Álgebra de Hopf ‘Divided Powers’ (Graus Dissociados)

Seja $\mathbb{H}$ uma álgebra de Hopf com base $\{t^i | i \in \mathbb{N}\}$. Define-se a sua estrutura multiplicativa por:

$$M(t^n \otimes t^m) = \binom{n+m}{n} t^{n+m} \quad \text{e} \quad i(1_{\mathbb{k}}) = t^0,$$

Isto define completamente a estrutura de álgebra de $\mathbb{H}$.

Para definir a comultiplicação temos as seguintes relações:

$$\Delta(t^n) = \sum_{i=0}^n t^i \otimes t^{n-i} \quad \text{e} \quad \varepsilon(t^n) = \delta_{n,0}.$$

Verificaremos a seguir que estas estruturas satisfazem a definição de biálgebra:

$$\Delta(M(t^n \otimes t^m)) = \binom{n+m}{n} \Delta(t^{n+m}) = \binom{n+m}{n} \sum_{i=0}^{n+m} t^i \otimes t^{n+m-i}.$$

E, por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
M_{\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}}(\Delta(t^n) \otimes \Delta(t^m)) &= \left(\sum_{i=0}^n t^i \otimes t^{n-i} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m t^j \otimes t^{m-j} \right) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m M(t^i \otimes t^j) \otimes M(t^{n-i} \otimes t^{m-j}) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \binom{i+j}{i} \binom{n+m-i-j}{n-i} t^{i+j} \otimes t^{n+m-i-j}
\end{aligned}$$

Chamando $u = i + j$, temos uma simplificação das relações do seguinte modo

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u=0}^{n+m} \sum_{i=0}^u \binom{u}{i} \binom{n+m-u}{n-i} t^u \otimes t^{n+m-u} \\
&= \sum_{u=0}^{n+m} \sum_{i=0}^u \binom{u}{i} \binom{n+m-u}{n-i} t^u \otimes t^{n+m-u} \\
&= \sum_{u=0}^{n+m} \binom{n+m}{n} t^u \otimes t^{n+m-u} \\
&= \binom{n+m}{n} \sum_{i=0}^{n+m} t^i \otimes t^{n+m-i}.
\end{aligned}$$

Logo concluímos que $M_{\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}}(\Delta(t^n) \otimes \Delta(t^m)) = \Delta(M(t^n \otimes t^m))$. Basta verificar as outras relações da definição de biálgebra, ou seja,

$$\begin{aligned}
\Delta(i(1_{\mathbb{k}})) &= \Delta(t^0) = t^0 \otimes t^0 \\
\varepsilon(M(t^n \otimes t^m)) &= \varepsilon\left(\binom{n+m}{n} t^{n+m}\right) = \binom{n+m}{n} \delta_{(n+m),0} = \binom{n+m}{n} \delta_{n,0} \delta_{m,0} = \varepsilon(t^n) \varepsilon(t^m) \\
\varepsilon(i(1_{\mathbb{k}})) &= \varepsilon(t^0) = \delta_{0,0} = 1
\end{aligned}$$

Assim, temos que o conjunto $\mathbb{H}$ tem uma estrutura de biálgebra.

Para mostra que a biálgebra $\mathbb{H}$ é uma álgebra de Hopf, basta exibir uma antípoda para nossa biálgebra. Observe que $S(t^0) = t^0$ satisfaz

$$M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(t^0) = S(t^0)t^0 = t^0 = \varepsilon(t^0)t^0, \quad M \circ (I \otimes S) \circ \Delta(t^0) = t^0 S(t^0) = t^0 = \varepsilon(t^0)t^0$$

Definiremos, por recursão, que $S(t^n) = -S(t^0)t^n - S(t^1)t^{n-1} - \dots - S(t^{n-1})t^1$, e verificamos que

$$M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(t^n) = \sum_{i=0}^n S(t^i)t^{n-i},$$

e fica claro que esta relação satisfaz a definição da antípoda, pois

$$S(t^0)t^n + S(t^1)t^{n-1} + \dots + S(t^{n-1})t + S(t^n)t^0 = 0$$

para todo $n > 0$, e para $\varepsilon(t^n)t^0 = 0$. Portanto temos verificada a propriedade da antípoda para S . Assim definimos a álgebra de Hopf ‘divided Power’.

A álgebra dual da álgebra divided power $\mathbb{H}$ é a álgebra $\mathbb{k}[[X]]$, i.e., a série de potência em uma variável.

Exemplo 4.2.1 (Álgebra Divided Power Dual). Tentaremos encontrar, pela identificação de $\mathbb{H}^* = \mathbb{k}[[X]]$, onde a função X é definida por $X^n(t^m) = \delta_{n,m}$, uma integral para $\mathbb{H}$. Observe que $P(t^0) = P(0)$, pois t^0 anula todos os X^i sobrando apenas a constante $P(0)$. Deste modo suponha, por contradição, Q uma integral de $\mathbb{H}^*$ e que $P \neq 0 \in \mathbb{H}^*$ com $P(t^0) = 0$, então $PQ = P(t^0)Q = 0$. Contudo, temos que $PQ \neq 0$, se $Q \neq 0$; como produto de elementos em uma série de potência, porque $\mathbb{k}[[X]]$ é um domínio de integridade. Assim $Q = 0$ e isto implica em $\int = \{0\}$.

4.2.4 Álgebra de Hopf de Sweedler

Nesta seção, devido a álgebra Sweedler ter dimensão 4, faremos a tabulação da estrutura de álgebra, coálgebra e antípoda.

A álgebra de Hopf de Sweedler é construída sobre como um quociente do anel dos polinômios e é dada por $\mathbb{k}[T, X]/I = (X^2, T^2 - 1, TX + XT) = \mathbb{k}[x, t]$. Como espaço vetorial $\mathbb{H}$ tem dimensão finita. A multiplicação desta álgebra é a multiplicação padrão do anel quociente, ou seja, $M(\overline{p(X, T)} \otimes \overline{q(X, T)}) = \overline{p(X, T)q(X, T)}$. Portanto a álgebra herda a comutatividade do anel de polinômios. A seguir a tabela da multiplicação da Álgebra de Sweedler:

M	1	t	x	tx
1	1	t	x	tx
t	t	1	tx	x
x	x	$-tx$	0	0
tx	tx	$-x$	0	0

Para finalizar a estrutura da álgebra, resta exprimir o morfismo unidade. Afirmamos que $i(1_{\mathbb{k}}) = 1 \in \mathbb{H} = \mathbb{k}[X, T]/I = \mathbb{k}[x, t]$ define o morfismo identidade.

A comultiplicação e a counidade são definidas pelas tabelas a seguir na bases do espaço vetorial $\mathbb{H} = \mathbb{k}[X, T]/I = \mathbb{k}[x, t]$:

	1	t	x	tx
Δ	$1 \otimes 1$	$t \otimes t$	$t \otimes x + x \otimes 1$	$1 \otimes tx + tx \otimes t$

	1	t	x	tx
ϵ	1	1	0	0

Este foi, por algum tempo, um dos únicos exemplos de uma álgebra de Hopf que não é comutativa e tampouco cocomutativa. Observe também que a álgebra de Sweedler não é involutória.

	1	t	x	tx
S	1	t	$-tx$	x
S^2	1	t	$-x$	$-tx$

Podemos verificar também que $\Lambda = (1 + t)x$ é uma cointegral da álgebra de Sweedler à direita e $\Lambda' = x(1 + t)$ é uma cointegral da álgebra de Sweedler à esquerda. Pois vemos facilmente que

	1	t	x	tx
$\Lambda_r = (1 + t)x$	$1 \cdot \Lambda_r = \epsilon(1)\Lambda_r$	$t \cdot \Lambda_r = \epsilon(t)(\Lambda_r)$	$x \cdot \Lambda_r = 0 = \epsilon(x)\Lambda_r$	$tx \cdot \Lambda_r = \epsilon(tx)\Lambda_r$
$\Lambda_l = x(1 + t)$	$\Lambda_l \cdot 1 = \epsilon(1)\Lambda'$	$\Lambda_l \cdot t = \epsilon(t)(\Lambda_l)$	$\Lambda_l \cdot x = 0 = \epsilon(x)\Lambda_l$	$\Lambda_l \cdot tx = \epsilon(tx)\Lambda_l$

E, como $\varepsilon(\Lambda) = 0$, podemos concluir que a álgebra de Sweedler não é semissimples.

Queremos calcular a álgebra de Hopf dual da álgebra de Sweedler. Como $\mathbb{H}$ tem dimensão finita, então podemos assumir que $\{1^*, t^*, x^*, (tx)^*\}$ formam uma base dual da álgebra de Sweedler dual. Observamos que, como vimos na Seção 2.3, $\varepsilon^* = 1^* + t^*$ é a unidade de $\mathbb{H}^*$. Portanto podemos trocar a base de $\mathbb{H}^*$ para $\{1^* + t^*, t^*, x^*, (tx)^*\}$. Observe que o produto em $\mathbb{H}^*$ é dado por $M(f \otimes g)(x) = \sum f(x_{(1)})g(x_{(2)})$ onde $\Delta(x) = \sum x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ e $i(1_{\mathbb{k}}) = 1^* + t^*$.

M^*	$1^* + t^*$	t^*	x^*	$(tx)^*$
$1^* + t^*$	$1^* + t^*$	t^*	x^*	$(tx)^*$
t^*	t^*	t^*	x^*	0
x^*	x^*	0	0	0
$(tx)^*$	$(tx)^*$	$(tx)^*$	0	0

Definimos a coálgebra e, pela Seção 2.3, temos que $\Delta^*(f) = f_{(1)} \otimes f_{(2)}$ tal que $f \circ M(x \otimes y) = f_{(1)}(x)f_{(2)}(y)$.

	Δ
$1^* + t^*$	$1 \otimes 1 + 1 \otimes t^* + t^* \otimes 1 + t^* \otimes t^*$
t^*	$1^* \otimes t^* + t^* \otimes 1^*$
x^*	$1^* \otimes x^* + t^* \otimes (tx)^* + x^* \otimes 1^* - (tx)^* \otimes t^*$
$(tx)^*$	$1^* \otimes (tx)^* + (tx)^* \otimes 1^* + t^* \otimes x^* - x^* \otimes t^*$

Para a counidade de $\mathbb{H}^*$, temos a tabela a seguir

	$1^* + t^*$	t^*	x^*	$(tx)^*$
ε	$1_{\mathbb{k}}$	0	0	0

Observamos que $\lambda_l = (tx)^*$, $\lambda_r = x^*$ são integrais à esquerda e direita respectivamente. Tendo em vista que

	1	t	x	tx
$\lambda_l = (tx)^*$	$1 \cdot \lambda_l = \varepsilon(1)\lambda_l$	$t \cdot \lambda_l = \varepsilon(t)(\lambda_l)$	$x \cdot \lambda_l = 0 = \varepsilon(x)\lambda_l$	$tx \cdot \lambda_l = \varepsilon(tx)\lambda_l$
$\lambda_r = x^*$	$\lambda_r \cdot 1 = \varepsilon(1)\lambda_r$	$\lambda_r \cdot t = \varepsilon(t)(\lambda_r)$	$\lambda_r \cdot x = 0 = \varepsilon(x)\lambda_r$	$\lambda_r \cdot tx = \varepsilon(tx)\lambda_r$

Sabendo que $\lambda_r(\Lambda_l) = 1$, $\lambda_r(\Lambda_r) = 1$ e, segue do que vimos, que

$$S(a) = \Lambda_l \leftarrow (\lambda_r \leftarrow a), \quad S^{-1}(a) = \Lambda_r \leftarrow (a \leftarrow \lambda_r).$$

Além disso, pelo que vimos nas seções anteriores e pela fórmula

$$tr(f) = \sum \lambda_r(S(\Lambda_{l(2)})f(\Lambda_{l(1)})) = \sum \lambda_r(S \circ f(\Lambda_{l(2)})\Lambda_{l(1)}) = \sum \lambda_r(f \circ S(\Lambda_{l(2)})\Lambda_{l(1)}),$$

construiremos a antípoda $S^{-1}(a) = \sum \lambda(a\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}$.

Primeiramente, vemos que

$$\begin{aligned} \Delta(\Lambda_l) &= \Delta((1+t)x) \\ &= \Delta(1+t)\Delta(x) \\ &= (1 \otimes 1 + t \otimes t)(t \otimes x + x \otimes 1) \\ &= t \otimes x + x \otimes 1 + 1 \otimes tx + tx \otimes t. \end{aligned}$$

Para calcular a relação, temos $S^{-1}(a) = x^*(at)x + x^*(ax)1 + x^*(a)tx + x^*(atx)t$. Podemos fazer o seguinte $S^{-1}(1) = 1$, $S^{-1}(x) = tx$, $S^{-1}(t) = t$ e $S^{-1}(tx) = -x$. Analogamente, podemos verificar a seguinte relação

$$\begin{aligned}\Delta(\Lambda_r) &= \Delta(x(1+t)) \\ &= \Delta(x)\Delta(1+t) \\ &= (t \otimes x + x \otimes 1)(1 \otimes 1 + t \otimes t) \\ &= t \otimes x - 1 \otimes tx + x \otimes 1 - tx \otimes t.\end{aligned}$$

para, em sequencia, calcular a relação $S(a) = x^*(ta)x - x^*(a)tx + x^*(xa)1 - x^*(txa)t$. Portanto substituindo $S(1) = 1$, $S(t) = t$, $S(x) = -tx$ e $S(tx) = x$.

4.2.5 Álgebra de Taft

Seja $n \geq 2$ um inteiro e ζ uma n -ésima raiz da unidade. Considere a álgebra $\mathbb{T}(\zeta)$ definida pelos geradores c e x com as relações

$$c^n = 1, \quad x^n = 0, \quad xc = \zeta cx$$

Nesta álgebra, podemos introduzir uma estrutura de coálgebra induzida por

$$\Delta(c) = c \otimes c, \quad \Delta(x) = x \otimes c + 1 \otimes x, \quad \varepsilon(c) = 1, \quad \varepsilon(x) = 0.$$

Deste modo, $\mathbb{T}(\zeta)$ ⁶ tornar-se a biálgebra de dimensão n^2 , tendo por base $\{c^i x^j | 0 \leq i, j \leq n-1\}$. A antípoda é definida por $S(c) = c^{-1}$ e $S(x) = -c^{-1}x$. Como vale a relação $xc = \zeta cx$, podemos denotar por $A = x \otimes c$ e $B = 1 \otimes x$ e observar que $BA = \zeta AB$

$$\begin{aligned}BA &= (1 \otimes x)(x \otimes c) \\ &= (x \otimes xc) \\ &= (x \otimes \zeta cx) \\ &= \zeta(x \otimes c)(1 \otimes x) \\ &= \zeta AB.\end{aligned}$$

Como consequência disto, podemos calcular o seguinte teorema⁷.

Proposição 4.4. *Seja $x^k \in \mathbb{H}$. Então temos que $\Delta(x^k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i}_{\zeta} (x^i \otimes c^i x^{k-i})$.*

⁶Note que, para $n = 2$ e $\zeta = -1$, obtemos como exemplo a álgebra de Sweedler. Vide Seção 4.2.4.

⁷Provaremos usando as relações da Seção A.5.1.

Demonstração. Pelas relações dos binômios da Seção A.5.1, temos que

$$\begin{aligned}
 (A+B)^k &= \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i}_{\zeta} A^i \otimes B^{n-k} \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i}_{\zeta} (x \otimes c)^i \otimes (1 \otimes x)^{k-i} \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i}_{\zeta} (x^i \otimes c^i) \otimes (1 \otimes x^{k-i}) \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq k} \binom{k}{i}_{\zeta} (x^i \otimes c^i x^{k-i}).
 \end{aligned}$$

Portanto temos que $\Delta(x^r) = (x \otimes c + 1 \otimes x)^r = (A+B)^r$. Logo

$$\Delta(x^r) = \sum_{i=0}^r \binom{k}{i}_{\zeta} (x^i \otimes c^i x^{k-i}).$$

Com isto, provamos o resultado que queríamos. □

Além disso, vale que $\Delta(c^i x^j) = (c^i \otimes c^i) \Delta(x^j)$, para todo $1 \leq i, j \leq n-1$. Portanto, em geral,

$$\Delta(c^i x^r) = \sum_{j=0}^r \binom{k}{i}_{\zeta} (c^i x^j \otimes c^{i+j} x^{k-j}).$$

Investigaremos agora as integrais à direita e à esquerda. Para isto, observemos o seguinte

$$\begin{cases} \Lambda_l c = \varepsilon(c) \Lambda_l = \Lambda_l \\ \Lambda_l x = \varepsilon(x) \Lambda_l = 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Portanto $x^{n-1} p(c) = \Lambda_l$. Por outro lado, vemos que, como $\Lambda_l c = \Lambda_l$, vale que

$$\Lambda_l c = p(c) x^{n-1} c = p(c) (\zeta^{n-1} c x^{n-1}).$$

Podemos concluir que $(\zeta^{n-1} c p(c) - p(c)) x^{n-1} = 0$ e, portanto, $\zeta^{n-1} z p(z) - p(z) \in \langle z^n - 1 \rangle$. Assim temos que $(\zeta^{n-1} z - 1) p(z) \in \langle z^n - 1 \rangle$ e, portanto, $p(z) = (z^n - 1) / (\zeta^{n-1} z - 1)$. Concluímos que a integral esquerda é $\Lambda_l = p(c) x^{n-1}$. Podemos verificar que $\varepsilon(\Lambda_l) = \varepsilon(x^{n-1}) \varepsilon(p(c)) = 0$, portanto esta álgebra não é semissimples.

Analogamente ao que fizemos para Λ_l , podemos calcular Λ_r . A partir das seguintes relações

$$\begin{cases} c \Lambda_r = \varepsilon(c) \Lambda_r = \Lambda_r \\ x \Lambda_r = \varepsilon(x) \Lambda_r = 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

podemos concluir que $x^{n-1} p(c) = \Lambda_r$. Por outro lado, vemos que, como $\Lambda_l c = \Lambda_l$, temos

$$\Lambda_r c = p(c) x^{n-1} c = p(c) (\zeta^{-n+1} c x^{n-1}).$$

Analogamente ao que fizemos antes, podemos concluir que $\Lambda_r = x^{n-1} p(c)$. Como $\varepsilon(\Lambda_r) = \varepsilon(x^{n-1}) \varepsilon(p(c)) = 0$, temos que a álgebra não é semissimples.

Sabe-se que a álgebra de Taft é autodual, ou seja, satisfaz a igualdade $\mathbb{T}(\zeta) \simeq \mathbb{T}(\zeta)^*$ como álgebras de Hopf. Para verificar isto, tomemos as seguintes funções:

$$\mathcal{A}(c^l x^m) = q^l \delta_{m,0} \quad \mathcal{X}(c^l x^m) = \delta_{m,1},$$

para todo $0 \leq l, m < n$. A proposição a seguir nos dá o isomorfismo de álgebras de Hopf. Na demonstração desta Proposição 4.5, usaremos a notação $M^* = M_{\mathbb{H}^*}$, $\Delta^* = \Delta_{\mathbb{H}^*}$, $S^* = S_{\mathbb{H}^*}$, $1^* = \varepsilon$ e $\varepsilon^* = 1_{\mathbb{H}^*}$ para evitar que a notação usada na demonstração fique muito complicada.

Proposição 4.5. *A álgebra de Taft é isomorfa a sua álgebra de Hopf dual, ou seja, $\mathbb{T}(\zeta) = \mathbb{T}(\zeta)^*$.*

Demonstração. Primeiramente, sabendo que, como a álgebra de Taft tem dimensão finita, vale que o morfismo $\alpha : \mathbb{T}(\zeta)^* \otimes \mathbb{T}(\zeta)^* \rightarrow (\mathbb{T}(\zeta) \otimes \mathbb{T}(\zeta))^*$ definido por $\alpha(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x)g(y)$ é um isomorfismo. Assim, calculemos

$$\mathcal{A}(c^l x^m) \mathcal{A}(c^u x^v) = \zeta^l \delta_{m,0} \zeta^u \delta_{v,0}$$

e, por outro lado,

$$\mathcal{A}(M(c^l x^m \otimes c^u x^v)) = \mathcal{A}(c^l x^m c^u x^v) = \zeta^{mu} \mathcal{A}(c^{l+u} x^{m+v}) = \zeta^{mu} \zeta^{l+u} \delta_{m+v,0}.$$

Isto implica em

$$\mathcal{A}(c^l x^m) \mathcal{A}(c^u x^v) = \mathcal{A}(c^l x^m c^u x^v).$$

Como consequência do isomorfismo padrão⁸ α , temos que

$$\Delta(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}.$$

Para verificar que $\Delta(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \otimes \mathcal{A} + \varepsilon \otimes \mathcal{X}$ façamos

$$\mathcal{X}(c^l x^m) \mathcal{A}(c^u x^v) + \varepsilon(c^l x^m) \mathcal{X}(c^u x^v) = \mathcal{X}(c^l x^m) \mathcal{A}(c^u x^v) = \delta_{m,1} q^u \delta_{v,0}.$$

Por outro lado,

$$\mathcal{X}(c^l x^m c^u x^v) = q^{um} \delta_{m+v,1}.$$

Para $0 \leq l, m, u, v < n$, temos que

$$\mathcal{X}(c^l x^m c^u x^v) = \mathcal{X}(c^l x^m) \mathcal{A}(c^u x^v) + \varepsilon(c^l x^m) \mathcal{X}(c^u x^v).$$

Assim, pelo isomorfismo α , temos que $\Delta(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \otimes \mathcal{A} + \varepsilon \otimes \mathcal{X}$.

Falta verificar que $\mathcal{X} \mathcal{A} = \zeta \mathcal{A} \mathcal{X}$

$$(\mathcal{X} \mathcal{A})(c^l x^m) = \sum_{(x^m)} \mathcal{X}(c^l (x^m)_{(1)}) \mathcal{A}(c^l (x^m)_{(2)}) = \mathcal{X}(c^l x^m) \mathcal{A}(c^l x^m) = \delta_{m,1} \zeta^{l+m}$$

A segunda igualdade segue do fato do termo de $\mathcal{A}$ se anular para uma potência de x maior que 0. Então, pela Proposição 4.4, o único termo de $\Delta(x)$ que não anula na soma deve ser $x^m \otimes a^m$. Assim temos

$$(\mathcal{X} \mathcal{A})(c^l x^m) = \begin{cases} \zeta^{l+1}, & m = 1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases} \quad (4.30)$$

⁸Vide a Seção 2.3.

De forma similar, chegamos à

$$(\mathcal{A}\mathcal{X})(c^l x^m) = \sum_{(x^m)} \mathcal{A}(c^l (x^m)_{(1)}) \mathcal{X}(c^l (x^m)_{(2)}) = \mathcal{A}(c^l) \mathcal{X}(c^l c^m) = \delta_{m,1} \zeta^l$$

e, portanto,

$$(\mathcal{A}\mathcal{X})(c^l x^m) = \begin{cases} \zeta^l, & m = 1 \\ 0, & m \neq 1. \end{cases} \quad (4.31)$$

Segue que $\mathcal{X}\mathcal{A} = \zeta\mathcal{A}\mathcal{X}$.

Agora, para ter o isomorfismo, basta verificar se $\mathcal{X}^n = 0$ e $\mathcal{A}^n = 1$. Queremos verificar a relação $\mathcal{A}^l \mathcal{X}^m(c^r x^s) = \zeta^{lr}(n)!_q \delta_{m,s}$. Para isto note que

$$(\mathcal{A}^l \mathcal{X}^m)(c^r x^s) = \sum \mathcal{A}^l(c^r (x^s)_{(1)}) \mathcal{X}^m(c^r (x^s)_{(2)}) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}_\zeta \mathcal{A}^l(c^r x^i) \mathcal{X}^m(c^r c^i x^{n-i}).$$

Pela definição de $\mathcal{A}$, temos que esse somatório só não se anula para os termos onde $i = 0$. Segue, desta observação e de que $\mathcal{A}^l(c^r) = (\mathcal{A}(c^r))^l = \zeta^{rl}$, a seguinte relação

$$(\mathcal{A}^l \mathcal{X}^m)(c^r x^s) = \sum \zeta^{rl} \mathcal{X}^m(c^r x^s).$$

Podemos provar, por indução, que $\mathcal{X}^k(c^r x^s) = (k)!_q \delta_{k,s}$ para todos k, r e $s \in \mathbb{N} - \{0\}$. Assim

$$\mathcal{A}^l \mathcal{X}^m(c^r x^s) = \zeta^{lr}(m)!_q \delta_{m,s}.$$

Podemos calcular agora que $\mathcal{A}^n \mathcal{X}^0(c^r x^s) = \zeta^{0r}(0)!_q \delta_{m,s} = \varepsilon(c^r x^s)$ e temos que ε é a unidade da álgebra de Hopf dual. Analogamente, $\mathcal{A}^0 \mathcal{X}^n = (n)!_q \delta_{n,n} = 0$ ($(n)!_q = 0$).

Definidas as relações clamamos que $f: \mathbb{T}(\zeta) \rightarrow \mathbb{T}(\zeta)^*$ tal que $f(a^l x^m) = A^l X^m$ é um morfismo de álgebra e coálgebra

$$f(a^l x^m a^r x^s) = \zeta^{mr} f(a^{l+r} x^{m+s}) = \zeta^{mr} \mathcal{A}^{l+r} \mathcal{X}^{m+s} = (\mathcal{A}^l \mathcal{X}^m)(\mathcal{A}^r \mathcal{X}^s)$$

e $f(1) = f(a^0 x^0) = A^0 X^0 = \varepsilon = 1^*$. Por outro lado, temos que

$$(f \otimes f)(xx' \otimes yy') = f(xx') \otimes f(yy') = f(x)f(x') \otimes f(y)f(y') = (f(x) \otimes f(y))(f(x') \otimes f(y'))$$

e, como vale que, temos

$$(f \otimes f) \circ \Delta(a) = A \otimes A = \Delta^*(f(a)), \quad (f \otimes f) \circ \Delta(x) = X \otimes A + \varepsilon \otimes X,$$

$$\varepsilon^* \circ f(a) = A(1) = 1_{\mathbb{k}} \quad \text{e} \quad \varepsilon^* \circ f(x) = X(1) = 0_{\mathbb{k}}.$$

Segue que f é um morfismo de biálgebra. Por isso só precisamos verificar que

$$f \circ S(a) = A^{n-1} = S^*(f(a)) \quad \text{e} \quad f \circ S(x) = -XA^{n-1} = S^*(f(x)).$$

Logo f dará um isomorfismo de álgebras de Hopf como queríamos demonstrar. $\square$

Pelo artigo [SH05], a álgebra de Taft é a única que não é semissimple de dimensão p^2 em um corpo de característica 0 algebricamente fechado.

Para calcular a antípoda e sua inversa, podemos usar as integrais e cointegrais:

$$S^{-1}(a) = \Lambda \leftarrow (a \leftarrow \lambda) = \sum \lambda(a\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)},$$

onde $\Lambda = \Lambda_l$ é um cointegral à esquerda. Como $S^{-1}(c) = \sum (1_{\mathbb{T}}(\zeta))^*(c\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}$

$$\Delta(x^{n-1}p(c)) = \Delta(x^{n-1})\Delta(p(c))$$

e $\Delta(x^{n-1}) = c^{n-1} \otimes x^{n-1} + \dots$, temos

$$\Delta(x^{n-1}p(c)) = a_{n-1}c^{n-1}c^{n-1} \otimes x^{n-1}c^{n-1} + \dots + a_0c^{n-1} \otimes x^{n-1} + \dots,$$

onde $p(c) = \sum a_i c^i$. $S^{-1}(c) = \sum (1_{\mathbb{T}}(\zeta))^*(cc^{n-1})x^{n-1} = x^{n-1}$. Analogamente,

$$S^{-1}(x) = \sum (1_{\mathbb{T}}(\zeta))^*(x\Lambda_{(1)})\Lambda_{(2)}$$

e que

$$S(a) = \Lambda' \leftarrow (a \rightarrow \lambda) = \sum \lambda(\Lambda'_{(1)}a)\Lambda'_{(2)}, \quad S(x) = \sum (1_{\mathbb{T}}(\zeta))^*(\Lambda'_{(1)}x)\Lambda'_{(2)},$$

onde $\Lambda' = \Lambda_r$ é uma cointegral à direita. $p(\mathcal{A})\mathcal{X}^{n-1} = \Lambda_l$ e $\mathcal{X}^{n-1}p(\mathcal{A}) = \Lambda_r$.

4.2.6 Coálgebra Colivre sobre um espaço vetorial

Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e $\mathbb{C}$ uma coálgebra cocomutativa. Definiremos a seguir uma coálgebra colivre $(\mathbb{C}, \pi)$

Definição 4.3. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Uma coálgebra colivre sobre $\mathbb{V}$ é o par $(\mathbb{C}, \pi)$, onde $\mathbb{C}$ é uma coálgebra cocomutativa sobre $\mathbb{k}$ e $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{V}$ é uma aplicação linear tal que, para toda aplicação $\mathbb{k}$ -linear $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{V}$, existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f} : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo $f = \pi \circ \bar{f}$.

Verificaremos a seguir que dadas as coálgebras colivres $(\mathbb{C}, \pi)$ e $(\mathbb{C}', \Delta', \pi')$ podemos definir uma estrutura natural de coálgebra colivre em $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'$.

Proposição 4.6. Sejam $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$ espaços vetoriais e $(\mathbb{C}, \pi), (\mathbb{C}', \pi')$ coálgebras colivre sobre os espaços $\mathbb{V}, \mathbb{V}'$. Define-se $p : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}'$ por

$$(x \otimes y) \longmapsto p(x \otimes y) = (\pi(x)\varepsilon'(y), \pi'(y)\varepsilon(x)),$$

onde $\varepsilon, \varepsilon'$ são as counidades de $\mathbb{C}, \mathbb{C}'$. Então $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}', p)$ é uma coálgebra colivre sobre $\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}'$.

Demonstração. Sejam $\mathbb{C}, \mathbb{C}'$ coálgebras colivres. Basta observar que, sendo $f : \mathbb{C}'' \rightarrow \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}'$, podemos escrever $f(c'') = f_1(c'') \oplus f_2(c'')$ devido a $\mathcal{L}(\mathbb{C}'', \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}') \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C}'', \mathbb{V}) \oplus \mathcal{L}(\mathbb{C}'', \mathbb{V}')$. Assim temos que existe um único morfismo $\bar{f} : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'$ ($\bar{f} = \bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2$). De modo que

$$\begin{aligned} f(c'') &= p \circ (\bar{f}(c'')) \\ &= p \circ (\bar{f}_1 \otimes \bar{f}_2) \circ \Delta(c'') \\ &= (\pi(\bar{f}_1(c''_1))\varepsilon'(\bar{f}_2(c''_2)), \pi(\bar{f}_2(c''_2))\varepsilon(\bar{f}_1(c''_1))) \\ &= (f_1(c''_1)\varepsilon'(c''_2), \varepsilon(c''_1)f_2(c''_2)) \\ &= (f_1(c''), f_2(c'')). \end{aligned}$$

Assim concluímos que $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}'', p)$ é uma coálgebra colivre sobre $\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}'$. □

O par $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}, p)$ é uma coálgebra colivre cocomutativa sobre $\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}$, onde

$$p(x \otimes y) = (\pi(x)\varepsilon(y), \pi(y)\varepsilon(x)).$$

A Proposição 4.6 mostra o morfismo $\mathbb{k}$ -linear $\gamma: \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{V} \oplus \mathbb{V} \oplus \mathbb{V}$, definida por

$$\gamma(x \otimes y \otimes z) = (p(x \otimes y)\varepsilon(z), \pi(e)\varepsilon(c \otimes d)) = (\pi(x)\varepsilon(y)\varepsilon(z), \pi(y)\varepsilon(x)\varepsilon(z), \pi(z)\varepsilon(z)\varepsilon(y)),$$

que dota o par $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}, \gamma)$ de uma estrutura de coálgebra colivre cocomutativa. Definamos $m: \mathbb{V} \oplus \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ por $(x, y) \mapsto x + y$. Então a aplicação linear $m \circ p$ induz um morfismo de álgebra M , pois $(\mathbb{C}, \pi)$ é uma coálgebra colivre cocomutativa e, portanto, existe um único morfismo de álgebra $M: \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\pi \circ M = m \circ p$. Analogamente, para o morfismo $(m \oplus id) \circ \gamma: (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{V} \oplus \mathbb{V})$, temos que o morfismo $(M \otimes I)$ satisfaz a condição da Definição 4.3, ou seja, $p \circ (M \otimes I) = (m \oplus id) \circ \gamma$

$$\begin{aligned} p \circ (M \otimes I)(x \otimes y \otimes z) &= p(M(x \otimes y) \otimes z) \\ &= (\pi \circ M(x \otimes y)\varepsilon(z), \pi(z)\varepsilon(M(x \otimes y))) \\ &= (m \circ p(x \otimes y)\varepsilon(z), \pi(z)\varepsilon(x)\varepsilon(y)) \\ &= (m \circ (p(x \otimes y)\varepsilon(z)), \pi(z)\varepsilon(x)\varepsilon(y)) \\ &= (m \oplus id) \circ (p(x \otimes y)\varepsilon(z), \pi(z)\varepsilon(x)\varepsilon(y)). \end{aligned}$$

Se fizermos o mesmo para o morfismo $(id \oplus m)$, obteremos um único morfismo de álgebras $I \otimes M: (\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}$ tal que $p \circ (I \otimes M) = (id \oplus m)\gamma$. Como $(m \oplus id) \circ m = (id \oplus m) \circ m$, então

$$\begin{aligned} \pi \circ (M \otimes I) \circ M &= (m \oplus id) \circ p \circ M \\ &= (m \oplus id) \circ m \circ \gamma \\ &= (id \oplus m) \circ m \circ \gamma \\ &= (id \oplus m) \circ p \circ M \\ &= \pi \circ (I \otimes M) \circ M \end{aligned}$$

e, pela unicidade dos morfismo com esta propriedade da coálgebra colivre, $(M \otimes I) \circ M = (I \otimes M) \circ M$. A unidade $i: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{C}$ é definida usando o morfismo $0: \mathbb{C} \rightarrow \{0\}$ e a seguinte proposição.

Proposição 4.7 (Vide a Seção A.4). *A álgebra cocomutativa colivre sobre o espaço vetorial nulo é $\mathbb{k}$, com a estrutura de coálgebra trivial, junto com o morfismo nulo, ou seja, $(\mathbb{k}, 0)$.*

Exemplo 4.2.2 (coálgebra trivial). *A coálgebra trivial é $(\mathbb{k}, \Delta, \varepsilon)$ onde $\Delta(1) = 1 \otimes 1$, $\varepsilon(1) = 1$.*

A unidade é definida pela aplicação linear dada por $\pi' = 0: \mathbb{k} \rightarrow \{0\}$ onde $i = \bar{0}: \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{C}$ é o morfismo de coálgebras tal que $\pi \circ i = \bar{0}$.

A coálgebra colivre cocomutativa sobre o espaço vetorial $\mathbb{V} \oplus \{0\}$ de $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{k}, p')$, onde $p'(x \otimes k) = (\pi(x)k, 0)$. Tomemos que $(id \oplus 0) \circ p': \mathbb{C} \otimes \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{V} \oplus \{0\}$, onde $\mathbb{C} \oplus \mathbb{k}$ tem a estrutura de uma coálgebra. Assim, existe um morfismo de coálgebra $(id \oplus 0) \circ p' = (I \otimes i)$ tal que

$$\begin{aligned} p \circ (I \otimes i)(x \otimes k) &= (\pi(x)\varepsilon(i(k)), \pi' \circ i(k)\varepsilon(x)) \\ &= (\pi(x)\varepsilon(i(k)), 0) \\ &= (\pi(x)i(\varepsilon(k)), 0) \\ &= (id \oplus 0) \circ p'(x \otimes k). \end{aligned}$$

Agora definiremos $M \circ (I \otimes i) : \mathbb{C} \otimes \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{C}$ a partir da aplicação linear $m \circ (id \oplus 0) \circ p'$, ou seja, $M \circ (I \otimes i)$ é um morfismo de coálgebras tal que

$$\pi \circ M \circ (I \otimes i) = m \circ p \circ (I \otimes i) = m \circ (id \oplus 0) \circ p'.$$

Agora definiremos $M \circ (i \otimes I) : \mathbb{k} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a partir da aplicação linear $m \circ (0 \oplus id) \circ p'$, ou seja, $M \circ (i \otimes I)$ é um morfismo de coálgebras tal que

$$\pi \circ M \circ (i \otimes I) = m \circ p \circ (i \otimes I) = m \circ (id \oplus 0) \circ p'$$

Como $m \circ (id \oplus 0) \circ p' = m \circ (id \oplus 0) \circ p'$, temos a igualdade dos morfismos $M \circ (I \otimes i) = M \circ (i \otimes I)$. Além disso, M , i são morfismos de coálgebras. Então, por definição, $(\mathbb{C}, M, i, \Delta, \epsilon)$ é uma biálgebra.

Para definir a antípoda, temos que, na coálgebra colivre cocomutativa, $(\mathbb{C}, \pi)$ e $s : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ é uma aplicação $\mathbb{k}$ -linear definida por $s(v) = -v$, existe um único morfismo de coálgebra $\bar{s} = S : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\pi \circ S = s \circ \pi$. Queremos provar agora que $\sum_{(x)} S(x_{(1)})x_{(2)} = \sum_{(x)} S(x_{(1)})x_{(2)}$, ou seja, S satisfaz o axioma da antípoda. Verifiquemos o morfismo

$$p\left(\sum_{(x)} x_{(1)} \otimes x_{(2)}\right) = \sum_{(x)} (\pi(x_{(1)})\epsilon(x_{(2)}), \pi(x_{(1)})\epsilon(x_{(2)})) = (x, x) = \delta(x),$$

ou seja, $p \circ \Delta(x) = \delta(x)$. Observe que $m \circ (s \oplus id) \circ \delta = m \circ (id \otimes s) \circ \delta$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \pi \circ M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(x) &= m \circ p(S \otimes I) \circ \Delta(x) \\ &= m \circ p(S(x_{(1)}) \otimes x_{(2)}) \\ &= m \circ (\pi \circ S(x_{(1)})\epsilon(x_{(2)}), \pi(x_{(2)})\epsilon(S(x_{(1)}))) \\ &= m \circ (s(x_{(1)})\epsilon(x_{(2)}), \pi(x_{(2)})\epsilon(x_{(1)})) \\ &= m \circ (s(x_{(1)})\epsilon(x_{(2)}), \pi(x_{(2)})\epsilon(x_{(1)})) \\ &= m \circ (s \oplus id) \circ p \circ \Delta \\ &= m \circ (s \oplus id) \circ \delta \\ &= m \circ (id \oplus s) \circ \delta \\ &= \pi \circ M \circ (I \oplus S) \circ \Delta. \end{aligned}$$

Pela unicidade dos morfismos, temos o seguinte resultado

$$M \circ (S \otimes I) \circ \Delta = M \circ (I \otimes S) \circ \Delta.$$

Assim concluímos que podemos definir uma estrutura de álgebra de Hopf para uma coálgebra colivre cocomutativa.

4.2.7 Álgebras Tensoriais, Simétricas e Exteriores

Na álgebra tensorial definida a partir de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ ⁹ é possível dotar este conjunto com uma estrutura de álgebra de Hopf. A partir das álgebras tensoriais definimos as álgebras envelope e desta construiremos os grupos quânticos por deformação por um parâmetro.

⁹Definimos uma álgebra graduada na Seção A.2.1.

Fixada uma base v_i de $\mathbb{V}$. Definimos a álgebra tensorial como o conjunto $T(\mathbb{V}) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{k}(\mathbb{V}^{\otimes n})$, como um espaço vetorial graduado onde $\mathbb{V}^{\otimes 0} = 1_{T(\mathbb{V})}$, satisfazendo as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{ll} M((v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}) \otimes (v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s})) &= v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_s}, \\ M((v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}) \otimes 1_{T(\mathbb{V})}) &= v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \\ \Delta(v) &= 1 \otimes v + v \otimes 1 \\ S(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n}) &= (-1)^n (v_{i_n} \otimes \cdots \otimes v_{i_1}) \\ \varepsilon(v) &= 0 \\ i(1_{\mathbb{k}}) &= 1_{T(\mathbb{V})} \\ \varepsilon(1_{\mathbb{k}}) &= 1_{\mathbb{k}} e. \end{array} \right.$$

Estas relações definem as aplicações M, Δ, ε e i na base de $T(\mathbb{V})$ de modo simples.

Teorema 4.4. *Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$. Existe uma única estrutura de biálgebra na álgebra tensorial $T(\mathbb{V})$ tal que $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ e $\varepsilon(v) = 0$ para todo elemento $v \in \mathbb{V}$. Esta estrutura de biálgebra é cocomutativa e para todos $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ temos*

$$\varepsilon(v_1 \cdots v_n) = 0 \quad (4.32)$$

e

$$\begin{aligned} \Delta(v_1 \cdots v_n) &= 1 \otimes v_1 \cdots v_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n)} + v_1 \cdots v_n \otimes 1 \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde σ percorre o conjunto de todas as permutações simétricas S_n tais que

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{e} \quad \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(n),$$

tal permutação é chamada uma $(p, n-p)$ - 'shuffle'.

Demonstração. Pela propriedade universal da álgebra tensorial, existem morfismos únicos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta: T(\mathbb{V}) &\longrightarrow T(\mathbb{V})^{\otimes 2} \\ \varepsilon: T(\mathbb{V}) &\longrightarrow \mathbb{k} \end{array} \right. \quad \text{e} \quad (4.34)$$

tais que as restrições a $\mathbb{V}$ são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta(v) &= 1 \otimes v + v \otimes 1, \\ \varepsilon(v) &= 0. \end{array} \right.$$

Como consequência imediata da propriedade universal da álgebra tensorial e destas relações, segue que $\varepsilon(v_1 \cdots v_n) = 0$. Resta verificar que $\Delta(v_1 \cdots v_n)$ satisfaz as condições que desejamos. Suponhamos para isto que, para todo $n-1 \geq 1$, valha que:

$$\Delta(v_1 \cdots v_{n-1}) = 1 \otimes v_1 \cdots v_{n-1} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} + v_1 \cdots v_{n-1} \otimes 1,$$

ou, equivalentemente:

$$\Delta(v_1 \cdots v_{n-1}) = \sum_{p=0}^n \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n)}.$$

Pela propriedade universal, temos que

$$\Delta(v_1 \cdots v_{n-1} v_n) = \Delta(v_1 \cdots v_{n-1}) \Delta(v_n).$$

Fazendo a multiplicação, chegamos à relação

$$\begin{aligned} &= v_n \otimes v_1 \cdots v_{n-1} + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} v_n \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} + v_1 \cdots v_{n-1} v_n \otimes 1 \\ &= 1 \otimes v_1 \cdots v_{n-1} v_n + \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} v_n \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} v_n + v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n + v_1 \cdots v_n \otimes 1 \end{aligned}$$

Sabemos que o conjunto das permutações ‘shuffles’ é a união disjunta dos subconjuntos dos shuffles onde $\sigma(p) = n$

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) = n \quad \text{e} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(n)$$

e dos ‘shuffles’ onde

$$\sigma(1) < \cdots < \sigma(p) \quad \text{e} \quad \sigma(p+1) < \cdots < \sigma(n) = n.$$

Como podemos ver, os termos da parcela

$$v_n \otimes v_1 \cdots v_{n-1} + v_1 \cdots v_n \otimes 1 + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} v_n \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)}$$

são os $(p, n-1)$ -shuffles que fixam $\sigma'(p) = n$, ou seja,

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & 1 \leq i \leq p \\ n & i = p+1 \\ \sigma(i-1) & p+2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Analogamente,

$$1 \otimes v_1 \cdots v_n + v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} v_n$$

são $(p-1, n-p)$ -shuffles que fixa $\sigma'(n) = n$, ou seja,

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i) & 1 \leq i \leq p \\ \sigma(i-1) & p+2 \leq i \leq n \\ n & i = n \end{cases}$$

portanto a soma das duas parcelas é igual à

$$\begin{aligned} \Delta(v_1 \cdots v_n) &= \left(\sum_{p=0}^n \sum_{\sigma'} v_{\sigma'(1)} \cdots v_{\sigma'(p)} \otimes v_{\sigma'(p+1)} \cdots v_{\sigma'(n)} \right) (1 \otimes v_n + v_n \otimes 1) \\ &= \sum_{p=0}^n \sum_{\sigma'} v_{\sigma'(1)} \cdots v_{\sigma'(p)} \otimes v_{\sigma'(p+1)} \cdots v_{\sigma'(n)}. \end{aligned}$$

Sendo assim, a relação de Δ está verificada e o axioma da counidade está satisfeito, pois $(I \otimes \varepsilon) \circ \Delta(v_1 \cdots v_n) = v_1 \cdots v_n \otimes 1 \simeq 1 \otimes v_1 \cdots v_n = (\varepsilon \otimes I) \circ \Delta(v_1 \cdots v_n)$. Tendo em vista que $\varepsilon(v_1 \cdots v_r) = 0$ para todo $r \geq 1$. A cocomutatividade segue do fato que todo $(p, n-p)$ -shuffles tais que trocamos a ordem dos subconjuntos ordenados é um $(n-p, p)$ -shuffles.

A coassociatividade de $\Delta : T(\mathbb{V}) \rightarrow T(\mathbb{V}) \otimes T(\mathbb{V})$ é consequência da observação que $\Delta \otimes I : T(\mathbb{V})^{\otimes 2} \rightarrow T(\mathbb{V})^{\otimes 3}$ é um morfismo de álgebras, pois

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I)((x \otimes y)(x' \otimes y')) &= (\Delta \otimes I)(xx' \otimes yy') \\ &= \Delta(xx') \otimes yy' \\ &= (\Delta(x) \otimes y)(\Delta(x') \otimes y') \\ &= (\Delta \otimes I)(x \otimes y)(\Delta \otimes I)(x' \otimes y'), \end{aligned}$$

Como sabemos que, para todo $v \in \mathbb{V}$, $(\Delta \otimes I) \circ \Delta(v) = (I \otimes \Delta) \circ \Delta(v)$, vale ainda

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes I) \circ \Delta(v_1 \cdots v_n) &= (\Delta \otimes I) \circ (\Delta(v_1) \cdots \Delta(v_n)) \\ &= ((\Delta \otimes I) \circ \Delta(v_1)) \cdots ((\Delta \otimes I) \circ \Delta(v_n)) \\ &= ((I \otimes \Delta) \circ \Delta(v_1)) \cdots ((I \otimes \Delta) \circ \Delta(v_n)) \\ &= (I \otimes \Delta) \circ (\Delta(v_1) \cdots \Delta(v_n)) \\ &= (I \otimes \Delta) \circ \Delta(v_1 \cdots v_n) \end{aligned}$$

Concluimos que Δ é coassociativo. □

Proposição 4.8. *Seja $S : T(\mathbb{V}) \rightarrow T(\mathbb{V})$ um antiendomorfismo definido por $S(v) = -v$. Então S é uma antípoda.*

Demonstração. Verificar que S é uma antípoda é simples. Basta verificar a definição da antípoda na base $\{v_i\}$ de $\mathbb{V}$ conforme o Lema 2.2:

$$M \circ (I \otimes S) \Delta(v_i) = M(v_i \otimes S(1) + 1 \otimes S(v_i)) = v_i \otimes 1 - 1 \otimes v_i = 0 = \varepsilon(v_i).$$

Assim $M \circ (I \otimes S) \circ \Delta(v_i) = \varepsilon(v_i) 1_{T(\mathbb{V})} = M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(v_i)$. Logo S é uma antípoda para $T(\mathbb{V})$. □

Dada uma álgebra de Hopf $T(\mathbb{V})$ e fazendo o quociente pelo ideal $I = \langle u \otimes v - v \otimes u \mid u, v \in \mathbb{V} \rangle$. Se $\mathbb{V}$ tiver dimensão finita e $\{v_1, \dots, v_n\}$, então temos que $S(\mathbb{V}) \simeq T(\mathbb{V})/I \cong \mathbb{k}[v_1, \dots, v_n]$, ou seja, o anel dos polinômios.

$$\left\{ \begin{array}{ll} M(u \otimes v) &= uv = vu = M(v \otimes u), \\ M(u \otimes 1_{T(\mathbb{V})}) &= u \\ \Delta(v) &= 1 \otimes v + v \otimes 1 \\ S(v) &= (-1)^n v \\ \varepsilon(v) &= 0 \\ i(1_{\mathbb{k}}) &= 1_{S(\mathbb{V})} \end{array} \right.$$

Por fim, construiremos a estrutura de álgebra de Hopf para a álgebra exterior. Primeiro observamos que, para construir a álgebra de Hopf exterior, podemos fazer o seguinte $\bigwedge(\mathbb{V}) = T(\mathbb{V})/I = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \bigwedge^r(\mathbb{V})$ onde o ideal $I = \langle uv + vu \mid u, v \in \mathbb{V} \rangle$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} M(u \otimes v) &= uv = -vu = -M(v \otimes u), \\ M(u \otimes 1_{T(\mathbb{V})}) &= u \\ \Delta(u) &= 1 \otimes u + u \otimes 1 \\ S(u) &= (-1)^n u \\ \varepsilon(u) &= 0 \\ i(1_{\mathbb{K}}) &= 1_{S(\mathbb{V})} \end{array} \right.$$

Assim vemos que a álgebra simétrica e exterior são álgebras de Hopf quociente.

4.2.8 Álgebra Envelope de Uma Álgebra de Lie

Qualquer álgebra de Lie se torna uma álgebra associativa $\mathfrak{U}(L)$, que é denominada **álgebra envelope** de L . Podemos definir um morfismo de álgebras de Lie $\iota_L : L \rightarrow L(\mathfrak{U}(L))$. Definimos o envelope de uma álgebra de Lie por $T(L)/I$, com I definido por

$$I = \{xy - yx - [x, y] \mid x, y \in L\}.$$

sendo um ideal¹⁰; pois, se $x, y, c \in L$, temos que

$$\begin{aligned} M((xy - yx - [x, y]) \otimes c) &= (xy - yx - [x, y]) \otimes c \\ &= xy \otimes c - yx \otimes c - [x, y] \otimes c \\ &= (xy - yx) \otimes c - [x, y] \otimes c \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto $M(I \otimes L) \subset I$ e segue, analogamente, que $M(L \otimes I) \subset I$. A álgebra quociente de $T(L)$ pelo ideal I será denotado por $\mathbb{H} = T(L)/I$. Ressaltamos que, como os geradores de $I(L)$ não são homogêneos em $T(L)$ e não existe uma graduação para álgebra de Hopf $\mathbb{H}$ compatível com a graduação original da álgebra tensorial, ou seja, termos de mesmo ‘grau’ não são mandados em termos de mesmo grau. Assim o conjunto $\mathfrak{U}(L)$ não pode ser descrito como um quociente nível à nível de $T(L)$.

Definimos uma aplicação ι_L como a composição da sobrejeção canônica da álgebra tensorial $p : T(V) \rightarrow \mathfrak{U}(L) = T(V)/I$ sobre a álgebra envelope com a injeção canônica $i : L \hookrightarrow T(L)$, ou seja, $\iota_L = p \circ i$. Pela definição de ι_L , temos que $\iota_L([x, y]) = xy - yx$, devido à $\iota_L(xy - yx - [x, y]) = 0$. Isto mostra que ι_L é um morfismo álgebra de Lie, onde $T(L)$ tem uma álgebra de Lie induzida na álgebra associativa arbitrária.

Teorema 4.5 (Propriedade Universal de $\mathfrak{U}(L)$). *Seja L uma álgebra de Lie. Dada qualquer álgebra associativa A e qualquer morfismo de álgebra de Lie $f : L \rightarrow L(A)$, existe um único morfismo de álgebra $\phi : \mathfrak{U}(L) \rightarrow A$ tal que $\phi \circ \iota_L = f$.*

Demonstração. Pela definição da álgebra tensorial, temos que sendo f é um morfismo de álgebra de Lie, então f se estende para um morfismo de álgebra $\bar{f} : T(L) \rightarrow A$, definido por $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$, para $x_1, \dots, x_n \in L$. A existência de ϕ segue de $\bar{f}(I(L)) = \{0\}$. A fim de demonstrar este fato, temos somente que demonstrar que $\bar{f}(xy - yx - [x, y]) = 0$, para todos $x, y \in L$. Verificamos o seguinte:

$$\bar{f}(xy - yx - [x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x) - f([x, y]).$$

¹⁰ xy denota $x \otimes y$.

E, quando f é um morfismo de álgebras de Lie, temos que $\bar{f}(xy - yx - [x, y]) = 0$. A unicidade de ϕ é devida ao fato que L gera a álgebra $T(L)$ e, portanto, $\mathfrak{U}(L)$. $\square$

Obs.: 4.2.1. Se denotarmos por $\text{Hom}_{\text{Lie}}(L, L')$ o conjunto dos morfismos das álgebras de Lie de L para L' , poderemos expressar o teorema pela bijeção natural

$$\text{Hom}_{\text{Lie}}(L, L(A)) \cong \text{Hom}_{\text{Alg}}(\mathfrak{U}(L), A).$$

Deduzimos, a partir deste teorema, os dois corolários a seguir:

Corolário 4.3. Sejam L, L' álgebras de Lie e $f : L \rightarrow L'$ um morfismo de álgebra. Então:

- (a) Para qualquer morfismo de álgebra de Lie $f : L \rightarrow L'$, existe um único morfismo de álgebras $\mathfrak{U}(f) : \mathfrak{U}(L) \rightarrow \mathfrak{U}(L')$ tal que $\mathfrak{U}(f) \circ \mathfrak{U}_L = \mathfrak{U}_{L'} \circ f$. Também temos que $\mathfrak{U}(id_L) = id_{\mathfrak{U}(L)}$.
- (b) Se $f : L \rightarrow L'$ e $f' : L' \rightarrow L$ são morfismos de álgebra de Lie, então:

$$\mathfrak{U}(f' \circ f) = \mathfrak{U}(f') \circ \mathfrak{U}(f).$$

Demonstração. **Item (a):** Aplicaremos o teorema Teorema 4.5 para $g = \mathfrak{U}'_L \circ f : L \rightarrow A = \mathfrak{U}(L')$. Obtemos uma aplicação linear $\mathfrak{U}(f) : \mathfrak{U}(L) \rightarrow \mathfrak{U}(L')$ tal que $\mathfrak{U}(f) \circ \mathfrak{U}_L = g = \mathfrak{U}'_L \circ f$. Além disso, se $\mathfrak{U}(f)_1, \mathfrak{U}(f)_2$ são elementos tais que $\mathfrak{U}(f)_1 \circ \mathfrak{U}_L = \mathfrak{U}'_L \circ f = \mathfrak{U}(f)_2 \circ \mathfrak{U}_L$, então $(\mathfrak{U}(f)_1 - \mathfrak{U}(f)_2) \circ \mathfrak{U}_L = 0$. Assim, para todo $x \in L$, vale que $\mathfrak{U}(f)_1(x) = \mathfrak{U}(f)_2(x)$ e, portanto, $\mathfrak{U}(f)_1 \equiv \mathfrak{U}(f)_2$, pois são iguais nos geradores de $\mathfrak{U}(L)$. Além disso, quando $f = id_L$, temos que $\mathfrak{U}(id_L) \circ \mathfrak{U}_L = \mathfrak{U}_L \circ id_L = \mathfrak{U}_L$ e, portanto, $\mathfrak{U}(id_L) = id_{\mathfrak{U}(L)}$.

Item (b): Temos que

$$\mathfrak{U}(f') \circ \mathfrak{U}(f) \circ \mathfrak{U}_L = \mathfrak{U}(f') \circ \mathfrak{U}'_L \circ f = \mathfrak{U}_{L'} \circ f' \circ f = \mathfrak{U}(f' \circ f) \circ \mathfrak{U}_L.$$

E, apelando para a unicidade $\mathfrak{U}(f' \circ f)$ provada no item (a) deste corolário, temos que $\mathfrak{U}(f' \circ f) = \mathfrak{U}(f') \circ \mathfrak{U}(f)$. A parte da unicidade desta afirmação também implica em $\mathfrak{U}(id_L) = id_{\mathfrak{U}(L)}$. $\square$

Por fim, associamos o envelope de uma soma direta de álgebras de Lie L, L' com o produto tensorial de álgebras tensoriais $\mathfrak{U}(L)$ e $\mathfrak{U}(L')$.

Corolário 4.4. Sejam L, L' álgebras de Lie e $L \oplus L'$ é a sua soma direta. Então temos a equivalência a seguir:

$$\mathfrak{U}(L \oplus L') \cong \mathfrak{U}(L) \otimes \mathfrak{U}(L').$$

Demonstração. Primeiramente, construiremos um morfismo de álgebra $\phi : \mathfrak{U}(L \oplus L') \rightarrow \mathfrak{U}(L) \otimes \mathfrak{U}(L')$ a partir do Corolário 4.4 e usando o morfismo f que definiremos a seguir. O morfismo ϕ deve satisfazer $\phi \circ \mathfrak{U}_{L \oplus L'} = f$. Agora, para qualquer $x \in L$ e $x' \in L'$, podemos definir o morfismo f abaixo:

$$f(x, x') = \mathfrak{U}_L(x) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{U}'_{L'}(x').$$

Esta fórmula determina uma aplicação linear $f : L \oplus L' \rightarrow \mathfrak{U}(L) \otimes \mathfrak{U}(L')$. Mostraremos que f é um morfismo de álgebras de Lie. Para $x, y \in L$ e $x', y' \in L'$, temos que

$$\begin{aligned} [f(x, x'), f(y, y')] &= (\mathfrak{u}_L(x) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{u}_{L'}(x'))(\mathfrak{u}_L(y) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{u}_{L'}(y')) \\ &\quad - (\mathfrak{u}_L(y) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{u}_{L'}(y'))(\mathfrak{u}_L(x) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{u}_{L'}(x')) \\ &= [\mathfrak{u}_L(x), \mathfrak{u}_L(y)] \otimes 1 + 1 \otimes [\mathfrak{u}_{L'}(x'), \mathfrak{u}_{L'}(y')] \\ &= \mathfrak{u}_L([x, y]) \otimes 1 + 1 \otimes \mathfrak{u}_{L'}([x', y']) \\ &= f([x, y], [x', y']) \\ &= f([(x, x'), (y, y')]). \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 4.5, obtemos um morfismo de álgebra $\phi : \mathfrak{U}(L \oplus L') \rightarrow \mathfrak{U}(L) \otimes \mathfrak{U}(L')$.

Usaremos a propriedade universal do produto tensorial para as duas álgebras para construir um morfismo de álgebra $\psi : \mathfrak{U}(L) \otimes \mathfrak{U}(L') \rightarrow \mathfrak{U}(L \oplus L')$. A composição da injeção canônica de L para $L \oplus L'$ com $\mathfrak{u}_{L \oplus L'}$ e, da mesma forma, a injeção canônica de L' para $L \oplus L'$ com $\mathfrak{u}'_{L \oplus L'}$ são morfismos de álgebra de Lie. Pelo Corolário 4.3, existem morfismos de álgebras $\psi_1 : \mathfrak{U}(L) \rightarrow \mathfrak{U}(L \oplus L')$ e $\psi_2 : \mathfrak{U}(L') \rightarrow \mathfrak{U}(L \oplus L')$ tais que, para $x \in L$ e $x' \in L'$, temos:

$$\psi_1(x) = \mathfrak{u}_{L \oplus L'}(x, 0) \quad \text{e} \quad \psi_2(x') = \mathfrak{u}_{L \oplus L'}(0, x').$$

Pela Proposição A.11, a fórmula $\psi(a \otimes a') = \psi_1(a)\psi_2(a')$ define um morfismo de álgebra $\psi : \mathfrak{U}(L) \otimes \mathfrak{U}(L') \rightarrow \mathfrak{U}(L \oplus L')$ tal que $\psi \circ \mathfrak{u}_{L \oplus L'} = \psi_1$ e $\psi \circ \mathfrak{u}'_{L \oplus L'} = \psi_2$, desde que $\psi_1(a)\psi_2(a') = \psi_2(a')\psi_1(a)$ para todos $a \in \mathfrak{U}(L)$ e $a' \in \mathfrak{U}(L')$. Provaremos esta comutatividade, observando que é bastante verificar que $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x')$ comutam para $x \in L$ e $x' \in L'$. Agora, vejamos que

$$\begin{aligned} [\psi_1(x), \psi_2(x')] &= [\mathfrak{u}_{L \otimes L'}(x, 0), \mathfrak{u}_{L \otimes L'}(0, x')] \\ &= \mathfrak{u}_{L \otimes L'}([(x, 0), (0, x')]) \\ &= \mathfrak{u}_{L \otimes L'}([x, 0], [0, x']) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto $\psi_1(a)\psi_2(a') - \psi_2(a')\psi_1(a) = 0$, que implica na comutatividade $\psi_1(a)\psi_2(a') = \psi_2(a')\psi_1(a)$.

Afirmamos agora que os morfismos ϕ e ψ são inversos um do outro. Consideremos a composição $\psi \circ \phi$. É o endomorfismo de álgebra $\mathfrak{U}(L \oplus L')$ identidade, quando restito a imagem de $L \otimes L'$. Portanto, para todos $x \in L$, $x' \in L'$,

$$\psi(\phi(x, x')) = \psi(x \otimes 1) + \psi(1 \otimes x') = \mathfrak{u}_{L \oplus L'}((x, 0) + (0, x')) = \mathfrak{u}_{L \oplus L'}(x, x'). \quad (4.35)$$

Consequentemente, devido ao fato de $\mathfrak{u}_L$ ser uma inclusão própria temos que $\psi \circ \phi = id_{L \oplus L'}$. Um argumento similar mostra que $\phi \circ \psi = id_{L \otimes L'}$

$$\begin{aligned} \phi(\psi(x \otimes x')) &= \phi(\psi_1(x)\psi_2(x')) = \\ &= \phi(\mathfrak{u}_{L \otimes L'}(x)\mathfrak{u}_{L \otimes L'}(x')) = \phi(\mathfrak{u}_{L \otimes L'}(x))\phi(\mathfrak{u}_{L \otimes L'}(x')) = f(x, 0)f(0, x') = (x \otimes 1)(1 \otimes x') = x \otimes x' \end{aligned}$$

Assim concluímos o resultado como queríamos. $\square$

O Corolário 4.3 e o Corolário 4.4 nos permitem definir uma estrutura de álgebra de Hopf para a álgebra $\mathfrak{U}(L)$. Portanto, a comultiplicação Δ em $\mathfrak{U}(L)$ será definida por $\Delta = \phi \circ \mathfrak{U}(\delta)$, onde $\delta : L \rightarrow L \oplus L$, definida por $x \mapsto (x, x)$, e ϕ é um isomorfismo $U(L \oplus L) \rightarrow \mathfrak{U}(L) \otimes \mathfrak{U}(L)$, que foi construído na demonstração Corolário 4.4. A counidade foi dada por $\varepsilon = U(0)$, onde $0 : L \rightarrow \{0\}$ é o morfismo nulo. Finalmente, a antípoda é definida por $S = U(op)$, onde $op : L \rightarrow L^{op}$ e $x \mapsto op(x) = -x$.

Proposição 4.9. *A álgebra envelope $\mathfrak{U}(L)$ como um álgebra de Hopf cocomutativa para as aplicações Δ , ε e S definida acima. Para $x_1, \dots, x_n \in L$, temos*

$$\begin{aligned} \Delta(x_1 \cdots x_n) &= 1 \otimes x_1 \cdots x_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)} \otimes x_{\sigma(p+1)} \cdots x_{\sigma(n)} \\ &\quad + x_1 \cdots x_n \otimes 1, \end{aligned}$$

onde σ percorre todos os (p, q) -shuffles dos grupos simétricos de S_n , e

$$S(x_1 x_2 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_2 x_1.$$

Demonstração. O axioma de associatividade é satisfeito como consequência da comutatividade do seguinte diagrama.

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\delta} & L \oplus L \\ \delta \downarrow & & \downarrow I \oplus \delta \\ L \oplus L & \xrightarrow{\delta \oplus I} & L \oplus L \oplus L \end{array}$$

Sabemos que $\mathfrak{U}(\delta) \circ \mathfrak{U}_L = \mathfrak{U}_{L \oplus L} \circ \delta$. Como $(I_L \oplus \delta) \circ \delta = (\delta \oplus I_L) \circ \delta$, temos que $U((I_L \oplus \delta) \circ \delta) = U((\delta \oplus I_L) \circ \delta)$. Isto implica em $U(I_L \oplus \delta) \circ \mathfrak{U}(\delta) = U(\delta \oplus I_L) \circ \mathfrak{U}(\delta)$. Queremos verificar que $\psi_{L, L \oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \mathfrak{U}(\delta)) \circ \phi$ e, analogamente, $\psi_{L \oplus L, L} \circ (\mathfrak{U}(\delta) \otimes I_{\mathfrak{U}(L)}) \circ \phi$. Além disso, $\mathfrak{U}_{L \oplus L} : L \oplus L \rightarrow U(L \oplus L)$ e, pelo isomorfismos, temos que $\mathfrak{U}_{L \oplus L} = \mathfrak{U}_L \oplus \mathfrak{U}_L$ (analogamente, $\mathfrak{U}_{L \oplus L \oplus L} = \mathfrak{U}_L \oplus \mathfrak{U}_L \oplus \mathfrak{U}_L$). A partir da relação abaixo:

$$\begin{aligned} \psi_{L, L \oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \mathfrak{U}(\delta)) \circ \phi \circ (\mathfrak{U}_{L \oplus L}) &= \psi_{L, L \oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \mathfrak{U}(\delta)) \circ (\mathfrak{U}_L \otimes \mathfrak{U}_L) \\ &= \psi_{L, L \oplus L} \circ (\mathfrak{U}_L \otimes (\mathfrak{U}(\delta) \circ \mathfrak{U}_L)) \\ &= \psi_{L, L \oplus L} \circ (\mathfrak{U}_L \otimes ((\mathfrak{U}_L \oplus \mathfrak{U}_L) \circ \delta)) \\ &= \psi_{L, L \oplus L} \circ (\mathfrak{U}_L \otimes (\mathfrak{U}_L \oplus \mathfrak{U}_L)) \circ (I_L \otimes \delta) \\ &= \psi_{L, L \oplus L} \circ (\mathfrak{U}_L \otimes (\mathfrak{U}_{L \oplus L})) \circ (I_L \otimes \delta) \\ &= \mathfrak{U}_{L \oplus L \oplus L} \circ (I_L \otimes \delta). \end{aligned}$$

Chagamos à

$$\psi_{L, L \oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \mathfrak{U}(\delta)) \circ \Delta = \psi_{L \oplus L, L} \circ (\mathfrak{U}(\delta) \otimes I_{\mathfrak{U}(L)}) \circ \Delta$$

e, por consequência, vale que

$$\Psi_{L,L\oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \Psi) \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \Delta) \circ \Delta = \Psi_{L\oplus L,L} \circ (\Psi \otimes I_{\mathfrak{U}(L)}) \circ (\Delta \otimes I_{\mathfrak{U}(L)}) \circ \Delta$$

Basta verificar que, com $a = x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes z$,

$$\Psi_{L,L\oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \Psi)(a) = \Psi_{L\oplus L,L} \circ (\Psi \otimes I_{\mathfrak{U}(L)})(a),$$

para $x, y, z \in L$, pois sabemos que isto implica em

$$\Psi_{L,L\oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \Psi) \equiv \Psi_{L\oplus L,L} \circ (\Psi \otimes I_{\mathfrak{U}(L)}).$$

Nestas condições, basta ver que, conforme foi feito na equação equação (4.35), temos

$$\begin{aligned} \Psi_{L,L\oplus L} \circ (I_{\mathfrak{U}(L)} \otimes \Psi)(x \otimes y \otimes z) &= \mathfrak{u}_{L\otimes L\otimes L}(x, 0, 0) + \mathfrak{u}_{L\otimes L\otimes L}(0, y, 0) + \mathfrak{u}_{L\otimes L\otimes L}(0, 0, z) \\ &= \mathfrak{u}_{L\otimes(L\otimes L)}(x, (y, z)) \\ &= \mathfrak{u}_{L\otimes L\otimes L}(x, y, z) \\ &= \mathfrak{u}_{(L\otimes L)\otimes L}((x, y), z) \\ &= \Psi_{L\oplus L,L} \circ (\Psi \otimes I_{\mathfrak{U}(L)})(x \otimes y \otimes z) \end{aligned}$$

Logo temos verificada a propriedade coassociatividade. Assim $\Delta(\bar{v}) = \phi \circ \mathfrak{U}(\delta)(\bar{v}) = \phi(\bar{v}, \bar{v}) = \bar{v} \otimes \bar{1} + \bar{1} \otimes \bar{v}$ e, portanto, como fizemos na Seção A.2.1, verificamos que Δ é coassoaciativo, cocomutativo e temos a fórmula a seguir

$$\Delta(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) = 1 \otimes \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} \bar{x}_{\sigma(1)} \cdots \bar{x}_{\sigma(p)} \otimes \bar{x}_{\sigma(p+1)} \cdots \bar{x}_{\sigma(n)} + \bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n \otimes 1.$$

O axioma de counidade também segue, analogamente, da coálgebra. Tendo em vista que $\varepsilon(\bar{x}) = U(0)(\bar{x}) = 0$. Assim segue que

$$\varepsilon(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) = 0.$$

A analogia entre Δ e ε , que pode ser vista na Seção 4.2.7, implica em ε ser uma counidade. A cocomutatividade é devida ao fato de uma torção de um $(p, n-p)$ -shuffle ser um $(n-p, p)$ -shuffle e, portanto, as permutações varrem o mesmo conjunto. A antípoda será dada por $S(\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n) = (-1)^n \bar{x}_n \cdots \bar{x}_1$, como na Seção 4.2.7. $\square$

A seguir um teorema que deixa mais clara a visualização da álgebra envelope.

Teorema 4.6. *Seja L uma álgebra de Lie:*

- (a) *A álgebra $\mathfrak{U}(L)$ é filtrada como um quociente da álgebra tensorial $T(L)$ (graduada como vimos na Seção 4.2.7) e a álgebra graduada correspondente é o isomorfa à álgebra simétrica em L :*

$$gr \mathfrak{U}(L) \cong S(L).$$

Portanto, se $\{v_i\}_{i \in I}$ é uma base de L totalmente ordenada, onde $\{v_{i_1} \cdots v_{i_n} | v_{i_k} \in \{v_i\}_{i \in I}\}$, onde $i_1 \leq \cdots \leq i_n \in I$, com $n \in \mathbb{N}$, é uma base de $\mathfrak{U}(L)$.

(b) Quando a característica do corpo $\mathbb{k}$ é zero, a simetrização da aplicação $\eta : S(L) \rightarrow \mathfrak{U}(L)$ definida por

$$\eta(v_1 \cdots v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(n)}$$

para $v_1, \dots, v_n \in L$, é um isomorfismo de coálgebra.

Demonstração. Item (a): Dada uma álgebra de lie L e uma base $\{v_i\}_{i \in \mathcal{J}}$. Temos que esta base é totalmente ordenada (pelo teorema da boa ordenação, encontramos uma base ordenada para L). Assim, pelo Teorema A.2, o conjunto $\{v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_n}^{\alpha_n}\}$, onde $n \in \mathbb{N}$, $\{i_1, \dots, i_n\} \in I$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$, forma uma base de $\mathfrak{U}(L)$ e, portanto, a gradação de $\mathfrak{U}(L)$ é similar a de $S(L)$.

Item (b): No caso onde $\mathbb{k}$ tem característica zero, temos, então, que a simetrização $\eta : S(L) \rightarrow \mathfrak{U}(L)$ definida por

$$\eta(v_1 \cdots v_n) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} v_{s(1)} \cdots v_{s(n)}.$$

$$\begin{aligned} (\eta \otimes \eta)(\Delta(v_1 \cdots v_n)) &= (\eta \otimes \eta)\left(\sum_{p=0}^n \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n)}\right) \\ &= \left(\sum_{p=0}^n \sum_{\sigma} \eta(v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)})\right) \otimes \eta(v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \sum_{p=0}^n \sum_{\sigma} v_{s_1 \circ \sigma(1)} \cdots v_{s_1 \circ \sigma(p)} \otimes v_{s_2 \circ \sigma(p+1)} \cdots v_{s_2 \circ \sigma(n)}. \end{aligned}$$

Queremos observar que

$$\Delta \circ \eta(v_1 \cdots v_n) = \Delta\left(\frac{1}{n!} \sum_{s \in S_n} v_{s(1)} \cdots v_{s(n)}\right) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^n \sum_{\sigma} \sum_s v_{\sigma(s(1))} \cdots v_{\sigma(s(p))} \otimes v_{\sigma(s(p+1))} \cdots v_{\sigma(s(n))}.$$

Ora, podemos ordenar os conjuntos $\{\sigma(s(1)), \dots, \sigma(s(p))\}, \{\sigma(s(p+1)), \dots, \sigma(s(n))\}$, segundo a ordem dos naturais, obtendo $\{j_1, \dots, j_p\}, \{j_{p+1}, \dots, j_n\}$, que pode ser vista como uma $(p, n-p)$ -shuffle σ' , tal que $\sigma'(k) = j_k$. Por fim, podemos definir duas permutações s_1, s_2 tais que $s_1 \circ \sigma'(k) = s_1(j_k) = \sigma \circ s(k)$, para $1 \leq k \leq p$, e $s_2 \circ \sigma'(k) = s_2(j_k) = \sigma \circ s(k)$, para $p+1 \leq k \leq n$. Portanto os elementos do tipo $\sigma \circ s = (s \times s') \circ \sigma$. Portanto todo elemento é da forma $\sigma \circ s = (s_1 \times s_2) \circ \sigma'$. Analogamente, sejam $\{s_1 \circ \sigma(1), \dots, s_1 \circ \sigma(p)\}, \{s_2 \circ \sigma(p+1), \dots, s_2 \circ \sigma(n)\}$, podemos ordenar estes conjuntos segundo a ordem dos naturais $\{j_1, \dots, j_p\}, \{j_{p+1}, \dots, j_n\}$. Feito isto, definimos um σ tal que

$$s(j_i) = s_1(\sigma(i)) \quad 1 \leq i \leq p, \quad s(j_i) = s_2(\sigma(i)) \quad p+1 \leq i \leq n.$$

Assim sempre existem σ e s tais que $\sigma \circ s(k) = (s_1 \times s_2) \circ \sigma$. Logo $\Delta \circ \eta \equiv (\eta \otimes \eta) \circ \Delta$ como queríamos demonstrar. $\square$

4.2.8.1 Álgebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(M_2(\mathbb{k})))$

Trabalharemos esta álgebra de Hopf como um exemplo, particularmente importante, para a compreensão da Seção 4.2.8. Por outro lado, construiremos os grupos quânticos nas próximas seções através da deformação por um parâmetro do envelope universal de uma álgebra de Lie. Primeiramente, tomemos a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2) = L(M_2(\mathbb{k}))$, onde $M_2(\mathbb{k})$ é uma álgebra associativa e, como podemos ver na Seção A.3.2, $\mathfrak{gl}(2)$ é uma álgebra de Lie com o comutador $[a, b] = ab - ba$, para todo $a, b \in M_2(\mathbb{k})$. Temos que os elementos abaixo

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & Y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

formam uma base para $\mathfrak{gl}(2)$ e seus comutadores são facilmente computáveis como podemos ver logo abaixo

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2X, \quad [I, X] = [I, Y] = [I, H] = 0.$$

As matrizes de traço nulo formam o subespaço $\mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{gl}(2)$. Temos que $\mathfrak{sl}(2) = \langle X, Y, H \rangle$, pois $\dim \mathfrak{sl}(2) < \dim \mathfrak{gl}(2) = 4$. As relações anteriores mostram que $\mathfrak{sl}(2)$ é um ideal da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2)$ e que existe uma decomposição

$$\mathfrak{gl}(2) = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{k}I,$$

que reduz a investigação da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2)$ à investigação da álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2)$.

A álgebra envelope $U = U(\mathfrak{sl}(2))$ de $\mathfrak{sl}(2)$ é isomorfa a álgebra gerada pelos elementos X, Y e H com as três relações a seguir:

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y. \quad (4.36)$$

Ora, podemos construir o conjunto $T(\mathfrak{sl}(2)) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} T^n(\mathfrak{sl}(2))$ e a álgebra envelope é definida por $U(\mathfrak{sl}(2)) = T(\mathfrak{sl}(2))/I$, onde

$$I = \langle X \otimes Y - Y \otimes X - H, H \otimes X - X \otimes H - 2X, H \otimes Y - Y \otimes H + 2Y \rangle$$

Como vimos na Seção 4.2.7 e na Seção 4.2.8 respectivamente. Abaixo verificaremos algumas das relações em $U = U(\mathfrak{sl}(2))$:

Lema 4.3. *As seguintes relações são satisfeitas em U para quaisquer $p, q \geq 0$:*

$$\begin{aligned} X^p H^q &= (H - 2p)^q X^p, & [X^p, Y] &= pX^{p-1}(H + p - 1) = p(H - p + 1)X^{p-1}, \\ Y^p H^q &= (H + 2p)^q Y^p, & [X, Y^p] &= pY^{p-1}(H - p + 1) = p(H + p - 1)Y^{p-1}. \end{aligned}$$

Demonstração. Para provar as duas primeiras relações, usamos indução dupla em p e q . Usando as relações $XH = (H - 2)X$ e $YH = (H + 2)Y$, que é outro modo de expressar o comutador das

equação (4.36). Fixemos $q = 1$, suponhamos que valha que $X^p H = (H - 2p)X^p$, para um p fixado, então

$$\begin{aligned}
 X^{p+1}H &= X(X^p H) \\
 &= X(H - 2p)X^p \\
 &= XHX^p - 2pX^{p+1} \\
 &= (H - 2)X.X^p - 2pX^{p+1} \\
 &= (H - 2 - 2p)X^{p+1} \\
 &= (H - 2(p + 1))X^{p+1},
 \end{aligned}$$

ou seja, a relação com $q = 1$ está demonstrada. Agora temos que, para todo p , vale que $X^p H = (H - 2p)X^p$. Suponhamos que, com um q fixado, valha que $X^p H^q = (H + 2p)^q X^p$, então podemos verificar que

$$\begin{aligned}
 X^p H^{q+1} &= X^p H^q H \\
 &= ((H - 2p)^q X^p) H \\
 &= (H - 2p)^q (H - 2p) X^p \\
 &= (H - 2p)^{q+1} X^p.
 \end{aligned}$$

Isto prova a primeira relação como queríamos. A segunda relação é feita de maneira análoga.

Para as relações restantes, faremos por indução em p . A relação é trivial para $p = 1$. Quando $p > 1$, temos

$$\begin{aligned}
 [X, Y^p] &= XY^p - Y^p X \\
 &= XY^{p-1}Y - Y^{p-1}XY + Y^{p-1}XY - Y^{p-1}YX \\
 &= [X, Y^{p-1}]Y + Y^{p-1}[X, Y] \\
 &= (p-1)Y^{p-2}(H - p + 2)Y + Y^{p-1}H \\
 &= Y^{p-1}((p-1)(H - p) + H) \\
 &= pY^{p-1}(H - p + 1).
 \end{aligned}$$

Concluimos que, passando Y^{p-1} por H , temos

$$\begin{aligned}
 pY^{p-1}(H - p + 1) &= p(Y^{p-1}H - pY^{p-1} + Y^{p-1}) \\
 &= p((H + 2(p-1))Y^{p-1} - pY^{p-1} + Y^{p-1}) \\
 &= p((H + 2(p-1)) - p + 1)Y^{p-1} \\
 &= p((H + p - 1)Y^{p-1}).
 \end{aligned}$$

Concluimos que $[X, Y^p] = p(H + p - 1)Y^{p-1}$ e a outra relação é análoga. □

Agora exibiremos uma base bem escolhida para $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2))$ que nos ajuda a visualizar melhor esta álgebra.

Proposição 4.10. *O conjunto $\{X^i Y^j H^k\}_{i,j,k \in \mathbb{N}}$ é uma base de $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2))$.*

Demonstração. Este teorema é consequência direta do Teorema A.2, tratando-se do item (a) do Teorema 4.6. $\square$

Como vimos na Seção 4.2.8, no conjunto U também valem as relações Δ , i , ϵ e S como podemos ver na mesma seção.

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad \Delta(Y) = Y \otimes 1 + 1 \otimes Y, \quad \Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H \quad (4.37)$$

$$\epsilon(X) = 0 \quad \epsilon(Y) = 0 \quad \epsilon(H) = 0 \quad (4.38)$$

$$i(X) = 1_U \quad i(Y) = 1_U \quad i(H) = 1_U \quad (4.39)$$

$$S(X) = -X \quad S(Y) = -Y \quad S(H) = -H. \quad (4.40)$$

A Proposição 4.10 e as relações (4.37-4.40) explicitam a estrutura de álgebra de Hopf, resta verificar que S é uma antípoda para a biálgebra definida nos geradores.

Proposição 4.11. *O antimorfismo S definido com nas equações 4.40 é uma antípoda para biálgebra definida em $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2))$. Com isto $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2))$ é uma álgebra de Hopf.*

Demonstração. Basta calcular nos geradores de $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2))$ pelo Lema 2.2. Portanto, temos que

$$M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(X) = M \circ (S \otimes I)(X \otimes 1 + 1 \otimes X) = 0 = \epsilon(X)$$

$$M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(Y) = M \circ (S \otimes I)(Y \otimes 1 + 1 \otimes Y) = 0 = \epsilon(Y)$$

$$M \circ (S \otimes I) \circ \Delta(H) = M \circ (S \otimes I)(H \otimes 1 + 1 \otimes H) = 0 = \epsilon(H).$$

Logo está verificada na base e, portanto, S é uma antípoda para $\mathfrak{U}(\mathfrak{sl}(2))$. $\square$

Esta álgebra de Hopf U tem um elemento denominado *elemento de Casimir* definido por:

$$C = XY + YX + \frac{H^2}{2}.$$

É possível construir um isomorfismo entre o centro da álgebra de Hopf e a álgebra polinomial $\mathbb{k}[t]$ enviando o elemento de Casimir em t , ou seja, o elemento de Casimir gera o centro desta álgebra de Hopf.

Primeiramente, verificaremos que o elemento de Casimir¹¹ está no centro da álgebra de Hopf.

Lema 4.4. *O elemento de Casimir C pertence ao centro de U .*

¹¹O elemento de Casimir foi denominado assim em homenagem a Hendrik Casimir, que o identificou em sua descrição da dinâmica de corpo rígido em 1931.

Demonstração. Basta verificar que, calculando os colchetes Lie, temos $[C, H] = [C, X] = [C, Y] = 0$. Devido à $AC = CA$ para todo A , então $[C, A] = AC - CA = 0$. Assim temos que

$$\begin{aligned}
 [H, C] &= [H, XY + YX + \frac{H^2}{2}] \\
 &= [H, XY] + [H, YX] + \frac{1}{2}[H, H^2] \\
 &= HXY - XYH + HYX - YXH \\
 &= HXY - X(H+2)Y + HYX - Y(H-2)X \\
 &= HXY - XHY - 2XY + HYX - YHX + 2YX \\
 &= HXY - (H-2)XY - 2XY + HYX - (H+2)YX + 2YX \\
 &= HXY - HXY - 2XY + 2XY + HYX - HYX - 2YX + 2YX \\
 &= -2XY + 2XY - 2YX + 2YX \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

temos também que

$$\begin{aligned}
 [X, C] &= [X, XY + YX + \frac{H^2}{2}] \\
 &= [X, XY] + [X, YX] + \frac{1}{2}[X, H^2] \\
 &= X^2Y - XYX + XYX - YX^2 + \frac{1}{2}(XH^2 - H^2X) \\
 &= X^2Y - XYX + XYX - YX^2 + \frac{1}{2}(H-2)^2X - \frac{1}{2}H^2X \\
 &= X^2Y - XYX + XYX - YX^2 + \frac{1}{2}(H^2 - 4H + 4)^2X - \frac{1}{2}H^2X \\
 &= X^2Y - YX^2 + (-2H + 2)X \\
 &= [X^2, Y] - 2HX + 2X \\
 &= 2X(H+1) - 2HX + 2X \\
 &= 2[X, H] + 4X \\
 &= -2[H, X] + 4X = 0
 \end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}
[Y, C] &= [Y, XY + YX + \frac{H^2}{2}] \\
&= [Y, XY] + [Y, YX] + \frac{1}{2}[Y, H^2] \\
&= YXY - XY^2 + Y^2X - YXY + \frac{1}{2}(YH^2 - H^2Y) \\
&= Y^2X - XY^2 + \frac{1}{2}(H + 2)^2Y - \frac{1}{2}H^2Y \\
&= [Y^2, X] + \frac{1}{2}(H^2 + 4H + 4)^2Y - \frac{1}{2}H^2Y \\
&= -[X, Y^2] + 2HY + 2Y \\
&= -2Y(H - 1) + 2HY + 2Y \\
&= -2Y(H - 1) + 2HY + 2Y \\
&= 2[H, Y] + 4Y = 0.
\end{aligned}$$

Com isso provamos o teorema. □

4.2.9 A Álgebra de Hopf $GL_q(2)$ e $SL_q(2)$

Primeiramente, definiremos as relações abaixo. Estas relações servirão para definir uma estrutura de álgebra em $M_q(2)$ e dar uma definição de A -ponto de $M_q(2)$, onde A é um anel.

$$ba = qab, \quad db = qbd, \quad (4.41)$$

$$ca = qac, \quad dc = qcd, \quad (4.42)$$

$$bc = cb, \quad ad - da = (q^{-1} - q)bc. \quad (4.43)$$

Definição 4.4. A álgebra $M_q(2)$ é o quociente da álgebra livre $\mathbb{k}\{a, b, c, d\}$ pelo ideal J_q gerado pelas relações [4.41-4.43].

Definição 4.5. Dada uma álgebra A , define-se um A -ponto de $M_q(2)$ pela quadrupla (A, B, C, D) em A^4 satisfazendo as relações a seguir

$$BA = qAB, \quad DB = qBD, \quad (4.44)$$

$$CA = qAC, \quad DC = qCD, \quad (4.45)$$

$$BC = CB, \quad AD - DA = (q^{-1} - q)BC. \quad (4.46)$$

O objetivo agora é mostrar que a álgebra $M_q(2)$ mesmo sendo não-comutativa, tem certas propriedades de álgebra comutativa $M_q(2)$. Desejamos chegar ao seguinte resultado:

Teorema 4.7. A álgebra $M_q(2)$ é Noetheriana e não tem divisores de zero. Uma base para o espaço vetorial é dada pelo conjunto de monômios $\{a^i b^j c^k d^l\}_{i,j,k,l \geq 0}$.

Observe a seguinte cadeia crescente de álgebras $\mathbb{k} = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset A_4 = M_q(2)$. Mostraremos que A_{i+1} é uma extensão de Ore de A_i , onde $A_1 = \mathbb{k}[a]$, $A_2 = \mathbb{k}\{a, b\} / \langle ba - qab \rangle$ e

$$A_3 = \mathbb{k}\{a, b, c\} / \langle ba - qab, ca - qac, cb - bc \rangle.$$

Observe que a álgebra A_1 é uma extensão de Ore trivial de $\mathbb{k}$, ou seja, $A_1 = \mathbb{k}[a, id_{\mathbb{k}}, 0]$.

Usaremos esta cadeia e os lemas abaixo para demonstrar o Teorema 4.7:

Lema 4.5. *Existe um isomorfismo entre A_2 e a extensão de Ore $A_1[b, \alpha_1, 0]$. Além disso, o conjunto $\{a^i b^j\}_{i,j \geq 0}$ é uma base de A_2 .*

Demonstração. Seja o morfismo $\phi_1 : A_2 \rightarrow A_1[b, \alpha_1, 0]$ definido por $\phi_1(a) = a$ e $\phi_1(b) = b$. A existência de $A_1[b, \alpha_1, 0]$ é consequência do Teorema 4.1 item (b), que diz respeito as extensões de Ore e ao fato que $ba = \alpha_1(a)b - 0(a) = qab$. Como $ba - qab = 0 \in A_2$ temos, se ϕ_1 é um morfismo de álgebra, que

$$0 = \phi_1(ba - qab) = \phi_1(b)\phi_1(a) - q\phi_1(a)\phi_1(b)$$

Por outro lado, pela definição de ϕ_1 e sabendo a relação da extensão de Ore $ba = \alpha_1(a)b - 0(a) = qab$, temos que

$$\phi_1(b)\phi_1(a) - q\phi_1(a)\phi_1(b) = ba - qab = qab - qab = 0.$$

Assim ϕ_1 define um morfismo de álgebras. Este morfismo é sobrejetivo, já que a álgebra $A_1[b, \alpha_1, 0]$ é gerada por a e b . Para mostrar que ϕ_1 é um isomorfismo primeiramente precisamos construir uma aplicação linear $\psi_1 : A_1[b, \alpha_1, 0] \rightarrow A_2$ que satisfaça $\psi_1 \circ \phi_1 = id$. Como A_2 é uma extensão de Ore, então $\{a^i b^j\}_{i,j \geq 0}$ é uma base de $A_1[b, \alpha_1, 0]$ e podemos definir ψ_1 por $\psi_1(a^i b^j) = a^i b^j$. Segue que ψ_1 é um isomorfismo linear. Logo A_2 é isomorfo a $A_1[b, \alpha_1, 0]$ e uma base de A_2 é o conjunto $\{a^i b^j\}$. $\square$

Assim temos que $\mathbb{k}[a, b] = A_2$ é uma extensão de Ore de A_1 . Para continuar contruindo a cadeia precisamos construir A_3 que seja uma extensão de Ore de A_2 .

Verifiquemos que $\alpha_2(a) = qa$ e $\alpha_2(b) = b$ definem um automorfismo α_2 da álgebra A_2 por

$$\alpha_2(ab) = \alpha_2(a)\alpha_2(b) = qab.$$

Temos o seguinte resultado cuja a demonstração segue as mesmas linhas do Lema 4.5.

Lema 4.6. *A álgebra A_3 é isomorfa à álgebra $A_2[c, \alpha_2, 0]$. Além disso, o conjunto $\{a^i b^j c^k\}_{i,j,k \geq 0}$ é uma base de A_3 .*

Demonstração. Definiremos o morfismo $\phi_2 : A_3 \rightarrow A_2[c, \alpha_2, 0]$ por $\phi_2(a) = a$, $\phi_2(b) = b$ e $\phi_2(c) = c$. Basta verificar as relações

$$\phi_2(c)\phi_2(a) - q\phi_2(a)\phi_2(c) = ca - qab = [\alpha_2(a)c + 0(a)] - qac = 0,$$

$$\phi_2(c)\phi_2(b) - \phi_2(b)\phi_2(c) = cb - bc = [\alpha_2(b)c + 0(b)] - bc = 0.$$

Portanto ϕ_2 é um morfismo de álgebra sobrejetivo. Construiremos um morfismo $\psi_2 : A_2[c, \alpha_2, 0] \rightarrow A_3$ tal que $\psi_2 \circ \phi_2 = id$, definido por $\psi_2(a^i b^j c^k) = a^i b^j c^k$. Segue que ψ_2 é um isomorfismo. Isto implica em ϕ_2 ser um isomorfismo de álgebras e o conjunto $\{a^i b^j c^k\}$ ser uma base para A_3 . $\square$

O último passo para construção da cadeia é mostrar que A_4 é uma extensão de Ore de A_3 . Este é o único passo que envolve uma derivação não nula. Primeiro, verifiquemos que os morfismos

$$\alpha_3(a) = a, \quad \alpha_3(b) = qb, \quad \alpha_3(c) = qc$$

definem um automorfismo de álgebra A_3 . Define-se o endomorfismo δ de A_3 na base $\{a^i b^j c^k\}_{i,j,k \geq 0}$ por $\delta(b^j c^k) = 0$ e por

$$\delta(a^i b^j c^k) = (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2i}}{1 - q^2} a^{i-1} b^{j+1} c^k$$

se $i > 0$. Com isso, provaremos o seguinte lema

Lema 4.7. *O endomorfismo δ é uma α_3 -derivação de A_3 .*

Demonstração. Verifiquemos que $\delta(a^i b^j c^k a^r b^s c^t) = q^{kr+jr} \delta(a^{i+r} b^{j+s} c^{k+t})$. Assim a relação

$$\delta(a^i b^j c^l \cdot a^r b^s c^t) = \begin{cases} 0 & , \quad k = t = 0 \\ q^{kr+jr} \frac{1-q^{2i}}{1-q^2} a^{i-1} b^{j+1} c^{k+1} & , \quad k \neq 0 \text{ ou } t \neq 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Para $k = t = 0$, temos que

$$\delta(a^i b^j a^r b^s) = \alpha_3(a^i b^j) \phi(a^r b^s) + \phi(a^i b^j) a^r b^s.$$

Caso tenhamos $t \neq 0$ e $k = 0$, vejamos que

$$\begin{aligned} \alpha_3(a^i b^j) \delta(a^r b^s c^t) + \delta(a^i b^j) a^r b^s c^t &= q^j a^i b^j (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^2} a^{r-1} b^{s+1} c^{t+1} \\ &= q^j q^{j(r-1)} (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^2} a^{i+r-1} b^{j+s+1} c^{t+1} \\ &= q^{jr} (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^2} a^{i+r-1} b^{j+s+1} c^{t+1} \\ &= q^{jr} \delta(a^{i+r} b^{j+s} c^t), \end{aligned}$$

ou seja, $\delta(a^i b^j \cdot a^r b^s c^t) = \alpha_3(a^i b^j) \delta(a^r b^s c^t) + \delta(a^i b^j) a^r b^s c^t$. No último caso, onde $t \neq 0$ e $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha_3(a^i b^j c^k) \delta(a^r b^s c^t) + \delta(a^i b^j c^k) a^r b^s c^t &= q^j a^i b^j (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^2} a^{r-1} b^{s+1} c^{t+1} \\ &= q^{j+k} a^i b^j c^k (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^2} a^{r-1} b^{s+1} c^{t+1} + \\ &+ (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2i}}{1 - q^2} a^{i-1} b^{j+1} c^{k+1} a^r b^s c^t \\ &= q^{j+k} q^{k(r-1)} q^{j(r-1)} (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2r}}{1 - q^2} a^{i+r-1} b^{j+s+1} c^{k+t+1} + \\ &+ q^{r(k+1)+r(j+1)} (q - q^{-1}) \frac{1 - q^{2i}}{1 - q^2} a^{i+r-1} b^{j+s+1} c^{t+k+1} \\ &= \left(\frac{1 - q^{2r}}{1 - q^2} + q^{2r} \frac{1 - q^{2i}}{1 - q^2} \right) (q - q^{-1}) a^{i+r-1} b^{j+s+1} c^{k+t+1}. \end{aligned}$$

Observamos que $\frac{1-q^{2r}}{1-q^2} + q^{2r} \frac{1-q^{2i}}{1-q^2} = \frac{1-q^{2(i+r)}}{1-q^2}$ e, portanto,

$$\alpha_3(a^i b^j c^k) \delta(a^r b^s c^t) + \delta(a^i b^j c^k) a^r b^s c^t = \delta(a^i b^j c^k \cdot a^r b^s c^t).$$

Logo δ é uma α_3 derivação de A_3 como queríamos demonstrar. $\square$

O lema a seguir é consequência do resultado anterior.

Lema 4.8. *A álgebra $A_4 = M_q(2)$ é isomorfa a extensão de Ore $A_3[d, \alpha_3, \delta]$, e $\{a^i b^j c^k d^l\}_{i,j,k,l \geq 0}$ é uma base de A_4 .*

Demonstração. Defina $\phi_4(a) = a, \phi_4(b) = b, \phi_4(c) = c, \phi_4(d) = d$. Isto define um morfismo sobrejetivo de álgebras ϕ_4 de A_4 sobre a extensão de Ore $A_3[d, \alpha_3, \delta]$, precisamos apenas verificar que a quadrupla $(\phi_4(a), \phi_4(b), \phi_4(c), \phi_4(d))$ é um $A_3[d, \alpha_3, \delta]$ -ponto de $M_q(2)$. Isto implica em verificar as relações da Definição 4.5

$$\phi_4(b)\phi_4(a) = q\phi_4(a)\phi_4(b), \quad \phi_4(d)\phi_4(b) = q\phi_4(b)\phi_4(d), \quad (4.48)$$

$$\phi_4(c)\phi_4(a) = q\phi_4(a)\phi_4(c), \quad \phi_4(d)\phi_4(c) = q\phi_4(c)\phi_4(d), \quad (4.49)$$

$$\phi_4(b)\phi_4(c) = \phi_4(c)\phi_4(b), \quad \phi_4(a)\phi_4(d) - \phi_4(d)\phi_4(a) = (q^{-1} - q)\phi_4(b)\phi_4(c). \quad (4.50)$$

Não verificaremos todas relações, mas apenas algumas relações necessárias. Lembre-se que os elementos são pontos de $A_3[d, \alpha_3, \delta]$ e

$$db = \alpha_3(b)d + \delta(b) = qbd,$$

$$dc = \alpha_3(c)d + \delta(c) = qcd,$$

$$da = \alpha_3(a)d + \delta(a) = ad + (q - q^{-1})bc.$$

estas relações se mantêm em $A_3[d, \alpha_3, \delta]$, pela definição de α_3 e de δ . Para completar a prova, construiremos uma aplicação linear ψ_4 tal que $\psi_4 \circ \phi_4 = id$, como na prova do Lema 4.5. $\square$

O Teorema 4.7 é uma consequência dos Lema 4.6, Lema 4.7 e Lema 4.8, do Corolário 4.2, e do Teorema 4.2. Procedemos, por analogia à Seção A.5.2, dando uma estrutura de coálgebra. As relações que definem a coálgebra seguem

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c, & \Delta(b) &= a \otimes a + b \otimes c, \\ \Delta(a) &= c \otimes a + d \otimes c, & \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d, \\ \varepsilon(a) &= \varepsilon(d) = 1, & \varepsilon(b) &= \varepsilon(c) = 0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

e, usando o determinante quântico, definimos a seguinte álgebra

$$GL_q(2) = M_q(2)[t]/(t \det_q - 1) \quad \text{e} \quad SL_q(2) = M_q(2)/(t \det_q - 1) = GL_q(2)/(t - 1).$$

Dando uma álgebra $\mathbb{A}$, definimos um $\mathbb{A}$ -ponto de $GL_q(2)$ (resp. de $SL_q(2)$) como um $\mathbb{A}$ -ponto (A, B, C, D) e escrevemos este ponto na forma matricial a seguir:

$$m = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Assim o determinante quântico desta matriz é $\det_q(m) = AD - q^{-1}BC$. Este determinante é invertível em $\mathbb{A}$ (resp. é igual a 1). Denotando $GL_q(2)$ e $SL_q(2)$ por M_q , vemos que o conjunto de $\mathbb{A}$ -pontos de G_q está em bijeção com o conjunto $\text{Hom}_{\text{Alg}}(G_q, \mathbb{A})$ dos morfismos da álgebra de G_q para $\mathbb{A}$.

Teorema 4.8. *Pelas relações 4.51 que definem a comultiplicação Δ e a counidade ε de $M_q(2)$, equipamos a álgebra $GL_q(2)$ e a álgebra $SL_q(2)$ com estruturas de biálgebra. Além disso, definimos uma estrutura de álgebra de Hopf tal que a antípoda S é dada em forma de matriz por*

$$\begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = \det_q^{-1} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Demonstração. Primeiro, temos que mostrar que Δ e ε são bem-definidos em $GL_q(2)$ e em $SL_q(2)$. Para $SL_q(2)$, o resultado abaixo segue de cálculos simples

$$\Delta(\det_q - 1) = (\det_q \otimes \det_q) - (1 \otimes 1) = (\det_q - 1) \otimes \det_q + 1 \otimes (\det_q - 1),$$

e $\varepsilon(\det_q - 1) = 0$. Um argumento similar para $GL_q(2)$ mostra que

$$\Delta(t) = t \otimes t \quad \text{e} \quad \varepsilon(t) = 1.$$

Os axiomas de coassociatividade e counidade se conservam para $GL_p(2)$ e para $SL_q(2)$, tendo em vista que já se mantém para $M_q(2)$.

Resta confirmar que em $GL_q(2)$ e $SL_q(2)$ temos antípodas como as definidas na equação (4.52). Dadas as relações

$$S'(a) = d, \quad S'(b) = -qb, \quad S'(c) = -q^{-1}c, \quad S'(d) = a. \quad (4.53)$$

A quadrupla $(S'(a), S'(b), S'(c), S'(d))$ é $M_q(2)^{op}$ -ponto de $M_q(2)$ ¹². Reciprocamente, S' define um morfismo de álgebras de $M_q(2)$ para $M_q(2)^{op}$. Em seguida, estenderemos S' para $GL_q(2)$ e para $SL_q(2)$ definindo $S'(t) = t$. Este antiendomorfismo de álgebra está bem-definido, porque

$$S'(t)S'(\det_q) = (S'(d)S'(a) - q^{-1}S'(b)S'(c))S'(t) = (ad - q^{-1}bc)t = 1,$$

desde que o determinante quântico seja invertível e central em $GL_q(2)$ (ou $SL_q(2)$), é possível definir um morfismo S de álgebra S de $GL_q(2)$ (resp. $SL_q(2)$) para $GL_q^{op}(2)$ (resp. $SL_q^{op}(2)$) com $S(t) = t^{-1}$ e

$$\begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = \det_q^{-1} \begin{pmatrix} S'(a) & S'(b) \\ S'(c) & S'(d) \end{pmatrix} = \det_q^{-1} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para verificar que S é uma antípoda, basta trabalhar com os geradores (a, b, c, d) , de acordo com a Proposição 2.11. As relações 2.12 são equivalentes as igualdades matriciais abaixo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det_q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det_q \begin{pmatrix} \varepsilon(a) & \varepsilon(b) \\ \varepsilon(c) & \varepsilon(d) \end{pmatrix}.$$

Logo a equação (4.52) define uma antípoda para a biálgebra, ou seja, com esta estrutura, $GL_q(2)$ e $SL_q(2)$ são álgebras de Hopf. $\square$

¹²Proposição 3.4(c), vide [Kas95].

Para contrastar com a inversão em um grupo e com a antípoda de $GL(2)$ e de $SL(2)$, a antípoda S de $GL_q(2)$ e de $SL_q(2)$ é, em geral, não involutória. Portanto, com a equação (4.52), definimos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det_q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo inteiro n . Fixado um n e seja q uma raiz da unidade de ordem exatamente n , obtemos dois exemplos de álgebras de Hopf cujo o quadrado da antípoda tem ordem n .

$$S^2(a) = a, \quad S^2(b) = q^2b, \quad S^2(c) = q^{-2}c, \quad S^2(d) = d.$$

Assim, se $n = 2k$, temos que a ordem de S^2 é k , ou seja, a ordem de S é n . Por outro lado, se n é ímpar temos que a ordem de S^2 deveria ser n , ou seja, a ordem de S é $2n$.

4.2.10 Grupos Quânticos Através de Quantização por Deformação

Definição 4.6. Definimos $U_q = U_q(\mathfrak{sl}(2))$ como a álgebra gerada pelas variáveis E , F , K e K^{-1} com as relações

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \tag{4.54}$$

$$KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \tag{4.55}$$

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{4.56}$$

Lema 4.9. Existe um (único) automorfismo de álgebra de U_q , tal que

$$\omega(E) = F, \quad \omega(F) = E \quad \text{e} \quad \omega(K) = K^{-1}.$$

Demonstração. Observe que ω satisfaz as relações. Primeiramente, veja que

$$\omega(K^{-1})K^{-1} = \omega(K^{-1})\omega(K) = \omega(K^{-1}K) = 1.$$

Portanto vale que $\omega(K^{-1}) = K$. Observe agora que

$$\omega(KEK^{-1}) = \omega(K)\omega(E)\omega(K^{-1}) = q^2F = q^2\omega(E),$$

$$\omega(KFK^{-1}) = \omega(K)\omega(F)\omega(K^{-1}) = q^{-2}E = q^{-2}\omega(F),$$

$$[\omega(E), \omega(F)] = [F, E] = \frac{K^{-1} - K}{q - q^{-1}} = \frac{\omega(K) - \omega(K^{-1})}{q - q^{-1}} = \omega\left(\frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}\right).$$

Com essas relações, temos que as relações definidas acima mostram que ω é um automorfismo. $\square$

Verificaremos o produto na base E, F, K e K^{-1} da base U_q :

Lema 4.10. *Seja $m \geq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$. As seguintes relações são válidas para U_q :*

$$\begin{aligned} E^m K^n &= q^{-2nm} K^n E^m, & F^m K^n &= q^{2nm} K^n F^m, \\ [E, F^m] &= [m] F^{m-1} \frac{q^{-(m-1)} K - q^{m-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} & [E^m, F] &= [m] \frac{q^{-(m-1)} K - q^{m-1} K^{-1}}{q - q^{-1}} E^{m-1} \\ &= [m] \frac{q^{m-1} K - q^{-(m-1)} K^{-1}}{q - q^{-1}} F^{m-1} & &= [m] E^{m-1} \frac{q^{m-1} K - q^{-(m-1)} K^{-1}}{q - q^{-1}} \end{aligned}$$

Demonstração. As duas primeiras relações são consequência de equação (4.55), pois

$$KE^n K^{-1} = (KEK^{-1})^n = q^{2n} E^n. \quad (4.57)$$

Isto implica em $E^n K = q^{-2n} KE^n$. Agora, suponha que $E^n K^m = q^{-2nm} K^m E^n$, então vale que

$$\begin{aligned} E^n K^{m+1} &= E^n K^m K \\ &= (q^{-2nm} K^m E^n) K \\ &= q^{-2nm} K^m (q^{-2n} KE^n) \\ &= q^{-2n(m+1)} K^{m+1} E^n \end{aligned}$$

Assim provamos, por indução, que $E^m K^n = q^{-2nm} K^n E^m$. Analogamente, provamos que $F^m K^n = q^{2nm} K^n F^m$. Por indução, como já sabemos que $[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$ e assumindo por hipótese de indução que

$$[E, F^m] = [m] \frac{q^{m-1} K - q^{-(m-1)} K^{-1}}{q - q^{-1}} F^{m-1} = [m] F^{m-1} \frac{q^{-(m-1)} K - q^{m-1} K^{-1}}{q - q^{-1}},$$

temos o seguinte

$$[E, F^{m+1}] = [E, F^m] F + F^m [E, F] = [E, F^m] F + F^{m-1} \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

A partir desta relação, temos que

$$[E, F^{m+1}] = [m+1] F^m \frac{q^{-m} K - q^m K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

Usando a equação (4.54) e a anterior, chegamos à

$$[E, F^{m+1}] = [m+1] \frac{q^{-m} K - q^m K^{-1}}{q - q^{-1}} F^m.$$

Portanto provamos a terceira relação. Para demonstrar a última relação, basta aplicar ω do Lema 4.9 à terceira relação. $\square$

As relações anteriores servirão para verificar que U_q é uma extensão de Ore, ou seja, U_q é uma álgebra de Hopf obtida por extensões de Ore. Veremos também a estrutura de álgebra de Hopf em U_q . Além disso, pela Seção 4.1, podemos concluir que esta álgebra é Noetheriana.

Proposição 4.12. *A álgebra U_q é Noetheriana e não tem divisores de zero. O conjunto $\{E^i F^j K^l\}$, onde $i, j \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{Z}$, é uma base de U_q .*

Demonstração. Defina o anel $A_0 = \mathbb{k}[K, K^{-1}]$. Construiremos duas extensões de Ore $A_1 \subset A_2$, tais que A_2 é isomorfa à álgebra U_q . Primeiro, observe que a álgebra A_0 não tem divisores de zero e é Noetheriana, pois esta é um quociente da álgebra dos polinômios de duas variáveis $\mathbb{k}[X, Y] = \mathbb{k}[X, Y]/\langle XY - 1 \rangle$. A família $\{K^l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ é uma base para A_0 .

Considere o automorfismo α_1 de A_0 determinado por $\alpha_1(K) = q^2 K$ e a extensão de Ore correspondente $A_1 = A_0[F, \alpha_1, 0]$. A última, tem por base os monômios $\{F^j K^l\}_{j \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}}$. Através de um argumento análogo ao usado no Lema 4.5, mostrar que A_1 é a álgebra gerada por F, K, K^{-1} com a relação $FK = q^2 KF$.

Agora construiremos a extensão de Ore $A_2 = A_1[E, \alpha_1, \delta]$ de um automorfismo α_1 e uma α_1 -derivação de A_1 . O automorfismo α_1 é definido por

$$\alpha_1(F^j K^l) = q^{-2l} F^j K^l. \quad (4.58)$$

Assuma que existe uma α_1 -derivação δ tal que

$$\delta(F) = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \quad \text{e} \quad \delta(K) = 0.$$

Então a seguinte relação é conservada em A_2 :

$$EK = \alpha_1(K)E + \delta(K) = q^{-2}KE \quad \text{e} \quad EF = \alpha_1(F)E + \delta(F) = FE + \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

A partir destas relações, é fácil concluir que A_2 é um isomorfo à álgebra U_q . Isto resulta no Corolário 4.1 e, pelo Teorema 4.2, que U_q tem as propriedades requeridas. $\square$

A seguir um lema técnico para finalizar a demonstração do resultado acima.

Lema 4.11. Denote por $\delta(F)(K)$ o polinômio de Laurent $\frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}$, e dado $\delta(K^l) = 0$ e

$$\delta(F^j K^l) = \sum_{i=0}^{j-1} F^{j-1-i} \delta(F)(q^{-2i} K) K^l$$

quando $j > 0$. Então δ se estende a uma α_1 -derivação de A_1 .

Demonstração. Devemos verificar que, para todo $j, m \in \mathbb{N}$ e todos $l, n \in \mathbb{Z}$, temos

$$\delta(F^j K^l \cdot F^m K^n) = \alpha_1(F^j K^l) \delta(F^m K^n) + \delta(F^j K^l) F^m K^n. \quad (4.59)$$

Computemos o lado direito de (equação (4.59)) usando (equação (4.55)), (equação (4.58)) e (equa-

ção (4.59)). Temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_1(F^j K^l) \delta(F^m K^n) &= \sum_{i=0}^{m-1} q^{-2l} F^j K^l F^{m-1} \delta(F)(q^{-2i} K) K^n + \sum_{i=0}^{j-1} F^{j-1} \delta(F)(q^{-2i} K) K^l F^m K^n \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} q^{-2l-2l(m-1)} F^{j+m-1} \delta(F)(q^{-2i} K) K^{l+n} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{j-1} q^{-2lm} F^{m+j-1} \delta(F)(q^{-2i-2m} K) K^{l+n} \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} q^{-2lm} F^{m+j-1} \delta(F)(q^{-2i} K) K^{l+n} + \sum_{i=m}^{j+m-1} q^{-2lm} F^{m+j-1} \delta(F)(q^{-2i} K) K^{l+n} \\
&= q^{-2lm} \left(\sum_{i=0}^{j+m-1} F^{j+m-1} \delta(F)(q^{-2i} K) K^{l+m} \right) \\
&= q^{-2lm} \delta(F^{j+m} K^{l+n}) \\
&= \delta(F^j K^l \cdot F^m K^n).
\end{aligned}$$

□

O Lema 4.11 mostra que a álgebra A_2 é uma extensão de Ore e que

$$A_2 = \mathbb{k}(K)[E, F] = \mathbb{k}(K)[F][E, \alpha_1, \delta].$$

Agora estamos aptos a definir uma estrutura de álgebra de Hopf em U_q . Para definir a biálgebra, temos

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \quad \Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, \quad (4.60)$$

$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}, \quad (4.61)$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0, \quad \varepsilon(K) = \varepsilon(K^{-1}) = 1. \quad (4.62)$$

e, para antípoda, temos

$$S(E) = -EK^{-1} \quad S(F) = -KF, \quad S(K) = K^{-1}, \quad S(K^{-1}) = K. \quad (4.63)$$

Proposição 4.13. As equações (4.60-4.62), dotam U_q com uma estrutura de biálgebra. Além disso, a equação (4.63) é uma antípoda para a biálgebra, ou seja, $(U_q, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf.

Demonstração. Etapa 1: Primeiro mostraremos que Δ define um morfismo de álgebras de U_q sobre $U_q \otimes U_q$. É verificar que

$$\Delta(K)\Delta(K^{-1}) = \Delta(K^{-1})\Delta(K) = 1, \quad (4.64)$$

$$\Delta(K)\Delta(E)\Delta(K^{-1}) = q^2 \Delta(E) \quad (4.65)$$

$$\Delta(K)\Delta(F)\Delta(K^{-1}) = q^{-2} \Delta(F) \quad (4.66)$$

$$[\Delta(E), \Delta(F)] = \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}} \quad (4.67)$$

A equação (4.64) está clara. Para (equação (4.65)), temos

$$\begin{aligned}
 \Delta(K)\Delta(E)\Delta(K^{-1}) &= (K \otimes K)(1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes K^{-1}) \\
 &= (K \otimes K)(1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes K^{-1}) \\
 &= q^2(1 \otimes E + E \otimes K). \\
 &= q^2\Delta(E).
 \end{aligned}$$

A equação (4.66) é provada de modo similar. Finalmente, para equação (4.67), temos que

$$\begin{aligned}
 [\Delta(E), \Delta(F)] &= (1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes F + F \otimes 1) - (K^{-1} \otimes F + F \otimes 1)(1 \otimes E + E \otimes K) \\
 &= K^{-1} \otimes EF + F \otimes E + EK^{-1} \otimes KF + EF \otimes K + \\
 &\quad - K^{-1} \otimes FE - K^{-1}E \otimes FK - F \otimes E - FE \otimes K \\
 &= K^{-1} \otimes [E, F] + [E, F] \otimes K \\
 &= \frac{K^{-1} \otimes (K - K^{-1}) + (K - K^{-1}) \otimes K}{q - q^{-1}} \\
 &= \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}}.
 \end{aligned}$$

Etapa 2: Em seguida, verificaremos que Δ é coassociativo. Basta verificá-lo nos quatro geradores. Damos como exemplo o cálculo de E . Observe que

$$\begin{aligned}
 (\Delta \otimes id)\Delta(E) &= (\Delta \otimes id)(1 \otimes E + E \otimes K) = 1 \otimes 1 \otimes E + 1 \otimes E \otimes K + E \otimes K \otimes K, \\
 (id \otimes \Delta)\Delta(E) &= (id \otimes \Delta)(1 \otimes E + E \otimes K) = 1 \otimes 1 \otimes E + 1 \otimes E \otimes K + E \otimes K \otimes K,
 \end{aligned}$$

ou seja, Δ é coassociativo.

Etapa 3: É fácil ver que ε define um morfismo de álgebra de U_q sobre $\mathbb{k}$ e satisfaz o axioma da counidade.

Etapa 4: Resta ver que S define uma antípoda de U_q . Temos primeiro que verificar que S é um morfismo de álgebras de U_q sobre U_q^{op} . Para isto, vejamos as seguintes relações

$$S(K^{-1})S(K) = S(K)S(K^{-1}) = 1, \quad (4.68)$$

$$S(K^{-1})S(E)S(K) = q^2S(E), \quad (4.69)$$

$$S(K^{-1})S(F)S(K) = q^{-2}S(F), \quad (4.70)$$

$$[S(F), S(E)] = \frac{S(K) - S(K^{-1})}{q - q^{-1}}. \quad (4.71)$$

Computaremos a equação (4.69) e a equação (4.71). Iniciaremos por

$$S(K^{-1})S(E)S(K) = -K(EK^{-1})K^{-1} = -q^2EK^{-1} = q^2S(E)$$

e

$$[S(F), S(E)] = KFEK^{-1} - EK^{-1}KF = [F, E] = \frac{K^{-1} - K}{q - q^{-1}} = \frac{S(K) - S(K^{-1})}{q - q^{-1}}.$$

Concluir que S é uma antípoda. Apelando para o Lema 2.2, é bastante verificar que a relação

$$\sum_{(x)} x_{(1)} S(x_{(2)}) = \sum_{(x)} S(x_{(1)}) x_{(2)} = \varepsilon(x) 1$$

é satisfeita, quando x é qualquer gerador E, F, K, K^{-1} . Esta verificação é simple e será deixada para o leitor. $\square$

Esta álgebra de Hopf U_q não é comutativa e tampouco é cocomutativa. Assim definimos uma classe de álgebras de Hopf ‘fortemente’ não comutativa. Além disso, a álgebra de Hopf não é involutória como veremos a seguir

Proposição 4.14. *Seja $S: U_q \rightarrow U_q$ como definimos. Para todo $u \in U_q$, temos que $S^2(u) = KuK^{-1}$.*

Demonstração. Com efeito, temos

$$S^2(E) = S(S(E)) = S(-EK^{-1}) = -S(K^{-1})S(E) = KEK^{-1}$$

$$S^2(E) = S(S(F)) = S(-KF) = -S(F)S(K) = -(KF)(K^{-1}) = KFK^{-1}$$

e, também, vale que $S(K) = KKK^{-1} = K, S(K^{-1}) = KK^{-1}K^{-1}$. Portanto $S^2(u) = KuK^{-1}$. $\square$

Desta forma, caso q seja uma $2N$ -raiz da unidade (com $N > 1$), então a antípoda de U_q será tal que S^{2N} ; pois, por indução, $S^{2N}(u) = q^{2N}u = u = Iu$.

Agora expressaremos a comultiplicação de U_q na base $\{E^i F^j K^l\}_{i,j \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}}$; pois, segundo vimos na Proposição 4.12, este conjunto é uma base de U_q .

Proposição 4.15. *Para todos $i, j \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{Z}$, temos que*

$$\Delta(E^i F^j K^l) = \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^j q^{r(i-r)+s(j-s)-2(i-r)(j-s)} \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} (E^{i-r} F^s K^{l-(j-s)}) \otimes E^r F^{j-s} K^{l+(i-r)}$$

Demonstração. Primeiramente, por Δ ser um morfismo de álgebra, temos que

$$\Delta(E^i F^j K^l) = \Delta(E)^i \Delta(F)^j \Delta(K)^l = (1 \otimes E + E \otimes K)^i (K^{-1} \otimes F + F \otimes 1)^j (K \otimes K)^l.$$

Agora observe que

$$(E \otimes K)(1 \otimes E) = q^2(1 \otimes E)(E \otimes K) \quad \text{e} \quad (K^{-1} \otimes F)(F \otimes 1) = q^2(F \otimes 1)(K^{-1} \otimes F).$$

Aplicando a Proposição A.16, obtemos que

$$\Delta(E)^i = \sum_{r=0}^i q^{r(i-r)} \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} E^{i-r} \otimes E^r K^{i-r} \quad \text{e} \quad \Delta(F)^j = \sum_{s=0}^j q^{s(j-s)} \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} F^s K^{-(j-s)} \otimes E^r K^{j-s}.$$

Concluimos que

$$\Delta(E^i F^j K^l) = \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^j q^{r(i-r)+s(j-s)} \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} (E^{i-r} F^s K^{-(j-s)} K^l \otimes E^r K^{i-k} F^{j-s} K^l)$$

pela relação $KFK^{-1} = q^{-2}F$, temos que

$$K^{i-k} F^{j-s} K^{-(i-k)} = (K^{i-k} F K^{-(i-k)})^{j-s} = (q^{i-k} F)^{j-s} = q^{(i-k)(j-s)} F^{j-s}$$

Segue que, como

$$\begin{aligned} (E^{i-r} F^s K^{-(j-s)} K^l \otimes E^r (K^{i-k} F^{j-s} K^{-(i-k)}) K^{l+(i-k)}) = \\ (E^{i-r} F^s K^{-(j-s)} K^l \otimes E^r (q^{(i-k)(j-s)} F^{j-s}) K^{l+(i-k)}), \end{aligned}$$

vale que

$$\Delta(E^i F^j K^l) = \sum_{r=0}^i \sum_{s=0}^j q^{r(i-r)+s(j-s)-2(i-r)(j-s)} \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j \\ s \end{bmatrix} (E^{i-r} F^s K^{l-(j-s)}) \otimes E^r F^{j-s} K^{l+(i-r)}$$

como queríamos demonstrar. □

Referências

- [AHS09] J. Adamek, H. Herrlich, and G.E. Strecker. *Abstract and Concrete Categories, The Joy of Cats*, volume 171. Dover Publication, August 2009.
- [Art25] E Artin. Theorie der Zöpfe. *Hamb. Abh.*, 25(4):47–72, 1925.
- [AS10] N. Andruskiewitsch and H.J. Schneider. On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras. *Ann. Math*, 171:375–417, August 2010.
- [Awo10] S. Awodey. *Category Theory*. Number 52 in Oxford Logic Guides. Oxford University Press, 2 edition, August 2010.
- [BDG99] M. Beattie, S. Dascalescu, and L. Grunenfelder. On the number of types of finite dimensional Hopf algebras. *Inventiones Mathematicae*, (136):1–7, 1999.
- [Con70] J. H. Conway. *An Enumeration of Knots and Links, and Some of Their Algebraic Properties*. Computational Problems in Abstract Algebra. Oxford University Press, 1970.
- [Dix96] J. Dixmier. *Enveloping Algebras*, volume 11 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, June 1996.
- [DNR00] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, and Ş. Raianu. *Hopf Álgebras: An Introduction*. Pure and Applied Mathematics. CRC Press, 1 edition, September 2000.
- [DNT99] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, and B. Torrecillas. Co-Frobenius Hopf algebras: Integrals, Doi-Koppinen Modules and Injective objects. *J. Algebra*, (220):542–560, 1999.
- [Eis95] D. Eisenbud. *Comutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer, 1 edition, 1995.
- [FY89] P.J. Freyd and D.N. Yetter. Braided compact closed categories with aplication to low-dimensional topology. *Adv. Math.*, 2(77):156–182, 1989.
- [Gar05] G.A. García. On Hopf algebras of dimension p^3 . *Tsukuba J.Math.*, 29(1):259–284, 2005.
- [Gre78] W. Greub. *Multilinear Algebra*. Springer, 2 edition, August 1978.
- [Hop41] H. Hopf. Über die Topologie der Gruppen- Mannig-faltigkeiten und ihre Verallgemeinerungen. *Ann. of Math.*, 42:22–52, 1941.

- [Hur91] A. Hurwitz. Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, (39):1–61, 1891.
- [Jac85] N. Jacobson. *Basic Algebra I*. W.H. Freeman and Company, 2 edition, 1985.
- [Jac09] N. Jacobson. *Basic Algebra II*. W.H. Freeman and Company, 2 edition, 2009.
- [JS88] A. Joyal and R. Street. Planar diagrams e tensor algebra. available on Ross Street's website, September 1988. Unpublished manuscript.
- [JS91] A. Joyal and R. Street. The geometry of tensor calculus I. *Advances in Mathematics*, 1(88):55–112, 1991.
- [JS96] A. Joyal and R. Street. Traced monoidal category. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.*, 119:447–468, 1996.
- [Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Text in Mathematics*. Springer, 2^a edition, December 1995.
- [KR00] L. Kauffman and D.E. Radford. On Two Proofs for the Existence and Uniqueness of Integrals for Finite-Dimensional Hopf Álgebras. *Contemp. Math*, 267:177–194, 2000. in new trends in Hopf algebra Theory (La falda, 1999).
- [Kup89] G. Kuperberg. Involutory Hopf Álgebra and 3-Manifolds Invariants. *International J. Math.*, 41(2):41–61, 1989.
- [Kup94] G. Kuperberg. The Group of Automorphisms of a Semisimple Hopf Algebra Over a Field of Characteristic 0 is Finite. *J. Algebra*, 163:583–622, 1994.
- [Kup96] G. Kuperberg. Non-Involutory Hopf Álgebra and 3-Manifolds Invariants. *Duke math. Journal*, 84:83–129, December 1996.
- [LR94] R.G. Larson and D.E. Radford. Finite-dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple. *J. Algebra*, 117(2):267–289, 1994.
- [LS69] R. Larson and M. Sweedler. An associative orthogonal linear form for Hopf algebras. *Amer. Journal of Math.*, (91):75–94, 1969.
- [Mac98] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 317 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2 edition, September 1998.
- [Pen56] R. Penrose. *Tensor Methods in Algebraic Geometry*. PhD thesis, Cambridge University, 1956.
- [Rad76] D. E. Radford. The Order of the Antipode of a Finite Dimensional Hopf Algebra is Finite. *American Journal of Mathematics*, 98(2):333–355, 1976.
- [Rad85] D. E. Radford. The struture of Hopf algebra com projection. *J. of Algebra*, 92(2):322–347, 1985.

- [Rad94] D. E. Radford. The trace function and Hopf algebra. *J. Algebra*, (163):583–622, 1994.
- [Rad10] D. E. Radford. Hopf Algebra, an Overview, January 2010.
- [Rei32] K. Reidemeister. *Knotentheorie*, volume 1 of *Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete Ser.* Springer, January 1932.
- [Sel09] P. Selinger. A Survey of Graphical Languages for Monoidal Categories. 813:289–355, 2009.
- [SH05] Ng Siu-Hung. Hopf algebra of dimension p^2 . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(8):2237–2242, 2005.
- [Sou02] F. J. Souza. *On the 3 Manifold Invariants Derived from Hopf Objects*. PhD thesis, University of Illinois at Chicago, 2002.
- [Sul71] J.B. Sullivan. The uniqueness of integrals for Hopf algebras and some existence theorems of integrals for comutative Hopf algebra. *J. Algebra*, 19:426–440, 1971.
- [Swe69a] M. Sweedler. W. A. Benjamin, 1 edition, 1969.
- [Swe69b] M. Sweedler. Integrals for Hopf algebra. *Ann. of Math.*, 89:323–335, 1969.
- [TL80] E. J. Taft and Wilson R. L. There exist finite-dimensional Hopf algebra with antipodes of arbitrary even order. *J. Algebra*, 62:283–291, 1980.

Apêndice: Preliminares de Álgebra

Nesta seção, daremos subsídios necessário a compreensão da estrutura de exemplos e alguns resultados que foram essenciais para a construção dos objetos do tipo Hopf.

A.1 Álgebra Multilinear

Apresentaremos, nesta seção, o produto tensorial de espaços vetoriais usando como referência [Gre78]. Enunciaremos os teoremas sem demonstração, pois sua verificação não é o foco da dissertação. Contudo, é aconselhável que o leitor, que não domine algum conceito desta teoria, leia este apêndice e consulte a referência para que possa entender melhor o trabalho.

Transformações Multilineares e Produtos Tensoriais

Os morfismos M, Δ foram definidos a partir de aplicações bilineares e, portanto, passaremos pela aplicações bilineares.

Definição A.1. Sejam $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais lineares, e considere uma aplicação $\phi : \mathbb{U} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$. A aplicação ϕ é chamada **bilinear** se satisfaz as condições

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) &= \lambda \phi(x_1, y) + \mu \phi(x_2, y) & \forall x_1, x_2 \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{V} \\ \phi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda \phi(x, y_1) + \mu \phi(x, y_2) & \forall x \in \mathbb{U}, y_1, y_2 \in \mathbb{V}\end{aligned}$$

onde $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$.

Para o caso de $\mathbb{W} = \mathbb{k}$ será denotado por $B(\mathbb{U}, \mathbb{V}; \mathbb{k})$. As generalizações de aplicações bilineares são as aplicações **multilineares**:

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1}, \dots, x_p) = \lambda \phi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) + \mu \phi(x_1, \dots, y_i, \dots, x_p)$$

$x_i, y_i \in \mathbb{U}_i$, $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$. Se $\mathbb{W} = \mathbb{k}$, então ϕ é chamada uma função p -linear.

Definição A.2. Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ dois espaços vetoriais. Suponha que $\phi : \mathbb{U} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{W}$ é uma aplicação bilinear de $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$ sobre um espaço $\mathbb{W}$. O par $(\mathbb{W}, \phi)$ é chamado **produto tensorial** de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$, se as seguintes condições são satisfeitas:

$$\otimes_1) \quad \text{Im} \phi = \mathbb{W}$$

$\otimes_2$) Se $\psi: \mathbb{U} \times \mathbb{V} \rightarrow H$ é uma aplicação bilinear de $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$ sobre um espaço vetorial H arbitrário. Então existe uma única aplicação linear $f: \mathbb{W} \rightarrow H$ tal que $\psi = f \circ \phi$.¹

A propriedade $\otimes_2$ afirma que o diagrama a direita pode ser completado para o diagrama a esquerda.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{U} \times \mathbb{V} & \xrightarrow{\psi} & H \\ \phi \downarrow & & \\ \mathbb{W} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{U} \times \mathbb{V} & \xrightarrow{\psi} & H \\ \phi \downarrow & \nearrow \phi & \\ \mathbb{W} & & \end{array}$$

Obs.: A.1.1. As condições $\otimes_1$ e $\otimes_2$ são equivalentes a condição:

$\otimes$: Se $\phi: \mathbb{U} \times \mathbb{V} \rightarrow H$ é uma aplicação bilinear sobre um espaço vetorial, então existe uma única aplicação linear $f: \mathbb{W} \rightarrow H$ tal que $\phi = f \circ \phi$ (esta propriedade é conhecida como **fatoração única**).

Obs.: A.1.2. Podemos escrever um elemento $z \neq 0$ de $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}$ da seguinte forma

$$z = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i, \quad (\text{A.1})$$

onde os vetores x_i e os vetores $y_i (i = 1, \dots, r)$ são linearmente independentes.

Proposição A.1 (Unicidade [Gre78]). Suponha que $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}$ e $\mathbb{U} \hat{\otimes} \mathbb{V}$ são produtos tensoriais de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$. Então existe um isomorfismo linear

$$f: \mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{U} \hat{\otimes} \mathbb{V}$$

tal que

$$\forall x \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{V} \quad f(x \otimes y) = x \hat{\otimes} y.$$

Proposição A.2 (Veja em [Gre78]). Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ dois espaços vetoriais e considere o espaço vetorial livre $\mathcal{F}(\mathbb{U} \times \mathbb{V})$ sobre o conjunto $\mathbb{U} \times \mathbb{V}$. Seja $\mathcal{J}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ o espaço de $\mathcal{C}(\mathbb{U} \times \mathbb{V})$ gerado pelos elementos

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 + \mu x_2, y) - \lambda(x_1, y) - \mu(x_2, y) & \quad x_1, x_2 \in \mathbb{U}, y \in \mathbb{V} \text{ e } \lambda, \mu \in \mathbb{K} \\ (x, \lambda y_1 + \mu y_2) - \lambda(x, y_1) - \mu(x, y_2) & \quad x \in \mathbb{U}, y_1, y_2 \in \mathbb{V}. \end{aligned}$$

Denotamos por π a projeção canônica de $\mathcal{F}(\mathbb{U} \times \mathbb{V})$ sobre o espaço $\mathbb{W} = \mathcal{F}(\mathbb{U} \times \mathbb{V}) / \mathcal{J}(\mathbb{U}, \mathbb{V})$. Assim definindo a aplicação

$$\phi: \mathbb{U} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{U} \times \mathbb{V}) / \mathcal{J}(\mathbb{U}, \mathbb{V}) \quad , \text{ onde } \quad \phi(x, y) = \pi(x, y).$$

Então o par $(\mathbb{W}, \phi)$ é um produto tensorial de $\mathbb{U}$ com $\mathbb{V}$.

Dada uma forma bilinear $\mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V}; \mathbb{W})$ podemos encontrar uma única transformação correspondente em $\mathcal{L}(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}; \mathbb{W})$, ou seja, podemos interpretar funções bilineares como lineares.

¹ esta propriedade é conhecida como propriedade da fatorização.

Proposição A.3 (restrição [Gre78]). *Sejam $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$ dois espaços vetoriais e $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}$ um produto de $\mathbb{U}$ e $\mathbb{V}$. Então, para todo espaço vetorial $\mathbb{W}$, o isomorfismo linear*

$$\Phi : \mathcal{L}(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}; \mathbb{W}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{U}, \mathbb{V}; \mathbb{W})$$

é definido por

$$\Phi(f) = f \circ \bigotimes \quad \text{e} \quad f \in \mathcal{L}(E \otimes F; G).$$

Proposição A.4 (isomorfismos naturais. [Kas95], pág. 25). *Sejam $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ espaços vetoriais. Existem isomorfismos lineares canônicos, e categoricamente, naturais*

$$(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) \otimes \mathbb{W} \cong \mathbb{U} \otimes (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W})$$

determinado por $(u \otimes v) \otimes w \mapsto u \otimes (v \otimes w)$;

$$\mathbb{k} \otimes \mathbb{V} \cong \mathbb{V} \cong \mathbb{V} \otimes \mathbb{k}$$

determinado por $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$ e $v \mapsto v \otimes v \otimes 1$, e

$$\tau_{\mathbb{U}, \mathbb{V}} : \mathbb{U} \otimes \mathbb{V} \cong \mathbb{V} \otimes \mathbb{U}$$

dado pela ‘troca’ $\tau_{\mathbb{U}, \mathbb{V}}$ determinada por $u \otimes v \mapsto v \otimes u$

Corolário A.1 ([Kas95], pág.). *Seja $\{u_i\}$ uma base de $\mathbb{U}$ e $\{v_j\}$ uma base de $\mathbb{V}$. Então $\{u_i \otimes v_j\}$ forma uma base para $\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}$. Consequentemente, $\dim(\mathbb{U} \otimes \mathbb{V}) = \dim \mathbb{U} \cdot \dim \mathbb{V}$.*

Definição A.3. *Sejam $f : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{W}$ e $g : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}'$ transformações lineares. Então, define-se $f \otimes g$ por:*

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v)$$

A partir disto, define-se a aplicação $\lambda : \text{Hom}(\mathbb{U}, \mathbb{U}') \otimes \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{V}') \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{V} \otimes \mathbb{U}, \mathbb{U}' \otimes \mathbb{V}')$, onde $\lambda(f \otimes g)(v \otimes u) = f(u) \otimes g(v)$.

Teorema A.1. ([Kas95], pág. 27) *A aplicação λ é um isomorfismo, se no mínimo um dos pares $(\mathbb{U}, \mathbb{U}')$, $(\mathbb{V}, \mathbb{V}')$ ou $(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ for um par de espaços vetoriais de dimensão finita.*

Corolário A.2 ([Kas95]). *A aplicação $\lambda : \mathbb{U}^* \otimes \mathbb{V}^* \rightarrow (\mathbb{V} \otimes \mathbb{U})^*$ é um isomorfismo, se $\mathbb{U}$ ou $\mathbb{V}$ for um espaço vetorial de dimensão finita.*

Coeficientes de Estrutura

Sejam T uma aplicação linear e $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$. Denote-se $T(b_i) = \sum T_j^i b_j$ onde T_j^i são coeficientes. Denominam-se os T_j^i por **coeficientes de estrutura**. Para os morfismos M , i , Δ , ε , e S podemos definir seus coeficientes de estrutura.

Seja $\{a_1, \dots, a_n\}$ uma base de $\mathbb{H}$ e sejam $m_{i,j}^l$, $\Delta_l^{i,j}$, $S_j^i \in \mathbb{k}$ para $1 \leq i, j, l \leq n$ os coeficientes de estruturas para o produto M , o coproduto Δ e a antípoda S de $\mathbb{H}$, definida por

$$M(a_i \otimes a_j) = a_i a_j = \sum_{l=1}^n m_{i,j}^l a^l$$

para todos $1 \leq i, j \leq n$,

$$\Delta(a_l) = \sum_{i,j=1}^n \Delta_l^{i,j} a_i \otimes a_j$$

para todos $1 \leq l \leq n$ e

$$S(a_j) = \sum_{i=1}^n S_j^i a_i$$

para todos $1 \leq j \leq n$ respectivamente. A

Exemplo A.1.1. No caso das álgebras de grupo $\mathbb{k}[G]$, segundo fizemos na Seção 4.2.1, temos que $M_{j,k}^i = \delta_{i,s}$ onde $g_s = M(g_j \otimes g_k)$, que $\Delta_i^{j,k} = \delta_j^i \delta_k^i$ e que $S(b_i) = \delta_{i,t}$ onde $g_t = (g_i)^{-1}$.

A.2 Álgebras Graduadas

As álgebras tensoriais de uma álgebra de Lie são cruciais para a definição de uma álgebra envelope universal. A partir deste envelope, definimos os grupos quânticos, que são uma classe de álgebras de Hopf de suma importância. Estes foram vistos como deformações por um parametro de envelopes universais e, portanto, para compreendê-los necessitaremos passar antes por uma breve explicação sobre álgebras graduadas.

Definição A.4. Uma álgebra A é dita graduada, se existem subespaços $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tais que

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i \quad \text{e} \quad A_i A_j \subset A_{i+j}$$

para todos $i, j \in \mathbb{N}$. Denominam-se os elementos de A_i por elementos homogêneos de grau i .

Exemplo A.2.1. O anel dos polinômios é um exemplo clássico de uma álgebra graduada. Neste conjunto, cada $A_i = \mathbb{k} \cdot x^i$, ou seja, os múltiplos de x^i por $\mathbb{k}$.

Proposição A.5 (vide [Kas95]). Sejam $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$ uma álgebra graduada e I um ideal gerado pelos elementos homogêneos. Então,

$$I = \bigoplus_{i \geq 0} (I \cap A_i)$$

e o quociente da álgebra A/I é graduado com $(A/I)_i = A_i / (I \cap A_i)$ para todos i .

A.2.1 Álgebra Tensorial, Álgebra simétrica e Álgebra Exterior

Esta seção Trará as definições clássicas das álgebras tensoriais, siméticas e exterior, que usamos na Seção 4.2.7.

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Definimos $T^0(\mathbb{V}) = \mathbb{k}$, $T^1(\mathbb{V}) = \mathbb{V}$ e $T^n(\mathbb{V}) = \mathbb{V}^{\otimes n}$, se $n > 1$. Existe um isomorfismo canônico

$$T^n(\mathbb{V}) \otimes T^m(\mathbb{V}) \cong T^{n+m}(\mathbb{V})$$

que induz um produto associativo no espaço vetorial $T(\mathbb{V}) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(\mathbb{V})$. Assim equipamos $T(\mathbb{V})$ com uma estrutura de álgebra, chamada de **álgebra tensorial** de $\mathbb{V}$. O produto em $T(\mathbb{V})$ é explicitamente determinado por

$$(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)(x_{n+1} \otimes \dots \otimes x_{n+m}) = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes \dots \otimes x_{n+m}, \quad (\text{A.2})$$

onde $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ são elementos de $\mathbb{V}$.

A unidade deste produto é o elemento 1 em $\mathbb{K} = T^0(\mathbb{V})$. Seja $\iota_{\mathbb{V}}$ o mergulho canônico ('inclusão') de $\mathbb{V} = T^1(\mathbb{V})$ em $T(\mathbb{V})$. Pela equação (A.2) temos que

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n = \iota_{\mathbb{V}}(x_1) \dots \iota_{\mathbb{V}}(x_n), \quad (\text{A.3})$$

que nos permite mostrar que

$$x_1 \dots x_n = x_1 \otimes \dots \otimes x_n \quad (\text{A.4})$$

onde $x_1, \dots, x_n$ são elementos de $\mathbb{V}$.

Proposição A.6 ([Kas95](II.4)). *Usando as definições que foram dadas anteriormente, são válidas as seguintes afirmações:*

- (a) *A álgebra de Hopf $T(\mathbb{V})$ é graduada de modo que $T(\mathbb{V})$ é um subespaço de elementos homogêneos de grau n .*
- (b) *Para toda álgebra $\mathbb{A}$ e toda aplicação linear $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A}$, existe um único morfismo de álgebra $\bar{f}: T(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{A}$ tal que $\bar{f} \circ \iota_{\mathbb{V}} = f$. Consequentemente, a aplicação $\bar{f} \mapsto \bar{f} \circ \iota_{\mathbb{V}}$ é uma bijeção.*

$$\text{Hom}_{\text{Alg}}(T(\mathbb{V}, \mathbb{A})) \cong \text{Hom}(\mathbb{V}, \mathbb{A}).$$

- (c) *Seja I um conjunto de índices para uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$. Então a álgebra tensorial $T(\mathbb{V})$ é isomorfa a álgebra livre $\mathbb{K}\{I\}$.*

Definimos a álgebra simétrica $S(\mathbb{V})$, onde $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial, por $S(\mathbb{V}) = T(\mathbb{V})/I(\mathbb{V})$ da álgebra tensorial $T(\mathbb{V})$ pelo ideal $I(\mathbb{V})$ gerado por todos elementos $xy - yx$, onde $x, y \in \mathbb{V}$. A imagem de $T^n(\mathbb{V})$ pela projeção de $T(\mathbb{V})$ sobre $S(\mathbb{V})$ é $S^n(\mathbb{V})$.

Proposição A.7. *As seguintes afirmação são verificadas:*

- (a) *A álgebra $S(\mathbb{V})$ é comutativa e graduada de forma tal que $S^n(\mathbb{V})$ é um subespaço dos elementos homogêneos de grau n .*
- (b) *Para toda álgebra $\mathbb{A}$ e toda aplicação linear $f: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{A}$ tal que*

$$f(x)f(y) = f(y)f(x),$$

para todo par (x, y) de elementos de $\mathbb{V}$, existe um único morfismo de álgebras $\bar{f}: S(\mathbb{V}) \rightarrow \mathbb{A}$ tal que $\bar{f} \circ \iota_{\mathbb{V}} = f$.

- (c) *Seja I um conjunto de índices de uma base $\mathbb{V}$. Então a álgebra simétrica $S(\mathbb{V})$ é isomorfa a álgebra dos polinômios $\mathbb{K}[I]$ no conjunto.*
- (d) *Se $\mathbb{V}'$ é outro espaço vetorial, temos um isomorfismo de álgebra*

$$S(\mathbb{V} \oplus \mathbb{V}') \cong S(\mathbb{V}) \otimes S(\mathbb{V}').$$

A.3 Teoremas Elementares de Álgebra Abstrata

Para entender alguns exemplos da Seção 4.2, necessitamos de alguns dos resultados que apresentaremos nesta seção. Referenciamos os resultados necessários no capítulo 3 para esta seção.

A.3.1 A Estrutura dos Grupos de Matrizes

Definição A.5. Para toda álgebra A , denotamos por $M_2(A)$ a álgebra das matrizes 2×2 com entradas em A por $M_2(A)$, que está em bijeção com o conjunto das quadruplas de A . Temos uma bijeção natural (A.5) dada por

$$M_2(A) \cong \text{Hom}_{\text{Alg}}(M(2), A)$$

para qualquer álgebra comutativa A onde $M(2) = \mathbb{K}[a, b, c, d]$.

Consideremos agora o grupo das matrizes invertíveis da álgebra de matrizes $M_2(A)$. Quando A é comutativo, dizemos que uma matriz é invertível, se o seu determinante é invertível:

$$GL_2(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(A) \quad \text{tal que} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \in A^\times \right\}.$$

Defina $SL_2(A)$ como o subgrupo de $GL_2(A)$ das matrizes com determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Proposição A.8 (Vide [Kas95]). *Defina as álgebras comutativas*

$$GL(2) = M(2)[t]/((ad - bc)t - 1) \quad \text{e} \quad SL(2) = GL(2)/(t - 1) = M(2)/(ad - bc - 1).$$

Para qualquer álgebra A , existem bijeções

$$\text{Hom}_{\text{Alg}}(GL(2), A) \cong GL_2(A) \quad \text{e} \quad \text{Hom}_{\text{Alg}}(SL(2), A) \cong SL_2(A).$$

enviando um morfismo de álgebra f para uma matriz

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

A.3.2 Álgebras de Lie

Definição A.6. Uma álgebra de Lie L é um espaço vetorial com uma aplicação bilinear $[\cdot, \cdot]$, chamada colchete de Lie, satisfazendo as seguintes condições para todos $x, y, z \in L$:

(i) Antissimetria:

$$[x, y] = -[y, x];$$

(ii) Identidade de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Definição A.7. Sejam L, L' álgebras de Lie. Um morfismo de álgebras de Lie f de L em L' é uma transformação linear $f: L \rightarrow L'$ tal que $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ para todos $x, y \in L$. Um **ideal** I de uma álgebra de Lie L é um subespaço I de L tal que para todo elemento $(x, y) \in L \times I$ temos $[x, y] \in I$.

Exemplo A.3.1. Seja I um ideal de uma álgebra de Lie L . Existe uma única estrutura de álgebra de Lie no espaço vetorial quociente L/I tal que a projeção de L sobre L/I é um morfismo de álgebras de Lie.

Exemplo A.3.2. Seja $f : L \rightarrow L'$ um morfismo de Lie. Seu núcleo $\ker(f)$ é um ideal de L , a imagem $f(L)$ é uma subálgebra de L' , e a aplicação ϕ , induzida por

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & f(L) \subset L' \\ \pi \downarrow & \nearrow \phi & \\ L/\ker f & & \end{array},$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Exemplo A.3.3. Seja A uma álgebra associativa. Definiremos $[a, b] = ab - ba$ (comutador de a e b) para todos $a, b \in A$. É fácil verificar que esta aplicação bilinear é antissimétrica e satisfaz a identidade de Jacobi. Temos também $[a, bc] = [a, b]c + b[a, c]$ para todos $a, b, c \in A$. Esta álgebra linear será denotada por $L(A)$.

Obs.: A.3.1. Para todo espaço vetorial $\mathbb{V}$, denotamos a álgebra de Lie $L(\text{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{V}))$ de todos endomorfismos de $\mathbb{V}$ por $\mathfrak{gl}(n)$. Quando $\mathbb{V}$ tem dimensão finita n , então $\mathfrak{gl}(\mathbb{V})$ é isomorfa a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n) = L(M_n(\mathbb{K}))$ das $n \times n$ -matrizes com entradas no corpo $\mathbb{K}$. É claro que o comutador de duas matrizes é uma matriz de traço zero. Consequentemente, o espaço vetorial $\mathfrak{sl}(n)$ das n matrizes de traço nulo é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n)$.

O teorema a seguir foi necessário na compreensão do exemplo de álgebras de Hopf como os envelope de uma álgebra de Lie. O leitor interessado em conhecer os detalhes de sua demonstração poderá lê-los em [Dix96].

Teorema A.2 (Poincaré-Birkhoff-Witt). Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$. Então o conjunto $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$, onde $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, forma uma base de $\mathcal{U}(\mathbb{V})$.

A.3.3 Extra de Álgebras e Coálgebras

Proposição A.9. Seja $\mathbb{C}$ uma coálgebra.

- (a) Se $J \subset \mathbb{C}$ é um coideal, então $J^\perp$ é uma subálgebra de $\mathbb{C}^*$.
- (b) Se I é uma subálgebra de $\mathbb{C}^*$, então $I^\perp$ é um coideal em $\mathbb{C}$.
- (c) $V \subset \mathbb{C}$ é um coideal, se e somente se $V^\perp$ é uma subálgebra de $\mathbb{C}^\perp$.

Teorema A.3 (Vide [Swe69a]). Seja $\mathbb{C}$ uma coálgebra, $\mathbb{V}$ um coideal e $\pi : \mathbb{C} \rightarrow E = \mathbb{C}/\mathbb{V}$ uma aplicação linear natural sobre o espaço vetorial quociente. Então:

- (a) E tem uma única estrutura de coálgebra tal que π é uma aplicação de coálgebra;
- (b) Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$ é qualquer coálgebra, então $\ker f$ é um coideal;

(c) Se $\mathbb{V} \subset \ker f$, então existe uma única aplicação de coálgebra $\bar{f}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}' \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & \mathbb{C}/\mathbb{V} & \end{array}$$

é comutativo.

Proposição A.10 (Vide [DNR00]). Sejam M, N, L $\mathbb{C}$ -comódulos. Então:

- (a) Se $f : M \rightarrow N$ é um morfismo de comódulo, então $\ker f$ é um subcomódulo de M e $\text{Im} f$ é um subcomódulo de N .
- (b) Se $L \subset M$ é um subcomódulo de M , M/L tem uma estrutura de comódulo única fazendo $\pi : M \rightarrow M/L$ um morfismo de comódulo.
- (c) Com a notação de (a) e (b), se $L \subset \ker f$, então existe um único morfismo de comódulos $\bar{f} : M/L \rightarrow N$ fazendo o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & M/L & \end{array}$$

ser comutativo.

Proposição A.11. Sejam $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow C$ morfismos de álgebras tais que, para todo par $(a, b) \in A \times B$, a relação $f(a)g(b) = g(b)f(a)$ é verificada em C . Então existe um morfismo único de álgebra $f \otimes g : A \otimes B \rightarrow C$ tal que $(f \otimes g) \circ i_A = f$ e $(f \otimes g) \circ i_B = g$, onde $i_A : A \rightarrow A \otimes B$ e $i_B : B \rightarrow A \otimes B$.

A.4 Coálgebra Colivre

É necessário um conhecimento prévio de alguns fundamentos de categorias. A Seção A.6 apresenta alguns fundamentos básicos de categorias. Se o leitor tiver interesse em aprofundar-se no estudo de categorias indicamos [Mac98]. Principalmente, indicamos uma breve leitura na seção de adjunção que é um conceito que não foi trabalhado nessa dissertação.

Definição A.8. Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial. Uma coálgebra colivre sobre $\mathbb{V}$ é um par $(\mathbb{C}, p)$, onde $\mathbb{C}$ é uma $\mathbb{k}$ -coálgebra e $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{V}$ é uma aplicação $\mathbb{k}$ -linear tal que, para toda $\mathbb{k}$ -coálgebra $\mathbb{C}'$ e toda aplicação $\mathbb{k}$ -linear $f : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{V}$, existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f} : \mathbb{C}' \rightarrow \mathbb{C}$ com $f = p \circ \bar{f}$.

Obs.: A.4.1. É fácil verificar que p é sobrejetiva. Suponha, por contradição, que p não seja sobrejetivo. Tomemos, por exemplo, $\mathbb{C}' = T(\mathbb{V}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{V}^{\otimes i}$, temos que

$$\begin{aligned} f : T(\mathbb{V}) &\longrightarrow \mathbb{V} \\ c_0 \oplus c_1 u^1 \oplus (\sum u_i^1 \otimes u_i^2) \oplus \cdots \oplus (\sum u^1 \otimes \cdots \otimes u^k) &\longmapsto u^1 \end{aligned}$$

Existe $u \in T(\mathbb{V})$ tal que $f(u) = v \in \mathbb{V}$ e $v \notin p(\mathbb{C})$. Contudo, isto implica em $v = f(u) = p(\bar{f}(u))$, ou seja, $v \in p(\mathbb{C})$ (contradição!). Logo p é sobrejetivo. Segue que, sejam $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}'$ duas coálgebras colivres sobre $\mathbb{V}$, então teremos que $\mathbb{C}, \mathbb{C}'$ são isomorfas.

Lema A.1. Sejam $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dois espaços vetoriais. Então existe uma única bijeção natural entre $\text{Hom}(\mathbb{X}, \mathbb{Y}^*)$ e $\text{Hom}(\mathbb{Y}, \mathbb{X}^*)$.

Lema A.2. Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial. Então existe uma coálgebra colivre sobre $\mathbb{V}^{**}$.

Lema A.3. Sejam $(\mathbb{C}, p)$ uma coálgebra colivre sobre o $\mathbb{k}$ -espaço vetorial $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ um subespaço de $\mathbb{V}$. Então existe uma coálgebra colivre sobre $\mathbb{W}$.

Teorema A.4. Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial. Então existe uma coálgebra colivre sobre $\mathbb{V}$.

Corolário A.3. O funtor esquecido $\mathbb{U} : \mathbb{k}\text{-Cog} \rightarrow_{\mathbb{k}} \mathcal{M}$ tem uma adjunção à direita.

É fácil verificar que, para $\mathbb{V} = 0$, a coálgebra colivre sobre $\mathbb{V}$ é o corpo $\mathbb{k}$ com a estrutura coálgebra trivial na qual a comultiplicação é o isomorfismo canônico e a counidade é a aplicação identidade de $\mathbb{k}$.

Proposição A.12. Seja $p : \mathbb{k} \rightarrow 0$ o morfismo nulo. Então $(\mathbb{k}, p)$ é uma coálgebra colivre sobre o espaço nulo.

Definição A.9. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Uma coálgebra colivre cocomutativa sobre $\mathbb{V}$ é um par (E, p) , onde E é uma coálgebra cocomutativa $\mathbb{k}$ -coálgebra e $p : E \rightarrow \mathbb{V}$ é uma aplicação $\mathbb{k}$ -linear tal que, para toda $\mathbb{k}$ -coálgebra cocomutativa $\mathcal{D}$ e toda aplicação $\mathbb{k}$ -linear $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{V}$, existe um único morfismo de coálgebra $\bar{f} : \mathcal{D} \rightarrow E$ com $f = p \circ \bar{f}$.

Teorema A.5. Seja $\mathbb{V}$ um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial. Então existe uma coálgebra colivre cocomutativa sobre $\mathbb{V}$.

Para um $\mathbb{k}$ -espaço vetorial $\mathbb{V}$, denotamos por $CFC(\mathbb{V})$ a coálgebra colivre cocomutativa sobre $\mathbb{V}$, construída a partir do Teorema A.5. De fato, podemos construir um funtor $CFC :_{\mathbb{k}} \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{k}\text{-}\mathcal{C}$ e a subcategoria de $\mathbb{k}\text{-}\mathcal{C}$ tendo como objetos as coálgebras cocomutativas. Para um espaço vetorial $\mathbb{V}$, associa-se a $CFC(\mathbb{V})$, através do funtor de coálgebra colivre cocomutativa. Se $f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{W}$ é uma aplicação linear e $(CFC(\mathbb{V}), p)$, $(CFC(\mathbb{W}), \pi)$ são coálgebras colivres cocomutativas sobre $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, então denotamos por $CFC(f) : CFC(\mathbb{V}) \rightarrow CFC(\mathbb{W})$ o único morfismo de coálgebra tal que $\pi(CFC(f)) = fp$. A existência e a unicidade de $CFC(f)$ segue da propriedade universal de $CFC(\mathbb{W})$. Estas associações de objetos e morfismos definem o funtor CFC , que é também um funtor adjunção à direita.

Corolário A.4 (Vide [Mac98] e Dascalescu). O funtor CFC é uma adjunção à direita do funtor esquecido $\mathbb{U} : \mathbb{k}\text{-}\mathcal{C} \rightarrow_{\mathbb{k}} \mathcal{M}$.

Proposição A.13. A coálgebra colivre cocomutativa sobre o espaço nulo é $\mathbb{k}$, com a estrutura coálgebra trivial e junto com o morfismo nulo.

Proposição A.14. Sejam $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$ espaços vetorial e $(\mathbb{C}_1, \pi_1), (\mathbb{C}_2, \pi_2)$ coálgebras colivres cocomutativas sobre $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2$. Dados $\pi: \mathbb{C}_1 \otimes \mathbb{C}_2 \longrightarrow \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$,
 $c \otimes e \longmapsto \pi(c \otimes e) = (\pi_1(c)\epsilon_2(e), \pi_2(e)\epsilon_1(c))$ onde ϵ_1, ϵ_2 são respectivamente as counidades de $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$. Então $(\mathbb{C}_1 \otimes \mathbb{C}_2, \pi)$ é uma coálgebra colivre cocomutativa sobre $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2$.

A.5 Combinatória Quântica

Esta seção é dedicada a apresentar alguns princípios de combinatória quântica, ou seja, a adaptação da combinatória que se intitula desta maneira. Usamos para isto a Seção 4.2.10.

A.5.1 Polinômio de Gauss e a Fórmula q -binomial

Fixemos um elemento $q \neq 0 \in \mathbb{k}$. Se $q = 1$, então as relações e as potências binomiais são iguais as relações do binômio de Newton. Assim apenas generalizaremos as relações binomiais do anel de polinômios

$$(n)_q = 1 + q + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (\text{A.6})$$

Definimos o q -fatorial de $n > 0$ por

$$\begin{cases} (0)!_q = 1 \\ (n+1)!_q = (n)!_q (n+1)_q = \frac{(q-1)(q^2-1)\dots(q^n-1)}{(q-1)^n}. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

O q -fatorial de n é expresso como a multiplicação em A.7. E substituindo a relação A.6, ele é um polinômio em q com coeficiente inteiros. Podemos substituir $q = 1$ e obter $n!$. Definimos as polinômiais de gauss com $0 \leq k \leq n$ por

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)!_q}{(k)!_q (n-k)!_q}. \quad (\text{A.8})$$

Proposição A.15. Seja $0 \leq k \leq n$.

(a) $\binom{n}{k}_q$ é um polinomial em q com coeficientes integrais e com valor em $q = 1$ igual ao coeficiente binomial $\binom{n}{k}$.

(b) Temos que

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{n-k}_q. \quad (\text{A.9})$$

(c) (q -identidade de Pascal) Também verifica-se que

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q \quad (\text{A.10})$$

Agora, nos planos quânticos, que são o quociente da álgebra livremente gerada $\mathbb{k}\{x, y\}$ com o ideal $I = \langle yx - qxy \rangle$. Os binômios desta álgebra são segundo proposição abaixo.

Proposição A.16 (Vide [Kas95]). *Sejam x e y as variáveis do plano quântico, que satisfazem a relação $yx = qxy$. Então, para todo $n > 0$, temos*

$$(x+y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}_q x^k y^{n-k}.$$

A relação a seguir é calculada analogamente à fórmula de Chu-Vandermond da combinatória clássica.

Proposição A.17 (Vide [Kas95]). *Para $m \geq p \leq n$, temos que*

$$\binom{m+n}{p}_q = \sum_{0 \leq k \leq p} q^{(m-k)(p-k)} \binom{m}{k}_q \binom{n}{p-k}_q.$$

Seja $q \neq 0 \in \mathbb{k}$ e suponha que $q \neq 1, -1$. Então, podemos definir

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-n+3} + q^{-n+1}.$$

Além disto, valem as seguinte relações, que podem ser verificadas:

$$[-n] = -[n] \quad e \quad [m+n] = q^n [m] + q^{-m} [n]. \quad (\text{A.11})$$

Observe que, se q não é uma raiz da unidade, então $[n] \neq 0$ para qualquer inteiro não nulo. Pois $[n] = 0$ implica $q^n - q^{-n} = 0$, ou seja, $q^{2n} - 1 = 0$. Isto não é verdade, quando q não é uma raiz da unidade. Neste caso, denotamos por d a ordem, i.e., o menor inteiro maior que 1 tal que $q^d = 1$. Como assumimos que $q^2 \neq 1$, devemos ter $d > 2$. Define-se, quando for raiz da unidade,

$$e = \begin{cases} d, & \text{se } d \text{ é ímpar} \\ d/2, & \text{se } d \text{ é par} \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

e definimos $d = e = \infty$, quando q não é uma raiz da unidade. Verifica-se que $[n] = 0 \Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{e}$.

Temos a seguinte versão do fatorial para os inteiros $0 \leq k \leq n$, satisfazendo $[0]! = 1$ e

$$[k]! = [1][2] \cdots [k].$$

Se $k > 0$, então

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}. \quad (\text{A.13})$$

Ainda valem as relações abaixo, que relacionam o que vimos com o apêndice A,

$$[n] = q^{-(n-1)}(n)_{q^2}, \quad [n]! = q^{-n(n-1)/2}(n)_{q^2},$$

e

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{-k(n-k)} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_{q^2}. \quad (\text{A.14})$$

Com a nova notação, podemos reescrever o binômio do plano quântico $\mathbb{k}[x, y] = \mathbb{k}\{x, y\} / \langle yx - qxy \rangle$. Temos que

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n q^{k(n-k)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}. \quad (\text{A.15})$$

A.5.2 A Estrutura de $M_q(2)$

Definimos as relações algébricas abaixo:

$$\begin{aligned} ba &= qab, & db &= qbd, & ca &= qac, \\ dc &= qcd, & bc &= cb, & ad - da &= (q^{-1} - q)bc. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Chamaremos J_q o ideal gerado pelas seis relações.

Definição A.10. A álgebra $M_q(2)$ é o quociente da álgebra livre $\mathbb{k}\{a, b, c, d\}$ pelo ideal J_q .

Proposição A.18 (Vide [Kas95]). O elemento $\det_q = ad - q^{-1}bc = da - qbc$ está no centro de $M_q(2)$.

A estrutura de $M_q(2)$ é similar a estrutura do anel de polinômios. No seguinte teorema, explicitamos algumas propriedades importantes desta álgebra.

Teorema A.6 (Vide [Kas95], pág. 81). A álgebra $M_q(2)$ é Noetheriana e não tem divisores de zero. Uma base do espaço vetorial $M_q(2)$ é o conjunto dos monômios $\{a^i b^j c^k d^l\}_{i,j,k,l \geq 0}$.

Definiremos uma estrutura de coálgebra e biálgebra em $M_q(2)$. A comultiplicação e a counidade serão as mesmas que dotam $M(2)$ com uma estrutura de coálgebra.

Teorema A.7. Existe um morfismo de álgebra

$$\Delta : M_q(2) \longrightarrow M_q(2) \otimes M_q(2) \quad \text{e} \quad \varepsilon : M_q(2) \longrightarrow \mathbb{k}$$

unicamente determinado por

$$\begin{aligned} \Delta(a) &= a \otimes a + b \otimes c, & \Delta(b) &= a \otimes a + b \otimes c, \\ \Delta(a) &= c \otimes a + d \otimes c, & \Delta(d) &= c \otimes b + d \otimes d, & \varepsilon(a) &= \varepsilon(d) = 1, \\ \varepsilon(b) &= \varepsilon(c) = 0. \end{aligned}$$

Equipado com este morfismo, a álgebra $M_q(2)$ torna-se uma biálgebra que não é comutativa e não é cocomutativa. Mais ainda, temos

$$\Delta(\det_q) = \det_q \otimes \det_q \quad \text{e} \quad \varepsilon(\det_q) = 1.$$

A.6 Fundamentos de Categorias

O objeto do tipo Hopf tem como riqueza adjacente o fato da categoria de seus objetos terem estrutura adicional. Iniciaremos com uma revisão de categorias e resumiremos as características especiais da estrutura. Os leitores interessados em saber mais podem consultar [Mac98], [Awo10], [AHS09] e [Sel09]. Uma categoria trata-se, intuitivamente, de uma estrutura algébrica composicional que possui ‘**objetos**’ que são relacionado por ‘**morfismos**’. Formalmente, uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

- Uma classe $ob(\mathcal{C})$ de objetos;
- Uma classe $hom(\mathcal{C})$ de morfismos, ou aplicações, entre os objetos da categoria. Cada $f \in hom(\mathcal{C})$ possui um único domínio $D(f) \in Ob(\mathcal{C})$ e uma única imagem (ou contradomínio) $Im(f) \in Ob(\mathcal{C})$. Denotamos isto por $f : Dom(f) \rightarrow Im(f)$.
- Para quaisquer três objetos a, b e c , existe uma operação binária

$$hom(a, b) \times hom(b, c) \longrightarrow hom(a, c)$$

chamada **composição de morfismos**. A composta de $f : a \rightarrow b$ e $g : b \rightarrow c$ é escrita como $g \circ f$ ²

A composição satisfaz os seguintes axiomas:

- (associatividade): Se $f : a \rightarrow b$, $g : b \rightarrow c$ e $h : c \rightarrow d$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
- (identidade): Para todos objetos $x \in \mathcal{C}$, existe um morfismo $1_x : x \rightarrow x$ (ou 1_x chamado **morfismo identidade** de x , tal que, para todo morfismo $f : a \rightarrow b$, temos $1_b \circ f = f = f \circ 1_a$.

A.6.1 Funtor

Quando existe uma relação funcional entre as estruturas de duas categoria, temos como consequência que uma categoria herda alguns resultados de outra categoria.

Um **funtor** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é um morfismo entre as categorias, ou seja, uma relação funcional que associa um objeto de uma categoria $x \in Ob(\mathcal{C})$ a um elemento $F(x) \in Ob(\mathcal{D})$ e um morfismo de $f : x \rightarrow x' \in hom(\mathcal{C})$ a um morfismo de $Ff : F(x) \rightarrow F(x') \in hom(\mathcal{D})$.

Definição A.11. Dadas as categorias $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$. Um **funtor** $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ com domínio em $\mathcal{C}$ e imagem (ou contradomínio) em $\mathcal{D}$ consiste de duas relações funcionais: A **relação funcional entre os objeto** T , que associa cada objeto $c \in \mathcal{C}$ a um objeto $T(c) \in \mathcal{D}$ e a **relação funcional entre os morfismos**, que também é denotada por T , e associa cada morfismo $f : c \rightarrow c' \in \mathcal{C}$ a um morfismo $Tf : T(c) \rightarrow T(c') \in \mathcal{D}$, de modo que

$$T(1_c) = 1_{T(c)}, \quad T(g \circ f) = T(g) \circ T(f),$$

para morfismos componíveis.

²Alguns autores usam ‘a ordem diagramática’ ou ordem direitista, escrevendo $f \bullet g$ ou fg .

Obs.: A.6.1. Um funtor que tenha dois argumentos é chamado bifuntor.

Assim um funtor é, essencialmente, uma aplicação de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$ que preserva estrutura composicional.

Exemplo A.6.1. Seja **Set** a categoria dos conjuntos. Definamos o funtor **conjunto das partes** $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$. O funtor associa um conjunto $\mathcal{X} \in \mathbf{Set}$ ao conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \in \mathbf{Set}$ das partes deste conjunto. A função associa o morfismo f ao morfismo $Tf : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ da seguinte maneira $S \mapsto \mathcal{P}(S) = \{f(x) | x \in \mathcal{X}\}$.

Dados dois funtores $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$, $S : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$. Podemos compô-los conforme abaixo:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}', \quad \mathcal{C}' \xrightarrow{S} \mathcal{C}'' \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \xrightarrow{T} \mathcal{C}' \xrightarrow{S} \mathcal{C}'' = \mathcal{C} \xrightarrow{S \circ T} \mathcal{C}''.$$

Esta composição resulta em um funtor de $S \circ T : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$. O funtor composto age sobre o objeto e sobre o morfismo da seguinte maneira:

$$c \mapsto S(Tc) \quad f \mapsto S(Tf)$$

Esta composição é associativa. Para cada categoria $\mathcal{B}$, existe um funtor identidade $I_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$, que é uma identidade para a composição de funtores, ou seja, $I_{\mathcal{B}} \circ T = T = T \circ I_{\mathcal{A}}$.

Definição A.12. Seja $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor. Dizemos que T é um **isomorfismo** de categorias, se existe um morfismo $T^{-1} : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tal que $T^{-1} \circ T = id_{\mathcal{C}'}$, $T \circ T^{-1} = id_{\mathcal{C}}$.

Algumas relações funcionais categóricas agem nas aplicações de forma semelhante ao modo que os funtores agem, porém invertendo a ordem da composição dos morfismos. Estas relações funcionais são denominados como **funtores contravariantes**.

Definição A.13. Um **funtor contravariante** T é um morfismo de categorias que inverte a ordem da composição. Especificamente, dadas duas categorias $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ e um funtor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ com domínio em $\mathcal{C}$ e contradomínio em $\mathcal{D}$, o funtor T consiste de duas relações funcionais: A **relação funcional entre objeto** T , que associa cada objeto $c \in \mathcal{C}$ a um objeto $T(c) \in \mathcal{D}$, e a relação **relação funcional entre aplicação**, que também é denotada por T e que associa cada aplicação $f : c \rightarrow c' \in \mathcal{C}$ a um morfismo $Tf : T(c') \rightarrow T(c) \in \mathcal{D}$, de modo que

$$T(1_c) = 1_{T(c)}, \quad T(g \circ f) = T(f) \circ T(g) \quad \forall f, g \in \text{hom}(\mathcal{C}, \mathcal{C}).$$

Exemplo A.6.2. O funtor ‘forgetfull’ (lit. funtor esquecido) $\mathbb{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é muito conhecido no estudo de categorias. Este funtor associa um objeto na categoria $\mathcal{C}$ a outro objeto que é conjutisticamente idêntico, mas que perde totalmente ou em parte sua estrutura. Por exemplo, $\mathcal{F} : \mathbf{Vet} \rightarrow \mathbf{Set}$ que associa o espaço vetorial ao conjunto de seus pontos.

Nesta seção, daremos sentido aos diagramas, que representam os morfismos bem-formados usados. Através desta visão gráfica, [Kup96] definiu a categoria dos objetos do tipo Hopf que foi utilizada na classificação de 3-variedades fechadas. Para fins de compreensão, abordaremos-se de forma intuitiva os diagramas a partir daqui.

A.7.1 Movimentos Sobre as Aresta e Vértices

Quando construímos um diagrama (ou grafo) que represente a composição de morfismos, podemos simplificar a sua topologia sem alterar suas propriedades algébricas. Nesta seção, estamos interessados em indicar como coloca-se um grafo na sua forma equivalente mais simples.

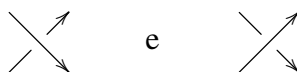
Grafos resultantes da representação da composição dos morfismos têm as seguintes propriedades:

- Os grafos são finitos, são orientados e não necessariamente são grafos conexos;
- Os grafos podem ter laços, arestas paralelas, extremidades livres, ciclos orientados e rotulações na arestas e vértices;
- Os grafos isomorfos guardam os mesmo rótulos do grafo original;
- Nossa imersão do grafo é suave por pedaços, isto é, queremos dizer que não introduziremos bicos, quando realizarmos a imersão do grafo em $([0, 1] \times \mathbb{R}^2)$ ou em $([0, 1] \times \mathbb{R}^3)$; ³

Definição A.16. O mergulho **próprio** de um grafo G sobre $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ é uma imersão de G em um subconjunto próprio do $\mathbb{R}^3$ onde a fronteira de G , que são as extremidades livres do grafo, devem estar sobre a fronteira de $\{0, 1\} \times \mathbb{R}^2$.

Definição A.17. O **Diagrama de Projeção** do grafo G deve satisfazer as seguintes propriedades:

- Realizar a imersão de G em $\mathbb{R}^2$;
- Cada cruzamento representa dois pontos um anterior e outro posterior, isto é, capturamos a ideia de profundidade. Os demais pontos que não se cruzam são isolados;
- Nos cruzamentos, os pontos sobrescritos devem estar no interior da arestas que se cruzam e não podendo assim serem vértices;
- Os cruzamentos são representados por:



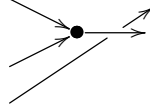
Em cada caso, guardamos a informação sobre que aresta se encontra mais ‘profunda’.

Obs.: A.7.1. Um diagrama de projeção é dito **achatado**, se perdemos a noção de profundidade nos cruzamentos. Neste caso, os cruzamentos serão representado por

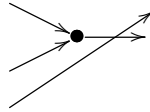


³Fazendo isto consideramos que o grafo herda a topologia do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo A.7.1 (Diagramas de projeção). Dado um grafo mergulhado em $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$, podemos representá-lo em um diagrama de projeção. Por exemplo, a partir do diagrama de projeção a seguir podemos recuperar uma representação gráfica em $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$:



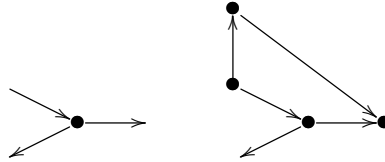
A seguir temos uma versão de um diagrama de projeção **achatado**.



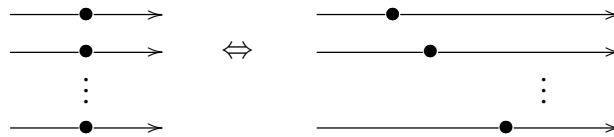
Definição A.18. Um diagrama de projeção em $\mathbb{R}^2$ é dito ser **alinhado** se, e somente se, todas as arestas do grafo, já com a noção de profundidade⁴, tem sempre ‘componetes’ em alguma **direção destacada** do $\mathbb{R}^2$, ou seja, suas arestas têm sempre componetes horizontais (ou respectivamente verticais).

A definição anterior ajuda a representar o grafo de maneira mais clara. Todas as arestas do diagrama, por exemplo, podem ter projeção horizontal que não seja apenas um ponto.

Exemplo A.7.2 (Diagrama de projeção alinhado). Os grafos a seguir são exemplos de um grafo **alinhado** à direita e de um grafo **não-alinhado** à esquerda.



Tendo em vista a Definição A.18, um diagrama cujas projeções de alguns vértices se sobrepõem, podem-ser transladadas em alguma **direção destacada** (por exemplo, horizontalmente) conforme seja mais conveniente.



Exemplo A.7.3 (Diagramas alinhados e a associatividade). Esta propriedade topológica dos grafos tem relação, por exemplo, com a associatividade.

Além disto, dizemos que o grafo é progressivo, se a projeção de cada aresta sobre a **direção destacada** assumir um único sentido. Por exemplo, apresentaremos dois grafos que são alinhados, porém só o da direita é progressivo.



⁴Uma função de Morse.

Obs.: A.7.2. Em geral, escolhemos como direção destacada em nossos diagramas a **horizontal** e o sentido assumido foi o da esquerda para direita.

A.7.2 Emaranhados, Tranças, Links e nós

A partir deste ponto, faremos um breve apresentação de alguns conceitos da teoria dos nós.

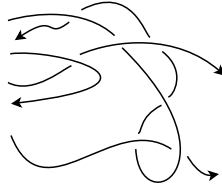
Definição A.19. Um (m, n) -emaranhado (ou entrelaçamento) orientado ⁵:

Grafos sem vértices livre (união disjunta de ciclos e arestas) propriamente mergulhado sobre $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ com fronteira mergulhada em $(\{0\} \times \{1, \dots, m\} \times \{0\}) \sqcup (\{1\} \times \{1, \dots, m\} \times \{0\})$.

Exemplo A.7.4. Temos, por exemplo, o grafo abaixo. Este grafo é uma $(3, 1)$ -entrelaçamento orientado.



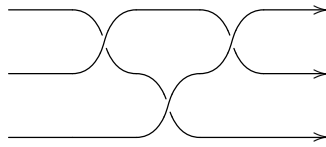
O próximo diagrama é de um $(6, 2)$ -entrelaçamento orientado.



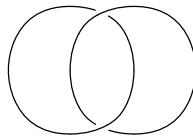
Obs.: A.7.3. Aqui denotamos por $\{1, \dots, 0\} := \emptyset$.

Definição A.20. m -trança⁶ é um (m, m) -enlaçado progressivo.

Exemplo A.7.5. A seguir um exemplo de uma 3-trança.



Definição A.21. Um **elo** (tradução literal de ‘link’) (orientado ou não) é um $(0, 0)$ -enlaçado que pode ou não estar orientado⁷.



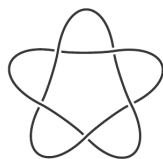
Definição A.22. **Nó** (orientado ou não) é elo conexo⁸, podendo ser orientado ou não.

⁵Vide [Con70] e [FY89].

⁶E. Artin definiu explicitamente esta noção em [Art25], A. Hurwitz definiu trança implicitamente em [Hur91].

⁷No caso orientado, assumi-se um sentido para cada ciclo.

⁸Sempre homeomorfo a um ciclo.



Em topologia, uma **isotopia ambiente** é um tipo da distorção continua de uma ‘espaço ambiente’ de uma variedade, que é tomada como uma subvariedade de outra. Em teoria dos nós, consideram-se dois nós iguais se um pode ser obtido do outro através de uma deformação continua sem quebrar o nó. Na prática, a isotopia no grafo, também chamada **isotopia planar**, trata-se de uma deformação das arestas e vértices sem criar cruzamentos, mantendo a orientação da esquerda para direita. Além de não degenerar aresta em pontos e não poder tirar vértices de faces ou passar através das arestas.

Definição A.23 (Isotopia Ambiente). Sejam $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$ duas subvariedades de $\mathcal{M}$. Dizemos que $\mathcal{N}'$ e $\mathcal{N}''$ são isotopias ambientes, se existe uma **aplicação continua** $F : \mathcal{M} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ onde $F(x, 0) = x \in \mathcal{M}$, onde cada F_t é homeomorfismo de $\mathcal{M}$ nele mesmo e onde $F(\mathcal{N}', 1) = \mathcal{N}''$.

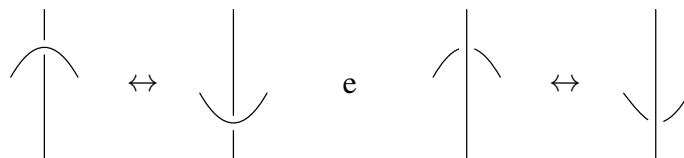
Definição A.24 (Isotopia Regular). Na teoria dos nós, **isotopia regular** é a relação de equivalência entre os diagramas de entrelaçamentos gerados pelo movimento **II** e **III** de Reidemeister.

Definição A.25. Isotopia de emaranhados é a isotopia ambiente, como na Definição A.23, do entrelaçamento em $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ relativa a fronteira $\{0, 1\} \times \mathbb{R}^2$. Dizemos que dois entrelaçamentos são isotópicos, se a deformação que leva um entrelaçamento em outro também deforma o ambiente que o cerca.

Definição A.26. Diagramas de emaranhados são diagramas não achatados resultantes da projeção dos emaranhados sobre $[0, 1] \times \mathbb{R}$.

Definição A.27. Isotopia dos diagramas dos emaranhados é uma isotopia ambiente dos diagramas de emaranhados em $[0, 1] \times \mathbb{R}$ que preserva as indicações de profundidade nos cruzamentos, ou seja, a noção de cruzamento passando por cima ou por baixo⁹.

Isotopias dos emaranhados incluem pequenas perturbações, curvando os subarcs das arestas e deslizando os cruzamentos. Ilustramos esta propriedade abaixo:



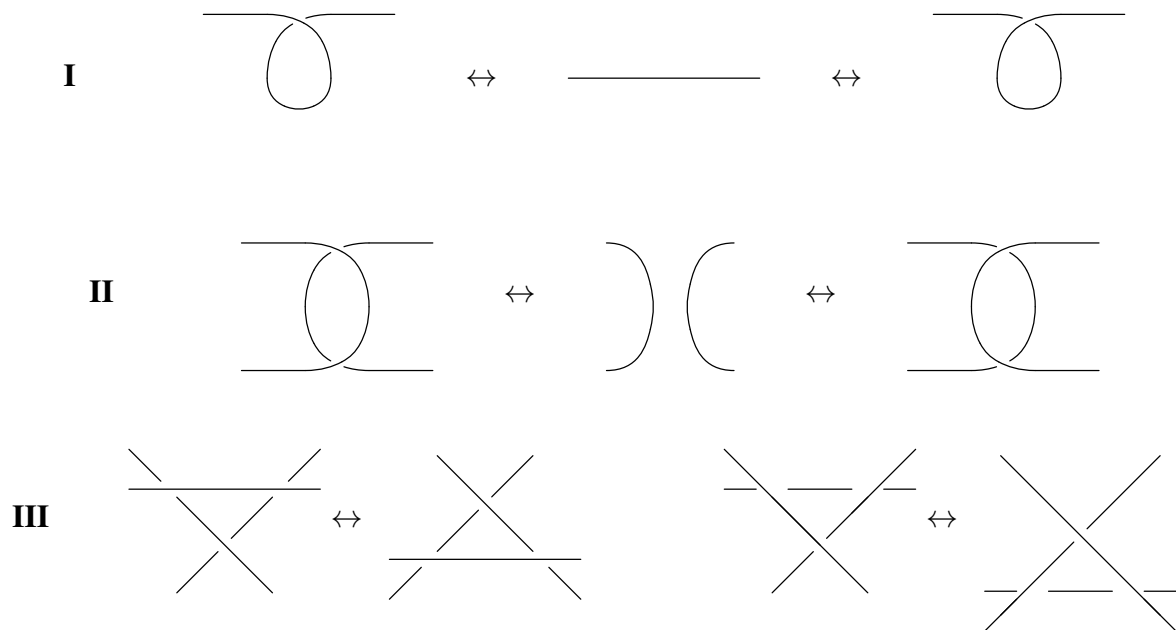
Isotopia alinhada dos diagramas dos emaranhados: Os diagramas dos emaranhados devem permanecer alinhados¹⁰ em cada etapa da isotopia.

Na década de 1930, foi demonstrado que todas as deformações de nó podem ser reduzidas a uma sequência de três tipos de movimentos, que ficaram conhecidos por **movimentos de Reidemeister** [Rei32].

⁹Vide a Definição A.17.

¹⁰Vide a Definição A.18.

A seguir, listamos os movimentos de Reidemester:



Os movimentos são conhecidos por:

- I** Primeiro movimento de Reidemester;
- II** Segundo movimento de Reidemester;
- III** Terceiro movimento de Reidemester.

Teorema A.7.1 (Vide [Rei32] e [Art25]). *Dois diagramas de emaranhados são isomorfos se, e somente se, um pode ser obtidos um do outro por uma sequência finita de operações do tipo a seguir:*

- *Isotopias de diagramas de Emaranhados;*
- *Movimentos de Reidemeister.*

A.7.3 Grafos de Vértices Rígidos (VR)

Definição A.28. Diz-se que G é um **grafo de vértice rígido** se este for dotado de:

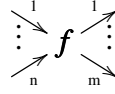
- Uma ordem para as entradas e saídas de cada vértice de G ;

- Uma partição em dois conjuntos entre as extremidades livres de G em dois conjuntos ordenados que denominam-se respectivamente de **domínio** e **imagem** de G .

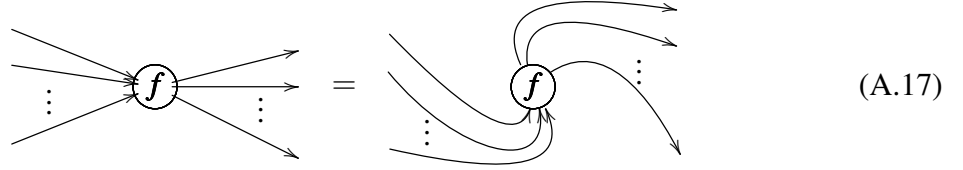
Cada vértice V é dito de tipo $(i(V), o(V))$ onde $o(V)$ denota o número de aresta que saem do vértice V e $i(V)$ denota o número de arestas que entram no vértice V .

Como fizemos na Seção A.7.2, definiremos um mergulho de um grafo de vértice rígido. Primeiramente, enumeraremos as propriedades elementares destes grafos:

- Cada vértice preserva a ordem cíclica da apresentação das arestas no sentido anti-horário, ou seja, a partir da primeira entrada seguem as entrada em ordem. Posteriormente, são apresentadas as saídas com a ordem inversa.



- A ordem cíclica de incidência das arestas nos vértices é preservada, ou seja, queremos dizer que podemos representar o grafo com as arestas torcidas, mas sem confundir a ordem das entradas e saídas.



Se, por exemplo, realizarmos uma rotação em torno do eixo que passa por f e perpendicular a esta página, teremos que os diagramas ainda serão equivalente, desde que o diagrama final permaneça progressivo. Para cada vértice V , existe uma bola $\mathcal{N}_V$ centrada nele que o isola tal que, nesta vizinhança, não existem cruzamentos das arestas e a ordem cíclica se preserva.

- Imaginamos que o grafo mergulhado é uma união de bolas. As bolas centradas em vértices isolam de cruzamentos e a isotopia não poderá mudar a ordem de suas entradas e saídas. Nas bolas que contêm arestas sem vértices, podemos deformar as arestas livremente por movimentos afins e pelos movimentos de Reidemeister.

Definição A.29. O **Mergulho de um grafo de vértice rígido** G é um mergulho deste grafo sobre $[1, 0] \times \mathbb{R}^2$ com as seguintes propriedades:

- Este mergulho de G é extensível de um mergulho ϕ de S sobre $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$ tal que a restrição de ϕ em cada disco seja métrica¹¹;
- Aplicamos as isotopia ambiente nas bolas $\mathcal{N}_V$ que preservam a ordem cíclica;
- *Movimentos afins* para as outras bolas que não tem vértices.

Os nossos diagramas do Capítulo 2 são **achados**. Portanto, falaremos apenas dos diagramas de vértice rígido achados.

¹¹Veja a relação equação (A.17).

Definição A.30. Os diagramas admitem **movimentos sobre vértices**, que é a permissão de um número arbitrário de arestas poderem se mover através de qualquer vértice.



A.8 Categorias Livres

Nesta seção, falaremos intuitivamente de categorias livres. Este tema é necessário para compreender a definição de objetos do tipo Hopf a partir da visão diagramática de seus morfismos. Esta seção se baseia em [Mac98]. Contudo, como categorias não são o foco da dissertação, tentamos ser o mais objetivos possível.

O grafo progressivo G é uma família $\mathcal{O}$ de objetos ¹² e uma família $\mathcal{A}$ de arestas. Além de uma par de relações funcionais do tipo $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{O}$:

$$\partial_0 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}, \quad \partial_0 f = \text{domínio de } f,$$

$$\partial_1 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{O}, \quad \partial_1 f = \text{codomínio de } f,$$

Definição A.31. Um *morfismo* $D : G \rightarrow G'$ de um grafo é um par de funções $D_{\mathcal{O}} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'$ e $D_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ tal que $D_{\mathcal{O}}\partial_0 f = \partial_0 D_{\mathcal{A}} f$ e $D_{\mathcal{O}}\partial_1 f = \partial_1 D_{\mathcal{A}} f$ para toda aresta $f \in \mathcal{A}$.

Estas relações funcionais, além da composição, são morfismos da categoria **Grafo** de todos os pequenos grafos ¹³. Cada grafo pode ser representado por um diagrama de vértices (objetos) e arestas (morfismos), exatamente como na definição de categorias exceto pelo fato que o axioma da composição e o axioma do morfismo identidade não são verificados. Portanto um grafo é frequentemente chamado de um **esquema diagramático** ou **pré-categoria**. Então toda categoria $\mathcal{C}$ determina um grafo $U\mathcal{C}$ com os mesmos objetos e morfismos, esquecendo que os morfismos são componíveis e esquecendo as identidades.

A partir de um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ define-se um morfismo $UF : U\mathcal{C} \rightarrow U\mathcal{C}'$ entre os grafos correspondente a cada categoria. Estas observações define o funtor ‘forgetfull’ ¹⁴, $U : \mathbf{Cat} \rightarrow \mathbf{Graph}$ de todas as pequenas categorias para os grafos.

Fixado os objeto $\mathcal{O}$ na categoria $\mathcal{C}$. Um $\mathcal{O}$ -grafo denotará o conjunto de todos os grafos com $\mathcal{O}$ como objetos. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ famílias de elemento do tipo $\mathcal{O}$ -graphs, o produto deles sobre $\mathcal{O}$ é

$$\mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{B} = \{ \langle g, f \rangle \mid \partial_0 g = \partial_1 f, g \in \mathcal{A}, f \in \mathcal{B} \}; \quad (\text{A.18})$$

Este é o conjunto de ‘pares componíveis’ de morfismos $\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot$. Além disso, se definirmos

$$\partial_0 \langle g, f \rangle = \partial_0 f \quad \partial_1 \langle g, f \rangle = \partial_1 g, \quad (\text{A.19})$$

¹²Estes serão denotados por vértices do grafo.

¹³Um grafo é pequeno, se ambos $\mathcal{O}$ e $\mathcal{A}$ são conjuntos pequenos, ou seja, a princípio não admitimos classes própria.

¹⁴Vide a Definição A.6.2.

então este conjunto é um $\mathcal{O}$ -grafo. Este produto de $\mathcal{O}$ -grafos é associativo, visto que para quaisquer três $\mathcal{O}$ -grafos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ existe um isomorfismo $\mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} (\mathcal{B} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{C}) \cong (\mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{B}) \times_{\mathcal{O}} \mathcal{C}$. Além disso, o próprio $\mathcal{O}$ é um $\mathcal{O}$ -grafo e o isomorfismo $\mathcal{A} \cong \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}$ é induzido por $f \mapsto \langle f, \partial_0 f \rangle$.

Podemos definir uma categoria com objetos $\mathcal{A}$ como um $\mathcal{O}$ -grafo equipado com $c : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow_{\mathcal{O}} \mathcal{A}$ e $i : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{A}$ morfismos de $\mathcal{O}$ -grafos (composições e identidades respectivamente) tais que os diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{A} & \xrightarrow{1 \times c} & \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{A} \\ \downarrow c \times 1 & & \downarrow c \\ \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{A} & \xrightarrow{c} & \mathcal{A} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{O} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{A} & \xrightarrow{i \times 1} & \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{A} & \xleftarrow{1 \times i} & \mathcal{A} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \\ \cong \downarrow & & \downarrow c & & \downarrow \cong \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{=} & \mathcal{A} & \xrightarrow{=} & \mathcal{A} \end{array}$$

sejam comutativos.

Portanto, as arestas componíveis $\langle g, f \rangle$ têm uma composição dada por $c(g, f)$ e cada objeto $b \in \mathcal{O}$ tem um morfismo identidade dado por $i(b) \in \mathcal{A}$.

Todo $\mathcal{O}$ -grafo G pode ser usado para ‘gerar’ uma categoria $\mathcal{C}$ com objetos em $\mathcal{O}$. Sejam $g_2 : A \rightarrow B$, $g_1 : B \rightarrow C$ dois morfismos componíveis em G . Podemos escrever a ‘palavra’ $g_2 g_1$ que representa a composição dos dois morfismos. Pode-se representar a palavra por

$$\partial_0 g_1 \xrightarrow{g_1} \partial_1 g_1 = \partial_0 g_2 \xrightarrow{g_2} \partial_1 g_2.$$

Seguindo a raciocínio, sejam g_i com $1 \leq i \leq n$ morfismos de G tais que $\partial_0 g_{i+1} = \partial_1 g_i$, temos uma ‘palavra’ $g_n \dots g_1$. Esta categoria será denotada por $\mathcal{C}(G)$ e denomina-se *categoria livre gerada pelos grafos G* .

Teorema A.8. *Seja $G = \{\mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{O}\}$ um pequeno grafo. Existe uma pequena categoria $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$ com $\mathcal{O}$ como conjunto de objetos e uma morfismo $P : G \rightarrow U\mathcal{C}$ de grafos de G para o grafo subjacente $U\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ com a seguinte propriedade. Dada qualquer categoria $\mathcal{B}$ e qualquer morfismo $D : G \rightarrow U\mathcal{B}$ de grafos, existe um único funtor $D' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ com $(UD') \circ P = D$, como no diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & G \\ \downarrow D' & & \searrow D \\ \mathcal{B} & & U\mathcal{B} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & P & \\ G & \xrightarrow{\quad} & U\mathcal{C} \\ & \searrow D & \downarrow UD' \\ & & U\mathcal{B} \end{array}$$

Em particular, se $\mathcal{B}$ tem $\mathcal{O}$ como um conjunto de objetos e D é um morfismo de $\mathcal{O}$ -grafos, então $D_{\mathcal{O}} = id_{\mathcal{O}}$.

Como já mencionamos, podemos representar esta categoria livre como ‘palavras’ $f_1 f_2 \dots f_n$, onde f_{i-1} e f_i são componíveis. Cabe ressaltar que a palavra vazia $\emptyset$ é a unidade para a concatenação e pode ser pensada como $\Lambda_{\mathcal{A}_0} : A \rightarrow A$. Podemos representar uma palavra da categoria livre pela concatenação de $(1, 1)$ -diagramas dada por:

$$A_0 \xrightarrow{f_0} A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} A_n.$$

A.8.1 Notação Dual de Penrose

Como vimos antes, um morfismo f de uma categoria é representado por $dom(f) \xrightarrow{f} im(f)$. A notação dual a esta foi introduzida por [Pen56] para podermos representar os morfismos por

$$\xrightarrow{dom(f)} f \xrightarrow{im(f)}.$$

Com esta notação, um caminho na categoria gráfica $Graf(\mathcal{C})$ seria representado por:

$$\xrightarrow{A_0} f_0 \xrightarrow{A_1} f_1 \xrightarrow{A_2} \dots \xrightarrow{A_n} f_n \xrightarrow{A_{n+1}}$$

Obs.: A.8.1. Na categoria $Graf(\mathcal{C})$ os seguintes diagramas são distintos. A representação à esquerda é orientado com dois vértices e o à direita trata-se de um grafo orientado de apenas um vértice.

$$\xrightarrow{A} f \xrightarrow{B} g \xrightarrow{C} \neq \xrightarrow{A} f \circ g \xrightarrow{C}$$

embora a composição na categoria original dos morfismos g, f seja igual ao morfismo $g \circ f$. Este diagramas são diferentes, porque seus grafos são distinto e a categoria livre considera só a estrutura dos grafos e não a estrutura algébrica da categoria original. Contornamos este problema tomando o quociente da assinatura Σ pelo conjunto dos morfismos que são idênticos na categoria. Para isto, definimos a equivalência

$$\rightarrow g_1 \rightarrow g_2 \rightarrow \dots \rightarrow g_n \rightarrow \sim \rightarrow g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_n \rightarrow.$$

Temos com resultado que os diagramas acima passam a serem equivalentes no quociente $\Sigma / \sim$.

Preliminares: Uma categoria $\mathcal{C}$ possui sua estrutura dada por: objetos, morfismos (em particular, identidades) e as composições destes morfismos. Uma categoria $\mathcal{C}$ com estrutura adicional possui, além da estrutura categórica composicional, uma estrutura a mais. Por exemplo, estruturas como o produto tensorial, trançamento, noção de dualidade, traço, estruturas aditivas nos morfismos, entre outras.

Denotaremos as visualizações por grafos dos tensores de uma categoria livre por $graf(\mathcal{C})$ e rotularemos os diagramas como segue:

$$\begin{aligned} \{\text{Objetos de } \mathcal{C}\} &\longleftrightarrow \{\text{Objetos de } \mathbf{graph}(\mathcal{C}) \text{ são representados como um rótulo em arestas} \\ &\quad \text{dos diagramas em } \mathbf{graph}(\mathcal{C}) \text{ que têm propriedades VR}\} \\ \{\text{Morfismos de } \mathcal{C}\} &\longleftrightarrow \{\text{Rótulos em vértices dos diagramas}\}. \end{aligned}$$

Ou seja, A composição de morfismos é representada como um grafo onde suas arestas e seus vértices são rotulados conforme afirmamos anteriormente.

$$\xrightarrow{A_0} f_0 \xrightarrow{A_1} f_1 \xrightarrow{A_2} \dots \xrightarrow{A_{n-1}} f_n \xrightarrow{A_n}$$

Esta palavra ou caminho anterior trata-se de um morfismo de $hom_{\mathbf{graph}(\mathcal{C})}(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_n)$, onde os elementos $\mathcal{A}_j$ são objetos em $\mathcal{C}$ e $f_j \in hom_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}_{j-1}, \mathcal{A}_j)$. A identidade de objetos $\mathcal{A}$ é representada por um diagrama em $\mathbf{graph}(\mathcal{C})$ em qualquer das formas equivalentes a seguir.

$$\xrightarrow{A_0} \neq \xrightarrow{A_0} Id_{A_0} \xrightarrow{A_0}.$$

Desta forma, levamos um elemento $f \in \text{hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ no diagramático $\xrightarrow{A} f \xrightarrow{B}$, que é o diagrama $A \rightarrow f \rightarrow B$ segundo a notação de Penrose.

Composição em $\text{graph}(\mathcal{C})$ é a colagem horizontal de diagramas componíveis que podemos entender como sendo dois diagramas onde o rótulo da saída de um é igual ao rótulo da entrada do outro. Depois de fazer está colagem, podemos fazer o redimensionamento deste diagrama e mergulhá-lo como antes.

$$\xrightarrow{A} f \xrightarrow{B} g \xrightarrow{C} \equiv (\xrightarrow{B} g \xrightarrow{C}) \circ (\xrightarrow{A} f \xrightarrow{B}).$$

Assim, a composição é interpretada como a colagem de diagramas em $\text{graph}(\mathcal{C})$. Temos que $\text{graph}(\mathcal{C})$ os seguintes diagramas

$$\xrightarrow{A} f \xrightarrow{B} g \xrightarrow{C} \neq \xrightarrow{A} g \circ_{\mathcal{C}} f \xrightarrow{C}, \quad \xrightarrow{A} \text{id}_A^{\mathcal{C}} \xrightarrow{A} \neq \xrightarrow{A}$$

em $\text{graph}(\mathcal{C})$ são distintos, pois são distintos como grafos.

Definiremos as seguintes relações de equivalência no conjunto $\text{graph}(\mathcal{C})$:

$$\xrightarrow{A} f \xrightarrow{B} g \xrightarrow{C} \sim \xrightarrow{A} g \circ_{\mathcal{C}} f \xrightarrow{C}, \quad \xrightarrow{A} \text{id}_A^{\mathcal{C}} \xrightarrow{A} \sim \xrightarrow{A}.$$

Estas duas relações juntas, para todos f, g componíveis na categoria $\mathcal{C}$, denotaremos por $\sim_R$. Além disso, denomina-se a parte a esquerda das equivalências de estrutura gráfica e a parte a direita das relações de estrutura simbólica.

$$\text{graph}(\mathcal{C})/\sim_{\mathcal{R}} \cong \mathcal{C}$$

Em geral, podemos considerar as versões gráficas e simbólicas como distintas ou identificá-las. Em geral, trabalharemos com a identificação acima. Para formalizar o conceito de categoria quociente, temos a seguinte proposição:

Proposição A.19. (vide capítulo 2, seção 8 [Mac98]) Para uma dada categoria $\mathcal{C}$, seja $\mathcal{R}$ uma função que associa a cada par de objetos a, b de $\mathcal{C}$ uma relação binária $\mathcal{R}_{a,b}$ no conjunto dos morfismos $\mathcal{C}(a, b)$. Então existe uma categoria quociente $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ e um funtor $Q = Q_{\mathcal{R}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}/\mathcal{R}$ tais que:

- (i) Se $f \mathcal{R}_{a,b} f' \in \mathcal{C}$, então $Qf = Qf'$;
- (ii) Se $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é qualquer funtor de $\mathcal{C}$ para qual $f \mathcal{R}_{a,b} f'$ implica $Hf = Hf'$ para todo f e f' , então existe um único funtor $H' : \mathcal{C}/\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{D}$ com $H' \circ Q_{\mathcal{R}} = H$. Mais ainda, o funtor $Q_{\mathcal{R}}$ é uma bijeção em objetos.

Assim consideramos a álgebra quociente $\mathcal{C}(G)/\mathcal{R}$, onde $\mathcal{R}$ é definida pelas igualdades a seguir:

$$(\xrightarrow{A} f \xrightarrow{B} g \xrightarrow{C}) \mathcal{R} (\xrightarrow{A} g \circ f \xrightarrow{C}) \quad (\xrightarrow{A} \text{id}_A \xrightarrow{A}) \mathcal{R} (\xrightarrow{A}).$$

Agora a justaposição em $\text{graf}(G)$ funciona como a composição de morfismos em $\mathcal{C}$. Em outras palavras, temos que $\xrightarrow{A_0} f_0 \xrightarrow{A_1} f_1 \xrightarrow{A_2} \dots \xrightarrow{A_n} f_n \xrightarrow{A_{n+1}} \simeq \xrightarrow{A_0} (f_1 \circ \dots \circ f_n) \xrightarrow{A_{n+1}}.$

A.9 Conceito de Categorias Monoidais

Neste trabalho, lidamos com objetos com uma estrutura tensorial. A generalização do tensor é a noção de categoria monoidal. Uma categoria monoidal (ou uma categoria tensorial) é uma categoria com um produto tensorial associativo e com unidade. Mais especificamente, podemos defini-la por:

Definição A.32. Uma **categoria monoidal** $\mathcal{C}$ é uma categoria com a adição das seguintes propriedades:

- (i) Um produto tensorial entre objetos $A, B \in \mathcal{C}$ denotado por $A \otimes B$;
- (ii) Um objeto especial em $\mathcal{C}$, denotado por $1_{\mathcal{C}}$ (Objeto unidade de $\mathcal{C}$);
- (iii) Um produto tensorial entre os morfismos $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow D$ definido por

$$f \otimes g : A \otimes B \rightarrow C \otimes D;$$

- (iv) Isomorfismos canônicos

$$\alpha : \otimes \circ (\otimes \times id_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\cong} \otimes \circ (id_{\mathcal{C}} \times \otimes), \quad \lambda : \otimes \circ (I \times id_{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\cong} id_{\mathcal{C}} \quad \text{e} \quad \rho : \otimes \circ (id_{\mathcal{C}} \times I) \xrightarrow{\cong} id_{\mathcal{C}}$$

onde I representa o funtor constante

$$\begin{array}{ccc} F : \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ A & \longmapsto & 1_{\mathcal{C}} \\ f & \longmapsto & id_I \end{array}$$

onde $f : A \rightarrow B$.

Estas estruturas satisfazem os seguintes axiomas:

- (i) $\otimes$ é um bifuntor de $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ em $\mathcal{C}$ que significa que

$$id_A \otimes id_B = id_{A \otimes B} \quad \text{e} \quad (k \otimes h) \circ (g \otimes f) = (k \circ g) \otimes (h \circ f);$$

- (ii) α , λ e ρ são isomorfismos naturais, i.e.,

$$\begin{aligned} (f \otimes (g \otimes h)) \circ \alpha_{A,B,C} &= \alpha_{A',B',C'} \circ ((f \otimes g) \otimes h), & f \circ \lambda_A &= \lambda_{A'} \circ (id_I \otimes f) & \text{e} \\ f \circ \rho_A &= \rho_{A'} \circ (f \otimes id_I); \end{aligned}$$

- (iii) Além disso, valem os dois axiomas da coerência abaixo, chamados o ‘axioma pentagonal’ e o ‘axioma triangular’:

$$\begin{array}{ccccc} ((A \otimes B) \otimes C) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C} \otimes id_D} & (A \otimes (B \otimes C)) \otimes D & \xrightarrow{\alpha_{A,B \otimes C,D}} & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \\ \downarrow \alpha_{A \otimes B,C,D} & & & & \downarrow id_A \otimes \alpha_{B,C,D} \\ (A \otimes B) \otimes (C \otimes D) & \xrightarrow{\alpha_{A,B,C \otimes D}} & & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (A \otimes 1_{\mathcal{C}}) \otimes B & \xrightarrow{\alpha_{A,1_{\mathcal{C}},B}} & A \otimes (1_{\mathcal{C}} \otimes B) \\
 \searrow \rho_A \otimes id_B & & \swarrow id_A \otimes \lambda_B \\
 & A \otimes B &
 \end{array}$$

Quando fazemos a identificação dos isomorfismos entre as categorias α , ρ e λ , ou seja, estes isomorfismos são considerados identidades. A categoria $\mathcal{C}$ é denominada **monoidal estrita**.

As categorias que trabalhamos nesta dissertação foram *estritificadas* e, portanto assumimos que, para todos objetos A , B e $C \in \mathcal{C}$, $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C = A \otimes B \otimes C$ e $A \otimes I = A = I \otimes A$.

Com isto em mente, uma categoria monoidal pode ser representada graficamente como segue:

Produto tensorial $id_{A \otimes B} = id_A \otimes id_B$	$ \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \xrightarrow{B} \\ \hline \text{(vazio)} \end{array} $
Unidade id_I :	
Morfismo $f : A_1 \otimes \dots \otimes A_n \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_m$	$ \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} & \xrightarrow{f} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} & & \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} \\ \begin{array}{c} n \quad m \end{array} & & \end{array} \end{array} \text{ ou } \xrightarrow{A_1 \otimes \dots \otimes A_n} f \xrightarrow{B_1 \otimes \dots \otimes B_m} $
Produto tensorial de morfismos $f \otimes g$:	$ \begin{array}{ccc} \xrightarrow{A} & f & \xrightarrow{B} \\ \xrightarrow{C} & g & \xrightarrow{D} \end{array} $

Note que, na terceira linha da tabela, colocamos apenas os índices do domínio $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$ nas arestas de entrada e índices do contradomínio $B_1 \otimes \dots \otimes B_m$ nas saída.

Coerência: ressaltamos que as propriedades das categorias, interpretadas graficamente, podem ser vistas como deformações dos diagramas. Por exemplo,

$$(id_C \otimes g) \circ (f \otimes id_B) = (f \otimes id_D) \circ (id_A \otimes g) = (f \otimes g).$$

Traduzindo para linguagem gráfica, isto se torna:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc} \xrightarrow{A} & f & \xrightarrow{B} \\ \xrightarrow{C} & g & \xrightarrow{D} \end{array} & = & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{A} & f & \xrightarrow{B} \\ \xrightarrow{C} & g & \xrightarrow{D} \end{array} = \begin{array}{ccc} \xrightarrow{A} & f & \xrightarrow{B} \\ \xrightarrow{C} & g & \xrightarrow{D} \end{array}
 \end{array}$$

Esta visualização acima mostra a relação entre propriedades algébricas e as deformações nos diagramas de vértice rígido.

Para formalizar a analogia existente entre a relação formulação algébrica versus linguagem gráfica, temos o seguinte teorema de coerência entre as linguagens gráfica e algébrica:

Teorema A.9.1 (Coerência da categoria monoidal ¹⁵). *Uma equação bem-formada entre morfismos, em uma linguagem de categoria monoidal, segue dos axiomas das categorias monoidais se e somente se esta equação se mantém sobre uma isotopia planar nos diagramas diagramas progressivos que a representa.*

¹⁵Vide [JS88].

Como sabemos, vale a propriedade A.17 e, portanto, não mudamos a ordem das entradas. A princípio numa categoria monoidal planar, não vale a seguinte relação

$$g \circ ((\rho_A \circ (id_A \otimes h) \circ \rho_A^{-1}) \otimes id_B) \circ f = g \circ ((\lambda_A \circ (h \otimes id_A) \circ \lambda^{-1}) \otimes id_B) \circ f,$$

onde $h : I \rightarrow I$. A seguir alguns resultados que não demonstraremos, mas que são auxiliares na compreensão da troca das categoria monoidais pelas categorias monoidais estritas (para mais detalhes leia [Mac98], [Sou02]).

Definição A.33. Um **funtor monoidal** entre categorias monoidais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, junto com os isomorfismos naturais $\phi^2 : FA \otimes FB \rightarrow F(A \otimes B)$ e $\phi^0 : I \rightarrow FI$ tal que os seguintes diagramas comutam

$$\begin{array}{ccccc} (FA \otimes FB) \otimes FC & \xrightarrow{\phi^2 \otimes id} & F(A \otimes B) \otimes FC & \xrightarrow{\phi^2} & F((A \otimes B) \otimes C) \\ \downarrow \alpha & & & & \downarrow F(\alpha) \\ FA \otimes (FB \otimes FC) & \xrightarrow{id \otimes \phi^2} & FA \otimes F(B \otimes C) & \xrightarrow{\phi^2} & F(A \otimes (B \otimes C)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} FA \otimes I & \xrightarrow{\rho} & FA \\ \downarrow id \otimes \phi^0 & & \downarrow F(\rho) \\ FA \otimes FI & \xrightarrow{\phi^2} & F(A \otimes I) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} I \otimes FA & \xrightarrow{\lambda} & FA \\ \downarrow \phi^0 \otimes id & & \downarrow F(\lambda) \\ FI \otimes FA & \xrightarrow{\phi} & F(I \otimes A) \end{array}$$

Por fim, estamos em condições de enunciar o resultado que queríamos. Este resultado pode ser visto com mais detalhes na seção XI.3 de [Mac98] e na tese [Sou02].

Teorema A.9. Qualquer categoria monoidal $\mathcal{C}$ é categoricamente equivalente a uma categoria estrita, via um funtor monoidal forte em ambas as direções.

Exemplo A.9.1. A seguir alguns exemplos de categorias monoidais:

1. **Set**, a categoria dos conjuntos com produto cartesiano, um elemento do conjunto¹⁶ serve com unidade para o produto cartesiano.
2. **R-Mod**, a categoria dos módulos sobre um anel comutativo R , é uma categoria monoidal com o produto tensorial $\otimes_R$ servindo como o produto monoidal e o anel R servindo como unidade para o produto.
3. $\mathbb{k}$ -**Vect**, a categoria dos espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{k}$, com o espaço vetorial unidimensional $\mathbb{k}$ serve como unidade.

¹⁶Ou seja, um conjunto unitário qualquer.

A.9.1 Funtorialidade e Naturalidade

O bifuntor $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ definido por:

$$\begin{aligned} \otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{C} \\ (A, B) &\longmapsto \otimes(A, B) = A \otimes B \\ (f, g) &\longmapsto \otimes(f, g) = f \otimes g \end{aligned}$$

tem as seguintes propriedades:

$$id_{\otimes(A, B)} = \otimes(id_A, id_B) \quad \Leftrightarrow \quad id_{A \otimes B} = id_A \otimes id_B$$

$$\otimes(f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1) = \otimes(f_2, g_2) \circ \otimes(f_1, g_1) \quad \Leftrightarrow \quad (f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1) = (f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1).$$

Graficamente:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} \xrightarrow{A} \\ \\ \xrightarrow{A} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{A_2} f_2 \xrightarrow{A_3} \\ \xrightarrow{A_1} f_1 \xrightarrow{A_2} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{A_1} f_1 \xrightarrow{A_2} f_2 \xrightarrow{A_3} \\ \xrightarrow{B_1} g_1 \xrightarrow{B_2} g_2 \xrightarrow{B_3} \end{array} & & \begin{array}{c} \xrightarrow{A_1} f_2 \circ f_1 \xrightarrow{A_3} \\ \xrightarrow{B_1} g_2 \circ g_1 \xrightarrow{B_3} \end{array} \\ = \xrightarrow{A \otimes B} & & & & = & & = \end{array}$$

Obs.: A.9.1. A relação $f \otimes g = (f \otimes Id) \circ (Id \otimes g) = (Id \otimes g) \circ (f \otimes Id)$ está bem representada por:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{f} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{g} \xrightarrow{\quad} \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \xrightarrow{f} & \\ \hline \xrightarrow{g} & \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \xrightarrow{f} & \\ \hline \xrightarrow{g} & \\ \hline \end{array}$$

Esta relação serve para aplicar um morfismo individualmente em uma perna e posteriormente em outra perna. Esta noção é ingênua, mas tem sua utilidade nas demonstrações gráficas.

Exemplo A.9.2 (Produto tensorial oposto). Seja $\otimes^{op} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ um bifuntor:

$$\begin{cases} (A, B) \mapsto \otimes^{op}(A, B) = A \otimes^{op} B \\ (f, g) \mapsto \otimes^{op}(f, g) = \otimes(g, f) = f \otimes^{op} g \end{cases}$$

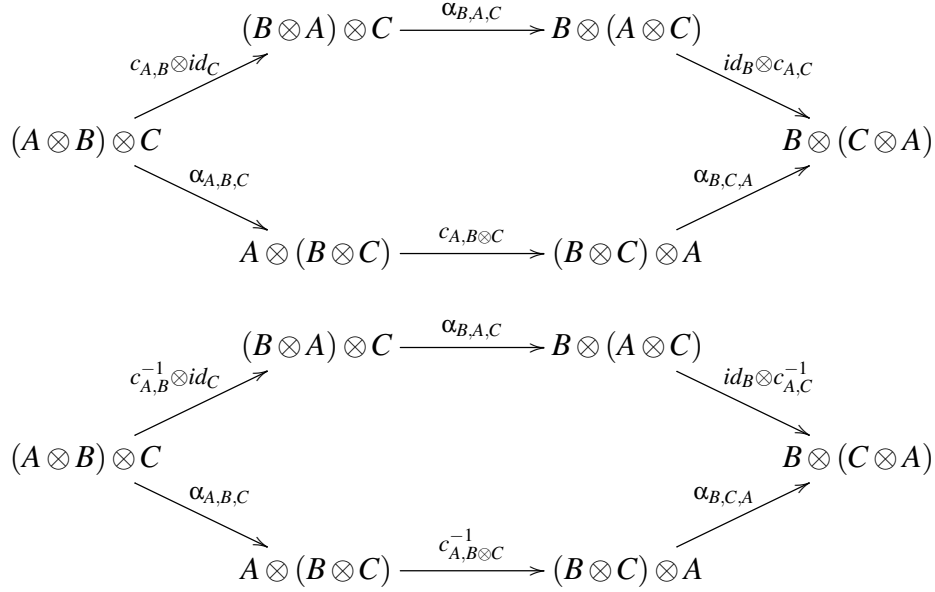
Temos que $A \otimes^{op} B = \otimes^{op}(A, B) = \otimes(B, A) = B \otimes A$ e $f \otimes^{op} g = \otimes^{op}(f, g) = \otimes(g, f) = \otimes(g, f) = g \otimes f$ definem $\otimes^{op}$.

A.10 Categorias Trançadas e Simétricas

Faremos o estudo da estrutura das categorias monoidais trançadas. Esta estrutura é, em essência, a estrutura monoidal na qual adicionamos os movimentos de Reidemester para podermos operar em cruzamentos nas entradas ou saídas simplificando os diagramas.

Definição A.34. Um **trançamento** em uma categoria monoidal é uma família de isomorfismos naturais $c_{A, B} : A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ e $c_{A, B}^{-1} : B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ tais que $c_{A, B} \circ c_{A, B}^{-1} = id_{A \otimes B}$, satisfazendo os

dois seguintes ‘axiomas hexagonais’:



As categorias dos objetos do tipo Hopf são categorias trançada simétricas, ou seja, o trançamento satisfaz a condição $c_{B,A} \circ c_{A,B} = id_{A \otimes B}$.

Definição A.35 (Categoria simétrica). Uma **categoria monoidal trançada simétrica** (ou simplesmente **categoria simétrica**) é uma categoria monoidal trançada onde a trança é sua própria inversa, i.e.:

$$c_{A,B} = c_{A,B}^{-1}$$

Vemos que a categoria simétrica é o quociente da categoria trançada. Deste modo, temos que

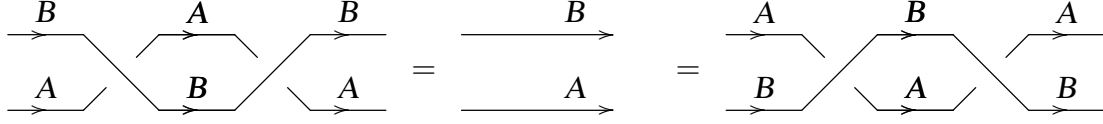
$$\text{Simétrica}(\mathcal{C}) = \frac{\text{Trançada}(\mathcal{C})}{\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \sim \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array}}$$

Exemplo A.10.1. Na categoria monoidal $(\mathbf{Set}, \times)$ dos conjuntos com produto cartesiano, o funtor trança é dado por $c(x,y) = (y,x)$, onde $(x,y) \in \mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$, e $c(f \times g) = g \times f$, onde $f \times g \in \text{hom}(\mathbf{Set}, \mathbf{Set}) \times \text{hom}(\mathbf{Set}, \mathbf{Set})$. Na categoria $(\mathbf{Vet}, \otimes)$ dos espaços vetoriais com produto tensorial, uma simetria é dada por $c(x \otimes y) = y \otimes x$, onde $x \otimes y \in \mathbf{Vet} \otimes \mathbf{Vet}$ e $c(T \otimes S) = S \otimes T$, onde $T \otimes S \in \text{hom}(\mathbf{Vet}, \mathbf{Vet})$.

linguagem gráfica: Podemos estender a linguagem gráfica de categoria monoidais incluindo os trançamentos:

$$c_{A,B} = \begin{array}{c} \text{B} \quad \text{A} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{A} \quad \text{B} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array} \quad c_{A,B}^{-1} = \begin{array}{c} \text{A} \quad \text{B} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{B} \quad \text{A} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \end{array}$$

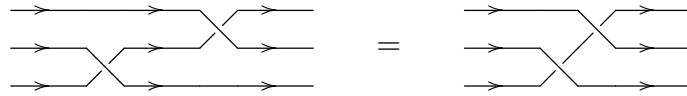
Obs.: A.10.1. A composição destes dois diagramas de emaranhamento representa um emaranhamento que pode ter seus cruzamentos desfeitos, ou seja:



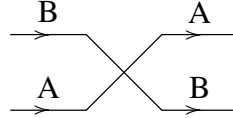
Observe que esta equivalência é exatamente o segundo movimento de Reidemeister e que o diagrama acima traduz a propriedade $c_{A,B} \circ c_{A,B}^{-1} = id_{A \otimes B}$ fielmente. O axioma **pentagonal** é dada por

$$(id_B \otimes c_{A,C}) \circ \alpha_{B,A,C} \circ (c_{A,B} \otimes id_C) = \alpha_{B,C,A} \circ (c_{B,C \otimes A}) \circ \alpha_{A,B,C}$$

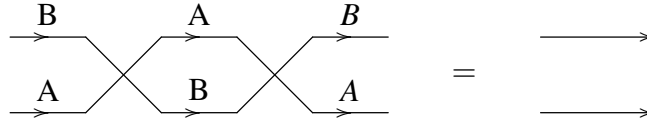
e pode ser representada por:



Linguagem gráfica: As categorias simetrias $c_{A,B}$ são representadas graficamente por um cruzamento ‘achatado’¹⁷.



e vale a seguinte relação:



Este último diagrama é a adaptação do diagrama do trançamento levando em consideração apenas que $c_{A,B} = c_{B,A}$. Lembramos que os diagramas do Capítulo 2 tem os cruzamentos achatados, ou seja, são da forma anterior.

O resultado a seguir mostra que diagramas de vértice rígido isomorfos também são equivalentes por isotopia.

Proposição A.20 (Vide [Sou02]). *Classe de isotopia de grafos (VR) progressivos* $\xrightarrow{\text{quociente}}$ *Classes de isomorfismo (respeitando ordem cíclica de incidência, de saídas e os rótulos) de grafos VR.*

A.10.1 Funtorialidade

Para $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, $\sigma_{A,B} : A \otimes B \rightarrow A \otimes^{op} B$ é um isomorfismo natural $\sigma : \otimes \rightarrow \otimes^{op}$, isto é, para todos $f : A \rightarrow C$ e $g : B \rightarrow D$ temos que

$$\begin{array}{ccc} \otimes(A, B) & \xrightarrow{\otimes(f, g)} & \otimes(C, D) \\ \downarrow \sigma_{A, B} & & \downarrow \sigma_{C, D} \\ \otimes^{op}(A, B) & \xrightarrow{\otimes^{op}(g, f)} & \otimes^{op}(C, D) \end{array}$$

¹⁷Vide diagramas ‘achatados’ Seção A.7.

é um diagrama comutativo.

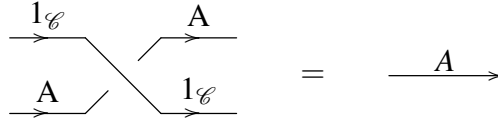
Graficamente:



Para o elemento neutro, o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} A \otimes 1_{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\sigma_{A,1_{\mathcal{C}}}} & 1_{\mathcal{C}} \otimes A \\ & \searrow \cong & \nearrow \cong \\ & A & \end{array}$$

Graficamente:



A.11 Categorias Com Dualidade

Limitar-nos-emos a discutir as categorias com dualidade que sejam estritamente necessárias para entender alguma de nossas estrutura. Mesmo sabendo que a noção de dualidade é muito mais rica do que apresentaremos nesta seção aos leitores.

Definição A.36 (Dualidade). Seja $\mathcal{C}$ uma categoria monoidal. Diz-se que $\mathbb{W}$ é um dual à esquerda de $\mathbb{V}$ se existem morfismos $coev : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ e $ev : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{k}$ tal que:

$$\mathbb{V} \xrightarrow{coev \otimes id_{\mathbb{V}}} (\mathbb{V} \otimes \mathbb{W}) \otimes \mathbb{V} \xrightarrow{id_{\mathbb{V}} \otimes ev} \mathbb{V}$$

Algumas vezes, a propriedade anterior é referida por propriedade do zig-zag.

Obs.: A.11.1. A definição de dual à direita é similar à definição de dual à esquerda, ou seja, basta trocar a ordem da definição das funções ev e $coev$. Além disso, quando o $\mathbb{W}$ é um ideal à esquerda e à direita denotamos $\mathbb{W} = \mathbb{V}^*$.

Em uma categoria simétrica, é consequência imediata que, se $\mathbb{V}^*$ é o dual de $\mathbb{V}$, então $\mathbb{V} = (\mathbb{V}^*)^*$.

Proposição A.11.1. $\mathbb{V} \in \mathbf{Vect}$ tem um dual se e somente se $\mathbb{V}$ tem dimensão finita.

Demonstração. ($\Rightarrow$): Neste caso, $\mathbb{V}^* = \text{hom}(\mathbb{V}, \mathbb{k})$ e podemos definir: $coev : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^*$, onde $coev(1) = \sum e_i \otimes e^*_i$ e $ev : \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{k}$ onde $ev(\sum v \otimes f) = \sum f(v)$. Vale que $(1 \otimes ev)(coev \otimes 1)(v) = v$ (propriedade do zig-zag).

($\Leftarrow$): Seja $\mathbb{W}$ o dual à direita de $\mathbb{V}$ e sejam $coev : \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$ definido por $coev(1) = \sum v_i \otimes w_i$ e $ev : \mathbb{V} \otimes \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{k}$ definido $ev(\sum v \otimes w) = \langle w, v \rangle$. Pelo zig-zag, temos: $v = \langle w_i, v \rangle v_i$. Isto significa que todo vetor v_i é uma combinação linear de v_i 's. Logo $\mathbb{V}$ é finitamente gerado.

Logo concluímos o resultado que queríamos demonstrar. $\square$

Um objeto $X \in \mathbb{C}$ é dito ser rígido à esquerda se existem um objeto Y e morfismos $ev : Y \otimes X \rightarrow \mathbb{k}$ e $coev : \mathbb{k} \rightarrow Y \otimes X$ tais que

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{coev \otimes id_X} (X \otimes Y) \otimes X \xrightarrow{\cong} X \otimes (Y \otimes X) \xrightarrow{id_X \otimes ev} X \\ Y &\xrightarrow{coev \otimes id_Y} (Y \otimes X) \otimes Y \xrightarrow{\cong} Y \otimes (X \otimes Y) \xrightarrow{id_Y \otimes ev} Y \end{aligned}$$

são identidades. Um objeto rígido à esquerda é definido de maneira similar.

A.11.1 Categorias com Traço

Na teoria das categorias, uma **categoria monoidal com traço** é uma categoria monoidal com estrutura extra.

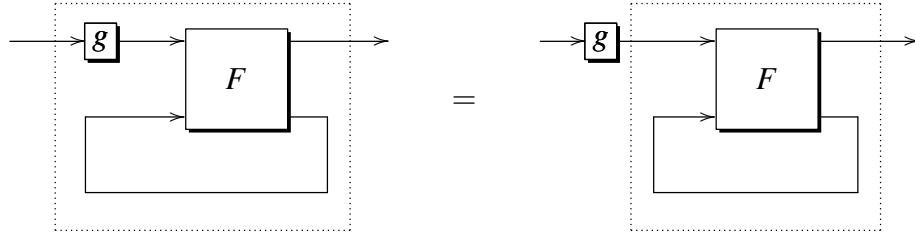
Uma **categoria monoidal simétrica com traço** é uma categoria monoidal simétrica junto com uma família de funções

$$Tr_{X,Y}^U : \text{hom}(X \otimes U, Y \otimes U) \rightarrow \text{hom}(X, Y)$$

chamadas um traço, satisfazendo as seguintes condições:

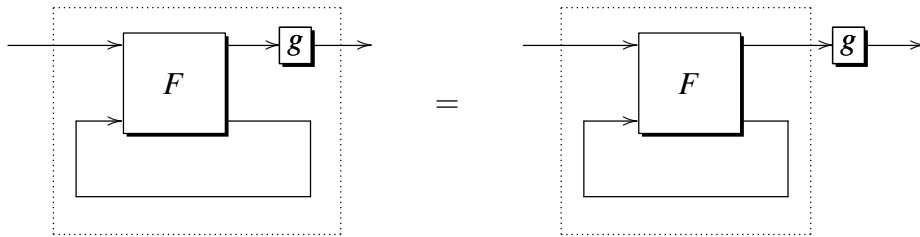
- Naturalidade em X : para todo $f : X \otimes U \rightarrow Y \otimes U$ e $g : X' \rightarrow X$,

$$Tr_{X,Y}^U(f) \circ g = Tr_{X',Y}^U(f \circ (g \otimes id_U));$$



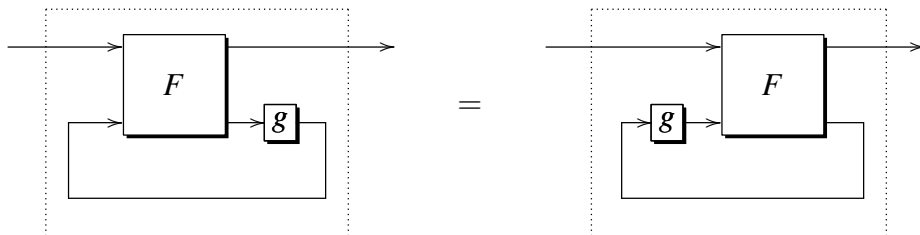
- Naturalidade em Y : para todo $f : X \otimes U \rightarrow Y \otimes U$ e $g : Y \rightarrow Y'$,

$$g \circ Tr_{X,Y}^U(f) = Tr_{X,Y'}^U((g \otimes id_U) \circ f);$$



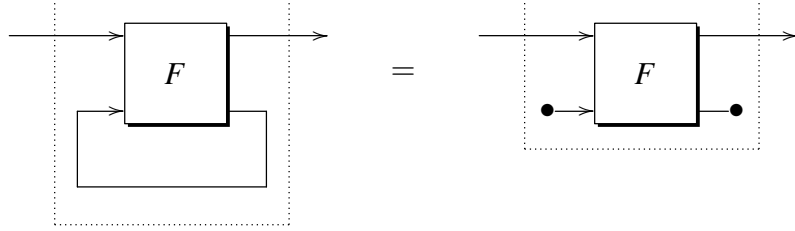
- Dinaturalidade em U : para todo $f : X \otimes U \rightarrow Y \otimes U'$ e $g : U' \rightarrow U$

$$Tr_{X,Y}^U((id_Y \otimes g) \circ f) = Tr_{X,Y'}^{U'}(f \circ (id_X \otimes g));$$



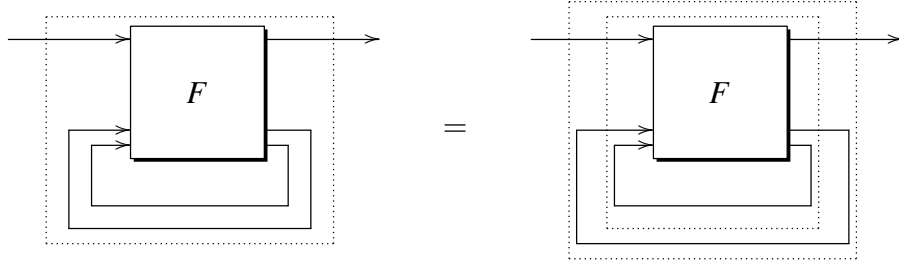
- Eliminação de I : para todo $f : X \otimes I \rightarrow Y \otimes I$,

$$Tr_{X,Y}^I(f) = f;$$



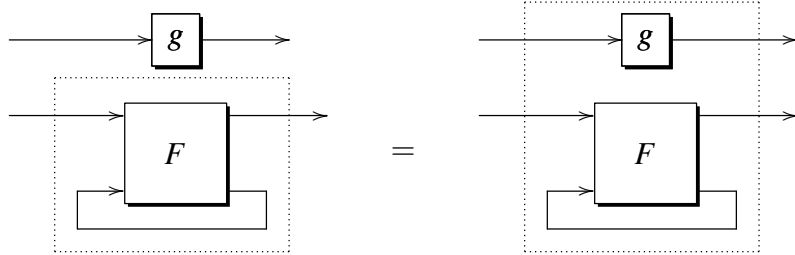
- Eliminação II : para todo $f : X \otimes U \otimes V \rightarrow Y \otimes U \otimes V$

$$Tr_{X,Y}^{U \otimes V}(f) = Tr_{X,Y}^U(Tr_{X \otimes U, Y \otimes U}^U(f));$$



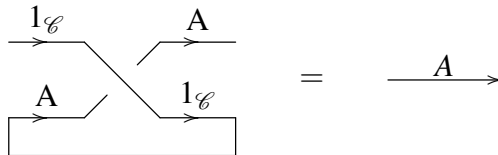
- Superposição: para todo $f : X \otimes U \rightarrow Y \otimes U$ e $g : W \rightarrow Z$

$$g \otimes Tr_{X,Y}^U(f) = Tr_{W \otimes X, Z \otimes Y}^U(g \otimes f);$$



- Yanking (tradução literal: arrancando):

$$Tr_{U,U}^U(c_{U,U}) = id_U;$$



(onde $c_{U,U}$ é a simetria da categoria monoidal simétrica).

A.11.2 Categorias ‘Ribbon’

Em matemática, uma categoria ‘ribbon’ é um tipo particular das categorias monoidais trançadas.

Definição A.37. Uma categoria monoidal trançada é dita ser uma categoria ‘ribbon’ se a categoria for rígida e tiver uma família de ‘torções’ (tradução literal de ‘twist’). As aplicações ‘twists’ são tais que

$$C \in \mathcal{C}, \quad \theta_C : C \rightarrow C$$

tais que

$$\theta_{C_1 \otimes C_2} = c_{C_2, C_1} c_{C_1, C_2} (\theta_{C_1} \otimes \theta_{C_2}).$$

Exemplo A.11.1. A seguir dois exemplos de categorias ‘ribbon’:

- (1) Um exemplo de categoria de **módulos projetivos** sobre um **anel comutativo**. Nesta categoria, a estrutura monoidal é o produto tensorial, o objeto dual é o dual no senso de álgebra linear e os ‘twists’, neste caso, são as aplicações identidade.
- (2) Um exemplo mais sofisticado de uma categoria ribbon são as representações de um **grupo quântico** de dimensão finita.

