Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Zaqueu Alves Ramos**

# Potências simbólicas de ideais perfeitos de codimensão 2 com apresentação linear

Recife, 2012.

**Zaqueu Alves Ramos**

# Potências simbólicas de ideais perfeitos de codimensão 2 com apresentação linear

*Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.*

**Orientador: Aron Simis**

Recife, 2012.

Catalogação na fonte
Bibliotecário Jonas Lucas Vieira, CRB 4-1204

Ramos, Zaqueu Alves.
Potências simbólicas de ideais perfeitos de codimensão 2 com apresentação linear/ Zaqueu Alves Ramos – Recife: O Autor, 2012.
viii, 48 p.: tab.

Orientador: Aron Simis.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Álgebra comutativa . 2. Ideais (Álgebra). 3. Geometria algébrica. 4. Matrizes. I. Simis, Aron (orientador). II. Título.

510 (22. ed.) MEI 2012

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ___________________________________________

Aron Simis, *UFPE*
**Orientador**

___________________________________________

Seyed Hamid Hassanzadeh Hafshejani, *UFPE*

___________________________________________

Daniel Levcovitz, *USP*

___________________________________________

Victor Hugo Jorge Pérez, *USP*

___________________________________________

Roberto Callejas Bedregal, *UFPB*

**POTÊNCIAS SIMBÓLICAS DE IDEAIS PERFEITOS DE CODIMENSÃO 2 COM APRESENTAÇÃO LINEAR**

*Por*

Zaqueu Alves Ramos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
*Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410*
RECIFE – BRASIL
Julho – 2012

## AGRADECIMENTOS

• Ao meu orientador Aron Simis, que com muita sabedoria, paciência e responsabilidade me ensinou várias lições, não só do ponto de vista matemático mas também profissional.

• À meus pais, Luiz Ramos e Maria Alves, e meus irmãos Aparecida, Jafet, José, Margarida, Irene, Raquel, Helena e Dimas pelo afeto incondicional e por não medirem esforços para ajudar-me a realizar os meus objetivos.

• À minha namorada Adriana que acompanhara de perto os vários dramas desse período de forma companheira e dedicada.

• Ao casal de amigos Bruno de Andrade e Bruna Sandes.

• À todos as pessoas que formam o DMA-UFS e em especial a André Vinícius, Paulo Rabelo, Anderson Valença e Kalasas Vasconcelos.

• Aos amigos do DMAT-UFPE: Adecarlos, Renata, Marcelo Fernandes, Joilson, Alejandro, Allyson, Giovana, André Ventura, Fábio, Clessius, Filipe Dantas, José Francisco, Abiel, Luis Henrique, Tiago Duque, Karla, Ives, Isabelle, Hugo, Tarciana, Maral e Hamid.

## Resumo

O tema desse trabalho são as potências simbólicas de ideais perfeitos de codimensão 2 com apresentação linear. Estudamos mais profundamente os casos onde os elementos são formas lineares gerais e onde a matriz de sizigias é uma variante da matriz de Hankel. A principal contribuição na abordagem presente é o uso da teoria birracional subjacente a alguns desses ideais para mostrar uma profunda relação entre os geradores das potências simbólicas e os fatores de inversão decorrentes da aplicação inversa.

**Palavras-chave:** Potência simbólica, ideais perfeitos, matriz linear geral, birracionalidade.

## Abstract

The theme of this work is symbolic powers of codimension 2 perfect ideals which are linearly presented. One studies more closely the case where the entries are general linear forms and where the syzygy matrix is a variation of the Hankel matrix. The main contribution of the present approach is to use the underlying birational theory of some of these ideals and to uncover a deep interlacing between generators of their symbolic powers and the so-called inversion factors stemming from the inverse map.



**Key-words:** Symbolic Powers, perfects ideals, general linear matrix, birationality.

# Lista de símbolos

| **Símbolo** | **Descrição** |
|---|---|
| $\mathrm{alt}(-)$ | altura de um ideal |
| $\mathrm{prof}(-)$ | profundidade de um módulo |
| $\mu(-)$ | número mínimo de geradores de um módulo |
| $\ell(-)$ | spread analítico de um ideal |
| $\mathrm{dh}(-)$ | dimensão homológica de um módulo |
| $\mathrm{adj}(-)$ | matriz adjunta |
| $\mathrm{Ass}(-)$ | conjunto dos primos associados de um módulo |
| $\mathrm{Spec}(-)$ | conjunto dos ideais primos de um anel |
| $\mathrm{rank}(-)$ | posto de uma matriz |
| $\mathrm{gr}_I(R)$ | anel graduado associado de um ideal $I \subset R$ |
| $\mathcal{R}_R(I)$ | álgebra de Rees de um ideal $I \subset R$ |
| $\mathcal{S}_R(I)$ | álgebra simétrica de um ideal $I \subset R$ |

# Sumário

# Introdução

A noção de $\ell$-ésima potência simbólica de um ideal $I$, denotada por $I^{(\ell)}$, remonta a W. Krull, que a usou na prova do célebre teorema do ideal principal, este um marco crucial na curta história da álgebra comutativa. Mais adiante, O. Zariski, M. Nagata, D. Rees e outros mostraram como esta noção puramente algébrica tem importante significado em geometria algébrica.

Em diversos momentos da álgebra comutativa esta noção ressurge com interpretações surpreendentes. Por exemplo, no início da década de 1970, M. Hochster ([21]) chamou atenção para o fato de que a igualdade das potências simbólicas $I^{(\ell)}$ e ordinárias $I^{\ell}$ de um ideal $I$, codificam propriedades importantes como a normalidade da álgebra de Rees e a integralidade do anel graduado associado de $I$. Uma década depois, Cowsik ([6]) mostrou uma curiosa relação entre potências simbólicas e interseções completas conjuntistas ("set-theoretically complete intersections"). Em contraste à algebra de Rees ordinária $\mathcal{R}_R(I) = \sum_{r\geq 0} I^r t^r$ (i.e., a $R$-álgebra que define o blow-up ao longo do sub-esquema correspondente ao ideal $I$ [15, §5.2]), que é finitamente gerada sobre $R$ por contrução, uma questão básica da teoria é saber sobre a finitude da geração da álgebra de Rees oriunda da filtração simbólica $\mathcal{R}_R^{(I)}$. Em geral ela não é finitamente gerada ([27], [28] para os primeiros exemplos deste fenômeno). O que Cowsik demonstrou é que para um ideal $I$ em um anel Noetheriano local $(R, \mathfrak{m})$, tal que $\operatorname{alt}(I) = \dim R - 1$, a finitude da geração desta álgebra é condição suficiente para $I$ ser interseção completa conjuntista. Consequentemente, esse resultado acabou desencadeando uma vasta bibliografia referente a exemplos e contra-exemplos da finitude dessa álgebra no contexto das curvas monômiais em $\mathbb{A}^3$.

Recentemente, uma vertente da teoria que tem recebido considerável atenção refere-se a comparação entre as topologias vindas das filtrações simbólica e $I$-ádica ([10],[34],[22]). De maneira resumida, o problema nesse caso é decidir o quão pequeno podemos escolher quocientes $m/n \geq 1$, com $m, n \in \mathbb{N}$, de modo a termos $I^{(m)} \subset I^n$. Esse problema é tangente a vários outros atuais, entre eles uma questão nascida no âmbito da teoria dos números sobre a existência de evoluções. A conexão nesse caso se dá através de um resultado de D. Eisenbud e B. Mazur [14] em que eles caracterizaram a existência de tais evoluções em termos de inclusões envolvendo o quadrado simbólico de um ideal.

Uma parte substancial da literatura sobre o comportamento das potências simbólicas concerne ao caso em que o ideal é perfeito de codimensão 2 (ver, por exemplo, [23], [24], [37, 8.2]). Neste trabalho nossa atenção é voltada para as potências simbólicas de uma classe bem especial de tais ideais. Mais especificamente, dada uma matriz $\mathcal{L}$ de ordem $m \times (m-1)$, cujos elementos são formas lineares em um anel de polinômios $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ sobre um corpo $k$, estamos interessados no ideal gerado pelos menores de ordem $m-1$ da matriz $\mathcal{L}$. Consideraremos principalmente matrizes cujos elementos são formas lineares gerais de $R$, as quais chamaremos, de maneira imprecisa, de matrizes *lineares gerais* – por exemplo, uma matriz cujos elementos constituem um conjunto de combinações $k$-lineares aleatórias das variáveis $X_1, \ldots, X_n$.

Uma dificuldade no estudo das matrizes lineares gerais tem a ver com a ação do grupo $\mathrm{Gl}(m,k) \times \mathrm{Gl}(n,k) \times \mathrm{Gl}(m-1,k)$ sobre o conjunto de todas as matrizes lineares sobre $k[X_1, \ldots, X_n]$ de ordem $m \times (m-1)$. Se $n >> m$, a noção de linear geral é estável por essa ação, ou seja, a órbita de uma tal matriz conterá somente matrizes lineares gerais. Contudo, se não é este o caso, a órbita de uma matriz linear geral não é bem entendida. Essa confusão na órbita é responsável por uma série de dificuldades no estudo dos ideais gerados pelos menores dessas matrizes. Por outro lado, tais matrizes apresentam uma maleabilidade ausente em matrizes lineares – tipicamente, matrizes cujos elementos são variáveis esparçamente distribuidas entre vários elementos nulos.

Passamos agora a descrever o conteúdo de cada capítulo dessa tese.

No Capítulo 1 revemos a terminologia e alguns resultados sobre as potências simbólicas, as equações de definição da álgebra de Rees e as aplicações birracionais. O objetivo principal nessa parte é familiarizar o leitor com as noções algébricas que sucedem o resto do texto e evitar a necessidade de recorrer às referências de maneira frequente. Obviamente, fazemos essa revisão dando enfoque aos ideais perfeitos de codimensão 2 com apresentação linear, visando com isto um preparatório para o tipo de abordagem que desejamos explorar. Como ficará claro, veremos que o catálogo de informações algébricas sobre tais ideais é bastante significativo. Nesse trecho, também apontamos, através do Lema 1.3.1, como a teoria birracional entra em cena para determinar geradores das potências simbólicas.

No Capítulo 2 mostramos através do Teorema 2.1.1 e da Proposição 2.1.2, a riqueza estrutural do ideal $I \subset R = k[X_1, \ldots, X_n]$ gerado pelos menores máximos de uma matriz $m \times (m-1)$ linear geral. Entre os resultados obtidos, provamos que o anel $R/I$ é reduzido para $n \geq 3$ e é um domínio normal se $n \geq 4$; também estabelecemos as alturas dos ideais de Fitting de $I$. Essa última informação é central, permitindo deduzir as equações da álgebra de Rees de $I$. O conhecimento dessas, por outro lado, leva-nos ao resultado de que se $m \geq n$, os menores máximos definem uma aplicação birracional sobre a imagem (Proposição 2.2.1). Outrossim, provamos que, no intervalo possível (isto é, $m \leq n$) o ideal $I$ é de tipo linear e é normalmente livre de torção se e só se $m < n$.

Esta parte prepara para o estudo das potências simbólicas de $I$, que é levado a cabo em seguida. O fato de que para as potências ordinárias de $I$, neste contexto, a saturação é pura (unmixed), permite obter resultados fortes, como por exemplo, o de boas estimativas para a dimensão homológica dos módulos conormais de $I$ de ordem $r \leq n-3$. O comportamento das potências simbólicas de $I$ depende fortemente da relação entre $m$ e $n$. Os dois casos sobre os quais nos debruçamos neste trabalho, são $m = n$ e $m = n+1$. No primeiro, os resultados são bastante completos, incluindo a estrutura da álgebra simbólica de $I$ (Teorema 2.2.2). Provamos, em particular, que os geradores em grau $\geq 2$ desta última se identificam com fatores de inversão da inversa do mapa de Cremona definido por $I$ – na verdade, um único tal fator.

O caso seguinte, em que $m = n+1$, é vastamente mais complicado. Ainda assim, os geradores genuínos em grau $\geq 2$ também sãos fatores de inversão; mais precisamente, geram o $R$-módulo $I^{(n-1)}/I^{n-1}$. A maneira que demonstramos esse fato também tem uma característica bastante peculiar, pois passa por um processo duplo de "dualização". Consequentemente, essa natureza birracional dos fatores de inversão produziram um outro fator de inversão, o qual, unido com os primeiros e adjuntando-os à álgebra de Rees conjecturamos ser toda a álgebra de Rees Simbólica. Realmente, todas as evidências computacionais e as equações do ideal de apresentação dessa $R$-álgebra que conhecemos corroboram esta conjectura.

Para o caso em que $m \geq n+2$ o comportamento é extremamente caótico, o que torna razoável questionarmos quando a álgebra de Rees simbólica é finitamente gerada.

Além de proporcionar um ambiente favorável à constatação da birracionalidade, outro papel importante das alturas dos Fittings de $I$ é a possibilidade de pormos em mãos propriedades homológicas das potências $I^r$ para $1 \leq r \leq n-1$. Por exemplo, deduzimos que as partes homogêneas do $\mathcal{M}$-complexo de aproximação correspondentes a valores de $r$ nesse intervalo são acíclicos, e a custa disso, conluímos estimativas para a dimensão homológica dos módulos conormais $I^{r-1}/I^r$ de ordem $r$. Em particular, determinamos em qualquer situação o conjunto de todos os primos associados do $R$-módulo $R/I^r$ qualquer que seja o valor $r \geq 0$.

Finalmente, no Capítulo 3 adequamos os resultados dos capítulos anteriores para certos modelos de matrizes lineares admitindo alguma lei de formação definida. Os modelos apresentados são variantes da matriz de Hankel, tais como a matriz sub-Hankel estudada em [7] e a matriz que chamamos *quase-Hankel*, que é um misto de uma matriz de Hankel com parte linear geral. O interesse de tais modelos, além de constituirem por se classes notáveis, é que têm complexidade computacional menor, seja pela sua relativa esparcidade, seja pela regularidade na sua lei de formação.

# Capítulo 1

# Terminologia

Neste capítulo apresentaremos a terminologia básica referente às potências simbólicas e às aplicações birracionais. Também enunciaremos alguns resultados que serão centrais para estabelecer a conexão entre estas duas noções no contexto dos ideais que desejamos tratar.

## 1.1 Generalidades sobre as potências simbólicas

Sejam $I$ um ideal em um anel Noetheriano $R$, $S$ o complemento em $R$ da união de todos os primos associados do $R$-módulo $R/I$ e $r \geq 0$ um inteiro.

**Definição 1.1.1.** A *r-ésima potência simbólica* de $I$, denotada por $I^{(r)}$, é o ideal $I^{(r)} = S^{-1}I^r \cap R$.

A razão de considerar o conjunto multiplicativo $S$ é que, desta maneira, tem-se trivialmente $I^{(1)} = I$, sem hipótese adicional sobre a natureza do ideal $I$. Contudo, neste trabalho, tipicamente $I$ será um ideal puro ou, pelo menos, sem componentes primárias imersas.

Para ideais em anéis de polinômios, podemos contar com a seguinte caracterização diferencial de Zariski–Nagata, a qual, além de prestar-se útil à interpretações geométricas, faz-se importante à questões de caráter computacional:

**Teorema 1.1.2.** *Sejam $k$ um corpo de característica zero e $I \subset k[X_1, \ldots, X_n]$ um ideal radical. Então*

$$I^{(r)} = \left\{ f \in R \mid \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial \mathbf{X}^\alpha} \in I;\ \alpha \in \mathbb{N}^n \ e\ |\alpha| \leq r - 1 \right\}.$$

Em particular, quando $k$ é um corpo de característica zero algebricamente fechado, o teorema acima nos diz que os elementos de $I^{(r)}$ são os polinômios que se anulam em ordem $\geq r$ em cada ponto da variedade $V(I)$.

**Observação 1.1.3.** Apesar de não fazermos uso dessa caracterização nas demonstrações dos resultados dessa tese, vale mencionar que os exemplos que nos serviram de evidência foram calculados por um método de A. Simis que baseia-se nesse teorema (ver [30, Proposition 1.3]). Tal método possui uma implementação em *Macaulay* escrita por D. Eisenbud e outra para *Macaulay* 2 apresentada por C. N. Bahiano em [3].

Notamos facilmente da definição de potência simbólica que, para cada $r > 0$, $I^r \subset I^{(r)} \subset I$ e $(I^{(r)} \cap I^{r-1})/I^r$ é a $R/I$-torção do módulo conormal $I^{r-1}/I^r$ de ordem $r$. Um problema importante em álgebra comutativa e geometria algébrica é a torção do anel graduado associado ("cone normal" dos geômetras) $\mathrm{gr}_I(R) = \bigoplus_{r\geq 0} I^r/I^{r+1}$ do ideal $I$. Sendo uma álgebra graduada standard sobre o anel $R/I$, sua $R/I$-torção é o ideal homogêneo

$$\bigoplus_{r\geq 0}(I^{(r)} \cap I^{r-1})/I^r.$$

Pode-se ver que, a torção é nula se e só se $I^{(r)} = I^r$ para todo $r \geq 1$. Entretanto, esta informação global é, na melhor das hipóteses, inútil. Para classes importantes de ideais, o que se busca é algum tipo de comportamento assintótico para a igualdade destas potências ou, o que é mais interessante, "inf-assintótico", no sentido de que a igualdade se dá até uma certa ordem e, a partir daí se desorganiza fundamentalmente.

**Definição 1.1.4.** Um ideal $I \subset R$ é *normalmente livre de torção* se $I^{(r)} = I^r$ qualquer que seja o inteiro $r \geq 0$.

Assim como ocorre com as potências usuais, a família $\left\{I^{(r)}\right\}_{r\geq 0}$ tem estrutura de $R$-filtração multiplicativa – isto é, esta família satisfaz as seguintes condições: (i) para $r \geq s$, $I^{(r)} \subset I^{(s)}$; e (ii) para todos $r, s \geq 0$, $I^{(r)}I^{(s)} \subset I^{(s+r)}$. Portanto, podemos definir a seguinte álgebra graduada:

$$\mathcal{R}_R^{(I)} = \bigoplus_{r\geq 0} I^{(r)}t^r$$

a qual chamamos de *álgebra de Rees simbólica* de $I$.

Como já mencionado na introdução, esta álgebra não é, em geral, finitamente gerada. Contudo, existem classes centrais de ideais para os quais a álgebra de Rees simbólica é Noetheriana (por exemplo, ideais gerados por monômios livres de quadrados). Uma filosofia subjacente a esta tese é que os ideais em um anel de polinômios sobre um corpo, gerados por formas do mesmo grau, admitem comportamento simbólico mais flexível (em particular, este parece ser o caso dos ideais que definem os chamados mapas birracionais da geometria algébrica).

Uma estratégia para abordar a finitude da geração de $\mathcal{R}_R^{(I)}$ é avaliar as suas seguintes subálgebras, dispostas abaixo em cadeia ascendente:

$$\mathcal{R}_R(I) = R[It] \subset R[It, I^{(2)}t^2] \subset \ldots \subset R[It, I^{(2)}t^2, \ldots, I^{(r)}t^r] \subset \ldots \subset \mathcal{R}_R^{(I)}$$

Note-se que os elementos de $I^{(s)}$, $1 \leq s \leq r$, que colaboram efetivamente para a geração de $R[It, I^{(2)}t^2, \ldots, I^{(r)}t^r]$ são aqueles pertencentes a

$$I^{(s)} \setminus \sum_{1 \leq j \leq s-1} I^{(s-j)} \cdot I^{(j)}.$$

Tais elementos serão cognominados geradores *genuínos* (ver [3]).

Para ver uma situação em que esta estratégia se faz presente e para discussão futura, consideramos a seguinte definição:

**Definição 1.1.5.** Sejam um ideal $I$ em um dominio Noetheriano $R$ e $K$ o corpo de frações de $R$. O *ideal transform* de $I$, denotado por $T_R(I)$, é

$$T_R(I) = \{x \in K \mid xI^r \in R \text{ para algum inteiro positivo } r\}$$

Obviamente, $T_R(I)$ é um subanel de $K$.

Uma observação elementar da teoria dos *ideals transforms* é

**Proposição 1.1.6.** ([37, Proposition 7.1.4]) *Sejam $R$ um domínio Noetheriano e $I$ um ideal. Seja $T$ o ideal transform de $I$ e $C$ um anel Noetheriano tal que $R \subset C \subset T$. Se* $\operatorname{prof}(IC) \geq 2$ *então $C = T$.*

À luz dessa proposição temos

**Proposição 1.1.7.** *Seja $R = k[\mathbf{X}] = k[X_1, \ldots, x_n]$ anel de polinômios sobre um corpo $k$ com sua graduação usual e $I \subset R$ um ideal radical. Suponhamos que:*

(i) *Para cada $\ell \geq 0$ tal que $I^{(\ell)}/I^\ell \neq 0$,* $\operatorname{Ass}(I^{(\ell)}/I^\ell) = \{(\mathbf{X})\}$.

(ii) *Para algum* $s \geq 1$, $\text{prof}((\mathbf{X})R[It, I^{(2)}t^2, \ldots, I^{(s)}t^s]) \geq 2$.

*Então,* $\mathcal{R}_R^{(I)} = R[It, I^{(2)}t^2, \ldots, I^{(s)}t^s]$.

**Prova.** A condição (i) implica que para cada $y \in \mathcal{R}_R^{(I)}$, existe natural $r$ tal que $y(\mathbf{X})^r \subset \mathcal{R}(I)$. Logo, $\mathcal{R}_R^{(I)}$ está contido no *ideal transform* de $(\mathbf{X})\mathcal{R}(I)$ com respeito ao anel $\mathcal{R}(I)$. Como $\mathcal{R}(I) \subset R[It, I^{(2)}t^2, \ldots, I^{(s)}t^s] \subset \mathcal{R}_R^{(I)}$ segue de (ii) juntamente com 1.1.7 o resultado desejado. □

## 1.2 Equações de definição da álgebra de Rees

Seja $R$ um anel Noetheriano e $I \subset R$ um ideal. Na seção anterior mencionamos alguns exemplos de $R$-álgebras graduadas relacionadas ao par $(R, I)$. Outro exemplo, é a *álgebra simétrica* do ideal $I$, denotada por $\mathcal{S}_R(I) := \mathcal{S}(I)$ e definida pela igualdade

$$\mathcal{S}(I) = \bigoplus_{r \geq 0} \mathcal{S}_r(I),$$

onde $\mathcal{S}_r(I)$ é a $r$-ésima potência simétrica de $I$.

Tem-se naturalmente um homomorfismo sobrejetivo de $R$-álgebras $\mathbb{N}$-graduadas $\alpha : \mathcal{S}(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}_R(I)$. Dizemos que $I$ é ideal de *tipo linear* se $\alpha$ é um homomorfismo injetivo.

Notemos que se $I = (f_1, \ldots, f_m)$, então $\mathcal{R}(I) = R[f_1t, \ldots, f_mt]$ é imagem homomorfa do anel de polinômios $R[Y_1, \ldots, Y_m]$ através do homomorfismo $\pi$ de $R$-álgebras tal que $\pi : Y_i \mapsto f_it$. Denotemos o núcleo de $\pi$ por $\mathcal{J}$. Os geradores de $\mathcal{J}$ são chamados de *equações de definição* da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$.

Como $\pi$ é um homomorfismo graduado, as equações de definição de $\mathcal{R}(I)$ são polinômios homogêneos $F(Y_1, \ldots, Y_n) \in R[Y_1, \ldots, Y_n]$ tais que $F(f_1t, \ldots, f_nt) = 0$. Assim, uma maneira de obter alguns geradores homogêneos de $\mathcal{J}$ é através de uma apresentação de $I$. Precisamente, se

$$R^p \xrightarrow{\varphi} R^m \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

é uma apresentação livre de $I$ então os elementos da matriz $\mathbf{Y} \cdot \varphi$ geram um ideal $\mathcal{J}_1$ de $R[Y_1, \ldots, Y_m]$ contido em $\mathcal{J}$. É fato que, $\mathcal{J}_1$ é o subideal de $\mathcal{J}$ gerado por todos os polinômios lineares nas variáveis $\mathbf{Y}$ e que ele também é o ideal de definição da álgebra simétrica $\mathcal{S}(I)$. Portanto, ideais de tipo linear são os mais simples em termos das equações de definição da álgebra de Rees.

Uma condição necessaria para um ideal $I$ ser de tipo linear é a *condição $G_\infty$ de Artin-Nagata* (também chamada condição $(F_1)$), a qual enuncia que o número mínimo de geradores de $I$ localmente nos primos $P \in \operatorname{Spec}(R)$ é no máximo a codimensão de $P$. Essa condição é equivalente a uma outra que expressa-se em termos de uma apresentação livre

$$R^p \xrightarrow{\varphi} R^m \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

de $I$, precisamente:

$$\operatorname{alt}(I_t(\varphi)) \geq \operatorname{rank}(\varphi) - t + 2, \quad \text{para} \quad 1 \leq t \leq \operatorname{rank}(\varphi), \tag{1.1}$$

onde $I_t(\varphi)$ denota o ideal gerado pelos menores de ordem $t$ de uma matriz representante de $\varphi$ (ver, e.g., [37, §1.3]).

**Observação 1.2.1.** Para cada inteiro $s$ temos a seguinte variante da condição $G_\infty$: um ideal $I \subset R$ satisfaz a condição $G_s$ se

$$\mu(I_P) \leq \operatorname{alt}(P)$$

para cada $P \in \operatorname{Spec} R$ tal que $\operatorname{alt}(P) \leq s - 1$.

A pergunta natural é quando a condição $G_\infty$ é suficiente para garantir que um ideal $I$ seja de tipo linear. A resposta a esta questão é positiva para ideais *perfeitos* de codimensão 2.

Lembramos que se $R$ é um anel local (ou graduado stantard sobre um corpo), dizemos que um ideal $I \subset R$ é perfeito se a dimensão homológica de $R/I$ (i.e, projetiva) sobre $R$ é finita e atinge seu valor mínimo possível, ou seja, a codimensão de $I$ (ver [15, p. 485]). É conhecido que se $R$ é Cohen–Macaulay e $\operatorname{dh}(R/I) \leq \infty$ então $I$ é perfeito se, e somente se, $R/I$ é Cohen–Macaulay.

Se $R$ é regular (e.g., anel de polinômios sobre um corpo) e $I$ é ideal de codimensão 2, então pelo teorema de Hilbert-Burch (ver [15, Theorem 20.15 ]) $I$ é perfeito se, e somente se, $R/I$ tem resolução livre mínima da forma

$$0 \longrightarrow R^m \xrightarrow{\varphi} R^{m+1} \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

e $I$ é gerado pelos menores máximos de $\varphi$ (de fato, $\varphi$ é matriz de apresentação de $I$

com respeito a tais geradores (a menos de sinais)).

**Teorema 1.2.2.** ( cf. [20]) *Seja* $I \subset R = k[X_1, \ldots, X_n]$ *um ideal perfeito de codimensão* 2. *Então, são equivalentes:*

(a) $I$ *é de tipo linear.*

(b) $I$ *satisfaz* $G_\infty$.

*Em particular, se as condições acima são satisfeitas* $\mathcal{S}_R(I)$ *é interseção completa.*

Observamos que se $R$ é graduado standard e $I$ é homogêneo gerado em grau fixo $s$, o ideal de definição $\mathcal{J} \subset R[Y_1, \ldots, Y_m]$ da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ tem naturalmente estrutura de ideal bi-homogêneo. Em particular, se $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ e $I$ é de tipo linear gerado por $n$ formas $f_1, \ldots, f_n$ de grau fixo, então estas definem um mapa racional $\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ dominante.

Como já mencionado, se o número mínimo de geradores do ideal $I$ excede a dimensão do anel, então $I$ não pode ser de tipo linear. Contudo, podemos contar com a seguinte extensão da noção de tipo linear, em cujo caso as equações da álgebra de Rees também são relativamente simples.

**Definição 1.2.3.** Seja $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset R = k[\mathbf{X}] = k[X_1, \ldots, X_n]$ um ideal tal que $f_i$ $(1 \leq i \leq m)$ é homogêneo de grau fixo. Seja $\mathcal{J} \subset k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$, onde $\mathbf{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_m\}$, o ideal bi-homogêneo de definição da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$. Dizemos que $I$ é ideal de *tipo fibrado* se $\mathcal{J}$ é gerado pelas equações lineares nos $\mathbf{Y}$ (oriundas de uma matriz de sizigias de $I$) e as equações de definição da fibra especial $\mathcal{R}(I)/(\mathbf{X})\mathcal{R}(I) \simeq k[f_1, \ldots, f_m]$.

Iniciamos agora uma breve discussão sobre uma classe de ideais de tipo fibrado útil ao encaminhamento desse trabalho.

Suponhamos que $R = k[X_1, \ldots, X_n] = k[\mathbf{X}]$ é anel de polinômios sobre um corpo $k$ (ou é anel graduado standard sobre $k$) e $I \subset R$ um ideal gerado por formas de mesmo grau $s$. Nesse caso, $I$ admite uma apresentação livre graduada da forma

$$R(-(s+1))^\ell \oplus \sum_{j \geq 2} R(-(s+j)) \xrightarrow{\varphi} R(-s)^m \to I \to 0$$

para um $\ell$ conveniente. A imagem de $R(-(s+1))^\ell$ pela $\varphi$ é chamada a *parte linear* de $\varphi$. Denotamos a submatriz de $\varphi$ correspondente a esta parte linear por $\varphi_1$ e dizemos que ela tem *posto máximo* se seu posto é $m-1$ ($=\operatorname{rank}(\varphi)$). Esta última condição é trivialmente satisfeita se $\varphi_1 = \varphi$ e em tal caso, $I$ é dito ter uma *apresentação linear* (ou, *é linearmente apresentado*).

Digamos que $I = (f_1, \ldots, f_m) \subset k[\mathbf{X}]$ tenha apresentação linear. Então, existe uma única matriz $B$ cujos elementos são formas lineares em $k[Y_1, \ldots, Y_n]$ satisfazendo a seguinte identidade matricial:

$$\mathbf{Y} \cdot \varphi = \mathbf{X} \cdot B \tag{1.2}$$

Dessa igualdade e do que já observamos acima, segue que os elementos da matriz $X \cdot B$ pertencem ao ideal bi-homogeneo $\mathcal{J}$ de definição da álgebra de Rees de $I$. Em particular, para cada $n \times n$ submatriz $\widetilde{B}$ de $B$ teremos que os elementos de $X \cdot \widetilde{B}$ pertencem a $\mathcal{J}$. Logo, os elementos da matriz abaixo também pertencem a $\mathcal{J}$

$$\mathbf{X} \cdot \widetilde{B} \cdot \operatorname{adj}(\widetilde{B}) = \det(\widetilde{B})\mathbf{X}. \tag{1.3}$$

Como $\operatorname{prof}((\mathbf{X})\mathcal{R}(I)) > 0$ segue de (1.2) e (1.3) que

$$(I_1(\mathbf{X} \cdot B), I_n(B)) \subset \mathcal{J}. \tag{1.4}$$

Perguntamo-nos então quando (1.4) é uma igualdade (notemos que a resposta positiva à essa questão nos diz em particular que $I$ é de tipo fibrado). Um resultado positivo a essa questão foi dado por B. Ulrich e S. Morey através do seguinte teorema:

**Teorema 1.2.4.** ([25, Theorem 1.3]) *Sejam $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ anel de polinômios sobre um corpo infinito e $I$ um ideal perfeito de altura 2, linearmente apresentado por uma matriz $\varphi$. Suponhamos que $m := \mu(I) \geq n$ e que $I$ satisfaz $(G_n)$. Então $I$ tem spread analítico máximo e o ideal de definição da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é $(I_1(\mathbf{X} \cdot B(\varphi)), I_n(B(\varphi))) \subset R[Y_1, \ldots, Y_m]$.*

Notemos que o homomorfismo estrutural $\alpha : \mathcal{S}(I) \twoheadrightarrow \mathcal{R}(I)$ induz naturalmente homomorfismos $\alpha_r : \mathcal{S}_r(I) \to I^r$ entre as partes homogêneas de $\mathcal{S}(I)$ e $\mathcal{R}(I)$. Obviamente, se $I$ é de tipo linear temos que cada $\alpha_r : \mathcal{S}_r(I) \to I^r$ é um isomorfismo. Contudo, em geral, decidir se, para um índice individual $r$, $\alpha_r : \mathcal{S}_r(I) \to I^r$ é isomorfismo é difícil, mesmo quando $r = 2$ – em cujo caso uma resposta afirmativa conduz aos chamados ideais *sizigéticos*. Entretanto, para ideais perfeitos de codimensão 2 existem resultados significativos tais como o seguinte teorema de A. Tchernev:

**Teorema 1.2.5.** ([35, Theorem 5.1]) *Seja $I \subset R$ um ideal, com $R$ Noetheriano, tal que $\mathrm{dh}_R(I) \leq 1$. Dado um um inteiro $r \geq 2$, as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $\mathcal{S}_r(I) \simeq I^r$.

(2) $\mathcal{S}_d(I) \simeq I^d$ *para todo* $1 \leq d \leq r$.

(3) $\mu(I_P) \leq \mathrm{prof}(R_P)$ *para todo primo* $P \supset I$ *tal que* $\mathrm{prof}(R_P) \leq \min\{m, r\}$, *onde* $m = \sup\{\mu(I_P) \mid P \supset I\}$.

## 1.3 Apanhado de aplicações birracionais

Nossa referência básica nessa parte é [31], que contém bastante material introdutório na forma que usaremos aqui (ver também [9] para uma visão global mais geral).

Seja $k$ um corpo algebricamente fechado e $V \subset \mathbb{P}^{n-1}$ uma variedade integral com anel de coordenadas homogêneas $R = k[\mathbf{X}]/I(V)$. Uma aplicação racional $\mathfrak{G} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ é representável por $m$ formas $\mathbf{g} = \{\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_m\} \subset R$ (onde "$-$"significa a classe de resíduos do polinômio) do mesmo grau $d \geq 1$, não todas nulas. De fato, tal conjunto de representantes para $\mathfrak{G} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ não é único. Se considerarmos $k(V)$ o corpo de frações de $R$, então qualquer outra $n$-upla $(\overline{g'}_1, \ldots, \overline{g'}_n)$ que seja equivalente a $(\overline{g}_1, \ldots, \overline{g}_n)$ no espaço projetivo $\mathbb{P}^n_{k(V)} = \mathbb{P}^n_k \otimes_k \mathrm{Spec}(k(V))$ é um representante de $\mathfrak{G} : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ (para maiores detalhes ver [31], particularmente Proposition 1.1).

A *imagem* de $\mathfrak{G}$ é a subvariedade projetiva $W \subset \mathbb{P}^{m-1}$ cujo o anel de coordenadas homogêneas é a $k$-subálgebra $k[\mathbf{g}] \subset R$ depois de renormalização da graduação. Escreveremos $S := k[\mathbf{g}] \simeq k[\mathbf{Y}]/I(W)$, onde $I(W) \subset k[\mathbf{Y}] = k[Y_1, \ldots, Y_m]$ é o ideal homogêneo de definição da imagem no mergulho $W \subset \mathbb{P}^{m-1}$.

A aplicação $\mathfrak{G}$ é dita ser *birracional sobre a imagem* se existir uma aplicação racional $\mathfrak{F} : W \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ tal que para um conjunto de representantes $\mathbf{f} = \{\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_n\} \subset S$ tenhamos

$$(f_1(\mathbf{g}) : \cdots : f_n(\mathbf{g})) \equiv (X_1 : \cdots : X_n), \quad (\mathrm{mod}\ I(V))$$

e

$$(g_1(\mathbf{f}) : \cdots : g_m(\mathbf{f})) \equiv (Y_1 : \cdots : Y_m) \quad (\mathrm{mod}\ I(W))$$

Ter informação sobre a aplicação inversa – e.g., sobre seu grau – será bastante relevante na sequência. Neste trabalho, estaremos interessados somente no caso em que $V = \mathbb{P}^{n-1}$. O ideal $I = (g_0, \ldots, g_n) \subset R$ é dito o *ideal base* da aplicação racional $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$. Nesta situação particular, a congruência estrutural acima

$$(f_0(g_0, \ldots, g_n), \ldots, f_n(g_0, \ldots, g_n)) \equiv (X_0, \ldots, X_n),$$

envolvendo a aplicação inversa, define unicamente uma forma $D \in R$ tal que

$$f_i(g_0, \ldots, g_m) = X_i D,$$

com $i = 0, \ldots, n$. Chamaremos esse $D$ um *fator de inversão* (do domínio) de $\mathfrak{G}$ associado ao representante dado.

Esse fator admite a seguinte propriedade curiosa:

**Lema 1.3.1.** *Seja $I \subset R = k[\mathbf{X}]$ o ideal base de uma aplicação $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ birracional sobre a imagem e seja $D \in R$ o fator de inversão do domínio relativo a um dado representante da aplicação inversa. Se o ideal máximo $(\mathbf{X})$ não é primo associado de $R/I$, então $D$ é um elemento da potência simbólica $I^{(d)}$, onde $d$ é o grau das coordenadas do representante da aplicação inversa em consideração.*

**Prova.** Nas notações acima, como para cada $1 \leq i \leq n$ o polinômio homogêneo $f_i$ tem grau $d$, segue que $X_i D = f_i(\mathbf{g}) \in I^d$; logo, $(\mathbf{X})D \subset I^d$. Como $(\mathbf{X}) \notin \mathrm{Ass}(R/I)$, segue pelo lema da esquiva a existência de $h \in (\mathbf{X})$ que não pertence a união dos primos associados de $R/I$. A natureza de $h$ juntamente com a definição de potência simbólica nos dá $D \in I^{(d)}$. $\square$

Naturalmente, esse lema nos conduz à seguinte questão:

**Questão 1.3.2.** Nas notações do lema acima, qual a contribuição de $D$ na geração do ideal $I^{(d)}$? Ou, mais ambiciosamente, qual sua contribuição na geração da álgebra de Rees simbólica $\mathcal{R}^{(I)}$?

Vejamos uma situação clássica em que a questão acima é bem entendida.

**Exemplo 1.3.3.** Consideremos o mapa de Magnus $\mathfrak{G} = (X_1X_2 : X_1X_3 : X_2X_3) : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, que é um mapa de Jonquières. Vê-se facilmente que

$$\mathfrak{G} \circ \mathfrak{G} = X_1X_2X_3(X_1 : X_2 : X_3).$$

Nesse caso, é possivel mostrar que $I^{(2)} = (I^2, D)$. Além disso, $\mathcal{R}^{(I)} = R[It, Dt^2]$.

Este exemplo é um simples modelo de uma vasta classe de ideais de mapas birracionais, para os quais a resposta à Questão 1.3.2 é definitiva. Tais ideais constituem o principal objetivo desta tese.

# Capítulo 2

# Ideais de apresentação linear geral

O objeto principal desse capítulo é o estudo das potências simbólicas de um ideal perfeito de altura 2 apresentado por matriz cujos elementos são formas lineares gerais em um anel de polinômios $R = k[X_1, \ldots, X_n]$. Um fato que provaremos nesta parte – tornando possível a manipulação das propriedades homológicas das potências do ideal $I \subset R$, gerado pelos menores maximais de tais matrizes – é que os outros ideais de Fitting têm altura "esperada". Esta propriedade também permitirá explicitar as equações que definem a álgebra de Rees $\mathcal{R}_R(I)$ de $I$. Analogamente à situação em que a matriz é completamente genérica (isto é, os elementos são indeterminadas), veremos que para $n \geq 4$ o anel $R/I$ também é um domínio Cohen-Macaulay normal.

## 2.1 Ideais de formas lineares gerais

Sejam $k$ um corpo algebricamente fechado de característica zero e $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ um anel de polinômios sobre $k$ com sua graduação standard usual. Estamos interessados em matrizes de ordem $m \times (m-1)$ cujos elementos são formas lineares gerais de $R$. De maneira imprecisa, chamaremos uma tal matriz de *linear geral*.

Uma noção mais fraca seria a de uma matriz de formas lineares sobre $R$ tal que todo subconjunto de seus elementos, de cardinalidade $\leq n$, é $k$-linearmente independente. Claramente, uma matriz linear geral é semilinear geral. Uma matriz linear geral pode ser obtida tomando cada um dos seus elementos como uma combinação $k$-linear das variáveis $X_1, \ldots, X_n$ com coeficientes aleatórios. É importante notar que a propriedade de ser linear geral para uma matriz não é estável por operações elementares arbitrárias das linhas ou das colunas. Apesar disso, certas propriedades do ideal gerado pelos menores máximos são estáveis. A dificuldade da abordagem desse trabalho é precisamente esta inversão dos dados do problema: a hipótese não é sobre um ideal, mas sim sobre uma matriz, a partir da qual se obtem um ideal.

Observemos que uma matriz linear geral de ordem $m\times(m-1)$ tal que $m(m-1)\leq n=\dim R$ é, a menos de um $k$-automorfismo linear de $R$, uma matriz genérica. Por essa razão, suporemos de uma vez por todas que $m(m-1)>n$.

Como é habitual, denotaremos por $I_t(\Psi)$ o ideal gerado pelos $t$-menores de uma matriz $\Psi$. No caso de $\Psi$ ter ordem $m\times(m-1)$, $I_t(\Psi)$ é o ideal de Fitting de ordem $m+1-t$ do ideal $I:=I_m(\Psi)$.

**Teorema 2.1.1.** *Seja $\mathcal{L}$ uma matriz linear geral de ordem $m\times(m-1)$ sobre $R=k[X_1,\ldots,X_n]$, com $n\geq 2$ e $m\geq 2$. Então*

$$\operatorname{alt}(I_t(\mathcal{L}))=\min\{n,(m-t+1)(m-t)\}$$

*para todo $1\leq t\leq m-1$.*

**Prova.** Usaremos a mesma notação, seja para matriz bem como para o conjunto de seus elementos. Consideremos a matriz genérica $\mathbf{Z}=(Z_{ij})$ de ordem $m\times(m-1)$ sobre $k$ e ponhamos $S:=k[\mathbf{Z}]$. Denotemos por $\mathbf{L}$ o núcleo do homomorfismo de $k$-álgebras $S\to R$ definido por $Z_{i,j}\mapsto \ell_{i,j}$, onde $\mathcal{L}=(\ell_{i,j})$. Este homomorfismo é sobrejetivo pois $k[\mathcal{L}]=R$, uma vez que $m(m-1)\geq n$ e $\mathcal{L}$ é gerada por formas lineares gerais. Então, $\mathbf{L}$ é gerado por $s:=m(m-1)-n$ formas lineares de $S$ e $S/\mathbf{L}\simeq R$. Obtemos um isomorfismo induzido $S/(I_t(\mathbf{Z}),\mathbf{L})\simeq R/I_t(\mathcal{L})$ o que nos diz que a asserção é equivalente à igualdade

$$\dim S/(I_t(\mathbf{Z}),\mathbf{L})=\max\{0,n-(m-t+1)(m-t)\}. \tag{2.1}$$

Ponhamos $D:=m(m-1)-(m-t+1)(m-t)(=\dim S/I_t(\mathbf{Z}))$ e procedamos por indução sobre $\mu(\mathbf{L})=m(m-1)-n$. Obviamente $D>0$ se, e somente se, $t\geq 2$. Ora, para $t$ nesse intervalo, $L_1$ é claramente não divisor de zero em $S/I_t(\mathbf{Z})$ uma vez que $L_1$ é uma forma linear e todos os primos associados estão contidos no único primo $I_2(\mathbf{Z})$ gerado em grau 2. Desse modo, temos:

$$\dim S/(I_t(\mathbf{Z}),L_1)=\begin{cases} 0 & \text{se } t=1\\ D-1 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

Suponhamos, então, que $m(m-1)-n \geq j \geq 2$. Pela hipótese indutiva, temos:

$$\dim S/(I_t(\mathbf{Z}), L_1, \ldots, L_{j-1}) = \begin{cases} 0 & \text{se } D \leq j-1 \\ D-(j-1) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Denotando por $J_{[1]}$ a parte homogênea de grau 1 de um ideal homogêneo $J$ em $R$, como $L_j$ é uma forma linear geral temos $L_j \notin P_{[1]}$ para todo primo $P \in \bigcup_t \operatorname{Ass}(S/I_t(\mathbf{Z}), L_1, \ldots, L_{j-1})$, com $t$ no intervalo $D > j-1$. Então, a dimensão também diminui uma unidade, i.e.,

$$\dim S/(I_t(\mathbf{Z}), L_1, \ldots, L_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } D \leq j \\ D-j & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Aplicando com $j = m(m-1)-n$ obtemos

$$\dim S/(I_t(\mathbf{Z}), \mathbf{L}) = \begin{cases} 0 & \text{se } D \leq m(m-1)-n \\ D-m(m-1)-n & \text{se } D > m(m-1)-n \end{cases}$$

Substituindo o valor de $D$ encontramos a igualdade (2.1). □

**Proposição 2.1.2.** *Seja $\mathcal{L}$ uma matriz linear geral de ordem $m \times (m-1)$ sobre o anel $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ com $n \geq 3$ e $m \geq 2$. Denotemos $I := I_{m-1}(\mathcal{L})$.*

(i) *$I$ tem altura 2 e $I_{m-2}(\mathcal{L})$ tem altura $\min\{6, n\}$.*

(ii) *$R/I$ satisfaz a condição $(R_r)$ de Serre, onde $r = \min\{3, n-3\}$; em particular, se $n \geq 4$ então $R/I$ é normal e $I$ é ideal primo.*

(iii) *$I$ é de tipo linear se, e somente se, $m \leq n$.*

(iv) *$I$ é normalmente livre de torção se, e somente se, $m < n$*

**Prova.** (i) Trata-se de consequência do Teorema 2.1.1.

(ii) Como $\mathbf{Z}$ é uma matriz genérica, o ideal Jacobiano de $S/I_{m-1}(\mathbf{Z})$ é o ideal $I_{m-2}(\mathbf{Z})/I_{m-1}(\mathbf{Z})$. Aplicando o teorema de Bertini ([16]) resulta que o esquema singular da seção hiperplana geral esquemática definida por $S/(I_{m-1}, L_1)$ é o esquema associado a $S/(I_{m-2}, L_1)$. Usando indução sobre o número $m(m-1)-n$ de seções hiperplanas gerais concluimos que o esquema singular da seção linear esquemática definida por $S/(I_{m-1}(\mathbf{Z}), \mathbf{L})$ é o esquema associado a $S/(I_{m-2}(\mathbf{Z}), \mathbf{L}) \simeq R/I_{m-2}(\mathcal{L})$. Pelo Teorema 2.1.1, a codimensão desse último é $\min\{6, n\}$. Como $I = I_{m-1}(\mathcal{L})$ tem altura 2, $R/I$ satisfaz a condição $(R_{\min\{6-2-1,n-2-1\}})$. Assim, se $n \geq 4$, $R/I$ satisfaz $(R_1)$. Por outro lado, $R/I$ é Cohen-Macaulay. Assim, para $n \geq 4$, $R/I$ é normal e, como $I$ é homogêneo, $R/I$ deve ser um domínio. (Se $n = 3$ então $I$ é ainda radical).

(iii) Do Teorema 2.1.1 temos:

$$\operatorname{alt}(I_t(\mathcal{L})) = \min\{n, (m-t+1)(m-t)\} \geq m-t+1, \quad \text{para } 1 \leq t \leq m-1$$

se $m \leq n$. Isso mostra que $I$ satisfaz a propriedade $(F_1)$. Logo, neste caso, $I$ é de tipo linear pelo Teorema 1.2.2. A recíproca também é evidente pelo Teorema 1.2.2.

(iv) Suponhamos $m < n$. Pela parte (iii), $I$ é de tipo linear. Como $I$ é fortemente Cohen–Macaulay ([2, Theorem 2.1(a)]) então a álgebra de Rees de $I$ é Cohen–Macaulay ([20, Theorem 9.1]); segue, como é conhecido, que o anel graduado associado de $I$ é Cohen–Macaulay. Por outro lado, podemos supor que $n \geq 4$ dado que para $n = 3$ o ideal é gerado por uma sequência regular de dois elementos. Desse modo, pela parte (ii), o ideal $I$ é primo. Por [13, Proposition 3.2 (1)], a asserção é equivalente a demonstrar que

$$\ell_P(I) \leq \max\{\operatorname{alt}(P) - 1, \operatorname{alt}(I)\},$$

para todo ideal primo $P \supset I$. Como $I$ é homogêneo, é suficiente considerar o caso em que $P$ é homogêneo. Também podemos supor $\operatorname{alt}(P) \geq 3$ já que $I$ é ideal primo de altura 2. Desse modo, temos de mostrar que $\ell_P(I) \leq \operatorname{alt}(P) - 1$. Se $P = (\mathbf{X})$ o resutado é claro pois $\ell_{(\mathbf{X})} \leq \mu(I) = m \leq n-1 = \operatorname{alt}(\mathbf{X}) - 1$. Desse modo, podemos supor que $P \subsetneq (\mathbf{X})$; logo, $\operatorname{alt}(P) \leq n-1$.

Considere $t_0 := \max\{1 \leq s \leq m-2 \,|\, I_s(\mathcal{L}) \not\subset P\}$. Desse modo, $I_{t_0+1}(\mathcal{L}) \subset P$ e daí $\operatorname{alt}(I_{t_0+1}(\mathcal{L})) \leq \operatorname{alt}(P) \leq n-1$. Escolhemos um $t_0$-menor $\Delta$ de $\mathcal{L}$ não contido em $P$, assim que, em particular, $R_P$ é a localização do anel de frações $R_\Delta = R[\Delta^{-1}] \subset k(\mathbf{X})$. Por um argumento rotineiro, usando operações elementares linha/coluna, existe uma matriz $\widetilde{\mathcal{L}}$ sobre $R_P$, de ordem $(m-t_0) \times (m-t_0-1)$, tal que $I_P = I_{m-1-t_0}(\widetilde{\mathcal{L}})$.

Consideremos primeiro $t_0 \leq m-3$. Então, $(m-t_0) \leq (m-t_0)(m-t_0-1) - 1 = \operatorname{alt}(I_{t_0+1}(\mathcal{L})) - 1 \leq \operatorname{alt}(P) - 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \ell_P(I) &= \ell(I_{m-1-t_0}(\widetilde{\mathcal{L}})) \leq \min\{\mu(I_{m-1-t_0}(\widetilde{\mathcal{L}})), \operatorname{alt}(P)\} \\ &= \min\{m-t_0, \operatorname{alt}(P)\} \leq \operatorname{alt}(P) - 1. \end{aligned}$$

Se $t_0 = m-2$, temos $\ell_P(I) = \min\{2, \operatorname{alt}(P)\} = 2 \leq \operatorname{alt}(P) - 1$ pois havíamos suposto que $\operatorname{alt}(P) \geq 3$.

Portanto, $I$ é normalmente livre de torção. A recíproca segue pela Proposição 2.2.2.

$\square$

O teorema principal desse capítulo, enunciado na próxima seção, fará uso de diversos resultados de interesse independente, que passamos a enunciar.

**Teorema 2.1.3.** *Seja $\mathcal{L}$ uma matriz linear geral de ordem $m \times (m-1)$ sobre $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, com $m \geq 2$ e $n \geq 3$. Denotemos $I := I_{m-1}(\mathcal{L})$. Então:*

(i) *$I$ satisfaz a condição $(G_n)$.*

(ii) *Para todo $r \geq 0$, $I^{(r)}/I^r$ é um módulo $(\mathbf{X})$-primário sempre que $I^{(r)} \neq I^r$.*

**Prova.** (i) Seja $P \subset R$ um primo de altura $\leq n-1$. Ponhamos

$$t_\infty := \min\{1 \leq t \leq m-1 \mid I_t(\mathcal{L}) \subset P\}.$$

Então $\operatorname{alt}(I_{t_\infty}(\mathcal{L})) \leq n-1$, logo $\operatorname{alt}(I_{t_\infty}(\mathcal{L})) = (m - t_\infty + 1)(m - t_\infty)$ pelo Teorema 2.1.1. Invertendo um $(t_\infty - 1)$-menor de $\mathcal{L}$ em $R_P$ temos $I_P = I_{m-t_\infty}(\widetilde{\mathcal{L}})$ para uma matriz $\widetilde{\mathcal{L}}$ de ordem $(m - t_\infty + 1) \times (m - t_\infty)$ adequada. As informações coletadas produzem

$$\begin{aligned}
\mu(I_P) &= \mu(I_{m-t_\infty}(\widetilde{\mathcal{L}})) \leq m - t_\infty + 1 \leq (m - t_\infty + 1)(m - t_\infty) \\
&= \operatorname{alt}(I_{t_\infty}(\mathcal{L})) \leq \operatorname{alt}(P).
\end{aligned}$$

(ii) Fixado um $r \geq 0$, suponhamos que $I^{(r)}/I^r \neq \{0\}$. Pela Proposição 2.1.2 (iv), temos $m \geq n$. A afirmação é equivalente a dizer que uma potência de $(\mathbf{X})$ anula $I^{(r)}/I^r$, i.e., $I_P^{(r)} = I_P^r$ para todo primo $P \neq (\mathbf{X})$. Variando $r \geq 0$, isso, é equivalente a afirmar que o anel graduado associado $\operatorname{gr}_I(R)$ é livre de torção sobre $R/I$ localmente no espectro perfurado $\operatorname{Spec}(R) \setminus (\mathbf{X})$.

Seja então $P \neq (\mathbf{X})$ um ideal primo contendo $I$. A condição $(G_n)$ da parte (i) implica em que $I_P$ satisfaz a condição $(F_1)$ como um ideal de $R_P$. Como na prova da Proposição 2.1.2(iv), sabemos que o anel graduado associado $\operatorname{gr}_{I_P}(R_P)$ é Cohen–Macaulay. Devido a esse argumento e $\operatorname{alt}(I) = 2$, temos de verificar as estimativas locais

$$\ell_Q(I) = \ell_{Q_P}(I_P) \leq \operatorname{alt}(Q_P) - 1 = \operatorname{alt}(Q) - 1,$$

para cada primo $Q \subset P$. Fixando um tal primo $Q$, repetimos *ipsis literis* o argumento da prova da Proposição 2.1.2 (iv), tomando $t_0 := \max\{1 \leq s \leq m-2 \mid I_s(\mathcal{L}) \not\subset Q\}$.

$\square$

**Corolário 2.1.4.** *Seja $\mathcal{L}$ uma matriz linear geral de ordem $m \times (m-1)$ sobre $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, com $m \geq 2$ e $n \geq 3$. Denotemos $I := I_{m-1}(\mathcal{L})$. Então $\mathcal{S}_r(I) \simeq I^r$ para todo $1 \leq r \leq n-1$.*

**Prova.** Segue do Teorema 2.1.3 (i) juntamente com Teorema 1.2.5. □

Para um inteiro $1 \leq r \leq n-3$, usaremos o $\mathcal{M}$-complexo de aproximação em grau $r$, associado ao ideal $I$ (ver [37, Section 3]):

$$\mathcal{M}_r : 0 \to H_r \to H_{r-1} \otimes S_1 \to \cdots \to H_1 \otimes S_{r-1} \to S_r, \tag{2.2}$$

onde $H_i$ designa o $i$-ésimo módulo de homologia de Koszul sobre os geradores de $I$ e $S_i$, a $i$-ésima parte homogênea do anel de polinômios $S := R/I[Y_1, \ldots, Y_m]$. Temos também $H_0(M_r) \simeq \mathcal{S}_r(I/I^2)$.

**Proposição 2.1.5.** *$\mathcal{M}_r$ é acíclico no intervalo $1 \leq r \leq n-3$.*

**Prova.** Mostraremos que o complexo é acíclico localmente. Suponha primeiro que $P \neq (\mathbf{X})$ é um ideal primo. Nesse caso, usando o Teorema 2.1.3 o resultado está contido em [20, Theorem 5.1].

Assim, podemos assumir $P = (\mathbf{X})$ e que $\mathcal{M}_r$ é acíclico localmente em qualquer primo propriamente contido em $(\mathbf{X})$. Mostraremos a aciclicidade etapa por etapa pela esquerda. Assim, suponhamos que o complexo parcial

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & H_r & \to & \cdots & \to & H_{k+2} \otimes S_{r-k-2} & \to & H_{k+1} \otimes S_{r-k-1} \\ & & & & & & & & \searrow \\ & & & & & & & & B_k \\ & & & & & & & & \searrow \\ & & & & & & & & 0 \end{array}$$

é exato. Como $I$ é um ideal fortemente Cohen–Macaulay ([2, Theorem 2.1(a)]), temos $\operatorname{depth}(H_i) = n-2$ para cada $1 \leq i \leq r$. A caça à profundidade da esquerda para direita, nos dá

$$\operatorname{depth}(B_k) \geq n - (r-k+1) = (n-r) + k - 1 \geq 3 + k - 1 = k + 2 \geq 2.$$

Denotemos por $Z_k \subset H_k \otimes S_{k-r}$ o módulo dos ciclos correspondente (note-se que $\operatorname{prof}(Z_k) \geq 1$) e ponhamos $D_k := Z_k/B_k$. Suponhamos $D_k \neq 0$ e consideremos

$Q \in \mathrm{Ass}(D_k)$. Temos $Q = (\mathbf{X})$, uma vez que o complexo inteiro é acíclico localmente fora de $(\mathbf{X})$. Aplicando $\mathrm{Hom}_R(R/(\mathbf{X}), -)$ a

$$0 \to B_k \to Z_k \to D_k \to 0$$

obtemos a seguinte sequência exata:

$$0 = \mathrm{Hom}_R(R/(\mathbf{X}), Z_k) \to \mathrm{Hom}(R/(\mathbf{X}), D_k) \to \mathrm{Ext}\,^1_R(R/(\mathbf{X}), B_k).$$

Como $\mathrm{prof}(B_k) \geq 2$, o último termo à direita se anula; logo o mesmo ocorre com o termo do meio; isso é um absurdo pois $(\mathbf{X})$ é um primo associado de $D_k$. Desse modo, concluímos que $D_k = 0$. $\square$

Denotamos por $\mathrm{dh}_R(M)$ a dimensão homológica de um $R$-módulo finitamente gerado $M$.

**Corolário 2.1.6.** $\mathrm{dh}_R(I^r/I^{r+1}) \leq r + 2$ *para cada* $1 \leq r \leq n - 3$. *Em particular,* $(\mathbf{X}) \notin \mathrm{Ass}(I^r/I^{r+1})$.

**Prova.** Como (2.2) é acíclico pela Proposição 2.1.5, uma argumento de "caça à profundidade" fornece $\mathrm{prof}(\mathcal{S}_r(I/I^2)) \geq n - (r + 2)$. Desse modo, $\mathrm{dh}_R(\mathcal{S}_r(I/I^2)) \leq r + 2$. Mas $\mathcal{S}_r(I/I^2) \simeq I^r/I^{r+1}$ pelo Corolário 2.1.4. $\square$

**Proposição 2.1.7.** $\mathrm{Ass}(R/I^r) = \mathrm{Ass}(R/I)$ *para* $1 \leq r \leq n - 2$.

**Prova.** Pelo Teorema 2.1.3 (ii), $\mathrm{Ass}(R/I^r) \subset \mathrm{Ass}(R/I) \cup \{(\mathbf{X})\}$.

Procedemos por indução sobre $r$. Para $r = 1$ a afirmação é trivial. Supondo $(\mathbf{X}) \in \mathrm{Ass}(R/I^r)$, a sequência exata

$$0 \to I^{r-1}/I^r \to R/I^r \to R/I^{r-1} \to 0$$

e a hipótese indutiva força concluir que $(\mathbf{X}) \in \mathrm{Ass}(I^{r-1}/I^r)$. Mas isso não pode ocorrer pelo Corolário 2.1.6. $\square$

## 2.2 Potência simbólica versus birracionalidade

Recordemos que um ideal $I \subset R$ gerado por $m$ formas do mesmo grau é dito ser de tipo fibrado se o ideal bihomogêneo $\mathcal{J} \subset R[\mathbf{Y}] = R[Y_1, \ldots, Y_m]$ da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é gerado pelas formas de grau $(*, 1)$, onde $*$ denota um grau arbitrário $\geq 1$ (isto é, pelas biformas que vêm das sizigias de $I$), e pelas equações de definição da fibra especial $\mathcal{R}(I)/(\mathbf{X})\mathcal{R}(I)$.

**Proposição 2.2.1.** *Seja $\mathcal{L}$ uma matriz linear geral de ordem $m \times (m-1)$ sobre $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ com $n \geq 3$ e $m \geq 2$. Denotemos $I := I_{m-1}(\mathcal{L}) \subset R$. Se $m \geq n$, temos:*

(a) *A aplicação racional $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{m-1}$ definida pelos $(m-1)$-menores é birracional sobre a imagem.*

(b) *$I$ é um ideal de tipo fibrado e a álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é um domínio Cohen–Macaulay.*

(c) *A aplicação $\mathfrak{G}$ admite $\binom{m-1}{n-1}$ fatores de inversão do domínio, cada um deles de grau $(m-1)(n-1)$ e associado a um representante minimal da aplicação inversa.*

**Prova.** (a) Por [9, Theorem 3.2], é suficiente provar que a dimensão da $k$-subálgebra de $R$ gerada pelos menores maximais de $\mathcal{L}$ tem dimensão $n$, i.e., que $I$ tem spread analítico máximo. O caso onde $m = n$ segue pela Proposição 2.1.2 (iii). Suponhamos que $m > n$. Como $R/I$ é Cohen–Macaulay e satisfaz $\mu(I_P) \leq \mathrm{alt}(P)$, para $\mathrm{alt}(P) \leq n-1$ (Teorema 2.1.3 (i)), o resultado segue de [36, Corollary 4.3 ].

(b) Para $m = n$ não há o que provar. Suponhamos $m > n$. Nesse caso o resultado segue de [25, Theorem 1.3]. Em adição, o ideal de definição da álgebra de Rees $\mathcal{R}(I)$ é da forma $(I_1(\mathbf{X} \cdot B(\mathcal{L}), I_n(B(\mathcal{L})))$, onde $B(\mathcal{L})$ é a matriz jacobiana dual a $\mathcal{L}$ introduzida em (1.2)

(c) Como $I$ é de tipo fibrado, uma matriz Jacobiana dual fraca de $I$ como em [9] coincide com a transposta $B^t$ da matriz $B(\mathcal{L})$ da demonstração do item anterior; $B^t$ é uma $(m-1) \times n$ matriz de formas lineares nas variáveis $\mathbf{Y}$, de posto $n-1$ sobre a fibra especial de $I$. Pela parte (a) e [9], qualquer $(n-1) \times n$ submatriz de $B^t$ tem posto $n-1$ e seus $n$ (ordenado, com sinal) menores maximais são as coordenadas de um representante da aplicação inversa; assim, existem $\binom{m-1}{n-1}$ tais representantes.

Por construção, o grau de qualquer um desses representantes (i.e., de suas coordenadas como elementos da fibra especial) é exatamente $n-1$. Segue que cada tal representante dará origem a um fator de inversão (no domínio) de grau $(m-1)(n-1)-1$. $\square$

**Proposição 2.2.2.** *Seja $\mathcal{L}$ uma matriz linear geral de ordem $m \times (m-1)$ sobre $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ com $m \geq n \geq 3$. Ponhamos $I := I_{m-1}(\mathcal{L})$. Então $I^{(r)} = I^r$ para $1 \leq r \leq n-2$, e $D_j \in I^{(n-1)} \setminus I^{n-1}$, onde $D_j$ ($j = 1, \ldots, \binom{m-1}{n-1}$) são fatores de inversão do domínio associados a um conjunto completo de representantes mínimos da aplicação inversa.*

**Prova.** A primeira asserção segue imediatamente da Proposição 2.1.7 e a segunda do Lema 1.3.1. □

**Observação 2.2.3.** A Proposição 2.2.2 nos diz em particular que os fatores de inversão são geradores genuínos da potência $I^{(n-1)}$.

Os argumentos dessa parte nos guiam a alguns resultados de interesses independentes. Para descrevê-los nos ateremos ao caso em que $m = n+1$. Recordemos que pelo Corolário 2.1.4, $\mathcal{S}_{n-1}(I) \simeq I^{n-1}$ . Logo, temos a seguinte resolução livre de $I^{n-1}$ descrita em [1]:

$$\mathcal{K}_{n-1} \ : \ 0 \to F_{n-1} \to F_{n-2} \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to 0$$

onde

$$F_i := \bigwedge^i R^n \otimes_R \mathcal{S}_{(n-1)-i}(R^{n+1})$$

e $d : F_i \to F_{i-1}$ é dada por

$$d(e_1 \wedge \ldots \wedge e_i \otimes g) := \sum_{l=1}^{i} e_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{e_l} \wedge \ldots \wedge e_i \otimes \varphi(e_l)g,$$

com $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denotando uma base de $R^n$ e $\varphi : F_1 \simeq R^n \to F_0 \simeq R^{n+1}$ o mapa definido pela matriz de apresentação $\mathcal{L} = (\ell_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq n}}$ do ideal $I$.

Considere a aplicação $R$-dual a $d_{n-1} : F_{n-1} \to F_{n-2}$. Como $I^{n-1}$ é gerado em grau (standard) $n(n-1)$, depois de identificação e levando em conta os shift dos graus, a aplicação dual é da forma

$$d^*_{n-1} : R^N((n+1)(n-1)-1) \to R^n((n+1)(n-1)), \tag{2.3}$$

onde $N = (n+1)\binom{n}{2}$. Denotemos por $M$ o cokernel de $\Psi$. Shifting por $-((n+1)(n-1))$, temos uma apresentação homogênea

$$R^N(-1) \overset{\Psi}{\to} R^n \to M(-(n+1)(n-1)) \to 0. \tag{2.4}$$

**Proposição 2.2.4.** *Com as notações acima, existe um isomorfismo homogêneo*

$$M(-(n+1)(n-1)) \simeq R^n/(\mathbf{X})R^n = k^n.$$

**Prova.** Explicitaremos a aplicação dual a $d_{n-1} : F_{n-1} \to F_{n-2}$. Notemos que

$$F_{n-1} = \bigwedge^{n-1} R^n \otimes_R S_0(R^{n+1}) \simeq R^n, \quad F_{n-2} = \bigwedge^{n-2} R^n \otimes_R S_1(R^{n+1})$$

Aplicando essas identificações, os vetores base $e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_k} \wedge \cdots \wedge e_n$ são identificados com $e_k$ e escreveremos $a_{1,\ldots,\hat{k},\ldots,\hat{l},\ldots,n}$ para uma base vetorial de $R^{\binom{n}{n-2}}$ correspondendo a $e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_j} \wedge \cdots \wedge \widehat{e_l} \wedge \cdots \wedge e_n$. Além disso, consideremos $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ uma base de $R^{n+1}$. Com essas notações, para $k = 1, \ldots, n$, a aplicação é relativamente simples

$$\begin{aligned} e_k \quad \mapsto \quad & \sum_{l=1}^{n-1} a_{1,\ldots,\hat{k},\ldots,\hat{l},\ldots,n} \otimes \varphi(e_l) = \sum_{l=1}^{n-1} a_{1,\ldots,\hat{k},\ldots,\hat{l},\ldots,n} \otimes \sum_{i=1}^{n+1} \ell_{il} b_i \\ = \quad & \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{l=1}^{n-1} \ell_{il}\, a_{1,\ldots,\hat{k},\ldots,\hat{l},\ldots,n} \otimes b_i, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L} = (\ell_{ij})_{\substack{1 \le i \le n+1 \\ 1 \le j \le n}}$ é a matriz estrutural do ideal $I$.

Em virtude disso, a matriz transposta tem a seguinte forma em blocos:

$$\Psi = (M_{n-1,n} | \ldots | M_{1,n} | \ldots | M_{j-1,j} | \ldots | M_{1,j} | \ldots | M_{1,2}),$$

onde, para $1 \le i \le j \le n$, $M_{ij}$ é a seguinte matriz a menos de sinais

$$M_{i,j} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \ell_{1i} & \ell_{2i} & \ldots & \ell_{(n+1)i} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \ell_{1j} & \ell_{2j} & \ldots & \ell_{(n+1)j} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (n+1-j)\text{-ésima linha} \\ \\ \leftarrow (n+1-i)\text{-ésima linha} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Agora, seja $\widetilde{M_{i,j}}$ a submatriz de $M_{i,j}$ consistindo de suas $n$ primeiras colunas e consideremos a seguinte submatriz em blocos de $\Psi$

$$(\widetilde{M_{n-1,n}}|\ldots|\widetilde{M_{1,n}}\,|\,\widetilde{M_{n-2,n-1}}),$$

consistindo de $n$ blocos quadrados de ordem $n$ cada; em particular, a matriz tem $n^2$ colunas.

Afirmamos que o $R$-submódulo de $R^n$ gerado pelas colunas da matriz acima coincide com $(\mathbf{X})R^n$. Para isso, como as colunas tem grau standard 1, é suficiente mostrar que as colunas são $k$-linearmente independentes como elementos do $k$-espaço vetorial $((\mathbf{X})R^n)_1$.

Suponha que uma combinação linear dessas colunas se anula, com coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2} \in k$. Agrupando os coeficientes correspondentes as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ temos um sistema linear $n \times n$ com coeficientes em $k$ tal que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é uma solução não nula. Então, cada linha desse sistema é uma relação dessas variáveis. Claramente, isso só é possível se todos os coeficientes desse sistema forem nulos. Escrevemos essas condições como um novo sistema linear quadrado, dessa vez com ordem $n^2$, com solução $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2}\}$ e coeficientes apropriados em $k$. Como os coeficientes das formas $\ell_{ij}$ podem ser expressos como as derivadas parciais dessas 1-formas, temos que a matriz correspondente a esse último sistema tem o seguinte aspecto (a menos de sinais)

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{n-1} & \Theta_{n-2} & \Theta_{n-3} & \ldots & \Theta_2 & \Theta_1 & \mathbf{0} \\ \Theta_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{n-2} \\ \mathbf{0} & \Theta_n & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_n & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \Theta_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \Theta_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

onde $\Theta_i$ é a transposta da matriz Jacobiana de $(\ell_{1,i}, \ldots, \ell_{n,i})$ e $\mathbf{0}$ é a matriz nula de ordem $n$. Assim, o sistema tem somente a solução trivial se, e somente se, o determinante dessa matriz for não nulo. Para provar que este determinante é, de fato, diferente de zero, usaremos fortemente a hipótese de que os elementos de $\mathcal{L}$ são formas lineares gerais. Ora, esta hipótese implica em que, a menos de mudança de coordenadas projetivas, podemos supor que $\ell_{in} = X_i$, para $1 \leq i \leq n$. Então, $\Theta_n$ é a matriz identidade de ordem $n$ e a matriz toma a forma

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_{n-1} & \Theta_{n-2} & \Theta_{n-3} & \dots & \Theta_2 & \Theta_1 & \mathbf{0} \\ I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{n-2} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Podemos ver que, efetuando operações elementares apropriadas nas linhas, o determinante é não nulo se, e somente se, o determinante da seguinte matriz é não nulo:

$$\begin{pmatrix} I & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{n-2} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Theta_{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & 0 & \Omega \end{pmatrix}$$

onde $\Omega = \Theta_{n-1}\Theta_{n-2} - \Theta_{n-2}\Theta_{n-1}$. Assim, $\det(\Theta) \neq 0$ se, e somente se, $\det(\Omega) \neq 0$. Novamente, como os elementos de $\mathcal{L}$ são formas lineares gerais, as mudanças anteriores de variáveis não afetam as formas, além de $\ell_{in}, 1 \leq i \leq n$, em sua natureza de formas lineares gerais. Desse modo devemos ter $\det(\Omega) \neq 0$.

Em conclusão, mostramos que a imagem do mapa $\Psi$ em (2.4) é o $R$-submódulo $(\mathbf{X})R^n$. Consequentemente, $M(-(n+1)(n-1)) \simeq R^n/(\mathbf{X})R^n$ como era de se provar. □

**Observação 2.2.5.** Na situação em que $m \geq n+2$ também temos uma resolução livre mínima para $I^{n-1}$ como a $\mathcal{K}_{n-1}$ acima, a modificação nesse caso é que $F_i := \bigwedge^i R^{m-1} \otimes_R \mathcal{S}_{(n-1)-i}(R^m)$. Assim, o análogo para a $\Psi$ nessas condições é uma matriz de ordem $\binom{m-1}{n-1} \times \binom{m-1}{n-2} m$. Se $m >> n$ então a quantidade de colunas de $\Psi$ é menor que a dimensão do $k$-espaço vetorial $((\mathbf{X})R^{\binom{m-1}{n-1}})_1$. Logo, a Proposição 2.2.4 nesse contexto não é verdadeira.

**Corolário 2.2.6.** *Com as notações acima, suponhamos que $m = n+1$. Então*

$$I^{(n-1)}/I^{n-1} \simeq k^n(-(n(n-1)-1)),$$

*como $R$-módulos graduados.*

**Prova.** Pela Proposição 2.2.4, temos um isomorfismo homogêneo (shifted)

$$M(-n) \simeq k^n(n(n-1)-1).$$

Por outro lado, por definição existe um isomorfismo homogêneo

$$M \simeq \mathrm{Ext}^n_R(R/I^{n-1}, R).$$

Desse modo, obtemos

$$\begin{aligned}
I^{(n-1)}/I^{n-1} &\simeq H^0_{(\mathbf{X})}(R/I^{n-1}) \quad (\text{pois } I^{(n-1)}/I^{n-1} \text{ tem comprimento finito}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^n_R(R/I^{n-1}, R(-n)), E(k)) \quad (\text{por dualidade local graduada}) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_R(M(-n), E(k)) \simeq \mathrm{Hom}_R(k^n(n(n-1)-1), E(k)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}_R(k, E(k))^{\oplus n}(-(n(n-1)-1)) \simeq k^n(-(n(n-1)-1)),
\end{aligned}$$

onde o último isomorfismo é dado em [4, Lemma 3.2.7 (b)]. □

**Exemplo 2.2.7.** O resultado do Corolário 2.3.3 é falso, em geral, para ideais perfeitos de codimensão 2 linearmente apresentados. Por exemplo, consideremos a seguinte matriz com elementos no anel $R = k[X_1, X_2, X_3, X_4]$ :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ X_2 & X_3 & X_4 & 0 \\ X_3 & X_4 & 0 & X_1 - X_2 \\ X_4 & 0 & X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ 0 & X_1 - X_4 & X_2 - X_4 & X_3 - X_4 \end{pmatrix}$$

Cômputo rotineiro usando *Macaulay* ([5]) fornece $\mathrm{alt}(I_t(\mathcal{L})) = 4$ para $1 \leq t \leq 3$, enquanto para $I := I_4(\mathcal{L})$, o anel $R/I$ é domínio normal Cohen–Macaulay. Esta numerologia e propriedades são exatamente as mesmas do caso linear geral; em particular $I^{(2)} = I^2$. Contudo, $I^{(3)}/I^3$ é um módulo cíclico.

## 2.3 A estrutura da álgebra simbólica

Nesta seção focaremos os casos $m = n$ e $m = n + 1$.

O caso $m = n$ admite uma versão mais estruturada como segue.

**Proposição 2.3.1.** (car$(k) = 0$) *Sejam $R = k[X_1, \dots, X_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo $k$ de característica zero, com sua graduação usual, e $\mathcal{L} = (\ell_{ij})$ uma $m \times (m-1)$ matriz cujos elementos são formas lineares em $R$. Para cada $i = 1, \dots, n$, seja $\Delta_i$ o $(n-1)$-menor (com sinal) obtido de $\mathcal{L}$ excluindo sua $i$-ésima linha. Denotemos por $\Theta = \Theta(\boldsymbol{\Delta})$ a matriz Jacobiana de $\boldsymbol{\Delta} := \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$. Se o ideal $I_{m-1}(\mathcal{L}) := (\boldsymbol{\Delta}) \subset R$ é de tipo linear então a aplicação racional $\mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ definida por $\boldsymbol{\Delta}$ é uma aplicação de Cremona e o fator de inversão do domínio é* $\frac{1}{n-1}\det(\Theta)$.

**Prova.** A primeira afirmação de que a aplicação é de Cremona é consequência de [29, Exemplo 2.4] (também [9, Teorema 3.12]) e é válida em característica arbitrária.

Procedemos agora para determinar o fator de inversão. Consideremos a matriz Jacobiana dual de [31] a qual é a matriz Jacobiana com respeito a $X_1, \dots, X_n$ das formas lineares nas variáveis de chegada $Y_1, \dots, Y_n$ induzidas pelas colunas de $\mathcal{L}$. Isso nos dá a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} \sum_{r=1}^n \frac{\partial \ell_{r1}}{\partial X_1} Y_r & \dots & \sum_{r=1}^n \frac{\partial \ell_{r1}}{\partial X_n} Y_r \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{r=1}^n \frac{\partial \ell_{rn-1}}{\partial X_1} Y_r & \dots & \sum_{r=1}^n \frac{\partial \ell_{rn-1}}{\partial X_n} Y_r \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Por [29, Exemplo 2.4] a aplicação inversa é definida pelos menores maximais (com sinal) dessa matriz. Desse modo, considerando $\delta_i$ o $(n-1)$-menor (com sinal) dessa matriz omitindo a $i$-ésima linha, por definição do fator de inversão do domínio, devemos mostrar que avaliando $\delta_i$ via a aplicação $Y_i \mapsto \Delta_i$ o resultado é $\frac{1}{n-1}\det(\Theta)$.

Para esse propósito, primeiro notamos a seguinte igualdade, onde agora $\Delta_i$ denota o respectivo menor sem sinal:

$$\sum_{r=1}^n (-1)^{n+r} \frac{\partial \ell_{rj}}{\partial X_k} \Delta_r = \sum (-1)^{n+r+1} \ell_{rj} \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_k}, \text{ for } 1 \le k \le n,\ 1 \le j \le n-1,$$

Daí segue:

$$\delta_i(\boldsymbol{\Delta}) = \det \left( \sum_{r=1}^n (-1)^{n+r+1} \ell_{r1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_{i-1}} \\ \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_{i+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_n} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \sum_{r=1}^n (-1)^{m+r+1} \ell_{rn-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_{r-1}} \\ \frac{\partial \Delta_i}{\partial X_{r+1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Delta_r}{\partial X_n} \end{pmatrix} \right)$$

Escreva $[r_1 \dots r_{n-1}]$ para o $(n-1)$-menor de $\mathcal{L}$ que usa as linhas $r_1, \dots, r_{n-1}$ e considere $\alpha_{r_1,\dots,r_{n-1}} := (n+1)(n-1) + \sum_{s=1}^{n} r_s$. Pela multi-linearidade do determinante, o resultado de avaliar $\delta_i$ é então:

$$\sum_{1\leq r_1<\dots<r_{n-1}\leq n} \left((-1)^{\alpha_{r_1 \dots r_{n-1}}} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \ell_{\sigma(r_1)1} \cdots \ell_{\sigma(r_{n-1})n-1}\right) \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_{i-1}} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_{i-1}} \\ \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_{i+1}} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_{i+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_n} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\leq r_1<\dots<r_{n-1}\leq n} (-1)^{\alpha_{r_1 \dots r_{n-1}}} [r_1 \dots r_{n-1}] \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_{i-1}} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_{i-1}} \\ \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_{i+1}} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_{i+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_{r_1}}{\partial X_n} & \dots & \frac{\partial \Delta_{r_{n-1}}}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial \Delta_n}{\partial X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_{i-1}} & \dots & \frac{\partial \Delta_n}{\partial X_{i-1}} \\ \Delta_1 & \dots & \Delta_n \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_{i+1}} & \dots & \frac{\partial \Delta_n}{\partial X_{i+1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta_1}{\partial X_n} & \dots & \frac{\partial \Delta_n}{\partial X_n} \end{pmatrix} = \frac{X_i}{n-1} \det \Theta$$

usando a fórmula de Euler.

**Corolário 2.3.2.** *Seja $R = k[X_1, \dots, X_n]$ um anel de polinômios sobre um corpo $k$ de característica zero, com sua graduação standard, e seja $\mathcal{L}$ uma $n \times (n-1)$ matriz linear geral. Então $I_{n-1}(\mathcal{L})$ é o ideal base de uma aplicação de Cremona de $\mathbb{P}^{n-1}$ e o fator de inversão do domínio é $\frac{1}{n-1}\det(\Theta)$, onde $\Theta$ denota a matriz Jacobiana dos $(m-1)$-menores de $\mathcal{L}$.*

**Prova.** Segue imediatamente da Proposição 2.1.2(iii) e Proposição 2.3.1. $\square$

Para $m = n+1$, o seguinte resultado é central para a discussão.

**Proposição 2.3.3.** *Seja $\mathcal{L}$ uma matriz geral linear de ordem $(n+1) \times n$ sobre $R = k[\mathbf{X}] = k[X_1, \dots, X_n]$, com $n \geq 3$. Pondo $I := I_n(\mathcal{L}) \subset R$, sejam $D_j \in I^{(n-1)} \setminus I^{n-1}$,*

*$(j = 1, \ldots, n)$ os fatores de inversão do domínio associados a um conjunto completo de representantes mínimos da inversa do mapa de Cremona definido por $I$. Então:*

(i) *Se $F = \mathrm{mdc}(D_1, \ldots, D_n)$, $D_1/F, \ldots, D_n/F$ definem um mapa de Cremona de $\mathbb{P}^{n-1}$;*

(ii) *Se $F = 1$ então o ideal $(D_1, \ldots, D_n)$ tem codimensão 2 e uma resolução livre mínima graduada dele é:*

$$0 \to\ R(-n^2)\ \stackrel{\mathbf{X}^t}{\to}\ R(-(n^2-1))^n\ \stackrel{\Psi}{\to} R(-(n(n-1)-1))^n\ \to R \qquad (2.6)$$

*onde $\Psi$ é a matriz Jacobiana dual dos $\Delta$'s lida nos mesmos e $\mathbf{X}^t$ é simplesmente a transposta da matriz das variáveis.*

(iii) *$I^{(n-1)}/I^{n-1}$ é minimamente gerado pelas classes de $D_1, \ldots, D_n$; em particular, $I^{(n-1)}$ é minimamente gerado por $D_1, \ldots, D_n$ e pelos geradores de $I^{n-1}$ que não são da forma $X_iD_j$.*

(iv) *O fator de inversão do domínio $G$ da aplicação de Cremona definida pelos polinômios $D_1, \ldots, D_n$ é a $(n-1)$-ésima potência de um elemento $E$ que pertence 'a potência simbólica $I^{(n(n-1)-1)}$.*

**Prova.** (i) Seja $\mathbf{\Delta} = \{\Delta, \ldots, \Delta_{n+1}\}$ o conjunto dos menores máximos com sinal de $\mathcal{L}$. Denotemos por $B$ a matriz Jacobiana dual de $\mathcal{L}$, cujos elementos pertencem ao anel $k[\mathbf{Y}] = k[Y_1, \ldots, Y_n, Y_{n+1}]$. Pela definição, temos $\mathbf{Y} \cdot \mathcal{L} = \mathbf{X} \cdot B^t$, onde o sobrescrito $^t$ denota transposta. De maneira semelhante, obtemos uma igualdade

$$\mathbf{Y} \cdot \mathcal{L}' = \mathbf{X} \cdot B,$$

onde os elementos da matriz $\mathcal{L}'$ são formas lineares em $k[\mathbf{Z}] = k[Z_1, \ldots, Z_n]$ e ela é unicamente determinada. Observamos também que a matriz $\mathcal{L}'$ distingue-se da matriz $\mathcal{L}$ apenas por reordenação dos coeficientes das formas lineares que compõem seus elementos. Logo, $\mathcal{L}'$ mantém a propriedade de ser linear geral. Assim, em particular, os resultados anteriores provados valem para $\mathcal{L}'$. Desse modo, o conjunto $\delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_{n+1}\}$ (ordenado com sinal) dos menores máximos de $\mathcal{L}'$ definem uma aplicação birracional sobre a imagem cuja matriz jacobiana dual fraca é $B^t$. Logo, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$(B^t_{j1}, \ldots, B^t_{jn}) \qquad \mathrm{mod}(\det B)$$

define uma inversa para a aplicação definida por $\delta$. Logo, temos as seguintes congruências estruturais:

$$\delta_i(B^t_{j1}, \ldots, B^t_{jn}) \equiv E_j Y_i \mod (\det B^t) \tag{2.7}$$

onde os $E_j$ são fatores de inversão do contradomínio.

**Afirmação:** *Seja $\mathcal{J}$ o ideal de definição da álgebra de Rees do ideal*

$$\mathbf{D} = (D_1/F, \ldots, D_n/F).$$

*Então,* $I_1(\mathbf{X} \cdot B) \subset \mathcal{J}$.

Para provar essa afirmação é suficiente deduzir que

$$\mathbf{X} \cdot B^t(\delta(D_1, \ldots, D_n)) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Mas isso é verdade se, e somente se,

$$\mathbf{X} \cdot B^t(\delta(X_n D_1, \ldots, X_n D_n)) = (0, 0, \ldots, 0)$$

Por outro lado, notemos que

$$X_n D_i = B_{in}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+1}) = B^t_{ni}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+1}) \tag{2.8}$$

onde $B_{ij}$ é o cofator de $B$ correspondente a entrada indexada por $(i, j)$ e $B_{in}(\Delta_1, \ldots, \Delta_{n+1})$ é esse cofator lido em $\mathbf{\Delta}$. Mas, $B_{ij} = B^t_{ji}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} \cdot B^t(\delta(X_n D_1, \ldots, X_n D_n)) &= \mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \ell_{i1}}{\partial X_1} \delta_i(X_n \mathbf{D}) & \ldots & \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \ell_{in}}{\partial X_1} \delta_i(X_n \mathbf{D}) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \ell_{i1}}{\partial X_3} \delta_i(X_n \mathbf{D}) & \ldots & \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial \ell_{in}}{\partial X_n} \delta_i(X_n \mathbf{D}) \end{pmatrix} && (2.9) \\
&= \left( \sum_{i=1}^{n+1} \ell_{i1} \delta_i(X_n \mathbf{D}), \ldots, \sum_{i=1}^{n+1} \ell_{in} \delta_i(X_n \mathbf{D}) \right) && (2.10) \\
&= E_n(\mathbf{\Delta}) \left( \sum \ell_{i1} \Delta_i, \ldots, \sum \ell_{in} \Delta_i \right) && (2.11) \\
&= (0, \ldots, 0) && (2.12)
\end{aligned}$$

A igualdade (2.11) segue de (2.7), (2.8) e (2.10) (também é importante lembrar que

$\det(B^t)$ lido nos $\Delta$'s é zero). A igualdade (2.12) segue de (2.11) utilizando o fato de que $\mathcal{L}_1$ é matriz de sizigias de $\mathbf{\Delta}$.

Dessa afirmação segue que uma submatriz da Jacobiana dual de $\mathbf{D}$ construída com as equações de $I_1(\mathbf{X} \cdot B^t(\delta))$ é $B(\delta)$ que sabemos ser uma matriz de posto $n-1$. Segue então de [9] que o conjunto $\mathbf{D}$ define uma transformação de Cremona.

(ii) Primeiro deduziremos que (2.6) é um complexo. Para isso, lembramos que

$$\operatorname{adj}(\Psi) = \begin{pmatrix} X_1D_1 & X_1D_2 & \dots & X_1D_n \\ X_2D_1 & X_2D_2 & \dots & X_2D_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_nD_1 & X_nD_2 & \dots & X_nD_n \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Como $\Psi$ tem posto $n-1$, segue que

$$\Psi \cdot \operatorname{adj}(\Psi) = \mathbf{0} \tag{2.14}$$

e

$$\operatorname{adj}(\Psi) \cdot \Psi = \mathbf{0} \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15)conclui-se que $\mathbf{X}^t$ e $\Psi$ são, respectivamente, sizigias de primeira e segunda ordem de $(D_1, \dots, D_n)$. Portanto, segue que realmente (2.6) é um complexo. Para ver a exatidão desse complexo, notemos de (2.13) que $I_{n-1}(\Psi) = (\mathbf{X})(D_1, \dots, D_n)$; logo, $\operatorname{alt}(I_{n-1}(\Psi)) \geq 2$. Também temos que $\operatorname{rank}(\Psi) = n-1$ e $\operatorname{alt}(I_1(\mathbf{X}^t)) = n \geq 3$. À luz desses dados a exatidão segue do Critério de Buchsbaum-Eisenbud [15, Theorem 20.9].

(iii) Pela Proposição 2.2.1 temos $(I^{n-1}, D_1, \dots, D_n) \subset I^{(n-1)}$. Por outro lado, pela Proposição 2.3.3, $I^{(n-1)}/I^{n-1}$ é gerado minimamente por $n$ elementos de grau $n(n-1)-1$. Para concluir que os resíduos de $D_1, \dots, D_n$ sobre $I^{(n-1)}/I^{n-1}$ formam um conjunto mínimo de geradores desse módulo é suficiente mostrar que eles são $k$-linearmente independentes. Mas isso resulta da parte (i).

(iv) Primeiro definamos

$$H_i(Z_1, \dots, Z_n) := Z_i d_i \ (= B^t_{ii}(\delta_1, \dots, \delta_{n+1})) \tag{2.16}$$

onde $d_1, \dots, d_n$ são as coordenadas da inversa da cremona definida por $D_1, \dots, D_n$.

Avaliando $H_i$ em $X_i\mathbf{D} = (X_iD_1, \ldots, X_iD_n)$, para cada $1 \leq j \leq n$, vem:

$$\begin{aligned} H_i(X_iD_1, \ldots, X_iD_n) &= X_iD_id_i(X_iD_1, \ldots, X_iD_n) & (2.17) \\ &= X_i^{n(n-1)}D_id_i(D_1, \ldots, D_n) & (2.18) \\ &= X_i^{n(n-1)+1}D_iG & (2.19) \end{aligned}$$

Por outro lado temos:

$$\begin{aligned} H_i(X_iD_1, \ldots, X_iD_n) &= B_{i,i}^t(\delta_1(X_i\mathbf{D}), \ldots, \delta_n(X_i\mathbf{D})) & (2.20) \\ &= B_{i,i}^t(E_i(\mathbf{\Delta})\Delta_1, \ldots, E_i(\mathbf{\Delta})\Delta_{n+1}) & (2.21) \\ &= E_i(\mathbf{\Delta})^{n-1}B_{i,i}^t(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) & (2.22) \\ &= E_i(\mathbf{\Delta})^{n-1}X_iD_i & (2.23) \end{aligned}$$

Logo,

$$X_i^{n(n-1)}G = E_i(\mathbf{\Delta})^{n-1},$$

ou seja,

$$X_i^nG^{1/n-1} = E_i(\mathbf{\Delta}) \tag{2.24}$$

Como o grau de $E_i$ é $n(n-1)-1$, segue que $(X_1^n, \ldots, X_n^n)G^{1/n-1} \subset I^{n(n-1)-1}$. Dessa inclusão segue que $E := G^{1/n-1} \in I^{(n(n-1)-1)}$. □

**Observação 2.3.4.** Acreditamos que para matrizes lineares gerais a hipótese de que $\mathrm{mdc}(D_1, \ldots, D_n) = 1$ é automática, i.e., ela é uma consequência da matriz ser linear geral. Contudo, para outras matrizes lineares não esperamos que isso possa ocorrer em geral. De fato, o ideal dos menores máximos da matriz do Exemplo 2.2.7, além de não satisfazer o item (iii) da proposição acima (como vimos no loc. cit.), é tal que os fatores de inversão considerados no item (i) têm máximo divisor comum próprio, gerando um ideal de codimensão 1.

Passemos ao principal teorema dessa parte.

**Teorema 2.3.5.** (car($k$)=0) *Seja $\mathcal{L}$ uma $n \times (n-1)$ matriz linear geral sobre $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, com $n \geq 3$. Seja $I := I_{n-1}(\mathcal{L}) \subset R$. Então a álgebra de Rees simbólica $\mathcal{R}^{(I)}$ é um domínio normal Gorenstein gerado sobre $R$ por $It$ e $I^{(n-1)}t^{n-1}$; mais precisamente, um conjunto mínimo de tais geradores consiste dos $(n-1)$-menores de*

*$\mathcal{L}$ e o fator de inversão associado a um representante mínimo da aplicação inversa definida por esses menores.*

**Prova.** (a) Primeiro, a álgebra de Rees simbólica $\mathcal{R}^{(I)}$ de $I$ é um anel Gorenstein; precisamente, ele é um domínio de Krull quase-Gorenstein devido $\operatorname{ht} I = 2$ e [32]. Por outro lado, pela prova de [33, Corollary 2.4 (b)], $\mathcal{R}^{(I)}$ é finitamente gerada pois temos um isomorfismo $\mathcal{R}^{(I)} \simeq \mathcal{R}(I)[t^{-1}]$. Além disso, o último é Cohen–Macaulay pois $\mathcal{R}(I)$ é Cohen–Macaulay pela Proposição 2.2.1 (b). Segue que $\mathcal{R}^{(I)}$ é domínio normal Gorenstein.

Para explicitar a geração, sejam $f_1, \ldots, f_n \in k[\mathbf{Y}]$ formas do mesmo grau, com máximo divisor comum igual a 1, definindo a aplicação inversa e seja $D \in R$ o fator de inversão no domínio correspondente. Escreva $J = (f_1, \ldots, f_n) \subset k[\mathbf{Y}]$. Por definição, temos

$$D = f_i(g_1, \ldots, g_n)/X_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

onde $\mathbf{g} = \{g_1, \ldots, g_n\}$ são os menores (com sinal) geradores de $I$. Identificando as duas álgebras de Rees $\mathcal{R}_R(I) = R[It] \subset R[t]$ e $\mathcal{R}_k[\mathbf{Y}](J) = k[\mathbf{Y}][Ju] \subset k[\mathbf{Y}][u]$ pelo $k$-isomorfismo que leva $Y_i \mapsto g_i t$ e $X_i \mapsto f_i u$, então $D$ é identificado com $f_1/X_1$ no corpo de frações comum. Assim, pelo Teorema 2.1.3 (ii) e [33, Corollary 2.4 (b)] segue que $\mathcal{R}^{(I)}$ é gerado por $It$ e $Dt^{n-1}$. □

No caso $m = n + 1$ temos o seguinte resultado preparatório:

**Proposição 2.3.6.** *Seja $\mathcal{L}$ uma $(n+1)\times n$ matriz linear geral sobre $R = k[X_1, \ldots, X_n]$. Ponhamos $I := I_n(\mathcal{L}) \subset R$. Sejam $D_1, \ldots, D_n$ os fatores de inversão definidos pelos geradores de $I$ e $E \in I^{(n(n-1)-1)}$, obtidos através da Proposição* 2.3.3. *Sejam $\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}, \mathbf{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_{n+1}\}, \mathbf{Z} = \{Z_1, \ldots, Z_n\}, W$ conjuntos de indeterminadas mutuamente independentes. Consideremos o homomorfismo sobrejetivo de $R$-álgebras:*

$$\pi : k[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, W] \twoheadrightarrow R[It, D_1 t^{n(n-1)-1}, \ldots, D_n t^{n(n-1)-1}, E t^{n(n-1)-1}]$$

*tal que $X_i \mapsto X_i$, $Y_j \mapsto \Delta_j t$, $Z_r \mapsto D_r t^{n-1}$ e $W \mapsto E t^{n(n-1)-1}$. Então* $\ker(\pi)$ *contém os seguintes conjuntos de polinômios:*

- *$n$ equações de $I_1(\mathbf{X} \cdot B^t)$.*
- *$n$ equações de $I_1(\mathbf{Z} \cdot B)$.*

- $n^2$ *equações de* $I_1(\mathbf{X}^t \cdot \mathbf{Z} - \mathrm{adj}(B))$.
- $n$ *equações* $\{X_1W^{n-1} - d_1(\mathbf{Z}), \ldots, X_nW^{n-1} - d_n(\mathbf{Z})\}$, *onde* $d_1, \ldots, d_n$ *são formas definindo o inverso do mapa de Cremona definido por* $D_1, \ldots, D_n$.
- $n+1$ *equações* $\{Y_1W - \delta_1(\mathbf{Z}), \ldots, Y_{n+1}W - \delta_{n+1}(\mathbf{Z})\}$, *obtidas através de* (2.30).
- $n$ *equações* $\{X_1W - Q(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}), \ldots, X_nW - Q(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})\}$, *onde* $Q_i(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ *são polinômios em* $k[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]$ *da forma*

$$Q_i(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \sum_{t_1+\ldots+t_{n-2}=n-2} Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_{n-2}}^{t_{n-2}} P_{t_1,\ldots,t_{n-2}}(\mathbf{Z})$$

**Prova.** Com exceção dos dois últimos grupos de equações, as demais são facilmente deduzidas. Para deduzir estas últimas, lembramos que por um lado,

$$\delta_j(B_{n1}^t(\mathbf{\Delta}), \ldots, B_{nn}^t(\mathbf{\Delta})) \;=\; E_n(\mathbf{\Delta})\Delta_j \tag{2.25}$$

e por outro

$$\begin{aligned} \delta_j(B_{n1}^t(\mathbf{\Delta}), \ldots, B_{nn}^t(\mathbf{\Delta})) &= \delta_j(B_{1n}(\mathbf{\Delta}), \ldots, B_{nn}(\mathbf{\Delta})) && (2.26)\\ &= \delta_j(X_nD_1, \ldots, X_nD_n) && (2.27)\\ &= X_n^n\delta(D_1, \ldots, D_n) && (2.28) \end{aligned}$$

Logo,

$$E_n(\mathbf{\Delta})\Delta_j = X_n^n\delta_j(\mathbf{D}) \tag{2.29}$$

Dessa equação juntamente com (2.24) temos:

$$X_n^n\Delta_jE = X_n^n\delta_j(\mathbf{D}) \tag{2.30}$$

Logo,

$$\Delta_jE = \delta_j(\mathbf{D}) \tag{2.31}$$

e assim obtemos as equações do penúltimo grupo.

Para obter as equações do último grupo afirmamos inicialmente que para qualquer coleção de inteiros não negativos $t_1, \ldots, t_s$, com $s \leq n+1$, a para cada subconjunto

$\{j_1, \ldots, j_s\} \subset \{1, \ldots, n+1\}$, os polinômios

$$Y_1^{t_1} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_1+\ldots+t_s} - \delta_{j_1}(\mathbf{Z})^{t_1} \cdots \delta_{j_s}(\mathbf{Z})^{t_s} \in \ker(\pi)$$

Para provarmos essa afirmação procedemos por indução sobre $s$.

O resultado é claro para $s = 1$ pois $Y_j W - \delta_j \in \ker(\pi)$ e é um fator de $Y_j^t W^t - \delta_j^t$, for any $t$.

Assim, assumamos que $s > 1$ e que, sem perda de generalidade, $t_1 \neq 0$ (o resultado é trivialmente satisfeito se todos $t$'s são nulos). Temos:

$$\begin{aligned}
(Y_{j_1}^{t_1} W^{t_1} - \delta_{j_1}^{t_1}) \quad Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_2+\ldots+t_s} &= Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_1+\ldots+t_s} - \delta_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_2+\ldots+t_s} \\
&= Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_1+\ldots+t_s} - \delta_{j_1}^{t_1} \cdots \delta_{j_s}^{t_s} + \delta_{j_1}^{t_1} \cdots \delta_{j_s}^{t_s} - \delta_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_2+\ldots+t_s} \\
&= (Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_1+\ldots+t_s} - \delta_{j_1}^{t_1} \cdots \delta_{j_s}^{t_s}) - \delta_{j_1}^{t_1} (Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_2+\ldots+t_s} - \delta_{j_2}^{t_2} \cdots \delta_{j_s}^{t_s})
\end{aligned}$$

Aplicando a hipótese indutiva sobre as duas parcelas dessa última igualdade temos que o polinômio

$$Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_s}^{t_s} W^{t_1+\ldots+t_s} - \delta_{j_1}(\mathbf{Z})^{t_1} \cdots \delta_{j_s}(\mathbf{Z})^{t_s}$$

também pertence a $\ker(\pi)$.

Em particular, considerando $s = n-2$ a $t_1, \ldots, t_{n-2}$ qualquer partição de $n-2$, o polinômio

$$Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_{n-2}}^{t_{n-2}} W^{n-2} - \delta_{j_1}(\mathbf{Z})^{t_1} \cdots \delta_{j_{n-2}}(\mathbf{Z})^{t_{n-2}} \tag{2.32}$$

pertence a $\ker(\pi)$.

Por outro lado,

$$(d_1, \ldots, d_n) \subset (\delta_1, \ldots, \delta_{n+1})^{(n-1)}$$

e por mais forte razão

$$(d_1, \ldots, d_n) \subset (\delta_1, \ldots, \delta_{n+1})^{(n-2)} = (\delta_1, \ldots, \delta_{n+1})^{n-2}. \tag{2.33}$$

Fixando $i \in \{1, \ldots, n\}$ podemos escrever

$$d_i(\mathbf{Z}) = \sum_{t_1+\ldots+t_{n-2}=n-2} P_{t_1,\ldots,t_{n-2}}(\mathbf{Z}) \delta_{j_1}(\mathbf{Z})^{t_1} \cdots \delta_{j_{n-2}}(\mathbf{Z})^{t_{n-2}}. \tag{2.34}$$

Assim, temos que o polinômio

$$\begin{aligned} X_iW^{n-1} - d_i(\mathbf{Z}) &- \sum_{t_1+\ldots+t_{n-2}=n-2} P_{t_1,\ldots,t_{n-2}}(\mathbf{Z}) \left(Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_{n-2}}^{t_{n-2}} W^{n-2} - \delta_{j_1}(\mathbf{Z})^{t_1} \cdots \delta_{j_{n-2}}(\mathbf{Z})^{t_{n-2}}\right) \\ &= W^{n-2}\left(X_iW - \sum_{t_1+\ldots+t_{n-2}=n-2} P_{t_1,\ldots,t_{n-2}}(\mathbf{Z}) Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_{n-2}}^{t_{n-2}}\right)\end{aligned}$$

pertence a $\ker(\pi)$. Como $\ker(\pi)$ é um ideal primo e $W \notin \ker(\pi)$, concluimos que

$$X_iW - \sum_{t_1+\ldots+t_{n-2}=n-2} P_{t_1,\ldots,t_{n-2}}(\mathbf{Z}) Y_{j_1}^{t_1} Y_{j_2}^{t_2} \cdots Y_{j_{n-2}}^{t_{n-2}} \in \ker(\pi)$$

como queríamos mostrar.

Obtemos, assim, os conjuntos de equações pertencentes ao núcleo de $\pi$, como prometido. $\square$

Temos a seguinte conjectura.

**Conjectura 2.3.7.** *Seja $\mathcal{L}$ uma $(n+1)\times n$ matriz linear geral sobre $R = k[X_1, \ldots, X_n]$. Ponhamos $I := I_n(\mathcal{L}) \subset R$. Sejam $D_1, \ldots, D_n$ os fatores de inversão definidos pelos geradores de $I$ e $E \in I^{(n(n-1)-1)}$, obtidos através da Proposição* 2.3.3. *Então:*

(i) $\ker(\pi)$ *é gerado pelos polinômios*

$$I_1(\mathbf{X}\cdot B^t),\ I_1(\mathbf{Z}\cdot B),\ I_1(\mathbf{X}^t\cdot\mathbf{Z}-\mathrm{adj}(B)),\ Y_jW-\delta_j(\mathbf{Z})\ (1 \le j \le n+1),\ X_iW-Q_i(\mathbf{Y},\mathbf{Z})\ (1 \le i \le n),$$

(ii) $\mathcal{R}^{(I)} = R[It, D_1t^{n-1}, \ldots, D_nt^{n-1}, Et^{n(n-1)-1}]$

(iii) $\mathcal{R}^{(I)}$ *é domínio normal Gorenstein.*

**Observação 2.3.8.** (1) A conjectura acima foi verificada para valores iniciais de $n$. Além disso, pressupondo que a álgebra $A := R[It, D_1t^{n-1}, \ldots, D_nt^{n-1}, Et^{n(n-1)-1}]$ da conjectura é Cohen–Macaulay (o que também é corroborado para valores iniciais de $n$) e admitindo o item (i) da conjectura, o ideal $(\mathbf{X})A$ tem codimensão $\ge 2$, o que provaria os outros dois itens da conjectura.

(2) O caso das matrizes lineares gerais tais que $m \ge n+2$ é bem mais complicado. Evidências computacionais, na menor numerologia possível ($n = 3$ e $m = 5$), mostram que o comportamento das potências simbólicas é demasiadamente instável: para $1 \le r \le 5$ existem geradores genuínos em $I^{(r)}$. As potências simbólicas subsequentes tem comportamento imprevisível, apresentando geradores genuínos em intervalos

irregulares. Encontramos estes geradores genuínos mesmo na potência $I^{(23)}$. Parece razoável então perguntar quando para $m > n+1 \geq 4$ a álgebra de Rees $\mathcal{R}^{(I)}$ é finitamente gerada.

# Capítulo 3

# Ideais com apresentação linear estruturada

### 3.0.1 Matrizes $r$-cataléticas

A estrutura básica dessa parte é uma $m \times (m-1)$ *$r$-catalética* em $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, onde $1 \leq r \leq m-1$ e $n = (m-1)(r+1)$:

$$\mathcal{C} := \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & \ldots & X_{m-1} \\ X_{r+1} & X_{r+2} & X_{r+3} & \ldots & X_{m+r-1} \\ X_{2r+1} & X_{2r+2} & X_{2r+3} & \ldots & X_{m+2r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{(m-1)r+1} & X_{(m-1)r+2} & X_{(m-1)r+3} & \ldots & X_{(m-1)r+(m-1)} \end{pmatrix}$$

Note que para esse tamanho de uma matriz catalética, o número $n$ de variáveis é um número fatorável propriamente, independentemente de $r$. Nessa linha de argumentação, o número de matrizes cataléticas com salto para uma dado $n$ é o número de 2-fatorações próprias de $n$. Os valores extremos $r = 1$ e $r = m-1$ fornecem, respectivamente, a matriz de Hankel ordinária e a matriz genérica.

Temos:

**Proposição 3.0.9.** *Seja $I \subset R = k[X_1, \ldots, X_n]$ o ideal dos $(m-1)$-menores de uma matriz $r$-catalética $\mathcal{C}$, de ordem $m \times (m-1)$, com $1 \leq r \leq m-1$. Então*

(a) $\mathrm{alt}(I_t(\mathcal{C})) \geq m - t + 2$ *para cada* $1 \leq t \leq m-2$ *e* $\mathrm{alt}(I) = 2$.

(b) *$R/I$ é um domínio Cohen–Macaulay normal.*

(c) *$I$ é um ideal de tipo linear.*

(d) *$I$ é normalmente livre de torção.*

**Prova.** (a) O resultado é claro para $t = 1$; suponhamos que $2 \leq t \leq m-2$. Para todo $t$ nesse intervalo, consideremos a submatriz $\mathcal{C}_t$ de $\mathcal{C}$ formada por suas $t$ primeiras colunas. Então o ideal $I_t(\mathcal{C}_t)$ dos menores máximos de $\mathcal{C}_t$ é primo e satisfaz $\operatorname{alt}(I_t(\mathcal{C}_t)) = m-t+1$ (ver, e.g., [12, Theorem 2.1]). Como a inclusão $I_t(\mathcal{C}_t) \subset I_t(\mathcal{C})$ é própria, temos o desejado. Para $t = m-1$, $I_t(\mathcal{L}) = I$ claramente contém uma sequência regular com dois elementos; logo, sua altura é dois.

(b) A propriedade de Cohen–Macaulay é bem conhecida, uma vez que $\operatorname{alt}(I) = 2$. Se $Q \subset R/I$ é um primo tal que $(R/I)_Q$ não é regular, então $Q \supset I_{m-2}/I$ (ver [12, Corollary 3.3. (1)]). Por outro lado, $\operatorname{alt}(I_{m-2}(\mathcal{C})/I) \geq m-(m-2)+2-2 = 2$. Desse modo, $R/I$ satisfaz a condição $(R_1)$ de Serre; logo, $R/I$ é domínio normal.

(c) Por (a), $I$ satisfaz a condição $F_1$ (ou $G_\infty$). Consequentemente, $I$ é de tipo linear (ver [20]).

(d) Esta asserção pode possivelmente ser obtida pelos métodos de [26], porém daremos uma prova direta na situação presente. A demonstração nesse caso é como na Proposição 2.1.2 com uma pequena ressalva. Em [loc. cit.] a única passagem em que se usou a hipótese da matriz ser linear geral foi para aplicar a igualdade $\operatorname{alt}(I_{t_0+1}(\mathcal{L})) = (m-t_0)(m-t_0-1)$, da qual se deduzia que $\operatorname{alt}(I_{t_0+1}(\mathcal{L}))-1 \geq m-t_0$. O resto do argumento dependia apenas dessa estimativa. Ora, substituindo $\mathcal{L}$ por $\mathcal{C}$, temos $\operatorname{alt}(I_{t_0+1}(\mathcal{C}))-1 \geq m-t_0$ diretamente pelo item (a). Isto conclui a prova deste item. $\square$

### 3.0.2 Matriz Sub-Hankel genérica

Da subseção anterior, com $r = 1$, sabemos que o ideal $I = I_{n-1}(\mathcal{H})$ de uma matriz de Hankel $\mathcal{H}$ de ordem $m \times (m-1)$ em $n = 2(m-1)$ variáveis satisfaz várias propriedades "boas". Consideraremos agora uma degeneração de $\mathcal{H}$ na qual alguns elementos são substituidos por zero. A versão de ordem $m \times m$ desse modelo foi introduzida em [7] em conexão com a teoria de polinômios homalóides.

Precisamente temos:

$$\mathcal{SH} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & \ldots & X_{n-3} & X_{n-2} \\ X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & \ldots & X_{n-2} & X_{n-1} \\ X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & \ldots & X_{n-1} & X_n \\ X_4 & X_5 & X_5 & X_7 & \ldots & X_n & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ X_{n-3} & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n & \ldots & 0 & 0 \\ X_{n-2} & X_{n-1} & X_n & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ X_{n-1} & X_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Esse modelo satisfaz todas as propriedades anteriores, exceto a normalidade:

**Proposição 3.0.10.** *Seja $n \geq 4$ e $I = I_{n-2}(\mathcal{SH})$. Então:*

(a) $\mathrm{alt}(I_t(\mathcal{SH})) \geq n - t + 1$ *para cada* $1 \leq t \leq n-3$ *e $I$ é ideal primo de altura* 2.

(b) *$R/I$ <u>não</u> é normal.*

(c) *$I$ é um ideal de tipo linear.*

(d) *$I$ é normalmente livre de torção.*

**Prova.** (a) A prova é semelhante ao argumento usado no caso catalético. Como antes, o caso $t = 1$ é imediato. Denotemos por $\mathcal{SH}_t$ a submatriz de $\mathcal{SH}$ formada por suas $t$ primeiras colunas, com $2 \leq t \leq n-3$. Como essas matrizes (incluindo $t = n-2$) são especializações da matriz de Hankel correspondente, temos:

$$k[X_1, \ldots, X_n]/I_t(\mathcal{SH}_t) \simeq k[X_1, \ldots, X_n]/(X_{n+1}, \ldots, X_{t+n-2}, I_t(\mathcal{H})).$$

Por esse isomorfismo e [11, Theorem 1] segue que $I_t(\mathcal{SH}_t)$ é um ideal primo de altura $n-t$. Em particular, para $t = n-2$ temos o resultado para $I$. Agora, para $2 \leq t \leq n-3$, o ideal $I_t(\mathcal{SH})$ não é primo (ele não é sequer reduzido pois contém uma potência não trivial de $X_n$). Desse modo, a inclusão $I_t(\mathcal{SH}_t) \subset I_t(\mathcal{SH})$ é própria pois o ideal menor é primo. Isso produz a asserção principal desse item.

(b) Mostraremos que $I$ não satisfaz a condição $(R_1)$. Para isso, considere o seguinte ideal primo de altura 3: $P = (X_{n-2}, X_{n-1}, X_n)$. Claramente, $I \subset P$ por uma verificação imediata no formato da matriz. Note que o $(n-3)$-menor do canto superior esquerdo de $\mathcal{SH}$ tem a forma $X_{n-3}^{n-3}+q$ onde $q \in P$; logo, não pertence a $P$. Depois de operacões linha-colunas sobre $\mathcal{SH}$, vemos que $I_P = (\Delta_{n-2}, \Delta_{n-1})$, onde $\Delta_i$ denota o $(n-2)$-menor de $\mathcal{SH}$ obtido pela omissão da $i$-ésima linha. Afirmamos que $R_P/I_P$ não é regular. Para isso, é suficiente mostrar que $\Delta_{n-2} \in P^2$. Mas,

$$\Delta_{n-2} = (-1)^{n-1} X_{n-1} \det \begin{pmatrix} X_2 & X_3 & \dots & X_{n-2} \\ X_3 & X_4 & \dots & X_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n-2} & X_{n-1} & \dots & 0 \end{pmatrix} + (-1)^n X_n \det \begin{pmatrix} X_1 & X_3 & \dots & X_{n-2} \\ X_2 & X_4 & \dots & X_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n-3} & X_{n-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Expandindo os dois determinantes ao longo da última coluna em comum (cujos elementos são $X_{n-2}, X_{n-1}, X_n$) claramente temos a afirmação.

(c) e (d) são provadas exatamente da mesma maneira da Proposição 3.0.9. □

### 3.0.3 Matriz Quase-Hankel

Propomos agora um modelo de matriz, no caso em $m = n$, baseado na matriz de Hankel, a saber:

$$\mathcal{QH} := \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & X_{n-2} & X_{n-1} \\ X_2 & X_3 & X_4 & \dots & X_{n-1} & X_n \\ X_3 & X_4 & X_5 & \dots & X_n & \ell_{3,1} \\ X_4 & X_5 & X_6 & \dots & \ell_{4,1} & \ell_{4,2} \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ X_{n-1} & X_n & \ell_{n-1,1} & \dots & \ell_{n-1,n-4} & \ell_{n-1,n-3} \\ X_n & \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \dots & \ell_{n,n-3} & \ell_{n,n-2} \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

onde a parte triangular superior é um pedaço de uma matriz de Hankel, ao passo que os $\ell$'s são $\binom{n-1}{2}$ formas lineares gerais de $R = k[X_1, \dots, X_n]$. Tal matriz será chamada de *quase-Hankel* e denotada por $\mathcal{QH}$.

**Proposição 3.0.11.** *Se* $I = I_{n-1}(\mathcal{QH})$ *então:*

(a) $\operatorname{alt}(I_t(\mathcal{QH})) \geq n - t + 2$ *para cada* $1 \leq t \leq n-2$ *e* $\operatorname{alt}(I) = 2$

(b) *$R/I$ é domínio normal.*

(c) *$I$ é ideal de tipo linear*

(d) *A aplicação racional $\mathfrak{G} : \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ definida pelos $(n-1)$-menores de $\mathcal{QH}$ é uma aplicação de Cremona.*

(e) *Para todo $r \geq 0$, $I^{(r)}/I^r$ um módulo $(\mathbf{X})$-primário sempre que $I^{(r)} \neq I^r$.*

(f) *$\mathcal{R}^{(I)} = R[It, \det(\Theta)t^{n-1}]$, onde $\Theta$ é a matriz Jacobiana dos geradores de $I$. Além disso, também temos nesse caso temos que $\mathcal{R}^{(I)}$ é domínio normal Gorenstein.*

**Prova.** Primeiramente, consideremos o anel $S$ de polinômios obtido de $R$ por adjunção de $\binom{n-2}{2}$ variáveis. Em seguida, seja $\mathcal{G}$ a matriz $n \times (n-1)$ obtida como $\mathcal{QH}$, substituindo as formas lineares gerais $\ell$'s pelas $\binom{n-2}{2}$ variáveis adicionais introduzidas. Claramente, $\mathcal{QH}$ é especialização de $\mathcal{G}$. Por outro lado, $\mathcal{G}$ admite como especialização uma matriz de Hankel genérica. Disso segue que, como esta, $\mathcal{G}$, é 1-genérica. Dessa observação, juntamente com [12, Theorem 2.1, Corollary 3.3], resulta que, para todo $2 \leq t \leq n-1$, a submatriz $\mathcal{G}_t$ de $\mathcal{G}$, que envolve apenas as $t$ primeiras colunas desta, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $I_t(\mathcal{G}_t) = n - t + 1$.

(ii) $I_t(\mathcal{G}_t)$ é ideal primo.

(iii) $I_{t-1}(\mathcal{G}_t)/I_t(\mathcal{G}_t)$ é o lugar singular de $S/I_t(\mathcal{G}_t)$

Dessas informações, o ideal $I_t$ gerado pelo ideal $I_t(\mathcal{G}_t)$ e pelo $t$-menor do canto esquerdo de $\mathcal{G}$, tem as seguintes propriedades:

(i)' $S/I_t$ é Cohen-Macaulay.

(ii)' $\operatorname{alt}(I_t) = n - t + 2$.

para todo $2 \leq t \leq n-2$. Como os $\ell_{ij}$ são formas lineares gerais, podemos repetir o argumento do Teorema 2.1.1 usando o ideal $I_t$. No final, esse ideal especializa-se em um ideal contido em $I_t(\mathcal{QH})$, cuja altura é $n-t+2$. Dessa maneira, segue o item (a).

Para o item (b), repetimos o argumento da Proposição 2.1.2(ii)

O item (c) segue imediatamente do item (a), que por sua vez implica no item (d).

Para o item (e) a prova se processa como no Teorema 2.1.3, usando as estimativas do item (a).

Finalmente, tendo (c), (d) e (e), o item (f) se desenvolve como na prova do Teorema 2.2.2(a). $\square$

Conjecturamos a possibilidade de especificar ainda mais a escolha dos $\ell_{i,j}$ de modo que as asserções do item anterior continuem verdadeiras. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
\ell_{3,1} &= X_1 - X_2 \\
\ell_{4,1} &= X_1 - X_3,\ \ell_{4,2} = X_2 - X_3 \\
\ell_{5,1} &= X_1 - X_4,\ \ell_{5,2} = X_2 - X_3,\ \ell_{5,3} = X_3 - X_4 \\
&\vdots \\
\ell_{n-1,1} &= X_1 - X_{n-2},\ \ldots,\ \ell_{n-1,n-3} = X_{n-3} - X_{n-2} \\
\ell_{n,1} &= X_1 - X_{n-1},\ \ldots,\ \ell_{n,n-2} = X_{n-2} - X_{n-1}.
\end{aligned}$$

Na verdade, esta escolha faz parte do seguinte princípio que acreditamos funcionar em geral: primeiro, os elementos adicionais da $i$-ésima linha deve usar apenas variáveis indexadas pelo conjunto $\{1, \ldots, i-1\}$; segundo, repetir o mínimo possível as formas lineares que aparecem nas linhas anteriores.

# Referências Bibliográficas


[1] L. Avramov, Complete intersections and symmetric algebras, J. Algebra **73** (1981), 248–263

[2] L. Avramov and J. Herzog, The Koszul algebra of a codimension 2 embedding, Math. Z. **175** (1980) 249–260.

[3] C. N. Bahiano, Symbolic powers of edges ideals, J. Algebra **273** (2004, 517–537.)

[4] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay Rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 39, Cambridge University Press, 1993.

[5] D. Bayer and M. Stillman, *Macaulay*: a computer algebra system for algebraic geometry, Macaulay version 3.0 1994 (Macaulay for Windows by Bernd Johannes Wuebben, 1996).

[6] R. C. Cowsik, Symbolic powers and numbers of defining equations, Lecture notes in Pure and Applied Math. 91 (1984) 13–14.

[7] C. Ciliberto, F. Russo and A. Simis, Homaloidal hypersurfaces and hypersurfaces with vanishing Hessian, Advances in Math., **218** (2008) 1759–1805.

[8] B. Costa, Z. Ramos and A. Simis, Symbolic powers and Cremona maps, em andamento.

[9] A. Doria, H. Hassanzadeh and A. Simis, A characteristic free criterion of birationality, Advances in Math., **230** (2012), 390–413.

[10] L. Ein, R. Lazarsfeld and K. E. Smith, Uniform bounds and symbolic powers on smoth varieties, Invent. Math. **144** (2001), 241–252.

[11] D. Eisenbud, On the resiliency of determinantal ideals, Proceedings of the U.S.-Japan Seminar, Kyoto 1985. In *Advanced Studies in Pure Math. II, Commutative Algebra and Combinatorics,* ed. M. Nagata and H. Matsumura, North-Holland (1987) 29–38.

[12] D. Eisenbud, Linear sections of determinantal varieties, Amer. J. Mathematics, **110** (1988), 541–575.

[13] D. Eisenbud and C. Huneke, *Cohen–Macaulay Rees algebras and their specializations*, J. Algebra **81** (1983), 202-224.

[14] D. Eisenbud and B. Mazur, Evolutions, symbolic powers and Fittings ideals, J. Reine Angew. Math. **488** (1997), 189–201.

[15] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer, 1995.

[16] H. Flenner, L. O' Carroll, W. Vogel, *Joins and Intersections*, Springer, 1999.

[17] S. Goto, K. Nishida and K. Watanabe, Non-Cohen–Macaulay symbolic blow-ups for space monomial curves and counterexanples to Cowsik's question, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), 383-392.

[18] D. R. Grayson and M. Stillman, *Macaulay 2*, a software system for research in algebraic geometry. Available at, http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/

[19] H. Hassanzadeh and A. Simis, Plane Cremona maps: saturation, regularity and fat ideals, arXiv:1109.2815v2 [math.AC] 14 Sep 2011.

[20] J. Herzog, A. Simis and W. V. Vasconcelos, *Koszul homology and blowing-up rings*, *Commutative Algebra*, Lecture Notes in Pure and Applied Math., Vol. **84**, 79–169, Marcel-Dekker, New York, 1983.

[21] M. Hochster, Criteria for Equality of Ordinary and Symbolic Powers of Primes-Math. Z., **133** (1973), 53–65.

[22] M. Hochster and C. Huneke, Fine behavior of symbolic powers of ideals, IIlinois J. Math. **51** (2007) 171–183.

[23] C. Huneke, Hilbert functions and symbolic powers, Michigan Math. J. **34** (1987) 293–318.

[24] M. Morales and A. Simis, Arithmetically Cohen-Macaulay monomial curves in $\mathbb{P}^3$, **21** Comm. in Algebra (1993), 951–961.

[25] S. Morey and B. Ulrich, Rees algebras of ideals with low codimension, Proc. Amer. Math. Soc, **124** (1996) 3653–3661.

[26] L. D. Nam, The determinantal ideals of extended Hankel matrices, J. Pure Appl. Algebra. **215**, 1502–1515(2011).

[27] P. Roberts, A prime ideal in a polynomial ring whose symbolic blow-up is not Noetherian, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 589-592.

[28] P. Roberts, An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a naw counterexample to Hilbert's fourteenth problem, J. Algebra **132** (1990),461-473

[29] F. Russo and A. Simis, On birational maps and Jacobian matrices, Compositio Math. **126** (2001), 335–358.

[30] A. Simis, Effective computation of symbolic powers by jacobian matrices, Comm. in Algebra **24** (1996), 3561–3565.

[31] A. Simis, Cremona transformations and some related algebras, J. Algebra **280** (2004), 162–179.

[32] A. Simis and N. V. Trung, Divisor class group of ordinary of symbolic blow–ups, Math. Z. **198** (1988), 479–491.

[33] A. Simis, B. Ulrich and W. Vasconcelos, Jacobian dual fibrations, Amer. J. Math., **115**, (1993) 47–75.

[34] I. Swanson, Linear equivalence of ideal topologies, Math. Z. **234** (2000), 755-775.

[35] A. B. Tchernev, Torsion freeness of symmetric powers of ideals, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007) 3357–3367.

[36] B. Ulrich and W. Vasconcelos, The equations of Rees algebras of ideals with linear presenttion, Math. Z. **214** (1993),79–92.

[37] W. Vasconcelos, *Arithmetic of Blowup Algebras*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series **195**, Cambridge University Press, (1994).

[38] W. V. Vasconcelos, *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Springer, Heidelberg, 1998.