Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Filipe Andrade da Costa

O Problema de Calderón

Recife

30/07/2012

Filipe Andrade da Costa

O Problema de Calderón

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ramón Orestes Mendoza Ahumada

Recife

30/07/2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Costa, Filipe Andrade da
O problema de Calderón. / Filipe Andrade da Costa. - Recife: O Autor, 2012.
iv, 27 folhas: fig.

Orientador: Ramón Orestes Mendoza Ahumada.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Análise (matemática). 2. Física matemática. I. Ahumada, Ramón Orestes Mendoza (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) MEI2013 – 042

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ____

Ramón Orestes Mendoza Ahumada, *UFPE*

Orientador

____

Miguel Fidencio Loayza Lozano, *UFPE*

____

Cláudio Benedito Silva Furtado, *UFPB*

O PROBLEMA DE CALDERÓN

POR

Filipe Andrade da Costa

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Julho – 2012

Agradecimentos

- Agradeço primeiramente a Deus, que me deu forças para seguir mesmo nos momentos de dificuldade;
- A minha família que me apoiou a cada momento;
- Ao meu orientador, Prof. Ramón Mendoza, que muito me ensinou e pacientemente me orientou durante todo este periodo;
- Ao professor Mikko Salo, da Universidade de Helsinki, o qual ajudou a esclarecer alguns ponto sobre o problema;
- Aos colegas e amigos do departamento de matemática (DMat-UFPE), os quais tornaram cada momento em algo único. Mas, um agradecimento especial para Felipe Wergete, Luiz Silva, Katy Wellen, Itacira Ataide, Daniel Cassimiro, Fábio Lima, Wanderson Aleksander que estiveram mais próximos durante todo esse periodo, servindo de apoio e incentivo mesmo quando não imaginavam fazê-lo;
- A todos aqueles que leram as primeiras versões dessa dissertação, os quais ajudaram a moldá-la na sua atual forma.
- Aos meus amigos Fernando Vasconcelos e Isabela Farias pelos agradáveis momentos e incentivo.
- A Mário que sempre esteve presente, ajudando e tranquilizando mesmo nos momentos mais estressantes.
- Ao CNPQ, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Na presente dissertação, estaremos interessados em abordar algunas questões relacionadas a unicidade do problema de Calderón.

Palavras-Chave: Problema inverso da condutividade, equação de Schrödinger, soluções ópticas geométricas complexas.

Abstract

In this work, we study questions related to the uniqueness in the Calderón problem .

Key-Words: Conductivity inverse problem, Schrödinger equation, Complex geometrics optics solutions.

Sumário

Introdução

O problema inverso da condutividade, ou problema de Calderón, é um problema que tem por trás de si uma aplicação ao mundo real, e é dai que surgiu a ideia para seu estudo. Tal questão foi levantada pelo matematico argentino Alberto Pedro Calderón (1920- 1998), o qual publicou seus primeiros resultados em 1980, pela Sociedade Brasileira de Matemática , sob o título "On an inverse boundary value problem "([2]).

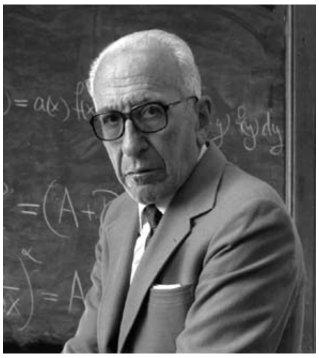

Figura 1: Alberto Pedro Calderón

O estudo do problema vem crescendo desde então, principalmente por suas aplicações que vem desde a prospecção de petróleo (onde se originou), e passa pela detecção de rachaduras e outros estragos em canos encobertos sem a necessidade de um metódo mais agressivo, e chega até a utilização na medicina com o objetivo de monitoramento pulmonar e detecção de câncer de mama.

O problema consiste em saber se é possível determinar a condutividade de um corpo conhecendo a corrente em sua fronteira. Para esclarecermos melhor iniciemos com o problema direto da condutividade.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, limitado e com fronteira C^∞. Ao aplicarmos uma tensão f na fronteira ($\partial\Omega$), é induzida uma tensão u no interior de Ω e tal tensão por sua vez é solução da seguinte equação diferencial parcial:

$$\begin{cases} \nabla\gamma\vec{\nabla}u = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = f & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

onde $\gamma \in C^2(\Omega)$, é uma função positiva que é a condutividade em Ω. No nosso caso temos $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, com o problema assim posto sabemos que existe uma única solução $u \in H^1(\Omega)$ para o problema (1). Assim, podemos definir o mapa de Dirichlet-Neumann (ou como utilizaremos a partir deste momento, o mapa DN), formalmente [1] como:

$$\Lambda_\gamma f = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega},$$

onde ν é o vetor normal únitario exterior. E fracamente, o mapa DN pode ser definido da seguinte forma:

$$(\Lambda_\gamma f, g) = \int_\Omega \gamma\nabla u \cdot \nabla v dx \text{ para toda } g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

onde u é solução de (1) e v é qualquer função em $H^1(\Omega)$ satisfazendo $v|_{\partial\Omega} = g$. Fisicamente o mapa DN corresponde a componente normal do campo elétrico gerado pelo potêncial u na fronteira de Ω. Então podemos formular mais precisamente o problema de Calderón da seguinte forma:

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, subconjunto aberto, limitado e com fronteira C^∞. Se conhecermos $\Lambda_\gamma f$ para toda $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ é possível determinar a condutividade γ em Ω?

Nesta dissertação não iremos abordar o problema de encontrar a condutividade γ, mas sim o de mostrar sua unicidade para o caso em que a condutividade γ seja positiva e C^2, este ponto será abordado no capítulo 2, assim como a construção de funções muito importantes para a solução do problema, que são as soluções ópticas geométricas complexas. Esta dissertação foi baseada nas notas da palestra [1] ministrada pelo professor Mikko Salo.

[1] Notemos que a restrição não é feita no sentido usual de função, pois neste caso estamos lidando com classes de funções, em nosso caso $L^2(\Omega)$

Capítulo 1

Séries de Fourier e Espaços de Sobolev

Neste capítulo iremos definir e enunciar alguns fatos sobre séries de Fourier em $L^2(Q)$, espaços de Sobolev e operador diferencial.

1.1 Séries de Fourier em $L^2(Q)$

Podemos definir a série de Fourier para uma função integrável 2π periódica em $\mathbb{R}^n$ como a série:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x} \ , x \in \mathbb{R}^n.$$

Estaremos interessados na utilização de funções que estejam em $L^2(Q)$, onde Q é o cubo $[-\pi,\pi]^n \subseteq \mathbb{R}^n$, este espaço munido da norma induzida pelo seguinte produto hermitiano torna-se um espaço de Hilbert:

$$\langle f, g\rangle = (2\pi)^{-n} \int_Q f\overline{g}dx, \ onde \ f, g \in L^2(Q).$$

Denotemos por $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ o espaço das sequências complexas $c = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ munido com a seguinte norma

$$\|c\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^n)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |c_k|^2\right)^{1/2}.$$

Sendo $(L^2(Q), \|\cdot\|)$ um espaço separável e sabendo que $\{e^{ik\cdot x}\}_{z\in\mathbb{Z}^n}$ é uma base ortonromal completa, pode-se mostrar o seguinte teorema.

Teorema 1.1. *i)Dado $f \in L^2(Q)$ existe a série de Fourier de f dada por:*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \hat{f}(k)e^{ik\cdot x}$$

A qual converge em $L^2(Q)$. Onde $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2}\int f(x).e^{-ik\cdot x}dx$.

ii) Verifica-se a igualdade de Plancherel $\|f\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{k\in L^2(Q)} |\hat{f}(k)|^2$;

iii) Reciprocamente, se $c = (c_k) \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ então a série

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_k e^{ik\cdot x}$$

define uma função $f \in L^2(Q)$ satisfazendo $\hat{f}(k) = c_k$.

A demonstração deste teorema segue direto do fato que a trasformada de Fourier é um isomorfimos entre $L^2(Q)$ e $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$, e além disso é uma transformação unitária, para mais detalhes veja por exemplo [7].

1.2 Espaços de Sobolev

Os espaços de Sobolev formam uma estrutura de grande importância na matemática moderna, principalmente para o estudo das equações diferencias. Tais espaços ganharam reconhecimento atráves dos estudos do matemático russo Sergei L'vovich Sobolev (6 de outubro 1908 - 3 de janeiro 1989) o qual formalizou e demonstrou muitas propriedades desses espaços.

Iniciaremos definindo os espaços de Sobolev para $\mathbb{R}^n$, os quais podem ser caracterizados atráves da transformada de Fourier da seguinte forma:

Definição 1.1. *Seja $s \geq 0$. Definimos os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo o espaço das funções [1] $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tais que $(1 + \|\xi\|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

[1]Notamos que na realidade estamos lidando com classe de funções

Este espaço munido com o seguinte produto hermitiano torna-se um espaço de Hibert:

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s \hat{f}\overline{\hat{g}}\lambda,$$

onde λ é a medida de Lebesgue. Observamos que para $s = 0$ temos que $H^0(\mathbb{R}^n) \equiv L^2(\mathbb{R}^n)$. Porém uma definição para o caso em que $s < 0$ também nos será necessária.

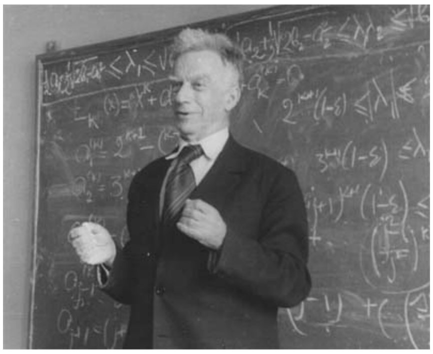

Figura 1.1: Sergei L'vovich Sobolev

Definição 1.2. *Seja $s < 0$. Definimos $H^s(\mathbb{R}^n)$ como sendo $[H^{-s}(\mathbb{R}^n)]'$, ou seja, o espaço dos funcionais lineares continuos de $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Notamos que a definição de $\hat{f} = \int f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx$ é válida apenas para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e para definirmos a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ utilizamos um subespaço que é denso em L^2, a saber o espaço de Schwartz $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$, formado pelas funções de rápido decrescimento. Pois para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existe $\varphi_k \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_k \xrightarrow{L^2} f$. Em particular $\varphi_k \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ e neste espaço temos definido $\hat{\varphi}_k$, e

$$|\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}_l|_{L^2} = |\varphi_k \hat{-} \varphi_l|_{L^2} = |\varphi_k - \varphi_l|_{L^2}$$

logo, $\hat{\varphi}_k$ é de Cauchy, e sendo $L^2(\mathbb{R}^n)$ completo podemos então definir $\hat{f}(\xi) = \lim \hat{\varphi}_k$. Para um pouco mais de detalhes sobre a definição de $\hat{f}$, com $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ veja por exemplo [7], [8] ou [10].

Exemplo 1.1. *Para ilustrar a observação feita anteriormente, seja $\Omega = \mathbb{R}$, $I_j = [j, j+1)$ com $j \geq 0$, e defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1}\chi_j(x)$, onde χ_j é a função caracteristica do intervalo $[j, j+1]$.*

Temos então $\int |g(x)|dx = \sum \frac{1}{j+1}$ *que diverge, logo* $g \notin L^1(\mathbb{R})$*, por outro lado temos* $\int |g(x)|^2 dx = \sum \frac{1}{(j+1)^2} < \infty$*, e assim temos* $g \in L^2(\mathbb{R})$*.*

Notemos agora que $\chi_j \in L^1(\mathbb{R})$ *e assim sua transformada de Fourier existe e é dada por:*

$$\hat{\chi}_j(\xi) = \int \chi_j e^{-i\xi x} dx = \int_j^{j+1} e^{-i\xi x} dx = \frac{e^{-i\xi(j+1)} - e^{-i\xi j}}{-i\xi}$$

para $\zeta \neq 0$*, no caso em que* $\zeta = 0$ *temos* $\hat{\chi}_{I_j}(\xi) = 1$*. Pela linearidade da tranformada de Fourier obtemos* $\hat{g}(\xi) = \sum j = 0^\infty \frac{1}{j+1} \hat{\chi}_j$*.*

Exemplo 1.2. *Um outro exemplo importante é determinar para que valores de* s*, temos que uma dada função se encontra em* $H^s(\mathbb{R}^n)$*. Tome* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $f \notin L^2(\mathbb{R}^n)$*, logo* $f \notin H^s(\mathbb{R}^n)$ *para* $s \geq 0$*. Então nosso próximo passo é procurar se existe* $s < 0$ *tal que* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*, ou seja, se* f *representa algum funcional linear contínuo de* $H^{-s}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$*. Mas para isso basta mostrarmos que o funcional* $f : \mathbb{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *definido por* $< f, \varphi >= \int f\varphi dx$ *é contínuo na norma* $|\cdot|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)}$*.*

$$\begin{aligned} |< f, \varphi >| &= |\textstyle\int f\varphi dx| \leq \int |\hat{f}||\hat{\varphi}|dx = \int (1+|\xi|^2)^{s/2}|\hat{f}|(1+|\xi|^2)^{-s/2}|\hat{\varphi}|dx \\ &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} (\textstyle\int (1+|\xi|^2)^s)^{1/2} (\int (1+|\xi|^2)^{-s}|\hat{\varphi}|^2)^{1/2} = c|\varphi|_{H^{-s}(\mathbb{R}^\kappa)} \end{aligned}$$

Como $\mathbb{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^{-s}(\mathbb{R}^n)$*, temos que* $(1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^n)$*, logo para o funcional ser continuo precisamos que a primeira integral da última desigualdade seja limitado, o que acontece para* $s < -\frac{n}{2}$*. E assim, podemos estender continuamente para um funcional* $f : H^{-s}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$*, se* $s < -\frac{n}{2}$*, ou seja,* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$*.*

Iremos agora enunciar alguns resultados sobre os espaços de Sobolev que nos serão úteis:

1. Se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e $s \geq 0$, e se $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ onde k é um inteiro maior ou igual a s, então $fu \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|fu\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{H^s(\Omega)};$$

2. (Teorema do traço) Para todo $s > \frac{1}{2}$ o mapa $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o qual leva ϕ em $\phi|_{x_{n+1}=0}$ possui uma extensão para um mapa linear limitado $tr : H^s(\mathbb{R}^{n+1}) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, ou seja $\|tr(\varphi)\|_{H^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R}^{n+1})}$

Um outro espaço de Sobolev que nos será importante é $H^s(\Omega)$, onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, o qual pode ser definido da seguinte forma:

Definição 1.3. *Seja $s \geq 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, limitado e com fronteira C^∞. Temos $H^s(\Omega) = \{u = v|_\Omega; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$, e*

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}; v|_\Omega = u\}.$$

Definição 1.4. *Seja $s < 0$, Ω como na definição anterior. Definimos $H^s(\Omega) = [H_0^{-s}(\Omega)]'$, onde $H_0^{-s}(\Omega)$ é o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ em relação a norma $\|\cdot\|_{H^{-s}(\Omega)}$.*

Por fim, definimos os espaços de Sobolev sobre a fronteira de Ω. Mas antes fixemos algumas notações. Seja Q o retângulo aberto

$$Q = \{y \in \mathbb{R}^n; 0 < y_i < 1, i = 1, 2..., n-1, -1 < y_n < 1\},$$

e sejam Q^+ e Q^- os abertos

$$Q^+ = Q \cap \{y_n > 0\}, Q^- = Q \cap \{y_n < 0\},$$

e definimos $\Sigma = Q \cap \{y_n = 0\}$. Temos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto com fronteira C^∞ o que é equivalente a dizer que $\partial\Omega$ é uma variedade de dimensão $n-1$. Como Ω é limitado, temos que $\partial\Omega$ é compacto e assim, podemos cobri-lo por uma quantidade finita de abertos limitados e tomar o seguinte sistema de cartas locais $\{U_j, \varphi_j\}, j = 1, 2...N$, tal que

$$\begin{aligned}
&\varphi_j : U_j \to Q, \text{ é uma bijeção de classe } C^\infty;\\
&\varphi_j^{-1} : Q \to U_j \text{ é de classe } C^\infty;\\
&\varphi_j(U_j \cap \Omega) = Q^+,\ \varphi_j(U_j \cap \partial\Omega) = \Sigma.
\end{aligned}$$

Comecemos definido o espaço $H^s(\partial\Omega)$ onde $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, temos então $\partial\Omega = \{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. Então para toda função u definida em $\partial\Omega$ iremos identificá-la com a função $x' \to u(x', 0)$ de $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$. Assim obtemos $C_0^\infty(\partial\Omega) = C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ e $L^2(\partial\Omega) = L^2(\mathbb{R}^{n-1})$, e neste caso, definimos $H^s(\partial\Omega) = H^s(\mathbb{R}^{n-1})$. Para o caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira C^∞, consideramos um sistema de cartas locais para $\partial\Omega$, ou seja, $\{(U_1, \varphi_1), ..., (U_N, \varphi_N)\}$, e funções testes $\sigma_1, ..., \sigma_N$ no $\mathbb{R}^n$ tais que

$$supp(\sigma_j) \subset U_j, \ j = 1, ..., N, \ \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x) = 1, \ x \in \partial\Omega$$

Temos que, definida uma função ω em $\partial\Omega$, podemos definir para todo $j = 1, ..., N$ as seguintes funções

$$\omega_j = \begin{cases} \sigma_j \omega(\varphi_j^{-1}(y', 0)), \text{ se } y' \in \Omega_0 =]0, 1[^{n-1} \\ 0, \text{ se } y' \in \mathbb{R}^{n-1} - \Omega_0. \end{cases}$$

Temos então que, se $\omega \in C^\infty(\partial\Omega)$, então $\omega_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, ..., N$. Assim, para $s > 0$ definimos $H^s(\partial\Omega)$ como sendo o espaço vetorial das funções ω definidas em $\partial\Omega$, tais que $\omega_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, ..., N$, e munido do seguinte produto hermitiano

$$(\omega, \nu)_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{j=1}^{N} (\omega_j, \nu_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})}$$

para todo par $\omega, \nu \in H^s(\partial\Omega)$. Para mais detalhes sobre espaços de Sobolev, veja por exemplo [8].

1.3 Operadores diferenciais

Nessa seção iremos definir operadores diferencias e mostrar um resultado que nos garante a existência de soluções para certos tipos de operadores, no nosso caso operadores elípticos de segunda ordem.

Definição 1.5. *Um operador diferencial de ordem m, é um operador P(D), sobre as funções C^∞ 2π-periodicas, da seguinte forma:*

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha.$$

Onde $a_\alpha \in C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A parte principal do operador $P(D)$ é

$$P_m(D) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha D^\alpha.$$

Dentre esses operadores um nos será mais importante, que é o operador diferencial elíptico de segunda ordem, o qual será um operador com $m = 2$ e dizemos elíptico se possui coeficientes reais e $P_2(k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$. Para o caso de operadores diferencias elípticos de segunda ordem temos o seguinte teorema cuja demonstração nos indica como obter soluções de equações diferenciais parciais.

Teorema 1.2. *Seja $P(D)$ um operador diferencial elíptico de segunda ordem com coeficientes constantes, e assuma que $u \in L^2(Q)$ é solução da equação*

$$P(D)u = f \ \text{em}\ \Omega,$$

para algum $f \in L^2(Q)$. Então $u \in H^2(Q)$.

Demonstração.Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados da igualdade $P(D)u = f$, obtemos que $P(k)\hat{u}(k) = \hat{f}(k)$. Como o dominio Ω é limitado, então ser elíptico é equivalente a existir constante $c > 0$ tal que:

$$|P_2(k)| = |k|^2|P_2(\frac{k}{|k|})| \geq c|k|^2.$$

Para $k \neq 0$ temos:

$$\begin{aligned} |P(k)| &= |P_2(k) + \textstyle\sum_{j=1}^n a_j k_j + a_0| \\ &\geq |P_2(k)| - |\textstyle\sum_{j=1}^n a_j k_j| - |a_0| \\ &\geq |P_2(k)| - |k||\textstyle\sum_{j=1}^n a_j| - |a_0| \\ &\geq c|k|^2 - C|k|. \end{aligned}$$

E para $|k|$ suficientemente grande, $|k| > \frac{2C}{c} = c'$, temos que $|P_2(k)| \geq \frac{c|k|^2}{2}$. Logo, obtemos:

$$|\hat{u}(k)| = \frac{|\hat{f}(k)|}{|P(k)|} \leq \frac{|\hat{f}(k)|}{\frac{c|k|^2}{2}}$$

Como $\hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ temos que $< k >^2 \hat{u} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, onde $< k >= (1+|k|^2)^{1/2}$, e assim, temos $u \in H^2(Q)$

■

Notamos que tal resultado também é válido no caso em que o operador P tem ordem m, sendo que nesta situação a solução u seria um elemento de $H^m(Q)$.

Capítulo 2

Unicidade do problema de Calderón

Nosso objetivo neste capítulo será a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 2.1. *(Sylvester-Uhlmann) Seja* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *aberto limitado com fronteira* C^∞ *, onde* $n \geq 3$*. Seja* γ_1*,* γ_2 *funções positivas em* $C^2(\overline{\Omega})$*. Se* $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ *então* $\gamma_1 = \gamma_2$ *em* Ω*.*

No entanto tal resultado não será demonstrado diretamente, de fato iremos demonstrar a unicidade do problema para o caso da equação de Schrödinger e atráves deste resultado iremos obter a unicidade para o problema de Calderón. Focaremos na demonstração do seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Seja* Ω *um subconjunto do* $\mathbb{R}^n$ *limitado e com fronteira* C^∞*,onde* $n \geq 3$*. Sejam* q_1, q_2 *funções em* $L^\infty(\Omega)$ *tais que os problemas* $-\Delta + q_1$ *e* $-\Delta + q_2$ *são bem postos. Se* $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ *então* $q_1 = q_2$*.*

Para tanto iremos seguir os seguintes passos, inicialmente iremos relacionar a equação da condutividade com a equação de Schrödinger. Em seguida mostramos que sob certas hipóteses o mapa DN para a equação de Schrödinger é linear e limitado, para em seguida encontrar uma relação entre os mapas DN de cada um dos problemas de Dirichlet.E assim seremos capazes de mostrar que a veracidade do teorema 2.2 implica a veracidade de 2.1. Depois nos focamos na demostração do teorema 2.2 e para isso buscaremos inicialmente uma solução do problema de Dirichlet para a equação de Schrödinger, sendo essas as

C.G.O, e por fim atráves dessas soluções poderemos demonstrar o teorema 2.2.

2.1 Redução para a equação de Schrödinger

Nosso primeiro passo rumo a unicidade do problema de Calderón será relacionar a equação da condutividade com a equação de Schrödinger e o seguinte lema nos mostra essa relação:

Lema 2.1. *Se* $\gamma \in C^2(\Omega)$ *e* $u \in H^1(\Omega)$ *então*

$$-\nabla\gamma\vec{\nabla}(\gamma^{-1/2}u) = \gamma^{1/2}(-\Delta + q)u \tag{2.1}$$

no sentido fraco, onde

$$q = \frac{\Delta\gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}}$$

Demonstração.Para o caso $u \in C^2(\overline{\Omega})$, tal demonstração pode ser feita diretamente, como mostra o cálculo abaixo.

$$\begin{aligned} -\partial_j(\gamma\partial_j(\gamma^{-1/2}u)) &= -\partial_j(\gamma^{1/2}\partial_j u) + \partial_j(\partial_j(\gamma^{1/2})u) \\ &= -\gamma^{1/2}\partial_j^2 u - \partial_j\gamma^{1/2}\partial_j u + \partial_j\gamma^{1/2}\partial_j u \;+\; \partial_j^2(\gamma^{1/2})u. \end{aligned}$$

Para estender nossa demonstração para o caso em que $u \in H^1(\Omega)$, notemos que existe uma sequência $u_n \in C_0^\infty(\Omega) \subseteq C_0^2(\Omega)$ a qual converge para $u \in H^1(\Omega)$, pois $C_0^\infty(\Omega)$ é um subconjunto denso em $H^k(\Omega)$. Pela definição fraca de derivação temos:

$$-\int \nabla\gamma\nabla(\gamma^{-1/2}u_n)\varphi = +\int \nabla(\gamma^{-1/2}u_n)\gamma\nabla\varphi$$

$$= -\int \gamma^{-1/2}u_n\nabla\gamma\nabla\varphi \to -\int \gamma^{-1/2}u\nabla\gamma\nabla\varphi = -\int \nabla\gamma\nabla(\gamma^{-1/2}u)\varphi.$$

Logo u_n converge fracamente para u. Analogamente, obtemos o resultado desejado para o lado direito da igualdade. ∎

Se $q \in L^\infty(\Omega)$ iremos considerar o seguinte problema de Dirichlet para a equação de Schrödinger:

$$\begin{cases} (-\Delta + q)u = 0 & em \quad \Omega \\ u = f & em \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Diremos que $u \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca de (2.2) se $u|_{\partial\Omega} = f$ e se para toda $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ temos:

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \varphi + qu\varphi)dx = 0. \tag{2.3}$$

Diremos que o problema (2.2) é bem posto se:

1. Existe solução fraca $u \in H^1(\Omega)$ para todo valor de fronteira $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$;

2. A solução $u \in H^1(\Omega)$ é única;

3. O operador solução $f \to u$ é contínuo de $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$.

Quando o problema for bem posto definimos o mapa DN formalmente por:

$$\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega),\ f \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega}$$

E, de forma análoga ao da equação da condutividade, definimos o mapa DN fracamente por:

$$(\Lambda_q f, g)_{\partial\Omega} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + quv)dx\ f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

onde u é solução de (2.2) e v é qualquer função em $H^1(\Omega)$ tal que $v|_{\partial\Omega} = g$.

Lema 2.2. *Se $q \in L^\infty(\Omega)$ é tal que o problema (2.2) é bem posto, então Λ_q é um mapa linear limitado de $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ que satisfaz:*

$$(\Lambda_q f, g)_{\partial\Omega} = (f, \Lambda_q g)_{\partial\Omega}$$

Demonstração. A definição fraca do mapa DN nos dá:

$$(\Lambda_q f, g) = \int (\nabla u \nabla v + quv)dx,$$

onde $f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, u é solução de (2.2) e v é qualquer função em $H^1(\Omega)$ tal que $v|_{\partial\Omega} = g$. Podemos então, fixado $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, definir o seguinte funcional:

$$T_f(g) = \int (\nabla u \nabla v + quv)dx,$$

onde u, v são como acima. Observamos que dado $v' \in H^1(\Omega)$ tal que $v|_{\partial\Omega} = v'|_{\partial\Omega}$ temos então $v - v' \in H_0^1(\Omega)$, e sendo u solução fraca para (2.2), obtemos que T_f é bem definido. Pelo teorema do traço, temos que para todo $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ existe $v_g \in H^1(\Omega)$ tal que $v_g|_{\partial\Omega} = g$, logo:

$$\begin{aligned} |T_f(g)| &\leq \int_\Omega |(\nabla u.\nabla v_g + quv_g)dx| \leq (1 + \|q\|_{L^\infty(\Omega)})\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v_g\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C''\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \end{aligned}$$

obtemos assim que o funcional T_f é contínuo.

Notamos que T_f é contínuo para toda $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, e assim o mapa $\Lambda_q : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{-1/2}(\partial\Omega)$ que leva $f \mapsto \Lambda_q f$ é um mapa linear limitado.

Resta mostrar a seguinte igualdade $(\Lambda_q f, g) = (f, \Lambda_q g)$, para isso notemos que:

$$(\Lambda_q f, g) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + v\Delta u$$

$$(f, \Lambda_q g) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u + u\Delta v.$$

Subtraindo ambos, obtemos:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = \int_\Omega u\Delta v - v\Delta u.$$

Notando que sendo u e v soluções para o problema de Schrödinger para os respectivos f, g temos que $v\Delta u - vqu = 0$ e $u\Delta v - uqv = 0$, logo, subtraindo ambos, temos $u\Delta v - v\Delta u = 0$ e assim concluimos:

$$(\Lambda_q f, g) - (f, \Lambda_q g) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - u\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$$

■

No entanto existe o problema que (2.2) nem sempre é bem posto, tomando por exemplo o caso $(-\Delta + q)u = 0$, em Ω e $u|_{\partial\Omega} = 0$ onde $q = -\lambda$ e $\lambda > 0$ é um autovalor do laplaciano em Ω. Mas quando tomamos um potencial q que se origina de uma condutividade, temos o seguinte lema:

Lema 2.3. *Se $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$ e $q = \Delta\gamma^{1/2}/\gamma^{1/2}$ então o problema de Dirichlet (2.2) é bem posto e, além disso, temos que*

$$\Lambda_q f = \gamma^{-1/2}\Lambda_\gamma(\gamma^{-1/2}f) + \tfrac{1}{2}\gamma^{-1}\tfrac{\partial\gamma}{\partial\nu}f|_{\partial\Omega}.$$

Demonstração.Fixemos $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Tomemos $v \in H^1(\Omega)$ solução de $\nabla\gamma\nabla v = 0$ e $v|_{\partial\Omega} = \gamma^{-1/2}f$. Pelo Lema 2.1 existe $u = \gamma^{1/2}v$ solução de $(-\Delta + q)u = 0$ e $u|_{\partial\Omega} = f$. Logo, para toda $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, o problema (2.2) possui solução. Suponhamos agora que existam soluções u e u' de (2.2). Então $u - u'$ é solução de (2.2) para $f = 0$. Pelo Lema 2.1, existe $\gamma^{-1/2}(u - u')$ solução de (2.1) para $f = 0$, como $\gamma^{-1/2}(u - u') \in H_0^1(\Omega)$ o Teorema 2.3.2 de [5] (outra referência para este resultado é [11], no teorema 4.1) nos diz que tal solução é única, mas uma vez que 0 também é solução, temos que $u = u'$.

Como $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$, temos a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C'\|\gamma^{-1/2}f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C''\|f\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

Assim o problema (2.2) é bem posto quando o potencial q se origina da condutividade.

Se u é solução de (2.2), então $v = \gamma^{-1/2}u$ é solução da equação da condutividade e:

$$\Lambda_\gamma(\gamma^{-1/2}f) = \gamma\frac{\partial v}{\partial\nu} = \gamma^{1/2}\frac{\partial u}{\partial\nu} - \frac{1}{2}\gamma^{-1/2}\frac{\partial\gamma}{\partial\nu}u|_{\partial\Omega}.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial\nu} = \Lambda_q f$ e $u|_{\partial\Omega} = f$ obtemos, enfim, a igualdade desejada. ■

Em posse desses resultados, podemos mostrar que o Teorema 2.2 implica o Teorema 2.1.

Sejam $\gamma_1, \gamma_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ ambas positivas, e assumamos $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$. Se $q_j = \Delta\gamma_j^{1/2}/\gamma_j^{1/2}$ então $q_j \in L^\infty(\Omega)$ e pelo Lema 2.3 os problemas de Dirichlet $(-\Delta + q_j)$ são bem postos. Do Teorema 6.6.1 de [5], temos que, se $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ então $\gamma_1 = \gamma_2$ e $\frac{\partial\gamma_1}{\partial\nu} = \frac{\partial\gamma_2}{\partial\nu}$ em $\partial\Omega$. Logo, para qualquer $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ temos:

$$\begin{aligned}\Lambda_{q_1}f &= \gamma_1^{-1/2}\Lambda_{\gamma_1}(\gamma_1^{-1/2}f) + \frac{1}{2}\gamma_1^{-1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} \\ &= \gamma_2^{-1/2}\Lambda_{\gamma 2}(\gamma_2^{-1/2}f) + \frac{1}{2}\gamma_2^{-1}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\nu}|_{\partial\Omega} = \Lambda_{q_2}f.\end{aligned}$$

Pelo teorema 2.2 obtemos $q_1 = q_2$ em Ω. Logo:

$$\frac{\Delta\gamma_1^{1/2}}{\gamma_1^{1/2}} = \frac{\Delta\gamma_2^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}} \; em \; \Omega.$$

Tomemos $q = \frac{\Delta\gamma_1^{1/2}}{\gamma_1^{1/2}} = \frac{\Delta\gamma_2^{1/2}}{\gamma_2^{1/2}}$ e consideremos a equação

$$(-\Delta + q)u = 0 \; em \; \Omega \tag{2.4}$$

Observamos que tanto $\gamma_1^{1/2}$ quanto $\gamma_2^{1/2}$ são soluções de (2.4) e que $\gamma_1^{1/2}|_{\partial\Omega} = \gamma_2^{1/2}|_{\partial\Omega}$. Como o potencial q deriva da condutividade, temos pelo Lema 2.3 que o problema é bem posto. Logo, obtemos $\gamma_1 = \gamma_2$ pela unicidade das soluções.

2.2 Solução Óptica Geométrica Complexa

Como motivação para a construção das soluções ópticas geométricas complexas (ou simplesmente C.G.O) tomaremos o caso mais simples, ou seja, quando o potencial q é nulo. Então, estaremos interessados em buscar a solução de

$$-\Delta u = 0.$$

Notamos que, se $a + ib = \zeta \in \mathbb{C}^n$, é tal que $\zeta \cdot \zeta = 0$, temos que $u(x) = e^{i\zeta\cdot x}$ é solução para $-\Delta u = 0$, pois,

$$D^2 u = \zeta \cdot \zeta e^{i\zeta\cdot x} = 0.$$

Porém tal função não é solução para o caso em que o potencial q não é nulo, mas podemos encontrar soluções que se comportam de forma muito parecida quando $|\zeta| \to \infty$, e essas soluções são denotadas C.G.O, e possuem a seguinte forma:

$$u(x) = e^{i\zeta\cdot x}(1 + r(x)), \tag{2.5}$$

onde $r(x)$ é um termo de correção.

Notamos que (2.5) é uma solução de $(-\Delta + q)u = 0$ se, e somente se,

$$e^{-i\zeta\cdot x}(-\Delta + q)e^{i\zeta\cdot x}(1 + r) = 0. \tag{2.6}$$

Então a equação (2.6) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(D^2 + 2.\zeta \cdot D + q)r = -q. \tag{2.7}$$

Encontrar uma solução para (2.7) é um passo importante para a construção das soluções C.G.O.

2.2.1 Estimativa Básica

Estaremos interessados em encontrar algumas estimativas para a equação (2.7). No entanto, estaremos inicialmente interessados no caso em que o potencial q é nulo.

Teorema 2.3. *Existe uma constante C_0 dependendo apenas de Ω e n, tal que para qualquer $\zeta \in \mathbb{C}^n$ satisfazendo $\zeta \cdot \zeta = 0$ e $|\zeta| \geq 1$ e para toda $f \in L^2(\Omega)$, a equação*

$$(D^2 + 2\zeta \cdot D)r = f \text{ em } \Omega \tag{2.8}$$

possui solução $r \in H^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_0}{|\zeta|}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração.Inicialmente escrevamos $\zeta = s(\alpha + i\beta)$, com $\alpha \perp \beta$ e unitários e $s = \frac{|\zeta|}{\sqrt{2}}$. Podemos assumir que $\alpha = e_1$ e $\beta = e_2$. Então, nossa equação se reduz a:

$$(D^2 + 2s(D_1 + iD_2))r = f. \tag{2.9}$$

Por simplicidade, tomamos $\Omega \subset Q = [-\pi, \pi]^n$ e definiremos $f = 0$ em $Q - \Omega$. Desta forma, temos $f \in L^2(Q)$. Seja $\{w_k\}_{k\in\mathbb{Z}^n}$, $w_k = e^{i(k+\frac{1}{2}e_2)x}$ e $k \in \mathbb{Z}^n$. Tomando

$$\langle u, v\rangle = (2\pi)^{-n}\int_Q u\overline{v}dx \quad u\ , v\ \in L^2(Q),$$

Sabendo que $\{e_k\}$ é uma base ortornomal completa para $L^2(Q)$ e é fácil verificar que o mesmo é válido para o conjunto $\{w_k\}$.

Como $L^2(Q)$ é um espaço de Hilbert separável e w_k é um subconjunto ortonormal de $L^2(Q)$, podemos escrever $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f_k w_k$, onde $f_k = \langle f, w_k\rangle$ e $\|f\|^2_{L^2(Q)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |f_k|^2$. Buscamos escrever r também como uma série, ou seja, da forma $r = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} r_k w_k$.

Usando que $Dw_k = (k + \frac{1}{2}e_2)w_k$ e aplicando isto na equação (2.9), obtemos:

$$p_k r_k = f_k,\ \ k \in \mathbb{Z}^n,$$

onde

$$p_k = (k + \frac{1}{2}e_2)^2 + 2s(k_1 + i(k_2 + \frac{1}{2})).$$

Podemos então definir

$$r_k = \frac{f_k}{p_k}$$

e

$$r = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} r_k w_k$$

Tal r existe, pois como veremos a seguir a série converge em $L^2(Q)$, então existe uma função r que é o limite desta série. Reparemos que $Im(p_k) = 2s(k_2 + 1/2) \neq 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}^n$. Logo:

$$|r_k| = \frac{|f_k|}{|p_k|} \leq \frac{|f_k|}{|2s(k_2 + 1/2)|} \leq \frac{|f_k|}{s} = \frac{|C_0 f_k|}{|\zeta|}\ em\ \Omega$$

Temos então

$$\|r\|_{L^2(Q)} = (\sum_k |r_k|^2)^{1/2} \leq \left(\sum_k \frac{|C_0 f_k|^2}{|\zeta|^2}\right)^{1/2} = \frac{C_0\|f\|_{L^2(Q)}}{|\zeta|}$$

Falta agora mostrar que $Dr \in L^2(Q)$ e com isso estaremos mostrando a segunda estimativa. Observamos que:

$$Dr = \sum (k + \frac{1}{2}e_2) r_k w_k.$$

Temos então que

$$|(k + \frac{1}{2}e_2) r_k| \leq \frac{|(k + \frac{1}{2}e_2)||f_k|}{|p_k|}.$$

Observamos que

$$|Re(p_k)| = |(k + \frac{1}{2}e_2)^2 + 2sk_1| \geq |(k + \frac{1}{2}e_2)^2| - |2s(k + \frac{1}{2}e_2)|.$$

No caso em que $|k+\frac{1}{2}e_2| \geq 4s$ temos $|Re(p_k)| \geq \frac{1}{2}|(k+\frac{1}{2}e_2)|^2$. Logo

$$|(k+\frac{1}{2}e_2)r_k| \leq \frac{|f_k||k+\frac{1}{2}e_2|}{|Re(p_k)|} \leq \frac{|f_k||k+\frac{1}{2}e_2|}{\frac{1}{2}|k+\frac{1}{2}e_2|^2} \leq \frac{|f_k|}{\frac{1}{2}|k+\frac{1}{2}e_2|} \leq \frac{|f_k|}{2s} \leq 4|f_k|.$$

Para o caso em que $|k+\frac{1}{2}e_2| \leq 4s$, note que

$$|(k+\frac{1}{2}e_2)r_k| \leq \frac{|(k+\frac{1}{2}e_2)||f_k|}{s} \leq \frac{4s|f_k|}{s} \leq 4|f_k|.$$

Assim obtemos $\|Dr\|_{L^2(Q)} \leq 4\|f\|_{L^2(Q)}$. Desta forma $r \in H^1(\Omega)$. ■

2.2.2 Estimativas com potencial

Agora estaremos interessados em encontrar soluções para (2.7) no caso em que o potencial q é não nulo, começaremos definindo a seguinte notação:
Seja $\zeta \in \mathbb{C}^n$, tal que $\zeta \cdot \zeta = 0$ e $|\zeta|$ é suficientemente grande. Definiremos o operador solução G_ζ onde:

$$G_\zeta : L^2(\Omega) \to H^1(\Omega) \;\; f \mapsto r.$$

Onde r é solução de $(D^2 + 2\zeta \cdot D)r = f \; em \; \Omega$ como provado no Teorema 2.3, o mesmo teorema no diz que o operador solução é continuo.

Teorema 2.4. *Seja $q \in L^\infty$. Existe constante C_0 dependendo apenas de Ω e n tal que para qualquer vetor $\zeta \in \mathbb{C}^n$ satisfazendo $\zeta \cdot \zeta = 0$ e $|\zeta| \geq max\{2C_0\|q\|_{L^\infty(\Omega)}, 1\}$ e para toda $f \in L^2(\Omega)$ a equação*

$$(D^2 + 2\zeta \cdot D + q)r = f \; em \; \Omega \tag{2.10}$$

possui solução $r \in H^1(\Omega)$ satisfazendo

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_0}{|\zeta|}\|f\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0\|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração.Como vimos anteriormente, temos que no caso em que o potencial é nulo obtemos uma solução da forma $G_\zeta f = r$, para o caso em que o potencial q é não nulo, iremos buscar uma solução da forma:

$$G_\zeta \tilde{f} = r \tag{2.11}$$

Onde $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ é uma função que iremos determinar. Aplicando-se (2.11) em (2.10) obtemos

$$(D^2 + \zeta \cdot D + q)G_\zeta \tilde{f} = (D^2 + \zeta \cdot D)G_\zeta \tilde{f} + qG_\zeta \tilde{f} = (I + qG_\zeta)\tilde{f} = f \ em \ \Omega.$$

Obteremos agora uma estimativa para o operador qG_ζ:

$$\|qG_\zeta f\|_{L^2(\Omega)} = \|q.r\|_{L^2(\Omega)} \leq \|q\|_{L^\infty(\Omega)}\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq \|q\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{C_0\|f\|_{L^2(\Omega)}}{|\zeta|}.$$

Como $|\zeta| \geq max\{2C_0\|q\|_{L^\infty}, 1\}$ obtemos

$$\|qG_\zeta\|_{L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}.$$

Disso segue que $(I - (-q)G_\zeta)$ é um operador invertível em $L^2(\Omega)$(proposição 4.4.1 [5]), logo:

$$(I + qG_\zeta)\tilde{f} = f \Rightarrow \tilde{f} = (I + qG_\zeta)^{-1} f$$

Temos então que (2.11) é solução de (2.10) , pois

$$(D^2 - 2\zeta.D + q)r = f \Rightarrow (I + qG_\zeta)\tilde{f} = (I + qG_\zeta)(I + qG_\zeta)^{-1} f = f.$$

Ou seja, r é realmente uma solução de (2.10). E além disso temos $\|\tilde{f}\| \leq 2\|f\|$ e com isso obtemos as estimativas desejadas para $\|r\|_{L^2(\Omega)}$ *e* $\|\nabla r\|_{L^2(\Omega)}$. ■

2.2.3 Construção das soluções CGO

Agora iremos construir uma solução CGO mais geral.

Teorema 2.5. *Seja $q \in L^\infty(\Omega)$. Existe uma constante C_0 que depende apenas de Ω e n tal que para qualquer $\zeta \in \mathbb{C}^n$ satisfazendo $\zeta \cdot \zeta = 0$ e $|\zeta| \geq max\{2C_0\|q\|_{L^\infty(\Omega)}, 1\}$ e para qualquer função $a \in H^2(\Omega)$ satisfazendo $\zeta \cdot \nabla a = 0$ em Ω a equação $(-\Delta + q)u = 0$ em Ω possui uma solução*

$$u = e^{i\zeta \cdot x}(a + r). \tag{2.12}$$

Onde $r \in H^1(\Omega)$ satisfaz

$$\|r\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_0}{|\zeta|}\|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)}$$
$$\|\nabla r\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0\|(-\Delta + q)a\|_{L^2(\Omega)}$$

Demonstração.Temos que (2.12) é solução de $(-\Delta + q)u = 0$ se, e somente se, satisfaz:

$$e^{-i\zeta\cdot x}(-\Delta + q)e^{i\zeta\cdot x}(a + r) = 0 \tag{2.13}$$

A equação (2.13) pode ser reescrita como:

$$(D^2 + 2\zeta \cdot D + q)r = -(D^2 a + 2\zeta \cdot Da + qa) = -(D^2 + q)a.$$

Observamos que $D^2 a \in H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ e $qa \in L^2(\Omega)$, logo $(D^2+q)a \in L^2(\Omega)$ dessa forma podemos utilizar o Teorema 2.4 que nos garante a existência de uma solução $r \in H^1(\Omega)$, onde $f = -(D^2 + q)a$, obtendo assim r satisfazendo as estimativas desejadas. ■

2.3 Demonstração da unicidade

Já foi mostrado anteriormente que a unicidade do problema para a equação de Schrödinger implica a unicidade do problema inverso da condutividade, nesta presente seção iremos mostrar a unicidade para a equação de Schrödinger, o teorema foi demonstrado por Gunther Uhlmann e John Sylvester.

Começaremos inicialmente demonstrando um lema que relaciona a diferença $\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}$ com a diferença dos respectivos potenciais.

Lema 2.4. *Sejam q_1, q_2 funções em $L^\infty(\Omega)$ tais que o problema de Dirichlet $-\Delta + q_1$ e $-\Delta + q_2$ são ambos bem postos em Ω. Então para qualquer $f_1, f_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ temos*

$$\langle(\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2})f_1, f_2\rangle = \int (q_1 - q_2)u_1 u_2 dx. \tag{2.14}$$

Onde $u_j \in H^1(\Omega)$ é solução de $(-\Delta+q_j)u_j = 0$ em Ω com valores de fronteira $u_j|_{\partial\Omega} = f_j$, $j = 1, 2$.

Demonstração.Pela definição fraca do mapa DN, temos:

$$< \Lambda_{q_1} f_1, f_2 >= \int_\Omega (\nabla u_1 \nabla u_2 + q_1 u_1 u_2)dx.$$

Onde u_j é solução de (2.2) e $u_j|_{\partial\Omega} = f_j$.

Temos também que o mapa DN é auto-adjunto, logo:

$$\langle \Lambda_{q_2} f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, \Lambda_{q_2} f_2 \rangle = \int_\Omega (\nabla u_2 \nabla u_1 + q_2 u_2 u_1) dx.$$

Subtraindo ambos obtemos a igualdade desejada. ■

Em posse dessas informações poderemos demonstrar o Teorema 2.2.

Demonstração.Seja $\Lambda_{q_1} = \Lambda_{q_2}$ temos pelo Lema 2.4 que

$$\int_\Omega ((q_1 - q_2) u_1 u_2) dx = 0 \tag{2.15}$$

Onde $u_j \in H^1(\Omega)$ é solução de $(-\Delta + q_j)u_j = 0$. Para mostrar que $q_1 = q_2$ iremos mostrar que o produto $u_1 u_2$ das soluções é denso em $L^1(\Omega)$.

Começemos fixando $\xi \in \mathbb{R}^n$. Agora escolheremos soluções tais que o produto $u_1 u_2$ seja próximo de $e^{i\xi\cdot x}$, o qual forma um conjunto denso em $L^1(\Omega)$. Tomemos os vetores unitários $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}^n$ tais que $\{\omega_1, \omega_2, \xi\}$ forme um conjunto ortogonal. Seja $\zeta = s(\omega_1 + i\omega_2)$ tal que $\zeta \cdot \zeta = 0$. Pelo Teorema 2.5 temos que para s suficientemente grande existem soluções u_1, u_2 da seguinte forma:

$$u_1 = e^{i\zeta\cdot x}(e^{i\xi\cdot x} + r_1);$$

$$u_2 = e^{-i\zeta\cdot x}(1 + r_2).$$

Onde $\|r_j\|_{L^2} \leq C/s$. Substituindo-as em (2.15) obtemos:

$$\int (q_1 - q_2)(e^{i\xi\cdot x} + r_1)(1 + r_2) dx = 0.$$

Onde os únicos termos que dependem de s são r_1 e r_2, sendo ambos limitados por C/s. Logo fazendo $s \to \infty$ temos:

$$\int (q_1 - q_2) e^{i\xi\cdot x} dx = 0.$$

Onde tal igualdade é válida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Logo existe $\tilde{q} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $q_1 - q_2 = \tilde{q}$ em Ω e se anulando fora de Ω, obtendo assim

$$\int \tilde{q} e^{i\xi\cdot x} dx = 0$$

E esta igualdade nos mostra que a tranformada de Fourier de $\tilde{q}$ se anula para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ o que implica $\tilde{q}$ nula, logo $q_1 = q_2$. ■

Apêndice A

Cálculo do mapa DN no disco unitário

Neste apêndice estaremos interessado no cálculo do mapa de Dirichlet-Neumann no disco unitário para a seguinte condutividade:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1+A, & |x| \leq r_0 \\ 1, & r_0 \leq |x| \leq 1 \end{cases},$$

onde A é uma constante positiva e $0 < r_0 \leq 1$. Seja $u \in H^1(D)$ solução do problema $\nabla\gamma\nabla u = 0$ no disco. Então pela definição de solução fraca, temos que para qualquer $\varphi \in H_0^1(D)$:

$$(1+A)\int_{|x|\leq r_0} \nabla u \nabla\varphi dx + \int_{r_0 \leq |x| \leq 1} \nabla u \nabla \varphi dx = 0 \tag{A.1}$$

Integrando por parte o primeiro termo de (A.1) temos:

$$\begin{aligned} (1+A)\textstyle\int_{|x|\leq r_0} \nabla u \nabla\varphi dx &= (1+A)\textstyle\int_{|x|\leq r_0} \sum_{j=1}^n \partial_j u \partial_j \varphi \\ &= (1+A)\textstyle\sum_{j=1}^n (\partial_j u \nu_j \varphi)|_{\partial D_{r_0}} - (1+A)\int_{|x|\leq r_0} (\nabla\cdot\nabla u)\varphi dx \\ &= (1+A)(\nabla u \cdot \nu\varphi)|_{\partial D_{r_0}} - (1+A)\textstyle\int_{|x|\leq r_0}(\nabla\cdot\nabla u)\varphi dx, \end{aligned}$$

como u é solução de (1) temos que o segundo termo é nulo.

$$\int_{r_0\leq|x|\leq 1} \nabla u \nabla\varphi dx = \int_{r_0\leq|x|\leq 1} \sum_{j=1}^n \partial_j u \partial_j \varphi$$

$$= (\nabla u \nu\varphi|_{\partial D_{r_0}} + \nabla u\nu\varphi|_{\partial D}) - \int_{r_0\leq|x|\leq 1} \nabla\cdot\nabla u \varphi dx,$$

como $\varphi \in H_0^1(D)$ temos que o segundo termo da última igualdade é nulo, e como u é solução de (1) temos que o último termo também é nulo, assim da definição de solução fraca obtemos a seguinte condição de transmissão:

$$(1+A)(\partial_\nu u)_- - (\partial_\nu u)_+ = 0, \tag{A.2}$$

onde denotamos por $(\partial_\nu u)_\pm$ a derivada normal de u em ∂D_{r_0}. Mais precisamente, se $D_R = \{|x| < R\}$ para $R > 0$, e $u_- := u|_{D_{r_0}}$ e $u_+ := u|_{D-\overline{D}_{r_0}}$, definimos

$$(\partial_\nu u)_\pm(x) := \nabla u_\pm \cdot \frac{x}{|x|},\ x \in \partial D_{r_0}$$

Dessa forma obtemos o seguinte resultado:

Proposição A.1. *Seja $u \in H^1(D)$. Se u é uma solução fraca de $\nabla\gamma\nabla u$ em D se e somente se u satisfaz $\Delta u = 0$ em $D - \partial D_{r_0}$ junto com a condição de transmisão (A.2)*

Desejamos computar $\Lambda_\gamma f$ para um dado $f \in H^{1/2}(\partial D)$. Desde que $\gamma = 1$ em ∂D, nós temos que $\Lambda_\gamma f = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}$ onde $u \in H^1(D)$ é solução de $\nabla\gamma\nabla u = 0$ em D com $u|_{\partial D} = f$. Buscamos escrever u apenas em função de f, e é este nosso objetivo a partir deste ponto, e isto pode ser feito utilizando a condição de transmissão.

Escrevamos $h := u|_{\partial D_{r0}}$. Então u_- é a função harmônica em D_{r_0} com $u_-|_{\partial D_{r0}} = h$, e u_+ é a função harmônica em $D - \overline{D_{r_0}}$ com $u_+|_{\partial D} = f$ e $u_+|_{\partial D_{r_0}} = h$. Essas funções harmonicas são determinadas explicitamente pelas séries de Fourier de f e h.

Proposição A.2. *Se $f \in H^{1/2}(\partial D)$ e $h \in H^{1/2}(\partial D_{r_0})$ tem séries de Fourier*

$$f(e^{i\theta}) = \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik.\theta},\ h(r_0 e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{ik.\theta},$$

então a função $u_+ \in H^1(D - \overline{D_{r_0}})$ é dada por

$$\begin{aligned} u_+(re^{i\theta}) &= \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(r) e^{ik\theta}, \\ u_k(r) &= \tfrac{1}{r_0^{-|k|} - r_0^{|k|}} \left(\left[\left(\tfrac{r}{r_0}\right)^{|k|} - \left(\tfrac{r}{r_0}\right)^{-|k|} \right] f_k + [r^{-|k|} - r^{|k|}] h_k \right). \end{aligned}$$

A função $u_- \in H^1(D_{r_0})$ é dada por

$$u_-(re^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{|k|} h_k e^{ik.\theta}.$$

Para a demonstração desse fato, temos que escrever Δ em coordenadas polares e consideramos a equação $\Delta u_+ = 0$, onde u_+ é escrito em termos dos coeficientes $u_k(r)$, que são soluções da seguinte equação diferencial ordinária:

$$u_k^{''}(r) + \frac{1}{r}u_k^{'}(r) - \frac{k^2}{r^2}u_k(r) = 0, \text{para } r_0 < r < 1. \tag{A.3}$$

As condições de fronteira implicam $u_k(r_0) = h_k$ e $u_k(1) = f_k$. A solução desta equação pode ser encontrada por exemplo em [9] (capítulo 6.3 página 165), e assim encontramos os valores de $u_k(r)$ desejados. A prova para u_- é obtida de forma similar, veja por exemplo em [9] (capítulo 6.3, página 159).

Para encontrarmos a solução de $\nabla\cdot\gamma\nabla u = 0$ em D com $u|_{\partial D} = f$, precisamos encontrar h tal que (A.3) seja satisfeito. Mas as formulas de u_- e u_+ implicam que:

$$\begin{aligned}
(\partial_\nu u)_- &= \tfrac{\partial u_-}{\partial r}|_{r=r_0} = \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{|k|}{r_0} h_k e^{ik\theta}, \\
(\partial_\nu u)_+ &= \tfrac{\partial u_+}{\partial r}|_{r=r_0} = \textstyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tfrac{|k|}{r_0(r_0^{-|k|} - r_0^{|k|})}(2f_k - (r_0^{-|k|} + r_0^{|k|})h_k)e^{ik\theta}.
\end{aligned}$$

Então pela condição de transmissão (A.2) temos:

$$\frac{|k|}{r_0}\left(1 + A + \frac{1 + r_0^{2|k|}}{1 - r_0^{2|k|}}\right)h_k - \frac{|k|}{r_0}\frac{2r_0^{|k|}}{1 - r_0^{2|k|}}f_k = 0$$

Atráves de simples cálculos obtemos que:

$$h_k = \frac{2r_0^{|k|}}{2 + A(1 - r_0^{2|k|})}f_k.$$

Assim escrevemos $h = u|_{\partial D_{r_0}}$ em termos de f, e então a fórmula da proposição A.2 determina u explicitamente em função dos coeficiente de Fourier de f. Dessa forma podemos computar o valor do mapa DN como segue:

$$\begin{aligned}
\Lambda_\gamma f &= \frac{\partial u_+}{\partial r}|_{r=1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_0^{-|k|} - r_0^{|k|}} \left[\left(\frac{|k|}{r_0^{|k|}} + \frac{|k|}{r_0^{-|k|}} \right) f_k - 2|k| h_k \right] e^{ik\theta} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \left[\left(\frac{1}{1 - r_0^{2|k|}} + \frac{1}{r^{-2|k|} - 1} \right) f_k - \frac{2}{r_0^{-|k|} - r_0^{|k|}} h_k \right] e^{ik\theta} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \left[\left(\frac{1}{1 - r_0^{2|k|}} + \frac{1}{r^{-2|k|}(1 - r_0^{2|k|})} \right) f_k - \left(\frac{2}{r_0^{-|k|}(1 - r_0^{2|k|})} \right) \frac{2 r_0^{2|k|}}{2 + A(1 - r_0^{2|k|})} f_k \right] e^{ik\theta} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|k|}{1 - r_0^{2|k|}} \left[1 + r_0^{2|k|} - \frac{4 r_0^{2|k|}}{2 + A(1 - r_0^{2|k|})} \right] f_k e^{ik\theta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k| \frac{2 + A(1 + r_0^{2|k|})}{2 + A(1 - r_0^{2|k|})} f_k e^{ik\theta}.
\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

[1] Salo, Mikko, *Lectures in Calderón Problem*, http://www.rni.helsinki.fi/∼msa/teaching/calderon/calderon_ lectures.pdf. (último acesso em 11/06/2012)

[2] Calderón, A.P. , On an inverse boundary value problem, na Seminar on Numerical analysis an its Applications to Continuum Physics (Rio de Janeiro, 1980), pp.65-73, SBM.

[3] Feldman, J. & Uhlmann, G., *Inverse problems*, versão prévia na webpage http://www.math.ubc.ca/∼ feldman/ibook/ (acessado em 12/11/2011).

[4] Hähner,P. , *A periodic Faddeev-type solution operatos*, J.Differential Equations 128, (1996), 300-308.

[5] Ola, P. *Introduction to Electrical Impedance Tomography*, lectures notes, http://mathstat.helsinki.fi/kurssit/imptom/EITluennot.pdf (acessado em 12/11/2011).

[6] Sylvester, J., & Uhlmann,G. , *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem*, Ann. of Math 125 (1987), 153-169.

[7] Rudin, Walter, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, (1966)

[8] Medeiros, L.A & Milla Miranda, M., *Espaços de Sobolev*, UFRJ , (2000)

[9] Strauss, Walter A. , *Partial Differential Equations, An Introduction*, John Wiley Sons, Inc.(1992)

[10] Castro, N. N. O. ; Mendoza, R. ; Arancibia, J. F. R. , *A Quantum Mechanical Proof of the Fourier Inversion Formula*,Proyecciones (Antofagasta. Impresa), v. 30, (2011) p. 441-457, .

[11] Uhlmann, G. , *Electrical impedance tomography and Calderón's problem*, Inverse Problems, 25th Anniversary Volume, 25 (2009), p.39 .