



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Fábio Pereira Lima

**Teoria da Deformação e alguns números característicos de
certas famílias de curvas**

Recife

2012



Fábio Pereira Lima

**Teoria da Deformação e alguns números característicos de
certas famílias de curvas**

*Dissertação apresentada ao Departamento de
Matemática da UFPE, como requisito para a
obtenção do grau de MESTRE em Matemática.*

Orientador: André Luiz Meireles Araujo

Recife

2012

Catálogo na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Lima, Fábio Pereira

Teoria da Deformação e alguns números característicos de certas famílias de curvas. / Fábio Pereira Lima. - Recife: O Autor, 2012.

viii, 64 folhas: fig.

Orientador: André Luiz Meireles Araujo.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Álgebra. 2. Geometria algébrica. I. Araujo, André Luiz Meireles (orientador). II. Título.

512

CDD (23. ed.)

MEI2013 – 041

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: _____

André Luiz Meireles Araujo, *UFPE*

Orientador

Eduardo Shirlippe Góes Leandro, *UFPE*

Jacqueline Fabíola Rojas Arancibia, *UFPB*

**TEORIA DA DEFORMAÇÃO E ALGUNS NÚMEROS
CARACTERÍSTICOS DE CERTAS FAMÍLIAS DE CURVAS**

POR

Fábio Pereira Lima

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Agosto – 2012

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço aos meus pais, Irani e Antônio e minha avó Ana, sem o apoio e compreensão deles não estaria aqui.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Dr. André Luiz Meireles Araujo, por toda a paciência e incentivo durante o período de trabalho.

Não posso deixar de agradecer aos meus companheiros de sala Wanderson, Itacira, Filipe e Daniel, com os quais compartilhei momentos de alegria e pressão durante o período de mestrado; Mario e seu filho, sempre presentes na hora de desestressar e Tânia por ter me auxiliado, aconselhado e aguentado em diversos momentos. Agradeço ainda à Rapha, Fabi e Helvia, pessoas com as quais sempre posso contar, independentemente do momento, e que mesmo quando não estavam presentes não deixaram de me apoiar. Agradeço ainda à todos aqueles que de alguma forma contribuíram para realização desse trabalho.

Por último, agradeço ao DMAT/UFPE e ao CNPq pelo apoio aos meus estudos.

Resumo

Nesta dissertação, faremos uma construção geométrica de soluções de alguns problemas enumerativos, utilizando como base a teoria da deformação e alguns resultados conhecidos da geometria enumerativa para \mathbb{P}^2 . Com tais ferramentas, calcularemos certos números característicos para retas, cônicas, cúbicas reversas e elípticas em \mathbb{P}^3 .

Palavras-Chave: Números característicos, Teoria da deformação, Geometria enumerativa.

Abstract

In this work we construct a geometrical solutions of some enumerative problems, using as base the deformation theory and some known results from enumerative geometry for \mathbb{P}^2 . With such tools, we calculate the characteristic numbers of straights, conicals, twisted and elliptic cubics in \mathbb{P}^3 .

Key-Words: Characteristic numbers, Deformation theory, Enumerative geometry.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos	3
1.1 Curvas Algébricas	3
1.1.1 Caso Afim	3
1.1.2 Caso Projetivo	4
1.2 Cônicas em \mathbb{P}^2	6
1.3 Cúbicas em \mathbb{P}^2	7
1.4 Variedades Algébricas	8
1.4.1 Caso Afim	8
1.4.2 Caso Projetivo	9
1.5 Fibrados	11
2 Espaços de Parâmetros	13
2.1 Cônicas em \mathbb{P}^3	13
2.2 Cúbicas Reversas	13
2.3 Cúbicas Elípticas em \mathbb{P}^3	14
2.4 O Problema e a Teoria da Deformação	15

3	Retas em \mathbb{P}^3 Incidentes à 4 Retas em Posição Geral	16
3.1	Aplicando a teoria da Deformação	18
4	Cônicas em \mathbb{P}^3 Incidentes a 8 Retas em Posição Geral	19
4.1	Cônicas que passam pelo ponto $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$	19
4.1.1	Cônicas que passam por pontos gerais de ℓ_3 e ℓ_4	20
4.1.2	Cônicas que passam por $\{P_2\} = \ell_3 \cap \ell_4$	22
4.2	Cônicas que passam por pontos distintos de ℓ_1 e ℓ_2	22
4.2.1	Cônicas que passam pela interseção de ℓ_3 com ℓ_1 ou ℓ_2	23
4.2.2	Cônicas que passam por pontos gerais das 3 retas	23
4.3	92 ou 184 cônicas?	24
5	Cúbicas Elípticas em \mathbb{P}^3 Incidentes à 12 Retas em Posição Geral	26
5.1	Cúbicas elípticas que passam por $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$	27
5.1.1	Cúbicas elípticas passando por P_1 e pontos distintos de ℓ_3 e ℓ_4	27
5.1.2	Cúbicas elípticas contidas em \mathcal{H} passando por P_1	30
5.1.3	Cúbicas elípticas no espaço passando por dois pontos no plano	31
5.2	Cúbicas elípticas que incidem às retas ℓ_1 e ℓ_2 em pontos distintos	32
5.2.1	Cúbica elíptica contida em \mathcal{H}	32
5.2.2	Cúbicas elípticas no espaço passando por um ponto e incidentes a uma reta no plano	33
5.2.3	Cúbicas elípticas incidentes às retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 em pontos distintos	33
6	Cúbicas Reversas em \mathbb{P}^3 Incidentes a 12 Retas em Posição Geral	38
6.1	Cúbicas que passam por $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$	39

6.1.1	Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço e uma reta no plano \mathcal{H} passando por P_1	39
6.1.2	Cúbicas que passam por P_1 e $\{P_2\} = \ell_3 \cap \ell_4$	40
6.1.3	Cúbicas que passam por P_1 e pontos distintos de ℓ_3 e ℓ_4	46
6.2	Cúbicas que passam por pontos distintos de ℓ_1 e ℓ_2	51
6.2.1	Cúbicas incidentes a uma reta e um ponto no plano	51
6.2.2	Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço e uma reta no plano	51
6.2.3	Cúbicas que passam por pontos distintos de ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3	52
Apêndice		58

Introdução

A geometria enumerativa vem sendo estudada há muito tempo e por muitos. Problemas como "quantas curvas de certo tipo satisfazem determinadas condições" foram dissecados durante anos, resultando em diversas contribuições para a área, das quais entre as mais conhecidas temos a aplicação da fórmula de Bott, por S. A. Strømme e G. Ellingsrud, e os resultados de Kontsevich para enumeração de curvas racionais.

Recentemente, Ravi Vakil [V] utilizou de stacks e mapas estáveis para calcular os números característicos de certas curvas de gênero 0 e 1 no espaço. O método utilizado por ele fazia uso de ferramentas um pouco sofisticadas e que exigiam uma certa maturidade na geometria algébrica, mas cuja ideia geométrica se mostrava de uma interpretação mais simples. Pensando nessa interpretação, Dan Avritzer [A] decidiu mostrar que era possível fazer esses cálculos através de argumentos geométricos que não exigiam o mesmo grau de maturidade que o método apresentado por Vakil. Tal método consistia em calcular o número de determinadas curvas incidentes à um certo número de retas em \mathbb{P}^3 em posição geral, através da degeneração das mesmas à um plano fixado \mathcal{H} , permitindo assim subdividir o problema em casos de acordo com as formas da curva.

Seguindo essa ideia, no capítulo 1 faremos uma pequena apresentação dos conceitos utilizados durante o trabalho, passando por alguns resultados conhecidos da geometria enumerativa de curvas em \mathbb{P}^2 . Feito isso, no capítulo 2, falaremos sobre a dimensão do espaço de parâmetros das curvas de nosso interesse: cônicas, cúbicas elípticas e reversas. Com todas ferramentas expostas e com a base apresentada, nos capítulos seguintes, daremos início a construção geométrica das soluções de alguns problemas da geometria enumerativa. Problemas como: "Quantas cônicas incidem à 8 retas em

\mathbb{P}^3 em posição geral?", serão respondidos. Em procedimento similar ao feito por Dan em [A], determinaremos alguns números característicos de algumas curvas de gênero 0, cônicas [Cap.4] e cúbicas reversas [Cap.6], e cúbicas elípticas [Cap.5].

Capítulo 1

Conceitos

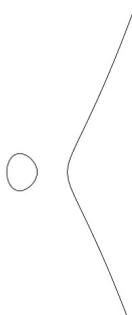
Este capítulo tem como objetivo apresentar de forma rápida alguns conceitos que serão utilizados no decorrer do trabalho. No geral, são resultados básicos que podem ser encontrados em qualquer livro de geometria algébrica (recomendo [H] e [Va3]).

1.1 Curvas Algébricas

1.1.1 Caso Afim

Definição 1.1.1. Se f é um polinômio não constante em $\mathbb{C}[X, Y]$, então o conjunto dos zeros de f , denotado $V(f)$, é denominado uma curva algébrica afim.

Exemplo 1.1.2. A cúbica não singular definida pelos zeros de $f(X, Y) = Y^2 - X^3 - X$, é uma curva afim.



O **grau** de uma curva algébrica afim $V(f)$, se f é livre de quadrados, é o grau de f . Denotado por ∂f .

Teorema 1.1.3 (Teorema de Bézout - Versão afim). *Dadas duas curvas algébricas afins, F e G , estas se intersectam em no máximo $\partial F \cdot \partial G$ pontos, contados com multiplicidade.*

Seja $f(x, y)$ uma curva afim de grau d , podemos escrever f como

$$f = f_d + f_{d-1} \dots + f_1 + f_0,$$

onde cada f_i tem grau i . Podemos então associar à f um polinômio homogêneo de grau d , dado por

$$f^*(x, y, z) = \sum_{i=0}^d z^{d-i} f_i.$$

A esse processo damos o nome de **homogeneização**.

Agora, dado

$$g^*(x, y, z)$$

um polinômio homogêneo de grau d , podemos tomar a interseção com o plano $z = 1$, obtendo a curva afim $g(x, y)$. Esse processo é chamado de **desomogeneização**.

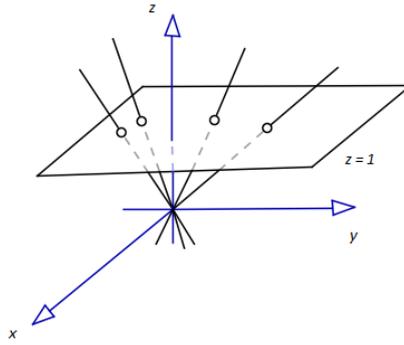
1.1.2 Caso Projetivo

Definição 1.1.4. Seja V um espaço vetorial $(n + 1)$ -dimensional. O conjunto dos subespaços de V , de dimensão 1, é denominado o **espaço projetivo** $\mathbb{P}(V)$. Aqui vamos trabalhar com $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$.

Exemplo 1.1.5. O conjunto das retas no espaço que passam pela origem é denominado plano projetivo, denotado \mathbb{P}^2 .

Agora, sejam V um espaço vetorial n -dimensional sobre o corpo K e \check{V} seu dual. Tomemos $f \in \check{V}$, $f \neq 0$, sendo assim temos definido um mapa sobrejetivo

$$f : V \rightarrow K$$



onde $\dim \ker f = \dim V - \dim K = \dim V - 1$. Note que para todo $\alpha \neq 0$, $\dim \ker \alpha f = \dim \ker f$, então $[f] \in \mathbb{P}(\check{V})$, correspondendo assim a um subespaço linear de $\mathbb{P}(\check{V})$. Sabemos que um hiperplano define um subespaço $U \subset V$ de dimensão $\dim V - 1$, podemos pensar então na aplicação quociente

$$\pi : V \rightarrow V/U.$$

Se $r \in V/U$ é um vetor não nulo, então existe um mapa linear $f : V \rightarrow K$ tal que $\pi(v) = f(v)r$, sendo assim $U = \ker f$. Se pegarmos um r diferente mudamos de f para αf , então o hiperplano $\mathbb{P}(U)$ naturalmente define um ponto $[f] \in \mathbb{P}(V)$. Sendo assim, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1.6. *O espaço projetivo dual $\mathbb{P}(\check{V})$ está em correspondência biunívoca com os hiperplanos em $\mathbb{P}(V)$.*

Definição 1.1.7. O conjunto dos zeros de um polinômio homogêneo e não constante em \mathbb{P}^2 é denominado uma **curva projetiva plana**.

Teorema 1.1.8 (Teorema de Bézout - Versão projetiva). *Dadas duas curvas projetivas planas, F e G , estas se intersectam em $\partial F \cdot \partial G$ pontos, contados com multiplicidade.*

Definição 1.1.9. Seja V um espaço vetorial n -dimensional sobre \mathbb{C} . Para cada $0 \leq r \leq n$, o conjunto

$$G(r, V) = \{U \subset V/U \text{ é um subespaço } r\text{-dimensional de } V\}$$

é denominado uma r -grassmanniana.

Dessa forma, sendo V um espaço n -dimensional, temos que a grassmanniana $G(n-1, V) = \mathbb{P}(\check{V})$.

No caso específico, em que $r = 2$ e $V = \mathbb{C}^4$, temos que o conjunto $G(2, \mathbb{C}^4)$ será composto pelos planos passando pela origem, de \mathbb{C}^4 . Logo, podemos observar que ele parametriza as retas (planos de \mathbb{C}^4) de \mathbb{P}^3 .

1.2 Cônicas em \mathbb{P}^2

Pela definição de curva projetiva temos que as cônicas em \mathbb{P}^2 são dadas pelos zeros de polinômios da forma:

$$F(X, Y, Z) = a_0X^2 + a_1XY + a_2XZ + a_3Y^2 + a_4YZ + a_5Z^2,$$

e podem ser associadas ao ponto $P = (a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5)$ de \mathbb{P}^5 , que dizemos ser o espaço de parâmetros das cônicas no plano projetivo.

Sendo assim, dado um ponto $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$, as cônicas que passam por este, ou seja, cujas as equações satisfazem:

$$a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 = 0,$$

definem um hiperplano em \mathbb{P}^5 .

De maneira geral, seja $\mathcal{F} = \check{\mathbb{C}}^3$, podemos pensar nas cônicas em \mathbb{P}^2 como a projetivização de $\mathcal{S}_2\mathcal{F}$, $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\mathcal{S}_2\mathcal{F})$.

Proposição 1.2.1. *Dados cinco pontos em posição geral no plano, existe uma única cônica lisa passando por eles.*

Demonstração. Como vimos, passar por um determinado ponto define um hiperplano em \mathbb{P}^5 . Sendo assim, temos cinco hiperplanos em \mathbb{P}^5 , cuja interseção será um único ponto, que por sua vez define uma única cônica no plano. Note que a cônica é lisa pela condição dos pontos estarem em posição geral. ■

1.3 Cúbicas em \mathbb{P}^2

Assim como associamos as cônicas em \mathbb{P}^2 a pontos de \mathbb{P}^5 , podemos associar as cúbicas em \mathbb{P}^3 a pontos de \mathbb{P}^9 . Um cúbica em \mathbb{P}^2 é representada, de forma geral, como os zeros dos polinômios da forma

$$F(X, Y, Z) = a_0X^3 + a_1X^2Y + a_2X^2Z + a_3XY^2 + a_4XZ^2 \\ + a_5Y^3 + a_6Y^2Z + a_7YZ^2 + a_8Z^3 + a_9XYZ$$

temos então que cada cúbica está associada a um ponto $P = (a_0 : a_1 : \dots : a_9)$ de \mathbb{P}^9 .

Analogamente ao caso de cônicas, dado $\mathcal{F} = \check{\mathbb{C}}^3$, podemos pensar nas cúbicas em \mathbb{P}^2 como a projetivização de $\mathcal{S}_3\mathcal{F}$, $\mathbb{P}^9 = \mathbb{P}(\mathcal{S}_3\mathcal{F})$.

Proposição 1.3.1. *Existem 12 cúbicas planas singulares passando por 8 pontos em posição geral.*

Demonstração. Esse resultado pode ser obtido diretamente da aplicação da fórmula de Kontsevich para curvas racionais, dada por:

$$N_{d+} \sum_{d_A+d_B=d} \binom{3d-4}{3d_A-1} d_A^2 N_{d_A} \cdot N_{d_B} \cdot d_A d_B = \sum_{d_A+d_B=d} \binom{3d-4}{3d_A-2} d_A N_{d_A} \cdot d_B N_{d_B} \cdot d_A d_B.$$

Dada uma curva racional de grau d , tal fórmula nos permite calcular o número de curvas de tal tipo passando por $3d - 1$ pontos. Veja [C] para mais detalhes.

Proposição 1.3.2. *Existe uma única cúbica passando por nove pontos em posição geral.*

Demonstração. Sejam $P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, com $1 \leq i \leq 9$, os nove pontos em \mathbb{P}^2 . Temos que a condição de passar pelos nove pontos nos fornece um sistema de 9 equações lineares homogêneas:

$$a_0X_i^3 + a_1X_i^2Y_i + a_2X_i^2Z_i + a_3X_iY_i^2 + a_4X_iZ_i^2 + a_5Y_i^3 + a_6Y_i^2Z_i + a_7Y_iZ_i^2 + a_8Z_i^3 + a_9X_iY_iZ_i,$$

com dez incógnitas a_0, \dots, a_9 . Como o número de incógnitas é maior que o número de equações, existe pelo menos uma solução não trivial.

Agora, suponha $C_1 : f_1(X, Y, Z)$ e $C_2 : f_2(X, Y, Z)$ duas cúbicas em \mathbb{P}^2 passando pelos 9 pontos. Temos então, que os coeficiente de f_1 e f_2 são soluções para o nosso sistema. Sendo assim, como as soluções do sistemas são multiplas de uma outra, temos que $f_1 = kf_2$. Logo, $C_1 = C_2$. ■

1.4 Variedades Algébricas

1.4.1 Caso Afim

Seja K um corpo algebricamente fechado de característica zero. Definimos o espaço afim n -dimensional como sendo o conjunto $\mathbb{A}_K^n = \{(x_1, \dots, x_n) / x_i \in K\}$.

Se $X \subset \mathbb{A}_K^n$ é tal que $X = V(I) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_K^n / f(x_1, \dots, x_n) = 0, \forall f \in I\}$, onde $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$, então ele é dito uma **variedade afim**.

Exemplo 1.4.1. Seja $Y \subseteq \mathbb{A}^3$, com $Y = \{(t, t^2, t^3) / t \in k\}$. Y define uma variedade afim, denominada cúbicas reversas.

Definição 1.4.2. Seja X um espaço topológico e $\mathcal{X} = \{U \subset X / U \text{ aberto de } X\}$. Um **pré-feixe** de conjuntos é uma família $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathcal{X}}$ de conjuntos indexada por elementos de U e tal que para cada par de abertos encaixados $U \supseteq V$ é dada uma aplicação

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

satisfazendo:

1. $\rho_U^U = Id$
2. Dadas as inclusões $U \supseteq V \supseteq W$, temos que

$$\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U.$$

Os elementos de $\mathcal{F}(U)$ são denominados seções.

Definição 1.4.3. O pré-feixe \mathcal{F} é dito um **feixe** se satisfaz as seguintes condições:

1. Dada uma cobertura aberta $\{U_j\}$ de U , aberto de X , se para seções iguais na interseção de abertos existe uma seção global que restringe a elas, ou seja, se $f_j|_{U_{jk}} = f_k|_{U_{jk}}$, com $f_j \in U_j$, então existe $f \in U$, tal que $f|_{U_j} = f_j$.
2. Dada uma cobertura aberta $\{U_j\}$ de U , aberto de X , se f é uma seção em U tal que $f|_{U_j} = 0$, então f é nulo.

Exemplo 1.4.4. Seja $X = \{a, b\}$ um espaço topológico com a topologia discreta. Temos que os abertos de X são os elementos do conjunto $U = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$.

Definamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(X) &= X \times X \\ \mathcal{F}(\{a\}) &= X \\ \mathcal{F}(\{b\}) &= X.\end{aligned}$$

Queremos mostrar que \mathcal{F} é um pré-feixe. Para tanto, dada a inclusão $\{a\} \subseteq X$, temos que

$$\begin{aligned}\rho_{\{a\}}^X : \mathcal{F}(X) &\rightarrow \mathcal{F}(\{a\}) \\ X \times X &\mapsto X\end{aligned}$$

onde $\rho_{\{a\}}^X$ representa a primeira projeção. De maneira análoga, temos definida $\rho_{\{b\}}^X$, como a segunda projeção, para a inclusão $\{b\} \subseteq X$. Logo \mathcal{F} é um pré-feixe.

Agora, sejam $f \in \mathcal{F}(\{a\})$ e $g \in \mathcal{F}(\{b\})$. Temos que $f, g \in \{a, b\}$, então podemos definir $h \in \mathcal{F}(X)$ tal que $h = (f, g)$, $\rho_{\{a\}}^X(h) = f$ e $\rho_{\{b\}}^X(h) = g$. Logo \mathcal{F} é um feixe.

1.4.2 Caso Projetivo

Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um subconjunto fechado, tal que $X = V(I)$, onde I é um ideal homogêneo de $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$. Então X é dito uma **variedade projetiva**. Por sua vez, um aberto $U \subset X$ é dito uma **variedade quase-projetiva**.

Exemplo 1.4.5. Pensemos no caso projetivo das cúbicas reversas. Considere

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{P}^1 &\quad \rightarrow \quad \mathbb{P}^3 \\ (x_0 : x_1) &\quad \mapsto \quad (x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3) = (X, Y, Z, W) \end{aligned}$$

tomemos a matriz A determinada pelas formas lineares $X, Y, Z, W \in \mathbb{C}[X, Y, Z, W]$:

$$A = \begin{bmatrix} X & Y & Z \\ Y & Z & W \end{bmatrix}.$$

Os determinantes das menores 2×2 de A nos fornecem três polinômios homogêneos

$$\begin{aligned} F_1 &= XZ - Y^2; \\ F_2 &= XW - YZ; \\ F_3 &= YW - Z^2. \end{aligned}$$

Olhando para o ideal homogêneo gerado por eles $I = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$, temos que $V(I)$ é uma variedade projetiva.

Proposição 1.4.6. *Toda variedade projetiva é localmente afim.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva. Considere os conjuntos abertos em X dados por

$$U_i = X \setminus V(x_i), 0 \leq i \leq n.$$

Se $X = V(P)$, onde $P \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ é um ideal homogêneo em relação a x_0 , então definamos $Y_0 = V(d_0 P) \subset \mathbb{C}^n$ a desomogeneização do ideal P em relação a x_0 . Então, para o aberto $U_0 = \{(a_0 : a_1 : \dots : a_n) \in X / a_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$, podemos definir o mapa

$$\begin{aligned} \varphi_0 : \quad Y_0 &\quad \rightarrow \quad U_0 \\ (a_1 : \dots : a_n) &\quad \mapsto \quad (1 : a_1 : \dots : a_n) \end{aligned}$$

claramente uma bijeção, com inversa

$$\varphi_0^{-1}(a_0, a_1, \dots, a_n) = \left(\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0} \right).$$

De maneira análoga podemos definir $Y_j \subset \mathbb{C}^n$ afim e identificar com $U_j, 1 \leq j \leq n$.

Sendo assim, temos

$$X \setminus \bigcap_{i=0}^n V(x_i) = \bigcup_{i=0}^n U_i.$$

Desde que X é coberto por esses conjuntos abertos, temos que X é localmente afim.

1.5 Fibrados

Definição 1.5.1. Seja X uma variedade. Um **fibrado vetorial** de posto n sobre X , é dado por uma variedade Y e um morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$, satisfazendo:

1. Existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X , tal que para cada i temos ψ_i isomorfismo.

$$Y|_{U_i} = \varphi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\psi_i} U_i \times \mathbb{C}^n.$$

2. O isomorfismo $\psi_i : Y|_{U_i} = \varphi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ deve ser tal que o diagrama abaixo seja comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y|_{U_i} & \xrightarrow{\sim} & U_i \times \mathbb{C}^n \\ \varphi \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow pr_1 \\ U_i & \xrightarrow{id} & U_i \end{array}$$

ou seja, se pr_1 é a primeira projeção de $U_i \times \mathbb{C}^n$ em U_i , temos $pr_1 \circ \psi_i = \varphi|_{Y|_{U_i}}$.
Mais ainda, se a interseção $U_{ij} = U_i \cap U_j$ é não vazia, temos dois isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} \varphi^{-1}(U_{ij}) = Y|_{U_i \cap U_j} & \begin{array}{l} \xrightarrow{\psi_i} \\ \searrow \psi_j \end{array} & \begin{array}{c} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \\ \uparrow \psi_i \circ \psi_j^{-1} \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \end{array} \end{array}$$

onde temos

$$\begin{aligned} \psi_i \circ \psi_j^{-1} : U_{ij} \times \mathbb{C}^n &\rightarrow U_{ij} \times \mathbb{C}^n \\ (x, v) &\mapsto (x, \psi(x)v) \end{aligned}$$

ou seja, as ψ_{ij} são lineares para cada x fixado. Cada ψ_i é denominada uma trivialização local, já as composições ψ_{ij} são denominadas funções de transição, enquanto o morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ é chamado de morfismo estrutural.

Agora, para cada fibrado vetorial $\varphi : Y \rightarrow X$, temos como associá-los a um **fibrado projetivo** $\lambda : \mathbb{P}(Y) \rightarrow \mathbb{P}(X)$, com

$$\mathbb{P}(Y) = \bigcup_{a \in X} \mathbb{P}(Y_a).$$

Exemplo 1.5.2. Fibrado tautológico - Seja $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, temos que o fibrado em retas tautológico é dado por

$$\mathcal{O}(-1) = \{(x, v) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}^2 / v \in x\}.$$

A sequencia de conceitos aqui enunciados serão úteis na tentativa de descrever "espaços" que parametrizem algebricamente determinadas configurações (pontos, curvas,...) que queremos estudar. No próximo capítulo nos focaremos em um importante dado para o que pretendemos fazer: a dimensão desses determinados "espaços".

Capítulo 2

Espaços de Parâmetros

2.1 Cônicas em \mathbb{P}^3

Nosso objetivo é produzir uma variedade algébrica que parametrize as cônicas em \mathbb{P}^3 . Para tanto, devemos considerar o fato das cônicas serem curvas planares, o que nos permite começar com a escolha do plano suporte da cônica.

Assim, seja $\check{\mathbb{P}}^3$ o espaço de parâmetros dos planos de \mathbb{P}^3 [1.1.6], com

$$\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Q},$$

sua sequência tautológica, onde \mathcal{F} denota o fibrado trivial $\check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{C}}^4$ e $\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1)$ o subfibrado tautológico de posto 1.

Considerando agora o mapa induzido

$$\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^3}(-1) \otimes \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{S}_2\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}_2\mathcal{Q},$$

onde $\mathcal{S}_2\mathcal{Q}$ é o fibrado quociente das formas quadráticas módulo a equação do plano, temos que $X = \mathbb{P}(\mathcal{S}_2\mathcal{Q})$ é o fibrado projetivo que parametriza as cônicas em \mathbb{P}^3 .

2.2 Cúbicas Reversas

Definamos, de modo geral, o mapa de Veronese

$$\begin{aligned} v_d : \quad \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (X_0, \dots, X_n) &\mapsto (M_0 : \dots : M_N) \end{aligned}$$

onde $\{M_i\}_{i=0}^N$ é a base dos polinômios homogêneos de grau d em X_0, \dots, X_n .

No caso particular $n = 1$ e $d = 3$, temos que a curva $\mathcal{C} = \text{Im}(v_3) \subset \mathbb{P}^3$ é denominada uma cúbica reversa. Note que nessa situação temos

$$\begin{aligned} v_3 : \quad \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^3 \\ (X_0 : X_1) &\mapsto (M_0 : \dots : M_3) \end{aligned}$$

onde

$$M_i = a_i X_0^3 + b_i X_0^2 X_1 + c_i X_0 X_1^2 + d_i X_1^3, 0 \leq i \leq 3.$$

Dessa forma, temos um total de $4 \times 4 = 16$ parâmetros.

Agora, considerando o grupo dos automorfismos de \mathbb{P}^3 , $G = GL_4(\mathbb{C})$, temos que a dimensão do espaço de parâmetros é $16 - 1 - 3 = 12$.

2.3 Cúbicas Elípticas em \mathbb{P}^3

Aqui, ao tentarmos construir o espaço de parâmetros, nos deparamos com um problema: uma curva elíptica é, de maneira geral, definida como uma curva projetiva não singular. Tal curva é caracterizada por ser planar, mas nem toda cúbica planar é elíptica, ou seja, ao fazer a construção estaríamos incluindo casos que não desejamos. Como estamos interessados apenas na dimensão, pensemos da seguinte forma: toda cúbica elíptica é planar e temos que o espaço de parâmetros de cúbicas no plano é o \mathbb{P}^9 . Por sua vez, o espaço de parâmetros dos planos em \mathbb{P}^3 tem dimensão 3, então temos que a dimensão esperada para o espaço desejado será 12.

Um visão mais concreta de tal dimensão pode ser obtida utilizando esquemas de Hilbert [Ha].

Com esses dados em mãos, podemos partir para o problema.

2.4 O Problema e a Teoria da Deformação

Em [V], Vakil aborda um método de calcular certos números característicos de determinadas curvas de gênero 0 e 1, utilizando ferramentas avançadas da geometria algébrica, como esquemas e stacks [Fa]. O método consiste basicamente na construção de dois stacks que parametrizem o tipo de curva desejada, no caso, um para gênero 0 e outro para gênero 1 e ali analisar o "comportamento" das curvas. Tal construção é extremamente sofisticada e exige um grau avançado nos conhecimentos de geometria algébrica e por tanto não a faremos aqui. Aos interessados nessa construção dos stacks, volto a indicar o texto original [V].

Aqui, estamos interessados em uma visão mais simples de fazer tais cálculos. Mais precisamente na usada por Dan Avritzer em [A], onde ele utiliza da teoria da deformação para determinar números característicos de certas famílias de curvas (a teoria da deformação nos permite trabalhar sem nos preocupar com o espaço de parâmetros em si, mas sim apenas com sua dimensão). O método usado por Dan, consiste em determinar o número de certas curvas incidindo a um determinado número de retas (dado pela dimensão do espaço de parâmetro de tal curva) degenerando / "levando" a reta à um determinado plano e fazendo a contagem neste.

Então, seguindo a linha do que foi feito por Avritzer, queremos determinar alguns números característicos para retas, cônicas, cúbicas racionais e elípticas em \mathbb{P}^3 , através de uma abordagem geométrica levando nossa busca para \mathbb{P}^2 e utilizando os resultados apresentados no primeiro capítulo.

Capítulo 3

Retas em \mathbb{P}^3 Incidentes à 4 Retas em Posição Geral

Neste capítulo, nosso objetivo é determinar o número de retas em \mathbb{P}^3 incidentes à 4 retas suficientemente genéricas. Para tanto, inicialmente pensemos que as 4 retas de \mathbb{P}^3 são duas a duas disjuntas. Refinaremos tal situação mais adiante.

Vejamus que esse número não é difícil de ser calculado utilizando alguns conhecimentos básicos de geometria algébrica. Assim, considere o mapa de Segre de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, isto é, o morfismo projetivo

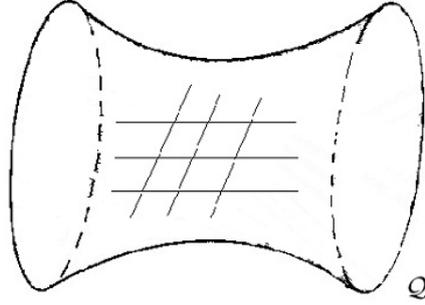
$$\begin{aligned} \sigma : \quad \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\quad \rightarrow \quad \mathbb{P}^3 \\ ([X_0 : X_1], [Y_0 : Y_1]) &\quad \mapsto \quad (X_0Y_0 : X_0Y_1 : X_1Y_0 : X_1Y_1) \end{aligned}$$

que mergulha $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ em \mathbb{P}^3 como uma superfície quadrática.

Temos que sua imagem $\mathcal{Q} = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$, consiste na quádrlica de \mathbb{P}^3 dada pelo lugar geométrico formado pelos zeros da equação $XW - YZ = \det \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$. Esta superfície é conhecida como a quádrlica de Segre de \mathbb{P}^3 e contém duas famílias especiais de retas que gozam das seguintes propriedades:

1. duas retas distintas de uma mesma família não se intersectam;
2. por um ponto qualquer da quádrlica de Segre passa exatamente uma única reta

de cada família (cf. [A]), propriedades naturalmente observadas em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.



De modo geral, essas famílias podem ser determinadas da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 X & \alpha_1 Y \\ \parallel & \parallel \\ \alpha_2 Z & \alpha_2 W \end{pmatrix} \right\} \text{ e } \mathcal{M}_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 X = \beta_2 Y \\ \beta_1 Z = \beta_2 W \end{pmatrix} \right\},$$

onde $\alpha = [\alpha_1 : \alpha_2], \beta = [\beta_1 : \beta_2]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{P}^1$.

Agora, sejam ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 quatro retas em posição geral em \mathbb{P}^3 . A menos de mudança de coordenadas, podemos supor $\ell_1 = \mathcal{L}_{[1:0]} : X = 0, Y = 0$, $\ell_2 = \mathcal{L}_{[0:1]} : Z = 0, W = 0$ e $\ell_3 = \mathcal{L}_{[1:1]} : X = Z, Y = Z$ pertencentes a uma mesma família de retas na quádrlica \mathcal{Q} (cf. [RM]). Note que uma solução do nosso problema, isto é, uma reta incidente às quatro retas ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 e ℓ_4 , vai ter que obrigatoriamente pertencer a família \mathcal{M}_β .

Se s é uma solução para o problema, ela intersectará \mathcal{Q} em pelo menos 3 pontos, pois $s \cap \ell_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, 3$, são três pontos distintos de \mathcal{Q} . Pelo teorema de Bézout, $s \subset \mathcal{Q}$, visto que $\#(s \cap \mathcal{Q}) \geq 3$. Agora, para a reta ℓ_4 , do fato das 4 retas estarem em posição geral, refinamos aqui a condição delas serem duas a duas disjuntas para também de que não existe um quádrlica contendo as 4. Sendo assim, $\ell_4 \not\subset \mathcal{Q}$, então ela furará a quádrlica em dois pontos, genericamente distintos, pelos quais existirá uma reta da família \mathcal{M}_β passando por cada e incidindo às outras três.

Portanto, temos resolvido o problema: existem exatamente duas retas em \mathbb{P}^3 incidentes à 4 retas em posição geral (duas a duas disjuntas e não contidas em uma quádrlica).

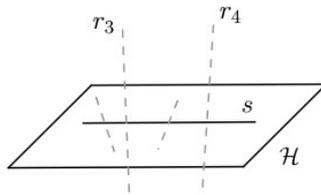
3.1 Aplicando a teoria da Deformação

Agora nos foquemos na resolução por teoria da deformação.

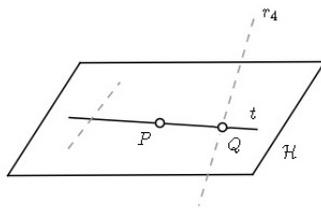
Fixemos 4 retas, r_1, r_2, r_3 e r_4 , em posição geral em \mathbb{P}^3 e um hiperplano $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^3$.

Para determinar o número de retas incidentes a estas quatro, comecemos especializando r_1 ao hiperplano \mathcal{H} , geometricamente nada podemos destacar. Em seguida especializamos a reta r_2 ao hiperplano \mathcal{H} , gerando duas situações para analisar:

1. Soluções passando por pontos distintos de r_1 e r_2 : As duas retas ainda não especializadas r_3 e r_4 determinam uma única reta s contida no plano \mathcal{H} , que cortará as duas especializadas ao plano.



2. Soluções passando por $\{P\} = r_1 \cap r_2$: Especializamos a reta r_3 ao plano \mathcal{H} e marcamos o ponto $\{Q\} = r_4 \cap \mathcal{H}$. Temos que por P e Q passa uma única reta, t , e esta incide à r_3 no plano.



Portanto, temos que por 4 retas de \mathbb{P}^3 em posição geral incidem exatamente duas retas, como havíamos obtido anteriormente.

Capítulo 4

Cônicas em \mathbb{P}^3 Incidentes a 8 Retas em Posição Geral

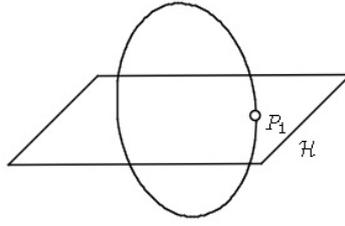
Como vimos em 2.1, o espaço de parâmetros das cônicas de \mathbb{P}^3 é um fibrado projetivo e tem dimensão 8. Deste modo, sejam ℓ_1, \dots, ℓ_8 retas em \mathbb{P}^3 em posição geral e seja $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^3$ um plano fixado. Queremos determinar o número de cônicas em \mathbb{P}^3 incidentes a estas 8 retas.

Para tanto, comecemos especializando a reta ℓ_1 ao hiperplano \mathcal{H} . Se prosseguimos especializando a reta ℓ_2 , teremos então duas possibilidades:

1. Cônicas que passam pelo ponto $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$;
2. Cônicas que passam por pontos distintos de ℓ_1 e ℓ_2 .

4.1 Cônicas que passam pelo ponto $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$

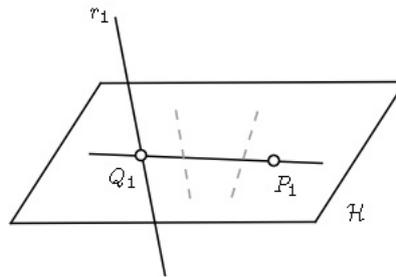
Especializando a reta ℓ_3 a \mathcal{H} , reduzimos nossa busca as cônicas que incidem às demais retas ainda em posição geral, a reta ℓ_3 e passam pelo ponto P_1 no plano. Para isso, especializemos a reta ℓ_4 a \mathcal{H} , dividindo a situação nos seguintes dois subcasos.



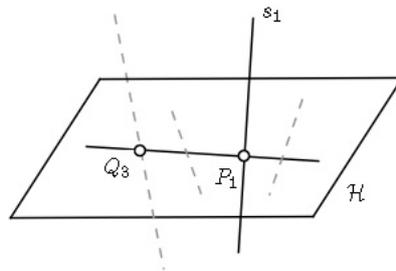
4.1.1 Cônicas que passam por pontos gerais de ℓ_3 e ℓ_4

Primeiro procuremos as cônicas redutíveis.

Como a cônica procurada incide às retas ℓ_3 e ℓ_4 contidas no plano \mathcal{H} e passa pelo ponto $P_1 \in \mathcal{H}$, temos que uma de suas componentes está contida no plano \mathcal{H} .



Neste caso, temos que por ℓ_5, ℓ_6, ℓ_7 e ℓ_8 incidem exatamente duas retas (cf. no Cap.3) r_1 e r_2 . Estas, por sua vez, foram \mathcal{H} , respectivamente nos pontos Q_1 e Q_2 . Logo, as cônicas que procuramos serão a união de duas retas, dadas por $\mathcal{C}_1 : \overline{P_1 Q_1} \cup r_1$ e $\mathcal{C}_2 : \overline{P_1 Q_2} \cup r_2$.

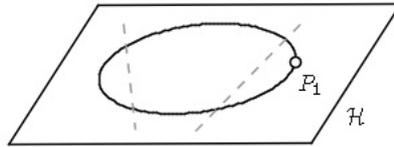


Além disso, poderíamos tomar o ponto de interseção de alguma das 4 retas, que ainda não foram especializadas, ao plano \mathcal{H} .

Por exemplo, gerando o ponto $Q_3 \in \ell_5 \cap \mathcal{H}$, temos que por $\overline{P_1 Q_3}$ e as outras 3 retas ℓ_6, ℓ_7 e ℓ_8 , incidirão duas retas, s_1 e s_2 . Sendo assim, teríamos como soluções $\mathcal{C}_3 : \overline{P_1 Q_3} \cup s_1$ e $\mathcal{C}_4 : \overline{P_1 Q_3} \cup s_2$.

Note que poderíamos ter pego qualquer uma das quatro retas ainda não especializadas para marcar o ponto Q_3 , portanto temos $2 \times 4 = 8$ soluções.

Agora, para o caso das cônicas irreduzíveis no plano \mathcal{H} , tomemos os pontos $P_i \in \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $5 \leq i \leq 8$. Temos que pelos pontos P_5, P_6, P_7, P_8 e P_1 passa uma única cônica \mathcal{C} , que incide às retas especializadas ℓ_5 e ℓ_1 .



Aqui, devemos nos preocupar com algo a mais: a multiplicidade da solução. Temos por Bézout que a cônica \mathcal{C} intersecta ℓ_1 e ℓ_2 em dois pontos cada, $p_i, q_i \in \mathcal{C} \cap \ell_i$. Agora, imaginemos a configuração ainda no espaço em que \mathcal{C} , com os pontos p_1 e q_1 marcados, é intersectada por ℓ_1 exatamente em p_1 , de tal forma que, ao especializarmos essa configuração ao plano \mathcal{H} , o outro ponto de interseção da reta com a cônica seja exatamente q_1 . Perceba que temos então uma das soluções encontradas, mas note que tomando como ponto de partida q_1 ao invés de p_1 a configuração final seria a mesma, portanto concluímos que essa solução possui multiplicidade 2.

Voltando ao caso inicial, como estamos tratando da interseção de \mathcal{C} com duas retas, ℓ_1 e ℓ_2 , podemos refazer os cálculos utilizando o princípio fundamental da contagem, onde para cada reta existem duas possibilidades para se iniciar a configuração desejada, nos fornecendo assim uma multiplicidade total igual a 4 para esse caso.

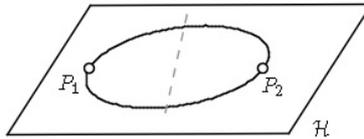
De maneira análoga, podemos generalizar a contagem da multiplicidade para um número qualquer de retas e outros tipos de curvas. Pensemos no caso em que uma curva f irreduzível de grau ∂f incide a n retas. Podemos calcular a multiplicidade associando o número de retas às situações a serem analisadas e o grau da curva ao número de possibilidades de construção para cada situação, ou seja, a multiplicidade da solução é dada por $m = (\partial f)^n$. Aplicando no caso visto acima, temos $m = 2^2 = 4$,

como visto anteriormente.

Logo, temos ao todo $2 + 8 + 4 \times 1 = 14$ soluções para esse subcaso.

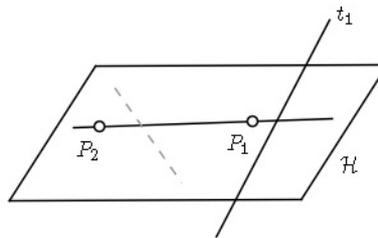
4.1.2 Cônicas que passam por $\{P_2\} = \ell_3 \cap \ell_4$

Especializemos a reta ℓ_5 e passemos a procurar cônicas que intersectam as três retas restantes no espaço e passam por dois pontos em \mathcal{H} . Para isso, marquemos os pontos $\{P_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $6 \leq i \leq 8$, pelos quais, juntamente com P_1 e P_2 , passa uma única cônica irreduzível que intersecta ℓ_5 em dois pontos, nos dando multiplicidade $m = 2$ para a solução.



Podemos ainda pensar na situação em que pelas retas $\overline{P_1\{P_2\}}$, ℓ_6 , ℓ_7 e ℓ_8 incidem duas retas, t_1 e t_2 , que nos fornecem as soluções: $\mathcal{C}_1 : \overline{P_1P_2} \cup t_1$ e $\mathcal{C}_2 : \overline{P_1P_2} \cup t_2$.

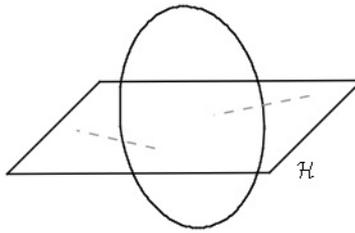
Nos dando assim, $2 \times 1 + 2 = 4$ soluções para esse subcaso.



Logo, temos $14 + 4 = 18$ soluções para o caso 4.1.

4.2 Cônicas que passam por pontos distintos de ℓ_1 e ℓ_2

Começemos especializando ℓ_3 ao hiperplano \mathcal{H} , o que nos permitirá dividir o problema em 2 subcasos, que trataremos a seguir.



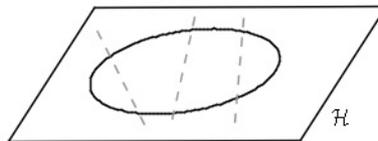
4.2.1 Cônicas que passam pela interseção de ℓ_3 com ℓ_1 ou ℓ_2

Aqui, recaímos na situação do caso 4.1, com a diferença que o ponto inicial pode ser escolhido de duas formas distintas. Portanto teremos $2 \times 18 = 36$ soluções.

4.2.2 Cônicas que passam por pontos gerais das 3 retas

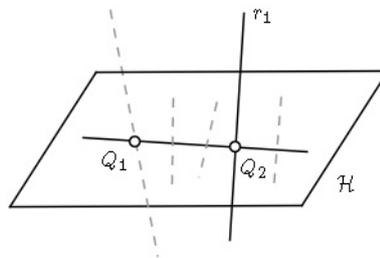
Foquemos primeiro nas cônicas irredutíveis.

Para começar, tomemos os pontos $\{P_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $4 \leq i \leq 8$, por eles passa uma única cônica, que intersecta cada uma das três retas especializadas em dois pontos, nos dando multiplicidade $m = 2^3 = 8$ para a solução.



Analisemos agora o caso das cônicas redutíveis.

Para tal, comecemos escolhendo uma das cinco retas ainda não especializadas e

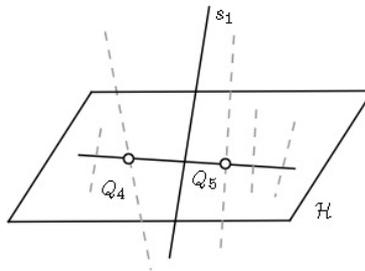


marquemos o ponto Q_1 , de interseção desta com \mathcal{H} . Conforme visto em 3.1 para as quatro retas restantes existem duas retas, r_1 e r_2 , que furam \mathcal{H} em dois pontos, respectivamente Q_2 e Q_3 .

Neste caso, as soluções serão dadas por: $\mathcal{C}_1 : \overline{Q_1Q_2} \cup r_1$ e $\mathcal{C}_2 : \overline{Q_1Q_3} \cup r_2$.

Como poderíamos ter escolhido qualquer uma das cinco retas para marcar o ponto Q_1 , temos um total de $2 \times 5 = 10$ soluções aqui.

Ao invés do procedimento anterior, poderíamos escolher duas das retas não especializadas e marcar os pontos de interseção destas com \mathcal{H} , digamos Q_4 e Q_5 . Para $\overline{Q_4Q_5}$, ℓ_6 , ℓ_7 e ℓ_8 encontramos duas retas que as intersectam simultaneamente, s_1 e s_2 , que nos fornecerão as soluções: $\mathcal{C}_3 : \overline{Q_4Q_5} \cup s_1$ e $\mathcal{C}_4 : \overline{Q_4Q_5} \cup s_2$.

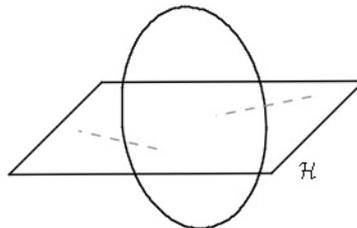


Como poderíamos ter escolhido qualquer par de retas entre as cinco restantes temos $C_{5,2} \times 2 = 20$ soluções.

Sendo assim, temos o total de $36 + 8 + 10 + 20 = 74$ soluções para o caso **4.2**.

Logo, temos $18 + 74 = 92$ cônicas incidentes à 8 retas em posição geral em \mathbb{P}^3 .

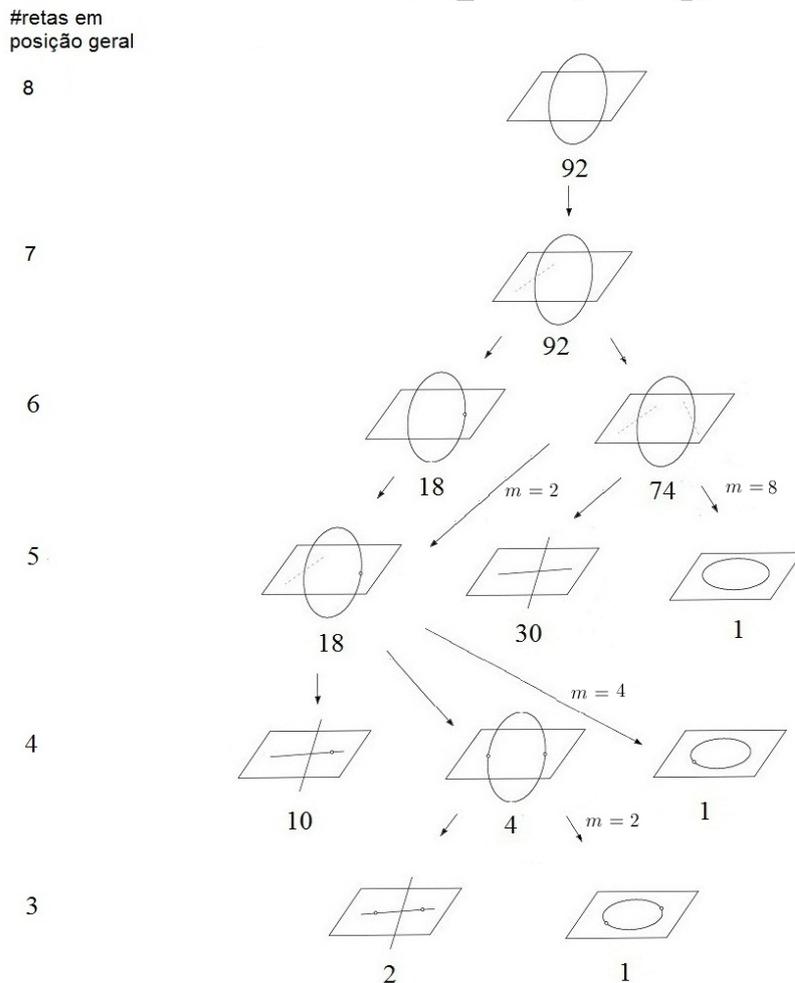
4.3 92 ou 184 cônicas?



Em [V], o método utilizado por Vakil computa 184 cônicas incidentes à 8 retas em \mathbb{P}^3 em posição geral, para depois (devido a simetria das construções) dividir o resultado por dois, encontrando o apresentado aqui. Para entender melhor esse processo devemos voltar ao caso inicial.

Sejam ℓ_1, \dots, ℓ_8 retas em \mathbb{P}^3 em posição geral e \mathcal{H} um plano fixado. Temos que nossas soluções furarão o plano em dois pontos. Então, ao iniciar o processo de especializar as retas, temos que a primeira reta deve passar por um dos dois pontos, teríamos então duas possibilidades de construções para as 92 soluções determinadas. Mas devido a simetria das cônicas a escolha do ponto não afeta a construção final. Logo, temos realmente 92 soluções. Mais à frente (cf. 6.2.3.3), ao utilizarmos as cônicas para a construção de cúbicas, veremos que a escolha do ponto pode alterar a construção final.

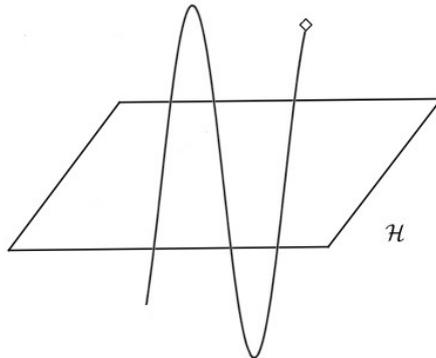
Cônicas incidentes à 8 retas em \mathbb{P}^3 em posição geral



Capítulo 5

Cúbicas Elípticas em \mathbb{P}^3 Incidentes à 12 Retas em Posição Geral

Sabe-se que o espaço de parâmetros de cúbicas elípticas possui dimensão 12. Sendo assim, sejam ℓ_1, \dots, ℓ_{12} , 12 retas em \mathbb{P}^3 em posição geral e \mathcal{H} um hiperplano fixado. Queremos agora calcular o número de cúbicas elípticas em \mathbb{P}^3 incidentes a estas 12 retas.

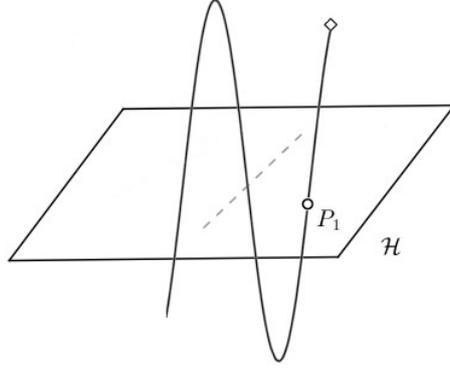


Primeiramente, assim como nos casos anteriores, especializemos as retas ℓ_1 e ℓ_2 a \mathcal{H} . Nessa situação, podemos dividir o problema em dois casos:

1. Cúbicas elípticas que passam por $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$;
2. Cúbicas elípticas que incidem às retas ℓ_1 e ℓ_2 em pontos distintos.

5.1 Cúbicas elípticas que passam por $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$

Especializando ℓ_3 a \mathcal{H} , passamos a procurar cúbicas que passam por P_1 , incidem a ℓ_3 no plano e intersectam as demais retas no espaço.



Para isso, especializemos ℓ_4 ao plano e analisemos os três subcasos fornecidos.

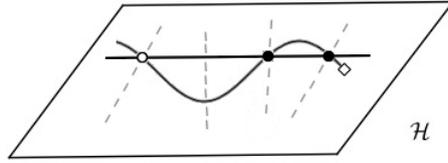
5.1.1 Cúbicas elípticas passando por P_1 e pontos distintos de ℓ_3 e ℓ_4

Como estamos em uma configuração que ainda não nos permite encontrar as soluções, especializemos a reta ℓ_5 ao plano \mathcal{H} , subdividindo esse caso novamente em três subcasos.

5.1.1.1 Cúbicas elípticas no plano passando por dois pontos marcados

Para começar, tomemos os pontos de interseção das retas ainda não especializadas com o plano \mathcal{H} , definidos por $\{P_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $6 \leq i \leq 12$. As soluções devem passar por esses 7 pontos, além do ponto P_1 e outros 2 pontos marcados no plano pela interseção da cúbica, quando ainda no espaço, com as retas ℓ_3 e ℓ_4 no plano.

Sabemos que a dimensão do espaço de parâmetros de cúbicas no plano tem dimensão 10 e que a condição de passar por um ponto nos fornece um hiperplano. Sendo assim temos a interseção de 8 hiperplanos em \mathbb{P}^9 , o que nos fornece uma reta, que pode ser determinada por dois pontos que aqui representam cúbicas, digamos C_1 e C_2 . Portanto,



uma cúbica C contém os 8 pontos, P_i 's e P_1 se, e somente se

$$C = \alpha C_1 + \beta C_2, \text{ com } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Agora, a menos de mudança de coordenadas, podemos supor que o plano que contém a cúbica elíptica tem por equação $W = 0$, $P_1 = [-1 : 1 : 0]$, $\ell_3 : X = 0$ e $\ell_4 : Y = 0$. Considerando a interseção dessas 2 retas com o plano geral passando por P_1 ,

$$aX + bY + cZ = 0,$$

temos marcados em \mathcal{H} os pontos $R_1 = (0 : c : -b)$ e $R_2 = (c : 0 : -a)$. Note que pelo fato de toda cúbica elíptica estar contida em um plano, temos que P_1, R_1 e R_2 são colineares. A condição de C passar por estes pontos nos fornece o sistema

$$\begin{cases} C(R_1) = 0 \\ C(R_2) = 0 \end{cases}$$

de equações em c e b cúbicos, c e a cúbicos, respectivamente.

Reescrevendo o sistema de forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} C_1(R_1) & C_2(R_1) \\ C_1(R_2) & C_2(R_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

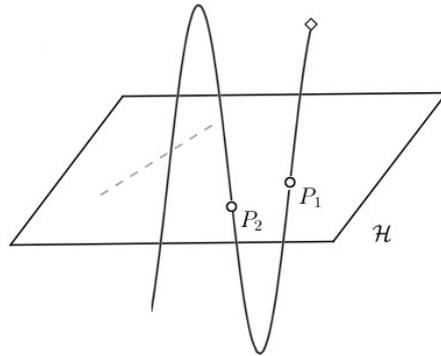
Como não queremos apenas a solução trivial, temos que

$$\text{Det} \begin{pmatrix} C_1(R_1) & C_2(R_1) \\ C_1(R_2) & C_2(R_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Nos fornecendo assim, uma equação em a, b e c de grau 6. Note que aqui a, b possuem grau 3, enquanto c tem grau 6. Inicialmente, temos 6 soluções, mas quando olhamos para $c = 0$ a solução passa pelo ponto de interseção de ℓ_3 e ℓ_4 , a qual não estamos considerando nesse caso. Portanto, temos 5 soluções, com multiplicidade $m = 3^1 = 3$ devido a interseção da cúbica com ℓ_5 . Sendo assim, ao todo temos 15 soluções para esse subcaso.

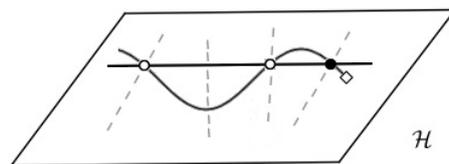
5.1.1.2 Cúbicas elípticas no espaço passando por dois pontos e incidentes a uma reta no plano

Aqui se faz necessário especializarmos a reta ℓ_6 , dividindo o problema em dois novos subcasos.



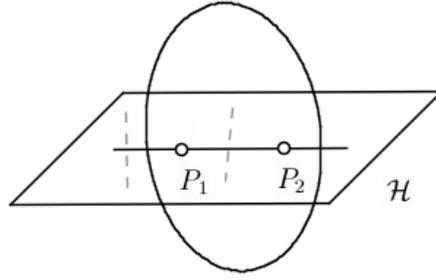
5.1.1.2.1 Cúbicas elípticas no plano passando por um ponto marcado

Marcando os pontos de interseção das 6 retas ainda não especializadas com o plano \mathcal{H} , temos que estes mais P_1 e P_2 , determinam uma única cúbica elíptica. Note que a cúbica incide à reta ℓ_5 em \mathcal{H} , o que nos fornece multiplicidade $m = 3$ para a solução.



5.1.1.2.2 Cúbicas elípticas que são a união de uma cônica no espaço e a reta determinada por P_1 e P_2

As soluções desse caso são construídas utilizando fibrados e classes de Chern, que serão apresentadas no apêndice A. Utilizando dessa teoria encontramos 8 soluções, os cálculos dos mesmos se encontram no apêndice B.

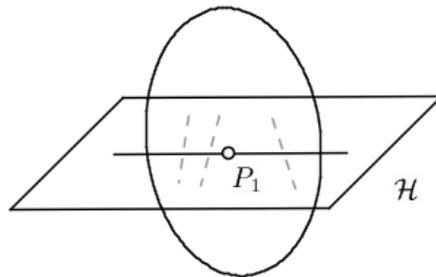


Note que, nos dois últimos subcasos, o ponto P_2 poderia ter sido determinado de duas formas diferentes, portanto temos $2 \times (3 + 8) = 22$ soluções para o subcaso [5.1.1.2].

5.1.1.3 Cúbicas elípticas que são a união de uma cônica no espaço e a reta determinada por ela e P_1 no plano

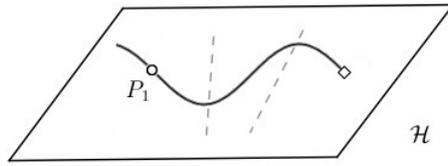
De maneira análoga ao caso anterior, temos 34 cúbicas como solução.

Além disso, escolhendo uma das 7 retas em posição geral, digamos ℓ_6 , podemos marcar o ponto Q_6 em \mathcal{H} gerando assim uma nova família de soluções, dada pela união da reta $\overline{P_1Q_6}$ com uma das 8 cônicas incidentes às demais retas e marcando dois pontos em $\overline{P_1Q_6}$. Logo, temos um total de $34 + 7 \times 8 = 90$ soluções para esse caso.



5.1.2 Cúbicas elípticas contidas em \mathcal{H} passando por P_1

Tomemos os pontos $\{P_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $5 \leq i \leq 12$. Temos que por eles, juntamente com P_1 , passa uma única cúbica elíptica, que incide às retas ℓ_3 e ℓ_4 em \mathcal{H} . Logo, temos uma solução com multiplicidade $m = 3^2 = 9$ para esse caso.

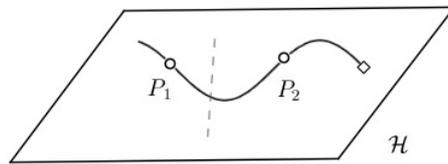


5.1.3 Cúbicas elípticas no espaço passando por dois pontos no plano

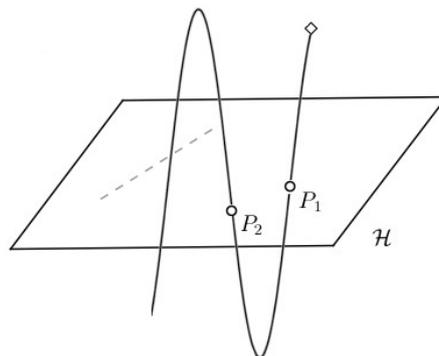
Seja P_2 o ponto determinado ao especializar ℓ_4 ao plano. Ao especializarmos ℓ_5 obtemos dois novos casos.

5.1.3.1 Cúbicas elípticas contidas em \mathcal{H} passando por P_1 e P_2

Tomemos os pontos $\{P_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $6 \leq i \leq 12$. Temos que por eles, juntamente com P_1 e P_2 , passa uma única cúbica elíptica, que incide à ℓ_5 em \mathcal{H} . Logo, temos uma solução com multiplicidade $m = 3^1 = 3$ para esse caso.



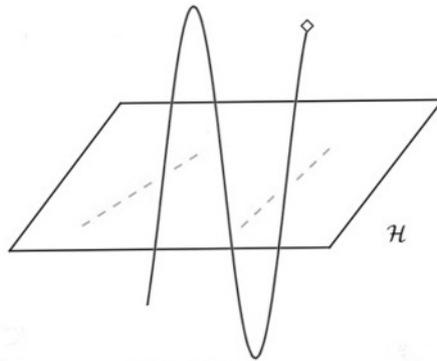
5.1.3.2 Cúbicas elípticas no espaço passando por P_1 , P_2 e incidente a uma reta no plano



Note que esse caso é praticamente o mesmo que 5.1.1.2, com a diferença de que o segundo ponto já está definido. Portanto, temos 11 soluções para esse subcaso. Logo, temos um total de $3 + 11 = 14$ soluções para o caso 5.1.3 e um total de $127 + 14 + 9 = 150$ soluções para o caso 5.1.

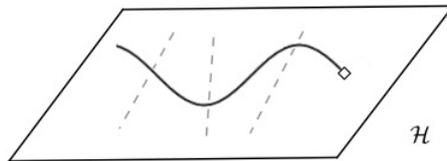
5.2 Cúbicas elípticas que incidem às retas l_1 e l_2 em pontos distintos

Especializando l_3 ao plano \mathcal{H} dividimos nosso problema em três subcasos.

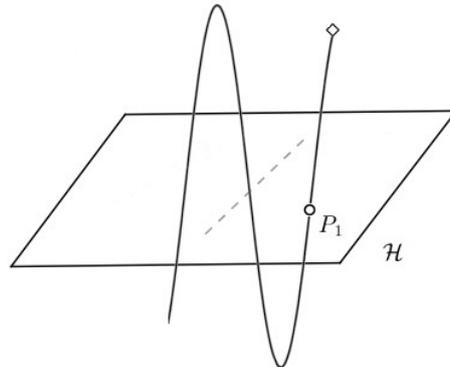


5.2.1 Cúbica elíptica contida em \mathcal{H}

Marquemos os pontos de interseção das 9 retas ainda não especializadas com \mathcal{H} . Temos que esses pontos determinam uma única cúbica elíptica em \mathcal{H} . A cúbica incide às 3 retas já especializadas, nos fornecendo multiplicidade $m = 3^3 = 27$ para a solução.

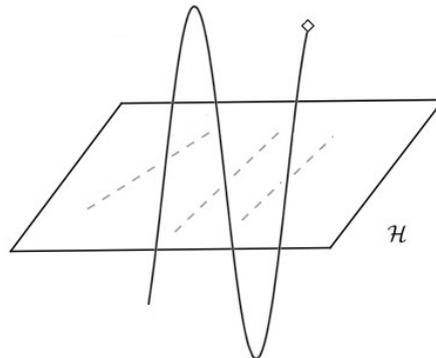


5.2.2 Cúbicas elípticas no espaço passando por um ponto e incidentes a uma reta no plano



Note que esse é praticamente o mesmo caso que 5.1, com a diferença de que o ponto " P_1 ", pode ser determinado de duas formas diferentes. Sendo assim, temos $2 \times 150 = 300$ soluções.

5.2.3 Cúbicas elípticas incidentes às retas ℓ_1, ℓ_2 e ℓ_3 em pontos distintos

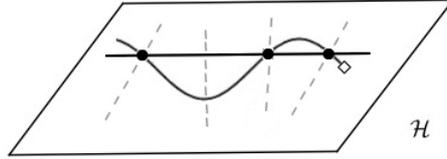


Para prosseguir devemos especializar ℓ_4 ao plano, dividindo este caso em três sub-casos.

5.2.3.1 Cúbicas elípticas no plano passando por três pontos marcados

Para começar, tomemos os pontos de interseção das retas ainda não especializadas com o plano \mathcal{H} . Defina $\{P_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $5 \leq i \leq 12$. As soluções devem passar por

esses 8 pontos, além de outros 3 pontos colineares marcados no plano pela interseção da cúbica, quando ainda no espaço, com as três retas especializadas anteriormente, que para fim de cálculos denominaremos ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 . A condição de colinearidade dos pontos vem do fato de toda cúbica elíptica está contida em um plano.



Analogamente ao caso 5.1.1.1, temos que uma cúbica C contém os 8 pontos se, e somente se

$$C = \alpha C_1 + \beta C_2, \text{ com } [\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1.$$

Agora, a menos de mudança de coordenadas, podemos supor $\ell_1 : X = 0$, $\ell_2 : Y = 0$ e $\ell_3 : Z = 0$. Considerando a interseção dessas 3 retas com o plano geral

$$aX + bY + cZ = 0,$$

temos marcados em \mathcal{H} três pontos colineares, $R_1 = (0 : c : -b)$, $R_2 = (c : 0 : -a)$ e $R_3 = (b : -a : 0)$. Já a condição de C passar por estes pontos nos fornece o sistema

$$\begin{cases} C(R_1) = 0 \\ C(R_2) = 0 \\ C(R_3) = 0 \end{cases}$$

de equações em c e b cúbicos, c e a cúbicos, a e b cúbicos, respectivamente.

Olhando inicialmente para as duas primeiras equações do sistema, temos

$$\begin{pmatrix} C_1(R_1) & C_2(R_1) \\ C_1(R_2) & C_2(R_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como não queremos apenas a solução trivial, temos que

$$\text{Det} \begin{pmatrix} C_1(R_1) & C_2(R_1) \\ C_1(R_2) & C_2(R_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Nos fornecendo assim, uma equação em a, b e c de grau 6. Note que aqui a, b possuem grau 3, enquanto c tem grau 6. Agora, da 3ª equação do sistema, temos

$$\alpha C_1(R_3) = -\beta C_2(R_3).$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $C_1(R_1)$, obtemos

$$-\beta C_2(R_1)C_1(R_3) = -\beta C_1(R_1)C_2(R_3).$$

Como $\beta \neq 0$, podemos dividir o resultado por β e em seguida tomar seu fecho, chegando ao resultado

$$f = C_2(R_1)C_1(R_3) - C_1(R_1)C_2(R_3).$$

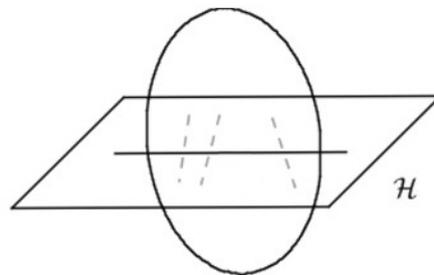
Note que f possui grau 6, em relação a c tem grau 3. Agora calculando a resultante entre o polinômio gerado pelo determinante e f , com relação a c , temos

$$\mathcal{R}_c(det, f) = |M_{9 \times 9}| = \prod_{i=1}^{18} (b_i a - a_i b),$$

um polinômio em a, b , homogêneo de grau 18.

Sendo assim, temos 18 pares (α_i, β_i) satisfazendo o sistema. Logo, temos 18 soluções para esse caso. Note que a solução tem multiplicidade $m = 3^1$, já que a cúbica incide à reta ℓ_4 em \mathcal{H} .

5.2.3.2 Cúbicas elípticas que são a união de uma cônica no espaço e a reta determinada por ela no plano



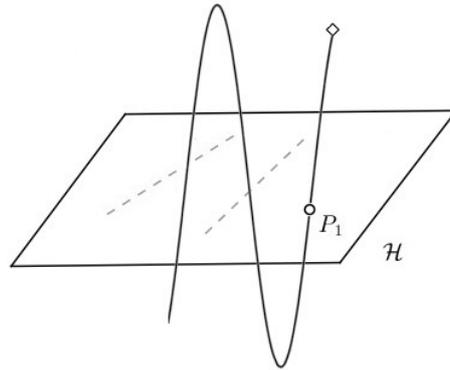
Sabemos que por 8 retas em posição geral passam 92 cônicas, que marcam dois pontos cada em \mathcal{H} . Nossas soluções são formadas pela união da cônica com a reta determinada por esses pontos marcados.

Podemos ainda escolher uma das 8 retas, digamos ℓ_5 , e marcar o ponto Q_5 em \mathcal{H} . Sendo assim, temos de 5.1.1.3, $8 \times 34 = 272$ soluções.

Além disso, escolhendo duas das retas ainda não especializadas, determinamos uma reta em \mathcal{H} , nos fornecendo uma nova família de soluções, dada pela união da reta com as cônicas incidentes à ela em dois pontos e as demais retas em posição geral. Temos então, $C_{8,2} \times 8 = 224$ soluções.

Portanto, temos um total de $92 + 272 + 224 = 588$ soluções para esse subcaso.

5.2.3.3 Cúbicas elípticas no espaço passando por um ponto e incidentes a duas retas no plano



Note que esse é praticamente o mesmo caso que 5.1.1, com a diferença que podemos determinar o ponto P_1 de três formas diferentes, $\ell_i \cap \ell_j$ com $1 \leq i < j \leq 3$. Sendo assim, temos $3 \times 127 = 381$ soluções para esse subcaso.

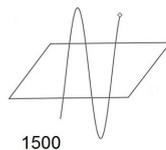
No total, temos $54 + 588 + 381 = 1023$ soluções para o subcaso 5.2.3, o que nos deixa com $27 + 300 + 1023 = 1350$ soluções para o caso 5.2.

Logo, temos que por 12 retas em \mathbb{P}^3 em posição geral incidem $150 + 1350 = 1500$ cúbicas elípticas.

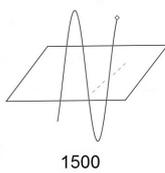
Cúbicas Elípticas Incidentes a 12 retas em \mathbb{P}^3 em Posição Geral

#retas em
posição geral

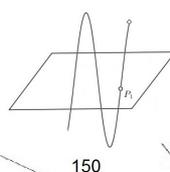
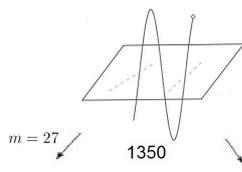
12



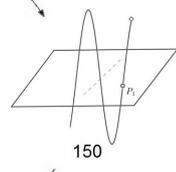
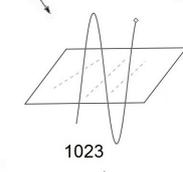
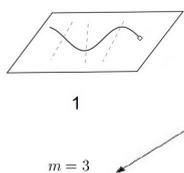
11



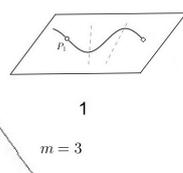
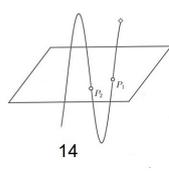
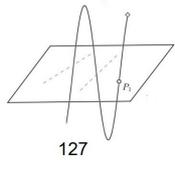
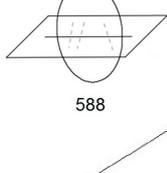
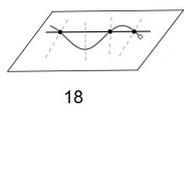
10



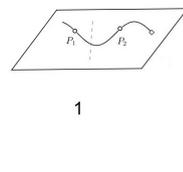
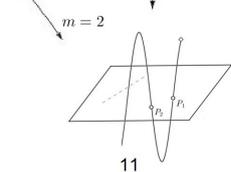
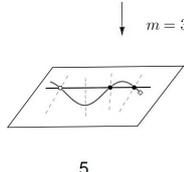
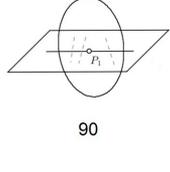
9



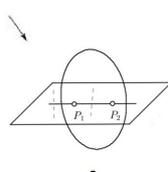
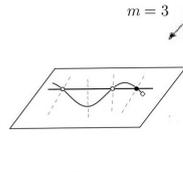
8



7



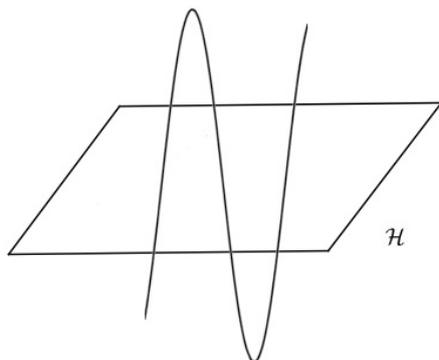
6



Capítulo 6

Cúbicas Reversas em \mathbb{P}^3 Incidentes a 12 Retas em Posição Geral

Como vimos em 2.2, o espaço de parâmetros de cúbicas reversas possui dimensão 12. Assim sendo, sejam ℓ_1, \dots, ℓ_{12} , 12 retas em \mathbb{P}^3 em posição geral e \mathcal{H} um plano fixado. Nosso objetivo é determinar o número de cúbicas reversas em \mathbb{P}^3 incidentes a estas 12 retas.

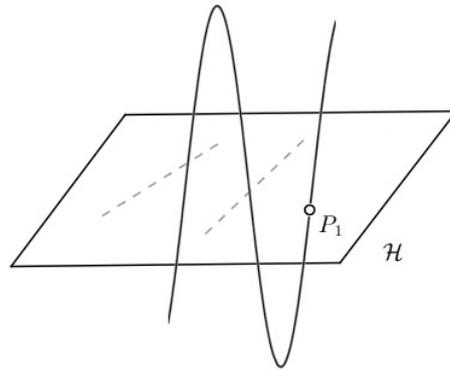


Inicialmente, especializemos a reta ℓ_1 ao hiperplano \mathcal{H} . Em seguida, especializando a reta ℓ_2 , podemos dividir o problema em dois subcasos:

1. Cúbicas reversas que passam por $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$;
2. Cúbicas reversas que incidem as retas ℓ_1 e ℓ_2 em pontos distintos.

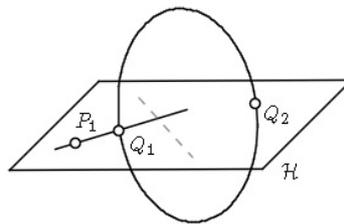
6.1 Cúbicas que passam por $\{P_1\} = \ell_1 \cap \ell_2$

Especializando a reta ℓ_3 ao plano \mathcal{H} , passamos a procurar cúbicas que passam por P_1 e incidem a ℓ_3 no plano e as demais retas no espaço. Para tal, especializemos a reta ℓ_4 ao plano \mathcal{H} , gerando os seguintes três subcasos.



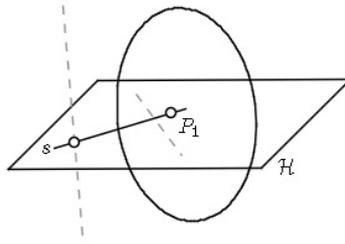
6.1.1 Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço e uma reta no plano \mathcal{H} passando por P_1

Como vimos no Cap.4, temos que por 8 retas em posição geral incidem 92 cônicas. Então, fixando uma dessas cônicas, temos dois pontos marcados em \mathcal{H} , digamos Q_1 e Q_2 . Assim, as soluções são dadas pela união da cônica com a reta $\overline{P_1Q_1}$ ou $\overline{P_1Q_2}$. Como há a possibilidade de escolher qualquer uma das cônicas, temos ao todo $2 \times 92 = 184$ soluções.



Por outro lado, podemos escolher uma das 8 retas não especializadas e determinar uma reta s em \mathcal{H} , passando por P_1 . Por esta e as 7 restantes incidem 92 cônicas. Assim sendo, temos $8 \times 92 = 736$ soluções.

Totalizando $184 + 736 = 920$ soluções para este subcaso.

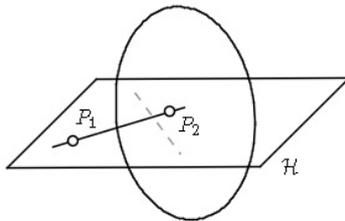


6.1.2 Cúbicas que passam por P_1 e $\{P_2\} = \ell_3 \cap \ell_4$

Especializando a reta ℓ_5 ao plano, podemos dividir o problema nos seguintes sub-casos.

6.1.2.1 Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço e a reta determinada por P_1 e P_2

Por $\overline{P_1P_2}, \ell_6, \dots, \ell_{11}$ e ℓ_{12} sabemos que incidem 92 cônicas, então nossa solução será dada como a $\mathcal{C}_{ub} : \overline{P_1P_2} \cup C$, onde C representa uma dessas 92 cônicas.



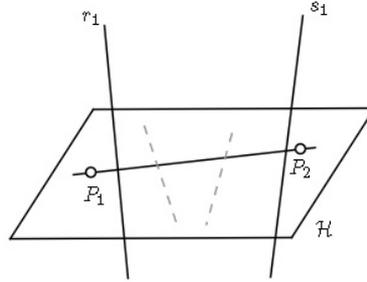
6.1.2.2 Cúbicas que passam por P_1, P_2 e um ponto geral de ℓ_5

Ao especializar a reta ℓ_6 ao plano ganhamos 7 novos subcasos, que listaremos a seguir:

6.1.2.2.1 Cúbicas que passam por P_1, P_2 e pontos distintos de ℓ_5 e ℓ_6

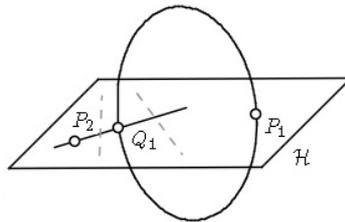
Separando as 6 retas ainda não especializadas em dois grupos de 3 retas cada, temos que por cada grupo desse, mais a reta $\overline{P_1P_2}$, incidem outras 2 retas. Agora, sejam s_1, s_2 as retas que passam pelo primeiro grupo e r_1, r_2 as que passam pelo segundo grupo, as

soluções procuradas são da forma $\mathcal{C}_{ub} = \overline{P_1P_2} \cup s_i \cup r_j$ com $i, j \in \{1, 2\}$. Portanto, temos $(C_{6,3} \times 2 \times 2)/2 = 40$ soluções para esse subcaso, a divisão por 2 se deve a simetria da configuração.

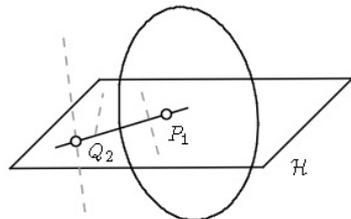


6.1.2.2.2 Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço passando por determinado ponto e uma reta no plano \mathcal{H}

Pelo ponto P_1 (ou P_2) passam 18 cônicas que são incidentes as 6 retas ainda não especializadas (cf. 4.1).



Fixando uma dessas cônicas, passando por P_1 por exemplo, temos que ela fura o plano em um outro ponto, digamos Q_1 . Assim, as soluções são formadas pela união da cônica fixada com a reta $\overline{P_2Q_1}$. Como há possibilidade de começar a construção com o ponto P_2 , temos ao todo $2 \times 18 = 36$ soluções.



Além disso, escolhendo uma das 6 retas ainda não especializadas e marcando seu ponto de interseção com o plano \mathcal{H} , digamos Q_2 , temos que por P_2 passam 18 cônicas

que são incidentes à reta $\overline{P_1Q_2}$ e as demais retas em posição geral. Sendo assim, temos $6 \times 18 = 108$ soluções.

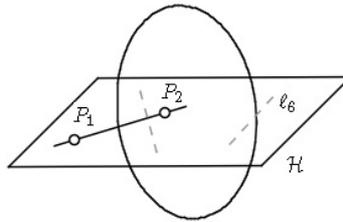
Note que devido a possibilidade de ter começado com a reta $\overline{P_2Q_2}$ temos um total de $2 \times 108 + 36 = 252$ soluções para este subcaso.

6.1.2.2.3 Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço e a reta determinada por P_1 e P_2 no plano

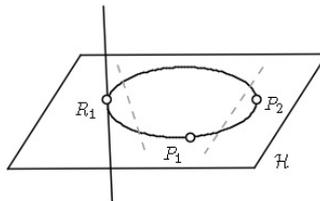
Podemos construir as soluções desse caso de maneira rápida.

Sabemos que por $\ell_6, \overline{P_1P_2}$ e as 6 retas ainda não especializadas incidem 74 cônicas, estas juntamente com a reta $\overline{P_1P_2}$, determinam as soluções procuradas.

Logo, temos 74 soluções para este subcaso (cf. 4.2.2).



6.1.2.2.4 Cúbicas que são a união de uma cônica no plano e uma reta no espaço

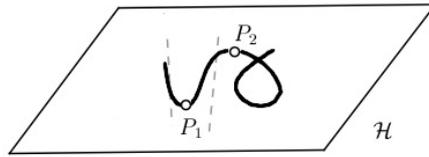


Escolhendo 4 das 6 retas ainda não especializadas ao plano, temos que por elas passam duas retas, digamos m_1 e m_2 . Estas retas, por sua vez, furam o plano em dois pontos, respectivamente R_1 e R_2 . Pelos pontos de interseção das outras duas retas com \mathcal{H} , P_1 , P_2 e R_1 ou R_2 , passa uma única cônica que incidirá as retas já especializadas. Aqui, devemos contar a solução com multiplicidade, identicamente ao feito no caso de cônicas. Neste caso, temos $m = 2^2 = 4$ para a solução, que será formada pela cônica.

nica e a respectiva reta do ponto escolhido. Portanto, temos $4 \times C_{6,4} \times 2 = 120$ soluções.

Além disso, escolhendo 3 das 6 retas ainda não especializadas e marcando os pontos de interseção destas com o plano, juntamente com P_1 e P_2 , temos determinada uma cônica C_1 em \mathcal{H} . Temos que o lugar das retas que incidem as demais é uma quádrlica de $\mathbb{P}^3 [A]$, que ao intersectar o plano \mathcal{H} determina uma cônica C_2 . Por sua vez, C_2 intersectará C_1 em 4 pontos, onde por cada um desses passa uma reta incidindo às três retas na quádrlica. Logo, temos $C_{6,3} \times 4 = 80$ soluções, com multiplicidade $m = 2^2 = 4$, já que C_1 incide às duas retas já especializadas, nos fornecendo o total de 320 soluções. Portanto, temos $120 + 320 = 440$ soluções para este caso.

6.1.2.2.5 Cúbicas singulares no plano passando por dois pontos dados

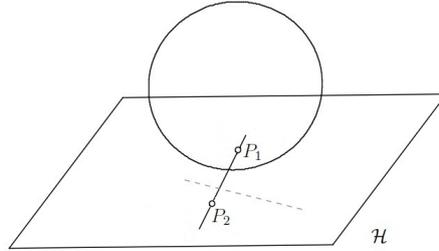


Começamos marcando os pontos $\{Q_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $i \in \{7, \dots, 12\}$, por eles, juntamente com P_1 e P_2 , passam 12 cúbicas singulares (*prop.1.3.1*), que intersectam as 2 retas já especializadas nos fornecendo multiplicidade $m = 3^2 = 9$ para a solução. Geometricamente, o raciocínio para o cálculo da multiplicidade é análogo ao feito para as cônicas. Podemos imaginar a cúbica no espaço com 3 pontos marcados, onde por um deles passa uma reta, de tal forma que ao especializarmos essa configuração ao plano \mathcal{H} , essa reta passe exatamente pelos os outros 2 pontos. Note que, independentemente do ponto escolhido para iniciar a construção, a configuração final é a mesma, nos fornecendo assim multiplicidade 3 para a solução, como estamos tratando de duas retas temos multiplicidade 9.

Assim temos um total $12 \times 9 = 108$ soluções neste subcaso.

6.1.2.2.6 Cúbicas que são uma cônica tangente ao plano e uma reta no plano

Temos que pelas retas ℓ_6 , as 6 ainda não especializadas e a reta $\overline{P_1P_2}$, passam 74 cônicas. Por 5.1.1.2.1, temos que 16 dessas cônicas furam \mathcal{H} em dois pontos, portanto temos $74 - 16 = 58$ cônicas tangentes à $\overline{P_1P_2}$. Note que temos multiplicidade $m = 2$ aqui, devido ao ponto duplo, nos fornecendo um total de 116 soluções para esse subcaso.

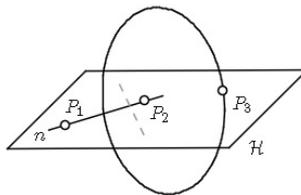


6.1.2.2.7 Cúbicas passando por $\{P_3\} = \ell_5 \cap \ell_6$

Ao especializar ℓ_7 dividimos o problema nos seguintes três novos subcasos.

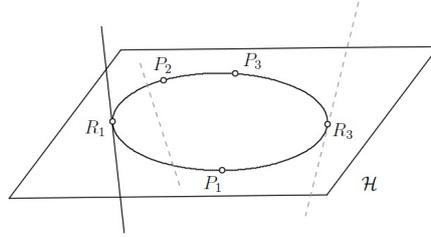
6.1.2.2.7.1 Cúbicas que são união de uma cônica no espaço passando por um determinado ponto e uma reta no plano

Primeiramente, escolhamos 2 dos 3 pontos marcados em \mathcal{H} e determinemos a reta n , por P_3 passam 18 cônicas que são incidentes à reta n . Portanto, temos $C_{3,2} \times 18 = 54$ soluções.



6.1.2.2.7.2 Cúbicas que são união de uma cônica no plano passando por 3 pontos dados e incidentes a uma reta no espaço

Escolhamos 4 das 5 retas ainda não especializadas, assim existem duas retas que intersectam essas 4 retas e que furam o plano em dois pontos, digamos R_1 e R_2 . Pela interseção da reta restante com \mathcal{H} , digamos R_3 , e os pontos P_1, P_2, P_3 e R_1 ou R_2 , passa uma única cônica. Logo, temos $5 \times 2 = 10$ soluções, com multiplicidade $m = 2^1 = 2$, já que a cônica incide à reta ℓ_7 no plano \mathcal{H} . Por outro lado, poderíamos escolher 2 das

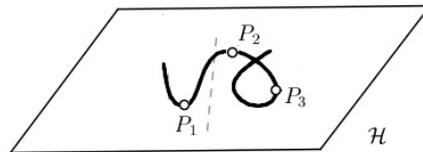


5 retas ainda não especializadas e marcar seus pontos de interseção com \mathcal{H} , o quais, juntamente com P_1, P_2 e P_3 , determinam uma cônica C_1 no plano. Como o lugar das retas que se apoiam nas demais é uma quádrlica, tomemos a cônica C_2 determinada pela interseção dessa quádrlica com \mathcal{H} . A cônica C_2 intersecta C_1 em quatro pontos e por cada um desses passa uma reta incidente as 3 na quádrlica. Logo, temos $C_{5,2} \times 4 = 40$ soluções, também com multiplicidade $m = 2^1 = 2$, já que C_1 incide à reta ℓ_7 no plano \mathcal{H} .

Sendo assim, temos o total de $2 \times 10 + 2 \times 40 = 100$ soluções para este subcaso.

6.1.2.2.7.3 Cúbicas singulares no plano passando por 3 pontos dados

Para começar, marquemos os pontos $\{Q_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $8 \leq i \leq 12$. Por esses pontos, P_1, P_2 e P_3 passam 12 cúbicas singulares (cf. 1.3.1), que intersectam a reta já especializada nos fornecendo multiplicidade $m = 3^1 = 3$.



Logo, temos $54 + 100 + 36 = 190$ soluções para o subcaso 6.1.2.2.7, e um total de $40 + 252 + 74 + 440 + 108 + 116 + 190 = 1220$ soluções para o subcaso 6.1.2.2. Sendo assim, temos o total de $92 + 1220 = 1312$ soluções para o caso 6.1.2.

6.1.3 Cúbicas que passam por P_1 e pontos distintos de ℓ_3 e ℓ_4

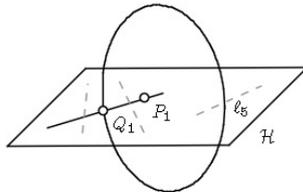
Aqui, novamente podemos subdividir nosso problema em sete casos, ao especializar ℓ_5 .

6.1.3.1 Cúbicas que passam por P_1 , um outro ponto no plano e incidem a uma reta no plano

Note que este caso é análogo ao apresentado em 6.1.2.2, com a diferença de que o segundo ponto na construção da solução pode ser determinado de duas formas, pela interseção de ℓ_5 com ℓ_3 ou ℓ_4 . Portanto temos $2 \times 1220 = 2440$ soluções para este subcaso.

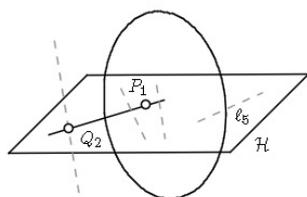
6.1.3.2 Cúbicas que são união de uma cônica no espaço e uma reta no plano

Ao especializar a reta ℓ_5 ao plano \mathcal{H} , reduzimos nossa busca a determinação das cúbicas que passam pelo ponto P_1 e incidem a reta ℓ_5 e as retas ainda não especializadas.



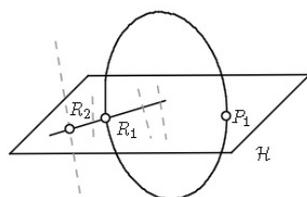
Sabemos que por 7 retas em posição geral e uma reta no plano incidem 92 cônicas (cf. 4). Se fixarmos uma dessas cônicas, esta determina um novo ponto em \mathcal{H} , digamos Q_1 . Portanto, temos 92 soluções, que serão dadas pela união da cônica com a reta $\overline{P_1Q_1}$.

Poderíamos ainda ter escolhido uma das 7 retas restantes e marcar um ponto Q_2 no plano. Segue-se de 4.2 que existem 74 cônicas incidentes as retas ℓ_5 e $\overline{P_1Q_2}$. Sendo assim, temos $7 \times 74 = 518$ soluções, compostas pela união das cônicas com a reta $\overline{P_1Q_2}$.

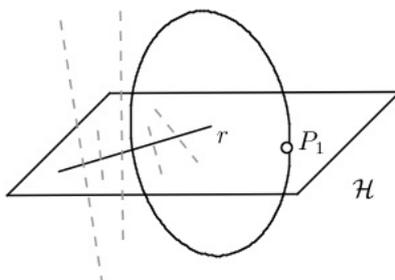


Temos então, $92 + 518 = 610$ soluções com multiplicidade $m = 2^1 = 2$. Logo, temos no total $2 \times 610 = 1220$ soluções para este subcaso.

6.1.3.3 Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço passando por P_1 e incidente a uma reta no plano



Sabemos que por 6 retas em posição geral e um ponto no plano passam 18 cônicas. Fixemos uma dessas cônicas e marquemos o outro ponto de interseção desta com \mathcal{H} , digamos R_1 . Seja R_2 o ponto de interseção da reta ainda não especializada com \mathcal{H} , as soluções procuradas são dadas como a união da cônica fixada com a reta $\overline{R_1 R_2}$, nos fornecendo assim $7 \times 18 = 126$ soluções.

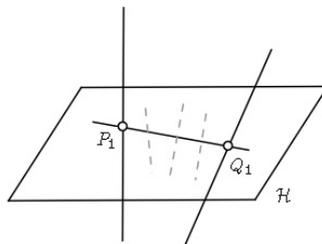


Além disso, podemos pensar no caso em que escolhemos duas das 7 retas ainda não especializadas, determinando uma reta r em \mathcal{H} . Temos então, que pelo ponto P_1 passam 18 cônicas incidentes à reta r , o que nos fornece $C_{7,2} \times 18 = 378$ soluções.

Totalizando $126 + 378 = 504$ soluções para esse subcaso.

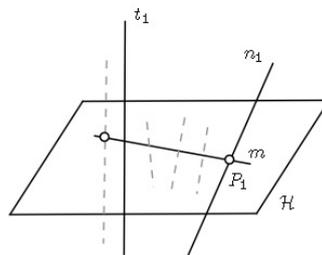
6.1.3.4 Cúbicas que são a união de três retas

Escolhendo quatro das 7 retas ainda não especializadas, temos que por elas incidem duas retas que furam o plano em dois pontos, digamos Q_1 e Q_2 . Pelas três retas restantes e a reta $\overline{P_1Q_1}$ ou $\overline{P_1Q_2}$ incidem outras duas retas, nos fornecendo assim $C_{7,4} \times 2 \times 2 = 140$ soluções.



Agora, escolhemos uma das 7 retas em posição geral e marquemos um ponto em \mathcal{H} , determinando uma reta m passando por P_1 . Dividamos as 6 retas restantes em dois grupos de três cada. Por cada grupo, juntamente com a reta m , encontramos duas retas incidentes.

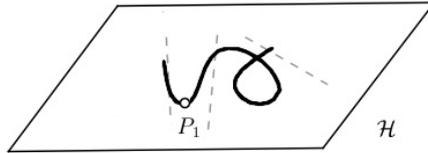
Sejam n_1, n_2 as retas que incidem ao primeiro grupo e t_1, t_2 as que incidem ao segundo grupo, assim as soluções são da forma $\mathcal{C}_{ub} : m \cup n_i \cup t_j$, com $i, j \in \{1, 2\}$. Sendo assim, temos $(7 \times C_{6,3} \times 2 \times 2)/2 = 280$ soluções.



Logo, temos o total de $140 + 280 = 420$ soluções para este subcaso.

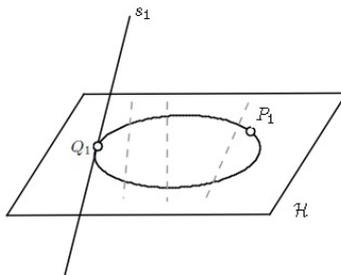
6.1.3.5 Cúbicas singulares no plano passando por um ponto dado

Para começar, marquemos os pontos $\{Q_i\} = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $6 \leq i \leq 12$, por eles e P_1 passam 12 cúbicas singulares. Estas, por sua vez, intersectam as três retas já especializadas nos fornecendo multiplicidade $m = 3^3 = 27$ para cada solução. Ao todo, temos $12 \times 27 = 324$ soluções para este subcaso.



6.1.3.6 Cúbicas que são a união de uma cônica no plano e um reta no espaço

Inicialmente, pensemos na situação em que escolhemos quatro das 7 retas ainda não especializadas, sabemos que por elas existem duas retas incidentes, s_1 e s_2 , que furam o plano nos pontos Q_1 e Q_2 , respectivamente. As outras retas ainda não especializadas marcam três pontos em \mathcal{H} , os quais, juntamente com P_1 e Q_1 ou Q_2 , determinam uma única cônica no plano, que incide às três retas já especializadas. Sendo assim, temos $2 \times C_{7,4} = 70$ soluções com multiplicidade $m = 2^3 = 8$, já que as soluções incidem a 3 retas já especializadas no plano.



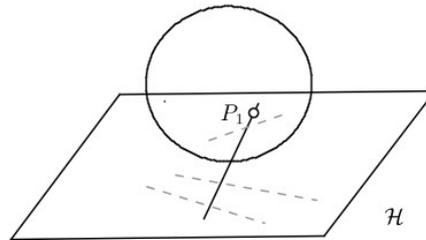
Além disso, podemos escolher quatro das 7 retas ainda não especializadas e marcar os pontos de interseção destas com o plano, estes juntamente com P_1 determinam uma cônica C_1 em \mathcal{H} . Sabemos que o lugar das retas que incidem as demais retas é uma quádrlica de \mathbb{P}^3 . Tomemos a cônica C_2 , determinada pela interseção desta quádrlica

com plano, ela intersectará C_1 em quatro pontos e cada um desses pontos determina uma reta incidindo as três retas na quádrlica. Temos assim $C_{7,4} \times 4 = 140$ soluções com multiplicidade $m = 2^3 = 8$, já que as soluções incidem a 3 retas já especializadas no plano.

Logo temos $560 + 1120 = 1680$ soluções para este subcaso.

6.1.3.7 Cúbicas que são a união de uma cônica tangente ao plano e uma reta no plano passando por um determinado ponto

Temos que pelas 7 retas em posição geral e a reta ℓ_5 em \mathcal{H} passam 92 cônicas, mas ao contrário do caso de cônicas, a escolha do ponto marcado pelo qual a reta passa altera a configuração da solução. Sendo assim, temos $2 \times 92 = 184$ cônicas. Por sua vez, de 5.1.1.3 temos que 68 dessas cônicas furam o plano em dois pontos. Portanto, temos $184 - 68 = 116$ cônicas tangentes à \mathcal{H} . Note que as soluções são geradas pela união da cônica tangente à \mathcal{H} e a reta determinada pelo ponto de tangência e o ponto já marcado no plano, contando ainda com multiplicidade $m = 2^1 = 2$, devido ao ponto duplo.



Além disso, podemos escolher uma das 7 retas ainda não especializadas e marcar um ponto em \mathcal{H} , determinando uma reta passando por P_1 . Essa nova configuração, é a mesma do caso 6.1.2.2.6, nos fornecendo assim $7 \times 58 = 406$ soluções, ainda com multiplicidade 2. Dessa forma, temos um total de $2 \times (116 + 406) = 1044$ soluções para esse subcaso.

Portanto, temos $2440 + 1220 + 420 + 504 + 324 + 1680 + 1044 = 7632$ soluções para o caso 6.1.2.3 e um total de $920 + 1312 + 7632 = 9864$ soluções para 6.1.

6.2 Cúbicas que passam por pontos distintos de ℓ_1 e ℓ_2

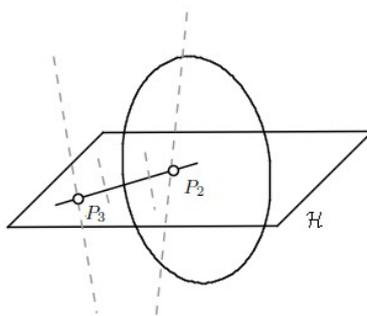
Especializando ℓ_3 dividimos nosso problema nos seguintes três subcasos.

6.2.1 Cúbicas incidentes a uma reta e um ponto no plano

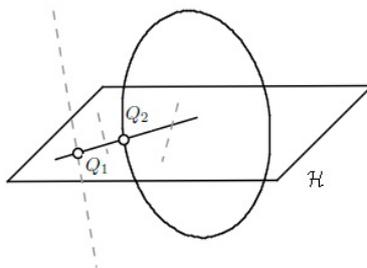
Note que este caso é análogo ao caso 6.1, com a única diferença que o ponto inicial da construção da solução pode ser determinado de duas formas diferentes, a interseção de ℓ_3 com ℓ_1 ou ℓ_2 . Portanto, temos aqui $2 \times 9864 = 19728$ soluções para esse subcaso.

6.2.2 Cúbicas que são a união de uma cônica no espaço e uma reta no plano

Para começar, escolhamos duas das 9 retas ainda não especializadas e marquem os pontos P_2 e P_3 em \mathcal{H} . Sabemos que existem 92 cônicas incidentes as retas $\overline{P_2P_3}, \ell_6, \dots, \ell_{12}$. Portanto, temos como soluções as cúbicas formadas pela união das cônicas com a reta $\overline{P_2P_3}$. Totalizando assim $C_{9,2} \times 92 = 3312$ soluções.



Além disso, poderíamos escolher uma das 9 retas ainda não especializadas e marcar um ponto Q_1 em \mathcal{H} . Sabemos que pelas 8 restantes incidem 92 cônicas. Fixando uma dessas cônicas, temos que ela deve furar \mathcal{H} em dois pontos, digamos Q_2 e Q_3 .



Assim as soluções serão formadas tomando a cônica união com a reta $\overline{Q_1Q_2}$ ou $\overline{Q_1Q_3}$, logo temos um total de $9 \times 92 \times 2 = 1656$ soluções para esse subcaso. Portanto, temos um total de $3312 + 1656 = 4968$ cúbicas para este caso.

6.2.3 Cúbicas que passam por pontos distintos de l_1, l_2 e l_3

Especializando l_4 podemos dividir o caso em 6 novos subcasos.

6.2.3.1 Cúbicas que passam por um ponto e incidem a uma reta no plano

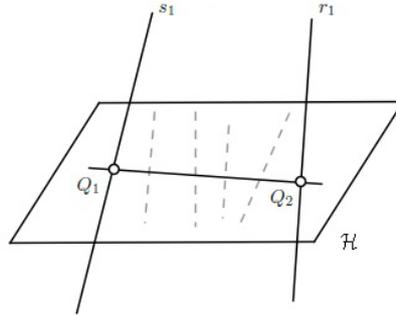
Note que este caso é análogo ao caso 6.1.2.3, com a única diferença de que a escolha para o ponto " P_1 " no plano pode ser feita de três formas diferentes, $l_4 \cap l_i$ com $1 \leq i \leq 3$. Portanto temos $3 \times 7632 = 22896$ soluções.

6.2.3.2 Cúbicas que são a união de três retas

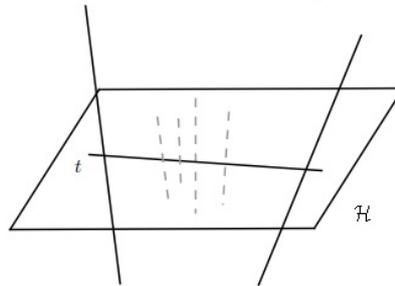
Inicialmente, separemos as 8 retas ainda não especializadas em dois grupos, cada um com quatro retas. Por cada um deles incidem duas retas, digamos s_1, s_2 e r_1, r_2 , respectivamente.

Considerando uma de cada grupo, s_1 e r_1 por exemplo, determinamos dois pontos em \mathcal{H} , digamos Q_1 e Q_2 . As retas $\overline{Q_1Q_2}, s_1$ e r_1 determinam uma das soluções procuradas. Temos então, um total de $(C_{8,4} \times 2 \times 2)/2 = 140$ soluções.

Mas também podemos escolher duas entre as 8 retas ainda não especializadas e marcar dois pontos em \mathcal{H} , que determinam uma reta t . Dividindo as 6 restantes em

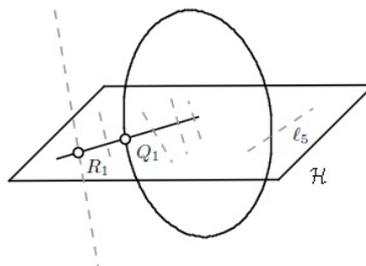


dois grupo de três retas cada, temos que por cada grupo, juntamente com a reta t , incidem duas retas. Neste caso, as soluções serão determinadas pela união da reta t e uma das retas que incidem por cada grupo.



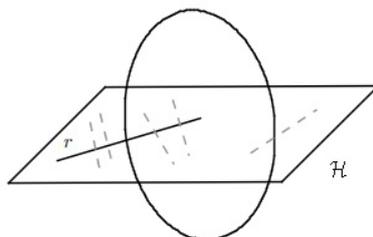
Sendo assim, temos $C_{8,2} \times C_{6,3} \times 4 = 2240$ cúbicas como solução. Logo, temos ao todo $140 + 2240 = 2380$ soluções para esse subcaso.

6.2.3.3 Cúbicas incidentes a duas retas dadas



Sabemos que pela reta l_4 no plano \mathcal{H} e 7 das retas ainda não especializadas, incidem 92 cônicas. Fixando uma destas cônicas, temos que ela intersecta \mathcal{H} em dois pontos. Seja $Q_1 \notin l_5$ um desses pontos. Temos que ele, juntamente com o ponto determinado

em \mathcal{H} pela última reta ainda não especializada, digamos R_1 , determina a reta $\overline{Q_1R_1}$. As soluções procuradas são formadas pela união de uma das cônicas com a reta $\overline{Q_1R_1}$. Portanto, temos $C_{8,7} \times 92 = 736$ soluções.

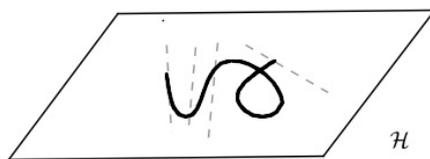


Podemos ainda escolher duas entre as 8 retas restantes, determinando assim uma reta r em \mathcal{H} . Por esta, ℓ_5 e as 6 restantes, incidem 74 cônicas. Sendo assim, temos $C_{8,2} \times 74 = 2072$ soluções.

Totalizando $736 + 2072 = 2808$ soluções, com multiplicidade $m = 3^1 = 3$.

6.2.3.4 Cúbicas singulares no plano

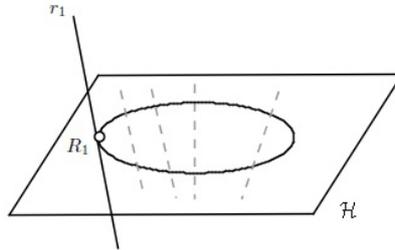
Começemos marcando os pontos $Q_i = \ell_i \cap \mathcal{H}$, com $5 \leq i \leq 12$, sabemos que por eles passam 12 cúbicas singulares, que intersectam as quatro retas já especializadas nos fornecendo multiplicidade $m = 3^4 = 81$ para a solução.



6.2.3.5 Cúbicas que são a união de uma cônica no plano e uma reta no espaço

Primeiramente, escolhamos quatro das 8 retas ainda não especializadas, sabemos que por elas incidem duas retas, digamos r_1 e r_2 , que furam o plano nos pontos R_1 e R_2 respectivamente. As outras 4 retas determinam quatro pontos em \mathcal{H} , os quais,

juntamente com R_1 ou R_2 , determinam uma única cônica no plano. Sendo assim, temos $2 \times C_{8,4} = 140$ cúbicas como soluções, com multiplicidade $m = 2^4 = 16$.

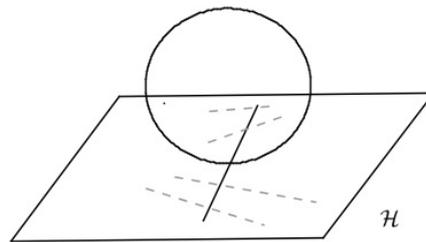


Além disso, podemos pensar no caso em que cinco das 8 retas ainda não especializadas determinam uma cônica C_1 em \mathcal{H} . Temos que o lugar das retas que passam pelas demais é uma quádrlica de \mathbb{P}^3 . Tomemos a cônica C_2 determinada pela interseção da quádrlica com o plano \mathcal{H} , ela intersectará C_1 em 4 pontos e cada um desses pontos determina uma reta incidindo as 3 retas na quádrlica. Temos assim $C_{8,5} \times 4 = 224$ soluções, com multiplicidade $m = 2^4 = 16$.

Logo, temos ao todo $16 \times (140 + 224) = 5824$ soluções para esse caso.

6.2.3.6 Cúbicas que são a união de uma cônica tangente ao plano e uma reta no plano

Se forçamos que a cônica incida às 8 retas em posição geral em pontos livres, não temos como determinar a reta que, junto com a cônica, formaria a cúbica.



Sendo assim, para começar determinemos um ponto em \mathcal{H} , digamos $Q_5 = \ell_5 \cap \mathcal{H}$. Agora, por 6.1.2.3.7 temos $928 = 8 \times 116$ soluções, formadas pelas cônicas tangentes a \mathcal{H} e a reta determinada pelo ponto em que a cônica fura \mathcal{H} e Q_5 .

Além disso, escolhendo duas das retas em posição geral determinamos uma reta em \mathcal{H} . Por 6.1.2.2.6 temos $C_{8,2} \times 58 = 1624$ soluções.

Portanto, temos um total de 2552 soluções para esse caso, que assim como nos casos anteriores tem multiplicidade $m = 2^1 = 2$.

Assim sendo, temos $22896 + 2380 + 8424 + 972 + 5824 + 5104 = 45600$ para o caso 6.2.3 e um total de $19728 + 4968 + 45600 = 70296$ soluções para o caso 6.2.

Logo, por 12 retas em posição geral em \mathbb{P}^3 incidem $9864 + 70296 = 80160$ cúbicas reversas.

Apêndice

Definiremos aqui, alguns dos conceitos utilizados sobre a Classe de Chern, enunciando suas principais propriedades. Os leitores interessados em um aprofundamento no assunto e nas demonstrações dos resultados podem consultar [F], [Va1] e [K], que serviram de base para esse apêndice.

A. Classes Características

Seja X um esquema. Um **divisor de Cartier** em X é denotado por (U_α, f_α) , onde U_α é uma cobertura aberta de X e f_α função racional, com f_α/f_β regular em $U_\alpha \cap U_\beta$.

Se D é um divisor de Cartier em X e V uma subvariedade de codimensão 1 de X , definimos o **ciclo de Weil** por

$$[D] := \sum ord_{V_\alpha}(f_\alpha)[V].$$

A.1 Primeira Classe de Chern

Agora, seja E um fibrado em retas no esquema X e V uma subvariedade k -dimensional de X . Temos que a restrição $E|_V$ de E a V é isomorfo a $\mathcal{O}_V(C)$ para algum divisor C em V . Dessa forma, o ciclo Weil $[C]$ determina um elemento bem definido em $A_{k-1}(X)$, que denotaremos por

$$c_1(E) \cap [V] = [C].$$

Nessas condições, definimos o operador primeira classe de Chern por

$$\begin{aligned} c_1(E) : Z_k &\longrightarrow A_{k-1}(X) \\ [V] &\longmapsto c_1(E) \cap [V]. \end{aligned}$$

A.1.1 Propriedades da primeira classe de Chern

(a) Se E e E' são fibrados em retas sobre X e λ um k -ciclo sobre X , então

$$c_1(E) \cap (c_1(E') \cap \lambda) = c_1(E') \cap (c_1(E) \cap \lambda);$$

(b) Seja $f : X' \rightarrow X$ um morfismo próprio, E um fibrado em retas e λ' um k -ciclo sobre X' , então

$$f_*(c_1(f^*E) \cap \lambda') = c_1(E) \cap f_*\lambda'.$$

(c) Sejam E, E' fibrados em retas, temos

$$c_1(E \otimes E') = c_1(E) + c_1(E');$$

(d) Se $f : X' \rightarrow X$ é um morfismo plano, E um fibrado vetorial em retas e λ um k -ciclo em X , então

$$c_1(f^*E) \cap f^*\lambda = f^*(c_1(E) \cap \lambda).$$

A.2 Classes de Segre

Seja E um fibrado vetorial de posto $n + 1$ no esquema X . Seja $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow X$ um morfismo plano e $\mathcal{O}_E(1)$ um fibrado em retas. Definimos a i -ésima classe de Segre por

$$\begin{aligned} s_i(E) : A_k(X) &\longrightarrow A_{k-i}(X) \\ \lambda &\longmapsto \pi_*(h^{n+i} \cap \pi^*\lambda), \end{aligned}$$

onde $h = c_1(\mathcal{O}_E(1))$.

A.2.1 Propriedades das classes de Segre

(a) Seja $\dim X = n$, então $s_i(E) = 0$, para $i < 0$ e $i > n$, e $s_0 = Id$;

(b) Se E, E' são fibrados vetoriais em X , $\lambda \in A_k X'$, então $\forall i, j$,

$$s_i(E) \cap (s_j(E') \cap \lambda) = s_j(E') \cap (s_i(E) \cap \lambda);$$

(c) Se $f : X' \rightarrow X$ é um morfismo próprio, E um fibrado vetorial em X , $\lambda \in A_* X'$, então $\forall i$,

$$f_*(s_i(f^* E) \cap \lambda) = s_i(E)^*(\lambda);$$

(d) Se E é um fibrado em retas em X , $\lambda \in A_* X'$, então

$$s_1(E) \cap \lambda = -c_1(E) \cap \lambda.$$

De maneira geral, definimos a classe total de Segre como $s(E) = \sum s_i(E)$.

A.3 Classes de Chern

O operador inverso à classe total de Segre é denominado operador classe total de Chern, $c(E) = s(E)^{-1}$.

As classes de Chern possuem as mesmas propriedades já citadas para as de Segre, contando ainda com a seguinte propriedade:

Dada uma sequência exata

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$$

de fibrados vetoriais sobre X , temos

$$c_i(E) = c_i(E') \cdot c_i(E''),$$

ou seja,

$$c_k(E) = \sum_{i+j=k} c_i(E') c_j(E'').$$

B. Cálculo de cúbicas elípticas que são a união de uma cônica no espaço e uma reta fixada em \mathcal{H}

Seja \mathcal{F} o fibrado trivial de posto 4, com a sequência exata

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \hookrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}.$$

A condição da reta estar contida no plano nos fornece a sequência

$$\mathcal{O}^{\oplus 2} \hookrightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{L}.$$

Considere agora o mapa induzido,

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(-1) \\ & \swarrow & \downarrow \\ \mathcal{S}_2\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}_2\mathcal{Q} & & \\ & \searrow & \mathcal{S}_2\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\otimes 2} \end{array}$$

do qual estamos interessados na sessão

$$s : \mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(-1) \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes 2}.$$

Mais precisamente,

$$\tilde{s} : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(1).$$

De onde podemos tirar que o ciclo de incidência do nosso caso será dado por

$$[L] = Z(\tilde{s}) = c_1(\mathcal{L}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(1)) = 2c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(1)).$$

Definamos

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)) = h \text{ e } c_1(\mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(1)) = k.$$

Sendo assim, temos de

$$\mathcal{O}^{\oplus 2} \hookrightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{L},$$

que

$$c(\mathcal{L}) = c(\mathcal{Q}) = \frac{1}{c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1))} = \frac{1}{1-h} = 1 + h + h^2 + h^3.$$

Logo,

$$[L] = 2h + k.$$

Agora, dada a sequência

$$\mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(-1) \hookrightarrow \mathcal{S}_2\mathcal{Q} \rightarrow K,$$

podemos a tensorizar por $\mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(+1)$, obtendo

$$\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{S}_2\mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(1) \rightarrow K \otimes \mathcal{O}_{S_2\mathcal{Q}}(1).$$

Observe que os fibrados possuem, respectivamente, posto 1, 6 e 5, o que nos garante que

$$c_6(\mathcal{S}_2\mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}_2\mathcal{Q}}(1)) = 0.$$

Por outro lado, utilizando a sequência

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \hookrightarrow \mathcal{S}_2\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{S}_2\mathcal{Q},$$

podemos calcular através do seguinte script em MAPLE, o número de cúbicas elípticas incidentes a 6 retas em posição geral em \mathbb{P}^3 , que se quebram como a união de cônicas no espaço com uma reta fixada em \mathcal{H} .

```
# Cálculo de C(S2Q)
r := 6;
cS2Q := [1, seq(coeff(rem(expand((1+h+h^2+h^3)^4), h^4, h), h^i)*h^i, i = 1 .. 7)];
      [      2      3      ]
      [1, 4 h, 10 h , 20 h , 0, 0, 0, 0]
# Calculando P= C6(S2Q)
P := sum(binomial(r-j, 6-j)*cS2Q[j+1]*k^(6-j), j = 0 .. 6);
      6      5      2 4      3 3
      k  + 4 h k  + 10 h k  + 20 h k
# Ciclo de incidência
L := 2*h+k;
# Pela condição de ser incidente à 6 retas em posição geral e à reta no plano
> rem(collect(rem(expand(h^2*L^6), P, k), [h], distributed), h^4, h);
      3 5
      8 h k
# Ou seja, existem 8 cúbicas elípticas incidentes à 6 retas em posição geral,
# que se quebram como a união de uma cônica no espaço e uma reta fixada no plano.
```

Referências Bibliográficas

- [A] D. Avritzer, *Introdução à geometria enumerativa via teoria de deformação*, 2ª biennial da sociedade brasileira de matemática de Salvador (2004).
- [C] L. Caporaso, *Counting curves on surface: a guide to new techniques and results*, *European Congress of Mathematics, Vol. I* (1996).
- [Fa] B. Fantechi, *Stacks for everybody*. In *European Congress of Mathematics, Vol. I* (2000)
- [F] W. Fulton, *Intersection Theory, Second Edition*, Springer (1996).
- [G] T. L. Gómez, *Algebraic stacks*, *Tata Institute of Fundamental Research* (1999)
- [H] J. Harris, *Algebraic geometry - a first course*, Springer-Verlag (1992).
- [Ha] R. Hartshorne, *Deformation Theory*, Springer (2010).
- [K] J. Kock, *Classes características, notas disponíveis em <http://mat.uab.es/~kock/enumgeom/clascar.pdf>* (1997).
- [N] D. Nguyen, *Characteristic numbers of elliptic space curves*, (2011).
- [RM] J. Rojas & R. Mendoza, *Set of solutions to the 4-lines problem in Schubert calculus*, *MSC* (2001).
- [ST] J. H. Silverman & J. Tate, *Rational points on elliptic curves*, Springer (1992).
- [Va1] I. Vainsencher, *Classes características em geometria algébrica*, *Instituto de Matemática Pura e Aplicada* (1985).

- [Va2] I. Vainsencher, *Introdução às curvas algébricas planas, Coleção matemática universitária, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (1996).*
- [Va3] I. Vainsencher, *Geometria algébrica I (2008), notas disponíveis em <http://www.mat.ufmg.br/israel/Ensino/Geomalg/li.pdf>*
- [V] R.Vakil, *The enumerative geometry of rational and elliptic curves in projective space, J. Reine Angew Math (1999).*