Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Clessius Silva

Quase periodicidade assintótica para equações de evolução semilineares

Recife

2012

Clessius Silva

Quase periodicidade assintótica para equações de evolução semilineares

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da UFPE, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Bruno de Andrade

Co-orientador: Prof. Claudio Cuevas

Recife

2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Silva, Clessius
Quase periodicidade assintótica para equações de evolução semilineares / Clessius Silva. - Recife: O Autor, 2012.
64 folhas

Orientador: Bruno de Andrade.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Análise funcional. 2. Equações de evolução I. Andrade, Bruno de (orientador). II. Título.
515.7 CDD (23. ed.) MEI2012 – 111

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestrado em Matemática.

Aprovado: ____

Cláudio Rodrigo Cuevas Henríquez, *UFPE*

Co-Orientador

____

Marcos Napoleão Rabelo, *UFPE*

____

Júlio Cesar de Souza Almeida, *UFAL*

QUASE PERIODICIDADE ASSINTÓTICA PARA EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO SEMILINEARES

POR

Clessius Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126 - 8414 – Fax: (081) 2126 - 8410
RECIFE – BRASIL

Fevereiro – 2012

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Ao único Senhor da minha vida, Jesus, o qual me fez mais que vencedor. A Ele todo o meu louvor.

À toda minha família, em particular minha mãe Solange, meus irmãos Cledson e Emanuele, minha segunda mãe Jovanete, e a Márcio (in memoriam), aos quais sempre serei grato.

A minha namorada e melhor amiga Tarci, que me faz sorrir em muitos momentos difíceis, além de sempre se mostrar disposta a me ajudar em tudo que preciso.

Aos grandes amigos e colegas, Badaró, Thamires, Cris, Mariana, Bruno, Filipe Dantas, Wergete, Allyson, tio Zaqueu, Alejandro, Gigi, André Ventura, Joilson, Érika, Renata, Adecarlos, Lucas, Ives, José Francisco, Abiel, Ricardo, Gabriel, Anete, e todos os outros alunos que compunham o Dmat, os quais fizeram minha estadia em Recife ser divertida, e que com certeza muitos desses serão meus amigos pra toda a vida.

Aos que me ensinaram e/ou orientaram até aqui, como Kalasas Vasconcelos, Fábio Santos, Cláudio Cuevas, e Bruno de Andrade (agora sendo citado como o principal motivador deste trabalho, que antes de ser meu orientador é um grande amigo, como já disse no parágrafo acima).

À secretária da pós-graduação da UFPE, Tânia, por sua imensa gentileza.

Ao CNPq pelo indispensável apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho nós obtemos condições para a existência e unicidade de soluções brandas assintoticamente quase periódicas para equações diferenciais abstratas de primeira ordem com a parte linear dominada por um operador de Hille-Yosida com domínio não necessariamente denso. Para alcançar nosso objetivo, usamos a teoria de extrapolação e a teoria de ponto fixo. Como aplicação, examinamos condições suficientes para existência de soluções assintoticamente quase periódicas de equações da teoria de condução de calor.

Palavras-Chave: Problema abstrato de Cauchy; Funções assintoticamente quase periódicas; Operador de Hille-Yosida; Equações diferenciais parciais.

Abstract

In this work we obtain sufficient conditions for existence and uniqueness of asymptotically almost periodic solutions of first-order abstract differential equations with linear part dominated by a Hille-Yosida operator with domain not necessarily dense. To achieve our goal we use abstract extrapolation theory and fixed point theory. As application, we examine sufficient conditions for existence of asymptotically almost periodic solutions of equations of the heat conduction theory.

Key-Words: Abstract Cauchy problem; Asymptotically almost periodic functions; Hille-Yosida operator; Partial differential equations.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudaremos existência e unicidade de soluções assintoticamente quase periódicas para uma classe de equações diferenciais abstratas descritas na forma

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0, \tag{0.1}$$

$$u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} =: X_0, \tag{0.2}$$

onde A é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo negativo (Ver Definição 1.28), com domínio $D(A)$ não necessariamente denso em um espaço de Banach X e $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ é uma função contínua. É bem conhecido que se o domínio de um operador linear A é não-denso, a teoria clássica de semigrupos não pode ser aplicada diretamente para tratar o problema (0.1)-(0.2). De fato, o Teorema de Hille-Yosida fornece condições necessárias e suficientes para que um operador linear gere um semigrupo, entre essas condições está a densidade do domínio do operador. Por outro lado, existe uma variedade de equações diferenciais semilineares cuja parte linear é dominada por um operador linear que não é densamente definido. Tais situações surgem, por exemplo, das restrições feitas sobre o espaço onde a equação é considerada e de condições de contorno.

Contudo, em [31] os autores mostram que se as condições usuais de Hille-Yosida são satisfeitas, mas sem o pressuposto que $D(A)$ seja denso em X, então os resultados de existência e unicidade para o problema (0.1)-(0.2) podem ser obtidos, e são mais gerais do que os conhecidos quando $D(A)$ é denso em X. A principal ferramenta usada em [31] é a teoria abstrata de extrapolação. As primeiras tentativas de construir esta teoria foram feitas por Da Prato e Grisvard em [30] e Nagel em [27], usadas para diversos fins. Por exemplo, para estudar equações integro-diferenciais de Volterra e equações diferenciais com retardo (ver [28, 30, 32]).

A regularidade das soluções de (0.1), com $t \in \mathbb{R}$, no espaço das funções pseudo quase periódicas (respectivamente, quase automórficas, pseudo quase automórficas, compactas quase automórficas) foi considerada em [10] (respectivamente,[5, 6]). Em [33], o autor estuda a e-xistência de soluções brandas locais e globais, bem como propriedades de regularidade para tais soluções. Em [4], os autores consideram o problema de existência e unicidade de soluções S-assintoticamente periódicas para o problema (0.1)-(0.2). Recentemente, em Nagel e Sinestrari [28] uma nova abordagem dos espaços de extrapolação para operados lineares ilimitados foi aplicada em equações de evolução sobre espaços de Banach, afim de obter a existência e propriedades das suas soluções sob os pressupostos mínimos. Entretanto, muitas questões em conexão com equações diferenciais abstratas semilineares com parte linear dominada por operadores de Hille-Yosida com domínio não necessariamente denso, permanecem sem respostas.

O estudo do comportamento assintótico de soluções é um dos mais atraentes tópicos da teoria qualitativa de equações diferenciais e, por esta razão, uma grande quantidade de pesquisa matemática tem sido realizada sobre este tema. Particularmente interessante é o comportamento assintótico quase periódico das soluções de tais equações (ver, por exemplo, [18, 20, 35]). A noção de quase periodicidade assintótica foi introduzida na década de 40 por M. Fréchet (ver [15]). Este conceito tornou-se muito atrativo, não somente do ponto de vista estrutural do conjunto destas funções, mas também no sentido de aplicações em Física, Biologia e Mecânica. Nosso principal propósito neste trabalho é fornecer condições suficientes para a existência de soluções brandas assintoticamente quase periódicas para o problema (0.1)-(0.2). O método topológico que nós escolhemos para alcançar nosso objetivo é a teoria de ponto fixo, que tem sido uma ferramenta muito poderosa e importante para o estudo de fenômenos não-lineares. Especificamente, usaremos o Princípio de Contração de Banach e a Alternativa de Leray-Schauder. Observamos que para utilizar este último resultado são necessárias algumas condições de compacidade. Portanto, a implementação desta abordagem não é, a priori, trivial.

O Capítulo 1 fornece as definições necessárias e alguns resultados preliminares. Particularmente, revisaremos algumas das propriedades básicas das funções assintoticamente quase periódicas. Apresentamos alguns exemplos de funções quase periódicas e assintoticamente quase periódicas para construir intuição e dar alguma luz a este conceito. Por outro lado, é bem sabido que o estudo da composição de duas funções com propriedades especiais é importante e básico para investigações profundas. Nesta direção, apresentamos um resultado muito útil (ver Lema 1.14). Finalmente, recordamos alguns resultados básicos sobre espaços de extrapolação e também alguns teoremas de ponto fixo, que são de fundamental importância neste trabalho.

Os principais resultados deste texto estão contidos no Capítulo 2. Inicialmente faremos uma miscelânea entre semigrupos e funções assintoticamente quase periódicas. Deveras, mostraremos a regularidade da convolução de semigrupos extrapolados com funções assintoticamente quase periódicas (ver Lema 2.1). Nossos principais resultados asseguram basicamente que se a não-linearidade f é assintoticamente quase periódica, em um certo sentido, e verifica condições do tipo Lipschitz, então teremos existência e unicidade da soluções brandas assintoticamente quase periódicas para o problema (0.1)-(0.2), ver Teorema 2.2, Teorema 2.4 e seus corolários. Todavia, estes resultados não são suficientes para incluir perturbações mais sofisticadas. Neste sentido, o Teorema 2.10 garante que se a não-linearidade f tem certas propriedades de limitação e compacidade, então o problema (0.1)-(0.2) tem uma solução branda assintoticamente quase periódica. Para mostrar quão facilmente nossa teoria pode ser usada na prática, no Capítulo 3, consideramos nossos resultados abstratos no âmbito de equações diferenciais parciais. Estudamos especialmente equações que surgem na teoria de condução de calor.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns pré-requisitos necessários para uma melhor leitura do texto. Com isso, desejamos tornar o trabalho o mais auto-suficiente possível. Exigiremos do leitor conhecimentos básicos de análise funcional. Para sermos breves, não faremos detalhes de algumas demonstrações.

1.1 Funções assintóticamente quase periódicas

Voltaremos nossa atenção agora para as funções quase periódicas e assintoticamente quase periódicas. Nosso interesse é definir e mostrar as principais propriedades dessas funções. Aqui $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ sempre serão espaços de Banach, deixamos claro que não usaremos nenhum tipo de símbolo para diferenciar as normas de X e Y, o leitor deve estar atento para que não haja confusão.

A seguinte definição de função quase periódica é devida a Harald Bohr.

Definição 1.1 *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to X$ é chamada* quase periódica *se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um $l(\varepsilon) > 0$, tal que todo intervalo de comprimento $l(\varepsilon)$ contem um número τ com a propriedade*

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

O conjunto de todas as funções quase periódicas será denotado por $AP(X)$. O número τ como na definição acima, é chamado de $\varepsilon-$período.

Observação 1.2 *As funções contínuas periódicas são quase periódicas. De fato, seja $f : \mathbb{R} \to X$ uma função contínua $\omega-$periódica, ou seja, f é periódica com período ω. Tomando $l(\varepsilon) > \omega$, então todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de comprimento $l(\varepsilon)$ contem algum $n\omega$, onde n é inteiro; assim,*

$$f(n\omega + t) - f(t) = f(t) - f(t) = 0,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

O seguinte exemplo mostra uma típica função *quase periódica* que não é periódica (ver [22], Exemplo 1.18).

Exemplo 1.3 *Dado $a \in X$, $a \neq 0$, defina a função $f : \mathbb{R} \to X$ pela regra*

$$f(t) = a \sin t + a \sin(\sqrt{2}t).$$

Em geral, a função

$$f(t) = ae^{it} + be^{i\sqrt{2}t}, \ a, b \in X, a \neq 0, b \neq 0,$$

é uma função quase periódica que não é periódica.

Demonstração. Usaremos o seguinte fato: dado $\varepsilon > 0$, existe um número inteiro $N = N(\varepsilon)$, tal que $N\sqrt{2} - [N\sqrt{2}] < \varepsilon$, onde $[r]$ denota a parte inteira do número real r. Por este fato, para um número positivo ε, existe um intervalo $(2M\pi - \alpha, 2M\pi + \alpha)$, onde M é um inteiro e $\alpha > 0$, tais que

$$\|be^{i\sqrt{2}(t+\tau)} - be^{i\sqrt{2}t}\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t, \tau \in (2M\pi - \alpha, 2M\pi + \alpha).$$

Portanto, para α suficientemente pequeno e $l = 2M\pi$, todo intervalo de comprimento l contem ao menos um $\varepsilon-$período da função f. Isto mostra que f é quase periódica. Agora vamos mostrar que f não é periódica. De fato, suponha que f é periódica de período T. Por esta suposição, a função

$$g(t) := ae^{i(t+T)} + be^{i\sqrt{2}(t+T)} - ae^{it} - be^{i\sqrt{2}t} = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\begin{aligned} 0=\int_0^{2\pi} g(t)dt &= b\int_0^{2\pi}(e^{i\sqrt{2}(t+T)}-e^{i\sqrt{2}t})dt \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2}}(e^{i\sqrt{2}2\pi}-1)(e^{i\sqrt{2}T}-1). \end{aligned}$$

Isto mostra que $T/\sqrt{2}$ deve ser racional. Similarmente, podemos mostrar que T é racional. Isto é um absurdo, o qual mostra que f não é periódica.

∎

Proposição 1.4 *Se $f \in AP(X)$, então f é limitada e uniformemente contínua.*

Demonstração. Primeiro mostraremos que f é limitada. Seja $l = l(1)$ o número correspondente a $\varepsilon = 1$ como na Definição 1.1. Segue-se da continuidade de f que o conjunto $\{f(t) : t \in [0,l]\}$ é limitado. Seja $M > 0$ tal que $\|f(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0,l]$. Para $t \in \mathbb{R}$ arbitrário, considere o intervalo $[-t,-t+l]$, assim existe $\tau \in [-t,-t+l]$ que satisfaz a propriedade

$$\|f(t+\tau)-f(t)\| < 1.$$

Dessa estimativa, e usando o fato que $t+\tau \in [0,l]$, temos que

$$\|f(t)\| \leq \|f(t)-f(t+\tau)\| + \|f(t+\tau)\| < 1+M.$$

Isso mostra que f é limitada. Resta mostrar que f é uniformemente contínua. Para isso, dado $\varepsilon > 0$, tome $l = l(\varepsilon/3)$ como na Definição 1.1 e note que f é uniformemente contínua sobre o intervalo $[-1,1+l]$. Agora escolhemos $\delta = \delta(\varepsilon/3)$, $\delta < 1$, de modo que $\|f(t)-f(s)\| < \varepsilon/3$ quando $t,s \in [-1,1+l]$ e $|t-s| < \delta$. Para $t,s \in \mathbb{R}$ com $|t-s| < \delta$, nós obtemos $\tau \in [-t,-t+l]$ com a propriedade de $\|f(x+\tau)-f(x)\| < \varepsilon/3$, para todo $x \in \mathbb{R}$, assim

$$\begin{aligned} \|f(t)-f(s)\| &\leq \|f(t)-f(t+\tau)\| + \|f(t+\tau)-f(s+\tau)\| \\ &\quad +\|f(s+\tau)-f(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

visto que $t+\tau \in [0,l] \subset [-1,1+l]$ e $s+\tau \in [s-t,s-t+l] \subset [-|s-t|,|s-t|+l] \subset [-1,1+l]$.

∎

A Proposição 1.4 nos diz que $AP(X) \subset C_b(\mathbb{R};X)$, onde $C_b(\mathbb{R};X)$ denota o espaço das funções contínuas e limitadas $f:\mathbb{R}\to X$. Observamos que $C_b(\mathbb{R};X)$ munido com a norma da convergência uniforme, dada por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$, é um espaço de Banach.

O seguinte resultado é elementar.

Proposição 1.5 *Se $f \in AP(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $h \in \mathbb{R}$ então λf, $f(\cdot + h)$, e $\|f(\cdot)\|$ são quase periódicas.*

A demonstração da próxima proposição pode ser encontrada em Corduneanu (ver [8], Proposição 3.18).

Proposição 1.6 *Seja $f \in AP(X)$, então o conjunto $R_f = \{f(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset X$ é relativamente compacto.*

O seguinte resultado é uma caracterização de funções quase periódicas dada por Bochner, por motivo de brevidade omitiremos a demonstração (Ver [8], Teorema 3.2).

Teorema 1.1.1 *Uma função $f:\mathbb{R}\to X$ contínua é quase periódica se, e somente se, para toda sequência de números reais $\{\tilde{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\tilde{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f(t+s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente em t.*

Nosso objetivo principal neste momento é mostrar que $(AP(X), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach.

Proposição 1.7 *A soma de duas funções quase periódicas com valores em um espaço de Banach X é quase periódica.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 \in AP(X)$. Considere a função $t \mapsto f(t) := f_1(t) + f_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Dada $\{\widetilde{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais, existe uma subsequência $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\widetilde{s}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f_1(t+s'_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente, e ainda existe uma subsequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f_2(t+s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente. Como $f(t+s_n) = f_1(t+s_n) + f_2(t+s_n)$, temos que $\{f(t+s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

$\blacksquare$

Teorema 1.1.2 *O espaço $AP(X)$ munido com a norma da convergência uniforme é um espaço de Banach.*

Demonstração. Das Proposições 1.4, 1.5 e 1.7 temos que $AP(X)$ é um subespaço vetorial de $C_b(\mathbb{R}; X)$. Resta mostrar que $AP(X)$ é fechado. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $(AP(X), \|\cdot\|_\infty)$ que converge para $f \in C_b(\mathbb{R}; X)$, vamos mostrar que $f \in AP(X)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que para $n \geq N$, $\|f - f_n\|_\infty < \dfrac{\varepsilon}{3}$, ou seja,

$$\|f(t) - f_n(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ademais, existe $l(\frac{\varepsilon}{3}) > 0$, tal que todo intervalo de comprimento $l(\frac{\varepsilon}{3})$ contem um número τ, com a propriedade

$$\|f_N(t+\tau) - f_N(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|f(t+\tau) - f(t)\| &\leq \|f(t+\tau) - f_N(t+\tau)\| + \|f_N(t+\tau) - f_N(t)\| \\ &\quad + \|f_N(t) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $(AP(X), \|\cdot\|_\infty)$ é Banach.

■

Neste trabalho manipularemos funções definidas sobre produtos cartesianos onde um dos fatores é o conjunto dos números reais. Assim, desejamos ter uma noção da generalização de quase periodicidade considerada anteriormente para tais funções. Representaremos por $C(\mathbb{R} \times Y; X)$ o conjunto das funções contínuas $f : \mathbb{R} \times Y \to X$.

Definição 1.8 *Uma função $f \in C(\mathbb{R} \times Y; X)$ é chamada* quase periódica *se $f(\cdot, x) : \mathbb{R} \to X$ é quase periódica uniformemente para todo x em subconjuntos compactos de Y.*

O conjunto das funções *quase periódicas* $f : \mathbb{R} \times Y \to X$ será representado por $AP(Y; X)$. O seguinte resultado é usual na teoria das funções quase periódicas (ver [14]).

Lema 1.9 *Se $f \in AP(Y; X)$ e $u \in AP(Y)$, então $f(\cdot, u(\cdot)) \in AP(X)$.*

Trataremos agora da teoria assintótica, para isso, denotamos por $C_0([0,\infty);X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $h:[0,\infty)\to X$ tais que $\lim\limits_{t\to\infty} h(t)=0$. É um fato bem conhecido que $C_0([0,\infty);X)$ equipado com a norma do supremo é espaço de Banach.

Definição 1.10 *Uma função contínua $f:[0,\infty)\to X$ é chamada* assintoticamente quase periódica *se admite uma decomposição $f=g+h$, onde $g\in AP(X)$ e $h\in C_0([0,\infty);X)$.*

Representaremos por $AAP(X)$ o conjunto das funções *assintoticamente quase periódicas*. Em [36], Seção 5.1 Proposição 1, o autor mostra que toda função assintoticamente quase periódica se decompõe de forma única como a soma de uma função quase periódica com uma função em $C_0([0,\infty);X)$. Como consequência temos que $AAP(X)=AP(X)\oplus C_0([0,\infty),X)$. Além disso, em [36] seção 5.1 Teorema 1, vemos a demonstração de que $(AAP(X),\|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Um fato conhecido é que as funções assintoticamente quase periódicas são limitadas e uniformemente contínuas (ver [36], seção 5.1, Proposição 2).

Lema 1.11 *Seja $f\in AAP(X)$. Então a imagem $R_f=\{f(t):t\geq 0\}$ é relativamente compacto em X.*

Demonstração. Suponha que $f=g+h$, onde $g\in AP(X)$ e $h\in C_0([0,\infty);X)$. Seja $\{t_n\}\subset[0,\infty)$ uma sequência. Se $\{t_n\}$ é limitada, então existe uma subsequência $\{t_k\}$ e $t_0\geq 0$, tais que $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=t_0$. Como h é contínua, $\lim\limits_{k\to\infty} h(t_k)=h(t_0)$. Se $\{t_n\}$ é ilimitada, então existe uma subsequência $\{t_m\}$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} t_m=\infty$, portanto, $\lim\limits_{m\to\infty} h(t_m)=0$. Assim, $R_h=\{h(t):t\geq 0\}$ é relativamente compacto em X. Do lema (1.6) o conjunto $R_g=\{g(t):t\geq 0\}$ é relativamente compacto, por conseguinte, $R_f=\{f(t):t\geq 0\}$ é relativamente compacto em X.

■

Seja $C_0([0,\infty)\times Y;X)$ o conjunto de todas as funções contínuas $h:[0,\infty)\times Y\to X$, tais que $\lim\limits_{t\to\infty} h(t,x)=0$ uniformemente para x em subconjuntos compactos de Y.

Definição 1.12 *Uma função contínua $f:[0,\infty)\times Y\to X$ é chamada* assintoticamente quase periódica *se existem funções $g\in AP(Y;X)$ e $h\in C_0([0,\infty)\times Y;X)$ tais que $f(t,y)=g(t,y)+h(t,y)$ para todos $t\geq 0$ e $y\in Y$.*

O conjunto das funções $f : [0, \infty) \times Y \to X$ *assintoticamente quase periódicas* será denotado por $AAP(Y; X)$.

Definição 1.13 *Uma função* $f : [0, \infty) \times Y \to X$ *é chamada* uniformemente contínua sobre conjuntos limitados *se para todo* $\varepsilon > 0$ *e todo subconjunto limitado* $K \subset Y$, *existe* $\delta_{\varepsilon,K} > 0$ *tal que*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \varepsilon,$$

para todo $t \geq 0$ *e todos* $x, y \in K$, *tais que* $\|x - y\| \leq \delta_{\varepsilon,K}$.

O seguinte resultado é de grande importância para o nosso trabalho.

Lema 1.14 *Suponha que* $f \in AAP(Y; X)$ *é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Então,* $u \in AAP(Y)$ *implica que* $f(\cdot, u(\cdot)) \in AAP(X)$.

Demonstração. Sejam $f = g + h$ e $u = v + \phi$, com $g \in AP(Y; X)$, $v \in AP(Y)$, $h \in C_0([0, \infty) \times Y; X)$ e $\phi \in C_0([0, \infty); Y)$. Observamos que

$$\begin{aligned} f(t, u(t)) &= g(t, v(t)) + f(t, u(t)) - g(t, v(t)) \\ &= g(t, v(t)) + g(t, u(t)) - g(t, v(t)) + h(t, u(t)). \end{aligned}$$

Pelo Lema 1.9, $g(\cdot, v(\cdot)) \in AP(X)$. Uma vez que $R_u = \{u(t) : t \geq 0\}$ é relativamente compacto (Lema 1.11) e $h \in C_0([0, \infty) \times Y; X)$, por definição de $C_0([0, \infty) \times Y; X)$,

$$\lim_{t \to \infty} h(t, u(t)) = 0.$$

Com um argumento análogo, vemos que $\lim_{t \to \infty} h(t, v(t)) = 0$. Resta mostrar que

$$g(\cdot, u(\cdot)) - g(\cdot, v(\cdot)) \in C_0([0, \infty); X).$$

Consideremos o conjunto limitado $K = R_u \cup R_v$, onde $R_v = \{v(t) : t \in \mathbb{R}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, como f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados, existe $\delta_{\varepsilon,K} > 0$, tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para todo $t \geq 0$ e todos $x, y \in K$, tais que $\|x - y\| < \delta_{\varepsilon,K}$. Ademais, por $u(t) - v(t) = \phi(t)$, podemos selecionar $L > 0$, tal que

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &< \delta_{\varepsilon,K}, \\ \|h(t, u(t))\| &< \frac{\varepsilon}{3}, \\ \|h(t, v(t))\| &< \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

para todo $t \geq L$. Assim, para $t \geq L$, temos que

$$\begin{aligned} \|g(t, u(t)) - g(t, v(t))\| &\leq \|g(t, u(t)) + h(t, u(t)) - g(t, v(t)) - h(t, v(t))\| \\ &\quad + \|h(t, u(t))\| + \|h(t, v(t))\| \\ &= \|f(t, u(t)) - f(t, v(t))\| + \|h(t, u(t))\| + \|h(t, v(t))\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Isto é suficiente para completar a demonstração.

■

1.2 Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção $(X, \|\cdot\|)$ representará um espaço de Banach. O conjunto dos operadores lineares limitados sobre X será denotado por $\mathcal{L}(X)$. Ademais, para um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ usaremos as notações canônicas $\sigma(A)$ e $\rho(A)$ para representar o espectro e o resolvente do operador A, respectivamente. Finalmente, se $\lambda \in \rho(A)$, escreveremos $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$.

Definição 1.15 *Uma família de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo se*

(i) $T(0) = I$; *(identidade)*

(ii) $T(t + s) = T(t)T(s), \forall\, t, s \geq 0.$

Se, além disso

(iii) $\|T(t)x - x\| \to 0$ *quando* $t \to 0^+$, $\forall\, x \in X$, *dizemos que o semigrupo é fortemente contínuo ou um C_0-semigrupo.*

Definição 1.16 *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares. Chamaremos de gerador infinitesimal o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por*

$$Ax := \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t},$$

onde

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}.$$

Exemplo 1.17 *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e defina*

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

Então $(e^{At})_{t\geq 0}$ define um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares sobre X satisfazendo

$$\|e^{At}\| \leq e^{\|A\|t}, \quad t \geq 0.$$

A ideia de semigrupo está associada a equações diferenciais lineares da forma

$$x'(t) = Ax(t), \ t > 0, \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_0,$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de um semigrupo fortemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$. O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é o operador solução desta equação, isto é, para cada $x_0 \in X$, $T(t)x_0$ é a solução de (1.1), em um certo sentido que não vamos definir aqui.

A seguir temos um resultado simples, mas de fundamental importância na teoria de semigrupos.

Teorema 1.18 *Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo sobre um espaço de Banach X. Então existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$\| T(t) \| \leq M e^{\omega t} \qquad \forall \ t \geq 0$$

Demonstração. Mostraremos inicialmente que existe $\eta > 0$ tal que $\| T(t) \|$ é limitado para $0 \leq t \leq \eta$. Se essa propriedade fosse falsa existiria uma sequência de números positivos (t_n) satisfazendo $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0$ e $\| T(t_n) \| \geq n$. Pelo princípio da limitação uniforme segue que para algum $x \in X$, $\parallel T(t_n)x \parallel$ é ilimitado contradizendo a Definição (1.15). Assim, $\parallel T(t)x \parallel \leq M$ para $0 \leq t \leq \eta$, como $\parallel T(0) \parallel = 1$ temos que $M \geq 1$. Seja $\omega = \eta^{-1} log M \geq 0$. Dado $t \geq 0$, fazendo $t = n\eta + \delta$ com $0 \leq \delta \leq \eta$ e pela propriedade de semigrupo segue que

$$\parallel T(t) \parallel = \parallel T(\delta)T(\eta)^n \parallel \leq M^{n+1} \leq M M^{\frac{t}{\eta}} = M e^{\omega t}$$

■

Quando $\omega = 0$ e $M = 1$, então $T(t)$ é chamado um C_0-**semigrupo de contrações**.

O seguinte resultado exalta algumas propriedades de C_0-semigrupos de operadores lineares.

Teorema 1.2.1 *Dado A o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$ em X. Então*

(i) Para $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x; \tag{1.2}$$

(ii) Para $x \in X$, $\displaystyle\int_0^t T(s)x ds \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t T(s)x ds\right) = T(t)x - x; \tag{1.3}$$

(iii) Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax; \tag{1.4}$$

(iv) Para $x \in D(A)$

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax d\tau = \int_s^t AT(\tau)x d\tau. \tag{1.5}$$

Demonstração. (i) Segue da continuidade da aplicação $t \to T(t)x$;

(ii) Dados $x \in X$ e $h > 0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\left(\int_0^t T(s+h)xds - \int_0^t T(s)xds\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds + \frac{1}{h}\int_h^t T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0^+$, o primeiro termo das igualdades em (1.6) converge para $A(\int_0^t T(s)xds)$ e o último termo converge para $T(t)x - x$, completando a prova;

(iii) Dado $x \in D(A)$ e $h > 0$ tem-se

$$\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \qquad (1.7)$$

Fazendo $h \to 0^+$, (1.7) converge para $T(t)Ax$. Assim $T(t)x \in D(A)$ e $AT(t)x = T(t)Ax$. Tal convergência implica também que

$$\frac{d^+}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax,$$

mostrando que a derivada direita de $T(t)x$ é $T(t)Ax$. A derivada à esquerda, para $t > 0$, de $T(t)x$ existe e também é $T(t)Ax$. De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)Ax\right) &= \lim_{h\to 0^+} T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - Ax\right) \\
&\quad + \lim_{h\to 0^+}\left(T(t-h)Ax - T(t)Ax\right).
\end{aligned}$$

como $x \in D(A)$ e $\|T(t-h)\|$ é limitada para $0 \leq h \leq t$ segue-se que o primeiro termo da soma converge para 0. Ademais, como $(T(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo o segundo converge a 0, concluindo a prova;

(iv) Conclui-se integrando a equação (1.4) do valor s ao valor t.

■

O próximo corolário é uma consequência importante do teorema anterior.

Corolário 1.19 *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares $(T(t))_{t\geq 0}$, então $D(A)$ é denso em X e A é um operador linear fechado.*

Demonstração. Para todo $x \in X$ e $t > 0$ define-se

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x ds.$$

Pelo item (ii) do Teorema (1.2.1), segue-se que $x_t \in D(A)$ para $t > 0$. Pelo item (i), temos que $x_t \to x$ quando $t \to 0^+$. Assim $\overline{D(A)} = X$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n \in D(A)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x$ e $(Ax_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y$ quando $n \to \infty$. Pelo item (iv) do Teorema (1.2.1) tem-se

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(s)Ax_n ds. \tag{1.8}$$

Dividindo (1.8) por $t > 0$ e fazendo $t \to 0^+$ tem-se que, usando (i), $x \in D(A)$ e que $Ax = y$. ■

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear. Segue-se imediatamente do Corolário 1.19 que se $D(A)$ não é denso em X então A não gera um C_0-semigrupo de operadores lineares.

A seguir, veremos uma proposição que mostra algumas equivalências da definição de C_0-semigrupo.

Proposição 1.20 *Para um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Banach X as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *$(T(t))_{t\geq 0}$ é fortemente contínuo.*

(b) *Existem $\delta > 0$, $M \geq 1$, e um subconjunto denso $D \subset X$, tais que:*

- **(i)** *$\|T(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, \delta]$,*
- **(ii)** *$\lim\limits_{t\downarrow 0} T(t)x = x$ para todo $x \in D$.*

(c) *A função $t \mapsto T(t)x$ é contínua $\forall x \in X$*

Demonstração. A implicação (c) $\Rightarrow$ (b.ii) é trivial. Vamos provar a implicação (c) $\Rightarrow$ (b.i). Suponha por contradição que (b.i) é falsa, assim conseguimos uma sequência $(\delta_n)_{(n\in N)} \subset [0, \infty)$ convergindo para 0 tal que $\| \ T(\delta_n) \ \| \to \infty$ quando $n \to \infty$, então pelo princípio da limitação uniforme, existe $x \in X$ tal que $(\| T(\delta_n)x \|)_{n\in N}$ é ilimitado, contradizendo o fato de que $t \to T(t)x$ é contínua para $t = 0$.

Para mostrar que (b) $\Rightarrow$ (a), considere $(t_n) \subset [0, \infty)$ uma sequência convergindo para 0 e $K = \{t_n : n \in N\} \bigcup \{0\}$, assim K é compacto. Da condição (b.i) e de $t_n \to 0$ temos que $T(\cdot)|_K$ é limitada; dessa limitação e de (b.ii), segue que $T(\cdot)|_K x$ é contínua para todo $x \in D$. Vamos provar que a aplicação $t \to T(t)x$ restrita a K é contínua para todo $x \in X$. De fato, dado $\epsilon > 0$, tome $\overline{M}$ tal que $\| T(t) \| \leq \overline{M}$ para todo $t \in K$, e como D é denso em X podemos escolher $x_1 \in D$ tal que $x \in B(x_1, \frac{\epsilon}{3\overline{M}})$. De $T(\cdot)|_K x_1$ ser contínua, existe $\delta > 0$ tal que $\| T(t)x_1 - T(s)x_1 \| \leq \frac{\epsilon}{3}$ para todos $t, s \in K$ com $|t - s| < \delta$, assim

$$\| T(t)x - T(s)x \| \leq \| T(t)x - T(t)x_1 \| + \| T(t)x_1 - T(s)x_1 \| + \| T(s)x_1 - T(s)x \| \leq \epsilon.$$

Da continuidade dessa aplicação, temos que

$$\lim_{n\to\infty} T(t_n)x = T(0)x = x$$

para todo $x \in X$. Como a sequência $(t_n)_{n\in N}$ foi escolhida arbitrariamente, temos que $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$, isto é, $T(t)$ é fortemente contínuo.

Por fim, vamos mostrar a implicação (a) $\Rightarrow$ (c). Sejam $t_0 > 0$, $x \in X$ e $\epsilon > 0$ dado, como $\| T(t)x - x \| \to 0$ quando $t \to 0^+$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se $h \in [0, \delta_1]$, então $\| T(h)x - x \| \leq \dfrac{\epsilon}{\| T(t_0) \|}$, assim para $h \in [0, \delta_1]$ temos que

$$\| T(t_0 + h)x - T(t_0)x \| \leq \| T(t_0) \| \| T(h)x - x \| \leq \epsilon$$

Consideremos agora o caso $h < 0$. Existem δ_2 e $M > 0$ tais que $\| T(t) \| \leq M$ para todo $t \in [0, \delta_2]$, assim para $h \in [-\delta_2, 0]$ temos que

$$\| T(t_0 + h)x - T(t_0)x \| \leq \| T(t_0 + h) \| \| x - T(-h)x \| .$$

Tomemos então $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, daí

$$h \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow \| T(t_0 + h)x - T(t_0)x \| \leq \epsilon.$$

Isto completa a demonstração.

$\blacksquare$

Proposição 1.21 *Seja $(A, D(A))$ o gerador infinitesimal de um $C_0 -$ semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Um subespaço D de $D(A)$ denso com a norma $\|\cdot\|$ e $(T(t))_{t\geq 0}$-invariante é denso em $D(A)$ com a norma do gráfico $\|\cdot\|_A$.*

Demonstração. Para todo $x \in D(A)$, nós podemos escolher uma sequência $(x_n) \subset D$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ em relação a norma $\|\cdot\|$. Como para cada n a função $s \mapsto T(s)x_n \in D$ é contínua segue que $s \mapsto T(s)x_n \in D$ é também contínua com a norma do gráfico, segue-se que

$$\int_0^t T(s)x_n ds,$$

sendo uma integral de Riemann, pertence ao $\|\cdot\|_A$-fecho de D. Similarmente, a $\|\cdot\|_A$-continuidade de $s \to T(s)x$ para $x \in D(A)$ implica que

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds - x\right\|_A \to 0 \text{ quando } t \downarrow 0 \text{ e}$$

$$\left\|\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x_n ds - \frac{1}{t}\int_0^t T(s)xds\right\|_A \to 0 \text{ quando } n \to \infty \text{ e para cada } t > 0.$$

Isso prova que para cada $\epsilon > 0$ podemos escolher $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x_n ds - x \|_A < \epsilon$$

Assim, $x \in \overline{D}^{\|\cdot\|_A}$.

■

O seguinte Lema será utilizado em um de nossos resultados.

Lema 1.22 *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo e seja $K \subset X$ um conjunto relativamente compacto, então $T(t)x \to x$ quando $t \to 0$, uniformemente para $x \in K$.*

Demonstração. Dados $\varepsilon > 0$ e $x \in K$ fixado, da Definição (1.15) existe $\delta_x > 0$ tal que $\|T(t)x - x\| < \varepsilon$ sempre que $0 \leq t < \delta_x$, em outras palavras,

$$T(t)x \in B_\varepsilon(x),$$

sempre que $0 \leq t < \delta_x$. Como K é relativamente compacto e $K \subset \cup_{x\in K} B_\varepsilon(x)$, logo existem $x_1, x_2, ..., x_n$, tais que $K \subset \cup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$. Assim tomamos, $\delta = \min\{\delta_{x_1}, ..., \delta_{x_n}, \widetilde{\delta}\}$, onde $\widetilde{\delta}$ é como na Proposição (1.20). Portanto δ só depende de ε e K, e se $t \leq \delta$ e $z \in K$, então existe $x_j \in K$, tal que $z \in B_\varepsilon(x_j)$, e assim

$$\begin{aligned}
\|T(t)z - z\| &\leq \|T(t)z - T(t)x_j\| + \|T(t)x_j - x_j\| + \|x_j - z\| \\
&\leq \|T(t)\|\|z - x_j\| + \varepsilon + \varepsilon \\
&\leq M\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = (M+2)\varepsilon
\end{aligned}$$

E isto completa a demonstração.

■

Agora mostraremos um caminho para construir novos semigrupos fortemente contínuos a partir de outros já conhecidos (ver parágrafos 1.10 e 2.2 de [12]). Assim, assumiremos que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo sobre um espaço de Banach X com gerador infinitesimal A.

Definição 1.23 *Para quaisquer números $\mu \in \mathbb{C}$ e $\alpha > 0$, nós definimos o* semigrupo reescalado $(S(t))_{t\geq 0}$ *por*

$$S(t) := e^{\mu t} T(\alpha t)$$

para $t > 0$.

Observamos que o semigrupo reescalado tem gerador

$$B = \alpha A + \mu I$$

com domínio $D(A) = D(B)$. Além disso, $\sigma(B) = \alpha\sigma(A) + \mu$, daí temos que $\rho(B) = \alpha\rho(A) + \mu$, ademais $R(\lambda, B) = \frac{1}{\alpha} R\left(\frac{\lambda - \mu}{\alpha}, A\right)$ para $\lambda \in \rho(B)$. Isto mostra que podemos mudar facilmente entre o objeto original e o objeto reescalado.

Definição 1.24 *Um operador linear $(A, D(A))$ sobre um espaço de Banach X é chamado* dissipativo *se*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda \|x\|$$

para todo $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$.

Para sermos breves, omitiremos a demonstração da próxima proposição (ver Proposição 3.14 em [12]).

Proposição 1.25 *Para um operador dissipativo $(A, D(A))$ as seguintes propriedades são verdadeiras.*

(i) $\lambda - A$ *é injetivo para todo* $\lambda > 0$ *e*

$$\|(\lambda - A)^{-1}z\| \leq \frac{1}{\lambda}\|z\|$$

para todos z *na imagem* $rg(\lambda - A) := (\lambda - A)D(A)$.

(ii) $\lambda - A$ *é sobrejetivo para algum* $\lambda > 0$ *se, e somente se, é sobrejetivo para cada* $\lambda > 0$. *Neste caso, tem-se* $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

(iii) A *é fechado se, e somente se, a imagem* $rg(\lambda - A)$ *é fechada para algum (portanto para todo)* $\lambda > 0$.

Finalizamos esta seção com dois importantes resultados da teoria de semigrupos, os quais fornecem critérios espectrais para que um operador linear fechado $A : D(A) \subset X \to X$ seja o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de operadores lineares de contrações, no primeiro caso, ou com uma limitação exponencial como no Teorema (1.18), no segundo caso.

Teorema 1.26 *[12](Hille-Yosida, Caso de contrações) Para um operador linear* $(A, D(A))$ *sobre um espaço de Banach* X, *as seguintes propriedades são todas equivalentes.*

(a) $(A, D(A))$ *gera um semigrupo fortemente contínuo de contrações.*

(b) $(A, D(A))$ *é fechado, densamente definido, e para todo* $\lambda > 0$, *tem-se* $\lambda \in \rho(A)$ *e*

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1.$$

(c) $(A, D(A))$ *é fechado, densamente definido, e para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *com* $Re\lambda > 0$, *tem-se* $\lambda \in \rho(A)$ *e*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}.$$

Teorema 1.27 *[13](Teorema de Hille-Yosida) Dados* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear fechado e constantes* $\omega \in \mathbb{R}$ *e* $M \geq 1$, *as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $(A, D(A))$ *é o gerador de um* C_0*-semigrupo de operadores lineares* $(T(t))_{t\geq 0}$ *satisfazendo*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}, \forall t \geq 0. \tag{1.9}$$

(ii) A *é densamente definido,* $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ *e*

$$\sup\{(\lambda - \omega)^n ||(\lambda - A)^{-n}|| : n \in \mathbb{N}, \lambda \geq \omega\} \leq M.$$

1.3 Operadores de Hille-Yosida e espaços de extrapolação

Recordamos algumas propriedades básicas dos espaços de extrapolação para operadores de Hille-Yosida, que são ferramentas essenciais para este trabalho.

Definição 1.28 *Sejam* X *um espaço de Banach e* A *um operador linear com domínio* $D(A)$*. Dizemos que* $(A, D(A))$ *é um operador de Hille-Yosida sobre* X *se existem constantes* $\omega \in \mathbb{R}$ *e* $M \geq 1$ *tais que* $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ *e* $\sup\{(\lambda - \omega)^n \parallel (\lambda - A)^{-n} \parallel : n \in \mathbb{N},\ \lambda > \omega\} \leq M$*. Chamaremos de tipo de* A *o par* (M, μ) *onde* μ *é o ínfimo das constantes* ω*. Se pudermos escolher* ω *menor que zero, diremos que* A *é de tipo negativo.*

As condições da definição (1.28) são as condições do Teorema de Hille-Yosida com exceção da densidade do domínio de A. Observamos que a redução das condições de Hille-Yosida são ilusórias quando X é reflexivo. De fato, temos o seguinte resultado devido a Kato ([19])

Proposição 1.29 ([19]) *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador linear sobre um espaço de Banach reflexivo* X*, tal que existem* $\mu, M > 0$ *verificando a propriedade:*

$$\lambda > \mu \Rightarrow (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \text{ e } \|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{M}{\lambda - \mu}.$$

Então $\overline{D(A)} = X$*.*

Considere $(A, D(A))$ um operador linear sobre X, e $X_0 := \overline{D(A)}$. Seja $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \to X_0$ o operador definido por $A_0 x = Ax$ com domínio

$$D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in X_0\}.$$

Baseado nas propriedades da Proposição (1.25), se assumirmos que o operador A é dissipativo e que $\lambda - A$ é sobrejetivo para algum $\lambda > 0$, então $(0, \infty) \subset \rho(A)$.

Lema 1.30 *Seja $(A, D(A))$ um operador dissipativo sobre um espaço de Banach X tal que $\lambda - A$ é sobrejetivo, para algum $\lambda > 0$. Então a parte A_0 de A no subespaço $X_0 := \overline{D(A)}$ é densamente definido e gera um semigrupo de contrações em X_0. Ademais, $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ e $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$, para $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração. Pela definição

$$A_0 x = Ax$$

para $x \in D(A_0) := \{x \in D(A) : Ax \in X_0\} = R(\lambda, A)X_0$. Não é muito difícil notar que $R(\lambda, A)|_{X_0} = R(\lambda, A_0)$, assim $\rho(A) \subset \rho(A_0)$. Por conseguinte, $(0, \infty) \subset \rho(A_0)$. Devido ao Teorema (1.26), resta mostrar que $D(A_0)$ é denso em X_0. Dado $x \in D(A)$, seja $x_n = nR(n, A)x$, logo $x_n \in D(A)$. Da definição de resolvente, temos que $(\lambda - A)R(\lambda, A) = I$, assim

$$\lambda R(\lambda, A) = AR(\lambda, A) + I.$$

Então $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} AR(n, A)x + x = x$, porque pela Proposição (1.25) temos $\|R(n, A)\| \leq \dfrac{1}{n}$. Portanto, os operadores $nR(n, A)$ convergem pontualmente sobre $D(A)$ para a identidade. Mas como $\|nR(n, A)\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, obtemos a convergência de

$$y_n := nR(n, A)y \to y$$

para todo $y \in X_0$. Como cada y_n está em $D(A_0) = R(\lambda, A)X_0$, a densidade de $D(A_0)$ em X_0 está garantida.

$\blacksquare$

Agora consideraremos A sendo um operador de Hille-Yosida, assim estabelecemos o seguinte resultado análogo ao Lema (1.30).

Lema 1.31 *O operador A_0 é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sobre X_0 com $\| T_0(t) \| \leq Me^{\mu t}$ para $t \geq 0$. Além disso, $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ e $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$, para $\lambda \in \rho(A)$.*

Demonstração. Inicialmente consideramos o operador $(B, D(B))$ sobre X definido por

$$Bx = Ax - \omega x.$$

Assim $D(B) = D(A)$, $\rho(B) = \rho(A) - \omega$ e $R(\lambda, B) = R(\lambda + \omega, A)$, ver observação sobre semigrupo reescalado. Portanto $(0, \infty) \subset \rho(B)$ e para $\lambda > 0$, temos

$$\|R(\lambda, B)^n\| = \|R(\lambda + \omega, A)^n\| \leq \frac{M}{\lambda^n}, \quad para\ algum \quad M \geq 1.$$

Para todo $\mu > 0$, definimos uma nova norma sobre X por

$$\|x\|_\mu := \sup_{n \geq 0} \|\mu^n R(\mu, B)^n x\|.$$

Estas normas têm as seguintes propriedade (ver demonstração do Teorema 3.8 de [12])

(i) $\|x\| \leq \|x\|_\mu \leq M\|x\|$

(ii) $\|\mu R(\mu, A)\|_\mu \leq 1$

(iii) $\|\lambda R(\lambda, A)\|_\mu \leq 1$ para $0 < \lambda \leq \mu$

(iv) $\|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\| \leq \|\lambda^n R(\lambda, A)^n x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$ para $0 < \lambda \leq \mu$ e $n \in \mathbb{N}$

(v) $\|x\|_\lambda \leq \|x\|_\mu$ para $0 < \lambda \leq \mu$.

Com base nessas propriedades definimos a seguinte norma

$$\|x\|_| := \sup_{\mu > 0} \|x\|_\mu,$$

que satisfaz

(vi) $\|x\| \leq \|x\|_| \leq M\|x\|$

(vii) $\|\lambda R(\lambda, B)\|_| \leq 1$ para todo $\lambda > 0$.

Assim,

$$\lambda\|x\|_| = \|\lambda(\lambda - B)^{-1}(\lambda - B)x\|_| \leq \|(\lambda - B)x\|_| \quad para \quad todo \quad x \in D(B),$$

ou seja, B é $\| \cdot \|_{|}-$dissipativo. Pelo Lema (1.30), o operador B gera um semigrupo de contrações $(S(t))_{t\geq 0}$, em $(X_0, \| \cdot \|_{|})$, que obedece a seguinte estimativa

$$\|S(t)\| \leq \|S(t)\|_{|} \leq 1 \leq M.$$

Usando a ideia de semigrupo reescalado, vemos que A gera um semigrupo fortemente contínuo $(T_0(t))_{t\geq 0}$, onde $T_0(t) = e^{\omega t}S(t)$, assim

$$\|T_0(t)\| = \|e^{\omega t}S(t)\| \leq e^{\omega t}\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Com isso, a demonstração está completa.

■

No que segue, assumiremos que $(A, D(A))$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo (C, μ) em X. Com isso temos que $0 \in \rho(A) \subset \rho(A_0)$, ou seja, $A_0^{-1} \in \mathcal{L}(X_0)$. Note que a expressão $\| x \|_{-1} = \| A_0^{-1}x \|$ define uma norma em X_0. O completamento de $(X_0, \| \cdot \|_{-1})$, denotado por X_{-1}, é chamado o ***espaço de extrapolação*** de X_0 associado ao operador A_0. Note também que X é um espaço intermediário entre X_0 e X_{-1} e que

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_{-1}$$

(ver [24]). Como $A_0^{-1}T_0(t) = T_0(t)A_0^{-1}$, temos que

$$\| T_0(t)x \|_{-1} \leq \| T_0(t) \|_{\mathcal{L}(X_0)} \| x \|_{-1}$$

isso implica que $T_0(t)$ tem uma única extensão linear $T_{-1}(t)$ em X_{-1}. Observe que a família de operadores $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ forma um C_0-semigrupo sobre X_{-1}. De fato, seja $x \in X_{-1}$, assim existe uma sequência $(x_n) \subset X_0$ tal que $x_n \to x$, dessa forma

(i) $T_{-1}(0)x = \lim\limits_{n\to\infty} T_{-1}(0)x_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_0(0)x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

(ii) $T_{-1}(t+s)x = \lim\limits_{n\to\infty} T_{-1}(t+s)x_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_0(t+s)x_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_0(t)T_0(s)x_n = \lim\limits_{n\to\infty} T_{-1}(t)T_{-1}(s)x_n = T_{-1}(t)T_{-1}(s)x$

(iii) por construção $\| T_{-1}(t) \| = \| T_0(t) \|$, e como $(T_0(t))$ é um C_0-semigrupo segue que existem $\delta > 0$ e $M \geq 1$ tais que $\| T_0(t) \| \leq M$, para todo $t \in [0, \delta]$. Assim

(a) $\| T_{-1}(t) \| \leq M$ para todo $t \in [0, \delta]$

(b) Para todo $x \in X_0$ temos que

$\lim_{t \downarrow o} T_{-1}(t)x = \lim_{t \downarrow o} T_0(t)x = x,$

e pelo teorema (1.20) temos que $(T_{-1}(t))$ é um C_0-semigrupo. Chamaremos $(T_{-1}(t))$ de *semigrupo de extrapolação* de $(T_0(t))_{t\geq 0}$. Na sequência, $(A_{-1}, D(A_{-1}))$ será o gerador infinitesimal de $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$.

Lema 1.32 *Com as condições anteriores, as seguintes propriedades são verificadas.*

(i) $D(A_{-1}) = X_0$ *e* $\| T_{-1}(t) \|_{\mathcal{L}(X_{-1})} = \| T_0(t) \|_{\mathcal{L}(X_0)}$ *para todo* $t \geq 0$.

(ii) *O operador* $A_{-1} : X_0 \to X_{-1}$ *é a única extensão contínua de* $A_0 : D(A_0) \subset (X_0, \| \cdot \|) \to (X_{-1}, \| \cdot \|_{-1})$ *e* A_{-1} *é uma isometria entre* $(X_0, \| \cdot \|)$ *e* $(X_{-1}, \| \cdot \|_{-1})$.

Demonstração.(i) Note que por construção, $\| T_{-1}(t) \|_{\mathcal{L}(X_{-1})} = \| T_0(t) \|_{\mathcal{L}(X_0)}$, vamos provar que $D(A_{-1}) = X_0$. Note que $(T_{-1}(t))$ é um extensão de $(T_0(t))$, assim temos que A_{-1} é uma extensão de A_0 e como A_{-1} é um operador fechado, temos que $X_0 \subset D(A_{-1})$. Como X_0 é $(T_0(t))$-invariante segue que X_0 é $(T_{-1}(t))$-invariante, assim, pela proposição (1.21) concluímos que X_0 é denso em $D(A_{-1})$ com a norma $\| x \|_{A_{-1}} = \| x \|_{-1} + \| A_{-1}x \|_{-1}$. Note que $\| \cdot \|_{-1} \leq \| \cdot \|_{A_{-1}}$ e $(X_0, \| \cdot \|_{-1})$ é espaço de Banach, assim $(X_0, \| \cdot \|_{-A_{-1}})$ é também espaço de Banach, portanto $X_0 = D(A_{-1})$.
(ii) Já vimos no item (i) que A_{-1} é uma extensão de A_0, como $D(A_0)$ é denso em X_0, temos que A_{-1} é uma extensão contínua de A_0. Para ver que A_{-1} é uma isometria entre $(X_0, \| \cdot \|)$ e $(X_{-1}, \| \cdot \|_{-1})$, basta notar que $D(A)$ é denso em X_0 e que

$$\| A_{-1}x \|_{-1} = \| A_0 x \|_{-1} = \| A_0^{-1} A_0 x \| = \| x \| \; \forall \; x \in D(A_0).$$

Isto conclui a demonstração.

■

Observação 1.33 *[28] Sobre as condições do Lema 1.32 ainda são verificadas seguintes propriedades:*

(iii) *Se* $\lambda \in \rho(A_0)$, *então* $(\lambda - A_{-1})^{-1}$ *existe e* $(\lambda - A_{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1})$. *Em particular,* $\lambda \in \rho(A_{-1})$ *e* $R(\lambda, A_{-1})|_{X_0} = R(\lambda, A_0)$.

(iv) *O espaço* $X_0 = \overline{D(A)}$ *é denso em* $(X_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$. *Assim, o espaço de extrapolação* X_{-1} *é também o completamento de* $(X, \|\cdot\|_{-1})$ *e* $X \hookrightarrow X_{-1}$. *Além disso,* A_{-1} *é uma extensão de* A *em* X_{-1}. *Em particular, se* $\lambda \in \rho(A)$, *então* $R(\lambda, A_{-1})|_X = R(\lambda, A)$ *e* $R(\lambda, A_{-1})X = D(A)$.

1.3.1 Miscelânea

Seja X um espaço de Banach. Considere a equação de evolução linear

$$x'(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \in [0, \infty), \tag{1.10}$$

$$x(0) = x_0. \tag{1.11}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo e $f \in C_b([0,\infty), X)$, isto é, f é contínua e limitada. Na situação onde $X_0 := \overline{D(A)} = X$, a teoria de semigrupos aplica-se de forma imediata ao estudo de existência de soluções para as Equações (1.10)-(1.11). Porém, se X_0 é um subespaço próprio de X segue-se que A não gera um C_0-semigrupo.

Por outro lado, como vimos nesta seção, podemos considerar uma extensão do operador A para um espaço conveniente de modo que tal extensão é o gerador de um C_0-semigrupo, o qual denominamos de semigrupo extrapolado. Agora mostraremos alguns resultados que relacionam existência de solução para as Equações (1.10)-(1.11) e semigrupos extrapolados.

Como vimos, a hipótese de $A : D(A) \subset X \to X$ ser um operador de Hille-Yosida de tipo negativo acarreta na existência de constantes $C \geq 1$ e $\omega < 0$ tais que o semigrupo extrapolado possui a seguinte limitação exponencial

$$\|T_{-1}(t)\| \leq Ce^{\omega t}, \quad t \geq 0.$$

No decorrer desta seção C e ω serão as constantes dessa desigualdade.

Em [23, 28] os autores mostram que a função $x : [0, \infty) \to X$ dada por

$$x(t) = T_{-1}(t)x_0 + T_{-1} * f(t) := T_{-1}(t)x_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s)ds,$$

é a única solução branda das Equações (1.10)-(1.11). Ademais,

$$T_{-1} * f(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \in X_0,$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

Lema 1.34 *Dado $f \in C_b([0,\infty), X)$, as seguintes propriedades são verificadas.*

(i) $\|T_{-1} * f(t)\| \leq Ce^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\|f(s)\|ds$;

(ii) O operador linear $\Gamma : C_b([0,\infty), X) \to C_b([0,\infty), X_0)$ *definido por* $\Gamma f(t) = T_{-1} * f(t)$, *é contínuo;*

Demonstração. (i) De fato, observe que

$$\begin{aligned}
\|T_{-1} * f(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\|\|f(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t Ce^{\omega(t-s)}\|f(s)\|ds \\
&= Ce^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\|f(s)\|ds.
\end{aligned}$$

(ii) Basta observar que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma f(t) - \Gamma g(t)\| &\leq Ce^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}\|f(s)-g(s)\|ds \\
&= \left(Ce^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}ds\right)\|f-g\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{C}{|\omega|}\right)\|f-g\|_\infty,
\end{aligned}$$

e a demonstração fica completa.

■

Observamos que esses resultados são válidos para $f \in L^1_{loc}([0,\infty), X)$.

1.4 Resultados de Topologia

Nesta seção relembraremos alguns teoremas e definições que serão utilizados neste trabalho.

Definição 1.35 *Sejam X um espaço topológico e $f : X \to X$ uma função contínua. Um* ponto fixo *para f é um elemento $x \in X$, tal que $f(x) = x$.*

Definição 1.36 *Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ para a qual existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$\rho(f(x), f(z)) \leq Ld(x, z),$$

para todos $x, z \in X$ é chamada Lipschitziana. *A constante L é chamada constante de Lipschitz de f. Quando $L < 1$ dizemos que f é uma* contração.

Observação 1.37 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Neste trabalho nos interessa a situação onde $f : [0, \infty) \times X \to Y$ é uma função contínua que satisfaz a condição*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$, $t \in [0, \infty)$, e $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ é uma função dada. Neste caso também dizemos que f é uma função Lipschitziana.

O próximo resultado é um dos mais simples e aplicados entre os teoremas de ponto fixo.

Teorema 1.4.1 ***(Princípio da Contração de Banach)*** *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo.*

A seguir temos uma variação deste resultado, a qual nos permite considerar condições um pouco mais gerais em nosso trabalho.

Teorema 1.4.2 ***(Princípio dos Iterados)*** *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma função contínua. Se para algum $n \in \mathbb{N}$ o iterado f^n é uma contração, então f possui um único ponto fixo.*

Esses dois teoremas são de grande utilidade para nós, porém como eles tratam apenas de contrações, logo não cobrem algumas situações em que temos interesse. Neste sentido o teorema seguinte é muito útil.

Teorema 1.4.3 ***(Alternativa de Leray-Schauder)*** *Seja D um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X tal que $0 \in D$. Seja $G : D \to D$ uma função completamente contínua. Então, G possui um ponto fixo em D ou o conjunto*

$$\{z \in D : z = \lambda G(z), 0 < \lambda < 1\}$$

é ilimitado.

Para utilizar o Teorema (1.4.3) vamos estabelecer um critério de compacidade em um espaço de Banach especial. Sejam X um espaço de Banach e $h : [0, \infty) \to [1, \infty)$ uma função contínua tal que $\lim\limits_{t\to\infty} h(t) = \infty$. Considere o espaço

$$C_h(X) = \left\{u \in C([0, \infty), X) : \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0\right\}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_h = \sup_{t\geq 0} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}.$$

Pode-se mostrar que $C_h(X)$ munido com a norma $\|\cdot\|_h$ é um espaço de Banach. O seguinte critério de compacidade é muito valioso para um de nossos resultados.

Lema 1.38 ***([9])*** *Um subconjunto $K \subset C_h(X)$ é relativamente compacto se verifica as seguintes condições:*

(i) *O conjunto $K_b = \{u |_{[0,b]} : u \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0, b]; X)$ para todo $b \geq 0$.*

(ii) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\|u(t)\|}{h(t)} = 0$ *uniformemente para todo $u \in K$.*

Dados K, N dois espaços métricos, denotaremos por $C(K; N)$ o conjunto de todas as funções $f : K \to N$ contínuas. O próximo resultado é um teorema clássico em Topologia.

Teorema 1.4.4 ***([21])(Teorema de Ascoli-Arzelá)*** *Seja E um conjunto de aplicações contínuas $f : K \to N$, onde K é compacto. A fim de que $E \subset C(K; N)$ seja relativamente compacto, é necessário e suficiente que:*

1. *E seja equicontínuo;*

2. *Para cada $x \in K$, o conjunto $E(x) = \{f(x) : f \in E\}$ seja relativamente compacto em N.*

Se M é um subconjunto de um espaço linear Z, a *envoltória convexa de M,* denotada por $co(M)$, é o menor convexo de Z que contém M. Se Z é normado, denotamos por $\overline{co}(M)$ o *fecho da envoltória convexa de M.*

Lema 1.39 **[25]** *Seja Z um espaço de Banach e $f : [\alpha, \beta] \to Z$ uma função integrável. Então*

$$(\beta - \alpha)^{-1} \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau \in \overline{co}\{f(\tau) : \tau \in [\alpha, \beta]\}$$

Teorema 1.4.5 ***(Teorema de Mazur)*** *Se Z é um espaço de Banach e A é um subconjunto relativamente compacto de Z, então $co(A)$ é relativamente compacto.*

Lema 1.40 ***(Lema de Gronwall)*** *Suponha que f, ε e k são funções não-negativas de uma variável real t, tal que*

$$f(t) \leq \varepsilon(t) + \left| \int_0^t k(\tau) f(\tau) d\tau \right|,$$

então

$$f(t) \leq \varepsilon(t) + \left| \int_0^t k(\tau)\varepsilon(\tau) e^{\left|\int_\tau^t k(s)ds\right|} d\tau, \right|$$

e em particular, se ε e k são constantes, nós encontramos que

$$f(t) \leq \varepsilon e^{k(t)}.$$

Com isso concluímos nossas preliminares.

Capítulo 2

Soluções Assintoticamente Quase Periódicas

Neste capítulo, estamos interessados em estudar a existência e unicidade de soluções brandas assintoticamente quase periódicas da equação semilinear de primeira ordem descrita sob a forma

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} =: X_0, \tag{2.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo (C, μ) com $C \geq 1$, $\mu < 0$, cujo domínio $D(A)$ está contido num espaço de Banach X e $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ é contínua. Não faremos suposições a respeito da densidade de $D(A)$, contudo, o caso não denso desperta maior interesse uma vez que nesta situação a teoria clássica de semigrupos não pode ser aplicada. Consideramos também o caso de condição não local, isto é, quando a condição inicial é da forma $u(0) + g(u) = u_0$, com $g : C_b([0, \infty), X_0) \to X_0$ uma função dada.

As considerações no caso linear nos motiva a definir uma solução branda da equação (2.1)-(2.2) como uma função contínua $u : [0, \infty) \to X$ que satisfaz a equação integral

$$u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s, u(s))ds, \ t \geq 0.$$

O próximo resultado assegura a regularidade da convolução do semigrupo $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$

com as funções assintoticamente quase periódicas. Esse resultado será muito útil na nossa abordagem do problema (2.1)-(2.2).

Lema 2.1 *Assuma que $w \in AAP(X)$. Então a função*

$$v(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)w(s)ds, \ t \geq 0,$$

é assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Se $w = g + \phi$, onde $g \in AP(X)$ e $\phi \in C_0([0,\infty), X)$, temos que $v(t) = G(t) + \Phi(t)$, onde

$$G(t) := \int_{-\infty}^t T_{-1}(t-s)g(s)ds \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

e

$$\Phi(t) := \int_0^t T_{-1}(t-s)\phi(s)ds - \int_{-\infty}^0 T_{-1}(t-s)g(s)ds, \ t \geq 0. \tag{2.4}$$

Afirmamos que $G \in AP(X)$. De fato, para $\epsilon > 0$, escolhemos $l(\epsilon) > 0$ tal que todo intervalo de comprimento $l(\epsilon)$ contém um número τ com a propriedade $\|g(t+\tau) - g(t)\| \leq \epsilon$, para todos $t \in \mathbb{R}$. Portanto, a estimativa

$$\begin{aligned}
\|G(t+\tau) - G(t)\| &= \left\| \int_{-\infty}^{t+\tau} T_{-1}(t+\tau-s)g(s)ds - \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)g(s)ds \right\| \\
&= \left\| \int_0^{\infty} T_{-1}(s)g(t-s+\tau)ds - \int_0^{\infty} T_{-1}(s)g(t-s)ds \right\| \\
&\leq \int_0^{\infty} \|T_{-1}(s)\| \|g(t-s+\tau) - g(t-s)\| ds \\
&\leq \left(C \int_0^{\infty} e^{\mu s} ds \right) \epsilon = \left(\frac{C}{|\mu|} \right) \epsilon,
\end{aligned}$$

nos mostra que $G \in AP(X)$. Agora, mostraremos que $\Phi \in C_0([0,\infty), X)$. Como $\phi \in C_0([0,\infty), X)$, dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $T > 0$ tal que $\|\phi(s)\| \leq \epsilon$ para todo

$s \geq T$ e $\displaystyle\int_T^\infty e^{\mu s} ds < \frac{\epsilon}{C}$. Então, para todo $t \geq 2T$, deduzimos

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(t)\| &\leq \int_0^{t/2} \|T_{-1}(t-s)\| \|\phi(s)\| ds + \int_{t/2}^{t} \|T_{-1}(t-s)\| \|\phi(s)\| ds + \int_{-\infty}^{0} \|T_{-1}(t-s)\| \|g(s)\| ds \\
&\leq C\|\phi\|_\infty \int_0^{t/2} e^{\mu(t-s)} ds + \epsilon C \int_{t/2}^{t} e^{\mu(t-s)} ds + C\|g\|_\infty \int_{-\infty}^{0} e^{\mu(t-s)} ds \\
&\leq C\|\phi\|_\infty \int_{t/2}^{t} e^{\mu s} ds + C\epsilon \int_0^{t/2} e^{\mu s} ds + C\|g\|_\infty \int_t^\infty e^{\mu s} ds \\
&\leq C\|\phi\|_\infty \int_T^\infty e^{\mu s} ds + C\epsilon \int_0^\infty e^{\mu s} ds + C\|g\|_\infty \int_t^\infty e^{\mu s} ds \\
&\leq \|\phi\|_\infty \epsilon + \frac{C}{|\mu|}\epsilon + \|g\|_\infty \epsilon.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 0$, ou seja, $\Phi \in C_0([0,\infty), X)$. Isto completa a prova.

■

O seguinte Teorema é o principal resultado desta seção.

Teorema 2.2 *Seja $f \in AAP(X_0; X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Assuma que existe uma função integrável $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$, tal que*

$$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L(t)\|v - w\|, \tag{2.5}$$

para todos $v, w \in X_0$ e $t \geq 0$. Então o problema (2.1)-(2.2) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Nós definimos o operador Γ sobre o espaço $AAP(X_0)$ por

$$\Gamma u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds \;=:\; T_{-1}(t)u_0 + v(t), \quad t \geq 0. \tag{2.6}$$

Primeiramente vamos mostrar que Γ está bem definido, ou seja, $\Gamma u \in AAP(X_0)$. Como $T_{-1}(t)u_0 \to 0$, quando $t \to \infty$, e pelo Lema 1.20 a função $t \mapsto T_{-1}(t)u_0$ é contínua, temos que $T_{-1}(\cdot)u_0 \in AAP(X_0)$. Ademais, pelos Lemas 1.14 e 2.1, temos que $v(\cdot) \in AAP(X_0)$. Portanto, $\Gamma(AAP(X_0)) \subset AAP(X_0)$.

Agora consideremos $u_1, u_2 \in AAP(X_0)$, assim:

$$\begin{aligned}
\| \Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t) \| &\leq \int_0^t \| T_{-1}(t-s) \| \| f(s,u_1(s)) - f(s,u_2(s)) \| ds \\
&\leq C \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) \| u_1(s) - u_2(s) \| ds \\
&\leq C \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) ds \| u_1 - u_2 \|_\infty \\
&\leq C \int_0^t L(s) ds \| u_1 - u_2 \|_\infty \\
&\leq C ||L||_1 \| u_1 - u_2 \|_\infty,
\end{aligned}$$

Logo Γ é contínua. Outrossim,

$$\begin{aligned}
\|(\Gamma^2 u_1)(t) - (\Gamma^2 u_2)(t)\| &\leq C \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) \| \Gamma u_1(s) - \Gamma u_2(s) \| ds \\
&\leq C \int_0^t L(s) \left(C \int_0^s e^{\mu(s-\tau)} L(\tau) \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\| d\tau \right) ds \\
&\leq C^2 \left(\int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right) ds \right) \|u_1 - u_2\|_\infty \\
&= \frac{C^2}{2} \left(\int_0^t L(\tau) d\tau \right)^2 \|u_1 - u_2\|_\infty \\
&\leq \frac{(C\|L\|_1)^2}{2} \|u_1 - u_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Em geral, para $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\|(\Gamma^n u_1)(t) - (\Gamma^n u_2)(t)\| \leq \left(\frac{(C\|L\|_1)^n}{n!} \right) \|u_1 - u_2\|_\infty.$$

Uma vez que $\dfrac{(C\|L\|_1)^n}{n!} < 1$ para n suficientemente grande, segue do Princípio dos Iterados (1.4.2) que Γ tem um único ponto fixo $u \in AAP(X_0)$ e consequentemente existe uma única solução branda assintoticamente quase periódica para a equação (2.1)-(2.2).

■

Observação 2.3 Considere o problema

$$v'(t) = Av(t) + f(t, v(t)), \quad t > 0, \tag{2.7}$$

$$v(0) = v_0 \in \overline{D(A)} =: X_0, \tag{2.8}$$

onde A e f são como no Teorema (2.2). Seja u_0 a condição inicial (2.2). Suponha que existe $R > 0$ tal que $\|u_0 - v_0\| \leq R$. Se u é a solução branda assintoticamente quase periódica do problema (2.1)-(2.2) e v é a solução branda assintoticamente quase periódica do problema (2.7)-(2.8), logo, pela definição vemos que:

$$u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

$$v(t) = T_{-1}(t)v_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,v(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Então nós temos a seguinte estimativa

$$\|u - v\|_\infty \leq CRe^{C\|L\|_1}. \tag{2.9}$$

De fato, nós observamos que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\| &\leq \| T_{-1}(t) \| \| u_0 - v_0 \| + \int_0^t \| T_{-1} \| \| f(s,u(s)) - f(s,v(s)) \| ds \\
&\leq Ce^{\mu t} \| u_0 - v_0 \| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) \| u(s) - v(s) \| ds \\
&\leq C\|u_0 - v_0\| + C\int_0^t L(s)\|u(s) - v(s)\|ds \\
&\leq CR + C\int_0^t L(s)\|u(s) - v(s)\|ds.
\end{aligned}$$

Por isso, a estimativa (2.9) é consequência da inequação de Gronwall (Lema 1.40). Deste fato, é fácil ver que se considerarmos a família de problemas

$$u_\epsilon'(t) = Au_\epsilon(t) + f(t, u_\epsilon(t)), \quad t > 0, \tag{2.10}$$

$$u_\epsilon(0) = u_0^\epsilon \in \overline{D(A)} =: X_0, \tag{2.11}$$

onde A e f são como acima e as condições iniciais verificam a estimativa $\|u_0^\epsilon - u_0\| \leq R(\epsilon)$, com $R(\epsilon) \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, então nós temos que $\|u^\epsilon - u\|_\infty \to 0$ quando $\epsilon \to 0$, onde u^ϵ e u são a solução branda assintoticamente quase periódica do problema (2.10)-(2.11) e a solução branda assintoticamente quase periódica do problema (2.1)-(2.2), respectivamente.

Note que o Teorema (2.2) não inclui os casos onde L em (2.5) é uma constante. Neste caso, nós temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4 *Seja $f \in AAP(X_0; X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados e assuma que f verifica a condição de Lipschitz*

$$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L(t)\|v - w\|, \tag{2.12}$$

com L uma função localmente integrável. Se $C \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) ds < 1$, então o problema (2.1)-(2.2) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Procedendo como na prova do Teorema (2.2), nós definimos a função Γ sobre o espaço $AAP(X_0)$ pela expressão (2.6). O mesmo argumento do Teorema (2.2) mostra que Γ está bem-definido. Ademais, se $u_1, u_2 \in AAP(X_0)$ nós temos a inequação

$$\begin{aligned} \|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| &\leq \int_0^t \| T_{-1}(t-s) \| \| f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s)) \| ds \\ &\leq C \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \\ &\leq C \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) ds \|u_1 - u_2\|_\infty, \end{aligned}$$

isso prova que Γ é uma contração. Portanto, a afirmação é consequência do Princípio da Contração de Banach (1.4.1), e a prova está completa.

■

As seguintes consequências são imediatas.

Corolário 2.5 *Seja $f \in AAP(X_0; X)$ uma função que verifica a condição de Lipschitz (2.12) com L uma função contínua e limitada. Se $C \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) ds < 1$, então o problema (2.1)-(2.2) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.*

Demonstração. Como f satisfaz a condição de Lipschitz (2.12) e L é contínua e limitada, temos

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\| \leq \|L\|_\infty \|x - y\|.$$

Desta estimativa segue que f é uniformemente contínua em t.

■

Corolário 2.6 *Seja $f \in AAP(X_0; X)$ uma função que verifica a condição de Lipschitz*

$$\| f(t,v) - f(t,w) \| \leq K \| v - w \|, \ \forall \ t \in [0, \infty), \ v, \ w \in X_0. \tag{2.13}$$

Se $\dfrac{CK}{|\mu|} < 1$, *então o problema (2.1)-(2.2) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.*

Demonstração. Basta notar que pela condição de Lipschitz, f é uniformemente contínua em t, além disso $\displaystyle\int_0^t e^{\mu(t-s)} ds = \int_0^t e^{\mu\tau} d\tau \leq \int_0^\infty e^{\mu\tau} d\tau = \frac{-1}{\mu} = \frac{1}{|\mu|}$. ∎

Agora, nos moveremos para o problema de perturbações localmente Lipschitz para a equação (2.1). Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.7 *Seja $f \in AAP(X_0; X)$ e assuma que existe uma função não-decrescente $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que para cada $r > 0$ e todos $v, w \in X_0$, com $\|v\| \leq r$ e $\|w\| \leq r$, nós temos*

$$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L(r)\|v - w\|, \ \forall \ t \geq 0.$$

Se existe $R > 0$ tal que

$$\frac{C}{|\mu|}\left(\frac{|\mu|\|u_0\|}{R} + L(R) + \frac{\|f(\cdot, 0)\|_\infty}{R}\right) < 1,$$

então o problema (2.1)-(2.2) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que f é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Dados $\varepsilon > 0$ e K um subconjunto limitado de X. Escolhemos $r > 0$, tal que $\|x\| < r$, para todo $x \in K$, então

$$\|f(t,v) - f(t,w)\| \leq L(r)\|v - w\|, \quad \forall t \geq 0, \ \forall v, w \in K.$$

Assim, basta tomar $\delta(\varepsilon, K) < \dfrac{\varepsilon}{L(r)}$. Agora, defina o operador Γ como na expressão (2.6). Considere $R > 0$ tal que

$$C\|u_0\| + \frac{CRL(R)}{|\mu|} + \frac{C\|f(\cdot, 0)\|_\infty}{|\mu|} < R.$$

Seja B_R a bola fechada

$$B_R = \{v \in AAP(X_0) : \|v\|_\infty \leq R\} \subset AAP(X_0).$$

Observamos que se $v \in B_R$, então

$$\begin{aligned}
\|\Gamma v(t)\| &\leq \|T_{-1}(t)u_0\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\| \|f(s,v(s)) - f(s,0) + f(s,0)\| ds \\
&\leq \|T_{-1}(t)\| \|u_0\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\| \|f(s,v(s)) - f(s,0)\| ds + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\| \|f(s,0)\| ds \\
&\leq Ce^{\mu t}\|u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)} L(R)\|v(s)\| ds + C\int_0^t e^{\mu(t-s)} ds \|f(\cdot,0)\|_\infty \\
&\leq C\|u_0\| + CL(R)\|v\|_\infty \int_0^t e^{\mu(t-s)} ds + C\|f(\cdot,0)\|_\infty \int_0^t e^{\mu(t-s)} ds \\
&= C\|u_0\| + C(L(R)\|v\|_\infty + \|f(\cdot,0)\|_\infty) \int_0^t e^{\mu s} ds \\
&\leq C\|u_0\| + C(L(R)R + \|f(\cdot,0)\|_\infty) \int_0^\infty e^{\mu s} ds \\
&\leq C\|u_0\| + \frac{CRL(R)}{|\mu|} + \frac{C\|f(\cdot,0)\|_\infty}{|\mu|} \leq R.
\end{aligned}$$

Então, $\Gamma(B_R) \subset B_R$. Agora, basta mostrar que Γ é uma contração como um operador sobre B_R. Mas isto segue da seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|\Gamma v(t) - \Gamma w(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}\| \|f(s,v(s)) - f(s,w(s))\| ds \\
&\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)} L(R)\|v(s) - w(s)\| ds \\
&\leq CL(R)\int_0^\infty e^{\mu s} ds \|v - w\|_\infty \\
&\leq \left(\frac{CL(R)}{|\mu|}\right) \|v - w\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como por hipótese $\frac{C}{|\mu|}\left(|\mu|\|u_0\| + L(R) + \frac{\|f(\cdot,0)\|_\infty}{R}\right) < 1$, logo $\left(\frac{CL(R)}{|\mu|}\right) < 1$, e pelo Princípio da Contração de Banach (1.4.1) o teorema é verdadeiro.

■

Observação 2.8 Em [11], Deng revelou que as condições não-locais $u(0)+g(u) = u_0$ podem ser aplicadas em física com melhor efeito que a usual condição local do Problema de Cauchy $u(0) = u_0$. Como no trabalho de Deng, o Problema de Cauchy com condições não-locais tem atraído outros autores (cf. [2, 7, 26]). Esta é a motivação para considerarmos o Problema de Cauchy com condições não-locais

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.14}$$

$$u(0) + g(u) = u_0 \in X_0, \tag{2.15}$$

onde o operador linear A é como antes. Nesta situação temos o seguinte resultado.

Proposição 2.9 *Seja $f \in AAP(X_0; X)$ uma função que verifica a condição de Lipschitz*

$$\| f(t,v) - f(t,w) \| \leq K \| v - w \|, \ \forall\ t \in [0, \infty),\ v,\ w \in X_0. \tag{2.16}$$

Assuma que $g : C_b([0,\infty), X_0) \to X_0$ satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|g(u) - g(v)\| \leq C_g \|u - v\|_\infty,\ u, v \in C_b([0,\infty); X_0).$$

Se $C\left(C_g + \frac{K}{|\mu|}\right) < 1$, então o problema (2.14)-(2.15) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Definimos o operador $\Gamma : AAP(X_0) \to AAP(X_0)$ por:

$$\Gamma u(t) = T_{-1}(u_0 + g(u)) + \int_0^t T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds,\ \forall t \geq 0.$$

Não é difícil ver que para cada $u \in AAP(X_0)$ a função $t \mapsto T_{-1}(t)(u(0) + g(u))$ pertence a $AAP(X_0)$, pois $\|T_{-1}(t)\| \leq Ce^{\mu t}$ e $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo, daí pela Proposição 1.20 é contínua. Como f satisfaz a condição de Lipschitz (2.16), logo é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados, e os Lemas (1.14) e (2.1) garantem que

$$\omega(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds \in AAP(X_0).$$

Portanto Γ está bem-definido. Finalmente, se $u_1, u_2 \in AAP(X_0)$, então:

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u_1(t) - \Gamma u_2(t)\| &\leq \|T_{-1}(t)(g(u_1) - g(u_2))\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s)))\| ds \\
&\leq \|T_{-1}(t)\| \|g(u_1) - g(u_2)\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\| \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\| ds \\
&\leq Ce^{\mu t} C_g \|u_1 - u_2\|_\infty + C \int_0^t e^{\mu(t-s)} K \|u_1(s) - u_2(s)\| ds \\
&\leq C\|u_1 - u_2\|_\infty (C_g + K \int_0^t e^{\mu s} ds) \\
&\leq C\|u_1 - u_2\|_\infty (C_g + K \int_0^\infty e^{\mu s} ds) \\
&= C(C_g + \frac{K}{|\mu|}) \|u_1 - u_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Portanto, Γ é uma contração.

■

Estudaremos agora a existência de soluções brandas assintoticamente quase periódicas do problema (2.1)-(2.2) quando a função f não é necessariamente Lipschitziana.

Para estabelecer o resultado, nós consideramos funções $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ que satisfazem a seguinte condição de limitação.

(B) Existe uma função contínua não-decrescente $W : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\|f(t, x)\| \leq W(\|x\|)$ para todos $t \in [0, \infty)$ e $x \in X_0$.

Teorema 2.10 *Sejam $h : [0, \infty) \to [1, \infty)$ uma função contínua como no Lema (1.38) e $f \in AAP(X_0; X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados que satisfaz a hipótese (B) e as seguintes condições:*

(a) Para cada $\nu \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)} W(\nu h(s)) ds = 0$.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_h(X_0)$, $\|v - u\|_h \leq \delta$ implica que

$$C \int_0^t e^{\mu(t-s)} \|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\| ds \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

(c) Para todos $a, b \in [0, \infty)$, $a \leq b$, e $r > 0$, o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0, \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

(d) $\liminf_{\xi \to \infty} \dfrac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(\nu) := \left\| \|T_{-1}(\cdot)u_0\| + C \int_0^{\cdot} e^{\mu(\cdot - s)} W(\nu h(s)) ds \right\|_h.$$

Então o problema (2.1)-(2.2) tem uma solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Definimos o operador Γ sobre $C_h(X_0)$ como em (2.6). Vamos mostrar que Γ tem um ponto fixo em $AAP(X_0)$. Dividimos a prova em alguns passos.

(i) Primeiro vamos mostrar que Γ está bem-definido. Para $u \in C_h(X_0)$, sabemos que $\Gamma u(\cdot)$ é contínua, pois pela Proposição (1.20) a função $T_{-1}(\cdot)u_0$ é contínua e pelo Lema (1.34) a função $\omega(t) = \displaystyle\int_0^t T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds$ é contínua. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\|\Gamma u(t)\| &\leq \|T_{-1}(t)u_0\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\| \|f(s, u(s))\| ds \\
&\leq Ce^{\mu t}\|u_0\| + C \int_0^t e^{\mu(t-s)} W(\|u(s)\|) ds \\
&\leq C\|u_0\| + C \int_0^t e^{\mu(t-s)} W\left(\left\| \frac{u(s)}{h(s)} h(s) \right\| \right) ds
\end{aligned}$$

E como W é não-decrescente, conseguimos a seguinte estimativa

$$\|\Gamma u(t)\| \leq C\|u_0\| + C \int_0^t e^{\mu(t-s)} W(\|u\|_h h(s)) ds. \tag{2.17}$$

E segue da condição (a) que $\Gamma : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$.

(ii) Agora vamos provar que a função Γ é contínua. De fato, para $\varepsilon > 0$, tome δ como na condição (b). Se $u, v \in C_h(X_0)$ e $\|u - v\|_h \leq \delta$, então, como $h(t) \geq 1$ para todo $t \geq 0$, vemos que

$$\frac{\|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\|}{h(t)} \leq \|\Gamma u(t) - \Gamma v(t)\| \leq C \int_0^t e^{\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \leq \varepsilon,$$

Assim,

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_h \leq \varepsilon$$

Portanto Γ é contínua.

(iii) Nosso próximo passo é mostrar que Γ é completamente contínua. Denotamos por $B_r(Z)$ a bola fechada de centro no 0 e de raio r no espaço Z. Seja $V = \Gamma(B_r(C_h(X_0)))$ e $v = \Gamma(u)$ para $u \in B_r(C_h(X_0))$. Inicialmente, provaremos que $V_b(t) = \{v(t) : v \in V\}$ é um subconjunto relativamente compacto de X_0 para cada $t \in [0, b]$. Pelo Lema (1.39) vemos que

$$\frac{1}{t}\int_0^t T_{-1}(s)f(t-s, u(t-s))ds \in \overline{co}(A),$$

onde $A = \{T_{-1}(s)f(t-s, u(t-s)) : s \in [a, t]\}$, como $u(t-s) = h(t-s)\dfrac{u(t-s)}{h(t-s)}$ e $\|u\|_h \leq r$, logo

$$A \subset K = \{T_{-1}(s)f(\xi, h(\xi)x) : 0 \leq s \leq t;\ 0 \leq \xi \leq t;\ \|x\| \leq r\}$$

assim,

$$\begin{aligned} v(t) &= T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s, u(s))ds \\ &= T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(s)f(t-s, u(t-s))ds \in T_{-1}(t)u_0 + t\overline{co}(K), \end{aligned}$$

onde $co(K)$ é a envoltória convexa de $K = \{T_{-1}(s)f(\xi, h(\xi)x) :\ 0 \leq s \leq t,\ 0 \leq \xi \leq t, \|x\| \leq r\}$. Usando o fato que $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo e a propriedade (c), afirmamos que K é um conjunto relativamente compacto. De fato, dada uma sequência $(\omega_{\tilde{n}}) = (T_{-1}(s_{\tilde{n}})f(\xi_{\tilde{n}}, h(\xi_{\tilde{n}})x_{\tilde{n}}))_{\tilde{n}\in\mathbb{N}}$ em K, vamos mostrar que $(\omega_{\tilde{n}})$ possui uma subsequência convergente em X. Usando a condição (c), sabemos que $\exists (n') \subset (\tilde{n})$, tal que $f(\xi_{n'}, h(\xi_{n'})x_{n'}) \to y$, para algum $y \in X$. E como $s_{n'} \in [0, t]$, logo $\exists (n) \subset (n')$, tal que $s_n \to s$, para algum $s \in [0, t]$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|T_{-1}(s_n)f(\xi_n, h(\xi_n)x_n) - T_{-1}(s)y\| &\leq \|T_{-1}(s_n)(f(\xi_n, h(\xi_n)x_n) - y)\| + \|T_{-1}(s_n)y - T_{-1}(s)y\| \\ &\leq C\|f(\xi_n, h(\xi_n)x_n) - y\| + \|T_{-1}(s_n)y - T_{-1}(s)y\|. \end{aligned}$$

Como $f(\xi_{n'}, h(\xi_{n'})x) \to y$ e $T_{-1}(s_n)y \to T_{-1}(s)y$, pois $T_{-1}(\cdot)y$ é contínua, logo $T_{-1}(s_n)f(\xi_n, h(\xi_n)x_n) \to y \in X$, portanto K é relativamente compacto.

Ademais, $V_b(t) \subseteq T_{-1}(t)u_0 + t\overline{co}(K)$ e pelo Teorema de Mazur (1.4.5) concluímos que $V_b(t)$ é relativamente compacto. Agora provaremos que V_b é uma família equicontínua. Note que

$$\begin{aligned}
v(t+s)-v(t) &= \big(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t)\big)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi \\
&\quad + \int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi - \int_0^t T_{-1}(t-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi \\
&= \big(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t)\big)u_0 + \int_0^t T_{-1}(s+\xi)f(t-\xi,u(t-\xi))d\xi \\
&\quad + \int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi - \int_0^t T_{-1}(\xi)f(t-\xi,u(t-\xi))d\xi \\
&= \big(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t)\big)u_0 + \int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi \\
&\quad + \int_0^t \big(T_{-1}(\xi+s)-T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi,u(t-\xi))d\xi.
\end{aligned}$$

Para cada $\epsilon > 0$, nós podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi \Big\| &\le C\int_t^{t+s} e^{\mu(t+s-\xi)} W\left(\frac{\|u(\xi)\|}{h(\xi)}h(\xi)\right)d\xi \\
&\le C\int_t^{t+s} e^{\mu(t+s-\xi)} W(rh(\xi))d\xi \le \epsilon/2,
\end{aligned}$$

para $s \le \delta_1$. Ademais, pela condição (c) o conjunto $\{f(t-\xi,u(t-\xi)) : 0 \le \xi \le t,$ $u \in B_r(C_h(X_0))\}$ é relativamente compacto e como $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo, pelo Lema (1.22) podemos escolher $\delta_2 > 0$ e $\delta_3 > 0$ tal que $\|\big(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t)\big)u_0\| \le \epsilon/4$, para $s \le \delta_2$ e

$$\|\big(T_{-1}(\xi+s)-T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi,u(t-\xi))\| \le \frac{\epsilon}{4t},$$

para $s \le \delta_3$. Combinando essas estimativas, chegamos que $\|v(t+s)-v(t)\| \le \varepsilon$ para s suficientemente pequeno e independente de $u \in B_r(C_h(X_0))$. Assim, V_b é equicontínuo e pelo Teorema de Arzelá-Ascoli (1.4.4), V_b é relativamente compacto. Finalmente, lembrando que $u \in B_r(C_h(X_0))$ e aplicando a condição (a), de (2.17) temos que

$$\frac{\|v(t)\|}{h(t)} \le \frac{C\|u_0\|}{h(t)} + \frac{C}{h(t)}\int_0^t e^{\mu(t-s)}W(rh(s))ds \to 0,\ t\to\infty,$$

e esta convergência independe de $u \in B_r(C_h(X_0))$. Portanto V satisfaz as condições (c-1) e (c-2) do Lema (1.38) , e isto completa a prova que V é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X_0)$.

(iv) Se $u(\cdot)$ é uma solução da equação $u = \lambda\Gamma(u)$ para algum $0 < \lambda < 1$, então

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\| &= \lambda\|T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds\| \\
&\leq \|T_{-1}(t)u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}W(\|u\|_h h(s))ds \\
&= \frac{\|T_{-1}(t)u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}W(\|u\|_h h(s))ds}{h(t)}h(t) \\
&\leq \beta(\|u\|_h)h(t),
\end{aligned}
$$

logo $\dfrac{\|u(t)\|}{h(t)}\dfrac{1}{\beta(\|u\|_h)} \leq 1$, por conseguinte $\dfrac{\|u\|_h}{\beta(\|u\|_h)} \leq 1$ e, combinando com a condição (d), concluímos que o conjunto $\tilde{K} := \{u : u = \lambda\Gamma(u), \lambda \in (0,1)\}$ é limitado.

(v) Segue dos Lemas (1.14) e (2.1), que $\Gamma(AAP(X_0)) \subseteq AAP(X_0)$, e pelo item (ii) $\Gamma : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$ é contínua, logo $\Gamma^{-1}(\overline{AAP(X_0)})$ é fechado e como $AAP(X_0) \subset \Gamma^{-1}(\overline{AAP(X_0)})$, então $\Gamma : \overline{AAP(X_0)} \to \overline{AAP(X_0)} \subset C_h(X_0)$. Usando as propriedades (i)-(iii), nós temos que esta função é completamente contínua. Pelo item (iv) o conjunto $\tilde{K}$ é limitado e usando a Alternativa de Leray-Schauder (1.4.3), nós mostramos que Γ tem um ponto fixo $u \in \overline{AAP(X_0)}$. Basta mostrar que $u \in AAP(X_0)$, sendo assim, considere $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $AAP(X_0)$ tal que $u_n \to u$ em $(C_h(X_0), \|\cdot\|_h)$. Dado $\varepsilon > 0$ a condição (b) assegura que existe $\delta > 0$ tal que se $\|v - u\|_h \leq \delta$, então:

$$C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \varepsilon, \ \ \forall t \geq 0.$$

Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, se $n \geq n_0$ então $\|u_n - u\|_h \leq \delta$. Logo, $\forall t \geq 0$ e $n \geq n_0$ temos:

$$
\begin{aligned}
\|\Gamma u_n(t) - \Gamma u(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)(f(s,u_n(s)) - f(s,u(s)))\|ds \\
&\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \varepsilon.
\end{aligned}
$$

E isto implica que $\|\Gamma u_n - \Gamma u\|_\infty \leq \varepsilon$, isto é, $\Gamma u_n \to \Gamma u = u$ uniformemente. Portanto $u = \Gamma u \in AAP(X_0)$, pois $(AAP(X_0), \|\cdot\|_\infty)$ é completo, e isto completa a prova.

■

Com condições e argumentos similares ao Teorema (2.10) temos o seguinte resultado para o problema de Cauchy com condições não-locais.

Teorema 2.11 *Seja $g : C_h(X_0) \to X_0$ uma função completamente contínua e limitada. Assuma que $f \in AAP(X_0; X)$ é uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados que satisfaz a hipótese (B) e as seguintes condições:*

(a) Para cada $\nu \geq 0$, $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)} W(\nu h(s))ds = 0$.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_h(X_0)$, $\|v-u\|_h \leq \delta$ implica que

$$C \int_0^t e^{\mu(t-s)} \|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\| ds \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in [0, \infty)$.

(c) Para todos $a, b \in [0, \infty)$, $a \leq b$, e $r > 0$, o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0, \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

(d) $\displaystyle\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(\nu) := \left\| C\|g\|_\infty + \|T_{-1}(\cdot)u_0\| + C \int_0^{\cdot} e^{\mu(\cdot-s)} W(\nu h(s))ds \right\|_h.$$

Então o problema (2.14)-(2.15) tem uma solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Consideramos o operador Γ sobre $C_h(X_0)$, definido por

$$\Gamma u(t) = T_{-1}(u_0 + g(u)) + \int_0^t T_{-1}(t-s) f(s, u(s))ds,\ \forall t \geq 0.$$

Mostraremos que Γ tem um ponto fixo. Como na demonstração do Teorema (2.10), dividiremos a prova em algumas etapas.

(i^*) Da estimativa

$$\|\Gamma u(t)\| \leq C\|u_0 + g(u)\| + C \int_0^t e^{\mu(t-s)} W(\|u\|_h h(s))ds, \tag{2.18}$$

e usando argumentos análogos ao do passo (i) do Teorema (2.10) vemos que Γ está bem-definido.

(ii^*) Afirmamos que Γ é contínua. De fato, dados $\varepsilon > 0$ e $u \in C_h(X_0)$, pela continuidade de g e da condição (b), $\exists \delta > 0$ tal que se $v \in C_h(X_0)$ com $\|u - v\|_h \geq \delta$, então

$$\|g(u) - g(v)\| \geq \frac{\varepsilon}{2C}$$

e

$$C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,v(s))-f(s,u(s))\|ds \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Portanto, como $h(t) \geq 1$ para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{\|\Gamma u(t)-\Gamma v(t)\|}{h(t)} &\leq \|\Gamma u(t)-\Gamma v(t)\| \\ &\leq C\|g(u)-g(v)\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s)-f(s,v(s))\|ds \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\Gamma u - \Gamma v\|_h \leq \varepsilon.$$

Por conseguinte, Γ é contínua.

(iii^*) Com argumentos similares ao item (iii) do Teorema (2.10), mostraremos que Γ é completamente contínuo. Sendo $v = \Gamma u$, com $u \in B_r(C_h(X_0))$ vemos que

$$v(t) \in T_{-1}(t)(g(u)+u_0) + t\overline{co}(K)$$

onde K é como no item (iii) do Teorema (2.10), e portanto relativamente compacto. Assim $V_b(t) \subseteq T_{-1}(t)(u_0 + g(B_r(C_h(X_0)))) + t\overline{co}(K)$, como g é completamente contínua, logo $g(B_r(C_h(X_0)))$ é relativamente compacto e pelo Teorema de Mazur (1.4.5) $\overline{co}(K)$ também é relativamente compacto, por conseguinte, $V_b(t)$ é relativamente compacto. Para mostrar que V_b é equicontínuo, decompomos $v(t+s)-v(t)$ como

$$\begin{aligned}v(t+s)-v(t) &= (T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t))(u_0+g(u)) + \int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi \\ &\quad + \int_0^t \big(T_{-1}(\xi+s)-T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi,u(t-\xi))d\xi.\end{aligned}$$

De modo semelhante ao item (iii) do Teorema (2.10), dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $\delta > 0$ independente de $u \in B_r(C_h(X_0))$, tal que se $s < \delta$ então

$$\begin{aligned}\|(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t))u_0\| &+ \left\|\int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi\right\| \\ &+ \left\|\int_0^t \big(T_{-1}(\xi+s)-T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi,u(t-\xi))d\xi\right\| \leq \frac{3\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Como g é completamente contínua, logo $g(B_r(C_h(X_0)))$ é relativamente compacto, e pelo Lema (1.22), existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t))g(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

para todo $s \in (0, \delta)$, independente de $u \in B_r(C_h(X_0))$.

Com os mesmos argumentos do item (iii) do Teorema (2.10) chegamos que V_b é equicontínuo e pelo Teorema de Arzelá-Ascoli é relativamente compacto. Por conseguinte, V satisfaz a condição (c-1) do Lema (1.38), resta mostrar que satisfaz a condição (c-2), para isso lembramos que $u \in B_r(C_h(X_0))$ e de (2.18) juntamente com a condição (a), temos

$$\frac{\|v(t)\|}{h(t)} \leq \frac{C(\|u_0\| + \|g\|_\infty)}{h(t)} + \frac{C}{h(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)} W(rh(s))ds \to 0,\ t \to \infty,$$

e isto completa a prova que V é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X_0)$.

(iv^*) Como no item (iv) do Teorema (2.10), se $u(\cdot)$ é solução da equação $u = \lambda\Gamma(u)$, para algum $\lambda \in (0,1)$, conseguimos a estimativa $\dfrac{\|u\|_h}{\beta(\|u\|_h)} \leq 1$, e combinando com a condição (d), concluímos que o conjunto $\widetilde{K} := \{u : u = \lambda\Gamma(u), \lambda \in (0,1)\}$ é limitado.

(v^*) Como no item (v) do Teorema (2.10) mostramos que Γ tem um ponto fixo $u \in \overline{AAP(X_0)}$. Para mostrar que $u \in AAP(X_0)$ consideramos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $AAP(X_0)$ tal que $u_n \to u$ em $C_h(X_0)$. Dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de g e pela condição (b), podemos tomar $\delta > 0$ tal que, se $\|v - u\|_h \geq \delta$, então

$$C \int_0^t e^{\mu(t-s)} \|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\| ds \leq \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall t \geq 0, \quad e$$

$$C\|g(v) - g(u)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessas estimativas e com argumentos semelhantes ao do item (v) do Teorema (2.10), chegamos que $\Gamma u_n \to \Gamma u = u$ uniformemente, portanto $u = \Gamma u \in AAP(X_0)$, e isto completa a prova.

$\blacksquare$

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo, consideramos algumas aplicações para nossas técnicas e resultados abstratos. Em nossos exemplos, precisamos de algumas notações sobre espaços de funções com valores em um espaço de Banach E, munido com a norma $\|\cdot\|$. Seja β um número real, tal que $0 < \beta < 1$.

$$C^{\beta}(0,T;E) = \left\{ u : [0,T] \to E; [u]_{C^{\beta}(0,T;E)} = \sup_{0 \le t \le s \le T} \frac{\|u(t) - u(s)\|}{|t-s|^{\beta}} < +\infty \right\}$$

com $\|u\|_{C^{\beta}(0,T;E)} = \|u\|_{C(0,T;E)} + [u]_{C^{\beta}(0,T;E)}$,

$$h^{\beta}(0,T;E) = \left\{ u : [0,T] \to E; [u]_{C^{\beta}(0,T;E)} = \lim_{\delta \to 0} \sup_{0<|t-s|\le \delta,\ t,s \in [0,T]} \frac{\|u(t) - u(s)\|}{|t-s|^{\beta}} = 0 \right\},$$

com $\|u\|_{h^{\beta}(0,T;E)} = \|u\|_{C^{\beta}(0,T;E)}$,

$$C^{1+\beta}(0,T;E) = \left\{ u : [0,T] \to E; u' \in C^{\beta}(0,T;E) \right\},$$

com $\|u\|_{C^{1+\beta}(0,T;E)} = \|u\|_{C^{1}(0,T;E)} + [u']_{C^{\beta}(0,T;E)}$.

Observação 3.1 Os elementos de $h^{\beta}(0,T;E)$ são chamados pequenas funções de Hölder. Este é um espaço de funções muito importante. De fato, pode-se provar que ele é o fecho de $C^{1}(0,T;E)$ em $C^{\beta}(0,T;E)$ (ver [31, 34]).

Se $X(0,T;E)$ denota um dos espaços que acabamos de introduzir, então consideramos o conjunto $X_0(0,T;E) = \{u \in X(0,T;E) : u(0) = 0\}$.

Uma equação diferencial semilinear abstrata especial

Nesta subseção estudaremos a existência de soluções brandas assintoticamente quase periódicas para a seguinte equação diferencial abstrata

$$u'(t) = Au(t) + a(t)F(u(t)) + Bz(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u_0 \in \overline{D(A)} =: X_0. \tag{3.1}$$

onde A é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo negativo μ, cujo domínio $D(A)$ não é necessariamente denso sobre um espaço de Banach X, $z(t) \in \mathbb{R}^m$, $B : \mathbb{R}^m \to X$ é um operador linear limitado, $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e $F : X_0 \to X$ são funções apropriadas.

Pelo Corolário 2.6 temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2 *Assuma que $a \in AP(\mathbb{R})$, $z \in C_0([0, \infty); \mathbb{R}^n)$ e $F : X_0 \to X$ é uma função contínua limitada, tal que, existe uma constante positiva L_F com a propriedade, $\|F(w) - F(v)\| \leq L_F\|w - v\|$, para todos $w, v \in X_0$. Se $L_F \leq \dfrac{|\mu|}{C\|a\|_\infty}$, então (3.1) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.*

Demonstração. Considere $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$, definida por

$$f(t, x) = a(t)F(x) + Bz(t).$$

Nosso primeiro passo é mostrar que $f \in AAP(X_0; X)$. Como $z \in C_0([0, \infty), \mathbb{R}^m)$ e B é contínuo, logo $Bz(\cdot) \in C_0([0, \infty); X)$. Como F é limitada, existe $M > 0$ tal que $\|F(x)\| < M$ para todo $x \in X_0$, e por $a \in AP(\mathbb{R})$, dado $\varepsilon > 0$ existe $l(\varepsilon) > 0$, tal que todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ de comprimento $l(\varepsilon)$ contém um τ com a propriedade $\|a(t + \tau) - a(t)\| < \dfrac{\varepsilon}{M}$ para todo t, assim

$$\|a(t + \tau)F(x) - a(t)F(x)\| = \|a(t + \tau) - a(t)\|\|F(x)\| < \varepsilon,$$

para todo t e uniformemente em x. Portanto, $(t, x) \mapsto a(t)F(x)$ é $AP(X_0; X)$. O próximo passo é mostrar que f satisfaz a condição de Lipschitz 2.16 e portanto é uniformemente contínua em t. Para todos $x, y \in X_0$ e $t \geq 0$, temos

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| = \|a(t)\|\|F(x) - F(y)\| \leq \|a\|_\infty L_F\|x - y\|.$$

Assim pelo Corolário 2.6 a Proposição é verdadeira. ■

Exemplo 3.3 Considere o conjunto $\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ e $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{B}$. Estudaremos a existência e unicidade de soluções brandas assintoticamente quase periódicas para a equação do calor não-homogênea:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x) - u(t,x) + \nu\big(\sin t + \sin(\sqrt{2t})\big)u(t,x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e^{-\lambda t}, \ t > 0, \ x \in \mathbb{B}, \\ u(t,x) = 0, \ x \in \mathbb{S}^{n-1}, \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{B}, \end{cases} \tag{3.2}$$

onde $\lambda > 0$ e $\nu \in \mathbb{R}$. Para tratar o sistema (3.2), escolhemos o espaço $X = C(\overline{\mathbb{B}};\mathbb{R})$ e o operador A definido por $Av = \Delta v - v$ com domínio

$$D(A) = \{v \in X : v = 0 \text{ sobre } \mathbb{S}^{n-1} \text{ e } \Delta v \in X\}.$$

Neste caso, $X_0 = C_0(\overline{\mathbb{B}};\mathbb{R}) \neq X$ e portanto A é um operador de Hille-Yosida de tipo -1 com domínio não denso (cf. [31]). É claro que (3.2) pode ser reescrito como um sistema abstrato da forma (3.1), onde $u(t)(x) = u(t,x)$, $a(t) = \cos t + \cos\sqrt{2t}$, $z(t) = \big(e^{-\lambda t}, \ldots, e^{-\lambda t}\big)$, $t \in [0,\infty)$, $F(u) = \nu u$ para todos $u \in X_0$ e $B : \mathbb{R}^n \to X$ é definido por $B(y)(x) = \langle y, x\rangle = y_1x_1 + \cdots + y_nx_n$. Então, se $|\nu|$ é pequeno suficiente, pela Proposição 3.2 o sistema (3.2) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Exemplo 3.4 Seja $a_i, r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Consideramos o problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) = -u_x(t,x) - u(t,x) + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \nu a_k e^{ir_k t}\right) u(t,x) + x \cdot e^{-\lambda t}, \ t > 0, \ x \in (0,1), \\ u(t,0) = u_x(t,0) = 0, \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in (0,1), \end{cases} \tag{3.3}$$

onde $\lambda > 0$. Também consideraremos o problema (3.3) no espaço $X = C_0^{\beta}(0,1)$. O operador A é dado por $Av = -v' - v$ definido sobre o conjunto

$$D(A) = \{v \in C^{1+\beta}(0,1) : v(0) = v'(0) = 0\}.$$

Logo, temos $X_0 = h_0^{\beta}(0,1) \neq X$ e portanto A é um operador de Hille-Yosida de tipo -1 com domínio não denso (cf. [31]). Para $y \in \mathbb{R}^n$, definimos $B(y)(x) = x\|y\|$, $x \in (0,1)$.

Então, podemos reescrever o problema (3.3) na forma abstrata (3.1) com $a(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ir_k t}$, $z(t) = e^{-\lambda t} e_1$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $t \geq 0$, e F como no Exemplo 3.3. Segue do Exemplo 1.3 que a função a é quase periódica. Assim, se $|\nu|$ é suficientemente pequeno, pela Proposição 3.2 o problema (3.3) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Observação 3.5 No exemplo anterior $C_0^{\beta}(0,1)$ não pode ser substituído por $C^{\beta}(0,1)$ na escolha de X, porque as estimativas de Hille-Yosida não são verdadeiras neste caso (Ver [31, Proposição 14.3]).

O próximo resultado é consequência do Teorema (2.10).

Proposição 3.6 *Assuma que $a \in AP(\mathbb{R})$, $z \in C_0([0,\infty); \mathbb{R}^n)$ e $F : X_0 \to X$ é uma função completamente contínua, tal que, existe uma função contínua não-decrescente $\tilde{W} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ com a propriedade $\|F(x)\| \leq \tilde{W}(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$. Além disso, suponha que as seguintes condições são verdadeiras:*

$(a)^*$ Para cada $\nu \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{h(t)} \displaystyle\int_0^t e^{\mu(t-s)} \left(\|a\|_\infty \tilde{W}(\nu h(s)) + \|B\| \|z\|_\infty \right) ds = 0$.

$(b)^*$ Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_h(X_0)$, $\|v - u\|_h \leq \delta$ implica que

$$C\|a\|_\infty \int_0^t e^{\mu(t-s)} \|F(u(s)) - F(v(s))\| ds \leq \varepsilon,$$

para todo $t \in [0,\infty)$.

$(c)^*$ $\liminf_{\xi\to\infty} \dfrac{\xi}{\beta^*(\xi)} > 1$, onde

$$\beta^*(\nu) := \left\| \|T_{-1}(\cdot)u_0\| + C \int_0^{\cdot} e^{\mu(\cdot-s)} \left(\|a\|_\infty \tilde{W}(\nu h(s)) + \|B\| \|z\|_\infty \right) ds \right\|_h.$$

Então o problema (3.1) tem uma solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração. Como $z \in C_0([0,\infty); \mathbb{R}^n)$ e B é contínuo, logo $Bz(\cdot) \in C_0([0,\infty); X)$. Ademais, como F é contínua, dado $K \subset X_0$ compacto existe $M > 0$ tal que $\|F(x)\| \leq M$, para todo $x \in K$, portanto, dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $l(\varepsilon) > 0$, tal que todo intervalo I de comprimento $l(\varepsilon)$ existe $\tau \in I$, com a propriedade:

$$\|a(t+\tau) - a(t) < \frac{\varepsilon}{M}, \ \forall t \geq 0.$$

Portanto,

$$\|a(t+\tau)F(x) - a(t)F(x)\| \leq \|a(t+\tau) - a(t)\|\|F(x)\| < \varepsilon.$$

Sendo $W : [0, \infty) \to [0, \infty)$, definida por $W(t) = \|a\|_\infty \widetilde{W}(t) + \|B\|\|z\|_\infty$, então W é contínua e não-decrescente, além disso,

$$\|f(t,x) \leq \|a\|_\infty \|F(x)\| + \|B\|\|z\|_\infty \leq \|a\|_\infty \widetilde{W}(\|x\|) + \|B\|\|z\|_\infty = W(\|x\|).$$

As condições (a), (b) e (d) do Teorema 2.10 seguem imediatamente das condições $(a)^*$, $(b)^*$ e $(d)^*$, respectivamente. Ademais, pelos fatos de F ser completamente contínua, do conjunto $\{h(s)x : c \leq s \leq d; \|x\| < r\}$ ser limitado para todos $c, d \in [0, \infty)$, $c \leq d$ e $r > 0$, e $a(\cdot)$, $Bz(\cdot)$ serem contínuas, logo

$$\{f(s, h(s)x) = a(s)F(h(s)x) + Bz(s) : c \leq s \leq d, x \in X_0, \|x\| < r\}$$

é relativamente compacto em X, ou seja, a condição (c) do Teorema 2.10 também é verificada. Isto completa a demonstração.

■

Exemplo 3.7 Estudamos a existência e unicidade de soluções brandas assintoticamente quase periódicas para o problema:

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) - u(t,x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ir_k t} \left(\int_0^x u(t,s)ds \right)^\alpha + x \cdot e^{-\lambda t}, \ t > 0, \ x \in (0,\pi), \\ u(t,x) = 0, \ x \in (0,\pi), \ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $\alpha \in (0,1)$, $\lambda > 0$ e $a_k, r_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$. Para tratar do sistema (3.4), nós escolhemos o espaço $X = C(0,\pi)$ e o operador A definido por $Av = v'' - v$ com domínio

$$D(A) = \{v \in X : v'' \in X, \ v(0) = v(\pi) = 0\}.$$

Neste caso, $X_0 = C_0(0,1) \neq X$ e portanto A é um operador de Hille-Yosida de tipo -1 com domínio não-denso (cf. [31]). Podemos reescrever (3.4) na forma (3.1), onde u, a, z e B são como no Exemplo 3.4, e $F(w)(x) = \left(\int_0^x w(s)ds\right)^\alpha$, $x \in (0,1)$. Então, tomado $h(s) = e^s$, $s \geq 0$, segue da Proposição 3.6 que o problema (3.2) tem uma solução branda assintoticamente quase periódica.

Equações diferenciais parciais

Nesta subseção usaremos os resultados do Capítulo 2 para garantir a existência de soluções brandas assitoticamente quase periódicas para equações diferenciais parciais semilineares com condições iniciais e de contorno.

Exemplo 3.8 Estamos essencialmente interessados em estudar a existência de soluções assintoticamente quase periódicas para a seguinte equação diferencial parcial com condições de contorno.

$$\begin{cases} u_t(t,x) = u_{xx}(t,x) + \mu u(t,x) + \left(\cos t + \cos(\sqrt{2}t)\right) u(t,x) + \left(\dfrac{1}{1+t}\right) u(t,x),\ t \geq 0,\ x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $\mu < 0$. Nós estudamos os sistemas (3.5) no espaço $X = C([0,\pi])$. Seja A o operador definido sobre X por $Au = u'' + \mu u$, com domínio

$$D(A) = \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Uma vez que $\overline{D(A)} = \{u \in X : u(0) = u(\pi) = 0\} = C_0([0,\pi]) \neq X$, temos que A é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo μ com domínio não-denso (cf. [31]). Portanto, o problema (3.5) pode ser expressado com um sistema abstrato da forma (2.1)-(2.2) com $u(t)(s) = u(t,s)$ e $f(t,\phi)(s) = \left(\cos t + \cos(\sqrt{2}t) + \dfrac{1}{1+t}\right)\phi(s)$, para $t \geq 0$, $s \in [0,\pi]$ e $\phi \in C_0([0,\pi])$. Portanto, se $3C > -\mu$, onde C é a constante dado no Lema 1.34, então segue do Corolário (2.6) que o problema (3.5) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

No próximo exemplo, estudaremos o operador calor que será considerado em função do tempo e do espaço.

Exemplo 3.9 Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Sejam

$a_i, r_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Considere o problema

$$\begin{cases} u_t(t,x) = (1/2)\Delta u(t,x) + (\mu/2)u(t,x) + \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k e^{ir_k t}\right) u(t,x) + \left(\dfrac{1}{1+t}\right) u(t,x), \\ \qquad\qquad t \geq 0,\ x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u_t(t,0) = 0,\ t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x),\ x \in (0,1), \end{cases} \tag{3.6}$$

onde $\mu < 0$. Neste problema escolhemos o espaço $X = C_0^{\beta}(0,1; C(\overline{\Omega}))$ e A o operador dado por $Av = \Delta v - v' + \mu v$ (portanto $Av(t,x) = \Delta v(t,x) - v_t(t,x) + \mu v(t,x)$) com domínio

$$D(A) = \{v \in C^{\beta}(0,1; D_{\Delta}) \cap C^{1+\beta}(0,1; C(\overline{\Omega})) : v(0) = v'(0) = 0\},$$

onde D_{Δ} é o conjunto $\{v \in C(\overline{\Omega}) : v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ \Delta v \in C(\overline{\Omega})\}$. Como $X_0 = h_0^{\beta}(0,1; C_0(\overline{\Omega})) \neq X$, temos que A é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo μ com domínio não-denso (cf. [31]). Podemos reescrever o problema (3.6) na forma abstrata (2.1)-(2.2) com $f(t,\phi)(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2a_k e^{ir_k t} + \dfrac{2}{1+t}\right)\phi(x)$, com $t \geq 0$ e $x \in (0,1)$. Portanto, se $|\mu|$ é suficientemente pequeno, segue do Corolário 2.6 que o problema (3.6) tem uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Observação 3.10 Como no Exemplo 3.4, no exemplo anterior $C_0^{\beta}(0,1; C(\overline{\Omega}))$ não pode ser substituído por $C^{\beta}(0,1; C(\overline{\Omega}))$ na escolha de X, porque a estimativa de Hille-Yosida não é verdadeira neste caso (Ver [31]).

Referências Bibliográficas

[1] R. P. Agarwal ; B. de Andrade ; C. Cuevas . *On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations.* Advances in Difference Equations, v. 2010, p. 1-25, 2010.

[2] S. Aizicovici, M. McKibben, *Existence results for a class of abstract nonlocal Cauchy problems*, Nonlinear Anal. TMA, **39** (2000), 649-668.

[3] B. Amir, L. Maniar, *Composition of pseudo-almost periodic functions and Cauchy problem with operator of non dense domain*, Ann. Math. Blaise Pascal, **6** (1) (1999), 1-11.

[4] B. de Andrade, ; C. Cuevas, *S-asymptotically omega-periodic and asymptotically ω-periodic solutions to semilinear Cauchy problems with non dense domain.* Nonlinear Analysis, v. 72, p. 3190-3208, 2010.

[5] B. de Andrade, C. Cuevas, *Almost automorphic and pseudo almost automorphic solutions to semilinear evolution equations with non dense domain*, Journal of Inequelities and Applications, **2009** (2009), Article ID 298207, 8 pages, doi 10.1155/2009/298207.

[6] B. de Andrade ; C. Cuevas . *Compact almost automorphic solutions to semilinear Cauchy problems with nondense domain.* Applied Mathematics and Computation, v. 215, p. 2843-2849, 2009.

[7] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl., **162** (1991), 494-505.

[8] C. Corduneanu, *Almost periodic oscillations and waves.* Springer, New York, 2009. viii+308 pp. ISBN: 978-0-387-09818-0 (Reviewer: Vladimir Sh. Burd)

[9] C. Cuevas, H. Henríquez, *Solutions of second order abstract retarded functional differential equations on the line*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, To appear.

[10] C. Cuevas; M. Pinto, *Existence and uniqueness of pseudo-almost periodic solutions of semilinear Cauchy problems with non dense domain.* Nonlinear Anal. **45** (1) (2001), 73–83.

[11] K. Deng, *Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions*, J. Math. Anal. Appl., **179** (1993), 630-637.

[12] Engel, Klaus-Jochen; Nagel, Rainer, A short course on operator semigroups. Universitext. Springer, New York, 2006. x+247 pp. ISBN: 978-0387-31341-2; 0-387-31341-9 (Reviewer: Jacek Banasiak)

[13] K. J. Engel, R. Nagel, One-parameter semigroup for linear evolution equations, in: Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2001, p. 195.

[14] A. M. Fink, Almost Periodic Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics **377**, Springer-Verlag.

[15] M. Frechet, *Les fonctions asymptotiquement presque-periodiques continues*, C. R. Acad. Sci. Paris, **213** (1941), 520-522.

[16] G. A. Goldstein, Semigroup of operators and applications, Oxford Evolution Press, 1985.

[17] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[18] R. C. Grimmer, *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations*, SIAM J. Appl. Math. **17** (1969), 109-115.

[19] T. Kato, *Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semigroup.* Proc. Japan Ac. **35** (1959), 467-468.

[20] Z.C. Liang, *Asymptotically periodic solutions of a class of second order nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (4) (1987), 693- 699.

[21] Lima, Elon Lages Espaços métricos. (Portuguese) [Metric spaces] Projeto Euclides [Euclid Project], 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1977. viii+299 pp, 54-01

[22] Liu, James H.; N'Guérékata, Gaston M.; Minh, Nguyen Van Topics on stability and periodicity in abstract differential equations. Series on Concrete and Applicable Mathematics, 6. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008. x+208 pp. ISBN: 978-981-281-823-2; 981-281-823-5 (Reviewer: Toka Diagana)

[23] L. Maniar, *Equations différentielles à retard par la méthode d'extrapolation*, Portugaliae Mathematica, **54** (1) (1997), 101-113.

[24] L. Maniar, *Extrapolation Theory and Some Applications*, Cubo **2** (2000), 287-295.

[25] R. H. Martin, Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces, Jonh Wiley & Sons, New York, 1942.

[26] G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, *Existence of the mild solutions for some fractional differential equations with nonlocal conditions*, Semigroup Forum, **79** (2) (2009), 315-322..

[27] R. Nagel, *Sobolev spaces and Semigroup*, Semesterbericht Funktionalanalysis Tübinger, (Sommersemester 1983), 1-19.

[28] R. Nagel, E. Sinestrari, *Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yosida operators*, in "Functional Analysis"(ed. K. D. Bierstedt, A. Pietsch, W. M. Ruess and D. Vogt), Lectures Notes Pure Appl. Math. **150**, Marcel Dekker (1994), 51-70.

[29] Pazy, A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York, 1983. viii+279 pp. ISBN: 0-387-90845-5 (Reviewer: H. O. Fattorini)

[30] G. Da Prato; P. Grisvard, *On extrapolation spaces.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **72** (8) (1982), no. 6, 330–332.

[31] G. Da Prato; E. Sinestrari, *Differential operators with non dense domain.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **14** (4) (1989), no. 2, 285-344.

[32] A. Rhandi, *Extrapolation methods to solve non-autonomous retarded partial differential equations*, Studia Mathematica **126** (3), 1997.

[33] E. Sinestrari, *Semilinear differential and integrodifferential equations with Hille-Yosida operators*, Diff. Int. Equations, **23** (2010), 1-30.

[34] E. Sinestrari, *Continuous interpolation spaces and spatial regularity in nonlinear Volterra integrodifferential equations*, J. Integral Equations, **5** (1983), 287-308.

[35] W.R. Utz, P.Waltman, *Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 597- 601.

[36] S. Zaidman, Almost-Periodic Functions in Abstract Spaces, Res. Notes in Math. **126**,Pitman, Boston, MA, 1985.