UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

COEFICIENTE DE FUJITA PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS NÃO LINEARES EM DOMÍNIOS EXTERIORES COM A CONDIÇÃO DE NEUMANN NA FRONTEIRA

RENATA DE FARIAS LIMEIRA

RECIFE - PE 2012

COEFICIENTE DE FUJITA PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS NÃO LINEARES EM DOMÍNIOS EXTERIORES COM A CONDIÇÃO DE NEUMANN NA FRONTEIRA

RENATA DE FARIAS LIMEIRA

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. **MIGUEL LOAYZA**

RECIFE - PE 2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Limeira, Renata de Farias
Coeficiente de Fujita para problemas parabólicos não lineares em domínios exteriores com a condição de Neumann na fronteira / Renata de Farias Limeira. - Recife: O Autor, 2012.
64 folhas

Orientador: Miguel Loayza.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Análise (Matemática). 2. Equações diferenciais parciais. I. Loayza, Miguel (orientador). II. Título.

515 CDD (23. ed.) MEI2012 – 087

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____________________________________
Miguel Fidencio Loayza Lozano, *UFPE*
Orientador

Marcos N. Rabelo
____
Marcos Napoleão Rabelo, *UFPE*

____
Pablo Gustavo Albuquerque Braz e Silva, *UFPE*

____
Cícero Lopes Frota, *UEM*

Fágner Dias Araruna
____
Fágner Dias Araruna, *UFPB*

COEFICIENTE DE FUJITA PARA PROBLEMAS PARABÓLICOS NÃO LINEARES EM DOMÍNIOS EXTERIORES COM A CONDIÇÃO DE NEUMANN NA FRONTEIRA

Por
Renata de Farias Limeira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Maio – 2012

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sua graça e amor sem par, por fazer tanto mais quanto esperamos e almejamos.

A minha família que me apoia em todos os meus projetos, em especial a minha querida Nanana que continuará viva em minha memória.

A Adecarlos Carvalho cuja simples companhia faz os meus dias mais felizes.

A meu orientador Professor Dr. Miguel Loayza que conduzindo-me desde o mestrado tem sido um dos grandes responsáveis pela minha formação.

Aos demais professores do DMAT-UFPE Hildeberto Cabral, Francisco Brito, Henrique Araujo, Aron Simis, Ramon Mendonça, Eduardo Shirlippe, Lucas Catão, Manoel Lemos e Fernando Cardoso que foram meus professores no mestrado e doutorado.

Às funcionaŕias do DMAT-UFPE Cláudia, Fátima e Tânia por toda a ajuda.

Aos colegas da UPE em Nazaré da Mata pelo apoio.

Aos colegas e amigos Abiel, Alejandro, Allyson, André Ventura, André Vinicius, Bárbara, Bruno, Bruna, Chirleanny, Clessius, Cleice, Crislene, Danila, Denize, Érica, Fábio Santos, Felipe Dantas, Gersonilo, Gigi, Isabela, Ísis, Ives, Joedson, Joilson, José Francisco, Jussara, Lucas Resende, Kadidja, Marcelo Fernandes, Marcelo Pedro, Nathália, Paulo Roberto, Dona Sônia, Thamires, Tarciana, Willberclay e Zaqueu por toda convivência e momentos bons.

Ao CNPq e à Capes pelo suporte financeiro.

RESUMO

Obtemos uma estimativa para a função de Green associada ao problema de valores iniciais e de fronteira associado à equação do calor em domínios com fronteira Lipschitz compacta e condição de Neumann homogênea na fronteira. Esta estimativa viabiliza o estudo de dois problemas parabólicos de valor inicial em domínios exteriores com a condição de Neumann homogênea na fronteira. O primeiro deles consiste de um sistema acoplado e o segundo trata-se da equação do calor não linear com não linearidade não local no tempo. Estabelecemos a existência de soluções locais, globais e de soluções não globais para estes problemas, bem como determinamos o expoente crítico de Fujita para ambos.

Palavras-chave: Função de Green, soluções globais, soluções não globais, expoente crítico, equação do calor, condição de Neumann, domínios exteriores.

ABSTRACT

We obtain an estimate for the Green function associated with the initial-boundary value problem associated to the heat equation on domains with compact Lipschitz boundary with homogeneous Neumann boundary values. This estimate alows the study of two initial value problems in exterior domains with homogeneous Neumann boundary values. The first problem is a coupled system and the second one is the nonlinear heat equation with nonlocal nonlinearity in time. We stablish the existence of local solutions, as well as the existence of global and nonglobal solutions for these problems and determine the critical Fujita exponent for both problems.

Keywords: Green function, global solutions, nonglobal solutions, critical exponent, heat equation, Neumann condition, exterior domains.

SUMÁRIO

Introdução

As equações parabólicas não lineares, bem como sistemas de tais equações modelam diversos fenômenos, como por exemplo os que envolvem processos difusivos. Também encontramos aplicações na Teoria da combustão, em Biologia e em Medicina. Sugerimos as referências [4, 10, 5, 2, 14] para detalhes.

Estudos quanto à existência de soluções para tais problemas e quanto ao comportamento destas são bastante conhecidos. É natural investigar condições sob as quais uma solução é global, isto é, está definida para todo $t \geq 0$. A existência de tais soluções está muitas vezes associada ao dado inicial, à geometria do domínio relativo à variável espacial, etc. Indicamos as referências [1, 3, 11, 20], as quais contêm uma série de resultados a esse respeito.

Em 1966, Fujita [15] considerou o seguinte problema de Cauchy parábolico semilinear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1}$$

Ele obteve o seguinte resultado:

(a) Se $1 < p < 1 + 2/N$, então a única solução global de (1) é a solução nula.

(b) Se $p > 1 + 2/N$, então existem soluções globais para o problema (1) para condições iniciais suficientemente pequenas.

O valor $pc(N) = 1 + 2/N$ é conhecido como expoente crítico ou coeficiente de Fujita e foi provado depois que para este valor o problema (1) não tem solucões globais não negativas (Veja [18, 21, 24]). O trabalho de Fujita [15] despertou o interesse de muitos pesquisadores e inúmeras extensões do problema (1) têm sido consideradas. Em vez de u^p, outros termos não lineares são introduzidos, o espaço $\mathbb{R}^N$ dá lugar a outros domínios, limitados e ilimitados, e condições de contorno são adicionadas. Para cada extensão, tem-se buscado determinar um expoente crítico que desempenhe papel semelhante ao de $pc(N)$ no problema (1). Recomendamos conferir [20, 11], para resultados nessa direção.

Neste trabalho, estamos interessados no estudo de dois problemas de valor inicial com condição de Neumann homogênea na fronteira. O primeiro deles consiste de um sistema acoplado sobre um domínio exterior, a saber

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^p, \text{ em } D \times (0,\infty) \\ v_t - \Delta v = u^q, \text{ em } D \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ em } \partial D \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } D \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \text{ em } D, \end{cases} \tag{2}$$

com $p, q > 1$, $u_0, v_0 \in C_0(D)$. O segundo problema trata-se da equação do calor não linear com não linearidade não local no tempo, também em domínios exteriores

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(s) ds, \ x \in D \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \ x \in \partial D \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in D, \end{cases} \tag{3}$$

com $0 < \gamma < 1$, $p > 1$, $u_0 \in C_0(D)$.

Sobre a existência de soluções locais para o problema (2) obtivemos o seguinte resultado:

Teorema 1 *Sejam $p, q > 1$. Para cada $u_0, v_0 \in C_0(D)$, existe uma solução $(u, v) \in C(D \times (0,T)) \times C(D \times (0,T))$ do problema* (2.4)*, para algum $T > 0$.*

Com relação ao coeficiente de Fujita para o problema (2), temos o seguinte Teorema:

Teorema 2. *Sejam $p, q > 1$, com $pq > 1$, $u_0, v_0 \in C_0(D)$, $u_0, v_0 \geq 0$ e D um domínio exterior com fronteira Lipschitz em $\mathbb{R}^N$.*

- (i) *Seja $N/2 > (\gamma+1)/(pq-1)$, com $\gamma = \max\{p, q\}$ e $N \geq 3$. Suponha que D tem fronteira suave, $u_0 \in L^r(D) \cap C^2(D)$ e $v_0 \in L^s(D) \cap C^2(D)$, com $r = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}$, $s = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}$. Então existe $\delta > 0$ tal que, se $\|u_0\|_r + \|v_0\|_s < \delta$, então* (2) *tem solução global.*

- (ii) *Se $N/2 \leq (\gamma+1)/(pq-1)$, com $\gamma = \max\{p, q\}$, então a única solução global não negativa do problema* (2) *é a trivial.*

O problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^p, \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ v_t - \Delta v = u^q, \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{4}$$

com $p, q > 1$ e $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ funções limitadas, foi considerado por Escobedo e Herrero [13]. O Teorema 2 é semelhante ao resultado obtido por eles para o problema (4). Salientamos que os únicos espaços de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^N$ para os quais as condições iniciais pequenas geram soluções globais são $L^r(\mathbb{R}^N)$ e $L^s(\mathbb{R}^N)$, com $r = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}$ e $s = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}$. Isto pode ser mostrado por meio de um argumento de *scaling* como está descrito a seguir. Se $(u(x,t), v(x,t))$ é uma solução do problema (4) sobre $\mathbb{R}^N$ com condição inicial $(u_0(x), v_0(x))$, então, para cada $\lambda > 0$, $\left(\lambda^{2\frac{p+1}{pq-1}} u(\lambda x, \lambda^2 t), \lambda^{2\frac{q+1}{pq-1}} v(\lambda x, \lambda^2 t)\right)$ também é solução do problema (4) com condição inicial $\left(\lambda^{2\frac{p+1}{pq-1}} u_0(\lambda x), \lambda^{2\frac{q+1}{pq-1}} v_0(\lambda x)\right)$. Para $r, s > 1$, temos

$$\left\| \lambda^{2\frac{p+1}{pq-1}} u_0(\lambda \cdot) \right\|_r = \lambda^{2\frac{p+1}{pq-1} - \frac{N}{r}} \left\| u_0 \right\|_r \tag{5}$$

e

$$\left\| \lambda^{2\frac{q+1}{pq-1}} v_0(\lambda \cdot) \right\|_s = \lambda^{2\frac{q+1}{pq-1} - \frac{N}{s}} \left\| v_0 \right\|_s . \tag{6}$$

Sabemos que para condições iniciais $u_0 = \kappa\varphi$, $v_0 = \mu\psi$, com $\kappa, \mu > 0$ suficientemente grandes, a correspondente solução do problema (4) não é global. Desse modo, se para alguma condição inicial em $L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$, com $r \neq \frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}$ e $s \neq \frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}$, existisse alguma solução global do problema (4), então por (5) e (6), qualquer $(u_0, v_0) \in L^r(\mathbb{R}^N) \times L^s(\mathbb{R}^N)$ geraria uma solução global. Assim, $L^r(\mathbb{R}^N)$ e $L^s(\mathbb{R}^N)$, com $r = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}$ e $s = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}$ são os únicos espaços em que condições iniciais pequenas geram soluções globais. Por esta razão é que, para o problema (2), procuramos soluções globais para condições iniciais em tais espaços.

Quando $p = q$ e $u_0 = v_0$ o problema (2) coincide com o seguinte problema considerado por Levine e Zhang [19]

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, \text{ em } D \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ em } \partial D \times (0,\infty) \\ u(x,t) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } D, \end{cases} \tag{7}$$

com $p > 1$. Eles mostraram que o expoente crítico para (7) é o mesmo da equação (1). Bandle e Levine [3] já haviam estudado o problema (7) com a condição de Dirichlet em lugar da condição de Neumann e tinham concluído o mesmo.

Para a equação do calor com a condição de Neumann na fronteira em domínios exteriores, encontramos vários trabalhos que tratam do comportamento assintótico de soluções, mas não temos conhecimento de muitos resultados a respeito de existência de soluções globais. Podemos citar uns poucos como [23, 25]. O primeiro destes considera a equação (7) com a condição de Robin na fronteira e o segundo trata do problema (7) com condição de Neumann não homogênea na fronteira. Contudo, o método que utilizamos para provar a existência de soluções globais para o problema (2) não é usado em nenhuma das referências que conhecemos. O ponto chave de nosso argumento é uma estimativa que obtivemos, a qual envolve a função de Green associada ao problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in D \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,t) \in \partial D \times \in (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \end{cases} \tag{8}$$

Esta estimativa é análoga a uma desigualdade bastante usual satisfeita pelo núcleo do calor e permite que obtenhamos resultados de existência global em espaços especiais, usando argumento de ponto fixo. A estimativa de que falamos é conteúdo do teorema a seguir.

Teorema 3. *Sejam* $1 \leq p \leq r \leq \infty$ e $N \neq 2$. *Se* $G(x,t;y,s)$ *é a função de Green associada à equação do calor linear com a condição de Neumann na fronteira, então existe uma constante* $C = C(D,p,r) > 0$ *tal que*

$$\left\| \int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_{L^r(D)} \leq C(t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \|\varphi\|_{L^p(D)}, \tag{9}$$

para cada $\varphi \in L^p(D)$ *e para quaisquer* $0 \leq s < t$.

Esta estimativa é também determinante para estabelecermos a existência de soluções globais para o problema (3).

A seguir apresentamos os resultados que obtivemos para este problema. Com relação à existência de soluções locais temos o seguinte resultado:

Teorema 5. *Para cada* $u_0 \in C_0(D) \cap C^2(D)$ *e* $r \geq 1$, *o problema* (3.1) *admite pelo menos* *uma solução* $u \in C([0,T), C_0(D))$. *Além disso, se* $u_0 \in L^r(D)$ *então* $u \in C([0,T), L^r(D))$.

Determinamos o coeficiente de Fujita para o problema (3). Este é o teor do seguinte Teorema:

Teorema 4. *Sejam* $p > 1$, $u_0 \in C_0(D)$, $u_0 \geq 0$ *e* D *um domínio exterior com fronteira Lipschitz em* $\mathbb{R}^N$.

(i) *Sejam* $N \geq 3$ *e* $p_{sc} := \frac{N(p-1)}{4-2\gamma}$ *e suponha que* D *tem fronteira suave. Se* $u_0 \in L^{p_{sc}}(D) \cap C^2(D)$,

$$p > \max\left\{\frac{1}{\gamma}, p^*\right\}, \text{ com } p^* := 1 + \frac{4-2\gamma}{(N-2+2\gamma)^+} \tag{10}$$

e $\|u_0\|_{L^{p_{sc}}}$ *é suficientemente pequeno, então existe uma solução global* $u \in C((0,\infty), L^{p_{sc}}(D))$ *do problema* (3).

(ii) *Seja* $u_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$ *tal que* $u_0 \geq 0$ *e* u_0 *não é identicamente nula. Se*

$$p \leq p^* \text{ ou } p < \frac{1}{\gamma}, \tag{11}$$

então a única solução global não negativa de (3) *é a trivial.*

Obtivemos condições necessárias para a existência de soluções globais e de soluções locais para o problema (3), como está descrito nos Teoremas 6 e 7 a seguir.

Teorema 6. *Seja* $u_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$, *com* $u_0 \geq 0$ *e seja* $p > 1$. *Se* u *é uma solução global do problema* (3) *então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(u_0(x)|x|^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}\right) \leq C.$$

Teorema 7. *Sejam* $u_0 \in C(D) \cap L^\infty(D) \cap L^2(D)$, $u_0 \geq 0$ *e* $p > 1$. *Se* u *é uma solução local para o problema* (3) *sobre* $[0,T]$, *com* $0 < T < \infty$, *então*

$$\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) \leq CT^{-\frac{2-\gamma}{p-1}},$$

para alguma constante positiva C.

Destacamos que até o presente, o problema (3) tem sido estudado apenas sobre $\mathbb{R}^N$ ou em domínios limitados. Além disso, as condições de contorno consideradas são sempre de Dirichlet. Para maiores detalhes, sugerimos conferir [8], onde Cazenave, Dickstein e Weissler estudaram tais problemas e determinaram o expoente crítico para ambos. O

Teorema 4 mostra que o expoente crítico para (3) coincide com o correspondente expoente para o problema (3) sobre $\mathbb{R}^N$, obtido em [8].

Descrevemos a seguir o que desenvolvemos neste trabalho, o qual está organizado em três capítulos.

No primeiro capítulo tratamos da equação do calor linear com condição de Neumann homogênea na fronteira em domínios com fronteira Lipschitz compacta. Introduzimos na primeira seção as definições e propriedades concernentes à função de Green associada ao referido problema, das quais faremos uso. O Teorema 3 é demonstrado na segunda seção para $N \geq 3$. Na terceira e última seção demonstramos o Teorema 3 para o caso $N = 1$.

O segundo capítulo é destinado ao estudo do problema (2). Apresentamos na primeira seção alguns problemas relacionados e definimos o que vem a ser uma solução deste problema. Na seção seguinte, demonstramos o Teorema 1, estabelecendo a existência de soluções locais para o problema (2). A terceira seção é destinada à demonstração do Teorema 2 (i) e na quarta seção demonstramos o Teorema 2 (ii). Por fim, apresentamos na quinta seção algumas questões e problemas em aberto.

No terceiro capítulo estudamos o problema (3). Na primeira seção introduzimos o problema, fazemos uma breve discussão sobre resultados correlatos e fixamos a definição de uma solução para este problema. Na seção subsequente estabelecemos a existência de soluções locais para o problema em questão, demonstrando o Teorema 4. Na terceira seção, por sua vez, demonstramos o Teorema 5 (ii). A seção seguinte é destinada à demonstração do Teorema 5 (i). Provamos na quinta seção os Teoremas 6 e 7 que estabelecem condições necessárias para a existência de soluções globais e locais, respectivamente, para o problema (3). Finalmente, na sexta seção, apresentamos algumas questões e problemas em aberto.

Capítulo 1

A equação do calor linear com condição de Neumann na fronteira em domínios com fronteira Lipschitz compacta

1.1 Introdução

O problema de Cauchy para a equação do calor linear

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.1}$$

tem solução dada por $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y,t)\varphi(y)dy$, sendo Φ o núcleo do calor

$$\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t > 0. \tag{1.2}$$

É bem conhecido que u tem o seguinte efeito regularizante: se $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então $u(t) \in L^r(\mathbb{R}^N)$, para todo $p \leq r \leq \infty$ e todo $t > 0$ e

$$\|u(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi t)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.3}$$

Conferir [7].

Neste capítulo, nosso principal resultado consiste em provar que a função de Green para o problema (1.4) satisfaz uma desigualdade similar à (1.3), quando D tem fronteira Lipschitz compacta. Mais precisamente, seja D um domínio em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, com fronteira suave e compacta. Suponhamos também que D tenha fronteira Lipschitz, isto é, próximo à ∂D, D pode ser representado como a região que ocorre acima do gráfico de uma função Lipschitz. Ver [12]. Consideremos o seguinte problema linear de valor inicial, com a condição de Neumann na fronteira

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, \quad (x,t) \in D \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,t) \in \partial D \times \in (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D, \end{cases} \tag{1.4}$$

em que $\frac{\partial}{\partial n}$ denota a derivada normal exterior, a qual está definida na fronteira de D em quase toda a parte.

Seja $G(x,t;y,s)$ a função de Green associada ao problema (1.4), isto é, $G(x,t;y,s)$ é uma função que está definida em $\overline{\mathcal{D}}(G)$, com

$$\mathcal{D}(G) = \{(x,t;y,s); x,y \in D, 0 \leq s < t \leq T\},$$

$$\partial\mathcal{D} = \{(x,t;y,s); x \in \partial D, y \in D, 0 \leq s < t \leq T\}$$

e G satisfaz as seguintes condições:

(i) $G(x,t;y,s)$ é contínua em (x,t) e localmente integrável em (y,s).

(ii) Se $f \in C((0,T); L^2(D))$, a função,

$$u(x,t) = \int_0^t \int_D G(x,t;y,s) f(y,s)\,dyds \tag{1.5}$$

é solução do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in D \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad (x,t) \in \partial D \times (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, \quad x \in D, \end{cases} \tag{1.6}$$

com $u \in C((0,\infty); H^2(D))$.

(iii) Para cada função $u_0 \in L^2(D)$, a função

$$v(x,t) = \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy \tag{1.7}$$

é solução de (1.4) e $v \in C([0,\infty); H^2(D)) \cap C^1([0,\infty); L^2(D))$.

Observações 1.1. *(i) A função de Green definida acima é não negativa, de modo que em (1.7), se $u_0 \geq 0$, então $v(x,t) \geq 0$.*

(ii) A existência e unicidade da função G com as mencionadas propriedades podem ser provadas usando Teoria de semigrupos, como pode ser encontrado em [6](veja Teoremas 10.1, pag. 205, e 9.26, pag. 182) e [7] (veja Teorema 1.4.9, pag 56).

Estabelecemos a seguinte estimativa para a função de Green, similar àquela (1.3) satisfeita pelo núcleo do calor:

Teorema 1.2. *Seja $D \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira Lipschitz compacta. Sejam $1 \leq p \leq r \leq \infty$ e $N \neq 2$. Se $G(x,t;y,s)$ é a função de Green associada ao problema (1.4), então existe uma constante $C = C(D,p,r) > 0$ tal que*

$$\left\| \int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_{L^r(D)} \leq C(t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)} \|\varphi\|_{L^p(D)}, \tag{1.8}$$

para cada $\varphi \in L^p(D)$ e para quaisquer $0 \leq s < t$.

Este capítulo está organizado em duas seções: a primeira seção é dedicada à demonstração das estimativas para a função de Green e na segunda seção deduzimos a função de Green em domínios exteriores para o caso de dimensão um.

1.2 Prova do Teorema 1.2 para $N \geq 3$

Seja $G(x,t,y,s)$ a função de Green associada ao problema (1.4). Para $N \geq 3$, foi mostrado em [9] que existem constantes positivas $C_1 = C_1(D)$ e a tais que

$$G(x,t,y,s) \leq \frac{C_1}{(t-s)^{N/2}} \exp\left(-a\frac{|x-y|^2}{t-s}\right) = C_1 G_a(x,t,y,s), \tag{1.9}$$

para quaisquer $0 \leq s < t$ e $x, y \in D$. Dessa forma, temos

$$
\begin{aligned}
\int_D G(x,t;y,s)dy \leq C_1 \int_D G_a(x,t,y,s)dy \\
&= \frac{C_1}{(t-s)^{N/2}} \int_D \exp\left(-a\frac{|x-y|^2}{t-s}\right) dy \\
&\leq \frac{C_1}{(t-s)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-a\frac{|x-y|^2}{t-s}\right) dy \\
&= \frac{C_1}{(t-s)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-a\frac{|y'|^2}{t-s}\right) dy' \\
&= \frac{C_1}{(t-s)^{N/2}} \left(\frac{a}{t-s}\right)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|w|^2\right) dw \\
&= C_1 \pi^{N/2} a^{-N/2}.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

De maneira análoga, mostramos que

$$
\int_D G(x,t;y,s)dx \leq C_1 \pi^{N/2} a^{-N/2}. \tag{1.11}
$$

A constante $C_1 \pi^{N/2} a^{-N/2}$ será denotada por C_a.

Por outro lado, se $q > 1$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_D G^q(x,t;y,s)dy \leq C_1^q \int_D G_a^q(x,t,y,s)dy \\
&= \frac{C_1^q}{(t-s)^{q\frac{N}{2}}} \int_D \exp\left(-aq\frac{|x-y|^2}{t-s}\right) dy \\
&\leq \frac{C_1^q}{(t-s)^{q\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-aq\frac{|x-y|^2}{t-s}\right) dy \\
&= \frac{C_1^q}{(t-s)^{q\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-aq\frac{|y'|^2}{t-s}\right) dy' \\
&= \frac{C_1^q}{(t-s)^{q\frac{N}{2}}} \left(\frac{aq}{t-s}\right)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-|w|^2\right) dw \\
&= C_1^q \pi^{N/2} (aq)^{-N/2} (t-s)^{-\frac{N}{2}(q-1)} \\
&= C_{aq} (t-s)^{-\frac{N}{2}(q-1)},
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

com $C_{aq} = C_1^q \pi^{N/2} (aq)^{-N/2}$. Com argumento semelhante, mostramos que

$$
\int_D G^q(x,t;y,s)dx \leq C_{aq} (t-s)^{-\frac{N}{2}(q-1)}. \tag{1.13}
$$

Para a demonstração do Teorema 1.2 precisamos dos seguintes lemas.

Lema 1.3. *Para cada $\varphi \in L^p(D)$,*

$$\left\| \int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_{L^p(D)} \leq C_a \|\varphi\|_{L^p(D)}.$$

Demonstração. Para o caso $p = \infty$, usamos a Desigualdade de Hölder e (1.10), obtendo

$$\begin{aligned} \int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy &\leq \left[\int_D G(x,t;y,s)dy \right] \|\varphi\|_{L^\infty(D)} \\ &\leq C_a \|\varphi\|_{L^\infty(D)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\| \int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_{L^\infty(D)} \leq C_a \|\varphi\|_{L^\infty(D)}.$$

Para $p < \infty$, seja p' o conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Usando a desigualdade de Hölder e (1.10), obtemos

$$\begin{aligned} \int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy &= \int_D G(x,t,y,s)^{\frac{1}{p'}} G(x,t,y,s)^{\frac{1}{p}} \varphi(y)dy \\ &\leq \left[\int_D G(x,t,y,s)dy \right]^{1/p'} \left[\int_D G(x,t,y,s)|\varphi(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_a^{1/p'} \left[\int_D G(x,t,y,s)|\varphi(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim, por (1.11) e pelo Teorema de Fubinni, temos

$$\begin{aligned} \left\| \int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_p^p &\leq C_a^{p/p'} \int_D \left[\int_D G(x,t,y,s)|\varphi(y)|^p dy \right] dx \\ &= C_a^{p/p'} \int_D \left[\int_D G(x,t,y,s)|\varphi(y)|^p dx \right] dy \\ &= C_a^{p/p'} \int_D \left[\int_D G(x,t,y,s)dx \right] |\varphi(y)|^p dy \\ &\leq C_a^{p/p'} C_a \|\varphi\|_{L^p(D)}^p \\ &= C_a^{(p+p')/p'} \|\varphi\|_{L^p(D)}^p. \end{aligned}$$

□

Lema 1.4. *Para $p, q \geq 1$ e $\varphi \in L^p(D)$, temos*

$$\left\| \int_D G^q(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_{L^p(D)} \leq C_{aq}(t-s)^{-\frac{N}{2}(q-1)} \|\varphi\|_{L^p(D)}.$$

Demonstração. Seja p' o conjugado de p. Então, pela desigualdade de Hölder e por (1.12), temos

$$\begin{aligned}
\int_D G^q(x,t,y,s)\varphi(y)dy &= \int_D G^q(x,t,y,s)^{\frac{1}{p'}} G^q(x,t,y,s)^{\frac{1}{p}}\varphi(y)dy \\
&\leq \left[\int_D G^q(x,t,y,s)dy\right]^{1/p'} \left[\int_D G^q(x,t,y,s)|\varphi(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C_{aq}^{1/p'}(t-s)^{-\frac{N}{2p'}(q-1)} \left[\int_D G^q(x,t,y,s)|\varphi(y)|^p dy\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Assim, por (1.13) e pelo Teorema de Fubinni, temos

$$\begin{aligned}
\left\| \int_D G^q(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_{L^p(D)}^p &\leq C_{aq}^{p/p'}(t-s)^{-\frac{Np}{2p'}(q-1)} \int_D \left[\int_D |G^q(x,t,y,s)||\varphi(y)|^p dy\right] dx \\
&= C_{aq}^{p/p'}(t-s)^{-\frac{Np}{2p'}(q-1)} \int_D \left[\int_D G^q(x,t,y,s)|\varphi(y)|^p dx\right] dy \\
&= C_{aq}^{p/p'}(t-s)^{-\frac{Np}{2p'}(q-1)} \int_D \left[\int_D G^q(x,t,y,s)dx\right] |\varphi(y)|^p dy \\
&\leq C_{aq}^{p/p'}(t-s)^{-\frac{Np}{2p'}(q-1)} C_{aq}(t-s)^{-\frac{N}{2}(q-1)} \|\varphi\|_{L^p(D)}^p \\
&= C_{aq}^{(p+p')/p'}(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{p+q}{p'})(q-1)} \|\varphi\|_{L^p(D)}^p,
\end{aligned}$$

e, uma vez que $p + p' = pp'$, temos, pois,

$$\left\| \int_D G^q(x,t,y,s)\varphi(y)dy \right\|_{L^p(D)} \leq C_{aq}(t-s)^{-\frac{N}{2}(q-1)} \|\varphi\|_{L^p(D)}.$$

□

Demonstração do Teorema 1.2 para $N \geq 3$. Podemos supor que $p < r$, já que o caso $p = r$ se reduz ao Lema 1.3.

Caso 1. $r < \infty$. Seja q tal que

$$1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}. \tag{1.14}$$

Note que $q > 1$ e $q \leq r$. Escrevendo

$$\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy = \int_D G(x,t,y,s)\varphi^{\frac{p}{r}}(y)\varphi^{1-\frac{p}{r}}(y)dy$$

e fazendo uso da Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy &\leq \left[\int_D \left|G(x,t,y,s)\varphi^{\frac{p}{r}}(y)\right|^{\left(\frac{pr}{r-p}\right)'} dy\right]^{\left[\left(\frac{pr}{r-p}\right)'\right]^{-1}} \left[\int_D |\varphi^{1-\frac{p}{r}}(y)|^{\frac{pr}{r-p}} dy\right]^{\frac{r-p}{pr}} \\ &= \left[\int_D \left|G(x,t,y,s)\varphi^{\frac{p}{r}}(y)\right|^{\left(\frac{pr}{r-p}\right)'} dy\right]^{\left[\left(\frac{pr}{r-p}\right)'\right]^{-1}} \|\varphi\|_{L^p(D)}^{\frac{r-p}{r}}.\end{aligned}$$

Observemos que $q = \left(\frac{pr}{r-p}\right)'$. Logo,

$$\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy \leq \left[\int_D \left|G(x,t,y,s)\varphi^{\frac{p}{r}}(y)\right|^q dy\right]^{\frac{1}{q}} \|\varphi\|_{L^p(D)}^{\frac{r-p}{r}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left\|\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy\right\|_{L^r(D)}^r &= \int_D \left[\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy\right]^r dx \\ &\leq \int_D \left[\int_D \left|G(x,t,y,s)\varphi^{\frac{p}{r}}(y)\right|^q dy\right]^{\frac{r}{q}} dx\, \|\varphi\|_{L^p(D)}^{r-p} \\ &= \left\|\int_D \left|G(x,t,y,s)\varphi^{\frac{p}{r}}(y)\right|^q dy\right\|_{L^{\frac{r}{q}}(D)}^{\frac{r}{q}} \|\varphi\|_{L^p(D)}^{r-p}.\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.4 e por (1.14), temos

$$\begin{aligned}\left\|\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy\right\|_{L^r(D)}^r &\leq C_{aq}^{r/q}(t-s)^{-\frac{Nr}{2q}(q-1)}\|\varphi^{\frac{pq}{r}}\|_{L^{\frac{r}{q}}(D)}^{\frac{r}{q}} \|\varphi\|_{L^p(D)}^{r-p} \\ &= C_{aq}^{r/q}(t-s)^{-\frac{Nr}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)}\|\varphi\|_{L^p(D)}^p \|\varphi\|_{L^p(D)}^{r-p} \\ &= C_{aq}^{r/q}(t-s)^{-\frac{Nr}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|\varphi\|_{L^p(D)}^r\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\|\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy\right\|_{L^r(D)} \leq C_{aq}^{1/q}(t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|\varphi\|_{L^p(D)}.$$

Caso 2. $r = \infty$. Escolhendo q tal que $1/p + 1/q = 1$, pela desigualdade de Hölder e por (1.12), temos

$$
\begin{aligned}
\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy &\le \left[\int_D G(x,t;y,s)^q dy\right]^{1/q} \|\varphi\|_{L^p(D)} \\
&\le C_{aq}(t-s)^{-\frac{N}{2q}(q-1)}\|\varphi\|_{L^p(D)} \\
&= C_{aq}(t-s)^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)}\|\varphi\|_{L^p(D)} \\
&= C_{aq}(t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p}\right)}\|\varphi\|_{L^p(D)}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left\|\int_D G(x,t,y,s)\varphi(y)dy\right\|_{L^\infty(D)} \le C(t-s)^{-\frac{N}{2p}}\|\varphi\|_{L^p(D)}.
$$

1.3 O caso $N = 1$

Consideremos o domínio exterior $D = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$, com $a \ge 0$ e seja $p \ge 1$. Para uma condição inicial $u_0 \in C(D) \cap L^p(D)$, o problema (1.4) assume a seguinte forma

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta u = 0, \;\; (x,t) \in D \times (0,\infty), \\
u_x(-a,t) = u_x(a,t) = 0, \;\; t \in (0,\infty), \\
u(x,0) = u_0(x), \;\; x \in D.
\end{cases}
\tag{1.15}
$$

Seja $\varphi_1 \in C(\mathbb{R}^+)$, definida por $\varphi_1(x) = u_0(x+a)$. Sabemos que o seguinte problema na semi-reta

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta u = 0, \;\; (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\infty), \\
u_x(0,t) = 0, \;\; t \in (0,\infty), \\
u(x,0) = \varphi_1(x), \;\; x \in \mathbb{R}^+,
\end{cases}
\tag{1.16}
$$

tem por solução a função

$$
u_1(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) + \exp\left(-\frac{|x+y|^2}{4t}\right)\right]\varphi_1(y)dy. \tag{1.17}
$$

Analogamente, definimos $\varphi_2 \in C(\mathbb{R}^-)$ por $\varphi_2(x) = u_0(x-a)$ e consideramos que o problema

$$
\begin{cases}
u_t - \Delta u = 0, \;\; (x,t) \in \mathbb{R}^- \times (0,\infty), \\
u_x(0,t) = 0, \;\; t \in (0,\infty), \\
u(x,0) = \varphi_2(x), \;\; x \in \mathbb{R}^-,
\end{cases}
$$

tem solução dada por

$$u_2(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{0} \left[\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t} \right) + \exp\left(-\frac{|x+y|^2}{4t} \right) \right] \varphi_2(y) dy. \tag{1.18}$$

Assim, a função

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1(x-a,t), & \text{se } x > a, \\ u_2(x+a,t), & \text{se } x < -a, \end{cases}$$

é uma solução para o problema (1.15).

Demonstração do Teorema 1.2 para $N = 1$. Com cálculos análogos àqueles em (1.10) e (1.12), obtemos

$$\int_0^{\infty} (4\pi t)^{-1/2} \left[\exp\left(-\frac{|x+a-y|^2}{4t} \right) + \exp\left(-\frac{|x+a+y|^2}{4t} \right) \right] dy \leq 1, \tag{1.19}$$

$$\int_0^{\infty} (4\pi t)^{-1/2} \left[\exp\left(-\frac{|x+a-y|^2}{4t} \right) + \exp\left(-\frac{|x+a+y|^2}{4t} \right) \right] dx \leq 2, \tag{1.20}$$

$$\int_0^{\infty} (4\pi t)^{-q/2} \left[\exp\left(-\frac{|x+a-y|^2}{4t} \right) + \exp\left(-\frac{|x+a+y|^2}{4t} \right) \right]^q dy \leq 2^{q-1} q^{-1/2} (4\pi t)^{-\frac{1}{2}(q-1)}, \tag{1.21}$$

e

$$\int_0^{\infty} (4\pi t)^{-q/2} \left[\exp\left(-\frac{|x+a-y|^2}{4t} \right) + \exp\left(-\frac{|x+a+y|^2}{4t} \right) \right]^q dx \leq 2^{q} q^{-1/2} (4\pi t)^{-\frac{1}{2}(q-1)}. \tag{1.22}$$

As desigualdades (1.19) - (1.22) são as mesmas para $x - a$ em lugar de $x + a$, bem como se as integrais em (1.19) - (1.22) forem consideradas sobre o intervalo $(-\infty, 0)$.

Notando que $\|\varphi_1\|_{L^p((0,\infty))} \leq \|u_0\|_{L^p(D)}$ e que $\|\varphi_2\|_{L^p((-\infty,0))} \leq \|u_0\|_{L^p(D)}$ e fazendo uso das desigualdades (1.19) - (1.22), podemos proceder como na demonstração do Teorema 1.2, caso $N \geq 3$.

Capítulo 2

Expoente crítico de um sistema parabólico acoplado com a condição de Neumann

2.1 Introdução

Em seu célebre trabalho, Fujita [15] considerou o seguinte problema de Cauchy parabólico semilinear:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, \text{ em } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.1}$$

Ele mostrou o seguinte:

(i) Se $p > 1 + 2/N$ e u_0 é limitado por uma Gaussiana suficientemente pequena, então (2.1) admite soluções globais não-negativas não triviais.

(ii) Quando $1 < p < 1 + 2/N$ não existem soluções globais não triviais.

O valor $p = 1 + 2/N$ é chamado de expoente crítico ou coeficiente de Fujita. Mais tarde mostrou-se que para este valor não existem soluções globais. Mais precisamente, Hayakawa mostrou isto para as dimensões 1 e 2 ao passo que Kobayashi *et al* e Weissler o fizeram para dimensões maiores (Conferir [18, 21, 24]). Desde o trabalho de Fujita, muitas extensões do problema (2.1) têm sido consideradas. Os trabalhos de Levine [20] e Deng *et al* [11] coletam uma série de problemas nessa direção.

Quando em lugar de $\mathbb{R}^N$ consideramos um domínio exterior, ou seja, o complemento de um domínio limitado, com condição de Dirichlet, temos

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, \text{ em } D \times (0, \infty), \\ u(x,t) = 0, \text{ em } \partial D \times (0, \infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } D. \end{cases}$$

Este problema foi considerado por Bandle e Levine [3], os quais mostraram que o expoente crítico neste caso é também $p = 1 + 2/N$.

Em [19], Levine e Zhang estudaram o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, \text{ em } D \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ em } \partial D \times (0, \infty) \\ u(x,t) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } D, \end{cases} \tag{2.2}$$

para $p > 1$ e D um domínio exterior. Eles obtiveram o seguinte

(i) Sejam $N \neq 2$ e $p > 1 + 2/N$. Dado $\delta > 0$, existe uma constante $b_0 > 0$ tal que, para cada função não negativa $u_0 \in C^2(D)$ satisfazendo a condição

$$u_0(x) \leq b_0/(1 + |x|)^{-N-\delta}, \tag{2.3}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, existe uma solução global não-negativa para o problema (2.2).

(ii) Seja $N \geq 1$. Se $p \leq 1 + 2/N$, a única solução global não negativa para o problema (2.2) é a trivial.

Note que, neste caso, o expoente crítico é mais uma vez o valor $p = 1 + 2/N$.

Motivados pelo trabalho de Levine e Zhang [19], consideramos o seguinte sistema parabólico acoplado

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^p, \text{ em } D \times (0, \infty) \\ v_t - \Delta v = u^q, \text{ em } D \times (0, \infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ em } \partial D \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } D \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \text{ em } D, \end{cases} \tag{2.4}$$

sendo D um domínio exterior em $\mathbb{R}^N$, $p, q > 1$ e $u_0, v_0 \in C_0(D)$. O espaço $C_0(D)$ é o fecho em $L^\infty(D)$ das funções contínuas sobre D com suporte compacto.

As equações do problema (2.4) podem ser usadas como um modelo que descreve a propagação do calor numa mistura combustível com duas substâncias. Neste caso, as funções u e v representam a temperatura de cada uma dessas substâncias e uma liberação de energia dada por pontências de u e v é considerada. A condição de Neumann indica que o fluxo de calor pela fronteira é zero.

O problema (2.4) em $\mathbb{R}^N$ foi considerado por Escobedo e Herrero [13]. Mais precisamente, eles consideraram o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^p, \ \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ v_t - \Delta v = u^q, \ \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \ \text{em } \mathbb{R}^N \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \ \text{em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{2.5}$$

com $p, q > 1$ e $u_0, v_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ funções limitadas. Eles provaram o seguinte:

(i) Se $\frac{N}{2} > \frac{\gamma+1}{pq-1}$, com $\gamma = \max\{p,q\}$, então o problema (2.5) admite soluções globais não identicamente nulas para $\|u_0\|_r + \|v_0\|_s$ suficientemente pequena, com $r = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}$ e $s = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}$.

(ii) Se $\frac{N}{2} \leq \frac{\gamma+1}{pq-1}$, então não há soluções globais para o problema (2.5).

Estabelecemos neste trabalho que o coeficiente crítico para o problema (2.4) coincide com o coeficiente crítico de (2.5), como está descrito no resultado a seguir.

Teorema 2.1. *Sejam $p, q > 1$, $u_0, v_0 \in C_0(D)$, $u_0, v_0 \geq 0$ e D um domínio exterior com fronteira suave em $\mathbb{R}^N$.*

(i) Seja $N/2 > (\gamma+1)/(pq-1)$, com $\gamma = \max\{p,q\}$ e $N \geq 3$. Suponha que D tem fronteira Lipschitz, $u_0 \in L^r(D) \cap L^2(D)$ e $v_0 \in L^s(D) \cap L^2(D)$, com $r = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}$, $s = \frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}$. Então existe $\delta > 0$ tal que, se $\|u_0\|_r + \|v_0\|_s < \delta$, (2.4) tem solução global.

(ii) Se $N/2 \leq (\gamma+1)/(pq-1)$, com $\gamma = \max\{p,q\}$, então a única solução global não negativa do problema (2.4) é a trivial.

Também estabelecemos a existência de soluções locais para o problema (2.4):

Teorema 2.2. *Sejam $p, q > 1$. Para cada $u_0, v_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$, existe uma solução $(u, v) \in [C(D \times (0, T))]^2$ do problema (2.4), para algum $T > 0$.*

Observações 2.3. *(i) Quando $p = q$ e $u_0 = v_0$, o problema (2.4) coincide com o problema (2.2). Neste caso, $N/2 \leq (\gamma + 1)/(pq - 1)$ reduz-se a $p \leq 1 + 2/N$.*

(ii) No problema (2.5), os espaços $L^r(\mathbb{R}^N)$ e $L^s(\mathbb{R}^N)$ são chamados de espaços de scaling e constituem os únicos espaços tais que dados iniciais "pequenos" geram soluções globais, como foi observado em [13]. O resultado do Teorema 2.1 (i) mostra a importância destes espaços na procura de soluções globais para o problema (2.4).

(iii) Quando $p = q$, vemos que $r = s = \frac{N}{2}(p - 1)$. Por outro lado, da condição (2.3), concluímos que $u_0 \in C_0(D) \cap L^1(D)$ e, por interpolação, $u_0 \in L^r(D)$, o que mostra que, para o caso do problema (2.2), nosso resultado é mais geral que aquele obtido por Levine e Zhang [19].

(iv) O argumento que usamos para obtermos uma solução global é um argumento de ponto fixo e, para este fim, a estimativa no Teorema 1.2 da função de Green será crucial. Salientamos que o método usado por Levine e Zhang [19] para provar a existência de soluções globais para o problema (2.2) não pode ser adaptado para o problema (2.4). Para a demostração do item (ii) do Teorema 2.1, por sua vez, utilizamos uma adaptação do método da função teste usada por Mitidieri e Pohozoaev [22] e Kirane et al *[16].*

A seguir definimos o que entendemos por solução do problema (2.4). Sejam $u_0, v_0 \in C(D)$. Dado $T \in (0, \infty]$, um par de funções contínuas (u, v), $u = u(x, t)$ e $v = v(x, t)$, definidas em $D \times (0, T)$ é dito uma solução não negativa do problema (2.4) quando $u, v \geq 0$ e as seguintes identidades são satisfeitas

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_D u \Delta \psi dyds - \int_0^t \int_{\partial D} u \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_y ds + \int_0^t \int_D v^p \psi dyds \\ &+ \int_0^t \int_D u \partial_s \psi dyds - \int_D [u(y, t)\psi(y, t) - u_0(y)\psi(y, 0)] dy = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

e

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_D v\Delta\psi dyds - \int_0^t \int_{\partial D} v\frac{\partial\psi}{\partial n}dS_y ds + \int_0^t \int_D u^q\psi dyds \\
+&\int_0^t \int_D v\partial_s\psi dyds - \int_D [v(y,t)\psi(y,t) - v_0(y)\psi(y,0)]dy = 0,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

para $t \in (0,T)$ e para cada $\psi \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ tal que ψ tem suporte compacto em $\mathbb{R}^N \times [0,T]$. Quando $T = \infty$, dizemos que (u,v) é uma solução global de (2.4). Na literatura algumas vezes esta solução é chamada de solução fraca do problema (2.4).

Este capítulo segue o seguinte roteiro: na segunda seção provamos o Teorema 2.2, na terceira seção demonstramos o Teorema 2.1 (i) e a quarta seção, por sua vez, destina-se à demonstração do Teorema 2.1 (ii).

2.2 Soluções locais

Provaremos nesta seção o Teorema 2.2, o qual estabelece a existência de soluções locais para o problema (2.4).

Para $T > 0$, consideremos o operador Ψ definido em $\left[L^\infty([0,T]; L^\infty(D) \cap L^2(D))\right]^2$, por

$$
\Psi(u,v) = (\Psi_1(v), \Psi_2(u)),
$$

com

$$
\begin{aligned}
\Psi_1(v)(x,t) &= \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy + \int_0^t \int_D G(x,t;y,s)v^p(y,s)dyds, \\
\Psi_2(u)(x,t) &= \int_D G(x,t;y,0)v_0(y)dy + \int_0^t \int_D G(x,t;y,s)u^q(y,s)dyds,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

para todo $(x,t) \in D \times (0,T)$, sendo $p,q \geq 1$, $u_0, v_0 \in C_0(D)$ e $G(x,t;y,s)$ a função de Green associada ao problema (1.4).

Para a demonstração do Teorema 2.2 faremos uso do seguinte resultado:

Lema 2.4. *Sejam $p,q \geq 1$, D um domínio exterior com fronteira Lipschitz suave e $u_0, v_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$. Se (u,v) é um ponto fixo de Ψ, então (u,v) é solução de (2.4).*

Demonstração. Seja $T \in (0,\infty]$ e seja $\psi \in C^2(\mathbb{R}^N \times [0,\tau])$ tal que ψ tem suporte compacto em $\mathbb{R}^N \times [0,T]$. Multiplicando (2.8) por ψ e em seguida integrando sobre D, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_D u(x,t)\psi(x,t)dx = \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\psi(x,t)dx \\
+ \int_D \int_0^t \int_D G(x,t;y,s)v^p(y,s)dyds\psi(x,t)dx.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Derivando (2.9) com respeito a t, temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\psi(x,t)dx = \int_D \frac{d}{dt}\int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\psi(x,t)dx \\
+ \int_D \frac{d}{dt}\int_0^t \int_D G(x,t;y,s)v^p(y,s)dyds\psi(x,t)dx.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

Assim, fazendo uso da identidade de Green, obtemos para a primeira integral do lado direito de (2.10) o seguinte

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{d}{dt}\left(\int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\psi(t,x)\right)dx &= \int_D -\Delta\left(\int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\right)\psi(x,t)dx \\
&+ \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\partial_t\psi(x,t)dx \\
&= \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\left(-\Delta\psi(x,t)\right)dx \\
&+ \int_{\partial D} \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\frac{\partial}{\partial n}\psi(t,x)dS_x \\
&+ \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0dy\partial_t\psi(x,t)dx.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

Quanto à segunda integral no lado direito de (2.10), temos

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{d}{dt}\int_0^t \int_D G(x,t;y,s)v^p(y,s)dyds\psi(x,t)dx &= \int_D v^p(x,t)\psi(x,t)dx \\
&- \int_D \int_0^t \Delta\left(\int_D G(x,t;y,s)v^p(y,s)dy\right)ds\psi(x,t)dx \\
&+ \int_D \int_0^t \int_D G(x,t;y,s)v^p(y,s)dyds\partial_t\psi(t,x)dx \\
&= \int_D v^p(x,t)\psi(x,t)dx \\
&- \int_D \int_0^t \int_D G(x,t;y,s)v^p(t,y))dyds\Delta\psi(x,t)dx \\
&+ \int_{\partial D} \int_0^t \int_D G(x,t;y,0)v^p(y,s))dyds\frac{\partial}{\partial n}\psi(t,x)dS_x \\
&+ \int_D \int_0^t \int_D G(x,t;y,s)v^p(y,s)dyds\partial_t\psi(t,x)dx.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

Assim, por (2.11) e (2.12)

$$\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\psi(t,x)dx = -\int_D u(x,t)\Delta\psi(x,t)dx + \int_D u(x,t)\partial_t\psi(t,x)dx$$
$$+\int_{\partial D} u(x,t)\frac{\partial}{\partial n}\psi(t,x)dS_x + \int_D v^p(x,t)\psi(t,x)dx.$$

Integrando, pois, sobre $[0,T]$, obtemos

$$\int_D [u(T,x)\psi(T,x) - u_0(x)\psi(0,x)]dx = -\int_0^T\int_D u(x,t)\Delta\psi(x,t)dx + \int_0^T\int_D u(x,t)\partial_t\psi(t,x)dx$$
$$+\int_0^T\int_{\partial D} u(x,t)\frac{\partial}{\partial n}\psi(t,x)dS_x + \int_0^T\int_D v^p(x,t)\psi(t,x)dx,$$

o que estabelece (2.6). De modo análogo, provamos que (2.7) é satisfeita. Portanto, (u, v) é solução de (2.4). □

Demonstração do Teorema 2.2: Para $T > 0$ e $M > 0$ fixados, consideremos o espaço

$$E_{M,T} = \left\{(u,v) \in [L^\infty(D\times[0,T])]^2\,;\, \|u(t)\|_{L^\infty} + \|v(t)\|_{L^\infty} \le M+1,\ \text{para todo } t \in (0,T)\right\}. \tag{2.13}$$

O espaço $E_{M,T}$ com a métrica induzida pela do espaço $[L^\infty(D\times[0,T])]^2$ é um espaço métrico completo. Definindo a aplicação $\Psi(u,v) = (\Psi_1(v), \Psi_2(u))$, com Ψ_1 e Ψ_2 dados por (2.8) e fazendo uso do Teorema 1.2, temos

$$\|\Psi_1(v)(t)\|_{L^\infty(D)} \le C_1\|u_0\|_{L^\infty(D)} + C_1\int_0^t \|v(s)\|^p_{L^\infty(D)}ds,$$

em que C_1 é a constante na estimativa (1.8). Logo,

$$\begin{aligned}\|\Psi_1(v)(t)\|_{L^\infty(D)} &\le C_1\|u_0\|_{L^\infty(D)} + C_1 t\sup_{0<t<T}\|v(t)\|^p_{L^\infty(D)}\\ &\le C_1\|u_0\|_{L^\infty(D)} + C_1TM^p.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$\|\Psi_2(u)(t)\|_{L^\infty(D)} \le C_1\|v_0\|_{L^\infty(D)} + C_1TM^q. \tag{2.15}$$

Mostraremos que é possível obter T e M de modo que $\Psi : E_{M,T} \to E_{M,T}$ seja uma contração. Para $(u,v),(\overline{u},\overline{v})\in E_{M,T}$, temos

$$\begin{aligned}\|\Psi_1(v)(t)-\Psi_1(\overline{v})(t)\|_{L^\infty(D)} &\leq C_1\int_0^t \|v^p(s)-\overline{v}^p(s)\|_{L^\infty(D)}ds\\ &\leq pC_1\int_0^t\left(\|v(s)\|^{p-1}_{L^\infty(D)}+\|\overline{v}(s)\|^{p-1}_{L^\infty(D)}\right)\|v(s)-\overline{v}(s)\|_{L^\infty(D)}ds.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\Psi_1(v)(t)-\Psi_1(\overline{v})(t)\|_{L^\infty(D)}\leq 2pC_1TM^{p-1}\sup_{0<t<T}\|v(t)-\overline{v}(t)\|_{L^\infty(D)}. \tag{2.16}$$

Analogamente,

$$\|\Psi_2(u)(t)-\Psi_2(\overline{u})(t)\|_{L^\infty(D)}\leq 2qC_1TM^{q-1}\sup_{0<t<T}\|u(t)-\overline{u}(t)\|_{L^\infty}. \tag{2.17}$$

Fixemos $M>2C_1\max\{\|u_0\|_\infty,\|v_0\|_\infty\}$. De (2.14), (2.15) e

$$C_1T\max\{M^p,M^q\}<\frac{1}{2},$$

temos $\Psi(E_{M,T})\subset E_{M,T}$. Mais ainda, de (2.16), (2.17) e

$$2C_1T\max\{pM^{p-1},qM^{q-1}\}<\frac{1}{2},$$

concluímos que Ψ é uma contração estrita. Daí, Ψ possui um ponto fixo, o qual, pelo Lema 2.4, é uma solução de (2.4).

2.3 Soluções Globais

Esta seção é destinada à demonstração do Teorema 2.1 (i). No resultado a seguir mostraremos que a escolha de α e β, satisfazendo as condições (2.18) e (2.19), é possível.

Lema 2.5. *Sejam $p,q>1$ e sejam $r=\frac{N}{2}\frac{pq-1}{p+1}>1$ e $s=\frac{N}{2}\frac{pq-1}{q+1}>1$. Existem $\alpha\geq q$ e $\beta\geq p$ tais que*

$$0<\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)<1 \quad e \quad 0<\frac{N}{2}\left(\frac{q}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)<1 \tag{2.18}$$

e

$$0 < \frac{1}{s} - \frac{2}{pN} < \frac{1}{\beta} \qquad e \qquad 0 < \frac{1}{r} - \frac{2}{qN} < \frac{1}{\alpha}. \tag{2.19}$$

Demonstração. Para verificar que os valores α e β podem ser escolhidos desta forma, observemos que, no plano $x \times y$, as retas

$$py - x = \frac{2}{N} \qquad \text{e} \qquad qx - y = \frac{2}{N} \tag{2.20}$$

intersectam os eixo y e x nos pontos $(0, 2/pN)$ e $(2/qN, 0)$, respectivamente, e se intersectam no ponto de coordenadas $1/r$ e $1/s$. As retas (2.20), juntamente com as retas

$$py - x = 0 \qquad \text{e} \qquad qx - y = 0$$

determinam um paralelogramo no primeiro quadrante do plano $x \times y$, de modo que, no interior da região determinada pelo paralelogramo, a condição (2.18) é satisfeita quando consideramos $\alpha = 1/x$ e $\beta = 1/y$. As desigualdades em (2.19) são, por sua vez, satisfeitas numa sub-região do referido paralelogramo. Mostraremos agora que é possível escolher $\alpha \geq q$ e $\beta \geq p$. Notemos que o ponto $\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{Nq}, \frac{1}{s} - \frac{2}{Np}\right)$ pertence à sub-região descrita acima, pois

$$p\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{Np}\right) - \left(\frac{1}{r} - \frac{2}{Nq}\right) = \frac{2}{Nq} < \frac{2}{N}$$

e

$$q\left(\frac{1}{r} - \frac{2}{Nq}\right) - \left(\frac{1}{s} - \frac{2}{Np}\right) = \frac{2}{Np} < \frac{2}{N}.$$

Notemos também que as condições

$$\frac{1}{s} - \frac{2}{pN} < \frac{1}{p} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{r} - \frac{2}{qN} < \frac{1}{q}, \tag{2.21}$$

são satisfeitas, uma vez que

$$\frac{p}{s} = \frac{2}{N} + \frac{1}{r} < \frac{2}{N} + 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{q}{r} = \frac{2}{N} + \frac{1}{s} < \frac{2}{N} + 1.$$

Assim, por (2.19) e (2.21) podemos tomar $\frac{1}{\beta} \leq \frac{1}{p}$ e $\frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{q}$. $\square$

Demonstração do Teorema (2.1) (i)**.** Sejam $a = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right)$ e $b = \frac{N}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\beta}\right)$, com α

e β dados pelo Lema 2.5. Do Lema 2.5 temos que $0 < aq, bp < 1$. Consideremos o espaço

$$M = L^{\infty}((0,\infty), L^{\alpha}(D)) \times L^{\infty}((0,\infty), L^{\beta}(D))$$

e seja

$$E_{\varepsilon} = \left\{ (u,v) \in M;\ t^{a}\|u(t)\|_{L^{\alpha}(D)} + t^{b}\|v(t)\|_{L^{\beta}(D)} \leq \varepsilon,\ \text{para todo } t > 0 \right\}$$

sendo $\varepsilon > 0$ uma constante suficientemente pequena a ser determinada mais adiante. O espaço E_{ε} munido com a métrica

$$d_{E_{\varepsilon}}\left((u,v),(\overline{u},\overline{v})\right) := \sup_{t>0}\left\{t^{a}\|u(t)-\overline{u}(t)\|_{L^{\alpha}(D)}\right\} + \sup_{t>0}\left\{t^{b}\|v(t)-\overline{v}(t)\|_{L^{\beta}(D)}\right\}$$

é um espaço métrico completo.

Para cada $(u,v) \in E_{\varepsilon}$, definimos $\Psi(u,v) = (\Psi_1(v), \Psi_2(u))$, com $\Psi_1(v)$ e $\Psi_2(u)$ dados por (2.8).

Mostraremos que é possível escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(i) $\Psi(E_{\varepsilon}) \subset E_{\varepsilon}$.

(ii) $\Psi : E_{\varepsilon} \to E_{\varepsilon}$ é uma contração estrita.

(i) Seja $(u,v) \in E_{\varepsilon}$. Usando o Teorema 1.2, temos

$$\begin{aligned}
t^{a}\|\Psi_1(v)(t)\|_{L^{\alpha}(D)} &\leq t^{a}\left\|\int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\right\|_{L^{\alpha}(D)} + t^{a}\int_0^t \left\|\int_D G(x,t;y,s)v^{p}(y,s)dy\right\|_{L^{\alpha}(D)} ds \\
&\leq C_1 t^{a} t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\right)}\|u_0\|_{L^{r}(D)} + C_1 t^{a}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)}\|v^{p}(s)\|_{L^{\beta/p}(D)}\, ds \\
&= C_1\|u_0\|_{L^{r}(D)} + C_1 t^{a}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)} s^{-bp}s^{bp}\|v(s)\|^{p}_{L^{\beta}(D)}\, ds \\
&\leq C_1\|u_0\|_{L^{r}(D)} + C_1 t^{a}\varepsilon^{p}\int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)} s^{-bp} ds \\
&= C_1\|u_0\|_{L^{r}(D)} + C_1 t^{a}\varepsilon^{p} t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)+1-bp}\int_0^1 (1-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)} s^{-bp} ds,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

em que C_1 é a constante na estimativa (1.8). Observemos que

$$a - \frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) + 1 - bp = 0. \tag{2.23}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} a - \frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) + 1 - bp &= \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right) + 1 - \frac{N}{2}\left(\frac{p}{s} - \frac{p}{\beta}\right) \\ &= \frac{N}{2}\left(\frac{1}{r} - \frac{p}{s}\right) + 1 \\ &= \frac{p+1}{pq-1} - \frac{pq+p}{pq-1} + 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, (2.22) reduz-se a

$$t^a \|\Psi_1(v)\|_{L^\alpha(D)} \leq C_1 \|u_0\|_{L^r(D)} + C_1 \varepsilon^p \int_0^1 (1-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} s^{-bp} ds. \tag{2.24}$$

Em virtude de (2.18) e (2.19), a integral em (2.24) converge; logo, temos

$$t^a \|\Psi_1(v)\|_{L^\alpha(D)} \leq C_1 \|u_0\|_{L^r(D)} + C_1 C_2 \varepsilon^p. \tag{2.25}$$

Procedendo de maneira análoga, obtemos

$$t^b \|\Psi_2(u)\|_{L^\beta(D)} \leq C_1 \|v_0\|_{L^s(D)} + C_1 C_3 \varepsilon^q. \tag{2.26}$$

Assim, de (2.25) e (2.26), concluímos que $\Psi(E_\varepsilon) \subset E_\varepsilon$, quando $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno tal que

$$C_1[C_2\varepsilon^p + C_3\varepsilon^q] < \frac{\varepsilon}{2},$$

e $\|u_0\|_{L^r(D)} + \|v_0\|_{L^s(D)}$ é suficientemente pequeno tal que

$$C_1\left(\|u_0\|_{L^r(D)} + \|v_0\|_{L^s(D)}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

.

(ii) Sejam $(u, v), (\overline{u}, \overline{v}) \in E_\varepsilon$. Então, pelo Teorema 1.2, temos

$$
\begin{aligned}
t^a \|\Psi_1(v) - \Psi_1(\overline{v})\|_{L^\alpha(D)} &\leq t^a \int_0^t \left\| \int_D G(x,t;y,s) \left(v^p(y,s) - \overline{v}^p(y,s)\right) dy \right\|_{L^\alpha(D)} ds \\
&\leq C_1 t^a \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} \|v^p(s) - \overline{v}^p(s)\|_{L^{\beta/p}(D)} \, ds.
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Usando a desigualdade usual $\|v^p - \overline{v}^p\|_{L^{\beta/p}(D)} \leq C(p) \left[\|v\|^{p-1}_{L^\beta(D)} + \|\overline{v}\|^{p-1}_{L^\beta(D)}\right] \|v - \overline{v}\|_{L^\beta(D)}$, válida para todo $p > 1$ e quaisquer funções $u, v \in L^\beta(D)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
t^a \|\Psi_1(v) - \Psi_1(\overline{v})\|_{L^\alpha(D)} \leq C_1 t^a \int_0^t &(t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} \left[\|v(s)\|^{p-1}_{L^\beta(D)} + \|\overline{v}(s)\|^{p-1}_{L^\beta(D)}\right] \\
&\times \|v(s) - \overline{v}(s)\|_{L^\beta(D)} ds.
\end{aligned} \tag{2.28}
$$

Procedendo como antes, temos

$$
\begin{aligned}
t^a \|\Psi_1(v) - \Psi_1(\overline{v})\|_{L^\alpha(D)} &\leq 2C_1 t^a \varepsilon^{p-1} \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} s^{-bp} s^b \|v(s) - \overline{v}(s)\|_{L^\beta(D)} ds \\
&\leq \sup_{t>0} \{t^b \|v(t) - \overline{v}(t)\|_{L^\beta(D)}\} \left[2C_1 t^a \varepsilon^{p-1} \int_0^t (t-s)^{\frac{N}{2}\left(\frac{p}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)} s^{-bp} ds\right] \\
&\leq \left[2C_1 C_2 \varepsilon^{p-1}\right] \sup_{t>0} \{t^b \|v(t) - \overline{v}(t)\|_{L^\beta(D)}\}.
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

Analogamente, temos

$$
t^b \|\Psi_2(u) - \Psi_2(\overline{u})\|_{L^\beta(D)} \leq \left[2C_1 C_3 \varepsilon^{q-1}\right] \sup_{t>0} \{t^a \|u(t) - \overline{u}(t)\|_{L^\alpha(D)}\}. \tag{2.30}
$$

Logo, de (2.29) e (2.30), concluímos que se ε é suficientemente pequeno tal que

$$
2C_1 \max\{C_2 \varepsilon^{p-1}, C_3 \varepsilon^{q-1}\} < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{2},
$$

então $\Psi : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$ é uma contração estrita. Logo, $\Psi : E_\varepsilon \to E_\varepsilon$ tem um ponto fixo, o qual, pelo Lema 2.4 é uma solução do problema (2.4). Isto estabelece o Teorema 2.1 (ii).

2.4 Soluções não globais

Dedicamos esta seção à demonstração do Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1 (ii). Denotemos a bola $B_R(0)$ por B_R. Seja $Q_R =$

$(B_{2R}(0) \cap D) \times [0, 2R^2]$. Notemos que tais conjuntos crescem com R e que $\cup_{R>0} Q_R = D \times [0, \infty)$.

Consideremos a função

$$\psi_R = \phi_R(x)\eta_R(t).$$

A função $\eta_R \in C^\infty[0, \infty)$ é tal que $\eta_R(t) = 1$, para $0 \leq t \leq R^2$, $\eta_R(t) = 0$, para cada $t \geq 2R^2$, $0 \leq \eta_R \leq 1$ e

$$-\frac{C}{R^2} \leq \eta_R'(t) \leq 0. \tag{2.31}$$

A função $\phi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ é tal que $\phi_R(x) = 1$, quando $x \in B_R$, $0 \leq \phi_R(x) \leq 1$, quando $x \in B_{2R} - B_R$ e $\phi_R(x) = 0$ se $x \in (B_{2R})^c$. Podemos assumir também que $\phi_R(x)$ é radial no anel $B_{2R} - B_R$ e satisfaz as condições

$$\left|\frac{\partial \phi_R}{\partial r}\right| \leq \frac{C}{R}, \qquad \left|\frac{\partial^2 \phi_R}{\partial r^2}\right| \leq \frac{C}{R^2} \tag{2.32}$$

e

$$\frac{\partial \phi_R(x)}{\partial r} = 0,$$

quando $|x| = R$ ou $|x| = 2R$. Suponhamos que (u, v) é uma solução global não negativa do problema (2.4). Definamos

$$I_R = \int_{Q_R} v^p(x,t)\psi_R^\sigma(x,t)dxdt,$$

e

$$J_R = \int_{Q_R} u^q(x,t)\psi_R^\delta(x,t)dxdt,$$

com $\sigma = \frac{pq+p}{pq-1}$ e $\delta = \frac{pq+q}{pq-1}$. Como $\psi_R \equiv 1$ sobre a região $B_R(0) - D^c \times [0, R^2]$ e como $\psi_R \geq 0$, temos

$$I_R = \int_{Q_R} v^p(x,t)\psi_R^\sigma(x,t)dxdt \geq \int_0^{R^2}\int_{B_R - D^c} v^p(x,t)dxdt. \tag{2.33}$$

Da definição de solução do problema (2.4), temos que

$$
\begin{aligned}
I_R &= \int_{B_{2R}-D^c} u(x,t)\psi_R^\sigma(x,t)\Big|_0^{2R^2} dx - \int_{Q_R} u(x,t)\phi_R^\sigma(x)\sigma\eta_R^{\sigma-1}(t)\eta_R'(t)dxdt \\
&\quad + \int_0^{2R^2}\int_{\partial D} u(x,t)\frac{\partial\phi_R^\sigma(x)}{\partial n}\eta_R(t)dS_x dt - \int_{Q_R} u(x,t)\Delta\phi_R^\sigma(x)\eta_R^\sigma(t)dxdt.
\end{aligned}
$$

Portanto, pela definição de ϕ_R e η_R, juntamente com a condição sobre o bordo, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_R &= -\int_{B_{2R}-D^c} u(x,0)\psi_R^\sigma(x,0)dx \\
&\quad -\int_{Q_R} u(x,t)\phi_R^\gamma(x)\gamma\eta_R^{\sigma-1}(t)\eta_R'(t)dxdt \\
&\quad -\int_{Q_R} u(x,t)\Delta\phi_R^\sigma(x)\eta_R^\sigma(t)dxdt.
\end{aligned}
$$

Uma vez que $u(x,0) \geq 0$, $\sigma > 1$ e $\Delta\phi_R^\sigma = \sigma\phi_R^{\sigma-1}\Delta\phi_R + \sigma(\sigma-1)\phi_R^{\sigma-2}|\bigtriangledown\phi_R|^2$, temos

$$
\begin{aligned}
I_R \leq \quad & -\int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-D^c} u(x,t)\phi_R^\sigma(x)\sigma\eta_R^{\sigma-1}(t)\eta_R'(t)dxdt \\
& -\int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-B_R} u(x,t)\sigma[\phi_R^{\sigma-1}\Delta\phi_R](x)\eta_R^\sigma(t)dxdt.
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Como ϕ_R é radial sobre $B_{2R} - B_R$, temos que $\Delta\phi_R = \phi_R'' + [(N-1)/r]\phi_R'$ nesta região. Tomando R suficientemente grande, obtemos, para $|x| \geq R$,

$$
|\Delta\phi_R| \leq \frac{C}{R^2}. \tag{2.35}
$$

Usando (2.35) em (2.34) e o fato de que $\eta_R' \equiv 0$ em $[0, R^2]$, bem como (2.31), segue-se que

$$
I_R \leq \frac{C}{R^2}\left[\int_{R^2}^{2R^2}\int_{B_{2R}-D^c} u(x,t)\phi_R^\sigma(x)\eta_R^{\sigma-1}(t)dxdt \quad + \int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-B_R} u(x,t)\phi_R^{\sigma-1}(x)\eta_R^\sigma(t)dxdt\right].
$$

Uma vez que $\phi_R \leq 1$ e $\eta_R \leq 1$,

$$I_R \leq \frac{C}{R^2}\left[\int_{R^2}^{2R^2}\int_{B_{2R}-D^c} u(x,t)\phi_R^{\sigma-1}(x)\eta_R^{\sigma-1}(t)dxdt \quad +\int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-B_R} u(x,t)\phi_R^{\sigma-1}(x)\eta_R^{\sigma-1}(t)dxdt\right].$$

Logo,

$$I_R \leq \frac{C}{R^2}\left[\int_{R^2}^{2R^2}\int_{B_{2R}-D^c} u(x,t)\psi_R^{\sigma-1}(x,t)dxdt \quad +\int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-B_R} u(x,t)\psi_R^{\sigma-1}(x,t)dxdt\right].$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} I_R \quad &\leq \tfrac{C}{R^2}\left[\int_{R_2}^{2R^2}\int_{B_{2R}-D^c} u^q\psi_R^{q(\sigma-1)}(x,t)dxdt\right]^{1/q}\left[\int_{R^2}^{2R^2}\int_{B_{2R}-D^c} dxdt\right]^{1/q'} \\ &+\tfrac{C}{R^2}\left[\int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-B_R} u^q d\psi_R^{q(\sigma-1)}(x,t)xdt\right]^{1/q}\left[\int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-B_R} dxdt\right]^{1/q'}, \end{aligned}$$

com $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$.

Assim,

$$\begin{aligned} I_R \leq \frac{C}{R^2}R^{\frac{N+2}{q'}}&\left[\int_{R_2}^{2R^2}\int_{B_{2R}-D^c} u^q\psi_R^{q(\sigma-1)}(x,t)dxdt\right]^{1/q} \\ +\frac{C}{R^2}R^{\frac{N+2}{q'}}&\left[\int_0^{2R^2}\int_{B_{2R}-B_R} u^q d\psi_R^{q(\sigma-1)}(x,t)xdt\right]^{1/q}. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Como $q(\sigma-1)=\delta$, temos

$$I_R \leq \frac{C}{R^2}R^{\frac{N+2}{q'}}J_R^{1/q}+\frac{C}{R^2}R^{\frac{N+2}{q'}}J_R^{1/q}$$

e, por conseguinte,

$$I_R \leq CR^{\frac{N+2-2q'}{q'}}J_R^{1/q}. \tag{2.37}$$

Analogamente, podemos mostrar que

$$J_R \leq CR^{\frac{N+2-2p'}{p'}}I_R^{1/p}, \tag{2.38}$$

para $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Assim, de (2.37) e (2.38), obtemos

$$I_R \leq CR^{\frac{N+2-2q'}{q'}} \left[R^{\frac{N+2-2p'}{p'}} I_R^{1/p}\right]^{1/q}.$$

Logo,

$$I_R \leq CR^{\frac{N+2-2q'}{q'}} R^{\frac{N+2-2p'}{p'q}} I_R^{1/pq}.$$

Assim,

$$I_R^{\frac{pq-1}{pq}} \leq CR^{\frac{N+2-2q'}{q'}} R^{\frac{N+2-2p'}{p'q}}.$$

Como $p' = p/(p-1)$ e $q' = q/(q-1)$, então

$$\begin{aligned}
\frac{N+2-2q'}{q'} + \frac{N+2-2p'}{p'q} &= \frac{(q-1)(N+2)-2q}{q} + \frac{(p-1)(N+2)-2p)}{pq} \\
&= \frac{1}{pq}\left[p(q-1)(N+2) - 2pq + (p-1)(N+2) - 2p)\right] \\
&= \frac{1}{pq}\left[pqN - N - 2 - 2p\right] \\
&= \frac{1}{pq}[(pq-1)N - 2(p+1)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_R \leq C_{p,q} R^{N-2\frac{p+1}{pq-1}}. \tag{2.39}$$

Disto e de (2.33) temos que

$$\int_0^{R^2} \int_{B_R - D^c} v^p(x,t)\,dxdt \leq C_{p,q} R^{N-2\frac{p+1}{pq-1}}.$$

No caso em que $\frac{N}{2} < \frac{p+1}{pq-1}$, temos $N - 2\frac{p+1}{pq-1} < 0$; logo, fazendo $R \to \infty$, concluímos que $v(x,t) \equiv 0$. Se repetirmos o argumento, começando com J_R em lugar de I_R, chegaremos à desigualdade

$$J_R \leq C_{p,q} R^{N-2\frac{q+1}{pq-1}}, \tag{2.40}$$

de modo que, se $\frac{N}{2} < \frac{q+1}{pq-1}$, concluímos que $u \equiv 0$. Portanto, se

$$\frac{N}{2} < \frac{\gamma+1}{pq-1},$$

com $\gamma = \max\{p, q\}$, então a única solução global de (2.4) é a solução identicamente nula.

No caso em que $\frac{N}{2} = \frac{\gamma+1}{pq-1}$, observemos que, em virtude de (2.39),

$$I_R \leq C_{p,q} \quad \text{ou} \quad J_R \leq C_{p,q}.$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $I_R \leq C_{p,q}$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_0^\infty \int_D u^p(x,t)dxdt \leq C_{p,q} < \infty.$$

Desse modo, para $\varepsilon > 0$ dado, existe uma região compacta $K \subset D \times [0, \infty)$ tal que

$$\int_{K^c} u^p(x,t)dxdt < \varepsilon.$$

É possível, então, considerar R suficientemente grande de modo que $(B_{2R}-D^c)\times[R^2, 2R^2] \subset K^c$ e $(B_{2R} - B_R) \times [0, 2R^2] \subset K^c$.

Logo,

$$\int_{R^2}^{2R^2} \int_{B_{2R}-D^c} u^p(x,t)dxdt \to 0$$

e

$$\int_0^{2R^2} \int_{B_{2R}-B_R} u^p(x,t)dxdt \to 0,$$

quando $R \to \infty$. Isto juntamente com (2.33,) (2.36) e $N - 2\frac{\gamma+1}{pq-1} = 0$ nos permite concluir que $u \equiv 0$. Analogamente, mostramos que $v \equiv 0$.

Portanto, se $\frac{N}{2} \leq \frac{\gamma+1}{pq-1}$, não existem soluções globais não negativas não-triviais para o problema (2.4), como queríamos demonstrar.

2.5 Problemas em aberto

Listamos a seguir algumas questões e problemas em aberto.

(i) Com relação à existência de soluções globais e não globais, o que acontece com o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^{q_1} + v^{p_1}, \text{ em } D \times (0,\infty) \\ v_t - \Delta v = u^{q_2} + v^{p_2}, \text{ em } D \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ em } \partial D \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } D \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \text{ em } D, \end{cases}$$

em que $p_i, q_i \geq 1$, $i = 1, 2$?

(ii) E quanto ao problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^{q_1} \cdot v^{p_1}, \text{ em } D \times (0,\infty) \\ v_t - \Delta v = u^{q_2} \cdot v^{p_2}, \text{ em } D \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial v}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \text{ em } \partial D \times (0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \text{ em } D \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \text{ em } D, \end{cases}$$

em que $p_i, q_i \geq 1$, $i = 1, 2$?

(iii) O que se pode dizer do correspondente problema (2.4) em domínios ilimitados como cones e outros domínios com complemento não limitado?

(iv) Se em lugar da condição de Neumann for considerada a condição de Robin sobre a fronteira, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial n} u + \alpha(x) u = \frac{\partial}{\partial n} v + \alpha(x) v = 0, \text{ com } x \in \partial D,$$

para $\alpha > 0$, como se comporta o correspondente problema com relação à existência de um expoente crítico?

Capítulo 3

Uma equação parabólica não linear com não linearidade não local no tempo

3.1 Introdução

Seja $N \geq 1$ e $D \subset \mathbb{R}^N$ um domínio exterior, com fronteira suave. Para $T > 0$, consideremos o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(s) ds, \ (x,t) \in D \times [0,T], \\ \qquad \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \ (x.t) \in \partial D \times [0,T], \\ \ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \ x \in D, \end{cases} \tag{3.1}$$

com $u_0 \in C_0(D)$, $0 < \gamma < 1$, $p > 1$, Δ denotando o operador laplaciano e o espaço $C_0(D)$ é o fecho em $L^\infty(D)$ das funções contínuas sobre D com suporte compacto. O correspondente problema sobre $\mathbb{R}^N$ e sobre domínios limitados (este com condição de Dirichlet na fronteira), foi estudado por Cazenave, Dickstein e Weissler [8]. Eles mostraram o seguinte:

Sejam $0 < \gamma < 1$, $p > 1$ e $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Sejam $p_\gamma = 1 + \frac{4-2\gamma}{(N-2+2\gamma)_+}$, $p^* = \max\{1/\gamma, p_\gamma\}$

e $p_{sc} = \frac{N(p-1)}{4-2\gamma}$. Para uma solução $u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$ do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(s) ds, \ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T], \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \ x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.2}$$

tem-se o seguinte:

(i) Se $p \leq p^*$, $u_0 \neq 0$ então $T_{\max} < \infty$, ou seja, u não é uma solução global.

(ii) Se $p > p^*$, $u_0 \in L^{p_{sc}}(\mathbb{R}^N)$, e $\|u_0\|_{L^{p_{sc}}(\mathbb{R}^N)}$ é suficientemente pequena, então u é uma solução global de (3.2).

Por outro lado, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave, $0 < \gamma < 1$, $p > 1$, $u_0 \in C_0(\Omega)$, eles mostraram para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(s) ds, \ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(x,t) = 0, \ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

que

(i) se $p\gamma \leq 1$ e u_0 é não trivial, então a correspondente solução u de (3.3) não é global.

(ii) se $p\gamma > 1$ e $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ é suficientemente pequeno, então a solução u de (3.3) é global.

Estudos nesta direção (conferir [20, 11]) foram motivados pelo trabalho de Fujita em 1966, [15]. Ele mostrou que o problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p, \ \text{em } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, \ \text{em } \mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.4}$$

admite soluções globais não negativas para condições iniciais pequenas, quando $p > 1 + 2/N$ e que não existem soluções globais não triviais quando $p < 1 + 2/N$. Mostrou-se depois que no caso $p = 1+2/N$ não existem soluções globais não triviais (veja [18, 21, 24]). O valor $1 + 2/N$ é chamado geralmente de expoente crítico ou expoente de Fujita.

Não é do nosso conhecimento o estudo, no tocante ao expoente crítico de Fujita, do problema (3.1), com a condição de Neumann na fronteira, assim como para domínios não limitados diferentes de $\mathbb{R}^N$.

Neste sentido, temos o seguinte resultado quanto à existência de soluções locais.

Teorema 3.1. *Para cada* $u_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$*, o problema (3.1) admite pelo menos uma solução* $u \in C((0,T), C_0(D) \cap H^2(D))$*. Além disso, se* $u_0 \in L^r(D)$*, com* $r \geq 1$*, então* $u \in C((0,T), L^r(D))$*.*

Com relação ao expoente de Fujita, o resultado que obtivemos a respeito do problema (3.1) é que o valor p^* definido abaixo assume o papel de expoente crítico como no problema (3.2). Este é o conteúdo dos do teorema a seguir.

Teorema 3.2. *Sejam* $p > 1$*,* $u_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$*,* $u_0 \geq 0$ *e* $D \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio exterior com fronteira suave.*

(i) Sejam $N \geq 3$ *e* $p_{sc} := \frac{N(p-1)}{4-2\gamma}$ *e suponha que* D *tem fronteira Lipschitz. Se* $u_0 \in L^{p_{sc}}(D)$*,*

$$p > \max\left\{\frac{1}{\gamma}, p^*\right\}, \text{ com } p^* := 1 + \frac{4-2\gamma}{(N-2+2\gamma)^+} \tag{3.5}$$

e $\|u_0\|_{L^{p_{sc}}}$ *é suficientemente pequeno, então existe uma solução global* $u \in L^\infty((0,\infty), L^\infty(D))$ *do problema (3.1).*

(ii) Seja u_0 *não identicamente nula. Se*

$$p \leq p^* \text{ ou } p < \frac{1}{\gamma},$$

então a única solução global não negativa de (3.1) é a trivial.

Observações 3.3. *(i) Na demonstração do Teorema 3.2* (*i*) *usaremos um argumento de ponto fixo. Para este fim, a estimativa que obtivemos para a função de Green no Teorema 1.2 desempenha um papel fundamental.*

(ii) Para a demonstração do Teorema 3.2 (*ii*) *faremos uso do método da função teste usado por Mitidieri e Pohozaev [22] e Kirane* et al *[16, 17].*

Estabelecemos também condições necessárias para a existência de soluções globais, bem como a de soluções locais para o problema (3.1), como apresentamos a seguir.

Teorema 3.4. *Seja* $u_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$*, com* $u_0 \geq 0$ *e seja* $p > 1$*. Se* u *é uma solução global do problema (3.1) então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\lim_{|x|\to\infty} \left(u_0(x)|x|^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}\right) \leq C.$$

Teorema 3.5. *Sejam $u_0 \in C_0(D) \cap L^2(D)$, $u_0 \geq 0$ e $p > 1$. Se u é uma solução local para o problema (3.1) sobre $[0,T]$, com $0 < T < \infty$, então*

$$\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) \leq CT^{-\frac{2-\gamma}{p-1}},$$

para alguma constante positiva C.

Descrevemos a seguir o que entendemos por solução do problema (3.1). Seja $u_0 \in C(D)$. Dado $T \in (0,\infty]$, uma função $u \in C([0,T) \times D)$ é uma solução não negativa do problema (3.1) se $u \geq 0$ e a seguinte identidade é satisfeita

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_D \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(\sigma,y) d\sigma \psi dy ds + \int_0^T \int_D u\Delta\psi dy ds - \int_0^T \int_{\partial D} u \frac{\partial \psi}{\partial n} dS_y ds \\ + \int_0^T \int_D u \partial_s \psi dy ds + \int_D u_0(y)\psi(y,0) dy = 0,\end{aligned} \tag{3.6}$$

para cada $\psi \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ com suporte compacto, tal que $\psi(x,T) = 0$, $x \in \mathbb{R}^N$. Quando $T = \infty$, dizemos que u é uma solução global. Na literatura esta solução é chamada às vezes de solução fraca do problema (3.1).

Este capítulo está organizado do seguinte modo: na segunda seção demonstramos o Teorema 3.1, a terceira seção está destinada à demonstração do Teorema 3.2 (ii), na quarta seção demonstramos o Teorema 3.2 (i) e a quinta seção é destinada à demonstração dos Teoremas 3.4 e 3.5.

3.2 Soluções locais

Nesta seção provamos a existência de soluções locais para o problema (3.1).

Dada uma função $u_0 \in L^\infty(D)$ e $T > 0$, definimos o operador Ψ em $L^\infty([0,T], L^\infty(D))$, o qual é dado por

$$\Psi(u)(x,t) = \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy + \int_0^t \int_D G(x,t,y,s) \int_0^s (s-\sigma)u^p(y,\sigma)d\sigma dy ds, \tag{3.7}$$

para todo $(x,t) \in D \times (0,T)$, com $p > 1$ e $G(x,t;y,s)$ denotando a função de Green associada ao problema (1.4). No resultado a seguir mostraremos que todo ponto fixo de (3.1) é uma solução do problema (3.1).

Lema 3.6. *Sejam $p \geq 1$, D um domínio exterior com fronteira Lipschitz suave e $u_0 \in L^\infty(D) \cap L^2(D)$. Se $u \in C([0,T], L^\infty(D) \cap L^2(D))$ é um ponto fixo de (3.1), então u é solução de (3.1).*

Demonstração. Com efeito, seja $T > 0$ e seja $\varphi \in C^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^N)$ com suporte compacto, tal que $\varphi(x,T) = 0$, com $x \in \mathbb{R}^N$. Multiplicando (3.7) por φ e em seguida integrando sobre D, obtemos

$$\begin{aligned}\int_D u(x,t)\varphi(x,t)dx &= \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\varphi(x,t)dx \\ &+ \int_D \int_0^t \int_D G(x,t;y,s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(y,\sigma)d\sigma dy ds \varphi(x,t)dx.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Derivando (3.8) com respeito a t, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\varphi(x,t)dx &= \int_D \frac{d}{dt}\int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\varphi(x,t)dx \\ &+ \int_D \frac{d}{dt}\int_0^t \int_D G(x,t;y,s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(y,\sigma))d\sigma dy ds \varphi(x,t)dx.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Assim, fazendo uso da identidade de Green, obtemos para a primeira integral do lado direito de (3.9) o seguinte

$$\begin{aligned}\int_D \frac{d}{dt}\left(\int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\varphi(x,t)\right)dx &= \int_D -\Delta\left(\int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\right)\varphi(x,t)dx \\ &+ \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\partial_t\varphi(x,t)dx \\ &= \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\left(-\Delta\varphi(x,t)\right)dx \\ &+ \int_{\partial D} \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x,t)dS_x \\ &+ \int_D \int_D G(x,t;y,0)u_0 dy\partial_t\varphi(x,t)dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Quanto à segunda integral no lado direito de (3.9), temos

$$
\begin{aligned}
\int_D \frac{d}{dt}\int_0^t \int_D G(x,t;y,s)\int_0^s \frac{u^p(y,\sigma)}{(s-\sigma)^\gamma}d\sigma\, dyds\,\varphi(x,t)dx &= \int_D\int_0^t (t-s)^{-\gamma}u^p(x,s)ds\varphi(x,t)dx \\
&- \int_D\int_0^t \Delta\left(\int_D G(x,t;y,s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}(u^p(y,\sigma))d\sigma dy\right) ds\varphi(x,t)dx \\
&+ \int_D\int_0^t\int_D G(x,t;y,s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}(u^p(y,\sigma))d\sigma dyds\partial_t\varphi(x,t)dx \\
&= \int_D\int_0^t (t-s)^{-\gamma}u^p(x,s)ds\varphi(x,t)dx \\
&- \int_D\int_0^t\int_D G(x,t;y,s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}(u^p(y,\sigma))d\sigma dyds\Delta\varphi(x,t)dx \\
&+ \int_{\partial D}\int_0^t\int_D G(x,t;y,0)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}(u^p(y,\sigma))d\sigma dyds\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x,t)dS_x \\
&+ \int_D\int_0^t\int_D G(x,t;y,s)\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma}(u^p(y,\sigma))d\sigma dyds\partial_t\varphi(x,t)dx.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Assim, por (3.10) e (3.11)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_D u(x,t)\varphi(x,t)dx = &-\int_D u(x,t)\Delta\varphi(x,t)dx + \int_D u(x,t)\partial_t\varphi(x,t)dx \\
&+ \int_{\partial D} u(x,t)\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x,t)dS_x + \int_D\int_0^t (t-s)^{-\gamma}u^p(x,s)ds\varphi(x,t)dx.
\end{aligned}
$$

Integrando, pois, sobre $[0,T]$ e usando o fato de que $\varphi(T,x)=0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
-\int_D u_0(x)\varphi(x,0)dx = &-\int_0^T\int_D u(x,t)\Delta\varphi(x,t)dx + \int_0^T\int_D u(x,t)\partial_t\varphi(x,t)dx \\
&+ \int_0^T\int_{\partial D} u(x,t)\frac{\partial}{\partial n}\varphi(x,t)dS_x + \int_0^T\int_D\int_0^t (t-s)^{-\gamma}u^p(x,s)ds\varphi(x,t)dx.
\end{aligned}
$$

□

Demonstração do Teorema 3.1: Seja $T>0$. Definimos o seguinte espaço

$$E_T = \{u \in L^\infty((0,T), C_0(D)); \|u\|_1 \le 2C_1\|u_0\|_{L^\infty}\},$$

em que C_1 denota a constante da estimativa (1.8), $\|u\|_1 = \|u\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(D))}$ e $\|u_0\|_{L^\infty} = \|u_0\|_{L^\infty(D)}$.

Para cada $u \in E_T$, definimos

$$\Psi(u) = \int_D G(x,t;y,0)u_0 dy + \int_0^t \int_D G(x,t;y,s)\left(\int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(y,\sigma)d\sigma\right) dyds.$$

Observemos que E_T é um subespaço fechado e limitado do espaço métrico $L^\infty((0,T), C_0(D))$. Mostraremos que Ψ tem um ponto fixo. Basta verificar, então, que as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $\Psi(E_T) \subset E_T$.

(ii) $\Psi : E_T \to E_T$ é uma contração.

(i) Seja $u \in E_T$. Usando o Teorema 1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_{L^\infty} &\leq \left\| \int_D G(x,t;y,0)u_0 dy \right\|_{L^\infty} + \left\| \int_0^t \int_D G(x,t;y,s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(y,\sigma) d\sigma dyds \right\|_{L^\infty} \\
&\leq C_1 \left\| u_0 \right\|_{L^\infty} + C_1 \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^p d\sigma ds \\
&= C_1 \left\| u_0 \right\|_{L^\infty} + C_1 \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^p ds d\sigma \\
&= C_1 \left\| u_0 \right\|_{L^\infty} + \frac{C_1}{1-\gamma} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma} \|u(\sigma)\|_{L^\infty}^p d\sigma.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u)\|_1 &\leq C_1 \left\| u_0 \right\|_{L^\infty} + \frac{C_1}{(2-\gamma)(1-\gamma)} T^{2-\gamma} \|u\|_1^p \\
&\leq C_1 \left\| u_0 \right\|_{L^\infty} + \frac{2^p C_1^{p+1} T^{2-\gamma} \|u_0\|_{L^\infty}^{p-1}}{(2-\gamma)(1-\gamma)} \|u_0\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Portanto, se T é suficientemente pequeno tal que

$$\frac{2^p C_1^p T^{2-\gamma} \|u_0\|_{L^\infty}^{p-1}}{(2-\gamma)(1-\gamma)} < 1,$$

temos

$$\|\Psi(u)\|_1 \leq 2C_1 \|u_0\|_{L^\infty}.$$

(ii) Sejam $u, v \in E_T$. Temos, então

$$\begin{aligned}
\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_{L^\infty} &\leq \left\| \int_0^t G(x,t;y,s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left(u^p(y,\sigma) - v^p(y,\sigma)\right) d\sigma dy ds \right\|_{L^\infty} \\
&\leq C_1 \int_0^t \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\|_{L^\infty} d\sigma ds \\
&= C_1 \int_0^t \int_\sigma^t (s-\sigma)^{-\gamma} \|u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\|_{L^\infty} ds d\sigma \\
&= \frac{C_1}{1-\gamma} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma} \|u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\|_{L^\infty} d\sigma \\
&\leq \frac{C_1 C(p)}{1-\gamma} \int_0^t (t-\sigma)^{1-\gamma} (\|u(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1} + \|v(\sigma)\|_{L^\infty}^{p-1}) \|u - v\|_{L^\infty} d\sigma.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\Psi(u) - \Psi(v)\|_1 \leq \frac{2^p C_1^p C(p) \|u_0\|_1^{p-1} T^{2-\gamma}}{(2-\gamma)(1-\gamma)} \|u - v\|_1.$$

Portanto, se T é suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{2^p C_1^p C(p) \|u_0\|_1^{p-1} T^{2-\gamma}}{(2-\gamma)(1-\gamma)} < 1,$$

Ψ é uma contração estrita.

Concluímos que $\Psi : E_T \to E_T$ tem um ponto fixo. Daí, pelo Lema 3.6, o problema (3.1) tem uma solução para cada condição inicial em $L^\infty(D) \cap L^2(D)$.

O caso em que a condição inicial $u_0 \in C_0(D) \cap L^r(D)$ pode ser tratado da mesma forma que o anterior, com o espaço

$$E_{T,r} = \{u \in L^\infty((0,T), C_0(D) \cap L^r(D)); \|u\|_1 \leq 2C\|u_0\|_{L^\infty}, \|u\|_{L^\infty((0,T),L^r(D))} \leq 2C\|u_0\|_{L^r(D)}\}$$

em lugar de E_T. Basta estimar $\|u^p\|_{L^r}$ por $\|u\|_{L^\infty}^{p-1}\|u\|_{L^r}$.

3.3 Soluções não globais

Esta seção é destinada à demonstração do Teorema 3.2 (ii).

Demonstração do Teorema 3.2 (ii). Suponhamos que u é uma solução global não negativa de (3.1) e fixemos $T > 0$ tal que $D^c \subset B_{T^{1/2}}(0)$, com $B_{T^{1/2}}(0)$ denotando a bola em $\mathbb{R}^N$ de centro na origem e raio $T^{1/2}$. Consideremos a função $\psi(x,t) = \varphi(t)\phi^l(x)$, em que $l \geq p/(p-1)$, $\varphi(t) = T^{\gamma-1}(1 - t/T)_+^{\gamma-1+\eta}$, com η suficientemente grande tal que

$\eta \geq \max\{[(1-\gamma)p+1]/(p-1), 2-\gamma\}$ e $\phi(x) = \Phi(|x|/T^{1/2})$, com Φ suave não crescente tal que

$$\Phi(r) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq r \leq 1, \\ 0 & \text{se } r \geq 2, \end{cases} \tag{3.12}$$

com $0 \leq \Phi \leq 1$. Assim, por (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{D_T}\int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(x,s) ds \psi(x,t) = -T^{\gamma-1}\int_\Omega u_0(x)\phi^l(x) - \int_{\Omega_T} u\Delta\psi(x,t) \\ + \int_0^T \int_{\partial D} u\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial n} dS_x dt - \int_{\Omega_T} u\partial_t[\psi(x,t)], \end{aligned} \tag{3.13}$$

em que

$$D_T = [0,T]\times D, \qquad \Omega_T = [0,T]\times\{x\in D; |x| \leq 2T^{1/2}\}$$

$$\int_{D_T} = \int_0^T\int_D \; dxdt \quad \text{e} \quad \int_{\Omega_T} = \int_0^T\int_\Omega \; dxdt.$$

Como ψ é constante em $D \cap B_{T^{1/2}}(0)$, a terceira integral à direita da igualdade (3.13) é nula, donde (3.13) reduz-se a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T}\int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(x,s) ds \psi(x,t) = -T^{\gamma-1}\int_\Omega u_0(x)\phi^l(x) - \int_{\Omega_T} u\Delta\psi(x,t) \\ - \int_{\Omega_T} u\partial_t[\psi(x,t)]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T\int_0^t (t-s)^{-\gamma} u^p(x,s)\varphi(t) dsdt &= \int_0^T\int_s^T (t-s)^{-\gamma} u^p(x,s)\varphi(t) dtds \\ &= \int_0^T\int_s^T (t-s)^{-\gamma}\varphi(t) dt\, u^p(x,s) ds. \end{aligned}$$

Definindo

$$h(s,T) = \int_s^T (t-s)^{-\gamma}\varphi(t) dt,$$

e efetuando a mudança de variáveis $\tau = \frac{t-s}{T-s}$, vemos que

$$\begin{aligned} h(s,T) &= T^{\gamma-1}\int_s^T (t-s)^{-\gamma}(1-t/T)^{\gamma-1+\eta}dt \\ &= T^{-\eta}(T-s)^{\eta}\int_0^1 \tau^{-\gamma}(1-\tau)^{\gamma-1+\eta}d\tau \\ &= C(1-s/T)^{\eta}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

com $s \leq T$ e $C = \int_0^1 \tau^{-\gamma}(1-\tau)^{\gamma-1+\eta}d\tau$.

Assim, (3.14) assume a forma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) = -T^{\gamma-1}\int_{\Omega} u_0(x)\phi^l(x) - \int_{\Omega_T} u(x,t)\Delta\psi(x,t) \\ - \int_{\Omega_T} u(x,t)\partial_t[\psi(x,t)]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando, agora, a desigualdade $\Delta(\phi^l) \leq l\phi_1^{l-1}\Delta(\phi)$ e lembrando que $u_0 \geq 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) &\leq C\int_{\Omega_T} u(x,t)\phi^{l-1}(x)\left|\Delta\phi(x)\right|\varphi(t) \\ &\quad + \int_{\Omega_T} u(x,t)\phi^l(x)\left|\partial_t\varphi(t)\right| \\ &= C\int_{\Omega_T} u(x,t)\left[h(t,T)\phi^l(x)\right]^{\frac{1}{p}}\left[h(t,T)\phi(x)\right]^{-\frac{1}{p}}\phi^{l-1}(x)\left|\Delta\phi(x)\right|\varphi(t) \\ &\quad + \int_{\Omega_T} u(x,t)\left[h(t,T)\phi^l(x)\right]^{\frac{1}{p}}\left[h(t,T)\phi(x)\right]^{-\frac{1}{p}}\phi^l(x)\left|\partial_t\varphi(t)\right|. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Considerando a desigualdade de Young

$$ab \leq \frac{1}{2p}a^p + \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}b^{\tilde{p}},$$

para $p\tilde{p} = p + \tilde{p}$, $a > 0$, $b > 0$, $p > 1$, $\tilde{p} > 1$, com

$$\begin{cases} a = u(x,t)[h(t,T)\phi^l(x)]^{\frac{1}{p}}, \\ b = [h(t,T)\phi^l(x)]^{-\frac{1}{p}}\phi^{l-1}(x)\left|\Delta\phi(x)\right|\varphi(t) \end{cases}$$

na primeira integral à direita de (3.17), e com

$$\begin{cases} a = u(x,t)[h(t,T)\phi^l(x)]^{\frac{1}{p}}, \\ b = [h(t,T)\phi^l(x)]^{-\frac{1}{p}}\phi^l(x)\,|\partial_t\varphi(t)| \end{cases}$$

na segunda integral à direita de (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) \le{}& \frac{C}{2p}\int_{\Omega_T} u^p h(t,T)\phi^l(x) + C\frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T}[h(t,T)\phi^l(x)]^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{\tilde{p}(l-1)}\,|\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}}\,\varphi^{\tilde{p}} \\
&+ \frac{1}{2p}\int_{\Omega_T} u^p h(t,T)\phi^l(x) + \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T}[h(t,T)\phi^l(x)]^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{\tilde{p}l}\,|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}} \\
={}& \frac{C+1}{2p}\int_{\Omega_T} u^p h(t,T)\phi^l(x) + C\frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T}[h(t,T)\phi^l(x)]^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{\tilde{p}(l-1)}\,|\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}}\,\varphi^{\tilde{p}} \\
&+ \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T}[h(t,T)\phi^l(x)]^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{\tilde{p}l}\,|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{C+1}{2p}\right)\int_{\Omega_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) \le{}& C\frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{-\frac{\tilde{p}l}{p}+\tilde{p}(l-1)}(x)\,|\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}}\,\varphi^{\tilde{p}} \\
&+ \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{-\frac{\tilde{p}l}{p}+\tilde{p}l}(x)\,|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}} \\
={}& C\frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{l-\tilde{p}}(x)\,|\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}}\,\varphi^{\tilde{p}} \\
&+ \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}}\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{l}(x)\,|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Logo, por (3.15) e lembrando que $\varphi(t) = T^{\gamma-1}(1-t/T)_+^{\gamma-1+\eta}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) \le{}& C\int_{\Omega_T}(1-t/T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}\eta}\phi^{l-\tilde{p}}(x)\,|\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}}\,T^{\tilde{p}(\gamma-1)}(1-t/T)^{\tilde{p}(\gamma-1+\eta)} \\
&+ C\int_{\Omega_T}(1-t/T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}\eta}\phi^l(x)T^{\tilde{p}(\gamma-2)}(1-t/T)^{\tilde{p}(\eta+\gamma-2)} \\
\le{}& CT^{\tilde{p}(\gamma-1)}\int_{\Omega_T}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-1)}\phi^{l-\tilde{p}}(x)\,|\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}} \\
&+ CT^{\tilde{p}(\gamma-2)}\int_{\Omega_T}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-2)}\phi^l(x).
\end{aligned}$$

Assim, efetuando as mudanças de variáveis $\tau = T^{-1}t$, $\xi = T^{-\frac{1}{2}}x$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) &\leq CT^{1+\frac{N}{2}+\tilde{p}(\gamma-2)}\int_0^1\int_{\tilde{\Omega}}(1-\tau)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-1)}\Phi^{l-\tilde{p}}(|\xi|)\,|\Delta\phi(|\xi|)|^{\tilde{p}}\,d\xi d\tau \\ &\quad + CT^{1+\frac{N}{2}+\tilde{p}(\gamma-2)}\int_0^1\int_{\tilde{\Omega}}(1-\tau)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-2)}\Phi^l(|\xi|)d\xi d\tau \\ &\leq \tilde{C}T^{1+\frac{N}{2}+\tilde{p}(\gamma-2)},\end{aligned} \tag{3.20}$$

com

$$\tilde{\Omega} = \{\xi \in \mathbb{R}^N; |\xi| \leq 2\} \quad \text{e} \quad \tilde{C} = \tilde{C}(|\tilde{\Omega}|).$$

Temos três casos a considerar: $p < p^*$, $p = p^*$ e $p < \frac{1}{\gamma}$.

- $p < p^*$

Se $p < p^*$, o que é equivalente a $1 + \frac{N}{2} + \tilde{p}(\gamma - 2) < 0$, tem-se por (3.20), que

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\Omega_T} u^p h(t,T)\phi^l(x) = 0.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, uma vez que $h(t,T)\phi^l(x) \to 1$, quando $T \to \infty$, temos que

$$\int_0^\infty\int_D u^p = 0,$$

donde $u \equiv 0$.

- $p = p^*$

Se $p = p^*$, o que é equivalente a $1 + \frac{N}{2} + \tilde{p}(\gamma - 2) = 0$, segue-se de (3.20) que

$$\lim_{T\to\infty}\int_{\Omega_T} u^p h(t,T)\phi^l(x) \leq C,$$

donde,

$$u \in L^p((0,\infty), L^p(D)). \tag{3.21}$$

Neste caso, fazemos uso de um argumento semelhante ao anterior, considerando $\phi = \Phi\left(\frac{|x|}{B^{-\frac{1}{2}}T^{\frac{1}{2}}}\right)$, com $1 \leq B < T$, de modo que B é suficientemente grande, mas sem que $T \to \infty$ implique $B \to \infty$. Chegamos a

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) \le C \int_{\tilde{\Sigma}_T} u(x,t)\left[h(t,T)\phi^l(x)\right]^{\frac{1}{p}}[h(t,T)\phi(x)]^{-\frac{1}{p}}\phi^{l-1}(x)\,|\Delta\phi(x)|\,\varphi(t)\\ + \int_{\Sigma_T} u(x,t)\left[h(t,T)\phi^l(x)\right]^{\frac{1}{p}}[h(t,T)\phi(x)]^{-\frac{1}{p}}\phi^{l}(x)\,|\partial_t\varphi(t)|\end{aligned} \tag{3.22}$$

com

$$\Sigma_T = [0,T] \times \{x \in D; |x| \le 2(T/B)^{1/2}\}$$

e

$$\tilde{\Sigma}_T = [0,T] \times \{x \in D; (T/B)^{1/2} \le |x| \le 2(T/B)^{1/2}\}.$$

Usando a desigualdade de Hölder na primeira integral em (3.22) e a desigualdade de Young na segunda integral, temos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\Sigma_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) \le C\left(\int_{\tilde{\Sigma}_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x)\right)^{1/p}\\ \times\left(\int_{\tilde{\Sigma}_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^{l-\tilde{p}}(x)\,|(\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}}\,\varphi^{\tilde{p}}(t)\right)^{1/\tilde{p}}\\ + C\int_{\Sigma_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}}\phi^l(x)\,|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}}.\end{aligned}$$

Usando (3.15), temos

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\tilde{\Sigma}_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi^l(x) \le C\left(\int_{\tilde{\Sigma}_T} u^p h(t,T)\phi^l(x)\right)^{1/p}\\ \times\left(\int_{\tilde{\Sigma}_T} T^{\gamma-1}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-1)}\phi^{l-\tilde{p}}(x)\,|\Delta\phi(x)|^{\tilde{p}}\right)^{1/\tilde{p}}\\ + CT^{\tilde{p}(\gamma-2)}\int_{\Sigma_T}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-2)}\phi^l(x).\end{aligned}$$

Considerando a mudança de variáveis $\tau = T^{-1}t$ $\xi = (T/B)^{-1/2}x$ e lembrando que $p = p^*$ é equivalente a $1 + \frac{N}{2} + \tilde{p}(\gamma-2) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_T} u^p h\phi^l &\le CT^{\frac{1}{\tilde{p}}\left(1+\frac{N}{2}+\tilde{p}(\gamma-2)\right)}B^{-\frac{N}{2\tilde{p}}+1}\left(\int_{\tilde{\Sigma}_T} u^p h\,\phi^l\right)^{\frac{1}{p}} + CT^{1+\frac{N}{2}+\tilde{p}(\gamma-2)}B^{-\frac{N}{2}}\\ &= CB^{-\frac{N}{2\tilde{p}}+1}\left(\int_{\tilde{\Sigma}_T} u^p h\,\phi^l\right)^{\frac{1}{p}} + CB^{-\frac{N}{2}}\end{aligned} \tag{3.23}$$

com

$$C = C(\tilde{\Omega}) \qquad \text{e} \qquad \tilde{\Omega} = \{\xi \in D; 1 \leq |\xi| \leq 2\}.$$

Por (3.21), temos

$$\lim_{T\to\infty} \left(\int_{\Sigma_T} u^p h \phi^l \right)^{\frac{1}{p}} = 0,$$

Assim, fazendo $T \to \infty$ em (3.23), temos

$$\int_0^\infty \int_D u^p \leq C B^{-\frac{N}{2}}.$$

Fazendo $B \to \infty$, concluímos que $u \equiv 0$.

- $p < \frac{1}{\gamma}$

Para o caso $p < \frac{1}{\gamma}$, usamos o mesmo argumento, com $\phi(x) = \Phi(\frac{|x|}{R})$, sendo $0 < R < T$ suficientemente grande e de modo que $T \to \infty$ não implique $R \to \infty$. Obtemos

$$\left(1 - \frac{C+1}{2p}\right) \int_{\Omega_T} u^p h \phi^l \leq C \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}} \int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}} \phi^{l-\tilde{p}}(x) \left|\Delta\phi(x)\right|^{\tilde{p}} \varphi^{\tilde{p}}(t) + \frac{2^{\tilde{p}-1}}{\tilde{p}} \int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{\tilde{p}}{p}} \phi^l(x) \left|\partial_t \varphi(t)\right|^{\tilde{p}}.$$

com

$$\Omega_T = [0,T] \times \{x \in D; |x| \leq 2R\}.$$

efetuando as mudanças de variáveis $\tau = T^{-1}t$ e $\xi = R^{-1}x$, temos

$$\int_{\Omega_T} u^p h \phi^l \leq C T^{1-\tilde{p}(\gamma-1)} R^{N-2\tilde{p}} + C T^{1+\tilde{p}(\gamma-2)} R^N.$$

Fazendo $T \to \infty$, como $p < 1/\gamma$ é equivalente a $1 + \tilde{p}(\gamma - 1) < 0$, obtemos

$$\int_0^\infty \int_\Omega u^p(x,t) \phi^l(x) dx dt \leq 0.$$

Fazendo $R \to \infty$, obtemos, por fim,

$$\int_0^\infty \int_D u^p(x,t) dx dt \leq 0$$

e chegamos mais uma vez a $u \equiv 0$.

3.4 Soluções Globais

Esta seção destina-se à demonstração do Teorema 3.2 (i). O método que utilizamos é o mesmo encontrado em [8].

Demonstração do Teorema 3.2 (i). Seja $q > 0$ tal que

$$\frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{1}{p} < \frac{N}{2q} < \frac{1}{p-1}, \tag{3.24}$$

com $q \geq p$. Podemos escolher q desta forma graças à condição $p > \frac{1}{\gamma}$. Por (3.5), temos

$$1 < p_{sc} < \frac{N(p-1)}{2} < q. \tag{3.25}$$

Definindo

$$b = \frac{N}{2p_{sc}} - \frac{N}{2q} = \frac{2-\gamma}{p-1} - \frac{N}{2q} \tag{3.26}$$

e considerando (3.24), (3.25) e (3.26), verificamos que

$$b > \frac{1-\gamma}{p-1} > 0, \qquad pb < 1, \qquad \frac{N(p-1)}{2q} + (p-1)b + \gamma = 2. \tag{3.27}$$

Consideremos o espaço

$$E_\delta = \left\{ u \in L^\infty((0,\infty), L^q(D)); t^b \|u(t)\|_{L^q} \leq \delta, \text{ para todo } t > 0 \right\},$$

munido com a métrica

$$d_{E_\delta}(u,v) = \sup_{t \geq 0} t^b \|u(t) - v(t)\|_{L^q},$$

para δ suficientemente pequeno a ser estimado mais adiante.

Seja $u_0 \in L^{p_{sc}}(D)$, com $\|u_0\|_{L^{p_{sc}}} < \delta/2$. Sobre E_δ, consideremos o operador Ψ definido por

$$\Psi(u)(x,t) = \int_D G(x,t;y,0)u_0(y)dy + \int_0^t \int_D G(x,t,y,s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(y,\sigma) d\sigma dy ds,$$

para cada $(x,t) \in D \times (0,\infty)$. Provaremos que é possível escolher $\delta > 0$ suficientemente pequeno de modo que o operador Ψ satisfaça as seguintes condições:

(i) $\Psi(E_\delta) \subset E_\delta$.

(ii) $\Psi : E_\delta \to E_\delta$ é uma contração.

Usaremos $\| \quad \|_r$ para para denotar a norma $\| \quad \|_{L^r(D)}$.

(i) Seja $u \in E_\delta$. Pelo Teorema 1.2 temos

$$\begin{aligned}
t^b \|\Psi(u)\|_q &\leq t^b \left\| \int_0^t \int_D G(x,t;y,0) u_0 dy \right\|_q + t^b \left\| \int_D G(x,t;y,s) \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(y,\sigma) d\sigma dy ds \right\|_q \\
&\leq C_1 t^b t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p_{sc}} - \frac{1}{q}\right)} \|u_0\|_{p_{sc}} + C_1 t^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \left\| \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(\sigma) d\sigma \right\|_{\frac{q}{p}} ds \\
&= C_1 \|u_0\|_{p_{sc}} + C_1 t^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \left\| \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} u^p(\sigma) d\sigma \right\|_{\frac{q}{p}} ds \\
&\leq C_1 \delta/2 + C_1 t^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u^p(\sigma)\|_{\frac{q}{p}} d\sigma ds \\
&= C_1 \delta/2 + C_1 t^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q}\right)} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u(\sigma)\|_q^p d\sigma ds \\
&\leq C_1 \delta/2 + C_1 t^b \delta^p \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma ds.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Por (3.25) e (3.27) segue-se que

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma ds &= \left(\int_0^1 (1-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma \right) \int_0^t s^{1-\gamma-bp} (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} ds \\
&= C_2 \int_0^t s^{1-\gamma-bp} (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} ds. \\
&= C_2 t^{2-\gamma-bp-\frac{N(p-1)}{2q}} \left(\int_0^1 s^{1-\gamma-bp} (1-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} ds \right) \\
&= C_2 C_3 t^{2-\gamma-bp-\frac{N(p-1)}{2q}} = C_1 C_2 t^{-b}.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Logo, por (3.28) (3.29), temos

$$t^b \|\Psi(u)\|_q \leq C_1 \delta/2 + C_1 C_2 \delta^p \leq \delta,$$

para δ suficientemente pequeno.

Portanto, estabelecemos que $\Psi(E_\delta) \subset E_\delta$.

(ii) Sejam $u, v \in E_\delta$. Temos que

$$
\begin{aligned}
t^b \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_q &\leq C_1 t^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \|u^p(\sigma) - v^p(\sigma)\|_{\frac{q}{p}} \, d\sigma ds \\
&\leq C_1 C(p) t^b \int_0^t (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} \int_0^s (s-\sigma)^{-\gamma} \left(\|u(\sigma)\|_q^{p-1} + \|v(\sigma)\|_q^{p-1} \right) \\
&\quad \times \|u(\sigma) - v(\sigma)\|_q d\sigma ds \\
&\leq 2C_1 C(p) t^b \delta^{p-1} d_E(u,v) \int_0^t \int_0^s (t-s)^{-\frac{N(p-1)}{2q}} (s-\sigma)^{-\gamma} \sigma^{-bp} d\sigma ds. \\
&\leq 2C_1 C_2 C_3 C(p) t^b \delta^{p-1} t^{-b} d_E(u,v).
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

Assim,

$$
t^b \|\Psi(u) - \Psi(v)\|_q \leq C\delta^{p-1} d_E(u,v),
$$

com $C = C_1 C_2 C_3 C(p)$, de modo que se δ é suficientemente pequeno, temos

$$
C\delta^{p-1} < 1
$$

e $\Psi : E_\delta \to E_\delta$ é, portanto, uma contração estrita. Assim, Ψ tem um ponto fixo, o qual constitui uma solução do problema (3.1) pelo Lema 3.6. Isto conclui a demonstração.

3.5 Condições necessárias para existência de soluções globais e de soluções locais

Nesta seção, demonstramos, os Teoremas 3.4 e 3.5.

Demonstração do Teorema 3.4. Seja u uma solução global de (3.1). Desse modo, $u \in C([0, R^2], C_0(D) \cap L^2(D))$, para todo $R > 0$. Faremos uso de um argumento similar ao da demonstração do Teorema 3.2 (ii). Neste caso, usaremos $\psi(x,t) = \phi(x)\varphi(t)$, em que $\varphi(t) = R^{2(\gamma-1)}(1 - t/R^2)_+^{\gamma-1+\eta}$, com η suficientemente grande e $\phi(x) = \varphi_1(x/R)$, com

$$
\varphi_1 \geq 0, \qquad \varphi_1 \in H^2(D) \cap L^\infty(D),
$$

e φ_1 é a primeira autofunção do operador laplaciano, associada ao primeiro autovalor

$$
\lambda_1 = \inf\{\|u\|_{H^1}; \|u\|_{L^2} = 1, u = 0 \text{ em } B_r^c\},
$$

com B_r^c denotando o complementar da bola de centro na origem e raio r, com r tal que $D^c \subset B_r$.

Do mesmo modo como chegamos à estimativa (3.19), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_R} u^p h(t,R^2)\varphi_1(x/R)dxdt + &CR^{2(\gamma-1)}\int_\Omega u_0(x)\varphi_1(x/R)dx\\ &\leq C\int_{\Omega_R} h(t,R^2)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_1(x/R)|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}}dxdt\\ &+C\int_{\Omega_R} h(t,R^2)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_1(x/R)^{-\frac{1}{p-1}}|\Delta[\varphi_1(x/R)]|^{\tilde{p}}\varphi(t)^{\tilde{p}}dxdt,\end{aligned} \tag{3.31}$$

com

$$\begin{aligned} h(t,R^2) &= \int_t^{R^2}(s-t)^{-\gamma}\varphi(s)ds\\ &= C(1-t/R^2)_+^{\eta}\end{aligned} \tag{3.32}$$

e

$$\Omega_R = [0,R^2]\times\Omega, \quad \text{com} \quad \Omega = \{x\in D; |x|\leq rR\}.$$

Considerando que $u \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}CR^{2(\gamma-1)}\int_\Omega u_0(x)\varphi_1(x/R)dx &\leq C\int_{\Omega_R} h(t,R^2)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_1(x/R)|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}}dxdt\\ &+C\int_{\Omega_R} h(t,R^2)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_1(x/R)^{-\frac{1}{p-1}}|\Delta[\varphi_1(x/R)]|^{\tilde{p}}\varphi(t)^{\tilde{p}}dxdt\end{aligned}$$

Em virtude de (3.32) e lembrando que $\varphi(t) = R^{2(\gamma-1)}(1-t/R^2)_+^{\eta+\gamma-1}$, temos

$$\begin{aligned}CR^{2(\gamma-1)}\int_\Omega u_0(x)\varphi_1(x/R)dx &= CR^{2\tilde{p}(\gamma-2)}\int_{\Omega_R}(1-t/R^2)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-2)}\varphi_1(x/R)dxdt\\ &+ CR^{2\tilde{p}(\gamma-1)}\int_{\Omega_R}(1-t/R^2)^{\eta-\tilde{p}(\gamma-1)}|\Delta[\varphi_1(x/R)]|^{\tilde{p}}dxdt.\end{aligned}$$

Considerando que $\Delta[\varphi_1(x/R)] = R^{-2}\lambda_1\varphi_1(x/R)$ e efetuando as mudanças de variáveis $\tau = R^{-2}t$, $\xi = R^{-1}x$, obtemos

$$\begin{aligned}CR^{2(\gamma-1)+N}\int_{B_r\cap D} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi &\leq CR^{2\tilde{p}(\gamma-2)+N+2}\int_0^1\int_{B_r\cap\Omega}(1-\tau)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-2)}\varphi_1(\xi)d\xi d\tau\\ &+ C\lambda_1^{\tilde{p}}R^{2\tilde{p}(\gamma-2)+N+2}\int_0^1\int_{B_r\cap\Omega}(1-\tau)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-1)}\varphi_1(\xi)d\xi d\tau\\ &\leq C(1+\lambda_1^{\tilde{p}})R^{2\tilde{p}(\gamma-2)+N+2}\int_{B_r\cap\Omega}\varphi_1(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} CR^{2(\gamma-1)}\int_{B_r\cap D} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi &\leq CR^{2\tilde{p}(\gamma-2)+2}\int_{B_r\cap\Omega}\varphi_1(\xi)d\xi \\ &= CR^{2\tilde{p}(\gamma-2)+2}\int_{B_r\cap\Omega}|R\xi|^{2(2-\gamma)(\tilde{p}-1)}|R\xi|^{2(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\varphi_1(\xi)d\xi \\ &\leq CR^{2\tilde{p}(\gamma-2)+2}|rR|^{2(2-\gamma)(\tilde{p}-1)}\int_{B_r\cap\Omega}|R\xi|^{2(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\varphi_1(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{B_r\cap D} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi \leq C\int_{B_r\cap\Omega}|R\xi|^{2(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\varphi_1(\xi)d\xi. \tag{3.33}$$

Considerando a estimativa

$$\begin{aligned} \inf_{\xi>1}\left(u_0(R\xi)|R\xi|^{2(2-\gamma)(\tilde{p}-1)}\right)\int_{B_r\cap D}|R\xi|^{2(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\varphi_1(\xi)d\xi &\leq \int_{(B_r\cap D)-B_1} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi \\ &\leq \int_{B_r\cap D} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi, \end{aligned}$$

concluímos, a partir de (3.33), que

$$\inf_{\xi>1}\left(u_0(R\xi)|R\xi|^{2(2-\gamma)(\tilde{p}-1)}\right)\int_{B_r\cap D}|R\xi|^{2(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\varphi_1(\xi)d\xi \leq C\int_{B_r\cap\Omega}|R\xi|^{2(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\varphi_1(\xi)d\xi.$$

Logo,

$$\inf_{\xi>1}\left(u_0(R\xi)|R\xi|^{2(2-\gamma)(\tilde{p}-1)}\right) \leq C. \tag{3.34}$$

Fazendo $R\to\infty$ em (3.34) e considerando a continuidade de u_0, obtemos

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(u_0(x)|x|^{2(2-\gamma)(\tilde{p}-1)}\right) = \liminf_{|x|\to\infty}\left(u_0(x)|x|^{2(2-\gamma)(\tilde{p}-1)}\right) \leq C,$$

ou seja,

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(u_0(x)|x|^{\frac{4-2\gamma}{p-1}}\right) \leq C,$$

como queríamos demonstrar.

Demonstração do Teorema 3.5. Seja $R>0$ suficientemente grande. Seja $\psi(x,t) = \varphi(t)\phi(x)$, para $\phi(x)=\varphi_1(x)$ como no Teorema 3.4 e $\varphi(t) = T^{\gamma-1}(1-t/T)_+^{\gamma-1+\eta}$, com η

suficientemente grande. Assim como em (3.31), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_T} u^p(x,t)h(t,T)\phi(x)dxdt + CT^{\gamma-1}\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_1(x/R)dx \\ \leq C\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_1(x/R)^{-\frac{1}{p-1}}|\Delta(\varphi_1(x/R))|^{\tilde{p}}\varphi(t)^{\tilde{p}}dxdt \\ + C\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_1(x/R)|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}}dxdt,\end{aligned}$$

em que $\Omega_T = [0,T]\times\Omega$, com $\Omega = \{x\in D; |x|\leq rR\}$, $\tilde{p} = \frac{p}{p-1}$ e $h(t,R^2) = C(1-t/T)_+^{\eta}$.

Como $u \geq 0$, temos

$$\begin{aligned}CT^{\gamma-1}\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_1(x/R)dx \leq C\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{1}{p-1}}|\Delta(\varphi_1(x/R))|^{\tilde{p}}\varphi(t)^{\tilde{p}}dxdt \\ + C\int_{\Omega_T} h(t,T)^{-\frac{1}{p-1}}\varphi_1(x/R)|\partial_t\varphi(t)|^{\tilde{p}}dxdt.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}CT^{\gamma-1}\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_1(x/R)dx \leq CT^{\tilde{p}(\gamma-1)}\int_{\Omega_T}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-1)}|\Delta(\varphi_1(x/R))|^{\tilde{p}}dxdt \\ + CT^{\tilde{p}(\gamma-2)}\int_{\Omega_T}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-2)}\varphi_1(x/R)dxdt.\end{aligned}$$

Considerando que e $\Delta(\varphi_1(x/R)) = R^{-2}\lambda_1\varphi_1(x/R)$ e efetuando as mudanças de variáveis $\tau = T^{-1}t$ e $\xi = R^{-1}x$, chegamos a

$$\begin{aligned}CT^{\gamma-1}R^N\int_{B_r\cap D} u_0(\xi x)\varphi_1(x)d\xi \leq CR^{N-2\tilde{p}}T^{1+\tilde{p}(\gamma-1)}\lambda_1^{\tilde{p}} \\ \times\int_0^1\int_{B_r\cap D}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-1)}\varphi_1(x/R)d\xi d\tau \\ + CR^N T^{1+\tilde{p}(\gamma-2)}\int_0^1\int_{B_r\cap D}(1-t/T)^{\eta+\tilde{p}(\gamma-2)}\varphi_1(x/R)d\xi d\tau \\ \leq CR^{N-2\tilde{p}}T^{1+\tilde{p}(\gamma-1)}\lambda_1^{\tilde{p}}\int_{B_r\cap D}\varphi_1(x/R)d\xi \\ + CR^N T^{1+\tilde{p}(\gamma-2)}\int_{B_r\cap D}\varphi_1(x/R)dxdt.\end{aligned}$$

Logo,

$$CT^{\gamma-1}\int_{B_r\cap D} u_0(\xi x)\varphi_1(x)d\xi \leq \left(C\lambda_1^{\tilde{p}}R^{-2\tilde{p}}T^{1+\tilde{p}(\gamma-1)} + CT^{1+\tilde{p}(\gamma-2)}\right)\int_{B_r\cap D}\varphi_1(x/R)dxdt$$

e, por conseguinte,

$$\int_{B_r\cap D} u_0(\xi x)\varphi_1(x)d\xi \leq \left(C\lambda_1^{\tilde{p}}R^{-2\tilde{p}}T^{1+(\tilde{p}-1)(\gamma-1)} + CT^{(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\right)\int_{B_r\cap D}\varphi_1(x/R)d\xi, \tag{3.35}$$

Fazendo uso da estimativa

$$\begin{aligned}\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi))\int_{B_r\cap D}\varphi_1(\xi)d\xi &\leq \int_{(B_r\cap D)-B_1} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi\\ &\leq \int_{(B_r\cap D)} u_0(R\xi)\varphi_1(\xi)d\xi,\end{aligned}$$

em (3.35), obtemos

$$\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi))\int_{B_r\cap D}\varphi_1(\xi)d\xi \leq \left(C\lambda_1^{\tilde{p}}R^{-2\tilde{p}}T^{1+(\tilde{p}-1)(\gamma-1)} + CT^{(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\right)\int_{B_r\cap D}\varphi_1(x/R)d\xi.$$

Logo,

$$\inf_{|\xi|>1}(u_0(R\xi)) \leq \left(C\lambda_1^{\tilde{p}}R^{-2\tilde{p}}T^{1+(\tilde{p}-1)(\gamma-1)} + CT^{(2-\gamma)(1-\tilde{p})}\right). \tag{3.36}$$

Fazendo $R \to \infty$ em (3.36) e lembrando que u_0 é contínua, temos

$$\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = \liminf_{|x|\to\infty} u_0(x) \leq CT^{(2-\gamma)(1-\tilde{p})} \leq CT^{-\frac{2-\gamma}{p-1}}.$$

3.6 Problemas em aberto

Apresentamos a seguir algumas questões e problemas em aberto.

(i) Se em lugar da condição de Neumann for considerada a condição de Robin, isto é,

$$\frac{\partial}{\partial n}u + \alpha(x)u = 0, \text{ com } x \in \partial D,$$

para $\alpha > 0$, como se comporta o correspondente problema com relação à existência de um expoente crítico?

(ii) O que acontece com o expoente crítico se a não linearidade em (3.1) for trocada por

$$\int_0^t (t-s)^{-\gamma}t^{\sigma}|x|^{\rho}u^p(x,s)ds,$$

por exemplo?

(iii) Sejam $p, q > 1$, $u_0, v_0 \in C_0(D)$, $\gamma, \delta \in (0, 1)$ e D um domínio exterior com fronteira Lipschitz. O que se pode dizer do problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\gamma} v^p(s) ds, \ x \in D \times (0, \infty), \\ v_t - \Delta v = \displaystyle\int_0^t (t-s)^{-\delta} u^q(s) ds, \ x \in D \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} = 0, \ x \in \partial D \times (0, \infty), \\ u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \ x \in D, \\ v(0, x) = v_0(x) \geq 0, \ x \in D, \end{cases} \tag{3.37}$$

quanto à existência de soluções globais e não globais?

(iv) O que ocorre com o correspondente problema (3.1) sobre cones e outros domínios ilimitados?

REFERÊNCIAS

[1] D. Andreucci & A. Tedeev. *A Fujita type result for a degenerate Neumann problem in domains with non compact boundary.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. **231** (1999), 543-567.

[2] R. Aris. "The Mathematical Theory of diffusion and reaction in Permeable Catalysts".Clarendon Press, London, 1975.

[3] C. Bandle & H. A. Levine. *On the existence and non-existence of global solutions of reaction-diffusion equations in sectorial domains.* Trans. Am. Math. Soc. **655** (1989), 595-624.

[4] J. Bebernes & D. Eberly. "Mathematical Problems from Combustion Theory". Applied Math. Sciences, Springers, New York, 1989.

[5] R. Bellman. "Mathematical Methods in Medicine". Wourld Scientific, Singapore, 1983.

[6] H. Brézis. "Análisis Funcional", teoría y aplicaciones, Alianza, Madrid, 1984.

[7] H. Brézis & T. Cazenave. "Nonlinear evolution equations"(em preparação), 1994.

[8] T. Cazenave, F. Dickstein & F. B. Weissler. *An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling.* Nonlinear Analysis **68** (2008), 862-874.

[9] Z. Q. Chen, R. J. Williams, & Z. Zhao. *A Sobolev inequality and Neumann heat kernel estimates for unbounded domains.* Math. Res. Lett. **1** (1994), 177-184.

[10] S. Childress & J. K. Perkus. "Mathematical Models in Developmental Biology". Courant Inst. of Math. Sciences, New York University, 1977-1978.

[11] K. Deng & H. A. Levine. *The role of critical exponent in blow up theorems: The sequel.* J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), 85-126.

[12] D. E. Edmunds & W. D. Evans. "Spectral Theory and Differential Operators", Oxford Mathematical, 1987. Monographs.

[13] M. Escobedo & M. A. Herrero. *Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system* Jour. of Diff. Equations **89** (1991), 176-202.

[14] G. R. Gavalas. "Nonlinear Differential Equations of Chemically Reacting Systems". Springers Tracts in Natural Philosophy, Springer-Verlag, New York, 1968.

[15] H. Fujita. *On the blow up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$. J. Fac. Scien. Univ. Tokio **13** (1966), 109-124.

[16] M. Guedda & M. Kirane. *Criticality for some evolution equations.* Differential Equations. **37** (2001), 511 - 520.

[17] M. Kirane, Y. Laskri & N.-e. Tatar. *Critical exponent of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives.* J. Math, Anal. Appl. **312** (2005), 488 - 501.

[18] K. Hayakawa. *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations.* Proc. Japan Acad. **49** (1973), 503-505.

[19] H. A. Levine & Q. S. Zhang. *The critical Fujita number for a semilinear heat equation in exterior domains with homogeneous Neumann boundary values.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **130A** (2000), 591-602.

[20] H. A. Levine. *The role of the critical exponents in blow up theorems.* SIAM, Rev. **32** (1990), 269-288.

[21] K. Kobayashi, T. Sirao, & H. Tanaka. *On the blowing up problem for semilinear heat equation.* J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 407-429.

[22] E. Mitidieri & S. I. Pohozaev . *A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities.* Proc. Steklov. Inst. Math., **234** (2001), 1-383 .

[23] J. F. Rault. *The Fujita phenomenon in exterior domains under the Robin boundary conditions* to appear.

[24] F. B. Weissler. *Existence e nonexistence of global solutions of a semilinear heat equation.* Israel J. Math. **38** (1981), 29-40.

[25] Q. S. Zhang. *A general blow-up result on nolinear boundary-value problems on exterior domains*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, **131 A** (2001) 451-475.