Universidade Federal de Pernambuco
Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva

# *O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças*

Lianny Milenna de Sá Melo

Recife
2012

Lianny Milenna de Sá Melo

# O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Mestre em Psicologia.

Área de concentração: Psicologia Cognitiva
Orientadora: Dra. Alina Galvão Spinillo

Recife
2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Maria do Carmo de Paiva CRB-4 1291

M528e Melo, Lianny Milenna de Sá.
O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças / Lianny Milenna de Sá Melo. – Recife: O autor, 2012.
183 f. : il. ; 30 cm.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Alina Galvão Spinillo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CFCH. Pós-Graduação em Psicologia, 2012.
Inclui bibliografia.

1. Psicologia cognitiva. 2. Análise combinatória. 3. Combinações (Matemática). 4. Raciocínio em crianças. I. Spinillo, Alina Galvão. (Orientadora). II. Titulo.

150 CDD (22.ed.) UFPE (CFCH2012-107)

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Lianny Milenna de Sá Melo

O Efeito da Explicitação dos Princípios Invariantes na Resolução de Problemas de Combinação por Crianças..

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva da Universidade Federal de Pernambuco para obtenção do título de Mestre.
Área de Concentração: Psicologia Cognitiva

Aprovado em: 23 de maio de 2012

Banca Examinadora

Dra. Alina Galvão Spinillo
Instituição: U.F.PE

Assinatura: ______________________

Dra. Mª Tereza Carneiro Soares
Instituição: U.F.PR

Assinatura: ______________________

Dra. Sintria Labres Lautert
Instituição: U.F.PE

Assinatura: ______________________

## *Banca Examinadora*

Presidente: Dra. Alina Galvão Spinillo
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Examinador Externo: Dra. Maria Tereza Carneiro Soares
Instituição: Universidade Federal do Paraná – UFPR

Examinador Interno: Dra. Sintria Labres Lautert
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Examinador Externo – Suplente: Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Examinador Interno – Suplente: Luciano Rogério de Lemos Meira
Instituição: Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Coordenador da Pós-Graduação
Dr. Antônio Roazzi

## Dedicatória

Dedico a conclusão deste trabalho aos meus pais pelo apoio e amor incondicional.

Ao meu irmão, aos meus amigos e todos aqueles que colaboraram, torceram, e, sobretudo, acreditaram.

# *Agradecimentos*

Primeiramente, agradeço a Deus pela minha vida, por se fazer tão presente em mim, me permitindo alcançar mais uma conquista.

A minha orientadora Alina, por ter me ensinado o que é fazer pesquisa. Você é uma das principais responsáveis pela minha formação profissional. Muito obrigada pelo aprendizado, pela convivência nesses 6 anos e por ser uma das grandes incentivadoras nessa minha caminhada.

Agradeço aos meus pais, Ivan e Lenira, pelo amor, pela força, por cada vibração, pela compreensão e aconchego nos momentos mais difíceis. Ao meu irmão, Dannilo, que eu sei o quão torce por mim e vibra a cada vitória conquistada. Não há palavras que expressem o grande amor e admiração que tenho por vocês. Amo vocês!

Aos familiares e amigos que foram importantíssimos nesses anos. À Manoela, pelo apoio de sempre e pela colaboração na coleta de dados da pesquisa. À Jacqueline que, além de minha amiga, foi minha parceira de caminhada nesse mestrado; que esteve ao meu lado desde a seleção até a finalização dessa dissertação. À Juliana, cujo trabalho foi o grande inspirador para este meu estudo e que sempre esteve disponível para me ajudar. Ju, obrigada pela sua amizade! À Mona, pelas discussões teóricas ao longo das disciplinas e amizade construída nesse período. À Michelly, Luana e Caio pela ajuda na coleta de dados e transcrições. À Tatyane e à Ariadne pela amizade e apoio.

Aos membros do Nuppem (Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática) e aos colegas do mestrado, pelas discussões que contribuíram de maneira significativa para o meu amadurecimento profissional.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva e, em especial, à professora Sintria, pela sua disponibilidade e discussões teóricas que tanto me ajudaram na construção dessa pesquisa.

Aos funcionários do departamento, que resolveram todas as questões administrativas da pós-graduação.

Às escolas, que possibilitaram a realização deste estudo; aos professores que compreenderam e permitiram a ausência dos alunos na sala de aula durante as realizações das entrevistas; aos pais que autorizaram a participação dos seus filhos na pesquisa; e aos alunos, os principais personagens desse trabalho, que foram bastante solícitos quando convidados a participar da pesquisa.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pela concessão da bolsa-auxílio à pesquisa, possibilitando maior dedicação ao Mestrado.

# Resumo

MELO, L. M. S. **O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças.** 2012. 183 p. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco.

Silva e Spinillo (2010) investigaram as implicações da explicitação dos princípios invariantes em resolução de problemas de produto cartesiano por crianças. Os resultados evidenciaram que a explicitação destes princípios provocou um efeito facilitador sobre a resolução desses problemas, favorecendo o uso de estratégias mais adequadas. Diante disso, emergiram alguns questionamentos: (i) Será que se os princípios invariantes da combinação forem explicitados nos enunciados dos problemas de combinação ocorrerá o mesmo fenômeno que aquele apresentando no estudo de Silva e Spinillo (2010)? (ii) Quais as estratégias que as crianças adotam na resolução de problemas de combinação quando há a explicitação dos princípios invariantes? Na tentativa de responder a tais questões, a presente pesquisa examinou o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre o desempenho e as estratégias adotadas por crianças na resolução de problemas de combinação. Para tal, foi realizado um estudo, composto por duas etapas com finalidades distintas, porém, complementares. A Etapa 1 teve como objetivo examinar o desempenho dos estudantes nos problemas de combinação e nos de produto cartesiano. Participaram desse estudo 60 crianças, com 8 anos de idade, de ambos os sexos, alunas do 3º ano do ensino fundamental de escolas particulares do Recife. Esses alunos foram oriundos de dois grupos distintos: Grupo 1 (participantes do estudo de Silva e Spinillo, que resolveram problemas de produto cartesiano) e Grupo 2 (estudantes que compõem o banco de dados da presente investigação e que resolveram problemas de combinação). As crianças do Grupo 1 foram solicitadas a resolver 8 problemas de produto cartesiano e as do Grupo 2 a resolver 8 problemas de combinação. Ambos os tipos de problemas foram distribuídos em duas situações: Situação I, problemas sem explicitação dos princípios invariantes; e Situação II, problemas com explicitação dos princípios invariantes. A Etapa 2 investigou o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre a resolução de problemas de combinação. Participaram deste estudo 90 crianças, de ambos os sexos, com idade entre 8 e 10 anos, alunas do 3º (mesmos estudantes do Grupo 2 da Etapa 1), 4º e 5º anos do Ensino Fundamental de escolas particulares da região metropolitana do Recife. A Etapa 2 foi composta por três situações: Situação I, problemas sem explicitação dos princípios invariantes; Situação II, problemas com explicitação dos princípios invariantes; e Situação III, explicitação dos princípios invariantes acompanhado de desenhos de figuras recortadas. Os resultados da Etapa 1 mostraram que problemas de produto cartesiano são mais facilmente resolvidos do que os de combinação. Ademais, a explicitação dos princípios invariantes nos problemas de combinação não favoreceu uma melhora no desempenho nos alunos do 3º ano. Os resultados referentes à Etapa 2 indicaram que apenas o desempenho dos alunos do 4º ano melhorou diante das Situações II e III. Por outro lado, as Situações II e III favoreceram o uso de estratégias mais apropriadas para os estudantes de todas as séries. Observou-se também que os problemas com pares numéricos que geravam grupos de tamanho pequeno eram mais facilmente resolvidos e promoviam o uso de estratégias mais elaboradas. Concluiu-se que crianças jovens são capazes de desenvolver estratégias de resolução apropriadas à combinação, sendo possível trabalhar este conteúdo nas séries inicias do Ensino Fundamental.

**Palavras-chave:** raciocínio combinatório, princípios invariantes, crianças.

# Abstract

MELO, L. M. S. **The effect of explicit of the invariants principles in solving combination problems by children.** 2012. 183 p. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco.

Silva and Spinillo (2010) investigated the implications of explicit of the principles invariants in problem solving Cartesian product by children. The results showed that the explanation of these principles led to a facilitatory effect on the resolution of these problems by encouraging the use of more appropriate strategies. Therefore, some questions have emerged: (i) Does the invariants principles of combination are explicit in the description of the problem of combining the same phenomenon that occurs showing that the study of Silva and Spinillo (2010)? (ii) What are the strategies that children adopt in resolving problems when there is an explicit invariant principles of the combination? In an attempt to answer such questions, this research examined the effect of explicit of the invariants principles on performance and the strategies adopted by children in solving problems of combination. To this end, a study was conducted, consisting of two stages with different purposes, but complementary. Stage 1 aimed to examine student performance on the problems and the combination of Cartesian product. Participated in this study 60 children, 8 years old, both sexes, the 3rd year students of elementary education at private schools in Recife. These students originate two different groups: Group 1 (participants in the study of Silva and Spinillo solved problems of Cartesian product) and Group 2 (students who make up the database of this research and solved combination problems). Children in group 1 were asked to solve eight Cartesian product problems and the children of Group 2 solved eight combination problems. Both types of problems were divided into two situations: Situation I, problems without explicit of the invariants principles, and Situation II, problems with explanation of the invariants principles. Stage 2 investigated the effect of explicit of the principles invariants on solving problems of combination. The study included 90 children of both sexes, aged between 8 and 10 years, students of the 3rd (same students in Group 2 from Stage 1), 4th and 5th year of elementary school private schools in the metropolitan area of Recife. Stage 2 consisted of three situations: Situation I, problems without explicit of the invariants principles, Situation II, problems with explicit of the invariants principles, and Situation III, explanation of the invariants principles accompanied by drawings of figures cut. The results of the Stage 1 showed that Cartesian product problems are solved more easily than the combination. Furthermore, the explanation of the invariants principles of the combination problems did not favor an improvement in performance in the 3rd year students. The results of Stage 2 indicated that only the achievement of students in fourth grade improved in the face of Situations II and Iii. On the other hand, Situations II and III favored the use of strategies that are appropriate for students of all grades. It was also noted that problems with numerical sets which generate small-sized groups were more easily resolved and promoted the use of more elaborate strategies. It was concluded that young children are able to develop appropriate strategies to solve the combination, being possible to work this content in initial series of elementary school.

**Keywords:** combinatorial reasoning, invariants principles, children.

# *Lista de Figuras*

# *Lista de Quadros*

# *Lista de Tabelas*

# SUMÁRIO

***Apêndice C – Etapa 2: Problemas da Situação I (sem explicitação d princípios invariantes)***

***Apêndice D – Etapa 2: Problemas da Situação II (com explicitação dos princípios invariantes)***

***Apêndice E – Etapa 2: Problemas da Situação III (com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas)***

# *Introdução*

A análise combinatória constitui um dos núcleos da Matemática discreta e parte importante da Probabilidade. Trata-se de um grande campo de investigação com atividade intensa devido as suas inúmeras e diferentes áreas de aplicações, tais como a Geologia, Química, Gestão Empresarial, entre outras. Contudo, a aprendizagem da Combinatória sempre se apresentou aos estudantes como um obstáculo a ser ultrapassado. Trabalhar este assunto a partir de definições e fórmulas leva os alunos a um exercício mecânico sem que haja a compreensão dos princípios que fundamentam tal conteúdo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) propuseram mudanças expressivas para o Ensino Fundamental, acrescentando ao estudo dos *Números e Operações,* do *Espaço e Formas* e de *Grandezas e Medidas,* o bloco de conteúdos denominado de *Tratamento da Informação,* o qual se refere aos estudos sobre as noções de Estatística, Probabilidade e de Combinatória. Logo, a Análise Combinatória é um tema tratado com importância no PCN, uma vez que há grande demanda social em função de sua utilidade no contexto atual e na análise de dados, na tomada de decisões e no desenvolvimento da criatividade do aluno (Brasil, 1997).

Os PCN sugerem como objetivo em relação à combinatória para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental "levar o aluno a lidar com situações-problemas que envolvem combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (Brasil, 1997, p.57). No que diz respeito ao 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, faz-se a seguinte afirmação

> (...) relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para a aplicação no cálculo de probabilidade (Brasil, 1997, p.57).

Estes objetivos passam a requerer do professor a inclusão da Análise Combinatória em sua prática pedagógica desde o 1º ciclo. E isto poderá ocasionar dificuldades pelo fato de se tratar de um assunto que pode causar desagrado aos aprendizes, sendo este, portanto, um grande desafio.

Diversas investigações foram realizadas sobre os conceitos e relações das operações multiplicativas lecionadas nas séries iniciais do Ensino Fundamental, contudo, são poucas as pesquisas que examinam o processo de compreensão de crianças sobre a combinação. Os estudos realizados nessa direção (e.g. Barratt, 1975; Batista, 2002; Brown, 1981; Bryant, Morgado & Nunes, 1992; Eizenberg & Zaslavsky, 2002; English, 1992, 1993; Fischbein & Gazit, 1988; Fischbein & Grossman, 1997; Mekhmandarov, 2000; Moro & Soares, 2006; Soares & Moro, 2006; Nunes & Bryant, 1997; Pessoa & Borba, 2007, 2008, 2009; Pessoa & Matos, 2006; Schliemann, 1988; Selva *et al.*, 2008; Taxa-Amaro, 2006) afirmam que este tema é considerado complexo se comparado com outros conteúdos que compõem o campo das estruturas multiplicativas. Entretanto, tem-se observado que alunos de séries iniciais já conseguem desenvolver estratégias de resolução interessantes para tais problemas que podem ser aproveitadas pelas escolas a fim de ajudá-los a avançar na compreensão desses tipos de problemas. Sendo assim, são necessários mais estudos nessa área que possam investigar a compreensão das crianças jovens acerca do raciocínio combinatório a fim de que elas se tornem cada vez mais aptas a resolverem com êxito estes tipos de problema.

O Estudo conduzido por Silva e Spinillo (2010) investigou se as crianças teriam um melhor desempenho, adotando estratégias mais apropriadas, quando houvesse a explicitação dos princípios invariantes nos enunciados dos problemas de produto cartesiano. Os resultados desta pesquisa evidenciaram que o desempenho das crianças melhora quando há a explicitação dos princípios invariantes.

A partir do estudo de Silva e Spinillo (2010), e fundamentado na teoria dos campos conceituais de Vergnaud (1998, 2009), a qual defende que um conceito é formado por um conjunto de representações, um conjunto de invariantes operacionais e um conjunto de situações que dá sentido aos conceitos, o presente estudo buscará investigar o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre a resolução de problemas de combinação. Para atingir este objetivo, o estudo foi constituído por duas etapas. A Etapa 1[1] examinou o desempenho de crianças do 3º ano do Ensino Fundamental na resolução de problemas de produto cartesiano e combinação em duas situações diferentes: uma em que os princípios invariantes deste conceito não foram explicitados no enunciado dos problemas e outra em que estes princípios foram explicitados. Já a Etapa 2 investigou a resolução de problemas de combinação em alunos do 3º ao 5º ano em três situações distintas, que variavam em função da explicitação ou não-explicitação dos princípios invariantes da combinação. Na Situação I, os princípios invariantes da combinação estavam implícitos no enunciado dos problemas. Na Situação II, os princípios invariantes foram explicitados no enunciado dos problemas. Na Situação III, os princípios invariantes também estavam explícitos nos enunciados dos problemas, porém foi disponibilizado desenhos de figuras recortadas.

A fim de situar o leitor, o presente estudo dividiu-se em cinco capítulos. O capítulo I apresenta o referencial teórico adotado, abordando a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, a análise combinatória nas perspectivas matemática e psicológica, apresentando considerações teóricas acerca do produto cartesiano, correspondência um-para-muitos e, por fim, uma revisão dos estudos com crianças e adolescentes realizados nessa área.

[1] Os participantes da Etapa 1 compõem o banco de dados da dissertação intitulada "O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças", de Juliana Ferreira Gomes da Silva, que se encontra disponível no NUPPEM (Núcleo de Pesquisas em Psicologia da Educação Matemática), na Universidade Federal de Pernambuco.

O capítulo II compreende os objetivos e o método, descrevendo em detalhes os participantes, materiais utilizados, planejamento experimental, procedimentos adotados na coleta de dados e as situações e problemas empregados em cada etapa deste estudo.

O capítulo III, por sua vez, corresponde ao sistema de análise das estratégias de resolução, onde há uma descrição de cada estratégia acompanhada de exemplos provenientes dos protocolos e das respostas das crianças fornecidas durante a entrevista.

O capítulo IV apresenta os resultados relativos às duas etapas da pesquisa. Os resultados da Etapa 1 corresponde ao desempenho dos estudantes na resolução de problemas de produto cartesiano e combinação; ao passo que os resultados da Etapa 2 referem-se ao desempenho e às estratégias de resolução adotadas nos problemas de combinação em função das diferentes situações, grandeza dos pares numéricos e escolaridade.

O capítulo V discorre sobre as principais conclusões derivadas dos resultados obtidos, além das contribuições do presente estudo, implicações educacionais e possíveis idéias para pesquisas futuras.

# Capítulo I

# Fundamentação Teórica

As considerações teóricas que fundamentam o presente estudo serão apresentadas em três seções. Na primeira será abordada a teoria de Vergnaud, especificamente a teoria dos campos conceituais e o campo das estruturas multiplicativas. A segunda versará sobre a análise combinatória a partir da perspectiva matemática, focalizando os seus diferentes tipos de problema, e da psicológica, abordando os problemas de produto cartesiano e o esquema de correspondência um-para-muitos. Na terceira e última seção serão apresentados os estudos conduzidos com crianças na área do raciocínio combinatório.

## 1.1 Vergnaud: a teoria dos campos conceituais e o campo das estruturas multiplicativas

De acordo com Vergnaud (1998), o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, pelo sujeito, ocorre por meio de experiência, maturidade e aprendizagem durante um longo período de tempo. A teoria dos campos conceituais é uma teoria psicológica da conceitualização da realidade, através da qual é possível estudar os elos e as rupturas existentes entre os saberes, além de poder ser aplicada a qualquer campo do conhecimento. A formação de um conceito vai além da definição de suas propriedades, pois envolve a complexidade decorrente da necessidade de abranger em uma única perspectiva teórica todo o desenvolvimento das situações gradualmente dominadas, dos teoremas e conceitos precisos para operar de forma eficaz nessas situações, e das palavras e símbolos que podem representar adequadamente esses conceitos e operações para os indivíduos, de acordo com o seu nível cognitivo.

Sendo assim, os conceitos não devem ser definidos apenas pela sua estrutura, pois, segundo Vergnaud (1997), os sujeitos só podem apreender um conceito quando eles dominam três aspectos:

1. Conjunto de *situações*, que dá sentido funcional aos conceitos;
2. Conjunto de *invariantes operatórios* ou de propriedades do conceito, que são as propriedades que se conservam nos conceitos apesar das mudanças ocorridas e que possibilitam que o conceito seja reconhecido nas mais diversas situações;
3. Conjunto de *representações*, que possibilitam a representação dos invariantes e, por conseguinte, a representação das situações e dos procedimentos para lidar com elas, veiculando, assim, idéias sobre o conceito na sociedade.

Assim, esses aspectos do conceito formam um tripé (situações, invariantes e representações) e estão intimamente relacionados a outros. Portanto, um conceito não se desenvolve de maneira isolada, mas nas relações com outros conceitos.

Embora, as situações forneçam sentido ao conceito e que este se torne significativo por meio de delas, o sentido não está nas situações propriamente ditas nem em palavras ou símbolos. O sentido é uma relação do indivíduo com as situações e com os significantes. Vergnaud distingue duas classes de situações, a saber: (i) aquelas em que o indivíduo, em certo momento de seu desenvolvimento, e sob certas circunstâncias, dispõe das competências necessárias para o tratamento imediato da situação; (ii) aquelas nas quais o sujeito não possui todas as competências necessárias para lidar com a situação, o que o exige um tempo de reflexão e exploração para obter o sucesso.

Desta forma, pode-se perceber que o conceito de esquema não funciona da mesma maneira nas duas situações. Na primeira, o sujeito já dispõe do esquema necessário para resolvê-la, apresentando, portanto, condutas automatizadas. Já na segunda, ocorre a testagem de vários esquemas até atingir, ou não, a meta desejada (Vergnaud, 1993).

Isto posto, é importante pensar que um conceito não está interligado a apenas uma situação, sendo necessário, portanto, fornecer situações diversas para a resolução de problemas a fim de que os alunos sejam capazes de fazer reflexões e estabelecerem as relações necessárias para a construção de um conhecimento amplo e adequado dos conceitos. Desse modo, é necessário que o professor trabalhe essas conexões existentes entres os conceitos a fim de que os alunos consigam percebê-los e compreendê-los de uma forma mais ampla e sistêmica e não de maneira fragmentada.

No que concerne aos invariantes operatórios, estes instituem a base conceitual implícita, isto é, as competências que os indivíduos possuem para resolver problemas em determinadas situações, mas que carecem da explicitação do conhecimento que é utilizado. Os invariantes operatórios são os responsáveis pela ligação entre a teoria e a prática, pois a percepção, a busca e a seleção de informações fundamentam-se no sistema de conceitos-em-ação disponível aos indivíduos e nos teoremas que subjazem a sua conduta (Vergnaud, 1998).

Conceitos-em-ação e teoremas-em-ação designam os conhecimentos contidos nos esquemas e são denominados por Vergnaud pela expressão invariantes operatórios. O conceito-em-ação é uma categoria do pensamento considerada importante, já o teorema-em-ação é uma hipótese considerada verdadeira sobre a realidade. O fato de este conhecimento ser implícito faz com o que o indivíduo tenha dificuldades de expressá-lo ou explicá-lo, contudo, isso não significa que este conhecimento não possa ser explicitado, já que os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação podem, gradualmente, tornarem-se conceitos científicos, podendo ser comunicado a outros e discutido (Vergnaud, 1998).

No que diz respeito à representação, Vergnaud (1983) a considera como sendo um sistema simbólico imbuído de significado para o sujeito. Para este autor, dispomos de representações computáveis para gestos e ações do mundo físico como também para comportamentos verbais e interações sociais. Tais representações podem ser corretas ou não, precisas ou vagas, implícitas ou explícitas, porém em todos os casos elas têm a função de serem substitutos computáveis da realidade.

Assim, o conhecimento está organizado em campos conceituais, os quais são definidos como um conjunto de situações, cujo domínio exige uma multiplicidade de conceitos, procedimentos e representações.

Na área da aritmética, Vergnaud (2009) considera dois grandes campos conceituais: o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. O primeiro é formado por um conjunto de situações cujo domínio requer a adição, a subtração, ou a combinação destas operações. Já o campo das estruturas multiplicativas é constituído por situações que envolvem a multiplicação, a divisão, ou a combinação dessas operações. Ainda fazem parte deste campo os conceitos de fração, razão, proporção e porcentagem, combinação, entre outros.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), o raciocínio aditivo se baseia na relação parte-todo e diz respeito às ações de unir ou separar objetos através do uso do esquema de correspondência termo a termo. Embora possam ser trabalhados simultaneamente, há uma distinção entre os campos multiplicativo e aditivo. Apesar de a multiplicação poder ser resolvida, em algumas situações, por meio da adição repetida, há bases de raciocínio diferentes entre essas duas operações quando examinadas as suas relações conceituais. A multiplicação não envolve ações de unir ou separar objetos, pois está relacionada a um novo conjunto de invariantes e de sentido de número. No campo aditivo a base é a relação parte-todo enquanto que no multiplicativo é a correspondência um-para-muitos.

Vergnaud (1983, 2009) descreve três classes de problemas multiplicativos que envolvem relações ternárias e quartenárias: isomorfismo de medidas, produto de medidas e proporções múltiplas. Cada uma delas apresenta subclasses de problemas e de acordo com cada tipo de problema, existem níveis de complexidade distintos, podendo ser solucionados através da multiplicação ou divisão ou até mesmo pela combinação de ambas, todavia, o grau de dificuldade do problema será determinado pela sua estrutura e não pela aplicação de uma ou outra operação.

O isomorfismo de medidas compreende uma relação quartenária entre quantidades, das quais duas delas são medidas de um tipo e as outras são medidas de outro tipo (A x B = C x D), envolvendo uma proporção direta simples entre esses dois tipos de medidas. Os problemas desse tipo podem ser revolvidos por diversos procedimentos, utilizando diferentes propriedades, por apresentar níveis de dificuldade distintos.

Os problemas de produto de medidas envolvem uma relação ternária, isto é, entre três variáveis, das quais uma delas é o produto das outras duas (A x B = C) no plano numérico e dimensional. Sua estrutura consiste na composição cartesiana de duas medidas para encontrar a terceira, como acontece com os problemas que envolvem área, volume e combinatória. Para Vergnaud, a estrutura de produtos de medidas apresenta dificuldades específicas pelo fato de seus conceitos e relações funcionais complexas serem de difícil compreensão por parte da criança.

No que diz respeito aos problemas de proporções múltiplas, estes compreendem também uma relação ternária entre as medidas, sendo esta a razão da confusão que há entre esse tipo de problemas com os produtos de medida. Contudo, os problemas de proporções múltiplas não podem ser resolvidos através do produto das outras medidas, já que envolvem uma relação intrínseca de significados, sendo, portanto, mais complexos do que os problemas de produto de medidas. Fazem parte desta classe, os problemas que trazem uma noção de tempo decorrido.

Dessa maneira, o nível de complexidade do problema varia, principalmente, em função de sua estrutura. Assim, os problemas de isomorfismo de medidas são considerados os mais fáceis, seguidos dos problemas de produto de medidas e, por fim, os de proporções múltiplas, considerados o mais difícil dentre essas três classes.

Como mencionado, dentre os problemas que compõem o campo das estruturas multiplicativas encontra-se os de combinatória. Foi sobre este conceito que o presente estudo delineou a sua investigação, tendo como foco os princípios invariantes que compõem o conceito da combinação. Portanto, considera-se a teoria dos campos conceituais de Vergnaud como sendo de extrema importância para a compreensão e para a fundamentação teórica do estudo em questão.

A seguir, serão apresentados alguns aspectos do raciocínio combinatório, sobretudo, no que toca à combinação, nas perspectivas da Matemática e da Psicologia.

## 1.2 Análise combinatória

### 1.2.1 Análise combinatória na perspectiva da Matemática

#### 1.2.1.1 Combinação, Arranjo e Permutação

Segundo Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (2006), a Análise combinatória ou Combinatória é a parte da matemática que analisa as estruturas e relações discretas. Estes autores enfatizam a existência de dois tipos de problemas que ocorrem com freqüência em combinatória, a saber: (i) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem determinadas condições; (ii) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem determinadas condições dadas.

Historicamente, a Combinatória pode ser conhecida como a “arte de contar”. Merayo (2001) também defende esta posição ao afirmar que a “Análise Combinatória é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto” (p. 229).

Segundo Santos, Mello e Murari (1998), as construções clássicas da análise combinatória são divididas em três grupos de problemas: arranjo, combinação e permutação. No arranjo trabalha-se com um subgrupo do grupo, não existe repetição de elementos, contudo, a ordem de agrupamento dos elementos é considerada no problema.  O arranjo pode ser definido da seguinte maneira:

> Arranjos simples de **n** elementos tomados **p** a **p**, onde **n** > 1 e **p** é um número natural tal que **p** < **n**, são todos os grupos de **p** elementos distintos, que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos **p** elementos que compõe cada grupo (Santos, Mello & Murari, 1998, p. 42).

Sua fórmula matemática pode ser expressa da seguinte forma: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

Na combinação, trabalha-se com um subgrupo do grupo, não há repetição de elementos e, diferentemente do que ocorre no arranjo, a ordem dos elementos não é importante, ou seja, basta que a combinação ocorra apenas uma vez. É definida da seguinte maneira: “A combinação de **n** elementos tomados **p** a **p**, a qualquer agrupamento não-ordenado dos **p** elementos distintos escolhidos dos **n** elementos existentes.” (Santos, Mello & Murari, 1998, p. 46). Sua fórmula pode ser expressa da seguinte maneira:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Na permutação analisa-se de quantas maneiras diferentes podem-se organizar um grupo de *n* elementos, usando *n* elementos. Neste tipo de problema não existe repetição de elementos, a ordem dos elementos é considerada, porém, diferentemente do arranjo e da combinação, trabalha-se com a combinação de todo o grupo. A permutação pode ser definida da seguinte forma: "Dado um conjunto formado por **n** elementos, chama-se permutação desses **n** elementos qualquer agrupamento ordenado de **n** elementos, no qual apareçam todos os elementos do conjunto." (Santos, Mello & Murari, 1998, p. 32). E sua fórmula matemática pode ser expressa da seguinte forma: $\mathbf{P_n = n!}$

Exemplos desses tipos de problemas que envolvem raciocínio combinatório são descritos a seguir:

Arranjo: A semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: Brasil, França, Alemanha e Argentina. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Combinação: Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Permutação: De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, de meu pai e de minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

Diante dos problemas que configuram o campo da Combinatória na Matemática, o presente estudo centrou-se na combinação e no produto cartesiano, um tipo diferente de problema que, embora envolva o raciocínio combinatório, é considerado mais simples (Pessoa & Borba, 2007).

### 1.2.2 O raciocínio combinatório na perspectiva psicológica

#### 1.2.2.1 Produto Cartesiano

Os problemas de *produto cartesiano*[2] (Nunes & Bryant, 1997), também denominados de *produto de medidas* por Vergnaud (1983, 2009), envolvem a idéia de raciocínio combinatório. Eles se configuram como uma relação de combinação entre elementos de dois ou mais conjuntos diferentes, sendo a tabela cartesiana a sua forma mais natural de representação. Um exemplo desse tipo de problema é demonstrado a seguir.

Exemplo 1: Rita vai viajar levando 3 saias e 5 blusas. Quantos trajes diferentes ela pode vestir, mudando suas saias e blusas?

O problema descrito acima envolve dois conjuntos (saias e blusas) que devem ser combinados de maneira que produzam um terceiro conjunto (trajes) que contemple todas as combinações possíveis. Assim, pode-se afirmar que o produto cartesiano envolve uma relação ternária entre as medidas, das quais uma quantidade é o produto das outras duas tanto no plano numérico quanto no dimensional.

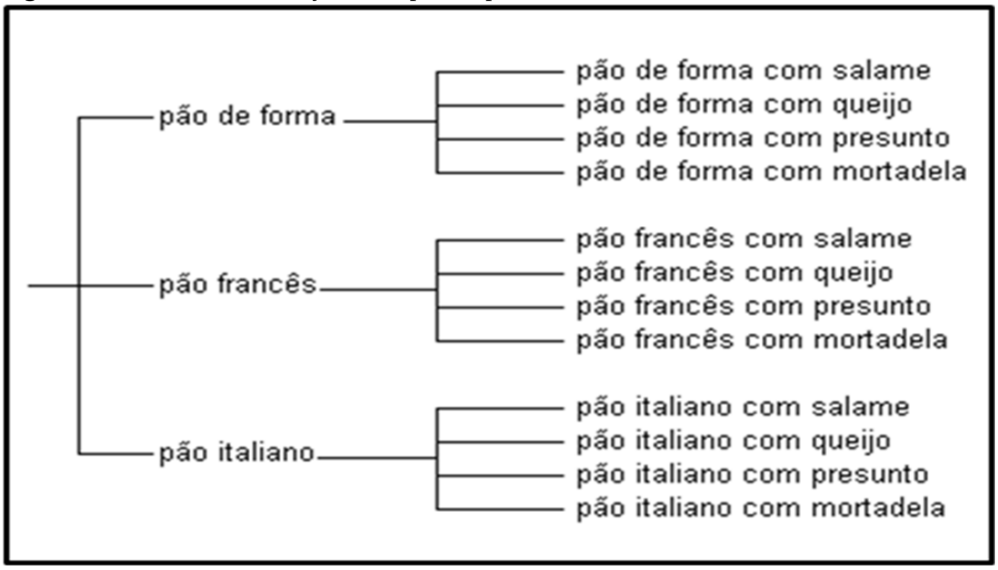
A "árvore de possibilidades" é uma das formas de representar os problemas de produto cartesiano, como se pode observar adiante.

Exemplo 2: Os sanduíches da padaria Pão Doce são famosos no bairro. O freguês pode escolher entre 3 tipos de pão: pão de forma, pão francês ou pão italiano. Para o recheio há 4 opções: salame, queijo, presunto ou mortadela. Quantos tipos de sanduíche a padaria oferece?

---

[2] No presente estudo foi adotada a denominação *produto cartesiano*, de Nunes e Bryant (1997).

**Figura 1**: Possíveis combinações de tipos de pães e frios.




De acordo com Iezzi, Dolce, Degenszajn, Perigo e Almeida (2004), a "árvore de possibilidades" permite enumerar as possíveis opções de combinação entre os conjuntos, fornecendo uma melhor visão a respeito do número de decisões que podem ser tomadas, além de permitir a organização dos elementos de forma a garantir a contagem adequada. Contudo, quando a quantidade de elementos em cada conjunto ou conjuntos é grande, a contagem das combinações pode ser mais difícil. Nestes casos, é aconselhável utilizar o princípio multiplicativo, que é uma ferramenta que permite calcular o número total de possibilidades sem que seja necessário enumerá-las. Segundo Santos, Melo e Murari (1998), o princípio multiplicativo pode ser enunciado da seguinte maneira:

> Se um evento A pode ocorrer de **m** maneiras diferentes e, se para cada uma dessas **m** maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de **n** maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é **m** x **n**" (p. 29).

A compreensão desse princípio e das circunstâncias em que ele se aplica faz com que as fórmulas utilizadas em Análise Combinatória sejam vistas como síntese de raciocínios, ou seja, deduzidas de modo natural e acessível, em vez de serem apenas definições sem motivação. Sendo assim, esta visão estimula o raciocínio combinatório independente de fórmulas e cálculos, dando maior liberdade de crítica e criatividade ao aluno.

Dessa maneira, os problemas de produto cartesiano apresentados nos exemplos 1 e 2 podem ser solucionados a partir do princípio multiplicativo. No exemplo 1, pode-se tomar como evento A, a escolha das blusas (5 blusas diferentes) e como evento B, a escolha da saia (3 saias distintas). Logo, Rita dispõe de **A x B** (pelo princípio multiplicativo, **m x n**), isto é, 5 x 3 = 15 possibilidades diferentes de trajes. Já no exemplo 2, pode-se tomar como evento A, o tipo de pão (3 tipos de pães diferentes) e como evento B, o tipo de recheio (4 tipos diferentes de frios), ou seja, 3 x 4 = 12 tipos de sanduíches diferentes.

A idéia de combinação presente nos problemas de produto cartesiano pode estar relacionada a situações resolvidas através da multiplicação ou da divisão. Os problemas de produto cartesiano resolvidos a partir da multiplicação são denominados de problemas diretos e seus enunciados apresentam o valor das medidas elementares[3], sendo requerido o valor da medida produto[4] (por exemplo: Maria tem 2 saias e 3 blusas. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar?). Já os problemas de produto cartesiano solucionados através da divisão são nomeados de problemas inversos e seus enunciados apresentam o valor da medida produto e de uma medida elementar, sendo solicitado o valor da segunda medida elementar (exemplo: Numa festa, formou-se 12 casais diferentes para dançar. Se havia 3 mulheres e todos os presentes dançaram, havia quantos homens?).

Para resolver os problemas de produto cartesiano, é necessário que a criança compreenda que cada elemento do conjunto elementar pode aparecer em diversos pares do conjunto produto, princípio este que caracteriza a correspondência um-para-muitos, assunto abordado na próxima seção.

---

[3] Por medida elementar ou conjunto elementar compreende-se o número de elementos de determinado conjunto (por exemplo, o conjunto blusas).
[4] Por medida produto ou conjunto produto compreende-se a combinação de duas ou mais medidas elementares. Ela pode ser expressa pela relação A x B, sendo A e B medidas elementares.

### 1.2.2.2 A correspondência um-para-muitos

O raciocínio multiplicativo tem sua origem no esquema de correspondência, o qual, segundo Piaget e Szeminska (1971), é definido como um instrumento empregado para decompor as totalidades a serem comparadas entre si. Este esquema se desenvolve de maneira gradativa no pensamento da criança, estando, primeiramente, atrelada apenas à percepção do indivíduo e, aos poucos, através de suas experiências e amadurecimento, alcança a sua forma mais sofisticada. Inicialmente, ocorre o desenvolvimento da correspondência termo a termo, juntamente com o princípio de equivalência, e, posteriormente, é que se desenvolve o esquema de correspondência um-para-muitos, o qual está relacionado às primeiras noções multiplicativas.

A correspondência termo a termo é utilizada para se comparar quantidades, objetos ou conjuntos. Segundo Piaget e Szeminska (1971), há dois tipos de situações onde a criança exerce a correspondência termo a termo. A primeira situação seria aquela em que a criança avalia uma determinada quantidade de objetos através de objetos de mesma natureza, sendo necessária uma correspondência, por exemplo: se um jogador colocar 4 bolas de gude sobre o chão, o outro jogador colocará uma quantidade de bolas de gude que seja equivalente a do seu parceiro. Uma segunda situação seria a correspondência entre elementos heterogêneos, porém qualitativamente complementares, por exemplo: para cada vaso, a criança deve plantar uma flor. Nessas situações, é preciso que a criança compreenda que cada elemento deverá corresponder a outro, assim, a correspondência termo a termo conduzirá ao entendimento da idéia de equivalência entre os elementos correspondentes.

Piaget e Szeminska (1971) conduziram uma série de investigações a partir das quais foi possível identificar e ordenar fases referentes à correspondência termo a termo, a saber: Fase I – ausência de correspondência termo a termo e de equivalência; Fase II –

correspondência termo a termo, mas ausência da equivalência; e Fase III – correspondência termo a termo e equivalência durável.

Da mesma forma, segundo Piaget e Szeminska (1971), a correspondência um-para-muitos (também denominada de correspondência múltipla) é construída gradualmente pela criança. Entretanto, esta correspondência se caracteriza pela relação de um objeto com um conjunto de objetos, estando, portanto, seu desenvolvimento relacionado às primeiras noções multiplicativas, uma vez que é necessário entender que um elemento pode relacionar-se com vários e não somente com um, como no caso da correspondência termo a termo. Ademais, o esquema de correspondência um-para-muitos também depende da compreensão de outros conceitos matemáticos, como a seriação, a noção de conservação e a transitividade.

Piaget e Szeminska (1971) investigaram crianças de cinco e seis anos de idade, que não haviam estudado formalmente a multiplicação, com o objetivo de pesquisar o esquema de correspondência um-para-muitos. Inicialmente, os participantes teriam que resolver uma tarefa que envolvia correspondência termo a termo e, em um segundo momento, partiriam para a execução da atividade relacionada à correspondência um-para-muitos. A primeira tarefa – correspondência termo a termo – consistia em a criança colocar um ovo em cada um dos 10 oveiros, em seguida, os ovos eram retirados e colocados em um outro recipiente e, novamente, o participante era solicitado a colocar um ovo em cada um dos 10 oveiros. Esses ovos eram também retirados dos oveiros e distribuídos em outro recipiente. O objetivo era fazer com que a criança entendesse que o número de ovos que estavam no primeiro recipiente era o mesmo do número de oveiro, bem como a quantidade de ovos contidos no segundo vasilhame era igual a quantidade de oveiros. Assim, para concluir que os dois conjuntos de ovos eram iguais era necessário que a criança entendesse a correspondência termo a termo e o seguinte raciocínio $X=Y$ e $Y=Z$, então, $X=Z$. Sendo, $X$ o número de ovos do primeiro recipiente, $Y$ o número de oveiros e $Z$ o número de ovos do segundo recipiente.

Em uma segunda tarefa, os autores buscaram investigar se as crianças compreenderiam a correspondência um-para-muitos, que pode ser expressa da seguinte forma, se X=2Y e Z=X, logo Z=2Y. A fim de realizar essa pesquisa, o examinador solicitou que a criança colocasse uma flor azul em cada um dos dez vasos fornecidos, depois, as flores eram removidas e reunidas em um buquê. Em seguida, o participante era solicitado a por uma flor rosa em cada um dos dez vasos e, novamente, as flores eram retiradas e agrupadas em um buquê. Posteriormente, a criança era questionada sobre o que poderia acontecer caso as flores azuis e rosas voltassem aos dez vasos, sendo distribuídas igualmente entre eles. Quantas flores (X) haveria nos vasos (Y)? A criança deveria compreender que X=2Y, isto é, o número de flores equivale ao dobro do número de vasos.

Em seguida, as flores foram retiradas do campo visual da criança, sobrando apenas os vasos, e o examinador solicitava que as mesmas retirassem de dentro de uma caixa a quantidade exata de tubos plásticos de maneira que as flores (azuis e rosas) fossem colocadas no seu interior. Nesse momento, porém, a criança tinha que compreender que o vaso era mais largo em relação ao tubo plástico, comportando duas flores enquanto que o último comportava apenas uma flor. Assim, para resolver esta questão, o participante precisava entender que o número de tubos (Z) deveria ser igual ao número de flores (X), isto é, Z=X. Era preciso entender também que o número de tubos é igual ao dobro de vasos (Z=2Y), já que cada tubo só comporta uma flor e cada vaso comporta duas flores.

Diante desses estudos, Piaget pôde observar que crianças de cinco e seis anos já compreendem a correspondência termo a termo, bem como alguns aspectos da relação multiplicativa, como a correspondência um-para-muitos entre dois conjuntos. É importante salientar que as atividades solicitadas às crianças não exigiram delas nenhum cálculo numérico sobre as quantidades dos conjuntos, uma vez que as tarefas requeridas buscavam apenas investigar se os participantes compreendiam as relações envolvidas na correspondência um-para-muitos.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), as situações de correspondência um-para-muitos englobam o desenvolvimento de dois novos conhecimentos: proporção e fator escalar. A proporção pode ser expressa a partir de um par de números que continua invariável mesmo quando o tamanho do conjunto varia, como por exemplo, a correspondência 1-semana-para-7-dias. Nesse caso, cada vez que for acrescentada um elemento para o conjunto “semana”, devem-se acrescentar doze elementos para o conjunto “dias. Em outras palavras, a proporção 1-para-7 manter-se-á sempre constante mesmo havendo variações das quantidades dos conjuntos (semana e dias), haja vista que a proporção não expressa o número de objetos para quaisquer conjuntos, mas representa a relação existente entre os conjuntos. Já o fator escalar está relacionado ao número de replicações aplicadas a ambos os conjuntos (semana e dias), mantendo, assim, a proporção constante. Então, se forem realizadas 6 replicações, a relação entre semana e dias poderá ser expressa da seguinte maneira: 1 semana para 7 dias e 6 semanas para 42 dias. Nesse caso, pode-se observar que a proporção mantém-se constante (1-para-7) uma vez que o mesmo fator escalar (6) foi aplicado a ambos os conjuntos.

Kornilaki (1999 citado em Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2001) também investigou a correspondência um-para-muitos em crianças, com idade entre 5 e 7 anos, que ainda não havia recebido o ensino formal da multiplicação. Nesse estudo, era solicitado à criança a responder um problema que se apresentava da seguinte maneira: uma figura de uma rua com três casas e em cada uma delas morava três coelhos e, no final, dessa rua existia um restaurante que fornecia alimentação para todos os coelhos. Após a apresentação, o participante era solicitado a retirar de uma caixa a quantidade correta de bolinhas de comida, as quais eram representadas por fichas, a fim de que cada animal pudesse receber uma bolinha. É importante ressaltar, que nesse estudo, as crianças deveriam dar uma resposta numérica à questão. A partir desse experimento, a examinadora pôde observar que 67% das crianças de cinco anos de idade podem compreender as relações envolvidas na correspondência um-para-muitos. No que diz respeito às crianças de seis e sete anos de idade, todas conseguiram acertar o problema.

Com esse estudo foi possível observar que mesmo antes de receberem ensino formal acerca da multiplicação, as crianças já conseguem, nessa situação, compreender algumas das noções multiplicativas, como a correspondência um-para-muitos. No que diz respeitos às estratégias de resolução adotadas pelas crianças, a autora observou duas maneiras distintas de solucionar o problema. A primeira consistia em os participantes retirarem da caixa três bolinhas e as colocarem na frente de cada casa, depois agrupavam as bolinhas e as colocava no restaurante. A outra forma de resolução consistia em contagem, ou seja, as crianças contavam três bolinhas por casa e, em seguida, retiravam da caixa as nove bolinhas, ficando três bolinhas na frente de cada uma das três casas. Embora as duas formas de solução expressem o uso da correspondência um-para-muitos, não é possível assegurar que as crianças entenderam as relações envolvidas nesse tipo de correspondência, uma vez que, ao que parece, a contagem foi maciçamente utilizada para resolver o problema.

O problema supracitado foi adaptado por Nunes *et al*. (2001) para a sala de aula, mas ao invés de utilizar material concreto como no estudo de Kornilaki, foram utilizados instruções orais e desenhos para examinar como seria o desempenho dos participantes quando estes não possuem materiais que possibilitem a aplicabilidade direta de seus esquemas de ação. Participaram, portanto, deste estudo crianças de sete anos, estudantes de escolas públicas de São Paulo.  O examinador apresentava um papel à criança, no qual havia os desenhos de três casas e um biscoito e, abaixo deles, o seguinte enunciado: “Em cada casa moram quatro cachorros. Desenhe o número de biscoitos que precisamos ter para que cada cachorro ganhe um biscoito.” Ao comparar os resultados deste estudo com o de Kornilaki

(1999 citado em Nunes et. al, 2001), percebeu-se um déficit no percentual de respostas corretas quando o problema era apresentado com lápis e papel (estudo de Nunes). Apesar dessa defasagem no desempenho dos participantes, foi observado que eles utilizaram como estratégia de solução a correspondência um-para-muitos. Portanto, a partir destes resultados, os autores puderam concluir que as crianças que ainda não havia recebido o ensino formal da multiplicação já conseguiam aplicar o esquema de correspondência um-para-muitos e resolver problemas multiplicativos.

Os estudos apresentados anteriormente abordam a correspondência um-para-muito no âmbito da multiplicação, entretanto, tal esquema pode ser aplicado também nos problemas e situação de divisão.

Correa (2004) realizou um estudo com 20 crianças inglesas de seis a nove anos de idade, estudantes de escola pública, com o objetivo de observar o uso do esquema de correspondência um-para-muitos em problemas de divisão, resolvidos a partir de cálculo mental. Para isso, a examinadora apresentou às crianças uma situação onde certa quantidade de blocos, os quais representavam comidas, deveria ser dividida entre uma determinada quantidade de ursos de pelúcia. O participante, então, deveria responder o número de blocos que cada urso deveria ganhar. Este estudo utilizou dois tamanhos de divisores (2 e 4) e quatro de dividendos (4, 8, 12 e 24). Os resultados indicaram que o desempenho dos participantes foi influenciado pelo tamanho dos números apresentados e, dessa maneira, à medida que ocorria o aumento nos valores dos números (tanto do dividendo como do divisor), aumentava a dificuldade das crianças, sobretudo das mais jovens, para resolver o problema corretamente. Outro ponto importante observado nesse estudo foi que com o aumento da idade/escolaridade das crianças, o seu desempenho melhorava. No que diz respeito as estratégia de solução, a autora constatou que os participantes que responderam corretamente, utilizaram como estratégia de resolução colocar em correspondência a quantidade de ursinhos e a quantidade de blocos, por exemplo: em uma tarefa na qual o número de blocos (dividendo) era 8 e o número de ursos era 2 (divisor), a criança contava o número de vezes que ocorria a correspondência múltipla entre os ursinhos e os blocos até que houvesse a mesma quantidade para cada ursinho, ou seja, quatro blocos para o urso X e quatro blocos para o urso Y. Com isso, o que se percebe é que mesmo em problemas mais sofisticados, as crianças já são capazes de utilizar o esquema de correspondência um-para-muitos para resolverem adequadamente os problemas.

Diante do exposto, pode-se observar que o esquema de correspondência múltipla está fortemente associado aos problemas de estrutura multiplicativa, bem como é possível notar também, através das pesquisas realizadas, que crianças nas séries iniciais do ensino fundamental, que ainda não receberam o ensino formal da multiplicação, já conseguem entender as relações existentes nas correspondências um-para-muitos e utilizá-las adequadamente nas resoluções de problemas matemáticos. Contudo, é importante destacar que os estudos citados até então fazem menção a problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas, que segundo Nunes e Bryant (1997) são mais fáceis do que os problemas de produto cartesiano[5], uma vez que nesse tipo de problema a correspondência múltipla não se apresenta de forma clara.

A sessão seguinte deter-se-á a apresentação de estudos referentes à resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório

[5] Vergnaud denomina problemas de produto cartesiano como problemas de produto de medidas.

## 1.3 Estudos com crianças e adolescentes acerca do raciocínio combinatório

Inhelder e Piaget (1976) realizaram inúmeros estudos em conjunto com a finalidade de compreender a passagem da lógica da criança à lógica do adolescente. A partir dos experimentos realizados, foi possível observar que por volta dos 11-12 anos até os 14-15 anos acontecia uma mudança com o aparecimento do pensamento operatório formal, o qual é diferente do pensamento que o antecede – o operatório concreto. Para os autores, as operações formais constituem o estado final de equilíbrio no desenvolvimento intelectual, tendo como principal característica a possibilidade de diferenciação entre o real e o possível. O adolescente, diferentemente da criança que se encontra no período operacional concreto, ao lidar com um problema, busca imaginar todas as possíveis relações apropriadas àquela situação, em seguida, por meio de uma combinação de procedimentos, experimentações e de análise lógica, ele tenta examinar quais destas relações possíveis são realmente verdadeiras. Desse modo, o adolescente deixa de se preocupar apenas com aquilo que lhe chega diretamente aos sentidos (pensamento concreto) e passa a desenvolver a capacidade de imaginar todas as possibilidades pertinentes (pensamento formal).

O pensamento formal é, essencialmente, hipotético-dedutivo. Para encontrar o real dentro das possibilidades, é preciso que se considere o possível como um conjunto de hipóteses que devem ser testadas a fim de se obter a sua confirmação ou refutação. Logo, o pensamento formal é recurso para encontrar a realidade dentro de um contexto de possibilidades. Outra característica marcante do pensamento formal diz respeito a sua capacidade de manipular e raciocinar sobre dados da realidade na medida em que ele transforma esses dados em afirmações (ou proposições) e, por isso, também é denominado de pensamento proposicional. O indivíduo realiza operações concretas, mas também utiliza essas operações transformando-as em proposições com as quais pode continuar a operar através de relações lógicas. Piaget chamou este fenômeno de combinatória das proposições pelo fato de ser uma lógica das combinações possíveis de pensamento.

Inhelder e Piaget (1976) relacionaram o pensamento formal com a orientação do possível e o hipotético. De acordo com os autores, por meio do método da análise combinatória, o possível pode ser investigado. Por exemplo, quando diante de um problema, o indivíduo isola todas as variáveis envolvidas naquela situação e define todas as possíveis combinações dessas variáveis, dessa forma, ele pode se certificar de que todas as relações possíveis foram investigadas. Assim, o raciocínio hipotético-dedutivo age através das operações combinatórias, as quais se caracterizam pela possibilidade de relacionar, de todas as maneiras possíveis, objetos, fatores e pensamentos entre si. Portanto, o raciocínio combinatório não representa apenas um campo específico da matemática, mas um esquema operacional e é um componente fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico.

Ao investigar sobre o surgimento do pensamento formal, que é condicionado pela constituição de uma combinatória, Inhelder e Piaget (1976) realizaram um estudo a fim de averiguar se os sujeitos do sensório-motor descobririam um sistema de combinatória que demonstrasse uma independência com relação à combinatória associada à lógica das proposições, ou se, pelo contrário, seria necessário aguardar até o estádio formal para ver a constituição dessa combinatória experimental. Esse experimento consistia em os participantes combinar corpos químicos, para isso eram apresentados a eles quatro frascos semelhantes, com líquidos perceptivelmente idênticos, mas que, na verdade, eram de natureza diferente, a saber: o líquido 1 era o ácido sulfúrico, o líquido 2 era água, o líquido 3 era água oxigenada e o último era tiosulfato. Além disso, havia uma outra substância que era o iodeto de potássio, o qual estava dentro de uma garrafa conta-gotas, denominada $g$. A mistura do líquido $g$ com essas 4 substâncias provocava reações distintas: a mistura dos líquidos 1 + 3 + $g$, ocasionava uma cor amarela; a adição do líquido 2 (água) a essa mistura não altera a cor; o líquido 4 descolara a mistura em questão. O experimentador apresentava dois frascos aos sujeitos, um com a mistura 1+3, e outro com o líquido 2. Na frente do participante, o experimentador despejava algumas gotas de *g* em cada um dos vasos, provocando a observação de reações diferentes. Em seguida, o sujeito deveria refazer a cor amarela, utilizando à vontade os frascos 1, 2, 3, 4 e *g*. Isto é, buscava-se que o participante combinasse os líquidos dos recipientes até formar a cor amarela.

Os resultados dessa experiência, e outras realizadas por Piaget e seus colaboradores, demonstraram que uma combinação sistemática só surge no estádio das operações formais. No estádio pré-operatório (dos 4 aos sete 7 anos de idade), as crianças se restringiram a associar casualmente dois elementos, ao mesmo tempo, e explicá-lo por simples fenomenismo ou por outras maneiras de causalidade pré-lógica. Os sujeitos do estádio das operações concretas (dos 7 aos 11 anos de idade) chegam a introduzir as combinações *n* a *n*. Entretanto, estas reações se configuram apenas como simples tentativas empíricas (ensaio e erro), não havendo ainda a descoberta do sistema combinatório (Inhelder & Piaget, 1976).

Com o surgimento do estádio operacional formal (a partir dos 11-12 anos) há duas novidades. A primeira corresponde ao uso de um método sistemático no emprego das combinações *n* a *n*, completa para os elementos que constituem esse experimento. E a segunda refere-se à utilização dessas combinações, isto é, uma vez encontrada a combinação adequada (1 x 3 x *g*), a que provoca a cor, o sujeito continua a procurar outras soluções para o problema, até de fato ter a certeza de que esgotou todas as possibilidades. O que interessa, portanto, não é um acerto por meio de uma determinada situação, mas o entendimento da função desempenhada por ela no conjunto de combinações possíveis. Além disso, as provas que se apresentam de maneira mais sistemática. Assim, este nível surge como uma etapa de equilíbrio com relação ao anterior (Inhelder & Piaget, 1976).

Segundo os autores, a razão para se ter de aguardar pelo nível formal para que seja possível construir o sistema combinatório é a necessidade de coordenar entre si duas operações distintas, a saber, a seriação e a correspondência, numa única operação, e esta é uma capacidade que só é adquirida nesse estádio.

De maneira geral, este experimento demonstra a íntima correlação existente entre a construção ou estrutura de conjunto das operações combinatórias e das operações formais:

> ao mesmo tempo em que o sujeito combina os elementos ou fatores dados no contexto experimental, combina os enunciados proposicionais que exprimem os resultados de tais combinações de fatos, e assim constrói o sistema das operações binárias de conjunções, disjunções, exclusões, etc. Ora, esta correlação é menos surpreendente pelo fato de, no fundo, ser uma identidade: o sistema das operações proposicionais é, na realidade, uma combinatória, da mesma forma que as operações de combinações que se referem aos dados experimentais não têm outro fim, no espírito do sujeito, a não ser permiti-lhe estabelecer tais ligações lógicas (Inhelder & Piaget, 1976).

Assim, o sistema das operações formais é, na verdade, uma combinatória, uma vez que se configura como uma orientação generalizada no sentido de organizar elementos, isolar e controlar variáveis, formular hipóteses e provar logicamente os fatos. Com o desenvolvimento das operações combinatórias, o indivíduo pode transcender o real e acessar o mundo do possível.

Como visto Inhelder e Piaget (1976) consideram o raciocínio combinatório complexo e que compõe um dos modelos lógico-matemáticos que caracterizam as operações formais, sendo este um dos motivos que contribui para que este tema não fosse tão investigado em crianças. Apesar dos poucos trabalhos referentes ao raciocínio combinatório nos anos iniciais, acredita-se que é possível que crianças mais jovens desenvolvam compreensões acerca desses tipos de problemas (Pessoa & Borba, 2009).

Fischbein foi um dos autores que se interessou pelos estudos do efeito da instrução sobre o raciocínio combinatório de crianças de faixa etária compreendida entre os 10 e os 15 anos. Ele atribui grande importância à intuição como componente da inteligência. Em uma investigação realizada com alunos do 4º ano (10 a 11 anos), do 6º ano (12 a 13 anos) e do 8º ano (14 a 15 anos), por Fischbein, Pampu e Mînzat (1970), buscou-se avaliar o impacto da idade e da instrução sobre o raciocínio combinatório. Os resultados mostraram que antes de qualquer instrução, conforme a idade aumentava, as estimativas subjetivas ao número de permutações, em média, se aproximavam dos valores corretos. As maiores diferenças entre as idades foram encontradas quando o número de elementos envolvidos na permutação era maior. No que diz respeito à natureza dos objetos (números, letras e formas geométricas), não foram observadas diferenças significativas. Em relação ao ensino, os autores concluíram que se pode ensinar com sucesso certo número de procedimentos combinatórios as pessoas com idade entre 10 e 15 anos através de diagramas de árvores. Observaram também que crianças de 10 anos eram capazes de assimilar o uso de diagramas de árvore para solucionar problemas de arranjos com repetição e de permutações. De maneira geral, o estudo mostrou a possibilidade de crianças, ainda no período de operações concretas, obterem conhecimento, capacidade mental e intuição no que se refere à combinatória.

Em outra investigação, Fischbein e Gazit (1988) estudaram o papel da instrução no desenvolvimento do raciocínio combinatório em crianças de 11 a 14 anos de idade. As variáveis analisadas nesse estudo foram o tipo de operação combinatória (permutação, combinação, arranjo com repetição e arranjo sem repetição), a idade dos participantes e a natureza (abstrata ou concreta) dos elementos que compunham o problema. Os erros mais significativos observados ao resolverem os problemas propostos foram atribuir aleatoriamente a fórmula dos arranjos e das combinações a um a outro conceito. Este erro fora denominado de *erro de ordem*, uma vez que os alunos não foram capazes de identificar se a ordem era ou não importante para a resolução do problema. Além disso, os participantes não desenvolviam a fórmula de maneira correta. Os autores observaram também que os alunos que ainda não havia recebido instrução formal apresentaram maior dificuldade em resolver os problemas de permutação e arranjo com repetição, seguindo-se os de arranjo sem repetição e as combinações.

A pesquisa conduzida por Fischbein e Grossman (1997) tinha como objetivo obter mais informações no que diz respeito à relação entre os esquemas e as intuições, referindo-se especificamente ao sistema combinatorial. Esquemas, nesse estudo, foram definidos seguindo a linha piagetiana de pensamento, que são programas de processamento e interpretação da informação ou como programas para planejar e executar as reações adaptativas. E intuições foram definidas, de maneira geral, como cognições imediatas. Foram investigadas as estimativas intuitivas, relativamente espontânea, de indivíduos (63 alunos do 7 º ano, 62 estudantes do 9 º e do 11 º anos, 41 alunos universitários e 25 adultos) no que diz respeito aos vários tipos de problemas combinatórios (permutação, arranjo com repetição e sem repetição e combinação). As estimativas intuitivas foram comparadas com as explicações posteriores dadas pelos participantes e também com as soluções matemáticas corretas. Os resultados mostraram que, em geral, as suposições intuitivas são, por um lado, tacitamente baseadas em algumas operações binárias multiplicativas (que, como tal, geralmente não estão relacionados com as fórmulas corretas) e, por outro lado, são, de alguma forma, influenciadas pelo que deve ser as respostas corretas.

O estudo de Fischbein e Grossman (1997) concluiu que, de um modo geral, as intuições podem ser pensadas como estando baseadas em algumas regras estruturadas, expressadas tanto a nível de maturação quanto a níveis de formação. Se o objetivo é influenciar as intuições favorávies – e essa é uma tarefa importante para o processo de aprendizagem - tem de se identificar as estruturas dos esquemas e os esquemas específicos que fundamentam as respectivas intuições. Ao incentivar o aluno a adivinhar intuitivamente, se cria uma situação desafiadora. Outra forma de conseguir isso é confrontar o aluno com um palpite pessoal e uma solução matematicamente aceita. Tal conflito pode estimular o interesse do aluno e pode ajudá-lo a superar outros obstáculos intuitivos.

Carraher, Carraher e Schliemann (1988) realizaram uma série de estudos a partir dos quais pôde-se observar que é possível adquirir fluência em procedimentos informais de resolução de situações-problemas mesmo sem ter o domínio de métodos escolares. Pesquisas têm demonstrado que existem diversas estratégias que podem ser adotadas a fim de obter sucesso na resolução de problemas, todavia, a escola valoriza apenas os métodos formais, deixando às margens estas outras maneiras que, apesar de informais, expressam o raciocínio adequado e necessário para responder a determinadas questões matemáticas. Dessa maneira, é possível que o raciocínio combinatório surja antes do ensino formal e que ele seja influenciado e desenvolvido por experiências escolares e extra-escolares, quando requisitado.

Portanto, pesquisas como as de Fischbein e colaboradores, Carraher, Carraher e Schiliemann, entre outras, demonstram que o raciocínio combinatório pode surgir antes do estágio indicado por Piaget e do ensino formal, podendo ser desenvolvido também por experiências cotidianas (extra-escolares). Logo, torna-se bastante relevante investigar crianças que ainda não receberam instruções formais a respeito da combinatória, por meio de situações diversas, a fim de verificar as primeiras características relativas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que o raciocínio combinatório é o tipo de problema multiplicativo que apresenta maior dificuldade para as crianças, apresentando baixos índices de acertos. Os autores assinalam os seguintes motivos para esta complexidade: (a) o problema abarca dois conjuntos básicos mais um terceiro conjunto, o qual é identificado pela combinação de cada elemento que formam o conjunto básico; (b) a correspondência um-para-muitos não se apresenta de forma explícita na formulação verbal. Portanto, torna-se tarefa do sujeito desvendar que para cada elemento do conjunto básico existem inúmeras transformações relativas à quantidade do outro conjunto básico. Eizenberg e Zaslavsky (2002) ainda acrescentam que outra dificuldade refere-se à questão de verificar as respostas obtidas na resolução de problemas de combinatória, já que formas distintas de solucionar um mesmo problema resultam em diferentes respostas visivelmente convincentes, e detectar um erro não leva necessariamente a uma solução correta.

No sentido de tornar a aprendizagem da combinatória mais fácil, Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) sugerem duas etapas a serem percorridas: compreender a natureza dos erros dos estudantes ao resolverem problemas envolvendo o raciocínio combinatório e identificar as variáveis que podem influenciar as suas dificuldades.

Um estudo nessa direção foi realizado por estes autores em 1996 cujo objetivo era avaliar o raciocínio combinatório de 720 alunos do ensino médio, entre 14 e 15 anos de idade, em problemas de seleção (nos quais são selecionados *n* elementos dentre *m*), de distribuição (de *n* elementos em *m* células) e de partição (subdivisão de um conjunto de *n* elementos em *m* subconjuntos). Dentre esta amostra, 352 alunos já tinham estudado formalmente a combinatória, enquanto que o restante não havia passado por qualquer ensino desse tema. Fora aplicado um questionário aos participantes, o qual era constituído por 13 itens, cada um deles correspondendo a um problema combinatório simples, no qual era solicitado ao aluno que explicasse em detalhe o seu raciocínio.

Os resultados evidenciaram que ambos os grupos de alunos tiveram grande dificuldade na resolução dos problemas, porém o grupo de alunos que já tinham passado pelo ensino formal da combinatória foi o que obteve melhores resultados nos problemas de arranjos, permutações simples e permutações com repetição. Os participantes demonstraram falta de raciocínio recursivo, a partir do qual era possível escrever todas as possibilidades ou calcular seu número sem que fosse necessário enumerá-las. Os erros observados neste estudo foram os seguintes: enumeração não-sistemática, uso incorreto da árvore de possibilidades, erros de ordem (confundia combinação com arranjo), erros de repetição (repetia os elementos quando não era permitido ou não repetia quando era possível), confusão entre tipos de objetos (considerava objetos idênticos quando eram distintos ou vice-versa), confusão quanto ao tipo de célula (tipo de subconjunto) em modelos de distribuição, e incompreensão do tipo de partição exigida (Navarro-Pelayo, Batanero & Godino, 1996).

Algumas pesquisas sobre o raciocínio combinatório buscaram investigar o conhecimento que as crianças jovens possuem sobre esse conceito antes de serem ensinadas formalmente na escola.

Pedrosa (2008) investigou a aquisição e o desenvolvimento das noções de raciocínio combinatório de crianças de sete e oito anos de idade, do primeiro ciclo do Ensino Fundamental, a partir de um estudo de sondagem e intervenção. As crianças foram reunidas em duplas e solicitadas a resolverem dois tipos de atividades. Uma delas consistia em combinar trajes do vestuário em modelos. A estes trajes eram acoplados uma espécie de ímã para facilitar a colagem dos trajes no modelo. O outro tipo de atividade visava determinar a quantidade máxima de caminhos possíveis, em um quadriculado, para se chegar a um destino a partir de lançamentos de um objeto semelhante a uma moeda. Após a aplicação das atividades, foi realizada uma análise do comportamento das duplas, dos procedimentos e dos registros obtidos. Os resultados mostraram que o uso do material manipulável e o trabalho em dupla favoreceram o interesse bem como o desenvolvimento de idéias de organização, leitura, contagem, visualização dos resultados e dos primeiros passos na relação entre os campos aditivo e multiplicativo, essenciais para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Pessoa e Borba (2007, 2008, 2009) buscaram investigar as estratégias empregadas por alunos do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental e o seu desempenho em relação à resolução dos diferentes tipos de problemas de raciocínio combinatório, antes de sua introdução formal na escola. A fim de atingir este objetivo, participaram do estudo 99 alunos, com idade entre seis e doze anos. Cada participante resolveu individualmente uma ficha que continha oito problemas envolvendo o raciocínio combinatório, sendo dois de cada tipo (produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação). Os quatro primeiros problemas continham valores que levavam a um maior número de possibilidades na solução, enquanto que os quatro últimos envolviam menos possibilidades.

Os resultados indicaram que os alunos das séries mais avançadas apresentaram um melhor desempenho do que aqueles das séries iniciais havendo, portanto, um progresso no que se refere à gradação por série. É importante ressaltar que nenhum dos alunos do 2º ano acertou os problemas, porém observou-se que alguns deles iniciaram corretamente as suas resoluções. No que concerne ao índice de acertos em relação ao tipo de problema, foi observado um melhor desempenho nos problemas de produto cartesiano (29%), o qual é trabalhado explicitamente nestas séries, em comparação com os outros tipos de problema: combinação (13%), arranjo (8%) e permutação (3%). Outro achado importante refere-se à influência da grandeza numérica no desempenho dos alunos, haja vista que estes apresentaram uma maior dificuldade nos primeiros problemas do que nos últimos. As autoras identificaram os tipos de respostas mais frequentes dos alunos em relação às tarefas propostas, a saber:

1. **Em branco:** nesse caso, não é possível saber o motivo do aluno não ter respondido ao problema (se foi falta de interesse, ou por não saber responder, por considerar o problema de difícil resolução ou simplesmente porque não quis fazer);
2. **Apenas resposta incorreta:** o aluno fornece apenas a resposta incorreta ao problema proposto, embora, algumas vezes, fosse possível inferir a operação por ele adotada;
3. **Apenas resposta correta, sem explicitação da estratégia:** a criança fornece apenas a resposta correta ao problema proposto, embora, algumas vezes, fosse possível inferir a operação por ele realizada;
4. **Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação:** o aluno apresenta uma resposta incorreta e na sua resolução não há indícios com a questão proposta;

5. **Resposta incorreta, com o estabelecimento de relação:** o aluno erra a resposta, porém mantém uma relação com a lógica do problema. Na maioria das vezes, o aluno não consegue esgotar todas as possibilidades para o problema proposto;
6. **Resposta correta com explicitação de estratégia:** o aluno é capaz de compreender a lógica do problema e chegar à resposta correta.

Foram identificadas também as formas de resolução que os alunos apresentaram:

a. **Realiza adição, subtração ou divisão** utilizando os valores apresentados no enunciado e a resposta, geralmente, é incorreta sem relação.
b. **Desenha ou escreve** possibilidades, podendo a resposta ser correta ou incorreta, havendo, ou não, o esgotamento de todas as possibilidades.
c. **Relaciona o problema a um produto**, podendo a multiplicação ser adequada ou não.

Diante dos resultados, as autoras concluíram que os alunos das séries iniciais já desenvolvem estratégias acerca do raciocínio combinatório, as quais devem ser aproveitadas pela escola a fim de que possam ajudá-los a progredir na compreensão dos diversos tipos de problemas e no seu desenvolvimento conceitual. Portanto, estudos nessa direção possibilitam um maior conhecimento acerca das estratégias empregadas por crianças jovens ao resolverem problemas de combinatória bem como os erros mais frequentes, sendo de extrema importância uma reflexão maior sobre estes dados a fim de que seja possível criar situações de aprendizagem mais adequadas para o ensino do raciocínio combinatório.

Alguns estudos buscaram examinar o efeito da idade/escolaridade sobre as estratégias e o desempenho das crianças e adolescentes sobre a resolução de problemas envolvendo o raciocínio combinatório.

Nesse sentido, Moro e Soares (2006) realizaram um estudo cujo objetivo era verificar como ocorre a construção do raciocínio combinatório a partir da resolução de problemas multiplicativos de produto cartesiano na escola fundamental. Participaram do estudo 50 crianças com idades entre sete e onze anos, estudantes do 4º e 5º anos do ensino fundamental. Os participantes eram solicitados a responder quatro problemas de produto cartesiano cuja solução exigia um cálculo de multiplicação, assim, o objetivo desta atividade era encontrar uma medida produto a partir da combinação de outras duas medidas elementares. O primeiro problema consistia na combinação de tipos de carros com tipos de rodas, apresentando um total de seis combinações possíveis, sendo dois e três, os seus pares numéricos. O segundo problema consistia na combinação de três fatores, a saber, sabores de sorvete, coberturas de sorvete e tipos de casquinha, tendo como pares numéricos 28, 12 e 5 e, portanto, apresentando um total de 1680 combinações possíveis. O terceiro problema apresentava três variáveis a serem combinadas – tipos de queijos, tipos de frios e tipos de pães – apresentando um total de 24 combinações possíveis, tendo dois, três e quatro como seus pares numéricos. O quarto problema, por fim, versava sobre a combinação de pulseiras, anéis e colares, tendo 92, 115, 32, como pares numéricos e, portanto, apresentando um total de 338560 combinações possíveis. É interessante salientar que os problemas foram apresentados à criança em um formato de teste escrito e foram respondidos individualmente em uma sessão coletiva, na sala de aula.

Diante da análise das estratégias adotas pelas crianças nas resoluções de cada problema, Moro e Soares (2006) encontraram níveis e subníveis hierárquicos de raciocínio combinatório, são eles:

1. **Nível 0 – Resposta alheia ao contexto:** a criança apresenta uma solução não numérica, sem que haja relação com o que é pedido no enunciado do problema e sem referências às variáveis;
2. **Nível I – Resposta contextualizada sem indício de combinação:**

   *Subnível IA*- soluções que apresentam escolhas referentes a uma ou mais variáveis, sem que haja combinações entre elas;

*Subnível IB*- soluções com cálculo ativo, sendo este mental ou não, de algumas ou de todas as quantidades envolvidas;

*Subnível IC*- soluções com uso de algoritmo escolar em contexto onde não se aplica.

3. **Nível II – Primeiras aproximações à solução combinatória:**

   *Subnível IIA*- a criança apresenta apenas uma possibilidade de combinação entre as variáveis;

   *Subnível IIB*- há a representação de algumas combinações das variáveis, envolvendo um ou mais valores, com forte presença da correspondência termo a termo como organizadora;

   *Subnível IIC*- as soluções correspondem a um número limitado de combinações das variáveis, mas sem o uso de valores distratores. Existe também uma forte presença da correspondência termo a termo como organizadora.

4. **Nível III – Obtenção de algumas combinações:**

   *Subnível IIIA*- há a representação de muitas combinações entre as variáveis, mas com o emprego dos valores distratores;

   *Subnível IIIB*- as crianças realizam muitas combinações por meio de junções de cálculos entre alguns e/ou todos os valores das variáveis envolvidas;

   *Subnível IIIC*- o participante consegue realizar um certo número de combinações entre os valores envolvidos, que são obtidas mediante diferentes junções aditivo-multiplicativas.

5. **Nível IV – Presença de soluções combinatórias:** a criança realiza todas as combinações possíveis, seja por representação em diagrama cartesiano, seja por cálculo multiplicativo.

Diante do exposto, verifica-se que é apenas no nível IV que as crianças refletem adequadamente sobre as relações combinatórias, representando todas as combinações possíveis. Os resultados da pesquisa em questão indicaram que a maioria das soluções localiza-se nos níveis I e II. De todas que participaram, apenas quatro crianças do 5º ano apresentaram soluções referentes ao nível IV, o mais alto da hierarquia. Portanto, os resultados desse estudo apontam para uma possível relação entre os níveis de raciocínio combinatório, encontrados nas soluções analisadas, e o ano escolar. No que se refere aos suportes de representação utilizados, as escassas soluções relacionadas ao nível IV utilizaram a “árvore de possibilidades” como ferramenta para o cálculo multiplicativo. Embora, as autoras tivessem encontrado níveis de construção inicial deste conceito com uma passagem do cálculo aditivo para o cálculo multiplicativo, bidimensional, há, explicitamente, uma dificuldade do participante em trabalhar com este tipo de problema de ordem multiplicativa.

Assim, mediante as dificuldades apresentadas, Moro e Soares (2006) consideram que o planejamento metodológico e o instrumento utilizado para a coleta de dados continham algumas limitações. Nessa pesquisa, apenas as soluções escritas dos participantes foram analisadas, não havendo nenhum outro dado, como a expressão verbal, que possibilitasse uma interpretação e compreensão, em uma ordem metacognitiva, referentes às relações que estariam envolvidas nas combinações.

Soares e Moro (2006) replicaram a pesquisa relatada acima com 60 crianças de 10 a 15 anos, estudantes do 6° e 7º ano do ensino fundamental. As crianças foram solicitadas a responder os quatro problemas mencionados no estudo anterior, seguindo a mesma estrutura metodológica. As estratégias de solução utilizadas pelas crianças foram especificadas em quatro níveis de construção do raciocínio combinatório, a saber:

1. **Nível I – Ausência de solução combinatória:** nesse nível, os participantes possuem dificuldades de compreensão e de interpretação acerca do que é solicitado no texto do problema. As crianças realizam cálculos aritméticos diversos com a finalidade de encontrar, de alguma forma, uma resposta numérica para o problema;

2. **Nível II – Primeiros indícios de soluções combinatórias:** as crianças fazem relações de correspondência termo a termo entre valores das variáveis;
3. **Nível III – Alguma aproximação de soluções combinatórias:** os participantes utilizam diagramas e surgem as primeiras correspondência um-para-muitos, ainda com presença da contagem das combinações e marcas aditivas. É característica desse nível também o emprego do cálculo (mental ou não) predominantemente multiplicativo com os valores de algumas variáveis;
4. **Nível IV – Presença de soluções combinatórias:** as crianças conseguem representar o esquema de correspondência um-para-muitos entre todos os valores de todas as variáveis contidas no problema por meio da utilização de diagramas ou de outros recursos gráficos, como por exemplo, listas e tabelas.

Semelhantemente ao estudo anterior (Moro & Soares, 2006), as estratégias de soluções dos participantes dessa nova amostra se apresentaram como uma hierarquia, a qual destaca a transformação do esquema de correspondência termo a termo para a correspondência múltipla, como também um progresso do cálculo relacional aditivo para o cálculo multiplicativo.

Taxa-Amaro (2006) realizou um estudo com alunos do 4° ano do ensino fundamental com o objetivo de investigar as relações entre o desempenho escolar em matemática e as operações combinatórias que subsidiam a construção da estrutura multiplicativa. Participaram da pesquisa 32 crianças, as quais foram divididas em dois grupos (A e B), ficando, 16 participantes, por sua vez, em cada um dos grupos. Os integrantes do grupo A eram aqueles que apresentavam pontuações mais elevadas na prova de matemática do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar de São Paulo (SARESP/96) e os do grupo B eram aqueles que tiveram os menores escores nessa prova. Os participantes foram entrevistados individualmente de acordo com o método clínico piagetiano. Todas as crianças foram solicitadas a resolver três problemas de produto cartesiano, os quais estavam escritos em uma folha de papel. O primeiro problema se referia à combinação de camisas e blusas, com os pares numéricos três e quatro, apresentando, portanto, um total de 12 combinações possíveis. O segundo problema se referia a combinação de homens e mulheres, com os pares numéricos 3 e 3, apresentando um total de nove combinações. Já o último problema não foi descrito pela autora, sendo nomeado de “problema de sala de aula”, cujos pares numéricos eram 2 e 3 e, portanto, apresentava um total de seis combinações possíveis.

Os dados foram analisados a partir da quantidade de acertos e das estratégias de resolução empregadas pelas crianças. No que diz respeito ao número de acertos em relação ao primeiro problema, 18,8% (três alunos) do grupo A e 12,5% (dois alunos) do grupo B conseguiram realizar todas as combinações possíveis. Nos segundo e terceiro problemas, 50% do grupo A (oito alunos) realizaram todas as combinações possíveis, enquanto que no grupo B, apenas um aluno (6,3%) acertou todas as combinações possíveis. Diante dos dados encontrados, a autora sugere que existe uma relação proporcional entre o desempenho em matemática e o desempenho nos problemas de produto cartesiano, assim, um melhor desempenho nessa primeira variável, levaria a um melhor desempenho na segunda.

Taxa-Amaro (2006) categorizou as estratégias utilizadas pelos alunos baseadas nos esquemas de correspondência termo a termo e um-para-muitos delineados por Piaget e Szeminska (1971). Sendo assim, essas estratégias foram classificadas em três grupos, a saber:

1. **Estratégias por correspondência termo a termo rígida:** primeiramente, os alunos realizam uma representação gráfica e, depois, ordenam os pares por correspondência termo a termo entre os elementos dos dois conjuntos do problema, não admitindo trocas entre os elementos dos conjuntos;
2. **Estratégias por correspondência dinâmica sem totalização e sistematização combinatória:** os participantes tentam resolver os problemas utilizando estratégias

diferenciadas (por exemplo, faziam cálculos com algoritmos das operações aritméticas; realizavam combinações baseadas na idéia de que poderiam ‘trocar’ as peças quantas vezes quisessem, não havendo para isso nenhum controle de quantificação; ou ainda realizavam repetições dos pares ordenados e tentavam controlar as combinações repetidas);

3. **Estratégias por correspondência dinâmica e totalizada com um sistema combinatório parcial:** embora, os participantes ainda apresentem oscilações nos seus procedimentos, estas são menos freqüentes entre a ação desempenhada e a justificativa apresentada durante a realização das combinações. A dificuldade maior das crianças refere-se ao controle sistemático das combinações, apesar de haver tentativas nesse sentido.

Diante dos resultados encontrados pela autora, observa-se que, em relação ao desempenho, os dois grupos apresentaram um número discreto de acertos nos três problemas propostos, o que demonstra que as crianças, mesmo aquelas do grupo A (composto por alunos que obtiveram escores mais elevados na prova do SARESP/96), tiveram dificuldade em encontrar uma solução combinatória para os problemas de produto cartesiano. No que concerne ao planejamento metodológico da pesquisa em questão, os problemas aplicados neste estudo são caracterizados como sendo multiplicativos, uma vez que é dada a criança o valor de duas medidas elementares, a fim de que ela encontre valor da medida produto. Outro ponto que pôde ser observado é que os valores dos pares numéricos utilizados nas questões são baixos, sendo o maior deles 3 e 4, que produz um total de 12 combinações possíveis.

Com o objetivo de superar algumas dificuldades encontradas pelos alunos, Esteves (2001) investigou a aquisição e os primeiros conceitos de análise combinatória em 28 adolescentes de 14 anos de idade, que cursavam o 9º ano do Ensino Fundamental. A autora trabalhou com dois grupos: um *experimental*, formado pelos alunos do último ano do Ensino

Fundamental, e um de *referência*, composto por alunos do 2º ano do Ensino Médio. Ambos os grupos foram submetidos a um pré-teste antes de receberem a instrução sobre análise combinatória, para, depois, estudarem este assunto por meio de duas abordagens distintas. O grupo experimental (GE) realizou o estudo através de uma sequência de ensino elaborada pela autora, enquanto que o grupo de referência (GR) seguiu a abordagem tradicional apresentada nos livros didáticos. As aulas desenvolvidas para o GE, as quais eram baseadas nas pré-concepções dos alunos, ocorreram em sete encontros de, aproximadamente, 60 minutos, em horário extra-aula. Cada encontro era caracterizado pela resolução, em dupla, de uma ficha contendo várias situações-problema de combinatória. Após, as sequências de aulas, os dois grupos realizaram um pós-teste.

Os resultados desse estudo revelaram que os alunos apresentam dificuldades em resolver estes problemas, sendo as principais causas do fracasso: (i) confusão sobre a relevância da ordem, (ii) falta de organização para enumerar os dados sistematicamente, (iii) dúvidas com relação a identificação da operação aritmética equivalente, (iv) e interpretação do problema, quando este apresenta mais de uma etapa. Quanto ao uso das representações, observaram que nem sempre os estudantes conseguem utilizá-las de maneira adequada para expressar a situação-problema. Em algumas situações, a representação utilizada pelo aluno o auxiliava, em outras, o conduzia a uma interpretação inadequada, principalmente nos problemas em que o número de possibilidades era elevado. Esteves (2001) defende que a solução para as dificuldades está na busca de uma aprendizagem na qual o aluno constrói seu próprio conhecimento, na diversidade das atividades propostas e na visão do erro enquanto processo de aprendizagem.

De maneira geral, estas pesquisas buscaram investigar o desenvolvimento do raciocínio combinatório nas crianças, apontando as estratégias adotadas por crianças na resolução dos problemas de combinatória, erros mais frequentes e possibilidades de superação destes. Já outros estudos buscam examinar os diferentes problemas de estrutura multiplicativa a fim de comparar o desempenho e as estratégias realizadas nestes problemas. Alguns deles são apresentados a seguir.

Batista (2002) investigou o efeito de diferentes suportes de representação sobre a resolução de quatro problemas, os quais fazem parte do campo das estruturas multiplicativas. O primeiro problema era do tipo isomorfismo e a sua resolução envolvia a multiplicação (pares numéricos 3 e 5). O segundo problema também envolvia a multiplicação para a sua resolução, porém era do tipo produto de mediada (ou produto cartesiano) e tinha como par numérico, os valores 4 e 3. Diferentemente dos outros, o terceiro problema envolvia a divisão para obter a sua solução e era do tipo isomorfismo (pares numéricos 18 e 6). O quarto problema também envolvia a divisão para a sua resolução, porém era do tipo produto cartesiano, com par numérico 20 e 5. Participaram deste estudo, quarenta estudantes do 3° ano do ensino fundamental, que foram alocados em dois grupos: 1- material concreto definido e 2- material concreto indefinido. As crianças foram entrevistadas individualmente e solicitadas a responder os problemas e, em seguida, explicar o procedimento empregado na sua resolução.

Diante das estratégias adotadas pelas crianças na resolução dos problemas de raciocínio combinatório, mais especificamente, a autora classificou as estratégias da seguinte maneira.

1. **Estratégia inadequada:** o aluno faz uma operação inadequada e para isso, geralmente, faz uso da adição ou da subtração com os valores contidos no enunciado da questão.
2. **Combinação por pares fixos:** a criança apresenta como resposta o menor número presente no enunciado. Ela age dessa maneira pelo fato de pensar em termos de pares fixos, rejeitando a idéia de que uma mesma blusa/saia pode formar um par diferente com outra saia/blusa. Em outras palavras, uma vez que foi constituído um par, esse

não pode ser desfeito e, portanto, seus elementos não poderão formar novas combinações com outros elementos.

3. **Combinação flexível dos pares limitados pelo maior número presente no enunciado:** o participante apresenta como resposta o maior número presente no enunciado do problema. Nesse caso, a criança começa a pensar em termos de pares combinados, porém ainda não aceita a idéia de formar um número maior de combinações do que o maior valor numérico presente no enunciado.
4. **Combinação flexível dos pares:** o aluno pensa em termos de pares combinados e aceita a idéia de que uma mesma blusa pode combinar com mais de uma saia, ou seja, ele é capaz de realizar todas as combinações possíveis.

Diante dos resultados, verificou-se que o desempenho das crianças se diferenciava em razão do tipo de problema, sendo os problemas de isomorfismo (72,5% de respostas corretas) mais fáceis do que os de combinatória (6,7% de acertos). Com o resultado dessa pesquisa, novamente, foi possível evidenciar a dificuldade das crianças em resolverem corretamente problemas referentes ao raciocínio combinatório e, portanto, Batista (2002) pôde inferir que os problemas de isomorfismo e de produto cartesiano requerem raciocínios diferentes para serem resolvidos.

Com esse mesmo intuito de averiguar o desempenho e as estratégias das crianças diante de diferentes tipos de problema de estrutura multiplicativa, Selva *et al.* (2008) realizaram um estudo com 90 crianças do 4° e 6° anos do ensino fundamental, as quais foram solicitadas a resolverem 10 problemas, sendo dois de multiplicação, dois de divisão partitiva, dois problemas de divisão por quotas, dois de produto cartesiano direto (que envolve a multiplicação) e dois de produto cartesiano indireto (que envolve a divisão). Os participantes deveriam responder individualmente os problemas por meio de lápis e papel.

Os resultados indicaram que os problemas de multiplicação e divisão partitiva foram mais fáceis para as crianças do que os problemas de produto cartesiano, que foram considerados mais difíceis, sobretudo, os inversos. A maior parte da dificuldade parece dever-se a falta de entendimento da estrutura multiplicativa inserida nos problemas, levando, portanto, os participantes a resolverem através da adição ou subtração. Diante disso, o que se percebe é a aparente existência de diversos tipos de situações multiplicativas e que estas situações abarcam níveis de raciocínio multiplicativos distintos.

Pessoa, Silva e Matos (2005) e Pessoa e Matos (2006) realizaram uma pesquisa com 153 alunos do 4º ao 6º ano do Ensino Fundamental a fim de avaliar as suas habilidades para resolver problemas de estruturas multiplicativas. Os participantes foram solicitados a resolver oito problemas multiplicativos, que envolviam produto cartesiano, correspondência um-para-muitos, divisão por quota e divisão partitiva. Os resultados indicaram que os estudantes pesquisados ainda apresentavam dificuldades em resolver problemas de estrutura multiplicativa, sendo o mais difícil, tanto para os alunos do quarto como do quinto ano, as tarefas que envolviam produto cartesiano.

Bryant, Morgado e Nunes (1992) observaram 32 crianças, de oito e nove anos de idade, resolvendo quatro problemas de multiplicação, dois dos quais eram de correspondência um-para-muitos simples (isomorfismo) e os outros dois eram problemas de produto cartesiano. As crianças foram distribuídas, de maneira aleatória, em dois grupos. Ao grupo A foi disponibilizado todo o material concreto necessário correspondente aos valores indicados no enunciado do problema (por exemplo, seis bermudas e quatro camisetas), enquanto que ao grupo B, foi disponibilizado apenas um subconjunto dos materiais (por exemplo, duas bermudas e quatro camisetas). Os participantes do grupo A, por terem recebidos todo o material, tinha apenas que saber como manipular esse material. Já as crianças do grupo B, por não ter recebido todo o material, teriam que saber usar o subconjunto para criar um modelo para pensar e, a partir daí, conseguir fazer todas as combinações possíveis. Os resultados indicaram que todas as crianças de oito e nove anos de idade conseguiram acertar todos os problemas de correspondência múltipla simples (isomorfismo) quando tinham o conjunto completo de materiais para lhes servir de suporte. Já as crianças de oito anos obtiveram menos da metade das respostas corretas quando possuíam apenas uma parte dos materiais. No que concerne aos problemas de produto cartesiano, nenhuma das crianças de oito anos acertou o problema sem o apoio de todos os materiais concretos necessários para chegar à solução. Estes problemas mais sofisticados também se apresentaram como muito difíceis para as crianças de nove anos, que acertaram cerca de 55% das vezes quando dispunham de todo o material necessário para representar a situação.

As pesquisas delineadas até o momento versam sobre as dificuldades de crianças e adolescentes em relação à resolução de problemas sobre raciocínio combinatório. Contudo, há alguns estudos que apontam algumas possibilidades para o raciocínio combinatório infantil. Alguns deles serão descritos a seguir.

English (1991, 1992) realizou vários estudos a fim de investigar as primeiras idéias das crianças sobre a combinatória. Para atingir este objetivo, a autora examinou 50 crianças, as quais foram divididas em seis grupos em função da faixa etária (quatro anos, cinco anos, seis anos, sete anos, oito anos e nove anos), durante a resolução de sete problemas de combinatória do tipo produto cartesiano, todos aplicados individualmente em uma única sessão. As tarefas consistiam em vestir ursos de brinquedos (em madeira) com todas as possibilidades de roupas. O traje era composto por uma camisa e uma calça e cada item deste vestuário era feito de material adesivo a fim de facilitar a sua colagem no brinquedo. Uma vez que os ursos tinham sido vestidos, as crianças tinham que colocá-lo em uma plataforma de madeira para que as roupas pudessem ser vistas claramente. Após a resolução de cada tarefa, o participante era questionado se todos os trajes foram formados ou se haveria outros a serem formados. Para cada problema, era fornecida a criança uma quantidade maior de ursos e trajes do que aquela necessária para resolver a tarefa. É importante salientar que os problemas consistiam em combinar duas variáveis (camisa e calça) e o valor de cada elemento do conjunto básico chegaria até três, gerando, portanto, um total máximo de nove combinações possíveis (3x3). Diante dos resultados encontrados, English observou um desenvolvimento gradual das estratégias utilizadas na resolução desses problemas à medida que aumentava a idade dos participantes. As estratégias identificadas foram as seguintes:

1. **Ausência de planejamento:** a criança não faz qualquer tentativa na direção de encontrar todos os trajes possíveis, ela apenas veste os ursos. Uma variação desta estratégia é a seleção aleatória dos itens através de tentativa e erro;
2. **Estratégia de transição:** é mais eficiente do que a estratégia anterior, porém não é tão eficiente quanto às estratégias algorítmicas sofisticadas. A principal característica desta estratégia é a presença de um padrão de seleção de itens. Todavia, esse padrão é perdido ou alterado ocasionalmente ao longo da resolução do problema.
3. **Estratégia odométrica:** é a estratégia mais eficiente. A criança escolhe um item e o adota como “constante” (por exemplo, blusa azul), selecionando-o várias vezes até que todas as combinações possíveis referentes a este item sejam efetuadas. A partir de então, a criança escolhe um novo item “constante” e repete o mesmo procedimento até que haja o esgotamento de todos os itens.

Os resultados indicaram que crianças de quatro e cinco anos não planejam estratégias de solução para as tarefas, vestindo aleatoriamente os ursos, enquanto que as crianças de seis anos já começaram a utilizar a estratégia de transição, formando algumas combinações. Contudo, é apenas a partir dos sete anos de idade que as crianças utilizam a estratégia odométrica na resolução de problemas e, dessa maneira, esgotam todas as combinações possíveis. A estratégia odométrica é empregada mais frequentemente pelas crianças de 9 anos

(46,7%), porcentagem esta que corresponde também ao maior ao número de acertos. English ainda observou que os grupos de crianças de quatro e cinco anos de idade não avançaram mais que os procedimentos de tentativa e erro, como previsto por Piaget para crianças localizadas na fase do pensamento pré-operacional. Já as crianças de sete a nove anos realizaram procedimentos sistemáticos para construir as combinações. Portanto, diante destes dados, a autora concluiu que, em condições adequadas, as crianças da fase operacional-concreto podem adquirir um método sistemático para a construção de combinações. A autora, ainda recomendou que o trabalho com esses tipos de problema deveria acontecer precocemente na escola, assegurando que quanto mais cedo este trabalho fosse realizado, mais cedo as crianças seriam capazes de adquirir conhecimento do campo conceitual da combinatória.

Em outra pesquisa, English (1993) buscou investigar se a familiarização com problemas manipulativos de produto cartesiano mais simples promoveria uma maior facilidade na resolução de problemas manipulativos de produtos cartesianos mais sofisticados. A autora examinou se os procedimentos e as estratégias empregadas em um problema simples podem ser extrapolados para problemas mais complexos, ou se estas estratégias são alteradas à medida que a dificuldade da atividade aumenta. Participaram deste estudo 96 crianças de sete a doze anos de idade, as quais foram divididas em seis grupos em função da idade (sete anos, oito anos, nove anos, dez anos, onze anos e doze anos). As crianças eram solicitadas a resolver problemas mais simples, que se assemelhavam aos problemas descritos no estudo anterior (vestir ursos de brinquedo com diferentes peças de roupa) e os problemas mais complexos também eram semelhantes, porém ao invés de diferentes cores de camisas, os participantes tinham camisa de mesma cor, mas com diferentes quantidades de botões, cujos valores variavam de um a três botões. De acordo com os dados obtidos, a autora observou que as crianças mais jovens alteravam mais as suas estratégias, ao passo que as mais velhas apresentaram estratégias fixas de resolução que eram empregadas nos problemas independentemente do seu nível de complexidade. Assim, a autora concluiu que não é o nível de complexidade dos problemas que determina a utilização de estratégias de solução, uma vez que estas são esquematizadas em função do percurso evolutivo da própria criança.

Mekhmandarov (2000) buscou investigar a compreensão de problemas de produto cartesiano com crianças da educação infantil. A compreensão da criança foi testada pela observação da forma como elas construíam os pares ordenados, classificavam um determinado conjunto de pares e previam o tamanho do produto, antes mesmo de construir esse conjunto. Cada criança, das 45 que participaram do estudo, foi solicitada a resolver individualmente tarefas de manipulação, utilizando blocos lógicos ("Lego") para compor pares ordenados, e tinham que formar dois conjuntos iguais e dois conjuntos diferentes de elementos. Outra tarefa que os participantes também deveriam executar refere-se à classificação de elementos segundo uma tabela de dupla entrada (tabela bidimensional). O autor descreveu três princípios que ele utilizou para avaliar a compreensão das crianças acerca da estrutura cartesiana, são eles:

1. Compreender que cada par é construído por um e somente um elemento de cada um dos conjuntos;
2. Compreender que cada par é um elemento do novo conjunto-produto, aceitando que cada elemento do conjunto básico pode aparecer em diversos pares (correspondência um-para-muitos), ao contrário do que ocorre na estrutura aditiva;
3. Compreender que cada par deve aparecer apenas uma vez no conjunto-produto.

Os resultados deste estudo indicaram que as tarefas de construção de pares ordenados de dois conjuntos idênticos foram mais difíceis em relação aos conjuntos diferentes, isto se deve ao fato das crianças terem se focalizado nas relações entre os elementos dentro dos pares, sendo este um entrave mais perceptual do que matemático. Em relação aos conjuntos diferentes, cerca de um terço dos participantes conseguiu analisar a estrutura bidimensional do produto. No que diz respeito à análise da compreensão dos alunos acerca dos princípios que dão suporte ao produto cartesiano, Mekhmandarov (2000) observou, por exemplo, que 98% das crianças sabiam que um mesmo elemento do conjunto básico pode aparecer em diversos pares (conjunto-produto). Portanto, de maneira geral, os resultados evidenciaram que a maior parte dos participantes foi capaz de construir elementos de um produto cartesiano ou aprender a fazê-lo durante a entrevista por meio de algumas instruções. O autor considerou seus resultados demasiadamente surpreendentes haja vista a dificuldade que os alunos do 4º e 5º anos ainda encontram na construção de todas as possibilidades em problemas de combinatória. Assim, diante da performance e do processo de aprendizagem das crianças da educação infantil que participaram deste estudo, o autor sugere que tarefas que envolvam estrutura de produto cartesiano possam ser introduzidas desde cedo nas escolas.

Focalizando as relações mais implícitas que estão envolvidas nos problemas de raciocínio combinatório, assim como fez Mekhmandarov (2000) e English (1991, 1992), Silva e Spinillo (2010) buscaram investigar o possível efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos e dos princípios indicados por Mekhmandarov (2000) no raciocínio combinatório. Para examinar essa possibilidade, dois tipos de problemas de produto cartesiano (problemas de percurso e de traje) foram apresentados em três situações distintas, as quais diferiam em função da explicitação e da não explicitação das relações um-para-muitos. A situação I se caracterizava pelas correspondências um-para-muitos estarem implícitas nos enunciados dos problemas, sendo, portanto, os problemas apresentados de forma clássica como usualmente se observa nas pesquisas da área e livros didáticos. Na situação II, as correspondências múltiplas estavam explicitadas no enunciado do problema e este era acompanhado também de uma representação gráfica dos conjuntos elementares. A situação III havia a explicitação das relações um-para-muitos no enunciado do problema e dos princípios de Mekhmandarov (2000). Vale ressaltar que esta pesquisa se dividiu em dois estudos, que se distinguiam quanto à ordem de apresentação das situações. No Estudo 1, a ordem de apresentação foi: Situação I, Situação II e Situação III. Enquanto que no Estudo 2, a ordem foi a seguinte: Situação II, Situação III e Situação I.

Participaram da pesquisa 40 crianças, de oito anos de idade, alunas do 3º ano do Ensino Fundamental e nenhuma delas havia recebido instrução formal sobre a multiplicação no contexto escolar. Silva e Spinillo (2010) observaram diferentes tipos de estratégias, as quais foram baseadas naquelas propostas por Batista (2002), mas com acréscimo de outras, que variaram em função do nível de maior ou menor sofisticação. Estas estratégias são descritas abaixo.

1. **Estratégia inadequada:** a criança realiza uma operação inapropriada, em geral de adição ou subtração dos dois valores presentes no enunciado do problema;
2. **Combinação por pares fixos:** a criança fornece como resposta o menor valor presente no enunciado do problema, pois para ela não é possível formar mais combinações se o número de elementos de um dos grupos foi extenuado;
3. **Formação de algumas combinações sem sistematização na formação dos pares:** a criança começa a fazer a correspondência um-para-muitos. Algumas oferecem como resposta o maior número presente no enunciado do problema, outras crianças realizam combinações, mas sem que haja uma sistematização na formação dos pares;
4. **Solução combinatória por contagem:** a criança realiza a correspondência múltipla com os elementos do problema e cada novo par formado conta com uma unidade, descobrindo, ao final da contagem, o resultado adequado do problema.
5. **Solução combinatória por adição repetida:** a criança encontra as combinações para um item do enunciado e adiciona consecutivamente essa quantidade de acordo com o número de elementos presente no enunciado do problema. Outra forma de expressar o

mesmo raciocínio é por meio da contagem em múltiplos, na qual a criança realiza a contagem dos grupos de combinação formados com quantidades iguais, sem citar o sinal da operação que está sendo usado, até chegar ao número total de combinações.

6. **Solução combinatória por multiplicação:** A criança encontra a resposta correta por meio da operação multiplicativa a partir dos valores presentes no enunciado do problema.

Os resultados do estudo evidenciaram que a explicitação da correspondência um-para-muitos, seja acompanhada de representação gráfica ou dos princípios invariantes, auxilia a resolução de problemas de produto cartesiano. No que diz respeito aos dois tipos de estudo, verificou-se que o percentual de acerto no Estudo 2 é alto em ambos os problemas e nas três situações propostas. Enquanto que no Estudo 1, o desempenho na situação I foi aquém do que aquele observado nas outras situações. Além disso, foi observado um efeito de ordem no que concerne a aplicação das situações. Quando as situações de explicitação antecediam a situação implícita, o desempenho dos alunos nesta última situação era melhor, se aproximando do desempenho das demais situações. Em relação às estratégias, os dados apontaram que o uso delas variava apenas em relação às situações, sendo o maior número de estratégias que levavam ao acerto encontrado na Situação II do que na Situação I. Assim, a explicitação da correspondência um-para-muitos também favorece o uso de estratégias mais sofisticadas.

Diante dos estudos descritos, pode-se perceber que problemas de raciocínio combinatório são frequentemente considerados difíceis por alunos de diferentes idades e níveis escolares, uma vez que é uma tarefa complexa compreender as relações e resolver adequadamente problemas de combinatória mesmo quando as variáveis possuem valores baixos.

Pesquisas como as de English (1991, 1992), Mekhmandarov (2000) e Silva e Spinillo (2010), que focalizam mais as relações implícitas envolvidas nos problemas de raciocínio combinatório, apresentam resultados a favor de um pensamento combinatório em crianças jovens com idades entre 7 e 8 anos. Estes estudos, de maneira geral, defendem que a compreensão da correspondência um-para-muitos e dos princípios invariantes são elementos importantes para a compreensão e resolução com sucesso desses tipos de problemas por crianças. Diante dessas considerações, o presente estudo, buscou investigar o efeito da explicitação dos princípios invariantes nos problemas de combinação solucionados por crianças.

# *Capítulo II*

# *Objetivos e Método*

## *2.1 Objetivos*

A maioria dos problemas matemáticos que envolvem raciocínio combinatório (combinação, arranjo e permutação) é iniciada formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio, diferentemente dos problemas de produto cartesiano que já são trabalhados explicitamente nas séries iniciais do Ensino Fundamental. No entanto, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam que os problemas de raciocínio combinatório sejam introduzidos ainda nos 1º e 2º ciclos do Ensino fundamental através de exercícios de contagem e escolha (Brasil, 1997). Em um estudo recente de análise de livros didáticos, Barreto, Amaral e Borba (2007) verificaram que, apesar do produto cartesiano ser o único tipo de problema de raciocínio combinatório trabalhado de forma explícita, os outros tipos de problemas (combinação, arranjo e permutação) também são apresentados nos livros didáticos de 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Contudo, nenhum destaque é feito a esses tipos de problemas e nem mesmo as suas diferenças e semelhanças são trabalhadas nesse período. Sendo assim, embora, não seja realizado um trabalho mais sistemático com a combinatória nesses primeiros anos escolares, acredita-se ser importante explorar a compreensão que a criança apresenta acerca do raciocínio combinatório; examinando, ainda, os diferentes tipos de problemas que envolvem esta forma de raciocinar.

Além desta motivação de caráter mais didático, esta pesquisa apresenta fundamentalmente um caráter psicológico.

Considerando as questões pontuadas ao longo da fundamentação teórica sobre o desenvolvimento cognitivo e o desempenho de crianças em problemas de raciocínio combinatório, os princípios invariantes do conceito em questão são essenciais para a resolução desses tipos de problemas matemáticos. Conforme discutido na revisão de literatura, as crianças apresentam grandes dificuldades em resolver problemas de combinatória quando tais relações não são explicitadas nos enunciados dos problemas.

O estudo conduzido por Silva e Spinillo (2010), como já mencionado, buscou examinar se as crianças teriam um melhor desempenho, adotando estratégias mais apropriadas, quando houvesse a explicitação dos princípios invariantes nos enunciados dos problemas de produto cartesiano. Diante dos resultados desta pesquisa, o que se verificou é que o desempenho das crianças melhora quando há a explicitação dos princípios invariantes, incluindo a explicitação da correspondência um-para-muitos.

Diante disso, o presente estudo buscou examinar o efeito da explicitação dos princípios invariantes em relação a outros problemas de combinação considerados mais complexos do que os de produto cartesiano (Pessoa & Borba, 2009). Neste sentido, a questão de pesquisa a ser respondida é: Será que se os princípios invariantes da combinação forem explicitados nos enunciados dos problemas matemáticos que envolvem a combinação ocorrerá o mesmo fenômeno que aquele apresentando no estudo de Silva e Spinillo (2010); ou seja, será que a explicitação dos invariantes auxiliaria a criança a resolver tais problemas, apresentando uma melhor compreensão deste conceito (melhora no desempenho e uso de estratégias apropriadas)? Associados a esta questão principal, outra questão específica surgiu: Quais as estratégias que as crianças adotam na resolução desses problemas quando ocorre esta explicitação?

Na tentativa de responder a tais questões que a presente investigação foi proposta, sendo constituída por duas etapas, que serão descritas mais adiante. Acredita-se que esta pesquisa pôde contribuir na compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças a fim de que elas se tornem cada vez mais aptas a resolverem com êxito estes tipos de problema. Além disso, espera-se que os resultados deste estudo possam subsidiar propostas educacionais adequadas para o ensino de problemas de raciocínio combinatório e gerar questionamentos ou reflexões outras que levem a mais estudos a respeito deste tema.

## 2.2 Método

Como mencionado, a pesquisa foi composta por duas etapas cada uma com objetivos distintos, porém complementares. A Etapa 1 examinou o desempenho de crianças na resolução de dois tipos de problemas de combinatória: produto cartesiano e combinação. Ambos os tipos de problemas foram apresentados em duas situações diferentes: uma em que os princípios invariantes deste conceito não estavam explicitados no enunciado dos problemas e outra em que estes princípios estavam explicitados. Importante esclarecer que, nesta etapa, os dados relativos aos problemas de produto cartesiano foram obtidos do estudo de Silva (2010), em sua dissertação de mestrado e que foram gentilmente cedidos pela autora; enquanto que as informações referentes aos problemas de combinação foram coletadas a partir da presente pesquisa. Dessa forma, as análises realizadas nessa primeira etapa provêm de bancos de dados de duas pesquisas diferentes.

A Etapa 2, cujos dados coletados foram produtos da presente investigação, foi composta por três situações que variavam em função da explicitação ou não explicitação dos princípios invariantes do raciocínio combinatório em problemas denominados de combinação. Na Situação I, os princípios invariantes da combinação estavam implícitos no enunciado dos problemas, da maneira que usualmente se observa nas pesquisas da área (forma clássica). Na Situação II, os princípios invariantes foram explicitados no enunciado dos problemas. Na Situação III, os invariantes também estavam explícitos nos enunciados dos problemas, porém estes eram acompanhados de desenhos de figuras recortadas. Importante comentar que a Situação I e a Situação II foram semelhantes àquelas presentes na pesquisa de Silva e Spinillo (2010), porém a Situação III diferiu daquelas situações por envolver desenhos de figuras recortadas.

A decisão por inserir uma terceira situação na Etapa 2 deveu-se ao fato de, durante a realização do estudo piloto para esta pesquisa, ter-se percebido a utilização de estratégias de resolução diferenciadas por parte da criança, acreditando-se, portanto, que a explicitação dos princípios invariantes acompanhada deste tipo de material poderia facilitar ainda mais a resolução desse tipos de problema, possibilitando o uso de estratégias adequadas por parte das crianças. Pelo fato do piloto ter sido realizado com um pequeno número de crianças, seria necessária uma investigação mais aprofundada a respeito desta questão. Diante disto, construiu-se a Situação III, a qual visou examinar o efeito da explicitação dos princípios invariantes juntamente com os desenhos de figuras recortadas sobre o desempenho e as estratégias de resolução adotadas por crianças.

Em face do exposto, a hipótese da presente pesquisa é a de que a explicitação dos problemas invariantes da combinação poderá ocasionar um feito facilitador, propiciando o emprego de estratégias mais apropriadas para a resolução desses tipos de problemas. Assim, acredita-se que o valor desta investigação está em poder contribuir para uma melhor compreensão dos problemas de raciocínio combinatório, sobretudo combinação, como também gerar outras possibilidades de situações mais facilitadoras para o ensino e aprendizagem do conteúdo em questão. Além de permitir averiguar as estratégias cognitivas utilizadas por crianças que ainda não receberam o ensino formal da combinação.

A coleta de dados ocorreu nas próprias escolas, as quais eram pertencentes à rede particular de ensino, e foi conduzida num período de quatro meses (junho, agosto, setembro e outubro). Era disponibilizada uma sala onde o examinador pôde realizar todas as entrevistas sem que houvesse interrupções. As crianças da Etapa 1 foram entrevistadas individualmente em duas sessões por um mesmo examinador. Em cada sessão, a criança fora solicitada a resolver 4 problemas de produto cartesiano (participantes do Grupo 1) ou de combinação (participantes do Grupo 2) de uma determinada situação, totalizando, assim, 8 problemas de raciocínio combinatório para cada grupo de alunos.

Já os participantes da Etapa 2 foram entrevistadas individualmente em três sessões por um mesmo examinador, já que esta envolvia um tipo a mais de situação de pesquisa. Em cada sessão, a criança foi solicitada a resolver quatro problemas de combinação de uma determinada situação. Portanto, ao final de três sessões, as crianças tinham resolvido 12 problemas.

É importante esclarecer que a ordem de apresentação das situações de cada etapa foi randomizada, assim como os problemas de cada situação, cuja ordem foi definida através de um sorteio feito com cada criança, antes da entrevista. Cada problema foi apresentado por escrito em uma cartela e lido em voz alta pelo experimentador, juntamente com a criança. Após a leitura do problema, a cartela ficou disponível sobre a mesa, sendo consultada quantas vezes a criança achasse necessário. Em seguida, o experimentador solicitava ao participante que resolvesse o problema da maneira que desejasse e, após a sua resolução, por meio de uma entrevista clínica, solicitava justificativas e explicações a respeito do resultado obtido e das ações empreendidas. O tempo para a resolução dos problemas foi livre. As entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas, posteriormente, em protocolos individuais.

### 2.2.1 Etapa 1: Resolução de problemas de produto cartesiano e de combinação

#### 2.2.1.1 Participantes

Sessenta crianças, de ambos os sexos, com oito anos de idade, alunas do 3º ano do ensino fundamental de escolas particulares da região metropolitana do Recife, que ainda não tinham recebido instrução formal sobre a multiplicação no contexto escolar. Nenhuma das crianças era repetente ou apresentava dificuldades em matemática ou qualquer dificuldade de aprendizagem, segundo informações da escola.

Os participantes foram divididos em dois grupos:

Grupo 1[6]: 30 crianças, com oito anos de idade, que resolveram problemas de produto cartesiano em duas situações distintas: Situação I (sem explicitação dos princípios invariantes do produto cartesiano) e Situação II (com explicitação dos invariantes do produto cartesiano).

Grupo 2: 30 crianças, com oito anos de idade, que resolveram problemas de combinação em duas situações diferentes: Situação I (sem explicitação dos princípios invariantes da combinação) e Situação II (com explicitação dos invariantes da combinação).

#### 2.2.1.2. Procedimento e planejamento experimental

Como mencionado, as crianças do Grupo 1 foram participantes do estudo de Silva e Spinillo (2010), sendo utilizados na atual pesquisa; já os dados referentes aos estudantes do Grupo 2 foram coletados a partir da presente investigação. Contudo, é importante ressaltar, que apesar de os sujeitos dessa etapa ser provenientes de dois estudos diferentes, o procedimento e planejamento experimental realizados em ambos são idênticos, alterando-se apenas o tipo de problema que fora resolvido: produto cartesiano ou combinação.

Os estudantes de cada grupo foram entrevistados individualmente em duas sessões por um mesmo examinador, na própria escola. Os participantes do Grupo 1 foram solicitados a resolver oito problemas de produto cartesiano, enquanto que os do Grupo 2 foram solicitados a resolver oito de combinação. Cada problema foi apresentado por escrito em uma cartela e lido em voz alta pelo experimentador, juntamente com a criança. Após a leitura do problema, a cartela ficou disponível sobre a mesa, podendo ser consultada quantas vezes a criança

[6] Ressalta-se que os estudantes desse grupo foram os participantes da pesquisa de Silva e Spinillo (2010), cujos dados foram gentilmente cedidos para este estudo e se encontram disponíveis no Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática (NUPPEM).

achasse necessário. Em seguida, o experimentador solicitava que a criança resolvesse o problema da maneira que desejasse e, após a sua resolução, por meio de uma entrevista clínica, solicitava justificativas e explicações a respeito do resultado apresentado e das ações empreendidas. O tempo para a resolução dos problemas foi livre. As entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas em protocolos individuais. Os problemas foram apresentados em duas situações conforme descrito adiante.

### *Os problemas*

A opção por investigar o desempenho dos estudantes em problemas de raciocínio combinatório distintos se deve ao fato de analisar se o efeito facilitador da explicitação dos princípios invariantes observados na resolução de problemas de produto cartesiano no estudo de Silva e Spinillo (2010) poderia ser também verificado em problemas mais complexos, como é o caso da combinação.

Os problemas que constituíam esta primeira etapa referiam-se a oito problemas de produto cartesiano direto, cujas resoluções envolviam o uso da operação de multiplicação, e oito problemas de combinação. Os problemas foram apresentados aos participantes em duas situações distintas, que serão descritas mais adiante. A apresentação dos quatro problemas contidos em cada situação foi aleatória, definida por sorteio antes de cada entrevista com a criança.

Com relação à grandeza dos pares numéricos trabalhados nos problemas de produto cartesiano, isto é, o valor das medidas elementares, foram números pequenos (2, 3, 4, 5 e 6), havendo apenas duas medidas elementares em cada problema (blusas e saias, entradas e saídas, camisetas e calças). As combinações de medidas elementares adotadas para formação dos pares numéricos deste estudo poderiam gerar os seguintes valores de medida produto: 8, 10, 12 e 15. Ressalta-se que no estudo original realizado por Silva e Spinillo (2010) havia dois tipos de problemas: problemas de trajes e de percurso. Como não foi encontrada qualquer diferença tanto no que concerne ao numero de acertos quanto ao uso de estratégias entre os tipos de problemas, na presente investigação isso não foi levado em conta e os tipos de problemas foram considerados de forma conjunta.

Já os valores contidos nos problemas de combinação eram os seguintes: 5 e 6 para os conjuntos; e 2, 3 e 4, para os subconjuntos. As combinações desses valores podiam gerar 10 (problemas 2 e 3) e 15 (problemas 1 e 4) grupos diferentes.

Para controle experimental os mesmos pares numéricos foram utilizados nos problemas das duas situações de cada tipo de problema. Os problemas serão apresentados adiante quando descritas as situações.

### *As situações*

O presente estudo emergiu diante dos resultados apresentados na pesquisa de Silva e Spinillo (2010), os quais demonstraram que as crianças obtiveram um melhor desempenho ao resolverem problemas de produto cartesiano quando os princípios invariantes estavam explícitos nos seus enunciados. A partir disso, surgiu a seguinte pergunta: se fossem apresentados problemas de combinação em que seus princípios invariantes estivessem explicitados nos seus enunciados, será que a criança teria um melhor desempenho do que quando esses princípios não são explicitados, sendo capaz de resolver corretamente estes tipos de problemas por meio de estratégias adequadas assim como ocorreu no estudo de Silva e Spinillo (2010)?

Para tentar responder esta questão, foram fornecidos problemas de produto cartesiano a um grupo de participantes (Grupo 1) e problemas de combinação a um segundo grupo (Grupo 2) em duas situações distintas, uma em que os princípios invariantes do conceito trabalhado não estava explícito (Situação I) e outra em que tais invariantes estavam explícitos (Situação II).

Segundo Mekhmandarov (2000), os princípios invariantes dos problemas de produto cartesiano são:

1. compreender que cada par é construído por um e somente um elemento de cada um dos conjuntos;
2. compreender que cada par é um elemento do novo conjunto-produto, aceitando que cada elemento do conjunto básico pode aparecer em diversos pares (correspondência um-para-muitos), ao contrário do que ocorre na estrutura aditiva;
3. compreender que cada par deve aparecer apenas uma vez no conjunto-produto.

Já os princípios invariantes da combinação, identificados nos livros didáticos que abordam a Análise Combinatória, (e.g. Morgado *et al*., 2006; Santos, Mello & Murari, 1998), são:

1. trabalha-se com a combinação de um subgrupo do grupo;
2. não há repetição de elementos;
3. a ordem dos elementos no subconjunto não é importante, basta que a combinação ocorra apenas uma vez.

Diante dessas considerações, foram investigadas duas diferentes situações de resolução de problemas, cuja ordem de apresentação fora randomizada. A descrição dessas situações é realizada a seguir.

<u>Situação I: problemas sem explicitação dos princípios invariantes</u>

Os quatro problemas apresentados nesta situação seguiram o padrão usual de problemas de produto cartesiano e de combinação encontrados nos livros pedagógicos e nas pesquisas com crianças, em que os princípios invariantes destes tipos de problemas não são explicitados. Os problemas foram lidos pelo examinador e apresentados por escrito em cartelas, ficando à disposição do participante para que pudesse lê-los quantas vezes achasse necessário.

Os problemas de **produto cartesiano** desta situação foram:

**Problema 1 (P1):** Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

**Problema 2 (P2):** Um parque de diversão tem 6 entradas (A, B, C, D, E, F) e 2 saídas (1, 2). Combinando as entradas e saídas Daniela pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair do parque?

**Problema 3 (P3):** Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelha, laranja, preta, marrom e branca). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

**Problema 4 (P4):** Um *shopping* tem 2 entradas (A, B) e 4 saídas (1, 2, 3, 4). Combinando as entradas e saídas André pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do *shopping*. De quantas maneiras diferentes ele pode entrar e sair desse *shopping*?

Os problemas de **combinação** desta situação foram:

**Problema 1 (P1):** Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 2 (P2):** Cinco crianças (Cléo, Juliana, Bruno, Davi e Mateus) querem brincar de jogo de dama, mas só duas podem brincar de cada vez. Quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de jogo de dama?

**Problema 3 (P3):** Seis professores (Carla, Marta, Sandra, Ivan, Jorge e Leo) estão participando do sorteio em que dois deles serão premiados, cada um ganhando um livro. Quantos grupos diferentes de dois ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 4 (P4):** Seis crianças (Luísa, Vitória, Nanda, André, Beto e Júnior) querem brincar de vôlei, mas só quatro podem brincar de cada vez. Quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de vôlei?

<u>Situação II: problemas com explicitação dos princípios invariantes</u>

Os quatro problemas de produto cartesiano apresentados nesta situação continham explicitamente em seu enunciado os princípios invariantes indicados por Mekhmandarov (2000). Por sua vez, os quatro problemas de combinação desta situação apresentavam explicitamente em seus enunciados os seus princípios invariantes (e.g. Morgado *et al.*, 2006; Santos, Mello & Murari, 1998). Os problemas foram lidos pelo examinador e apresentados por escrito em cartelas, ficando à disposição do participante para que pudesse lê-los quantas vezes achasse necessário.

Os problemas de **produto cartesiano** desta situação foram:

**Problema 5 (P5):** Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom, e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez, não é? Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa laranja. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa cinza, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?

**Problema 6 (P6):** Paulo foi ao parque de diversão. Nesse parque existem 4 entradas (A, B, C, D) e 2 saídas (1, 2). Nesse parque, as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta. Paulo pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ele for novamente ao parque, ele pode entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Paulo quer ir ao parque de diversão muitas vezes, em dias diferentes. Mas ele não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ele quer fazer um caminho diferente a cada dia que ele for ao parque. Combinando todas as entradas com todas as saídas, de quantas maneiras diferentes Paulo pode entrar e sair desse parque?

**Problema 7 (P7):** Fátima vai viajar para casa de sua tia. Na mala ela colocou 5 saias (amarela, rosa, azul, preta e marrom) e 2 blusas (verde e vermelha). Ele pode combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as saias e todas as blusas de uma só vez; só usa uma saia e uma blusa de cada vez, não é? Combinando as saias com as blusas, ela pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Fátima quer usar uma roupa diferente a cada dia, ela não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ela pode usar a saia rosa com a blusa verde. No outro dia, ela pode usar a mesma saia rosa com a blusa vermelha, já seria uma roupa diferente, não é? Combinando todas as saias com todas as blusas, quantos conjuntos diferentes Fátima pode formar?

**Problema 8 (P8):** Bia foi ao *shopping*. Nesse *shopping* existem 2 entradas (A, B) e 6 saídas (1, 2, 3, 4, 5, 6). Nesse *shopping* as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta. Bia pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ela entrar novamente no *shopping*, ela pode entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Bia quer ir ao *shopping* muitas vezes, em dias diferentes. Mas ela não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ela quer fazer um caminho diferente a cada dia que ela for ao *shopping*. De quantas maneiras diferentes Bia pode entrar e sair desse *shopping*?

Os problemas de **combinação** desta situação foram:

**Problema 5 (P5):** O clube vai fazer um sorteio de três carros. Cinco pessoas (Joana, Tati, Alina, Diogo e Guto) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todas as pessoas ganharão o prêmio porque tem cinco pessoas participando do sorteio e só tem três carros para serem sorteados, não é? Os carros devem ser sorteados para três pessoas diferentes, então, uma mesma pessoa não pode ganhar todos os carros, não é? Podem ter várias combinações de três ganhadores, não pode? Por exemplo, uma combinação de três ganhadores pode ser: Joana, Tati e Alina. Outra combinação diferente seria Joana, Tati e Diogo, não seria? Com todas essas pessoas, quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 6 (P6):** No jogo de futebol de botão só podem jogar duas crianças por vez. Cinco crianças (Zeca, Vítor, Mário, Tiago e Sérgio) querem jogar futebol de botão. Nem todas as crianças jogarão futebol de botão ao mesmo tempo porque tem cinco crianças querendo jogar e só duas podem jogar futebol de botão de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode jogar sozinha o futebol de botão, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para jogar futebol de botão, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Zeca e Vítor. Outra dupla diferente seria Zeca e Mário, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para jogar futebol de botão de cada vez?

**Problema 7 (P7):** A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque tem seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio, não seria? Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 8 (P8):** Na roda gigante só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Manu, Bia, Flávia, Pedro, Daniel e Rafael) querem brincar na roda gigante. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo na roda gigante porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar na roda gigante de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha na roda gigante, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar na roda gigante, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Manu, Bia, Flávia e Pedro. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Manu, Bia, Flávia e Daniel. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez na roda gigante?

A fim de facilitar a visualização do leitor a respeito das situações, pares numéricos e referentes adotados para cada tipo problema apresentado, segue um quadro síntese.

**Quadro 1:** Síntese dos pares numéricos em cada situação para cada tipo de problema (Etapa 1).

| **SITUAÇÕES** | **TIPOS DE PROBLEMAS** | |
|---|---|---|
| | **Produto cartesiano** | **Combinação** |
| Situação I (com explicitação dos princípios invariantes) | Problema 1 (2, 5) | Problema 1 (5, 3) |
| | Problema 2 (6, 2) | Problema 2 (5, 2) |
| | Problema 3 (3, 5) | Problema 3 (6,2) |
| | Problema 4 (2, 4) | Problema 4 (6, 4) |
| Situação II (sem explicitação dos princípios invariantes) | Problema 5 (2, 6) | Problema 5 (5, 3) |
| | Problema 6 (5, 2) | Problema 6 (5, 2) |
| | Problema 7 (2, 4) | Problema 7 (6, 2) |
| | Problema 8 (5, 3) | Problema 8 (6, 4) |

#### 2.2.1.3. Material

Dezesseis cartelas retangulares de papelão, sendo oito preenchidas por um problema de produto cartesiano e as demais preenchidas por um problema de combinação. Foram utilizados também gravador de voz (MP4) para registro das entrevistas, folhas de papel, lápis, borracha e folhas de registro para anotações da examinadora.

### 2.2.2 Etapa 2: Resolução de problemas de combinação

#### 2.2.2.1 Participantes

Noventa crianças, de ambos os sexos, com idade entre 8 e 10 anos, alunas do 3º ao 5º anos do Ensino Fundamental de escolas particulares localizadas na região metropolitana do Recife que ainda não havia recebido instrução formal sobre a combinação no contexto escolar. Nenhuma das crianças era repetente ou apresentava dificuldades em matemática ou qualquer dificuldade de aprendizagem, segundo informações da escola. Foram formados três grupos de 30 participantes em função do ano escolar, a saber:

Grupo 1: alunos do 3º ano do Ensino Fundamental;

Grupo 2: alunos do 4º ano do Ensino Fundamental;

Grupo 3: alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.

É importante esclarecer que os participantes do Grupo 1 desta etapa são os mesmos integrantes do Grupo 2 da Etapa 1. Por isso, os dados coletados na primeira etapa foram utilizados nesta a fim de que pudesse ser realizada uma análise do desempenho e das estratégias empregadas em função da escolaridade dos estudantes. Vale salientar que a Etapa 2, diferentemente da Etapa 1, é constituída apenas por problemas de combinação, distribuídos em 3 situações distintas. Portanto, nesta etapa o Grupo 1 foi solicitado a resolver os problemas de combinação da Situação III (problemas com explicitação dos problemas invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas) já que os problemas de combinação referentes à Situação I (problemas sem explicitação dos problemas invariantes) e à Situação II (problemas com explicitação dos problemas invariantes) já havia sido solucionados na Etapa 1.

#### 2.2.2.2. Procedimento e planejamento experimental

Como mencionado, os estudantes do Grupo 1 desta etapa são os mesmo participantes do Grupo 2 da Etapa 1. O procedimento experimental realizado nas duas etapas é idêntico, diferindo apenas quanto ao número de situações, uma vez que esta etapa apresentou uma situação de pesquisa a mais e, por conseguinte, quatro problemas de combinação a mais para serem resolvidos, totalizando, assim, 12 problemas de combinação nesta segunda etapa do estudo. Portanto, o procedimento delineado a seguir se aplica também aos alunos do Grupo 1, uma vez que estes resolveram os mesmos problemas que os Grupos 2 e 3, porém seus dados também foram utilizados na Etapa 1 a fim de que pudesse ser realizada uma análise em função dos diferentes tipos de problemas (produto cartesiano e combinação).

As crianças foram divididas em três grupos em função do ano escolar, como mencionado anteriormente, e entrevistadas individualmente em três sessões por um mesmo examinador na própria escola. Os participantes foram solicitados a resolver, em cada sessão, quatro problemas de combinação de uma determinada situação. Portanto, ao final das três sessões, as crianças tinham resolvido 12 problemas. Cada problema foi apresentado por escrito em uma cartela e lido em voz alta pelo experimentador, juntamente com a criança. Após a leitura do problema, a cartela ficou disponível sobre a mesa, podendo ser consultada quantas vezes a criança considerasse necessário. Em seguida, o experimentador solicitava que a criança resolvesse o problema da maneira que desejasse e, após a sua resolução, por meio de uma entrevista clínica, eram solicitadas justificativas e explicações a respeito do resultado apresentado e das ações empreendidas. O tempo para a resolução dos problemas foi livre. As entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas em protocolos individuais. Os problemas foram apresentados em três situações conforme descrito mais adiante.

### Os problemas

Doze problemas de combinação foram apresentados aos participantes, divididos em três situações distintas. A apresentação dos quatro problemas contidos em cada situação foi aleatória, definida por sorteio antes de cada entrevista com a criança.

No que diz respeito à grandeza dos pares numéricos contidos nos problemas, estes tinham valores pequenos, tanto os que concernem aos conjuntos (5 e 6) quanto aos subconjuntos (2, 3 e 4), cujas combinações geravam os seguintes valores: 10 e 15.

Para controle experimental, os mesmos pares numéricos foram utilizados nos problemas de todas as situações. Os problemas serão apresentados mais adiante quando descritas as situações.

### *As situações*

O presente estudo emergiu diante dos resultados apresentados na pesquisa de Silva e Spinillo (2010), os quais demonstraram que as crianças obtiveram um melhor desempenho ao resolverem problemas de produto cartesiano quando os princípios invariantes estavam explícitos nos seus enunciados. A partir disso, surgiu a seguinte pergunta: se fossem apresentados problemas de combinação em que seus princípios invariantes estivessem explicitados nos seus enunciados, será que a criança teria um melhor desempenho do que quando esses princípios não são explicitados, sendo capaz de resolver corretamente estes tipos de problemas por meio de estratégias adequadas assim como ocorreu no estudo de Silva e Spinillo (2010)?

Conforme apresentando nos livros didáticos que abordam a Análise Combinatória, (e.g. Morgado *et al*., 2006; Santos, Mello & Murari, 1998), foi possível identificar os princípios invariantes que caracterizam a resolução de problemas de combinação, que são: (i) trabalha-se com a combinação de um subgrupo do grupo; (ii) não há repetição de elementos; e (iii) a ordem dos elementos no subconjunto não é importante, basta que a combinação ocorra apenas uma vez.

Diante dessas considerações, investigaram-se três situações distintas de resolução de problemas, cuja ordem de apresentação foi randomizada de maneira que em cada faixa etária houvesse 10 crianças realizando todas as situações, como demonstra o Quadro 2.

**Quadro 2**: Ordem de apresentação das situações (Etapa 2).

| **Nº de Participantes** | **1ª Sessão** | **2ª Sessão** | **3ª Sessão** |
|---|---|---|---|
| 10 | SI | SII | SIII |
| 10 | SII | SIII | SI |
| 10 | SIII | SI | SII |

SI: problemas sem explicitação dos princípios invariantes; SII: problemas com explicitação dos princípios invariantes; e SIII: problemas com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas.

As situações apresentadas aos participantes são descritas a seguir.

Situação I: problemas sem explicitação dos princípios invariantes

Os quatro problemas que foram apresentados nesta situação seguem o padrão usual de problemas de combinação encontrado nos livros pedagógicos e nas pesquisas com crianças, em que os princípios invariantes do raciocínio combinatório não são explicitados. Os problemas foram lidos pelo examinador e apresentados por escrito em cartelas, ficando à disposição do participante para que pudesse lê-los quantas vezes achasse necessário. Os problemas desta situação foram:

**Problema 1 (P1):** Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 2 (P2):** Cinco crianças (Cléo, Juliana, Bruno, Davi e Mateus) querem brincar de jogo de dama, mas só duas podem brincar de cada vez. Quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de jogo de dama?

**Problema 3 (P3):** Seis professores (Carla, Marta, Sandra, Ivan, Jorge e Leo) estão participando do sorteio em que dois deles serão premiados, cada um ganhando um livro. Quantos grupos diferentes de dois ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 4 (P4):** Seis crianças (Luísa, Vitória, Nanda, André, Beto e Júnior) querem brincar de vôlei, mas só quatro podem brincar de cada vez. Quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de vôlei?

Situação II: problemas com explicitação dos princípios invariantes

Os quatro problemas que foram apresentados nesta situação contêm explicitamente em seu enunciado os princípios invariantes que regem a combinação. Os problemas foram lidos pelo examinador e apresentados por escrito em cartelas, ficando à disposição do participante para que pudesse lê-los quantas vezes achasse necessário. Os problemas desta situação foram:

**Problema 1 (P1):** O clube vai fazer um sorteio de três carros. Cinco pessoas (Joana, Tati, Alina, Diogo e Guto) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todas as pessoas ganharão o prêmio porque tem cinco pessoas participando do sorteio e só tem três carros para serem sorteados, não é? Os carros devem ser sorteados para três pessoas diferentes, então, uma mesma pessoa não pode ganhar todos os carros, não é? Podem ter várias combinações de três ganhadores, não pode? Por exemplo, uma combinação de três ganhadores pode ser: Joana, Tati e Alina. Outra combinação diferente seria Joana, Tati e Diogo, não seria? Com todas essas pessoas, quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 2 (P2):** No jogo de futebol de botão só podem jogar duas crianças por vez. Cinco crianças (Zeca, Vítor, Mário, Tiago e Sérgio) querem jogar futebol de botão. Nem todas as crianças jogarão futebol de botão ao mesmo tempo porque tem cinco crianças querendo jogar e só duas podem jogar futebol de botão de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode jogar sozinha o futebol de botão, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para jogar futebol de botão, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Zeca e Vítor. Outra dupla diferente seria Zeca e Mário, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para jogar futebol de botão de cada vez?

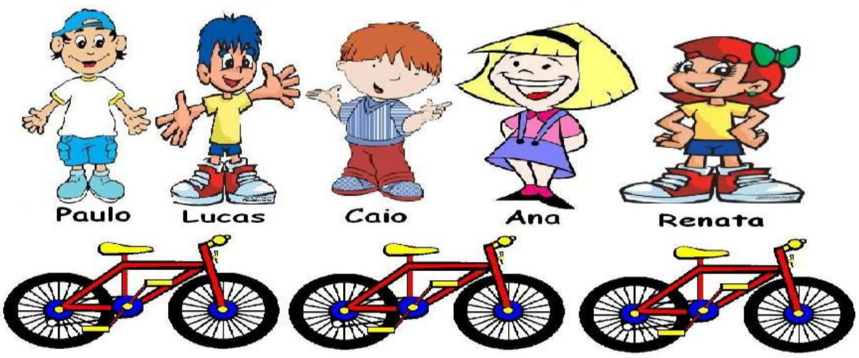
**Problema 3 (P3):** A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque tem seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio, não seria? Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 4 (P4):** Na roda gigante só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Manu, Bia, Flávia, Pedro, Daniel e Rafael) querem brincar na roda gigante. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo na roda gigante porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar na roda gigante de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha na roda gigante, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar na roda gigante, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Manu, Bia, Flávia e Pedro. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Manu, Bia, Flávia e Daniel. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez na roda gigante?

<u>Situação III: problemas com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas</u>

O procedimento adotado nesta situação foi idêntico àquele adotado na Situação II, diferindo apenas quanto ao fato de que nesta situação foram disponibilizados desenhos de figuras recortadas, relativos aos elementos do enunciado do problema em questão, e que foi manipulado pela examinadora, durante a leitura dos problemas, conforme os exemplos apresentados em cada problema. Após, a examinadora ter lido os problemas juntamente com o participante, tanto a cartela que contém o problema por escrito quanto os desenhos de figuras recortadas ficaram à disposição da criança para que esta pudesse utilizá-los/manipulá-los da maneira que considerasse melhor. Os problemas apresentados nesta situação foram:

**Problema 1 (P1):** A escola vai fazer um sorteio de três bicicletas. Cinco crianças (Paulo, Lucas, Caio, Ana e Renata) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todas as crianças ganharão o prêmio porque tem cinco crianças participando do sorteio e só tem três bicicletas para serem sorteadas, não é? As bicicletas devem ser sorteadas para três crianças diferentes, então, uma mesma criança não pode ganhar todas as bicicletas, não é? Podem ter várias combinações de três ganhadores, não pode? Por exemplo, uma combinação de três ganhadores pode ser: Paulo, Lucas e Caio. Outra combinação diferente seria Paulo, Lucas e Ana, não seria? Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?




Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).

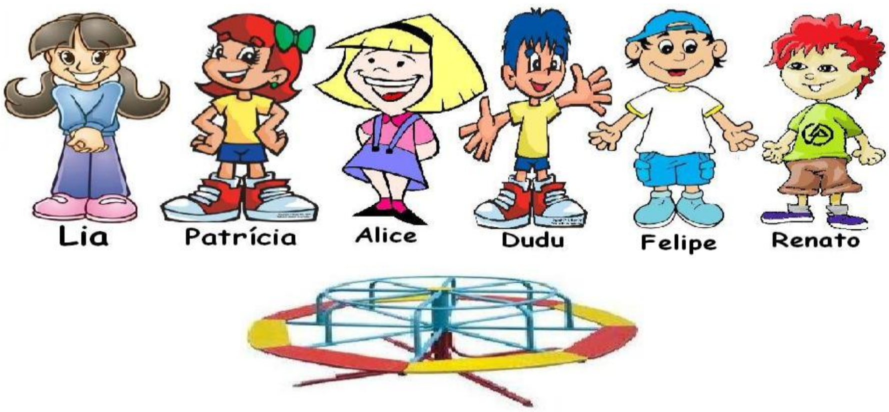
**Problema 2 (P2):** No pula-pula só podem pular duas crianças por vez. Cinco crianças (Laura, Maria, João, Luiz e Danilo) querem brincar no pula-pula. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no pula-pula porque tem cinco crianças querendo pular e só duas podem entrar no pula-pula de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no pula-pula, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para brincar no pula-pula, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Laura e Maria. Outra dupla diferente seria Laura e João, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de cada vez no pula-pula?


Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).

**Problema 3 (P3):** A escola vai fazer um sorteio de dois computadores. Seis professores (Luana, Clara, Taís, José, Breno e Gabriel) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os professores ganharão o prêmio porque tem seis professores participando do sorteio e só em dois computadores para serem sorteados, não é? Os computadores devem ser sorteados para dois professores diferentes, então, um mesmo professor não pode ganhar todos os computadores, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Luana e Clara. Outra combinação diferente seria Luana e Taís, não seria? Com todos esses professores, quantos grupos diferentes de dois ganhadores podem ter nesse sorteio?


Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).

**Problema 4 (P4):** No carrossel só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Lia, Patrícia, Alice, Dudu, Felipe e Renato) querem brincar no carrossel. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no carrossel porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar no carrossel de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no carrossel, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar no carrossel, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Lia, Patrícia, Alice e Dudu. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Lia, Patrícia, Alice e Felipe. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez no carrossel?




Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).

A fim de facilitar a visualização do leitor a respeito das situações, pares numéricos e referentes adotados para cada problema de combinação apresentado, segue um quadro-síntese.

**Quadro 3:** Síntese das situações, pares numéricos e referentes apresentados nos problemas da Etapa 2.

| Situações | Problemas | Pares numéricos | Referentes |
|---|---|---|---|
| Situação I | Problema 1 | 5, 3 | Nina, Carla, Rafaela, Joel, Murilo e Vídeo game |
| | Problema 2 | 5, 2 | Cléo, Juliana, Bruno, Davi, Mateus e Jogo de dama |
| | Problema 3 | 6,3 | Carla, Marta, Sandra, Ivan, Jorge, Leo e Livro |
| | Problema 4 | 6, 4 | Luísa, Vitória, Nanda, André, Beto, Júnior e Jogo de vôlei |
| Situação II | Problema 1 | 5, 3 | Joana, Tati, Alina, Diogo, Guto e Carro |
| | Problema 2 | 5, 2 | Zeca, Vitor, Mário, Tiago, Sérgio e futebol de botão |
| | Problema 3 | 6, 3 | Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia e Televisões |
| | Problema 4 | 6, 4 | Manu, Bia, Flávia, Pedro, Daniel, Rafael e Roda gigante |
| Situação III | Problema 1 | 5, 3 | Paulo, Lucas, Caio, Ana, Renata e Bicicleta |
| | Problema 2 | 5, 2 | Laura, Maria, João, Luiz, Danilo e Pula-pula |
| | Problema 3 | 6, 3 | Luana, Clara, Taís, José, Breno, Gabriel e Computador |
| | Problema 4 | 6, 4 | Lia, Patrícia, Alice, Dudu, Felipe, Renato e Carrossel |

### *2.2.2.3. Material*

Doze cartelas retangulares de papelão, cada uma contendo um problema escrito de combinação, gravador de voz (MP4) para registro das entrevistas, folhas de papel, lápis e borracha, folhas de registro para anotações da examinadora. No caso da Situação III, foram ainda disponibilizados desenhos de figuras recortadas de acordo com o enunciado dos problemas (desenhos de figuras de pessoas, de pula-pula, de carrossel, de bicicletas e de computadores).

# *Capítulo III*

## *Sistema de análise das estratégias de resolução*

No presente estudo, foram considerados dois aspectos para a análise dos dados, a saber: o desempenho nos problemas propostos (número de acertos) e as estratégias de resolução adotadas pelas crianças. O sistema de análise das estratégias de resolução foi inspirado nas estratégias identificadas por English (1991), Soares e Moro (2006) e Silva e Spinillo (2010), sobretudo, nesses dois últimos estudos. Assim como na atual pesquisa, essas três autoras investigaram o raciocínio combinatório, contudo abordaram problemas de produto cartesiano, ao passo que o presente estudo investigou os problemas de combinação. Sendo assim, para que fosse possível contemplar as especificidades deste tipo de problema, algumas mudanças foram realizadas com o objetivo de adequar os sistemas de análise propostos pelas autoras com os dados obtidos nessa pesquisa. Apesar de algumas similaridades com as estratégias identificadas nos estudos sobre produto cartesiano, as adaptações decorreram do fato de que os problemas de combinação exigem das crianças estratégias outras para que seja possível obter o número total de combinações possíveis. Dessa forma, as pesquisas destas autoras supracitadas serviram como inspiração e suporte para a construção das estratégias de resolução que compõem o sistema de análise desse estudo.

Nos protocolos analisados foram identificados dois tipos distintos de estratégias que levam à criança a encontrar uma solução de ordem combinatória, isto é, estratégias que possibilitam encontrar todas as combinações possíveis. Desse modo, as justificativas das crianças foram analisadas e agrupadas em categorias que variavam em função da sofisticação cognitiva apresentada, expressando níveis de maior ou menor elaboração.

As estratégias podem ser agrupadas em três blocos. O primeiro bloco é relativo às estratégias de resolução que não são combinatórias, ou seja, as crianças não compreendem o objetivo do problema e utilizam estratégias que não permitem a realização de todas as combinações exigidas pelo problema, o que as levam ao erro. O segundo refere-se aos primeiros indícios de soluções combinatórias, isto é, a criança passa a compreender um pouco mais sobre a natureza dos problemas, utilizando estratégias mais refinadas, porém ainda não consegue esgotar todas as combinações. Por fim, o terceiro bloco diz respeito às estratégias combinatórias, resultantes de uma compreensão total acerca da natureza lógica do problema e que, portanto, permitem à criança desenvolver a totalidade de pares combinados possíveis e acertar o problema. Abaixo, encontra-se um quadro-síntese destas estratégias identificadas.

**Quadro 4:** Resumo geral das estratégias identificadas no presente estudo.

| **Estratégias de resolução não combinatórias** | **Primeiros indícios de estratégias de resoluções combinatórias** | **Estratégias de resolução combinatórias** |
|---|---|---|
| Operação inadequada | Formação de **algumas** combinações **sem** identificação de sistematização na formação dos pares | Esgotamento de todas as combinações possíveis **sem** identificação de sistematização na formação dos pares |
| Combinação por pares fixos | Formação de **algumas** combinações **com** sistematização na formação dos pares, porém sem esgotamento | Esgotamento de todas as combinações possíveis **com** sistematização na formação dos pares |

A classificação das estratégias foi realizada através de análise de discussão entre dois juízes, cujo percentual de concordância foi de 100%. Este alto percentual foi obtido pelo fato dos juízes terem um conhecimento aprofundado a respeito do sistema de análise adotado na presente pesquisa. As estratégias são descritas e exemplificadas a seguir[7].

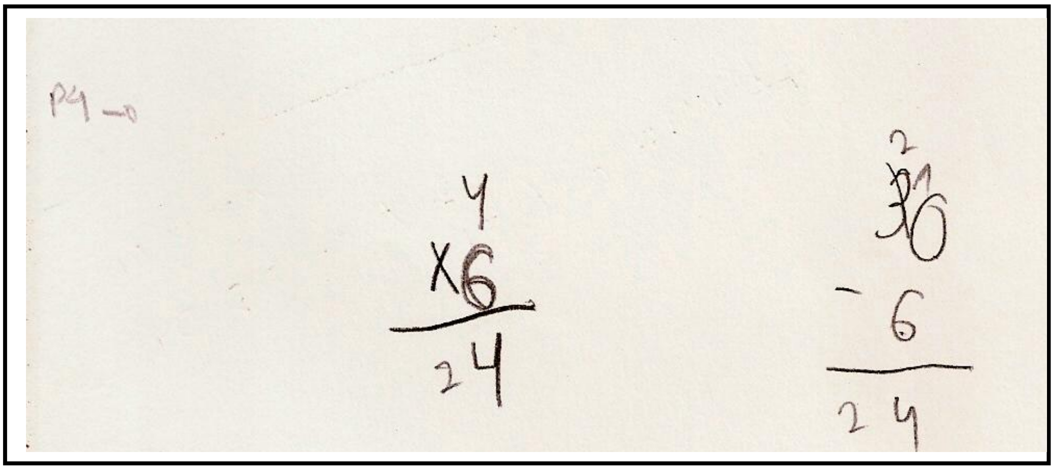
[7] Convenções adotadas: C – criança; E – examinador.

## 3.1 Estratégias de resolução não combinatórias

As estratégias de resolução não combinatórias possuem a característica principal de revelar limites, maiores ou menores, de compreensão ou interpretação pelas crianças acerca do que é informado e solicitado no enunciado do problema. Esses limites resultam, sobretudo, em combinações por pares fixos e em cálculos aritméticos com os números obtidos, na tentativa de fornecer, de alguma maneira, uma resposta numérica.

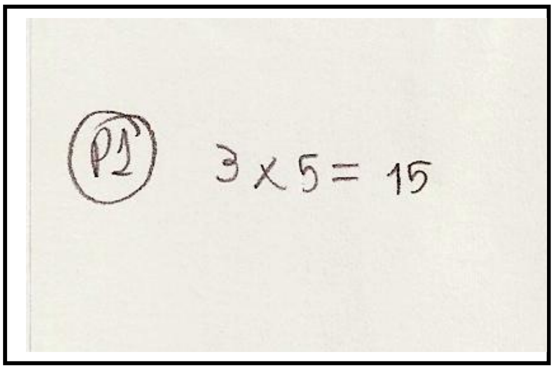
**Tipo 1 – Operação Inadequada:** A criança realiza uma operação aritmética inadequada, em geral multiplicação, com os valores presentes no enunciado do problema. Observa-se, muitas vezes, que a criança realiza a operação automaticamente, perdendo de vista que o objetivo do problema é encontrar o número de combinações, o que denota uma não compreensão da natureza do problema. Por isso, quando questionada sobre o que representa o resultado encontrado, frequentemente, a criança não relaciona com o número de pares, dizendo apenas ser esta a resposta do problema. Esta estratégia também foi identificada por Silva e Spinillo (2010). Exemplos:

**Figura 2:** Reprodução do protocolo 05C26 – Participante de 10 anos, 5° ano, Situação II (com explicitação dos princípios invariantes), Problema 4.



**E:** Na roda gigante só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Manu, Bia, Flávia, Pedro, Daniel e Rafael) querem brincar na roda gigante. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo na roda gigante porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar na roda gigante de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha na roda gigante, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar na roda gigante, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Manu, Bia, Flávia e Pedro. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Manu, Bia, Flávia e Daniel. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez na roda gigante?
**C:** *(escreve)...* vinte e quatro.
**E:** Por que vinte e quatro?
**C:** Porque é a quantidade de crianças que podem ir pra roda gigante vezes a quantidade de crianças que querem ir pra roda gigante.
**E:** Tem certeza que é isso mesmo?
**C:** Tenho.
**E:** Tá certo.

**Figura 3:** Reprodução do protocolo 05C17 – Participante de 10 anos, 5° ano, Situação 3 (com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas), Problema 1.

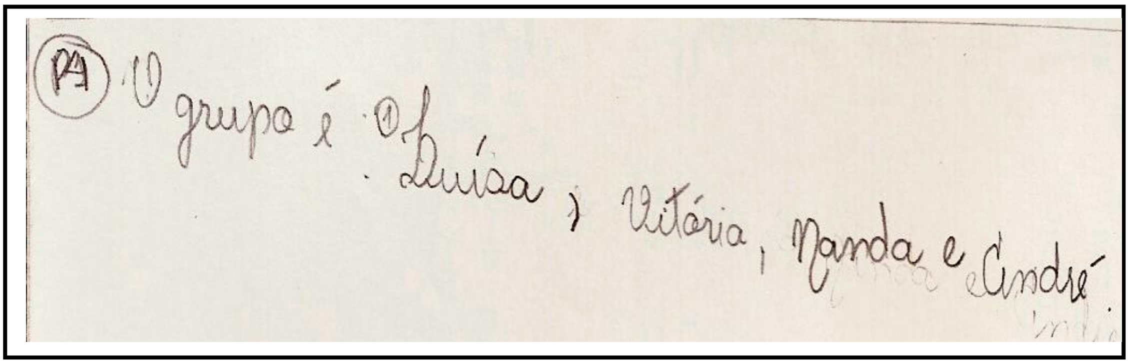



**E:** A escola vai fazer um sorteio de três bicicletas. Cinco crianças (Paulo, Lucas, Caio, Ana e Renata) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todas as crianças ganharão o prêmio porque tem cinco crianças participando do sorteio e só tem três bicicletas para serem sorteadas, não é? As bicicletas devem ser sorteadas para três crianças diferentes, então, uma mesma criança não pode ganhar todas as bicicletas, não é? Podem ter várias combinações de três ganhadores, não pode? Por exemplo, uma combinação de três ganhadores pode ser: Paulo, Lucas e Caio. Outra combinação diferente seria Paulo, Lucas e Ana, não seria? Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?
**C:** quinze.
**E:** Por que tu acha que é quinze?
**C:** Porque três vezes cinco é igual a quinze.

**Tipo 2 – Combinação por pares fixos:** as respostas dos participantes correspondem à combinação de um item com o outro em uma única vez. Isto ocorre porque a criança pensa em termos de pares fixos, não aceitando, por exemplo, que um personagem possa combinar com mais de um personagem. Assim, uma vez formado as combinações, essas não poderão ser desfeitas. Esta estratégia também foi identificada por Silva e Spinillo (2010). Contudo, ressalta-se que, diferentemente do estudo dessas autoras, nesta pesquisa a resposta referente à estratégia de combinações por pares fixos não representa, necessariamente, o menor valor do enunciado, pois os problemas de combinações possuem princípios invariantes diferentes dos produtos cartesiano. Dessa forma, mesmo que a criança pense em termos de pares fixos, ou seja, combine um item com outro apenas uma única vez, a resposta apresentada poderá ser diferente do menor valor contido no enunciado.

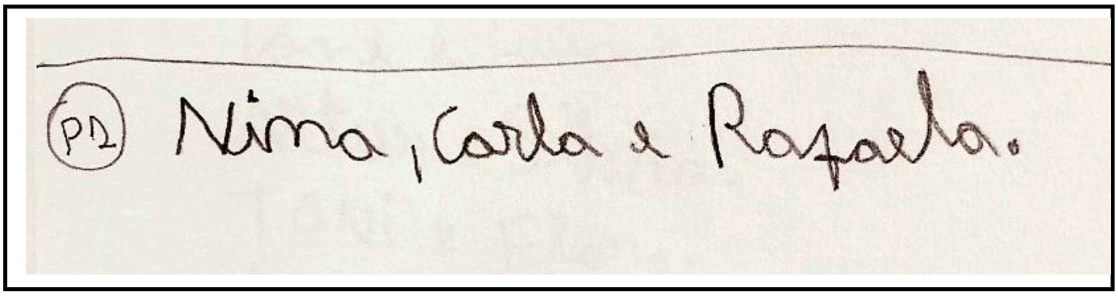
Exemplos:

**Figura 4:** Reprodução do protocolo 04C8 – Participante de 8 anos, 4º ano, Situação I (sem explicitação dos princípios invariantes), Problema 4.




**E:** Seis crianças (Luísa, Vitória, Nanda, André, Beto e Júnior) querem brincar de vôlei, mas só quatro podem brincar de cada vez. Quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de vôlei?
**C:** Um.
**E:** Um, por quê? Me diz aí.
**C:** Porque não só pode de cada vez quatro pessoas? Então, vai ser Luísa, Vitória, Nanda e André. Beto e Júnior não têm mais nenhum grupo pra fazer com eles.
**E:** Entendi. Não tem mais nenhuma criança pra fazer com eles, aí eles vão sobrar. Então, você forma aí o grupinho.
**C:** *(escreve)*
**E:** Então, você formou Luisa, Vitória, Nanda e André. Aí a gente não pode formar mais nenhum, né?
**C:** é.
**E:** Porque só sobraram duas pessoa, né?
**C:** é.
**E:** Tá bom.

**Figura 5:** Reprodução do protocolo 03C3 – Participante de 8 anos, 5º ano, Situação I (sem explicitação dos princípios invariantes), Problema 1.




**E:** Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?
**C:** Tem que ser grupo de três, né?
**E:** De três.
**C:** Ia ficar duas crianças sem participar porque se tivesse outra ia poder participar.
**E:** Ah, porque não ia completar o grupinho de três, é?
**C:** É.
**E:** Então qual era o grupinho de três que teria?
**C:** Nina, Carla e Rafael.
**E:** Rafaela, né? Aí sobraria Joel e Murilo, né?
**C:** É.

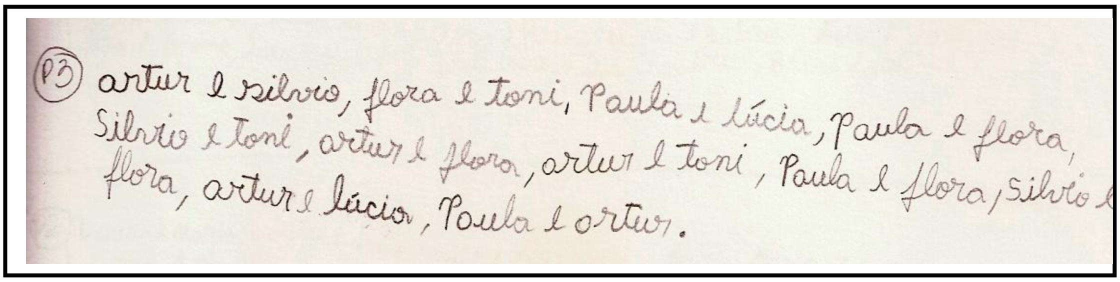
## *3.2 Primeiros indícios de resoluções combinatórias*

Nessa categoria de estratégia de resolução, nenhuma criança apresenta total ausência de referência ao texto do problema, pelo contrário, ela compreende um pouco mais sobre a natureza do problema e, progressivamente, começa a realizar a correspondência um-para-muitos, passando a aceitar que um item pode combinar com mais de um e formar combinações diferentes.

Outra característica importante dessa categoria é que ela abrange dois tipos distintos de soluções, as quais se diferenciam pela identificação do uso ou não de um padrão sistemático na formação das combinações. De maneira geral, nos dois casos, percebe-se que o participante já obtém uma compreensão maior acerca do raciocínio combinatório, uma vez que entende um pouco mais sobre a lógica do problema e já inicia a realização de correspondências um-para-muitos, entretanto, não possui conhecimento suficiente para que forneça uma resposta correta ao problema.

**Tipo 3 – Formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares:** há o progressivo aparecimento das correspondências um-para-muitos, passando a aceitar que um item pode combinar com mais de um, formando, assim, combinações diferentes. Contudo, os itens são combinados de maneira aleatória, não havendo uma ordem identificável na seleção do processo, exibindo um procedimento de tentativa e erro para resolver as tarefas. Dessa forma, as crianças realizam algumas combinações sem seguir uma sistematização identificável na formação dos pares e, portanto, não contemplam todos os pares possíveis ou então extrapolam a quantidade de combinações possíveis. Sendo assim, essa estratégia representa uma maior compreensão da criança acerca do raciocínio combinatório, porém ainda não é o suficiente para que ela acerte o problema. Exemplos:

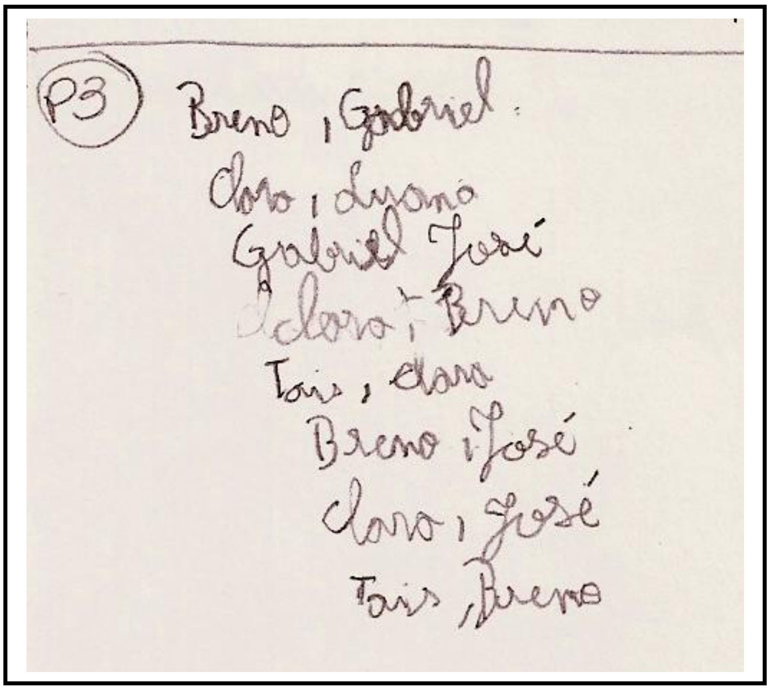
**Figura 6:** Reprodução do protocolo 03C12 – Participante de 8 anos, 3º ano, Situação II (com explicitação dos princípios invariantes), Problema 3.


P3 artur e silvio, flora e toni, Paula e lúcia, Paula e flora,
Silvio e Toni, artur e flora, artur e toni, Paula e flora, Silvio e
flora, artur e lúcia, Paula e artur.

> **E:** A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque tem seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio, não seria? Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse

sorteio? Aí tu escreve a tua resposta aqui, as duplinhas que tu acha que podem ser formadas?
**C:** *(começa a escrever)...* São com todos os alunos?
**E:** Com todos os alunos. Pra tu fazer a maior quantidade de duplinhas diferentes, tá certo?
**C:** *(escreve)...* Pronto.
**E:** Então tu formasse nove duplinhas. Tu acha que tu consegue formar mais duplinhas ou essa é a quantidade máxima de duplinhas?
**C:** Vou formar mais.
**E:** Quais as duplinhas que tu poderia formar mais?
**C:** Artur e Lúcia.
**E:** Então copia aí. Aí quando tu achar que terminou, tu me diz, tá?
**C:** humrum *(resposta positiva)*
**E:** Formasse mais duas duplinhas, ficaram onze. Como é que você sabe que formou todas as duplinhas?
**C:** Porque eu coloquei esse com esse daqui, esse com esse, aí esse com esse. Botei esse com esse daqui, esse com esse. *(a criança sai apontando os nomes no protocolo e dizendo que combinou determinado nome com outro, porém, como não explicita nenhum padrão sistemático).*
**E:** Entendi, tu fosse colocando um nome com cada um. Aí deu essas onze duplinhas. Você foi misturando. E você foi misturando de uma maneira, assim, qualquer? Você não seguiu uma ordem não, né?
**C:** É
**E:** Então a gente acabou aqui as duplinhas. Não tem como mais formar, certo?
**C:** É

**Figura 7:** Reprodução do protocolo 04C2 – Participante de 9 anos, 4º ano, Situação III (com explicitação dos princípios invariantes, acompanhados de desenhos de figuras recortadas), Problema 3.

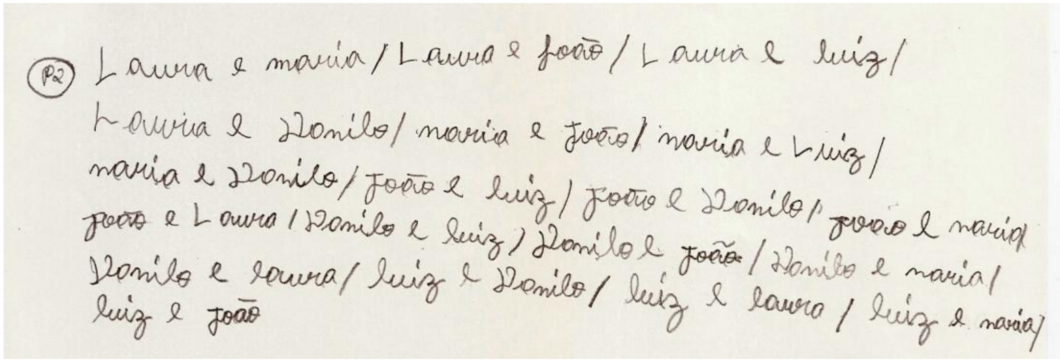


**E:** No pula-pula só podem pular duas crianças por vez. Cinco crianças (Laura, Maria, João, Luiz e Danilo) querem brincar no pula-pula. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no pula-pula porque tem cinco crianças querendo pular e só duas podem entrar no pula-pula de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no pula-pula, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para brincar no pula-pula, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Laura e Maria. Outra dupla diferente seria Laura e João, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de cada vez no pula-pula?
**C:** *(escreve)*... Pronto!
**E:** Então tu fizesse: Laura e João; João e Luiz; Danilo e Luiz; Laura e Maria; Danilo e João. Tu acha que dá pra formar mais duplinhas diferentes dessas daí ou não?
**C:** Não.
**E:** Por que tu acha que não dá?
**C:** Porque eu já fiz todas.
**E:** Então, tu já fizesse todos os pares possíveis. Você acha que pode sair mais alguma dupla diferente dessas daí que você já fez ou não?
**C:** Humrum *(resposta positiva)*
**E:** Pode sair ainda diferente? Então monta aí, por favor, as outras.
**C:** *(escreve)*... Pronto.
**E:** Então tu formasse a mais: Maria e João; Luiz e Danilo; e Laura e Luiz. Dá pra formar mais duplinhas diferentes?
**C:** Não
**E:** Você acha que já formou tudo e já saiu todas as duplinhas possíveis?
**C:** Já
**E:** Então, como foi que você fez essas duplinhas? Me explica aí como foi que tu formasse.
**C:** Por exemplo, nesse problema aqui que tinha o exemplo Laura e Maria, aí eu fui invertendo: João e Maria, Maria e Luiz, Danilo e Luiz.
**E:** Tu fosse fazendo como o exemplo disse, né? Tu fosse invertendo as duplinhas e aí deu todas essas. Não tem mais nenhuma?
**C:** Humrum.

**Tipo 4 – Formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares, porém sem esgotamento:** nesse tipo, um novo recurso emerge, o qual se caracteriza por uma “constante” ou um “item principal”. Dessa forma, as crianças repetem a seleção de um item até que todas as combinações possíveis sejam formadas com esse item. Após esgotamento aparente do item, um novo item é selecionado e o processo é repetido. Contudo, o padrão desta estratégia é incompleto, ou seja, a criança não forma todas as combinações possíveis. Isto pode ser devido a um ou mais dos seguintes procedimentos:

**a)** Há a duplicação de combinações com um determinado item constante, extrapolando, portanto, o número de combinações possíveis. Por exemplo:

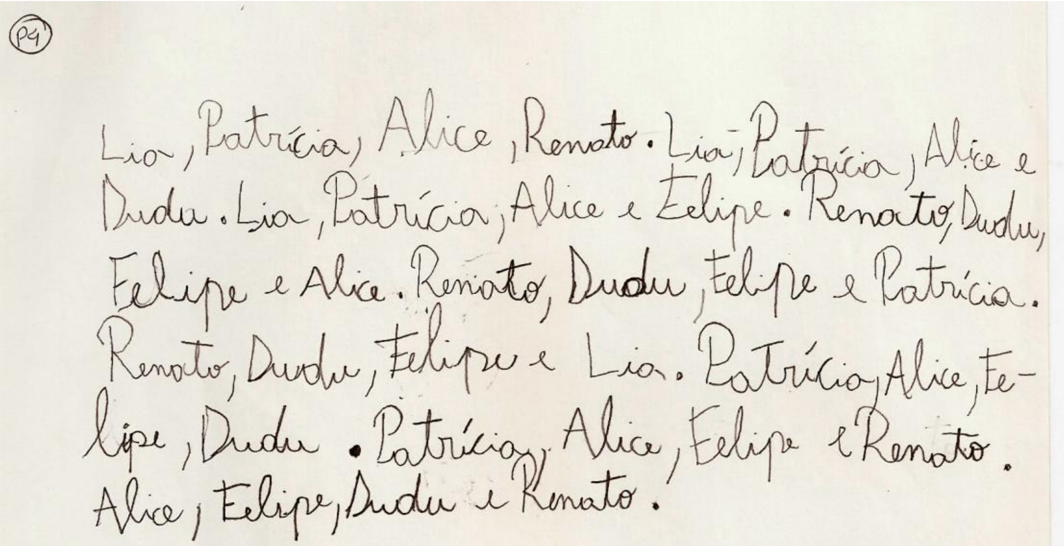
**Figura 8:** Reprodução do protocolo 04C21 – Participante 9 anos, 4º ano, Situação III (com explicitação dos princípios invariantes, acompanhados de desenhos de figuras recortadas), Problema 2.


P2 Laura e maria / Laura e joão / Laura e luiz /
Laura e Danilo / maria e joão / maria e Luiz /
maria e Danilo / joão e luiz / joão e Danilo / joão e maria
joão e Laura / Danilo e luiz / Danilo e joão / Danilo e maria /
Danilo e laura / luiz e Danilo / luiz e laura / luiz e maria /
luiz e joão

**E:** No pula-pula só podem pular duas crianças por vez. Cinco crianças (Laura, Maria, João, Luiz e Danilo) querem brincar no pula-pula. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no pula-pula porque tem cinco crianças querendo pular e só duas podem entrar no pula-pula de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no pula-pula, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para brincar no pula-pula, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Laura e Maria. Outra dupla diferente seria Laura e João, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de cada vez no pula-pula?
**C:** *(escreve)*... Pronto!
**E:** Muitas duplas, né? Dezenove duplas. Como foi que tu pensasse pra formar todas essas duplas? Como foi que você foi fazendo?
**C:** Eu coloquei Laura com todos. Aí depois Maria, João e Luiz com todos. E Danilo com todos.
**E:** Tu botasse todos com todos, aí formasse as duplas?
**C:** É.
**E:** Aí tu procurasse não repetir nenhuma?
**C:** Foi.
**E:** Tá certo.

**b)** Não há o esgotamento de todas as combinações possíveis com um item constante quer seja pelo fato da criança se distrair durante a execução da tarefa e omitir alguma combinação, quer seja pelo fato dela não conseguir gerar mais combinações diferentes, apesar de seus esforços, levando, assim, a uma resposta incorreta. Por exemplo:

**Figura 9:** Reprodução do protocolo 04C12 – Participante de 10 anos, 4º ano, Situação III (com explicitação dos princípios invariantes, acompanhados de desenhos de figuras recortadas), Problema 4.


P4

Lia, Patrícia, Alice, Renato. Lia, Patrícia, Alice e
Dudu. Lia, Patrícia, Alice e Felipe. Renato, Dudu,
Felipe e Alice. Renato, Dudu, Felipe e Patrícia.
Renato, Dudu, Felipe e Lia. Patrícia, Alice, Fe-
lipe, Dudu. Patrícia, Alice, Felipe e Renato.
Alice, Felipe, Dudu e Renato.

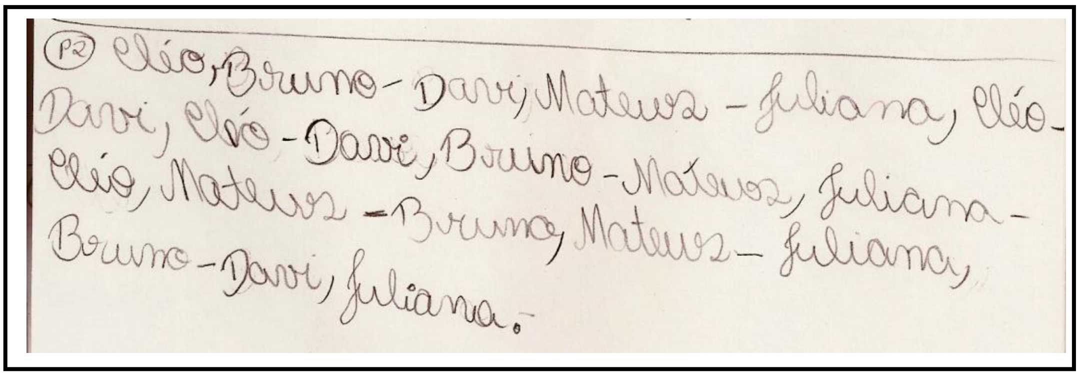
**E:** No carrossel só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Lia, Patrícia, Alice, Dudu, Felipe e Renato) querem brincar no carrossel. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no carrossel porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar no carrossel de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no carrossel, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar no carrossel, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Lia, Patrícia, Alice e Dudu. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Lia, Patrícia, Alice e Felipe. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez no carrossel?
**C:** Pode colocar esses que estão? *(se referindo aos exemplos contidos no enunciado do problema).*
**E:** Pode botar, agora tu escreve porque só vai valer na tua resposta o que tu escrever, ta certo?
**C:** Tá *(escreve).*
**E:** Tu fizesse um monte de grupinho. Fizesse 9 grupinhos. Como foi que tu pensasse pra formar todos esses grupos?
**C:** Primeiro eu peguei Lia, Patrícia, Alice e Renato. Poderia usar a ordem, aí depois desisti. Aí depois botei Lia, Patrícia, Alice e Dudu. Lia, Patrícia, Alice e Felipe
**E:** Então, você manteve os três e trocasse o último, não foi?
**C:** É. Aí depois eu fiz: Renato, Dudu, Felipe e Alice; Renato, Dudu, Felipe e Patrícia; Renato, Dudu, Felipe e Lia. Aí depois eu tentei fazer Patrícia, Alice, Felipe e Dudu. Aí depois fui fazendo Patrícia, Alice, Felipe e Renato. Aí depois eu fazia Alice, Felipe, Dudu e Renato.
**E:** Ah entendi! Aí tu fosse formando os grupinhos, deixava três e trocava o último, né?
**C:** É

## 3.3 Estratégias de resolução combinatórias

As estratégias de resolução apresentadas nesse bloco conduziram ao acerto do problema, o que denota uma compreensão total da criança acerca da lógica dos problemas que envolvem raciocínio combinatório. As soluções desse nível representam a relação de "um para muitos" entre todos os valores de todos os itens dos problemas, com a diferenciação entre o número de combinações e o número de objetos a serem combinados. Nesse caso, a criança encontra todos os casos possíveis de combinação entre os elementos do enunciado, aceitando que um item pode ser combinado com todos os itens do outro conjunto elementar. As soluções desse nível concentram-se em dois tipos, os quais se diferenciam pela a identificação do uso de um padrão sistemático na formação das combinações.

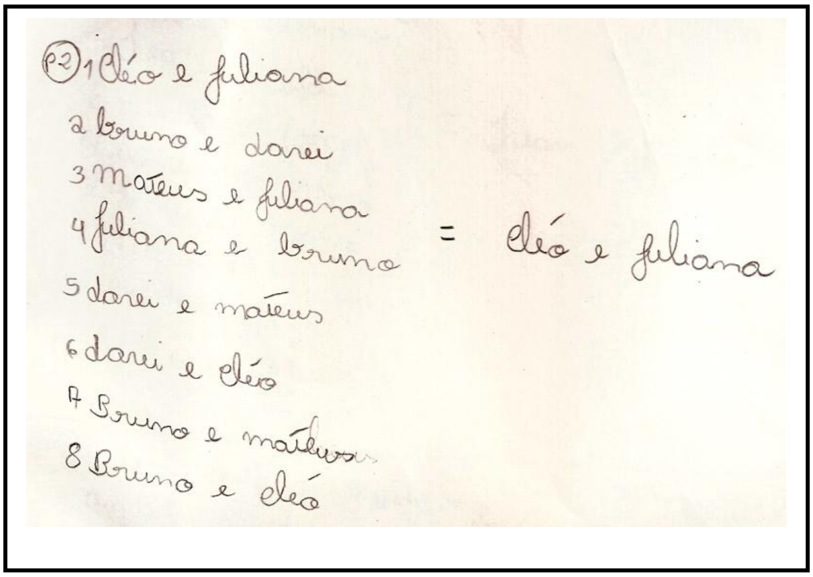
**Tipo 5 – Formação de todas as combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares:** a criança realiza todas as correspondências um-para-muitos, formando, assim, todas as combinações possíveis. Contudo, os itens são combinados de maneira aleatória, não havendo uma ordem identificável na seleção do processo. Apesar de nesse tipo de resposta não haver a identificação de um padrão sistemático e constante, a criança realiza, com um pouco mais de dificuldade, todas as combinações possíveis.

**Figura 10:** Reprodução do protocolo 04C18 – Participante de 9 anos, 4º ano, Situação I (sem explicitação dos princípios invariantes), Problema 2.


P2 Cléo, Bruno - Davi, Mateus - Juliana, Cléo -
Davi, Cléo - Davi, Bruno - Mateus, Juliana -
Cléo, Mateus - Bruno, Mateus - Juliana,
Bruno - Davi, Juliana.

**E:** Cinco crianças (Cléo, Juliana, Bruno, Davi e Mateus) querem brincar de jogo de dama, mas só duas podem brincar de cada vez. Quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de jogo de dama?
**C:** *(escreve)*
**E:** Então, vamos ver quantos tu formasse... Dez duplas. Tu acha que tu pode formar mais ou não?
**C:** Não.
**E:** Mas, tu acha que tu já fizesse todas as misturas que poderiam ser feitas?
**C:** Acho.
**E:** E tu utilizasse alguma técnica, como você fez nesse aqui que você seguiu uma ordem no início ou não?
**C:** Não.
**E:** Tu misturasse mesmo, né?
**C:** Assim, eu colocava um, aí eu coloquei Davi e Mateus, aí Juliana com Cléo. Aí depois que eu misturava.
**E:** Entendi, primeiro tu colocava um de cada vez, aí depois tu começava a misturar, né? *(ou seja, as primeiras duplas formadas seguiram a ordem em que os nomes foram apresentados no enunciado do problema, depois disso, a criança misturava esses nomes a fim de formar novas combinações)*
**C:** Humrum.

**Figura 11:** Reprodução do protocolo 03C22 – Participante de 8 anos, 3º ano, Situação III (com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas), Problema 2.



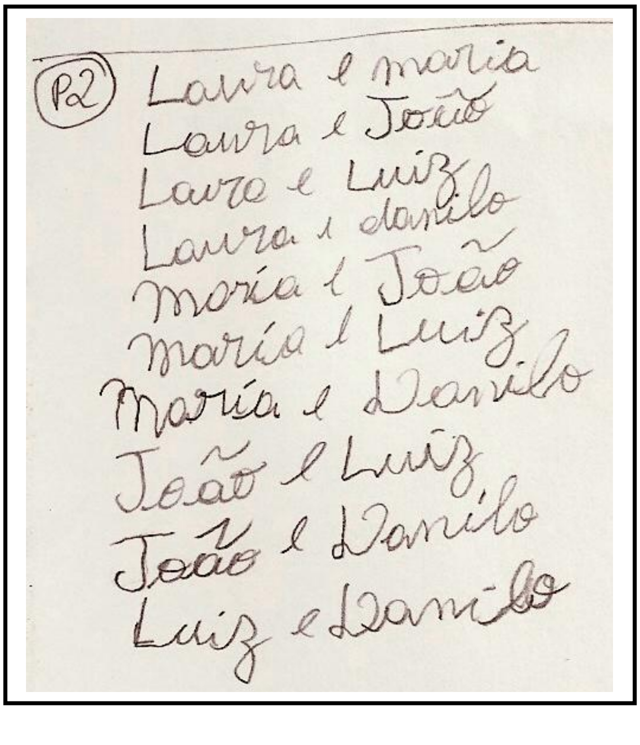
P2 1 cléo e juliana
2 bruno e davei
3 mateus e juliana
4 juliana e bruno = cléo e juliana
5 davei e mateus
6 davei e cléo
7 Bruno e mateus
8 Bruno e cléo

**E:** No pula-pula só podem pular duas crianças por vez. Cinco crianças (Laura, Maria, João, Luiz e Danilo) querem brincar no pula-pula. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no pula-pula porque tem cinco crianças querendo pular e só duas podem entrar no pula-pula de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no pula-pula, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para brincar no pula-pula, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Laura e Maria. Outra dupla diferente seria Laura e João, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de cada vez no pula-pula?

**P:** (a aluna manipula, escreve as duplas e fica conferindo de maneira aleatória se repetiu alguma)... Acho que não tem mais não.
**E:** porque tu acha que não tem mais?
**P:** porque já tem dez, já tem muitos e já fez com quase todos.
**E:** aí tu fosse vendo e viu que já foi com todo mundo, né?
**P:** hamram.

**Tipo 6 – Formação de todas as combinações com sistematização na formação dos pares:** observa-se nas soluções deste tipo uma sistematização na formação das combinações, na qual a criança escolhe um item (por exemplo, João) e o considera como "constante", selecionando-o repetidas vezes até que todas as combinações possíveis que incluam este item sejam formadas. Após a extinção deste item, um novo item constante é selecionado (por exemplo, Maria) e o processo é repetido até que se esgotem os itens do conjunto elementar selecionado, concluindo, portanto, que todas as combinações foram realizadas, não sendo possível formar mais grupos originais. Exemplos:

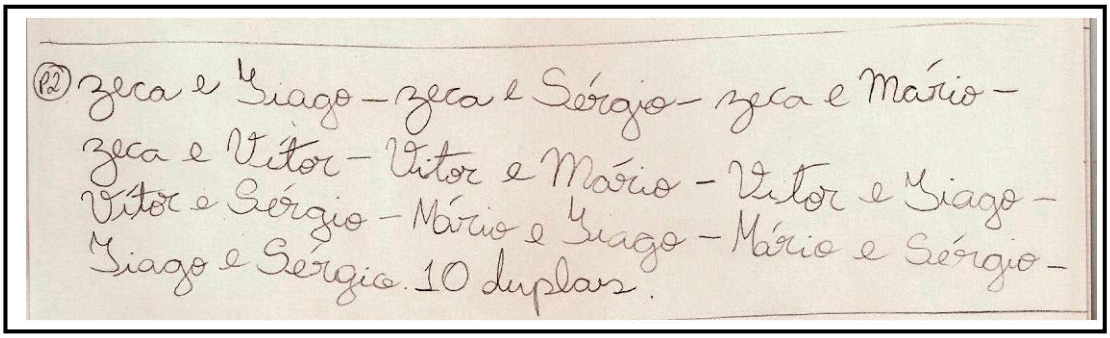
**Figura 12:** Reprodução do protocolo 05C30 – Participante de 10 anos, 5º ano, Situação III (com explicitação dos princípios invariantes, acompanhados de desenhos de figuras recortadas), Problema 2.


P2
Laura e maria
Laura e João
Laura e Luiz
Laura e danilo
maria e João
maria e Luiz
Maria e Danilo
João e Luiz
João e Danilo
Luiz e Danilo

**E:** No pula-pula só podem pular duas crianças por vez. Cinco crianças (Laura, Maria, João, Luiz e Danilo) querem brincar no pula-pula. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no pula-pula porque tem cinco crianças querendo pular e só duas podem

entrar no pula-pula de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no pula-pula, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para brincar no pula-pula, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Laura e Maria. Outra dupla diferente seria Laura e João, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de cada vez no pula-pula?
**C:** *(escreve)...* Pronto!
**E:** Então, formasse quantas duplas aí?
**C:** dez.
**E:** Agora, eu to vendo que dessa vez tu fizesse de um jeito mais diferente, não foi?
**C:** Foi
**E:** Fizesse como?
**C:** Eu botei Laura e fiz tudinho. Eu fiz aqui Laura e fui fazendo tudinho. Aí, passei pra Maria e fui fazendo João, Luiz.
**E:** Entendi. Só não voltou pra Maria e Laura, né? Porque é a mesma coisa de Laura e Maria, né?
**C:** É
**E:** Entendi. Pode passar pro outro já, né?
**C:** Já

**Figura 13:** Reprodução do protocolo 05C13 – Participante de 9 anos, 5º ano, Situação II (com explicitação dos princípios invariantes), Problema 2.




**E:** No jogo de futebol de botão só podem jogar duas crianças por vez. Cinco crianças (Zeca, Vítor, Mário, Tiago e Sérgio) querem jogar futebol de botão. Nem todas as crianças jogarão futebol de botão ao mesmo tempo porque tem cinco crianças querendo jogar e só duas podem jogar futebol de botão de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode jogar sozinha o futebol de botão, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para jogar futebol de botão, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Zeca e Vítor. Outra dupla diferente seria Zeca e Mário, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para jogar futebol de botão de cada vez?
**C:** *(escreve).*
**E:** Então, tu formasse dez duplas. Como foi que tu pensou pra formar essas duplas?
**C:** Eu fiz com Zeca. Depois, eu fiz com Mário, aí depois Vítor e, depois, eu fiz com Sérgio.
**E:** Ah, então tu colocasse Zeca com todos os nomes?
**C:** Humrum *(reposta positiva).*

**E:** Aí Vitor com todos os nomes, menos Zeca que já tinha ido.
**C:** Humrum *(resposta positiva)*
**E:** E depois com os outros. Tu acha que tu já formasse todas as duplinhas ou falta mais alguma?
**C:** Com todas

No próximo capítulo, serão apresentados os resultados referentes ao desempenho das crianças nas duas etapas investigadas. A Etapa 1 corresponde ao desempenho das crianças na resolução de problemas de produto cartesiano e de combinação em duas situações distintas: uma em que os princípios invariantes deste conceito não estão explicitados no enunciado dos problemas e outra em que estes princípios estão explicitados. Enquanto que a Etapa 2 refere-se ao desempenho dos participantes apenas nos problemas de combinação em função de algumas variáveis, tais como ano escolar, situações apresentadas (Situação I- problemas sem explicitação dos princípios invariantes; Situação II- problemas com explicitação dos princípios invariantes; e Situação III- explicitação dos princípios invariantes acompanhado de desenhos de figuras recortadas), grandeza dos pares numéricos e tipos de estratégias empregadas na resolução dos problemas.

# Capítulo IV

# Resultados

Como descrito no Capítulo II, a presente pesquisa é composta por duas etapas, cada uma com participantes distintos. A Etapa 1 examinou o desempenho das crianças na resolução de dois tipos de problemas de raciocínio combinatório, a saber, produto cartesiano e combinação, em duas situações diferentes: uma em que os princípios invariantes deste conceito não estavam explicitados no enunciado dos problemas; e outra em que estes princípios estavam explicitados. Importante esclarecer que, nesta etapa, os dados relativos aos problemas de produto cartesiano foram obtidos do estudo de Silva e Spinillo (2010), enquanto que as informações referentes aos problemas de combinação foram produzidas a partir da presente pesquisa. Dessa forma, as análises realizadas nessa primeira etapa provêm de bancos de dados de duas pesquisas diferentes. A partir dessa análise, será possível verificar se o efeito facilitador encontrado no estudo de Silva e Spinillo (2010), a partir da explicitação dos princípios invariantes nos problemas de produto cartesiano, pode ser observado também nos problemas de combinação.

A Etapa 2, por sua vez, analisou apenas os problemas de combinação em três situações que variavam em função da explicitação ou não-explicitação dos princípios invariantes do raciocínio combinatório em problemas denominados de combinação. Na Situação I, os princípios invariantes da combinação estavam implícitos no enunciado dos problemas, da maneira que usualmente se observa nas pesquisas da área (forma clássica). Na Situação II, os princípios invariantes estavam explícitos no enunciado dos problemas. Na Situação III, os princípios invariantes também estavam explícitos nos enunciados dos problemas, porém foram disponibilizados desenhos de figuras recortadas, os quais poderiam ser manipulados durante a resolução dos mesmos. A decisão por inserir uma terceira situação nesta etapa deveu-se ao fato de, durante a realização do estudo piloto para este projeto de pesquisa, ter-se percebido a adoção de estratégias de resolução diferenciadas por parte da criança, acreditando-se, portanto, que a explicitação dos princípios invariantes acompanhada de desenhos de figuras recortadas pode facilitar ainda mais a resolução desses tipos de problema, possibilitando o uso de estratégias adequadas por parte dos participantes. Sendo assim, a fim de aprofundar essa investigação, foi construída a Situação III, a qual visa examinar o efeito da explicitação dos princípios invariantes juntamente com os desenhos de figuras recortadas sobre o desempenho e as estratégias de resolução adotadas por crianças.

Os dados dessa segunda etapa, os quais se referem apenas aos problemas de combinação, foram analisados em função de alguns fatores, a saber: ano escolar, situações apresentadas e grandeza dos pares numéricos de cada problema.

Sendo assim, com base nos objetivos propostos, os resultados obtidos foram analisados em função de dois aspectos distintos: o desempenho, considerado a partir do número de acertos, e as estratégias de resolução adotadas. As estratégias de resolução foram analisadas conforme descrito no capítulo anterior, relativo ao sistema de análise. Os dados foram submetidos a testes estatísticos apropriados com a finalidade de examinar as diferenças existentes em função das variáveis independentes consideradas. Os resultados serão apresentados em tabelas acompanhadas de discussões descritivas e interpretativas.

A seguir, os resultados são exibidos em função do tipo de análise aplicada aos dados. Em um primeiro momento, apresenta-se os resultados relativos ao desempenho geral das crianças tanto na Etapa 1 quanto na Etapa 2. Em um segundo momento, os resultados apresentados referem-se às estratégias adotadas pelos estudantes nos problemas de combinação, os quais compõem a segunda etapa. Os resultados são descritos e comentados, sobretudo, à luz de comparações entre as situações propostas neste estudo.

## 4.1. Resultados relativos ao desempenho

### 4.1.1 Desempenho na Etapa 1

Esta seção refere-se à análise comparativa entre os dados apresentados no estudo de Silva e Spinillo (2010) com aqueles obtidos nesta investigação a fim de examinar se o efeito facilitador observado a partir da explicitação dos princípios invariantes nos problemas de produto cartesiano também é notado nos problemas de combinação. Assim, os dados analisados nesta etapa provêm de duas pesquisas distintas e, portanto, correspondem a informações de dois grupos diferentes de sujeitos, a saber: Grupo 1 (participantes do estudo de Silva e Spinillo, que resolveram problemas de produto cartesiano) e Grupo 2 (estudantes que compõem o banco de dados da presente investigação e que resolveram problemas de combinação). Ambos os grupos são compostos por estudantes do 3º ano escolar da rede particular de ensino. Portanto, as análises desta seção referem-se ao desempenho das crianças nos problemas de produto cartesiano e combinação em duas situações distintas (Situação I- sem explicitação dos princípios invariantes; e Situação II- com explicitação dos princípios invariantes).

#### 4.1.1.1 Desempenho geral: comparação entre os problemas de produto cartesiano e de combinação

A Tabela 1 apresenta a frequência e o percentual de acertos do Grupo 1 (crianças que resolveram problemas de produto cartesiano) e do Grupo 2 (participantes que solucionaram problemas de combinação). Como pode ser observado, o Grupo 1 teve um melhor desempenho que o Grupo 2, nas duas situações, conforme detectado pelo U de Mann-Whitney (Situação I: U= 242,0; p= .000; e Situação II: U= 146,0; p= .000). Portanto, esses dados mostram que os problemas de combinação são mais difíceis do que os problemas de produto cartesiano.

**Tabela 1 –** Frequência e percentual (entre parênteses) de acertos nos problemas de produto cartesiano e combinação em função das situações (n=60).

| **Situações** | **Grupo 1** (produto cartesiano) | **Grupo 2** (combinação) |
|---|---|---|
| **Situação I** | 55 (45,8) | 3 (2,5) |
| **Situação II** | 72 (60) | 2 (1,6) |

Nota1: Situação I (problemas sem explicitação dos princípios invariantes); Situação II (problemas com explicitação dos princípios invariantes).
Nota 2: máximo de 120 acertos em cada situação por grupo.

Considerando-se cada grupo separadamente, foram feitas comparações entre os tipos de situação através do Wilcoxon. Este teste revelou diferenças significativas entre as situações no Grupo 1 (Z= - 1,949; p= .051). Isso ocorreu porque o desempenho na Situação I foi consideravelmente mais baixo do que na Situação II, o que indica que a explicitação dos princípios invariantes do produto cartesiano auxilia a resolução desses tipos de problema. No que se refere ao Grupo 2, o teste não identificou diferenças significativas entre as situações (Z= -.447; p= .655). Esse resultado sugere que a explicitação dos princípios invariantes da combinação não possui efeito facilitador sobre esse tipo de problema, já que o desempenho das crianças nas duas situações apresentadas não diferiu.

Em síntese, verifica-se que o desempenho das crianças do Grupo 1 foi melhor do que o desempenho dos participantes do Grupo 2, sendo, portanto, os problemas de produto cartesiano mais facilmente resolvidos do que os de combinação. Ademais, a explicitação dos princípios invariantes nos problemas de combinação, pelo menos ao que se refere às crianças do 3º ano escolar, não favoreceu uma melhora no desempenho, parecendo ser este um fenômeno relativo apenas ao campo dos problemas de produto cartesiano.

### 4.1.2 Desempenho na Etapa 2

Esta seção refere-se à análise apenas dos problemas de combinação em função de algumas variáveis, a saber: ano escolar (3º ao 5º ano); situações apresentadas (Situação I- problemas sem explicitação dos princípios invariantes; Situação II- problemas com explicitação dos princípios invariantes; e Situação III- problemas com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas); e grandeza dos pares numéricos.

#### 4.1.2.1 Desempenho geral referente ao ano escolar por situação

A Tabela 2 apresenta o desempenho nas três situações em cada grupo de participantes.

**Tabela 2 –** Frequência e percentual (entre parênteses) de acertos em função do ano escolar e das situações (n=90).

| Situações | Grupo 1 (3º ano) | Grupo 2 (4º ano) | Grupo 3 (5º ano) | Total |
|---|---|---|---|---|
| **Situação I** | 3 (2,5) | 21 (17,5) | 23 (19,1) | 47 (39,1) |
| **Situação II** | 2 (1,6) | 15 (12,5) | 25 (20,9) | 42 (35,0) |
| **Situação III** | 6 (5,0) | 24 (20) | 26 (21,6) | 56 (46,6) |

Nota1: Situação I (problemas sem explicitação dos princípios invariantes); Situação II (problemas com explicitação dos princípios invariantes); Situação III (problemas com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas).
Nota 2: máximo de 120 acertos por situação em cada grupo.

A Tabela 2 mostra que o desempenho dos Grupos 2 e 3 foi melhor do que o Grupo 1. O teste U de Mann-Whitney confirmou estes resultados ao detectar diferenças significadas entre os Grupos 1 e 2 na Situação I (U= 311,0; p= .004), na Situação II (U= 312,0; p= .004) e na Situação III (U=284,0; p= .003). No que se refere à comparação entre o Grupo 1 e o Grupo 3, também foram encontradas diferenças na Situação I (U= 296,5; p= .002), na Situação II (U= 248,0; p= .000) e na Situação III (U= 243,0; p= .000). Contudo, no que diz respeito ao

Grupo 2 e ao Grupo 3, o teste não detectou diferenças significativas em nenhuma das três situações.

De modo geral, quando se comparou o Grupo 1 com os demais foram encontradas diferenças significativas, as quais denotam que as crianças deste grupo obtiveram um desempenho menor do que os outros estudantes. Isso pode ser explicado pelo fato dos participantes do Grupo 1 (3º ano) ainda não terem recebido o ensino formal da multiplicação, conteúdo este pertencente ao campo das estruturas multiplicativas, do qual também faz parte a combinação, e que antecede e facilita a compreensão dos problemas que envolvem o raciocínio combinatório, sendo mais difícil para este grupo a compreensão dos problemas de combinação. Dessa maneira, ao que parece, os estudantes do Grupo 1 ainda não detêm a experiência, maturidade e aprendizagem necessárias para a compreensão de problemas de raciocínio combinatório e, por isso, o desempenho dos demais grupos foi melhor. No que se refere à comparação entre os grupos 2 e 3, não foram observadas diferenças expressivas. Considera-se que isto se deveu ao fato de ambos os grupos já possuírem o conhecimento da multiplicação, o que gerou uma diferença tão pequena ao ponto desses grupos terem, praticamente, se equiparados quanto ao número de acertos dos problemas de combinação.

Para examinar, em detalhes, o efeito da situação sobre o desempenho, aplicou-se o Wilcoxon em cada grupo separadamente, encontrando diferenças significativas apenas entre as situações SII e SIII no Grupo 2 ($Z= -2,183$; $p= .029$). Este resultado indica que os participantes deste grupo são sensíveis às situações II e III propostas, revelando, portanto, que a explicitação dos princípios invariantes da combinação acompanhada de figuras de desenho recortadas facilitam a resolução de problemas de combinação.

No que diz respeito às crianças do Grupo 1, estas apresentaram um baixo percentual de acertos nas três situações (SI= 2,5%; SII= 1,6%; SIII= 5,0%), não havendo uma diferença entre elas, mesmo quando os princípios invariantes deste tipo de problema eram explicitados.

Já os participantes do Grupo 3 apresentaram um percentual mais alto, mas que não difere entre as situações (SI= 19,1%; SII= 20,9%; SIII= 21,6%). Assim, este resultado indica que independentemente da situação proposta, o desempenho das crianças do Grupo 3 se manteve praticamente uniforme, sendo indiferente à explicitação ou não dos princípios invariantes da combinação.

Portanto, estes resultados mostraram uma maior influência da escolaridade do que às situações sobre o desempenho dos participantes. Nesse sentido, ao que parece, a experiência, maturidade e aprendizagem obtidas com o passar dos anos e com a gradação escolar são fatores que produzem maiores efeitos no desempenho dessas crianças do que as situações apresentadas, pelo menos no que concernem aos sujeitos dessa faixa etária e que resolveram problemas de combinação, os quais são avaliados com um alto índice de dificuldade pela literatura e pesquisas da área.

#### 4.1.2.2 Desempenho referente à grandeza dos pares numéricos

O presente estudo apresenta quatro problemas nas três situações, que variam em função da grandeza de seus pares numéricos, propiciando, assim, diferenças no tamanho dos grupos formados e no número total de combinações (ver Quadro 5).

**Quadro 5**: Síntese da grandeza dos pares numéricos.

| Problemas | Pares numéricos | Tamanho dos grupos | Número total de combinações |
|---|---|---|---|
| Problema 1 | 5 e 3 | Grupos de 3 itens | 10 |
| Problema 2 | 5 e 2 | Grupos de 2 itens | 10 |
| Problema 3 | 6 e 2 | Grupos de 2 itens | 15 |
| Problema 4 | 6 e 4 | Grupos de 4 itens | 15 |

A fim de verificar se o desempenho das crianças variava em função da grandeza dos pares numéricos presentes nos problemas, elaborou-se a Tabela 3.

**Tabela 3 –** Frequência e percentual (entre parênteses) de acertos em função da grandeza dos pares numéricos e ano escolar (n=90).

| **Problemas** | **Grupo 1** (3º ano) | **Grupo 2** (4º ano) | **Grupo 3** (5º ano) |
|---|---|---|---|
| **Problema 1** (5, 3) | 1 (1,1) | 6 (6,6) | 4 (4,4) |
| **Problema 2** (5,2) | 4 (5,5) | 39 (43,3) | 39 (43,3) |
| **Problema 3** (6, 2) | 6 (6,6) | 23 (25,5) | 28 (31,1) |
| **Problema 4** (6, 4) | 0 | 0 | 3 (3,3) |

Nota 1: máximo de 90 acertos por problema em cada grupo.

O maior percentual de acertos concentrou-se nos Problemas 2 e 3. Isto pode ser explicado devido ao fato de que nesses problemas, os participantes deveriam formar grupos de dois itens, ao passo que nos problemas 1 e 4, deveriam formar grupos de três e quatro itens, respectivamente, o que proporcionaria um maior nível de dificuldade para as crianças haja vista a quantidade total de grupos que deveria ser gerada e a tenra idade dos participantes. Diferenças significativas foram encontradas entre todos os grupos nos problemas 2 e 3, como identificado pelo Kruskal Wallis (Problema 2: p= .000; Problema 3: p= .003).

Para examinar em detalhes as diferenças entre os grupos, aplicou-se o teste U de Mann-Whitney que revelou diferenças significativas entre o Grupo 1 vs. o Grupo 2 no Problema 2 (U= 232,5; p= .000) e no Problema 3 (U= 324,0; p= .016), como também entre os Grupos 1 e 3 no que se refere aos problemas 2 (U= 210,5; p= .000) e 3 (U= 253,0; p= .001). Contudo, o teste não apontou diferenças significativas entre os Grupos 2 e 3 em nenhum dos problemas.

O Friedman comparou as diferenças entre as grandezas dos pares numéricos no interior de cada grupo, apontando diferenças significativas no Grupo 2 (p= .000) e no Grupo 3 (p= .000). O teste de Wilcoxon comparou os problemas dois a dois em cada grupo, identificando algumas diferenças significativas como mostra a Tabela 4[8].

**Tabela 4 –** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação dos tipos de problemas em cada ano escolar.

| **Problemas** | **Grupo 2** (4º ano) | **Grupo 3** (5º ano) |
|---|---|---|
| **P1 x P2** | Z= -3,449<br>p= .001 | Z= -3,774<br>p= .000 |
| **P1 x P3** | Z= -2,553<br>p= .011 | Z= -3,624<br>p= .000 |
| **P2 x P3** | Z= -2,000<br>p= .046 | Z= -2,138<br>p= .033 |
| **P2 x P4** | Z= -3,681<br>p= .000 | Z= -3,671<br>p= .000 |
| **P3 x P4** | Z= -3,681<br>p= .002 | Z= -3,602<br>p= .000 |

Nota 1: Problema 1- pares numéricos 5 e 3; Problema 2- pares numéricos 5 e 2; Problema 3- pares numéricos 6 e 2; Problema 4- pares numéricos 6 e 4.

A Tabela 4 mostra que o Grupo2 e o Grupo 3 apresentaram diferenças significativas para todas as comparações realizadas entre os problemas, com exceção da comparação entre os problemas 1 e 4, cuja diferença não se revelou significativa. Em outras palavras, estes dados indicaram que os participantes dos Grupos 2 e 3 apresentaram um maior percentual de acerto ao resolver os problemas 2 e 3 do que os problemas 1 e 4. Contudo, ao observar as comparações entre a grandeza dos pares numéricos referentes ao Grupo 1, nenhum delas mostrou-se significativa. Dessa forma, tais resultados sugerem que problemas que envolvem a formação de grupos de tamanhos pequenos promovem um melhor desempenho.

No que diz respeito à escolaridade, verificou-se que o maior percentual de acertos concentrou-se nos Grupos 2 e 3 e isto pode ser explicado pelo fato destes estudantes já terem recebido o ensino formal da multiplicação, conteúdo este que antecede e facilita a compreensão dos problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

[8] Nesta e nas outras tabelas serão apresentadas apenas as diferenças significativas. Não foram encontradas diferenças significativas para o Grupo 1.

No que concerne à grandeza numérica, esta variável parece ser também um dos fatores determinantes do desempenho das crianças haja vista que as mesmas apresentaram um maior índice de acertos ao solucionarem os problemas cujos valores dos pares numéricos geravam grupos de tamanho menor, isto é grupos de dois itens (problemas 2 e 3). Como a grande maioria dos participantes que resolveu os problemas de maneira adequada utilizou o procedimento de árvore de possibilidades, quanto maior fosse o grupo a ser formado ou o total de grupos a serem realizados, maior seria o grau de dificuldade da determinada tarefa, já que exigiria uma maior atenção do participante para se alcançar o esgotamento de todas as combinações possíveis.

Sendo assim, de maneira geral, parece que os fatores ano escolar e grandeza dos pares numéricos, de maneira simultânea, influenciaram o desempenho dos participantes de forma que os problemas 2 e 3 foram mais facilmente resolvidos pelos grupos 2 (4º ano) e 3 (5º ano).

#### 4.1.2.3 Desempenho referente à grandeza dos pares numéricos por situação

A Tabela 5 apresenta a distribuição de acertos em função da grandeza dos pares numéricos e das situações.

**Tabela 5** – Frequência e percentual (entre parênteses) de acertos em função da grandeza dos pares numéricos e situação (n=90).

| Problemas | Situação I | Situação II | Situação III |
|---|---|---|---|
| **Problema 1** (5 e 3) | 3 (3,3) | 4 (4,4) | 4 (4,4) |
| **Problema 2** (5 e 2) | 25 (27,8) | 22 (24,4) | 28 (31,1) |
| **Problema 3** (6 e 2) | 18 (20,0) | 15 (16,7) | 23 (25,6) |
| **Problema 4** (6 e 4) | 1 (1,1) | 1 (1,1) | 1 (1,1) |
| **Total** | 47 (52,2) | 42 (46,6) | 56 (62,2) |

Nota 1: Situação I (problemas sem explicitação dos princípios invariantes); Situação II (problemas com explicitação dos princípios invariantes); Situação III (problemas com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas).
Nota 2: máximo de 90 acertos em cada situação.

Na Tabela 5, observa-se que a Situação III é a que apresenta o maior índice de acertos quando comparada com as demais (62,2%). O teste estatístico de Friedman comparou os problemas em todas as situações, encontrando diferenças significativas para todas elas (p= .000).

Para analisar em detalhes o efeito das situações sobre o desempenho, aplicou-se o Wilcoxon, que comparou as três situações propostas para cada problema. Este teste apontou diferença significativa para as situações II e III, especificamente no problema 3 (p= .059[9]). Dessa forma, esse resultado revela que os sujeitos são sensíveis aos problemas que explicitam os princípios invariantes da combinação ou ainda, quando além dessa explicitação, vêm acompanhados de desenhos de figuras recortadas.

A Tabela 6 apresenta a distribuição de acertos da grandeza dos pares numéricos em função das situações e do ano escolar.

---

[9] Ressalta-se que p= .059 é considerado marginalmente significativo, o que confirma a tendência de que os Problemas 2 e 3 apresentam um maior índice de acertos.

**Tabela 6 –** Frequência e percentual (entre parênteses) de acertos da grandeza dos pares numéricos em função da situação e do ano escolar (n=30).

| Problemas | Situação I | Situação II | Situação III |
|---|---|---|---|
| **Grupo 1** (3º ano) | | | |
| **Problema 1** (5 e 3) | 0 | 1 (3,3) | 0 |
| **Problema 2** (5 e 2) | 2 (6,6) | 0 | 3 (10,0) |
| **Problema 3** (6 e 2) | 1 (3,3) | 1 (3,3) | 3 (10,0) |
| **Problema 4** (6 e 4) | 0 | 0 | 0 |
| **Grupo 2** (4º ano) | | | |
| **Problema 1** (5 e 3) | 2 (6,6) | 1 (3,3) | 3 (10,0) |
| **Problema 2** (5 e 2) | 11 (36,6) | 9 (30,0) | 11 (36,6) |
| **Problema 3** (6 e 2) | 8 (26,6) | 5 (16,6) | 10 (33,3) |
| **Problema 4** (6 e 4) | 0 | 0 | 0 |
| **Grupo 3** (5º ano) | | | |
| **Problema 1** (5 e 3) | 1 (3,3) | 2 (6,6) | 1 (3,3) |
| **Problema 2** (5 e 2) | 12 (40,0) | 13 (43,3) | 14 (46,6) |
| **Problema 3** (6 e 2) | 9 (30,0) | 9 (30,0) | 10 (33,3) |
| **Problema 4** (6 e 4) | 1 (3,3) | 1 (3,3) | 1 (3,3) |

Nota 1: máximo de 30 acertos em cada situação por grupo.

De modo geral, a Tabela 6 mostra que os problemas 2 e 3 foram os que apresentaram o maior índice de acertos tanto em relação aos grupos quanto em relação às situações.

O Friedman comparou o desempenho dos pares numéricos em função das situações, detectando diferenças significativas para o Grupo 1 (p= .053), Grupo 2 (p= .000) e Grupo 3 (p= .000).

Para examinar em detalhes o efeito dos problemas de cada situação sobre o desempenho, aplicou-se o Wilcoxon em cada grupo separadamente, encontrando-se diferenças significativas, como indicado na Tabela 7.

**Tabela 7-** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação da grandeza dos pares numéricos em função da situação e cada ano escolar.

| **Problemas** | **Grupo 2** (4º ano) | **Grupo 3** (5º ano) |
|---|---|---|
| | **Situação I** | |
| **P1x P2** | Z= -3,000<br>p= .003 | Z= -3,317<br>p= .001 |
| **P1 x P3** | Z= -2,121<br>p= .034 | Z= -2,828<br>p= .005 |
| **P2 x P4** | Z= -3,317<br>p= .001 | Z= -3,317<br>p= .001 |
| **P3 x P4** | Z= -2,828<br>p= .005 | Z= -2,828<br>p= .005 |
| | **Situação II** | |
| **P1 x P2** | Z= -2,828<br>p= .005 | Z= -3,317<br>p= .001 |
| **P1 x P3** | Z= -2,000<br>p= .046 | Z= -2,646<br>p= .008 |
| **P2 x P4** | Z= -3,000<br>p= .003 | Z= -3,464<br>p= .001 |
| **P3 x P4** | Z= -2,236<br>p= .025 | Z= -2,828<br>p= .005 |
| | **Situação III** | |
| **P1 x P2** | Z= -2,530<br>p= .011 | Z= -3,606<br>p= .000 |
| **P1 x P3** | Z= -2,333<br>p= .020 | Z= -2,714<br>p= .007 |
| **P2 x P4** | Z= -3,317<br>p= .001 | Z= -3,606<br>p= .000 |
| **P3 x P4** | Z= -3,162<br>p= .002 | Z= -3,000<br>p= .003 |

O teste de Wilcoxon encontrou diferenças apenas entre os grupos 2 e 3 com relação aos problemas P1xP2, P1xP3, P2xP4 e P3xP4 em todas as situações. Dessa forma, pode-se inferir que os desempenhos dos participantes contrastam, sobretudo, quando se comparam os problemas que geram grupos maiores (P1 e P4) com aqueles que produzem grupos menores (P2 e P3), independentemente da situação. Em outras palavras, os problemas que exigiam das crianças a formação de grupos de dois itens (P2 e P3) apresentaram um desempenho melhor quando comparados com aqueles nos quais os participantes deveriam formar grupos de três e quatro itens (P3 e P4, respectivamente).

Sendo assim, esses dados sugerem que a grandeza numérica é fator que influencia o desempenho, uma vez que os problemas mais difíceis de serem resolvidos são aqueles que exigem a formação de grupos com uma maior quantidade de itens, ou seja, com tamanhos de grupos grandes. Contudo, o mesmo resultado não foi observado em relação ao Grupo 1, já que o número de acertos mostrou-se muito próximo, não observando influência das situações e nem tampouco do tamanho dos grupos a serem produzidos.

A fim de verificar as diferenças entre os grupos em função dos problemas e das situações, aplicou-se o Kruskal Wallis, que mostrou diferenças significativas para todos os grupos no Problema 2 (p= .007) e Problema 3 (p= .020) da Situação I; no Problema 2 (p= .000) e no Problema 3 (p= .022) da Situação II; no Problema 2 (p= .007) e no Problema 3 (p= .059) da Situação III.

Com o objetivo de comparar os grupos, aplicou-se o teste U de Mann-Whitney cujos níveis de significância podem ser observados na Tabela 8.

**Tabela 8 –** Níveis de significância obtidos no U de Mann-Whitney na comparação dos grupos em função da grandeza dos pares numéricos e situação.

| **Grupo 1** (3º ano) **x Grupo 2** (4º ano) | | | |
|---|---|---|---|
| **Problemas** | **Situação I** | **Situação II** | **Situação III** |
| **Problema 2** | p= .005 | p= .001 | p= .015 |
| **Problema 3** | p= .012 | p= .088 | p= .030 |
| **Grupo 1** (3º ano) **x Grupo 3** (5º ano) | | | |
| **Problema 2** | p= .002 | p= .000 | p= .002 |
| **Problema 3** | p= .006 | p= .006 | p= .030 |

De acordo com a Tabela 8, observa-se que todas as comparações estatísticas traçadas entre o Grupo 1 com os demais, referentes aos problemas 2 e 3 de cada situação proposta, foram consideradas significativas. Já as comparações realizadas entre os Grupos 2 e 3 não apresentaram diferenças significativas. Sendo assim, a partir desta análise, verifica-se novamente a influência de dois fatores sobre o desempenho das crianças, a saber: gradação escolar e a grandeza numérica trabalhada em cada problema.

No que concerne à escolaridade, a influência se deu pelo fato do Grupo 2 (4º ano) e do Grupo 3 (5º ano) já terem recebido as instruções formais sobre a multiplicação, conteúdo que antecede e facilita a compreensão dos problemas que envolvem o raciocínio combinatório, proporcionando um melhor desempenho nesses grupos.

No que diz respeito à grandeza numérica, é possível perceber a sua influência quando comparamos o desempenho dos estudantes nos problemas que trabalham com a formação de grupos maiores (problemas 1 e 4 – grupos de três e quatro itens, respectivamente) com aqueles que requerem a formação de grupos menores (problemas 2 e 3 – grupos de dois itens). Esse dado revela a influência do tamanho dos grupos a serem produzidos sobre o desempenho dos estudantes em detrimento da quantidade total de combinações, pois, embora os problemas 2 e 3 exigissem um total de combinações diferentes, 10 e 15 respectivamente, o índice de acertos dos participantes foi semelhante já que essas tarefas solicitavam a formação de grupos de dois itens. Já os problemas 1 e 4, que requisitavam a formação de grupos maiores, apresentaram um nível de acerto menor, sobretudo este último, que além de exigir a formação de grupos de quatro itens, resultava em um total de 15 combinação, dificultando, assim, o desempenho das crianças. Assim, quanto maior fosse o grupo a ser formado, maior seria o grau de dificuldade da determinada tarefa, já que exigiria uma maior atenção do participante para formar grupos diferentes e se alcançar o esgotamento de todas as combinações possíveis.

## 4.2 Resultados relativos às estratégias de resolução

Além da análise do desempenho, foram identificadas estratégias de resolução através dos protocolos e das justificativas fornecidas pelas crianças. Estas estratégias foram analisadas e discutidas com base no sistema de análise construído para esta investigação apresentado no Capítulo III, relativo ao sistema de analise.

É importante ressaltar que só serão apresentadas as estratégias referentes à Etapa 2 desse estudo. Isto se deve pelo fato da Etapa 1 envolver a análise de dois tipos de problemas diferentes (produto cartesiano e combinação), os quais apresentaram algumas estratégias de resolução distintas, que são específicas à natureza do problema trabalhado, não sendo possível, portanto, utilizar um único sistema para descrevê-las. Assim, diante dessas especificidades, não foi possível traçar uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas nos problemas de produto cartesiano e nos de combinação e, por isso, esta seção será referente apenas às estratégias adotadas na segunda etapa da presente investigação.

Os resultados relativos às estratégias são apresentados e discutidos de duas maneiras distintas, porém complementares. Inicialmente se analisa as estratégias a partir da relação ano escolar e situação; e em um segundo momento se analisa as estratégias a partir da relação ano escolar e grandezas dos pares numéricos.

### 4.2.1 Análise das estratégias referentes ao ano escolar por situação

Os dados da Tabela 9 referem-se à distribuição dos tipos de estratégias de resolução adotadas pelos grupos (Grupo 1, Grupo 2, Grupo 3) nas três situações propostas.

**Tabela 9 –** Frequência e percentual (entre parênteses) de estratégias de resolução em função do ano escolar e situação (n=90)

| Estratégias | Situação I | Situação II | Situação III |
|---|---|---|---|
| **Grupo 1 (3º ano)** | | | |
| **Tipo 1** | 0 | 1 (0,8) | 0 |
| **Tipo 2** | 44 (36,6) | 37 (30,8) | 17 (14,2) |
| **Tipo 3** | 66 (55) | 73 (60,8) | 84 (70) |
| **Tipo 4** | 7 (5,8) | 7 (5,8) | 13 (10,8) |
| **Tipo 5** | 0 | 0 | 1 (0,8) |
| **Tipo 6** | 3 (2,5) | 2 (1,7) | 5 (4,2) |
| **Grupo 2 (4º ano)** | | | |
| **Tipo 1** | 0 | 0 | 0 |
| **Tipo 2** | 27 (22,5) | 8 (6,7) | 9 (7,5) |
| **Tipo 3** | 57 (47,5) | 73 (60,8) | 60 (50) |
| **Tipo 4** | 15 (12,5) | 24 (20) | 28 (23,4) |
| **Tipo 5** | 1 (0,8) | 0 | 2 |
| **Tipo 6** | 20 (16,7) | 15 (12,5) | 21 (17,5) |
| **Grupo 3 (5º ano)** | | | |
| **Tipo 1** | 12 (10) | 7 (5,8) | 4 (3,3) |
| **Tipo 2** | 13 (10,8) | 3 (2,5) | 0 |
| **Tipo 3** | 54 (45) | 64 (53,4) | 61 (50,8) |
| **Tipo 4** | 23 (19,2) | 21 (17,5) | 30 (25) |
| **Tipo 5** | 0 | 1 (0,8) | 2 (1,7) |
| **Tipo 6** | 18 (15) | 24 (20) | 23 (19,2) |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 4- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.
Nota 2: máximo de 120 estratégias em cada situação por grupo.

De modo geral, a Tabela 9 mostra que os três grupos se concentraram mais na estratégia Tipo 3 nas três situações propostas. Esta estratégia corresponde ao início da compreensão da correspondência um-para-muitos, quando a criança deixa de pensar em termos de pares fixos e começa a utilizar um mesmo elemento na formação de pares diversos. Contudo, a criança não chega a estabelecer a totalidade de combinações possíveis, pois, ao que parece, falta a sistematização na formação dos pares. Dentre as estratégias que demonstram raciocínio combinatório, o maior percentual encontra-se nas do Tipo 6, sobretudo no Grupo 3.

Com o objetivo de analisar se havia diferenças significativas entre as estratégias em cada grupo, aplicou-se o Kruskal-Wallis, que detectou diferenças significativas para todos os grupos na Situação I (Tipo 1: p= .046; Tipo 2 p= .023; Tipo 6: p= .030), na Situação II (Tipo 2: p=.000; Tipo 6: p= .003) e na Situação III (Tipo 2: p=.003; e Tipo 6: p= .005).

A fim de analisar em detalhes essas diferenças entre os grupos, aplicou-se o U de Mann-Whitney, cujos níveis de significância podem ser observados na Tabela 10.

**Tabela 10 –** Níveis de significância obtidos no U de Mann-Whitney na comparação dos grupos em função dos tipos de estratégias em cada situação.

| **Grupo 1** (3º ano) **x Grupo 2** (4º ano) | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipos de estratégias** | **Situação I** | **Situação II** | **Situação III** |
| **Tipo 2** | _ | p= .004 | _ |
| **Tipo 4** | _ | p= .050 | _ |
| **Tipo 6** | p= .008 | p= .008 | p= .008 |
| **Grupo 1** (3º ano) **x Grupo 3** (5º ano) | | | |
| **Tipo 2** | p= .007 | p= .000 | p= .001 |
| **Tipo 4** | p= .036 | p= .036 | p= .043 |
| **Tipo 6** | p= .031 | p= .001 | p= .001 |

Nota 1: Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

De acordo com a Tabela 10, percebe-se que foram encontradas diferenças significativas quanto às estratégias adotadas pelas crianças nas comparações realizadas entre o Grupo 1 com os demais.

No que se refere às comparações entre os Grupos 1 e 2, observou-se que o Grupo 2 apresentou um maior percentual de estratégias do Tipo 6, na Situação I, com relação ao Grupo 1. Isso se repetiu nas Situações II e III, porém o Grupo 2 apresentou uma redução do uso das estratégias do Tipo 2 (ver Tabela 9).

Esse mesmo padrão de resultados foi detectado nas comparações entre o Grupo 1 e o Grupo 3, uma vez que observou-se uma diminuição da estratégia do Tipo 2 e um aumento das estratégias do Tipo 6 nas três situações propostas. Já as comparações delineadas entre os grupos 2 e 3 não apresentaram diferenças estatisticamente significativas, uma vez que o percentual de tipos de estratégias adotadas pelos participantes de ambos os grupos foi semelhante. Este resultado parece indicar que não há um salto qualitativo no que diz respeito ao raciocínio combinatório entre os estudantes que cursam o 4º e 5º anos, como aquele observado nas comparações entre os alunos do 3º ano e demais anos escolares investigados.

Portanto, a partir desses resultados, nota-se uma evolução do raciocínio combinatório com o aumento da escolaridade, uma vez que, diferentemente do Grupo 1, os estudantes do Grupo 2 diminuíram o uso de estratégias que não indicavam a presença do raciocínio combinatório e, em contrapartida, aumentaram o uso de estratégias de resolução combinatórias. Sendo assim, esses resultados sugerem uma influência da escolaridade sobre a estratégia adotada, uma vez que à medida que se aumenta o nível escolar, ocorre um aumento do uso das estratégias de resolução combinatória.

O Friedman analisou a influência das situações sobre o tipo de estratégia adotada, revelando diferenças significativas para o Grupo 1 ($p= .000$) o Grupo 2 ($p= .000$) e o Grupo 3 ($p= .000$).

O Wilcoxon analisou o uso das estratégias em cada grupo separadamente, sendo os seus valores expostos na Tabela 11.

**Tabela 11 –** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação dos tipos de estratégias de resolução em função da situação para o Grupo 1.

| GRUPO 1 (3º ANO) | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipos de estratégias** | **Situação I** | **Situação II** | **Situação III** |
| **Tipo 1x Tipo 2** | Z= -3,369<br>p= .001 | Z= -3,564<br>p= .000 | Z= -2,719<br>p= .007 |
| **Tipo 1 x Tipo 3** | Z= -4,111<br>p= .000 | Z= -4,300<br>p= .000 | Z= -4,603<br>p= .000 |
| **Tipo 1 x Tipo 4** | Z= -1,890<br>p= 0.59 | _ | Z= -2,730<br>p=.006 |
| **Tipo 2 X Tipo3** | _ | _ | Z= -3,589<br>p= .000 |
| **Tipo 2 x Tipo 4** | Z= -2,889<br>p= .004 | Z= -2,737<br>p= .006 | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 5** | Z= -3,369<br>p= .001 | Z= -3,563<br>p= .000 | Z= -2,507<br>p= .012 |
| **Tipo 2 x Tipo 6** | Z= -3,204<br>p= .001 | Z= -3,345<br>p= .001 | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 4** | Z= -3,871<br>p= .000 | Z= -4,020<br>p= .000 | Z= 4,311<br>p= .000 |
| **Tipo 3 X Tipo 5** | Z= -4,111<br>p= .000 | Z= -4,262<br>p= .000 | Z= -4,601<br>p= .000 |
| **Tipo 3 X Tipo 6** | Z= -3,943<br>p= .000 | Z= -4,285<br>p= .000 | Z= -4,436<br>p= .000 |
| **Tipo 4 X Tipo 5** | Z= -1,890<br>p= .059 | Z= -2,121<br>p= .034 | Z= -2,521<br>p= .012 |
| **Tipo 4 X Tipo 6** | _ | Z= -1,890<br>p= .059 | _ |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

**Tabela 12 –** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação dos tipos de estratégias de resolução em função da situação para o Grupo 2.

| GRUPO 2 (4º ANO) | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipos de estratégias** | **Situação I** | **Situação II** | **Situação III** |
| **Tipo 1x Tipo 2** | Z= -2,530<br>p= .011 | Z= -2,271<br>p= .023 | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 3** | Z= -3,828<br>p= .000 | Z= -4,342<br>p= .000 | Z= -3,890<br>p= .000 |
| **Tipo 1 x Tipo 4** | Z= -2,879<br>p= .004 | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -3,457<br>p= .001 |
| **Tipo 1 X Tipo 6** | Z= -2,970<br>p= .003 | Z= -3,066<br>p= .002 | Z= -3,109<br>p= .002 |
| **Tipo 2 X Tipo3** | _ | Z= -4,213<br>p= .000 | Z= -2,917<br>p= .004 |
| **Tipo 2 x Tipo 4** | _ | Z= -2,103<br>p= 0.35 | Z= -2,072<br>p= .038 |
| **Tipo 2 x Tipo 5** | Z= -2,490<br>p= .013 | Z= -2,271<br>p=.023 | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 4** | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -2,998<br>p= .003 | Z= -2,244<br>p= .025 |
| **Tipo 3 X Tipo 5** | Z= -3,828<br>p= .000 | Z= -4,342<br>p= .000 | Z= -3,872<br>p= .000 |
| **Tipo 3 X Tipo 6** | Z= -2,686<br>p= .007 | Z= -3,812<br>p= .000 | Z= -2,909<br>p=.004 |
| **Tipo 4 X Tipo 5** | Z= -2,697<br>p= .007 | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -3,209<br>p= .001 |
| **Tipo 5 X Tipo 6** | Z= -2,926<br>p= .003 | Z= -3,066<br>p= .002 | Z= -2,848<br>p= .004 |
| **Tipo 1x Tipo 2** | Z= -2,530<br>p= .011 | Z= -2,271<br>p= .023 | _ |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

**Tabela 13 –** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação dos tipos de estratégias de resolução em função da situação para o Grupo 3.

| GRUPO 3 (5º ANO) | | | |
|---|---|---|---|
| **Tipos de estratégias** | **Situação I** | **Situação II** | **Situação III** |
| **Tipo 1 x Tipo 3** | Z= -2,429<br>p= .015 | Z= -3,443<br>p= .001 | Z= -3,524<br>p= .000 |
| **Tipo 1 x Tipo 4** | _ | _ | Z= -2,873<br>p= .004 |
| **Tipo 1 X Tipo 6** | _ | Z= -2,075<br>p= .038 | Z= -2,744<br>p= .006 |
| **Tipo 2 X Tipo3** | Z= -2,429<br>p= .015 | Z= -3,968<br>p= .000 | Z= -3,986<br>p= .000 |
| **Tipo 2 x Tipo 4** | _ | Z= -2,626<br>p= .009 | Z= -3,564<br>p= .000 |
| **Tipo 2 x Tipo 5** | Z= -1,890<br>p= .059 | _ | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 6** | Z= -,523<br>p= .601 | Z= -2,907<br>p= .004 | Z= -,493<br>p= .000 |
| **Tipo 3 X Tipo 4** | Z= - 2,303<br>p= .021 | Z= -2,865<br>p= .004 | Z= -2,158<br>p= .031 |
| **Tipo 3 X Tipo 5** | Z= -3,654<br>p= .000 | Z= -3,976<br>p= .000 | Z= -3,986<br>p= .000 |
| **Tipo 3 X Tipo 6** | Z= -2,638<br>p= .008 | Z= -2,705<br>p= .007 | Z= -2,601<br>p= .009 |
| **Tipo 4 X Tipo 5** | Z= -2,994<br>p= .003 | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -3,355<br>p= .001 |
| **Tipo 5 X Tipo 6** | Z= -2,714<br>p= .007 | Z= -3,130<br>p= .002 | Z= -3,191<br>p= .001 |
| **Tipo 1 x Tipo 3** | Z= -2,429<br>p= .015 | Z= -3,443<br>p= .001 | Z= -3,524<br>p= .000 |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

No Grupo 1 (Tabela 9), houve um maior percentual de estratégias do Tipo 2 e, sobretudo, Tipo 3 nas três situações propostas. Este resultado parece indicar que as crianças do 3º ano, embora não consigam resolver os problemas de forma apropriada, já apresentam os primeiros indícios de raciocínio combinatório, cujas evidências são maiores nos problemas da Situação II (explicitação dos princípios invariantes) e Situação III (explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas). Estes dados manifestam, portanto, o papel facilitador da explicitação dos invariantes sobre a resolução dos problemas. E, ao que parece, a explicitação fica ainda mais potencializada quando acompanhada de desenhos de figuras recortadas.

No Grupo 2 (Tabela 9), observou-se uma maior concentração na estratégia do Tipo 3 e um aumento expressivo do Tipo 6. Ademais, verificou-se que as Situações II e III foram as que mais possibilitaram o uso das estratégias que já indicavam presença de raciocínio combinatório. Esse resultado sugere que a explicitação dos princípios invariantes facilita a resolução dos problemas, não havendo, portanto, muita influência dos desenhos de figuras recortadas já que o percentual da estratégia do Tipo 6 foi semelhante nessas duas situações.

O Grupo 3 apresentou dados semelhantes ao do Grupo 2, o que indica que as crianças do 4º e 5º anos estão praticamente no mesmo nível de raciocínio combinatório, uma vez que ambos os grupos apresentam mesmo padrão de resultados em relação às situações.

### 4.2.2 Análise das estratégias em função da grandeza dos pares numéricos

A Tabela 14 apresenta a distribuição dos tipos de estratégia de resolução em função da grandeza dos pares numéricos nos problemas.

**Tabela 14 –** Frequência e percentual (entre parênteses) das estratégias de resolução em função da grandeza dos pares numéricos (n= 90).

| Tipos de estratégias | Problema 1 (5 e 3) | Problema 2 (5 e 2) | Problema 3 (6 e 2) | Problema 4 (6 e 4) |
|---|---|---|---|---|
| **Grupo 1 (3º ano)** | | | | |
| **Tipo 1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Tipo 2** | 20 (22,3) | 23 (25,6) | 34 (37,8) | 19 (21,2) |
| **Tipo 3** | 59 (65,6) | 57 (63,4) | 48 (53,4) | 62 (68,9) |
| **Tipo 4** | 10 (11,2) | 5 (5,6) | 3 (3,4) | 9 (10) |
| **Tipo 5** | 0 | 1 (1,2) | 0 | 0 |
| **Tipo 6** | 1 (1,2) | 4 (4,5) | 5 (5,6) | 0 |
| **Grupo 2 (4º ano)** | | | | |
| **Tipo 1** | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **Tipo 2** | 10 (11,2) | 12 (13,4) | 13 (14,5) | 9 (10) |
| **Tipo 3** | 56 (62,3) | 42 (46,7) | 42 (46,7) | 55 (61,2) |
| **Tipo 4** | 18 (20) | 7 (7,8) | 11 (12,3) | 26 (28,9) |
| **Tipo 5** | 1 (1,2) | 1 (1,2) | 1 (1,2) | 0 |
| **Tipo 6** | 5 (5,6) | 28 (31,2) | 23 (25,6) | 0 |
| **Grupo 3 (5º ano)** | | | | |
| **Tipo 1** | 7 (7,8) | 6 (6,6) | 7 (7,8) | 6 (6,6) |
| **Tipo 2** | 4 (4,5) | 4 (4,5) | 5 (5,6) | 3 (3,4) |
| **Tipo 3** | 50 (55,6) | 37 (41,2) | 41 (45,6) | 48 (53,4) |
| **Tipo 4** | 25 (27,8) | 10 (11,2) | 9 (10) | 30 ( 33,4) |
| **Tipo 5** | 0 | 2 (2,3) | 1 (1,2) | 0 |
| **Tipo 6** | 4 (4,5) | 31 (34,5) | 27 (30) | 3 (3,4) |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.
Nota 2: máximo de 90 estratégias em cada situação por grupo.

De acordo com a Tabela 14, a estratégia Tipo 6 se concentra nos problemas 2 e 3, cujos pares numéricos, quando combinados, formam os grupos de menor tamanho (grupos de dois itens). Ademais, tal estratégia apresenta maior percentual nos Grupos 2 e 3.

O teste de Kruskal Wallis comparou as diferenças entre os grupos em função dos tipos de estratégias, encontrando diferenças significativas para todos os grupos nas estratégias Tipo 2 (p= .022) e Tipo 4 (p= .040) do Problema 1; Tipo 2 (p= .002), Tipo 3 (p= .030) e Tipo 6 (p=

.000) do Problema 2; Tipo 2 (p= .000) e Tipo 6 (p= .001) do Problema 3; e Tipo 2 (p= .006), Tipo 3 (p= .003) e Tipo 4 (p= .019) do Problema 4.

A fim de analisar em detalhes essas diferenças, aplicou-se o teste U de Mann-Whitney, cujos valores das diferenças podem ser observados na Tabela 15.

**Tabela 15 –** Níveis de significância obtidos no U de Mann-Whitney na comparação dos grupos em função dos tipos de estratégias e das grandezas dos pares numéricos.

| **Tipos de estratégias** | **Problema 1** | **Problema 2** | **Problema 3** | **Problema 4** |
|---|---|---|---|---|
| **Grupo 1** (3º ano) **x Grupo 2** (4º ano) | | | | |
| **Tipo 1** | _ | _ | _ | _ |
| **Tipo 2** | _ | _ | p= .006 | _ |
| **Tipo 3** | _ | _ | _ | p= .002 |
| **Tipo 4** | _ | _ | _ | _ |
| **Tipo 5** | _ | _ | _ | _ |
| **Tipo 6** | _ | p= .001 | p= .004 | _ |
| **Grupo 1** (3º ano) **x Grupo 3** (5º ano) | | | | |
| **Tipo 1** | _ | _ | _ | _ |
| **Tipo 2** | p= .022 | p= .002 | p= .000 | p= .006 |
| **Tipo 3** | _ | p= .039 | _ | p= .003 |
| **Tipo 4** | p= .040 | _ | _ | p= .019 |
| **Tipo 5** | _ | _ | _ | _ |
| **Tipo 6** | _ | p= .000 | p= .001 | _ |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

De acordo com a Tabela 15, observa-se diferenças apenas nas comparações realizadas entre o Grupo 1 e os demais, o que indica que os resultados dos Grupos 2 e 3 são muito próximos, não havendo, portanto diferenças significativas entre eles.

Nas comparações entre os Grupos 1 e 2, observou-se uma redução do uso de estratégias Tipo 2 e o aumento expressivo das estratégias Tipo 6, sobretudo nos Problemas 2 e 3. Esse mesmo padrão de resultados se repetiu nas comparações traçadas entre o Grupo 1 e o Grupo 3.

Assim, tais resultados indicam uma influência da escolaridade bem como dos pares numéricos envolvidos nos problemas sobre o uso de estratégias apropriadas para a resolução de problemas de combinação.

O Friedman analisou a influência das grandezas dos pares numéricas sobre os tipos de estratégias, detectando diferenças significativas para o Grupo 1 (p= .000), Grupo 2 (p= .000) e Grupo 3 (p= .000).

A fim de comparar os tipos de estratégias dois a dois, aplicou-se o Wilcoxon cujas diferenças significativas podem ser visualizadas na Tabela 16.

**Tabela 16 –** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação dos tipos de estratégias de resolução em função das grandezas dos pares numéricos do Grupo 1.

| | **Grupo 1 (3º ano)** | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Tipos de estratégias** | **Problema 1 (5 e 3)** | **Problema 2 (5 e 2)** | **Problema 3 (6 e 2)** | **Problema 4 (6 e 4)** |
| **Tipo 1x Tipo 2** | Z= -2,859<br>p= .004 | _ | _ | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 3** | Z= -4,579<br>p= .000 | _ | _ | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 4** | Z= -4,456<br>p= .014 | _ | _ | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 5** | Z= 1<br>p= .000 | _ | _ | _ |
| **Tipo 2 X Tipo3** | Z= -3,119<br>p= .002 | _ | _ | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 5** | Z= -2,850<br>p= .004 | _ | _ | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 6** | Z= -2,754<br>p= .006 | _ | _ | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 4** | Z= -3,816<br>p= .000 | _ | _ | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 5** | Z= -4,579<br>p= .000 | _ | _ | _ |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

**Tabela 17 –** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação dos tipos de estratégias de resolução em função das grandezas dos pares numéricos do Grupo 2.

| Grupo 2 (4º ano) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Tipos de Estratégias** | **Problema 1** | **Problema 2** | **Problema 3** | **Problema 4** |
| **Tipo 1x Tipo 2** | Z= -2,530<br>p= .011 | Z= -2,271<br>p= .023 | _ | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 3** | Z= -3,828<br>p= .000 | Z= -4,342<br>p= .000 | Z= -3,890<br>p= .000 | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 4** | Z= -2,879<br>p= .004 | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -3,457<br>p= .001 | _ |
| **Tipo 1 X Tipo 6** | Z= -2,970<br>p= .003 | Z= -3,066<br>p= .002 | Z= -3,109<br>p= .002 | _ |
| **Tipo 2 X Tipo3** | _ | Z= -4,213<br>p= .000 | Z= -2,917<br>p= .004 | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 4** | _ | Z= -2,103<br>p= 0.35 | Z= -2,072<br>p= .038 | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 5** | Z= -2,490<br>p= .013 | Z= -2,271<br>p=.023 | _ | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 4** | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -2,998<br>p= .003 | Z= -2,244<br>p= .025 | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 5** | Z= -3,828<br>p= .000 | Z= -4,342<br>p= .000 | Z= -3,872<br>p= .000 | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 6** | Z= -2,686<br>p= .007 | Z= -3,812<br>p= .000 | Z= -2,909<br>p=.004 | _ |
| **Tipo 4 X Tipo 5** | Z= -2,697<br>p= .007 | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -3,209<br>p= .001 | _ |
| **Tipo 5 X Tipo 6** | Z= -2,926<br>p= .003 | Z= -3,066<br>p= .002 | Z= -2,848<br>p= .004 | _ |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

**Tabela 18 –** Níveis de significância obtidos no Wilcoxon na comparação dos tipos de estratégias de resolução em função das grandezas dos pares numéricos do Grupo 3.

| Grupo 3 (5º ano) | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Tipos de estratégias** | **Problema 1 (5 e 3)** | **Problema 2 (5 e 2)** | **Problema 3 (6 e 2)** | **Problema 4 (6 e 4)** |
| **Tipo 1x Tipo 2** | Z= ,090<br>p= .928 | Z= -,647<br>p= .518 | Z= -1<br>p= .317 | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 3** | Z= -2,429<br>p= .015 | Z= -3,443<br>p= .001 | Z= -3,524<br>p= .000 | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 4** | Z= -1,051<br>p= .293 | Z= -1,769<br>p= .077 | Z= -2,873<br>p= .004 | _ |
| **Tipo 1 x Tipo 5** | Z= -1,732<br>p= .083 | Z= -1,289<br>p= .197 | Z= ,000<br>p= 1 | _ |
| **Tipo 1 X Tipo 6** | Z= -0,414<br>p= .679 | Z= -2,075<br>p= .038 | Z= -2,744<br>p= .006 | _ |
| **Tipo 2 X Tipo3** | Z= -2,429<br>p= .015 | Z= -3,968<br>p= .000 | Z= -3,986<br>p= .000 | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 4** | Z= -1,065<br>p= .287 | Z= -2,626<br>p= .009 | Z= -3,564<br>p= .000 | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 5** | Z= -1,890<br>p= .059 | Z= -1<br>p= .317 | Z= -1,414<br>p= .157 | _ |
| **Tipo 2 x Tipo 6** | Z= -,523<br>p= .601 | Z= -2,907<br>p= .004 | Z= -,493<br>p= .000 | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 4** | Z= - 2,303<br>p= .021 | Z= -2,865<br>p= .004 | Z= -2,158<br>p= .031 | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 5** | Z= -3,654<br>p= .000 | Z= -3,976<br>p= .000 | Z= -3,986<br>p= .000 | _ |
| **Tipo 3 X Tipo 6** | Z= -2,638<br>p= .008 | Z= -2,705<br>p= .007 | Z= -2,601<br>p= .009 | _ |
| **Tipo 4 X Tipo 5** | Z= -2,994<br>p= .003 | Z= -2,961<br>p= .003 | Z= -3,355<br>p= .001 | _ |
| **Tipo 4 X Tipo 6** | Z= -,686<br>p= .493 | Z= -,522<br>p= .601 | Z= -1,179<br>p= .238 | _ |
| **Tipo 5 X Tipo 6** | Z= -2,714<br>p= .007 | Z= -3,130<br>p= .002 | Z= -3,191<br>p= .001 | _ |

Nota 1: Tipo 1- operação inadequada; Tipo 2- combinação por pares fixos; Tipo 3- formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 4- formação de algumas combinações com sistematização na formação dos pares; Tipo 5- esgotamento de todas as combinações possíveis sem identificação de sistematização na formação dos pares; Tipo 6- esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares.

No Grupo 1 (Tabela 14) observou-se uma maior concentração nas estratégias do Tipo 2 e, principalmente, Tipo 3, revelando que crianças jovens já apresentam os primeiros indícios de raciocínio combinatório. A Tabela 16 detectou diferenças significativas apenas para o problema 1. Sendo assim, parece não haver efeito dos pares numéricos sobre o uso de estratégias de resolução mais adequadas.

O Grupo 2 e o Grupo 3 também apresentaram maior concentração nas estratégias do Tipo 3 (ver Tabela 14). Outro dado relevante refere-se ao aumento expressivo do uso da estratégia Tipo 6, sobretudo, nos Problemas 2 e 3, cuja combinação dos pares numéricos geravam grupos de tamanho menor (dois itens). Assim, há uma relação do uso de estratégias mais elaboradas em função das grandezas dos pares numéricos.

Sendo assim, parece que os fatores ano escolar e grandeza dos pares numéricos, de maneira simultânea, influenciaram os tipos de estratégias adotados. No que diz respeito à escolaridade, a multiplicação parece ter sido um fator relevante na utilização de estratégias mais sofisticadas, uma vez que os alunos do 4º e 5º anos, que já haviam recebido a instrução formal desse conteúdo, adotaram estratégias mais elaboradas. No que se refere à grandeza dos pares numéricos, o pequeno tamanho dos grupos gerados pela combinação dos pares numéricos parece ter sido uma variável importante, já que foram os Problemas 2 e 3 que concentraram as estratégias mais sofisticadas.

# Capítulo V

# Conclusão

Ao revisitar a literatura relacionada à resolução de problemas de estrutura multiplicativa, observa-se que são poucas as pesquisas voltadas para o campo do raciocínio combinatório, em particular as que abordam os problemas de combinação nas séries iniciais do Ensino Fundamental. Os estudos realizados nessa direção advogam que este tema é considerado bastante difícil quando comparados aos demais conteúdos que compõem o campo das estruturas multiplicativas, sobretudo para as crianças.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que os problemas de raciocínio combinatório são mais difíceis de serem compreendidos pelas crianças pelo fato do problema envolver dois conjuntos básicos mais um terceiro, que é identificado pela combinação de cada elemento que formam o conjunto básico. Ademais, a correspondência um-para-muitos não se apresenta de forma explícita no enunciado do problema, tendo o sujeito que inferir que para cada elemento do conjunto básico, existem várias transformações referentes à quantidade do outro conjunto básico.

Acrescenta-se a essas, outras dificuldades como as assinaladas por Eizenberg e Zaslavsky (2002), os quais afirmam que os problemas de raciocínio combinatório se diferem de outros problemas multiplicativos pelo fato de não apresentarem estratégias evidentes de solução. Além disso, torna-se difícil verificar se as respostas obtidas na resolução de problemas de combinatória estão corretas já que maneiras distintas de resolver um mesmo problema resultam em diferentes respostas visivelmente convincentes, e detectar um erro não leva necessariamente a uma solução correta. Daí, a importância de mais estudos nessa área para que seja possível investigar a compreensão das crianças jovens acerca do raciocínio combinatório a fim de que elas se tornem cada vez mais aptas a resolverem com sucesso estes tipos de problema.

De modo geral, os estudos conduzidos com crianças têm investigado o nível de dificuldade apresentado pelos problemas e as estratégias de resolução adotadas, fornecendo resultados interessantes a respeito da compreensão gradual das relações que caracterizam a estrutura dos problemas multiplicativos. Entretanto, também é possível identificar questões mais específicas, as quais têm sido alvo de interesse dos pesquisadores da área. Algumas pesquisas analisam as estratégias de resolução empregadas por crianças em função de diversos aspectos, tais como: idade, escolaridade, desempenho em matemática e conhecimento formal sobre combinatória (e.g. Pessoa, Silva & Matos, 2005; Pessoa & Matos, 2006; Moro & Soares, 2006; Soares & Moro, 2006; Pessoa & Borba 2007; 2008; Taxa Amaro, 2006; Pedrosa, 2008); outros estudam a compreensão das crianças sobre os princípios invariantes que fundamentam o produto cartesiano (e.g. Mekhmandarov, 2000; Silva & Spinillo 2010); outros comparam o desempenho de crianças em diversos problemas de estrutura multiplicativa, dentre eles produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação (e.g. Bryant *et al*., 1992; Pessoa & Borba 2007; 2008; Selva *et al*., 2008). Há estudos cujos interesses estão voltados para aspectos como o papel dos suportes de representação (Bryant, Morgado & Nunes, 1992; Batista, 2002) e aqueles que utilizam o material concreto como um recurso facilitador para a resolução dos problemas (English 1991, 1992) ou que investigam se as estratégias e procedimentos utilizados em problemas de produto cartesiano simples poderiam ser generalizados para problemas de produto cartesiano mais complexos (English, 1993).

Sendo assim, observa-se uma carência de pesquisas que examinem as relações que marcam a natureza dos problemas de raciocínio combinatório, em particular, combinação, assim como, dos esquemas organizadores da cognição que estão subjacentes à elaboração dessas relações, tais como os princípios invariantes do conceito em questão. Os trabalhos de English (1991, 1992), Mekhmandarov (2000) e, mais recentemente, o de Silva e Spinillo (2010) são os que parecem ter explorado de maneira mais profunda as relações implícitas que estão envolvidas nos problemas de raciocínio combinatório.

Baseando-se na teoria de Vergnaud (1998, 2009) a respeito da formação de conceitos matemáticos, é possível pensar sobre os princípios invariantes que compõem os problemas de raciocínio combinatório. Contudo, as pesquisas têm se voltado mais para os estudos das situações e das representações dos conceitos do que para seus invariantes. Supondo, como afirmam Nunes e Bryant (1997), que a maior dificuldade dos problemas de raciocínio combinatório é desvendar a correspondência um-para-muitos, que é um dos princípios invariantes dos problemas que compõem o raciocínio combinatório, então as pesquisas que visam facilitar a resolução desses tipos de problema poderiam focalizar os invariantes mais do que as situações e os suportes de representação. A pesquisa conduzida por Silva e Spinillo (2010) foi nessa direção e investigou o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre os problemas de produto cartesiano em crianças. Os resultados evidenciaram que a explicitação destes princípios provocou um efeito facilitador sobre a resolução desses problemas, promovendo o uso de estratégias mais adequadas. Diante disso, surgiu o questionamento se este efeito facilitador poderia também ser observado nos problemas de combinação, quando os participantes fossem submetidos a situações de pesquisa semelhantes.

Face às considerações aludidas, o presente estudo teve por objetivo examinar o papel desempenhado pela explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação. Este estudo foi dividido em duas etapas. A Etapa 1 teve como objetivo examinar o desempenho de crianças na resolução de problemas de produto cartesiano e de combinação em duas situações distintas: uma em que os princípios invariantes do conceito não estavam explicitados no enunciado dos problemas e outra em que os princípios estavam explicitados. Importante ressaltar que os dados relativos aos problemas de produto cartesiano foram obtidos do estudo de Silva e Spinillo (2010), enquanto que as informações referentes aos problemas de combinação foram produzidas a partir da presente pesquisa. A Etapa 2, por sua vez, coletou novos dados a fim de investigar o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre a resolução de problemas de combinação por crianças em três situações distintas, a saber: Situação I, problemas em que os princípios invariantes estavam implícitos; Situação II, em que houve a explicitação dos princípios invariantes no enunciado dos problemas; e Situação III, na qual os princípios invariantes também estavam explícitos nos enunciados dos problemas, porém acompanhados de desenhos de figuras recortadas.

Os dados da Etapa 1 foram analisados em função do desempenho (número de acertos), sendo traçadas análises comparativas a fim de examinar se o papel da explicitação dos princípios é o mesmo tanto nos problemas de produto cartesiano quanto nos problemas de combinação. Na Etapa 2, os dados foram analisados em função do desempenho e das estratégias de resolução adotadas. Foram realizadas análises referentes às diferentes situações (I, II e III) a fim de examinar se haveria uma situação mais facilitadora do que a outra; à possível influência da idade/escolaridade na resolução de problemas de combinação, bem como a interação entre este aspecto e as situações investigadas.

Este capítulo final discute os principais resultados obtidos nesta investigação, os quais são apresentados em dois blocos, um referente ao desempenho e o outro relacionado às estratégias adotadas na resolução dos problemas. Apresentam-se, ainda, as contribuições e as implicações educacionais desse estudo, bem como as pesquisas futuras que poderão ser desenvolvidas.

## 5.1 Principais resultados e conclusões

### 5.1.1 Considerações acerca do desempenho

#### Etapa 1

Ao comparar o desempenho dos participantes em função da resolução de problemas de produto cartesiano e de combinação, observou-se que as crianças resolveram mais facilmente os problemas de produto cartesiano. Esses dados ratificam, portanto, os resultados de estudos anteriores (e.g. Pessoa & Borba, 2007, 2008, 2009), os quais afirmam que os problemas de combinação são mais difíceis de serem resolvidos do que os de produto cartesiano.

Segundo Pessoa e Borba (2009), diferentemente da combinação, os problemas de produto cartesiano são trabalhados de maneira explícita nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois no momento em que a escola começa a trabalhar formalmente a multiplicação enfatiza, entre os tipos mais comuns de multiplicação, este tipo de problema. Dessa forma, as crianças vão se familiarizando e se apropriando mais cedo dos invariantes do produto cartesiano, das situações em que eles são trabalhados e das diversas formas de representar este conceito ao ponto de resolverem com êxito a maioria desses problemas. Contudo, o mesmo não ocorre com os problemas de combinação, uma vez que estes só são trabalhados em sala de aula de forma explícita no Ensino Médio, fato este que parece contribuir para o baixo índice de acertos no grupo de crianças do 3º ano.

Além desse fator, a pesquisa conduzida por Pessoa e Matos (2006) aponta que alguns livros didáticos já introduzem este trabalho com o produto cartesiano nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Barreto, Amaral e Borba (2007) também observaram que, apesar do produto cartesiano ser o único tipo de problema de raciocínio combinatório abordado explicitamente nos livros didáticos, os outros tipos de problema (combinação, permutação e arranjo) já são apresentados em alguns livros, porém nenhum destaque lhes são concedidos e semelhanças e/ou diferenças entre eles são enfatizadas. Portanto, a forma como estes conteúdos são abordados em sala de aula e nos livros didáticos parece refletir nas pesquisas da área.

Acrescenta-se, ainda, a essas dificuldades, o fato dos problemas de combinação apresentar um invariante que possivelmente dificulta a formação das combinações, pois a mudança na ordem dos elementos não gera novas possibilidades e os alunos, na maioria das vezes, não se dão conta dessa propriedade e acabam repetindo possibilidades, extrapolando, assim, o número total de combinações. Portanto, a soma desses fatores contribui para a dificuldade observada na resolução de problemas de combinação quando comparados aos de produto cartesiano.

Contudo, apesar da escola e dos livros didáticos não trabalharem de forma explícita e sistematizada a combinação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, além das dificuldades inerentes aos problemas de combinação, foi possível observar, ainda que de forma pouco expressiva, que alguns alunos foram bem sucedidos em suas resoluções. O bom desempenho nestes casos pode ser consequência de experiências escolares, mesmo não explícitas ou com outros conteúdos que auxiliam no desenvolvimento de um modo de pensar sistematizado, ou ainda, pode indicar um possível desenvolvimento extra-escolar do raciocínio. Esses sinais de desenvolvimento de raciocínio combinatório fora do ambiente escolar foram também evidenciados por Carraher, Carraher e Schliemann (1988), cujos estudos demonstraram ser possível adquirir fluência em procedimentos informais de resolução de situações-problemas mesmo sem ter o domínio de métodos escolares, porém essa evidência se deu com participantes adultos que exerciam profissões que lidava com permutações, em particular.

A partir da análise desses dados, foi possível inferir também, embora alguns pesquisadores admitam exatamente o contrário, que os tipos de problemas abordados são diferentes em sua essência, já que são formados por invariantes distintos. Os princípios invariantes que constituem o conceito de problemas de produto cartesiano são: (i) trabalha-se com a combinação entre elementos de dois ou mais conjuntos diferentes de maneira que produzam um outro conjunto que contemple todas as combinações possíveis; (ii) não há repetição de elementos; (iii) e a ordem dos elementos dos conjuntos não é importante (Vergnaud, 1983, 2009). Já os problemas de combinação são compostos pelos seguintes invariantes operatórios: (i) trabalha-se com a combinação de um subgrupo do grupo; (ii) não há repetição de elementos; e (iii) a ordem dos elementos no subconjunto não é importante, basta que a combinação ocorra apenas uma vez (e.g. Morgado *et al.*, 2006; Santos, Mello & Murari, 1998). Por se tratarem, portanto, de invariantes distintos é que o sucesso nos problemas de produto cartesiano não garante o êxito nos de combinação. Sendo assim, ao que parece, apesar de ambos pertencerem à mesma estrutura multiplicativa e corresponderem a problemas de raciocínio combinatório, há uma hierarquia no que se refere aos esquemas necessários para a compreensão adequada destes conceitos, refletindo, assim, no nível de dificuldade diferenciado.

No que se referem às situações propostas nesta etapa, os dados mostraram uma melhor resolução por parte das crianças nos problemas de produto cartesiano, em que as relações um-para-muitos estavam apresentadas de forma explícita. Já nos problemas de combinação, não foram observadas diferenças significativas entre as situações haja vista a proximidade dos escores em ambas. Esses dados indicam, portanto, que, de fato, a explicitação da correspondência um-para-muitos auxilia na resolução de problemas de produto cartesiano, sendo um fator importante no desempenho destes problemas, porém o mesmo não pode ser dito para os problemas de combinação. Acredita-se que isso se deve ao fato dos problemas de combinação serem tidos como difíceis para as crianças do 3º ano a tal ponto que mesmo explicitando os invariantes da combinação, o desempenho deste grupo praticamente não se altera.

As idéias de Vergnaud sobre a formação de conceitos matemáticos podem ajudar a entender melhor o que ocorre com o desempenho das crianças quando os problemas são apresentados com ou sem explicitação dos princípios invariantes. Segundo Vergnaud (1998), um conceito é formado por um conjunto de representações simbólicas, um conjunto de invariantes operacionais e um conjunto de situações que dá sentido aos conceitos. Com base nas idéias deste teórico, os invariantes dos conceitos em questão – produto cartesiano e combinação – foram explicitados para que os participantes pudessem compreender e estabelecer as relações que, até então, não eram por eles considerados.

É importante ressaltar que a capacidade da criança em compreender os aspectos relativos à combinatória também foi investigada por Mekhmandarov (2000) por meio de tarefas de manipulação. A partir destas tarefas, foi possível observar que grande parte dos sujeitos mostrou compreender ou ter compreendido (durante a atividade) os princípios que embasam o produto cartesiano.

Nessa etapa, houve duas formas de explicitar as propriedades desses problemas de raciocínio combinatório: uma em que os princípios invariantes não foram explicitados no enunciado do problema e outra em que foram explicitados. Quando se comparou o desempenho das crianças que realizaram problemas de combinação com aquelas que resolveram problemas de produto cartesiano nas duas situações, verificaram-se diferenças entre as situações apenas para os problemas de produto cartesiano. Isto quer dizer que apenas estes problemas são favorecidos pela explicitação dos invariantes, pelo menos no que diz respeito aos estudantes do 3º ano.

Sendo assim, esses dados revelam que a grande maioria das crianças do 3º ano ainda não possui os esquemas cognitivos que fundamentam as competências matemáticas necessárias para a resolução de problemas de combinação. Dessa forma, esses conceitos e conhecimentos necessários parecem estar implícitos para a maioria desses sujeitos, não sendo, portanto, capazes de formar teoremas-em-ação a respeito deste conteúdo abordado, o que implica na origem dos erros sistemáticos. Contudo, o mesmo não pode ser dito para aqueles estudantes que solucionaram os problemas de produto cartesiano; pois, diante do alto índice de acerto, é possível constatar que os mesmos já possuem os esquemas necessários para a resolução desse tipo de problema, sendo possível lançar mão dos conhecimentos necessários e, assim, obter um melhor desempenho nos problemas de produto cartesiano.

### *Etapa 2*

Nesta etapa, foi analisado o desempenho de alunos do 3º ao 5º ano em três situações distintas a fim de verificar qual seria a mais facilitadora, a saber: Situação I, problemas sem explicitação dos princípios invariantes; Situação II, na qual os princípios invariantes foram explicitados no enunciado dos problemas; e Situação III, onde os princípios invariantes também estavam explícitos nos enunciados dos problemas, porém acompanhados de desenhos de figuras recortadas.

Quando comparados o desempenho dos alunos em função do ano escolar e da situação apresentada, constatou-se um maior índice de acertos dos participantes do 4º e 5º anos em detrimento dos estudantes do 3º ano em todas as situações. Este resultado corrobora os achados de pesquisas anteriores (e.g. Pessoa & Borba, 2007, 2008, 2009) que afirmam que os alunos das séries mais avançadas apresentam um melhor desempenho do que aqueles das séries iniciais. Esse progresso gradual pode ser creditado ao ensino nas escolas, uma vez que, a partir do 3º ano, problemas de estrutura multiplicativa começam a ser trabalhados e, ainda que o raciocínio combinatório não seja abordado de forma explícita, conteúdos que antecedem e facilitam a compreensão da combinação passam a ser estudados por estes alunos. Assim, com a gradação do ano escolar e a maturidade, novos conteúdos a respeito do campo das estruturas multiplicativas são adquiridos, aprofundando o acervo cognitivo da criança e possibilitando pontes com outros conceitos já trabalhados, podendo o sujeito ampliar a sua rede conceptual, obtendo, assim, bons desempenhos em situações como estas.

Nesse sentido, é possível tomar por base a teoria proposta por Vergnaud (1988) para explicar esse processo. A teoria dos campos conceituais é uma teoria pragmática, que defende que o conhecimento está organizado em campos conceituais cujo domínio, pelo sujeito, ocorre por meio de experiência, de maturidade e aprendizagem durante um longo período de tempo. E foi possível observar a influência desses fatores no que diz respeito à gradação do desempenho das crianças no que se refere à resolução de problemas de combinação, pois à medida que se aumentava a escolaridade/idade, fora possível constatar uma melhora na performance dos participantes.

Ademais, podemos destacar o fato de esta teoria defender que um conceito está ligado a outro, sendo possível traçar uma ponte entre os saberes e buscar a compreensão de um conceito cujo esquema ainda não fora totalmente desenvolvido. Portanto, o sucesso em problemas de combinação pode ter sido alcançado, entre outros motivos, pela capacidade que o indivíduo possui de buscar, por outras vias, a compreensão de um determinado conceito por ainda não possuir os esquemas-de-ação necessários.

Outra possibilidade a ser considerada é a de que conhecimentos escolares diversos – não propriamente associados à combinatória – podem também auxiliar no desenvolvimento desse tipo de raciocínio, como sugerido por Carraher, Carraher e Schliemann (1988). Nesse sentido, é de extrema importância que as escolas tenham consciência de que conhecimentos aprendidos fora desse contexto de educação formal somam-se às experiências do aluno e formam uma teia de saberes, interferindo positivamente no processo de aprendizagem. Estes autores defendem que o conhecimento ocorre dentro e fora da escola e esta deve levar em consideração os diferentes conhecimentos dos estudantes para que possa ser desenvolvido um trabalho de formalização de saberes adequado. Por outro lado, não se pode negar a importância da escola no desenvolvimento do raciocínio combinatório, uma vez que ela é a responsável pela formalização e sistematização dos saberes que ocorrem dentro e fora dela e, nesse sentido, existem conhecimentos que só serão organizados, desenvolvidos e aprofundados por ela (Pessoa & Borba, 2010).

No que concerne ao efeito das situações propostas em cada ano escolar, verificou-se que as crianças do 3º ano apresentaram um baixo percentual de acertos em todas as situações, não sendo, portanto, nenhuma delas mais facilitadora que a outra. Apesar dos estudantes do 5º ano terem progredido de forma significativa quando comparados aos do 3º ano, não foram encontradas diferenças significativas entre as situações, o que denota uma equivalência de desempenho entre elas. Assim, a explicitação ou não dos princípios invariantes da combinação não provocou diferenças no desempenho destes alunos.

Ao observar o desempenho das crianças do 4 º ano nas três situações, constatou-se diferenças significativas apenas entre a Situação II (com explicitação dos princípios invariantes) e a Situação III (problema com explicitação dos princípios invariantes e acompanhado de desenhos de figuras recortadas), com esta última apresentando um maior índice de acertos. Portanto, esses resultados nos revelam que apenas as crianças do 4º ano são sensíveis às situações, apresentando um melhor desempenho quando expostas a problemas em que há explicitação dos invariantes da combinação em seus enunciados juntamente com os desenhos de figuras recortadas.

Em face aos dados obtidos, podemos inferir quão complexos são os problemas de combinação para as crianças, haja vista o baixo percentual de acertos observados nesse estudo. Porém, apesar do desempenho discreto destes participantes, esses dados vão de encontro àqueles observado por Piaget, uma vez que crianças pequenas, com idade entre 8 a 10 anos, já são capazes de expressar um raciocínio combinatório, seguindo um método sistemático de combinação que contempla todos os pares possíveis. Verifica-se, portanto, que diferentemente do que pensava Piaget, crianças pequenas podem encontrar um método capaz de realizar as combinações de forma exaustiva, especialmente quando se esclarece o esquema operacional envolvido na resolução desses problemas e quando materiais concretos são disponibilizados. Assim, tanto no presente estudo como nos estudos conduzidos por English (1991, 1992) e Silva e Spinillo (2010) foi possível constatar resultados mais otimistas a respeito do raciocínio combinatório em crianças do que àqueles observados por Piaget.

Uma possível explicação para os resultados desfavoráveis obtidos por Piaget refere-se à complexidade das tarefas de combinação trabalhadas, cuja resolução exigia pensamento sofisticado próprio das operações formais. O autor não tinha o propósito de tornar essas situações de combinação mais fáceis para que as crianças de 7-8 anos pudessem solucioná-las, mas tinham o objetivo de mapear ou descrever as diferentes maneiras de raciocinar dos indivíduos em diferentes momentos de seu desenvolvimento. Por isso, geralmente, suas tarefas eram mais complexas, as quais poderiam ser satisfatoriamente resolvidas nas operações formais. Assim, nota-se uma diferença de ordem metodológica entre os estudos de Piaget, o presente estudo e os de English e Silva e Spinillo, que tiveram por objetivo explorar situações que facilitassem o desempenho.

Já no que se referem às tarefas propostas por English e Silva e Spinillo, estas eram mais fáceis quando comparadas àquelas propostas por Piaget. A tarefa de English (1991, 1992) que requeria das crianças vestir bonecos com diferentes trajes, organizando-os em fileira, deixava clara a relação um-para-muitos, embora sem ser proposital, uma vez que a criança visualizava as diferentes correspondências feitas entre shorts e camisetas. Contudo, ao que parece, na tarefa proposta por English, a correspondência um-para-muitos não está tão evidente como nas situações 2 e 3 apresentadas no estudo de Silva e Spinillo (2010), que explicitavam no enunciado do problema tal relação. Comparando essas duas investigações, observa-se que o estudo de Silva e Spinillo, realizada com crianças de 7 e 8 anos, obteve um desempenho mais expressivo que aquele obtido por English, cujos participantes tinham 8 e 9 anos de idade. Esse resultado é bem interessante e, de certo modo, surpreendente porque English trabalhou com material concreto ao passo que Silva e Spinillo utilizaram apenas o lápis e papel ou lápis e papel acompanhado de representação gráfica. Assim, mesmo com idades inferiores e sem utilizar material concreto, as crianças foram muito bem sucedidas quando as correspondências um-para-muitos eram explicitadas. Outro aspecto interessante é que English conseguiu bons resultados numa tarefa facilitadora, enquanto que no estudo de Silva bons resultados foram obtidos tanto na situação facilitadora como na situação clássica. Dessa maneira, tanto ambos os estudos mostraram ser possível melhorar o desempenho das crianças em problemas de combinatória.

Como mencionado, os estudos de English e de Silva e Spinillo abordaram os problemas de produto cartesiano, ao passo que a presente pesquisa buscou investigar os de combinação, os quais são considerados mais difíceis pela literatura da área quando comparados aos demais problemas de raciocínio combinatório (e.g. Pessoa & Borba, 2007, 2008, 2009; Correia & Fernandes, 2007; Silva, Fernandes & Soares, 2004). Enquanto que nos problemas de produto cartesiano se trabalham com uma relação de combinação entre elementos de dois ou mais conjuntos diferentes; na combinação, trabalha-se com um subgrupo do grupo. Dessa forma, os problemas de combinação tornam-se mais difíceis pelo fato de as crianças terem que compreender a relação envolvida entre os conjuntos e subconjuntos (e não apenas conjuntos como tratam os problemas de produto cartesiano). Ademais, diferentemente do que ocorre com o produto cartesiano, não é possível resolver problemas de combinação através da multiplicação, mas sim por meio de sua fórmula matemática, a qual é bastante complexa para crianças jovens, ou por meio da árvore de possibilidades, (meio também utilizado para representar os problemas de produto cartesiano), a partir da qual é possível enumerar as possíveis opções de combinação entre os conjuntos. Contudo, dependendo do número total de combinações a ser formado, este método torna-se praticamente inviável. E, como no presente estudo, os participantes investigados eram muito jovens, a única forma acessível para representar os problemas de combinação, devido ao seu nível de desenvolvimento cognitivo, era a árvore de possibilidades, cuja utilização pode ter sido prejudicada pelos valores dos pares numéricos trabalhados em cada questão.

Sendo assim, os dados sugerem uma maior influência da idade/escolaridade do que as situações propostas sobre o desempenho das crianças na resolução de problemas de combinação, pelos menos nas idades investigadas. Dessa forma, a experiência, maturidade e aprendizagem obtidas com o passar dos anos e com a gradação escolar são fatores que produzem maiores efeitos no desempenho dessas crianças.

No que diz respeito às grandezas numéricas presentes no enunciado dos problemas de combinação, foi observado que os problemas 2 e 3 foram os que apresentaram o maior índice de acertos em todos os anos escolares analisados. Em contrapartida, os estudantes demonstraram maior dificuldade com relação ao problema 4, haja vista o seu baixo escore de acertos. Esse resultado pode ser explicado pelo fato de os problemas 2 e 3, apesar de exigirem a formação de 10 e 15 combinações, respectivamente, trabalharem com tamanhos de grupos pequenos, uma vez que as crianças deveriam formar grupos de dois itens. Já os problemas 1 e 4, que exigem um total de 10 e 15 combinações, respectivamente, comportam a formação de grupos maiores com três e quatro itens, sequencialmente. Sendo assim, o tamanho dos grupos a serem formados, associado ao número total de combinações, são alguns dos principais fatores que contribuem para o insucesso de crianças jovens na resolução deste tipo problema.

Pois como a grande maioria dos participantes que resolveu os problemas de maneira adequada, utilizou o procedimento de árvore de possibilidades, quanto maior fosse o grupo a ser formado ou o total de grupos a ser realizado, maior seria o grau de dificuldade da determinada tarefa, já que exigiria uma maior atenção do participante para se alcançar o esgotamento de todas as combinações possíveis.

Dessa forma, percebe-se que esses resultados se assemelham aos de outros estudos (Correia & Fernandes, 2007; Pessoa & Borba, 2007, 2008, 2009; Silva, Fernandes & Soares, 2004) já que os acertos aconteceram, em sua maioria, com os problemas cuja grandeza numérica era pequena porque os alunos desse nível de ensino ainda não dominam as fórmulas, utilizando-se, portanto, de estratégias longas e detalhadas, as quais são as que melhor se ajustam às suas possibilidades de resolver e compreender os problemas de combinação.

Em suma, os resultados dessa pesquisa apontam que, apesar do baixo índice de acertos, é possível que crianças jovens resolvam com sucesso problemas de combinação, especialmente, quando nos enunciados destes são explicitados os seus invariantes operatórios acompanhados de desenhos de figuras recortadas e trabalham com grandezas numéricas pequenas. Portanto, é possível trabalhar com os alunos nas séries iniciais do Ensino Fundamental esse conceito de combinação a fim de que eles possam desenvolver, desde cedo, seu raciocínio combinatório e, de forma geral, suas habilidades lógico-matemáticas.

### 5.1.2 Considerações acerca das estratégias de resolução

Em relação ao processo de resolução de problemas de combinação, foi possível identificar o uso de seis estratégias distintas, que vão desde estratégias mais elementares até as mais elaboradas. As estratégias foram categorizadas com base nas explicações ou justificativas fornecidas pelos participantes de como resolveu o problema, além do que era exposto nos seus protocolos.

Estudos advogam que explicitar o raciocínio na resolução de problemas pode ser considerado um desenvolvimento de uma aquisição mais elaborada referente a um determinado conhecimento (Lautert & Spinillo, 1999; Spinillo & Simões, 2003). Segundo Spinillo e Simões (2003), a explicitação do raciocínio indica uma capacidade mais sofisticada do próprio conhecimento, uma vez que tornam explícitos elementos, até então, implícitos nas representações dos procedimentos. Esta posição teórica relaciona-se à Teoria de Vergnaud (2009), que trata dos teoremas em ação e dos teoremas propriamente ditos.

Teoremas em ação correspondem às competências e habilidades que o sujeito mobiliza em algumas situações e que, mesmo compreendendo a sua aplicação, não consegue explicitar necessariamente os conceitos envolvidos. Dessa forma, com as respostas e justificativas fornecidas ao final de cada resolução, os participantes buscaram explicitar os conceitos, as idéias envolvidas por trás das habilidades ali executadas. Portanto, as justificativas e respostas mais elaboradas correspondem a uma mudança de ordem qualitativa, uma vez que um conhecimento intuitivo passa a ser explicitado.

Este processo de explicitação também remete ao conceito de metacognição, que é entendida como um tipo de retorno cognitivo acerca dos processos de raciocínio adotados durante uma resolução de problemas (Spinillo, 1995). Sendo assim, a metacognição é extremamente importante, pois possibilita que o aluno esteja atento a sua forma de raciocínio durante todo o processo de resolução.

Nesse sentido, a explicitação dos conhecimentos permite que o examinador questione a criança sobre aquilo que lhe fora dito, podendo, assim, promover atividades metacognitivas ao fazer com que o participante reflita sobre os conceitos que estão sendo trabalhados ou sobre a atividade que está sendo executada. Desse modo, tal processo favorece que o participante repense sobre o procedimento adotado a fim de buscar estratégias de resolução mais adequadas.

Os dados relativos ao presente estudo indicam a presença de justificativas e estratégias mais elaboradas do que outras e, por isso, as estratégias adotadas na resolução dos problemas foram hierarquizadas de acordo com o uso e a possibilidade de conduzir ao erro ou acerto, bem como através do nível de desenvolvimento cognitivo envolvido.

As estratégias de resolução identificadas no presente estudo foram divididas em três grupos: o primeiro, composto por procedimentos menos elaborados que não conduziam à resposta correta do problema; o segundo formado por estratégias que indicavam os primeiros indícios do raciocínio combinatório, porém não levavam as crianças às respostas corretas; e o terceiro era composto por estratégias que apresentavam soluções combinatórias e que conduziam o participante às respostas apropriadas.

As estratégias do primeiro bloco – estratégias de resolução não combinatória – se caracterizam por revelar limites, maiores ou menores, de compreensão ou interpretação pelas crianças acerca do que é informado e solicitado no enunciado do problema. Este grupo é constituído pelas estratégias de operações inadequadas e combinação por pares fixos. A primeira se caracteriza por uma operação aritmética inadequada, em geral multiplicação, com os valores presentes no enunciado do problema. Observa-se, muitas vezes, que a criança realiza a operação automaticamente, perdendo de vista que o objetivo do problema é encontrar o número de combinações, o que denota uma não compreensão da natureza do problema. Assim, a utilização de operações aritméticas não conduz necessariamente ao acerto, pois é fundamental que, primeiramente, seja compreendido os invariantes que fundamentam determinado conceito a fim de que se possa escolher a estratégia mais adequada para a sua resolução.

A combinação por pares fixos é considerada como mais sofisticada, visto que a criança compreende e constrói algumas combinações, porém a criança pensa em termos de pares fixos por entender que um item pode ser combinado com o outro uma única vez.

O segundo bloco – primeiros indícios de resoluções combinatórias – se caracteriza pelo fato de nenhuma criança apresentar total ausência de referência ao texto do problema, pelo contrário, ela compreende um pouco mais sobre a natureza do problema e, gradualmente, começa a realizar a correspondência um-para-muitos. Outra característica importante dessa categoria é que ela abrange dois tipos distintos de soluções, as quais se diferenciam pelo uso ou não de um padrão sistemático identificável na formação das combinações.

Por sua vez, as estratégias que constituem o bloco de estratégias de resolução combinatórias se caracterizam por conduzir ao acerto do problema, o que denota uma compreensão total da criança acerca da lógica dos problemas que envolvem raciocínio combinatório. Os participantes já conseguem encontrar todos os pares possíveis, aceitando que um mesmo item pode ser combinado com todos do conjunto elementar. As soluções desse nível concentram-se em dois tipos, os quais se diferenciam pela a utilização ou não de um padrão sistemático identificável na formação das combinações, mas em ambos os caso há o esgotamento das combinações.

O desenvolvimento do raciocínio combinatório observado nesse estudo se assemelha à progressão apresentada por Moro e Soares (2006), Soares e Moro (2006) e Silva e Spinillo (2010).

No que diz respeito às semelhanças desse estudo com as pesquisas conduzidas por Moro e Soares (2006) e Soares e Moro (2006), observou-se uma progressão do raciocínio combinatório semelhante referente aos procedimentos de resolução. Este desenvolvimento vai desde ao uso de estratégias que não demonstram nenhuma presença do raciocínio combinatório, passando por estratégias transitórias, com formação de algumas combinações e entendimento de alguns invariantes, até as soluções que expressam a presença do raciocínio combinatório, com a compreensão de todos os seus invariantes e, por conseguinte, o esgotamento de todas as combinações. Pelo fato dos estudos de Moro e Soares terem investigado os problemas de produto cartesiano, algumas diferenças com relação aos tipos de estratégias foram encontradas, pois os invariantes que compõem o conceito de produto cartesiano não são exatamente os mesmos que constituem o conceito de combinação, como já mencionado nas conclusões referentes à Etapa 1 dessa pesquisa. Portanto, embora ambas as pesquisas investiguem problemas de raciocínio combinatório, há uma hierarquia diferenciada no que se refere aos esquemas necessários para a compreensão adequada dos conceitos de combinação e produto cartesiano, refletindo, assim, em alguns tipos de estratégias de resolução distintos.

Quanto às semelhanças com o estudo de Silva e Spinillo (2010), observa-se a maior concentração na estratégia “formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares”, a qual corresponde ao início da compreensão da correspondência um-para-muitos. As crianças que utilizaram esta estratégia se caracterizam por deixarem de pensar em termos de pares fixos e começarem a utilizar um mesmo elemento na formação de pares diversos. Contudo, ainda não atingem a totalidade de combinações possíveis, pois, ao que parece, falta a sistematização na formação dos pares. Ademais, verificou-se também nos dois estudos que as estratégias de solução combinatória estavam mais concentradas na situação em que havia a explicitação dos princípios invariantes. Sendo assim, a explicitação dos invariantes do conceito trabalhado possibilita a utilização de estratégias mais elaboradas.

Estes mesmos resultados também foram observados nos outros grupos de alunos analisados na presente pesquisa, os quais eram estudantes do 4º e 5º anos. Foi observado que estes alunos também adotaram mais a estratégia de “formação de algumas combinações sem identificação de sistematização na formação dos pares”; bem como se observou que a estratégia de solução combinatória (esgotamento de todas as combinações possíveis com sistematização na formação dos pares) estava mais presente nas situações em que havia a explicitação dos invariantes da combinação. Apenas para o grupo do 3º ano foi observado uma maior concentração dessa estratégia na situação III (com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas). Dessa forma, parece que para as crianças mais jovens, a presença dessas figuras, juntamente com a explicitação dos invariantes, auxilia na resolução dos problemas uma vez que permite tornar mais evidente as relações envolvidas na combinação. Ademais, estes desenhos parecem servir como uma ferramenta cognitiva uma vez que fornecem um suporte à memória, permitindo que a criança tenha mais consciência a respeito dos grupos já combinados.

Assim como foi evidenciado em algumas pesquisas da área (Silva, Fernandes & Soares, 2004; Correia & Fernandes, 2007; Pessoa & Borba, 2007, 2008, 2009), a grandeza dos pares numéricos é fator que influencia o tipo de estratégia a ser utilizado. De maneira análoga, a presente pesquisa concluiu que pares numéricos menores, sobretudo quando produzem grupos de tamanhos pequenos, possibilitam o emprego de estratégias mais elaboradas, em especial para os alunos do 4º e 5º anos. Isto se deve pelo fato de as estratégias que os alunos utilizam nesse nível de ensino ainda serem bem longas e detalhadas já que ainda não dominam a fórmula, utilizando-se, portanto, de resoluções que se enquadram melhor dentro do seu nível cognitivo.

De forma geral, percebe-se que alunos dos anos escolares iniciais já são capazes de desenvolver estratégias de resolução interessantes e apropriadas à combinação. Portanto, apesar das pesquisas da área apontarem os problemas de combinação como um dos mais difíceis de serem resolvidos, dentre os problemas de combinatória, é possível identificar o raciocínio combinatório em crianças jovens. Assim, é de extrema importância que a escola esteja atenta a isso e elabore atividades através das quais seja possível trabalhar este conteúdo ainda nas séries iniciais do ensino fundamental para que os alunos possam avançar na compreensão desses problemas e desenvolver o raciocínio combinatório a fim de que as dificuldades típicas referentes aos problemas de combinação, quando estudadas nas séries mais adiantadas, sejam minimizadas. Ademais, o raciocínio combinatório é um tipo de raciocínio lógico-matemático que tem repercussões em diversas áreas, sendo, por isso, tão importante que o seu desenvolvimento ocorra de forma satisfatória.

## 5.2 Implicações Educacionais

Embora alguns livros didáticos já trabalhem os problemas de combinação nos anos iniciais do Ensino Fundamental, nenhum destaque é feito a este conteúdo. No que diz respeito ao ensino da combinatória no 2º ciclo do Ensino Fundamental, este ocorre, na maioria das vezes, de maneira mecanicista, através de reproduções de fórmulas, e desconectado da realidade da criança, tornando-o um assunto desinteressante.

Diante disso, pesquisas têm investigado o raciocínio combinatório e resultados importantes têm surgido, os quais podem e devem ser discutidos a fim de se construir um canal direto entre os achados das pesquisas e a escola com o objetivo de melhorar cada vez mais o processo de ensino-aprendizagem. E nesse processo, o professor é peça fundamental, uma vez que é ele que organiza a aprendizagem, promovendo situações didáticas diversas, debates, representações, atividades metacognitivas, assegurando e facilitando as conexões necessárias para a evolução do conhecimento. Nesse sentido, é de extrema importância que a distância entre a escola e os estudos científicos seja minimizada. E acredita-se que o presente estudo possa contribuir com isso, uma vez que traz implicações educacionais interessantes.

Em síntese, observou-se que os problemas de produto cartesiano são mais facilmente resolvidos do que os de combinação por crianças do 3º ano do ensino fundamental, o que ratifica a distinção existente entre esses tipos de problemas e a maior complexidade envolvida na combinação. Contudo, a partir do 4º ano, foi possível perceber uma melhora significativa no desempenho dos estudantes ao resolverem os problemas de combinação nas situações em que eram explicitados os princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas. Tal desempenho é observado também nas crianças do 5º ano, porém a presença de desenhos de figuras recortadas não denota tanta influência.

Diante desses resultados, infere-se a importância de se trabalhar os problemas de combinação desde os anos iniciais do ensino fundamental, preferencialmente, a partir do 4º ano. Para isso, os princípios invariantes que constituem o conceito da combinação devem ser abordados a fim de que a criança possa compreender o que é, de fato, um problema de combinação e, assim, realizar os procedimentos necessários para obter o sucesso. Ademais, considera-se relevante trabalhar inicialmente esses tipos de problemas acompanhados de desenhos de figuras recortadas, pois estes referentes tornam mais evidentes as relações existentes envolvidas na combinação. Além disso, esses materiais funcionam como um apoio à memória, permitindo uma maior lucidez a respeito dos grupos já formados. E, talvez, esse suporte cognitivo seja potencializado quando os problemas requisitarem a formação de grupos de tamanhos grandes.

A grandeza dos pares numéricos é outro aspecto que merece atenção quando a combinação for trabalhada em sala de aula com crianças jovens. Observou-se nesse estudo que pares numéricos menores, sobretudo quando produzem grupos de tamanhos pequenos, possibilitam a utilização de estratégias mais sofisticadas. Como os alunos desse nível de ensino não dominam a fórmula matemática da combinação, eles utilizam estratégias bem longas e detalhadas (como a árvore de possibilidades), as quais podem ser prejudicadas pelo tamanho dos pares numéricos, uma vez que vai exigir do aluno uma maior atenção para se atingir o esgotamento de todas as combinações possíveis. Assim, como o objetivo de trabalhar a combinação nos anos iniciais é possibilitar que o estudante comece a entrar em contato com o conhecimento formal, favorecendo uma mudança (de ordem qualitativa) de um conhecimento implícito para um explícito, trabalhar com pares numéricos pequenos é fundamental. Isto porque não tornará a atividade cansativa e minimizará uma complexidade que, no momento, não é importante ser avaliada, uma vez que o foco principal é a compreensão ou não do conceito da combinação e não a quantidade de pares a ser formados ou o uso de operações.

De forma geral, é importante que o professor busque promover reflexões sobre a resolução dos problemas e sobre as respostas fornecidas pelos alunos, isto é, estimule atividades metacognitivas a fim de que as crianças sejam incitadas a pensar sobre os esquemas que guiam as suas ações na tentativa de resolver situações-problemas com as quais se deparam. Portanto, cabe ao professor tentar compreender os teoremas-em-ação acionados pelos estudantes nas diferentes atividades propostas em sala para poder auxiliar os estudantes a transformarem o conhecimento implícito em conhecimento explícito. Nesse sentido, Vergnaud (2003) afirma que o problema do ensino é desenvolver, simultaneamente, a forma operatória do conhecimento (o saber-fazer) e a forma predicativa do conhecimento (saber explicitar os objetos e as propriedades envolvidas). E pelo fato das atividades escolares basearem-se mais na aprendizagem de algoritmos do que nas relações envolvidas nos problemas, que os educadores tendem a valorizar a forma operatória em prejuízo da forma predicativa. Assim, é de extrema importância que as escolas explorem essas concepções e competências operatórias das crianças a fim de que seja possível aprofundar os saberes relacionados ao raciocínio combinatório a partir da verificação de quais teoremas-em-ação os alunos estão utilizando e, assim, auxiliá-los, no desenvolvimento das relações predicativas das situações combinatórias (Vergnaud, 2009).

Dessa maneira, é necessário que o professor aproxime o conteúdo ensinado da realidade do aluno. E isso pode ser feito de diversas maneiras, como utilizar referentes do enunciado do problema (como os desenhos de figuras recortadas), trazer experiências do dia-a-dia, diversificar as situações-problemas, porque além de tornar o problema mais atraente, facilita a compreensão da criança, uma vez que estarão sendo trabalhados os seus componentes fundamentais, segundo Vergnaud (2009): princípios invariantes, situações e formas de representação.

Portanto, essa pesquisa demonstra a importância de se trabalhar a combinação a partir de suas propriedades invariantes para que o aluno, de fato, compreenda as relações envolvidas e não apenas seja um reprodutor de fórmulas algorítmicas, sendo incapaz de transportar seu conhecimento para as demais situações. Para isso, é necessário que a distância entre a pesquisa e a sala de aula seja minimizada a fim de que tais resultados sejam postos em prática e os grandes achados científicos não fiquem limitados ao papel.

## 5.3 Pesquisas futuras

O presente estudo traz contribuições para a compreensão dos problemas de combinação por crianças jovens, apresentando o papel importante da explicitação dos princípios invariantes na resolução desses problemas. Os resultados mostraram que a explicitação dos invariantes promove um melhor desempenho, bem como o emprego de estratégias mais apropriadas.

Alguns aspectos não analisados nesse estudo poderiam fomentar objetivos de pesquisas futuras. Um deles corresponde à investigação do efeito da explicitação dos invariantes nos problemas de combinação, porém com a presença de pares numéricos menores. Parece interessante examinar essa possibilidade pelo fato das crianças utilizarem estratégias de resolução longas e detalhadas como, por exemplo, a árvore de possibilidades, já que ainda não dominam a sua fórmula matemática e, à medida que se trabalha com pares numéricos cujas combinações resultam em muitos grupos ou grupos de tamanho grande, acrescenta-se aí um outro fator que pode ser um obstáculo. Assim, acredita-se que a grandeza dos pares numéricos seria um aspecto a ser pensado de maneira mais cuidadosa a fim de que ela não possa dissimular o desempenho dos participantes. Ressalta-se que, como a Etapa 1 desse estudo teve o objetivo de comparar os desempenhos dos estudantes nos problemas de combinação e nos de produto cartesiano, os pares numéricos utilizados foram aqueles que, quando combinados, fosse semelhantes àqueles trabalhados no estudo de Silva e Spinillo (2010), cujo banco de dados serviu para compor a primeira etapa da presente pesquisa. Dessa forma, os pares numéricos utilizados na Etapa 1 e na Etapa 2 (que comparou o desempenho e as estratégias utilizadas pelos três grupos de participantes, divididos conforme o ano escolar) não puderam ser menores devido a este delineamento metodológico.

Outro aspecto que pode ser investigado em pesquisas futuras refere-se à analise dos erros a fim de investigar os tipos de erros que os alunos apresentam e se existiriam erros mais elementares e mais sofisticados frente ao raciocínio combinatório. Uma análise individual também seria bastante interessante porque permitiria identificar a trajetória cognitiva realizada pelo participante durante a resolução de problemas, podendo, assim, obter dados mais aprofundados acerca do raciocínio combinatório.

O presente estudo investigou o desempenho das crianças do 3º ano do ensino fundamental em problemas de combinação e produto cartesiano (Etapa 1) e o desempenho e as estratégias utilizadas na resolução de problemas de combinação por crianças do 3º ao 5º ano escolar (Etapa 2). Sabe-se que existem outros problemas de raciocínio combinatório, os quais poderiam ser objetos de estudos futuros com a finalidade de investigar se a explicitação dos seus princípios invariantes nos enunciados dos problemas também facilitaria a sua resolução. Ademais, poderiam ser analisadas diversas formas de representação, tais como representações gráficas e materiais concretos, bem como atividades metacognitivas que permitissem ao participante refletir sobre a sua forma de resolução. Sendo assim, as questões não tratadas neste estudo poderiam servir de motivação para pesquisas futuras a fim de que propostas didáticas mais eficientes para o ensino dos problemas de raciocínio combinatório pudessem ser desenvolvidas.

# Referências

Barrat, B. B. (1975). Training and transfer in combinatorial problem solving: the development of formal reasoning during early adolescence. *Developmental Psychology, 11* (6), 700-704.

Barreto, F., Amaral, F. & Borba, R. (2007). Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais. *Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia*, *2*, 1-21.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*, 181–199.

Batista, A. M. S. B. (2002). *A influência dos suportes de representação na resolução de problemas com estruturas multiplicativas*. Dissertação de mestrado não publicada. Programa de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental.

Brown, M. (1981). Number operations. In K. Hart (Org.), *Children's understanding of Mathematics* (Vol.11, pp. 23-47). Windsor: NFER-Nelson.

Bryant, P., Morgado, L. & Nunes, T. (1992). Children's understanding of multiplication. In *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tokyo, Japan.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. & Schliemann, A. D. (1988). *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez.

Correa, J. (2004). A resolução oral de tarefas de divisão por crianças. *Estudos de psicologia*, *9* (1), 145-155.

Correira, P.F. & Fernandes, J.A. (2007) Estratégias intuitivas de alunos do 9.º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória. In A. Barca *et al.*, ed. lit. In *Congreso Internacional*

*Galego-Portugués de Psicopedagoxía : libro de actas*. A Coruña: Universidade, 2007. p. 1256-1267.

Eizenberg, M. M. & Zaslavsky, O. (2002). Undergraduate student's verification strategies of solutions to combinatorial problems. In *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Norwich, UK, 26.

English, L. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 451-474.

English, L. (1992). Children's use of domain-specific knowledge and domain-general strategies in novel problem solving. *British Journal of Educational Psychology*, (62), 203-216.

English, L. D. (1993). Children´s strategies for solving two-and-three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24* (3), 255-273.

Esteves, I. (2001). *Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental*. Dissertação de mestrado, Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.

Fischbein, E. & Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5*, 193-198.

Fischbein, E. & Grossman, A. (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 27-47.

Fischbein, E., Pampu, I. & Mînzat, I. (1970). Effects of age and instruction on combinatory ability in children. In E. Fischbein (1975), *The intuitive sources of probabilistic thinking in children* (Appendix IV, pp. 189-201). Dordrecht: Reidel.

Iezzi, G, Dolce, O., Degenszajn, D., Perigo, R. & Almeida, R. (2004). *Coleção matemática: ciências e aplicações* (Vol. *2*). São Paulo: Atual.

Inhleder, B.& Piaget, J. (1976). Da lógica da criança à lógica do adolescente. São Paulo: Pioneira.

Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (1999). Como crianças representam a operação de divisão: da linguagem matemática oral para outras formas de representação. *Temas em Psicologia da Sociedade Brasileira de Psicologia*, *7*, 23-36.

Mekhmandarov, I. (2000). Analysis and Synthesis of the Cartesian product by kindergarten children. In *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Hiroshima, Japan 24.

Merayo, F. (2001). *Matemática Discreta***.** Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A.

Morgado, A. C. O., Carvalho, J. P. de, Carvalho, P. C. P. & Fernandez, P. j. (2006). *Análise combinatória e probabilidade: com as soluções dos exercícios.* (9a ed.). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Moro, M. L. F. & Soares, M. T. C. (2006). Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, *8* (1), 99-124.

Navarro-Pelayo, V., Batanero, C., & Godino, J (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática, 8* (1), 26-39.

Nunes, T. & Bryant, P (1997). *Crianças Fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T., Campos, T., Magina, S. & Bryant, P. (2001). *Introdução à educação matemática: os números e as operações numéricas*. São Paulo: PROEM.

Pedrosa, C. F. (2008). *Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do ensino fundamental (7-8 anos).* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Paulo, SP, Brasil.

Pessoa, C. & Borba, R. (2007). Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª a 4ª série. *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, 9.

Pessoa, C. & Borba, R. (2008). Como crianças de 1ª a 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? *Anais do II Simpósio Internacional de Educação Matemática*, Recife, PE, Brasil, 2.

Pessoa, C. & Borba, R. (2009, jan/jun). Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetike, 17* (31), 105-150.

Pessoa, C., Silva, C. & Matos, M. F. (2005). Como os alunos de 3 e 5 série resolvem os problemas de estrutura multiplicativa. *Encontro Baiano de Educação Matemática*, Salvador, BA, Brasil, 11.

Pessoa, C. & Matos, M. F. (2006). Estruturas multiplicativas: como os alunos compreendem os diferentes tipos de problemas? *Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Recife, PE, Brasil.

Pessoa, C. & Borba, R. (2010, junho). O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *Em Teia|Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, *1*(1), 1-22. Recuperado em 13 de janeiro de 2012, de http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4/2. Acesso em: 24 Abr. 2011.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1971). *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar.

Santos, J. P. O., Mello, M. P. & Murari, I. T. C. (1998). *Introdução a análise combinatória.* Campinas: editora da UNICAMP.

Schliemann, A. (1988). A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In T. N. Carraher, D.Carraher, A. Schliemann. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez.

Selva, A., Borba, R., Campos, T., Bivar, D., Ferreira, M.N. & Luna, M. H. (2008). O raciocínio multiplicativo de crianças de 3ª e 5ª séries: O que compreendem? Que dificuldades apresentam? Simpósio Internacional de Educação Matemática, Recife, PE, Brasil, 2.

Silva, J. F. G. da (2010). *O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças.* Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.

Silva, D. N., Fernandes, J. A. & Soares, A. J. (2004). Intuições de alunos do 12.º ano em combinatória: Um estudo exploratório. In J. A. Fernandes, M. V. Sousa & S. A. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Actas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 61-84). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Silva, J. F.. G. da & Spinillo , A. G. (2010). Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: does it help children to solve cartesian product problems? In *Proceedings of the Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*,, Belo Horizonte, Brasil, 34.

Soares, M. T. C. & Moro, M. L. F. (2006). Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. *Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,* Águas de Lindóia, SP, Brasil.

Spinillo, A. G. (1995). Avaliação da aprendizagem numa perspectiva cognitiva. *Revista Psychologica, 14*, pp. 83-99.

Spinillo, A. G. & Simões, P. U. (2003). O desenvolvimento da consciência metatextual em crianças: questões conceituais, metodológicas e resultados de pesquisas. *Psicologia Reflexão e Crítica, 16* (3), 537-546.

Taxa-Amaro, F. O. S. (2006). Solução de problemas com operações combinatórias. In M. R. F. de Brito (Org.), *Solução de problemas e a matemática escolar* (pp. 163-183). Campinas: Alínea.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In, R. Lesh & M. Landau (Ed.). *Acquisition of mathematics:* concepts and processes. New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1993). A teoria dos campos conceituais. *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática*. Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Vergnaud, G. (1997) The nature of mathematics concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.). *Learning and teaching mathematics: an international perspective.* (pp. 5-28). Sussex: Psychology Press.

Vergnaud, G. (1998). Multiplicative structures. In J. Hiebert & M. Behr (Orgs.). *Numbers concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos campos conceituais. In E, P. GROSSI, *Por que ainda há quem não aprende?: A teoria* (p. 21-64), Rio de Janeiro: Vozes.

Vergnaud, G. (2009). *A matemática, a criança e a realidade: problemas de ensino da matemática na escola elementar* (M. L. F. Moro, Trad.). Curitiba: Ed. da UFPR (Obra original publicada em 1981).

# Apêndices

# Apêndice A – Etapa 1: Problemas da Situação 1 (sem explicitação dos princípios invariantes)

## Produto Cartesiano

**Problema 1 (P1):** Ana tem 2 saias (marrom e preta) e 5 blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha). Ela quer combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

**Problema 2 (P2):** Um parque de diversão tem 6 entradas (A, B, C, D, E, F) e 2 saídas (1, 2). Combinando as entradas e saídas Daniela pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do parque. De quantas maneiras diferentes ela pode entrar e sair do parque?

**Problema 3 (P3):** Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelha, laranja, preta, marrom e branca). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?

**Problema 4 (P4):** Um *shopping* tem 2 entradas (A, B) e 4 saídas (1, 2, 3, 4). Combinando as entradas e saídas André pode fazer caminhos diferentes para entrar e sair do *shopping*. De quantas maneiras diferentes ele pode entrar e sair desse *shopping*?

## Combinação

**Problema 1 (P1):** Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 2 (P2):** Cinco crianças (Cléo, Juliana, Bruno, Davi e Mateus) querem brincar de jogo de dama, mas só duas podem brincar de cada vez. Quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de jogo de dama?

**Problema 3 (P3):** Seis professores (Carla, Marta, Sandra, Ivan, Jorge e Leo) estão participando do sorteio em que dois deles serão premiados, cada um ganhando um livro. Quantos grupos diferentes de dois ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 4 (P4):** Seis crianças (Luísa, Vitória, Nanda, André, Beto e Júnior) querem brincar de vôlei, mas só quatro podem brincar de cada vez. Quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de vôlei?

# Apêndice B – Etapa 1: Problemas da Situação II (com explicitação dos princípios invariantes)

## Produto Cartesiano

**Problema 5 (P5):** Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom, e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez, não é? Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa laranja. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa cinza, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?

**Problema 6 (P6):** Paulo foi ao parque de diversão. Nesse parque existem 4 entradas (A, B, C, D) e 2 saídas (1, 2). Nesse parque, as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta. Paulo pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ele for novamente ao parque, ele pode entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Paulo quer ir ao parque de diversão muitas vezes, em dias diferentes. Mas ele não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ele quer fazer um caminho diferente a cada dia que ele for ao parque. Combinando todas as entradas com todas as saídas, de quantas maneiras diferentes Paulo pode entrar e sair desse parque?

**Problema 7 (P7):** Fátima vai viajar para casa de sua tia. Na mala ela colocou 5 saias (amarela, rosa, azul, preta e marrom) e 2 blusas (verde e vermelha). Ele pode combinar as saias e as blusas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as saias e todas as blusas de uma só vez; só usa uma saia e uma blusa de cada vez, não é? Combinando as saias com as blusas, ela pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Fátima quer usar uma roupa diferente a cada dia, ela não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ela pode usar a saia rosa com a blusa verde. No outro dia, ela pode usar a mesma saia rosa com a blusa vermelha, já seria uma roupa diferente, não é? Combinando todas as saias com todas as blusas, quantos conjuntos diferentes Fátima pode formar?

**Problema 8 (P8):** Bia foi ao *shopping*. Nesse *shopping* existem 2 entradas (A, B) e 6 saídas (1, 2, 3, 4, 5, 6). Nesse *shopping* as pessoas têm que entrar pelas entradas e sair pelas saídas. Elas não podem entrar e sair pela mesma porta. Bia pode, por exemplo, entrar pela entrada A e sair pela saída 1. Mas se ela entrar novamente no *shopping*, ela pode entrar pela mesma entrada A e sair pela saída 2; esse seria um caminho diferente, não é? Nessas férias Bia quer ir ao *shopping* muitas vezes, em dias diferentes. Mas ela não quer repetir os caminhos de entrada e de saída todos os dias, ela quer fazer um caminho diferente a cada dia que ela for ao *shopping*. De quantas maneiras diferentes Bia pode entrar e sair desse *shopping*?

## *Combinação*

**Problema 5 (P5):** O clube vai fazer um sorteio de três carros. Cinco pessoas (Joana, Tati, Alina, Diogo e Guto) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todas as pessoas ganharão o prêmio porque tem cinco pessoas participando do sorteio e só tem três carros para serem sorteados, não é? Os carros devem ser sorteados para três pessoas diferentes, então, uma mesma pessoa não pode ganhar todos os carros, não é? Podem ter várias combinações de três ganhadores, não pode? Por exemplo, uma combinação de três ganhadores pode ser: Joana, Tati e Alina. Outra combinação diferente seria Joana, Tati e Diogo, não seria? Com todas essas pessoas, quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 6 (P6):** No jogo de futebol de botão só podem jogar duas crianças por vez. Cinco crianças (Zeca, Vítor, Mário, Tiago e Sérgio) querem jogar futebol de botão. Nem todas as crianças jogarão futebol de botão ao mesmo tempo porque tem cinco crianças querendo jogar e só duas podem jogar futebol de botão de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode jogar sozinha o futebol de botão, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para jogar futebol de botão, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Zeca e Vítor. Outra dupla diferente seria Zeca e Mário, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para jogar futebol de botão de cada vez?

**Problema 7 (P7):** A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque tem seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio, não seria? Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 8 (P8):** Na roda gigante só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Manu, Bia, Flávia, Pedro, Daniel e Rafael) querem brincar na roda gigante. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo na roda gigante porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar na roda gigante de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha na roda gigante, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar na roda gigante, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Manu, Bia, Flávia e Pedro. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Manu, Bia, Flávia e Daniel. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez na roda gigante?

# Apêndice C – Etapa 2: Problemas da Situação I (sem explicitação dos princípios invariantes)

**Problema 1 (P1):** Cinco crianças (Nina, Carla, Rafaela, Joel e Murilo) estão participando do sorteio em que três delas serão premiadas, cada uma ganhando um vídeo game. Quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 2 (P2):** Cinco crianças (Cléo, Juliana, Bruno, Davi e Mateus) querem brincar de jogo de dama, mas só duas podem brincar de cada vez. Quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de jogo de dama?

**Problema 3 (P3):** Seis professores (Carla, Marta, Sandra, Ivan, Jorge e Leo) estão participando do sorteio em que dois deles serão premiados, cada um ganhando um livro. Quantos grupos diferentes de dois ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 4 (P4):** Seis crianças (Luísa, Vitória, Nanda, André, Beto e Júnior) querem brincar de vôlei, mas só quatro podem brincar de cada vez. Quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de vôlei?

# *Apêndice D – Etapa 2: Problemas da Situação II (com explicitação dos princípios invariantes)*

**Problema 1 (P1):** O clube vai fazer um sorteio de três carros. Cinco pessoas (Joana, Tati, Alina, Diogo e Guto) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todas as pessoas ganharão o prêmio porque tem cinco pessoas participando do sorteio e só tem três carros para serem sorteados, não é? Os carros devem ser sorteados para três pessoas diferentes, então, uma mesma pessoa não pode ganhar todos os carros, não é? Podem ter várias combinações de três ganhadores, não pode? Por exemplo, uma combinação de três ganhadores pode ser: Joana, Tati e Alina. Outra combinação diferente seria Joana, Tati e Diogo, não seria? Com todas essas pessoas, quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?

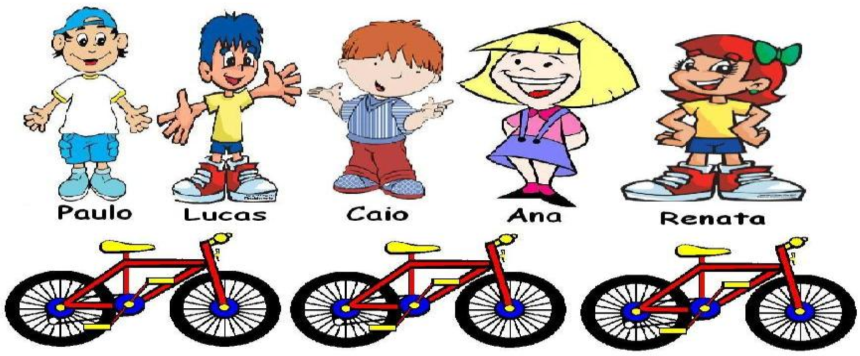
**Problema 2 (P2):** No jogo de futebol de botão só podem jogar duas crianças por vez. Cinco crianças (Zeca, Vítor, Mário, Tiago e Sérgio) querem jogar futebol de botão. Nem todas as crianças jogarão futebol de botão ao mesmo tempo porque tem cinco crianças querendo jogar e só duas podem jogar futebol de botão de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode jogar sozinha o futebol de botão, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para jogar futebol de botão, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Zeca e Vítor. Outra dupla diferente seria Zeca e Mário, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para jogar futebol de botão de cada vez?

**Problema 3 (P3):** A escola vai fazer um sorteio de duas televisões. Seis alunos (Artur, Toni, Silvio, Flora, Paula e Lúcia) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os alunos ganharão o prêmio porque tem seis alunos participando do sorteio e só têm duas televisões para serem sorteadas, não é? As televisões devem ser sorteadas para dois alunos diferentes, então, um mesmo aluno não pode ganhar todas as televisões, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Artur e Toni. Outra combinação diferente seria Artur e Silvio, não seria? Com todos esses alunos, quantas duplas diferentes de ganhadores podem ter nesse sorteio?

**Problema 4 (P4):** Na roda gigante só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Manu, Bia, Flávia, Pedro, Daniel e Rafael) querem brincar na roda gigante. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo na roda gigante porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar na roda gigante de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha na roda gigante, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar na roda gigante, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Manu, Bia, Flávia e Pedro. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Manu, Bia, Flávia e Daniel. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez na roda gigante?

# Apêndice E – Etapa 2: Problemas da Situação III (com explicitação dos princípios invariantes acompanhados de desenhos de figuras recortadas)

**Problema 1 (P1):** A escola vai fazer um sorteio de três bicicletas. Cinco crianças (Paulo, Lucas, Caio, Ana e Renata) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todas as crianças ganharão o prêmio porque tem cinco crianças participando do sorteio e só tem três bicicletas para serem sorteadas, não é? As bicicletas devem ser sorteadas para três crianças diferentes, então, uma mesma criança não pode ganhar todas as bicicletas, não é? Podem ter várias combinações de três ganhadores, não pode? Por exemplo, uma combinação de três ganhadores pode ser: Paulo, Lucas e Caio. Outra combinação diferente seria Paulo, Lucas e Ana, não seria? Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de três ganhadores podem ter nesse sorteio?




Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).

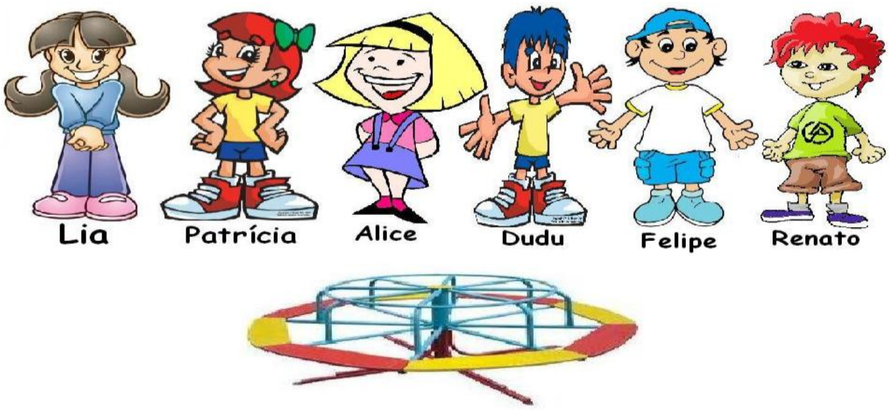
**Problema 2 (P2):** No pula-pula só podem pular duas crianças por vez. Cinco crianças (Laura, Maria, João, Luiz e Danilo) querem brincar no pula-pula. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no pula-pula porque tem cinco crianças querendo pular e só duas podem entrar no pula-pula de cada vez, não é? As duplas devem ser formadas por duas crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no pula-pula, não é? Podem ser formadas várias duplas de crianças para brincar no pula-pula, não pode? Por exemplo, uma dupla de crianças pode ser: Laura e Maria. Outra dupla diferente seria Laura e João, não seria? Com todas essas crianças, quantas duplas diferentes de crianças podem ser formadas para brincar de cada vez no pula-pula?


Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).

**Problema 3 (P3):** A escola vai fazer um sorteio de dois computadores. Seis professores (Luana, Clara, Taís, José, Breno e Gabriel) estão participando do sorteio. O sorteio pode ocorrer de várias maneiras. Mas nem todos os professores ganharão o prêmio porque tem seis professores participando do sorteio e só em dois computadores para serem sorteados, não é? Os computadores devem ser sorteados para dois professores diferentes, então, um mesmo professor não pode ganhar todos os computadores, não é? Podem ter várias combinações de dois ganhadores diferentes, não pode? Por exemplo, uma combinação de dois ganhadores pode ser: Luana e Clara. Outra combinação diferente seria Luana e Taís, não seria? Com todos esses professores, quantos grupos diferentes de dois ganhadores podem ter nesse sorteio?


Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).

**Problema 4 (P4):** No carrossel só podem brincar quatro crianças por vez. Seis crianças (Lia, Patrícia, Alice, Dudu, Felipe e Renato) querem brincar no carrossel. Nem todas as crianças brincarão ao mesmo tempo no carrossel porque tem seis crianças querendo brincar e só quatro podem entrar no carrossel de cada vez, não é? Os grupos devem ser formados por quatro crianças, então, uma criança não pode brincar sozinha no carrossel, não é? Podem ser formados vários grupos de quatro crianças para brincar no carrossel, não pode? Por exemplo, um grupo de quatro crianças pode ser: Lia, Patrícia, Alice e Dudu. Outro grupo de quatro crianças diferente seria Lia, Patrícia, Alice e Felipe. Com todas essas crianças, quantos grupos diferentes de quatro crianças podem ser formados para brincar de cada vez no carrossel?




Fonte: Produzido pela autora (com adição de gravuras retiradas da internet).