



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Ives Lima de Jesus

**Matroides 3-conexas menores-minimais possuindo uma matroide
circular como menor fixado**

Recife
2012



Ives Lima de Jesus

**Matroides 3-conexas menores-minimais possuindo uma matroide
circular como menor fixado**

*Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como um dos requisitos para a obtenção do grau de **Doutor em Matemática**.*

Orientador: Prof. Manoel Lemos

Recife

2012

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: _____

Manoel José Machado Soares Lemos, UFPE

Orientador

Sóstenes Luiz Soares Lins, UFPE

Gauss Moutinho Cordeiro, UFPE

Silvio de Barros Melo, UFPE

Joilson Oliveira Ribeiro, UFBA

MATRÓIDES 3-CONEXAS MENORES-MINIMAISS POSSUINDO
UMA MATRÓIDE CIRCULAR COMO MENOR FIXADO

Por

Ives Lima de Jesus

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cidade Universitária - Tels. (081) 2126.8415 - Fax: (081) 2126.8410

RECIFE - BRASIL

Dezembro - 2012

Catálogo na fonte
Bibliotecária Monick Raquel Silvestre da Silva, CRB4-1217

Jesus, Ives Lima de
Matroides 3-conexas menores-minimais possuindo uma
matroide circular como menor fixado / Ives Lima de Jesus. -
Recife: O Autor, 2012.
90 f.

Orientador: Manoel Lemos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco.
CCEN, Matemática, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Matemática. 2. Matemática discreta. 3. Matroides. I. Lemos,
Manoel (orientador). II. Título.

510

CDD (23. ed.)

MEI2013 – 022

Resumo

Seja M uma matroide 3-conexa menor-minimal possuindo a matroide N como menor. Em 2003, Lemos e Oxley obtiveram uma estimativa para diferença $|E(M) - E(N)|$ e mostraram que o resultado obtido é o melhor possível, quando o menor N é conexo. Nesta tese, mostramos que esta estimativa pode ser melhorada quando o menor N é uma matroide circular, desde que M não possua um menor isomorfo ao prisma.

Palavras-chaves: matroide, menor, circular, 3-conexa, prisma

Abstract

Let M be a minor-minimal 3-connected matroid having the matroid N as a minor. In 2003, Lemos and Oxley obtained an estimate for the difference $|E(M) - E(N)|$ and showed that the result is the best possible when the minor N is connected. In this thesis we show that when the minor N is a circular matroid, that estimate can be improved, since M doesn't have a minor isomorphic to the prism.

Keywords: Matroid, minor, circular, 3-connected, prism.

- Agradeço a(aos):
- A certeza de que existe algo invisível que me fortalece, que prefiro não citar nome nem religião, que simplesmente chamo de FÉ. Que com seu poder oculto, nunca me fez desistir. De onde sempre tirei forças para continuar, mesmo com tantas adversidades.
- Ao Professor Manoel Lemos pela orientação, pelos excelentes cursos ministrados. Por ter me orientado com tanta competência e ter transformado esse projeto em realidade. E também por estar sempre disponível e atento ao meu trabalho, mesmo com tantas atribuições.
- A minha querida irmã Molije que de modo suave e doce tanto me apoiou e incentivou. A toda minha família: Francisco, Vilêda, Márcia, Marcos, Marcelo, Isa, Rita, Mônica, Gabi, João e Taty. Tchelo valeu o apoio.
- Aos grandes amigos Isabelle Silva e Ildeberto Costa pela amizade, pelo carinho, cuidado e convívio durante esses quatro anos. Valeu a força e amizade.
- Aos amigos do Dmat: Joilson Ribeiro, Zaqueu Ramos, Bruno Santos, Alejandro Caicedo, Giovana Siracusa, Tiago Duque, Karla Duque, Antônio Gomes, Clessius Silva, Fábio Badaró, Ricardo Machado e Hugo Guimarães.
- Aos professores do Dmat: em particular, à Aron Simis, Sóstenes Lins, Francisco Cribari e Fernando Cardoso, os quais tive a oportunidade de cursar algumas disciplinas.
- Aos funcionários do Dmat: Tânia Maranhão, Claudia Bezerra, Bruno, Nilza e Robson.
- Aos amigos de Recife e Salvador: Rômulo Bravi, Rubia Lima, Sandro Santana, Vitor Cerqueira(Londres), Ângela Mirante, Tânia Santana, Carlos Freitas, Murilo Bacelar e André Porto.
- Ao IFBA pela liberação para realização do doutorado e a CAPES pelo apoio financeiro.

RECOMEÇAR

"Não me importa onde você parou...
Em que momento da vida você cansou...
O que importa é que é sempre possível e necessário *recomeçar*.
Recomeçar é dar uma nova chance a si mesmo...
É renovar as esperanças na vida, e o mais importante...
Acreditar em você de novo.
Sofreu muito nesse período? Foi aprendizado...
Chorou muito? Foi limpeza de alma..
Ficou com raiva de pessoas? Foi para perdoá-las um dia...
Sentiu-se só por diversas vezes?
É porque fechasse a porta até para os anjos...
Acreditou que tudo estava perdido? Era o início de tua melhora...
Onde você quer chegar?
Ir alto?
Sonhe alto...
Queira o melhor do melhor...
Se pensarmos pequeno, coisas pequenas teremos...
Mas se desejarmos fortemente o melhor e principalmente lutarmos pelo melhor...
O melhor vai se instalar em nossa vida.
Porque sou do tamanho daquilo que vejo,
E não do tamanho da minha altura."

Carlos Drummond de Andrade

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	15
2.1	Matroide: definições	15
2.2	Matroides 3-conexas	19
2.3	Resultados Importantes	21
2.4	Geometria de Tutte	23
3	Lema da Redução	26
3.1	Propriedades de um Par Restrição-Minimal	27
3.2	Lema da Redução	28
4	Estimando $E(M) - E(N)$	47
4.1	O caso $ E(N) = 4$	48
4.2	M é hamiltoniana	52
4.3	A função conectividade por Seymour	58
4.4	Estimativa para $ E(M) - E(N) $	88
	Referências Bibliográficas	89

Capítulo 1

Introdução

Em 2003, Lemos e Oxley [10] encontraram um limite superior para a diferença

$$|E(M) - E(N)|,$$

em que M é uma matroide 3-conexa tendo N como menor tal que M não possui menor 3-conexo tendo a matroide N como menor. O limite obtido é o melhor possível no caso em que N é conexa. Neste texto, denominamos o par (M, N) de *menor-minimal*, para indicar que M é uma matroide 3-conexa tendo N como menor tal que M não possui um menor 3-conexo M' tendo a matroide N como menor. Lemos e Oxley [10], porém, sinalizaram que o resultado poderia ser melhorado para certas classes de matroides N , propondo uma conjectura. Nesta tese nos propusemos a refinar esta estimativa quando o menor N é uma *matroide circular*. Isto é, seu conjunto de elementos $E(N)$ está contido em um circuito C de M . Segundo o resultado obtido por Lemos e Oxley em [10], se o par (M, N) é menor-minimal e N é uma matroide circular com pelo menos três elementos, então

$$|E(M)| \leq 6|E(N)| - 15.$$

Nesta tese, mostramos no Teorema 4.19 que, se o par (M, N) é menor-minimal e N é uma matroide circular com pelo menos três elementos, então

$$|E(M)| \leq 5|E(N)| - 12, \tag{1.1}$$

desde que M não possua menor isomorfo à matroide gráfica $M(P)$, em que P é um prisma.

Denominamos o par (M, A) de *restrição-minimal*, para indicar que M é uma matroide 3-conexa que não possui menor 3-conexo M' tal que $M|A = M'|A$, em que A é um subconjunto de $E(M)$. Dois limites superiores foram obtidos para diferença $|E(M) - A|$. O primeiro foi obtido por Lemos e Oxley em [9] quando A gera M e o segundo por Lemos, Oxley e Reid em [11] quando A não gera M , os quais enunciaremos a seguir. Os limites dependem das funções λ_1 e λ_2 definidas no *Capítulo 4* e da função

$$\lambda_3(A, M) = \sum_S (|S| - 3),$$

em que a soma é tomada sobre todas as classes em série S de $M|A$ com pelo menos quatro elementos.

Teorema 1.1. *Seja M uma matroide 3-conexa tal que $M \not\cong U_{1,3}$, e seja A um subconjunto não-vazio gerador de $E(M)$. Se o par (M, A) é restrição-minimal, então*

$$|E(M)| \leq |A| + \lambda_1(A, M) + \lambda_2(A, M) - 2,$$

exceto se A é um circuito de M de tamanho pelo menos quatro, pois neste caso,

$$|E(M)| \leq 2|A| - 2. \tag{1.2}$$

Teorema 1.2. *Se o par (M, A) é restrição-minimal, então*

$$|E(M)| \leq |A| + \lambda_1(A, M) + \lambda_2(A, M) + \lambda_3(A, M) - \alpha(A, M) \tag{1.3}$$

em que

$$\alpha(A, M) = \begin{cases} 0, & \text{quando } A \text{ é um circuito de } M \\ 1, & \text{quando } A \text{ não é circuito.} \end{cases}$$

Quando $A = E(N)$ é um circuito de M , os Teoremas 1.1 e 1.2 fornecem, respectivamente, as estimativas

$$|E(M)| \leq 2|E(N)| - 2 \quad \text{e} \quad |E(M)| \leq 3|E(N)| - 4,$$

as quais são mais refinadas que a estimava (1.1) a qual obtemos. Sendo assim, não estamos interessados, particularmente, no caso em que $E(N)$ é um circuito de M . Portanto, em geral, vamos supor que $E(N)$ está contido propriamente em um circuito C de M tal que o par (M, C) é restrição-minimal.

A demonstração apresentada nesta tese é por indução sobre $|E(N)|$. Se $|E(N)| \leq 3$, então N é 3-conexa pois ela é circular, implicando que $M = N$. O caso em que N é 3-conexo e é um menor próprio de M , foi resolvido por Truemper em [15] e por Bixby e Coullard em [2] para $|E(N)| \geq 4$ e $|E(N)| \leq 3$, respectivamente. Eles obtiveram o seguinte resultado:

Teorema 1.3. *Seja N uma matroide 3-conexa. Se M é uma matroide 3-conexa, menor-minimal, tendo N como um menor próprio, então*

$$|E(M) - E(N)| \leq 3.$$

Nesta tese, supomos que $|E(N)| \geq 4$. O Lema 3.1 obtido por Lemos e Oxley em [10] e o Lema 4.1 demonstrado nesta tese vão garantir a base do princípio de indução, ou seja, que o Teorema 4.19 vale quando $|E(N)| = 4$. Porém, no Lema 4.1 precisamos supor que M não possui menor isomorfo à $M(P)$, em que P é um prisma, pois este é um contra-exemplo para (1.1) quando $|E(N)| = 4$ e todo circuito C contendo $E(N)$ é gerador de M . Esta restrição também surgiu na demonstração da Proposição 4.13, em particular no Lema 4.16.

Dando sequência ao processo de indução, enunciamos o resultado principal sob a forma de uma conjectura, parametrizada por constantes α e β

Conjectura *Sejam N uma matroide circular. Dados α e β números inteiros, se o par (M, N) é menor-minimal, então*

$$|E(M)| \leq \alpha|E(N)| + \beta$$

Em seguida, escolhemos um contra-exemplo minimal (M, N) para tal conjectura e obtemos propriedades para este par a partir dos valores das constantes α e β . Na descrição do *Capítulo 4*, apresentamos os detalhes de como procedemos a partir desta conjectura.

Esta tese está dividida em quatro capítulos, sendo o primeiro deles esta *Introdução*. Em geral, seguimos a mesma notação e terminologia utilizada por Oxley em [12]. Utilizamos a notação $[n]$ para denotar $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Usamos também as notações $si(M)$ e $co(M)$ para indicar a simplificação e a cosimplificação da matroide M , respectivamente. Enfatizamos que uma matroide N é dita *circular* quando seu conjunto de elementos $E(N)$ está contido em um circuito de M e é dita *cocircular* quando seu conjunto de elementos está contido em um cocircuito de M (um circuito na matroide dual M^*).

O Capítulo 2 está dividido em quatro seções. Na primeira seção, definimos matroide através da sua família de circuitos. Utilizando a definição de circuito definimos independentes e bases. Em seguida, definimos a função posto de uma matroide M e o fecho de um subconjunto X de $E(M)$. Finalizamos definindo matroide dual, enunciando a Proposição 2.4 a qual é conhecida como *Critério de Orgonalidade*. Na segunda seção, definimos conectividade através da função conectividade introduzida por Tutte em [18] e apresentamos suas propriedades. Em particular, definimos 3-conectividade e apresentamos exemplos de matroides 3-conexa. Na terceira seção, iniciamos definindo uma cadeia e um leque em uma matroide e apresentamos alguns resultados importantes sobre 3-conectividade que serão utilizados nesta tese. Dentre estes, destacamos o Lema 2.16 obtido por Bixby [1] e o Lema 2.17 conhecido como *Lema do Triângulo de Tutte*, cuja demonstração pode ser encontrada em [12]. Na quarta e última seção apresentamos definições e resultados sobre a *Geometria de Tutte*, ferramenta que será de grande importância em toda esta tese.

O Capítulo 3 está dividido em duas seções. Na primeira seção apresentamos o Lema 3.2, demonstrado por Lemos, Oxley e Reid em [11], o qual lista propriedades para um par restrição-minimal (M, A) , em que A é um subconjunto de $E(M)$. Não enunciamos tais propriedades na íntegra, pois estamos interessados apenas no caso em que $A = C$ é um circuito de M contendo $E(N)$. No Corolário 3.3 demonstramos três propriedades válidas apenas para um par restrição-minimal (M, C) , quando C é um circuito de M . Na segunda seção demonstramos o Lema 3.7, o qual denominamos de *Lema da Redução*. O termo *redução* foi escolhido pois, escolhemos um elemento $a \in E(N)$, que não pertence a nenhum triângulo de M , e procuramos uma matroide 3-conexa W , menor da matroide 3-conexa $co(M \setminus e)$, tal que o par $(W, N/a)$ fosse menor-minimal, em que $e \in E(M) - cl(C)$ e, além disso, existe uma tríade de M contendo $\{e, a\}$.

O Capítulo 4 está dividido em quatro seções. Na primeira seção mostramos no Lema 4.1 que o teorema principal vale quando $|E(N)| = 4$ se todo circuito C de M contendo $E(N)$ é gerador de M . Verificamos que esse resultado só é válido se M não possui um menor isomorfo a uma matroide $M(P)$ em que P é um prisma. Na segunda seção, enunciamos o resultado principal sob a forma de uma conjectura (Conjectura 4.3), a qual é parametrizada pelas constantes α e β . No Lema 4.4 mostramos que, se M é isomorfa a uma roda ou a um poço, então o par menor-minimal (M, N) satisfaz a Conjectura 4.3, desde que

$$\alpha \geq 2 \text{ e } \beta \geq 8 - 4\alpha.$$

Na Proposição 4.5 concluímos que se um par (M, N) é um contra-exemplo para Conjectura 4.3 tal que $|E(M)|$ é mínimo, então todo circuito C de M contendo $E(N)$ é hamiltoniano, desde que

$$\alpha \geq 3 \text{ e } \beta \geq 8 - 4\alpha.$$

Na terceira seção, definimos a função conectividade segundo Seymour [14] e, em seguida, apresentamos o Lema 4.10 obtido por Lemos e Oxley em [10], o qual caracteriza uma matroide M menor-minimal tendo a matroide M''' como menor tal que M não possui 2-separação induzindo uma 2-separação exata de M''' . Este resultado é uma adaptação do resultado mais geral obtido por Seymour em [14], no qual a análise foi feita considerando uma k -separação, para todo k inteiro maior que dois. Lemos e Oxley [10] mostraram, no Lema 4.11, que nestas condições, tem-se

$$|E(M) - E(M''')| \leq 5.$$

Ou seja, é suficiente adicionar no máximo cinco novos elementos para destruir a 2-separação de M''' . Na Proposição 4.13, supondo que N é circular, que o par menor-minimal (M, N) é um contra-exemplo minimal para Conjectura 4.3 e que existe um elemento $e \in E(M) - C$ tal que a matroide $M' = co(M \setminus e)$ é 3-conexa, tem-se

$$|E(M) - E(M''')| \leq 4,$$

desde que M não possua um menor isomorfo à matroide $M(P)$ em que P é um prisma. Isto é, sob estas hipóteses, foi suficiente adicionar no máximo quatro novos elementos para destruir uma 2-separação exata da matroide M''' . Na quarta e última seção, garantimos no Lema 4.18 a existência do elemento $e \in E(M) - C$ tal que a matroide $M' = co(M \setminus e)$ é 3-conexa. Utilizando a Proposição 4.13 e a Proposição 4.5 concluímos o principal resultado desta tese, o Teorema 4.19 a seguir:

Teorema *Seja N uma matroide circular. Se o par (M, N) é menor-minimal, então*

$$|E(M)| \leq 5|E(N)| - 12,$$

desde que M não possua menor isomorfo à $M(P)$ em que P é um prisma.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo está dividido em quatro seções. Na primeira seção apresentamos definições e resultados sobre a teoria das matroides. Na segunda seção, definimos matroides 3-conexas utilizando a função conectividade, a qual foi introduzida por Tutte [18]. Na terceira seção, apresentamos os resultados sobre 3-conectividade utilizados nesta tese. A quarta e última seção, é destinada à Geometria de Tutte, ferramenta que será fundamental em grande parte desta tese.

2.1 Matroide: definições

Nesta seção apresentamos diversos conceitos associados à teoria das matroides. Começamos apresentando a definição de *matroide*. Pode-se definir matroide de diversas formas, a mais usual talvez seja a partir da sua família de *independentes*. Em [12], Oxley mostra que todas essas definições são equivalentes. Aqui, optamos em definir a partir da sua família de *circuitos*, pelo simples fato do problema a ser resolvido nesta tese referir-se diretamente a circuitos.

Definição 2.1. *Seja E um conjunto finito e \mathcal{C} uma família de subconjuntos de E . O par ordenado $M = (E, \mathcal{C})$ é chamado de matroide se \mathcal{C} satisfaz:*

(C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$;

(C2) *Se C_1 e C_2 estão em \mathcal{C} e $C_1 \subseteq C_2$, então $C_1 = C_2$;*

(C3) Se C_1 e C_2 são subconjuntos distintos de \mathcal{C} e $e \in C_1 \cap C_2$, então existe um subconjunto C_3 de \mathcal{C} tal que $C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - e$.

Denotamos E e \mathcal{C} , respectivamente, por $E(M)$ e $\mathcal{C}(M)$. Os elementos de $\mathcal{C}(M)$ são chamados de *circuitos* de M e os subconjuntos de E que contém elementos de $\mathcal{C}(M)$ são chamados de *dependentes*. Os subconjuntos de $E(M)$ que não contém elementos de $\mathcal{C}(M)$ são chamados de *independentes*, e a família destes é denotada por $\mathcal{I}(M)$. Os independentes maximais, com relação à inclusão, são chamados de *bases* e a família das bases de M será denotada por $\mathcal{B}(M)$. Um fato importante é que os elementos da família $\mathcal{B}(M)$ são equicardinais. Esse número invariante é chamado de posto de M e é denotado por $r(M)$. Seja M a matroide (E, \mathcal{C}) e suponha que $X \subseteq E$. Seja $\mathcal{C}|X = \{C \subseteq X : C \in \mathcal{C}(M)\}$. É imediato verificar que o par $(X, \mathcal{C}|X)$ é uma matroide, a qual denotamos por $M|X = M \setminus (E - X)$, e denomina-se de *restrição* de M ao conjunto X . O conjunto de bases de $M|X$ é $\mathcal{B}(M|X)$, cujos elementos são equicardinais. Se B_X é uma base de $M|X$, então o posto de X é a cardinalidade de B_X , ou seja, $r_M(X) = |B_X|$. Para todo subconjunto X de $E(M)$, a função posto associada a M , denotada por: $r_M : 2^{E} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $X \mapsto r_M(X)$, satisfaz as seguintes propriedades:

(R1) $0 \leq r_M(X) \leq |X|$ para todo $X \subseteq E$;

(R2) Se $X \subseteq Y$ então $r_M(X) \leq r_M(Y)$, para quaisquer $X, Y \subseteq E$;

(R3) Para quaisquer $X, Y \subseteq E$, temos

$$r_M(X) + r_M(Y) \geq r_M(X \cup Y) + r_M(X \cap Y).$$

Quando não há dúvida, denotamos o posto de X em M simplesmente por $r(X)$. É fato que, um subconjunto I de $E(M)$ é um independente de M se, e somente se, $r(I) = |I|$. Do mesmo modo, C é um circuito de M se, e somente se, $r(C) = r(C - e) = |C| - 1$ para todo elemento e de C . Um circuito C de M tal que $|C| = n$ será chamado de n -circuito. De modo geral, um subconjunto X de $E(M)$ tal que $|X| = n$ será chamado de n -subconjunto. Um elemento e de $E(M)$ é chamado de *laço* se o conjunto $\{e\}$ é um circuito de M . Note que laços não pertencem a nenhuma base de M . Um elemento e é um laço, se, somente se, $r(e) = 0$. Se o conjunto $\{x, y\}$ é um 2-circuito de M diremos que x e y estão em paralelo em M , ou seja, $r(\{x, y\}) = 1$, desde que x e y não sejam laços de M . Uma classe em paralelo de M é um subconjunto maximal X de $E(M)$ tal que quaisquer dois membros

distintos de X estão em paralelo e nenhum membro de X é um laço. Uma classe em paralelo com um único elemento é dita ser *trivial*. Uma matroide é dita *simple* quando não possui laços nem classes em paralelo não triviais.

Exemplo 2.2. *Sejam r e n inteiros positivos. Seja E um conjunto com n -elementos e $\mathcal{C}(M)$ a coleção dos $(r+1)$ -subconjuntos de E . O conjunto $\mathcal{C}(M)$ é a família de circuitos de uma matroide sobre E . Esta matroide é denotada por $U_{r,n}$ e é chamada de matroide uniforme de posto r . Note que:*

$$\mathcal{I}(U_{r,n}) = \{X \subseteq E : |X| \leq r\}$$

e

$$\mathcal{C}(U_{r,n}) = \begin{cases} \emptyset, & \text{se } r = n; \\ \{X \subseteq E : |X| = r + 1\}, & \text{se } r < n. \end{cases}$$

Definição 2.3. *Seja M uma matroide cujo conjunto de elementos é $E(M)$. Chamaremos de dual da matroide M , denotaremos por M^* , a matroide cujo conjunto de elementos é o próprio $E(M)$ e cuja família das bases é*

$$\mathcal{B}(M^*) = \{E(M) - B; \text{ com } B \in \mathcal{B}(M)\}.$$

Quando um subconjunto X de $E(M)$ é um independente, uma base, ou um circuito da matroide dual M^* , denominamos estes conjuntos de coindependente, cobase e cocircuito de M , respectivamente. Assim, um triângulo é simplesmente um 3-circuito de M , enquanto uma tríade é um 3-cocircuito de M . Ainda sobre dualidade, temos que

$$r_{M^*}(X) = r^*(X) = |X| + r(E - X) - r(M),$$

para todo subconjunto X de $E(M)$. Similarmente como definimos classe de elementos em paralelo, definimos uma classe de elementos em série como sendo uma classe de elementos em paralelo na matroide dual. A matroide obtida de M pela remoção de todos, exceto um elemento de uma classe em série será chamada de simplificação de M e será denotada por $si(M)$. Por dualidade, definimos a cosimplificação da matroide M como sendo,

$$co(M) = [si(M^*)]^*.$$

O resultado a seguir, o qual será muito utilizado nesta tese, é conhecido como *Crítério de Ortogonalidade*, sua demonstração é simples e pode ser encontrada em [12].

Proposição 2.4. *Se D é um circuito e D^* é um cocircuito da matroide M , então*

$$|D \cap D^*| \neq 1.$$

Para todo subconjunto X de $E(M)$, a operação de *remoção* do conjunto X coincide com a definição de restrição da matroide M ao conjunto $E - X$, isto é,

$$M \setminus X = M|(E - X).$$

Já a operação de *contração* é definida como a dual da operação de remoção, isto é,

$$M/X = (M^* \setminus X)^*.$$

Sejam X e Y subconjuntos de E tais que $X \cap Y = \emptyset$. A subestrutura $N = M \setminus X/Y$ é uma matroide, a qual é dita ser um *menor* da matroide M . Diversos resultados sobre matroides referem-se a menores. A família de circuitos de $N = M \setminus X/Y$ é composta dos membros minimais do conjunto

$$\{D - Y : D \text{ é circuito de } M \text{ satisfazendo } D \cap X = \emptyset \text{ e } D - Y \neq \emptyset\}.$$

Diremos o menor $N = M \setminus X/Y$ é uma *matroide circular* quando $E(N)$ for um circuito de M ou quando existir um circuito C de M contendo $E(N)$ propriamente.

Seja X é um subconjunto de $E(M)$. Definimos o *fecho* de X como sendo o conjunto

$$cl(X) = X \cup \{e \in E : \text{existe circuito } D \text{ de } M \text{ tal que } e \in D \subseteq X \cup e\},$$

ou, equivalentemente,

$$cl(X) = \{e \in E : r(X \cup e) = r(X)\}.$$

Diremos que um subconjunto X de $E(M)$ é um *fechado* de M quando $cl(X) = X$. Uma matroide M é dita ser gerada por um subconjunto X de $E(M)$ quando $cl(X) = E(M)$. Se um conjunto gerador X é um circuito de M então X é dito ser um *circuito hamiltoniano* e M é dita ser uma *matroide hamiltoniana*.

Definição 2.5. *Seja M uma matroide e X um subconjunto não vazio de $E(M)$. O conjunto X é dito ser uma linha de M se a matroide $M|X = M \setminus (E - X)$ não possui colaços e tem coposto dois. Uma linha na matroide dual M^* é chamada de colinha.*

2.2 Matroides 3-conexas

Um subconjunto S de $E(M)$ é dito ser um *separador* da matroide M se

$$r(S) + r(E - S) = r(M) \quad \text{ou} \quad M \setminus S = M/S.$$

Uma matroide M é dita ser conexa se seus únicos conjuntos separadores são os triviais: o vazio e o próprio $E(M)$. Se M não é conexa, dizemos que M é desconexa. Um conjunto $\{Z, V\}$ é uma partição de $E(M)$ se $Z \cup V = E(M)$ e $Z \cap V = \emptyset$. Para um inteiro positivo k , uma partição é dita ser uma *k-separação* de M quando

$$\min\{|Z|, |V|\} \geq k \tag{2.1}$$

e

$$r(Z) + r(V) - r(M) \leq k - 1 \tag{2.2}$$

Uma *k-separação* é dita *exata* quando a igualdade ocorre em (2.2) e é dita *trivial* (ou mínima) quando a igualdade ocorre em (2.1). Se M tem uma *k-separação*, então M é dita ser *k-separável*. Se M é *k-separável* para algum inteiro k , então a conectividade de M é

$$\lambda(M) = \min\{j : M \text{ é } j\text{-separável}\}.$$

A função

$$\xi(X) := \xi_M(X) = r(X) + r(E - X) - r(M) = r(X) + r^*(X) - |X|,$$

definida para todo subconjunto X de $E(M)$, é chamada de *função conectividade* e satisfaz as seguintes propriedades:

- $\xi(X) \geq 0$;
- $\xi(X) = \xi(Y)$, onde $Y = E(M) - X$;
- $\xi(X) \leq r(X) \leq |X|$;
- $\xi_M(X) = \xi_{M^*}(X)$;
- $\xi(X \cup Y) + \xi(X \cap Y) \leq \xi(X) + \xi(Y)$, para quaisquer subconjuntos X e Y de $E(M)$.

Os dois próximos resultados envolvem k -separações. As demonstrações podem ser encontradas em Oxley [12].

Lema 2.6. *Seja $\{Z, V\}$ uma k -separação de uma matroide M . Sejam C_1 e C_2 circuitos de M que interceptam os conjuntos Z e V . Se os conjuntos $D_1 = C_1 \cap Z$ e $D_2 = C_2 \cap V$ não são vazios, então o conjunto $D_1 \cup D_2$ é um circuito de M .*

Lema 2.7. *Se $\{Z, V\}$ é uma k -separação da matroide M e $r(Z) = |Z|$, então todo k -subconjunto de Z contém um cocircuito de M .*

Definição 2.8. *Uma matroide é dita ser n -conexa se ela não possui uma k -separação, com $k < n$. Em particular, uma matroide é dita ser 3-conexa se ela não possui uma k -separação com $k \in [2]$.*

A função conectividade é invariante por dualidade, isto é, $\xi_M(X) = \xi_{M^*}(X)$, para todo $X \subseteq E(M)$. Portanto, uma matroide M é 3-conexa se, somente se, sua dual M^* é 3-conexa.

Exemplo 2.9. *Em [12] estão listadas todas as matroides 3-conexas com no máximo seis elementos, a maior parte delas são matroides unitárias. A matroide $M(G)$ associada ao grafo $G = W_n$ (ver Figura 2.1) é chamada de roda e a matroide $M = W^n$, obtida de $M(W_n)$ relaxando o circuito hiperplano $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, é chamada de poço.*

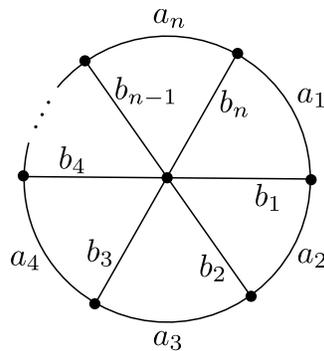


Figura 2.1: A roda $M(W_n)$

As matroides *roda* e *poço* têm posto n , são auto-duais e todo elemento está em uma triáde e em um triângulo. Os dois próximos resultados foram obtidos por Tutte [18]. O

Teorema 2.10 comprova que a *roda* e o *poço* são duas fundamentais famílias de matroides 3-conexas e é conhecido como *Teorema da Roda e do Poço*. Um elemento e de uma matroide 3-conexa M é dito *essencial* quando ambas $M \setminus e$ e M/e não são 3-conexas.

Teorema 2.10. *As seguintes afirmações são equivalentes para uma matroide 3-conexa M tendo pelo menos quatro elemento:*

- (i) *Todo elemento de M é essencial;*
- (ii) *M tem posto pelo menos três e é isomorfa a uma roda ou a um poço.*

Teorema 2.11. *Seja e um elemento essencial da matroide 3-conexa M . Então e está em uma tríade ou em um triângulo de M .*

O teorema a seguir estabelece um relação entre as operações de 1-soma e 2-soma e a 3-conectividade e será utilizado por diversas vezes nesta tese, em particular no *Capítulo 4*. A demonstração deste teorema e as operações de 1-soma e 2-soma podem ser encontradas em [12].

Teorema 2.12. *Uma matroide 2-conexa M não é 3-conexa se, e somente se, existem matroides conexas M_1 e M_2 isomorfas a menores próprios de M tal que*

$$M = M_1 \oplus_2 M_2. \tag{2.3}$$

2.3 Resultados Importantes

Nesta seção apresentamos alguns resultados importantes na caracterização das matroides 3-conexas e que serão úteis no decorrer desta tese. Segue do Teorema 2.11 que as tríades e triângulos desempenham um papel importante no estudo das matroides 3-conexas. Por isso, vamos concentrar nosso interesse em triângulos e tríades nesta seção.

Seja T_1, T_2, \dots, T_k uma sequência não-vazia de triângulos e tríades de uma matroide M , e seja $i \in [k - 1]$, tais que

- (i) $\{T_i, T_{i+1}\}$ contém exatamente um triângulo e uma tríade;
- (ii) $|T_i \cap T_{i+1}| = 2$; e

(iii) $(T_{i+1} - T_i) \cap (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_i)$ é vazio.

A sequência T_1, T_2, \dots, T_k será chamada de cadeia de M de comprimento k com elos T_1, T_2, \dots, T_k . Em uma matroide 3-conexa M que não seja uma roda ou um poço, uma cadeia maximal é chamada de *leque*. Um *leque* pode ser do tipo-1, tipo-2 ou tipo-3, dependendo se seu primeiro e último elo são, respectivamente, dois triângulos, duas tríades ou um triângulo e uma tríade. Por exemplo, diremos que o conjunto $F = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ é um leque do tipo-2 se os conjuntos $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_2, x_3, x_4\}$ e $\{x_3, x_4, x_5\}$, são, nesta ordem, uma tríade, um triângulo e uma tríade.

Oxley e Wu em [13] mostraram nos dois resultados a seguir que os elementos extremos de uma cadeia maximal não são essenciais e que elementos essenciais percentem a um leque de M , desde que M não seja uma *roda* ou um *poço*.

Lema 2.13. *Seja M uma matroide 3-conexa tal que $|E(M)| \geq 4$ e suponha que M não é uma roda nem um poço. Se T_1, T_2, \dots, T_k é uma cadeia maximal tal que $T_i = \{e_i, e_{i+1}, e_{i+2}\}$ para todo $i \in [k]$, então os elementos de T_1, T_2, \dots, T_k podem ser rotulados de modo que os elementos extremos e_1 e e_{k+2} não são essenciais.*

Teorema 2.14. *Seja M uma matroide 3-conexa que não seja uma roda nem um poço. Suponha que e é um elemento essencial de M . Então e está em um leque. Além disso, existem três únicas possibilidades para esse leque.*

- (a) *todo leque contendo o elemento e consiste de um simples triângulo e quaisquer dois tais triângulos interceptam em $\{e\}$; ou*
- (b) *todo leque contendo o elemento e consiste de uma simples tríade e quaisquer duas tais tríades interceptam em $\{e\}$; ou*
- (c) *e está em exatos três leques; esses três leques são do mesmo tipo, cada um tem cinco elementos, e juntos eles contém um total de seis elementos, e, dependendo se esses leques são do tipo-1 ou tipo-2, a remoção ou contração, respectivamente, de M para este conjunto de seis elementos é isomorfa a $M(K_4)$.*

O Lema 2.16, apresentado a seguir, foi demonstrado por Bixby em [1] e será de grande utilidade no decorrer desta tese. Este Lema é uma versão para matroides 3-conexas do Teorema 2.15 obtido por Tutte em [18] para matroides conexas. A demonstração de ambos pode ser encontrada em [12].

Teorema 2.15. *Se M é uma matroide conexa e $e \in E(M)$, então ou M/e é conexa ou $M \setminus e$ é conexa.*

Lema 2.16. *Seja M uma matroide 3-conexa sobre o conjunto E e seja $e \in E$. Então ou $si(M/e)$ ou $co(M \setminus e)$ é uma matroide 3-conexa. No primeiro caso, toda 2-separação de M/e é trivial e no segundo caso toda 2-separação de $M \setminus e$ é trivial.*

Sobre os dois próximos resultados, o primeiro foi obtido por Tutte em [18] é conhecido como o *Lema do Triângulo de Tutte*, e o segundo é sua versão dual.

Lema 2.17. *Seja M uma matroide 3-conexa tendo pelo menos quatro elementos e suponha que $\{e, f, g\}$ é um triângulo de M tal que nem $M \setminus e$ nem $M \setminus f$ são 3-conexas. Então M tem uma tríade que contém e e apenas um elemento dentre f e g .*

Lema 2.18. *Seja M uma matroide 3-conexa tendo pelo menos quatro elementos e suponha que $\{e, f, g\}$ é uma tríade de M tal que nem M/e nem M/f são 3-conexas. Então M tem um triângulo que contém e e apenas um elemento dentre f e g .*

Os dois próximos resultados serão utilizados oportunamente nesta tese, o primeiro foi obtido por Lemos em [7] e o segundo foi obtido por Lemos e Melo em [8].

Lema 2.19. *Suponha que M é uma matroide 3-conexa com pelo menos quatro elementos e seja D um circuito de M . Se $M \setminus e$ não é 3-conexa para todo $e \in D$, então D intercepta pelo menos duas tríades de M .*

Lema 2.20. *Se T^* é uma tríade de uma matroide 3-conexa M que intersecta um triângulo T , então a matroide $si(M/e)$ é 3-conexa para todo $e \in T^* - T$.*

2.4 Geometria de Tutte

A *Geometria de Tutte* [6] está estruturada a partir do conceito de circuito em uma matroide. Como estamos lidando com circuitos esta será uma ferramenta valiosa na demonstração de vários resultados desta tese. Um fechado F de Tutte em uma matroide M é definido como uma união de circuitos. A dimensão de F é definida como $dim(F) = r^*(M|F) - 1$. Deste modo, um fechado F de Tutte tem dimensão zero se, e somente se, F é um circuito de M . Denote por $\mathcal{F}(M)$ a família de fechados de Tutte de M .

Definição 2.21. Um subconjunto L de $E(M)$ é dito ser uma Linha de Tutte quando L é um fechado de Tutte e tem coposto dois.

Definição 2.22. Um subconjunto P de $E(M)$ é dito ser um Plano de Tutte quando P é um fechado de Tutte e tem coposto três.

Seja F um fechado de Tutte de M tal que $\dim(F) \geq 1$. Tutte [16] mostrou que F tem uma partição, a qual é chamada de partição canônica de F em M ,

$$\pi(F) = \{X \subseteq F : F - X \in \mathcal{F}(M) \text{ com } \dim(F) = \dim(F - X) + 1\} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\},$$

para algum $m \geq 2$. Note que $\pi(F)$ é o conjunto de classes em série da matroide $M|F$. Em particular, Tutte mostrou que:

(T1) Se C é um circuito de M contido num fechado de Tutte F de M , então

$$C = F - \cup\{X \in \pi(F) : X \cap C = \emptyset\}.$$

Se L é uma linha de Tutte, então

$$\mathcal{C}(M|L) = \{L - X_1, L - X_2, \dots, L - X_m\}$$

é a família de circuitos da matroide $M|L$. Enquanto, se P é um plano de Tutte, então

$$\mathcal{L}(M|P) = \{P - X_1, P - X_2, \dots, P - X_m\}$$

é a família de linhas de Tutte contidas em P .

Um fechado de Tutte F é dito conexo quando a matroide $M|F$ é conexa. Tutte [16] também mostrou que:

(T2) Seja F um fechado de Tutte conexo de uma matroide conexa M . Se $e \in E(M) - F$, então existe um fechado de Tutte conexo F' de M tal que $F \cup e \subseteq F'$ e $r^*(F') = r^*(F) + 1$ (ver também [6]).

(T3) Se L_1 e L_2 são linhas de Tutte distintas e contidas em um plano de Tutte de M , então $L_1 \cap L_2$ contém um único circuito de M .

(T4) Se L é uma linha de Tutte conexa, então $m \geq 3$, ou seja, sua partição canônica possui pelo menos três elementos.

(T5) Seja C é um circuito de uma matroide M . Se f e g são elementos distintos de $cl(C)$ tais que $M|[C \cup f]$ e $M|[C \cup g]$ são matroides binárias, então $M|[C \cup \{f, g\}]$ é uma matroide binária (ver também [5]).

Lema 2.23. *Sejam T^* uma tríade de M e L uma linha de Tutte na matroide M cuja partição canônica é $\pi(L) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ com $m \geq 2$. Se $T^* \subseteq L$, então $|T^* \cap X_i| \neq 2$ para todo $i \in [m]$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $|T^* \cap X_i| = 2$ para algum $i \in [m]$. Por hipótese, $T^* \subseteq L$. Como $L - X_i$ é um circuito e $|T^* \cap (L - X_i)| = 1$, chegamos a uma contradição pelo critério de ortogonalidade. \square

Capítulo 3

Lema da Redução

Este capítulo será dividido em duas seções. Na primeira seção apresentamos o Lema demonstrado por Lemos, Oxley e Reid [11], o qual caracteriza um par restrição-minimal. Enunciamos apenas as propriedades que são válidas para um par (M, A) restrição-minimal em que A é um circuito de M . No Corolário 3.3, apresentamos três propriedades válidas apenas quando $A = C$ é um circuito de M . Na segunda seção, demonstramos o Lema 3.7, o qual denominamos de Lema da Redução, no qual reduzimos o tamanho de $|E(N)|$ em uma unidade e procuramos uma matroide W , menor da matroide 3-conexa $co(M \setminus e)$, para algum $e \in E(M) - cl(C)$, de modo que o par $(W, N/a)$ seja menor-minimal, para algum $a \in E(N)$. O elemento a foi escolhido de modo que ele não pertence a nenhum triângulo de M .

Estamos considerando que $|E(N)| \geq 4$ e que $E(N)$ está contido propriamente em um circuito C de M . Assim, $N = M \setminus X/Y$ com X e Y subconjuntos não vazios de $E(M)$ tais que $X \cap Y = \emptyset$. Como comentado na *Introdução*, a demonstração do resultado principal desta tese será por indução sobre $|E(N)|$. O resultado a seguir, demonstrado por Lemos e Oxley em [10], servirá de base para o processo de indução, no caso em que existe um circuito C de M contendo $E(N)$ que não é gerador de M . Antecipamos seu enunciado aqui, pois o mesmo foi utilizado para conclusão da afirmação (3.7.2).

Lema 3.1. *Seja N uma matroide 4-circular. Suponha que o par (M, N) é menor-minimal. Se existe um circuito não gerador C de M contendo $E(N)$, então $|E(M)| = 8$.*

Observe, por exemplo, que a matroide $M(W_4)$ (ver Figura 2.1) tendo $E(N)$ como a

restrição ao seu aro, satisfaz as hipóteses do Lema 3.1.

3.1 Propriedades de um Par Restrição-Minimal

Nesta seção, apresentamos o Lema 3.2 demonstrado por Lemos e Oxley em [11], o qual caracteriza um par restrição-minimal (M, A) com $A \subseteq E(M)$. Adaptamos o lema para o caso em que $A = C$ é um circuito de M . Em seguida, demonstramos o Corolário 3.3, no qual apresentamos três propriedades válidas apenas quando $A = C$ é um circuito de M .

Lema 3.2. *Seja (M, C) um par restrição-minimal, então:*

- (i) Se $e \in E(M) - cl(C)$, então toda 2-separação de $M \setminus e$ é trivial e a matroide $co(M \setminus e)$ é 3-conexa. Além disso, $si(M/e)$ não é 3-conexa.
- (ii) Se $e \in E(M) - cl(C)$, então e é essencial e pertence a uma tríade de M .
- (iii) Se C não é gerador de M , então $|E(M)| > 6$ e $|C| \geq 3$.
- (iv) Se T é um triângulo e T^* é uma tríade de M tal que $T \neq T^*$ e $T \cap T^* \neq \emptyset$, então $T^* - T = \{a\}$ com $a \in cl(C)$.
- (v) Toda tríade T^* de M intercepta C .
- (vi) Sejam $T_1, T_2 \subseteq E(M)$ tais que ambos são tríades ou ambos são triângulos de M . Se $T_1 \cup T_2 - cl(C) \neq \emptyset$, então $|T_1 \cap T_2| \leq 1$.
- (vii) Se T é um triângulo de M tal que $\{f_1, f_2\} \subseteq T - cl(C)$, então, para cada $i \in [2]$, existe uma tríade de M que intercepta $\{f_1, f_2\}$ em $\{f_i\}$.
- (viii) Seja \mathcal{T} a família de triângulos que interceptam ambos $cl(C)$ e $E(M) - cl(C)$. Para todo T em \mathcal{T} existe um único elemento a_T de $T \cap E(N)$ e existe uma única cadeia T_{1T}^*, T, T_{2T}^* cujo aro A_T está contido em $E(N)$ e é uma classe em série da matroide $M|C$. Além disso, se T e T' são elementos distintos de \mathcal{T} , então $a_T \neq a_{T'}$ e $A_T \neq A_{T'}$.
- (ix) Se $r(C) \leq 3$ e C não é gerador, então M é isomorfa à roda de posto quatro tendo $cl(C)$ como seu aro.

O próximo resultado vale apenas para pares restrição-minimais (M, C) quando C é um circuito de M .

Corolário 3.3. *Sejam (M, C) um par restrição-minimal e C um circuito de M . As seguintes afirmações são verdadeiras:*

- (i) *Se T^* é uma tríade de M , então $|T^* \cap C| \geq 2$;*
- (ii) *Se T é um triângulo de M , então $T \cap C \neq \emptyset$.*
- (iii) *Se D é um circuito de M diferente de C , então $D \cap C \neq \emptyset$.*

Demonstração. (i) Pelo Lema 3.2(v), segue que $T^* \cap C \neq \emptyset$. Por ortogonalidade, tem-se que $|T^* \cap C| \geq 2$.

(ii) Seja T um triângulo de M e suponha que $T \subseteq E(M) - C$. Para todo $e \in T$, por definição, o par $(M \setminus e, C)$ não é restrição-minimal. Como $(M \setminus e)|C = M|C$, concluímos que $M \setminus e$ não é 3-conexa. Segue do Lema 2.17 que existe uma tríade T^* de M tal que $T^* \cap T \neq \emptyset$. Pelo item (i), $|T^* \cap C| \geq 2$, implicando que $T \cap C \neq \emptyset$.

(iii) De fato, se $D \cap C = \emptyset$, então para todo $d \in D$ a matroide $M \setminus d$ não é 3-conexa pois tem C como restrição e o par (M, C) é restrição-minimal. Segue do Lema 2.19 que o circuito D intercepta pelo menos duas tríades de M . Se T^* é uma dessas tríades, então, por ortogonalidade, $|T^* \cap D| \geq 2$. Mas, pelo Corolário 3.2(i), $|T^* \cap C| \geq 2$. Portanto, $D \cap C \neq \emptyset$; uma contradição.

□

3.2 Lema da Redução

Nesta seção demonstramos o Lema 3.7, denominado de *Lema da Redução*. A demonstração do principal resultado da tese será por indução sobre $|E(N)|$. Por isso, escolhemos um elemento $a \in E(N)$, e procuramos uma matroide 3-conexa W , menor da matroide 3-conexa $co(M \setminus e)$ tal que o par $(W, N/a)$ é menor-minimal, em que $e \in E(M) - cl(C)$. Escolhemos um elemento a que não pertence a nenhum triângulo de M porém pertence a

uma tríade, T_e^* , de M a qual contém o elemento $e \in E(M) - cl(C)$ e tal que $T_e^* - e \subseteq E(N)$. Escrevemos, $T_e^* = \{e, a, b\}$ com $b \in E(N)$.

Os dois próximos resultados serão utilizados diversas vezes na demonstração do Lema 3.7. O primeiro deles foi demonstrado por Lemos e Oxley em [10] e o segundo obtemos como consequência imediata do primeiro.

Lema 3.4. *Seja N uma matroide conexa tendo pelo menos quatro elementos. Suponha que o par (M, N) é menor-minimal. Se $e \in E(M) - E(N)$ e N é um menor das matroides M/e e $M \setminus e$, então e pertence a uma tríade T_e^* de M tal que $T_e^* - e \subseteq E(N)$.*

Lema 3.5. *Sejam f e g elementos distintos em $E(M) - E(N)$. Se as matroides $M \setminus f$, M/f , $M \setminus g$ e M/g têm N como menor, então $T_f^* - f \neq T_g^* - g$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.4, existem as tríades T_f^* e T_g^* tais que $T_f^* - f \subseteq E(N)$ e $T_g^* - g \subseteq E(N)$. Suponha que $T_f^* - f = T_g^* - g$. Então a matroide

$$M^*|(T_f^* \cup T_g^*) \cong U_{2,4}$$

implicando que $(M^* \setminus f)^* = M/f$ é 3-conexa; uma contradição pois, por hipótese, M/f tem N como menor. \square

Lema 3.6. *Seja (M, N) um par menor-minimal e a um elemento de $E(N)$ que não pertence a nenhum triângulo de M . Se existe $e \in E(M) - cl(C)$ tal que $a \in T_e^*$, então existe um leque de M contendo T_e^* e tendo a como elemento terminal.*

Demonstração. Por hipótese, M é 3-conexa e diferente da roda e do poço. Além disso, existe um elemento $e \in E(M) - cl(C)$, o qual é essencial pelo Lema 3.2(ii). Escolhemos o elemento a , de modo que ele não está em nenhum triângulo de M e existe a tríade $T_e^* = \{e, a, b\}$ com $\{a, b\} \subseteq E(N)$. Decorre do Teorema 2.14, que o elemento e pertence a um leque de M , o qual contém a tríade T_e^* e tem a como um elemento terminal. \square

3.6.1. T_e^* pertence a um leque do tipo-2 cujo aro está contido em $E(N)$ e o(s) raio(s) pertence(m) ao conjunto $E(M) - cl(C)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.6, seja T_0, T_1, \dots, T_k para $k \geq 2$ um leque contendo o elemento e e tendo a como elemento terminal. Suponha, por contradição, que este leque é do tipo-3, isto é, que T_k é um triângulo. Vamos escrever, $T_0 = T_e^*$ e $T_i = \{e_i, e_{i+1}, e_{i+2}\}$ para

todo $i \in [k]$. Por hipótese $\{e_0, e_2\} \subseteq E(N)$ e $e_1 = e \in E(M) - cl(C)$. Segue da existência do triângulo T_1 que $e_3 \in E(M) - cl(C)$. Pelo Lema 3.4, $e_4 \in E(N)$. Pela hipótese de indução, temos $e_k \in E(M) - cl(C)$ e $e_{k+1} \in E(N)$, pois T_{k-1} é uma tríade. Concluimos que o aro deste leque é um subconjunto de $E(N)$. Assumimos que $T_k = \{e_k, e_{k+1}, e_{k+2}\}$ é um triângulo, portanto, $e_{k+2} \in E(M) - cl(C)$. Pelo Lema 3.4 existe uma tríade T^* de M contendo e_{k+2} tal que $T^* - e_{k+2} \subseteq E(N)$. Por ortogonalidade com T_k , temos que $e_{k+1} \in T^*$. Agora, se $e_0 \in T^*$, então M é isomorfa á roda ou ao poço; uma contradição. Portanto, existe um elemento $e_{k+3} \in T^*$ tal que $T_0, T_1, \dots, T_k, T^*$ é uma cadeia de M ; uma contradição, pois, por hipótese, T_0, T_1, \dots, T_k é uma cadeia maximal. \square

Denotamos esse leque por $F = (a, e, b, e', c)$ em que os elementos e e e' estão em $E(M) - cl(C)$ são chamados de raios de F (e' pode não existir) e o conjunto $\{a, b, c\}$ é um subconjunto de $E(N)$ que está contido no aro.

Lema 3.7. *Sejam (M, N) um par menor-minimal e (M, C) um par restrição-minimal em que C é um circuito não gerador de M contendo $E(N)$. Escolha um elemento a em $E(N)$ tal que:*

- (i) *a não pertence a nenhum triângulo de M ;*
- (ii) *existe $e \in E(M) - cl(C)$ tal que $a \in T_e^*$.*

Se W é uma matroide 3-conexa menor de $M/a \setminus e$ tendo N/a como menor tal que o par $(W, N/a)$ é menor-minimal, então

- (I) *$W = M/a \setminus e$; ou*
- (II) *$W = M/a \setminus e/e'$, para alguma $e' \in E(M) - cl(C)$.*

Mais ainda, quando (II) ocorre, ou (a, e, b, e', c) é um leque de M do tipo-2 com $\{a, b, c\} \subseteq E(N)$ ou $T_e^ \cup e'$ é um 4-circuito de M .*

Demonstração. Pelo Lema 3.2(i) a matroide $co(M \setminus e) = M/a \setminus e$ é 3-conexa. Por hipótese, a matroide $co(M \setminus e)$ tem N/a como menor. Logo, a tríade $T_e^* = \{e, a, b\}$ com $b \in E(N)$ é única. Assim, a matroide W existe e pode ser escrita como $W = (M/a \setminus e) \setminus X/Y$, onde X e Y são subconjuntos disjuntos de $E(M)$. Nosso objetivo será mostrar que $X = \emptyset$ e que $|Y| \leq 1$.

3.7.1. A matroide N é um menor da matroide $W' = M \setminus (X \cup e) / Y$.

Demonstração. Por construção, $E(N/a) \subseteq E(W')$. Note que a e b estão em série ou ambos são colaços na matroide $M \setminus e$. Como $W = W'/a$ é uma matroide 3-conexa e a matroide W' não é 3-conexa, segue de [12] que existem três possibilidades para o elemento a em W' : ou a é um laço, ou é um colaço ou o elemento a está em série com algum elemento de $E(W)$. Por ortogonalidade, a não pode ser um laço de W' . Se a é um colaço de W' , então b também é um colaço de W' . Logo, b é um colaço da matroide 3-conexa W ; uma contradição. Portanto, o conjunto $\{a, b\}$ é, de fato, uma classe em série de W' . Assim, para obter W' de W , basta adicionar a em série com b . Assim, N é um menor de W' . \square

3.7.2. $|E(W)| \geq 4$.

Demonstração. Suponha que $|E(W)| \leq 3$. Como N/a é menor da matroide 3-conexa W , segue que $W = N/a$. Portanto, $|E(W)| = |E(N/a)| = 3$. Por hipótese, $|E(N)| \geq 4$, implicando que $|E(N)| = 4$. Assumimos que C contém $E(N)$ propriamente, logo

$$|C| \geq 5. \quad (3.1)$$

Tendo em vista que N é um 4-circuito e C não gera M , segue do Lema 3.1 que

$$|E(M)| = 8. \quad (3.2)$$

Além disso, existe um cocircuito D^* de M que evita $cl(C)$. Pelo Corolário 3.3(i), D^* não é uma tríade da matroide 3-conexa M . Logo,

$$|D^*| \geq 4. \quad (3.3)$$

Combinando (3.1), (3.2) e (3.3), concluímos que

$$D^* \cap C \neq \emptyset;$$

uma contradição. \square

Suponha que a matroide $H = M \setminus \tilde{X} / \tilde{Y}$ seja um menor da matroide M tendo a matroide W como seu menor. Portanto, $\tilde{X} \subseteq X \cup e$ e $\tilde{Y} \subseteq Y \cup a$. O próximo resultado refere-se a existência de uma 2-separação especial para H quando esta não for 3-conexa. Optamos em repetir a demonstração encontrada em [10] pois a existência dessa 2-separação será muito importante para conclusão do Lema 3.7.

3.7.3. Se $H = M \setminus \tilde{X} / \tilde{Y}$ não é 3-conexa, então existe uma i -separação $\{Z, V\}$ de H com $i \in \{1, 2\}$, tal que $|Z \cap E(W)| \leq 1$ e Z é fechado em ambas H e H^* .

Demonstração. Como H não é 3-conexa ela tem uma i -separação com $i \in [2]$. Como W é um menor 3-conexo de H devemos ter

$$\min\{|Z \cap E(W)|, |V \cap E(W)|\} \leq 1.$$

Vamos assumir que

$$|Z \cap E(W)| \leq 1. \quad (3.4)$$

Agora escolha uma tal i -separação satisfazendo (3.4) e tal que $|Z|$ seja máximo. Note que, como $|E(W)| \geq 4$, devemos ter que

$$|V \cap E(W)| \geq 3. \quad (3.5)$$

Se Z é fechado em ambas H e H^* , o resultado vale. Assim, podemos assumir que existe um elemento v de V tal que v é gerado por Z em H ou H^* . Assim,

$$r_H(Z) = r_H(Z \cup v) \quad \text{ou} \quad r_{H^*}(Z) = r_{H^*}(Z \cup v),$$

daí,

$$r_H(Z) + r_{H^*}(Z) - |Z| \geq r_H(Z \cup v) + r_{H^*}(Z \cup v) - |Z \cup v|,$$

logo,

$$\xi_H(Z) \geq \xi_H(Z \cup v).$$

Assim, $\{Z \cup v, V - v\}$ é uma j -separação de H para algum $j \in [2]$. Agora, como W é 3-conexa, temos que

$$\min_W\{|(Z \cup v) \cap E(W)|, |(V - v) \cap E(W)|\} \leq 1.$$

Segue de (3.5) que, $|(Z \cup v) \cap E(W)| \leq 1$. Portanto, $\{Z \cup v, V - v\}$ contradiz a escolha de $\{Z, V\}$ e (3.7.3) vale. \square

Lema 3.8. Na matroide $W = (M/a \setminus e) \setminus X / Y$, temos $X = \emptyset$.

Demonstração. Suponha que exista x em X e considere a matroide $H = M \setminus x$. Por construção, temos $x \neq e$. Por (3.7.1), a matroide $H = M \setminus x$ tem N como menor, logo não

é 3-conexa. Portanto, H tem uma 2-separação $\{Z, V\}$ satisfazendo (3.7.3). Como M é uma matroide 3-conexa, devemos ter

$$r(Z) + r(V) = r(M) + 1 \text{ e } x \notin cl(Z) \cup cl(V). \quad (3.6)$$

Para chegar a uma contradição e concluir que x não existe e conseqüentemente $X = \emptyset$, estabeleceremos que $Z = Z \cap E(N) = \{a, w\}$ é um independente de M . Para alcançar esse propósito dividimos a demonstração em várias etapas. Observe inicialmente que decorre da afirmação (3.7.3) que

$$Z \cap E(N) \subseteq \{a, w\}. \quad (3.7)$$

3.8.1. *Não existem elementos em série em $M \setminus x$ contidos em $(Z \cap C) - w$.*

Demonstração. Suponha falso e sejam z_1 e z_2 elementos distintos em $(Z \cap C) - w$ que estão em série na matroide $H = M \setminus x$. Portanto, $T_x^* = \{x, z_1, z_2\}$ é uma tríade de M tal que $T_x^* \cap E(N) = \emptyset$. As matroides $M \setminus z_1$, $M \setminus z_2$, M/z_1 e M/z_2 não são 3-conexas pois têm N como menor. Pelo Lema 2.18 existe um triângulo T_i de M contendo z_i para $i \in [2]$. Suponha $T_1 = T_2 = \{z_1, z_2, u\}$. Como Z é fechado em H , segue que $x \neq u$, pois $x \notin cl(Z)$. Pelo resultado dual do Lema 2.20, a matroide $co(M \setminus u)$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Logo, $T_1 \neq T_2$. Escrevendo, $T_1 = \{x, z_1, v_1\}$ e $T_2 = \{x, z_2, v_2\}$ e lembrando que Z é fechado em $H = M \setminus x$, concluímos que $\{v_1, v_2\} \subseteq V$, pois $x \notin Z$. Assim, existe um circuito \tilde{D} de M tal que

$$\tilde{D} \subseteq T_1 \triangle T_2.$$

Mas, M é 3-conexa, logo $|\tilde{D}| \geq 3$ implicando que $v_i \in \tilde{D}$ para algum $i \in [2]$. Portanto, os circuitos \tilde{D} e C interceptam os conjuntos Z e V . Pelo Lema 2.6 o conjunto

$$C' = (\tilde{D} \cap Z) \cup (C \cap V)$$

é um circuito de M . Como, $w \notin C'$, ele está contido propriamente em C ; contradizendo o axioma (C2). \square

3.8.2. *C gera Z . Em particular, $e \notin Z$.*

Demonstração. De fato, pelo Lema 3.2 itens (i) e (ii), se $z \in Z - cl(C)$, então existe uma triáde T_z^* de M tal que $T_z^* - z \subseteq E(N)$. Se $T_z^* \not\subseteq Z$, então $T_z^* \cap Z = \{z\}$. Assim, z é um colaço da matroide $(M \setminus x) \upharpoonright Z$. Logo, $\{Z - z, V\}$ é uma 1-separação para matroide $M \setminus \{x, z\}$. Logo, que $z \in C$; uma contradição. Portanto, $T_z^* \subseteq Z$, implicando que

$$|Z \cap E(N)| = 2.$$

Agora vamos garantir que existe um elemento z' diferente de z em $Z - cl(C)$. Podemos escrever $M \setminus x = M_Z \oplus_2 M_V$ com ponto base p . Como C não gera Z em M , o conjunto $(C \cap Z) \cup p$ não gera Z em M_Z . Mas, M_Z é conexa pois M é 3-conexa. Logo, M_Z não possui colaços. Isso garante a existência de z' , pois $z \notin cl(C)$, mas z pertence a um circuito contido em Z o qual intercepta C pelo Corolário 3.3(iii). Pelo Lema 3.4 existe uma triáde $T_{z'}^*$ de M tal que

$$T_z^* - z = T_{z'}^* - z' \subseteq E(N);$$

o que contradiz o Lema 3.5. □

3.8.3. $Z = Z \cap C$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $f \in Z - (Z \cap C)$. Segue de (3.8.2) que existe um circuito D_f de M contido em Z e tal que

$$f \in D_f \subseteq (Z \cap C) \cup f \subseteq C \cup f.$$

Note que $D_f - C = \{f\}$. Portanto $L = C \cup D_f = C \cup \{f\}$ é uma linha de Tutte conexa, pois $C \cap D_f \neq \emptyset$. Vamos mostrar que D_f é um triângulo para obter uma contradição. Atingiremos esse objetivo após uma série de etapas.

Seja $\pi(L) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ com $m \geq 3$, a partição canônica de L . Inicialmente vamos mostrar que:

3.8.3.1. $|\pi(L)| = 3$. Além disso, $a \notin D_f$ e $D_f \cap E(N) = \{w\}$.

Demonstração. Segue da afirmação (T4) da seção 2.4 que $\pi(L) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ com $m \geq 3$. Vamos mostrar que $m = 3$. Claramente os conjuntos $D_f - C$ e $C - D_f$ são elementos dessa partição. Mostraremos agora que não existe conjunto X' em $\pi(L)$ tal que

$$X' \neq D_f - C \text{ e } X' \cap E(N) = \emptyset. \tag{3.8}$$

Suponha falso, isto é, que existe um conjunto X' em $\pi(L)$ satisfazendo (3.8). Então o circuito $L - X'$ contém $E(N)$. Logo, para todo $g \in X' \cup f$, as matroides $M \setminus f$, M/f , $M \setminus g$ e M/g não são 3-conexas pois todas elas têm N como menor. Pelo Lema 3.4, existem triades T_f^* e T_g^* de M tais que

$$T_f^* - f \subseteq E(N) \quad \text{e} \quad T_g^* - g \subseteq E(N).$$

Como $\{f, g\} \subseteq D_f$, por ortogonalidade com as triades T_f^* e T_g^* e pelo fato de Z ser fechado em H^* concluímos que $T_f^* \cup T_g^* \subseteq Z$. Daí,

$$T_f^* - f = T_g^* - g;$$

contradizendo o Lema 3.5. Afirmamos agora que

$$a \notin D_f \quad \text{e} \quad b \notin D_f.$$

De fato, se $a \in D_f$ ou $b \in D_f$, então por ortogonalidade com a triade $T_e^* = \{e, a, b\}$ e pelo fato de Z ser fechado em H^* , concluímos que $e \in Z$, contradizendo (3.8.2). Portanto, $D_f \cap E(N) = \{w\}$ e consequentemente $m = 3$. \square

3.8.3.2. *Se f_1 e f_2 são elementos distintos de $Z - C$, então*

$$D_{f_1} - f_1 \subsetneq D_{f_2} - f_2 \quad \text{ou} \quad D_{f_2} - f_2 \subsetneq D_{f_1} - f_1. \quad (3.9)$$

Demonstração. Suponha que existam elementos distintos f_1 e f_2 em $Z - C$. Por (3.8.2) existem circuitos D_{f_1} e D_{f_2} de M contidos em Z e tais que

$$f_1 \in D_{f_1} \subseteq (Z \cap C) \cup f_1 \subseteq C \cup f_1 \quad \text{e} \quad f_2 \in D_{f_2} \subseteq (Z \cap C) \cup f_2 \subseteq C \cup f_2.$$

Segue de (3.8.3.1) que os conjuntos $L_1 = C \cup D_{f_1}$ e $L_2 = C \cup D_{f_2}$ são linhas de Tutte conexas, cujas partições canônicas têm 3 elementos. Logo, elas são gráficas e portanto binárias. Essas linhas estão contidas no plano de Tutte conexo $P = C \cup \{f_1, f_2\}$, o qual também é binário pela afirmação (T5) da seção 2.4. Segue de (3.8.3.1) que $w \in D_{f_1} \cap D_{f_2}$, daí o conjunto $L_3 = D_{f_1} \cup D_{f_2}$ é uma linha de Tutte conexa, a qual evita o elemento a , e cujo terceiro circuito D' satisfaz

$$\{f_1, f_2\} \subseteq D' = D_{f_1} \triangle D_{f_2} \quad \text{e} \quad w \notin D'.$$

Seja L_4 a linha de Tutte que evita o elemento w . Ela contém D' e intercepta as linhas L_1 e L_2 nos pontos $D_1 = C \triangle D_{f_1}$ e $D_2 = C \triangle D_{f_2}$, respectivamente. Além disso, ainda podem existir linhas L_5 e L_6 contendo os pares de circuitos, D_1 e D_{f_2} e D_2 e D_{f_1} , respectivamente (ver figura 3.1). Assim, existem três possibilidades para partição $\pi(P)$, a saber:

- (i) $\pi(P) = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$; ou
- (ii) $\pi(P) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}$; ou
- (iii) $\pi(P) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5\}$ ou $\pi(P) = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_6\}$.

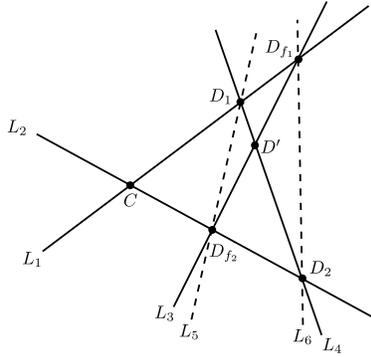


Figura 3.1: Linhas no Plano $M|P$

No caso (i), note que L_1 e L_2 são as únicas linhas de $M|P$ evitando D' . Neste caso, $D' = X_1 \cup X_2 = \{f_1, f_2\}$ é um 2-circuito de $M|P$ e portanto da matroide 3-conexa M , uma contradição. Logo, f_2 não pode existir.

No caso (ii), como existem as linhas de Tutte L_5 e L_6 , as quais são gráficas e binárias por (3.8.3.1), existe um circuito D'' de M tal que

$$D'' = D_2 \triangle D_{f_1} = (C \triangle D_{f_2}) \triangle D_{f_1} = C \triangle (D_{f_1} \triangle D_{f_2}) = C \triangle D'.$$

O circuito D'' é diferente de C , porém ele contém $E(N) \cup \{f_1, f_2\}$. Assim, as matroides $M \setminus f_1, M / f_1, M \setminus f_2, M / f_2$ não são 3-conexas pois têm N como menor. Pelo Lema 3.4, existe tríade $T_{f_i}^*$ de M para $i \in [2]$ tal que $T_{f_i}^* - f_i \subseteq E(N)$. Segue do Lema 3.5 que

$$T_{f_1}^* - f_1 \neq T_{f_2}^* - f_2.$$

Por (3.8.3.1), temos $w \in D_i \cap T_i^*$. Por ortogonalidade, devemos ter $|D_i \cap T_i^*| \geq 2$. Como Z é fechado em H^* concluímos que $T_{f_1}^* \cup T_{f_2}^* \subseteq Z$, implicando que $|Z \cap E(N)| \geq 3$, contradizendo (3.7).

No caso (iii), por simetria, vamos considerar apenas a existência de L_5 . Note que

$$C = X_3 \cup X_4 \cup X_5, \quad D_{f_1} = X_2 \cup X_4 \cup X_5 \quad \text{e} \quad D_{f_2} = X_1 \cup X_4,$$

implicando que $D_{f_2} - f_2 \subsetneq D_{f_1} - f_1$. Logo, (3.9) vale. □

3.8.3.3. Podemos rotular os elementos de $Z - C$ por f_1, f_2, \dots, f_n , para algum inteiro n , de modo que

$$D_{f_1} - f_1 \subsetneq D_{f_2} - f_2 \subsetneq \dots \subsetneq D_{f_n} - f_n. \quad (3.10)$$

Demonstração. Para todo $i \in [n]$ temos

$$f_i \in D_{f_i} \subseteq C \cup f_i \subseteq (Z \cap C) \cup f_i.$$

Sem perda de generalidade, como $Z - C$ é finito e por (3.9), podemos rotular seus elementos de modo que

$$|D_{f_1}| \leq |D_{f_2}| \leq \dots \leq |D_{f_n}|.$$

Portanto, (3.10) vale e (3.8.3.3) segue. \square

3.8.3.4. Se $i \in [n]$, então

$$|(D_{f_{i+1}} - f_{i+1}) - (D_{f_i} - f_i)| = 1.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existem elementos z_1 e z_2 em

$$(D_{f_{i+1}} - f_{i+1}) - (D_{f_i} - f_i).$$

Claramente, z_1 e z_2 pertencem ao conjunto $(Z \cap C) - w$. Como $\{Z, V\}$ é uma 2-separação da matroide $H = M \setminus x$, segue que $\{Z \cap C, V\}$ é uma 2-separação da matroide $(M \setminus x)|(C \cup V)$. Assim,

$$\{\{z_1, z_2\}, C \cup V - \{z_1, z_2\}\}$$

também é uma 2-separação da matroide $(M \setminus x)|(C \cup V)$. Agora observe que

$$C \cup V - \{z_1, z_2\} \text{ gera } \{f_1, f_2, \dots, f_n\}.$$

De fato, para todo $j \in [n]$ temos

$$f_j \in D_{f_j} \text{ ou } f_j \in C \Delta D_{f_j}.$$

Portanto, $\{\{z_1, z_2\}, Z \cup V - \{z_1, z_2\}\}$ é uma 2-separação para matroide $M \setminus x$. Logo, $\{z_1, z_2\}$ está contido em uma classe em série de $M \setminus x$; contradizendo (3.8.1). \square

3.8.3.5. Para todo $i \geq 1$ o conjunto $\{f_i, z_i, f_{i+1}\}$ é um triângulo.

Demonstração. A matroide $M|P = M|C \cup \{f_i, f_{i+1}\}$ é binária, daí o conjunto

$$D_{f_i} \Delta D_{f_{i+1}} = \{f_i, z_i, f_{i+1}\}$$

contém um circuito da matroide $M|P$ e portanto de M . Como M é 3-conexa esse circuito é um triângulo e (3.8.3.5) vale. \square

3.8.3.6. $|Z - C| = 1$.

Demonstração. Suponha, por contradição que $|Z - C| \geq 2$. Sejam f_1 e f_2 elementos distintos em $Z - C$. Por (3.8.3.5), existe $z_1 \in Z \cap C$ tal que o conjunto $\{f_1, z_1, f_2\}$ é um triângulo. As matroides $M \setminus f_1$ e $M \setminus f_2$ não são 3-conexas pois elas têm N como menor. Pelo Lema 2.17, existe uma tríade T_i^* de M contendo f_i para $i \in [2]$. Se $T_1^* = T_2^*$, então, por ortogonalidade, temos

$$|T_i^* \cap D_{f_i}| \geq 2$$

para $i \in [2]$. Ainda, por ortogonalidade, temos

$$|T_2^* \cap (C \Delta D_{f_2})| = 1,$$

uma contradição. Logo, $T_1^* \neq T_2^*$. Assim, existem elementos distintos z_0 e z_2 em C tais que o conjunto $(z_0, f_1, z_1, f_2, z_2)$ é uma cadeia. Como T_1^* e T_2^* são as únicas tríades contendo f_1 e f_2 , respectivamente, segue que a matroide $si(M/z_1)$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Portanto, f_2 não pode existir e (3.8.3.6) vale. \square

3.8.3.7. D_f é um triângulo de M .

Demonstração. Segue de (3.8.3.1) que, se $f \in D_f - C$, então $L = C \cup D_f = C \cup f$ é uma linha de Tutte conexa. Sua partição canônica é $\pi(L) = \{X_1, X_2, X_3\}$ com

$$X_1 = D_f - C = \{f\}, X_2 = D_f \cap C \text{ e } X_3 = C - D_f.$$

Além disso, $w \in X_2$ e $E(N) - w \subseteq X_3$. Suponha que $|X_2| \geq 3$. Então existem elementos distintos z_1 e z_2 em $X_2 - w$, os quais estão contidos em uma classe em série de $M|L$. Claramente, z_1 e z_2 estão $(Z \cap C) - w$. Como $\{Z, V\}$ é uma 2-separação da matroide $H = M \setminus x$, segue que $\{Z \cap C, V\}$ é uma 2-separação da matroide $(M \setminus x)|(C \cup V)$. Assim,

$$\{\{z_1, z_2\}, C \cup V - \{z_1, z_2\}\}$$

também é uma 2-separação da matroide $(M \setminus x) | (C \cup V)$. Note que

$$C \cup V - \{z_1, z_2\} \text{ gera } f,$$

pois

$$f \in D_f \text{ ou } f \in C \Delta D_f.$$

Portanto, $\{\{z_1, z_2\}, Z \cup V - \{z_1, z_2\}\}$ é uma 2-separação para matroide $M \setminus x$. Logo, $\{z_1, z_2\}$ está contido em uma classe em série de $M \setminus x$. Daí, o conjunto $\{x, z_1, z_2\}$ é uma tríade de M que não intercepta $E(N)$; contradizendo (3.8.1). Portanto, $|X_2| = 2$ e D_f é um triângulo de M . \square

Vamos concluir (3.8.3). Escrevendo, $D_f = \{z, w, f\}$, com $f \in D_f \cap (cl(C) - C)$, temos que $\{z, w\}$ é uma classe em série da matroide $M \setminus x$. Logo, se $x \in X$, então $T_x^* = \{x, z, w\}$ é uma tríade de M . Note que a matroide M/f tem o conjunto $\{x, z, w\}$ como um 2-separador não trivial, implicando que nem ela nem a matroide $si(M/f)$ são 3-conexas. Note que $D_f \cap T_x^* \neq \emptyset$. Como $f \in D_f - T_x^*$, segue do resultado dual do Lema 2.20 que a matroide $co(M \setminus f)$ é 3-conexa (ver figura 3.2). Essa última matroide tem N como menor, exceto se o conjunto $\{w, f, a\}$ é uma tríade de M . Neste caso, temos $a \in Z$, pois Z é fechado em H . Note que, $f \in X$, pois a matroide M/z tem $\{w, f\}$ como uma classe em paralelo. Segue da existência da tríade $T_e^* = \{e, a, b\}$ que o conjunto $\{w, a, b\}$ está contido em uma classe em série S da matroide $M \setminus \{e, f\}$ com $|S| \geq 3$. Assim sendo, o conjunto $\{w, b\}$ é uma 2-classe em série da matroide 3-conexa $W = (M/a \setminus e) \setminus X/Y$; uma contradição. Portanto, o elemento f não existe e conseqüentemente o triângulo D_f não pode existir. Logo, $Z = Z \cap C$ é um independente de M . \square

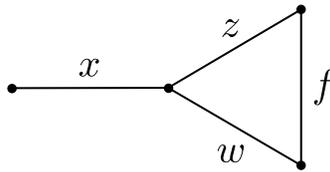


Figura 3.2: $co(M \setminus f)$ é 3-conexa

Utilizando os dois próximos resultados concluiremos o Lema 3.8.

3.8.4. $Z = Z \cap E(N) = \{a, w\}$

Demonstração. Segue de (3.7) que $Z \cap E(N) \subseteq \{a, w\}$. Em (3.8.3) concluímos que,

$$r(Z) = |Z| = |Z \cap C|.$$

Como $\{Z, V\}$ é uma 2-separação da matroide $H = M \setminus x$, segue do Lema 2.7 que, se z_1 e z_2 são elementos distintos de Z , então o conjunto $\{x, z_1, z_2\}$ contém um cocircuito de M . Suponha que $|Z| \geq 3$. Assim, $r^*(Z \cup x) = 2$ e $Z \cup x$ está contido em uma linha de M^* com pelo menos quatro elementos. Daí, existe $z \in Z \cap (C - E(N))$, tal que a matroide $(M^* \setminus z)^* = M/z$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Portanto,

$$r(Z) = |Z| = |Z \cap C| = 2 \tag{3.11}$$

e $T_x^* = \{x, w, z\}$ é uma tríade de M satisfazendo $T_x^* - x \subseteq Z \cap C = Z$. Assim, para $x \in X$, a matroide $M \setminus x$ não é 3-conexa e todas as suas 2-separações são triviais por (3.11). Segundo o Lema 2.16, a matroide $co(M \setminus x)$ é 3-conexa. Logo, ela não pode ter N como um menor. Portanto, devemos ter $\{a, w\} = Z \subseteq Z \cap E(N)$. \square

3.8.4.1. Na tríade $T_e^* = \{e, a, b\}$ devemos ter $w = b$.

Demonstração. Segue do Lema 3.8.4 que, se $x \in X$, então $T_x^* = \{x, a, w\}$ é uma tríade de M . Por (3.7.1), a matroide $W' = M \setminus (X \cup e)/Y$ tem a matroide circular N como menor e o conjunto $\{a, b\}$ como uma classe em série. Se $w \neq b$, então o subconjunto $\{a, b, w\}$ de $E(N)$ está contido em uma classe em série S de W' , tal que, $|S| \geq 3$. Assim, o conjunto $S - a$ é uma classe em série da matroide 3-conexa $W = (M/a \setminus e) \setminus X/Y$; uma contradição. Portanto, devemos ter $w = b$. \square

Para concluir o Lema 3.8, segue de (3.8.4.1), que o leque pode ser escrito como,

$$F = T_e^* = (a, e, b) \text{ ou } F = (a, e, b, e', c),$$

em que $\{e, e'\} \subseteq E(M) - cl(C)$ e $\{a, b, c\} \subseteq E(N)$. Por hipótese, $x \neq e$. Por (3.8.4) temos,

$$Z = Z \cap E(N) = \{a, b\}.$$

Como Z é fechado em H e em H^* , segue que, em ambos os casos, temos $e \in Z$; contradizendo (3.8.2). Finalmente, concluímos que, $X = \emptyset$. \square

Agora que concluímos que $X = \emptyset$, vamos analisar $|Y|$.

Lema 3.9. $|Y| \leq 1$. Além disso, se $y \in Y$, então ou y está em uma tríade de M que está contida em um 4-circuito de M ou y pertence a um leque, F , do tipo-2 de M .

Demonstração. Seja $y \in Y$ e considere a matroide $H = M/y$. Decorre da afirmação (3.7.1) que N é menor de H e portanto H não é 3-conexa. Logo, existe uma 2-separação $\{Z, V\}$ de H satisfazendo (3.7.3), isto é, Z é fechado em H e H^* e $|Z \cap E(W)| \leq 1$. Como M é 3-conexa, devemos ter

$$y \in cl(Z) \cap cl(V). \quad (3.12)$$

3.9.1. $Y \cup a$ é um independente de M .

Demonstração. Se $Y \cup a$ não é independente de M , então existe um circuito D de M tal que $D \subseteq Y \cup a$. Escolha $y \in D - a$ e note que y é um laço da matroide $(M/a \setminus e)/(Y - y)$. Portanto, $W = (M/a \setminus e)/Y = (M/a \setminus e) \setminus y/(Y - y)$; o que contradiz o Lema 3.8. \square

3.9.2. $Z - e$ é independente de M/y .

Demonstração. Suponha falso. Então existe um circuito D de M/y contido em $Z - e$. Como $Y \cup a$ é independente de M por (3.9.1), segue que $D - (Y \cup a) \neq \emptyset$. Portanto,

$$\emptyset \neq D - (Y \cup a) \subseteq (Z - e) - (Y \cup a) = Z - (Y \cup \{a, e\}) \subseteq Z \cap E(W) \subseteq \{w\}.$$

Assim, w existe e está em D e $D - (Y \cup a) = \{w\}$. Portanto, w é um laço da matroide $(M/y)/(D - w)$ e

$$y \cup (D - w) \subseteq Y \cup a,$$

implicando que W é um menor da matroide $(M/y)/(D - w)$. Logo, w é um laço da matroide 3-conexa W ; uma contradição. \square

3.9.3. Se existe um triângulo T_y de M contendo y , então $y \notin cl(C)$, $|F| = 5$ e $y = e'$. Em particular, existe circuito D de M tal que

$$y \in D \subseteq T_e^* \cup \{y\}.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que $y \in cl(C)$. Escrevendo $T_y = \{y, p, q\}$, pelo Corolário 3.3(ii) temos que $q \in C - a$ e consequentemente $p \in cl(C)$.

Vamos mostrar que

$$y \in C \text{ ou } p \in C. \quad (3.13)$$

De fato, se ambos não pertencem a C , então as matroides $M \setminus p$ e $M \setminus y$ não são 3-conexas pois ambas têm N como menor. Segue do Lema 2.17, que existem tríades de M contendo y e p . Note que não pode existir uma única tríade contendo y e p , pois, pelo Corolário 3.3(i), se T^* é uma tríade de M , então

$$|T^* \cap C| \geq 2.$$

Assim, existem tríades T_p^* e T_y^* de M contendo os conjuntos $\{p, q\}$ e $\{y, q\}$, respectivamente. Assim, T_p^*, T_y, T_y^* é uma cadeia de M e como não existe tríade contendo p e y a matroide $si(M/q)$ é 3-conexa e portanto não pode ter N como menor. Daí,

$$q \in E(N) - a.$$

Como $W = (M/a \setminus e)/Y$ e $p \neq e$, temos que: se $p \in Y$, então q é um laço de W , ou se $p \in E(W)$, então $\{p, q\}$ é um 2-circuito de W . Em ambos os casos, chegamos a uma contradição. Portanto, (3.13) vale.

Logo, existem duas possibilidades:

- (i) $p \in C$ e $y \in cl(C) - C$.
- (ii) $q \in C - E(N)$ e $p \in cl(C) - C$.

3.9.3.1. $T_y \cap E(N) \neq \emptyset$.

Demonstração. Suponha por contradição que $T_y \cap E(N) = \emptyset$ e seja $z \in \{p, y\}$. Assim, $L = C \cup \{z\}$ é uma linha de Tutte conexa, cuja partição canônica $\pi(M|L)$ tem $\{z\}$ como elemento fixo e um outro elemento X_q contendo q tal que o conjunto $D' = (C - X_q) \cup \{z\}$ é um circuito de M satisfazendo

$$q \notin D' \text{ e } E(N) \subsetneq D'.$$

Assim, as matroides

$$M \setminus q \text{ e } M/q$$

não são 3-conexas pois elas têm N como menor. Pelo Lema 3.4, existe triáde T_q^* de M tal que

$$T_q^* - q \subseteq E(N).$$

Note que, $|T_q^* \cap T_y| = 1$; contradizendo o critério de ortogonalidade. Portanto, (3.9.3.1) vale. \square

Segue da afirmação (3.9.3.1) que

$$1 \leq |T_y \cap E(N)| \leq 2.$$

No caso **(i)**, se $|T_y \cap E(N)| = 2$, então $\{p, q\} \subseteq E(N) - a$ é um 2-circuito da matroide 3-conexa W , uma contradição. Se $|T_y \cap E(N)| = 1$, então como $W = (M/a \setminus e)/Y$ e $e \notin \{p, q\}$, segue que p ou q é um laço de W ; uma contradição. Logo, **(i)** não pode ocorrer.

No caso **(ii)**, como $y \in cl(C) - E(N)$ temos $|T_y \cap E(N)| = 1$ implicando que

$$q \in E(N) - a \subseteq E(W).$$

Neste caso, como $W = (M/a \setminus e)/Y$ e $p \neq e$, temos que: se $p \in Y$, então q é um laço de W , ou se $p \in E(W)$, então $\{p, q\}$ é um 2-circuito de W , em ambos os casos chegamos a uma contradição, pois W é 3-conexa. Logo, **(ii)** não pode ocorrer.

Portanto, $y \notin cl(C)$. Escrevendo $T_y = \{y, p, q\}$, temos que

$$p \notin cl(C) \text{ e } q \in E(N) - a,$$

pois, pelo Corolário 3.2 (viii) existe uma única cadeia do tipo-2 contendo T_y e cujo aro está contido em $E(N)$. Note que $p \notin Y$, do contrário q é um laço de ambas as matroides $M/\{y, p\}$ e W ; uma contradição pois W é 3-conexa. Observe também que $p \notin E(W)$, caso contrário o conjunto $\{p, q\}$ é um 2-circuito da matroide 3-conexa W ; um absurdo. Como $W = (M/a \setminus e)/Y$, podemos ter $p = e$. Por ortogonalidade, entre T_y e T_e^* , devemos ter $q = b$ e daí

$$y = e' \text{ e } |F| = 5.$$

Como F é um leque do tipo-2 de M com cinco elementos contendo T_e^* existe um circuito D de M tal que $y \in D \subseteq T_e^* \cup \{y\}$. \square

3.9.4. *Se y não pertence a nenhum triângulo de M , então y está em uma tríade de M que está contida em um 4-circuito de M .*

Demonstração. Vamos dividir essa demonstração em três afirmações.

3.9.4.1. $|Z| \geq 3$ e $e \in Z$. Além disso, para todo 2-subconjunto Z_0 de $Z - e$ o conjunto $Z_0 \cup e$ é uma tríade de M .

Demonstração. Como Z gera y por (3.12) e y não pertence a triângulos de M , segue que, $|Z| \geq 3$. Por (3.4) temos,

$$|Z \cap E(W)| \leq 1$$

e por (3.7.2) temos,

$$|E(W)| \geq 4,$$

implicando que

$$|V| \geq |E(W) - Z| \geq |E(W)| - 1 \geq 3.$$

Assim, $|V - e| \geq 2$ e como $|Z| \geq 3$, também vale que $|Z - e| \geq 2$. Portanto, $\{Z - e, V - e\}$ é uma 2-separação para $M/y \setminus e$. Pelo Lema 2.7, se Z_0 é um 2-subconjunto de $Z - e$, então Z_0 contém um cocircuito de $M/y \setminus e$. Assim, $Z_0 \cup e$ contém um cocircuito de M/y e portanto de M . Como M é 3-conexa, todo cocircuito tem pelo menos três elementos, daí $Z_0 \cup e$ é uma tríade de M . Além disso, $e \in Z$, pois Z é fechado em H^* . \square

3.9.4.2. $|Z| = 3$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $|Z| \geq 4$. Segue de (3.9.4.1) que $e \in Z$ e daí $M^*|Z$ é isomorfa a $U_{2,|Z|}$. Assim, a matroide

$$(M^* \setminus e)^* = M/e$$

é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. \square

3.9.4.3. $T_e^* \cup \{y\}$ é um circuito de M e $Z = T_e^*$.

Demonstração. Por (3.12) temos que Z gera y , por (3.9.4.2) temos $|Z| = 3$ e como y não pertence a nenhum triângulo de M , concluímos que $Z \cup y$ é um circuito de M . Por hipótese,

existe a tríade $T_e^* = \{e, a, b\}$ de M . Em (3.9.4.1) vimos que $e \in Z$, por ortogonalidade, temos

$$|T_e^* \cap (Z \cup y)| \geq 2.$$

Daí, $|T_e^* \cap Z| \geq 2$. Como Z é fechado em H^* , concluímos que $T_e^* \subseteq Z$, implicando que

$$T_e^* = Z.$$

□

Assim finalizamos a demonstração da afirmação (3.9.4). □

Para finalizar a demonstração do Lema 3.9, falta mostrar que:

3.9.5. $Y - y = \emptyset$, ou seja, $|Y| \leq 1$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe $y' \in Y - y$. Segue de (3.9.4.3) que $y \notin cl(C)$, pois $e \in Z - cl(C)$ e $Z \cup y$ é um circuito de M . Pelo Lema 3.2 itens (i) e (ii), existe uma tríade T_y^* de M tal que

$$T_y^* - y \subseteq E(N).$$

Como, $Z \cup T_y^* - cl(C) \neq \emptyset$, segue do Lema 3.2(vi) que

$$|T_y^* \cap Z| \leq 1.$$

Por ortogonalidade temos,

$$|T_y^* \cap (Z \cup y)| \geq 2,$$

implicando que

$$|T_y^* \cap Z| = 1, \text{ ou seja, } |T_y^* \cap \{a, b\}| = 1. \quad (3.14)$$

Agora, por (3.9.3) e (3.9.4.3) e independente se y' estar ou não em algum triângulo de M existe circuito D' de M tal que

$$y' \in D' \subseteq T_e^* \cup \{y'\}.$$

Logo, $L = (T_e^* \cup \{y\}) \cup D' = T_e^* \cup \{y, y'\}$ é uma linha de Tutte de M . Sobre a partição canônica dessa linha, segue-se que:

- (1) o conjunto $\{y'\}$ é um elemento fixo, pois $T_e^* \cup y$ é circuito de M ;
- (2) como $T_e^* \subseteq L$, segue do Lema 2.23, que os elementos de T_e^* estão em elementos distintos da partição;
- (3) da existência da tríade T_y^* e de (3.14) concluímos que ou $\{y, a\}$ ou $\{y, b\}$ é um elemento da partição;
- (4) por hipótese o elemento $a \in E(N)$ não pertence a triângulos de M .

Concluimos que a partição de $M|L$ é

$$\pi(M|L) = \{\{y, a\}, \{e\}, \{b\}, \{y'\}\}.$$

Portanto, y' pertence ao triângulo $T_{y'} = \{y', e, b\}$ implicando que $y' = e'$. Assim ,

$$|(Z \cup y) \cap T_{y'}^*| = 1;$$

contradizendo o critério de ortogonalidade. Portanto, y' não existe e $|Y| \leq 1$. □

Agora o Lema 3.9 segue de (3.9.3), (3.9.4) e (3.9.5) . □

Vamos finalizar o Lema 3.7. Ao supormos que, $W = (M/a \setminus e) \setminus X/Y$, concluímos que, $X = \emptyset$ pelo Lema 3.8 e que $|Y| \leq 1$ pelo Lema 3.9. Logo, existem duas possibilidades para matroide W :

- (i) Se $Y = \emptyset$, então $W = co(M \setminus e) = M/a \setminus e$ é 3-conexa pelo Lema 3.2(i) e $e \in T_e^* = \{e, a, b\}$ onde T_e^* é uma tríade de M com $b \in E(N)$. Logo, o item **(I)** do Lema 3.7 ocorre; ou
- (ii) Se $Y = \{e'\}$, então $e' \notin cl(C)$ e $W = M/a \setminus e/e'$ é 3-conexa e $F = (a, e, b, e', c)$ é um leque do tipo-2 de M com $\{a, b, c\} \subseteq E(N)$ ou $T_e^* \cup e'$ é um 4-circuito de M . Logo, o item **(II)** do Lema 3.7 ocorre.

□

Capítulo 4

Estimando $|E(M) - E(N)|$

Este capítulo está dividido em quatro seções. Na primeira seção, mostramos no Lema 4.1 que $|E(M)| \leq 8$ quando $|E(N)| = 4$, supondo que todo circuito de M contendo $E(N)$ é gerador de M , desde que M não possua menor isomorfo à matroide $M(P)$ em que P é um prisma. Na segunda seção, apresentamos o resultado principal sob a forma de uma Conjectura 4.3 parametrizada por constantes α e β . Mostramos no Lema 4.4 que se M é isomorfa à roda $M(W_n)$ ou ao poço W^n , então o par menor-minimal (M, N) satisfaz a Conjectura 4.3, desde que $\alpha \geq 2$ e $\beta \geq 8 - 4\alpha$. No Lema 4.5, mostramos que se (M, N) é um par menor-minimal que é um contra-exemplo para Conjectura 4.3 tal que $|E(M)|$ é mínimo, então todo circuito de M contendo $E(N)$ é gerador, desde que $\alpha \geq 3$ e $\beta \geq 8 - 4\alpha$. Na terceira seção, definimos a função conectividade de Seymour e apresentamos o Lema 4.10, uma adaptação feita por Lemos e Oxley em [10] de um resultado obtido por Seymour [14] que caracteriza um par (M, M''') menor-minimal satisfazendo $k_M(A, B) > 1$, em que $\{A, B\}$ é uma 2-separação exata da matroide M''' . Utilizamos esse lema para mostrar a Proposição 4.13, supondo que o par (M, N) é menor-minimal e é um contra-exemplo para Conjectura 4.3, que existe um elemento $e \in E(M) - C$ tal que a matroide $co(M \setminus e)$ é 3-conexa e concluímos que são necessários adicionar no máximo quatro novos elementos para destruir a 2-separação $\{A, B\}$. Na quarta e última seção, no Lema 4.18 garantimos a existência de um elemento e existe tal que a matroide $co(M \setminus e)$ é 3-conexa. Em seguida, no Teorema 4.19 concluímos o principal resultado desta tese.

4.1 O caso $|E(N)| = 4$

Nesta seção mostramos que o resultado principal vale quando $|E(N)| = 4$, desde que a matroide M não possua menor isomorfo à $M(P)$, em que P é um prisma.

Lema 4.1. *Seja N uma matroide 4-circular. Se o par (M, N) é menor-minimal e todo circuito C de M contendo $E(N)$ é gerador de M , então*

$$|E(M)| \leq 8,$$

desde que M não possua um menor isomorfo ao prisma.

Demonstração. Como $|E(N)| = 4$ segue do Teorema 4.9 que $|E(M)| \leq 9$. Suponha, por contradição, que

$$|E(M)| = 9. \quad (4.1)$$

Seja C um circuito de M contendo $E(N)$. Então, o par (M, C) é restrição-minimal e C gera $E(M)$. Do Teorema 1.1 e de (4.1) segue que

$$6 \leq |C| \leq 8. \quad (4.2)$$

Vamos analisar os três casos separadamente. Seja $E(N) = \{a, b, c, d\}$.

Caso 1: Considere $|C| = 8$. Seja $e \in E(M) - C$. Note que $E(M \setminus e) = C$, implicando que

$$M \setminus e \cong U_{7,8} \text{ e } M \cong U_{7,9}.$$

Escolhendo $f \in C - E(N)$, temos que a matroide $M/f \cong U_{6,8}$. Mas, $\lambda(U_{6,8}) = 3$ e a matroide M/f é 3-conexa; uma contradição pois ela tem N como menor.

Caso 2: Considere $|C| = 7$. Escreva $E(M) - C = \{e_1, e_2\}$. Como C é um conjunto gerador de M , para todo $i \in [2]$, o conjunto $L_{e_i} = E(N) \cup e_i$ é uma linha de Tutte conexa. A partição canônica $\pi(L_{e_i})$ possui pelo menos três elementos. Observe que:

(i) Para todo $e \in E(M) - C$ existe um circuito D_e de M tal que $e \in D_e \subseteq C \cup e$. Além disso, por (3.8.3.1), temos $D_e \cap E(N) \neq \emptyset$.

(ii) Se $\pi(L_e) = \{a, b, c, d, e\}$ e $e \in E(M) - C$, então a matroide 3-conexa

$$M' = M \setminus [E(M) - C \cup e] / [C - E(N)] \cong U_{3,5}$$

tem N como menor; uma contradição.

Temos as seguintes possibilidades para as linhas de Tutte $\pi(L_{e_1})$ e $\pi(L_{e_2})$, a saber:

(2.1) Seja $\pi(L_{e_1}) = \{a, b, \{c, d\}, e_1\}$. Se

$$\pi(L_{e_1}) = \pi(L_{e_2}) \text{ ou } \pi(L_{e_2}) = \{\{a, b\}, c, d, e_2\},$$

então o conjunto $\{a, b\}$ é uma 2-classe em série da matroide 3-conexa M ; uma contradição. Se

$$\pi(L_{e_2}) = \{a, \{b, c\}, d, e_2\} \text{ ou } \pi(L_{e_2}) = \{\{a, b\}, c, d, e_2\}$$

então a matroide $M' = M/[C - E(N)]$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(2.2) Seja $\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b\}, \{c, d\}, e_1\}$. Se

$$\pi(L_{e_1}) = \pi(L_{e_2}) \text{ ou } \pi(L_{e_2}) = \{a, b, \{c, d\}, e_2\},$$

então o conjunto $\{a, b\}$ é uma 2-classe em série da matroide 3-conexa M ; uma contradição. Se $\pi(L_{e_2}) = \{a, \{b, c\}, d, e_2\}$, então a matroide $M' = M/[C - E(N)] \cong W^3$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Se $\pi(L_{e_2}) = \{\{a, c\}, \{b, d\}, e_2\}$, então $M' = M/[C - E(N)] \cong M(K_4)$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(2.3) Seja $y \in C - E(N)$ e suponha que $\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b, c\}, \{d, y\}, e_1\}$. Se

$$\pi(L_{e_2}) = \{a, \{b, y\}, \{c, d\}, e_2\}, \text{ ou}$$

$$\pi(L_{e_2}) = \{\{a, b\}, \{c, d, y\}, e_2\}, \text{ ou}$$

$$\pi(L_{e_2}) = \{\{a, b, y\}, \{c, d\}, e_2\},$$

então a matroide $M' = M/[C - E(N) \cup y]$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Se

$$\pi(L_{e_2}) = \{a, b, \{c, d, y\}, e_2\} \text{ ou } \pi(L_{e_2}) = \{\{a, y\}, \{b, c, d\}, e_2\},$$

então os conjuntos $\{a, b\}$ e $\{b, c\}$ são, respectivamente, uma 2-classe em série da matroide 3-conexa M ; uma contradição.

Caso 3: Considere $|C| = 6$. Escreva $E(M) - C = \{e_1, e_2, e_3\}$. Como C é um conjunto gerador de M , os conjuntos $L_{e_1} = E(N) \cup e_1$, $L_{e_2} = E(N) \cup e_2$ e $L_{e_3} = E(N) \cup e_3$ são linhas de Tutte conexas. As partições canônicas $\pi(L_{e_1})$, $\pi(L_{e_2})$ e $\pi(L_{e_3})$ possuem pelo menos três elementos cada. As observações feitas no **Caso 2**, continuam válidas neste caso. Assim, temos as seguintes possibilidades para essas partições:

(3.1) Se $\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b\}, \{c, d\}, e_1\}$ e $\pi(L_{e_2}) = \{\{a, c\}, \{b, d\}, e_2\}$, então

$$M' = M \setminus e_3 / [C - E(N)] \cong M(K_4)$$

é 3-conexa e tem N como um menor; uma contradição.

(3.2) Se

$$\begin{aligned}\pi(L_{e_1}) &= \{\{a, b\}, \{c, d\}, e_1\} \\ \pi(L_{e_2}) &= \{\{a, b\}, \{c, d\}, e_2\} \\ \pi(L_{e_3}) &= \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}, e_3\},\end{aligned}$$

então $M' = M \setminus e_2 / [C - E(N)] \cong W^3$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(3.3) Se

$$\pi(L_{e_i}) = \{\{a, b\}, \{c, d\}, e_i\} \text{ ou } \pi(L_{e_i}) = \{\{a, b\}, c, d, e_i\}, \forall i \in [3]$$

então o conjunto $\{c, d\}$ (ou $\{a, b\}$) é uma 2-classe em série da matroide 3-conexa M ; uma contradição.

(3.4) Se $y \in C - E(N)$ e

$$\begin{aligned}\pi(L_{e_1}) &= \{\{a, b\}, \{c, d, y\}, e_1\} \\ \pi(L_{e_2}) &= \{\{b, c\}, \{a, d, y\}, e_2\} \\ \pi(L_{e_3}) &= \{\{a, y\}, \{b, c, d\}, e_3\},\end{aligned}$$

então $M' = M / [C - E(N) \cup y] \cong M(W_4)$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(3.5) Se

$$\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, e_1\} \text{ e } \pi(L_{e_2}) = \{\{a, c\}, \{b\}, \{d\}, e_2\},$$

então $M \setminus e_3 / [C - E(N)] \cong Q_6$ (Q_6 é obtida de W^3 relaxando um único circuito hiperplano) é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(3.6) Se

$$\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, e_1\}$$

$$\pi(L_{e_2}) = \{\{a, b\}, \{c\}, \{d\}, e_2\}$$

$$\pi(L_{e_3}) = \{\{a, c\}, \{b, d\}, e_3\},$$

então $M' = M \setminus e_2 / [[C - E(N)] \cong W^3$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(3.7) Se $y \in C - E(N)$ e

$$\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b, y\}, \{c, d\}, e_1\}$$

$$\pi(L_{e_2}) = \{\{a, b, c\}, \{d, y\}, e_2\}$$

$$\pi(L_{e_3}) = \{\{b, y\}, \{a, c, d\}, e_3\},$$

então a matroide $M' = M / [(C - E(N)) \cup y]$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(3.8) Se $y \in C - E(N)$ e

$$\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b, c\}, \{d, y\}, e_1\}$$

$$\pi(L_{e_2}) = \{\{a, b, d\}, \{c, y\}, e_2\}$$

$$\pi(L_{e_3}) = \{\{a, b\}, \{c, y\}, \{d\}, e_3\},$$

então $\{a, b\}$ é uma 2-classe em série da matroide 3-conexa M ; uma contradição.

(3.9) Se $y \in C - E(N)$ e

$$\pi(L_{e_1}) = \{\{a, b, c\}, \{d, y\}, e_1\}$$

$$\pi(L_{e_2}) = \{\{a, b, d\}, \{c, y\}, e_2\}$$

$$\pi(L_{e_3}) = \{\{a, c, d\}, \{b, y\}, e_3\},$$

então a matroide $M' = M/[(C - E(N)) \cup y]$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

(3.10) Se $\{x, y\} \subseteq C - E(N)$ e

$$\begin{aligned}\pi(L_{e_1}) &= \{\{a, c, d, y\}, \{b, x\}, e_1\} \\ \pi(L_{e_2}) &= \{\{a, b, y\}, \{c, d, x\}, e_2\} \\ \pi(L_{e_3}) &= \{\{a, b, d, x\}, \{c, y\}, e_3\},\end{aligned}$$

então M é isomorfa à $M(P)$ em que P é um prisma (veja Figura 4.1). Neste caso não chegamos a uma contradição.

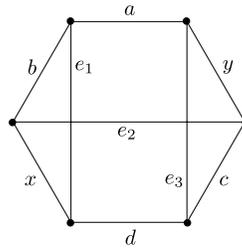


Figura 4.1: $M \cong M(P)$

□

Corolário 4.2. *Seja N uma matroide 4-circular. Se o par (M, N) é menor-minimal, então*

$$|E(M)| \leq 8,$$

desde que M não possua menor isomorfo à $M(P)$ em que P é um prisma.

Demonstração. Imediato dos Lemas 3.1 e 4.1.

□

4.2 M é hamiltoniana

Nesta seção, enunciamos nosso resultado principal sob a forma de uma Conjectura parametrizada por constantes α e β . Em seguida, no Lema 4.4 e na Proposição 4.5 encontramos

propriedades para um par (M, N) satisfazer tal conjectura através dos valores dos parâmetros α e β . A partir de agora, vamos considerar que $|E(N)| \geq 5$.

Conjectura 4.3. *Sejam N uma matroide circular. Dados α e β números inteiros, se o par (M, N) é menor-minimal, então*

$$|E(M)| \leq \alpha|E(N)| + \beta \quad (4.3)$$

Lema 4.4. *Sejam (M, N) um par menor-minimal e N circular. Suponha que M é isomorfa a uma roda ou a um poço. Se $\alpha \geq 2$ e $\beta \geq 8 - 4\alpha$, então o par (M, N) satisfaz a Conjectura 4.3.*

Demonstração. Podemos rotular os elementos de M por

$$E(M) = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n\},$$

de forma que, para cada $i \in [n]$ o conjunto $\{b_{i-1}, a_i, b_i\}$ é um triângulo de M onde os índices são tomados módulo n (veja Figura 2.1). Observe que o conjunto $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é o aro de M , o qual é um circuito hiperplano, no caso da *roda*, e é uma base, no caso do *poço*. Lembre que o *poço* é obtido da *roda* relaxando o circuito hiperplano A . Como $|E(N)| \geq 5$, temos que

$$n = r(M) \geq r(N) = |E(N)| - 1 \geq 4.$$

Se $|E(N)| \geq n$, então

$$\begin{aligned} \alpha|E(N)| + \beta &\geq \alpha n + \beta \\ &\geq 2n - 2n + \alpha n + 8 - 4\alpha \\ &= 2n + (n - 4)(\alpha - 2) \\ &\geq 2n = |E(M)|. \end{aligned}$$

Portanto, se $|E(N)| \geq n$, então a Conjectura 4.3 é válida para o par (M, N) .

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que

$$|E(N)| \leq n - 1. \quad (4.4)$$

Considere o conjunto $A - E(N) = \{a_i : i \in [n]\}$. Segue de (4.4) que

$$A - E(N) \neq \emptyset.$$

Mostraremos agora que

$$N \text{ não é menor de } M/a \text{ quando } a \in A - E(N). \quad (4.5)$$

Suponha, por contradição, que N é menor de M/a_i para algum $a_i \in A - E(N)$. Como $\{b_{i-1}, b_i\}$ é um 2-circuito de M/a_i e N é simples, então

$$b_{i-1} \notin E(N) \text{ ou } b_i \notin E(N)$$

Assim, podemos escolher elementos de $si(M/a_i)$ tal que esta tenha N como menor; uma contradição, pois $si(M/a_i)$ é 3-conexa.

Agora, mostraremos que

$$|A - E(N)| = 1 \quad (4.6)$$

De fato, suponha que (4.6) falha. Logo, $|A - E(N)| \geq 2$, pois $A - E(N) \neq \emptyset$. Então existem subconjuntos disjuntos X e Y de $E(M)$ tais que $N = M \setminus X/Y$. Por (4.5), temos

$$A - E(N) \subseteq X.$$

Mas, se a_i e a_j são elementos distintos de $A - E(N)$, então a matroide $M \setminus \{a_i, a_j\}$ não é conexa. Seja $\{Z, V\}$ uma 1-separação para $M \setminus \{a_i, a_j\}$. Como N é conexa e é menor de $M \setminus \{a_i, a_j\}$, temos que

$$E(N) \subseteq Z \text{ ou } E(N) \subseteq V,$$

digamos $E(N) \subseteq V$. Note que

$$N = M \setminus (X \cup Z) / (Y - Z) = M \setminus [(X \cup Z) - a_i] / [(Y - Z) \cup a_i]$$

contradizendo (4.5). De (4.4) e de (4.6) conclui-se que

$$|E(N)| = n - 1.$$

Mas, neste caso, temos

$$\begin{aligned} \alpha|E(N)| + \beta &= \alpha(n - 1) + \beta \\ &\geq \alpha(n - 1) + 8 - 4\alpha \\ &\geq 2n - 2 \\ &= |E(M)| - 2. \end{aligned}$$

e a Conjectura 4.3 não é válida para o par (M, N) . □

Proposição 4.5. *Suponha que (M, N) seja um par menor-minimal que é um contra-exemplo para Conjectura 4.3 tal que $|E(M)|$ é mínima. Se $\alpha \geq 3$ e $\beta \geq 8 - 4\alpha$, então todo circuito de M que contém $E(N)$ é hamiltoniano.*

Demonstração. Seja C um circuito de M contendo $E(N)$. Suponha, por contradição, que C não é hamiltoniano. Consequentemente,

$$E(M) - cl(C) \neq \emptyset. \quad (4.7)$$

Seja $f \in E(M) - cl(C)$. Segue do Lema 3.2 itens (i) e (ii) que a matroide

$$co(M \setminus f) \text{ é 3-conexa} \quad (4.8)$$

o elemento f é essencial e pertence a uma tríade T_f^* de M tal que

$$T_f^* - f \subseteq E(N). \quad (4.9)$$

Lema 4.6. *Se f é um elemento de $E(M) - cl(C)$, então f está em um leque do tipo-2, com 3 ou 5 elementos, cujo aro está contido em $E(N)$ e o(s) raio(s) pertence(m) à $E(M) - cl(C)$.*

Demonstração. Mostraremos que existe um elemento $a \in E(N)$ tal que a matroide $M/a \setminus f$ é 3-conexa e tem um menor 3-conexo W tal que o par $(W, N/a)$ é menor-minimal satisfazendo

(I) Existe leque (a, f, b) de M e $W = M/a \setminus f$; ou

(II) Existe leque (a, f, b, f', c) de M do tipo-2 com $\{f, f'\} \subseteq E(M) - cl(C)$ e $\{a, b, c\} \subseteq E(N)$ e $W = M/a \setminus f/f'$.

Seja $T_f^* = \{f, a, b\}$ a única¹ tríade de M contendo f e tal que $\{a, b\} \subseteq E(N)$. Existem apenas as duas seguintes possibilidades para f :

(i) f não está em nenhum triângulo de M ; ou

(ii) f está em algum triângulo de M .

¹A unicidade é garantida por Lemos e Oxley em [10]

Se **(i)** ocorre, então nem a nem b pertencem a triângulos de M . De fato, se existe triângulo T de M contendo a ou b , por ortogonalidade com T_f^* , temos que $\{a, b\} \subseteq T$. Como $f \notin T$, pelo Lema 2.20 a matroide $co(M \setminus f)$ não é 3-conexa; contradizendo (4.8). Portanto, $F = (a, f, b)$ é um leque de M com 3 elementos, $W = M \setminus a/f$ e **(I)** vale fazendo $e = f$ no Lema 3.7.

Se **(ii)** ocorre, então existe triângulo T_f de M contendo f . Por ortogonalidade com T_f^* e como $f \in E(N) - cl(C)$, sem perda de generalidade, podemos escrever

$$T_f = \{f, b, f'\} \text{ com } f' \in E(M) - cl(C).$$

Como o par (M, N) é menor-minimal e $E(N) \subseteq C$, então o par (M, C) é restrição-minimal. Segue do Lema 3.2 (viii) que existe uma cadeia T_1^*, T_f, T_2^* cujo aro está contido em $E(N)$ e os raios estão em $E(M) - cl(C)$. Em particular, $T_1^* = T_f^*$ e o primeiro elemento a está em $E(N)$ e não está em nenhum triângulo de M (por simetria o outro elemento terminal c desta cadeia também está em $E(N)$ e não pertence a nenhum triângulo de M). Segue do Lema 3.7 que a matroide $co(M \setminus f)$ tem um menor 3-conexo $W = M/a \setminus f/f'$ tal que o par $(W, N/a)$ é menor-minimal e (a, f, b, f', c) é um leque do tipo-2 e **(II)** vale. Logo, o Lema 4.6 segue. \square

Vamos concluir a Proposição 4.5. No Lema 4.6, concluímos que **(I)** ou **(II)** vale. Portanto, podemos aplicar o Lema 3.7 ao par menor-minimal

$$(W, N/a).$$

Deste modo,

$$|E(M)| - |E(W)| \leq 3,$$

implicando que a Conjectura 4.3 vale para o par $(W, N/a)$. Conseqüentemente,

$$|E(W)| \leq \alpha |E(N/a)| + \beta = \alpha |E(N)| - \alpha + \beta$$

Logo,

$$|E(M)| - 3 \leq \alpha |E(N)| - \alpha + \beta$$

Assim,

$$|E(M)| \leq \alpha |E(N)| + \beta - \alpha + 3.$$

Como, (M, N) é um contra-exemplo para Conjectura 4.3, devemos ter

$$-\alpha + 3 > 0,$$

ou seja,

$$\alpha < 3,$$

contradizendo a hipótese que

$$\alpha \geq 3.$$

Portanto, o circuito C é hamiltoniano, ou seja, ele é um gerador da matroide M . \square

Lema 4.7. *Toda tríade de M intersecta $E(N)$.*

Demonstração. Seja T^* uma tríade de M e suponha, por contradição, que $T^* \cap E(N) = \emptyset$. Segue do Corolário 3.3(i) que $|T^* \cap C| \geq 2$. Sejam f_1 e f_2 elementos distintos em $T^* \cap (C - E(N))$. As matroides M/f_1 e M/f_2 não são 3-conexas pois ambas têm N como menor. Segue do Lema 2.18 que existe um triângulo T_i de M contendo f_i com $i \in [2]$. Se $T_1 \neq T_2$, então podemos escolher os elementos de M de modo que a matroide $si(M/f_1)$ é 3-conexa e tem N como menor; contradizendo a escolha de M . Se $T_1 = T_2 = \{u, f_1, f_2\}$, então o conjunto $C' = (C - \{f_1, f_2\}) \cup u$ é um circuito de M que contém $E(N)$ e não é hamiltoniano; contradizendo a Proposição 4.5. \square

Corolário 4.8. *Suponha que existam elementos e e e' em $E(M) - C$ tais que a matroide $M \setminus \{e, e'\}$ tem N como menor. Então, não existem tríades T_e^* e $T_{e'}^*$ de M contendo e e e' , respectivamente, tais que $T_e^* - e = T_{e'}^* - e'$.*

Demonstração. Suponha falso, isto é, que existem elementos e e e' e tríades de M tais $T_e^* - e = T_{e'}^* - e'$. Segue do Lema 4.7 que $T_e^* \cap E(N) \neq \emptyset$ e $T_{e'}^* \cap E(N) \neq \emptyset$. Mas, $M^*|(T_e^* \cup T_{e'}^*) \cong U_{2,4}$, implicando que o conjunto $T^* = \{e, e', a\}$ é uma tríade de M . Seja C um circuito de M e de $M \setminus \{e, e'\}$ que contém $E(N)$. Por ortogonalidade, temos que $|T^* \cap C| = 1$; uma contradição. \square

Em 2003, Lemos e Oxley em [10] apresentaram no teorema a seguir um limite superior para

$$|E(M) - E(N)|.$$

Teorema 4.9. *Seja N um matroide não-vazia e suponha que o par (M, N) é menor-minimal. Então,*

$$|E(M) - E(N)| \leq 22(\lambda_1(N) - 1) + 5(\lambda_2(N) - 1).$$

No teorema acima $\lambda_1(N)$ representa o número de componentes conexas de N . Uma matroide N pode ser construída de uma coleção $\Lambda_2(N)$ de matroides 3-conexas usando as operações de soma direta e 2-soma. Segundo Cunningham e Edmonds [3], $\Lambda_2(N)$ é único a menos de isomorfismos. Seja $\lambda_2(N)$ o número de matroides em $\Lambda_2(N)$.

Se N é uma matroide circular, então

$$\lambda_1(N) = 1 \text{ e } \lambda_2(N) = |E(N)| - 2.$$

Segue do Teorema 4.9 que,

$$|E(M)| \leq 6|E(N)| - 15.$$

Até agora, vimos que

$$\alpha \geq 3 \text{ e } \beta \geq 8 - 4\alpha.$$

Nosso objetivo a partir de agora será mostrar que

$$\alpha \geq 5 \text{ e } \beta \geq 8 - 4\alpha$$

para concluir que

$$|E(M)| \leq 5|E(N)| - 12.$$

4.3 A função conectividade por Seymour

Sejam A e B subconjuntos de $E(M)$. Então, $k_M(A, B) = \min\{r(X) + r(Y) - r(M)\}$ onde o mínimo é tomado sobre todas as partições $\{X, Y\}$ de $E(M)$ com $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$. Essa função, a qual foi utilizada por Seymour em [14], é equivalente á função $k(M; X, Y)$ introduzida por Tutte em [16]. De fato, $k_M(X, Y) = k(M; X, Y) - 1$. Além disso, as definições de $k_M(X, Y)$ e $\xi(X)$ (apresentada no Capítulo 1) são equivalentes para todo subconjunto X de $E(M)$. Seymour [14], analisou a estrutura de uma matroide M tendo um menor N tal que $\{A, B\}$ é uma partição de $E(N)$ e M é menor-minimal tendo N como menor e satisfazendo $k_M(A, B) > k_N(A, B)$. O resultado de Seymour foi adaptado por Lemos e Oxley [10] para o caso em que $\{A, B\}$ é uma 2-separação exata de N .

Lema 4.10. *Seja $\{A, B\}$ uma 2-separação exata da matroide N . Suponha que o par (M, N) é menor-minimal e M satisfaz $k_M(A, B) > 1$.*

- (i) *Existem únicos subconjuntos P e Q de $E(M)$ tal que $N = M \setminus P/Q$.*
- (ii) *Seja M_z para denotar $M \setminus z$ quando $z \in P$ e denotar M/z quando $z \in Q$. Então M_z tem uma única 2-separação exata $\{X_z, Y_z\}$ tal que $A \subseteq X_z$ e $B \subseteq Y_z$.*
- (iii) *Os elementos de $P \cup Q$ podem ser rotulados como z_1, z_2, \dots, z_n de modo que $X_{z_i} = A \cup \{z_1, z_2, \dots, z_{i-1}\}$ e $Y_{z_i} = B \cup \{z_{i+1}, z_{i+2}, \dots, z_n\}$.*
- (iv) *Os elementos z_1, z_2, \dots, z_n são alternadamente elementos de P e Q .*
- (v) *M não tem circuito D tal que $D \subseteq P \cup Q$ e $|D - Q| \leq 1$, e M não tem cocircuito D^* tal que $D^* \subseteq P \cup Q$ e $|D^* - P| \leq 1$.*
- (vi) *Para todo $i > 1$ se $z_i \in P$, existe um circuito D de M tal que $\{z_{i-1}, z_i\} \subseteq D$ e $D - \{z_{i-1}, z_i\} \subseteq (Q \cap \{z_j : j > i\}) \cup B$. Se $z_i \in Q$, existe um cocircuito D^* de M tal que $\{z_{i-1}, z_i\} \subseteq D^*$ e $D^* - \{z_{i-1}, z_i\} \subseteq (P \cap \{z_j : j > i\}) \cup B$. Além disso, o resultado correspondente vale para todo $i < n$ com A e B intercaldos.*

Utilizando o Lema 4.10, Lemos e Oxley em [10] mostraram o resultado a seguir, o qual não apresentamos o enunciado em sua íntegra.

Lema 4.11. *Seja $\{A, B\}$ uma 2-separação exata da matroide N . Se M é uma matroide menor-minimal tendo N como um menor e satisfazendo $k_M(A, B) > 1$, então*

$$|E(M) - E(N)| \leq 5.$$

Seja $e \in E(M) - C$ tal que a matroide $co(M \setminus e)$ é 3-conexa. A matroide $M \setminus e$ não é 3-conexa pois tem N como menor. Sejam S_1, S_2, \dots, S_n as classes em série não-triviais de $M \setminus e$. Nosso objetivo será mostrar que $n = 1$. Isto é, a matroide $M \setminus e$ possui uma única classe em série S não-trivial. A ideia da demonstração utilizada aqui é semelhante a utilizada por Lemos e Oxley em [10]. Sendo assim, vamos supor que $|S_i| \geq 3$, para algum $i \in [n]$.

4.11.1. *Sejam $e \in E(M) - C$ e S uma classe em série não-trivial da matroide $M \setminus e$ tal que $co(M \setminus e)$ é 3-conexa.*

(i) Se $|S| \geq 3$, então $S \subseteq E(N)$.

(ii) Se $|S| = 2$, então $S \cap E(N) \neq \emptyset$.

Demonstração. (i) Sejam a e b elementos distintos em S . Note que o conjunto $\{a, b\}$ é um 2-cocircuito em $M \setminus e$. Como M é 3-conexa o conjunto $\{e, a, b\}$ é uma tríade de M . Como $|S| \geq 3$, a matroide $M^*|(S \cup e) \cong U_{2,|S|+1}$ é uma linha com pelo menos quatro elementos. Suponha, por absurdo, que existe $x \in S - E(N)$. Então a matroide $(M^* \setminus x)^* = M/x$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Portanto, $S \subseteq E(N)$.

(ii) Suponha, por contradição, que $S \cap E(N) = \emptyset$. Como $S \cup e$ é uma tríade da matroide 3-conexa M ; chegamos a uma contradição pelo Lema 4.7.

□

Decorre de (4.11.1) que existe um elemento $w_i \in S \cap E(N)$ para todo $i \in [n]$. Assim, podemos escrever

$$M' = co(M \setminus e) = M \setminus e / \bigcup_{i=1}^n (S_i - w_i). \quad (4.10)$$

Considere também a matroide

$$N' = N / \bigcup_{i=1}^n (S_i - w_i) \cap E(N). \quad (4.11)$$

4.11.2. Para todo $i \in [n]$, $S_i \cup e$ é uma colinha.

Demonstração. De fato, se a e b são elementos distintos de S_i , então o conjunto $\{e, a, b\}$ é uma tríade da matroide 3-conexa M . Portanto, $M^*|(S_i \cup e) \cong U_{2,|S_i|+1}$ e (4.11.2) vale. □

4.11.3. Para todo $i \in [n]$, temos que $S_i \subseteq E(N)$ ou $n = 2$.

Demonstração. Suponha que $S_i \not\subseteq E(N)$ para algum $i \in [n]$. Digamos $i = 1$. Seja $a \in S_1 - E(N)$. A matroide M/a não é 3-conexa pois ela tem N como menor. Seja $\{Z \cup e, V\}$ uma 2-separação para matroide M/a . Como M é 3-conexa, devemos ter

$$a \in cl(Z \cup e) \cap cl(V). \quad (4.12)$$

Suponha que $|Z| = 1$. Escrevendo $Z = \{z\}$, segue que $\{z, e\}$ é um 2-circuito de M/a . Logo, $T = \{a, z, e\}$ é um triângulo de M . Mas, por (4.11.2) $S_i \cup e$ é uma colinha para todo $i \in [n]$. Como $n \geq 2$, chegamos a uma contradição pelo critério de ortogonalidade. Portanto, $|Z| \geq 2$. Assim, $\{Z, V\}$ é uma 2-separação da matroide

$$M/a \setminus e = M \setminus e/a,$$

implicando que Z gera e em M/a por (4.12). Como as 2-separações de $M \setminus e$ são induzidas pelas classes S'_i s para todo $i \in [n]$, devemos ter

$$Z \subseteq S_i \text{ ou } V \subseteq S_i,$$

par algum $i \in [n]$. Suponha que $Z \subseteq S_i$. Então $S_i \cup a$ gera e em M , implicando que $n = 2$. De fato, se $n \geq 3$, então existe $j \in [n]$, com $j \neq i$, tal que $S_j \cup e$ é uma colinha por (4.11.2); contradizendo o critério de ortogonalidade. Logo, $n = 2$. Portanto, $V \subseteq S_i$ para algum $i \in [n]$. Como $Z \cup a$ gera e em M , existe um circuito D de M tal que

$$e \in D \subseteq Z \cup \{e, a\}.$$

Segue de (4.11.2) que existe uma tríade T^* de M tal que

$$e \in T^* \subseteq V \cup e \subseteq S_i \cup e.$$

Mas, $|D \cap T^*| = 1$; contradizendo o critério de ortogonalidade. □

A partir de agora, com o objetivo de tornar o texto menos carregado de notação, utilizamos a desigualdade (1.1) ao invés da desigualdade (4.3). Por conveniência, reordenamos os S'_i s de forma que $|S_i| = 2$ se $i \in [t]$ e $|S_i| \geq 3$ se $1 + t \leq i \leq n$. Consequentemente, vale que

- (1) $|S_i - w_i| = 1$ e $|(S_i - w_i) \cap E(N)| \in \{0, 1\}$ quando $i \in [t]$;
- (2) $|S_i - w_i| = |(S_i - w_i) \cap E(N)| \geq 2$ quando $t + 1 \leq i \leq n$.

4.11.4. $M' \neq N'$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $M' = N'$. Assim,

$$\begin{aligned}
|E(M)| - 1 - \sum_{i=1}^n |(S_i - w_i)| &= |E(N)| - \sum_{i=1}^n |(S_i - w_i) \cap E(N)| \\
|E(M)| &= |E(N)| + \sum_{i=1}^n |(S_i - w_i)| - \sum_{i=1}^n |(S_i - w_i) \cap E(N)| + 1 \\
|E(M)| &= |E(N)| + \sum_{i=1}^t |(S_i - w_i)| - \sum_{i=1}^t |(S_i - w_i) \cap E(N)| + 1 \\
|E(M)| &\leq |E(N)| + 3 \leq 2|E(N)|.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|E(M)| \leq |E(N)| + 3 \leq 5|E(N)| - 12;$$

uma contradição, pois o par (M, N) é um contra-exemplo para Conjectura 4.3. \square

Lema 4.12. *A matroide $co(M \setminus e)$ possui uma única classe em série S não-trivial, isto é, $n = 1$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $n \geq 2$. Suponha que existem subconjuntos disjuntos X e Y de $E(M)$ tais que a matroide

$$M'' = M \setminus (X \cup e) / Y \cup \left[\bigcup_{i=1}^n (S_i - w_i) \right]$$

é menor da matroide $M' = co(M \setminus e)$, descrita em (4.10), e o par (M'', N') é menor-minimal, em que N' foi descrita em (4.11). Suponha que Y foi escolhido tal que $|Y|$ seja maximal. Vamos mostrar que $X = Y = \emptyset$, isto é, $M'' = M' = co(M \setminus e)$. Para tal mostraremos que a matroide $H = M \setminus X / Y$ é 3-conexa (note que H tem N como menor).

4.12.1. *$H = M \setminus X / Y$ é conexa.*

Demonstração. Como $n \geq 2$, temos que $|E(N')| \geq 2$. Assim, a matroide M'' não possui laços nem colaços. Agora, afirmamos que e não é um colaço em $H = M \setminus X / Y$. Assuma o contrário. Então M tem um cocircuito D^* tal que $e \in D^* \subseteq X \cup e$, em que $|D^*| \geq 3$ pois M é 3-conexa. Escolha $f \in D^* - e$. Então o conjunto $\{e, f\}$ é uma união de cocircuitos de $M \setminus (X - f) / Y$. Logo, f é um colaço da matroide $M \setminus (X - f) \cup e / Y$. Assim,

$$M \setminus (X \cup e) / Y = M \setminus (X - f) \cup e / Y \cup f.$$

Consequentemente,

$$M \setminus (X \cup e) / Y \cup \left[\bigcup_{i=1}^n (S_i - w_i) \right] = M \setminus (X - f) \cup e / (Y \cup f) \left[\bigcup_{i=1}^n (S_i - w_i) \right];$$

uma contradição pela escolha de Y . Concluímos que, e não é um colaço de $H = M \setminus X / Y$. Portanto, $H = M \setminus X / Y$ é conexa. \square

4.12.2. Em $H = M \setminus X / Y$ não existe 2-circuito contendo o elemento e .

Demonstração. Suponha falso e seja $\{e, f\}$ um 2-circuito de H contendo e . Contudo, $n \geq 2$ e $S_i \cup e$ é uma colinha para todo $i \in [n]$ por (4.11.2); o que contradiz o critério de ortogonalidade. \square

4.12.3. $H = M \setminus X / Y$ é 3-conexa.

Demonstração. Segue de (4.12.1) que H é conexa e de (4.12.2) que a matroide H não possui 2-circuito contendo o elemento e . Suponha, por contradição, que H não é 3-conexa. Seja $\{Z \cup e, V\}$ uma 2-separação tal que $e \notin Z$ e $|Z| \geq 2$. Então $\{Z, V\}$ é uma 2-separação da matroide $M \setminus (X \cup e) / Y$. Assim, par algum $i \in [n]$, temos que

$$Z \subseteq S_i \text{ ou } V \subseteq S_i.$$

Note que Z gera e em $H = M \setminus X / Y$, implicando que Z não está contido em S_i para todo $i \in [n]$. Logo, $V \subseteq S_i$ para algum $i \in [n]$. Sendo assim, em M , existe um circuito D tal que $e \in D \subseteq Z \cup e$ e existe uma tríade T^* tal que $e \in T^* \subseteq V \cup e \subseteq S_i \cup e$; contradizendo o critério de ortogonalidade. Portanto, $|Z| = 1$. Como $\{Z \cup e, V\}$ é uma 2-separação da matroide $H = M \setminus X / Y$, então ou $Z \cup e$ ou V é um 2-circuito ou é um 2-cocircuito. Segue de (4.12.2) que $Z \cup e$ é um 2-cocircuito. Neste caso, $Z - e$ é um colaço da matroide conexa $M \setminus (X \cup e) / Y$; uma contradição. Portanto, $H = M \setminus X / Y$ é 3-conexa. \square

Por (4.12.3) a matroide $H = M \setminus X / Y$ é 3-conexa. Como H tem N como menor, pela escolha de M , devemos ter $H = M$. Assim, $X = Y = \emptyset$. Logo,

$$M' = M'' = (M \setminus e) / \left[\bigcup_{i=1}^n (S_i - w_i) \right]$$

em que o par (M', N') é menor-minimal.

4.12.4. $|E(N')| \geq 4$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $|E(N')| \in \{2, 3\}$. Consequentemente, $n \in \{2, 3\}$, isto é, existem duas ou três classes em série. Seja $M'' \neq N'$ uma matroide 3-conexa, menor de M' e tal que o par (M'', N') seja menor-minimal. Segundo Bixby e Coullard [2], temos que $|E(M'')| - |E(N')| \leq 3$, implicando que

$$4 \leq |E(M'')| \leq 6. \quad (4.13)$$

Após a demonstração de (4.12.3) concluímos que $M' = M''$. Suponha primeiro que $n = 2$. Então

$$|E(M)| = |E(M'')| + |S_1| + |S_2| - 1 \quad (4.14)$$

e

$$|E(N)| \geq |E(N')| + |S_1| + |S_2| - 3 \quad (4.15)$$

Usando (4.13) e (4.14) e a hipótese $|E(M)| > 5|E(N)| - 12 > 13$, pois $|E(N)| \geq 5$, temos que

$$\begin{aligned} |S_1| + |S_2| + 5 &\geq |E(M)| > 13 \\ |S_1| + |S_2| &> 8 \end{aligned} \quad (4.16)$$

Segue de (4.15) e de (4.16) que

$$\begin{aligned} |S_1| + |S_2| + 5 &> 5|E(N')| + 5(|S_1| + |S_2|) - 27 \\ 32 - 5|E(N')| &> 4(|S_1| + |S_2|) > 32; \end{aligned}$$

um absurdo.

Agora, suponha que $n = 3$. Então,

$$|E(M)| = |E(M'')| + |S_1| + |S_2| + |S_3| - 2 \quad (4.17)$$

e

$$|E(N)| \geq |E(N')| + |S_1| + |S_2| + |S_3| - 5 \quad (4.18)$$

Usando (4.13) e (4.17) e as hipóteses $|E(M)| > 5|E(N)| - 12 > 13$, pois $|E(N)| \geq 5$, temos que

$$\begin{aligned} |S_1| + |S_2| + |S_3| + 4 &\geq |E(M)| > 13 \\ |S_1| + |S_2| + |S_3| &> 9 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Segue de (4.18) e de (4.19) que

$$\begin{aligned} |S_1| + |S_2| + |S_3| + 4 &> 5|E(N')| + 5(|S_1| + |S_2| + |S_3|) - 37 \\ 41 - 5|E(N')| &> 4(|S_1| + |S_2| + |S_3|) > 36; \end{aligned}$$

um absurdo. Portanto, $|E(N')| \geq 4$. □

Agora o par (M', N') é menor-minimal, N' é circular e $|E(N')| \geq 4$ por (4.12.4). Além disso, podemos supor que $n \geq 4$. Como o par (M, N) é um contra-exemplo minimal para Conjectura 4.3, segue que a mesma é válida para o par menor-minimal (M', N') , pois $|E(M')| < |E(M)|$. Logo,

$$\begin{aligned} |E(M')| &\leq 5|E(N')| - 12 \\ |E(M)| &\leq 1 + \sum_{i=1}^n |S_i - w_i| + 5[|E(N)| - \sum_{i=1}^n |(S_i - w_i) \cap E(N)|] - 12 \\ |E(M)| &\leq 5|E(N)| - 12 + \sum_{i=1}^n |S_i - w_i| - 5 \sum_{i=1}^n |(S_i - w_i) \cap E(N)| + 1 \quad (4.20) \end{aligned}$$

Suponha por (4.11.3) que $S_i \subseteq E(N)$, para todo $i \in [n]$. Assim, a equação (4.20) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} |E(M)| &\leq 5|E(N)| - 12 - 4 \sum_{i=1}^n |S_i - w_i| + 1 \\ |E(M)| &\leq 5|E(N)| - 12; \end{aligned}$$

uma contradição, pois (M, N) é um contra-exemplo para Conjectura 4.3. Portanto, $n = 1$. □

Agora seja S a única classe em série não-trivial da matroide $M \setminus e$. Como

$$\{S, E(M \setminus e) - S\}$$

é uma 2-separação da matroide $M \setminus e$ podemos escrever

$$M \setminus e = M_S \oplus_2 M_{E(M \setminus e) - S},$$

em que p é o ponto base da operação de 2-soma. Além disso, como a matroide $M' = co(M \setminus e)$ é 3-conexa, segue que a matroide $M_{E(M \setminus e) - S}$ é 3-conexa.

O Lema 4.11 nos diz que, nas condições citadas, é necessário adicionar no máximo cinco novos elementos para destruir a 2-separação exata $\{A, B\}$. Vamos mostrar na Proposição 4.13 que acrescentado as hipóteses que todo circuito contendo $E(N)$ é hamiltoniano e que existe um elemento e tal que a matroide $co(M \setminus e)$ é 3-conexa (fato este que será mostrado no Lema 4.18) concluímos que é necessário adicionar no máximo quatro novos elementos para destruir uma tal 2-separação exata. Esse lema será fundamental para conclusão do principal resultado, o qual será apresentado na próxima seção. A demonstração será dividida em etapas. Utilizamos frequentemente o Lema 4.10 e a Geometria de Tutte.

Proposição 4.13. *Seja M uma matroide que não possui menor isomorfo a matroide $M(P)$ em que P é um prisma. Sejam (M, N) um par menor-minimal e N uma matroide circular tal que todo circuito C de M contendo $E(N)$ é hamiltoniano. Suponha que existe um elemento $e \in E(M) - E(N)$ tal que a matroide $M' = co(M \setminus e)$ é 3-conexa. Se o par (M'', N') é menor-minimal, então a matroide $M''' = M \setminus (X \cup e) / Y$ tem uma única 2-separação exata. Além disso,*

$$|E(M) - E(M''')| \leq 4.$$

Demonstração. Seja e um elemento de $E(M) - E(N)$. Por hipótese, existe uma classe em série S de M com $S \subseteq E(N)$ a qual é única pelo Lema 4.12. Segue das hipóteses e da unicidade de S que as matroides 3-conexas podem ser escritas, do seguinte modo,

$$M' = co(M \setminus e) = M \setminus e / (S - w) \quad e \quad M'' = M \setminus (X \cup e) / Y \cup (S - w)$$

para algum $w \in S$. Além disso, o par (M'', N') é menor-minimal, em que $N' = N / (S - w)$. Note que a matroide $M''' = M \setminus (X \cup e) / Y$ é obtida da matroide 3-conexa $M'' = M'' / (S - w)$ adicionando-se o conjunto $S - w$ em série com o elemento w uma vez que S é a única classe em série na matroide $M \setminus e$. Assim, a única 2-separação exata de M''' é

$$\{S, E(M''') - S\} = \{S, E(M'') - w\}.$$

Vamos mostrar no Lema 4.15 que o par (M, M''') satisfaz as hipóteses do Lema 4.10. Vamos utilizar a teoria sobre a *Árvore de Decomposição* de uma matroide conexa M , a qual é denotada por $T(M)$. A demonstração do resultado a seguir e a teoria sobre a árvore de decomposição podem ser encontradas em [10].

Lema 4.14. *Seja M uma matroide conexa e $\{Z, V\}$ uma partição de $E(M)$ tal que $\min\{|Z|, |V|\} \geq 2$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\{Z, V\}$ é uma 2-separação de M ;
- (ii) $T(M)$ tem uma aresta ou um vértice que exhibe $\{Z, V\}$ em que, no último caso, o vértice é rotulado por um circuito ou um cocircuito.

Lema 4.15. *A matroide M é menor-minimal tendo a matroide M''' como menor e satisfazendo*

$$k_M(S, E(M''') - S) > 1.$$

Demonstração. Claramente, M tem a matroide M''' como menor e como M é 3-conexa, temos

$$k_M(S, E(M''') - S) > 1.$$

Suponha, por contradição, que existe uma matroide \tilde{M} diferente de M , tendo $M''' = M \setminus (X \cup e) / Y$ como menor e satisfazendo

$$k_{\tilde{M}}(S, E(M''') - S) > 1.$$

Se \tilde{M} é menor de $M \setminus e$, então

$$1 = k_{M \setminus e}(S, E(M''') - S) \geq k_{\tilde{M}}(S, E(M''') - S);$$

uma contradição. Agora seja $z \in X \cup Y$ e considere a matroide $M_z = M \setminus z$ quando $z \in X$ e $M_z = M / z$ quando $z \in Y$. A matroide M_z não é 3-conexa pois tem N como menor. Logo, podemos escrever $M_z = M_1 \oplus_2 M_2$, em que M_1 é um vértice terminal da árvore de decomposição $T(M_z)$ e p é o ponto base da operação de 2-soma.

4.15.1. $E(M_1) - p \not\subseteq (X \cup e) \cup Y$.

Demonstração. Suponha falso, isto é, $E(M_1) - p \subseteq (X \cup e) \cup Y$. Suponha que M_1 seja 3-conexa e $|E(M_1)| \geq 4$. Seja $f \in C \cap [E(M_1) - p]$. Pela escolha de M as matroides $M \setminus f$ e M / f não são 3-conexas pois ambas têm N como menor. Pelo Lema 3.4, existe uma tríade T_f^* de M tal que $f \in T_f^*$ e $T_f^* - f \subseteq E(N)$. Como M_1 é 3-conexa, existe circuito D de M_1 tal que $f \in D \subseteq E(M_1) - p$. Porém, $|T_f^* \cap D| = 1$; contradizendo o critério de ortogonalidade. Em $T(M \setminus x)$, suponha que M_1 é circular (ou melhor, um triângulo). Sejam f_1 e f_2 elementos distintos em $[C - E(N)] \cap [E(M_1) - p]$. Então o conjunto $T^* = \{x, f_1, f_2\}$ é uma tríade de M que não intercepta $E(N)$; contradizendo o Lema 4.7. Agora em $T(M / y)$, suponha que M_1 seja cocircular. Como M_1 é hamiltoniana,

M_1 deve ser uma tríade. Além disso, $E(M_1) - p \not\subseteq C$ e $[E(M_1) - p] \cap X \neq \emptyset$. Escrevendo $E(M_1) = \{p, x, u\}$, com $x \in X$ e $u \in C$, segue que o conjunto $(C - \{y, u\}) \cup x$ contém um circuito C' de M que contém $E(N)$ e não é hamiltoniano; uma contradição. \square

4.15.2. $|E(M'')| \geq 4$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $|E(M'')| = 3$. Então $M'' = N'$ implicando que $|E(M''')| = |E(N)|$. Como M''' tem N como menor, devemos ter

$$M''' = N = M \setminus [E(M) - C] / [C - E(N)].$$

Considere os conjuntos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$ com $t \geq 3$ e $E(N) - S = \{n_1, n_2\}$. Note que o conjunto $L_e = E(N) \cup e$ é uma linha de Tutte conexa cuja partição canônica, $\pi(L_e)$, pode ser:

- (i) $X_1 = \{s_1\}, \dots, X_t = \{s_t\}, X_{t+1} = \{n_1\}, X_{t+2} = \{n_2\}$ e $X_{t+3} = \{e\}$.
- (ii) $X_1 = \{s_1\}, \dots, X_t = \{s_t\}, X_{t+1} = \{n_1, n_2\}$ e $X_{t+2} = \{e\}$.
- (iii) $X_1 = \{s_1, n_1\}, X_2 = \{s_2\}, \dots, X_t = \{s_t\}, X_{t+1} = \{n_2\}$ e $X_{t+2} = \{e\}$.
- (iv) $X_1 = \{s_1, n_1\}, X_2 = \{s_2, n_2\}, X_3 = \{s_3\}, \dots, X_t = \{s_t\}$ e $X_{t+2} = \{e\}$.

No caso (i), a matroide $M_1 \cong U_{t+1, t+3}$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição pois $|E(M_1)| < |E(M)|$. Nos casos (ii) e (iii) temos uma única 2-classe em série na linha de Tutte L_e . Segue do Lema 4.11 que são necessários no máximo cinco elementos para destruir essa 2-separação. Como $|E(N)| = |S| + 2$, segue que $|E(M)| \leq |S| + 8$. Mas, $|E(M)| > 5|E(N)| - 12 = 13$, implicando que $|S| \leq 2$; uma contradição. No caso (iv) a linha de Tutte L_e possui duas 2-classes em série. Segue do Lema 4.11 que $|E(M)| \leq 16$, implicando que $|S| \leq 3$. Suponha que $|S| = 3$. Assim, a partição canônica de L_e é

$$X_1 = \{s_1, n_1\}, X_2 = \{s_2, n_2\}, X_3 = \{s_3\} \text{ e } X_4 = \{e\}. \quad (4.21)$$

Considere a matroide M_1 tal que $E(M_1) = E(N) \cup (P \cup Q \cup e)$ em que a existência dos conjuntos P e Q é garantida pelo Lema 4.10 para destruir a 2-separação $\{X_1, E(N) - X_1\}$ de $M''' = N$. Ainda mais, segundo o Lema 4.11, vale que $|P \cup Q| \leq 5$. Assim, $|E(M_1)| \leq 11$. Se M_1 é 3-conexa, chegamos a uma contradição, pois $|E(M_1)| < |E(M)|$. Agora, M_1 é

menor de M e é menor-minimal tendo N como menor e satisfazendo $k_{M_1}(X_1, E(N) - X_1) > 1$. Segue do Lema 3.4 de [10] que $\lambda_2(M_1) < \lambda_2(N) = 3$. Suponha que $\lambda_2(M_1) = 2$ e escreva $M_1 = H_1 \oplus_2 H_2$ em que p é o ponto base da operação de 2-soma. As matroides M_1 , H_1 e H_2 são hamiltonianas, pois M é hamiltoniana. Suponha que $e \in E(H_1)$ e note que H_1 é uma matroide 3-conexa. Se H_2 é 3-conexa com $|E(H_2)| \geq 4$, então $S \cup \{e, n_1\} \subseteq E(H_1)$. Neste caso, existe elemento $f \in E(M) - C$ tal que as matroides $M \setminus f$ e M/f não são 3-conexas. Pelo Lema 3.4, existe uma tríade T_f^* de M contendo f e tal que $T_f^* - f \subseteq E(N)$; chegamos a uma contradição, pois H_1 e H_2 são 3-conexas. Note que H_2 não pode ser um cocircuito. Logo, H_2 é um circuito (isto é, um triângulo). Se $|E(H_2) \cap E(N)| \leq 1$, então a matroide H_1 é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Logo, $|E(H_2) \cap E(N)| = 2$. Segue de (4.21) que

$$E(H_2) - p = X_2 = \{s_2, n_2\}.$$

Segue de Lemos e Oxley [10] que existe um elemento $z_1 \in E(M) - E(M_1)$ tal que o conjunto $T_f^* = \{z_1, s_2, n_2\}$ é uma tríade de M . Se a matroide \tilde{M} cujo conjunto de elementos é $E(\tilde{M}) = E(M_1) \cup z_1$ é 3-conexa, então obtemos uma contradição pois $|E(\tilde{M})| \leq 12$ e \tilde{M} tem N como menor. A matroide $M_{z_1} = M \setminus z_1$ não é 3-conexa pois tem $\{X_2, E(M_{z_1}) - X_2\}$ como 2-separação. Seja $\{Z, V\}$ outra 2-separação para M_{z_1} . Segue de (4.21) que

$$|Z \cap E(N)| \leq 1 \quad \text{ou} \quad |V \cap E(N)| \leq 1. \quad (4.22)$$

Seja H_e o vértice da árvore $T(M_{z_1})$ contendo o elemento e . Note que H_e é 3-conexo. Se existe vértice H_s de $T(M_{z_1})$ contendo $s \in S$, então H_s é um triângulo, é adjacente a H_e e é um vértice terminal por (4.22) e (4.15.1). Em $T(M_{z_1})$, seja H_n um vértice contendo $n \in E(N) - S$. Por (4.15.1) H_n é terminal e além disso é um triângulo. Seja K um vértice no caminho entre H_e e H_n . Se K é 3-conexo com $|E(K)| \geq 4$, então, por ortogonalidade, chegamos a uma contradição. Suponha que K seja um triângulo. Neste caso existe um outro vértice K' neste caminho o qual é uma tríade. Assim, existe $x \in E(K') \cap E(M)$ tal que a matroide $co(M \setminus x)$ é 3-conexa pelo Lema 2.20 e tem N como menor; uma contradição. Suponha que K seja uma tríade. Neste caso também existe um elemento $x \in E(K) \cap E(M)$ tal que a matroide $co(M \setminus x)$ é 3-conexa pelo Lema 2.20. Se $co(M \setminus x)$ tem N como menor, então chegamos a uma contradição. Caso contrário, existe uma tríade T_x^* de M tal que $T_x^* - x \subseteq E(N)$. Isto implica que existem elementos em série na matroide 3-conexa H_e ; uma contradição. Concluímos que $T(M \setminus z_1)$ é uma estrela e portanto a matroide $co(M \setminus z_1)$ é 3-conexa. Consequentemente, existe um elemento $z_1 \in E(M) - C$ tal que a matroide $M \setminus z_1$ possui uma única 2-classe em série e

a matroide $co(M \setminus x)$ é 3-conexa. Neste caso, podemos seguir a mesma demonstração de Lemos e Oxley em [10]. \square

Vamos analisar a árvore $T(M_z)$. Fazendo, $A = S \cup e$ e $B = E(M'') - w$, em que $w \in S \cap E(M'')$, temos que:

4.15.3. *Se M_1 é 3-conexa em $T(M_z)$, então $|A \cap E(M_1)| \leq 1$.*

Demonstração. Suponha que $|A \cap E(M_1)| \geq 2$. Então

(i) $A \subseteq E(M_1) - p$; ou

(ii) $A - E(M_1) = \{a\}$ e o vértice M'_1 adjacente à M_1 em $T(M_z)$ é um circuito tal que $A \subseteq E(M_1) \cup E(M'_1)$. Além disso, $\lambda_2(T(M/z)) \geq 3$.

De fato, existe circuito D contendo $f \in A \cap E(M_1) - p$ e contido em $E(M_1) - p$. Segue de (4.11.2) que $S \cup e$ é uma colinha de M . Logo, por ortogonalidade, devemos ter

$$|D \cap (S \cup e)| \geq |S \cup e| - 1 = |S|. \quad (4.23)$$

Suponha que (i) não vale. Então, por (4.23), segue que $S \cup e - E(M_1) = \{a\}$. Seja M'_1 o vértice de $T(M_z)$ adjacente a M_1 . Como existe tríade T^* de M contendo a e tal que $T^* - a \subseteq E(M_1) - p$, segue que a e p estão em série. Portanto, o vértice M'_1 é um circuito. Como $T(M/z)$ não possui vértice terminal sendo circuito, segue que $\lambda_2(T(M/z)) \geq 3$.

4.15.4. *Se $|(B \cup w) \cap E(M_1)| \geq 2$, então $|(B \cup w) - E(M_1)| \leq 1$.*

Demonstração. De fato, se $|(B \cup w) - E(M_1)| \geq 2$, então $(B \cup w) \cap E(M_1)$ é um 2-separador da matroide 3-conexa M_1 ; um absurdo. \square

Suponha que (i) vale. Se $B \cap E(M_1) = \emptyset$, então existe uma 2-separação $\{Z, V\}$ de M_z tal que $A \subseteq Z$ e $B \subseteq V$, implicando que

$$1 = k_{M_z}(A, B) \geq k_{\tilde{M}}(A, B) > 1; \quad (4.24)$$

uma contradição. Logo, podemos supor que $B \cap E(M_1) \neq \emptyset$, implicando que $|(B \cup w) \cap E(M_1)| \geq 2$. Segue de (4.15.4) que $|(B \cup w) - E(M_1)| \leq 1$. Se $B \cup w \subseteq E(M_1)$, então $E(M_2) \subseteq X \cup Y$ e M_1 é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Logo,

$|(B \cup w) - E(M_1)| = |B - E(M_1)| = 1$, implicando que a matroide $M_1 \cong M \setminus [X - E(M_1)]/[Y - E(M_1)]$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

Suponha que **(ii)** vale. Se $B \cap E(M_1) = \emptyset$, então o circuito M'_1 exhibe uma 2-separação $\{Z, V\}$ para M_z tal que $A \subseteq S$ e $B \subseteq V$ e (4.24) vale; uma contradição. Se $|B \cap E(M_1)| = 1$, então existe uma 2-separação para M_z que induz uma 2-separação para a matroide 3-conexa M'' ; uma contradição. Portanto, $|B \cap E(M_1)| \geq 2$, implicando que $|B - E(M_1)| \leq 1$ por (4.15.4). Se $B \subseteq E(M_1)$, então a matroide M_1 descrita no caso **(i)** é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Logo, $|B - E(M_1)| = 1$; implicando que:

(iii) $|B \cap E(M'_1)| = 1$, $(\lambda_2(T(M \setminus z)) = 2$ e $\lambda_2(T(M/z)) \geq 3$); ou

(iv) $|B - E(M_1) \cup E(M'_1)| = 1$.

Nos dois casos, fazendo

$$\{w\} = A - E(M_1) \quad \text{e} \quad \{b\} = B - E(M_1),$$

segue que o ponto base p que liga M_1 à M'_1 exhibe uma 2-separação que induz uma 2-separação para matroide 3-conexa M'' ; uma contradição. Portanto, $|A \cap E(M_1)| \leq 1$. \square

Em (4.15.3) concluímos que $|A \cap E(M_1)| \leq 1$. Seja $a \in A \cap E(M_1)$. Segue de (4.11.2) que $S \cup e$ é uma colinha de M . Existe tríade T_a^* de M contendo a e tal que $(T_a^* - a) \cap [E(M_1) - p] = \emptyset$. O elemento a é gerado por $T_a^* - a$ em $(M_z)^*$. Logo, o conjunto $\{a, p\}$ é uma 2-classe em série de M_z . Fazendo, $a = w$, temos que a é um colaço da matroide 3-conexa $M'' = M \setminus (X \cup e)/[Y \cup (S - w)]$; uma contradição. Portanto, $A \cap E(M_1) = \emptyset$. Suponha que $B \cap E(M_1) = \emptyset$. Então $E(M_1) \subseteq (X \cup e) \cup Y$; contradizendo (4.15.1). Suponha que $|B \cap E(M_1)| = 1$ e escreva $B \cap E(M_1) = \{b\}$. Então, para todo $f \in E(M_1) - \{b, p\}$ as matroides $M \setminus f$ e M/f não são 3-conexas pois ambas têm N como menor. Pelo Lema 3.4, existe uma tríade T_f^* de M contendo f e tal que $T_f^* - \subseteq E(N)$. Por ortogonalidade, devemos ter $b \in T_f^*$. Escreva $T_f^* = \{f, b, b_f\}$. Analogamente, existe $f' \in E(M_1) - \{f, b, p\}$ tal que o conjunto $T_{f'}^* = \{f', b, b_{f'}\}$ é uma tríade de M com $b_{f'} \in E(N)$. Se $b_f = b_{f'}$, então $M^*|(T_f^* \cup T_{f'}^*) \cong U_{2,4}$, implicando que a matroide $(M^* \setminus f)^* = M/f$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Suponha que $b_f \neq b_{f'}$. Neste caso, $\{b_f, b_{f'}\}$ está contido em uma classe em série de M_z . Como M é 3-conexa, se $z = x \in X$, então o conjunto $T_x^* = \{x, b_f, b_{f'}\}$ é uma tríade de M . Fazendo, $b_{f'} = w$, concluímos que w é um colaço

da matroide 3-conexa M'' ; uma contradição. Se $z = y \in Y$, então o conjunto $\{b_f, b_{f'}, y\}$ está contido em uma classe em série da matroide 3-conexa M ; uma contradição. Suponha que $|B \cap E(M_1)| \geq 2$. Segue de (4.15.4) que $|B - E(M_1)| \leq 1$. Se $B \subseteq E(M_1)$, então o ponto base p da 2-soma $M_1 \oplus_2 M_2$ exibe uma 2-separação $\{Z, V\}$ para M_z tal que $A \subseteq Z$ e $B \subseteq V$, implicando que (4.24) vale; uma contradição. Suponha que $|B - E(M_1)| = 1$ e seja $B - E(M_1) = \{b\}$. Neste caso, temos que $|B \cap E(M_1)| \geq 2$ e $|(B \cup w) - E(M_1)| \geq 2$, pois $\{b, w\} \subseteq E(M_2) - E(M_1)$. Isto implica que existe uma 2-separação para M'' induzida pela 2-separação exibida pela aresta p para $M_z = M_1 \oplus_2 M_2$; um absurdo pois M'' é 3-conexa.

Agora suponha que M_1 é um circular em $T(M \setminus x)$. Suponha que $|E(M_1)| \geq 4$ e note que:

- (a) $|S \cap E(M_1)| \leq 1$. Do contrário, existem elementos distintos w_1 e w_2 em $S \cap E(M_1)$, implicando que os conjuntos $T_x^* = \{x, w_1, w_2\}$ e $T_e^* = \{e, w_1, w_2\}$ são tríades de M . Assim, $M^*|(T_x^* \cup T_e^*) \cong U_{2,4}$, implicando que o conjunto $T^* = \{x, e, w_1\}$ é uma tríade de M . Mas, $|T^* \cap C| = 1$; contradizendo o critério de ortogonalidade.
- (b) $Y \cap E(M_1) = \emptyset$. Caso contrário, o conjunto $[E(M_1) - p] \cup x$ é uma colinha de M com pelo menos quatro elementos, implicando que existe $y \in Y$ tal que a matroide M/y é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.
- (c) $X \cap E(M_1) = \emptyset$. Isto decorre do fato de que M é gerada por todo circuito C que contém $E(N)$ e conseqüentemente M_1 é gerada pelo circuito $[C \cap E(M_1)] \cup p$. Assim, $E(M_1) - p \subseteq C - X$.

Portanto, M_1 é um triângulo. Ou seja, os vértices terminais da árvore $T(M \setminus x)$ são todos triângulos. Assim, $T_x^* = (E(M_1) - p) \cup x$ é uma tríade de M . Segue do Lema 4.7 que $T_x^* \cap E(N) \neq \emptyset$. Além disso, note que $Y \cap T_x^* \neq \emptyset$. De fato, se $T_x^* - x \subseteq S$, então o conjunto $S \cup (T_x^* - x)$ é uma classe em série da matroide $M \setminus \{x, e\}$; contradizendo o Corolário 4.8.

Seja H o vértice de $T(M \setminus x)$ que contém o elemento e . Note que H não é circular. De fato, como M é hamiltoniana e gerada por um circuito C , então H também é hamiltoniana. Se H for circular, então $e \in C$; uma contradição. Logo, ou H é 3-conexa ou é um cocircuito. Seja p uma aresta incidente ao vértice H . Uma das componentes de $T(M \setminus x) - p$

contém um circuito contendo o elemento e . Por (4.11.2), $S \cup e$ é uma colinha de M , assim, devemos ter $S - w$ contido nesta componente, para algum $w \in S$. Portanto, os vértices de $T(M \setminus x)$ adjacentes à H contém no máximo um elemento de S (os demais estão em H). A aresta p que liga H a um vértice que contém um elemento de S exibe uma 2-separação para matroide $M \setminus x$. Como $S \cup e$ é uma colinha de M , os elementos de S que não estão em H estão em série com seus respectivos pontos bases. Ou seja, os vértices adjacentes à H que contém elemento de S são circuitos.

4.15.5. *Seja $\{Z, V\}$ uma 2-separação de M_z . Se B intercepta Z e V , então $S \cup B$ intercepta um deles em no máximo um elemento.*

Demonstração. Suponha que $S \cup B$ intercepta Z e V em dois ou mais elementos. Então, a 2-separação $\{Z, V\}$ induz uma 2-separação para matroide 3-conexa M'' ; uma contradição. \square

Decorre de (4.15.5) que os vértices de $T(M \setminus x)$ têm grau dois, exceto H e os vértices terminais. Suponha que $T(M \setminus x)$ é uma estrela tendo H como vértice central e os vértices terminais sendo triângulos (cada um contendo um único elemento de $E(N)$). Se H é um cocircuito, então a matroide $M' = co(M \setminus e)$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Suponha que H é 3-conexo. Neste caso, a matroide $co(M \setminus x)$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Portanto, $T(M \setminus x)$ não é uma estrela. Logo, existe pelo menos um vértice adjacente à H que não é terminal. Note que H não é um cocircuito. Assim, H é 3-conexo com $|E(H)| \geq 4$ e não é um vértice terminal. Considere em $T(M \setminus x)$ o caminho H, H_1, \dots, K, M_1 , em que H_1 está ligado à H pela aresta p e M_1 é um vértice terminal (triângulo). Note que, se $E(H_1) \cap S \neq \emptyset$, então H_1 é um vértice terminal. De fato, podemos escolher $w \in E(H_1)$. Se H_1 não é terminal, então a aresta que liga H à H_1 exibe uma 2-separação $\{Z, V\}$ para $M \setminus x$ que induz uma 2-separação para matroide 3-conexa M'' ; contradizendo (4.15.5). Suponha que $E(H_1) \cap S = \emptyset$ e que H_1 não é terminal. Note que $E(K) \cap E(M) \subseteq X \cup Y$. Suponha que K é 3-conexo e $|E(K)| \geq 4$. Então existe um elemento $f \in E(K) \cap E(M)$ tal que as matroides $M \setminus f$ e M/f não são 3-conexas. Pelo Lema 3.4 existe uma tríade T_f^* de M contendo f e tal que $T_f^* - f \subseteq E(N)$. Por ortogonalidade, $T_f^* \cap (E(H) - p) \neq \emptyset$ e $T_f^* \cap E(M_1) \neq \emptyset$. A componente $T(M \setminus x) - p$ contém um circuito D de M tal que $|D \cap T_f^*| = 1$; contradizendo o critério de ortogonalidade. Portanto, K ou é um cocircuito ou um circuito. Como o par (M, N) é menor-minimal, K ou é um triângulo ou é uma tríade. Logo, esse caminho

é uma cadeia contendo um triângulo, T , e uma tríade, T^* , tais que $T^* - T = \{x'\}$ com $x' \in X$. Segue do Lema 2.20 que a matroide $co(M \setminus x')$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição.

Suponha que M_1 é cocircuito em $T(M/y)$. Como M_1 é hamiltoniana, M_1 deve ser uma tríade. Assim, todo vértice terminal de $T(M/y)$ é uma tríade. Além disso, por (4.15.1) devemos ter $E(M_1) - p \not\subseteq (X \cup e) \cup Y$. Ainda mais, o conjunto $T = (E(M_1) - p) \cup y$ é um triângulo de M tal que $T \cap E(N) \neq \emptyset$ e $T \cap X \neq \emptyset$ (caso contrário, existe circuito de M contendo $E(N)$ que não é hamiltoniano).

Seja H o vértice de $T(M/y)$ que contém o elemento e . Como $e \notin C$ e H é hamiltoniana, segue que H não pode ser um circuito. Logo, ou H é 3-conexa ou é um cocircuito. Segue de (4.15.5) que em $T(M/y)$ todos os vértices tem grau dois, exceto H e os vértices terminais (tríades). Além disso, $S \cup e \subseteq E(H)$. Logo, $T(M/y)$ é um grafo composto de pelo menos dois caminhos simples com origem em H e tendo M_i , $i \in [k]$ e $k \geq 2$, como vértice terminal. Seja $E(M_i) \cap [E(N) - S] = \{n_i\}$, para todo $i \in [k]$. Note que, qualquer vértice intermediário desse caminho está contido em $X \cup Y$. Podemos obter N contraindo e removendo os elementos de cada um desses caminhos, exceto n_i . Como M é hamiltoniana H não pode ser um cocircuito. Portanto, H é 3-conexa com $|E(H)| \geq 4$. Neste caso, a matroide $si(M/y)$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. \square

Para finalizar a demonstração da Proposição 4.13 falta mostrar que

$$|(X \cup e) \cup Y| = |E(M) - E(M''')| \leq 4.$$

Lema 4.16. $|(X \cup e) \cup Y| \leq 4$.

Demonstração. Já vimos que o par (M, M''') satisfaz as hipóteses do Lema 4.10, logo existem únicos subconjuntos disjuntos P e Q de $E(M)$ tais que $M''' = M \setminus P/Q$ (note que $P = X \cup e$ e $Q = Y$). Pelo Lema 4.11, segue que

$$|P \cup Q| \leq 5. \tag{4.25}$$

Pelo Lema 4.10(iv), os elementos de P e Q podem ser rotulados por z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 , de modo que, eles estão alternadamente em P e Q . Vamos supor, por contradição, que

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| = |(X \cup e) \cup Y| > 4. \tag{4.26}$$

Segue de (4.25) e de (4.26) que

$$P \cup Q = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}.$$

Pelo Lema 4.10(ii), para todo $z_i \in P \cup Q$, com $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, vale que

$$M_{z_i} = \begin{cases} M \setminus z_i, & \text{se } z_i \in P \\ M/z_i, & \text{se } z_i \in Q \end{cases} \quad (4.27)$$

Ainda mais, como $\{X_{z_i}, Y_{z_i}\}$ é a única 2-separação exata de M_{z_i} , podemos escrever

$$M_{z_i} = M_{X_{z_i}} \oplus_2 M_{Y_{z_i}}, \quad (4.28)$$

em que

$$E(M_{X_{z_i}}) = X_{z_i} \cup p \text{ e } E(M_{Y_{z_i}}) = Y_{z_i} \cup p. \quad (4.29)$$

O elemento p é o ponto base da operação de 2-soma. Quando necessário utilizamos p e q para denotar pontos bases. Fixado um ponto base p , podemos escrever

$$M_{X_{z_{i-1}}} = \begin{cases} M_{X_{z_i}} \setminus z_{i-1}, & \text{se } z_i \in P \\ M_{X_{z_i}}/z_{i-1}, & \text{se } z_i \in Q \end{cases} \quad (4.30)$$

4.16.0.1. $z_1 \in P$. Além disso, $z_1 = e$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $z_1 \in Q$. Então pelo Lema 4.10(ii),

$$\{X_{z_1}, Y_{z_1}\} = \{S, E(M_{z_1}) - S\}$$

é a única 2-separação exata da matroide $M_{z_1} = M/z_1$. Ou seja, S é uma classe em série de M/z_1 e portanto da matroide 3-conexa M ; um absurdo. Logo, $z_1 \in P$. Suponha que $z_1 \neq e$. Sejam a e b elementos distintos em S . Então os conjuntos $T_{z_1}^* = \{z_1, a, b\}$ e $T_e^* = \{e, a, b\}$ são tríades de M . Assim,

$$M^*|(T_e^* \cup T_{z_1}^*) \cong U_{2,4}$$

implicando que $T^* = \{z_1, e, a\}$ é uma tríade de M . Em particular, existe um circuito D de M''' tal que $E(N) \subseteq D$. Seja C um circuito de M tal que $D = C - P$. Note que, $e \notin D$, implicando que $|D \cap T^*| = 1$; contradizendo o critério de ortogonalidade. \square

Segue de (4.16.0.1) que

$$P = \{z_1, z_3, z_5\} \text{ e } Q = \{z_2, z_4\}. \quad (4.31)$$

Pelo Lema 4.10(ii), a matroide $M_{z_2} = M/z_2$ tem uma única 2-separação exata $\{X_{z_2}, Y_{z_2}\}$ em que $X_{z_2} = S \cup z_1$. Como M é 3-conexa, z_2 deve ser gerado por $X_{z_2} = S \cup z_1$ e por Y_{z_2} em M . Além disso, pelo Lema 4.10(vi) existe um circuito D_{z_2} de M contendo $\{z_1, z_2\}$ e contido em $\{z_1, z_2\} \cup S$.

4.16.0.2. $z_2 \in C$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $z_2 \notin C$. Segue de (4.28) e (4.29) que o circuito C intercepta os conjuntos $E(M_{X_{z_3}})$ e $E(M_{Y_{z_3}})$. Logo, o conjunto

$$(C \cap X_{z_3}) \cup \{p\} = S \cup p$$

é um circuito de $M_{X_{z_3}}$. Vamos mostrar que $\{z_1, z_2, p\}$ é um independente de $M_{X_{z_3}}$. De fato, em $M \setminus z_3$, note que:

- (i) Se $\{z_1, p\}$ é um 2-circuito, então z_1 é gerado por X_{z_1} ; uma contradição, pois M é 3-conexa.
- (ii) Se $\{z_2, p\}$ é um 2-circuito, então $S \cup z_2$ é um 2-circuito de $M \setminus z_3$, implicando que S é um circuito de $M \setminus z_3 / z_2$. Assim, $w \in S$ é um laço da matroide

$$M/(S - w) \setminus \{z_1, z_3\} / z_2$$

e também da matroide 3-conexa M'' ; uma contradição.

- (iii) Se conjunto $\{z_1, z_2, p\}$ é um triângulo de $M_{X_{z_3}}$, então o conjunto $(C - S) \cup \{z_1, z_2\}$ é um circuito de $M \setminus z_3$ e portanto de M . Mas, este circuito intercepta a colinha $S \cup z_1$ em um único elemento; uma contradição pelo critério de ortogonalidade.

Portanto, o conjunto $\{z_1, z_2, p\}$ é um independente de $M_{X_{z_3}}$. Além disso,

$$cl(S \cup p) = S \cup p \text{ e } r(M_{X_{z_3}}) = r(S \cup p) + 1,$$

implicando que $S \cup p$ é um hiperplano de $M_{X_{z_3}}$. Mas,

$$E(M_{X_{z_3}}) - cl(S \cup p) \subseteq \{z_1, z_2\}.$$

Logo, $\{z_1, z_2\}$ contém um cocircuito de $M_{z_3} = M \setminus z_3$. Como M é 3-conexa, o conjunto $\{z_1, z_2, z_3\}$ contém um cocircuito de M ; uma contradição pelo Lema 4.10(v). Portanto, (4.16.0.2) vale e $z_2 \in C$. \square

Agora, vamos descrever todas as possibilidades para o circuito D_{z_2} de M que contém $\{z_1, z_2\}$. Como M é 3-conexa, devemos ter $|D_{z_2}| \geq 3$. Por ortogonalidade com a colinha $S \cup z_1 = A \cup z_1$, devemos ter $D_{z_2} \cap A \neq \emptyset$. Assim, existem as seguintes possibilidades para D_{z_2} :

- (1) $D_{z_2} = \{z_1, z_2\} \cup (S - a)$; para algum $a \in S$; ou
- (2) $D_{z_2} = \{z_1, z_2\} \cup S$.

Considere o conjunto

$$L_1 = C \cup \{z_1\} = C \cup D_{z_2}.$$

Observe que, L_1 é uma linha de Tutte conexa, pois $C \cap D_{z_2} \neq \emptyset$. A partição canônica de L_1 é $\pi(L_1) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ com $m \geq 3$. Note que:

- (i) Podemos escrever $X_1 = \{z_1\}$ e $C = X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_m$;
- (ii) Segue do Lema 2.23 que os elementos de S não podem estar no mesmo elemento desta partição.

Se (1) ocorre, temos as seguintes possibilidades para $\pi(L_1)$, para algum $b \in S - \{a\}$;

$$(1.1) \quad X_1 = \{z_1\}, X_2 = \{b, z_2\}, X_3 \cup \dots \cup X_{m-1} = S - \{a, b\} \text{ e } X_m = (C - S \cup z_2) \cup a;$$

$$(1.2) \quad X_1 = \{z_1\}, X_2 = \{z_2\}, X_3 \cup \dots \cup X_{m-1} = S - a \text{ e } X_m = (C - S \cup z_2) \cup b.$$

Se (2) ocorre, temos as seguintes possibilidades para $\pi(L_1)$, para algum $b \in S - \{a\}$;

$$(2.1) \quad X_1 = \{z_1\}, X_2 = \{b, z_2\}, X_3 \cup \dots \cup X_{m-1} = S - b \text{ e } X_m = C - S \cup z_2;$$

$$(2.2) \quad X_1 = \{z_1\}, X_2 = \{z_2\}, X_3 \cup \dots \cup X_{m-1} = S \text{ e } X_m = C - S \cup z_2.$$

Observe que nos casos (1.2) e (2.2), podemos trocar, respectivamente,

$$X_m = (C - S \cup z_2) \cup b \text{ e } X_m = C - S \cup z_2$$

por p , em que p é o ponto base da 2-soma $M_{z_3} = M_{X_{z_3}} \oplus_2 M_{Y_{z_3}}$, descrita em (4.28). Deste modo,

$$M_{X_{z_3}} \cong U_{|S|, |S|+2} \text{ e } M_{X_{z_3}} \cong U_{|S|+1, |S|+3},$$

respectivamente. Logo,

$$M_{X_{z_3}} \setminus z_1 / z_2 = M_{X_{z_3}} \setminus z_2 / z_1$$

tem M''' como menor, implicando que $M \setminus z_1 / z_2 = M \setminus z_2 / z_1$; contradizendo a unicidade dos conjuntos P e Q pelo Lema 4.10(i). Portanto, (1.2) e (2.2) não podem ocorrer. Além disso, vale destacar o circuito que é obtido nos casos (1.1) e (2.1), o qual denotamos por

$$D_{11} = (C - \{b, z_2\}) \cup z_1. \quad (4.32)$$

Pelo Lema 4.10(vi) e como $z_2 \in Q$, existe um cocircuito $D_{z_3}^*$ de M contendo z_2 e z_3 e contido em $\{z_1, z_2, z_3\} \cup S$. Segue do Lema 4.10(v) que $D_{z_3}^* \cap A \neq \emptyset$. Além disso, como $S \cup z_1$ é uma colinha de M existem as seguintes possibilidades para o cocircuito $D_{z_3}^*$:

$$\{z_2, z_3, b\}, \{z_1, z_2, z_3, a\} \text{ ou } \{z_2, z_3, a, c\},$$

par algum $c \in S - \{a, b\}$.

Sejam $T_{z_1}^* = \{z_1, a, b\}$ e $D_{z_3}^* = \{z_1, z_2, z_3, a\}$ e considere o conjunto

$$L^* = \{z_1, z_2, z_3, a, b\} = T_{z_1}^* \cup D_{z_3}^*.$$

Observe que L^* é uma linha de Tutte conexa na matroide M^* , pois $T_{z_1}^* \cap D_{z_3}^* \neq \emptyset$. A partição canônica de L^* é $\pi(L^*) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ com $m \geq 3$. Observe que $L^* - T_{z_1}^* = \{z_2, z_3\}$ e $L^* - D_{z_3}^* = \{b\}$ são elementos fixos da partição. Existem duas possibilidades para $\pi(L^*)$, a saber:

$$(3.1) \quad X_1 = \{b\}, X_2 = \{a, z_1\} \text{ e } X_3 = \{z_2, z_3\} \text{ (veja Tabela (4.1)).}$$

$$(3.2) \quad X_1 = \{b\}, X_2 = \{a\}, X_3 = \{z_1\} \text{ e } X_4 = \{z_2, z_3\} \text{ (veja Tabela (4.2)).}$$

$X_1 = \{b\}$	$X_2 = \{a, z_1\}$	$X_3 = \{z_2, z_3\}$
---------------	--------------------	----------------------

Tabela 4.1: Linha de Tutte L^* no caso **(3.1)**

$X_1 = \{b\}$	$X_2 = \{a\}$	$X_3 = \{z_1\}$	$X_4 = \{z_2, z_3\}$
---------------	---------------	-----------------	----------------------

Tabela 4.2: Linha de Tutte L^* no caso **(3.2)**

Observe que o item (3.2) não pode ocorrer pois o conjunto $D^* = \{a, b, z_2, z_3\}$ não pode ser um cocircuito de M , pois $|D^* \cap D_{11}| = 1$; contradiz o critério de ortogonalidade. O item (3.1) é válido para as duas primeiras possibilidades de $D_{z_3}^*$ e os cocircuitos gerados neste caso são:

$$T_{z_1}^* = \{z_1, a, b\}, \quad \{z_2, z_3, b\} \quad \text{e} \quad \{z_1, z_2, z_3, a\}. \quad (4.33)$$

Suponha que $D_{z_3}^* = \{z_2, z_3, a, c\}$ com $c \in S - \{a, b\}$. Considere a tríade $T_{z_1}^* = \{z_1, a, b\}$ e a linha de Tutte conexa, $L^* = D_{z_3}^* \cup T_{z_1}^*$. Na partição canônica $\pi(L^*)$, o conjunto $\{z_1, z_2, b, c\}$ é um cocircuito o qual contém a tríade $T^* = \{z_1, b, c\}$; contradizendo o axioma (C2).

Como M é 3-conexa e por (4.28), o elemento z_4 deve ser gerado por $X_{z_4} = \{z_1, z_2, z_3\} \cup S$ e por Y_{z_4} . Pelo Lema 4.10(vi), como $z_3 \in P$, existe um circuito D_{z_4} de M contendo z_3 e z_4 e contido em $\{z_2, z_3, z_4\} \cup S$. Pelo Lema 4.10(v), $D_{z_4} \neq \{z_2, z_3, z_4\}$. Portanto, $D_{z_4} \cap S \neq \emptyset$. Ainda mais, como $S \cup z_1$ é uma colinha de M , devemos ter $S \subseteq D_{z_4}$. Logo, existem apenas duas possibilidades para D_{z_4} , a saber:

$$\{z_3, z_4\} \cup S \quad \text{ou} \quad \{z_2, z_3, z_4\} \cup S.$$

4.16.0.3. $D_{z_4} = \{z_3, z_4\} \cup S$.

Demonstração. Como $z_1 \in P$ e $z_4 \in Q$, sabemos que a matroide M''' é um menor da matroide $M \setminus z_1 / z_4$. Por (4.28), podemos escrever

$$M/z_4 = M_{X_{z_4}} \oplus_2 M_{Y_{z_4}},$$

em que

$$E(M_{X_{z_4}}) = S \cup \{z_1, z_2, z_3, p\} \quad \text{e} \quad E(M_{Y_{z_4}}) = Y_{z_4} \cup p,$$

e p é o ponto base da operação de 2-soma. Como $\{X_{z_1}, Y_{z_1}\}$ é a única 2-separação exata de $M \setminus z_1$, segue que $\{X_{z_1}, \{z_2, z_3, p\}\}$ é uma 2-separação exata de $M_{X_{z_4}} \setminus z_1$. Assim, $M_{X_{z_4}} \setminus z_1$

é a 2-soma das matroides $M_{X_{z_1}}$ e H , com ponto base q , em que $E(M_{X_{z_1}}) = X_{z_1} \cup q$ e $E(H) = \{q, z_2, z_3, p\}$. Escrevendo,

$$M \setminus z_1 / z_4 = M_{X_{z_1}} \oplus_2 H \oplus_2 M_{Y_{z_4}}.$$

segue que,

$$M_{Y_{z_1}} / z_4 = H \oplus_2 M_{Y_{z_4}}.$$

Observe que a matroide H é conexa, caso contrário se p e q estão na mesma componente de H , então P e Q não são únicos; contradizendo o Lema 4.10(i). Enquanto, se p e q estão em componentes diferentes, então $k_{M''}(A, B) = 0 \neq 1$; contradizendo (4.15). Portanto, H é isomorfa a uma das seguintes matroides:

$$U_{1,4}, U_{2,4}, U_{3,4} \text{ ou } M(W_2).$$

Como P e Q são únicos e $k_{M''}(A, B) = 1$ a matroide $H/z_2 \setminus z_3$ é conexa e é unicamente determinada como um menor de H . Em $H/z_2 \setminus z_3$, o conjunto $\{p, q\}$ é um 2-circuito e um 2-cocircuito. Portanto, o conjunto $\{p, q, z_2\}$ é um circuito de H e o conjunto $\{p, q, z_3\}$ é um cocircuito de H . Note que $r(H) = r(H^*) = 2$.

Pelo Lema 4.10(vi), M tem um circuito D contendo z_2 e z_3 e tal que $D - \{z_2, z_3\} \subseteq \{z_4\} \cup B$, ou seja, $D \subseteq \{z_2, z_3, z_4\} \cup B$. Seja D' um circuito de M/z_4 tal que $D' \subseteq D$ e $D' \cap \{z_2, z_3\} \neq \emptyset$. Se $D' \cap B = \emptyset$, então $\{z_2, z_3, z_4\}$ contém um circuito de M ; contradizendo o Lema 4.10(v). Assim, $D' \cap B \neq \emptyset$, implicando que $p \cup (D' \cap \{z_2, z_3\})$ é um circuito de H . Como $D - z_4$ é uma união de circuitos de M/z_4 , temos duas possibilidades:

- (i) $\{p, z_2\}$ e $\{p, z_3\}$ são circuitos de H ; ou
- (ii) $\{p, z_2, z_3\}$ é um circuito de H .

Como (i) não pode ocorrer pois $\{p, q, z_2\}$ é um circuito de H , segue que (ii) vale e o conjunto $\{p, z_2, z_3\}$ é um circuito de H . Portanto, o conjunto $\{z_3, q\}$ é um circuito de H e $H \cong M(W_2)$. Como nem X_{z_3} nem X_{z_1} geram z_3 em M e

$$M_{Y_{z_1}} / z_4 = H \oplus_2 M_{Y_{z_4}} \text{ e } E(M_{X_{z_1}}) = X_{z_1} \cup q,$$

concluimos que $\{z_3, q\}$ não é um circuito de $M_{Y_{z_1}}$. Portanto, $\{q, z_3, z_4\}$ é um circuito de $M_{Y_{z_1}}$. Assim, M tem um circuito D que contém $\{z_3, z_4\}$ e está contido em $X_{z_1} \cup \{z_3, z_4\}$. Pelo Lema 4.10(v) e por ortogonalidade com $T_{z_1}^*$, devemos ter

$$D = D_{z_4} = \{z_3, z_4\} \cup S.$$

□

4.16.0.4. $z_4 \in C$.

Demonstração. Suponha, por contradição, que $z_4 \notin C$. Como $z_4 \in Q$, temos que N é um menor das matroides $M \setminus z_4$ e M/z_4 . Segue do Lema 3.4, que existe uma tríade $T_{z_4}^*$ de M tal que

$$z_4 \in T_{z_4}^* \text{ e } T_{z_4}^* - z_4 \subseteq E(N).$$

Por ortogonalidade, entre $T_{z_4}^*$ e D_{z_4} , concluímos que $T_{z_4}^* \cap S \neq \emptyset$. Suponha que $T_{z_4}^* - z_4 \subseteq S$. Então, como $S \cup z_1$ é colinha de M , temos que $T_{z_4}^* - z_4 = T_{z_1}^* - z_1$, implicando que $M^*|(T_{z_4}^* \cup T_{z_1}^*) \cong U_{2,4}$. Sendo assim, $(M^* \setminus z_4)^* = M/z_4$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Portanto, $|T_{z_4}^* \cap S| = 1$. Agora, se $D_{z_2} = \{z_1, z_2\} \cup S$, então $|T_{z_4}^* \cap D_{z_2}| = 1$; contradizendo o critério de ortogonalidade. Portanto, $D_{z_2} = \{z_1, z_2\} \cup (S - a)$. Consequentemente, temos $a \in T_{z_4}^*$. Lembre que N é menor da matroide $M \setminus z_4$. Escrevendo $T_{z_4}^* = \{z_4, a, n\}$ com $n \in E(N) \cap E(M'')$, podemos fazer $a = w$, implicando que o conjunto $\{w, n\}$ é uma 2-classe em série da matroide 3-conexa M'' ; uma contradição. Portanto, $z_4 \in C$. □

4.16.0.5. *O circuito C é único.*

Demonstração. Suponha falso e seja C' um circuito de M diferente de C contendo $E(N)$. Seja $e \in C' - C$. Então N é um menor das matroides $M \setminus e$ e M/e . Pelo Lema 3.4, existe uma tríade T_e^* de M contendo e e tal que $T_e^* - e \subseteq E(N)$. Como N é um menor simples da matroide M/e , podemos escolher elementos de $si(M/e)$ tal que ela tenha N como menor. Pela escolha de M , segue que $si(M/e)$ não é 3-conexa. Segue do Lema 2.16 que $co(M \setminus e)$ é 3-conexa. Neste caso, toda 2-separação de $M \setminus e$ é trivial. Note que e satisfaz as hipóteses do Lema 4.13. Por (4.16.0.1), podemos fazer $e = z_1$. Assim, N é um menor da matroide M/z_1 . O conjunto $D = D_{z_2} - z_1 \subseteq \{z_2\} \cup S$ é um circuito de M/z_1 . Podemos ter $D = \{z_2\} \cup (S - a)$ ou $D = \{z_2\} \cup S$. Nos dois casos, N é um menor da matroide $M/z_1 \setminus z_2$. Segue de (4.31) que N é um menor das matroides $M \setminus z_2$ e M/z_2 . Pelo Lema 3.4, existe uma tríade $T_{z_2}^*$ de M contendo z_2 tal que

$$T_{z_2}^* - z_2 \subseteq E(N).$$

Por ortogonalidade, entre D e $T_{z_2}^*$, concluímos que $T_{z_2}^* \cap S \neq \emptyset$. Se $T_{z_2}^* - z_2 \subseteq S$, então $T_{z_2}^* - z_2 = T_{z_1}^* - z_1$, implicando que $M^*|(T_{z_2}^* \cup T_{z_1}^*) \cong U_{2,4}$. Assim, $(M^* \setminus z_2)^* = M/z_2$ é 3-conexa e tem N como menor; uma contradição. Logo, podemos escrever, $T_{z_2}^* = \{z_2, w, n\}$

com $n \in E(N) \cap E(M'')$. Concluimos que o conjunto $\{w, n\}$ é uma 2-classe em série da matroide 3-conexa M'' ; uma contradição. \square

A partir de agora, considere os resultados na matroide

$$\tilde{M} = M/(S - \{a, b\})$$

e os circuitos

$$\tilde{D}_{z_4} = \{z_3, z_4, a, b\} \text{ e } \tilde{D}_{z_2} = \{z_1, z_2, b\} \text{ ou } \tilde{D}_{z_2} = \{z_1, z_2, a, b\}.$$

Em $\tilde{M}_{X_{z_3}}/z_4 = \tilde{M}_{X_{z_4}}$, o conjunto $\tilde{D} = \{a, b, z_2, p\}$ é um circuito gerador. Considere o conjunto $L_4 = \tilde{D} \cup z_3 = \tilde{D} \cup \tilde{D}_{z_4}$ e note que L_4 é uma linha de Tutte conexa em $\tilde{M}_{X_{z_4}}$, pois $\tilde{D} \cap \{z_3, a, b\} \neq \emptyset$. A partição canônica de L_4 é $\pi(L_4) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, com $m \geq 3$. Temos que,

$$X_1 = L_4 - \tilde{D} = \{z_3\}, X_2 = L_4 - \{z_3, a, b\} = \{z_2, p\} \text{ e } X_3 = \{a, b\}.$$

A existência de X_3 é garantida por ortogonalidade com a tríade $T_{z_1}^* = \{z_1, a, b\}$ (veja Tabela (4.3)).

$X_1 = \{z_3\}$	$X_2 = \{z_2, p\}$	$X_3 = \{a, b\}$
-----------------	--------------------	------------------

Tabela 4.3: Linha de Tutte L_4

Nesta mesma matroide considere o conjunto $L_2 = \tilde{D} \cup z_1 = \tilde{D} \cup \tilde{D}_{z_2}$. Note que L_2 é uma linha de Tutte conexa, pois $\tilde{D} \cap \tilde{D}_{z_2} \neq \emptyset$. A partição canônica de L_2 é $\pi(L_2) = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$, com $m \geq 3$. Note que $X_1 = L_2 - \tilde{D} = \{z_1\}$ e $X_2 = L_2 - \tilde{D}_{z_2} = \{a, p\}$ são elementos fixos de $\pi(L_2)$. Além disso, $T_{z_1}^* = \{z_1, a, b\} \subseteq L_2$. Deste modo, existem duas possibilidades para $\pi(L_2)$, dependendo do circuito \tilde{D}_{z_2} , a saber:

$$(4.1) \quad X_1 = \{z_1\}, X_2 = \{b, z_2\} \text{ e } X_3 = \{a, p\} \text{ (veja Tabela (4.4)).}$$

$$(4.2) \quad X_1 = \{z_1\}, X_2 = \{a, z_2\}, X_3 = \{b\} \text{ e } X_4 = \{p\} \text{ (veja Tabela (4.5)).}$$

Vamos analisar os dois casos separadamente:

$X_1 = \{z_1\}$	$X_2 = \{b, z_2\}$	$X_3 = \{a, p\}$
-----------------	--------------------	------------------

Tabela 4.4: Linha de Tutte L_2 no caso (4.1)

$X_1 = \{z_1\}$	$X_2 = \{a, z_2\}$	$X_3 = \{b\}$	$X_4 = \{p\}$
-----------------	--------------------	---------------	---------------

Tabela 4.5: Linha de Tutte L'' no caso (4.2)

No caso (4.1), considerando os circuitos obtidos das matroides $\tilde{M}_{X_{z_4}}|L_2$ e $\tilde{M}_{X_{z_4}}|L_4$, temos que

$$\tilde{M}_{X_{z_5}}/z_4 = \tilde{M}_{X_{z_4}} \cong M(K_4)$$

admite a representação geométrica ilustrada na Figura (4.2).

Neste caso,

$$\tilde{M}_{X_{z_5}}^* \setminus z_4 = \tilde{M}_{X_{z_4}}^* \cong M^*(K_4). \quad (4.34)$$

Isto é, a matroide $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$ é obtida da matroide $\tilde{M}_{X_{z_4}}^*$ através da extensão do elemento z_4 . Para tal, vamos utilizar a representação geométrica para $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$. Na Tabela (4.6) indicamos alguns cocircuitos de \tilde{M}^* que estão contidos $E(\tilde{M}_{X_{z_5}}^*)$.

Cocircuitos	Hiperplanos
$\{z_1, z_2, b\}$	$H_1 = \{a, p, z_3, z_4\}$
$\{a, b, z_3, z_4\}$	$H_2 = \{z_1, z_2, p\}$

Tabela 4.6: Cocircuitos e Hiperplanos no Caso (4.1)

Note que os conjuntos

$$\{a, b, z_3, z_4\} \text{ e } \{a, b, z_2, p\}$$

são cocircuitos de $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$. Observe que, z_4 deve estar sobre a linha que contém $\{a, z_3, p\}$, pois $\{z_1, z_2, b\}$ é um cocircuito de $\tilde{M}_{z_4}^*$ e de $\tilde{M}_{z_5}^*$, veja Figura (4.3).

Em $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$, temos a seguinte análise.

- (i) Se $\{z_3, z_4\}$ é um 2-circuito, então P e Q não são únicos; contradizendo o Lema 4.10(i).
- (ii) Se $\{p, z_4\}$ é um 2-circuito, então o conjunto $\{z_2, z_3, z_4\}$ é um circuito de \tilde{M} implicando que $\{z_2, z_3, z_4\} \cup S$ é um circuito de M ; contradizendo o axioma (C2), pois este circuito contém D_{z_4} .

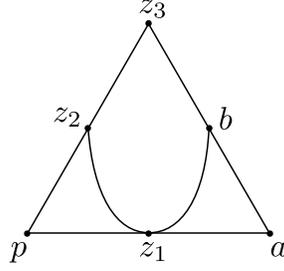


Figura 4.2: Representação geométrica de $\tilde{M}_{X_{z_4}}$ no caso (4.1)

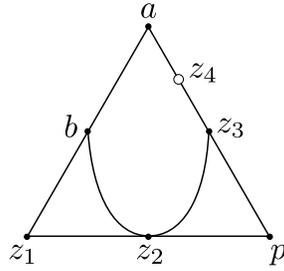


Figura 4.3: Representação geométrica de $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$ no caso (4.1)

(iii) Se o conjunto $\{a, z_4\}$ for um 2-circuito não chegamos a nenhuma contradição.

Mas, pelo Lema 4.10 (vi), existe um circuito D_{z_5} contendo $\{z_4, z_5\}$ e contido em $\{z_4, z_5\} \cup B$. Segue de (3.8.3.1) que $D_{z_5} \cap E(N) \neq \emptyset$. Note que $L_5 = C \cup z_5 = C \cup D_{z_5}$ é uma linha de Tutte conexa, pois $C \cap D_{z_5} \neq \emptyset$. Observe que $X = \{z_4\}$ não é um elemento da partição canônica $\pi(L_5)$. Caso contrário, $L_5 - \{z_4\}$ é um circuito de M contendo $E(N)$ e diferente de C ; contradizendo (4.16.0.5).

Seja $c \in E(N)$ tal que o conjunto $\{z_4, c\}$ está contido em um elemento X da partição canônica $\pi(L_5)$. Claramente, $c \in D_{z_5} \cap E(N)$. Vamos verificar que

$$E(N) - \{a, b\} \not\subseteq D_{z_5} \cap C. \quad (4.35)$$

Suponha que (4.35) seja falso. Observe que $L = \tilde{D}_{z_4} \cup D_{z_5}$ é uma linha de Tutte conexa, pois $\tilde{D}_{z_4} \cap D_{z_5} = \{z_4\}$. Além disso, $|\pi(L)| = 3$, pois $L - \tilde{D}_{z_4}$, $L - D_{z_5}$ e $\{z_4\}$ são os elementos da partição canônica $\pi(L)$. Assim, $\tilde{M}|L$ é binária e o conjunto $\tilde{D} = \tilde{D}_{z_4} \triangle D_{z_5}$ é um circuito de \tilde{M} . Deste modo, existe um circuito D de M contendo $E(N)$ propriamente e diferente de C ; contradizendo (4.16.0.5).

Seja $d \in Y_{z_5} \cap C - D_{z_5}$. Considere a matroide

$$K = \tilde{M} \setminus [Y_{z_5} - C] / [Y_{z_5} \cap (C - \{c, d\})],$$

em que $\{c, d\} \subseteq E(N) \cap Y_{z_5}$. Note que

$$E(K) = \{a, b, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, c, d\}.$$

Logo, $|E(K)| = 9$. Os conjuntos $\tilde{D}_{z_2} = \{z_1, z_2, a\}$ e $\tilde{D}_{z_4} = \{z_3, z_4, a, b\}$ são circuitos de \tilde{M} e de K . Além disso, o conjunto $\tilde{D} = \{a, b, z_2, z_4, c, d\} \subseteq C$ é um circuito gerador de K . Portanto, $r(K) = 5$ e $r((K)^*) = 4$. Note que o conjunto

$$\tilde{D}_{z_5} = D_{z_5} - [Y_{z_5} \cap (C - \{c\})] = \{z_4, z_5, c\}$$

também é um circuito de K .

Em K os conjuntos

$$\begin{aligned} L_1 &= \tilde{D} \cup z_1 = \tilde{D} \cup \tilde{D}_{z_2} \\ L_3 &= \tilde{D} \cup z_3 = \tilde{D} \cup \tilde{D}_{z_4} \\ L_5 &= \tilde{D} \cup z_5 = \tilde{D} \cup \tilde{D}_{z_5} \end{aligned}$$

são linhas de Tutte conexas, pois $D \cap \tilde{D}_{z_i} \neq \emptyset$ com $i \in \{1, 3, 5\}$. As partições canônicas são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \pi(L_1) &= \{z_1, \{a, z_2\}, \{b, c, d, z_4\}\} \\ \pi(L_3) &= \{z_3, \{a, b, z_4\}, \{b, c, d\}\} \\ \pi(L_5) &= \{z_5, \{c, z_4\}, \{a, b, d, z_2\}\}. \end{aligned}$$

Comparando os circuitos de K com os circuitos de um prisma (veja Figura 4.4), concluímos que K é isormofa a uma matroide $M(P)$ em que P é um prisma.

No caso (4.2), considerando os circuitos obtidos nas linhas de Tutte $\tilde{M}_{X_{z_4}}|L_2$ e $\tilde{M}_{X_{z_4}}|L_4$ temos que a matroide $\tilde{M}_{X_{z_5}}/z_4 = \tilde{M}_{X_{z_4}}$ admite a representação geométrica indicada na Figura (4.5).

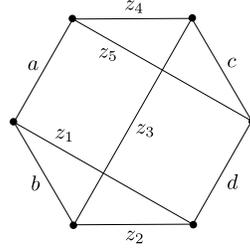


Figura 4.4: Prisma: $K \cong M(P)$

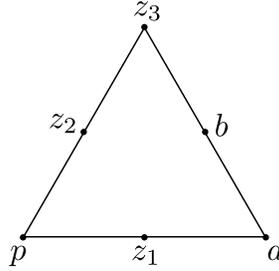


Figura 4.5: Representação geométrica de $\tilde{M}_{X_{z_4}}$ no Caso (4.2)

Sendo assim,

$$\tilde{M}_{X_{z_5}}^* \setminus z_4 = \tilde{M}_{X_{z_4}}^* \cong (W^3)^*. \quad (4.36)$$

A matroide $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$ é obtida da matroide $\tilde{M}_{X_{z_4}}^*$ através da extensão do elemento z_4 . Para tal, vamos utilizar a representação geométrica para $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$. Na Tabela (4.7), listamos alguns cocircuitos de \tilde{M}^* que estão contidos em $E(\tilde{M}_{X_{z_5}}^*)$.

Cocircuitos	Hiperplanos
$\{a, b, z_3, z_4\}$	$H_1 = \{z_1, z_2, p\}$
$\{a, b, z_1, z_2\}$	$H_2 = \{z_3, z_4, p\}$

Tabela 4.7: Cocircuitos e Hiperplanos no Caso (4.2)

Note que,

$$z_4 \notin H_1 \text{ e } z_4 \in H_2.$$

Em $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$, temos as seguintes observações:

- 1) Se $\{z_3, z_4\}$ é um 2-circuito de $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$, então $\{z_3, z_4\}$ é um 2-cocircuito de $\tilde{M}_{X_{z_5}}$ e

portanto de \tilde{M}_{z_5} . Sendo assim, o conjunto $\{z_3, z_4, z_5\}$ é uma tríade da matroide 3-conexa M ; contradizendo o Lema 4.10(v).

2) z_4 não pertence a linha $\{z_1, z_2, p\}$. Logo, $\{z_4, p\}$ não pode ser um 2-circuito.

Note ainda que o elemento z_4 pode estar sobre a linha $\{b, z_2, z_4\}$. De qualquer modo, podemos obter o cocircuito $\{a, b, p\}$ através da matroide

$$\tilde{M}_{X_{z_5}}^* \setminus \{z_1, z_3\} / \{z_2, z_4\}.$$

Isto é, o circuito $\{a, b, p\}$ pode ser obtido através da matroide

$$M_{X_{z_5}} \setminus \{z_2, z_4\} / \{z_1, z_3\} = M \setminus \{z_2, z_4, z_5\} / \{z_1, z_3\}.$$

O que contradiz a unicidade dos conjuntos P e Q pelo Lema 4.10(v). Portanto, o elemento z_5 não pode existir e (4.16) vale.

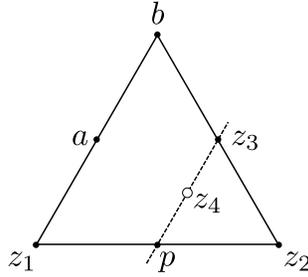


Figura 4.6: Representação geométrica para $\tilde{M}_{X_{z_5}}^*$ no caso (4.2)

□

Com a conclusão de do Lema 4.15 e do Lema 4.16 finalizamos a demonstração da Proposição 4.13.

No próximo resultado vamos garantir a existência de um elemento $e \in E(M) - C$, tal que a matroide $co(M \setminus e)$ seja 3-conexa. Para tal, vamos precisar do teorema a seguir, o qual é o principal resultado de [4].

Teorema 4.17 (R. Hall). *Se H é um hiperplano de uma matroide 3-conexa K e $K \not\cong K^*(K'''_{3,n})$ (ver Figura 4.7), então existe um elemento $e \in H$ tal que a matroide simples associada com K/e é 3-conexa.*

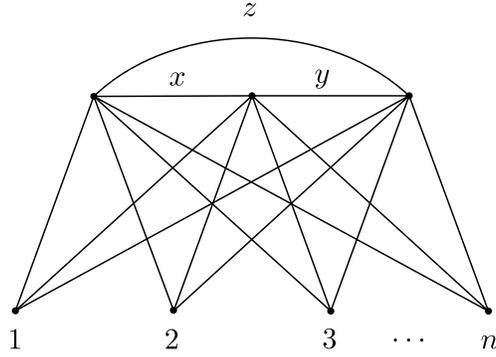


Figura 4.7: Grafo $K'''_{3,n}$

Lema 4.18. *Seja M uma matroide 3-conexa que não possui menor isomorfo a matroide $M(P)$, em que P é um prisma. Se C é um circuito hamiltoniano de M , então existe um elemento $e \in E(M) - C$ tal que a matroide $co(M \setminus e)$ é 3-conexa.*

Demonstração. Como C é um circuito gerador de M , o conjunto $H = E(M) - C$ é um hiperplano da matroide 3-conexa M^* . No Teorema 4.17, faça $K = M^*$ e seja $e \in H$. Por hipótese M não tem menor isomorfo à matroide $M(P)$, em que P é um prisma. Logo, a matroide M^* não tem menor isomorfo à matroide gráfica $M^*(P)$. Mas, $P^* \cong K_5 \setminus e$ para alguma aresta e de K_5 . Como $P^* \cong K_5 \setminus e$ é uma restrição do grafo $K'''_{3,n}$, devemos ter $M^* \not\cong K^*(K'''_{3,n})$. Segue do Teorema 4.17 que a matroide $si(M^*/e) = [co(M \setminus e)]^*$ é 3-conexa. Portanto, a matroide $co(M \setminus e)$ é 3-conexa. \square

4.4 Estimativa para $|E(M) - E(N)|$

Nesta seção concluímos o principal resultado, para tal utilizamos o Lema 4.13 e a Proposição 4.5. Lembre que no Corolário 4.2 concluímos que o resultado é válido para $|E(N)| = 4$, desde que M não possua menor isomorfo à $M(P)$ em que P é um prisma, no caso em que todo circuito contendo $E(N)$ é gerador de M .

Teorema 4.19. *Seja N uma matroide circular. Se o par (M, N) é menor-minimal, então*

$$|E(M)| \leq 5|E(N)| - 12,$$

desde que M não possua menor isomorfo à $M(P)$ em que P é um prisma.

Demonstração. No Corolário 4.2 vimos que o resultado é válido quando $|E(N)| = 4$, desde que M não tenha um menor isomorfo à $M(P)$, em que P é um prisma. Suponha que $|E(N)| \geq 5$. Segue do Lema 4.18, que existe um elemento e tal que a matroide $M' = co(M \setminus e)$ é 3-conexa. No Proposição 4.13 vimos que o par (M'', N') é menor-minimal, com

$$M'' = co(M \setminus e) \setminus X / Y = M \setminus (X \cup e) / Y \cup (S - w)$$

e

$$N' = N / (S - w),$$

para algum $w \in S$. Além disso, no Lema 4.16, concluímos que

$$|(X \cup e) \cup Y| = |E(M) - E(M'')| \leq 4.$$

Logo,

$$|E(M)| - |E(M'')| \leq |S| + 3. \quad (4.37)$$

Sem perda de generalidade, dentre todos os pares (M, N) que satisfazem as hipóteses do Proposição 4.13 podemos escolher um par (M, N) tal que $|E(M)|$ é mínimo. Assim, o par (M, N) também satisfaz as hipóteses da Proposição 4.5. Logo, ele é um contra-exemplo para Conjectura 4.3. Portanto, a Conjectura 4.3 é válida para o par (M'', N') . Deste modo,

$$|E(M'')| \leq \alpha |E(N')| + \beta = \alpha |E(N)| + \beta + \alpha(1 - |S|). \quad (4.38)$$

De (4.37) e (4.38), obtemos que

$$|E(M)| - |S| - 3 \leq \alpha |E(N)| + \beta + \alpha(1 - |S|).$$

Como $|E(M)| > \alpha |E(N)| + \beta$ temos que $|S| + 3 + \alpha(1 - |S|) > 0$. Contudo, $|S| \geq 3$, implicando que $\alpha < 5$. Mas, o par (M, N) é um contra-exemplo para a Conjectura 4.3, logo podemos assumir que $\alpha \geq 5$. Como $\beta \geq 8 - 4\alpha$, fazendo $\alpha = 5$, obtemos $\beta \geq -12$. Agora, fazendo $\beta = -12$, o resultado vale. \square

Referências Bibliográficas

- [1] R.E. Bixby, *A Simple Theorem on 3-connectivity*, Linear Algebra Appl. **45**, (1982), 123-146.
- [2] R.E. Bixby e C.R. Coullard, *On chains of 3-connected matroids*, Discrete Appl. Math. **15**, (1986), 155-166.
- [3] W.H. Cunningham, *A combinatorial decomposition theory*, Ph.D. Thesis, University of Waterloo, (1973).
- [4] R. Hall, *On contracting hyperplane elements from a 3-connected matroid*, Advances in Applied Mathematics, **43** (2009), 12-23.
- [5] M. Lemos, *K-Elimination Property for Circuits of Matroids*, Journal of Combinatorial Theory. **51**, (1991), 211-226.
- [6] M. Lemos, *Relations between the Circumference and e-Circumference of a Matroid*, Graphs and Combinatorics. **24**, (2008), 101-105.
- [7] M. Lemos, *On 3-connected matroids*, Discrete Math. **73**, (1989), 273-283.
- [8] M. Lemos e T.R.B Melo, *Non-separating cocircuits in matroids*, Discrete Applied Maths. **156**, (2007), 1019-1024.
- [9] M. Lemos e J. Oxley, *On the 3-connected matroids that are minimal having a fixed spanning restriction*, Discrete Math. **218**, (2000), 131-165.
- [10] M. Lemos e J. Oxley, *On the minor-minimal 3-connected matroids having a fixed minor*, European Journal of Combinatorics, **24**, (2003), 1097-1123.

- [11] M. Lemos, J. Oxley e T.J. Reid, *On the 3-connected matroids that are minimal having a fixed restriction*, Graphs Combin. **16**, (2000), 285-318.
- [12] J. Oxley, *Matroid Theory*. New York: Oxford University Press, 1992.
- [13] J. Oxley e H. Wu, *On the Structure of 3-connected Matroids and Graphs*, European Journal of Combinatorics **21**, (2000), 667-688.
- [14] P.D. Seymour, *Decomposition of regular matroids*, J. Combin. Theory Ser. B **28**, (1980), 305-359.
- [15] K. Truemper, *Partial matroid representations*, European Journal of Combinatorics **3**, (1984), 377-394.
- [16] W.T. Tutte, *Lectures on matroids*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sr. B **69**, (1966), 1-47.
- [17] W.T. Tutte, *Introduction to the theory of Matroids*, Elsevier, New York, 1971.
- [18] W.T. Tutte, *Connectivity in matroids*, Can. J. Math. **18**, (1966), 1301-1324.