UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Pós-Graduação em Matemática

Sobre equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado e equações semilineares hiperbólicas

Giovana Siracusa Gouveia

TESE DE DOUTORADO

Recife

2012

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Giovana Siracusa Gouveia

Sobre equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado e equações semilineares hiperbólicas

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Bruno Luis de Andrade Santos

Recife

2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Gouveia, Giovana Siracusa
Sobre equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado e equações semilineares hiperbólicas / Giovana Siracusa Gouveia. - Recife: O Autor, 2012.
vii, 60 folhas: il., fig.

Orientador: Bruno Luis de Andrade Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Equações diferenciais. I. Santos, Bruno Luis de Andrade (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) MEI2013 – 012

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

Bruno Luis de Andrade Santos, *USP*

Orientador

____

Ramón Orestes Mendoza Ahumada, *UFPE*

____

Márcia Cristina Anderson Braz Federson, *USP*

____

José Paulo Carvalho dos Santos, *UNIFAL*

____

Marcos Napoleão Rabelo, *UNIFESP*

SOBRE EQUAÇÕES ÍNTEGRO-DIFERENCIAIS COM RETARDO DEPENDENDO DO ESTADO E EQUAÇÕES SEMILINEARES HIPERBÓLICAS

Por

Giovana Siracusa Gouveia

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Dezembro – 2012

À minha família

Agradecimentos

A Deus, por tudo que proporcionou em minha vida.

Aos meus pais, Jaime e Caterina, pelo amor, pelos ensinamentos e por sempre ter me incentivado aos estudos.

Ao meu irmão Raphael, por ter sido um dos meus principais alicerces nesses anos. Te amo e te admiro demais.

Ao meu namorido Allyson, por todo amor, companheirismo, conselhos e apoio.

A minha cunhada Naninha, que entrou para a família Siracusa oficialmente a pouco tempo, mas que está em meu coração a muitos anos, agradeç por todo o amor e apoio.

Aos amigos do Dmat, Abiel, Adecarlos, Alejandro, André Ventura, Anete, Arlucio, Badaró, Bárbara, Binho, Bruna, Cléssius, Cris, Debora, Dk, Eder, Eudes, Felipe Sinézio, Filipe Dantas, Formiga, Ives, Joilson, Joedson, José Francisco, Karla, Lucas, Manaíra, Marcelo Fernandez, Marcelo Pedro, Paulo Roberto, Renata, Renato Gabarito, Renato Pescador, Rodrigo Gondim, Tarci, Tiago Duque, Thamires e Zaqueu , por tornarem os dias de minha graduação, mestrado e doutorado tão mais agradáveis, pelas diversas conversas na sala do café, pelos jogos de vôlei, pelas festas, pelos casamentos, enfim, foi muito bom conviver com todos vocês, obrigada por isso.

Aos meus irmãos de coração, Gabriel e Ricatti, agradeço pela imensa amizade. Vocês são essenciais em minha vida, espero tê-los sempre como amigos.

Aos professores do Núcleo de Formação Docente, por terem me apoiado na fase de preparação da tese.

Aos professores do Dmat, por toda a matemática ensinada. Em especial, agradeço ao professor Cláudio Cuevas que me acompanhou desde o curso de Análise Real, até a elaboração da tese, sempre torcendo, me ensinando e me apoiando.

Ao meu orientador Bruno de Andrade, pela forma bacana de me conduzir na preparação da tese. Bruno, você é um exemplo que quero seguir, obrigada pela matemática ensinada e pela amizade construída.

Aos professores que compuseram a banca examinadora, José Paulo, Márcia Federson, Marcos Rabelo e Ramon Mendonza, pelas diversas colaborações dadas para melhorar o trabalho e pelas sugestões de problemas a serem pesquisados.

Aos funcionários do dmat, pela disponibilidade, pelo carinho e por desburocratizar nossas vidas. Em especial, agradeço a Tânia que trata os alunos da pós, como seus filhos.

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Utilizando ferramentas topológicas podemos garantir que o conjunto solução de uma equação integro-diferencial com retardo dependendo do estado é um conjunto não vazio, compacto e conexo. Como aplicação de nossos resultados abstratos consideramos algumas equações integro-diferenciais originadas da teoria de viscoelasticidade.

Além disso utilizamos teoria de semigrupo hiperbólico para garantir a existência de soluções compactas quase automórficas de equações semilineares de evolução cujo semigrupo associado não é exponencialmente assintoticamente estável.

Palavras-chave: Equações integro-diferenciais, retardo dependendo do estado, viscoelasticidade, equações diferenciais fracionárias, semigrupo analítico, semigrupo hiperbólico, funções compactas quase automórficas, equações de evolução semilinear.

ABSTRACT

Using topological tools we ensure that the solution set of an abstract integro-differential equation with state-dependent delay is a nonempty, compact and connected set. As application we consider our abstract results in the framework of integro-differential equations coming from viscoelasticity theory.

Also use hyperbolic semigroup theory to guarantee the existence of solutions of equations automorphic compact almost semilineares whose evolution is not associated semigroup exponentially asymptotically stable.

Keywords: Integro-differential equations, State-dependent delay, Viscoelasticity, Fractional differential equations, analytic semigroup, hyperbolic semigroup, compact almost automorphic function, semilinear evolution equation.

Sumário

Introdução

Nesta tese estudamos dois tipos de problema. O primeiro consiste em obter condições suficientes para a existência de soluções brandas de uma classe de equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado, descrita por:

$$\begin{cases} u'(t) = \displaystyle\int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t, u_{\rho(t,u_t)}), \quad t \in [0, b] \\ \qquad\qquad u(0) = \varphi \in \mathcal{B} \end{cases} \tag{1}$$

sendo $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado definido em um espaço de Banach X, $a \in L^1_{loc}([0, \infty))$, $f : [0. b] \times \mathcal{B} \to X$ e $\rho : [0, b] \times \mathcal{B} \to (-\infty, b]$ funções apropriadas e o espaço de fase $\mathcal{B}$ é definido axiomaticamente. Além disso caracterizamos o conjunto solução em termos topológicos. Não conhecemos trabalhos envolvendo a equação (1) que trate a questão da unicidade da solução, dessa forma os resultados da seção 1.2 são um ponto de partida nessa linha de pesquisa já que mostramos que sob certas condições o conjunto solução possui o mesmo grupo de homotopia do conjunto com um ponto. Vale ressaltar que o artigo que contém os resultados dessa seção está submetido a uma revista especializada.

O estudo da estrutura topológica do conjunto solução iniciou na década de 20 quando H. Kneser [56] provou que o teorema de existência de Peano poderia ser reformulado em termos topológicos, mostrando que o conjunto solução de certas equações diferencias além de ser não vazio é conexo e compacto. Esta propriedade ficou conhecida na literatura como propriedade de Kneser. Em 1942, N. Aronszajn incrementou o resultado de Kneser mostrando que o conjunto solução é um R_δ conjunto, ou seja, a interseção de uma sequência decrescente de conjuntos compactos, absolutamente retráteis.

Evidentemente o teorema de Aronszajn teve um grande impacto na teoria qualitativa de equações diferenciais e, devido a isso, o estudo da estrutura topológica de conjuntos soluções tem chamado a atenção de diversos pesquisadores nos últimos anos (ver [7], [8], [9], [34], [60]).

É bem conhecido que a caracterização do conjunto solução de operadores apropriados pode ser útil no estudo de equações diferenciais. Neste sentido, F. Browder e C. Gupta forneceram uma poderosa informação acerca do conjunto de pontos fixos e este resultado ficou conhecido como método de Browder e Gupta (ver [34]). Esse método será muito útil para nosso propósito e está descrito na seção 1.1.3.

O interesse em estudar o problema (1) surgiu na sua aplicabilidade em diversos problemas da física matemática. Podemos destacar a seguinte aplicação:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_0^t da(s)\Delta u(t-s,x) + m(t)h\left(t,x,u(t-\sigma(\|u(t,\cdot)\|)\right),\ 0 \leq t \leq b,\ x \in [0,\pi], \tag{2}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \tag{3}$$

$$u(t,x) = \varphi(t,x),\ t \leq 0,\ 0 \leq x \in [0,\pi], \tag{4}$$

sendo a, m, h e σ funções, apropriadas descritas na seção 2.3.1.

O problema do valor inicial acima é um exemplo típico de um problema de viscoelasticidade unidimensional tal como movimento de ruptura, torção simples, torção de uma haste entre outros (ver [62]).

Como outra aplicação de nossos resultados consideramos a teoria de equações diferenciais fracionárias. Nas últimas décadas a teoria de cálculo fracionário tem tido muito destaque devido a sua vasta aplicabilidade em diversos campos da ciência e engenharia. Em [2], [3], [4],[23], [44], [45], [54] e [55] são dadas aplicações em fluxos de fluidos, reologia, processos dinâmicos em estruturas auto similares e porosas, rede elétrica, teoria de controle de sistemas dinâmicos, viscoelasticidade, eletroquímica da corrosão, físico química, ótica e processamento de sinais. As equações diferenciais funcionais com retardo dependendo do estado também aparecem frequentemente em modelos matemáticos aplicados e têm sido estudadas exaustivamente nos últimos anos (ver [1], [10], [11], [13], [15],[27], [28], [29],[32], [41], [40], [42], [43],[47], [48], [49], [50], [57], [66], [67]). Contudo a maioria dos trabalhos envolvendo essas equações são restritas às equações diferenciais ordinárias. Na seção 1.3.2. apresentamos condições suficientes para a existência de soluções branda para uma classe de equações integro-diferenciais fracionárias com retardo dependendo do estado, descrita por:

$$
\begin{cases}
u'(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u_{\rho(t,u_t)}), \quad t \in [0, b] \\
u_0 = \varphi \in \mathcal{B}
\end{cases}
\tag{5}
$$

com $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido de tipo setorial em um espaço de Banach complexo X, sendo Γ a função Gamma de Euler. A equação (5) é conhecida na literatura por equação integro-diferencial fracionária de Riemann-Liouville (ver [6]).

Na literatura, o problema (5) já foi estudado por diversos autores sem considerar o retardo ou com o retardo dependendo apenas do tempo. Em [21] os autores investigaram a existência e unicidade de soluções brandas S-assintoticamente ω-periódica com retardo infinito, enquanto o caso sem retardo foi considerado em [5], [19] e [20] para a existência de soluções brandas assintoticamente quase periódicas, comportamento assintótico de equações e existência de soluções brandas S-assintoticamente ω-periódicas, respectivamente. Na seção 1.3.2, estabelecemos condições suficientes para garantir a existência de solução do problema (5). Vale ressaltar que os resultados apresentados na subseção 1.3.2 foram publicados em um número especial sobre equações diferenciais fracionárias (ver [6]).

O segundo problema trabalhado na tese foi obter condições suficientes para garantir existência de soluções compactas quase automórficas para a equação de evolução descrita por:

$$
u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \; t \in \mathbb{R}, \tag{6}
$$

sendo A um operador setorial que gera um semigrupo hiperbólico definido em um espaço de Banach X e f é uma função compacta quase automórfica.

A idéia de trabalhar com tal semigrupo é de tentar decompor o espaço de Banach X como soma de dois subepaços fechados de forma que o semigrupo restrito a um desses subespaços seja exponencialmente assintoticamente estável e restrito ao outro seja inversível com inversa assintoticamente estável.

Recentemente, diversos pesquisadores têm tido interesse em estudar funções compactas quase automórficas no contexto das equações de evolução (ver [22], [24], [26], [46] [52]). Teoria de semigrupo e técnicas de ponto fixo têm sido frequentemente utilizadas para estudar equações de evolução semilinear, mas em geral, o operador A é considerado gerador de um semigrupo exponencialmente estável. Em nossos resultados tal estabilidade não é necessária. Nossa proposta é estender o resultado de S. Boulite e colaboradores ([14]), que garante a existência de soluções quase automórfica da equação (6) no espaço X e no espaço intermediário X_α, $\alpha \in (0,\, 1)$ definido na seção 2.1.3.

A tese está organizada em dois capítulos e, devido à diferença da natureza dos problemas tratados em cada capítulo, deixamos as preliminares separadas por tema. Cada capítulo está dividido em três seções. A primeira, intitulada de preliminares, expõe os resultados e definições necessários para a obtenção de nossos resultados, a segunda seção de resultados abstratos obtidos e a terceira seção de aplicações. O primeiro capítulo trata de obter resultados de existência e classificação topológica do conjunto solução da equação integro-diferencial com retardo dependendo do estado descrita por (1) e o segundo capítulo trata de obter resultados de existência e unicidade de soluções para equações de evolução hiperbólicas, descrita por (6).

Capítulo 1

Equações integro-diferenciais com retardo dependendo do estado

Neste capítulo, estamos interessados em estudar algumas propriedades topológicas do conjunto solução de uma classe de equações integro-diferenciais, com retardo dependendo do estado, descrita por

$$\begin{cases} u'(t) = \displaystyle\int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t, u_{\rho(t,u_t)}), \quad t \in [0,b] \\ \qquad\qquad u(0) = \varphi \in \mathcal{B} \end{cases}$$

com $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado definido em um espaço de Banach X, e a, f e ρ funções apropriadas. Particularmente, estabelecemos resultados de existência de soluções.

1.1 Preliminares

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{B}(X)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em X munido com a norma do supremo, e para um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$, denotamos por $\rho(A)$ o conjunto resolvente de A e por $\sigma(A)$ o conjunto spectro de A. Nesta seção, serão feitas as exposições das definições e teoremas utilizados na demonstração de nossos resultados.

1.1.1 Espaço de fase $\mathfrak{B}$

Neste capítulo, faremos uso do espaço de fase definido axiomaticamente a partir das notações desenvolvidas por Y. Hino, S. Murakami e T. Naito em [53]. Nesta seção, faremos uma breve exposição de tal conceito.

Equações diferencias funcionais com retardo são equações diferenciais que dependem do retardo de uma função desconhecida. A formulação deste tipo de equação é descrita por

$$x'(t) = f(t, x_t).$$

O símbolo x_t é o que chamamos de retardo (ou história) da função desconhecida x no instante t.

Descrevemos, de forma geral, o retardo de uma função considerando que, para cada t, x_t está em um espaço de funções pré fixado, o qual chamamos de espaço de fase, que é caracterizado por alguns axiomas. Assumimos que a função $t \mapsto x_t$ é contínua.

Considere $r(t)$ como sendo o atraso tal que todos os argumentos do retardo de x em t estejam no intervalo $[t - r(t),\, t]$. Fazendo $r = \sup\{r(t)\}$, temos que $0 \leq r \leq \infty$. Então, para cada t, tal situação se reflete em termos de x_t desde que tal função tenha domínio $[-r,\, 0]$ e seja definida por $x_t(\theta) = x(t + \theta)$, com $-r \leq \theta \leq 0$. Se r é finito, a equação é dita ser de retardo finito; caso contrário é dita ser de retardo infinito e esse caso é o que será tratado neste capítulo. Resumindo a discursão, para nossos propósitos, x_t é definido por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \ -\infty < \theta \leq 0,$$

e é chamado de t- segmento de x ou a história de x até t. Ver figura 1.1.1 abaixo.

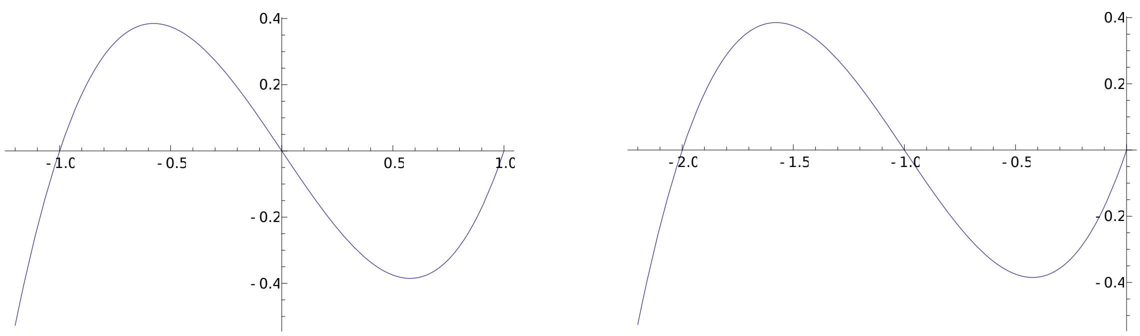

Figura 1.1: Gráfico de x e gráfico de x_1

Nas aplicações é importante observar que cada equação pertence a um espaço de fase adequado ao problema. É percebido que muitas propriedades ocorrem independente do espaço de fase concreto. Então, de forma natural, alguns axiomas são induzidos de muitos exemplos de espaço de fase. Dessa forma diversos autores trabalharam com a intenção de sistematizar tais axiomas, podemos citar [16], [17], [18], [38], [39], [63] e [64].

Definição 1.1 *O espaço de fase $\mathcal{B}$ é o espaço das funções definidas de $(-\infty, 0]$ em X, munida de uma seminorma denotada por $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ tal que as seguintes condições são verificadas:*

(A) Se $x : (-\infty, \mu + b) \to X$, $b > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, é contínua em $[\mu,\, \mu + b)$ e $x_\mu \in \mathcal{B}$, então para todo $t \in [\mu,\, \mu + b)$ as seguintes condições seguem:

(i) $x_t \in \mathcal{B}$;

(ii) $\|x(t)\| \leq H\|x_t\|_{\mathcal{B}}$;

(iii) $\|x_t\|_{\mathcal{B}} \leq K(t-\mu) sup\{\|x(s)\|; \mu \leq s \leq t\} + M(t-\mu)\|x_\mu\|_{\mathcal{B}}$,

com $H > 0$ constante, $K, M : [0,\, \infty) \to [1,\, \infty)$, $K(\cdot)$ contínua, $M(\cdot)$ localmente limitada e H, K, M independentes de $x(\cdot)$.

(A1) Considerando a função $x(\cdot)$ de (A), a função $t \to x_t$ é contínua de $[\mu,\, \mu+b)$, $\mu \in \mathbb{R}$, em $\mathcal{B}$.

(B) O espaço $\mathcal{B}$ é completo.

Exemplo 1.1 *(Espaço de fase $C_r \times L^p(g,\, X)$)*
Suponha que $1 \leq p < \infty$, $0 \leq r < \infty$ e g é uma função não negativa, Borel mensurável definida em $(-\infty,\, -r)$. Considere a medida de Borel positiva, λ, definida em $(-\infty,\, -r)$ por

$$\lambda(E) = \int_E g(\theta)d\theta,\ E \in B,$$

sendo B a família dos conjuntos de Borel de $(-\infty,\, -r)$. A equação acima pode também ser denotada por $d\lambda = g(\theta)d\theta$. O espaço $C_r \times (L^p(g); X)$ é definido como sendo o espaço produto de $C_r := C([-r,\, 0],\, X)$ e $(L^p(g); X)$ que consiste de uma classe de funções φ : $(-\infty,\, 0] \to X$ satisfazendo:

(i) φ *é contínua em* $[-r, 0]$*;*

(ii) $|\varphi|^p$ *é integrável com respeito a* λ *em* $(-\infty, -r)$*.*

A seminorma em $C_r \times L^p(g, X)$ *é definida por:*

$$\|\varphi\|_{\mathcal{B}} = \sup\{|\varphi(\theta)|; -r \leq \theta \leq 0\} + \left(\int_{-\infty}^{-r} |\varphi(\theta)|^p g(\theta) d\theta\right)^{1/p}.$$

Ademais, consideremos as seguintes condições sobre a função g *:*

(g-5) $\displaystyle\int_u^{-r} g(\theta)d\theta < \infty$ *para todo* $u \in (-\infty, -r)$*;*

(g-6) $g(u + \theta) \leq G(u)g(\theta)$ *sendo* $u \leq 0$ *e* $\theta \in (-\infty, -r) \setminus N_u$*, para um conjunto* $N_u \subset (-\infty, -r)$ *com medida de Lebesgue nula e* G *é uma função não negativa que é localmente limitada em* $(-\infty, 0]$*.*

Este espaço também satisfaz os seguintes axiomas:

(C_1*) Se* $\{\varphi^n\}$ *é uma sequência de Cauchy em* $\mathcal{B}$ *com respeito a sua seminorma e se* $\{\varphi^n(\theta)\}$ *converge para uma função* $\varphi(\theta)$ *sobre conjuntos compactos de* $(-\infty, 0]$*, então* φ *está em* $\mathcal{B}$ *e* $\|\varphi^n - \varphi\|_{\mathcal{B}} \to 0$ *quando* $n \to \infty$*.*

(D) $\mathcal{B}$ *é um espaço separável.*

Então temos a seguinte tabela que relaciona as hipóteses com os axiomas do espaço de fase em $C_r \times L^p(g, X)$*.*

	A	A_1	B	C_1	D
$C_r \times L^p(g, X)$	*(g-5,6)*	*(g-5,6)*	*(g-5)*	*(g-5)*	*(g-5)*

H*,* $K(t)$ *e* $M(t)$ *do axioma (A) podem ser tomados da seguinte forma:*

$$\begin{aligned}
H &= 1, \\
K(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq r \\ 1 + \left[\displaystyle\int_{-t}^{-r} g(\theta)d\theta\right]^{1/p}, & r < t. \end{cases} \\
M(t) &= \begin{cases} max\{1 + \left[\displaystyle\int_{-r-t}^{-r} g(\theta)d\theta\right]^{1/p}, G(-t)^{1/p}\} & 0 \leq t \leq r \\ max\{\left[\displaystyle\int_{-r+t}^{-t} g(\theta)d\theta\right]^{1/p}, G(-t)^{1/p}\} & r < t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Além disto, a condição (g-6) implica que

$$\int_{-r-t}^{-t} g(\theta)d\theta \leq G(-t+r)\int_{-2r}^{-r} g(\theta)d\theta,\ r<t.$$

Exemplo 1.2 *Seja $g:(-\infty,0]\to[0,\infty)$ uma função contínua positiva tal que $g(0)=1$ e suponha que g verifica as condições $(g-1)$ e $(g-2)$ em ([53]). Denotamos por $C_g^0(X)$ o espaço das funções contínuas $\phi:(-\infty,0]\to X$ tal que $\|\phi(\theta)\|/g(\theta)\to 0$ se $t\to-\infty$, munido da norma*

$$\|\phi\|_{C_g^0(X)} := \sup_{-\infty<\theta\leq 0}\frac{\|\phi(\theta)\|}{g(\theta)}.$$

Então $C_g^0(X)$ satisfaz os axiomas (A), (A_1) e (B).

1.1.2 Resolventes

O conceito de resolvente é bastante importante para a teoria das equações diferenciais do tipo Volterra, em particular para as equações tratadas neste capítulo. Através desta família, pode-se obter uma fórmula de variação de parâmetros para equações de Volterra, sendo aquela uma candidata em potêncial à solução da equação (ver Proposição 1.2). As principais ferramentas para provar existência do resolvente são descritas em [62]. Aqui, faremos uma breve exposição com a finalidade de tornar o texto o mais independente possível.

Considere X um espaço de Banach, A um operador linear fechado e ilimitado em X com domínio denso $D(A)$ e $a\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ um núcleo escalar não identicamente nulo. Consideremos a seguinte equação de Volterra

$$u(t)=f(t)+\int_0^t a(t-s)Au(s)ds,\ t\in J, \tag{1.1}$$

com $f\in C(J;X)$ e $J=[0,T]$. No que segue, denotamos por $D(A)$ o domínio de A munido com a norma do gráfico $|\cdot|_A$ de A, isto é, $|x|_A=|x|+|Ax|$. $D(A)$ é um espaço de Banach desde que A seja continuamente e densamente incluído em X. Será utilizada a notação

$$(a*f)(t)=\int_0^t a(t-s)f(s)ds,\ t\in J,$$

para a convolução.

É interessante distinguir os tipos de soluções da equação (1.1) e os tipos naturais de soluções são dados a seguir

Definição 1.2 *Uma função $u \in C(J; X)$ é chamada*

(a) solução forte de (1.1) *em J se $u \in C(J; X_A)$ e* (1.1) *é satisfeito em J;*

(b) solução branda de (1.1) *em J se $a * u \in C(J; X_A)$ e $u(t) = f(t) + A(a * u)(t)$ em J;*

(c) solução fraca de (1.1) *em J se*

$$< u(t), x^* >=< f(t), x^* > + < (a * u)(t), A^* x^* >$$

em J, para cada $x^* \in D(A^*)$.

Note que toda solução forte de (1.1) é uma solução branda e cada solução branda é uma solução fraca. A recíproca da segunda afirmação é válida considerando uma hipótese adicional acerca do conjunto resolvente, $\rho(A)$, de A como segue.

Proposição 1.1 *Seja $f \in C(J; X)$ e suponha que $\rho(A) \neq \emptyset$. Então cada solução fraca u de* (1.1) *em J é uma solução branda de* (1.1) *em J.*

Ver ([62]), página 35, para a demonstração.

Note que, no caso em que $a(t) \equiv 1$ e $f \in C^1(J; X)$, (1.1) é equivalente ao problema de Cauchy

$$u'(t) = f' + Au(t), \; u(0) = f(0). \tag{1.2}$$

Neste caso, nosso conceito de solução coincide com os que geralmente são utilizados em (1.2). De forma similar, se $a(t) \equiv t$ e $f \in C^2(J; X)$, então (1.1) é equivalente a

$$u''(t) = f''(t) + Au(t), \; u(0) = f(0), u'(0) = f'(0), \tag{1.3}$$

e nosso conceito de solução de (1.1) coincide com o do problema de segunda ordem (1.3).

Definição 1.3 *A equação* (1.1) *é bem posta, se para cada $x \in D(A)$, existe uma única solução forte $u(t, x)$ em $\mathbb{R}^+$ de*

$$u(t) = x + (a * Au)(t), \; t \geq 0, \tag{1.4}$$

e se $(x_n) \subset D(A)$, com $x_n \to 0$ têm-se $u(t, x_n) \to 0$ em X, uniformemente em intervalos compactos.

Assumindo que (1.1) é bem posto, pode-se introduzir o operador solução $S(t)$ para (1.1) da seguinte forma

$$S(t)x = u(t, x),\ x \in D(A),\ t \geq 0.$$

Pela unicidade da solução, segue que $S(t)$ está bem definido e é linear para cada $t \geq 0$. Além disso, $S(0)x = x$ está em $D(A)$ e $S(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}^+$ para cada $x \in D(A)$.

Mostremos que $S(t)$ é limitado em intervalos compactos. Assuma por contradição que existem $(t_n) \subset [0, T]$ e $(y_n) \subset D(A)$, com $|y_n| = 1$ tal que $|S(t_n)y_n| \geq n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Então $x_n = y_n/n \in D(A)$ e $x_n \to 0$. Com isso obtemos a seguinte contradição

$$1 \leq |S(t_n)x_n| = |u(t_n, x_n)| \to 0, \text{ quando } n \to \infty.$$

Portanto $S(t)$ é limitado e admite extensão para todo X, além disso $S(t)x$ é contínuo para cada $x \in X$. Segue da definição de solução forte que o operador solução mapeia $D(A)$ nele mesmo, $AS(t)x$ é contínuo em $\mathbb{R}^+$ para cada $x \in D(A)$ e

$$S(t)x = x + a * AS(t)x = x + Aa * S(t)x$$

é satisfeita em $\mathbb{R}^+$. Como $S(t)$ é limitado, segue que $Im(a * S(t)) \subset D(A)$ e $Aa * S(t) = S(t) - I$ é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$. Em outras palavras $u(t, x) = S(t)x$ é uma solução branda da equação (1.4) para cada $x \in X$. Ou seja, para cada $x \in X$, a solução branda é única (ver ([62]), página 32). É interessante observar que A comuta com $S(t)$ já que, para cada $x \in D(A)$, ambos $u(t,\, Ax)$ e $Au(t, x)$ são soluções brandas de (1.3) com x trocado por Ax. Portanto

$$S(t)Ax = u(t, Ax) = Au(t, x) = AS(t)x, \text{ para todo } x \in D(A),\ t \geq 0.$$

A partir dessas considerações, dá-se origem à seguinte definição.

Definição 1.4 *Uma família* $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ *de operadores limitados em* X *é chamada de resolvente de* (1.1) *(ou operador solução de* (1.1)*), se as seguines condições são verificadas*

(S1) $S(t)$ *é fortemente contínuo em* $\mathbb{R}^+$ *e* $S(0) = I$;

(S2) $S(t)$ *comuta com* A*, isto é,* $S(t)D(A) \subset D(A)$ *e* $AS(t)x = S(t)Ax$ *para todo* $x \in D(A)$ *e* $t \geq 0$*;*

(S3) A equação resolvente é verificada

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)ds,$$

para todo $x \in D(A)$, $t \geq 0$.

A seguinte proposição caracteriza quando o problema (1.1) é bem posto em termos do resolvente.

Proposição 1.2 *O problema* (1.1) *é bem posto se, e somente se, admite um resolvente* $S(t)$. *Neste caso,* $Im(a * S(t)) \subset D(A)$ *para todo* $t \geq 0$ *e*

$$S(t)x = x + \int_0^t a(t-s)AS(s)ds,$$

para todo $x \in X$, $t \geq 0$. *Em particular,* $Aa * S$ *é fortemente contínuo em* X.

Ver ([62]), página 32 para a demonstração.

Corolário 1.1 *O problema* (1.1) *admite no máximo um resolvente* $S(t)$.

Suponha que $S(t)$ seja um resolvente para (1.1) e seja $u(t)$ uma solução branda do problema (1.1). Então de (S1)-(S3),

$$\begin{aligned} 1 * u &= (S - A(a * S)) * u = S * u - AS * (a * u) \\ &= S * u - S * (Aa * u) = S * (u - Aa * u) = S * f, \end{aligned}$$

ou seja, $S * f$ é continuamente diferenciável e

$$u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)ds, \ t \in J.$$

Esta é a fórmula de variação de parâmetros para equações de Volterra (1.1).

Proposição 1.3 *[62] Suponha que* (1.1) *admita um resolvente* $S(t)$ *e seja* $f \in C(J; X)$. *Então*

(i) Se $u \in C(J; X)$ *é uma solução branda de* (1.1), *então* $S * f$ *é continuamente diferenciável e*

$$u(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t S(t-s)f(s)ds, \ t \in J.$$

Em particular, soluções brandas de (1.1) *são únicas.*

(ii) Se $f \in W^{1,1}(J; X)$, *então*

$$u(t) = S(t)f(0) + \int_0^t S(t-s)f'(s)ds, \ t \in J, \tag{1.5}$$

é uma solução branda de (1.1).

(iii) Se $f \in W^{1,1}(J; X)$, *então* $u(t)$, *descrito por* (1.5), *é uma solução forte de* (1.1).

Como (1.1) é uma equação de convolução definida para $t \geq 0$, é natural utilizar a transformada de Laplace para estudá-la, lembrando que a transformada de Laplace de uma função $f \in L^1_{loc}([0, \infty); X)$ é descrita por

$$\mathcal{L}(f)(\lambda) = \hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \ Re\lambda > \omega,$$

observando que a integral é absolutamente convergente para $Re\lambda > \omega$.

Dito isto, é natural supor que $a(t)$ admite transformada de Laplace, ou seja, que existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|dt.$$

Para obtermos condições sobre o resolvente em termos da transformada de Laplace, faz-se uso da seguinte definição:

Definição 1.5 *Suponha que* $S(t)$ *seja resolvente de* (1.1).

(i) $S(t)$ *é dito ser exponencialmente limitado se existe uma constante* $M \geq 1$ *e* $\omega \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$|S(t)| \leq Me^{\omega t}, \ \text{para todo } t \geq 0; \tag{1.6}$$

neste caso, ω, *ou mais precisamente,* (M, ω) *é chamado o tipo de* $S(t)$.

(ii) A limitação do crescimento, $w_0(S)$, *de um resolvente* $S(t)$ *para* (1.1) *é definida por*

$$\omega_0(S) = inf\{\omega; \exists M > 0 \ \text{tal que} \ (1.6) \ \text{é satisfeita} \}.$$

Fizemos a exposição de tal definição com a finalidade de mostrar a seguinte caracterização dos resolventes de (1.1) de tipo (M, ω) :

Teorema 1.1 *Seja* A *um operador linear fechado e ilimitado em* X *com domínio denso* $D(A)$ *e seja* $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *satisfazendo* $\int_0^\infty e^{-\omega t}|a(t)|dt < \infty$. *Então* (1.1) *admite um resolvente* $S(t)$ *de tipo* (M, ω) *se, e somente se, as seguintes condições são verificadas:*

(i) $\hat{a}(\lambda) \neq 0$ *e* $\dfrac{1}{\hat{a}(\lambda)} \in \rho(A)$ *para todo* $\lambda > \omega$;

(ii) $H(\lambda) = (I - \hat{a}(\lambda)A)^{-1}/\lambda$ *satisfaz a estimativa*

$$|H^n(\lambda)| \leq Mn!(\lambda - \omega)^{-(n+1)}, \; \lambda > \omega, \; n \in \mathbb{N}_0,$$

com

$$H(\lambda) = \hat{S}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)dt, \; \lambda > \omega.$$

Observação 1.1 *No caso escalar existe uma vasta bibliografia que estuda o conceito de família resolvente, podemos destacar o livro de Gripenberg e colaboradores (ver [35]). É interessante observar que devido a unicidade da transformada de Laplace, no caso* $a(t) \equiv 1$ *a família* $S(t)$ *corresponde a um* C_0*-semigrupo e, no caso* $a(t) \equiv t$*, a família* $S(t)$ *corresponde a uma família cosseno.*

A partir do conceito de resolvente pode-se obter a fórmula de variação de parâmetros para as equações de evolução, como segue:

Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear, fechado e densamente definido sobre o espaço de Banach X. Considere o problema

$$\begin{cases} u'(t) = \displaystyle\int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t), \quad t \in [0, b] \\ \qquad u(0) = u_0 \in X \end{cases} \tag{1.7}$$

sendo $a \in L^1_{loc}([0, \infty))$ e $f \in C([0, b]; X)$. A partir da equação (1.7) temos

$$1 * u' = 1 * a * Au + 1 * f$$

$$\Longrightarrow u = 1 * a * Au + g, \tag{1.8}$$

com $g(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t f(s)ds$. Isto é, o problema (1.7) pode ser reescrito da forma (1.1), considerando o núcleo $1 * a$. Portanto, segue do item (ii) da Proposição 1.3 que, se existe um resolvente para a equação (1.8), então a função

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds, \; 0 \leq t \leq b$$

é uma solução branda para a equação (1.7).

1.1.3 Resultados topológicos preliminares

Em 1923, H. Kneser [56] reformulou o teorema de existência de Peano em termos topológicos, mostrando que o conjunto solução de certas equações diferenciais, além de ser não vazio, é conexo e compacto. Posteriormente, em 1942, N. Aronzajn [12] incrementou o resultado de Kneser mostrando que, com as mesmas condições, o conjunto solução é um R_δ conjunto. Evidentemente a caracterização do conjunto solução de uma equação diferencial está intimamente relacionada a caracterizar o conjunto de pontos fixos de um operador apropriado.

Em 2000, L. Górniewicz [34] catalogou, de forma resumida, algumas das técnicas provenientes dos resultados de Kneser e Aronzajn que caracterizam topologicamente o conjunto solução de uma classe de equações diferenciais, podendo destacar o método de Browder-Gupta, o método de Banach e o método do limite inverso. Neste capítulo, faremos uso do método de Browder-Gupta para este fim. As definições e resultados utilizados serão expostos nesta seção. No que segue, X e Y são espaços métricos.

Definição 1.6 *Um espaço E é contratível, se existe uma homotopia $h : X \times [0, 1] \to X$ tal que para todo $x \in X$,*

$$h(x, 0) = x \quad e \quad h(x, 1) = x_0,$$

para algum $x_0 \in X$ fixado.

Definição 1.7 *Um espaço X é absolutamente retrátil, se para todo espaço Y, todo subconjunto fechado $B \subset Y$ e toda aplicação contínua $f : B \to X$, existe uma extensão contínua $\tilde{f} : Y \to X$ de f sobre Y, isto é, $\tilde{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in B$.*

Definição 1.8 *Um espaço X é um R_δ conjunto, se existe uma sequência de espaços contratíveis compactos e não vazios, $\{X_n\}$, tal que $X_{n+1} \subset X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e*

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Observação 1.2 *Observe que qualquer R_δ conjunto é um espaço compacto, conexo e não vazio que é acíclico com respeito à homologia de Čech, isto é, têm a mesma homologia que o espaço de um ponto (ver [34]).*

Definição 1.9 *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e seja $y \in Y$. A função f é própria em y, se existe $\epsilon > 0$ tal que para qualquer conjunto compacto $K \subset B(y, \epsilon)$, o conjunto $f^{-1}(K)$ é compacto, sendo $B(y, \epsilon)$ a bola aberta em Y centrada em y e raio ϵ.*

Agora podemos escrevemos a formulação do teorema de Browder-Gupta devido a L. Górniewicz.

Teorema 1.2 *[34] Sejam E um espaço de Banach e $f : X \to E$ uma função contínua tal que as seguintes condições são satisfeitas*

(i) f é própria em $0 \in E$;

(ii) Para todo $\epsilon > 0$, existe uma função contínua $f_\epsilon : X \to E$, onde

1. *$\|f(x) - f_\epsilon(x)\| \le \epsilon$ para todo $x \in X$;*
2. *a aplicação $\tilde{f}_\epsilon : f_\epsilon^{-1}(B(0, \epsilon)) \to B(0, \epsilon)$, definida por $\tilde{f}_\epsilon(x) = f_\epsilon(x)$, é um homeomorfismo.*

Então o conjunto $f^{-1}(\{0\})$ é um R_δ-conjunto.

O seguinte resultado foi obtido por Szufla [65] em 1979 e nos fornece algumas condições suficientes para que uma função contínua satisfaça o item (ii) do último teorema.

Considere K um subconjunto convexo e limitado de um espaço normado e sejam E um espaço vetorial topológico de Hausdorff e $C := C(K; E)$. Assumindo que $t_0 \in K$, $x_0 \in E$ e que Ω é a família de todas as vizinhanças abertas de 0 em E, denotamos por Φ o conjunto de todas as funções contínuas $F : C \to C$ tal que

(i) Para qualquer $\mathcal{U} \in \Omega$, existe $\epsilon > 0$ tal que $F(x)(t) - F(x)(s) \in \mathcal{U}$, para cada $x \in C$, $t, s \in K$ tal que $|t - s| \le \epsilon$;

(ii) $F(x)(t_0) = x_0$ para cada $x \in C$;

(iii) Para cada $\epsilon > 0$,

$$x|_{K_\epsilon} = y|_{K_\epsilon} \Longrightarrow F(x)|_{K_\epsilon} = F(y)|_{K_\epsilon}, \ \forall x, y \in C,$$

sendo $K_\epsilon = B[t_0, \epsilon] \cap K$ e $B[t_0, \epsilon]$ a bola fechada de centro t_0 e raio ϵ.

Denotamos por I a aplicação identidade em C.

Lema 1.1 *Para qualquer $F \in \Phi$, existe uma sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $I - F_n$ é um homeomorfismo de C em C e $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ uniformemente em $x \in C$.*

Nesta tese, utilizamos o seguinte critério do valor médio para integral de Bochner.

Definição 1.10 *Seja S um subconjunto de um espaço vetorial V. A envoltória convexa de S em V é denotada por $co\{S\}$ e definida por*

$$co\{S\} = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n |\, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+,\, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1 \;e\; \{x_1, \cdots, x_n\} \subset S\}.$$

Teorema 1.3 *[59] Sejam Z um espaço de Banach e $f : [\alpha, \beta] \to Z$ uma função integrável. Então*

$$\frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(\tau)d\tau \in \bar{co}\{f(\tau);\, \tau \in [\alpha, \beta]\}.$$

Para finalizar esta seção, enunciaremos os teoremas de ponto fixo utilizados nesse capítulo e que garantem a existência de solução. O primeiro é conhecido como alternativa de Leray-Schauder. Antes, faremos uma exposição da definição de operadores completamente contínuos e compactos baseados no livro de Granas e Dugundji, [36].

Definição 1.11 *Sejam X e Y espaços topológicos.*

(i) Uma aplicação $F : X \to Y$ é compacta, se $F(X)$ está contido em um subconjunto compacto de Y.

(ii) Uma aplicação $F : X \to Y$ é completamente contínua, se a imagem de cada conjunto limitado de X está contida em um subconjunto compacto de Y.

Teorema 1.4 *[36] Seja C um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X com $0 \in C$. Considere $F : C \to C$ uma aplicação completamente contínua e seja*

$$\epsilon(F) = \{x \in C; x = \lambda F(x),\ \text{para algum } 0 < \lambda < 1\}.$$

Então, ou $\epsilon(F)$ é ilimitado ou F possui um ponto fixo.

Teorema 1.5 *[59] Suponha que D é um subconjunto convexo, fechado e limitado de um espaço de Banach X e sejam Γ_1 e Γ_2 funções contínuas de D em X que satisfazem as seguintes condições* *(i)* $\Gamma_1(x) + \Gamma_2(x) \in D$, *para todo* $x \in D$;

(ii) $\overline{\Gamma_2(D)}$ *é compacto;*

(iii) Existe um número γ, $0 \leq \gamma < 1$ *tal que* $\|\Gamma_1(x) - \Gamma_1(y)\| \leq \gamma\|x - y\|$, *para todo* $x, y \in D$.

Então existe $z \in D$ *tal que* $\Gamma_1(z) + \Gamma_2(z) = z$.

1.1.4 Medida de não compacidade

A definição de medida de não compacidade de subconjuntos limitados em espaços normados foi introduzido por K. Kuratowsty na década de 30. Posteriormente, na década de 50, essa definição voltou a ser utilizada devido aos avanços na teoria de equações diferenciais em espaços de Banach abstratos, onde medidas de não compacidade se mostraram de grande utilidade a partir do estudo de teoremas de ponto fixo para operadores lineares e teoria espectral. A seguir, definimos essas medidas e mostramos suas principais propriedades.

Sejam E e F espaços de Banach, B um subconjunto limitado de E e $\epsilon > 0$. Uma cobertura $\{V_i\}$ de B é uma ϵ-cobertura, se $diam(V_i) \leq \epsilon$ para todo i. A medida de não compacidade de B é definida por

$$\mu_E(B) = \inf\{\epsilon > 0; \text{ existe uma } \epsilon\text{-cobertura finita de } B\}. \tag{1.9}$$

Uma cobertura $\{B_i\}$ de B por bolas de raio $\leq \epsilon$ chamamos de ϵ-cobertura restrita de B. Assim a medida de não compacidade é definida por

$$\tilde{\mu}_E(B) = \inf\{\epsilon > 0; \text{ existe uma } \epsilon\text{-cobertura restrita finita de } B\}.$$

A proposição a seguir apresenta várias propriedades das medidas de não compacidade que serão utilizadas na prova de nossos resultados.

Proposição 1.4 *[31] Sejam* A *e* B *subconjuntos limitados de um espaço de Banach* E. *Então*

(i) $\mu_E(A) = 0$, *se e somente se,* $\bar{A}$ *é compacto, sendo* $\bar{A}$ *o fecho de* A.

(ii) $\mu_E(A) = \mu_E(\bar{A}) = \mu_E(co\{A\})$.

(iii) $\mu_E(\lambda A) = |\lambda|\mu_E(A)$.

(iv) $\mu_E(A) \leq \mu_E(B)$ *se* $A \subset B$.

(v) $\mu_E(A + B) \leq \mu_E(A) + \mu_E(B)$.

(vi) $\tilde{\mu}_E(A) \leq \mu_E(A) \leq 2\tilde{\mu}_E(A)$.

(vii) Se E é um espaço de Banach de dimensão infinita, então $\tilde{\mu}_E(U_E) = 1$, sendo U_E a bola unitária de E.

1.2 Resultados abstratos

O principal objetivo desta seção é descrever propriedades topológicas do conjunto solução do seguinte problema

$$\begin{cases} u'(t) = \displaystyle\int_0^t a(t-s)Au(s)ds + f(t, u_{\rho(t,u_t)}), \quad t \in [0, b] \\ \qquad\qquad u(0) = \varphi \in \mathcal{B} \end{cases} \tag{1.10}$$

Em particular, foram estabelecidas condições suficientes para a existência de soluções brandas do problema (2.23). Para a demonstração de nossos resultados assumimos que $a \in L^1_{loc}([0, \infty))$, $\rho : [0, b] \times \mathcal{B} \to (-\infty, b]$ é contínua e $\varphi \in \mathcal{B}$. Além disso supomos que $A : D(A) \subset X \to X$ é gerador de um operador solução $S(t)$, onde X é um espaço de Banach, e que existe uma constante $M > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, b]$.

A seguir, apresentamos a definição de solução branda para o problema (1.10).

Definição 1.12 *Seja A gerador de um operador solução $S(t)$. Uma função $u : (-\infty, b] \to X$ é chamada de solução branda para o problema* (1.10)*, se $u_0 = \varphi$, $u_{\rho(t,\, u_t)} \in \mathcal{B}$, $u\,|_{[0,\,b]} \in C([0, b]; X)$ e*

$$u(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s)f(s,\, u_{\rho(s,\, u_s)})ds, \;\; t \in [0, b].$$

Consideramos, para nossos objetivos, as seguintes hipóteses

$(\mathbf{H_1})$ A função $f : [0, b] \times \mathcal{B} \to X$ verifica as seguintes condições:

(i) A função $f(t,\cdot) : \mathcal{B} \to X$ é contínua para quase todo $t \in [0,b]$ e a função $f(\cdot,\psi) : [0,b] \to X$ é fortemente mensurável para todo $\psi \in \mathcal{B}$.

(ii) Existem $m \in C([0,b],[0,\infty))$ e uma função não decrescente $\Omega : [0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que $\|f(t,\psi)\| \leq m(t)\Omega(\|\psi\|_{\mathcal{B}})$, para todo $(t,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B}$.

$(\mathbf{H_2})$ Para todo $t \in [0,b]$ e $r > 0$, o conjunto $\{f(s,\psi); s \in [0,t], \|\psi\|_{\mathcal{B}} \leq r\}$ é relativamente compacto em X.

$(\mathbf{H}_\varphi)$ A função $t \to \varphi_t$ é bem definida, contínua do conjunto

$$\mathcal{R}(\rho^-) = \{\rho(s,\psi) : (s,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B},\ \rho(s,\psi) \leq 0\}$$

em $\mathcal{B}$ e existe uma função contínua e limitada $J^\varphi : \mathcal{R}(\rho^-) \to (0,\infty)$ tal que $\|\varphi_t\|_{\mathcal{B}} \leq J^\varphi(t)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}$ para todo $t \in \mathcal{R}(\rho)$.

Observação 1.3 *Observe que a condição* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *é verificada, por exemplo, por funções contínuas e limitadas.*

A fim de obtermos os resultados de existência de soluções brandas é necessário o seguinte lema, que foi provado pela primeira vez por E. Hernandéz e colaboradores (ver [51]).

Lema 1.2 *Considere* $x : (-\infty,b] \to X$ *uma função contínua em* $I = [0,b]$ *tal que* $x_0 = \varphi$. *Se* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *é verificado para todo* $s \in \mathcal{R}(\rho^-) \cup I$, *então existem* M_b *e* $K_b \in \mathbb{R}$ *para os quais a seguinte estimativa é verificada*

$$\|x_s\|_{\mathcal{B}} \leq (M_b + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b \sup\{\|x(\theta)\|; \theta \in [0,\ \max\{0,s\}]\},$$

com $J^\varphi = \sup\limits_{t \in \mathcal{R}(\rho^-)} J^\varphi(t)$.

Demonstração: Considere $s \in \mathcal{R}(\rho^-)$, então de $(\mathbf{H}_\varphi)$ temos que

$$\|x_s\|_{\mathcal{B}} \leq J^\varphi(s)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \leq J^\varphi\|\varphi\|_{\mathcal{B}}.$$

Por outro lado, se $s \in [0,b]$, segue do axioma (A) da definição de espaço de fase que

$$\begin{aligned} \|x_s\|_{\mathcal{B}} &\leq M(s)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K(s) \sup\{\|x(\theta)\|; \theta \in [0, \max\{0,s\}]\} \\ &\leq M_b\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b \sup\{\|x(\theta)\|; \theta \in [0, \max\{0,s\}]\} \end{aligned}$$

Das desigualdades acima, concluímos a prova do lema.

$\blacksquare$

Teorema 1.6 *Considere as condições* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *e* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *satisfeitas. Se*

$$K_b M \liminf_{\xi\to\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi} \int_0^b m(s)ds < 1,$$

então o problema (1.10) tem uma solução branda. Além disso, se

$$K_b M \limsup_{\xi\to\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi} \int_0^b m(s)ds < 1,$$

então o conjunto $\mathcal{S}$, *formado por todas as soluções brandas de* (1.10), *é compacto em* $C([0,b],X)$.

Demonstração: Seja $\bar{\varphi} : (-\infty, b] \to X$ uma extensão de φ a $(-\infty, b]$ tal que $\bar{\varphi}(\theta) = \varphi(0)$ em $[0, b]$. Se $x \in C([0, b]; X)$, definimos $\bar{x} : (-\infty, b] \to X$ como uma extensão de x a $(-\infty, b]$ tal que $\bar{x}_0 = \varphi$. Consideramos o espaço $\mathcal{U} = \{u \in C([0, b]; X) : u(0) = \varphi(0)\}$ munido da norma do supremo $\|u\|_b = \sup\{\|u(t)\|;\, t \in [0,\, b]\}$. Definimos o operador $\Gamma : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ por

$$\Gamma x(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds, \tag{1.11}$$

para $t \in [0, b]$.

Mostremos que $\Gamma\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$. Para isto, considere a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t+h) - \Gamma u(t)\| &\le \|S(t+h)\varphi(0) - S(t)\varphi(0)\| \\ &+ \int_0^t \|(S(t+h) - S(t)) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})\| ds \\ &+ \int_t^{t+h} \|(S(t+h) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})\| ds \end{aligned}$$

Analisemos, separadamente, cada parcela da soma do lado direito da desigualdade. Como $S(\cdot)$ é contínuo, então para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|S(t+h)\varphi(0) - S(t)\varphi(0)\| < \frac{\epsilon}{3} \text{ sempre que } 0 < h < \delta_1.$$

Como a condição $(\mathbf{H_2})$ garante que o conjunto $\{f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}),\ s \in [0,\, t]\}$ é relativamente compacto, então existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|(S(t+h) - S(t)) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})\| < \frac{\epsilon}{3t} \text{ sempre que } \ 0 < h < \delta_2.$$

Por fim, considere a seguinte estimativa

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\int_t^{t+h} \|S(t+h)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})\|ds & \leq & M\displaystyle\int_t^{t+h} \|f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})\|ds \\ & \leq & M\displaystyle\int_t^{t+h} m(s)\Omega(\|\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}\|)ds \\ & \leq & M\Omega((M_b+J^{\varphi})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} \\ & + & K_b\sup\{\|x(\theta)\|;\, \theta\in[0,\, b]\})\displaystyle\int_t^{t+h} m(s)ds\end{array}$$

com $t_0 \in (t,\, t+h)$. Portanto

$$\int_t^{t+h} \|(S(t+h)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})\|ds \leq \frac{\epsilon}{3} \text{ sempre que } \ 0<h<\delta_3,$$

com $\delta_3 = \epsilon/(3M\Omega\left((M_b+J^{\varphi})\|\varphi\| + K_b r\right)\int_t^{t+h} m(s)ds)$. Ou seja, para todo $\epsilon > 0,$ existe $\delta = \min\{\delta_i\} > 0,\ i = 1,\, 2,\, 3,$ tal que

$$\|\Gamma u(t+h) - \Gamma u(t)\| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < h < \delta.$$

Como $\Gamma x(0) = \varphi(0)$, segue que $\Gamma(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.

Consideramos $B_r := B_r(\bar{\varphi}|_I, \mathcal{U})$ como sendo a bola fechada em $\mathcal{U}$ com centro $\bar{\varphi}|_I$ e raio $r > 0$. Mostremos que existe $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$.

Suponha que não existe tal r. Então para todo $r > 0$, existem $x^r \in B_r$ e $t^r \in I$ tal que $r < \|\Gamma x^r(t^r) - \varphi(0)\|$. Portanto, pelo Lema 1.2, obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{array}{rcl} r & < & \|\Gamma(x^r(t^r)) - \varphi(0)\| \\ & = & \|S(t^r)\varphi(0) - \varphi(0) + \displaystyle\int_0^{t^r} S(t^r - s)f(s,\bar{x}^r_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds\| \\ & \leq & (M+1)\|\varphi(0)\| + M\displaystyle\int_0^{t^r} \|f(s,\bar{x}^r_{\rho(s,\bar{x}_s)})\|ds \\ & \leq & (M+1)H\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M\displaystyle\int_0^b m(s)\Omega\left((M_b+J^{\varphi})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b r\right)ds\end{array}$$

Fazendo $\xi = (M_b + J^{\varphi})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b r$, obtemos a seguinte estimativa:

$$1 \leq K_b M \liminf_{\xi\to\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi}\int_0^b m(s)ds,$$

o que contraria nossa hipótese.

Dessa forma, considere $r > 0$ tal que $\Gamma(B_r) \subset B_r$, para provar que Γ é um operador condensante, consideramos a decomposição $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, onde

$$\begin{array}{rcl}\Gamma_1 x(t) & = & S(t)\varphi(0), \\ \Gamma_2 x(t) & = & \displaystyle\int_0^t S(t-s)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds,\end{array}$$

para $t \in I$. Temos que $\Gamma_1(\cdot)$ é contínuo e uma contração em B_r.

Etapa 1. Mostremos que Γ é um operador contínuo. Para isso consideramos a sequência $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ e $u \in \mathcal{U}$ tal que $u^n \to u$ em $\mathcal{U}$ quando $n \to \infty$. Considerando $s \in [0,\, b]$, segue do axioma (A) da definição de espaço de fase a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|u_s^n - u_s\|_{\mathcal{B}} &\leq K(s)\sup\{\|u^n(s) - u(s)\|; 0 \leq s \leq t\} + M(t)\|u_0^n - u_0\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_b \sup\{\|u^n(s) - u(s)\|; 0 \leq s \leq t\},\end{aligned}$$

onde $K_b = \sup\{K(s); 0 \leq s \leq b\}$. Analisemos a convergência de $\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)}$, consideramos o caso em que $\rho(s,\, \bar{u}_s) > 0$ e o caso em que $\rho(s,\, \bar{u}_s) < 0$.

Se $\rho(s,\, \bar{u}_s) > 0$, então existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(s,\, \bar{u}^n_s) > 0$, para todo $n \geq N_1$. Dessa forma, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\|\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)}\|_{\mathcal{B}} + \|\bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}} \\ &\leq K_b\|u^n - u\|_b + \|\bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Mostrando assim que $\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} \to \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}$ em $\mathcal{B}$ quando $n \to \infty$ para todo $s \in [0,\, b]$ tal que $\rho(s,\, \bar{u}_s) > 0$.

Se $\rho(s,\, \bar{u}_s) < 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ é tal que $\rho(s,\, \bar{u}^n_s) < 0$ para todo $n \geq N_2$, então temos a seguinte igualdade

$$\|\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}} = \|\varphi_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \varphi_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}} = 0$$

Finalmente, se $\rho(s,\, \bar{u}_s) = 0$, então existe $N_0 = max\{N_1,\, N_2\}$ tal que, para $n \geq N_0$, temos a seguinte desigualdade

$$\|\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}} \leq K_b\|u^n - u\|_b + \|\bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \bar{u}_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}} + \|\varphi_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)} - \varphi_{\rho(s,\,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}}$$

Desse fato, das condições $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H}_\varphi)$ e da seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\|f\big(s, \bar{u}^n_{\rho(s,\bar{u}^n_s)}\big) - f\big(s, \bar{u}_{\rho(s,\bar{u}_s)}\big)\| &\leq \|f\big(s, \bar{u}^n_{\rho(s,\bar{u}^n_s)}\big) - f\big(s, \bar{u}_{\rho(s,\bar{u}^n_s)}\big)\| \\ &+ \|f\big(s, \bar{u}_{\rho(s,\bar{u}^n_s)}\big) - f\big(s, \bar{u}_{\rho(s,\bar{u}_s)}\big)\|,\end{aligned}$$

concluímos que

$$f\big(s, \bar{u}^n_{\rho(s,\bar{u}^n_s)}\big) \to f\big(s, \bar{u}_{\rho(s,\bar{u}_s)}\big), \text{quando } n \to \infty \text{ para todo } s \in [0, b].$$

Portanto, segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_0^t S(t-s)f\big(s,\bar{u}^n_{\rho(s,\bar{u}^n_s)}\big)ds \longrightarrow \int_0^t S(t-s)f\big(s,\bar{u}_{\rho(s,\bar{u}_s)}\big)ds,$$

quando $n \to \infty$, o que mostra a continuidade de Γ.

Etapa 2. Mostremos que o conjunto $\Gamma_2(B_r)$ é equicontínuo em $[0,b]$.

Seja $0<\epsilon<t<b$ e $0<\delta<\epsilon$ tal que $\|S(t+h)z-S(t)z\| \le \epsilon$, para todo $h \in (0,\delta)$ e $z \in \{f(s,\psi) : s \in [0,t], \|\psi\|_{\mathcal{B}} \le r\}$. Sobre essas condições, para $x \in B_r$ obtemos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|\Gamma_2 x(t+h)-\Gamma_2 x(t)\| &= \|\int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s,\bar{x}^r_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds - \int_0^t S(t-s)f(s,\bar{x}^r_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds\| \\
&\le \|\int_0^t [S(t+h-s)-S(t-s)]f(s,\bar{x}^r_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds\| \\
&+ \|\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s,\bar{x}^r_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds\| \\
&\le \epsilon b + M\int_t^{t+h} m(s)\Omega(\|\bar{x}^r_{\rho(s,\bar{x}_s)}\|_{\mathcal{B}}) \\
&\le \epsilon b + M\Omega(r+\|\varphi\|_{\mathcal{B}})\int_t^{t+h} m(s)ds.
\end{aligned}$$

O que mostra que o conjunto $\Gamma_2(B_r)$ é equicontínuo à direita em $t \in (0,b)$. De forma análoga mostramos a equicontinuidade à esquerda em $t \in (0,b]$. Então $\Gamma_2(B_r)$ é equicontínuo.

Etapa 3. Mostremos que $\Gamma_2(B_r)(t)$ é relativamente compacto em X.

Sejam $x \in B_r$ e $\epsilon > 0$ tal que $0<\epsilon<t\le b$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\Gamma_2 x(t) &= \int_0^{t-\epsilon} S(t-s)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds + \int_{t-\epsilon}^t S(t-s)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds & (1.12)\\
&\in (t-\epsilon)c_0(\bar{K}) + C_\epsilon, & (1.13)
\end{aligned}$$

com $K=\{S(t-\theta)f(\theta,\psi); \theta \in [0,t-\epsilon], \|\psi\|_{\mathcal{B}} \le r\}$ e $C_\epsilon = \{\int_{t-\epsilon}^t S(t-s)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds;\ x \in B_r\}$. Considere $x,y \in B_r$, então:

$$\begin{aligned}
&\|\int_{t-\epsilon}^t S(t-s)f(s,\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)})ds - \int_{t-\epsilon}^t S(t-s)f(s,\bar{y}_{\rho(s,\bar{y}_s)})ds\| \\
&\le \int_{t-\epsilon}^t \|S(t-s)\|\Omega\left((M_b+J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|\bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}\|_{\mathcal{B}}\right)m(s)ds \\
&+ \int_{t-\epsilon}^t \|S(t-s)\|\Omega\left((M_b+J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|\bar{y}_{\rho(s,\bar{y}_s)}\|_{\mathcal{B}}\right)m(s)ds \\
&\le 2M\Omega\left((M_b+J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b r\right)\int_{t-\epsilon}^t m(s)ds.
\end{aligned}$$

Se considerarmos $\xi = (M_b + J^{\varphi})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b r$ obtemos a seguinte estimativa

$$\text{diam} C_{\epsilon} \leq 2M\Omega(\xi) \int_{t-\epsilon}^{t} m(s)ds.$$

Aplicando a medida de não compacidade 1.9 em (1.13), obtemos a **Etapa 3**.

Portanto, pelo teorema de Arzelá-Ascoli concluímos que Γ_2 leva conjuntos limitados em conjuntos relativamente compactos e do Teorema 1.5 segue que o problema (2.23) têm uma solução branda.

Para concluir a demonstração, resta mostrar que o conjunto $\mathcal{S}$ é limitado. Suponha o contrário, ou seja, que exista uma sequência $u^j \in \mathcal{S}$ tal que $\|u^j\|_{\infty} \geq j$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|u^j(t)\| &\leq \|S(t)\varphi(0)\| + \int_0^t \|S(t-s)f(s, \bar{u}^j_{\rho(s,\bar{u}^j_s)})\|ds \\
&\leq M\|\varphi(0)\| + M \int_0^t \Omega(\|\bar{u}^j_{\rho(s,\bar{u}_s)}\|_{\mathcal{B}})m(s)ds \\
&\leq M\|\varphi(0)\| + M \int_0^t \Omega\left((M_b + J^{\varphi})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|u^j\|_b\right) \int_0^b m(s)ds
\end{aligned}$$

de onde obtemos a seguinte estimativa:

$$1 \leq \frac{M\|\varphi(0)\|}{\|u^j\|_b} + \frac{M\Omega\left((M_b + J^{\varphi})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|u^j\|_b\right)}{\|u^j\|_b} \int_0^b m(s)ds.$$

Fazendo $\xi = (M_b + J^{\varphi})\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|u^j\|_b$, temos a seguinte contradição:

$$1 \leq MK_b \limsup_{\xi \to \infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi} \int_0^b m(s)ds.$$

Então $\mathcal{S}$ é um conjunto limitado. Como Γ é completamente contínuo e $\Gamma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, concluímos que $\mathcal{S}$ é compacto em $C([0,b],X)$.

■

Observação 1.4 *Considere um subconjunto $B \subset C([0,\, b]; X)$ tal que $x(0) = \varphi(0)$. Para todo $x \in B$, denotamos por $H(B) \subset C([0,\, b]; \mathcal{B})$ o conjunto das funções contínuas $t \to x_t$ tal que $x \in B$. Como consequência do teorema anterior têm-se que $H(\mathcal{S}) \subset C([0,\, b]; \mathcal{B})$ é um conjunto compacto (ver [53]).*

No próximo resultado, utilizamos a alternativa de Leray-Schauder para garantir a existência de solução branda para o problema (1.10).

Teorema 1.7 *Consideremos as condições* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *e* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *satisfeitas. Se* $\rho(t,\psi) \leq t$ *para todo* $(t,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B}$ *e*

$$K_b M \int_0^b m(s)ds < \int_C^\infty \frac{1}{\Omega(s)} ds, \tag{1.14}$$

sendo $C = (M_b + K_b M + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}$. *Então o problema* (1.10) *possui ao menos uma solução branda.*

Demonstração: Considere $\Gamma : C([0, b]; X) \to C([0, b]; X)$ definido como em (1.11), por

$$\Gamma x(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}) ds.$$

De forma semelhante a demostração do Teorema 1.6, mostra-se que Γ é completamente contínuo.

Se $x^\lambda = \lambda \Gamma x^\lambda$, onde $\lambda \in (0, 1)$, então temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
&\|x^\lambda(t)\| \leq \lambda \, \|\Gamma x^\lambda(t)\| \\
&\leq \|S(t)\varphi(0)\| + \int_0^t \|S(t-s) f(s, \bar{x}^\lambda_{\rho(s,\bar{x}_s)})\| ds \\
&\leq M\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M \int_0^t m(s)\Omega\left(\|\bar{x}^\lambda_{\rho(s,\bar{x}_s)}\|\right) ds \\
&\leq M\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M \int_0^t m(s)\Omega\left(\|(M_b + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|x^\lambda\|_{\max\{0,\, \rho(s,\, \bar{x}^\lambda_s)\}}\right) ds.
\end{aligned}$$

Como $\rho(s,\, \bar{x}^\lambda_s) \leq s$, para todo $s \in [0,\, b]$, temos que :

$$\|x^\lambda(t)\| \leq M\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M \int_0^t m(s)\Omega\left((M_b + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|x^\lambda\|_s\right) ds,$$

com $\|x^\lambda\|_s = \sup\{\|x^\lambda(\theta)\|; \theta \in [0,\, max\{0,\, s\}]\}$. Se $\alpha^\lambda(t) = (M_b + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|x^\lambda\|_t$, então

$$\begin{aligned}
\alpha^\lambda(t) &\leq (M_b + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\left(M\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + M\int_0^t m(s)\Omega((M_b + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b\|x^\lambda\|_s)ds\right) \\
&= (M_b + J^\varphi + K_b M)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b M \int_0^t m(s)\Omega(\alpha^\lambda(s))ds.
\end{aligned}$$

Definindo $\beta_\lambda(t) := (M_b + J^\varphi + K_b M)\|\varphi\|_{\mathcal{B}} + K_b M \int_0^t m(s)\Omega(\alpha^\lambda(s))ds$, segue que

$$\beta'_\lambda = K_b M m(t)\Omega(\alpha^\lambda(t)),$$

e como $\alpha^\lambda(t) \le \beta_\lambda(t)$, concluímos que

$$\beta'_\lambda(t) \le K_b M m(t)\Omega(\beta_\lambda(t)).$$

Como $\dfrac{\beta'_\lambda(t)}{\Omega(\beta_\lambda(t))} = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(t)} \frac{1}{\Omega(s)}ds$, então

$$\int_0^t \frac{d}{dr}\left(\int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(r)} \frac{1}{\Omega(s)}ds\right) dr \le K_b M \int_0^t m(s)ds$$
$$\Longrightarrow \int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(t)} \frac{1}{\Omega(s)}ds - \int_{\beta_\lambda(0)}^{\beta_\lambda(0)} \frac{1}{\Omega(s)}ds \le K_b M \int_0^t m(s)ds$$

Considerando $C = \beta_\lambda(0) = (M_b + J^\varphi + K_b M)\|\varphi\|_\mathcal{B}$ e sabendo que $m(t) \ge 0$, segue que

$$\int_C^{\beta_\lambda(t)} \frac{1}{\Omega(s)}ds \le K_b M \int_0^b m(s)ds.$$

Como, por hipótese,

$$K_b M \int_0^b m(s)ds < \int_C^\infty \frac{1}{\Omega(s)}ds,$$

segue que o conjunto $\{\beta_\lambda; \lambda \in (0,1)\}$ é limitado, o que implica que o conjunto $\{x^\lambda;\, \lambda \in (0,\, 1)\}$ é limitado.

Portanto, segue da alternativa de Leray Schauder que o problema (1.10) possui uma solução branda.

■

No Teorema 1.6, foi mostrado que o conjunto $\mathcal{S}$ formado por soluções brandas da equação (1.10) é um conjunto compacto e não vazio. No próximo resultado daremos outras informações topológicas sobre esse conjunto. Com esta finalidade, consideremos as seguintes condições

$(\mathbf{H_1})'$ A função $f : [0,b] \times \mathcal{B} \to X$ verifica as seguintes condições.

(i) A função $f(t,\cdot) : \mathcal{B} \to X$ é contínua para quase todo $t \in [0,b]$ e a função $f(\cdot,\psi) : [0,b] \to X$ é fortemente mensurável para todo $\psi \in \mathcal{B}$.

(ii) Existe $m \in C([0,b],[0,\infty))$ e uma função contínua, limitada e não decrescente $\Omega : [0,\infty) \to (0,\infty)$ tal que $\|f(t,\psi)\| \le m(t)\Omega(\|\psi\|_\mathcal{B})$, para todo $(t,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B}$.

$(\mathbf{H_2})'$ Para todo $t \in [0, b]$, o conjunto $\{f(s, \psi); s \in [0, t], \psi \in \mathcal{B}\} \subset X$ é limitado.

Teorema 1.8 *Suponha que as condições* $(\mathbf{H_1})'$, $(\mathbf{H_2})'$ *e* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *sejam satisfeitas. Se* $S(t)$, $t > 0$, *é compacto, então o conjunto* $\mathcal{S}$ *formado pelas soluções brandas da Equação* (1.10) *é um* R_δ *conjunto.*

Demonstração: Considere o operador $\Gamma : C([0, b]; X) \to C([0, b]; X)$ como em (1.11), definido por

$$\Gamma x(t) = S(t)\varphi(0) + \int_0^t S(t-s) f(s, \bar{x}_{\rho(s,\bar{x}_s)}) ds.$$

Procedendo de forma semelhante ao Teorema 1.6, mostra-se que Γ é bem definido e contínuo. Mostremos que Γ satisfaz as condições do Lema 1.1.

Seja U vizinhança aberta de $0 \in X$. Então existe $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset U$. Sejam t_1 e $t_2 \in \mathbb{R}$ com $0 < t_1 < t_2$ e considere a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \|\Gamma u(t_1) - \Gamma u(t_2)\| &\leq \|S(t_1)\varphi(0) - S(t_2)\varphi(0)\| \\ &+ \int_0^{t_1} \|(S(t_1 - s) - S(t_2 - s)) f(s, \bar{u}_{\rho(s, \bar{u}_s)})\| \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \|S(t_2 - s)) f(s, \bar{u}_{\rho(s, \bar{u}_s)})\|. \end{aligned}$$

Analisemos separadamente cada parcela da soma do lado direito da desigualdade acima. Como $S(\cdot)x$ é contínuo para todo $x \in X$, segue que existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|S(t_1)\varphi(0) - S(t_2)\varphi(0)\| < r/3 \text{ sempre que } |t_1 - t_2| < \delta_1.$$

Como $S(t)$ é compacto, segue de $(\mathbf{H_2})'$ que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|(S(t_1 - s) - S(t_2 - s)) f(s, \bar{u}_{\rho(s, \bar{u}_s)})\| < r/3t_1 \text{ sempre que } |t_1 - t_2| < \delta_2.$$

Por fim,

$$\int_{t_1}^{t_2} \|S(t_2 - s)) f(s, \bar{u}_{\rho(s, \bar{u}_s)})\| \leq MC|t_2 - t_1| < r/3 \text{ sempre que } |t_1 - t_2| < \delta_3 = r/3MC,$$

com $C = \sup_{s \in [0, b]} \|f(s, \bar{u}_{\rho(s, \bar{u}_s)})\|$.

Portanto $\|\Gamma u(t_1) - \Gamma u(t_2)\| < r$ sempre que $|t_1 - t_2| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, ou seja, $\Gamma u(t_1) - \Gamma u(t_2) \in U$.

As condições (ii) e (iii) do Lema 1.1 são facilmente verificadas, logo existe uma sequência $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $I-\Gamma_n$ é um homeomorfismo de $C([0,\,b];X)$ em $C([0,\,b];X)$ e $\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)=\Gamma(x)$ uniformemente em $x\in C([0,\,b];X)$.

Definindo o operador $T: C([0,b];X)\to C([0,\,b];X)$ por $T(x)=x-\Gamma(x)$, a condição (ii) do Teorema 1.2 é válida considerando $T_n(x)=x-\Gamma_n(x)$.

Mostremos que T é próprio em $0\in C([0,\,b];X)$. Para isso considere Z um conjunto compacto de $C([0,\,b];X)$ e sejam $U=T^{-1}(Z)$ e $V=\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset U$. Para concluir, é suficiente mostrar que V é um relativamente compacto. Tem-se $x=\Gamma x+Tx$, para todo $x\in C([0,\,b];X)$, então

$$V(t)\subset T(V)(t)+\Gamma(V)(t)\subset Z(t)+\Gamma(V)(t)$$

e como $Z(t)$ é um conjunto compacto, aplicando a medida de não compacidade obtemos a seguinte estimativa

$$\alpha(V(t))\leq\alpha(Z(t))+\alpha(\Gamma(V)(t))=\alpha(\Gamma(V)(t)),\ \ t\in[0,\,b], \tag{1.15}$$

ou seja, basta mostrar que $\Gamma(V)(t)$ é relativamente compacto, para cada $t\in[0,\,b]$. Para cada $u^n\in V$

$$\Gamma(u^n)(t)=S(t)\varphi(0)+\int_0^t S(t-s)f(s,\,\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)})ds.$$

Considerando $\mathcal{V}=\{\bar{u}^n;u^n\in V\}\subset\mathcal{B}$. Podemos concluir a seguinte inclusão

$$\Gamma(V)(t)\subset S(t)\varphi(0)+\overline{tc_0(\tilde{K})},$$

onde $\tilde{K}=\{S(t-\theta)f(\theta,\,\bar{u}^n_{\rho(\theta,\,\bar{u}^n_\theta)});\,\theta\in[0,\,t],\,\bar{u}^n\in\mathcal{V}\}$. Como $S(t)$ é compacto, segue da condição $(\mathbf{H_2})'$ que $\Gamma(V)(t)$ é relativamente compacto para cada $t\in[0,\,b]$, de onde se conclui que $\Gamma(V)(t)$ é relativamente compacto.

Mostremos que Γ é equicontínuo em V. Considere a seguinte decomposição

$$\begin{aligned}\Gamma u^n(t+h)-\Gamma u^n(t) &= (S(t+h)-S(t))\,\varphi(0)\\ &+ \int_0^t (S(t+h-s)-S(t-s))\,f(s,\,\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)})ds\\ &+ \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s,\,\bar{u}^n_{\rho(s,\,\bar{u}^n_s)})ds.\end{aligned}$$

Analisemos separadamente cada parcela da soma do lado direito da igualdade acima. Seja $\epsilon > 0$, como $S(\cdot)$ é fortemente contínua, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$\| (S(t+h) - S(t)) \varphi(0)\| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < h < \delta_1.$$

Como $S(t)$ é compacto, para $t > 0$ e pela hipótese $(\mathbf{H_2})'$, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|(S(t-s+h) - S(t-s))f(s,\, \bar{u}^n_{\rho(s,\, \bar{u}^n_s)})\| < \epsilon/3t \text{ sempre que } 0 < h < \delta_2.$$

Além disso, dado $s \in [t,\, t+h]$ temos $\|S(t+h-s)\| \leq M$ portanto

$$\left\| \int_t^{t+h} S(t+h-s) f(s,\, \bar{u}^n_{\rho(s,\, \bar{u}^n_s)}) ds \right\| \leq \epsilon/3 \text{ sempre que } 0 < h < \delta_3 = \epsilon/3M.$$

A partir das estimativas acima, concluímos que $\|\Gamma u^n(t+h) - \Gamma u^n(t)\| < \epsilon$ sempre que $0 < h < \delta = \min\{\delta_1,\, \delta_2,\, \delta_3\}$, com δ independente de $u \in V$. A partir do teorema de Arzelá-Ascoli concluímos que $\Gamma(V)(t)$ é relativamente compacto e pela estimativa (1.15), temos que V é relativamente compacto. Com isto, concluímos que U é relativamente compacto e então T é próprio em 0. O Teorema 1.1 garante que $T^{-1}(0)$ é um R_δ conjunto. Como $T^{-1}(0)$ coincide com $\mathcal{S}$, segue que o conjunto solução da equação (1.10) é um R_δ conjunto.

■

Observação 1.5 *Particularmente o Teorema 1.8 mostra que o conjunto $\mathcal{S}$ é um espaço conexo, compacto e não vazio. Além disso é acíclico com relação a homologia de Čech, o que significa que do ponto de vista da Topologia Algébrica, ser equivalente a um ponto, no sentido que possui o mesmo grupo de homologia do conjunto com um ponto (ver [34]).*

1.3 Aplicações

Do ponto de vista matemático, fomos motivados pela elegância e simplicidade que as equações integro-diferenciais abstratas (**??**) nos fornece para tratar problemas na física matemática. Podemos destacar algumas aplicações na teoria de materiais viscoelásticos como por exemplo os seguintes problemas unidimensionais: torção simples, torção de uma haste, problema de Rayleigh (cisalhamento simples), condução do calor em materiais com memória. Para mais detalhes sobre as formulações destes problemas, ver [62].

1.3.1 O problema de Rayleigh

Vejamos a versão não linear em $\mathbb{R}^n$ do problema de Rayleigh:

Exemplo 1.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Considere o problema*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \int_0^t da(s)\Delta u(t-s,x) + m(t)h\left(t,x,u(t-\sigma(\|u(t,\cdot)\|))\right), \; 0 \leq t \leq b, \; x \in \Omega, \tag{1.16}$$

$$u(t,x) = 0, \; t \geq 0, \, x \in \partial\Omega \tag{1.17}$$

$$u(t,x) = \varphi(t,x), \; t \leq 0, \; 0 \leq x \in \Omega, \tag{1.18}$$

sendo $x_0 \in \Omega$ fixado, $a \in L^1_{loc}([0,\,\infty)$ uma função completamente positiva, com $a(0) = 0$. Suponha que $m : [0,\,b] \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\sigma : \mathbb{R} \to [0,\,\infty)$ sejam funções contínuas e que existam constantes positivas b_1 e b_2 tal que a seguinte desigualdade é verificada

$$|h(t)| \leq b_1|t| + b_2, \, t \in \mathbb{R}.$$

Para tratar o problema $(1.16)-(1.18)$, consideramos φ uma função limitada que pertence ao espaço de fase $\mathcal{B} = C^0_g(X)$, com $X = C_0(\bar{\Omega})$, que é o espaço das funções contínuas $h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 0$, para todo $x \in \partial\Omega$. Considerando $A : D(A) \subset X \to X$ o operador definido por $Au = \Delta u$, com domínio

$$D(A) = \{v \in X; Av \in X \text{ e } v = 0 \text{ em } \partial\Omega\},$$

têm-se que A é um operador setorial em X e é gerador do operador solução $S(t)$, $t \geq 0$, definido por

$$S(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\frac{1}{\lambda\hat{a}(\lambda)}\left(\frac{1}{\hat{a}(\lambda)} - A\right)d\lambda,$$

com γ um caminho que inicia e finaliza em $-\infty$ e circula a origem no sentido horário. Além disso, existe uma constante $M > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \geq 0$.
Por fim, definimos as aplicações

$$f(t,\,\psi)(x) = m(t)h(\psi(0)(x)), \, t \geq 0 \text{ e } x \in \Omega$$

e

$$\rho(t,\,\psi) = t - \sigma(\psi(0)(x_0)), \, t \geq 0 \text{ e } x_0 \in \Omega$$

e podemos descrever $(1.16)-(1.18)$ *da forma abstrata* (1.10). *Sob as condições acima as hipóteses* $(H_1)-(H_\varphi)$ *são verificadas. A partir do Teorema* 1.6 *concluímos que o conjunto solução do problema* $(1.16)-(1.18)$ *é um conjunto compacto e não vazio.*

1.3.2 Equações Fracionárias

Outro tema que tem ganhado destaque nas últimas décadas foi a teoria de cálculo fracionário devido a sua aplicabilidade em diversas áreas de pesquisa, podendo citar: fluxo de fluídos, processos dinâmicos, redes elétricas, teoria de controle de sistemas dinâmicos, viscoelasticidade, eletroquímica de corrosões, físico-química e ótica. Para mais detalhes sobre a formulação destes modelos ver [2],[4],[3],[23],[45],[44],[54].

Com a finalidade de estudarmos equações integro-diferenciais fracionárias faremos uso da teoria de operadores setorias, vejamos sua definição.

Definição 1.13 *Considere A um operador linear fechado, A é dito ser setorial de tipo μ se existe $0<\theta<\pi/2$, $\tilde{M}>0$ e $\mu\in\mathbb{R}$ tal que seu resolvente exista fora do setor*

$$\mu+S_\theta := \{\mu+s; \lambda\in\mathbb{C},\ |arg(-\lambda)|<\theta\}$$

e

$$\|(\lambda-A)^{-1}\| \leq \frac{\tilde{M}}{|\lambda-\mu|},\ \lambda\notin\mu+S_\theta.$$

Nosso objetivo para o final desta seção é apresentar condições suficientes para a existência de soluções brandas para uma classe de equações integro-diferenciais fracionárias com retardo dependendo do estado da forma

$$\begin{cases} u'(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u_{\rho(t,u_t)}), \quad t\in[0,b] \\ u_0=\varphi\in\mathcal{B} \end{cases} \tag{1.19}$$

com $1<\alpha<2$, $A: D(A)\subset X\to X$ um operador linear densamente definido de tipo setorial em um espaço de Banach complexo X, a história x_t está em um espaço de fase abstrato e é definido como na seção anterior, $f:[0,\,b]\times\mathcal{B}\to X$ e $\rho:[0,\,b]\times\mathcal{B}\to(-\infty,\,b]$ são funções apropriadas. A integral de convolução em (1.19), é conhecida como integral de Riemann-Liouville fracionária. Os resultados seguintes foram publicados em [6].

Como referência para a teoria de operadores setoriais podemos citar o livro de Haase, [37]. Nesta seção o operador setorial A é de tipo μ com $0 \leq \theta \leq \pi(1-\alpha/2)$. Tem-se que A é gerador de um operador solução descrito por

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda,$$

com γ um caminho apropriado. No próximo resultado mostramos que este operador está bem definido.

Proposição 1.5 *Considere $\alpha \in (1,\, 2)$. A função*

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda,$$

com H_a um caminho apropriado, é bem definida e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|S_\alpha(t)x\| \leq M\|x\| \tag{1.20}$$

para todo $t \geq 0$ e $x \in X$.

Demonstração: Considere $r > 0$ e $\eta \in (\pi/2,\, \pi/\alpha)$. Seja

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{Ha} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda \tag{1.21}$$

com Ha sendo o caminho descrito por

$$Ha(r,\, \eta) := \{se^{i\eta};\, r \leq s < \infty\} \cup \{re^{is};\, |s| \leq \eta\} \cup \{se^{-i\eta};\, r \leq s < \infty\} = Ha_1 \cup Ha_2 \cup Ha_3 \tag{1.22}$$

orientado no sentido anti horário. Analisemos a integral separadamente em cada caminho Ha_1, Ha_2 e Ha_3. Para isso, tomando $r > 0$, considere $r = 1/t$. Então

Sobre Ha_1 temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{Ha_1} e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x d\lambda\right\| &= \left\|\frac{1}{2\pi}\int_{1/t}^{\infty} e^{tse^{i\eta}}(se^{i\eta})^{\alpha-1}((se^{i\eta})^\alpha - A)^{-1}e^{i\eta}x ds\right\| \\
&\leq \left(\frac{C}{2\pi}\int_{1/t}^{\infty} e^{ts\cos(\eta)}|(se^{i\eta})|^{-1}ds\right)\|x\| \\
&\leq \left(\frac{Ct}{2\pi}\int_{1/t}^{\infty} e^{ts\cos(\eta)}ds\right)\|x\| \\
&= \left(\frac{Ce^{\cos(\eta)}}{-2\pi\cos(\eta)}\right)\|x\|.
\end{aligned}$$

Sobre Ha_2 temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{Ha_2} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} x d\lambda \right\| &= \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} e^{tre^{is}} (re^{is})^{\alpha-1} ((re^{is})^\alpha - A)^{-1} ire^{is} x ds \right\| \\
&\leq \left(\frac{C}{2\pi} \int_{-\eta}^{\eta} e^{\cos(s)} ds \right) \|x\| \\
&\leq \left(\frac{\eta C e}{\pi} \right) \|x\|.
\end{aligned}$$

Sobre Ha_3 obtemos uma estimativa semelhante à obtida em Ha_1. Considerando $M > 0$ como o máximo das bolas obtidas em cada estimativa, obtemos (1.20). Para concluir a demonstração, é suficiente mostrar que a integral (1.21) é independente de $r > 0$ e $\eta \in (\pi/2, \pi/\alpha)$. Para isso considere $r, r' \in (0, \infty)$, $\eta, \eta' \in (\pi/2, \pi/\alpha)$ e a integral (1.21) nos caminhos $Ha(r, \eta)$ e $Ha(r', \eta')$. Sem perda de generalidade, supomos que $\eta > \eta'$ e $r > r'$. Seja D a região do plano complexo situada entre as curvas $Ha(r, \eta)$ e $Ha(r', \eta')$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ consideramos $D_n := D \cap \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq n\}$. Pelo teorema integral de Cauchy concluímos que

$$\int_{\partial D_n} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda = 0.$$

Sejam R_1 e R_2 dois arcos contidos em $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = n\}$. Então temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{R_1} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda \right\|_{\mathcal{L}(X)} &= \left\| \int_{\eta}^{\eta'} e^{tne^{is}} (ne^{is})^{\alpha-1} ((ne^{is})^\alpha - A)^{-1} ine^{is} ds \right\|_{\mathcal{L}(X)} \\
&\leq C \int_{\eta}^{\eta'} e^{n\cos(s)} ds \\
&\leq C(\eta' - \eta) e^{nL},
\end{aligned}$$

com $L = \sup_{s \in [\eta, \eta']} \cos(s) < 0$.

Portanto a integral acima tende a zero quando $n \to \infty$. Com um procedimento similar, mostra-se que a integral sobre o arco R_2 tem a mesma propriedade. Consequentemente,

$$\int_{Ha(r',\eta')} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda = \int_{Ha(r,\eta)} e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} (\lambda^\alpha - A)^{-1} d\lambda.$$

■

Com isso, temos as seguintes adaptações dos teoremas 1.6, 1.7 e 1.8 para o problema (1.19).

Teorema 1.9 *Considere as condições* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *e* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *satisfeitas. Se*

$$M \liminf_{\xi\to\infty} \frac{\Omega(\xi)}{\xi} \int_0^b m(s)ds < 1.$$

Então o problema (1.19) tem uma solução branda.

Teorema 1.10 *Consideremos as condições* $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ *e* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *satisfeitas. Se* $\rho(t,\psi) \leq t$ *para todo* $(t,\psi) \in [0,b] \times \mathcal{B}$ *e*

$$K_b M \int_0^b m(s)ds < \int_C^\infty \frac{1}{\Omega(s)} ds, \tag{1.23}$$

sendo $C = (M_b + K_b M H + J^\varphi)\|\varphi\|_{\mathcal{B}}$. *Então o problema* (1.19) *possui ao menos uma solução branda.*

Teorema 1.11 *Suponha que as condições* $(\mathbf{H_1})'$, $(\mathbf{H_2})'$ *e* $(\mathbf{H}_\varphi)$ *sejam satisfeitas. Então o conjunto* $\mathcal{S}$ *formado pelas soluções brandas da Equação* (1.19) *é um* R_δ *conjunto.*

Observação 1.6 *Neste último resultado não é necessário assumir que o operador solução seja compacto já que um operador setorial gera um semigrupo compacto (ver [62]).*

Exemplo 1.4 *A equação 1.19 é uma versão abstrata da seguinte equação integro-diferencial fracionária que pode ser aplicada na teoria de condução de calor em materiais com memória (ver [62])*

$$u'(t,\xi) = \int_0^t \left(\frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right) u_{\xi\xi}(s,\xi)ds + \left[m(t)\left(\int_0^t u(t-\sigma(\|u(t)\|),\xi')d\xi'\right)^\beta\right], \tag{1.24}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t \geq 0, \tag{1.25}$$

$$u(\tau,\xi) = \varphi(\tau,\xi),\ \tau \leq 0,\ 0 \leq \xi \leq \pi, \tag{1.26}$$

com $t \in [0,b], \xi \in [0,\pi]$, $0 < \beta < 1 < \alpha < 2$ *e* $\varphi \in C_0 \times L^2(g,X)$ *Considere a seguinte condição*

(a) As funções m, $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *sendo contínuas.*

Para representar o problema (1.24)-(1.26) da forma abstrata (1.19), escolhemos $X = L^2([0,\pi])$ *o espaço das funções que são integrável no quadrado* $[0,\pi] \times [0,\pi]$ *e* $\mathcal{B} = C_0 \times L^2(g,X)$. *Neste caso, para cada* $a > 0$ *é possível mostrar que*

$$K_a = \left(1 + \int_{-a}^0 g(\theta)d\theta\right)^{1/2}$$

e

$$M_a = \sup_{s\in[-a,\,0]} G(s)^{1/2},$$

com g e G dados no Exemplo 1.1. Consideramos o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por $Ax = x''$, com $D(A) = \{x \in X; x'' \in X,\, x(0) = x(\pi) = 0\}$. É bem conhecido que A é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ em X e portanto A é um operador setorial. Além disto, A têm um spectro discreto, os autovalores são $-n^2$, $n \in \mathbb{N}$, com autofunções correspondentes normalizadas $z_n(\xi) = (\frac{2}{\pi})^{1/2}\sin(n\pi)$. Por fim, consideramos as seguintes funções

$$f(t,\,\psi)(\xi) = m(t)\left(\int_0^t \psi(0,\,\xi')d\xi'\right)^{\beta},\ t \in [0,\,b],\ \xi \in [0,\,\pi],\ \beta \in (0,\,1)$$

e

$$\rho(t,\,\psi) = t - \sigma(\|\psi(0)\|),\ t \in [0,\,b].$$

sobre as condições acima, podemos representar o problema (1.24)-(1.26) da forma abstrata (1.19).

Capítulo 2

Equações de evolução hiperbólicas

Neste capítulo, estamos interessados em obter resultados de existência e unicidade de soluções brandas compactas quase automórficas, para a equação de evolução semilinear descrita por

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + f(t,\, x(t)), \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

sendo A gerador de um semigrupo hiperbólico definido em X. Diversos pesquisadores estudaram problemas de existência da equação (2.1) considerando que A gera uma semigrupo exponencialmente estável. Em nossos resultados tal estabilidade não é necessária.

2.1 Preliminares

2.1.1 Funções compactas quase automórficas

Em 1968, A. M. Fink [33] introduziu o conceito de funções compactas quase automórficas. Uma característica interessante desta classe de funções é que o conjunto de funções quase periódicas introduzidas por H. Bohr é um subconjunto próprio do conjunto das funções compactas quase automórficas que por sua vez é um subconjunto próprio das funções quase automórficas introduzidas por S. Bochner. Naturalmente diversos pesquisadores se interessaram em estudar este tipo de generalidade de periodicidade em diversos tipos de equações, podemos citar [22], [24], [26], [46] e [52].

Nesta subseção consideramos $(X,\, \|\cdot\|)$ espaço de Banach.

Definição 2.1 *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to X$ é chamada quase periódica, se para todo $\epsilon > 0$ existe um número real $l(\epsilon) > 0$ tal que, todo intervalo de comprimento $l(\epsilon)$, contém um número τ tal que*

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \epsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto de todas as funções quase periódicas é denotado por $AP(X)$.

O seguinte resultado mostra uma caracterização de funções quase periódicas devido a Bochner.

Proposição 2.1 *[61] Uma função $f \in C(\mathbb{R}; X)$ é quase periódica se, e somente se, para toda sequência de números reais $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe uma subsequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f(t+s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.*

Definição 2.2 *Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to X$ é dita ser quase automórfica, se para toda sequência de números reais $(s_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s_{n'})_{n'\in\mathbb{N}}$, tal que*

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n) \tag{2.2}$$

está bem definido para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t-s_n). \tag{2.3}$$

Denotamos por $AA(X)$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R} \to X$ quase automórficas.

Quando as convergências em (2.2) e (2.3) são uniformes sobre qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, dizemos que a função é compacta quase automórfica e, denotamos por $AA_c(X)$, o conjunto de tais funções.

Observação 2.1 *Note que a proposição* (2.1) *mostra que funções compactas quase automórficas generalizam as funções quase periódicas. Além disso, Fink mostrou em [33] que a função $f(n) = sign \cos(2\pi n\theta)$, com θ irracional é compacta quase automórfica mas não é quase periódica, já que a restrição de uma função quase periódica a $\mathbb{Z}$ é também quase periódica. Portanto,*

$$AP(X) \subsetneq AA_c(X).$$

Observação 2.2 *[25] Os espaços $AP(X)$, $AA(X)$ e $AA_c(X)$, munidos com a norma do supremo são espaços de Banach.*

Observação 2.3 *[25] O conjunto $\mathcal{R}(f) = \{f(t); t \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto, se $f \in AA_c(X)$.*

Da definição de funções quase automórficas, é claro que $AA_c(X) \subset AA(X)$. A seguir apresentaremos uma condição necessária e suficiente, para uma função quase automórfica ser compacta quase automórfica.

Lema 2.1 *[33] Uma função quase automórfica, é compacta quase automórfica se, e somente se, é uniformemente contínua.*

Observação 2.4 *Do lema anterior, podemos exibir um exemplo típico de função quase automórfica que não é compacta quase automórfica*

$$f(t) = \sin\left[\frac{1}{2 + \cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)}\right].$$

Note que a função f não é uniformemente contínua (ver Figura 2.1). Portanto

$$AA_c(X) \subsetneq AA(X).$$

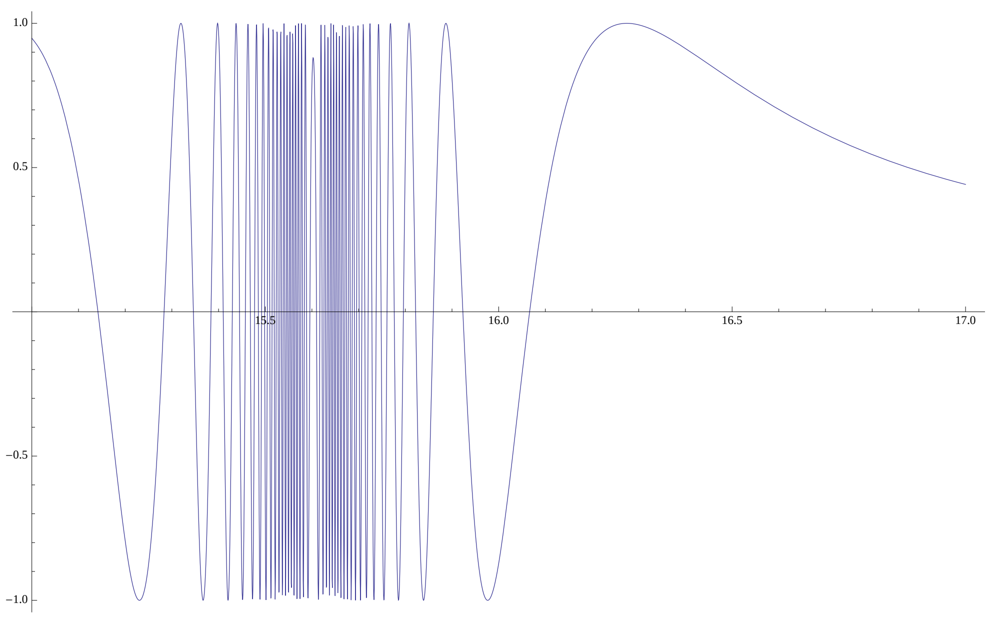

Figura 2.1: Gráfico de f

Sejam X e Y espaços de Banach, com $K \subset X$ e $I \subset \mathbb{R}$. Denotamos por $C_K(I \times X; Y)$, a coleção de funções $f : I \times X \to Y$, tal que $f(t, \cdot)$ é uniformemente contínua em K para todo $t \in I \subset R$. No que segue, $\mathcal{R}(u)$ representa a imagem da função u. O seguinte lema de composição é essencial para a obtenção de nossos resultados.

Lema 2.2 *[25] Se $u \in AA_c(X)$ e $f \in AA_c(X; Y) \cap C_{\mathcal{R}(u)}(\mathbb{R} \times X; Y)$, então a função $\phi : \mathbb{R} \to Y$ definida por $\phi(t) = f(t, u(t))$, pertence ao espaço $AA_c(Y)$.*

2.1.2 Semigrupo hiperbólico

Nessa seção, apresentaremos o conceito de semigrupo hiperbólico. A idéia de trabalhar com tal semigrupo é de tentar decompor o espaço de Banach X como soma de dois subepaços fechados de forma que o semigrupo restrito a um desses subespaços seja exponencialmente assintoticamente estável e, restrito ao outro, seja inversível com inversa assintoticamente estável.

Definição 2.3 *Um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ em um espaço de Banach X é chamado hiperbólico, se X pode ser escrito como soma direta, $X = X_s \oplus X_u$, de dois subespaços fechados $(T(t))-$invariantes, X_s e X_u, de forma que os semigrupos restritos $(T_s(t))_{t\geq 0}$ em X_s e $(T_u(t))_{t\geq 0}$ em X_u satisfazem as seguintes condições.*

(i) O semigrupo $(T_s(t))_{t\geq 0}$ é uniformemente exponencialmente estável em X_s.

(ii) Os operadores $T_u(t)$ são invertíveis em X_u, e $(T_u(t)^{-1})_{t\geq 0}$ é uniformemente exponencialmente estável em X_u.

Exemplo 2.1 *[30] Um semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ com $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ é hiperbólico se existem uma soma direta $\mathbb{C}^n = X_s \oplus X_u$ em subespaços A-invariantes X_s e X_u e constantes $M \geq 1$, $\epsilon > 0$ tal que*

$$\|e^{tA}x\| \leq Me^{-\epsilon t}\|x\| \ \ \forall x \in X_s,\, t \geq 0, \tag{2.4}$$

e

$$\|e^{tA}y\| \geq \frac{1}{M}e^{\epsilon t}\|y\| \ \ \forall y \in X_u,\, t \geq 0. \tag{2.5}$$

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) O semigrupo $(T(t))_{t\geq 0}$ é hiperbólico.

(ii) A matriz e^{tA} não possui autovalores com módulo 1, isto é, $\sigma(e^{tA}) \cap \Gamma = \emptyset$ para todo $t > 0$, com $\Gamma := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ denotando o círculo unitário em $\mathbb{C}$.

(iii) A matriz A não possui autovalores puramente imaginários, isto é, $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Neste caso temos $T(t) = e^{At}$.

Exemplo 2.2 *[30] Assim como no exemplo anterior, um semigrupo uniformemente contínuo $(T(t))_{t\geq 0}$ é hiperbólico se existem constantes $\epsilon > 0$, $M \geq 1$ e uma decomposição direta $X = X_s \oplus X_u$ em subespaços A-invariantes e fechados X_s e X_u tal que para todo $t \geq 0$ as estimativas (2.4) e (2.5) são satisfeitas. Observe que as restrições de $(T(t))_{t\geq 0}$ a X_s e de $(T(t))_{t\geq 0}$ a X_u são uniformemente exponencialmente estável. Portanto temos que a equivalência das afirmações (i)-(iii) também é válida nesse semigrupo.*

Observação 2.5 *Se $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo hiperbólico, então existem uma projeção P e constantes M e $\delta > 0$ tais que $T(t)$ comuta com P, $KerP$ é invariante com respeito a $T(t)$, $T(t) : ImQ \to ImQ$ é invertível e para todo $x \in X$*

$$\|T(t)Px\| \leq Me^{-\delta t}\|x\|,\ t \geq 0; \tag{2.6}$$

$$\|T(t)Qx\| \leq Me^{\delta t}\|x\|,\ t \leq 0; \tag{2.7}$$

onde $Q := I - P$ e para $t < 0$, $T(t) = T(-t)^{-1}$.

Neste capítulo, estamos particularmente interessados na situação de um semigrupo analítico com gerador A. É bem conhecido (ver [30]) que

$$(T(t))_{t\geq 0} \text{ é hiperbólico } \iff \sigma(A) \cap i\mathcal{B} = \emptyset,$$

assumindo que

$$\sigma(T(t)) \subset \Gamma e^{t\sigma(A)} := \left\{ze^{t\lambda}; \lambda \in \sigma(A),\, |z| = 1\right\}.$$

2.1.3 Espaços intermediários

Nessa seção, será introduzido o conceito de espaço intermediário. A teoria de espaços de interpolação é interessante para o estudo da teoria de regularidade para equações abstratas. A terminologia utilizada aqui, é devido ao livro de A. Lunardi [58]. Sobre a teoria, serão apresentados apenas resultados básicos que utilizaremos no nosso trabalho.

Sejam X e Z espaços de Banach com normas $\|\cdot\|_X$ e $\|\cdot\|_Z$ respectivamente, e suponha que Z é continuamente mergulhado em X, isto é, $Z \hookrightarrow X$.

Definição 2.4 *Sejam* $0 \leq \alpha \leq 1$. *Um espaço de Banach* Y *tal que* $Z \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$ *é dito ser de classe* J_α *entre* X *e* Z, *se existe uma constante* $c > 0$ *tal que*

$$\|x\|_Y \leq c\|x\|_X^{1-\alpha}\|x\|_Z^{\alpha}, \ \forall x \in Z. \tag{2.8}$$

Neste caso, escrevemos $Y \in J_\alpha(X,\, Z)$.

Definição 2.5 *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador setorial. Um espaço de Banach* $(X_\alpha,\, \|\cdot\|_\alpha)$, $\alpha \in (0,\, 1)$, *é dito ser um espaço intermediário entre* X *e* $D(A)$, *se* $X_\alpha \in J_\alpha(X,\, D(A))$.

Exemplo 2.3 *Seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *um operador setorial. O espaço de potência fracionária* $D(-A^\alpha)$, $\alpha \in (0,\, 1)$ *é um exemplo de espaço interemediário entre* X *e* $D(A)$.

Observação 2.6 *Seja* $(T(t))_{t\geq 0}$ *um semigrupo analítico e hiperbólico sobre um espaço de Banach* X *e seja* $A : D(A) \subset X \to X$ *seu gerador infinitesimal. Para* $\beta \in (0,\, 1)$, *seja* $(X_\beta,\, \|\cdot\|_\beta)$ *um espaço intermediário entre* X *e* $D(A)$. *Como é feito na literatura, fixaremos* $(X_0,\, \|\cdot\|_0)$ *como sendoo espaço de Banach* X *com norma* $\|\cdot\|$. *Então para* $\alpha \in [0,\, 1)$ *existem constantes positivas* $C(\alpha)$, $M(\alpha)$, δ *e* γ *tais que*

$$\|T(t)Px\|_\alpha \leq M(\alpha)t^{-\alpha}e^{-\gamma t}\|x\|, \ \forall t > 0 \tag{2.9}$$

$$\|T(t)Qx\|_\alpha \leq C(\alpha)e^{\delta t}\|x\|, \ \forall t \leq 0. \tag{2.10}$$

sendo P *e* $Q = I - P$ *as projeções associadas ao operador* A. *Note que se* $\alpha = 0$ *então* $C(\alpha) = M(\alpha)$ *e* $\delta = \gamma$. *Para* $\alpha \in (0,\, 1)$ *uma demostração dessa afirmação pode ser encontrada por exemplo em [14].*

2.1.4 Princípio da contração de Banach

Um dos teoremas de ponto fixo mais utilizados na literatura é o princípio da contração de Banach. A seguir, apresentamos alguns elementos referentes ao teorema e as suas aplicações.

Definição 2.6 *Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ para o qual existe uma constante $L > 0$ tal que*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

para todo $x, y \in X$, é chamada de lipschitziana e a constante L é chamada de constante de Lipschitz de f.

Observação 2.7 *Note que toda função lipschitziana é contínua. Quando a constante de Lipschitz $L < 1$, dizemos que f é uma contração.*

Observação 2.8 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados . Estamos particularmente interessados na situação em que $f : \mathbb{R} \times X \to Y$ é uma função contínua que satisfaz a condição*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todo $x, y \in X$ e $L : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ uma função apropriada. Nesta situação também diremos que f é uma função lipschitziana.

A seguir, enunciamos o princípio da contração de Banach.

Teorema 2.1 *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo.*

2.2 Resultados abstratos

2.2.1 Equações hiperbólicas lineares

Consideremos, inicialmente, a equação de evolução linear e não homogênea, descrita por

$$u'(t) = Au(t) + g(t), \; t \in \mathbb{R}, \tag{2.11}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é gerador de um semigupo analítico hiperbólico $(T(t))_{t\geq 0}$ e $g : \mathbb{R} \to X$ é uma função contínua.

Definição 2.7 *Uma função contínua $u : \mathbb{R} \to X$ é dita ser solução branda da Equação* (2.11)*, se*

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-r)g(r)dr,$$

para todo $t \geq s$ e para todo $s \in \mathbb{R}$.

Mostremos o primeiro resultado de existência de solução branda da equação (2.11).

Teorema 2.2 *Suponha que $g \in AA_c(X)$. Então existe uma única solução branda da equação* (2.11)*, descrita por*

$$u(t) = \int_{-\infty}^t T(t-s)Pg(s)ds - \int_t^\infty T(t-s)Qg(s)ds, \tag{2.12}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde P e Q são as projeções associadas ao operador A. Além disso, $u \in AA_c(X_\alpha)$.

Demonstração: Consideremos $u(t)$ descrita por (2.12), mostremos que u é única solução de (2.11). Para $s \in \mathbb{R}$ tal que $t \geq s$, vale

$$\begin{aligned}
u(t) &= \int_{-\infty}^t T(t-r)Pg(r)dr - \int_t^\infty T(t-r)Qg(r)dr \\
&= \int_{-\infty}^s T(t-r)Pg(r)dr + \int_s^t T(t-r)Pg(r)dr \\
&- \left(\int_s^\infty T(t-r)Qg(r)dr - \int_s^t T(t-r)Qg(r)dr\right) \\
&= \int_{-\infty}^s T(t-s)T(s-r)Pg(r)dr - \int_s^\infty T(t-s)T(s-r)Qg(r)dr \\
&+ \int_s^t T(t-r)(P+Q)g(r)dr \\
&= T(t-s)\left(\int_{-\infty}^s T(s-r)Pg(r)dr - \int_s^\infty T(s-r)Qg(r)dr\right) + \int_s^t T(t-r)g(r)dr \\
&= T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-r)g(r)dr,
\end{aligned}$$

de onde concluímos que u é solução branda de (2.11). Consideremos v também solução de (2.11). Desta forma, aplicando as projeções, obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
Pv(t) &= T(t-s)Pv(s) + \int_s^t T(t-r)Pg(r)dr \\
Qv(t) &= T(t-s)Qv(s) + \int_s^t T(t-r)Qg(r)dr
\end{aligned}$$

Das desigualdades (2.9) e (2.10), temos os seguintes comportamentos assintóticos:

$$\begin{aligned}
\|T(t-s)Pv(s)\|_\alpha &\overset{s\to-\infty}{\longrightarrow} 0\\
\|T(t-s)Qv(s)\|_\alpha &\overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v(t) = (P+Q)v(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-r)Pg(r)dr - \int_{t}^{\infty} T(t-r)Qg(r)dr$$

Mostrando, assim, a unicidade da solução.

Vamos mostrar que $u \in AA_c(X_\alpha)$. Como $g \in AA_c(X)$, dada uma sequência de números reais $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, existe uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\tilde{g}(t) := \lim_{n\to\infty} g(t+s_n) \tag{2.13}$$

está bem definido e

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}(t-s_n). \tag{2.14}$$

Além disso, tais limites são uniformes sobre compactos de $\mathbb{R}$.

Definamos $\tilde{u}$ por

$$\tilde{u}(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-r)P\tilde{g}(r)dr - \int_{t}^{\infty} T(t-r)Q\tilde{g}(r)dr.$$

Temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|u(t+s_n) - \tilde{u}(t)\|_\alpha &= \| \int_{-\infty}^{t+s_n} T(t+s_n-r)Pg(r)dr - \int_{t+s_n}^{\infty} T(t+s_n-r)Qg(r)dr\\
&- \left[\int_{-\infty}^{t} T(t-r)P\tilde{g}(r)dr - \int_{t}^{\infty} T(t-r)Q\tilde{g}(r)dr\right] \|_\alpha\\
&\leq \| \int_{-\infty}^{t} T(t-r)Pg(r+s_n)dr - \int_{-\infty}^{t} T(t-r)P\tilde{g}(r)dr\|_\alpha\\
&+ \| \int_{t}^{\infty} T(t-r)Q\tilde{g}(r)dr - \int_{t}^{\infty} T(t-r)Qg(r+s_n)dr\|_\alpha\\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-r)P(g(r+s_n)-\tilde{g}(r))\|_\alpha dr\\
&+ \int_{t}^{\infty} \|T(t-r)Q(\tilde{g}(r)-g(r+s_n))\|_\alpha dr\\
&\leq M(\alpha)\int_{0}^{\infty} r^\alpha e^{-\gamma r}\|g(t-r+s_n)-\tilde{g}(t-r)\|dr\\
&+ C(\alpha)\int_{-\infty}^{0} e^{\delta r}\|\tilde{g}(t-r)-g(t-r+s_n)\|dr
\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, segue que

$$\lim_{n\to\infty} u(t+s_n) = \tilde{u}(t). \tag{2.15}$$

Com o argumento análogo, mostra-se que

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{u}(t-s_n) = u(t). \tag{2.16}$$

Da estimativa anterior e do fato de que as convergências (2.13) e (2.14) são uniformes sobre conjuntos compactos, segue que (2.15) e (2.16) são uniformes sobre conjuntos compactos.

■

2.2.2 Equações hiperbólicas semilineares

Nesta subseção, estamos interessados em obter resultados de existência e unicidade de soluções compactas quase automórficas para a equação

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + f(t,\, x(t)), \;\; t \in \mathbb{R}, \tag{2.17}$$

sendo A gerador de um semigrupo hiperbólico $(T(t))_{t\geq 0}$ definido no espaço de Bancah X e considerando $f : \mathbb{R} \times X_\alpha \to X$ uma função contínua apropriada, com $\alpha \in [0,\, 1)$ e X_α um espaço intermediário entre $D(A)$ e X.

Definição 2.8 *Uma função contínua e limitada $u : \mathbb{R} \to X_\alpha$ é solução branda da Equação* (2.17)*, se*

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)Pf(s,\, u(s))ds - \int_{t}^{\infty} T(t-s)Qf(s,\, u(s))ds,\; t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.3 *Seja $f \in AA_c(X_\alpha;\, X)$ e suponha que exista uma função localmente integrável $L : \mathbb{R} \to [0,\, \infty)$ tal que*

$$\|f(t,\, x) - f(t,\, y)\| \leq L(t)\|x-y\|,\; \forall x,\, y \in X,\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.18}$$

Assumindo que

$$M(\alpha)\int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(t-s)} L(s)ds + C(\alpha)\int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} L(s)ds < 1,$$

com $M(\alpha)$ e $C(\alpha)$ as constantes dadas na Observação 2.6 , então a Equação (2.17) *possui uma única solução branda $u \in AA_c(X_\alpha)$.*

Demonstração: Considere o operador $\Lambda : AA_c(X_\alpha) \to AA_c(X_\alpha)$ definido por

$$\Lambda u(t) = \int_{-\infty}^{t} T(t-s)Pf(s,\, u(s))ds - \int_{t}^{\infty} T(t-s)Qf(s,\, u(s))ds. \tag{2.19}$$

Do Lema 2.2 e do Teorema 2.2 concluímos que o operador Γ está bem definido. Mostremos que Γ é uma contração. Sejam $u,\, v \in AA_c(X_\alpha)$, temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_\alpha &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)P(f(s,\, u(s)) - f(s,\, v(s)))\|_\alpha ds \\
&+ \int_{t}^{\infty} \|T(t-s)Q(f(s,\, u(s)) - f(s,\, v(s)))\|_\alpha ds \\
&\leq M(\alpha) \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{-\delta(t-s)} \|f(s,\, u(s)) - f(s,\, v(s))\|_\alpha ds \\
&+ C(\alpha) \int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} \|(f(s,\, u(s)) - f(s,\, v(s))\|_\alpha ds \\
&\leq M(\alpha) \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{-\delta(t-s)} L(s) \|u(s) - v(s)\|_\alpha ds \\
&+ C(\alpha) \int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} L(s) \|u(s) - v(s)\|_\alpha ds \\
&\leq \theta(t) \|u - v\|_\infty,
\end{aligned}$$

com $\theta(t) = M(\alpha) \displaystyle\int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(t-s)} L(s)ds + C(\alpha) \int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} L(s)ds$ que, por hipótese é menor do que 1. Portanto pelo princípio da contração de Banach, o resultado segue.

■

Os próximos resultados são consequências imediatas do Teorema 2.3.

Corolário 2.1 *Seja $f \in AA_c(X_\alpha; X)$ e suponha que f satisfaça a condição de Lipschitz (2.18), com L uma função contínua e limitada. Assumindo que*

$$M(\alpha) \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha} e^{-\gamma(t-s)} L(s)ds + C(\alpha) \int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} L(s)ds < 1,$$

então a equação (2.17)*, possui uma única solução branda $u \in AA_c(X_\alpha)$.*

Corolário 2.2 *Seja $f \in AA_c(X_\alpha;\, X)$ e suponho que f satisfaça a seguinte condição de Lipschitz*

$$\|f(t,\, x) - f(t,\, y)\| \leq k\|x - y\|$$

para todo $x,\, y \in X_\alpha$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $k(M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1}) < 1$, então a equação (2.17) *possui uma única solução branda $u \in AA_c(X_\alpha)$.*

No seguinte resultado, usaremos o conceito de função localmente limitada, vejamos sua definição:

Definição 2.9 *Uma função $L : X \times X \to [0, \infty)$ é dita ser localmente limitada, se para todo $r \geq 0$, existe uma constante $k(r) \geq 0$ tal que $L(x, y) \leq k(r)$ para todo $x, y \in X$ tal que $\|x\| \leq r$ e $\|y\| \leq r$.*

Vejamos um resultado de existência, onde temos a condição de Lipschitz perturbada na função f.

Teorema 2.4 *Seja $f \in AA_c(X_\alpha; X)$ e assuma que exista uma função localmente limitada $L : X_\alpha \times X_\alpha \to [0, \infty)$, tal que $\forall x, y \in X_\alpha$, temos*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(x, y)\left(1 + \|x\|_\alpha^{l-1} + \|y\|_\alpha^{l-1}\right)\|x - y\|_\alpha, \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

com $l \geq 1$. Se existe $R > 0$, tal que

$$\left(K(R) + \frac{\|f(\cdot, 0)\|_\infty}{R}\right)(M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1}) < 1,$$

sendo

$$K(R) = k(R)(1 + 2R^{l-1}),$$

com $k(R)$ como na Definição 2.9, e $M(\alpha)$ e $C(\alpha)$ as constantes dadas na Observação 2.6. Então a equação (2.17), admite uma única solução branda $u \in AA_c(X_\alpha)$.

Demonstração: Defina o operador Λ pela expressão (2.19). Considere $R > 0$ tal que

$$(RK(R) + \|f(\cdot, 0)\|_\infty)(M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1}) < R.$$

Seja B_R a bola fechada

$$B_R = \{u \in AA_c(X_\alpha);\ \|u\|_\infty \leq R\} \subset AA_c(X_\alpha).$$

Observamos que, se $u \in B_R$, então temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u(t)\|_\alpha &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)Pf(s, u(s))\|_\alpha ds + \int_{t}^{\infty} \|T(t-s)Qf(s, u(s))\|_\alpha ds \\
&\leq M(\alpha)\int_{-\infty}^{t} (t-s)^\alpha e^{-\gamma(t-s)} L(u(s), 0)(1 + \|u(s)\|_\alpha^{l-1})\|u(s)\|_\alpha ds \\
&+ C(\alpha)\int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} L(u(s), 0)(1 + \|u(s)\|_\alpha^{l-1})\|u(s)\|_\alpha ds \\
&+ \left(M(\alpha)\int_{-\infty}^{t}(t-s)^\alpha e^{-\gamma(t-s)} ds + C(\alpha)\int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} ds\right)\|f(\cdot, 0)\|_\infty \\
&\leq (M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1})(RK(R) + \|f(\cdot, 0)\|_\infty) \leq R.
\end{aligned}$$

de onde concluímos que $\Lambda(B_R) \subset B_R$. Para concluir a demonstração do teorema, resta mostrar que Λ é uma contração. Considere a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_\alpha \leq \int_{-\infty}^{t} \|T(t-s)P(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_\alpha ds \\
&+ \int_{t}^{\infty} \|T(t-s)Q(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))\|_\alpha ds \\
&\leq M(\alpha) \int_{-\infty}^{t} (t-s)^\alpha e^{-\gamma(t-s)} L(u(s), v(s))(1 + \|u(s)\|_\alpha^{l-1} + \|v(s)\|_\alpha^{l-1})\|u(s) - v(s)\|_\alpha ds \\
&+ C(\alpha) \int_{t}^{\infty} e^{\delta(t-s)} L(u(s), v(s))(1 + \|u(s)\|_\alpha^{l-1} + \|v(s)\|_\alpha^{l-1})\|u(s) - v(s)\|_\alpha ds \\
&\leq (M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1})K(R)\|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como $K(R)(M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1}) < 1$, o resultado segue do princípio da contração de Banach.

■

Os próximos resultados são consequências imediatas do Teorema 2.4.

Corolário 2.3 *Seja $f \in AA_c(X_\alpha; X)$ e suponha que exista uma constante $c \geq 0$ tal que para todo $x, y \in X_\alpha$, temos*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq c\left(1 + \|x\|_\alpha^{l-1} + \|y\|_\alpha^{l-1}\right)\|x - y\|_\alpha, \ \textit{para todo } t \in \mathbb{R},$$

com l maior ou igual a 1. Se c é suficientemente pequeno, então a equação (2.17) possui uma única solução $u \in AA_c(X_\alpha)$.

Corolário 2.4 *Seja $f \in AA_c(X_\alpha; X)$ e suponha que para todo $r \geq 0$ exista uma constante $L(r) \geq 0$, tal que $\forall\, x, y \in X_\alpha$, com $\|x\|_\alpha \leq r$ e $\|y\|_\alpha \leq r$, tivermos*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(r)\|x - y\|_\alpha, \ \textit{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Se existe $R > 0$, tal que

$$\left(L(R) + \frac{\|f(\cdot, 0)\|_\infty}{R}\right)(M(\alpha)\gamma^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha) + C(\alpha)\delta^{-1}) < 1,$$

sendo $M(\alpha)$ e $C(\alpha)$ as constantes da Observação 2.6. Então a equação (2.17), admite uma única solução branda $u \in AA_c(X_\alpha)$.

2.3 Aplicações

Consideremos as seguintes aplicações de alguns resultados obtidos neste capítulo.

Exemplo 2.4 *Seja $k > 0$ e considere o sistema linear:*

$$\begin{cases} x'(t) = -kx(t) + f_1(t), \\ y'(t) = ky(t) + f_2(t), \end{cases} \tag{2.20}$$

com f_1 e $f_2 \in AA_c(X),\ t \in \mathbb{R}$. Então o sistema (2.20) pode ser escrito da forma:

$$z'(t) = Az(t) + g(t),\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.21}$$

com $g(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Como $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, segue do exemplo 2.1 que

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-kt} & 0 \\ 0 & e^{kt} \end{pmatrix},\ t \geq 0$$

é um semigrupo hiperbólico com projeção

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para fixar a notação, consideramos as constantes $M = 1$ e $\delta = k$ e os espaços $X = \mathbb{R}^2$, $X_s = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ e $X_u = \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$. Além disso, segue do Teorema (2.2) que a equação (2.21) possui uma solução compacta quase automórfica descrita pela função

$$z(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-k(t-s)} f_1(s)ds - \int_{t}^{\infty} e^{k(t-s)} f_2(s)ds.$$

Exemplo 2.5 *Seja $b > 0$, considere o problema*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + bu + f(t, u_x),\ t \in \mathbb{R},\ x \in [0, 1], \\ u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.22}$$

$u(t, x) \in \mathbb{R}$ e f é uma função contínua definida em $\mathbb{R}^2$. Considere o operador $A : D(A) \subset C([0, 1]) \to C([0, 1])$, definido por

$$Au = u'' + bu,$$

com domínio

$$D(A) = C_0^2([0,\,1]) = \{u \in C^2([0,\,1]);\, u(0) = u(1) = 0\}.$$

É bem conhecido o fato que A é um operador setorial e gera um semigrupo analítico $(T(t))_{t\geq 0}$ em $C([0,\,1])$. Além disso, o spectro de A é um conjunto discreto, ou seja,

$$\sigma(A) = \{b - n^2\pi^2;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Portanto, tomando b tal que $\frac{\sqrt{b}}{\pi} \in (1,\,\infty)\backslash\mathbb{Q}$, segue que $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo analítico. Por outro lado, se $\alpha \neq 1/2$, considere $X_\alpha = D_A(\alpha,\,\infty) = C_0^{2\alpha}([0,\,1])$. Em (2.22), nós supomos que o termo não linear $f : \mathbb{R} \times C_0^{2\alpha}([0,\,1]) \to C([0,\,1])$ é descrito por

$$f(t,\,\varphi)(x) = f(t,\,\varphi'(x)) := \frac{ka(t)}{1 + |\varphi'(x)|},$$

com $a \in AA_c(\mathbb{R})$ e $k > 0$. Dessa forma, $f \in AA_c(X_\alpha; X)$ e satisfaz a condição de Lipschitz (2.18) com L uma função contínua e limitada. Então, segue do Corolário 2.3, que o Problema 2.22 admite uma única solução compacta quase automórfica.

Exemplo 2.6 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado com fronteira regular $\partial\Omega$. Considere o problema*

$$\begin{cases} u_t(t,x) = \Delta u(t,x) + bu(t,x) + a(t)u(t,x)|u(t,x)|, \ \mathbb{R}\times\Omega, \\ u(t,x) = 0, \ \mathbb{R}\times\partial\Omega, \end{cases} \tag{2.23}$$

onde $b > 0$ e $a \in AA_c(\mathbb{R})$.

Considere o operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ definido por

$$Au = \Delta u + bu$$

com domínio $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Então A é o gerador de um semigrupo analitico $(T(t))_{t\geq 0}$. Por outro lado, o operador Δ com domínio $D(A)$ é um operador setorial sobre $L^2(\Omega)$ e seu espectro $\sigma(\Delta)$ consiste de uma sequência de autovalores reais contida em $(-\infty, 0)$, cada um com autoespaço associado de dimensão finita. Então podemos escolher $b > 0$ em (2.23) de modo que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ e, consequentemente, $(T(t))_{t\geq 0}$ será um semigrupo analítico e hiperbólico.

Para $\alpha \in [0,1]$, seja X_α o espaço de potência fracionária associado ao operador A. Considerando a função $g : \mathbb{R} \times X_{\frac{1}{2}} \to L^2(\Omega)$ definida por

$$g(t,\psi)(x) = a(t)\psi(x)|\psi(x)|, \ x \in \Omega,$$

então g está bem definida e, ademais,

$$\|g(t,\psi) - g(t,\phi)\|_{L^2} \leq c(1 + \|\psi\|_{\frac{1}{2}} + \|\phi\|_{\frac{1}{2}})\|\psi - \phi\|_{\frac{1}{2}},$$

$t \in \mathbb{R}$, *e* $\psi, \phi \in X_{\frac{1}{2}}$, *com* $c > 0$ *uma constante que depende de* $\|a\|_\infty$.

A partir das considerações anteriores, segue do Corolário 2.6 que, se $\|a\|_\infty$ *é suficientemente pequeno, então o problema (2.23) possui uma única solução compacta quase automórfica* $u \in AA_c(X_{\frac{1}{2}})$.

Referências Bibliográficas

[1] M. Adimy, F. Crauste, M. L. Hbid, and Qesmi R., *Stability and hopf bifurcation for a cell population model with state-dependent delay*, Appl. Math. **70(5)** (2010), 1611–1633.

[2] R. P. Agarwal, M. Belmekki, and M. Benchohra, *A survey on semilinear differential equations and inclusions involving riemann-liouville fractiona derivative*, Advanced Difference Equations **47** (2009).

[3] R. P. Agarwal, M. Benchohra, and Hamani, *Boundary value problems for fractional differential equations*, Georgian. Math. J. **16(3)** (2009), 401–411.

[4] ______, *A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions*, Acta Appl. Math. **109(3)** (2010), 973–1033.

[5] R. P. Agarwal, B. de Andrade, and C. Cuevas, *On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equation*, Adv. Differential Equation (2010), 1–25.

[6] R.P. Agarwal, B. de Andrade, and G. Siracusa, *On fractional integro-differential equations with state-dependent delay*, Comp. Math. Appl. **62** (2011), 1143–1149.

[7] J. Andres, G. Gabor, and L. Górniewicz, *Boundary value problems on infinite intervals*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4861–4903.

[8] J. Andres and L. Górniewicz, *Topological fixed point principles for boundary value problems*, Topol. Fixed Point Theory Appl. (2003).

[9] M. Andres, J. andPavlačková, *Topological structure of solution sets to asymptotic boundary value problems*, J. Diff. Equ. **248** (2010), 127–150.

[10] O. Arino, K. Boushaba, and A. Boussouar, *A mathematical model of the dynamics of the phytoplankton-nutrient system*, Nonlinear Analysis RWA. **1** (2000), 69–87.

[11] M. M. Arjunan and V. Kavitha, *Existence results for impulsive neutral functional differential equations with state-dependent delay*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. **26** (2009), 1–13.

[12] N. Aronszajn, *Le correspondant topologique de l'unicite dans la theorie des equations differentielles*, Ann. Math. **43 (4)** (1942), 730–738.

[13] M. Bartha, *Periodic solutions for differential equations with state-dependent delay and positive feedback*, Nonlinear Analysis TMA. **53(6)** (2003), 839–857.

[14] S. Boulite and G.M. Maniar, L. N'Guérékata, *Almost automorphic solutions for hyperbolic semilinear evolution equations*, Semigroup forum **71** (2005), 231–240.

[15] Y. Cao, J. Fan, and T. C. Gard, *The effects of state-dependent time delay on a stage-structured population growth model*, Nonlinear Analysis TMA. **19(2)** (1992), 95–105.

[16] B.D. Coleman and Mizel V.J., *Norms and semi-groups in the theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **23** (1966), 87–123.

[17] ———, *On the general theory of fading memory*, Arch. Rational Mech. Anal. **30** (1968), 18–31.

[18] ———, *On the stability of solutions of functional differential equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **30** (1968), 173–196.

[19] E. Cuesta, *Asymptotically behavior of the solutions of fractional integro-differential equations and some discretizations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **2007** (2007), 277–285.

[20] C. Cuevas and J.C. de Souza, *S-asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, Appl. Math. Lett **22** (2009), 865–870.

[21] C. Cuevas and C. Lizama, *Semilinear evolution equations of second order via maximal regularity*, Advances in Difference Equations **2008** (2008), 1–20.

[22] B. de Andrade and C. Cuevas, *Compact almost automorphic solutions to semilinear cauchy problems with non dense domain*, Appl. Math. Comput. **215(8)** (2009), 2843–2849.

[23] D. Delbosco and L. Rodino, *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **204** (1996), 609–625.

[24] T. Diagana, H. Henriquez, and E. Hernández, *Almost automorphic mild solutions to some partial neutral functional differential equations and applications*, Nonlinear Anal. **69** (2008), 1485–1493.

[25] T. Diagana, E. Hernandez, and J.P.C. dos Santos, *Existence of asymptotically almost automorphic solutions to some abstract partial neutral integro-differential equations*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 248–257.

[26] T. Diagana, G. M. N'Guérékata, and N. Van Minh, *Almost automorphic solutions of evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 3289–3298.

[27] A. Domoshnitsky, M. Drakhlin, and E. Litsyn, *On equations with delay depending on solution*, Nonlinear Analysis TMA. **49(5)** (2002), 689–701.

[28] J. P. C. Dos Santos, *Existence results for a partial neutral integro-differential equation with state-dependent delay*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. **29** (2010), 1–12.

[29] ——, *On state-dependent delay partial neutral functional integro-differential equations*, Applied Mathematics and Computation **216** (2010), 1637–1644.

[30] K. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equation*, Springer, New York, 1991.

[31] Z. Fan and G. Li, *Existence results for semilinear and differential equations with nonlocal and impulsive conditions*, Journal of Functional Analysis **258** (2010), 1709–1727.

[32] C. Fengde, S. Dexian, and S. Jinlin, *Periodicity in a food-limited population model with toxicants and state dependent delays*, J. Math. Anal. Appl. **288(1)** (2003), 136–146.

[33] A. M. Fink, *Almost automorphic and almost solutions wich minimize functionals*, Tohuku, J. **20** (1968), 323–332.

[34] L. Górniewicz, *Topological structure of solution sets: current results*, Arch. Math. **36** (2000), 343–382.

[35] G. Gpenberg, S-O. Londen, and O. Staffans, *Volterra integral and functional equations. encyclopedia of mathematics and applications*, Cambridge University Press, New York, 1990.

[36] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer-Verlag, 2003.

[37] M. Haase, *The functional calculus for sectorial operators, in: Operator theory: Advances and applications*, Birkhauser-Verlag, Basel, 2006.

[38] J. K. Hale, *Dynamical systems and stability*, J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 35–59.

[39] J. K. Hale and J. Kato, *Phase space for retarded equations with infinite delay*, Funkcial. Ekvac. **21** (1978), 11–41.

[40] F. Hartung, *Parameter estimation by quasilinearization in functional differential equations with state-dependent delays: a numerical study*, Nonlinear Analysis TMA. **47 (7)** (2001), 4557–4566.

[41] ______, *Linearized stability in periodic functional differential equations with state-dependent delays*, J. Comput. Appl. Math. **174(2)** (2005), 201–211.

[42] F. Hartung, T. Herdman, and J. Turi, *Parameter identification in classes of neutral differential equations with state-dependent delays*, Nonlinear Analysis TMA. **39 (3)** (2000), 305–325.

[43] F. Hartung and J. Turi, *Identification of parameters in delay equations with state-dependent delays*, Nonlinear Analysis TMA. **29 (11)** (1997), 1303–1318.

[44] J.H. He, *Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **167** (1998), 57–58.

[45] ______, *Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximation*, Bull. Sci.Technol. **15(2)** (1999), 86–90.

[46] H. Henriquez and C. Lizama, *Compact almost automorphic solutions to integral equations with infinite delay*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 6029–6037.

[47] E. Hernández, L. Ladeira, and A. Prokopczyk, *A note on state dependent partial functional differential equations with unbounded delay*, Nonlinear Analysis, R.W.A. **7 (4)** (2006), 510–519.

[48] E. Hernández and M. McKibben, *On state dependent delay partial neutral functional differential equations*, Applied Math. Comp. **186 (1)** (2007), 294–301.

[49] E. Hernández, M. McKibben, and H. Henriquez, *Existence results for partial neutral functional differential equations with state-dependent delay*, Mathematical and Computer Modelling **49** (2009), 1260–1267.

[50] E. Hernández, M. Pierri, and G. União, *Existence results for a impulsive abstract partial differential equation with state-dependent delay*, Comput. Math. Appl. **52** (2006), 411–420.

[51] E. Hernández, A. Prokopczyk, and L. Ladeira, *A note on partial functional differential equations with state-dependent delay*, Nonlinear Analysis: Real World Applications **7** (2006), 510–519.

[52] Y. Hino and S. Murakami, *Almost automorphic solutions for abstract functional differential equations*, J. Math. Anal. **286** (2003), 741–752.

[53] Y. Hino, S. Murakami, and T. Naito, *Functional-differential equations with infinite delay. lectures notes in mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[54] O.K. Jaradat, A. Al-Omari, and S. Momani, *Existence of mild solutions for fractional semilinear initial value problems*, Nonlinear Anal. **69** (2008), 3153–3159.

[55] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, vol. 204, 2006.

[56] H. Kneser, *Uber die losungen eine system gewohnlicher differential gleichungen, das der lipschitzchen bedingung nicht genugt*, SS. B. Preuss. Akad.Wiss. Phys. Math. Kl. **4** (1923), 171–174.

[57] Y. Kuang and H. Smith, *Slowly oscillating periodic solutions of autonomous state-dependent delay equations*, Nonlinear Analysis TMA **19(9)** (1992), 855–872.

[58] A. Lunardi, *Analytic semigroup and optimal regularity in parabolic problems*, Birkhauser-Verlag, Besel, 1995.

[59] R.H. Martin, *Nonlinear operator and differential equations in banach spaces*, Krieger Publ. Co., Florida, 1987.

[60] H. Miklaszewski, *The two-point problem for nonlinear ordinary differential equations and differential inclusions*, Univ. Iagel. Acta Math. **36** (1998), 127–132.

[61] G. M. N'Guérékata, *Topics in almost automorphy*, Springer-Verlag, New York, 2005.

[62] J. Pruss, *Evolutionary integra equations and applications*, Birkhauser Verlag, Basel; Boston; Berlin, 1993.

[63] K. Schumacher, *Existence and continuous dependence for differentil equations with unbounded delay*, Arch. Rational Mech. Anal. **67** (1978), 315–335.

[64] ______, *Dynamical systems with memory on history-spaces with monotonic seminorms*, J. Differential Equations **34** (1979), 440–463.

[65] S. Szufla, *Sets of fixed points of nonlinear mappings in function space*, Funk. Ekv. **22** (1979), 121–126.

[66] R. Torrejn, *Positive almost periodic solutions of a state-dependent delay nonlinear integral equation*, Nonlinear Analysis TMA **20(12)** (1993), 1383–1416.

[67] L. Yongkun, *Periodic solutions for delay lotka volterra competition systems*, J. Math. Anal. Appl. **246(1)** (2000), 230–244.