Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Pós-Graduação em Matemática Computacional

Propriedades assintóticas de estimadores de posto

Davis Matias de Oliveira

Tese de Doutorado

Recife
fevereiro de 2012

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Davis Matias de Oliveira

Propriedades assintóticas de estimadores de posto

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Métodos Probabilísticos e Estatísticos.

Orientador: *Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos*

Recife
fevereiro de 2012

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Oliveira, Davis Matias de
Propriedades assintóticas de estimadores de posto / Davis Matias de Oliveira - Recife: O Autor, 2012.
131 folhas : tab.

Orientador: Klaus Leite Pinto Vasconcellos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática Computacional, 2012.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Estatística matemática. 2. Teoria assintótica. I. Vasconcellos, Klaus Leite Pinto (orientador). II. Título.

519.9 CDD (23. ed.) MEI2012 – 033

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

PARECER DA BANCA EXAMINADORA DE DEFESA DE TESE DE DOUTORADO

DAVIS MATIAS DE OLIVEIRA

"PROPRIEDADES ASSINTÓTICAS DE ESTIMADORES DE POSTO"

A Banca Examinadora composta pelos Professores: KLAUS LEITE PINTO VASCONCELOS (Presidente), do Departamento de Estatística da UFPE; FRANCISCO JOSÉ DE AZEVÊDO CYSNEIROS, do Departamento de Estatística da UFPE; GAUSS MOUTINHO CORDEIRO, do Departamento de Estatística da UFPE; DONALD MATTHEW PIANTO, do Departamento de Estatística da UnB; e RAYDONAL OSPINA MARTÍNEZ, do Departamento de Estatística da UFPE, considera a Tese do candidato:

(X) APROVADA ( ) EM EXIGÊNCIA ( ) REPROVADA

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, aos 27 dias do mês de fevereiro de 2012.

PROF. KLAUS LEITE PINTO VASCONCELOS
PRESIDENTE E 1° EXAMINADOR

PROF. FRANCISCO JOSÉ DE AZEVÊDO CYSNEIROS
2° EXAMINADOR

PROF. GAUSS MOUTINHO CORDEIRO
3° EXAMINADOR

PROF. DONALD MATTHEW PIANTO
4° EXAMINADOR

PROF. RAYDONAL OSPINA MARTÍNEZ
5° EXAMINADOR

Aos meus pais, irmãos e sobrinho.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, quem tanto me deu força e guiou os meus passos nesta caminhada.

À Universidade Estadual da Paraíba, pela grandiosa oportunidade e incentivo nesta minha fase de crescimento instrutivo e profissional.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional, por todo o suporte para a concretização desta tese de doutorado.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Klaus Leite Pinto Vasconcellos, pela dedicação, paciência, seriedade e constante estímulo para o meu aprofundamento intelectual.

Aos meus pais, Manoel e Marinete, pelo amor, força, entusiasmo, paciência, perseverança e exemplo de vida que sempre demonstraram durante toda a minha vida.

Aos meus irmãos, Deuzimar e Dayana, pelo carinho e companheirismo.

Ao meu sobrinho, Manoel, pela alegria, descontração, paciência na constante espera e, acima de tudo, pela paz que sempre me transmitiu.

Ao gordo Eudo, pela amizade, atenção e paciência em todos os momentos desta caminhada.

À Thaísa, pelo carinho, afeto, paciência, palavras de tranquilidade e por sempre acreditar nesta minha conquista.

A todos os colegas de curso que, direta ou indiretamente, compartilharam da minha rotina de estudos durante esses quatro anos de dedicação exclusiva e, em particular, a minha amiga, Maria Isabelle.

Aos secretários do Programa de Pós-Graduação em Matemática Computacional, Carlos e Ezaú, pela paciência, atenção e dedicação que sempre tiveram quando deles precisei.

Por fim, agradeço a minha colega Michelle, pelas valiosas dicas e sugestões.

Não sei o que posso parecer para o mundo, para mim mesmo, porém, pareço ter sido somente como um menino que brinca, à beira do mar, tendo-me distraído em encontrar, vez por outra, um seixo mais liso ou mais bonito que o comum, enquanto o imenso oceano da verdade se estende a minha frente, inteiramente desconhecido.

—ISAAC NEWTON

Resumo

Esta tese de doutorado apresenta uma correção do quantil ou valor crítico da distribuição assintótica qui-quadrado da estatística de Wald para a estimação de posto de matrizes desconhecidas usando o critério de teste sequencial. A partir dos resultados teóricos obtidos, usando linguagem de programação Ox (Doornik, 2006), são feitas avaliações numéricas de tal melhora em estudos envolvendo modelos de equações simultâneas lineares, em que a distribuição dos erros aleatórios pertence à classe das distribuições de contorno elíptico. O objetivo é criar uma ligação entre as ideias propostas por Ratsimalahelo (2003a,b) e Phillips & Park (1988) para obter um quantil aperfeiçoado para a estatística de Wald desenvolvida por Ratsimalahelo (2003a,b), que possa produzir uma redução no viés do estimador do posto de matrizes desconhecidas. Inicialmente, encontra-se o desenvolvimento teórico, o qual usa o método da expansão de Edgeworth para produzir um aperfeiçoamento do valor crítico usado no teste para a estimativa do posto de matrizes desconhecidas. A seguir, foram fornecidos os conceitos teóricos sobre a formulação da correção do quantil aplicada ao modelo de equações simultâneas lineares para duas distribuições na classe das distribuições de contorno elíptico. Por fim, são feitas as avaliações numéricas dos resultados obtidos a partir de simulações que utilizam o método de Monte Carlo para as estimativas do posto de matrizes desconhecidas baseadas na estatística aperfeiçoada do tipo Wald, a qual é desenvolvida ao logo da primeira parte do texto.

Palavras-chave: Estimadores de posto. Expansão de Edgeworth. Quantil corrigido. Testes sequenciais. Teste de Wald.

Abstract

This doctoral thesis presents a correction of the critical value or quantile of the asymptotic chi-square distribution of the Wald test statistic for the estimation of unknown rank of matrices using the sequential test criteria. From the theoretical results obtained, by using programming language Ox (Doornik, 2006), numerical evaluations are made for such improvement in studies involving linear simultaneous equations models where the distribution of the random errors belongs to the class of elliptical distributions. The goal is to create a connection between ideas in Ratsimalahelo (2003a,b) and Phillips & Park (1988) obtaining an improved quantile for the Wald test statistic developed by Ratsimalahelo (2003a,b), that can produce a reduction in bias of the estimator of the unknown rank of matrices. Initially, is the theoretical development, which uses the Edgeworth expansion to produce an improvement of the critical value used in the test to estimate the rank of an unknown matrix. Then, were provided the theoretical concepts on the formulation of quantile correction applied to the linear simultaneous equations model for two distributions in the elliptical class. Finally, we consider an analysis of the numerical results obtained from simulations using the Monte Carlo method for estimating the rank of unknown matrices based on the improved Wald-type statistic, which is developed along the first part of the text.

Keywords: Rank estimators. Edgeworth expansion. Corrected quantile. Sequential tests. Wald tests.

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

O posto de uma matriz é um conceito matemático que permite concluir, por exemplo, a respeito das possibilidades de soluções para sistemas de equações lineares e, portanto, sobre a forma de representação dessas soluções como combinações lineares de outras. Nesse sentido, como pode ser observado no estudo de alguns modelos estatísticos que fazem uso de tais sistemas para modelar relações entre variáveis, o posto de uma matriz desempenha um papel de fundamental importância para que possam ser feitas estimativas precisas a respeito dos parâmetros envolvidos. Este é o caso do clássico problema de identificação em modelos de equações simultâneas lineares, sendo que a estimação da matriz de parâmetros do modelo pode ser feita em sua forma reduzida, desde que sejam satisfeitas algumas condições para os postos de submatrizes dessa matriz de parâmetros (Judge et al., 1988, pg. 618). Além disso, o posto de uma matriz pode oferecer informações sobre a quantidade de parâmetros a serem estimados de modo a minimizar, o trabalho com estimativas desnecessárias ou redundantes. Hsiao (1983) e Anderson & Kunitomo (1992) expressam bem a relação entre o posto de uma matriz e a identificabilidade do vetor de parâmetros. Em diversos outros trabalhos publicados na área de estatística, pode-se notar que o posto de certas estimativas de matrizes apresenta-se como ferramenta chave para o desenvolvimento teórico. Exemplos disso podem ser vistos nos artigos de Lewbel (1991) e Lewbel & Perraudin (1995). Outra quantidade significativa de aplicações que dependem do posto é listada por Ratsimalahelo (2003a,b) e uma boa variedade de tais aplicações é apresentada de maneira mais explícita por Camba-Méndez & Kapetanios (2008). A partir disto, percebe-se a grande importância de se ter, em mãos, informação sobre o posto de uma matriz.

Diversos artifícios computacionais conseguem, com facilidade, mostrar qual o valor do posto de uma matriz fixa e conhecida. No entanto, o que acontece em muitas situações na prática, é que não há informações a respeito dos elementos desta matriz, tida como desconhecida, de modo que, é impossível a determinação exata do seu posto. Para contornar esta dificuldade, o desenvolvimento teórico se dá com o auxílio de estimativas das verdadeiras matrizes sendo que, com probabilidade um, tais estimativas têm posto completo, que pode diferir do verdadeiro valor do posto desejado. Diante desta dificuldade, surge o problema de se obter estimativas do posto da matriz verdadeira a partir dos dados em estudo. Portanto, visando apresentar uma solução para o problema apresentado, alguns autores desenvolveram pesquisas que produziram diferentes estimadores consideravelmente confiáveis para o posto da matriz desconhecida a partir de sua estimativa. Bartlett (1947), para o caso de matrizes semipositivas definidas, faz uso de resultados da análise de correlação canônica para produzir um critério de razão de verossimilhanças a partir do qual se podem testar hipóteses para o posto da matriz desconhecida. A estatística obtida tem distribuição assintótica qui-quadrado, e é fundamentada na suposição de que os dados são independentes e normalmente distribuídos. No entanto, Kohn (1979) produz condições a partir das quais é possível o desenvolvimento desse método mesmo para observações dependentes. Gill & Lewbel (1992) apresentam fundamentos, com uso do processo da eliminação gaussiana, permitindo que, sob certas condições de regularidade e a existência de um estimador consistente para a verdadeira matriz, seja produzido um estimador consistente para o seu posto. Cragg & Donald (1996) desenvolvem um teste estatístico para o posto da matriz desconhecida, cuja estatística, sob a hipótese nula, também tem distribuição assintótica qui-quadrado. Outro teste é apresentado por Cragg & Donald (1997). Este consiste em obter um estimador do verdadeiro posto da matriz desconhecida a partir da minimização de uma função de discrepância, o que, como demonstrado em Ferguson (1996), é relativamente complicado. Voltando às ideias que podem ser encontradas em Bartlett (1947), baseado no fato de que o posto de uma matriz pode ser dado pelo número de seus valores singulares não nulos, Robin & Smith (2000) desenvolveram um teste estatístico usando funcionais dos menores autovalores estimados de uma forma quadrática da verdadeira matriz, cujo posto assume, exatamente, o mesmo valor. Mais ainda, a estatística deste teste tem a distribuição assintótica de uma combinação linear de variáveis aleatórias qui-quadrado em lugar de uma única qui-quadrado e, como demonstrado por Anderson (1984) e Anderson & Kunitomo (1994), essa estatística engloba uma classe na qual estão contidas, como casos especiais, as estatísticas de razão de verossimilhanças, escore e Wald. Com o mesmo princípio acima, Ratsimalahelo (2003a,b) utiliza resultados da teoria da perturbação matricial para desenvolver outro teste estatístico para o posto de uma matriz, cuja estatística, sob a hipótese nula, tem distribuição assintótica qui-quadrado.

Diversos artifícios computacionais conseguem, com facilidade, mostrar qual o valor do posto de uma matriz fixa e conhecida. No entanto, o que acontece em muitas situações na prática, é que não há informações a respeito dos elementos desta matriz, tida como desconhecida e, com isso, é impossível a determinação exata do seu posto. Para contornar esta dificuldade, o desenvolvimento teórico se dá com o auxílio de estimativas das verdadeiras matrizes sendo que, com probabilidade um, tais estimativas têm posto completo, que pode diferir do verdadeiro valor do posto desejado. Diante desta dificuldade, surge o problema de se obter estimativas do posto da matriz verdadeira a partir dos dados em estudo. Portanto, na tentativa de apresentar uma solução para isto, alguns autores desenvolveram pesquisas que produziram diferentes estimadores bem confiáveis para o posto da matriz desconhecida a partir de sua estimativa. Bartlett (1947), para o caso de matrizes semipositivas definidas, faz uso de resultados da análise de correlação canônica para produzir um critério de razão de verossimilhanças a partir do qual se pode testar hipóteses para o posto da matriz desconhecida. A estatística obtida tem distribuição assintótica qui-quadrado e é fundamentada na suposição de que os dados são independentes e normalmente distribuídos. No entanto, Kohn (1979) produz condições a partir das quais é possível o desenvolvimento deste método mesmo para observações dependentes. Gill & Lewbel (1992) apresentam fundamentos, com uso do processo da eliminação gaussiana, permitindo que, sob certas condições de regularidade e a existência de um estimador consistente para a verdadeira matriz, seja produzido um estimador consistente para o seu posto. Cragg & Donald (1996) desenvolvem um teste estatístico para o posto da matriz desconhecida, cuja estatística, sob a hipótese nula, também tem distribuição assintótica qui-quadrado. Outro teste é apresentado por Cragg & Donald (1997). Este consiste em obter um estimador do verdadeiro posto da matriz desconhecida a partir da minimização de uma função de discrepância, o que, como demonstrado em Ferguson (1996), é relativamente complicado. Voltando às idéias que podem ser encontradas em Bartlett (1947), baseado no fato de que o posto de uma matriz pode ser dado pelo número de seus valores singulares não nulos, Robin & Smith (2000) desenvolvem um teste estatístico usando funcionais dos menores autovalores estimados de uma forma quadrática da verdadeira matriz, cujo posto assume exatamente o mesmo valor. Mais ainda, a estatística deste teste tem a distribuição assintótica de uma combinação linear de variáveis aleatórias qui-quadrado ao invés de uma única qui-quadrado e, como demonstrado por Anderson (1984) e Anderson & Kunitomo (1994), esta estatística engloba uma classe na qual estão contidas, como casos especiais, as estatísticas de razão de verossimilhanças, escore e Wald. Com o mesmo princípio acima, Ratsimalahelo (2003a,b) utiliza resultados da teoria da perturbação matricial para desenvolver outro teste estatístico para o posto de uma matriz, cuja estatística, sob a hipótese nula, tem distribuição assintótica qui-quadrado.

Diversos artifícios computacionais conseguem, com facilidade, mostrar qual o valor do posto de uma matriz fixa e conhecida. No entanto, o que acontece em muitas situações na prática, é que não há informações a respeito dos elementos desta matriz, tida como desconhecida e, com isso, é impossível a determinação exata do seu posto. Para contornar esta dificuldade, o desenvolvimento teórico se dá com o auxílio de estimativas das verdadeiras matrizes sendo que, com probabilidade um, tais estimativas têm posto completo, que pode diferir do verdadeiro valor do posto desejado. Diante desta dificuldade, surge o problema de se obter estimativas do posto da matriz verdadeira a partir dos dados em estudo. Portanto, na tentativa de apresentar uma solução para isto, alguns autores desenvolveram pesquisas que produziram diferentes estimadores bem confiáveis para o posto da matriz desconhecida a partir de sua estimativa. Bartlett (1947), para o caso de matrizes semipositivas definidas, faz uso de resultados da análise de correlação canônica para produzir um critério de razão de verossimilhanças a partir do qual se pode testar hipóteses para o posto da matriz desconhecida. A estatística obtida tem distribuição assintótica qui-quadrado e é fundamentada na suposição de que os dados são independentes e normalmente distribuídos. No entanto, Kohn (1979) produz condições a partir das quais é possível o desenvolvimento deste método mesmo para observações dependentes. Gill & Lewbel (1992) apresentam fundamentos, com uso do processo da eliminação gaussiana, permitindo que, sob certas condições de regularidade e a existência de um estimador consistente para a verdadeira matriz, seja produzido um estimador consistente para o seu posto. Cragg & Donald (1996) desenvolvem um teste estatístico para o posto da matriz desconhecida, cuja estatística, sob a hipótese nula, também tem distribuição assintótica qui-quadrado. Outro teste é apresentado por Cragg & Donald (1997). Este consiste em obter um estimador do verdadeiro posto da matriz desconhecida a partir da minimização de uma função de discrepância, o que, como demonstrado em Ferguson (1996), é relativamente complicado. Voltando às idéias que podem ser encontradas em Bartlett (1947), baseado no fato de que o posto de uma matriz pode ser dado pelo número de seus valores singulares não nulos, Robin & Smith (2000) desenvolvem um teste estatístico usando funcionais dos menores autovalores estimados de uma forma quadrática da verdadeira matriz, cujo posto assume exatamente o mesmo valor. Mais ainda, a estatística deste teste tem a distribuição assintótica de uma combinação linear de variáveis ale-

atórias qui-quadrado ao invés de uma única qui-quadrado e, como demonstrado por Anderson (1984) e Anderson & Kunitomo (1994), esta estatística engloba uma classe na qual estão contidas, como casos especiais, as estatísticas de razão de verossimilhanças, escore e Wald. Com o mesmo princípio acima, Ratsimalahelo (2003a,b) utiliza resultados da teoria da perturbação matricial para desenvolver outro teste estatístico para o posto de uma matriz, cuja estatística, sob a hipótese nula, tem distribuição assintótica qui-quadrado.

Diversos artifícios computacionais conseguem, com facilidade, mostrar qual o valor do posto de uma matriz fixa e conhecida. No entanto, o que acontece em muitas situações na prática, é que não há informações a respeito dos elementos desta matriz, tida como desconhecida e, com isso, é impossível a determinação exata do seu posto. Para contornar esta dificuldade, o desenvolvimento teórico se dá com o auxílio de estimativas das verdadeiras matrizes sendo que, com probabilidade um, tais estimativas têm posto completo, que pode diferir do verdadeiro valor do posto desejado. Diante desta dificuldade, surge o problema de se obter estimativas do posto da matriz verdadeira a partir dos dados em estudo. Portanto, na tentativa de apresentar uma solução para isto, alguns autores desenvolveram pesquisas que produziram diferentes estimadores bem confiáveis para o posto da matriz desconhecida a partir de sua estimativa. Bartlett (1947), para o caso de matrizes semipositivas definidas, faz uso de resultados da análise de correlação canônica para produzir um critério de razão de verossimilhanças a partir do qual se pode testar hipóteses para o posto da matriz desconhecida. A estatística obtida tem distribuição assintótica qui-quadrado e é fundamentada na suposição de que os dados são independentes e normalmente distribuídos. No entanto, Kohn (1979) produz condições a partir das quais é possível o desenvolvimento deste método mesmo para observações dependentes. Gill & Lewbel (1992) apresentam fundamentos, com uso do processo da eliminação gaussiana, permitindo que, sob certas condições de regularidade e a existência de um estimador consistente para a verdadeira matriz, seja produzido um estimador consistente para o seu posto. Cragg & Donald (1996) desenvolvem um teste estatístico para o posto da matriz desconhecida, cuja estatística, sob a hipótese nula, também tem distribuição assintótica qui-quadrado. Outro teste é apresentado por Cragg & Donald (1997). Este consiste em obter um estimador do verdadeiro posto da matriz desconhecida a partir da minimização de uma função de discrepância, o que, como demonstrado em Ferguson (1996), é relativamente complicado. Voltando às idéias que podem ser encontradas em Bartlett (1947), baseado no fato de que o posto de uma matriz pode ser dado pelo número de seus valores singulares não nulos, Robin & Smith (2000) desenvolvem um teste estatístico usando funcionais dos menores autovalores estimados de uma forma quadrática da verdadeira matriz, cujo posto assume exatamente o mesmo valor. Mais ainda, a estatística deste teste tem a distribuição assintótica de uma combinação linear de variáveis aleatórias qui-quadrado ao invés de uma única qui-quadrado e, como demonstrado por Anderson (1984) e Anderson & Kunitomo (1994), esta estatística engloba uma classe na qual estão contidas, como casos especiais, as estatísticas de razão de verossimilhanças, escore e Wald. Com o mesmo princípio acima, Ratsimalahelo (2003a,b) utiliza resultados da teoria da perturbação matricial para desenvolver outro teste estatístico para o posto de uma matriz, cuja estatística, sob a hipótese nula, tem distribuição assintótica qui-quadrado.

Dados os testes para a estimação do posto de uma matriz, o problema que surge é o de obter tais estimadores de maneira consistente, ou seja, de tal modo que o estimador convirja, em probabilidade, para o verdadeiro valor do posto quando o tamanho da amostra cresce. Dois métodos encontrados na literatura produzem tal consistência. Embora o procedimento de teste sequencial, detalhado no Apêndice B, não conduza, inicialmente, a um estimador consistente para o posto, pode-se verificar, em Hosoya (1989), Cragg & Donald (1997), Potscher (1983) e Ratsimalahelo (2003a,b) que, satisfeitas algumas condições para o nível de significância, é possível solucionar essa dificuldade. Outra forma de obter consistência para o estimador do posto é obtida através do método de critério de informação mínimo, o qual apresenta algumas formas estruturais distintas observadas, por exemplo, nos trabalhos de Schwarz (1978), Hannan & Quinn (1979) e Ratsimalahelo (2003a,b).

Dada a importância de se obter boas estimativas para o posto de uma matriz desconhecida, vê-se a necessidade de, juntamente com isso, buscar novas formas de aprimorar os testes nos quais alguns desses estimadores se baseiam para que estimadores, com viés de ordem mais alta, venham a proporcionar mais precisão às informações obtidas a partir dos dados em estudo. Pensando no aprimoramento de testes de hipótese que possam ser usados para obter estimadores melhorados, pode-se verificar que Lawley (1959), sob a hipótese nula, produz uma correção escalar tipo Bartlett para a estatística de razão de verossimilhanças desenvolvida por Bartlett (1947). Neste caso, a estatística aperfeiçoada possui os mesmos momentos da distribuição assintótica qui-quadrado nominal com um erro da ordem t^{-2}, sendo t o tamanho da amostra. Outro aprimoramento para a estatística de razão de verossimilhanças é dado por Cordeiro (1987), o qual produz um fator de correção escalar tipo Bartlett para modelos lineares generalizados de modo que o fator escalar é assumido ser conhecido.

Esta tese tem por objetivo apresentar um valor crítico aperfeiçoado para a estatística de Wald, produzida por Ratsimalahelo (2003a,b), o que permite melhorar a inferência sobre o verdadeiro valor do posto de matrizes desconhecidas baseado em estimadores gerados a partir do procedimento de teste sequencial. Pode-se verificar, em Cordeiro & Ferrari (1995), até a ordem $O(t^{-1})$, sendo t o tamanho da amostra, esse valor crítico, ou quantil corrigido, é equivalente a uma estatística de teste melhorada. O resultado esperado com tal correção é a redução nos valores de viés e erro quadrático médio do estimador do posto.

A organização da presente tese se dá em três capítulos que permitem expor o desenvolvimento teórico para a formulação do aperfeiçoamento do valor crítico da estatística de Wald para o estimador do posto de matrizes desconhecidas, fazer uma avaliação numérica da correção obtida e, por fim, apresentar, de maneira conclusiva, os resultados encontrados. Sendo assim, no Capítulo 2, apresentou-se de maneira clara e explícita, fórmulas que permitam expor os valores críticos corrigidos em função dos momentos da distribuição da vetorização do estimador de matrizes desconhecidas. Em princípio, para atingir um maior grau de generalidade, supõe-se que a matriz de covariâncias desse vetor seja a identidade e, assim, trabalha-se com uma matriz de covariâncias não singular, porém conhecida. Para a obtenção dessas fórmulas, usaram-se os resultados gerais de Phillips & Park (1988) que produzem uma expansão de Edgeworth da função de distribuição da estatística de Wald baseada em um estimador consistente da matriz sobre a qual se deseja inferir.

No Capítulo 3, a fórmula do valor crítico corrigido, dada no Capítulo 2, é usada para que se possa avaliar a melhora obtida com a redução do viés do estimador do posto da matriz de parâmetros do modelo de equações simultâneas lineares, expresso na sua forma reduzida, em duas situações. A primeira delas ocorre quando se impõe uma distribuição normal multivariada à vetorização da matriz de erros aleatórios, a qual possui matriz de covariâncias não singular conhecida de modo a satisfazer a condição de correlação contemporânea. Nesse caso, como os momentos de ordem ímpar da distribuição normal multivariada, a partir do terceiro, são todos nulos, a fórmula do valor crítico aperfeiçoado tem forma simples quando comparada ao caso dado pela segunda situação. Nesta, trabalhou-se com o vetor de erros aleatórios tendo uma distribuição t-Student multivariada. Agora, a expansão de Edgeworth da função de densidade da estatística de Wald tem expressão um pouco mais elaborada, de modo a conferir mais complexidade ao valor crítico corrigido do teste. Além disso, apresentaram-se fórmulas gerais que permitem escrever todos os cumulantes conjuntos de quarta ordem, para esta distribuição, como uma forma vetorial que envolve a matriz de covariâncias assintótica de uma transformação linear do vetor de erros aleatórios do modelo. O mesmo é feito para expressar todos os polinômios de Hermite de quarta ordem só que, agora, uma forma vetorial é obtida a partir da inversa da matriz de covariâncias assintótica.

A avaliação numérica, dada no Capítulo 3, permite observar os resultados obtidos pelo processo de simulação. Este faz uso do método de Monte Carlo e do critério de teste sequencial para apresentar uma discussão elaborada a respeito da redução do viés e do erro quadrático médio do estimador do posto da matriz desconhecida dos parâmetros do modelo de equações simultâneas lineares, Capítulo 2, encontrado a partir da estatística de Wald aperfeiçoada, dada no Capítulo 1. Consideraram-se os casos em que a matriz de erros aleatórios apresenta distribuição normal e t-Student multivariadas.

Por fim, no último capítulo, apresentaram-se as observações conclusivas obtidas a partir dos resultados teóricos e numéricos, além de expor direcionamentos para trabalhos futuros.

Os resultados numéricos para o Capítulo 3 foram obtidos a partir de cálculos computacionais implementados em linguagem de programação Ox (Doornik, 2006).

CAPÍTULO 1

Quantil aperfeiçoado para o teste do posto

Neste capítulo é apresentada a parte teórica do problema que se apresenta ao se testar o posto de uma matriz desconhecida com correção até a ordem $O(t^{-1})$, no quantil da função distribuição da estatística de Wald. Aqui, o objetivo é fazer uso das ideias encontradas nos trabalhos de Phillips & Park (1988) e Ratsimalahelo (2003a,b) para obter coeficientes que possibilitam expor uma forma para a expansão assintótica, até a ordem $O(t^{-3/2})$ da função de distribuição da estatística de Wald para o posto e, por meio disso, obter uma correspondente correção para o seu valor crítico. No que segue, t representa o tamanho da amostra a ser tratada. Na seção 1.1 é feita uma apresentação do problema e é dado um encaminhamento para sua solução. As demais seções estão interligadas em uma sequência que, ao final, produz uma forma geral para o quantil corrigido, até a ordem $O(t^{-1})$, para a estatística de Wald para o estimador do posto de matrizes desconhecidas.

1.1 O Problema

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. Como o posto de uma matriz coincide com o posto de sua matriz transposta, suponha-se, sem perda de generalidade, que $m \geq n$. Na decomposição a partir de valores singulares de A, em Golub & Van Loan (1996), está a prova de que existem duas matrizes ortogonais, U e V, de ordens $m \times m$ e $n \times n$, respectivamente, tais que:

$$A = UDV',$$

em que D é uma matriz diagonal retangular de ordem $m \times n$, cujos elementos da diagonal principal são os valores singulares de A. Então:

$$A'A = VD'DV' = VQV',$$

em que $Q = D'D$ é a matriz diagonal de ordem $n \times n$ que contém, como elementos da diagonal principal, os autovalores de $A'A$, γ_l, para $l = 1,\ldots,n$. Assim, se v_l representa a l-ésima coluna de V, então, para cada $l = 1,\ldots,n$, v_l é um autovetor de $A'A$ associado ao autovalor γ_l, ou seja, $A'Av_l = \gamma_l v_l$, para todo $l = 1,\ldots,n$. Além disso, tem-se que $\gamma_l \geq 0$, para todo $l = 1,\ldots,n$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \ldots \geq \gamma_n \geq 0$. Tem-se $\gamma_l = \lambda_l^2$, sendo λ_l valor singular de A.

Agora, suponha-se que se deseja testar se a matriz A tem posto $k \leq n$, o que implica que $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_n = 0$. Equivalentemente, pode-se testar se a matriz $A'A$ tem posto $k > 0$, o que pode ser feito por meio de um teste para verificar se $\gamma_{k+1} = \gamma_{k+2} = \cdots = \gamma_n = 0$. Nesse sentido, após a partição $U = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$, dada de acordo com o posto k, sendo

$m \times (m-k)$ e $n \times (n-k)$ as respectivas ordens de U_2 e V_2, vê-se que $U_2'AV_2$ é a matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os $n-k$ menores valores singulares de A.

Sob a hipótese nula de que o verdadeiro posto de A é k, considere a aplicação β : $\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$, definida de tal modo que para cada matriz A em $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\beta(A) = vec(A)$. Sendo β uma transformação linear bijetora de $\mathbb{R}^{m\times n}$ sobre $\mathbb{R}^{mn}$ então, para cada A em $\mathbb{R}^{m\times n}$, existe um único β em $\mathbb{R}^{mn}$, tal que $\beta = \beta(A)$ e vice-versa. Além disso, seja E uma matriz de ordem $(n-k)\times(n-k)(m-k)$, definida por:

$$E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k} \end{pmatrix}',$$

de tal modo que, para cada $i = 1,2,\ldots,n-k$, $e_i = \alpha_{(i-1)(n-k)+i}$ é o vetor canônico do espaço $\mathbb{R}^{(n-k)(m-k)}$, cuja entrada de posição $(i-1)(n-k)+i$ tem valor 1, e, as demais, 0. Considere, também, a aplicação $g : \mathbb{R}^{mn} \to \mathbb{R}^{n-k}$, de maneira tal que, se $\beta = \beta(A)$, então:

$$g(\beta) = Evec(U_2'AV_2)$$

a qual, como se pode verificar, em Magnus & Neudecker (1999), pode ser escrita como

$$g(\beta) = E(V_2' \otimes U_2')vec(A),$$

onde $\otimes$ é o *produto de Kronecker*. Desta forma, pode-se observar que, para cada matriz A em $\mathbb{R}^{m\times n}$,

$$g(\beta) = \begin{pmatrix} \lambda_{k+1} & \lambda_{k+2} & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}'.$$

Como pode ser visto um pouco mais adiante, g é uma aplicação diferenciável frente aos elementos do vetor de parâmetros, β até, pelo menos, a terceira ordem. Além disso, um teste para o posto da matriz A, dado por Ratsimalahelo (2003a,b), é equivalente a testar a hipótese nula:

$$H_\circ : g(\beta_\circ) = 0,$$

em que $\beta_\circ = \beta(A)$, para a verdadeira matriz A.

Suponha, pois, que $\hat{A}$ é um estimador $\sqrt{t}$-consistente e assintoticamente normal de $A_\circ$, de modo que t é o tamanho da amostra a ser trabalhada, isto é:

$$\sqrt{t}(\hat{A} - A_\circ) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(0,\Sigma), \tag{1.1}$$

de modo que, supõe-se, Σ é uma matriz de ordem $p \times p$ e não singular, com $p = mn$. Então, se $\hat{\beta} = \beta(\hat{A})$, pode-se verificar que $\hat{\beta}$ é um estimador $\sqrt{t}$-consistente de $\beta_\circ$, ou seja:

$$\sqrt{t}(\hat{\beta} - \beta_\circ) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(0,\Sigma). \tag{1.2}$$

Aqui, $\mathcal{N}_p$ representa a distribuição normal p- variada. Note que (1.2) corresponde à definição de (1.1). Assim, fazendo $q = \hat{\beta} - \beta_\circ$ e $\bar{q} = \sqrt{t}(\hat{\beta} - \beta_\circ)$, obtém-se $\bar{q} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(0,\Sigma)$. Além disso, como um valor singular é uma função contínua dos elementos da matriz, sendo $\hat{\lambda}_l$ valor singular de $\hat{A}$, sob a hipótese nula, deve-se ter que $\hat{\lambda}_l \xrightarrow{p} 0$ e, portanto, quando $t \uparrow \infty$

$\hat{\gamma}_l \xrightarrow{p} 0$ para todo $l = k+1, \ldots, n$ (Ratsimalaheo, 2003b). Desta maneira, o teste do posto de A é fundamentado, assintoticamente, no posto da matriz $\widehat{A}$.

O procedimento adotado para obter o estimador do posto da matriz A baseia-se no critério de teste sequencial, detalhado no Apêndice B, para a estatística do tipo Wald. Embora esse procedimento não leve a um estimador consistente para o verdadeiro posto da matriz desconhecida, um ajuste técnico no nível de significância é dado por Ratshimalahelo (2003a,b), que estabelece a consistência forte para o estimador. A necessidade de tal ajuste é citado, em maiores detalhes, nos trabalhos de Cragg & Donald (1997) e Robin & Smith (2000). Outro artigo que trata desse assunto, e que dá origem ao procedimento, foi produzido por Wald (1945) e, neste, podem-se encontrar as ideias principais para o desenvolvimento do teste sequencial. O critério elaborado por Ratshimalahelo (2003a,b) considera a estatística teste de Wald, a partir da qual são realizados os testes com valores progressivos para posto k, começando com $k = 1$ até que seja obtido um teste que não rejeite a hipótese nula de que o verdadeiro posto da matriz em questão seja k. Neste caso, toma-se como $\hat{k}$ o valor de k para o primeiro teste que não rejeita a hipótese. O objetivo desta tese é, então, apresentar uma correção, até a ordem $O(t^{-1})$, para o valor crítico quantil da expansão assintótica da função de distribuição da estatística de Wald, para testar o posto, que seja capaz de produzir, através do critério de teste sequencial, um estimador com viés reduzido.

O teste estatístico tipo Wald para testar $H_\circ$ pode ser encontrado em vários textos na literatura, como por exemplo, em Lehmann & Romano (2005, pg. 508), na forma

$$W = t\hat{g}' \left(\hat{G}\hat{\Sigma}\hat{G}'\right)^{-1} \hat{g}, \tag{1.3}$$

em que $G = G(\beta) = \partial g(\beta)/\partial \beta'$, $\hat{G} = G(\hat{\beta})$ e $\hat{g} = g(\hat{\beta})$. O problema sob análise consiste em obter uma expansão de Edgeworth para a função de distribuição da estatística de Wald, W, e, assim, com o auxílio da expansão de Cornish-Fisher, a qual pode ser encontrada em, por exemplo, Cornish & Fisher (1937) e Barndorff-Nielsen & Cox (1990, pg. 117), obter uma aproximação do quantil desta função pelo quantil da distribuição qui-quadrado. Isso permite chegar à expressão de uma estatística aperfeiçoada para W, o que diminui o erro ao se testar o posto de A

Na formulação, a seguir, será suposto, a menos que seja dito o contrário, que a matriz de covariâncias Σ é conhecida e igual à identidade. O caso mais geral, em que esta matriz não é a identidade, é feito por transformação normalizante.

1.2 Formulação para a estatística de Wald em termos dos autoelementos da matriz

Nesta seção apresenta-se parte da contribuição desta tese para unir as ideias de Ratsimalahelo (2003a,b) e Phillips & Park (1988) para, com isso, obter-se uma estatística de Wald que produza um estimador para o posto da matriz desconhecida com viés reduzido. Aqui, são feitos os procedimentos de cálculo que produzem as derivadas parciais de primeira ordem dos valores singulares não nulos de uma matriz. Isto permite que se possa escrever os elementos da matriz G, na expressão (1.3), em função dos autoelementos da matriz.

No que segue, será considerado que A é uma matriz tal que todos os seus valores singulares são distintos, ou seja, se A tem ordem $m \times n$ com $m \geq n$, então:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0.$$

Uma aplicação da regra da cadeia mostra que G, dada em (1.3), é uma matriz de ordem $(n-k) \times p$, cujo j-ésimo elemento da l-ésima linha é obtida através da equação:

$$\frac{\partial \lambda_{k+l}}{\partial \beta_j} = \frac{\partial \gamma_{k+l}^{1/2}}{\partial \beta_j} = \frac{1}{2}\gamma_{k+l}^{-1/2} \frac{\partial \gamma_{k+l}}{\partial\,[vec(A'A)]'} \frac{\partial vec(A'A)}{\partial [vec(A)]'} \frac{\partial vec(A)}{\partial \beta_j},$$

em que $j = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, n-k$ e, como antes, $p = mn$. Agora, como $A'A$ é uma matriz simétrica de ordem $n \times n$ e, para cada $l = 1, \ldots, n-k$, v_{k+l} é um autovetor normalizado de $A'A$ associado ao autovalor simples γ_{k+l}, por Magnus & Neudecker (1999), tem-se que:

$$\frac{\partial \gamma_{k+l}}{\partial\,[vec(A'A)]'} = v'_{k+l} \otimes v'_{k+l} \quad \text{e} \quad \frac{\partial vec(A'A)}{\partial [vec(A)]'} = 2N_n(I_n \otimes A'), \tag{1.4}$$

em que N_n é a matriz de ordem $n^2 \times n^2$, definida por $N_n = \frac{1}{2}(I_{n^2} + K_{nn})$, sendo que K_{nn} é a matriz comutação de ordem $n^2 \times n^2$, definida como $\partial vec(N')/\partial [vec(N)]'$, para qualquer matriz N de ordem $n \times n$; e, ainda, para cada $j = 1, \ldots, p$, $\partial vec(A)/\partial \beta_j = e_j$ é o j-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^p$ de modo que, para todo $j = 1, \ldots, p$ e $l = 1, \ldots, n-k$, tem-se:

$$\frac{\partial \gamma_{k+l}}{\partial \beta_j} = (v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}) 2N_n(I_n \otimes A')e_j. \tag{1.5}$$

Observe, também, que tomando $j = (s_j - 1)m + t_j$, com $s_j = 1, \ldots, n$ e $t_j = 1, \ldots, m$, a j-ésima coluna da matriz $(I_n \otimes A')$ pode ser representada na forma:

$$\begin{pmatrix} \delta_{s_j,1} \\ \delta_{s_j,2} \\ \vdots \\ \delta_{s_j,n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{t_j1} \\ a_{t_j2} \\ \vdots \\ a_{t_jn} \end{pmatrix},$$

em que a_{ij} é o ij-ésimo elemento da matriz A e δ_{ij} é a função delta de Kronecker definida por:

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \end{array} \right. .$$

Mais ainda, a multiplicação, à esquerda, de K_{nn} por uma outra matriz produz uma comutação nas linhas desta. Além do mais, o vetor e_j, multiplicado à direita de uma matriz, filtra apenas a sua j-ésima coluna. Isto é verdade quando as multiplicações são possíveis. Então:

$$2N_n(I_n \otimes A')e_j = \begin{pmatrix} \delta_{s_j,1} \\ \delta_{s_j,2} \\ \vdots \\ \delta_{s_j,n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_{t_j1} \\ a_{t_j2} \\ \vdots \\ a_{t_jn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{t_j1} \\ a_{t_j2} \\ \vdots \\ a_{t_jn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \delta_{s_j,1} \\ \delta_{s_j,2} \\ \vdots \\ \delta_{s_j,n} \end{pmatrix}.$$

Uma conclusão disto é que, da equação (1.5), pode-se obter:

$$\frac{\partial \gamma_{k+l}}{\partial \beta_j} = 2v_{s_j,k+l} \sum_{r=1}^{n} v_{r,k+l} a_{t_j,r},$$

sendo $v_{i,k+l}$ o i-ésimo elemento do vetor v_{k+l} e, como mostrado logo a seguir, isto mostra claramente o efeito da matriz N_n.

Considere-se, agora, $i = (s_i - 1)m + t_i$ em que, para cada $s_i = 1, \ldots, n$ fixado e $t_i = 1, \ldots, m$, o i-ésimo elemento do vetor linha

$$(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}) 2N_n (I_n \otimes A')$$

é dado por $2v_{s_i,k+l} \sum_{r=1}^{n} v_{r,k+l} a_{t_i,r}$. Então, pode-se verificar que, para cada $l = 1, \ldots, n-k$, a l-ésima linha de G é dada por:

$$\frac{1}{2} \gamma_{k+l}^{-1/2} (v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}) 2N_n (I_n \otimes A') = \gamma_{k+l}^{-1/2} (v'_{k+l} \otimes v'_{k+l} A') \tag{1.6}$$

e, portanto, sendo $Av_{k+l} = \lambda_{k+l} u_{k+l}$, pode-se escrever:

$$G = \begin{pmatrix} v'_{k+1} \otimes u'_{k+1} \\ v'_{k+2} \otimes u'_{k+2} \\ \vdots \\ v'_n \otimes u'_n \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Logo, sendo G' uma matriz de ordem $p \times (n-k)$ dada por:

$$G' = \begin{pmatrix} v_{k+1} \otimes u_{k+1} & v_{k+2} \otimes u_{k+2} & \cdots & v_n \otimes u_n \end{pmatrix},$$

tem-se que:

$$GG' = \begin{pmatrix} v'_{k+1} \otimes u'_{k+1} \\ v'_{k+2} \otimes u'_{k+2} \\ \vdots \\ v'_n \otimes u'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{k+1} \otimes u_{k+1} & v_{k+2} \otimes u_{k+2} & \cdots & v_n \otimes u_n \end{pmatrix}.$$

Mas, como U e V são matrizes ortogonais, então:

$$v'_{k+l} v_{k+j} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad l = j \\ 0, & \text{se} \quad l \neq j \end{cases}, \quad \text{onde} \quad j, l = 1, \ldots, n-k$$

e

$$u'_{k+l} u_{k+j} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad l = j \\ 0, & \text{se} \quad l \neq j \end{cases}, \quad \text{onde} \quad j, l = 1, \ldots, n-k,$$

de modo que a l-ésima linha de GG' é:

$$(v'_{k+l} \otimes u'_{k+l}) \begin{pmatrix} v_{k+1} \otimes u_{k+1} & v_{k+2} \otimes u_{k+2} & \cdots & v_n \otimes u_n \end{pmatrix}$$

e, uma vez que, por Magnus & Neudecker (1999, pg. 28):

$$(v'_{k+l} \otimes u'_{k+l})(v_{k+j} \otimes u_{k+j}) = (v'_{k+l}v_{k+j} \otimes u'_{k+l}u_{k+j}),$$

pode-se concluir que:

$$GG' = I_{n-k}, \tag{1.8}$$

ou seja, a identidade de ordem $n-k$. Neste caso, levando em consideração que a matriz de covariância assintótica em (1.2) é conhecida e igual à identidade de ordem p, a estatística de Wald para testar a hipótese nula, $H_\circ$, tem formulação em termos dos autovalores da matriz $\widehat{A}'\widehat{A}$ dada por:

$$W = t\sum_{l=1}^{n-k} \hat{\lambda}^2_{k+l}, \tag{1.9}$$

em que t é o tamanho da amostra.

1.3 Expansão de Edgeworth para a função de distribuição da estatística de Wald

Nesta seção será apresentada outra parte da contribuição desta tese para aproximar as ideias propostas por Ratsimalahelo (2003a,b) e Phillips & Park (1988). Dada uma matriz A, de posto coluna completo, na Subseção 1.3.1 foram feitos os cálculos que produzem as derivadas parciais de segunda ordem dos autoelementos de A para, com isso, obter-se os elementos da matriz J, a qual é composta pelas matrizes bloco em (1.10). Os elementos de cada matriz bloco em (1.11), que formam a matriz L, são obtidos a partir dos cálculos para as derivadas parciais de terceira ordem dos autoelementos da matriz A, apresentados na Subseção 1.3.2. Por fim, na Subseção 1.3.3, poder-se-á observar que os coeficientes do quantil corrigido da estatística de Wald desenvolvida por por Ratsimalaheo (2003a,b), dados em (1.12), (1.14) e (1.15), podem ser escritos como funções dos autoelementos da matriz A.

Um fato interessante, provado por Chandra (1985), garante que, sob certas condições gerais, a função de distribuição da estatística de Wald pode ser expressa, até $O(t^{-1})$, como uma combinação linear finita de funções de distribuição qui-quadrado. Na verdade, Cordeiro (1999) garante que esse fato é válido para toda estatística usada com o objetivo de testar uma hipótese nula composta e, cuja distribuição assintótica, segundo a hipótese nula, é qui-quadrado. Nesta seção foram apresentadas as principais expressões que permitem que se faça uso das ideias deixadas por Ratsimalahelo (2003a,b) e Phillips & Park (1988) para obter-se um quantil aperfeiçoado para a função de distribuição da estatística de Wald visando-se a testar o verdadeiro posto de uma matriz desconhecida.

Por meio de expansões de Taylor, pôde-se verificar, em Phillips & Park (1988), que a representação assintótica, até a ordem $O_p(t^{-1})$, da estatística de Wald para o caso em que a matriz de covariância assintótica é a identidade, em (1.3), é dada por:

$$W = \bar{q}'G'(GG')^{-1}G\bar{q} + t^{-1/2}u(\bar{q}) + t^{-1}v(\bar{q}) + O_p(t^{-3/2}),$$

em que

$$u(\bar{q}) = [vec(J)]'(\bar{q}\otimes\bar{q}\otimes\bar{q}) \quad \text{e} \quad v(\bar{q}) = tr[L(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}')]$$

sendo que, $\bar{q}$ é definido na página 19, e para $p = mn$, a matriz J tem ordem $p^2 \times p$ e é tal que empilha as matrizes de ordem $p \times p$, dadas por:

$$G'(GG')^{-1}_{(i)}G + G'_{(i)}(GG')^{-1}G, \quad i = 1,\ldots,p \tag{1.10}$$

e L é uma matriz de ordem $p^2 \times p^2$, cujo ij-ésimo bloco é uma matriz de ordem $p \times p$ com a expressão:

$$\frac{1}{2}G'(GG')^{-1}_{(ij)}G + G'_{(i)}(GG')^{-1}_{(j)}G + \frac{1}{4}G'_{(i)}(GG')^{-1}G_{(j)} + \frac{1}{3}G'_{(ij)}(GG')^{-1}G, \tag{1.11}$$

para $i, j = 1,\ldots,p$. Aqui, é usada a notação $N_{(i)} = \partial N/\partial\beta_i$ e $N_{(ij)} = \partial^2 N/\partial\beta_j\partial\beta_i$, para qualquer matriz $N = N(\beta)$.

Pode-se, então, provar que, sob a hipótese nula, a expansão de Edgeworth da função de distribuição de W até $O(t^{-1})$ quando $t \uparrow \infty$ tem a expressão:

$$\begin{aligned} F(w) &= F_{n-k}(w) - \frac{1}{t}c(w)f_{n-k}(w) + o(t^{-1}) \\ &= F_{n-k}(w - t^{-1}c(w)) + o(t^{-1}), \end{aligned}$$

sendo que f_{n-k} e F_{n-k} representam, respectivamente, a densidade e a função de distribuição χ^2_{n-k} e,

$$c(w) = \sum_{n=0}^{3} \alpha_n w^n,$$

com:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (4a_0 - b_1)/4, \\ \alpha_1 &= (4a_1 + b_1 - b_2)/4(n-k), \\ \alpha_2 &= (4a_2 + b_2 - b_3)/4(n-k)(n-k+2), \\ \alpha_3 &= b_3/4(n-k)(n-k+2)(n-k+4), \end{aligned} \tag{1.12}$$

sendo que, como será mostrado mais adiante, os coeficientes a_k para $k = 0,1,2$ e b_c para $c = 1,2,3$ são obtidos de funções das matrizes J e L; e, ainda, o valor crítico da $F(w)$, corrigido até a ordem $O(t^{-1})$, é dado, aproximadamente, por:

$$w^*_\alpha = w_\alpha + t^{-1}c(w_\alpha), \tag{1.13}$$

desde que w_α seja o valor crítico da distribuição χ^2_{n-k} ao nível α. Nesse caso, Phillips & Park (1988) determinam os coeficientes em (1.12) como $b_c = [vec(J)]'B_c[vec(J)]$, para $c = 1,2,3$, e

$a_c = tr(A_c)$, para $c = 0,1,2$, em que:

$$\begin{aligned}
B_0 &= H(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + H[\bar{P}_{G'} \otimes [vec(\bar{P}_{G'})]\,[vec(\bar{P}_{G'})]']H + \\
&+ \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) \otimes \bar{P}_{G'} + \\
&+ K_{pp^2}[\bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})]K_{p^2p} = C_0(\bar{P}_{G'}), \\
B_1 &= H(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})H + H[P_{G'} \otimes vec(\bar{P}_{G'})\,[vec(\bar{P}_{G'})]' + \\
&+ \bar{P}_{G'} \otimes vec(P_{G'})\,[vec(\bar{P}_{G'})]' + \bar{P}_{G'} \otimes vec(\bar{P}_{G'})[vec(P_{G'})]']H + \\
&+ P_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + \\
&+ \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'}) + K_{pp}(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) \otimes \bar{P}_{G'} + \\
&+ K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'}) \otimes \bar{P}_{G'} + K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) \otimes P_{G'} + \\
&+ K_{pp^2}[P_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + \\
&+ \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'})]K_{p^2p} = C_1(\bar{P}_{G'}, P_{G'}), \\
B_2 &= C_1(P_{G'}, \bar{P}_{G'}), \\
B_3 &= C_0(P_{G'})
\end{aligned} \tag{1.14}$$

e

$$\begin{aligned}
A_0 &= L\left\{(I_{p^2} + K_{pp})(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + vec(\bar{P}_{G'})\,[vec(\bar{P}_{G'})]'\right\}, \\
A_1 &= L\{(I_{p^2} + K_{pp})[(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'} + P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + vec(\bar{P}_{G'})[vec(P_{G'})]' + \\
&+ vec(P_{G'})\,[vec(\bar{P}_{G'})]']\}, \\
A_2 &= L[(I_{p^2} + K_{pp})(P_{G'} \otimes P_{G'}) + vec(P_{G'})[vec(P_{G'})]'].
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Aqui, $H = I_{p^3} + K_{pp^2} + K_{p^2p}$, $P_{G'} = G'(GG')^{-1}G$ e $\bar{P}_{G'} = I_p - P_{G'}$ sendo que, K_{pp^2} e K_{p^2p} são representações de matrizes comutação e I_p, I_{p^2} e I_{p^3} representam as matrizes identidades de ordens p, p^2 e p^3, respectivamente.

1.3.1 Coeficiente do termo de ordem $O(t^{-1/2})$ na expansão de Taylor da estatística de teste

Nesta seção são usados cálculos de diferenciação de autovalores e autovetores de uma matriz com o intuito de expressar fórmulas que representem os blocos, dados por (1.10), da matriz J a qual compõe o coeficiente de ordem $O(t^{-1/2})$ na expansão de Taylor da estatística de Wald para a estimativa do verdadeiro posto de uma matriz desconhecida.

Da matriz em (1.8), tem-se que, para cada $i = 1,\ldots,p$,

$$(GG')^{-1}_{(i)} = 0, \quad l = 1,\ldots,n-k.$$

Portanto,

$$G'(GG')^{-1}_{(i)}G = 0. \tag{1.16}$$

E ainda, a partir de (1.6) pode-se notar que a l-ésima coluna de $G'_{(i)}$ é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_i}\left[\gamma_{k+l}^{-1/2}(v_{k+l} \otimes Av_{k+l})\right] = \frac{\partial \gamma_{k+l}^{-1/2}}{\partial \beta_i}(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) + \gamma_{k+l}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial \beta_i}(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}).$$

Assim, facilmente se verifica, a partir da definição, que a regra da cadeia para derivadas se aplica, também, para o produto de Kronecker, de modo que $G'_{(i)}$ tem l-ésima coluna dada por:

$$\begin{aligned} &- \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) + \\ &+ \gamma_{k+l}^{-1/2}\left[\frac{\partial v_{k+l}}{\partial \beta_i} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}\right) v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\frac{\partial v_{k+l}}{\partial \beta_i}\right] \end{aligned}$$

para todo $l = 1, \ldots, n-k$. Então, sendo v_{k+l} autovetor da matriz simétrica $A'A$ associado ao autovalor simples γ_{k+l}, por Magnus & Neudecker (1999, pg. 181), tem-se que:

$$\frac{\partial v_{k+l}}{\partial\,[vec(A'A)]'} = v'_{k+l} \otimes (\gamma_{k+l}I_n - A'A)^+, \quad l = 1, \ldots, n-k. \tag{1.17}$$

Aqui, e no que segue, o sobrescrito $^+$, para as matrizes, indica a sua inversa generalizada de Moore Penrose. Desta forma, para cada $l = 1, \ldots, n-k$, $(\gamma_{k+l}I_n - A'A)^+$ simboliza a inversa generalizada da matriz $\gamma_{k+l}I_n - A'A$. Com isso, de

$$\frac{\partial v_{k+l}}{\partial \beta_i} = \frac{\partial v_{k+l}}{\partial\,[vec(A'A)]'}\frac{\partial vec(A'A)}{\partial[vec(A)]'}\frac{\partial vec(A)}{\partial \beta_i},$$

juntamente com as equações (1.4) e (1.17), decorre que

$$\frac{\partial v_{k+l}}{\partial \beta_i} = \left[v'_{k+l} \otimes (\gamma_{k+l}I_n - A'A)^+\right] 2N_n(I_n \otimes A')e_i,$$

sendo $i = 1, \ldots, p$ e $l = 1, \ldots, n-k$. Agora, denotando por m_i o i-ésimo vetor canônico do espaço vetorial das matrizes de ordem $m \times n$, $\mathbb{R}^{m \times n}$, se $i = (s_i - 1)m + t_i$, com $s_i = 1, \ldots, n$ e $t_i = 1, \ldots, m$, tem-se que

$$\frac{\partial A}{\partial \beta_i} = m_{(t_i-1)n+s_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial A}{\partial \beta_i}v_{k+l} = m_{(t_i-1)n+s_i}v_{k+l} = v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i},$$

sendo α_i o i-ésimo vetor canônico do espaço $\mathbb{R}^m$. Com isso, fazendo

$$B_{k+l} = \gamma_{k+l}I_n - A'A,$$

pode-se escrever, para cada $l = 1, \ldots, n-k$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta_i}(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) &= \left[(v'_{k+l} \otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n \otimes A')e_i\right] \otimes Av_{k+l} + \\ &+ v_{k+l} \otimes \left[v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i} + A(v'_{k+l} \otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n \otimes A')e_i\right]. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Note que B_{k+l} é uma matriz simétrica de ordem $n \times n$ e, como feito no Apêndice A, para cada $l = 1, \ldots, n-k$, pode-se escrever:

$$B^+_{k+l} = \sum_{\substack{h=1,\\ h \neq k+l}}^{n} (\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1} v_h v'_h. \tag{1.19}$$

Assim, pode-se concluir, a partir das equações (1.18) e (1.19) e, da propriedade da distributividade à esquerda do produto Kronecker (Magnus & Neudecker 1999, pg. 27), que a l-ésima coluna da matriz $G'_{(i)}$ tem a expressão:

$$\begin{aligned}
&- \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l}\otimes v'_{k+l}A')e_i(v_{k+l}\otimes Av_{k+l})+\\
&+ \gamma_{k+l}^{-1/2}\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}(v'_{k+l}\otimes v_h v'_h)2N_n(I_n\otimes A')e_i\otimes Av_{k+l}+\\
&+ \gamma_{k+l}^{-1/2}v_{k+l}\otimes A\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}(v'_{k+l}\otimes v_h v'_h)2N_n(I_n\otimes A')e_i+\\
&+ \gamma_{k+l}^{-1/2}v_{k+l}\otimes v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i},
\end{aligned}$$

de modo que $l=1,\ldots,n-k$ e $i=1,\ldots,p$ dado por $i=(s_i-1)m+t_i$ com $s_i=1,\ldots,n$ e $t_i=1,\ldots,m$. Observe que e_i é o i-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^p$ de modo que, como feito antes, na página 22, $2N_n(I_n\otimes A')e_i$ é um vetor coluna em $\mathbb{R}^{n^2}$, dado por:

$$\begin{pmatrix}\delta_{1,s_i}\\ \delta_{2,s_i}\\ \vdots\\ \delta_{n,s_i}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}a_{t_i,1}\\ a_{t_i,2}\\ \vdots\\ a_{t_i,n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{t_i,1}\\ a_{t_i,2}\\ \vdots\\ a_{t_i,n}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\delta_{1,s_i}\\ \delta_{2,s_i}\\ \vdots\\ \delta_{n,s_i}\end{pmatrix},$$

em que a_{ij} é a ij-ésima entrada da matriz A. Além disso, para $j=1,\ldots,n$, a j-ésima linha da matriz $v'_{k+l}\otimes v_h v'_h$ é da forma $v_{j,h}(v'_{k+l}\otimes v'_h)$ e, assim, considerando o vetor:

$$\vartheta^i_{k+l}=(v'_{k+l}\otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n\otimes A')e_i=(\vartheta^i_{j,k+l})_{n\times 1},$$

tem-se que:

$$\vartheta^i_{j,k+l}=\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}\sum_{y=1}^{n}\sum_{x=1}^{n}(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}v_{j,h}v_{y,k+l}v_{x,h}(\delta_{y,s_i}a_{t_i,x}+a_{t_i,y}\delta_{x,s_i}),$$

de modo que:

$$\vartheta^i_{k+l}=\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}c_{k+l,h,i}v_h, \tag{1.20}$$

de modo que:

$$c_{k+l,h,i}=\sum_{y=1}^{n}\sum_{x=1}^{n}(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}v_{y,k+l}v_{x,h}(\delta_{y,s_i}a_{t_i,x}+a_{t_i,y}\delta_{x,s_i}).$$

Além disso, pelo fato de $Av_h=\lambda_h u_h$, para cada $h=1,\ldots,n$, obtém-se que

$$c_{k+l,h,i}=(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}[\lambda_{k+l}v_{s_i,h}u_{t_i,k+l}+\lambda_h v_{s_i,k+l}u_{t_i,h}].$$

Com isso, para cada $l = 1,\dots,n-k$, tem-se que a l-ésima coluna de $G'_{(i)}$ tem simplificação dada por:

$$\begin{aligned} - &\ \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) + \\ + &\ \gamma_{k+l}^{-1/2}(\vartheta^i_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^i_{k+l} + v_{k+l} \otimes v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i}). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Então, pode-se observar que, se $j = (s_j-1)m + t_j$, com $s_j = 1,\dots,n$ e $t_j = 1,\dots,m$, então o l-ésimo elemento da j-ésima linha de $G'_{(i)}$ tem expressão dada por:

$$\begin{aligned} - &\ \gamma_{k+l}^{-1/2} v_{s_i,k+l}u_{t_i,k+l}v_{s_j,k+l}u_{t_j,k+l} + \vartheta^i_{s_j,k+l}u_{t_j,k+l} + \\ + &\ \gamma_{k+l}^{-1/2} v_{s_j,k+l}\sum_{m=1}^{n} a_{t_j,m}\vartheta^i_{m,k+l} + \gamma_{k+l}^{-1/2}v_{s_j,k+l}v_{s_i,k+l}\delta_{t_j,t_i}. \end{aligned}$$

Além disso, da matriz G, dada em (1.7), pode-se verificar que sua j-ésima coluna é dada pelo vetor:

$$\begin{pmatrix} v_{s_j,k+1}u_{t_j,k+1} & v_{s_j,k+2}u_{t_j,k+2} & \cdots & v_{s_j,n}u_{t_j,n} \end{pmatrix}'.$$

A partir do que foi descrito e pelo fato de $(GG')^{-1} = I_{n-k}$, pode-se concluir que o elemento da matriz bloco $G'_{(i)}(GG')^{-1}G$, cujo índice é (a,b), tem a expressão:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{n-k} v_{s_b,k+l}u_{t_b,k+l}\Big(- \gamma_{k+l}^{-1/2}v_{s_i,k+l}u_{t_i,k+l}v_{s_a,k+l}u_{t_a,k+l} + \vartheta^i_{s_a,k+l}u_{t_a,k+l} + \\ + &\ \gamma_{k+l}^{-1/2}v_{s_a,k+l}\sum_{m=1}^{n} a_{t_a,m}\vartheta^i_{m,k+l} + \gamma_{k+l}^{-1/2}v_{s_a,k+l}v_{s_i,k+l}\delta_{t_a,t_i}\Big), \end{aligned}$$

considerado-se que $a = (s_a-1)m + t_a$ e $b = (s_b-1)m + t_b$, com $s_a, s_b = 1,\dots,n$ e $t_a, t_b = 1,\dots,m$. Agora, da definição de ϑ^i_{k+l}, dada pela equação (1.20), pode-se verificar que:

$$A\vartheta^i_{k+l} = \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,i}\lambda_h u_h,$$

e, assim:

$$\sum_{m=1}^{n} a_{t_a,m}\vartheta^i_{m,k+l} = \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,i}\lambda_h u_{t_a,h}.$$

Logo, o elemento de índice (a,b) da matriz $G'_{(i)}(GG')^{-1}G$ pode ser reescrito na forma:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{n-k}\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} v_{s_b,k+l}u_{t_b,k+l}c_{k+l,h,i}(v_{s_a,h}u_{t_a,k+l} + \lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_a,k+l}u_{t_a,h}) + \\ + &\sum_{l=1}^{n-k}\lambda_{k+l}^{-1}v_{s_b,k+l}u_{t_b,k+l}(v_{s_a,k+l}v_{s_i,k+l}\delta_{t_a,t_i} - v_{s_i,k+l}u_{t_i,k+l}v_{s_a,k+l}u_{t_a,k+l}), \end{aligned}$$

de modo que uma reorganização nos termos, permite escrevê-lo como:

$$\sum_{l=1}^{n-k}\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} v_{s_b,k+l}u_{t_b,k+l}c_{k+l,h,i}(v_{s_a,h}u_{t_a,k+l}+\lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h^{1/2}v_{s_a,k+l}u_{t_a,h})+$$
$$+\quad \sum_{l=1}^{n-k}\lambda_{k+l}^{-1}v_{s_b,k+l}u_{t_b,k+l}v_{s_i,k+l}v_{s_a,k+l}(\delta_{t_a,t_i}-u_{t_i,k+l}u_{t_a,k+l}).$$

Portanto, fazendo:

$$\begin{aligned}\mu_{i,a} &= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,i}(v_{s_a,h}u_{t_a,k+l}+\lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_a,k+l}u_{t_a,h})+\\ &+\quad \lambda_{k+l}^{-1}v_{s_a,k+l}v_{s_i,k+l}(\delta_{t_a,t_i}-u_{t_i,k+l}u_{t_a,k+l}),\end{aligned}$$

a expressão do (a,b)-ésimo elemento da matriz $G'_{(i)}(GG')^{-1}G$ é da forma:

$$\sum_{l=1}^{n-k}\mu_{i,a}v_{s_b,k+l}u_{t_b,k+l}.$$

Note-se que, fixando os índices a e i e fazendo $b=1,\ldots,p$, obtém-se a expressão da a-ésima linha da matriz $G'_{(i)}(GG')^{-1}G$, dada por:

$$\sum_{l=1}^{n-k}\mu_{i,a}(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l}).$$

Logo, se $a=1,\ldots,p$ é dado pela fórmula $a=(s_a-1)m+t_a$, com $s_a=1,\ldots,n$ e $t_a=1,\ldots,m$ então, da equação (1.16), para cada $i=1,\ldots,p$ fixado, a a-ésima linha da i-ésima matriz bloco em (1.10) tem a forma:

$$\sum_{l=1}^{n-k}\mu_{i,a}(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l}).$$

Agora, de maneira ainda mais geral, uma vez que a matriz J tem ordem $p^2\times p$ e é tal que empilha as matrizes $G'_{(i)}(GG')^{-1}G$, para $i=1,\ldots,p$, considere-se que $w=1,\ldots,p^2$ é dado por $w=(i-1)p+(s_w-1)m+t_w$ sendo que i tem a contagem acima, $s_w=1,\ldots,n$ e $t_w=1,\ldots,m$. Então, para cada w, fixado a w-ésima linha de J também pode ser expressa como sendo:

$$\sum_{l=1}^{n-k}\mu_w(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l}),$$

em que

$$\begin{aligned}\mu_w &= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,i}(v_{s_w,h}u_{t_w,k+l}+\lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_w,k+l}u_{t_w,h})+\\ &+\quad \lambda_{k+l}^{-1}v_{s_w,k+l}v_{s_i,k+l}(\delta_{t_w,t_i}-u_{t_i,k+l}u_{t_w,k+l}).\end{aligned}$$

A c-ésima coluna de J tem elementos da forma:

$$\sum_{l=1}^{n-k} \mu_w v_{s_c,k+l} u_{t_c,k+l}$$

em que, para cada $c = 1,\ldots,p$ fixado, $w = 1,\ldots,p^2$. Nesse caso, $c = (s_c - 1)m + t_c$ com $s_c = 1,\ldots,n$ e $t_c = 1,\ldots,m$.

Para finalizar esta etapa, considere-se a contagem $e = 1,\ldots,p^3$, dada por $e = (c-1)p^2 + w$, em que c e w representam as contagens dadas acima. Portanto, se ζ_e representa o e-ésimo elemento do vetor coluna $vec(J)$, o qual tem ordem $p^3 \times 1$, então:

$$\zeta_e = \sum_{l=1}^{n-k} \mu_w v_{s_c,k+l} u_{t_c,k+l}. \tag{1.22}$$

Agora, se considerar-se que $e = 1,\ldots,p^3$ tem expressão $e = (i-1)p^2 + (j-1)p + k$, sendo $i, j, k = 1,\cdots,p$, então o e-ésimo elemento do vetor $\bar{q} \otimes \bar{q} \otimes \bar{q}$, representado por $\bar{q}^e$, pode ser expresso como:

$$\bar{q}^e = \bar{q}^i \bar{q}^j \bar{q}^k.$$

Logo, pode-se concluir que, o coeficiente do termo de ordem $O(t^{-1/2})$ na expansão de Taylor da estatística de Wald para testar o posto de uma matriz aleatória, sob a hipótese nula de que seu verdadeiro posto tem valor k, tem a seguinte formulação:

$$u(\bar{q}) = \zeta_e \bar{q}^e,$$

sendo que, neste caso, estamos usando a convenção de somatório de Einstein apresentada por Barndorff-Nielsen & Cox (1990, pg. 136).

1.3.2 Coeficiente do termo de ordem $O(t^{-1})$ na expansão de Taylor da estatística de teste

Nesta seção, o objetivo é encontrar cada matriz bloco que define a matriz L , dada pela expressão (1.11), e, em seguida, uma expressão que permita identificar cada linha da matriz L. Aqui, mais uma vez, são usados cálculos diferenciais sobre os autovetores e autovalores da matriz $A'A$ para que seja possível escrever cada bloco de L como expressões que envolvam os vetores e valores singulares de A.

Observe que, da equação (1.8):

$$(GG')^{-1}_{(i)} = 0$$

e, consequentemente, tem-se, também, que:

$$(GG')^{-1}_{(ij)} = 0.$$

Então, pode-se concluir de (1.11) que:

$$G'(GG')^{-1}_{(ij)} G = 0 \tag{1.23}$$

e

$$G'_{(i)}(GG')^{-1}_{(j)}G = 0 \tag{1.24}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, p$.

Agora, observe que, da equação (1.21), concluiu-se que o l-ésimo elemento da a-ésima linha de $G'_{(i)}$ tem a expressão:

$$\begin{aligned} - & \ \gamma_{k+l}^{-1/2} v_{s_i,k+l} u_{t_i,k+l} v_{s_a,k+l} u_{t_a,k+l} + \vartheta^i_{s_a,k+l} u_{t_a,k+l} + \\ + & \ \gamma_{k+l}^{-1/2} v_{s_a,k+l} \sum_{m=1}^{n} a_{t_a,m} \vartheta^i_{m,k+l} + \gamma_{k+l}^{-1/2} v_{s_a,k+l} v_{s_i,k+l} \delta_{t_a,t_i}, \end{aligned}$$

para $a = (s_a - 1)m + t_a$, com $s_a = 1, \ldots, n$ e $t_a = 1, \ldots, m$, ou seja, da definição de ϑ^i_{k+l} em (1.20), te-se que o l-ésimo elemento da a-ésima linha de $G'_{(i)}$ é:

$$\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,i}(v_{s_a,h} u_{t_a,k+l} + \lambda_{k+l}^{-1} \lambda_h v_{s_a,k+l} u_{t_a,h}) + \lambda_{k+l}^{-1} v_{s_i,k+l} v_{s_a,k+l} (\delta_{t_a,t_i} - u_{t_i,k+l} u_{t_a,k+l}). \tag{1.25}$$

Suponha-se, pois, que $c_i(a,l)$ representa tal elemento. Por outro lado, também de (1.21), fica verificado que a matriz $G_{(j)}$ tem l-ésima linha dada por:

$$\begin{aligned} - & \ \gamma_{k+l}^{-3/2} (v'_{k+l} \otimes v'_{k+l} A') e_j (v'_{k+l} \otimes v'_{k+l} A') + \\ + & \ \gamma_{k+l}^{-1/2} ({\vartheta^j_{k+l}}' \otimes v'_{k+l} A' + v'_{k+l} \otimes {\vartheta^j_{k+l}}' A' + v'_{k+l} \otimes v_{s_j,k+l} \alpha'_{t_j}). \end{aligned}$$

Logo, se $b = (s_b - 1)m + t_b$ com $s_b = 1, \ldots, n$ e $t_b = 1, \ldots, m$, então os elementos da b-ésima coluna de $G_{(j)}$ são:

$$\begin{aligned} - & \ \lambda_{k+l}^{-1} v_{s_j,k+l} u_{t_j,k+l} v_{s_b,k+l} u_{t_b,k+l} + \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,j} v_{s_b,h} u_{t_b,k+l} + \\ + & \ \lambda_{k+l}^{-1} \lambda_h v_{s_b,k+l} \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,j} u_{t_b,h} + \lambda_{k+l}^{-1} v_{s_b,k+l} v_{s_j,k+l} \delta_{t_b,t_j}. \end{aligned}$$

Assim, os elementos da b-ésima coluna de $G_{(j)}$ têm expressão:

$$\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,j}(v_{s_b,h} u_{t_b,k+l} + \lambda_{k+l}^{-1} \lambda_h v_{s_b,k+l} u_{t_b,h}) + \lambda_{k+l}^{-1} v_{s_j,k+l} v_{s_b,k+l} (\delta_{t_b,t_j} - u_{t_j,k+l} u_{t_b,k+l}) \tag{1.26}$$

e, considere que este elemento é representado por $c_j(b,l)$. Portanto, fazendo uso das expressões em (1.8), (1.25) e (1.26), nota-se que o (a,b)-ésimo elemento de $G'_{(i)}(GG')^{-1}G_{(j)}$ tem a forma

$$\sum_{l=1}^{n-k} c_i(a,l) c_j(b,l).$$

Após alguma manipulação algébrica que envolve o produto dos elementos $c_i(a,l)$ e $c_j(b,l)$, obtém-se, para a expressão acima, a forma:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n-k}\Bigg\{\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}\sum_{\substack{e=1,\\ e\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,i}c_{k+l,e,j}(v_{s_a,h}u_{t_a,k+l}v_{s_b,e}u_{t_b,k+l}+\lambda_{k+l}^{-1}\lambda_e v_{s_a,h}u_{t_a,k+l}v_{s_b,k+l}u_{t_b,e}+\\
+\;& \lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_a,k+l}u_{t_a,h}v_{s_b,e}u_{t_b,k+l}+\lambda_{k+l}^{-2}\lambda_h\lambda_e v_{s_a,k+l}u_{t_a,h}v_{s_b,k+l}u_{t_b,e})+\\
+\;& \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}\lambda_{k+l}^{-1}[c_{k+l,h,i}v_{s_j,k+l}v_{s_b,k+l}(v_{s_a,h}u_{t_a,k+l}\delta_{t_b,t_j}-v_{s_a,h}u_{t_a,k+l}u_{t_j,k+l}u_{t_b,k+l}+\\
+\;& \lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_a,k+l}u_{t_a,h}\delta_{t_b,t_j}-\lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_a,k+l}u_{t_a,h}u_{t_j,k+l}u_{t_b,k+l})+\\
+\;& c_{k+l,h,j}v_{s_i,k+l}v_{s_a,k+l}(v_{s_b,h}u_{t_b,k+l}\delta_{t_a,t_i}-v_{s_b,h}u_{t_b,k+l}u_{t_i,k+l}u_{t_a,k+l}+\\
+\;& \lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_b,k+l}u_{t_b,h}\delta_{t_a,t_i}-\lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h v_{s_b,k+l}u_{t_b,h}u_{t_i,k+l}u_{t_a,k+l})]+\\
+\;& \lambda_{k+l}^{-2}v_{s_i,k+l}v_{s_j,k+l}v_{s_a,k+l}v_{s_b,k+l}(\delta_{t_a,t_i}\delta_{t_b,t_j}-\delta_{t_a,t_i}u_{t_j,k+l}u_{t_b,k+l}-\\
-\;& \delta_{t_b,t_j}u_{t_i,k+l}u_{t_a,k+l}+u_{t_j,k+l}u_{t_b,k+l}u_{t_i,k+l}u_{t_a,k+l})\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Assim, verifica-se que a forma geral de $G'_{(i)}(GG')^{-1}G_{(j)}$ é:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n-k}\Bigg\{\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}\sum_{\substack{e=1,\\ e\neq k+l}}^{n} c_{k+l,h,i}c_{k+l,e,j}[(v_h v'_e\otimes u_{k+l}u'_{k+l})+\lambda_{k+l}^{-1}\lambda_e(v_h v'_{k+l}\otimes u_{k+l}u'_e)+\\
+\;& \lambda_{k+l}^{-1}\lambda_h(v_{k+l}v'_e\otimes u_h u'_{k+l})+\lambda_{k+l}^{-2}\lambda_h\lambda_e(v_{k+l}v'_{k+l}\otimes u_h u'_e)]+\\
+\;& \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}\Big\{c_{k+l,h,j}[\lambda_{k+l}^{-1}(v_{k+l}v'_h\otimes v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i}u'_{k+l})+\lambda_{k+l}^{-2}\lambda_h(v_{k+l}v'_{k+l}\otimes v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i}u'_h)-\\
-\;& \lambda_{k+l}^{-1}(v_{k+l}v'_h\otimes u_{k+l}u'_{k+l})(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})e_i-\lambda_{k+l}^{-2}\lambda_h(v_{k+l}v'_{k+l}\otimes u_{k+l}u'_h)(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})e_i]+\\
+\;& c_{k+l,h,i}[\lambda_{k+l}^{-1}(v_h v'_{k+l}\otimes u_{k+l}v_{s_j,k+l}\alpha'_{t_j})+\lambda_{k+l}^{-2}\lambda_h(v_{k+l}v'_{k+l}\otimes u_h v_{s_j,k+l}\alpha'_{t_j})-\\
-\;& \lambda_{k+l}^{-1}(v_h v'_{k+l}\otimes u_{k+l}u'_{k+l})(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})e_j-\lambda_{k+l}^{-2}\lambda_h(v_{k+l}v'_{k+l}\otimes u_h u'_{k+l})(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})e_j]\Big\}+\\
+\;& \lambda_{k+l}^{-2}[(v_{k+l}v'_{k+l}\otimes v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i}v_{s_j,k+l}\alpha'_{t_j})-(v_{k+l}v'_{k+l}\otimes v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i}u'_{k+l})(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})ej-\\
-\;& (v_{k+l}v'_{k+l}\otimes u_{k+l}v_{s_j,k+l}\alpha'_{t_j})(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})e_i+\\
+\;& (v_{k+l}v'_{k+l}\otimes u_{k+l}u'_{k+l})(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})e_i(v'_{k+l}\otimes u'_{k+l})ej]\Bigg\}. \qquad (1.27)
\end{aligned}
$$

O próximo passo é encontrar uma fórmula para $G'_{(ij)}$. Neste sentido, observe que, para cada $l = 1, \ldots, n-k$, a l-ésima coluna de $G'_{(i)}$ é:

$$\begin{aligned}
- &\ \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) + \\
+ &\ \gamma_{k+l}^{-1/2}\left[\vartheta^i_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}\right) v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^i_{k+l}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, a l-ésima coluna de $G'_{(ij)}$ tem expressão dada a partir de:

$$\begin{aligned}
- &\ \frac{\partial \gamma_{k+l}^{-3/2}}{\partial \beta_j}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) - \\
- &\ \gamma_{k+l}^{-3/2}\left[\frac{\partial}{\partial \beta_j}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')\right]e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) - \\
- &\ \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i\left[\frac{\partial}{\partial \beta_j}(v_{k+l} \otimes Av_{k+l})\right] + \\
+ &\ \frac{\partial \gamma_{k+l}^{-1/2}}{\partial \beta_j}\left[\vartheta^i_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}\right) v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^i_{k+l}\right] + \\
+ &\ \gamma_{k+l}^{-1/2}\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left[\vartheta^i_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}\right) v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^i_{k+l}\right].
\end{aligned} \tag{1.28}$$

No que segue, são feitos os cálculos das respectivas derivadas de cada um dos fatores dos termos da equação citada acima. Dessa forma, a partir das equações (1.4) e (1.5) e, com o auxílio de uma aplicação da regra da cadeia para derivadas, tem-se que:

$$\frac{\partial \gamma_{k+l}^{-3/2}}{\partial \beta_j} = -3\gamma_{k+l}^{-5/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')ej \tag{1.29}$$

e

$$\frac{\partial \gamma_{k+l}^{-1/2}}{\partial \beta_j} = -\gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')ej. \tag{1.30}$$

Da equação em (1.18) e pela definição de ϑ^i_{k+l} para obter (1.20), observa-se que:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j}(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) = \vartheta^j_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_j}\right) v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^j_{k+l}, \tag{1.31}$$

sendo que esta última equação pode ser escrita de maneira mais explícita como sendo:

$$\begin{aligned}
&\ (v'_{k+l} \otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n \otimes A')e_i \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}\right) v_{k+l} + \\
+ &\ v_{k+l} \otimes A(v'_{k+l} \otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n \otimes A')e_i.
\end{aligned}$$

Assim, mais um cálculo de diferenciação do segundo fator do último termo de (1.28), permite escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\beta_i\partial\beta_j}(v_{k+l}\otimes Av_{k+l}) \;=\;& \Bigg[\left(\frac{\partial v'_{k+l}}{\partial\beta_j}\otimes B^+_{k+l}+v'_{k+l}\otimes\frac{\partial B^+_{k+l}}{\partial\beta_j}\right)2N_n(I_n\otimes A')e_i+\\
&+\;(v'_{k+l}\otimes B^+_{k+l})2N_n\left(I_n\otimes\frac{\partial A'}{\partial\beta_j}\right)e_i\Bigg]\otimes Av_{k+l}+\\
&+\;(v'_{k+l}\otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n\otimes A')e_i\otimes\left(\frac{\partial A}{\partial\beta_j}v_{k+l}+A\frac{\partial v_{k+l}}{\partial\beta_j}\right)+\\
&+\;\frac{\partial v_{k+l}}{\partial\beta_j}\otimes\frac{\partial A}{\partial\beta_i}v_{k+l}+v_{k+l}\otimes\frac{\partial A}{\partial\beta_i}\frac{\partial v_{k+l}}{\partial\beta_j}+\\
&+\;\frac{\partial v_{k+l}}{\partial\beta_j}\otimes A(v'_{k+l}\otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n\otimes A')e_i+\\
&+\;v_{k+l}\otimes\Bigg[\frac{\partial A}{\partial\beta_j}(v'_{k+l}\otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n\otimes A')e_i+\\
&+\;A\left(\frac{\partial v'_{k+l}}{\partial\beta_j}\otimes B^+_{k+l}+v'_{k+l}\otimes\frac{\partial B^+_{k+l}}{\partial\beta_j}\right)2N_n(I_n\otimes A')e_i+\\
&+\;A(v'_{k+l}\otimes B^+_{k+l})2N_n\left(I_n\otimes\frac{\partial A'}{\partial\beta_j}\right)e_i\Bigg].
\end{aligned}$$

Agora, com o objetivo de simplificar a última expressão, recorde-se que:

$$\begin{aligned}
&\vartheta^a_{k+l}=\frac{\partial v_{k+l}}{\partial\beta_a}=(v'_{k+l}\otimes B^+_{k+l})2N_n(I_n\otimes A')e_a,\\
&\frac{\partial A}{\partial\beta_a}=m_{(t_a-1)n+s_a},\\
&\frac{\partial A}{\partial\beta_a}v_b=v_{s_a,b}\alpha_{t_a},\\
&\frac{\partial A'}{\partial\beta_a}=n_{(s_a-1)m+t_a},
\end{aligned}$$

de modo que $a=i,j$ com $i,j=1,\dots,p$, dados por $i=(s_i-1)m+t_i$ e $j=(s_j-1)m+t_j$ com, $s_i,s_j=1,\dots,n$ e $t_i,t_j=1,\dots,m$ e, $b=1,\dots,n$. Além disso, $m_{(t_a-1)n+s_a}$ e $n_{(s_a-1)m+t_a}$ representam os respectivos elementos canônicos dos espaços vetoriais das matrizes $\mathbb{R}^{m\times n}$ e

$\mathbb{R}^{n\times m}$. Então,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\beta_i\partial\beta_j}(v_{k+l}\otimes Av_{k+l}) &= \left[\left({\vartheta^{j}_{k+l}}'\otimes B^{+}_{k+l}+v'_{k+l}\otimes\frac{\partial B^{+}_{k+l}}{\partial\beta_j}\right)2N_n(I_n\otimes A')e_i+\right.\\
&+ \left.(v'_{k+l}\otimes B^{+}_{k+l})2N_n(I_n\otimes n_j)e_i\right]\otimes Av_{k+l}+\\
&+ \vartheta^{i}_{k+l}\otimes\left(v_{s_j,k+l}\alpha_{t_j}+A\vartheta^{j}_{k+l}\right)+\\
&+ \vartheta^{j}_{k+l}\otimes v_{s_i,k+l}\alpha_{t_i}+v_{k+l}\otimes m_{(t_i-1)n+s_i}\vartheta^{j}_{k+l}+\\
&+ \vartheta^{j}_{k+l}\otimes A\vartheta^{i}_{k+l}+\\
&+ v_{k+l}\otimes\left[m_{(t_j-1)n+s_j}\vartheta^{i}_{k+l}+\right.\\
&+ A\left({\vartheta^{j}_{k+l}}'\otimes B^{+}_{k+l}+v'_{k+l}\otimes\frac{\partial B^{+}_{k+l}}{\partial\beta_j}\right)2N_n(I_n\otimes A')e_i+\\
&+ \left.A(v'_{k+l}\otimes B^{+}_{k+l})2N_n\left(I_n\otimes n_j\right)e_i\right]. \qquad (1.32)
\end{aligned}
$$

Observe-se que, com o uso da regra da cadeia e da equação (1.5), pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}}{\partial\beta_j} &= \frac{\partial(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}}{\partial(\gamma_{k+l}-\gamma_h)}\frac{\partial(\gamma_{k+l}-\gamma_h)}{\beta_j}\\
&= -(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-2}(v'_{k+l}\otimes v'_{k+l}-v'_h\otimes v'_h)2N_n(I_n\otimes A')e_j.
\end{aligned} \qquad (1.33)
$$

Além disso, como mostrado no Apêndice A,

$$B^{+}_{k+l}=\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}v_hv'_h.$$

Com mais uma aplicação da regra da cadeia, e o uso das equações (1.17) e (1.33), tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B^{+}_{k+l}}{\partial\beta_j} &= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}\left[(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-2}(v'_h\otimes v'_h-v'_{k+l}\otimes v'_{k+l})2N_n(I_n\otimes A')e_jv_hv'_h+\right.\\
&+ (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}(v'_h\otimes B^{+}_h)2N_n(I_n\otimes A')e_jv'_h+\\
&+ \left.(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}v_he'_j(I_n\otimes A)2N_n(v_h\otimes B^{+}_h)\right].
\end{aligned}
$$

Aqui, está sendo considerado que $B^{+}_h=(\gamma_hI_n-A'A)^{+}$. Agora, dos autoelementos da matriz A, como

$$(v'_h\otimes v'_h)2N_n(I_n\otimes A')e_j=2v_{s_j,h}\sum_{k=1}^{n}v_{k,h}a_{t_j,k}=2\lambda_hv_{s_j,h}u_{t_j,h}$$

para todo $h = 1, \ldots, n$, então:

$$(v'_h \otimes v'_h - v'_{k+l} \otimes v'_{k+l})2N_n(I_n \otimes A')e_j = 2(v_{s_j,h} - v_{s_j,k+l})(\lambda_h u_{t_j,h} - \lambda_{k+l} u_{t_j,k+l})$$

e assim, tomando:

$$\varepsilon_{h,j} = 2(\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-2}(v_{s_j,h} - v_{s_j,k+l})(\lambda_h u_{t_j,h} - \lambda_{k+l} u_{t_j,k+l}),$$

tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B^+_{k+l}}{\partial \beta_j} &= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \big[(\varepsilon_{h,j} v_h v'_h + (\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1}(v'_h \otimes B^+_h)2N_n(I_n \otimes A')e_j v'_h + \\ &+ (\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1} v_h e'_j (I_n \otimes A)2N_n(v_h \otimes B^+_h)\big]. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Além do mais, como demonstrado no Apêndice A,

$$B^+_h = \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq h}}^{n} (\gamma_h - \gamma_r)^{-1} v_r v'_r \quad \text{para todo} \quad h = 1, \ldots, n,$$

de modo que, sendo:

$$\begin{aligned} \vartheta^j_h &= \frac{\partial v_h}{\partial \beta_j} = (v'_h \otimes B^+_h)2N_n(I_n \otimes A')e_j \\ &= \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq h}}^{n} (\gamma_h - \gamma_r)^{-1}(v'_h \otimes v_r v'_r)2N_n(I_n \otimes A')e_j, \end{aligned}$$

com o mesmo desenvolvimento usado para obter (1.20), pode ser observado que:

$$\begin{aligned} \vartheta^j_h &= \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq h}}^{n} \sum_{y=1}^{n} \sum_{x=1}^{n} (\gamma_h - \gamma_r)^{-1} v_{y,h} v_{x,r} (\delta_{y,s_j} a_{t_j,x} + a_{t_j,y} \delta_{x,s_j}) v_r \\ &= \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq h}}^{n} (\gamma_h - \gamma_r)^{-1}(v_{s_j,h} \lambda_r u_{t_j,r} + v_{s_j,r} \lambda_h u_{t_j,h}) v_r. \end{aligned}$$

Assim, fazendo:

$$d_{h,r,j} = (\gamma_h - \gamma_r)^{-1}(v_{s_j,h} \lambda_r u_{t_j,r} + v_{s_j,r} \lambda_h u_{t_j,h}),$$

obtém-se:

$$\vartheta^j_h = \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq h}}^{n} d_{h,r,j} v_r \quad \text{para todo} \quad h = 1, \ldots, n. \tag{1.35}$$

Então, substituindo (1.35) em (1.34), tem-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B^{+}_{k+l}}{\partial \beta_j} &= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \left[\varepsilon_{h,j} v_h v_h' + (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}\left(\vartheta_h^j v_h' + v_h \vartheta_h^{j'}\right)\right] \\
&= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \left[\varepsilon_{h,j} v_h v_h' + (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1} \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq h}}^{n} d_{h,r,j}(v_r v_h' + v_h v_r')\right].
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
v_{k+l}' \otimes \frac{\partial B^{+}_{k+l}}{\partial \beta_j} &= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \varepsilon_{h,j}(v_{k+l}' \otimes v_h v_h') + \\
&+ \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq h}}^{n} (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1} d_{h,r,j}[v_{k+l}' \otimes (v_r v_h' + v_h v_r')]
\end{aligned}
$$

e, de (1.34),

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{k+l}^{j\ \prime} \otimes B^{+}_{k+l} &= \left(\sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} d_{k+l,r,j} v_r'\right) \otimes \left(\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1} v_h v_h'\right) \\
&= \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} d_{k+l,r,j}(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}(v_r' \otimes v_h v_h').
\end{aligned}
$$

Portanto, a partir das duas últimas equações, pode-se verificar que a expressão de $\vartheta_{k+l}^{j\ \prime} \otimes B^{+}_{k+l} + v_{k+l}' \otimes \frac{\partial B^{+}_{k+l}}{\partial \beta_j}$ tem a forma:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}\{d_{k+l,r,j}(v_r' \otimes v_h v_h') + \\
+\ & d_{h,r,j}[v_{k+l}' \otimes (v_r v_h' + v_h v_r')]\} + \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \varepsilon_{h,j}(v_{k+l}' \otimes v_h v_h'). \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

Agora, baseado em desenvolvimentos, se $a,b,c = 1,\ldots,n$, então:

$$
\begin{aligned}
(v_a' \otimes v_b v_c') 2N_n(I_n \otimes A')e_i &= \sum_{y=1}^{n}\sum_{x=1}^{n} v_{y,a} v_{x,c}(\delta_{y,s_i} a_{t_i,x} + a_{t_i,y}\delta_{x,s_i}) v_b \\
&= (v_{s_i,a}\lambda_c u_{t_i,c} + v_{s_i,c}\lambda_a u_{t_i,a}) v_b \qquad (1.37)
\end{aligned}
$$

em que $i = 1, \ldots, p$ é dado por $i = (s_i - 1)m + t_i$, com $s_i = 1, \ldots, n$ e $t_i = 1, \ldots, m$. Logo, fazendo

$$f_{a,c,i} = v_{s_i,a}\lambda_c u_{t_i,c} + v_{s_i,c}\lambda_a u_{t_i,a},$$

conclui-se que:

$$(v_a' \otimes v_b v_c')2N_n(I_n \otimes A')e_i = f_{ac,i}v_b.$$

Portanto, de (1.36) e (1.37), a expressão de $(\vartheta_{k+l}^{j\;\prime} \otimes B_{k+l}^{+} + v_{k+l}' \otimes \frac{\partial B_{k+l}^{+}}{\partial \beta_j})2N_n(I_n \otimes A')e_i$ tem a forma:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} (\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1}[d_{k+l,r,j}f_{r,h,i}v_h + \\ + \quad & d_{h,r,j}(f_{k+l,h,i}v_r + f_{k+l,r,i}v_h)] + \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \varepsilon_{h,j}f_{k+l,h,i}v_h, \end{aligned} \tag{1.38}$$

para todo $i, j = 1, \ldots, p$, dados por $i = (s_i - 1)m + t_i$ e $j = (s_j - 1)m + t_j$, com $s_i, s_j = 1, \ldots, n$ e $t_i, t_j = 1, \ldots, m$. Além disso, sendo $n_j = (n_{xy})$ o j-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^{n\times m}$, tem-se que:

$$n_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x = t_j \quad \text{e} \quad y = s_j \\ 0, & \text{se} \quad x \neq t_j \quad \text{e} \quad y \neq s_j \end{cases}.$$

Logo,

$$2N_n(I_n \otimes n_j)e_i = \begin{pmatrix} \delta_{s_i,1} \\ \delta_{s_i,2} \\ \vdots \\ \delta_{s_i,n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} n_{t_i,1} \\ n_{t_i,2} \\ \vdots \\ n_{t_i,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{t_i,1} \\ n_{t_i,2} \\ \vdots \\ n_{t_i,n} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \delta_{s_i,1} \\ \delta_{s_i,2} \\ \vdots \\ \delta_{s_i,n} \end{pmatrix},$$

o que implica dizer que $(v_{k+l}' \otimes B_{k+l}^{+})2N_n(I_n \otimes n_j)e_i$ tem a expressão:

$$\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \sum_{y=1}^{n} \sum_{x=1}^{n} (\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1} v_{y,k+l}v_{x,h}(\delta_{y,s_i}n_{t_i,x} + n_{t_i,y}\delta_{x,s_i})v_h;$$

ou seja, fazendo:

$$\begin{aligned} g_{h,i} &= \sum_{y=1}^{n} \sum_{x=1}^{n} (\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1} v_{y,k+l}v_{x,h}(\delta_{y,s_i}n_{t_i,x} + n_{t_i,y}\delta_{x,s_i}) \\ &= 2(\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1} v_{s_i,k+l}v_{s_i,h}, \end{aligned}$$

obtém-se que:

$$(v_{k+l}' \otimes B_{k+l}^{+})2N_n(I_n \otimes n_j)e_i = \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} g_{h,i}v_h. \tag{1.39}$$

Com isso, substituindo (1.38) e (1.39) em (1.32), pode-se verificar que a derivada parcial mista de segunda ordem do vetor $v_{k+l} \otimes Av_{k+l}$ toma a forma:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}\{d_{k+l,r,j}f_{r,h,i}(v_h \otimes Av_{k+l}) + \\
+ \;& d_{h,r,j}[f_{k+l,h,i}(v_r \otimes Av_{k+l}) + f_{k+l,r,i}(v_h \otimes Av_{k+l})]\} + \\
+ \;& \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \varepsilon_{h,j} f_{k+l,h,i}(v_h \otimes Av_{k+l}) + \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} g_{h,i}(v_h \otimes Av_{k+l}) + \\
+ \;& \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} d_{k+l,r,i} v_{s_j,k+l}(v_r \otimes \alpha_{t_j}) + \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{e=1,\\ e\neq k+l}}^{n} d_{k+l,r,i} d_{k+l,e,j}(v_r \otimes Av_e) + \\
+ \;& \sum_{\substack{e=1,\\ e\neq k+l}}^{n} d_{k+l,e,j} v_{s_i,k+l}(v_e \otimes \alpha_{t_i}) + \sum_{\substack{e=1,\\ e\neq k+l}}^{n} d_{k+l,e,j} v_{s_i,e}(v_{k+l} \otimes \alpha_{t_i}) + \\
+ \;& \sum_{\substack{e=1,\\ e\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} d_{k+l,e,j} d_{k+l,h,i}(v_e \otimes Av_h) + \sum_{\substack{e=1,\\ e\neq k+l}}^{n} d_{k+l,h,i} v_{s_j,h}(v_{k+l} \otimes \alpha_{t_j}) + \\
+ \;& \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}[d_{k+l,r,j}f_{r,h,i}(v_{k+l} \otimes Av_h) + \\
+ \;& d_{h,r,j}f_{k+l,h,i}(v_{k+l} \otimes Av_r) + f_{k+l,r,i}(v_{k+l} \otimes Av_h)] + \\
+ \;& \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \varepsilon_{h,j} f_{k+l,h,i}(v_{k+l} \otimes Av_h) + \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} g_{h,i}(v_{k+l} \otimes Av_h)
\end{aligned}
$$

a partir da qual, uma reorganização dos termos permite reescrever:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\beta_i \partial\beta_j}(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) \;=\; & \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \left\{ \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} \left\{ (\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1} \Big\{ d_{k+l,r,j} f_{r,h,i}[(v_h \otimes Av_{k+l}) + \right.\right. \\
+ \;& (v_{k+l} \otimes Av_h)] + d_{h,r,j}[f_{k+l,h,i}(v_r \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_r) + \\
+ \;& f_{k+l,r,i}(v_h \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_h)] \Big\} + \\
+ \;& \left. (d_{k+l,r,i} d_{k+l,h,j} + d_{k+l,r,j} d_{k+l,h,i})(v_r \otimes Av_h) \right\} + \\
+ \;& (\varepsilon_{h,j} f_{k+l,h,i} + g_{h,i})(v_h \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_h) + \\
+ \;& d_{k+l,h,i}[v_{s_j,k+l}(v_h \otimes \alpha_{t_j}) + v_{s_j,h}(v_k + l \otimes \alpha_{t_j})] + \\
+ \;& \left. d_{k+l,h,j}[v_{s_i,k+l}(v_h \otimes \alpha_{t_i}) + v_{s_i,h}(v_k + l \otimes \alpha_{t_i})] \right\}. \qquad (1.40)
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo as equações (1.29), (1.30), (1.31) e (1.40) em (1.28), conclui-se que a l-ésima coluna da matriz $G'_{(ij)}$ tem expressão dada por

$$
\begin{aligned}
& 3\gamma_{k+l}^{-5/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_j(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) - \\
- \quad & \gamma_{k+l}^{-3/2}\left[\vartheta^{j\prime}_{k+l} \otimes v'_{k+l}A' + v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_j}\right) + v'_{k+l} \otimes \vartheta^{j\prime}_{k+l}A'\right] e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) - \\
- \quad & \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i\left[\vartheta^{j\,\prime}_{k+l} \otimes v'_{k+l}A' + v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_j}\right) + v'_{k+l} \otimes \vartheta^{j\,\prime}_{k+l}A'\right] + \\
- \quad & \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_j\left[\vartheta^{i}_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}\right)v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^{i}_{k+l}\right] + \\
+ \quad & \gamma_{k+l}^{-1/2}\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n}\left\{\sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n}\left\{(\gamma_{k+l}-\gamma_h)^{-1}\left\{d_{k+l,r,j}f_{r,h,i}[(v_h \otimes Av_{k+l}) + \right.\right.\right.\\
+ \quad & (v_{k+l} \otimes Av_h)] + d_{h,r,j}[f_{k+l,h,i}(v_r \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_r) + \\
+ \quad & \left. f_{k+l,r,i}(v_h \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_h)]\right\} + \\
+ \quad & \left.(d_{k+l,r,i}d_{k+l,h,j} + d_{k+l,r,j}d_{k+l,h,i})(v_r \otimes Av_h)\right\} + \\
+ \quad & (\varepsilon_{h,j}f_{k+l,h,i} + g_{h,i})(v_h \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_h) + \\
+ \quad & d_{k+l,h,i}[v_{s_j,k+l}(v_h \otimes \alpha_{t_j}) + v_{s_j,h}(v_{k+l} \otimes \alpha_{t_j})] + \\
+ \quad & \left. d_{k+l,h,j}[v_{s_i,k+l}(v_h \otimes \alpha_{t_i}) + v_{s_i,h}(v_{k+l} \otimes \alpha_{t_i})]\right\}. \qquad (1.41)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, da equação (1.7), pode ser observado que $v'_{k+l} \otimes u'_{k+l}$ representa a l-ésima linha da matriz G e, como $GG' = I_{n-k}$, então, a matriz bloco $G'_{(ij)}(GG')^{-1}G$ é dada pela expressão:

$$
\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{n-k} \Bigg\{ 3\gamma_{k+l}^{-5/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')ej(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) - \\
- \;& \gamma_{k+l}^{-3/2}\left[\vartheta^j_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_j}\right) v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^j_{k+l}\right] e_i(v_{k+l} \otimes Av_{k+l}) - \\
- \;& \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')e_i \left[{\vartheta^j_{k+l}}' \otimes v'_{k+l}A' + v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_j}\right) + v'_{k+l} \otimes {\vartheta^j_{k+l}}'A'\right] + \\
- \;& \gamma_{k+l}^{-3/2}(v'_{k+l} \otimes v'_{k+l}A')ej\left[\vartheta^i_{k+l} \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_i}\right) v_{k+l} + v_{k+l} \otimes A\vartheta^i_{k+l}\right] + \\
+ \;& \gamma_{k+l}^{-1/2} \sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+l}}^{n} \Bigg\{ \sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+l}}^{n} \Bigg\{ (\gamma_{k+l} - \gamma_h)^{-1}\Big\{ d_{k+l,r,j} f_{r,h,i}[(v_h \otimes Av_{k+l}) + \\
+ \;& (v_{k+l} \otimes Av_h)] + d_{h,r,j}[f_{k+l,h,i}(v_r \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_r) + \\
+ \;& f_{k+l,r,i}(v_h \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_h)]\Big\} + \\
+ \;& (d_{k+l,r,i}d_{k+l,h,j} + d_{k+l,r,j}d_{k+l,h,i})(v_r \otimes Av_h)\Bigg\} + \\
+ \;& (\varepsilon_{h,j} f_{k+l,h,i} + g_{h,i})(v_h \otimes Av_{k+l} + v_{k+l} \otimes Av_h) + \\
+ \;& d_{k+l,h,i}[v_{s_j,k+l}(v_h \otimes \alpha_{t_j}) + v_{s_j,h}(v_k + l \otimes \alpha_{t_j})] + \\
+ \;& d_{k+l,h,j}[v_{s_i,k+l}(v_h \otimes \alpha_{t_i}) + v_{s_i,h}(v_k + l \otimes \alpha_{t_i})]\Bigg\}(v'_{k+l} \otimes u'_{k+l})\Bigg\}. \qquad (1.42)
\end{aligned}
$$

Das equações (1.23), (1.24), (1.27) e (1.42) obtém-se que a expressão geral do (i, j)-ésimo bloco da matriz L, na equação (1.11), é dada por:

$$\frac{1}{4}G'_{(i)}(GG')^{-1}G_{(j)} + \frac{1}{3}G'_{(ij)}(GG')^{-1}G$$

a partir da qual se pode tomar l_o como sendo o representante da o-ésima linha da matriz L, em que $o = 1, \ldots, p^2$ é dado por $o = (r_o - 1)p + (s_i - 1)m + t_i$, com $r_o = 1, \ldots, p$, $s_i = 1, \ldots, n$ e $t_i = 1, \ldots, m$. Aqui, i é o mesmo do (i, j)-ésimo bloco da matriz L. Agora, sendo $\bar{q}\bar{q}' \otimes \bar{q}\bar{q}'$ uma matriz de ordem $p^2 \times p^2$, cuja o-ésima coluna é denotada por c_o, pode-se concluir que o coeficiente do termo de ordem $O(t^{-1})$, na expansão de Taylor da estatística de teste, W, é:

$$v(\bar{q}) = trL(\bar{q}\bar{q}' \otimes \bar{q}\bar{q}') = \sum_{o=1}^{p^2} l_o c_o. \qquad (1.43)$$

1.3.3 Coeficientes do quantil corrigido para o teste do posto

Nesta seção, os coeficientes obtidos a partir das matrizes L e J, a_c, para $c = 0, 1, 2$ e b_c para $c = 0, 1, 2, 3$, dados, respectivamente, a partir das equações (1.14) e (1.15), são apresentados de maneira explícita como função dos vetores e valores singulares da matriz A. Tais coeficientes são usados, diretamente, no cálculo para a correção, até a ordem $O(t^{-1})$, do quantil da função de distribuição da estatística de Wald para testar o posto de A.

Com o intuito de escrever as expressões dos coeficientes acima em função dos elementos singulares de A, definindo $P_{G'} = G'(GG')^{-1}G$, das equações (1.8) e (1.7) obtém-se:

$$P_{G'} = \sum_{l=1}^{n-k} (v_{k+l}v'_{k+l} \otimes u_{k+l}u'_{k+l})$$

e, assim, fazendo $\bar{P}_{G'} = I_p - P_{G'} = (p_{ij})$, para $i, j = 1, 2, \ldots, p$ com $i = (s_i - 1)m + t_i$, $j = (s_j - 1)m + t_j$, $s_i, s_j = 1, 2, \ldots, n$ e $t_i, t_j = 1, \ldots, m$, tem-se que:

$$p_{ij} = \delta_{i,j} - \sum_{l=1}^{n-k} v_{s_i,k+l} v_{s_j,k+l} u_{t_i,k+l} u_{t_j,k+l},$$

em que $\delta_{i,j}$ representa a função delta de Kronecker. Portanto, note que $P = \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}$ é uma matriz de ordem $p^3 \times p^3$ a qual, para a contagem $i, j = 1, \ldots, p^3$ dados pelas fórmulas $i = (r_i - 1)p^2 + (s_i - 1)p + t_i$ e $j = (r_j - 1)p^2 + (s_j - 1)p + t_j$, com $r_i, r_j, s_i, s_j, t_i, t_j = 1, \ldots, p$, tem i-ésima linha dada pela expressão:

$$\begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix},$$

e sua j-ésima coluna dada por:

$$\begin{pmatrix} p_{1,r_j} \\ p_{2,r_j} \\ \vdots \\ p_{p,r_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,s_j} \\ p_{2,s_j} \\ \vdots \\ p_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,t_j} \\ p_{2,t_j} \\ \vdots \\ p_{p,t_j} \end{pmatrix},$$

de modo que se $\xi_{i,j}$ é o (i, j)-ésimo elemento desta matriz, então:

$$\xi_{i,j} = p_{r_i,r_j} p_{s_i,s_j} p_{t_i,t_j}.$$

Agora, frise-se que, para quaisquer índices naturais, m e n, K_{mn} e I_m representam, respectivamente, a matriz comutação de ordem $mn \times mn$ e a matriz identidade de ordem $m \times m$. Logo, sendo $H = I_{p^3} + K_{pp^2} + K_{p^2p}$ então, a matriz $T_1 = HP$ é tal que sua i-ésima linha tem a forma:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \\ + & \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{1.44}$$

Como a ordem dos termos não altera a soma, segue-se que essa linha será idêntica às linhas para as quais $i = (s_i - 1)p^2 + (t_i - 1)p + r_i$ e $i = (t_i - 1)p^2 + (r_i - 1)p + s_i$, com $i = 1, \ldots, p^3$ e $r_i, s_i, t_i = 1, \ldots, p$. Uma vez que a matriz $\bar{P}_{G'} = (p_{ij})$ tem ordem $p \times p$, então $vec(\bar{P}_{G'})$ é um vetor de ordem $p^2 \times 1$, de modo que, se $k = (i-1)p + j$, seu k-ésimo elemento é p_{ji}. Logo, pode-se verificar que $vec(\bar{P}_{G'})[vec(\bar{P}_{G'})]'$ é uma matriz de ordem $p^2 \times p^2$, tal que sua k-ésima linha é dada por $p_{ji}[vec(\bar{P}_{G'})]'$. Agora, sendo $\bar{P}_{G'} \otimes vec(\bar{P}_{G'})[vec(\bar{P}_{G'})]'$ uma matriz de ordem $p^3 \times p^3$, considerando a contagem $i = (r_i - 1)p^2 + (s_i - 1)p + t_i$, com $r_i, s_i, t_i = 1, \ldots, p$, sua i-ésima linha tem a expressão:

$$\begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes p_{t_i,s_i}[vec(\bar{P}_{G'})]'.$$

Então, a matriz $C = H\left\{\bar{P}_{G'} \otimes vec(\bar{P}_{G'})[vec(\bar{P}_{G'})]'\right\} = (c_{ij})$, de ordem $p^3 \times p^3$, é tal que sua i-ésima linha tem a expressão:

$$\begin{array}{cl} & \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes p_{t_i,s_i}[vec(\bar{P}_{G'})]' \\ + & \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes p_{r_i,t_i}[vec(\bar{P}_{G'})]' \\ + & \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes p_{s_i,r_i}[vec(\bar{P}_{G'})]' \end{array}$$

e seu elemento geral é:

$$c_{ij} = (p_{r_i,r_j}p_{t_i,s_i} + p_{s_i,r_j}p_{r_i,t_i} + p_{t_i,r_j}p_{s_i,r_i})p_{t_j,s_j}.$$

Assim, para cada $j = 1, \ldots, p^3$ fixo e $i = 1, \ldots, p^3$, esta é a expressão da j-ésima coluna, c_j, de C; ou seja

$$c_j = (p_{r_i,r_j}p_{t_i,s_i} + p_{s_i,r_j}p_{r_i,t_i} + p_{t_i,r_j}p_{s_i,r_i})p_{t_j,s_j}.$$

Desse modo, a matriz $T_2 = CH = (d_{ij})$ de ordem $p^3 \times p^3$ é tal que, fixado $j = 1, \ldots, p^3$ e fazendo $i = 1, \ldots, p^3$, a sua j-ésima coluna, d_j, é dada por:

$$\begin{aligned} d_j &= (p_{r_i,r_j}p_{t_i,s_i} + p_{s_i,r_j}p_{r_i,t_i} + p_{t_i,r_j}p_{s_i,r_i})p_{t_j,s_j} + \\ &+ (p_{r_i,s_j}p_{t_i,s_i} + p_{s_i,s_j}p_{r_i,t_i} + p_{t_i,s_j}p_{s_i,r_i})p_{r_j,t_j} + \\ &+ (p_{r_i,t_j}p_{t_i,s_i} + p_{s_i,t_j}p_{r_i,t_i} + p_{t_i,t_j}p_{s_i,r_i})p_{s_j,r_j}. \end{aligned}$$

A mesma expressão é válida para a i-ésima linha de T_2 só que, neste caso, fixou-se $i = 1, \ldots, p^3$ ao passo que $j = 1, \ldots, p^3$.

Uma vez que a matriz $\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}$ tem ordem $p^2 \times p^2$ com i-ésima linha, dada por:

$$\begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix},$$

então, a matriz $K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$ tem ordem $p^2 \times p^2$, com i-ésima linha da forma:

$$\begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix}.$$

E, ainda, a matriz $T_3 = \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$ tem ordem $p^3 \times p^3$ sendo que sua i-ésima linha tem a forma:

$$\begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a matriz $T_4 = K_{pp}\,(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) \otimes \bar{P}_{G'}$ tem ordem $p^3 \times p^3$ e i-ésima linha expressa por:

$$\left(\begin{array}{cccc} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{array}\right).$$

Agora, considerando $T_5 = K_{pp^2} T_3 K_{p^2 p}$, a qual tem ordem $p^3 \times p^3$, então a i-ésima linha de $K_{pp^2} T_3$ também tem a expressão:

$$\left(\begin{array}{cccc} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{array}\right)$$

e assim, T_5 possui i-ésima linha da forma

$$\left(\begin{array}{cccc} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{array}\right). \quad (1.45)$$

Logo, de (1.14) nota-se que:

$$B_0 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

de tal forma que, se $B_0 = (b_{ij}^{(0)})_{p^3 \times p^3}$ então, das expressões (1.44) e (1.45), pode-se escrever

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(0)} &= p_{r_i,r_j} p_{s_i,s_j} p_{t_i,t_j} + p_{s_i,r_j} p_{t_i,s_j} p_{r_i,t_j} + p_{t_i,r_j} p_{r_i,s_j} p_{s_i,t_j} + \\ &+ (p_{r_i,r_j} p_{t_i,s_i} + p_{s_i,r_j} p_{r_i,t_i} + p_{t_i,r_j} p_{s_i,r_i}) p_{t_j,s_j} + \\ &+ (p_{r_i,s_j} p_{t_i,s_i} + p_{s_i,s_j} p_{r_i,t_i} + p_{t_i,s_j} p_{s_i,r_i}) p_{r_j,t_j} + \\ &+ (p_{r_i,t_j} p_{t_i,s_i} + p_{s_i,t_j} p_{r_i,t_i} + p_{t_i,t_j} p_{s_i,r_i}) p_{s_j,r_j} + \\ &+ p_{r_i,r_j} p_{t_i,s_j} p_{s_i,t_j} + p_{s_i,r_j} p_{r_i,s_j} p_{t_i,t_j} + p_{t_i,r_j} p_{s_i,s_j} p_{r_i,t_j}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Agora, dado que

$$P_{G'} = G'(GG')^{-1}G = \sum_{l=1}^{n-k} (v_{k+l} v'_{k+l} \otimes u_{k+l} u'_{k+l}) = (q_{ij})$$

tem ordem $p \times p$, te-se que:

$$q_{ij} = \sum_{l=1}^{n-k} v_{s_i,k+l} v_{s_j,k+l} u_{t_i,k+l} u_{t_j,k+l}$$

para $i, j = 1, \ldots, p$, dados por $i = (s_i - 1)m + t_i$ e $j = (s_j - 1)m + t_j$, sendo que $s_i, s_j = 1, \ldots, n$ e $t_i, t_j = 1, \ldots, m$. Sendo assim, a matriz $P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}$, cuja ordem é $p^3 \times p^3$, possui i-ésima linha dada por:

$$\left(\begin{array}{cccc} q_{r_i,1} & q_{r_i,2} & \cdots & q_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{array}\right) \otimes \left(\begin{array}{cccc} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{array}\right),$$

em que $i = 1, \ldots, p^3$ é dado por $i = (r_i - 1)p^2 + (s_i - 1)p + t_i$ com $r_i, s_i, t_i = 1, \ldots, p$.

Como verificado antes, a matriz $H\,(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$ tem ordem $p^3 \times p^3$, suas linhas sendo somas de comutações das linhas de $P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}$; isto é, para a mesma contagem de i, acima,

$$\begin{array}{cl} & (\; q_{r_i,1} \;\; q_{r_i,2} \;\; \cdots \;\; q_{r_i,p} \;) \otimes (\; p_{s_i,1} \;\; p_{s_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{s_i,p} \;) \otimes (\; p_{t_i,1} \;\; p_{t_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{t_i,p} \;) \\ + & (\; q_{s_i,1} \;\; q_{s_i,2} \;\; \cdots \;\; q_{s_i,p} \;) \otimes (\; p_{t_i,1} \;\; p_{t_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{t_i,p} \;) \otimes (\; p_{r_i,1} \;\; p_{r_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{r_i,p} \;) \\ + & (\; q_{t_i,1} \;\; q_{t_i,2} \;\; \cdots \;\; q_{t_i,p} \;) \otimes (\; p_{r_i,1} \;\; p_{r_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{r_i,p} \;) \otimes (\; p_{s_i,1} \;\; p_{s_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{s_i,p} \;), \end{array}$$

é a i-ésima linha de $H\,(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$. Agora, como a ordem dos termos não altera a soma, pode-se concluir que esta mesma expressão também se verifica para as linhas tais que $i = (s_i-1)p^2 + (t_i-1)p + r_i$ e $i = (t_i-1)p^2 + (r_i-1)p + s_i$ com $r_i, s_i, t_i = 1, \ldots, p$. E ainda, a multiplicação à direita desta matriz por H gera uma nova matriz, a qual é obtida a partir de somas de comutações das colunas de $H\,(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$; logo, fixado $j = 1, \ldots, p^3$, dado por $j = (r_j-1)p^2 + (s_j-1)p + t_j$, com $r_j, s_j, t_j = 1, \ldots, p$, e fazendo $i = 1, \ldots, p^3$, tem-se que:

$$q_{r_i,r_j} p_{s_i,s_j} p_{t_i,t_j} + q_{s_i,r_j} p_{t_i,s_j} p_{r_i,t_j} + q_{t_i,r_j} p_{r_i,s_j} p_{s_i,t_j}$$

são os elementos da j-ésima coluna de $H\,(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$. Então, a matriz

$$T_1^1 = H\,(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})\,H$$

é caracterizada por ter:

$$\begin{array}{cl} & q_{r_i,r_j} p_{s_i,s_j} p_{t_i,t_j} + q_{s_i,r_j} p_{t_i,s_j} p_{r_i,t_j} + q_{t_i,r_j} p_{r_i,s_j} p_{s_i,t_j} + \\ + & q_{r_i,s_j} p_{s_i,t_j} p_{t_i,r_j} + q_{s_i,s_j} p_{t_i,t_j} p_{r_i,r_j} + q_{t_i,s_j} p_{r_i,t_j} p_{s_i,r_j} + \\ + & q_{r_i,t_j} p_{s_i,r_j} p_{t_i,s_j} + q_{s_i,t_j} p_{t_i,r_j} p_{r_i,s_j} + q_{t_i,t_j} p_{r_i,r_j} p_{s_i,s_j} \end{array} \tag{1.47}$$

como elementos da j-ésima coluna, para cada $j = 1, \ldots, p^3$.

Como a i-ésima linha de $vec\,(\bar{P}_{G'})\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]'$ é $p_{t_i,s_i}\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]'$, pode-se concluir que:

$$(\; q_{r_i,1} \;\; q_{r_i,2} \;\; \cdots \;\; q_{r_i,p} \;) \otimes p_{t_i,s_i}\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]'$$

é a i-ésima linha da matriz $P_{G'} \otimes vec\,(\bar{P}_{G'})\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]'$. Similarmente, para a mesma contagem, é fácil observar que a matriz $\bar{P}_{G'} \otimes vec\,(P_{G'})\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]'$ tem como i-ésima linha

$$(\; p_{r_i,1} \;\; p_{r_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{r_i,p} \;) \otimes q_{t_i,s_i}\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]'$$

sendo

$$(\; p_{r_i,1} \;\; p_{r_i,2} \;\; \cdots \;\; p_{r_i,p} \;) \otimes p_{t_i,s_i}\,[vec\,(P_{G'})]'$$

a i-ésima linha da matriz $\bar{P}_{G'} \otimes vec\,(\bar{P}_{G'})\,[vec\,(P_{G'})]'$. Logo, se $i = 1, \ldots, p^3$ é dado como acima, então,

$$\begin{array}{rcl} Q & = & P_{G'} \otimes vec\,(\bar{P}_{G'})\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]' + \bar{P}_{G'} \otimes vec\,(P_{G'})\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]' + \\ & + & \bar{P}_{G'} \otimes vec\,(\bar{P}_{G'})\,[vec\,(P_{G'})]' \end{array}$$

tem, como i-ésima linha:

$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{cccc} q_{r_i,1} & q_{r_i,2} & \cdots & q_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{t_i,s_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes q_{t_i,s_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{t_i,s_i}\left[vec\left(P_{G'}\right)\right]'. \end{array}$$

Então, pode-se verificar que a matriz HQ tem a i-ésima linha dada pela expressão:

$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{cccc} q_{r_i,1} & q_{r_i,2} & \cdots & q_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{t_i,s_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes q_{t_i,s_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{t_i,s_i}\left[vec\left(P_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} q_{s_i,1} & q_{s_i,2} & \cdots & q_{s_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{r_i,t_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{array}\right) \otimes q_{r_i,t_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{r_i,t_i}\left[vec\left(P_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} q_{t_i,1} & q_{t_i,2} & \cdots & q_{t_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{s_i,r_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{array}\right) \otimes q_{s_i,r_i}\left[vec\left(\bar{P}_{G'}\right)\right]' \\ + & \left(\begin{array}{cccc} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{array}\right) \otimes p_{s_i,r_i}\left[vec\left(P_{G'}\right)\right]' \end{array}$$

e, para cada j fixado, os elementos da sua j-ésima coluna são dados por:

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(0)} &= q_{r_i,r_j}p_{t_i,s_i}p_{t_j,s_j} + p_{r_i,r_j}q_{t_i,s_i}p_{t_j,s_j} + p_{r_i,r_j}p_{t_i,s_i}q_{t_j,s_j} + \\ &+ q_{s_i,r_j}p_{r_i,t_i}p_{t_j,s_j} + p_{s_i,r_j}q_{r_i,t_i}p_{t_j,s_j} + p_{s_i,r_j}p_{r_i,t_i}q_{t_j,s_j} + \\ &+ q_{t_i,r_j}p_{s_i,r_i}p_{t_j,s_j} + p_{t_i,r_j}q_{s_i,r_i}p_{t_j,s_j} + p_{t_i,r_j}p_{s_i,r_i}q_{t_j,s_j}, \end{aligned}$$

com $i = 1, \ldots, p^3$. Observe que $h_{ij}^{(0)}$ é definido de modo que $j = (r_j - 1)p^2 + (s_j - 1)p + t_j$. Agora, defina $h_{ij}^{(1)} = h_{ij}^{(0)}$ para $j = (s_j - 1)p^2 + (t_j - 1)p + r_j$ e $h_{ij}^{(2)} = h_{ij}^{(0)}$ para $j = (t_j - 1)p^2 + (r_j - 1)p + s_j$; isto é

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(1)} &= q_{r_i,s_j}p_{t_i,s_i}p_{r_j,t_j} + p_{r_i,s_j}q_{t_i,s_i}p_{r_j,t_j} + p_{r_i,s_j}p_{t_i,s_i}q_{r_j,t_j} + \\ &+ q_{s_i,s_j}p_{r_i,t_i}p_{r_j,t_j} + p_{s_i,s_j}q_{r_i,t_i}p_{r_j,t_j} + p_{s_i,s_j}p_{r_i,t_i}q_{r_j,t_j} + \\ &+ q_{t_i,s_j}p_{s_i,r_i}p_{r_j,t_j} + p_{t_i,s_j}q_{s_i,r_i}p_{r_j,t_j} + p_{t_i,s_j}p_{s_i,r_i}q_{r_j,t_j} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h_{ij}^{(2)} &= q_{r_i,t_j}p_{t_i,s_i}p_{s_j,r_j} + p_{r_i,t_j}q_{t_i,s_i}p_{s_j,r_j} + p_{r_i,t_j}p_{t_i,s_i}q_{s_j,r_j} + \\ &+ q_{s_i,t_j}p_{r_i,t_i}p_{s_j,r_j} + p_{s_i,t_j}q_{r_i,t_i}p_{s_j,r_j} + p_{s_i,t_j}p_{r_i,t_i}q_{s_j,r_j} + \\ &+ q_{t_i,t_j}p_{s_i,r_i}p_{s_j,r_j} + p_{t_i,t_j}q_{s_i,r_i}p_{s_j,r_j} + p_{t_i,t_j}p_{s_i,r_i}q_{s_j,r_j}. \end{aligned}$$

Com isso, para cada $j = 1, \ldots, p^3$ fixado, fazendo $i = 1, \ldots, p^3$, conclui-se que o i-ésimo elemento da j-ésima coluna da matriz $T_2^1 = HQH$ é dada por:

$$h_{ij} = h_{ij}^{(0)} + h_{ij}^{(1)} + h_{ij}^{(2)}. \tag{1.48}$$

Neste caso, fixando $i = 1, \ldots, p^3$ e fazendo $j = 1, \ldots, p^3$, tem-se que h_{ij} é o j-ésimo elemento da i-ésima linha de T_2^1.

Mais uma vez, como feito antes, considerando que $i = 1, \ldots, p^2$, a i-ésima linha da matriz $K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$ tem a expressão:

$$\begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix},$$

em que $i = (s_i - 1)p + t_i$ e $s_i, t_i = 1, \ldots, p$. Logo, se $i = 1, \ldots, p^3$ é dado por $i = (r_i - 1)p^2 + (s_i - 1)p + t_i$ com $r_i, s_i, t_i = 1, \ldots, p$ então, cada uma das matrizes $T_3^1 = P_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$, $T_4^1 = \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$ e $T_5^1 = \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'})$ tem respectiva i-ésima linha dada por:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} q_{r_i,1} & q_{r_i,2} & \cdots & q_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{t_i,1} & q_{t_i,2} & \cdots & q_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{s_i,1} & q_{s_i,2} & \cdots & q_{s_i,p} \end{pmatrix}. \end{array} \quad (1.49)$$

Além disso, considerando as matrizes

$$T_6^1 = K_{pp}(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) \otimes \bar{P}_{G'}, \quad T_7^1 = K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'}) \otimes \bar{P}_{G'} \quad \text{e} \quad T_8^1 = K_{pp}(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) \otimes P_{G'},$$

observa-se que, suas i-ésimas linhas são, respectivamente:

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} q_{s_i,1} & q_{s_i,2} & \cdots & q_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{r_i,1} & q_{r_i,2} & \cdots & q_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{t_i,1} & q_{t_i,2} & \cdots & q_{t_i,p} \end{pmatrix}, \end{array} \quad (1.50)$$

em que i segue a mesma contagem de antes. Uma vez que a multiplicação de K_{pp^2}, à esquerda de uma matriz, produz uma comutação em suas linhas, se $T = T_3^1 + T_4^1 + T_5^1$; então $K_{pp^2}T$ tem, como i-ésima linha

$$\begin{array}{rl} & \begin{pmatrix} q_{s_i,1} & q_{s_i,2} & \cdots & q_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} + \\ + & \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{r_i,1} & q_{r_i,2} & \cdots & q_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} + \\ + & \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{t_i,1} & q_{t_i,2} & \cdots & q_{t_i,p} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Agora, acontecendo o mesmo com a multiplicação de K_{p^2p} à direita, tem-se que:

$$\begin{array}{rl} & \begin{pmatrix} q_{t_i,1} & q_{t_i,2} & \cdots & q_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} + \\ + & \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{s_i,1} & q_{s_i,2} & \cdots & q_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{r_i,1} & p_{r_i,2} & \cdots & p_{r_i,p} \end{pmatrix} + \\ + & \begin{pmatrix} p_{t_i,1} & p_{t_i,2} & \cdots & p_{t_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{s_i,1} & p_{s_i,2} & \cdots & p_{s_i,p} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{r_i,1} & q_{r_i,2} & \cdots & q_{r_i,p} \end{pmatrix}. \end{array} \quad (1.51)$$

é a expressão da i-ésima linha da matriz $T_9^1 = K_{pp^2} T K_{p^2p}$. Com isso, sendo:

$$B_1 = T_1^1 + T_2^1 + T_3^1 + T_4^1 + T_5^1 + T_6^1 + T_7^1 + T_8^1 + T_9^1,$$

de modo que, se $B_1 = (b_{ij}^{(1)})_{p^3 \times p^3}$ então, das expressões (1.47) a (1.51),

$$
\begin{aligned}
b_{ij}^{(1)} &= q_{r_i,r_j} p_{s_i,s_j} p_{t_i,t_j} + q_{s_i,r_j} p_{t_i,s_j} p_{r_i,t_j} + q_{t_i,r_j} p_{r_i,s_j} p_{s_i,t_j} + q_{r_i,s_j} p_{s_i,t_j} p_{t_i,r_j} + \\
&+ q_{s_i,s_j} p_{t_i,t_j} p_{r_i,r_j} + q_{t_i,s_j} p_{r_i,t_j} p_{s_i,r_j} + q_{r_i,t_j} p_{s_i,r_j} p_{t_i,s_j} + q_{s_i,t_j} p_{t_i,r_j} p_{r_i,s_j} + \\
&+ q_{t_i,t_j} p_{r_i,r_j} p_{s_i,s_j} + q_{r_i,r_j} p_{t_i,s_i} p_{t_j,s_j} + p_{r_i,r_j} q_{t_i,s_i} p_{t_j,s_j} + p_{r_i,r_j} p_{t_i,s_i} q_{t_j,s_j} + \\
&+ q_{s_i,r_j} p_{r_i,t_i} p_{t_j,s_j} + p_{s_i,r_j} q_{r_i,t_i} p_{t_j,s_j} + p_{s_i,r_j} p_{r_i,t_i} q_{t_j,s_j} + q_{t_i,r_j} p_{s_i,r_i} p_{t_j,s_j} + \\
&+ p_{t_i,r_j} q_{s_i,r_i} p_{t_j,s_j} + p_{t_i,r_j} p_{s_i,r_i} q_{t_j,s_j} + q_{r_i,s_j} p_{t_i,s_i} p_{r_j,t_j} + p_{r_i,s_j} q_{t_i,s_i} p_{r_j,t_j} + \\
&+ p_{r_i,s_j} p_{t_i,s_i} q_{r_j,t_j} + q_{s_i,s_j} p_{r_i,t_i} p_{r_j,t_j} + p_{s_i,s_j} q_{r_i,t_i} p_{r_j,t_j} + p_{s_i,s_j} p_{r_i,t_i} q_{r_j,t_j} + \\
&+ q_{t_i,s_j} p_{s_i,r_i} p_{r_j,t_j} + p_{t_i,s_j} q_{s_i,r_i} p_{r_j,t_j} + p_{t_i,s_j} p_{s_i,r_i} q_{r_j,t_j} + q_{r_i,t_j} p_{t_i,s_i} p_{s_j,r_j} + \\
&+ p_{r_i,t_j} q_{t_i,s_i} p_{s_j,r_j} + p_{r_i,t_j} p_{t_i,s_i} q_{s_j,r_j} + q_{s_i,t_j} p_{r_i,t_i} p_{s_j,r_j} + p_{s_i,t_j} q_{r_i,t_i} p_{s_j,r_j} + \\
&+ p_{s_i,t_j} p_{r_i,t_i} q_{s_j,r_j} + q_{t_i,t_j} p_{s_i,r_i} p_{s_j,r_j} + p_{t_i,t_j} q_{s_i,r_i} p_{s_j,r_j} + p_{t_i,t_j} p_{s_i,r_i} q_{s_j,r_j} + \\
&+ q_{r_i,r_j} p_{t_i,s_j} p_{s_i,t_j} + p_{r_i,r_j} q_{t_i,s_j} p_{s_i,t_j} + p_{r_i,r_j} p_{t_i,s_j} q_{s_i,t_j} + q_{s_i,r_j} p_{r_i,s_j} p_{t_i,t_j} + \\
&+ p_{s_i,r_j} q_{r_i,s_j} p_{t_i,t_j} + p_{s_i,r_j} p_{r_i,s_j} q_{t_i,t_j} + q_{t_i,r_j} p_{s_i,s_j} p_{r_i,t_j} + p_{t_i,r_j} q_{s_i,s_j} p_{r_i,t_j} + \\
&+ p_{t_i,r_j} p_{s_i,s_j} q_{r_i,t_j}.
\end{aligned}
\tag{1.52}
$$

Fazendo uso do procedimento de cálculo acima, encontram-se expressões para linhas e colunas das matrizes, definidas por:

$$
\begin{aligned}
T_1^2 &= H\,(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'} \otimes P_{G'})\,H, \\
T_2^2 &= H\left[\bar{P}_{G'} \otimes vec\,(P_{G'})\,[vec\,(P_{G'})]' + P_{G'} \otimes vec\,(\bar{P}_{G'})\,[vec\,(P_{G'})]' + \right. \\
&+ \left. P_{G'} \otimes vec\,(P_{G'})\,[vec\,(\bar{P}_{G'})]'\right] H, \\
T_3^2 &= \bar{P}_{G'} \otimes K_{pp}\,(P_{G'} \otimes P_{G'}), \\
T_4^2 &= P_{G'} \otimes K_{pp}\,(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'}), \\
T_5^2 &= P_{G'} \otimes K_{pp}\,(P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}), \\
T_6^2 &= K_{pp}\,(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'}) \otimes P_{G'}, \\
T_7^2 &= K_{pp}\,(P_{G'} \otimes P_{G'}) \otimes P_{G'}, \\
T_8^2 &= K_{pp}\,(P_{G'} \otimes P_{G'}) \otimes \bar{P}_{G'}, \\
T_9^2 &= K_{pp^2}(T_3^2 + T_4^2 + T_5^2)K_{p^2p}, \\
T_1^3 &= H\,(P_{G'} \otimes P_{G'} \otimes P_{G'}), \\
T_2^3 &= H\left[P_{G'} \otimes vec\,(P_{G'})\,[vec\,(P_{G'})]'\right] H, \\
T_3^3 &= P_{G'} \otimes K_{pp}\,(P_{G'} \otimes P_{G'}) + K_{pp}\,(P_{G'} \otimes P_{G'}) \otimes P_{G'} \\
T_4^3 &= K_{pp^2} T_3^3 K_{p^2p}.
\end{aligned}
$$

Com isso, recordando das equações em (1.14) que $B_2 = \sum_{m=1}^{9} T_m^2$ e $B_3 = \sum_{m=1}^{4} T_m^3$ então, se $B_2 = (b_{ij}^{(2)})_{p^3 \times p^3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{(2)} &= p_{r_i,r_j} q_{s_i,s_j} q_{t_i,t_j} + p_{s_i,r_j} q_{t_i,s_j} q_{r_i,t_j} + p_{t_i,r_j} q_{r_i,s_j} q_{s_i,t_j} + p_{r_i,s_j} q_{s_i,t_j} q_{t_i,r_j} + \\
&+ p_{s_i,s_j} q_{t_i,t_j} q_{r_i,r_j} + p_{t_i,s_j} q_{r_i,t_j} q_{s_i,r_j} + p_{r_i,t_j} q_{s_i,r_j} q_{t_i,s_j} + p_{s_i,t_j} q_{t_i,r_j} q_{r_i,s_j} + \\
&+ p_{t_i,t_j} q_{r_i,r_j} q_{s_i,s_j} + p_{r_i,r_j} q_{t_i,s_i} q_{t_j,s_j} + q_{r_i,r_j} p_{t_i,s_i} q_{t_j,s_j} + q_{r_i,r_j} q_{t_i,s_i} p_{t_j,s_j} + \\
&+ p_{s_i,r_j} q_{r_i,t_i} q_{t_j,s_j} + q_{s_i,r_j} p_{r_i,t_i} q_{t_j,s_j} + q_{s_i,r_j} q_{r_i,t_i} p_{t_j,s_j} + p_{t_i,r_j} q_{s_i,r_i} q_{t_j,s_j} + \\
&+ q_{t_i,r_j} p_{s_i,r_i} q_{t_j,s_j} + q_{t_i,r_j} q_{s_i,r_i} p_{t_j,s_j} + p_{r_i,s_j} q_{t_i,s_i} q_{r_j,t_j} + q_{r_i,s_j} p_{t_i,s_i} q_{r_j,t_j} + \\
&+ q_{r_i,s_j} q_{t_i,s_i} p_{r_j,t_j} + p_{s_i,s_j} q_{r_i,t_i} q_{r_j,t_j} + q_{s_i,s_j} p_{r_i,t_i} q_{r_j,t_j} + q_{s_i,s_j} q_{r_i,t_i} p_{r_j,t_j} + \\
&+ p_{t_i,s_j} q_{s_i,r_i} q_{r_j,t_j} + q_{t_i,s_j} p_{s_i,r_i} q_{r_j,t_j} + q_{t_i,s_j} q_{s_i,r_i} p_{r_j,t_j} + p_{r_i,t_j} q_{t_i,s_i} q_{s_j,r_j} + \\
&+ q_{r_i,t_j} p_{t_i,s_i} q_{s_j,r_j} + q_{r_i,t_j} q_{t_i,s_i} p_{s_j,r_j} + p_{s_i,t_j} q_{r_i,t_i} q_{s_j,r_j} + q_{s_i,t_j} p_{r_i,t_i} q_{s_j,r_j} + \\
&+ q_{s_i,t_j} q_{r_i,t_i} p_{s_j,r_j} + p_{t_i,t_j} q_{s_i,r_i} q_{s_j,r_j} + q_{t_i,t_j} p_{s_i,r_i} q_{s_j,r_j} + q_{t_i,t_j} q_{s_i,r_i} p_{s_j,r_j} + \\
&+ p_{r_i,r_j} q_{t_i,s_j} q_{s_i,t_j} + q_{r_i,r_j} p_{t_i,s_j} q_{s_i,t_j} + q_{r_i,r_j} q_{t_i,s_j} p_{s_i,t_j} + p_{s_i,r_j} q_{r_i,s_j} q_{t_i,t_j} + \\
&+ q_{s_i,r_j} p_{r_i,s_j} q_{t_i,t_j} + q_{s_i,r_j} q_{r_i,s_j} p_{t_i,t_j} + p_{t_i,r_j} q_{s_i,s_j} q_{r_i,t_j} + q_{t_i,r_j} p_{s_i,s_j} q_{r_i,t_j} + \\
&+ q_{t_i,r_j} q_{s_i,s_j} p_{r_i,t_j}
\end{aligned} \tag{1.53}$$

e, se $B_3 = (b_{ij}^{(3)})_{p^3 \times p^3}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
b_{ij}^{(3)} &= q_{r_i,r_j} q_{s_i,s_j} q_{t_i,t_j} + q_{s_i,r_j} q_{t_i,s_j} q_{r_i,t_j} + q_{t_i,r_j} q_{r_i,s_j} q_{s_i,t_j} + \\
&+ (q_{r_i,r_j} q_{t_i,s_i} + q_{s_i,r_j} q_{r_i,t_i} + q_{t_i,r_j} q_{s_i,r_i}) q_{t_j,s_j} + \\
&+ (q_{r_i,s_j} q_{t_i,s_i} + q_{s_i,s_j} q_{r_i,t_i} + q_{t_i,s_j} q_{s_i,r_i}) q_{r_j,t_j} + \\
&+ (q_{r_i,t_j} q_{t_i,s_i} + q_{s_i,t_j} q_{r_i,t_i} + q_{t_i,t_j} q_{s_i,r_i}) q_{s_j,r_j} + \\
&+ q_{r_i,r_j} q_{t_i,s_j} q_{s_i,t_j} + q_{s_i,r_j} q_{r_i,s_j} q_{t_i,t_j} + q_{t_i,r_j} q_{s_i,s_j} q_{r_i,t_j}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Assim, observando que os coeficientes associados à matriz J são definidos por:

$$b_c = [vec(J)]' B_c [vec(J)]$$

para $c = 1, 2, 3$, com o exposto acima e a equação (1.22), pode-se concluir que:

$$b_c = \sum_{i=1}^{p^3} \sum_{i=1}^{p^3} \zeta_i \zeta_j b_{ij}^{(c)}, \tag{1.55}$$

sendo, em cada um dos casos, $i = (r_i - 1)p^2 + (s_i - 1)p + t_i$ e $j = (r_j - 1)p^2 + (s_j - 1)p + t_j$ com $r_i, r_j, s_i, s_j, t_i, t_j = 1, \ldots, p$.

Observe-se, agora, ao cálculo para a obtenção dos coeficientes $a_c = tr(A_c)$, para $c = 0, 1, 2$, em termos dos elementos encontrados na decomposição em valores singulares da matriz A, sendo para cada c, A_c dado por uma das equações em (1.15). Para isto, consideram-se as matrizes:

$$\begin{aligned}
M_0 &= (I + K_{pp})(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + vec(\bar{P}_{G'})[vec(\bar{P}_{G'})]', \\
M_1 &= (I + K_{pp})\left[(\bar{P}_{G'} \otimes P_{G'} + P_{G'} \otimes \bar{P}_{G'}) + vec(\bar{P}_{G'})[vec(P_{G'})]'\right] + \\
&+ (I + K_{pp}) vec(P_{G'})[vec(\bar{P}_{G'})]', \\
M_2 &= (I + K_{pp})(P_{G'} \otimes P_{G'}) + vec(P_{G'})[vec(P_{G'})]';
\end{aligned} \tag{1.56}$$

todas de ordem $p^2 \times p^2$. No que segue, considerar-se-ão, a menos que se diga o contrário, $i, j = 1, \ldots, p^2$ com $i = (s_i - 1)p + t_i$ e $j = (s_j - 1)p + t_j$, sendo $s_i, s_j, t_i, t_j = 1, \ldots, p$. Logo, da mesma forma que foi feito para obter os coeficientes associados à matriz J, dados pelas equações (1.55), pode-se verificar que a j-ésima coluna de $vec(\bar{P}_{G'})[vec(\bar{P}_{G'})]'$, é dada por $p_{t_j,s_j} vec(\bar{P}_{G'})$. Além disso, a matriz $(I + K_{pp})(\bar{P}_{G'} \otimes \bar{P}_{G'})$ tem, como j-ésima coluna:

$$\begin{pmatrix} p_{1,s_j} \\ p_{2,s_j} \\ \vdots \\ p_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,t_j} \\ p_{2,t_j} \\ \vdots \\ p_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{1,t_j} \\ p_{2,t_j} \\ \vdots \\ p_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,s_j} \\ p_{2,s_j} \\ \vdots \\ p_{p,s_j} \end{pmatrix},$$

o que implica dizer-se que a j-ésima coluna de M_0 é dada por:

$$\begin{pmatrix} p_{1,s_j} \\ p_{2,s_j} \\ \vdots \\ p_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,t_j} \\ p_{2,t_j} \\ \vdots \\ p_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{1,t_j} \\ p_{2,t_j} \\ \vdots \\ p_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,s_j} \\ p_{2,s_j} \\ \vdots \\ p_{p,s_j} \end{pmatrix} + p_{t_j,s_j} vec(\bar{P}_{G'}). \tag{1.57}$$

E, ainda, as expressões que representam as j-ésimas colunas das matrizes M_1 e de M_2 são, respectivamente,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} p_{1,s_j} \\ p_{2,s_j} \\ \vdots \\ p_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{1,t_j} \\ q_{2,t_j} \\ \vdots \\ q_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{1,t_j} \\ q_{2,t_j} \\ \vdots \\ q_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,s_j} \\ p_{2,s_j} \\ \vdots \\ p_{p,s_j} \end{pmatrix} + \\ + &\begin{pmatrix} q_{1,s_j} \\ q_{2,s_j} \\ \vdots \\ q_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} p_{1,t_j} \\ p_{2,t_j} \\ \vdots \\ p_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{1,t_j} \\ p_{2,t_j} \\ \vdots \\ p_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{1,s_j} \\ q_{2,s_j} \\ \vdots \\ q_{p,s_j} \end{pmatrix} + \\ + \;& q_{t_j,s_j} vec(\bar{P}_{G'}) + p_{t_j,s_j} vec(P_{G'}) + q_{t_j,s_j} vec\left(\bar{P}'_{G'}\right) + p_{t_j,s_j} vec\left(P'_{G'}\right) \end{aligned} \tag{1.58}$$

e

$$\begin{pmatrix} q_{1,s_j} \\ q_{2,s_j} \\ \vdots \\ q_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{1,t_j} \\ q_{2,t_j} \\ \vdots \\ q_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{1,t_j} \\ q_{2,t_j} \\ \vdots \\ q_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} q_{1,s_j} \\ q_{2,s_j} \\ \vdots \\ q_{p,s_j} \end{pmatrix} + q_{t_j,s_j} vec(P_{G'}). \tag{1.59}$$

Com isso, para cada $c = 0, 1, 2$, tem-se que $A_c = LM_c$. Agora, seja $o = 1, \ldots, p^2$ dado por $o = (r_o - 1)p + (s_i - 1)m + t_i$ com $r_o = 1, \ldots, p$, $s_i = 1, \ldots, n$ e $t_i = 1, \ldots, m$. Então, sendo a o-ésima linha da matriz L dada como na especificação da expressão (1.43), a qual é denotada por l_o e, m_o^c a o-ésima coluna da matriz M_c, conclui-se que:

$$a_c = \sum_{o=1}^{p^2} l_o m_o^c \quad c = 0, 1, 2. \tag{1.60}$$

1.4 Forma geral da expansão de Edgeworth para a função de distribuição da estatística de Wald

Nesta seção, parte da contribuição apresentada nesta tese é dada pela apresentação da expressão geral do quantil corrigido, para a estatística de Wald, na equação (1.72). Além disso, também são contribuições ao presente autor, os cálculos das derivadas parciais de primeira e segunda ordem dos elementos da matriz inversa que compõe a estatística de Wald, sendo estes apresentados, respectivamente, nas Subseções 1.4.1 e 1.4.2. Supõe-se, agora, que a matriz de covariâncias, Σ, na expressão (1.1), não é a identidade, mas conhecida. Nesta seção, apresentou-se a expansão de Taylor, até $O(t^{-1})$, para a estatística de Wald, dada por (1.3), sendo levada em consideração a transformação normalizante $\tilde{q} = \Sigma^{-1/2}\bar{q}$, com $\bar{q} = \sqrt{t}vec(\hat{A} - A)$.

Σ é a matriz de covariância assintótica de $\bar{q}$ e $\Sigma^{1/2}$ é a sua matriz raiz quadrada. Denotou-se $\Sigma^{1/2} = (\sigma^{ij})$ com inversa $\Sigma^{-1/2} = (\sigma_{ij})$, ambas de ordem $p \times p$. Nesse caso, fazendo uso da convenção de somatório de Einstein a qual pode ser encontrada em Barndorff-Nielsen & Cox (1990, pg. 136), observe-se que:

$$\sigma_{ir}\sigma^{rj} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad i = j \\ 0, & \text{se} \quad i \neq j \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \sigma^{rj}\sigma_{js} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad r = s \\ 0, & \text{se} \quad r \neq s \end{cases} .$$

Agora, se $\hat{g}_i = g_i(\hat{\beta})$ é a i-ésima função componente da aplicação g em $\hat{\beta}$, sua expansão de Taylor, em torno de β, é dada por

$$\sqrt{t}\hat{g}_i = g_{ij}\bar{q}^j + \frac{1}{2\sqrt{t}}g_{ijk}\bar{q}^j\bar{q}^k + \frac{1}{6t}g_{ijkl}\bar{q}^j\bar{q}^k\bar{q}^l + O_p(t^{-3/2}).$$

Então,

$$\begin{aligned} \sqrt{t}\hat{g}_i &= g_{is}\sigma^{st}\sigma_{tj}\bar{q}^j + \frac{1}{2\sqrt{t}}g_{irs}\sigma^{rt}\sigma_{tj}\bar{q}^j\sigma^{su}\sigma_{uk}\bar{q}^k + \\ &+ \frac{1}{6t}g_{irst}\sigma^{ru}\sigma_{uj}\bar{q}^j\sigma^{sv}\sigma_{vk}\bar{q}^k\sigma^{tx}\sigma_{xl}\bar{q}^l + O_p(t^{-3/2}) \end{aligned}$$

de modo que, tomando as representações

$$\tilde{g}_{ij} = g_{is}\sigma^{sj}, \quad \tilde{g}_{ijk} = g_{irs}\sigma^{rj}\sigma^{sk} \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{ijkl} = g_{irst}\sigma^{rj}\sigma^{sk}\sigma^{tl}, \tag{1.61}$$

tem-se que:

$$\sqrt{t}\hat{g}_i = \tilde{g}_{ij}\tilde{q}^j + \frac{1}{2\sqrt{t}}\tilde{g}_{ijk}\tilde{q}^j\tilde{q}^k + \frac{1}{6t}\tilde{g}_{ijkl}\tilde{q}^j\tilde{q}^k\tilde{q}^l + O_p(t^{-3/2}). \tag{1.62}$$

De maneira análoga, se se tomar a matriz $\hat{\Psi}^{-1} = (\hat{G}\hat{\Sigma}\hat{G}')^{-1} = (\hat{\psi}^{ia})$, cuja ordem é $(n-k) \times (n-k)$, então a expansão de Taylor, para cada $\hat{\psi}^{ia}$, é dada por:

$$\hat{\psi}^{ia} = \psi^{ia} + \frac{1}{\sqrt{t}}\psi^{ia}_m\bar{q}^m + \frac{1}{2t}\psi^{ia}_{mn}\bar{q}^m\bar{q}^n + O_p(t^{-3/2}),$$

a qual pode ser reescrita como:

$$\hat{\psi}^{ia} = \psi^{ia} + \frac{1}{\sqrt{t}}\tilde{\psi}^{ia}_m\tilde{q}^m + \frac{1}{2t}\tilde{\psi}^{ia}_{mn}\tilde{q}^m\tilde{q}^n + O_p(t^{-3/2}), \tag{1.63}$$

em que
$$\tilde{\psi}^{ia}_{m} = \psi^{ia}_{r}\sigma^{rm} \quad \text{e} \quad \tilde{\psi}^{ia}_{mn} = \psi^{ia}_{rs}\sigma^{rm}\sigma^{sn},$$
observando que $\tilde{q}^{j} = \sigma_{jr}\tilde{q}^{r}$. Portanto, substituindo (1.62) e (1.63) em (1.3) e tomando:

$$u(\tilde{q}) = \left[vec\left(\widetilde{J}\right)\right]'(\tilde{q}\otimes\tilde{q}\otimes\tilde{q})$$

e
$$v(\tilde{q}) = tr[\widetilde{L}(\tilde{q}\tilde{q}'\otimes\tilde{q}\tilde{q}')],$$

tem-se que:

$$W \;=\; \tilde{q}'\Sigma^{1/2}G'(G\Sigma G')^{-1}G\Sigma^{1/2}\tilde{q} + \frac{1}{\sqrt{t}}u(\tilde{q}) + \frac{1}{t}v(\tilde{q}) + O_p(t^{-3/2}).$$

Neste caso, o vetor $vec\left(\widetilde{J}\right)$ é tal que, se $e = (j-1)p^2 + (b-1)p + m$, em que $b, j, m = 1, \ldots, p$, seu e-ésimo elemento é dado por:

$$\tilde{g}_{ij}\tilde{\psi}^{ia}_{m}\tilde{g}_{ab} + \tilde{g}_{ijm}\psi^{ia}\tilde{g}_{ab} \tag{1.64}$$

e, se $s = (j-1)p + b$ e $t = (m-1)p + n$, o (s,t)-ésimo elemento da matriz $\widetilde{L}$ tem expressão

$$\frac{1}{2}\tilde{g}_{ij}\tilde{\psi}^{ia}_{mn}\tilde{g}_{ab} + \tilde{g}_{ijm}\tilde{\psi}^{ia}_{n}\tilde{g}_{ab} + \frac{1}{4}\tilde{g}_{ijm}\psi^{ia}\tilde{g}_{abn} + \frac{1}{3}\tilde{g}_{ijmn}\psi^{ia}\tilde{g}_{ab}, \tag{1.65}$$

de modo que $vec\left(\widetilde{J}\right)$ é um vetor de ordem $p^3 \times 1$ e $\widetilde{L}$ é uma matriz de ordem $p^2 \times p^2$.

Seguindo com esse procedimento de cálculo, visando a obter uma expansão de Edgeworth até a ordem $O(t^{-1})$ para a função da distribuição nula de W, Phillips & Park (1988) conclui-se que, se $F(w)$ é tal função, sendo f_r e F_r as respectivas funções de densidade e de distribuição da distribuição χ^2_r, esta tem a seguinte forma:

$$F(w) = F_r(w) + t^{-1}\sum_{j=0}^{3} c_j F_{r+2j}(w) - t^{-1}\sum_{j=0}^{3}\psi_{j,r}w^j f_r(w) + o(t^{-1}), \tag{1.66}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\psi_{0,r} &= \tilde{\phi}_1, \\
\psi_{1,r} &= \frac{\tilde{\phi}_2}{r}, \\
\psi_{2,r} &= \frac{\tilde{\phi}_3}{r(r+2)}, \\
\psi_{3,r} &= \frac{\tilde{\phi}_4}{r(r+2)(r+4)},
\end{aligned} \tag{1.67}$$

com $r = n - k$ e

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1 &= e_0 - \frac{\tilde{b}_1}{4}, \\
\tilde{\phi}_2 &= e_1 + \frac{\tilde{b}_1}{4} - \frac{\tilde{b}_2}{4}, \\
\tilde{\phi}_3 &= e_2 + \frac{\tilde{b}_2}{4} - \frac{\tilde{b}_3}{4}, \\
\tilde{\phi}_4 &= e_3 + \frac{\tilde{b}_3}{4},
\end{aligned} \tag{1.68}$$

com

$$\begin{aligned}
e_j &= \tilde{a}_j + d_j, \quad j = 0,1,2,3, \\
\tilde{a}_j &= \begin{cases} tr(\widetilde{A}_j) + tr(F_j D_j), & \text{se} \quad j = 0,1,2 \\ 0, & \text{se} \quad j = 3 \end{cases}, \\
\tilde{b}_j &= \left[vec\left(\widetilde{J}\right)\right]' \widetilde{B}_j vec\left(\widetilde{J}\right), \quad j = 1,2,3, \\
d_j &= \left[vec\left(\widetilde{J}\right)\right]' \widetilde{B}_j f_3, \quad j = 0,1,2,3, \\
c_0 &= f_0 + tr(F_2 \bar{P}_{\widetilde{G}'}) + tr(F_4 D_0) + tr(F_6 \widetilde{B}_0), \\
c_1 &= tr(F_2 \bar{P}_{\widetilde{G}'}) + tr(F_4 D_1) + tr(F_6 \widetilde{B}_1), \\
c_2 &= tr(F_4 D_2) + tr(F_6 \widetilde{B}_2), \\
c_3 &= tr(F_6 \widetilde{B}_3),
\end{aligned} \tag{1.69}$$

em que o vetor f_0 e as matrizes F_2, F_4 e F_6 são obtidas a partir da expansão de Edgeworth da densidade de $\tilde{q}$. Além disso, considerando, agora, que

$$P_{\widetilde{G}'} = \widetilde{G}'(\widetilde{G}\widetilde{G}')^{-1}\widetilde{G} = \Sigma^{1/2} G'(G\Sigma G')^{-1} G \Sigma^{1/2}, \tag{1.70}$$

as matrizes $\widetilde{A}_c$, para $c = 0,1,2$, e $\widetilde{B}_c$, para $c = 0,1,2,3$, têm as mesmas formas que as matrizes A_c e B_c, definidas pelas equações (1.14) e (1.15), sendo usadas as matrizes $P_{\widetilde{G}'}$ e $\widetilde{L}$ em lugar de $P_{G'}$ e L. E, ainda:

$$\begin{aligned}
D_0 &= (I + K_{pp})(\bar{P}_{\widetilde{G}'} \otimes \bar{P}_{\widetilde{G}'}) + vec\left(\bar{P}_{\widetilde{G}'}\right) \left[vec\left(\bar{P}_{\widetilde{G}'}\right)\right]', \\
D_1 &= (I + K_{pp})(\bar{P}_{\widetilde{G}'} \otimes P_{\widetilde{G}'} + P_{\widetilde{G}'} \otimes \bar{P}_{\widetilde{G}'}) + \\
&+ vec\left(\bar{P}_{\widetilde{G}'}\right) \left[vec\left(P_{\widetilde{G}'}\right)\right]' + vec\left(P_{\widetilde{G}'}\right) \left[vec\left(\bar{P}_{\widetilde{G}'}\right)\right]', \\
D_2 &= (I + K_{pp})(P_{\widetilde{G}'} \otimes P_{\widetilde{G}'}) + vec\left(P_{\widetilde{G}'}\right) \left[vec\left(P_{\widetilde{G}'}\right)\right]'.
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Pelo exposto acima, pode-se verificar que, se f_r e F_r representam, respectivamente, as funções de densidade e de distribuição de uma qui-quadrado com r graus de liberdade, após o uso das fórmulas de recorrência

$$F_{r+2}(w) = F_r(w) - \frac{2w}{r} f_r(w)$$

e

$$f_{r+2}(w) = \frac{w}{r} f_r(w),$$

as quais podem ser vistas em Cordeiro(1999, pg. 139), a expansão de Edgeworth da distribuição da estatística de teste, W, sob a hipótese nula, pode ser escrita da forma

$$F(w) = F_r(w) - t^{-1}C(w)f_r(w) + t^{-1}\sum_{j=0}^{3} c_j F_r(w) + o(t^{-1}),$$

em que

$$\begin{aligned} C(w) &= \sum_{j=0}^{3} \psi_{j,r} w^j + \sum_{i=1}^{3} C_i w^i \\ &= \psi_{0,r} + \sum_{j=1}^{3} (\psi_{j,r} + C_j) w^j \end{aligned}$$

sendo que, para cada $i = 1, 2, 3$, tem-se que

$$C_i = 2\mathbb{E}[(\chi_r^2)^i]^{-1} \sum_{j=i}^{3} c_j$$

com

$$\mathbb{E}[(\chi_r^2)^i] = 2^i \frac{\Gamma\left(\frac{r}{2}+i\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Para o caso sob análise nesta tese, sob a hipótese nula de que o verdadeiro posto da matriz A é k, considerar-se que $r = n - k$. Agora, como se pode observar em Barndorff-Nielsen & Cox (1990, pg. 117) e Cordeiro (1999, pg. 67), entre outros, as expansões de Cornish-Fisher permitem obter, a partir da expansão de Edgeworth da função de distribuição de W, uma aproximação de seu quantil pelo quantil da distribuição χ_r^2. Desta forma, se w_α é o quantil da χ_r^2, ao nível α, e w_α^* é o quantil de $F(w)$, ao mesmo nível, pode-se notar que:

$$F(w_\alpha^*) = F_r(w_\alpha^*) - t^{-1}C(w_\alpha^*)f_r(w_\alpha^*) + t^{-1}\sum_{j=0}^{3} c_j F_r(w_\alpha^*) + o(t^{-1}) = \alpha,$$

a qual pode ser reescrita da forma:

$$F(w_\alpha^*) = F_r(w_\alpha^*)\left(1 + t^{-1}\sum_{j=0}^{3} c_j\right) - t^{-1}C(w_\alpha^*)f_r(w_\alpha^*) + o(t^{-1}) = \alpha.$$

Logo,

$$\frac{1}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3} c_j} F(w_\alpha^*) = F_r(w_\alpha^*) - \frac{t^{-1}C(w_\alpha^*)}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3} c_j} f_r(w_\alpha^*) + o(t^{-1}) = \frac{\alpha}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3} c_j}.$$

Agora, por expansão de Taylor em torno de w_α^*, tem-se que:

$$F_r\left(w_\alpha^* - \frac{t^{-1}C(w_\alpha^*)}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3}c_j}\right) = F_r(w_\alpha^*) - \frac{t^{-1}C(w_\alpha^*)}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3}c_j}f_r(w_\alpha^*) + o(t^{-1}).$$

Então, até a ordem $o(t^{-1})$,

$$F_r\left(w_\alpha^* - \frac{t^{-1}C(w_\alpha^*)}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3}c_j}\right) = \frac{\alpha}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3}c_j}$$

e, tomando,

$$\gamma = \frac{\alpha}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3}c_j}$$

segue-se que, a esse nível,

$$F_r(w_\gamma) = \gamma.$$

Então, até a ordem $o(t^{-1})$,

$$w_\alpha^* - \frac{t^{-1}C(w_\alpha^*)}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3}c_j} = w_\gamma.$$

Portanto, como $C(w)$ é uma função analítica, o uso da expansão de Taylor nos permite escrever

$$C(w_\alpha^*) = C(w_\alpha) + O(t^{-1}),$$

de modo que, até a ordem $O(t^{-1})$, o quantil corrigido da distribuição $F(w)$ é dado por

$$w_\alpha^* = w_\gamma + \frac{t^{-1}C(w_\alpha)}{1+t^{-1}\sum_{j=0}^{3}c_j}. \tag{1.72}$$

1.4.1 Coeficiente do termo de ordem $O(t^{-1/2})$ na expansão de Taylor da estatística de teste

Por simplicidade de notação, suponha-se que A é a estimativa da verdadeira matriz A_0, A_0 desconhecida. Nesta seção far-se-á uso das expressões em (1.61) e (1.64) para obter equações que possam representar os elementos do vetor $vec\left(\widetilde{J}\right)$ em termos dos autoelementos da matriz $A'A$, a qual, supõe-se que seja de posto completo com probabilidade um, verificando que, neste caso, A é uma matriz de ordem $m \times n$ com posto coluna completo com probabilidade um.

Observe que, substituindo (1.61) em (1.64), obtem-se que, se $\tilde{\zeta}_e$ representa o e-ésimo elemento de $vec\left(\widetilde{J}\right)$, então

$$\tilde{\zeta}_e = g_{ir}\sigma^{rj}\psi_s^{ia}\sigma^{sm}g_{at}\sigma^{tb} + g_{irs}\sigma^{rj}\sigma^{sm}\psi^{ia}g_{at}\sigma^{tb}, \tag{1.73}$$

sendo $e = p^2(j-1)+p(b-1)+m$, com $b, j, m = 1,\dots,p$. Agora, da definição da aplicação g, como $g_i = \lambda_{k+i}$ é obtido a partir do $(k+i)$-ésimo autovalor da matriz simétrica $A'A$, isto é, $\lambda_{k+i} = \gamma_{k+i}^{1/2}$, segue, das equações (1.4) e (1.5) que, para cada $r,s = 1,\dots,p$ e $i = 1,\dots,n-k$,

$$g_{ir} = \frac{\partial g_i}{\partial \beta_r} = \lambda_{k+i}^{-1}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_r = (v'_{k+i}\otimes u'_{k+i})e_r.$$

Então,

$$g_{irs} = \frac{\partial^2 g_i}{\partial \beta_r \partial \beta_s} = \frac{\partial g_{ir}}{\partial \beta_s} = \frac{\partial}{\partial \beta_s}\left[\lambda_{k+i}^{-1}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')\right] e_r$$

e

$$g_{irst} = \frac{\partial^3 g_i}{\partial \beta_r \partial \beta_s \partial \beta_t} = \frac{\partial g_{irs}}{\partial \beta_t} = \frac{\partial}{\partial \beta_t}\left\{\frac{\partial}{\partial \beta_s}\left[\lambda_{k+i}^{-1}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')\right]\right\} e_r,$$

observe-se que e_r é o r-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^p$. A partir disto, pode ser notado que os elementos g_{ir}, g_{irs} e g_{irst} são, respectivamente, o r-ésimo elemento da i-ésima linha das matrizes G, em (1.7), $G_{(s)}$, em (1.21) e $G_{(st)}$, em (1.41). Portanto, suas expressões são determinadas, respectivamente, por

$$g_{ir} = (v'_{k+i}\otimes u'_{k+i})e_r \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned} g_{irs} &= -\gamma_{k+i}^{-3/2}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_s(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_r + \\ &+ \gamma_{k+i}^{-1/2}({\vartheta^{s}_{k+i}}'\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes {\vartheta^{s}_{k+i}}'A' + v'_{k+i}\otimes v_{s_s,k+i}\alpha'_{t_s})e_r. \end{aligned} \tag{1.75}$$

e

$$\begin{aligned} g_{irst} &= 3\gamma_{k+i}^{-5/2}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_t(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_s(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_r - \\ &- \gamma_{k+i}^{-3/2}\left[{\vartheta^{t}}'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_t}\right) + v'_{k+i}\otimes {\vartheta^{t}}'_{k+i}A'\right] e_s(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_r - \\ &- \gamma_{k+i}^{-3/2}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_s\left[{\vartheta^{t}}'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_t}\right) + v'_{k+i}\otimes {\vartheta^{t}}'_{k+i}A'\right] e_r + \\ &- \gamma_{k+i}^{-3/2}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_t\left[{\vartheta^{s}}'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_s}\right) + v'_{k+i}\otimes {\vartheta^{s}}'_{k+i}A'\right] e_r + \\ &+ \gamma_{k+i}^{-1/2}\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+i}}^{n}\left\{\sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+i}}^{n}\left\{(\gamma_{k+i}-\gamma_h)^{-1}\left\{d_{k+i,r,t}f_{r,h,s}[(v'_h\otimes v'_{k+i}A') + \right.\right.\right. \\ &+ (v'_{k+i}\otimes v'_hA')] + d_{h,r,t}[f_{k+i,h,s}(v'_r\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_rA') + \\ &+ \left. f_{k+i,r,s}(v'_h\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_hA')]\right\} + \\ &+ \left.(d_{k+i,r,s}d_{k+i,h,t} + d_{k+i,r,t}d_{k+i,h,s})(v'_r\otimes v'_hA')\right\} + \\ &+ (\varepsilon_{h,t}f_{k+i,h,s} + g_{h,s})(v'_h\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_hA') + \\ &+ d_{k+i,h,s}[v_{s_t,k+i}(v'_h\otimes \alpha'_{t_t}) + v_{s_t,h}(v'_{k+i}\otimes \alpha'_{t_t})] + \\ &+ \left. d_{k+i,h,t}[v_{s_s,k+i}(v'_h\otimes \alpha'_{t_s}) + v_{s_s,h}(v'_{k+i}\otimes \alpha'_{t_s})]\right\} e_r. \end{aligned} \tag{1.76}$$

No que segue, a menos que seja dito o contrário, suponha-se que a matriz de covariâncias Σ seja conhecida. O caso em que essa matriz é desconhecida pode ser generalizado, facilmente, com o uso de cálculos diferenciais ainda mais extensos, no entanto, este não é o nosso objetivo nesta tese.

Agora, consider-se a matriz $\Psi^{-1} = (G\Sigma G')^{-1} = (\psi^{ia})$, a qual tem ordem $r \times r$, com $r = n - k$. Note-se que, após sucessivas aplicações da regra da cadeia, obtém-se que

$$\frac{\partial vec\left(\Psi^{-1}\right)}{\partial \beta_m} = \frac{\partial vec\left(\Psi^{-1}\right)}{\partial\left[vec\left(\Psi\right)\right]'}\frac{\partial vec(\Psi)}{\partial\left[vec\left(\widetilde{G}\right)\right]'}\frac{\partial vec\left(\widetilde{G}\right)}{\partial \beta_m}, \tag{1.77}$$

levando em consideração que $\widetilde{G} = G\Sigma^{1/2}$. Assim, como pode ser visto em Magnus & Neudecker (1999, pp. 182 e 184),

$$\frac{\partial vec\left(\Psi^{-1}\right)}{\partial[vec(\Psi)]'} = -\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1},$$

$$\frac{\partial vec(\Psi)}{\partial\left[vec\left(\widetilde{G}\right)\right]'} = 2N_r(\widetilde{G} \otimes I_r)$$

e

$$\frac{\partial vec\left(\widetilde{G}\right)}{\partial \beta_m} = \frac{\partial vec\left(G\Sigma^{1/2}\right)}{\partial \beta_m} = (\Sigma^{1/2} \otimes I_r)vec\left(G_{(m)}\right),$$

sendo $G_{(m)} = \partial G/\partial \beta_m$ é tal que sua i-ésima linha tem expressão dada por (1.21), ou seja,

$$\begin{aligned} &- \gamma_{k+i}^{-3/2}(v'_{k+i} \otimes v'_{k+i}A')e_m(v'_{k+i} \otimes v'_{k+i}A') + \\ &+ \gamma_{k+i}^{-1/2}\left(\vartheta^{m\prime}{}_{k+i} \otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i} \otimes \vartheta^{m\prime}{}_{k+i}A' + v'_{k+i} \otimes v'_{k+i}\frac{\partial A'}{\partial \beta_m}\right)\end{aligned}$$

a qual, a partir da definição de ϑ^m_{k+l}, dada em (1.20), pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} &- \gamma_{k+i}^{-3/2}v_{s_m,k+i}u_{t_m,k+i}(v'_{k+i} \otimes v'_{k+i}A') + \\ &+ \gamma_{k+i}^{-1/2}\left\{\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+i}}^{n} c_{k+i,h,m}[\lambda_{k+i}(v'_h \otimes u'_{k+i}) + \lambda_h(v'_{k+i} \otimes u_h)'] + v'_{k+i} \otimes v_{s_m,k+i}\alpha'_{t_m}\right\},\end{aligned}$$

sendo que $m = 1, \ldots, p$ é dado por $m = (s_m - 1)m + t_m$, com $s_m = 1, \ldots, n$ e $t_m = 1, \ldots, m$. Agora, note que $vec\left(G_{(m)}\right)$ é um vetor de ordem $rp \times 1$ de modo que seu u-ésimo elemento é dado pela expressão:

$$\begin{aligned} g_u(m) &= -\gamma_{k+i}^{-3/2}v_{s_m,k+i}u_{t_m,k+i}v_{r_u,k+i}u_{s_u,k+i} + \\ &+ \gamma_{k+i}^{-1/2}\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+t_u}}^{n} c_{k+t_u,h,m}(\lambda_{k+t_u}v_{r_u,h}u_{s_u,k+t_u} + \lambda_h v_{r_u,k+t_u}u_{s_u,h}) + \\ &+ \gamma_{k+i}^{-1/2}v_{r_u,k+t_u}v_{s_m,k+t_u}\delta_{s_u,t_m} \end{aligned} \tag{1.78}$$

sendo que $u = (r_u - 1)mr + (s_u)r + t_u$, com $t_u = 1, \ldots, r$, $s_u = 1, \ldots, m$ e $r_u = 1, \ldots, n$. E, ainda, recorde-se de (1.7) que a matriz G tem ordem $r \times p$ e sua i-ésima linha é representada por

$$\gamma_{k+i}^{-1/2}(v'_{k+i} \otimes v'_{k+i}A').$$

Logo, sendo $\Sigma = (w^{ij})_{p \times p}$ a matriz de covariâncias, pode-se concluir que $\underset{\sim}{G} = G\Sigma$ tem ordem $r \times p$, seu (ij)-ésimo elemento sendo

$$\tilde{g}_{ij} = \sum_{r=1}^{p} v_{s_r,k+i} u_{t_r,k+i} w^{rj},$$

com $r = (s_r - 1)m + t_r$, sendo que $s_r = 1, \ldots, n$ e $t_r = 1, \ldots, m$. Portanto, a matriz $2N_r(\underset{\sim}{G} \otimes I_r)$ tem ordem $r^2 \times rp$ e é tal que sua j-ésima coluna é representada por

$$\begin{pmatrix} \delta_{1,u_j} \\ \delta_{2,u_j} \\ \vdots \\ \delta_{r,u_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{g}_{1,t_j} \\ \tilde{g}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{r,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{g}_{1,t_j} \\ \tilde{g}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{g}_{r,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \delta_{1,u_j} \\ \delta_{2,u_j} \\ \vdots \\ \delta_{r,u_j} \end{pmatrix},$$

em que $j = (t_j - 1)r + u_j$, com $u_j = 1, \ldots, r$ e $t_j = 1, \ldots, p$.

Agora, como $\Psi^{-1} = (\psi^{ia})_{r \times r}$, tem-se que $\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1}$ é uma matriz de ordem $r^2 \times r^2$, cuja i-ésima linha é dada por

$$\begin{pmatrix} \psi^{s_i,1} & \psi^{s_i,2} & \cdots & \psi^{s_i,r} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi^{t_i,1} & \psi^{t_i,2} & \cdots & \psi^{t_i,r} \end{pmatrix},$$

para $i = (s_i - 1)r + t_i$, com $s_i, t_i = 1, \ldots, r$. Com isso, pode-se observar que a matriz

$$\left(\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1}\right) 2Nr(\underset{\sim}{G} \otimes I_r)$$

tem ordem $r^2 \times rp$ com (ij)-ésimo elemento

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^{r^2} \psi^{s_i,s_k} \psi^{t_i,t_k} (\delta_{s_k,u_j} \tilde{g}_{t_k,t_j} + \tilde{g}_{s_k,t_j} \delta_{t_k,u_j}), \tag{1.79}$$

em que $k = (s_k - 1)r + t_k$ para $s_k, t_k = 1, \ldots, r$. Com isso, a partir de (1.77) obtém-se o vetor

$$\frac{\partial vec\left(\Psi^{-1}\right)}{\partial \beta_m} = -\left(\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1}\right) 2N_r(\underset{\sim}{G} \otimes I_r) vec\left(G_{(m)}\right), \tag{1.80}$$

de modo que, de (1.78) e (1.79), pode-se concluir que seu l-ésimo elemento tem a expressão:

$$\psi_m^{ia} = -\sum_{j=1}^{rp} x_{ij} g_j(m) \tag{1.81}$$

com $l = (a-1)r + i$ para $a, i = 1, \ldots, r$.

A partir da expressão definida da equação (1.63) e das equações (1.74) e (1.75), conclui-se que o e-ésimo elemento do vetor $vec\left(\tilde{J}\right)$, dado por (1.64), fica totalmente determinado como função dos autoelementos da matriz A.

1.4.2 Coeficiente do termo de ordem $O(t^{-1})$ na expansão de Taylor da estatística de teste

Mais uma vez, ao se fazer uso da regra da cadeia, a partir de (1.80), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 vec\left(\Psi^{-1}\right)}{\partial\beta_m\partial\beta_n} &= -\left(\frac{\partial\Psi^{-1}}{\partial\beta_n}\otimes\Psi^{-1}+\Psi^{-1}\otimes\frac{\partial\Psi^{-1}}{\partial\beta_n}\right)2N_r(\underset{\sim}{G}\otimes I_r)vec\left(G_{(m)}\right)- \\
&- \left(\Psi^{-1}\otimes\Psi^{-1}\right)2N_r\left[\left(\frac{\partial\underset{\sim}{G}}{\partial\beta_n}\right)\otimes I_r\right]vec\left(G_{(m)}\right)- \\
&- \left(\Psi^{-1}\otimes\Psi^{-1}\right)2N_r\left(\underset{\sim}{G}\otimes I_r\right)vec\left(G_{(mn)}\right). \qquad (1.82)
\end{aligned}$$

Neste caso, pelo que foi feito um pouco antes, $\partial\Psi^{-1}/\partial\beta_n=\Psi^{-1}_{(n)}=\left(\psi_n^{ia}\right)$. Assim, a matriz $\Psi^{-1}_{(n)}\otimes\Psi^{-1}+\Psi^{-1}\otimes\Psi^{-1}_{(n)}$ tem, como i-ésima linha:

$$\begin{aligned}
&\left(\ \psi_n^{s_i,1}\quad \psi_n^{s_i,2}\quad \cdots\quad \psi_n^{s_i,r}\ \right)\otimes\left(\ \psi^{t_i,1}\quad \psi^{t_i,2}\quad \cdots\quad \psi^{t_i,r}\ \right)+ \\
+\ &\left(\ \psi^{s_i,1}\quad \psi^{s_i,2}\quad \cdots\quad \psi^{s_i,r}\ \right)\otimes\left(\ \psi_n^{t_i,1}\quad \psi_n^{t_i,2}\quad \cdots\quad \psi_n^{t_i,r}\ \right),
\end{aligned}$$

com $i=(s_i-1)r+t_i$ sendo que $s_i,t_i=1,\dots,r$. Portanto, se se considerar:

$$\left(\Psi^{-1}_{(n)}\otimes\Psi^{-1}+\Psi^{-1}\otimes\Psi^{-1}_{(n)}\right)2N_r(\underset{\sim}{G}\otimes I_r)=(y_{ij})_{r^2\times rp},$$

então, com um procedimento análogo àquele, usado para obter (1.79), pode-se escrever:

$$y_{ij}=\sum_{k=1}^{rp}\left(\psi_n^{s_i,s_k}\psi^{t_i,t_k}+\psi^{s_i,s_k}\psi_n^{t_i,t_k}\right)\left(\delta_{s_k,u_j}\tilde{g}_{t_k,t_j}+\tilde{g}_{s_k,t_j}\delta_{t_k,u_j}\right), \qquad (1.83)$$

sendo $i=(s_i-1)r+t_i$, $j=(t_j-1)r+u_j$ e $k=(s_k-1)r+t_k$, com $s_i,t_i,u_j=1,\dots,r$ e $t_j,s_k=1,\dots,p$. Logo, o primeiro termo de (1.82) é um vetor de ordem $r^2\times 1$, sendo que o l-ésimo elemento tem expressão

$$-\sum_{j=1}^{rp}y_{lj}g_j(m). \qquad (1.84)$$

Para obter uma expressão para a matriz no segundo termo de (1.82), deve-se recordar que $G_{(n)}$ tem i-ésima linha dada por:

$$\begin{aligned}
-\ &\gamma_{k+i}^{-3/2}v_{s_n,k+i}u_{t_n,k+i}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')+ \\
+\ &\gamma_{k+i}^{-1/2}\left\{\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+i}}^{n}c_{k+i,h,n}[\lambda_{k+i}(v'_h\otimes u'_{k+i})+\lambda_h(v'_{k+i}\otimes u_h)']+v'_{k+i}\otimes v_{s_n,k+i}\alpha'_{t_n}\right\},
\end{aligned}$$

em que $n = 1, \dots, p$ é dado por $n = (s_n - 1)m + t_n$, com $s_n = 1, \dots, n$ e $t_n = 1, \dots, m$. Assim, se f_{ij} denota o (i, j)-ésimo elemento de $G_{(n)}$, tem-se que

$$\begin{aligned} f_{ij} &= -\gamma_{k+i}^{-1} v_{s_n,k+i} u_{t_n,k+i} v_{s_j,k+i} u_{t_j,k+i} + \\ &+ \sum_{\substack{h=1, \\ h \neq k+i}}^{n} c_{k+i,h,n} (v_{s_j,h} u_{t_j,k+i} + \lambda_{k+i}^{-1} \lambda_h v_{s_j,k+i} u_{t_j,h}) + v_{s_j,k+i} v_{s_n,k+i} \delta_{t_j,t_n}. \end{aligned}$$

A partir disto, como se tem suposto que a matriz Σ é conhecida, tem-se que, se $\underset{\sim}{G}_{(n)} = G_{(n)} \Sigma = (\tilde{f}_{ij})_{r \times p}$, então:

$$\tilde{f}_{ij} = \sum_{s=1}^{p} f_{is} w^{sj}$$

e, como feito antes, a matriz $2N_r(\underset{\sim}{G}_{(n)} \otimes I_r)$ tem como j-ésima coluna

$$\begin{pmatrix} \delta_{1,u_j} \\ \delta_{2,u_j} \\ \vdots \\ \delta_{r,u_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{f}_{1,t_j} \\ \tilde{f}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{r,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}_{1,t_j} \\ \tilde{f}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{f}_{r,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \delta_{1,u_j} \\ \delta_{2,u_j} \\ \vdots \\ \delta_{r,u_j} \end{pmatrix},$$

sendo que $j = (t_j - 1)r + u_j$ com $u_j = 1, \dots, r$ e $t_j = 1, \dots, p$. Logo, se $\left(\Psi^{-1} \otimes \Psi^{-1}\right) 2N_r(\underset{\sim}{G}_{(n)} \otimes I_r) = (z_{ij})_{r^2 \times rp}$, então:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{r^2} \psi^{s_i,s_k} \psi^{t_i,t_k} (\delta_{s_k,u_j} \tilde{f}_{t_k,t_j} + \tilde{f}_{s_k,t_j} \delta_{t_k,u_j}),$$

em que $k = (s_k - 1)r + t_k$, com $s_k, t_k = 1, \dots, r$ e, o segundo termo de (1.82) é um vetor de ordem $r^2 \times 1$, cujo l-ésimo elemento tem a forma

$$-\sum_{j=1}^{rp} z_{lj} g_j(m). \tag{1.85}$$

Agora, para o último termo de (1.82), recorde-se que a i-ésima linha da matriz $G_{(mn)}$

tem a expressão:

$$
\begin{aligned}
& 3\gamma_{k+i}^{-5/2}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_n(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_m(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A') - \\
- \;& \gamma_{k+i}^{-3/2}\left[\vartheta^{t'}{}_{k+i}\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_n}\right) + v'_{k+i}\otimes \vartheta^{n'}{}_{k+i}A'\right] e_m(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A') - \\
- \;& \gamma_{k+i}^{-3/2}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_m\left[\vartheta^{n'}{}_{k+i}\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_n}\right) + v'_{k+i}\otimes \vartheta^{n'}{}_{k+i}A'\right] + \\
- \;& \gamma_{k+i}^{-3/2}(v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}A')e_n\left[\vartheta^{m'}{}_{k+i}\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_{k+i}\left(\frac{\partial A'}{\partial \beta_m}\right) + v'_{k+i}\otimes \vartheta^{m'}{}_{k+i}A'\right] + \\
+ \;& \gamma_{k+i}^{-1/2}\sum_{\substack{h=1,\\ h\neq k+i}}^{n}\left\{\sum_{\substack{r=1,\\ r\neq k+i}}^{n}\left\{(\gamma_{k+i}-\gamma_h)^{-1}\left\{d_{k+i,r,n}f_{r,h,m}[(v'_h\otimes v'_{k+i}A') + \right.\right.\right. \\
+ \;& (v'_{k+i}\otimes v'_hA')] + d_{h,r,n}[f_{k+i,h,m}(v'_r\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_rA') + \\
+ \;& \left. f_{k+i,r,m}(v'_h\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_hA')]\right\} + \\
+ \;& \left.(d_{k+i,r,m}d_{k+i,h,n} + d_{k+i,r,n}d_{k+i,h,m})(v'_r\otimes v'_hA')\right\} + \\
+ \;& (\varepsilon_{h,n}f_{k+i,h,m} + g_{h,m})(v'_h\otimes v'_{k+i}A' + v'_{k+i}\otimes v'_hA') + \\
+ \;& d_{k+i,h,m}[v_{s_n,k+i}(v'_h\otimes \alpha'_{t_n}) + v_{s_n,h}(v'_{k+i}\otimes \alpha'_{t_n})] + \\
+ \;& \left. d_{k+i,h,n}[v_{s_m,k+i}(v'_h\otimes \alpha'_{t_m}) + v_{s_m,h}(v'_{k+i}\otimes \alpha'_{t_m})]\right\}.
\end{aligned}
$$

Portanto, se $u = (s_u - 1)(n-k) + t_u$ para $t_u = 1,\ldots,n-k$ e $s_u = 1,\ldots,p$, sendo o u-ésimo elemento do vetor $vec\left(G_{(mn)}\right)$ representado por $f_u(m,n)$, então este tem expressão obtida a partir do produto da t_u-ésima linha de $G_{(mn)}$ pelo s_u-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^p$. Com isso, conclui-se, a partir da equação (1.79), que, se $l = 1,\ldots,r^2$, o l-ésimo elemento do vetor no terceiro termo de (1.82) tem a expressão:

$$-\sum_{u=1}^{rp} x_{lu} f_u(m,n). \tag{1.86}$$

Desta forma, substituindo (1.84), (1.85) e (1.86) em (1.82), conclui-se que $\Psi^{-1}_{(mn)} = (\psi^{ia}_{mn})_{r\times r}$ é tal que

$$\psi^{ia}_{mn} = -\sum_{j=1}^{rp}[(y_{lj}+z_{lj})g_j(m) + x_{lj}f_j(m,n)], \tag{1.87}$$

de modo que $l = (a-1)r + i$ com $a,i = 1,\ldots,r$, observando que $r = n-k$.

1.4.3 Forma geral dos coeficientes do quantil corrigido para o teste do posto

As formas das matrizes $\widetilde{B}_c$, com $c = 0,1,2,3$, que são usadas para a determinação do quantil corrigido, dadas nas equações (1.69), são idênticas àquelas dadas por (1.14), diferindo apenas com $P_{\widetilde{G}'}$ no lugar de $P_{G'}$. Nesta seção fizeram-se as devidas modificações e obtiveram-se, de forma um pouco mais simplificada, as expressões dos coeficientes, $\tilde{b}_c$, relacionados à matriz $\widetilde{J}$, definida de forma tal que os elementos do vetor $vec\left(\widetilde{J}\right)$ são dados pela expressão (1.64).

Assim, sendo $\tilde{b}_c = \left[vec\left(\widetilde{J}\right)\right]' \widetilde{B}_c vec\left(\widetilde{J}\right)$, observe-se como se apresentam as colunas da matriz $\widetilde{B}_c$, para cada $c = 0,1,2,3$. Para isto, verificando que $\widetilde{G} = G\Sigma^{1/2}$ e considerando a matriz $\bar{P}_{\widetilde{G}'} = I - P_{\widetilde{G}'}$, a qual tem ordem $p \times p$ e ij-ésimo elemento representado por $\tilde{p}_{ij}$, tem-se:

$$P_{\widetilde{G}'} = \widetilde{G}'(\widetilde{G}\widetilde{G}')^{-1}\widetilde{G} = \Sigma^{1/2}G'(G\Sigma G')^{-1}G\Sigma^{1/2}.$$

Desta forma, seguindo o procedimento de cálculo análogo àquele usado para obter a equação (1.46), se considerar-se que $\widetilde{B}_0 = (\tilde{b}_{ij}^{(0)})_{p^3 \times p^3}$, então pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ij}^{(0)} &= \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,t_j} + \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_j} + \tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,t_j} + \\ &+ (\tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_i} + \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,t_i} + \tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,r_i})\tilde{p}_{t_j,s_j} + \\ &+ (\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,s_i} + \tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_i} + \tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,r_i})\tilde{p}_{r_j,t_j} + \\ &+ (\tilde{p}_{r_i,t_j}\tilde{p}_{t_i,s_i} + \tilde{p}_{s_i,t_j}\tilde{p}_{r_i,t_i} + \tilde{p}_{t_i,t_j}\tilde{p}_{s_i,r_i})\tilde{p}_{s_j,r_j} + \\ &+ \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,t_j} + \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,t_j} + \tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_j}, \end{aligned} \tag{1.88}$$

em que também é considerado que $i = (s_i - 1)m + t_i$ e $j = (s_j - 1)m + t_j$, com $s_i, s_j = 1, \ldots, n$ e $t_i, t_j = 1, \ldots, m$.

Agora, fazendo $P_{\widetilde{G}'} = (\tilde{q}_{ij})_{p \times p}$, se se considerar que $\widetilde{B}_1 = (\tilde{b}_{ij}^{(1)})_{p^3 \times p^3}$, assim como foi obtida a equação (1.52), pode-se concluir que:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_{ij}^{(1)} &= \tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,t_j} + \tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_j} + \tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,t_j} + \tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,t_j}\tilde{p}_{t_i,r_j} + \\ &+ \tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,t_j}\tilde{p}_{r_i,r_j} + \tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_j}\tilde{p}_{s_i,r_j} + \tilde{q}_{r_i,t_j}\tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_j} + \tilde{q}_{s_i,t_j}\tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,s_j} + \\ &+ \tilde{q}_{t_i,t_j}\tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,s_j} + \tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{t_j,s_j} + \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{t_j,s_j} + \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{t_j,s_j} + \\ &+ \tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{t_j,s_j} + \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{t_j,s_j} + \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{t_j,s_j} + \tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{t_j,s_j} + \\ &+ \tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{t_j,s_j} + \tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{t_j,s_j} + \tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{r_j,t_j} + \tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{r_j,t_j} + \\ &+ \tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{r_j,t_j} + \tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{r_j,t_j} + \tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{r_j,t_j} + \tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{r_j,t_j} + \\ &+ \tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{r_j,t_j} + \tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{r_j,t_j} + \tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{r_j,t_j} + \tilde{q}_{r_i,t_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{s_j,r_j} + \\ &+ \tilde{p}_{r_i,t_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{s_j,r_j} + \tilde{p}_{r_i,t_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{s_j,r_j} + \tilde{q}_{s_i,t_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{s_j,r_j} + \tilde{p}_{s_i,t_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{s_j,r_j} + \\ &+ \tilde{p}_{s_i,t_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{s_j,r_j} + \tilde{q}_{t_i,t_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{s_j,r_j} + \tilde{p}_{t_i,t_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{s_j,r_j} + \tilde{p}_{t_i,t_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{s_j,r_j} + \\ &+ \tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,t_j} + \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,t_j} + \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,t_j} + \tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,t_j} + \\ &+ \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,t_j} + \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,t_j} + \tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_j} + \tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_j} + \\ &+ \tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_j}. \end{aligned} \tag{1.89}$$

E ainda, tomando $\widetilde{B}_2 = (\tilde{b}_{ij}^{(2)})_{p^3 \times p^3}$ e $\widetilde{B}_3 = (\tilde{b}_{ij}^{(3)})_{p^3 \times p^3}$, de maneira análoga ao que foi feito para encontrar as equações (1.53) e (1.54), chega-se às seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{ij}^{(2)} &= \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,t_j}+\tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_j}+\tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,t_j}+\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,t_j}\tilde{q}_{t_i,r_j}+\\
&+ \tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,t_j}\tilde{q}_{r_i,r_j}+\tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_j}\tilde{q}_{s_i,r_j}+\tilde{p}_{r_i,t_j}\tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_j}+\tilde{p}_{s_i,t_j}\tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,s_j}+\\
&+ \tilde{p}_{t_i,t_j}\tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,s_j}+\tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{t_j,s_j}+\tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{t_j,s_j}+\tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{t_j,s_j}+\\
&+ \tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{t_j,s_j}+\tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{t_j,s_j}+\tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{t_j,s_j}+\tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{t_j,s_j}+\\
&+ \tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{t_j,s_j}+\tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{t_j,s_j}+\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{r_j,t_j}+\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{r_j,t_j}+\\
&+ \tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{r_j,t_j}+\tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{r_j,t_j}+\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{r_j,t_j}+\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{r_j,t_j}+\\
&+ \tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{r_j,t_j}+\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{r_j,t_j}+\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{r_j,t_j}+\tilde{p}_{r_i,t_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{s_j,r_j}+\\
&+ \tilde{q}_{r_i,t_j}\tilde{p}_{t_i,s_i}\tilde{q}_{s_j,r_j}+\tilde{q}_{r_i,t_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}\tilde{p}_{s_j,r_j}+\tilde{p}_{s_i,t_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{s_j,r_j}+\tilde{q}_{s_i,t_j}\tilde{p}_{r_i,t_i}\tilde{q}_{s_j,r_j}+\\
&+ \tilde{q}_{s_i,t_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}\tilde{p}_{s_j,r_j}+\tilde{p}_{t_i,t_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{s_j,r_j}+\tilde{q}_{t_i,t_j}\tilde{p}_{s_i,r_i}\tilde{q}_{s_j,r_j}+\tilde{q}_{t_i,t_j}\tilde{q}_{s_i,r_i}\tilde{p}_{s_j,r_j}+\\
&+ \tilde{p}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,t_j}+\tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{p}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,t_j}+\tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{p}_{s_i,t_j}+\tilde{p}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,t_j}+\\
&+ \tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{p}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,t_j}+\tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{p}_{t_i,t_j}+\tilde{p}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_j}+\tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{p}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_j}+\\
&+ \tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{p}_{r_i,t_j} \qquad (1.90)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_{ij}^{(3)} &= \tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,t_j}+\tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_j}+\tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,t_j}+\\
&+ (\tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}+\tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}+\tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,r_i})\tilde{q}_{t_j,s_j}+\\
&+ (\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}+\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}+\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,r_i})\tilde{q}_{r_j,t_j}+\\
&+ (\tilde{q}_{r_i,t_j}\tilde{q}_{t_i,s_i}+\tilde{q}_{s_i,t_j}\tilde{q}_{r_i,t_i}+\tilde{q}_{t_i,t_j}\tilde{q}_{s_i,r_i})\tilde{q}_{s_j,r_j}+\\
&+ \tilde{q}_{r_i,r_j}\tilde{q}_{t_i,s_j}\tilde{q}_{s_i,t_j}+\tilde{q}_{s_i,r_j}\tilde{q}_{r_i,s_j}\tilde{q}_{t_i,t_j}+\tilde{q}_{t_i,r_j}\tilde{q}_{s_i,s_j}\tilde{q}_{r_i,t_j}. \qquad (1.91)
\end{aligned}$$

Então, observando que os coeficientes associados à matriz $\widetilde{J}$ estão definidos nas equações (1.69), para cada $c = 0,1,2,3$, pode-se escrever que

$$\tilde{b}_c = \sum_{i=1}^{p^3}\sum_{j=1}^{p^3} \tilde{\zeta}_i\tilde{\zeta}_j\tilde{b}_{ij}^{(c)}, \qquad (1.92)$$

sendo $i = (r_i-1)p^2+(s_i-1)p+t_i$ e $j = (r_j-1)p^2+(s_j-1)p+t_j$, com $r_i,r_j,s_i,s_jt_i,t_j = 1,\ldots,p$ e os coeficientes $\tilde{\zeta}_i$ são dados pela expressão em (1.73).

Por fim, fazendo-se uso do desenvolvimento apresentado para obtenção dos termos a_c, com $c = 0,1,2$, dados pelas equações em (1.64), com o intuito de obter as respectivas expressões, agora, para $\tilde{a}_c$, com $c = 0,1,2$, de acordo com as equções em (1.74). Aqui, as matrizes $\widetilde{A}_c$, com $c = 0,1,2$, apresentam as mesmas formas que as matrizes A_c, em (1.15), com a diferença de que são usadas as matrizes $P_{\widetilde{G}'}$ e $\bar{P}_{\widetilde{G}'}$ ao invés de $P_{G'}$ e $\bar{P}_{G'}$, respectivamente.

Neste sentido, sendo $tr(\widetilde{A}_c)$ um dos dois termos que compõem o coeficiente $\tilde{a}_c$, para $c = 0,1,2$, pode-se concluir, da equação (1.60), que

$$\tilde{a}_c = \sum_{o=1}^{p^2} \tilde{l}_o\tilde{m}_o^c \quad c = 0,1,2, \qquad (1.93)$$

de modo que se está considerando que, para cada $o = 1, \ldots, p^2$, $\tilde{l}_o$ é a o-ésima linha de $\widetilde{L}$, obtida da expressão em (1.65) e, $\tilde{m}_o^c$ é a o-ésima coluna da matriz $\widetilde{M}_c$, que tem forma dada por (1.56) e é definida de tal forma que, para cada $c = 0, 1, 2$ fixado, como apresentado nas equações (1.57), (1.58) e (1.59), $\tilde{m}_o^{(0)}$, $\tilde{m}_o^{(1)}$ e $\tilde{m}_o^{(2)}$ têm, respectivamente, expressões dadas por

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,s_j} \\ \tilde{p}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,t_j} \\ \tilde{p}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,t_j} \\ \tilde{p}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,s_j} \\ \tilde{p}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,s_j} \end{pmatrix} + \tilde{p}_{t_j,s_j} vec\left(\bar{P}_{G'}\right), \tag{1.94}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,s_j} \\ \tilde{p}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,t_j} \\ \tilde{q}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,t_j} \\ \tilde{q}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,s_j} \\ \tilde{p}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,s_j} \end{pmatrix} + \\ + & \begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,s_j} \\ \tilde{q}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,t_j} \\ \tilde{p}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{p}_{1,t_j} \\ \tilde{p}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{p}_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,s_j} \\ \tilde{q}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,s_j} \end{pmatrix} + \\ + & \tilde{q}_{t_j,s_j} vec\left(\bar{P}_{G'}\right) + \tilde{p}_{t_j,s_j} vec\left(P_{G'}\right) + \tilde{q}_{t_j,s_j} vec\left(\bar{P}'_{G'}\right) + \tilde{p}_{t_j,s_j} vec\left(P'_{G'}\right) \end{aligned} \tag{1.95}$$

e

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,s_j} \\ \tilde{q}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,s_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,t_j} \\ \tilde{q}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,t_j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,t_j} \\ \tilde{q}_{2,t_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,t_j} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \tilde{q}_{1,s_j} \\ \tilde{q}_{2,s_j} \\ \vdots \\ \tilde{q}_{p,s_j} \end{pmatrix} + \tilde{q}_{t_j,s_j} vec\left(P_{G'}\right). \tag{1.96}$$

Portanto, como $\widetilde{A}_c = \widetilde{L}\widetilde{M}_c$, para cada $c = 0, 1, 2$, seja $o = 1, \ldots, p^2$ dado por $o = (r_o - 1)p + (s_i - 1)m + t_i$ com $r_o = 1, \ldots, p$, $s_o = 1, \ldots, n$ e $t_o = 1, \ldots, m$. Então, tem-se a equação (1.93).

CAPÍTULO 2

Quantil aperfeiçoado para o teste do posto da matriz de parâmetros do modelo de equações lineares simultâneas para distribuições de contorno elíptico

Em muitas situações econométricas depara-se com o problema da estimação de parâmetros em modelos de regressões lineares em que existe interdependência entre as variáveis dependentes e variáveis explanatórias. Um exemplo clássico disto é o modelo de oferta e demanda, no qual se pode observar que a relação de causa e efeito deixa de ser, exclusivamente, unidirecional das variáveis explanatórias para as variáveis dependentes. Aqui, as variáveis explanatórias causam efeito sobre as variáveis dependentes que, por sua vez, podem causar efeito sobre algumas das variáveis explanatórias. Esta é uma abordagem tradicional de como surgem as equações lineares simultâneas, encontradas, na grande maioria, nos textos literários da área como, por exemplo, em Amemiya (1985), Judge et al. (1988), Christ (1967) e Malinvaud (1980).

Este capítulo tem por objetivo exibir um exemplo teórico que permita fazer uso das correções apresentadas no Capítulo 1, de modo que estimadores mais precisos do posto de uma matriz desconhecida possam ser avaliados, numericamente, a partir do modelo de equações lineares simultâneas. Para isto, o texto é dividido da seguinte forma: A Seção 3.2 apresenta, de maneira sucinta, o modelo de equações lineares simultâneas, bem como as condições necessárias para que se possa obter o estimador de mínimos quadrados ordinários para a matriz dos parâmetros desconhecidos do modelo em sua forma reduzida. A Seção 3.3 expressa, de modo geral, a expansão de Edgeworth da função densidade de uma transformação de normalização do vetor de erros do modelo. Esta expansão é necessária para a obtenção das quantidades f_0, F_2, F_4 e F_6 que aparecem em alguns dos coeficientes dados pelas expressões (1.69), de forma a definir o estimador corrigido. A Seção 3.4 exibe o conceito e as principais propriedades das distribuições de contorno elíptico, bem como as fórmulas gerais do vetor de todos os cumulantes de quarta ordem e dos polinômios tensoriais de Hermite para estas distribuições e, assim, as duas seguintes seções apresentam, respectivamente, restrições aos casos em que este vetor de erros tem distribuição normal multivariada e distribuição t-Student multivariada.

Neste capítulo, a contribuição desta tese de doutorado pode ser verificada, especificamente, na Seção 2.3, observando-se a apresentação de uma formulação geral, em termos de vetores, da expansão de Edgeworth da função densidade do vetor de erros amostrais, na classe das distribuições de contorno elíptico.

2.1 Especificação do modelo de equações simultâneas lineares

Para a apresentação do modelo, suponha-se que se tenha um conjunto de n equações de regressão do tipo:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \gamma_{ij} + \sum_{i=1}^{m} x_i \beta_{ij} + e_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

de modo que, para cada $i = 1, \ldots, n$ fixado, o vetor de dimensão $t \times 1$, y_i, representa uma amostra de t observações, nomeando-se estas n amostras, de variáveis endógenas ou conjuntamente dependentes. Além disso, para $j = 1, \ldots, n$, os e_j representam vetores aleatórios de erros independentes e identicamente distribuidos, ou seja, *iid*, obtidos a partir de cada equação, de modo que sua dimensão seja $t \times 1$. Desta forma, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, y_i e e_j são vetores de $\mathbb{R}^t$. E ainda, para cada $i = 1, \ldots, m$, x_i é um vetor de $\mathbb{R}^t$ cujos elementos são chamados de variáveis explanatórias, pré-determinadas ou exógenas e, os γ_{ij}'s e os β_{ij}'s são os parâmetros desconhecidos que devem ser estimados dos dados.

Uma suposição feita para o modelo, é que os erros sejam obtidos a partir de um processo de geração de dados tal que tenham média 0 e sejam não relacionados para diferentes observações. Em outras palavras, a correlação ocorre apenas entre os erros das t-ésimas observações das n equações distintas e, para uma dada equação, a variância do erro é constante sobre as observações. Logo, para todo $i, j = 1, \ldots, n$ e $r, s = 1, \ldots, t$, deve-se ter que $\mathbb{E}[e_i] = 0$ e

$$\mathbb{E}[e_{ri} e_{sj}] = \begin{cases} \sigma_{ij}, & \text{se} \quad r = s \\ 0, & \text{se} \quad r \neq s \end{cases} . \tag{2.2}$$

Deste modo, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, tem-se:

$$\mathbb{E}[e_i e_j'] = \sigma_{ij} I_t,$$

de modo que I_t representa a matriz identidade de ordem t. Esta estrutura, imposta ao modelo, é tal que, se $e' = \begin{pmatrix} e_1' & \ldots & e_n' \end{pmatrix}'$, então $\mathbb{E}[ee'] = \Sigma_c \otimes I_t$, sendo que, no decorrer do texto, supor-se-á que a matriz de covariâncias contemporânea, Σ_c, é conhecida[1] e não singular. Aqui, $\sigma_{i,j}$ representa o (i, j)-ésimo elemento da matriz de covariâncias, Σ_c, de cada um dos vetores definidos por

$$e^k = \begin{pmatrix} e_{k1} & e_{k2} & \ldots & e_{kn} \end{pmatrix}' \quad k = 1, \ldots, t,$$

sendo e_{kj} o k-ésimo elemento do vetor e_j.

Escrito de forma matricial, o modelo dado pelas equações (2.1) tem forma compacta:

$$Y\Gamma + XB + E = 0, \tag{2.3}$$

em que $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{pmatrix}$ são de ordem $t \times n$ representando, respectivamente, as matrizes das variáveis endógenas e dos erros aleatórios,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{pmatrix}$$

[1] A generalização para o caso desconhecido é simples desde que se usem derivadas em relação aos elementos do vetor de parâmetros β

tem ordem $t \times m$ e representa a matriz das variáveis predeterminadas,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \cdots & \Gamma_n \end{pmatrix}$$

tem ordem $n \times n$ e

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{pmatrix}$$

tem ordem $m \times n$, sendo estas duas últimas as matrizes dos parâmetros desconhecidos. Nestes dois últimos casos, $\Gamma_j = \begin{pmatrix} \gamma_{1j} & \gamma_{2j} & \cdots & \gamma_{nj} \end{pmatrix}'$ e $B_j = \begin{pmatrix} \beta_{1j} & \beta_{2j} & \cdots & \beta_{mj} \end{pmatrix}'$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Aqui, o modelo de equações lineares simultâneas diz-se que está em sua *forma estrutural*.

Ao supor-se que a matriz Γ é não singular, o modelo em (2.3) pode ser reescrito do seguinte modo:

$$Y = X\Pi + V \tag{2.4}$$

de modo que essa equação é chamada de *forma reduzida* do modelo de equações lineares simultâneas. A matriz

$$\Pi = -B\Gamma^{-1} \tag{2.5}$$

tem ordem $m \times n$ com j-ésima coluna dada por $\pi_j = \begin{pmatrix} \pi_{1j} & \pi_{2j} & \cdots & \pi_{mj} \end{pmatrix}'$, e a matriz

$$V = -E\Gamma^{-1}, \tag{2.6}$$

tem ordem é $t \times n$ com j-ésima coluna representada por $v_j = (v_{1j}, v_{2j}, \cdots, v_{tj})'$, para $j = 1, \ldots, n$. Γ e V são chamadas, respectivamente, de *matriz dos parâmetros na forma reduzida* e *matriz dos erros na forma reduzida*.

Uma outra maneira de reescrever o modelo em (2.4) é, como pode ser visto em Judge et al. (1988), como uma forma particular do modelo de equações de regressões aparentemente não relacionadas, dada por:

$$y = (I_n \otimes X)\pi + v, \tag{2.7}$$

de modo que $y = vec(Y)$, $\pi = vec(\Pi)$ e $v = vec(V)$. Nesse caso, $vec()$ é o operador de vetorização que empilha as colunas de uma matriz. Redefinido desta forma, o modelo em (2.7) é tal que $\mathbb{E}[v] = 0$ e $\mathbb{E}[vv'] = \Sigma = \Sigma_c \otimes I_t$, sendo $\Sigma_c = (\sigma_{ij})$ a matriz de covariâncias das perturbações cuja ordem é $n \times n$ e I_t é a matriz identidade de ordem t. Portanto, pode-se observar que a matriz de covariâncias do vetor de erros, v, satisfaz uma estrutura de Kronecker e é tal que, como pode ser visto em Judge et al. (1988), permite que possamos obter um estimador de mínimos quadrados para Π, dado por

$$\widehat{\Pi} = (X'X)^{-1}X'Y, \tag{2.8}$$

desde que a matriz X tenha posto coluna completo. Além disso, em Zellner (1962) tem-se a garantia de que este é um estimador consistente para Π, a partir de algumas condições suaves de regularidade.

Ratsimalahelo (2003a,b), baseado na teoria da perturbação matricial, propõe um estimador fortemente consistente para o posto de B a partir de um estimador fortemente consistente da própria matriz B. Neste caso, de acordo com a particularidade do modelo em (2.5) adotado, pode-se verificar que, sob condições de normalidade assintótica da matriz desvio $\widehat{\Pi} - \Pi$, isto é,

$$\sqrt{t}vec\left(\widehat{\Pi} - \Pi\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}_{nt}(0, \Sigma),$$

então, tem-se que

$$\sqrt{t}\Sigma^{-1/2}vec\left(\widehat{\Pi}-\Pi\right) \xrightarrow{d} \mathscr{N}_{nt}(0, I_{nt}), \tag{2.9}$$

com I_{nt} representando a matriz identidade de ordem nt. Assim, pode-se notar que, para o caso em que Σ é conhecida, uma vez que Σ_c é não nula e positiva definida, também o é a matriz $\Sigma_c^{-1/2}$; resultado este que pode ser encontrado em Magnus & Neudecker (1999). Logo, considerando $A = \Pi\Sigma_c^{-1/2}$, na última referência citada, pode ser verificado que um estudo sobre o posto de Π é equivalente a um estudo sobre o posto de A e vice-versa. Aqui, tem-se que $\widehat{A} = \widehat{\Pi}\Sigma_c^{-1/2}$ é um estimador consistente de A e, então decorre, de (2.9), que:

$$\sqrt{t}vec\left(\widehat{A}-A\right) \xrightarrow{d} \mathscr{N}_{nt}(0, I_{nt}). \tag{2.10}$$

Nesta etapa, pode-se verificar que os conceitos do Capítulo 1 são aplicáveis para a determinação de um teste de posto com correção até a ordem $O(t^{-1})$.

Considerando a vetorização, (2.7), do modelo de equações lineares simultâneas na sua forma reduzida, a partir de (2.8), obtém-se:

$$\hat{\pi} = [I_n \otimes (X'X)^{-1}X']y, \tag{2.11}$$

desde que X tenha posto coluna completo. Assim, para a matriz auxiliar $M = (X'X)^{-1}X'$, cuja ordem é $m \times t$, escrevendo $v = y - (I_n \otimes X)\pi$, pode-se verificar que

$$\hat{\pi} - \pi = (I_n \otimes M)v. \tag{2.12}$$

Seja $\hat{\pi}$ o estimador de π dado por (2.11) e denote-se por $\bar{q}$ o seguinte vetor de erros amostrais

$$\bar{q} = \sqrt{t}(\hat{\pi} - \pi).$$

2.2 Expansão de Edgeworth da função densidade de uma transformação normalizadora do vetor de erros amostrais

Da equação (2.12), pode-se verificar que

$$\bar{q} = \sqrt{t}(I_n \otimes M)v. \tag{2.13}$$

Agora, como $M = (X'X)^{-1}X' = (m_j^i)$ tem ordem $m \times t$, então $I_n \otimes M$ é uma matriz de ordem $p \times nt$, então, $\bar{q}$ é um vetor de ordem $p \times 1$, em que se define $p = mn$, o número de parâmetros de Π. Portanto, se $l = 1, \ldots, nt$ tem expressão $l = (r_l - 1)t + s_l$, com $r_l = 1, \ldots, n$ e $s_l = 1, \cdots, t$, pode-se observar que o l-ésimo elemento de $\bar{q}$, denotado por $\bar{q}^l$, é dado por:

$$\bar{q}^l = \sqrt{t}m_j^{s_l}e_{r_l}^j,$$

usando a convenção de somatório de Einstein.

O objetivo seguinte é escrever o vetor $\bar{q}$ como uma soma de vetores aleatórios independentes e identicamente distribuídos. Sendo assim, para cada $j = 1, \ldots, t$, considere que o j-ésimo vetor canônico de $\mathbb{R}^t$ é representado por α_j e defina a matriz

$$M_j = I_n \otimes M\alpha_j,$$

cuja ordem é $p \times n$. Assim, sendo $v^j = (\ v_1^j \quad v_2^j \quad \ldots \quad v_n^j\ )'$, o vetor com os elementos da j-ésima linha da matriz de erros, V, tem-se que:

$$\bar{q} = \sqrt{t}(M_1 v^1 + \cdots + M_t v^t) = \sqrt{t} M_j v^j. \tag{2.14}$$

Como os vetores $v^1, \ldots, v^t$ são iid, então, os vetores $M_1 v^1, \cdots, M_t v^t$ são independentes.

Observe que, se se denotar a matriz de covariâncias de $\bar{q}$ por Ω, cuja ordem é $p \times p$, então ter-se-á

$$\begin{aligned} \Omega &= t(\Sigma_c \otimes MM') \\ &= t[\Sigma_c \otimes (X'X)^{-1}] \\ &= \Sigma_c \otimes \left(\frac{X'X}{t}\right)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

sendo Σ_c é a matriz de covariâncias, por exemplo, de v^1. Assim, como Ω é positiva definida, pode-se considerar a sua matriz raiz quadrada, $\Omega^{-1/2}$, a qual também é positiva definida. Então, pode-se notar que a transformação normalizadora $\tilde{q} = \Omega^{-1/2}\bar{q}$ produz um vetor aleatório, obtido a partir da soma padronizada de vetores independentes, a saber: $M_1 v^1, \ldots, M_t v^t$. Portanto, supondo-se que

$$\left(\frac{X'X}{t}\right)^{-1} \to N,$$

em que N é uma matriz positiva definida, tem-se que $\Omega \to \Sigma_c \otimes N$ e que $\tilde{q} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(0, I_p)$. Logo, por Barndorff-Nielsen & Cox (1990), McCullagh (1987) e Cordeiro (1999), entre outros textos que se referem à teoria assintótica, faz sentido obter uma expansão de Edgeworth para a função densidade do vetor $\tilde{q}$, de modo que esta possa ser representada, assintoticamente, até a ordem $O(t^{-1})$, como uma aproximação da função densidade da distribuição normal padrão p-variada. Uma tal representação pode ser encontrada de maneira mais detalhada, por exemplo, em Barndorff-Nielsen & Cox (1990), com a seguinte expressão

$$\begin{aligned} f(\tilde{q}) &= \phi_p(\tilde{q}) \left[1 + \frac{1}{6\sqrt{t}} \kappa^{i,j,k} h_{ijk}(\tilde{q}) + \frac{1}{24t} \kappa^{i,j,k,l} h_{ijkl}(\tilde{q}) + \frac{1}{72t} \kappa^{i,j,k} \kappa^{l,p,q} h_{ijklpq}(\tilde{q})\right] + \\ &+ O(t^{-3/2}), \end{aligned}$$

sendo ϕ_p a função densidade da normal padrão p-variada, $\kappa^{i,j,k}$ e $\kappa^{i,j,k,l}$ são os cumulantes conjuntos de terceira e quarta ordem, respectivamente, da distribuição de $\tilde{q}$, enquanto que $h_{ijk}(\tilde{q})$ e $h_{ijklpq}(\tilde{q})$ são os polinômios tensoriais de Hermite de terceiro e sexto graus envolvendo os elementos do vetor $\tilde{q}$, respectivamente. A definição, bem como algumas propriedades desses polinômios, podem ser encontradas em Barndorff-Nielsen & Cox (1990, pp. 16 e 148).

2.3 Expansão de Edgeworth da função densidade do vetor de erros amostrais na classe das distribuiçoes de contorno elíptico

De maneira informal, a classe das distribuições de contorno elíptico é caracterizada por conter as distribuições cujas funções de densidade possuem a forma funcional elíptica da distribuição normal multivariada. Isto pode ser encontrado, por exemplo, em Muirhead (2005, pg. 10) e Anderson (2003, pg. 47). Assim, um vetor aleatório m-dimensional, X, diz-se que pertence à classe das distribuições de contorno elíptico com parâmetros $\mu_{m\times 1}$ e $V_{m\times m}$ se a sua função densidade apresenta-se na forma:

$$|V|^{-1/2}g((x-\mu)'V^{-1}(x-\mu)),$$

para uma determinada função g, em que V é uma matriz positiva definida. Para denotar isso, diz-se que $X \in E_m(\mu,V)$. Aqui e no que segue, as duas barras que envolvem uma matriz quadrada representam o seu determinante.

A partir desta contextualização e da definição de função característica, pode-se verificar em Anderson (2003, pg. 53) que, se $X \in E_m(\mu,V)$, então sua função característica é dada por:

$$\varphi_X(t) = e^{it'\mu}\psi(t'Vt),$$

de modo que a função ψ é determinada pela função característica do vetor aleatório $Y \in E_m(0,I_m)$, tal que $X = CY + \mu$, sendo C uma matriz não singular satisfazendo $C'V^{-1}C = I_m$ Anderson (2003, pg. 631); ou seja,

$$\varphi_Y(t) = \psi(t't),$$

uma vez que a função densidade de Y é invariante sob transformações ortogonais. Nesse caso, diz-se que Y tem distribuição esférica.

Em Muirhead (2005, pg. 34) pode-se verificar que, se existirem, $\mathbb{E}[X] = \mu$ e $Cov[X] = \alpha V$, com $\alpha = -2\psi'(0)$. Mais ainda, observa-se que todas as distribuições marginais de X são de contorno elíptico com assimetria zero e mesma curtose (Muirhead, 2005, pg. 41) e que todas as funções de densidade marginais possuem a mesma forma funcional. Além disso, da equação (2.13), vê-se a necessidade de se obter a distribuição de uma transformação do vetor X dada por $Q = DX$, em que D é uma matriz de ordem $q\times m$ e posto $q \leq m$. Nesse caso, Anderson (2003, pg. 51) e Muirhead (2005, pg. 34) garantem que o vetor Q tem distribuição de contorno elíptico com parâmetros $D\mu$ e DVD'.

Outra propriedade do vetor aleatório X com distribuição em $E_m(\mu,V)$, encontrada em Muirhead (2005, pg. 41), garante que todas as distribuições marginais dos X_j, com $j = 1,\ldots,m$, possuem assimetria nula e mesmo valor para curtose. Além disso, todos os cumulantes de quarta ordem de X, $k^{i,j,k,l}$ com $i,i,k,l = 1,\ldots,m$, são determinados por seu parâmetro de curtose, κ, e têm expressão:

$$k^{i,j,k,l} = \kappa(\sigma^{i,j}\sigma^{k,l} + \sigma^{i,k}\sigma^{j,l} + \sigma^{i,l}\sigma^{j,k}), \tag{2.16}$$

sendo que:

$$\kappa = \frac{\psi''(0) - \psi'(0)^2}{\psi'(0)^2}$$

e $\sigma^{i,j}$ representa o (i,j)-ésimo elemento da matriz de covariâncias de X, $Cov(X) = \alpha V$. Um outro fato que vale mencionar é que, quando $\mu = 0$, todos os cumulantes de terceira ordem de X, $k^{i,j,k}$, também são nulos. Este fato pode ser verificado das relações entre os cumulantes e momentos, encontradas, por exemplo, em Barndorff-Nielsen & Cox(1990, pg. 145), sendo que, por Anderson (2003, pg. 53), todos os momentos de terceira ordem de X assumem valor zero.

Com o exposto nesta seção e na Seção 2.2, pode-se concluir que a expansão de Edgeworth, até a ordem $O(t^{-3/2})$, da função densidade do vetor de erros amostrais, dado por (2.13), tem expressão

$$f(\tilde{q}) = \phi_p(\tilde{q}) \left[1 + \frac{1}{24t} \kappa^{i,j,k,l} h_{ijkl}(\tilde{q}) \right] + O(t^{-3/2}). \tag{2.17}$$

As duas próximas subseções têm o propósito de expor duas formas vetoriais, sendo que uma contém todos os cumulantes de quarta ordem do vetor de erros amostrais e, a outra contém todos os polinômios de Hermite de quarto grau. Na terceira subseção apresenta-se a forma geral da expansão de Edgeworth da função de densidade do vetor de erros em (2.13), obtido a partir de qualquer distribuição na classe $E_p(0,V)$.

2.3.1 Vetor dos Cumulantes de Quarta Ordem

Aqui vamos apresentar uma forma vetorial que contenha todos os cumulantes de quarta ordem da t-distribuição p-variada do vetor $\bar{q}$. Para isto, sejam $i,j,k,l = 1,\ldots,p$ tais que, se $c = (i-1)p^3 + (j-1)p^2 + (k-1)p + l$, o c-ésimo elemento do vetor de cumulantes de quarta ordem de $\bar{q}$ é dado por $k^{i,j,k,l}$. Pode-se verificar que este vetor tem a forma

$$\kappa vec\left\{\left\{[vec(\Omega)]' \otimes \Omega\right\} C\right\},$$

em que $C = I_{p^3} + E_1^{-1} + E_2^{-1}$ tem ordem $p^3 \times p^3$ sendo que, $E_1 = I_p \otimes K_{pp}$ e $E_2 = K_{pp^2}$, com I_{p^3} e I_p representando as matrizes identidades de ordens $p^3 \times p^3$ e $p \times p$, respectivamente, e K_{pp} e K_{pp^2} sendo matrizes comutação. Com isso, pode-se, portanto, representar o vetor de cumulantes de quarta ordem de $\bar{q}$ como

$$\kappa(C' \otimes I_p) vec\left\{[vec\,(\Omega)]' \otimes \Omega\right\}. \tag{2.18}$$

2.3.2 Vetor dos Polinômios Tensoriais de Hermite

Nesta seção será apresentada uma forma vetorial que contém todos os polinômios tensoriais de Hermite de quarto grau com relação aos elementos de $\bar{q}$. Assim, como pode ser visto em (2.16), se h_{ijkl} representa um tal polinômio para valores fixados de $i,j,k,l = 1,\ldots,p$, então este é dado como uma soma de três termos sendo um termo constante, $\sigma_{i,j}\sigma_{k,l}[3]$, um termo que contém potências de segunda ordem dos elementos de $\bar{q}$, $\sigma_{i,j}\bar{q}_k\bar{q}_l[6]$, e, um outro termo que contém as potências de quarta ordem dos elementos de $\bar{q}$, $\bar{q}_i\bar{q}_j\bar{q}_k\bar{q}_l$. Para cada um destes termos será dada uma representação vetorial.

Note que

$$\sigma_{i,j}\sigma_{k,l}[3] = \sigma_{i,j}\sigma_{k,l} + \sigma_{i,k}\sigma_{j,l} + \sigma_{i,l}\sigma_{j,k}$$

o qual se apresenta, para cada $i,j,k,l = 1,\ldots,p$ fixado, de maneira análoga ao vetor de cumulantes de quarta ordem da t-distribuição p-variada. Dessa forma, um vetor que tem como componentes estes elementos pode ser expresso por

$$(C'\otimes I_p)vec\left\{[vec(K)]'\otimes K\right\}, \tag{2.19}$$

sendo $K = (\sigma_{i,j})$ a matriz de ordem $p\times p$ dada por $K = \Omega^{-1}$ e $C = I_{p^3} + E_1^{-1} + E_2^{-1}$.

Os termos que possuem as potências de segundo grau dos elementos de $\bar{q}$ em h_{ijkl} são expressos da forma

$$\sigma_{i,j}\bar{q}_k\bar{q}_l[6] = \sigma_{i,j}\bar{q}_k\bar{q}_l + \sigma_{i,k}\bar{q}_j\bar{q}_l + \sigma_{i,l}\bar{q}_j\bar{q}_k[6] + \sigma_{j,k}\bar{q}_i\bar{q}_l + \sigma_{j,l}\bar{q}_i\bar{q}_k + \sigma_{l,k}\bar{q}_i\bar{q}_j$$

e, com um procedimento análogo àquele utilizado para obter as duas formas vetoriais anteriores, pode-se afirmar que o vetor de $\mathbb{R}^{p^4}$ que contêm todos estes termos é representado por

$$D[vec(K)\otimes I_p^2](K\otimes K)vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right), \tag{2.20}$$

em que

$$D = \left[I_{p^4} + \left(E_4\otimes I_{p^2}\right)\right]\left(E_1^{-1}\otimes I_p\right)' + \left[I_{p^4} + \left(E_4\otimes I_{p^2}\right) + K_{p^3p}\right]E_3 + I_{p^4},$$

sendo que I_{p^4} é a matriz identidade de ordem $p^4\times p^4$, $E_3 = I_p\otimes K_{p^2p}$ e $E_4 = K_{pp}$, sendo que K_{p^2p} e K_{pp} são matrizes comutação.

Por fim, o vetor cujas componentes são os termos dos polinômios de Hermite de quarta ordem que contém apenas potências de quarto grau dos elementos de $\bar{q}$ pode ser representado da forma

$$(K\otimes K\otimes K\otimes K)(\bar{q}\otimes\bar{q}\otimes\bar{q}\otimes\bar{q}),$$

ou seja,

$$(K\otimes K\otimes K\otimes K)vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right). \tag{2.21}$$

2.3.3 Expansão de Edgeworth da Função Densidade do Vetor de Erros Amostrais

A expansão de Edgeworth da função densidade do vetor p-variado $\bar{q}$, dada por (2.17), faz uso da convenção de somatório de Einstein para o coeficiente do termo de ordem t^{-1}. Desta forma, tal termo pode ser visto como o produto do transposto do vetor dos cumulantes de quarta ordem pelo vetor dos respectivos polinômios tensoriais de Hermite. De maneira expressa, isto pode ser denotado como

$$\begin{aligned} & \kappa\left\{(C'\otimes I_p)vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}\right\}'\left\{(K\otimes K\otimes K\otimes K)vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right) - \right.\\ - \;& D[vec(K)\otimes I_p^2](K\otimes K)vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right) + \\ + \;& C'\otimes I_p)vec\left\{[vec(K)]'\otimes K\right\}\right\}. \end{aligned}$$

Agora, após algumas manipulações algébricas, note que

$$\kappa\left\{(C'\otimes I_p)vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}\right\}'\left\{(K\otimes K\otimes K\otimes K)vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right)\right.$$

pode ser escrito como

$$\left\{vec\left\{\left\{[vec(K)]'\otimes K\right\}C\right\}\right\}'vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right).$$

Portanto, se F_4 é uma matriz de ordem $p^2\times p^2$, tal que

$$vec\left(F_4'\right)=\frac{\kappa}{24}vec\left\{\left\{[vec(K)]'\otimes K\right\}C\right\},$$

tem-se que:

$$\left\{vec\left(F_4'\right)\right\}'vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right)=tr\left[F_4\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right)\right].\tag{2.22}$$

Mais ainda,

$$\left\{(C'\otimes I_p)vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}\right\}'D[vec(K)\otimes I_p^2](K\otimes K)vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right)$$

pode ser escrito como

$$\left\{vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}\right\}'(C\otimes I_p)D[vec(K)\otimes I_p^2](K\otimes K)vec\left(\bar{q}\bar{q}'\otimes\bar{q}\bar{q}'\right).$$

Logo, se se considerar F_2 como sendo uma matriz de ordem $p\times p$, tal que

$$\left[vec\left(F_2'\right)\right]'=\frac{\kappa}{24}\left\{vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}\right\}'(C\otimes I_p)D[vec(K)\otimes I_p^2](K\otimes K),$$

tem-se que:

$$\left[vec\left(F_2'\right)\right]'vec\left(\bar{q}\bar{q}'\right)=tr(F_2\bar{q}\bar{q}').\tag{2.23}$$

Por fim, seja

$$\begin{aligned}f_0&=\frac{\kappa}{24}\left\{vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}\right\}'(C\otimes I_p)(C'\otimes I_p)vec\left\{[vec(K)]'\otimes K\right\}\\&=\frac{\kappa}{24}\left\{vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}\right\}'(CC'\otimes I_p)vec\left\{[vec(K)]'\otimes K\right\},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}f_0&=\frac{\kappa}{24}\left\{vec\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}C'C\right\}'vec\left\{[vec(K)]'\otimes K\right\}\\&=\frac{\kappa}{24}tr\left\{\left\{[vec(\Omega)]'\otimes\Omega\right\}C'C\{[vec(K)]'\otimes K\}\right\}.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Com isso, chega-se à conclusão de que a expansão de Edgeworth da função densidade de $\bar{q}$, até a ordem $O(t^{-3/2})$, tem expressão

$$f(\tilde{q})=\phi_p(\tilde{q})\left\{1+\frac{1}{t}\left\{f_0+tr(F_2\tilde{q}\tilde{q}')+tr[F_4(\tilde{q}\tilde{q}'\otimes\tilde{q}\tilde{q}')]\right\}\right\}+O(t^{-3/2}).\tag{2.25}$$

A partir do exposto acima e do que foi apresentado na Seção 1.4 do Capítulo 1, obtém-se uma correção, até a ordem $O(t^{-1})$, para o quantil da estatística teste de Wald.

2.4 Expansão de Edgeworth da função densidade do vetor de erros amostrais sob a suposição de normalidade

Aqui, o objetivo é, a partir de resultados deixados por Phillips & Park (1988), expor uma correção, até a ordem $O(t^{-1})$, para o quantil da aproximação de Edgeworth da função de distribuição da estatística de Wald, que define o estimador do posto da matriz dos parâmetros, Π em (2.8), do modelo de equações linerares simultâneas, sob a suposição de normalidade.

Suponha-se que cada linha da matriz V, em (2.4), é dada pelo vetor

$$v^k = \begin{pmatrix} v_{k,1} & v_{k,2} & \cdots & v_{k,n} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \cdots, t$$

e que estes são iid com distribuição normal n-variada com vetor média 0 e matriz de covariâncias Σ_c; isto é, cada linha da matriz erro tem distribuição $\mathscr{N}_n(0, \Sigma_c)$. Nesse caso, como provado em Anderson (2003, pg. 30), pode-se observar que o vetor $\bar{q}$ tem distribuição normal p-variada com média 0 e matriz de covariâncias dada por (2.15), ou seja,

$$\Omega = \Sigma_c \otimes \left(\frac{X'X}{t} \right)^{-1},$$

a qual é não nula e positiva definida. Assim, $\bar{q}$ tem distribuição $\mathscr{N}_p(0, \Omega)$ e, portanto, sua distribuição é de contorno elíptico. Uma vez que a distribuição normal p-variada tem todos os cumulantes nulos a partir do segundo (MUIRHEAD, 2005, pg. 41), a expansão de Edgeworth para sua função densidade é, exatamente, dada por

$$f(\bar{q}, \Omega) = (2\pi)^{-p/2} |\Omega|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \bar{q}' \Omega^{-1} \bar{q} \right).$$

Agora, considere-se a transformação normalizante de $\bar{q}$, dada por $\tilde{q} = \Omega^{-1/2} \bar{q}$, sendo $\Omega^{-1/2}$ a matriz raiz quadrada de Ω. Dessa forma, a distribuição de $\tilde{q}$ é $\mathscr{N}_p(0, I_p)$ e, por (2.25), a expansão de Edgeworth de sua função densidade é exata e tem a seguinte forma:

$$f(\tilde{q}, I_p) = (2\pi)^{-p/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \tilde{q}' \tilde{q} \right).$$

Portanto, como demonstrado por Phillips & Park (1988), até $o(t^{-1})$, a expansão de Edgeworth para a função densidade de W, sob a hipótese nula, tem expressão:

$$\begin{aligned} f(w) &= F_{n-k}(w) - \frac{1}{t} \tilde{c}(w) f_{n-k}(w) + o(t^{-1}) \\ &= F_{n-k}\left[w - \frac{1}{t} \tilde{c}(w) \right] + o(t^{-1}), \end{aligned} \tag{2.26}$$

em que F_{n-k} e f_{n-k} denotam as funções de distribuição e densidade, respectivamente, de uma variável aleatória χ^2_{n-k} com

$$\tilde{c}(w) = \sum_{j=0}^{3} \tilde{\alpha}_j w^n,$$

sendo que

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_0 &= (4\tilde{a}_0 - \tilde{b}_1)/4,\\ \tilde{\alpha}_1 &= (4\tilde{a}_1 + \tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)/4(n-k),\\ \tilde{\alpha}_2 &= (4\tilde{a}_2 + \tilde{b}_2 - \tilde{b}_3)/4(n-k)(n-k+2),\\ \tilde{\alpha}_3 &= \tilde{b}_3/4(n-k)(n-k+2)(n-k+4),\end{aligned} \tag{2.27}$$

em que os coeficientes $\tilde{a}_k$, para $k = 0,1,2$, e $\tilde{b}_c$, para $c = 1,2,3$, são obtidos de funções das matrizes $\widetilde{J}$ e $\widetilde{L}$, como exposto na secão 1.4 do Capítulo 1.

A fórmula da expansão de Cornish-Fisher, a qual pode ser encontrada em maiores detalhes em, por exemplo, Cornish & Fisher (1937) e Barndorff-Nielsen & Cox (1990, pg. 117), permite observar que, se w_α é o valor crítico, ao nível α, da distribuição χ^2_{n-k}, então uma correção para o valor crítico da estatística de Wald, até $O(t^{-1})$, é dada como uma solução de

$$w^*_\alpha - \frac{1}{t}\tilde{c}(w^*_\alpha) = w_\alpha,$$

o que implica que, aproximadamente, até esta ordem,

$$w^*_\alpha = w_\alpha + \frac{1}{t}\tilde{c}(w_\alpha), \tag{2.28}$$

sendo que a última equação pode ser obtida após aplicação do Teorema da Inversão de Lagrange, encontrado, entre outros textos, em Lagrange(1770), ou pelo simples fato de que $\tilde{c}(w_\alpha)$ é uma função analítica, o que permite aproximar, até a ordem $O(t^{-1})$, $\tilde{c}(w^*_\alpha)$ por $\tilde{c}(w_\alpha)$.

2.5 Expansão de Edgeworth da função densidade do vetor de erros amostrais com distribuição t-Student

Nesta seção será apresentada a expansão de Edgeworth da função de densidade da transformação normalizante do vetor de erros amostrais, $\tilde{q}$, dada em (2.25), sob a suposição de que o vetor v, que o compõe, tem distribuição t-Student multivariada com l graus de liberdade e parâmetros $\mu_{nt\times 1} = 0$ e $V_{nt\times nt} = \Sigma_c \otimes I_t$; ou seja, quando $v \in E_{nt}(0,V)$. Sendo $\bar{q} = Dv$, a partir das citações feitas na Seção 2.3, pode-se verificar que $\bar{q}$ tem distribuição de contorno elíptico t-Student com l-graus de liberdade e parâmetros $D\mu = 0$ e DVD'. Neste caso, tem-se que $\mathbb{E}[\bar{q}] = 0$ e, como dado em Muirhead (2005, pg. 48), $Cov(\bar{q}) = \frac{l}{l-2}DVD'$, isto é, $\bar{q} \in E_p(0,DVD')$ com

$$Cov(\bar{q}) = \frac{l}{l-2}\left[\Sigma_c \otimes \left(\frac{X'X}{t}\right)^{-1}\right].$$

Esta-se considerando que

$$Cov(\bar{q}) \to \frac{l}{l-2}(\Sigma_c \otimes N)$$

para

$$N = \lim\left(\frac{X'X}{t}\right)^{-1}$$

não singular, o que implica que

$$\tilde{q} = \Omega^{-1/2}\bar{q} \xrightarrow{d} \mathcal{N}_p(0, I_p),$$

sendo $\Omega = \Sigma_c \otimes N$.

Portanto, a partir do exposto no Capítulo 1 e na Seção 2.3, pode-se concluir que a expansão de Edgeworth para a função densidade do vetor $\tilde{q}$, até a ordem $O(t^{-3/2})$, tem expressão dada por

$$f(\tilde{q}) = \phi_p(\tilde{q})\left[1 + \frac{1}{24t}\kappa^{i,j,k,l}h_{ijkl}(\tilde{q})\right] + O(t^{-3/2}),$$

ou seja, por (2.25)

$$f(\tilde{q}) = \phi_p(\tilde{q})\left\{1 + \frac{1}{t}\left\{f_0 + tr(F_2\tilde{q}\tilde{q}') + tr[F_4(\tilde{q}\tilde{q}' \otimes \tilde{q}\tilde{q}')]\right\}\right\} + O(t^{-3/2}),$$

sendo F_4, F_2 e f_0 dados pelas equações (2.22), (2.23) e (2.24), respectivamente. Esses valores de F_4, F_2 e f_0 são os que definem os quatro últimos coeficientes dados nas equações em (1.69), verificando que, pelo fato de os cumulantes de terceira ordem para as distribuições elípticas serem nulos, a matriz F_6 é nula.

Logo, a partir da equação (1.72) na Seção 1.4, tem-se uma expressão para o quantil aperfeiçoado da expansão de Edgeworth para a função de distribuição da estatística de Wald e, isto permite obter um estimador corrigido do posto da matriz desconhecida dos parâmetros do modelo de equações lineares simultâneas na sua forma reduzida, dada em (2.4), de forma, pelo menos assintoticamente, mais eficiente quando comparado com a estimativa do posto dada por Ratsimalahelo (2003a,b).

CAPÍTULO 3

Avaliação Numérica

Este capítulo tem por objetivo expor os resultados das simulações feitas para avaliar, numericamente, a formulação apresentada no Capítulo 1, aplicada ao desenvolvimento teórico do Capítulo 2, para a correção do quantil da estatística de Wald para a estimação do posto de uma matriz desconhecida. Para isto, de modo a avaliar o desempenho de um estimador com redução de viés para o posto da matriz de parâmetros desconhecidos do modelo de equações simultâneas lineares, obtém-se a matriz de erros aleatórios a partir de um processo de geração de números pseudoaleatórios de acordo com duas distribuições de contorno elíptico, a distribuição normal multivariada e a distribuição t-Student multivariada, apresentadas no Capítulo 2. O desenvolvimento de texto, a seguir, se dá da seguinte maneira: na Seção 3.1 é feita uma abordagem sucinta de como o método de Monte Carlo foi usado para obter-se os resultados numéricos para os casos da distribuição normal multivariada e distribuição t-Student multivariada. Esses dois casos são comentados nas Seções 3.2 e 3.3, respectivamente. Por fim, na Seção 3.4, são apresentadas as tabelas com os valores das frequências relativas obtidas para os estimadores em estudo bem como os seus valores de viés e EQM obtidos a partir do processo de simulação.

3.1 Metodologia do processo de simulação

Os resultados obtidos por meio de simulações são baseados no método de Monte Carlo com o auxílio da linguagem de programação matricial Ox (Doornik, 2006). Levou-se em consideração 10.000 réplicas de Monte Carlo com tamanhos amostrais t, variando de um valor mínimo igual a 50 até um valor máximo igual a 200, em intervalos de 50. Para o modelo de equações simultâneas lineares, na forma reduzida, em cada repetição de Monte Carlo, tomou-se a matriz das variáveis exógenas, X, sendo constante de ordem $t \times m$ gerada com distribuição uniforme pseudo-aleatória no intervalo $(0,1)$ e, a matriz de erros aleatórios, V, sendo gerada em cada réplica da respectiva repetição de Monte Carlo com ordem $t \times n$ e distribuição normal ou t-Student multivariadas partindo do pressuposto de que a sua matriz de covariâncias, Σ, é conhecida e não singular, tendo estrutura de Kronecker, $\Sigma_c \otimes I_t$, com ordem $t \cdot n \times t \cdot n$. A partir disto, de acordo com o modelo de equações simultâneas lineares, dado na equação (2.4), produziu-ses a matriz das variáveis endógenas, Y, sendo sua ordem $t \times n$ e a matriz dos parâmetros fixos e desconhecidos, Π, com ordem $m \times n$ sendo que, para o estudo do posto, assumiu-se, sem perda de generalidade, que $m \geq n$.

O estimador do posto, bem como a correção que produz redução do seu viés, são obtidos a partir da matriz que estima Π, a qual é dada por:

$$\widehat{\Pi} = (X'X)^{-1}X'Y,$$

a qual é consistente para Π (Judge et al., 1988, pg. 613). Para o caso em que a distribuição dos erros aleatórios é t-Student, esse estimador é o de máxima verossimilhança (Zellner,1976). Com o auxílio da estatística de Wald, dada por (1.3), e do conhecimento da matriz de covariância para os erros aleatórios, usou-se o procedimento de teste sequencial, detalhado no Apêndice B, para obter o estimador do posto de Π, $\hat{k}$, e, assim, fez-se uso da estatística aperfeiçoada, obtida no Capítulo 1, para encontrar um novo estimador do posto de Π, $\hat{k}_c$, com um menor valor de viés. As frequências relativas de cada valor assumido, pelo posto estimado no teste, são apresentadas e, em seguida, são feitos os cálculos do viés e do erro quadrático médio (EQM) para ambos os estimadores, ou seja, para $\hat{k}$ e para $\hat{k}_c$. A título de verificação do que ocorre quando se aumenta o nível de significância dos testes, foram produzidas algumas tabelas com testes realizados ao nível de significância de 90% para poder-se compará-las com aquelas tabelas produzidas para as respectivas matrizes a partir do teste com o nível de significância de 95%.

Em cada repetição de Monte Carlo foram considerados os casos em que $m = 2,3,4$ e $n = 2,3$, de tal modo que as simulações ocorrem para que se possa analisar a correção do viés do estimador do posto das matrizes desconhecidas de ordem 2×2, 3×2, 4×2 e 3×3 para a distribuição normal multivariada e, 2×2 e 3×2 para a distribuição t-Student multivariada. Nesses casos, adotaram-se, como verdadeiros valores paramétricos, algumas combinações lineares de matrizes que compõem os espaços vetoriais $\mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{3\times 2}$, $\mathbb{R}^{4\times 2}$ e $\mathbb{R}^{3\times 3}$ com o objetivo de avaliar as correções para os estimadores do posto, $\hat{k}$, cujos valores verdadeiros são $k = 1$, $k = 2$ e $k = 3$ para a distribuição normal e, $k = 1$ e $k = 2$ para a distribuição t-Student. Assim, as matrizes verdadeiras consideradas são:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=1; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=2;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=1; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=2;$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=1; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=2$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=1; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=2; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad k=3.$$

3.2 Resultados numéricos para o caso da distribuição normal multivariada

Nesta seção, apresenta-se a avaliação dos resultados numéricos obtidos a partir do processo de simulação por meio do método de Monte Carlo aplicado ao modelo de equações simultâneas lineares, o qual é dado pela equação (2.4), na página 67, sendo que a matriz de erros aleatórios tem distribuição normal multivariada de acordo com a exposição da Seção 2.4 do Capítulo 2. Os valores das frequências assumidas por $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ bem como seus valores de viés e EQM são apresentados nas Tabelas 3.1 a 3.18 com testes realizados para níveis de significância de 95% e 90%.

Para as Tabelas 3.1, 3.3, 3.5 e 3.7 considerou-se que as matrizes verdadeiras são tais que o valor do respectivo posto é $k = 1$, sendo que os testes foram realizados a um nível de significância de 95%. Nesses casos, pode-se observar, claramente, a partir de comparações para os valores de viés e EQM, que os cálculos dados no Capítulo 1 produzem uma estatística aperfeiçoada capaz de gerar um estimador melhorado para o posto da matriz desconhecida, ou seja, o quantil corrigido garante que o novo estimador tem menor valor de viés e EQM. Além disso, em ambos os casos de estimativa, com e sem correção, percebe-se a consistência do estimador, para o verdadeiro valor do posto, quando o tamanho da amostra cresce, sendo que o estimador, obtido a partir das correções, apresenta um viés de menor ordem quando comparado com o outro estimador, ou seja, o viés do primeiro converge para zero mais rápido do que o viés do segundo. As mesmas conclusões são válidas para o caso em que o nível de significância passa a ser 90%, e isto pode ser observado nas Tabelas 3.10, 3.12, 3.14 e 3.16. No entanto, como esperado, o teste apresenta maior índice de rejeição fazendo com que tenha melhor aplicação para os casos em que o posto a ser estimado seja maior que 1. Isto pode ser observado quando se faz comparações entre as Tabelas 3.1 e 3.10, 3.3 e 3.12 e 3.5 e 3.14.

No caso das Tabelas 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.11, 3.13 e 3.15, o valor do posto a ser estimado é $k = 2$, isto é, as matrizes são de posto coluna completo e, aqui, se percebe que o estimador dado a partir das correções do Capítulo 1 é tão bom quanto aqueles do caso anterior sendo o posto $k = 1$, quando comparado com o estimador obtido sem correção alguma. A mesma conclusão pode ser dada para o caso da matriz de ordem 3×3 com posto coluna completo, $k = 3$, o que pode ser observado na tabela 3.9. E ainda, observando o comportamento do viés e do EQM de todas as respectivas tabelas, chega-se à conclusão de que o aumento do nível de significância causa um favorecimento, em termos de viés, ao estimador do posto da matriz que possui valor numérico maior que 1, como esperado.

3.3 Resultados numéricos para o caso da distribuição t-Student multivariada

Esta seção tem por objetivo expor os resultados numéricos obtidos a partir do processo de simulação por meio do método de Monte Carlo para avaliar a correção do quantil da estatística de Wald para o estimador do posto da matriz desconhecida dos parâmetros do modelo de equações simultâneas lineares, dado pela equação (2.4), na página 67, sendo que a matriz de erros aleatórios tem distribuição t-Student multivariada de acordo com o apresentado na Seção 2.5 do Capítulo 2. Os valores das frequências de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$, bem como os valores de viés e EQM, assumidos por esses podem ser verificados nas Tabelas 3.10 a 3.13.

Como pode ser observado nas Tabelas 3.16 e 3.18, as matrizes verdadeiras foram consideradas com ordens 2×2 e 3×2 de modo que, em ambos os casos, o verdadeiro valor do posto igual a 1, ou seja, $k = 1$. Aqui se percebe, claramente, a partir de comparações realizadas entre os valores reduzidos de viés e EQM, a superioridade do teste que faz uso da estatística aperfeiçoada obtida a partir dos resultados teóricos dados no Capítulo 1. Além disso, é notória a consistência de ambos os estimadores, ou seja, como se pode verificar nestas tabelas, os valores de viés sendo reduzidos com o aumento do tamanho da amostra implica que esses estimadores convergem para o verdadeiro valor do posto sendo que o obtido a partir das correções se apresenta como melhor.

Para o caso em que as ordens das verdadeiras matrizes são 2×2 e 3×2 com posto 2, observa-se, nas Tabelas 3.17 e 3.19, que o processo de simulação, por meio do método de Monte Carlo, também apresenta resultados numéricos satisfatórios para a correção quando são comparados com os valores de viés e EQM do estimador do posto $\hat{k}$ e do estimador do posto $\hat{k}_c$, obtido com o auxílio da estatística aperfeiçoada, cujo desenvolvimento teórico se encontra no Capítulo 1. Nesse caso, pode-se notar que o aumento do número de variáveis endógenas nas equações dadas por (2.4) acarreta uma diminuição da redução do viés no teste, quando a verdadeira matriz tem posto coluna completo. Aqui, se pode concluir que as correções dadas no Capítulo 1 favorecem a estimação do posto com valor de viés corrigido para o caso em que a verdeira matriz tem posto $k = 1$.

3.4 Tabelas

Esta seção é constituída apenas pelas tabelas com os resultados numéricos obtidos do processo de simulação mencionado na Seção 3.1. As Tabelas 3.1 até 3.15 são referentes aos resultados numéricos originados do processo de simulação, que envolvem as equações simultâneas lineares da Seção 2.4 do Capítulo 2, de modo que a distribuição da matriz de erros aleatórios é normal multivariada. Para as Tabelas 3.1 até 3.9 o nível de significância do teste é de 95%. O nível de significância de 90%, para o teste, dá origem aos resultados numéricos apresentados nas Tabelas 3.10 a 3.15. Agora, quando houver referência à Seção 2.5 do Capítulo 2, de modo que a matriz de erros aleatórios no modelo de equações simultâneas lineares tem distribuição t-Student multivariada, as Tabelas 3.16 a 3.19 representam os resultados numéricos relativos aos testes com nível de siginificância de 95%.

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.9003	0.9555	0.9730	0.9800
	2	0.0997	0.0445	0.0270	0.0200
Viés		0.0997	0.0445	0.0270	0.0200
EMQ		0.0997	0.0445	0.0270	0.0200
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.9615	0.9942	0.9994	0.9998
	2	0.0385	0.0058	0.0006	0.0002
Viés		0.0385	0.0058	0.0006	0.0002
EMQ		0.0385	0.0058	0.0006	0.0002

Tabela 3.1 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 2×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.3319	0.0017	0.0000	0.0000
	2	0.6681	0.9983	1.0000	1.0000
Viés		-0.3319	-0.0017	0.0000	0.0000
EMQ		0.3319	0.0017	0.0000	0.0000
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.0857	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9143	1.0000	1.0000	1.0000
Viés		-0.0857	0.0000	0.0000	0.0000
EMQ		0.0857	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 3.2 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 2×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.8138	0.9030	0.9326	0.9497
	2	0.1862	0.0970	0.0674	0.0503
Viés		0.1862	0.0970	0.0674	0.0503
EMQ		0.1862	0.0970	0.0674	0.0503
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.9346	0.9916	0.9966	0.9993
	2	0.0654	0.0084	0.0034	0.0007
Viés		0.0654	0.0084	0.0034	0.0007
EMQ		0.0654	0.0084	0.0034	0.0007

Tabela 3.3 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 3×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.4193	0.0181	0.0004	0.0000
	2	0.5807	0.9819	0.9996	1.0000
Viés		-0.4193	-0.0181	-0.0004	0.0000
EMQ		0.4193	0.0181	0.0004	0.0000
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.1136	0.0007	0.0000	0.0000
	2	0.8864	0.9993	1.0000	1.0000
Viés		-0.1136	-0.0007	0.0000	0.0000
EMQ		0.1136	0.0007	0.0000	0.0000

Tabela 3.4 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 3×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.7346	0.8217	0.8700	0.9014
	2	0.2654	0.1783	0.1300	0.0986
Viés		0.2654	0.1783	0.1300	0.0986
EMQ		0.2654	0.1783	0.1300	0.0986
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.9003	0.9756	0.9873	0.9961
	2	0.0997	0.0244	0.0127	0.0039
Viés		0.0997	0.0244	0.0127	0.0039
EMQ		0.0997	0.0244	0.0127	0.0039

Tabela 3.5 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 4×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.4626	0.0756	0.0042	0.0000
	2	0.5374	0.9244	0.9958	1.0000
Viés		-0.4626	-0.0756	-0.0042	0.0000
EMQ		0.4626	0.0756	0.0042	0.0000
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.1062	0.0043	0.0000	0.0000
	2	0.8938	0.9957	1.0000	1.0000
Viés		-0.1062	-0.0043	0.0000	0.0000
EMQ		0.1062	0.0043	0.0000	0.0000

Tabela 3.6 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 4×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.6593	0.8299	0.9068	0.9264
	2	0.3348	0.1677	0.0923	0.0725
	3	0.0059	0.0024	0.0009	0.0011
Viés		0.3466	0.1725	0.0941	0.0747
EMQ		0.3584	0.1773	0.0959	0.0769

Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.9961	0.9993	0.9998	0.9996
	2	0.0019	0.0002	0.0000	0.0001
	3	0.0020	0.0005	0.0002	0.0003
Viés		0.0059	0.0012	0.0004	0.0007
EMQ		0.0099	0.0022	0.0008	0.0013

Tabela 3.7 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 3×3 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.4508	0.1931	0.0324	0.0012
	2	0.4208	0.7327	0.9221	0.9640
	3	0.1284	0.0742	0.0455	0.0348
Viés		-0.3224	-0.1189	0.0131	0.0336
EMQ		0.5792	0.2673	0.0779	0.0360

Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.7320	0.9039	0.9343	0.9477
	2	0.0802	0.0345	0.0366	0.0340
	3	0.1878	0.0616	0.0291	0.0183
Viés		-0.5442	-0.8423	-0.9052	-0.9294
EMQ		0.9198	0.9655	0.9634	0.9660

Tabela 3.8 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 3×3 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.6502	0.1697	0.0057	0.0003
	3	0.3498	0.8303	0.9943	0.9997
Viés		-0.6502	-0.1697	-0.0057	-0.0003
EMQ		0.6502	0.1697	0.0057	0.0003
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.0448	0.0003	0.0000	0.0000
	2	0.3687	0.0003	0.0000	0.0000
	3	0.5865	0.9994	1.0000	1.0000
Viés		-0.4583	-0.0009	0.0000	0.0000
EMQ		0.5479	0.0015	0.0000	0.0000

Tabela 3.9 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 3$ da matriz de ordem 3×3 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.8655	0.9297	0.9511	0.9639
	2	0.1345	0.0703	0.0489	0.0361
Viés		0.1345	0.0703	0.0489	0.0361
EMQ		0.1345	0.0703	0.0489	0.0361
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.9527	0.9921	0.9988	0.9994
	2	0.0473	0.0079	0.0012	0.0006
Viés		0.0473	0.0079	0.0012	0.0006
EMQ		0.0473	0.0079	0.0012	0.0006

Tabela 3.10 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 2×2 sob distribuição normal multivariada ao nível de significância de 90%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.1361	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.8639	1.0000	1.0000	1.0000
Viés		-0.1361	0.0000	0.0000	0.0000
EMQ		0.1361	0.0000	0.0000	0.0000
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.0012	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9988	1.0000	1.0000	1.0000
Viés		-0.0012	0.0000	0.0000	0.0000
EMQ		0.0012	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 3.11 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 2×2 sob distribuição normal multivariada ao nível de significância de 90%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.7446	0.8443	0.8795	0.9010
	2	0.2554	0.1557	0.1205	0.0990
Viés		0.2554	0.1557	0.1205	0.0990
EMQ		0.2554	0.1557	0.1205	0.0990
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.9154	0.9867	0.9938	0.9989
	2	0.0846	0.0133	0.0062	0.0011
Viés		0.0846	0.0133	0.0062	0.0011
EMQ		0.0846	0.0133	0.0062	0.0011

Tabela 3.12 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 3×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 90%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.1808	0.0018	0.0000	0.0000
	2	0.8192	0.9982	1.0000	1.0000
Viés		-0.1808	-0.0018	0.0000	0.0000
EMQ		0.1808	0.0018	0.0000	0.0000
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.0430	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9570	0.9999	1.0000	1.0000
Viés		-0.0430	-0.0001	0.0000	0.0000
EMQ		0.0430	0.0001	0.0000	0.0000

Tabela 3.13 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 3×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 90%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.6292	0.7328	0.7865	0.8190
	2	0.3708	0.2672	0.2135	0.1810
Viés		0.3708	0.2672	0.2135	0.1810
EMQ		0.3708	0.2672	0.2135	0.1810
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.8691	0.9652	0.9824	0.9935
	2	0.1309	0.0348	0.0176	0.0065
Viés		0.1309	0.0348	0.0176	0.0065
EMQ		0.1309	0.0348	0.0176	0.0065

Tabela 3.14 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 4×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 90%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.2038	0.0084	0.0002	0.0000
	2	0.7962	0.9916	0.9998	1.0000
Viés		-0.2038	-0.0084	-0.0002	0.0000
EMQ		0.2038	0.0084	0.0002	0.0000
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.0437	0.0011	0.0000	0.0000
	2	0.9563	0.9989	1.0000	1.0000
Viés		-0.0437	-0.0011	0.0000	0.0000
EMQ		0.0437	0.0011	0.0000	0.0000

Tabela 3.15 Frequências relativas, viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 4×2 sob distribuição normal multivariada testada ao nível de significância de 90%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.8681	0.9383	0.9637	0.9712
	2	0.1319	0.0617	0.0363	0.0288
Viés		0.1319	0.0617	0.0363	0.0288
EMQ		0.1319	0.0617	0.0363	0.0288
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.8847	0.9531	0.9797	0.9842
	2	0.1153	0.0469	0.0203	0.0158
Viés		0.1153	0.0469	0.0203	0.0158
EMQ		0.1153	0.0469	0.0203	0.0158

Tabela 3.16 Viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 2×2 sob distribuição t-Student multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.6033	0.0783	0.0012	0.0000
	2	0.3967	0.9217	0.9988	1.0000
Viés		-0.6033	-0.0783	-0.0012	0.0000
EMQ		0.6033	0.0783	0.0012	0.0000
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.5131	0.0057	0.0000	0.0000
	2	0.4869	0.9943	1.0000	1.0000
Viés		-0.5131	-0.0057	0.0000	0.0000
EMQ		0.5131	0.0057	0.0000	0.0000

Tabela 3.17 Viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 2×2 sob distribuição t-Student multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.7875	0.8610	0.9008	0.9234
	2	0.2125	0.1390	0.0992	0.0766
Viés		0.2125	0.1390	0.0992	0.0766
EMQ		0.2125	0.1390	0.0992	0.0766
Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.8037	0.8825	0.9245	0.9508
	2	0.1963	0.1175	0.0755	0.0492
Viés		0.1963	0.1175	0.0755	0.0492
EMQ		0.1963	0.1175	0.0755	0.0492

Tabela 3.18 Viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 1$ da matriz de ordem 3×2 sob distribuição t-Student multivariada testada ao nível de significância de 95%

Estimador sem correção					
$\hat{k}$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.6595	0.2793	0.0650	0.0064
	2	0.3405	0.7207	0.9350	0.9936
Viés		-0.6595	-0.2793	-0.0650	-0.0064
EMQ		0.6595	0.2793	0.0650	0.0064

Estimador com correção					
$\hat{k}_c$ \ t		50	100	150	200
Frequência relativa	1	0.5802	0.0958	0.0048	0.0000
	2	0.4198	0.9042	0.9952	1.0000
Viés		-0.5802	-0.0958	-0.0048	0.0000
EMQ		0.5802	0.0958	0.0048	0.0000

Tabela 3.19 Viés e EMQ de $\hat{k}$ e $\hat{k}_c$ para verdadeiro posto $k = 2$ da matriz de ordem 3×2 sob distribuição t-Student multivariada testada ao nível de significância de 95%

CAPÍTULO 4

Conclusões

Ao longo desta tese foram feitos cálculos para a obtenção de uma formulação para o quantil aperfeiçoado, até a ordem $O(t^{-1})$, da função de distribuição da estatística do tipo Wald para estimar o posto de uma matriz desconhecida. Como se pode verificar em Cordeiro & Ferrari (1995), até a ordem $O(t^{-1})$ sendo t o tamanho da amostra, esse quantil corrigido é equivalente a uma estatística de teste melhorada. Desse modo, baseado no teste de Wald, proposto por Ratsimalahelo (2003a,b), e na expansão de Edgeworth para a função de densidade da estatística de Wald com restrições não lineares dada por Phillips & Park (1988), a partir da restrição não linear dos parâmetros que consiste em expor um vetor de parâmetros constituído pelos $n-k$ menores valores singulares, obtiveram-se expressões que possibilitam aprimorar a estatística de Wald para o posto de uma matriz desconhecida no sentido de reduzir o viés desse estimador. Aqui, n representa o número de colunas da matriz desconhecida enquanto que k representa o seu posto.

Com o auxílio de programa computacional que usa linguagem de programação matricial, Ox (Doornik, 2006), foram feitas simulações baseadas no método de Monte Carlo para a avaliação numérica dos resultados teóricos aplicados ao modelo de equações simultâneas lineares, de modo que a matriz de erros aleatórios tem função de densidade na classe das distribuições de contorno elíptico. Mais especificamente, tomaram-se os casos em que essa matriz tem distribuição normal multivariada ou distribuição t-Student multivariada. O procedimento adotado para produzir os estimadores com e sem correção de viés foi o critério de teste sequencial (Apêndice B). A partir deste, pôde-se observar que, em ambos os casos de distribuição, o estimador gerado pela estatística aperfeiçoada apresenta viés reduzido em relação ao estimador dado pela estatística definida por Ratsimalahelo (2003a,b) quando a matriz das variáveis endógenas tem um número pequeno de colunas e o posto da matriz dos parâmetros desconhecidos não é completo. Quando o posto da matriz dos parâmetros desconhecidos é completo e a matriz das variáveis endógenas tem um número pequeno de colunas, por exemplo, dois, a mesma observação é verificada. No entanto, neste caso, pôde-se observar maior redução no valor do viés quando são feitas comparações com o caso em que a matriz dos parâmetros desconhecidos não tem posto completo. Apesar disto, os estimadores de posto obtidos através das correções dadas pelo Capítulo 1 continuam sendo consistentes.

Propostas de futuros trabalhos surgem se se considerarem os casos em que a matriz de covariâncias é não conhecida e, até mesmo, como exposto em Ratsimalahelo (2003a), quando ela é singular tendo uma representação de produto de Kronecker. Pode-se, também, trabalhar com outras distribuições de contorno elíptico diferentes daquelas anteriormente abordadas bem como tentar obter aperfeiçoamento para estatísticas levando em consideração outras distribuições não elípticas.

APÊNDICE A

A inversa generalizada de Moore Penrose

Mediante a necessidade de se ter uma fórmula explícita para a matriz inversa generalizada de Moore Penrose da matriz $B_{k+l} = \gamma_{k+l}I_n - A'A$, a qual surge na equação (1.17), com $l = 1, 2, \dots, n-k$, este capítulo apresenta os cálculos que possibilitam escrever cada B_l^+ em função dos autovetores da matriz $A'A$. Observe-se que se está supondo que a matriz A tem posto coluna completo com probabilidade um. Assim, para cada $l = 1, \dots, n$, considere-se a matriz $B_l = \gamma_l I_n - A'A$. Então, sendo V a matriz ortogonal de ordem $n \times n$, obtida da decomposição em valores singulares da matriz A, observe-se que:

$$V'B_lV = \gamma_l I_n - diag\{\gamma_h; \quad h = 1, \dots, n\} = diag\{\gamma_l - \gamma_h; \quad h = 1, \dots, n\} = D_l.$$

Portanto, $B_l = VD_lV'$ de modo que se pode escrever $B_l = B_{1,l} + B_{2,l}$ sendo:

$$B_{1,l} = V \begin{pmatrix} \gamma_l - \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_l - \gamma_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_l - \gamma_{l-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} V'$$

e

$$B_{2,l} = V \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \gamma_l - \gamma_{l+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_l - \gamma_n \end{pmatrix} V',$$

ambas de ordem $n \times n$. Assim, sendo $V = [v_1 \dots v_n]$ tem-se que:

$$B_{1,l} = \sum_{h=1}^{l-1} (\gamma_l - \gamma_h) v_h v_h' \quad \text{e} \quad B_{2,l} = \sum_{h=l+1}^{n} (\gamma_l - \gamma_h) v_h v_h'.$$

Observe-se, ainda, que, como V é uma matriz ortogonal em $\mathbb{R}^{n \times n}$, o conjunto de vetores $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, de modo que,

$$B_{1,l}B_{2,l}' = B_{2,l}B_{1,l}' = B_{1,l}'B_{2,l} = B_{2,l}'B_{1,l} = 0.$$

Logo, pelo Lema 1.7 dado por Penrose (1955), pode-se concluir que $B_l^+ = B_{1,l}^+ + B_{2,l}^+$.
Se se considerarem as matrizes $V_1 = [v_1 \ldots v_{l-1}]$, $V_2 = [v_{l+1} \ldots v_n]$, $\Lambda_1 = diag\{\gamma_l - \gamma_h; \quad h = 1, \ldots, l-1\}$ e $\Lambda_2 = diag\{\gamma_l - \gamma_h; \quad h = l+1, \ldots, n\}$ de ordens $n \times (l-1)$, $n \times (n-l)$, $(l-1) \times (l-1)$ e $(n-l) \times (n-l)$, respectivamente, conclui-se que:

$$B_{i,l} V_i = V_i \Lambda_i, \quad \text{para} \quad i = 1, 2$$

com

$$V_1' V_1 = I_{l-1} \quad \text{e} \quad V_2' V_2 = I_{n-l}.$$

Além do mais, se $x \in \mathbb{R}^n$, então:

$$x = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h v_h, \quad x'x = \sum_{h=1}^{n} \alpha_h^2 \quad \text{e} \quad x' v_h = \alpha_h \quad \text{para} \quad h = 1, \ldots, n.$$

Portanto, sendo $\gamma_l - \gamma_h \leq 0$ para $h = 1, \ldots, l-1$ e $\gamma_l - \gamma_h \geq 0$ para $h = l+1, \ldots, n$, pode-se verificar que

$$x' B_{1,l} x = \sum_{h=1}^{l-1} (\gamma_l - \gamma_h) \alpha_h^2 \leq 0 \quad \text{e} \quad x' B_{2,l} x = \sum_{h=l+1}^{n} (\gamma_l - \gamma_h) \alpha_h^2 \geq 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, o que implica que as matrizes $-B_{1,l}$ e $B_{2,l}$ são semidefinidas positivas. Dessa forma, como pode ser visto em Magnus & Neudekcer (1999, pg. 35),

$$B_{i,l} = V_i \Lambda_i V_i' \quad \text{e} \quad B_{i,l}^+ = V_i \Lambda_i^{-1} V_i', \quad i = 1, 2.$$

Uma vez que A tem posto n, então, como pode ser visto em Golub & Van Loan (1996), $\gamma_1 > \gamma_2 > \ldots > \gamma_n > 0$, de modo que se pode escrever:

$$B_{1,l}^+ = \sum_{h=1}^{l-1} (\gamma_l - \gamma_h)^{-1} v_h v_h' \quad \text{e} \quad B_{2,l}^+ = \sum_{h=l+1}^{n} (\gamma_l - \gamma_h)^{-1} v_h v_h'.$$

Com isso, conclui-se que:

$$B_l^+ = \sum_{h=1}^{l-1} (\gamma_l - \gamma_h)^{-1} v_h v_h' + \sum_{h=l+1}^{n} (\gamma_l - \gamma_h)^{-1} v_h v_h',$$

ou seja,

$$B_l^+ = \sum_{\substack{h=1, \\ h \neq l}}^{n} (\gamma_l - \gamma_h)^{-1} v_h v_h'.$$

APÊNDICE B

O Procedimento de teste sequencial

O procedimento de teste sequencial pode ser usado para produzir um estimador do verdadeiro posto de uma matriz desconhecida. No entanto, como pode ser verificado em Cragg & Donald (1996) e Robin & Smith (2000), usado para esse propósito, o procedimento não resulta em um estimador consistente. Apesar disto, Ratsimalahelo (2003a,b) apresenta condições que garantem a consistência forte do estimador do posto de uma matriz desconhecida, obtido pelo uso do procedimento de teste sequencial.

Seja $A_\circ$ uma matriz desconhecida de ordem $m \times n$, com $m \geq n$, e A um estimador $\sqrt{t}$-consistente de $A_\circ$, o qual satisfaz a convergência em (1.1). Sob a hipótese nula, $H_\circ$, de que o verdadeiro posto de $A_\circ$ é k, sendo $0 < k \leq n$, a estatística de teste do tipo Wald para testar $H_\circ$, dada pela equação (1.3), é

$$W(k) = t\hat{g}' \left(\widehat{G}\widehat{\Sigma}\widehat{G}'\right)^{-1} \hat{g}.$$

Assim, o procedimento de teste sequencial consiste em realizar testes progressivos para os valores de k, começando com $k = 1$, até que seja obtido um teste que não rejeite $H_\circ$. Neste caso, $\hat{h}$ denotará o valor de k para o primeiro teste que não rejeite a hipótese nula de que o verdadeiro posto de $A_\circ$ é k.

Sendo $W = W(k)$, dada em (1.3), uma estatística do tipo Wald, como pode ser verificado em Ratsimalahelo (2003a,b), esta tem uma distribuição assintótica qui-quadrado com $n-k$ graus de liberdade, χ^2_{n-k}. Seja γ_k a representação para o quantil dessa distribuição, e seja C_t uma sequência predeterminada de números reais, cuja escolha, dada mais adiante, permite que seja obtida a consistência forte do estimador do posto da matriz $A_\circ$. Aqui, t denota o tamanho da amostra. Então, $\gamma_k C_t > 0$ é considerado como o valor crítico, associado à estatística de teste W quando $\hat{k} = k$, de uma distribuição qui-quadrado.

As condições que a sequencia C_t deve satisfazer para garantir a consistência forte do estimador do posto de $A_\circ$ são

(i) $C_t > 0$;

(ii) $\lim_{t\to\infty} \frac{C_t}{t} = 0$;

(iii) $\lim_{t\to\infty} \frac{C_t}{\log\log t} = \infty$.

Assim, como foi considerado por Ratsimalahelo (2003a,b), para cada tamanho amostral, t, tomou-se $C_t = \sqrt{\log t}$. Neste caso, $\hat{k} \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ é tal que $W(k) > \gamma_k C_t$, para todo $k > \hat{k}$ com $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e $W(k) \leq \gamma_k C_t$, para $\hat{k} = k$. Assim, pode-se observar que $\hat{k}$ define um estimador consistente para o verdadeiro posto da matriz $A_\circ$, sendo o menor valor de k para o qual o teste $W(k)$ não rejeita a hipótese nula.

APÊNDICE C

Programas usados na avaliação numérica

C.1 Programas referentes à distribuição normal multivariada

```
/*****************************************************
 * PROGRAMA: testecorrigido1.ox                      *
 * AUTOR: Davis Matias de Oliveira                   *
 * DATA: 17 de junho de 2011                         *
 * ÚLTIMA MODIFICAÇÃO: fevereiro de 2012             *
 *                                                   *
 * Este programa faz uma estimativa, com correção do valor*
 * crítico, do posto da matriz dos parâmetros desconheci- *
 * dos do modelo de equações simultâneas lineares, e cal- *
 * cula o viés e o EQM de tal estimador quando a matriz de*
 * covariâncias assintotica é conhecida e a matriz de er- *
 * ros aleatórios tem distribuição normal multivariada.   *
 *****************************************************/
#include <oxstd.h>
#include <funcoes.h>

decl MIN = 50;
decl MAX = 200;
decl REP = 10000;

main(){
decl i, j, s, t, mc, ta, dExecTime, n, svd, mu, mv, md, mu0, md0, mv0,
g, glc, posto_estcor, k, L, U, V, U2, V2, Q, G, quantil, E, S,
mSigma_c, mSigma, P, P1, mX, mY, svd0, mu1, md1, mv1,
mB_verd, mB_est, seqposto, m, k_verd, y, cont_aceitar_seqcor,
E_posto_estcor, mxtxinv, Prob_teste_seqcor, E_posto_est2cor,
EQM_posto_estcor, aux_seqcor, Prop_seqcor, Vies_posto_estcor,
E_posto2_estcor;

decl mB = <1,0;0,0;
1,0;0,2;
1,0;0,0;0,0;
1,0;0,2;0,0;
1,0;0,0;0,0;0,0;
1,0;0,2;0,0;0,0;
1,0,0;0,0,0;0,0,0;
1,0,0;0,2,0;0,0,0;
1,0,0;0,2,0;0,0,3>;

// Inicio do Relogio
```

```
dExecTime = timer();

//Inicio do Loop que preenche as matrizes verdadeiras
for(s = 3; s < 4; s++){
if(s < 3){
mB_verd = zeros(2+s,2);
for(j = 1; j < 2; j++){
for(t = 0; t < (2+s); t++)
mB_verd[t][] = mB[s*(3+s)+j*(2+s)+t][];
print(mB_verd);

k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
P = mv0*diag(md0)*mv0';  //Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c

// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for (ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
ranseed({1976, 2011});

mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seqcor = zeros(n+1,1);
cont_aceitar_seqcor = zeros(n+1,1);

ranseed(-1);

/*Inicio do Loop de Monte Carlo*/
for (mc = 0; mc < REP; mc++){
/*Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est*/
mY = mX * mB_verd + rann(n,ta)' * P;
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
//Matriz de Covariancias de vec(mB_est-mB_verd)
mSigma = (mSigma_c ** (ta*mxtxinv));
svd = decsvd((ta*mxtxinv), &mu1, &md1, &mv1);
//Matriz Raiz Quadrada de mSigma
P1 = P**(mv1*(diag(md1).^(0.5))*mv1');

// Inicio do Teste Sequencial Corrigido
ftesteseqcor(ta, mB_est, mSigma, P1, &posto_estcor);

for (i = 1; i < n + 1; i++) {
if (posto_estcor == i) {
cont_aceitar_seqcor[i][0]++;
}
aux_seqcor[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial
}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seqcor = (cont_aceitar_seqcor/REP);
```

```
// Vies do Posto Estimado
E_posto_estcor = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_estcor += i*Prop_seqcor[i][0];

Vies_posto_estcor = E_posto_estcor - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_estcor = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_estcor += ((i^2)*Prop_seqcor[i][0]); // E(^k^2)

EQM_posto_estcor  = E_posto2_estcor
- (2 * k_verd * E_posto_estcor) + k_verd^2;

/*##################### FIM DO TESTE CORRIGIDO ###################*/
// Impressao dos Dados
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n----------------Teste Sequencial----------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for (i = 1; i <= n; i++){
println("   ",aux_seqcor[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seqcor[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seqcor[i][0]);
}
println("\n Vies_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",Vies_posto_estcor);
println("\n EQM_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",EQM_posto_estcor);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra
} //Termino do preenchimento da matriz verdadeira
} //Termino do loop para preenchimento da matriz verdadeira
else{//Início dos cálculos para matrizes com três colunas
mB_verd = zeros(3,3);
for(j=1; j<2; j++){
for(t = 0; t  <s; t++)
mB_verd[t][] = mB[18+j*3+t][];
print(mB_verd);

k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
P = mv0*diag(md0)*mv0';  //Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c

// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for (ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
ranseed({1976, 2011});

mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seqcor = zeros(n+1,1);
```

```
cont_aceitar_seqcor = zeros(n+1,1);

ranseed(-1);

/*Inicio do Loop de Monte Carlo*/
for (mc = 0; mc < REP; mc++){
/*Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est*/
mY = mX * mB_verd + rann(n,ta)' * P;
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
//Matriz de Covariancias de vec(mB_est-mB_verd)
mSigma = (mSigma_c ** (ta*mxtxinv));
svd = decsvd((ta*mxtxinv), &mu1, &md1, &mv1);
//Matriz Raiz Quadrada de mSigma
P1 = P**(mv1*(diag(md1).^(0.5))*mv1');

// Inicio do Teste Sequencial Corrigido
ftesteseqcor(ta, mB_est, mSigma, P1, &posto_estcor);

for (i = 1; i < n + 1; i++) {
if (posto_estcor == i) {
cont_aceitar_seqcor[i][0]++;
}
aux_seqcor[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial
}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seqcor = (cont_aceitar_seqcor/REP);

// Vies do Posto Estimado
E_posto_estcor = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_estcor += i*Prop_seqcor[i][0];

Vies_posto_estcor = E_posto_estcor - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_estcor = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_estcor += ((i^2)*Prop_seqcor[i][0]); // E(^k^2)

EQM_posto_estcor  = E_posto2_estcor
- (2 * k_verd * E_posto_estcor) + k_verd^2;

/*#################### FIM DO TESTE CORRIGIDO ###############*/
// Impressao dos Dados
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n---------------Teste Sequencial---------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for (i = 1; i <= n; i++){
println("   ",aux_seqcor[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seqcor[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seqcor[i][0]);
}
```

```
println("\n Vies_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",Vies_posto_estcor);
println("\n EQM_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",EQM_posto_estcor);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra
} //Termino do preenchimento da matriz verdadeira com tres colunas
} /*Termino do loop para preenchimento da
    matriz verdadeira com três colunas*/

print("\n\n\t\t Data: ", date());
print("\n\n\t\t Hora: ", time());
print("\n\n\t\t Tempo Total de Execucao:",timespan(dExecTime),"\minutos");

}//termino do loop para os calculos de todas as matrizes
}//Termino do corpo principal

/*****************************************************
 * PROGRAMA: testenaocorrigido1.ox                    *
 * AUTOR: Davis Matias de Oliveira                    *
 * DATA: 17 de junho de 2011                          *
 * ÚLTIMA MODIFICAÇÃO: fevereiro de 2012              *
 *                                                    *
 * Este programa faz uma estimativa do posto da matriz dos*
 * parâmetros desconhecidos do modelo de equações simultâ-*
 * neas lineares, e calcula o viés e o EQM de tal estima- *
 * dor quando a matriz de covariâncias assintotica é co-  *
 * nhecida e a matriz de erros aleatórios tem distribuição*
 * normal multivariada. *
 *****************************************************/
#include <oxstd.h>
#include <funcoes.h>

decl MIN = 50;
decl MAX = 200;
decl REP = 10000;


main(){
decl i, j, s, t, mc, ta, dExecTime, n, svd, mu, mv, md, mu0, md0, mv0,
g, glc, posto_est, k, L, U, V, U2, V2, Q, G, quantil, E, S,
mSigma_c, mSigma, P, mX, mY, svd0,
mB_verd, mB_est, seqposto, m, k_verd, y, cont_aceitar_seq,
E_posto_est, mxtxinv, Prob_teste_seq, E_posto_est2,
EQM_posto_est, aux_seq, Prop_seq, Vies_posto_est,
E_posto2_est,I_ta;

decl mB = <1,0;0,0;
1,0;0,2;
1,0;0,0;0,0;
1,0;0,2;0,0;
1,0;0,0;0,0;0,0;
1,0;0,2;0,0;0,0;
1,0,0;0,0,0;0,0,0;
1,0,0;0,2,0;0,0,0;
```

```
1,0,0;0,2,0;0,0,3>;

// Inicio do Relogio
dExecTime = timer();

//Inicio do Loop que preenche as matrizes verdadeiras
for(s = 2; s < 3; s++){
if(s < 3){
mB_verd = zeros(2+s,2);
for(j =1 ; j < 2; j++){
for(t = 0; t < (2+s); t++)
mB_verd[t][] = mB[s*(3+s)+j*(2+s)+t][];
print(mB_verd);

k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
//Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c
P = mv0*diag(md0)*mv0';


// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for (ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
ranseed({1976, 2011});

mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seq = zeros(n+1,1);
cont_aceitar_seq = zeros(n+1,1);
I_ta = unit(ta);

ranseed(-1);


// Inicio do Loop de Monte Carlo
for(mc = 0; mc < REP; mc++){
// Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est
//Geração da normal multivariada
mY = mX * mB_verd + rann(n,ta)'*P;
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
mSigma = (mSigma_c ** (ta*mxtxinv));

// Inicio do Teste Sequencial
ftesteseq(ta, mB_est, mSigma, &posto_est);

for (i = 1; i <= n; i++) {
if (posto_est == i)
cont_aceitar_seq[i][0]++;
aux_seq[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial
```

```
}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seq = cont_aceitar_seq / REP;

//Esperança do posto estimado
E_posto_est = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_est += i*Prop_seq[i][0];

// Vies do Posto Estimado
Vies_posto_est = E_posto_est - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_est = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_est += (i^2)*Prop_seq[i][0]; // E(^k^2)

EQM_posto_est  = E_posto2_est
- (2 * k_verd * E_posto_est) + k_verd^2;


// Impressao dos Dados
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n----------------Teste Sequencial-------------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for (i = 1; i < n + 1; i++){
println("   ",aux_seq[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seq[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seq[i][0]);
}
println("\n Vies_posto_estimado_seq: ","%10.4f",Vies_posto_est);
println("\n EQM_posto_estimado_seq: ","%10.4f",EQM_posto_est);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra
}
}//Termino do loop para preencher a matriz verdadeira
else{//Início dos cálculos para matrizes com três colunas
mB_verd = zeros(3,3);
for(j=2; j<3; j++){
for(t = 0; t<s; t++)
mB_verd[t][] = mB[18+j*3+t][];
print(mB_verd);
k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
//Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c
P = mv0*diag(md0)*mv0';
```

```
// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for (ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seq = zeros(n+1,1);
cont_aceitar_seq = zeros(n+1,1);
I_ta = unit(ta);

// Inicio do Loop de Monte Carlo
for(mc = 0; mc < REP; mc++){
// Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est
//Geração da normal multivariada
mY = mX * mB_verd + rann(n,ta)'*P;
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
mSigma = (mSigma_c ** (ta*mxtxinv));

// Inicio do Teste Sequencial
ftesteseq(ta, mB_est, mSigma, &posto_est);

for (i = 1; i <= n; i++) {
if (posto_est == i)
cont_aceitar_seq[i][0]++;
aux_seq[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial

}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seq = cont_aceitar_seq / REP;

//Esperança do posto estimado
E_posto_est = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_est += i*Prop_seq[i][0];

// Vies do Posto Estimado
Vies_posto_est = E_posto_est - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_est = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_est += (i^2)*Prop_seq[i][0]; // E(^k^2)

EQM_posto_est  = E_posto2_est
- (2 * k_verd * E_posto_est) + k_verd^2;


// Impressao dos Dados
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n----------------Teste Sequencial----------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for (i = 1; i < n + 1; i++){
println("   ",aux_seq[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seq[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seq[i][0]);
```

```
}
println("\n Vies_posto_estimado_seq: ","%10.4f",Vies_posto_est);
println("\n EQM_posto_estimado_seq: ","%10.4f",EQM_posto_est);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra
}
}//Termino do loop para preencher a matriz verdadeira

print("\n\n\t\t Data: ", date());
print("\n\n\t\t Hora: ", time());
print("\n\n\t\t Tempo Total de Execucao:",timespan(dExecTime),"\minutos");
}
}// Termino do Corpo Principal
```

C.2 Programas referentes à distribuição t-Student multivariada

```
/*****************************************************
 * PROGRAMA: testecorrigido1.ox                      *
 * AUTOR: Davis Matias de Oliveira                   *
 * DATA: 17 de junho de 2011                         *
 * ÚLTIMA MODIFICAÇÃO: fevereiro de 2012             *
 *                                                   *
 * Este programa faz uma estimativa, com correção do valor*
 * crítico, do posto da matriz dos parâmetros desconheci- *
 * dos do modelo de equações simultâneas lineares, e cal- *
 * cula o viés e o EQM de tal estimador quando a matriz de*
 * covariâncias assintotica é conhecida e a matriz de er- *
 * ros aleatórios tem distribuição t-Student multivariada.*
 *****************************************************/
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#include <funcoes.h>

decl MIN = 50;
decl MAX = 200;
decl REP = 10000;

main(){
decl i, j, s, t, mc, ta, dExecTime, n, svd, mu, mv, md, mu0, md0, mv0,
g, glc, df, posto_estcor, k, L, U, V, U2, V2, Q, G, quantil, E, S,
mSigma_c, mSigma, P, P1, mX, mY, svd0, mu1, md1, mv1,
mB_verd, mB_est, seqposto, m, k_verd, y, cont_aceitar_seqcor,
E_posto_estcor, mxtxinv, Prob_teste_seqcor, E_posto_est2cor,
EQM_posto_estcor, aux_seqcor, Prop_seqcor, Vies_posto_estcor,
E_posto2_estcor, curt, mOmega;

decl mB = <1,0;0,0;
1,0;0,2;
1,0;0,0;0,0;
1,0;0,2;0,0;
1,0;0,0;0,0;0,0;
```

```
1,0;0,2;0,0;0,0;
1,0,0;0,0,0;0,0,0;
1,0,0;0,2,0;0,0,0;
1,0,0;0,2,0;0,0,3>;

// Inicio do Relogio
dExecTime = timer();
  //Inicio do Loop que preenche as matrizes verdadeiras
for(s = 0; s < 4; s++){
if(s < 3){
mB_verd = zeros(2+s,2);
for(j = 0; j < 2; j++){
for(t = 0; t < (2+s); t++)
mB_verd[t][] = mB[s*(3+s)+j*(2+s)+t][];
print(mB_verd);

df = 5;
curt = 2/(df-4);
k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
P = mv0*diag(md0)*mv0';  //Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c

// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for (ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
ranseed({1976, 2011});
mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seqcor = zeros(n+1,1);
cont_aceitar_seqcor = zeros(n+1,1);

ranseed(-1);

// Inicio do Loop de Monte Carlo
for (mc = 0; mc < REP; mc++){
// Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est
mY = mX * mB_verd + rant(n,ta,df)' * P;
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
//Matriz de Covariancias de vec(mB_est-mB_verd)
mOmega = (df/(df-2))*(mSigma_c ** (ta*mxtxinv));
svd = decsvd((ta*mxtxinv), &mu1, &md1, &mv1);
P1 = P**(mv1*(diag(md1).^(0.5))*mv1'); //Matriz Raiz Quadrada de mSigma

// Inicio do Teste Sequencial Corrigido
ftesteseqcor1(ta, mB_est, curt, mX, mxtxinv, mOmega, P1, &posto_estcor);

for(i = 0; i < n + 1; i++) {
if(posto_estcor == i) {
cont_aceitar_seqcor[i][0]++;
}
```

```
aux_seqcor[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial

}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seqcor = (cont_aceitar_seqcor/REP);

// Vies do Posto Estimado
E_posto_estcor = 0.0;
for(i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_estcor += i*Prop_seqcor[i][0];

Vies_posto_estcor = E_posto_estcor - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_estcor = 0.0;
for(i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_estcor += ((i^2)*Prop_seqcor[i][0]); // E(^k^2)

EQM_posto_estcor  = E_posto2_estcor
- (2 * k_verd * E_posto_estcor) + k_verd^2;


/*######################### FIM DO TESTE CORRIGIDO #####################*/
// Impressao dos Dados
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n----------------Teste Sequencial------------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for(i = 0; i <= n; i++){
println("   ",aux_seqcor[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seqcor[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seqcor[i][0]);
}
println("\n Vies_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",Vies_posto_estcor);
println("\n EQM_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",EQM_posto_estcor);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra
} //Termino do preenchimento da matriz verdadeira
} //Termino do loop para preenchimento da matriz verdadeira
else{//Início dos cálculos para matrizes com três colunas
mB_verd = zeros(3,3);
for(j=0; j<3; j++){
for(t = 0; t<s; t++)
mB_verd[t][] = mB[18+j*3+t][];
print(mB_verd);
df = 5;
curt = 2/(df-4);
k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
```

```
P = mv0*diag(md0)*mv0';  //Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c

// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for (ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
ranseed({1976, 2011});
mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seqcor = zeros(n+1,1);
cont_aceitar_seqcor = zeros(n+1,1);

ranseed(-1);

// Inicio do Loop de Monte Carlo
for (mc = 0; mc < REP; mc++){
// Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est
mY = mX * mB_verd + rant(n,ta,df)' * P;
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
//Matriz de Covariancias de vec(mB_est-mB_verd)
mOmega = (df/(df-2))*(mSigma_c ** (ta*mxtxinv));
svd = decsvd((ta*mxtxinv), &mu1, &md1, &mv1);
P1 = P**(mv1*(diag(md1).^(0.5))*mv1'); //Matriz Raiz Quadrada de mSigma

// Inicio do Teste Sequencial Corrigido
ftesteseqcor1(ta, mB_est, curt, mX, mxtxinv, mOmega, P1, &posto_estcor);

for(i = 0; i < n + 1; i++) {
if(posto_estcor == i) {
cont_aceitar_seqcor[i][0]++;
}
aux_seqcor[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial

}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seqcor = (cont_aceitar_seqcor/REP);

// Vies do Posto Estimado
E_posto_estcor = 0.0;
for(i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_estcor += i*Prop_seqcor[i][0];

Vies_posto_estcor = E_posto_estcor - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_estcor = 0.0;
for(i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_estcor += ((i^2)*Prop_seqcor[i][0]); // E(^k^2)

EQM_posto_estcor  = E_posto2_estcor
- (2 * k_verd * E_posto_estcor) + k_verd^2;


/*######################### FIM DO TESTE CORRIGIDO #####################*/
```

```
// Impressao dos Dados
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n----------------Teste Sequencial----------------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for(i = 0; i <= n; i++){
println("   ",aux_seqcor[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seqcor[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seqcor[i][0]);
}
println("\n Vies_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",Vies_posto_estcor);
println("\n EQM_posto_estimado_seqcor: ","%10.4f",EQM_posto_estcor);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra
} //Termino do preenchimento da matriz verdadeira
} //Termino do loop para preenchimento da matriz verdadeira

print("\n\n\t\t Data: ", date());
print("\n\n\t\t Hora: ", time());
print("\n\n\t\t Tempo Total de Execucao:",timespan(dExecTime),"\minutos");

}//Termino do loop para o estimador do posto de todas as matrizes
}// Termino do Corpo Principal

/***********************************************************
 * PROGRAMA: testenaocorrigido.ox                          *
 * AUTOR: Davis Matias de Oliveira                         *
 * DATA: 17 de junho de 2011                               *
 * ÚLTIMA MODIFICAÇÃO: fevereiro de 2012                   *
 *                                                         *
 * Este programa faz uma estimativa do posto da matriz dos*
 * parâmetros desconhecidos do modelo de equações simultâ-*
 * neas lineares, e calcula o viés e o EQM de tal estima- *
 * dor quando a matriz de covariâncias assintotica é co-  *
 * nhecida e a matriz de erros aleatórios tem distribuição*
 * t-Student multivariada.                                 *
 ***********************************************************/
#include <oxstd.h>
#include <oxprob.h>
#include <funcoes.h>

decl MIN = 50;
decl MAX = 200;
decl REP = 10000;


main(){
decl i, j, s, t, mc, ta, dExecTime, n, svd, mu, mv, md, mu0, md0, mv0,
g, glc, posto_est, k, L, U, V, U2, V2, Q, G, quantil, E, S,
mSigma_c, mSigma, P, mX, mY, svd0,
mB_verd, mB_est, seqposto, m, k_verd, y, cont_aceitar_seq,
E_posto_est, mxtxinv, Prob_teste_seq, E_posto_est2,
EQM_posto_est, aux_seq, Prop_seq, Vies_posto_est,
E_posto2_est, df, mOmega;
```

```
decl mB = <1,0;0,0;
1,0;0,2;
1,0;0,0;0,0;
1,0;0,2;0,0;
1,0;0,0;0,0;0,0;
1,0;0,2;0,0;0,0;
1,0,0;0,0,0;0,0,0;
1,0,0;0,2,0;0,0,0;
1,0,0;0,2,0;0,0,3>;

// Inicio do Relogio
dExecTime = timer();

  //Inicio do Loop que preenche as matrizes verdadeiras
for(s = 1; s < 2; s++){
if(s < 3){
mB_verd = zeros(2+s,2);
for(j = 1; j < 2; j++){
for(t = 0; t < (2+s); t++)
mB_verd[t][] = mB[s*(3+s)+j*(2+s)+t][];
print(mB_verd);

df = 5;
k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
//Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c
P = mv0*diag(md0)*mv0';

// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for(ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
ranseed({1976, 2011});

mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seq = zeros(n+1,1);
cont_aceitar_seq = zeros(n+1,1);

ranseed(-1);


// Inicio do Loop de Monte Carlo
for(mc = 0; mc < REP; mc++){
// Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est
mY = mX * mB_verd + rant(n,ta,df)'*P;
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
mOmega = (df/(df-2))*(mSigma_c ** (ta*mxtxinv));

// Inicio do Teste Sequencial
ftesteseq(ta, mB_est, mOmega, &posto_est);
```

```
for(i = 1; i < n + 1; i++) {
if(posto_est == i)
cont_aceitar_seq[i][0]++;
aux_seq[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial

}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seq = cont_aceitar_seq / REP;

//Esperança do posto estimado
E_posto_est = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_est += i*Prop_seq[i][0];

// Vies do Posto Estimado
Vies_posto_est = E_posto_est - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_est = 0.0;
for(i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_est += ((i^2)*Prop_seq[i][0]); // E(^k^2)

EQM_posto_est  = E_posto2_est
- (2 * k_verd * E_posto_est) + k_verd^2;


// Impressao dos Dados
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n----------------Teste Sequencial---------------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for (i = 1; i < n + 1; i++){
println("   ",aux_seq[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seq[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seq[i][0]);
}
println("\n Vies_posto_estimado_seq: ","%10.4f",Vies_posto_est);
println("\n EQM_posto_estimado_seq: ","%10.4f",EQM_posto_est);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra com duas colunas
}
}/*Termino do loop para preencher a matriz
   verdadeira com duas colunas(Termino do if)*/

else{//Início dos cálculos para matrizes com três colunas
mB_verd = zeros(3,3);
for(j=0; j<3; j++){
for(t = 0; t<s; t++)
mB_verd[t][] = mB[18+j*3+t][];
print(mB_verd);

df = 5;
```

```
k_verd = rank(mB_verd);
m = rows(mB_verd);
n = columns(mB_verd);
S = ranu(n, n);
mSigma_c = S * S';
svd0 = decsvd(S', &mu0, &md0, &mv0);
P = mv0*diag(md0)*mv0';  //Matriz Raiz Quadrada de mSigma_c

// Loop Para Diferentes Tamanhos da Amostra
for(ta = MIN; ta <= MAX; ta += 50) {
mX = 1~ranu(ta, m-1);
aux_seq = zeros(n+1,1);
cont_aceitar_seq = zeros(n+1,1);

// Inicio do Loop de Monte Carlo
for(mc = 0; mc < REP; mc++){
// Matrizes de Variaveis Dependentes e mB_est
mY = mX * mB_verd + rant(ta,n,df)*P';
olsc(mY, mX, &mB_est, &mxtxinv);
mOmega = (df/(df-2))*(mSigma_c ** (ta*mxtxinv));

// Inicio do Teste Sequencial
ftesteseq(ta, mB_est, mOmega, &posto_est);

for(i = 1; i < n + 1; i++) {
if(posto_est == i)
cont_aceitar_seq[i][0]++;
aux_seq[i][0] = i;
}// Fim do Teste Sequencial

}// Termino do Loop de Monte Carlo

Prop_seq = cont_aceitar_seq / REP;

//Esperança do posto estimado
E_posto_est = 0.0;
for (i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto_est += i*Prop_seq[i][0];

// Vies do Posto Estimado
Vies_posto_est = E_posto_est - k_verd;

// EQM Para do Posto Estimado
E_posto2_est = 0.0;
for(i = 1; i < n + 1; i++)
E_posto2_est += ((i^2)*Prop_seq[i][0]); // E(^k^2)

EQM_posto_est  = E_posto2_est
- (2 * k_verd * E_posto_est) + k_verd^2;

/*######################### FIM DO TESTE CORRIGIDO ###################*/
// Impressao dos Dados
```

```
println("\n\t\t\t\tTamanho amostral:  ", ta);
println("\n----------------Teste Sequencial---------------------------");
println("\nPosto \t\t", "Num. de replicas \t\t ", "Probabilidade ");
for (i = 1; i < n + 1; i++){
println("   ",aux_seq[i][0], " \t\t\t  ",
cont_aceitar_seq[i][0] ," \t\t ", "%15.4f",Prop_seq[i][0]);
}
println("\n Vies_posto_estimado_seq: ","%10.4f",Vies_posto_est);
println("\n EQM_posto_estimado_seq: ","%10.4f",EQM_posto_est);

}//Termino do Loop Para Diferentes Tamanhos de Amostra
}
}//termino do else(calculos para matrizes de três colunas)
print("\n\n\t\t Data: ", date());
print("\n\n\t\t Hora: ", time());
print("\n\n\t\tTempo Total de Execucao:",timespan(dExecTime),"\minutos");

}//Termino do loop para o estimador do posto de todas as matrizes
}// Termino do Corpo Principal
```

C.3 Funções Auxiliares

```
#include <oxstd.h>
#import <maximize>

/*##########   FUNCAO PARA TESTE SEQUENCIAL   #########*/
ftesteseq(const ta, const mB_est, const mSigma, const adFunc){
decl svd, mu, mv, md, g, gl, posto_est, k, L, U, m, r,
V, U2, V2, Q, Q0, quantil, i, n, aux_seq, cont_aceitar_seq,
E, Et;

m = rows(mB_est);
n = columns(mB_est);

/*Decomposicao em valores singulares da
matriz B estimada de ordem m por n*/
svd = decsvd(mB_est, &mu, &md, &mv);
V = mv;

/*Matriz ortogoonal, U, completada para
a ordem m por m  a partir de mu(m por n)*/
if(m == columns(mu))
U = mu;
else
U = mu~nullspace(mu);

for(k = 1; k < n; k++){ // Inicio do Loop para testar H0
U2 = U[][k:m-1];  // Partição das matrizes U e V
V2 = V[][k:n-1];
r = n -k;
/*Matriz que filtra apenas os n-k
```

```
valores singulares de B estimada*/
E = zeros(r,r*(m-k));
for(i = 0; i < r; i++)
E[i][i*(m-k)+i]=1;

/*Restrição não linear dos parâmetros
(apenas os n-k menores valores singulares)*/
g = md[k:]';

//Matriz de Covariancia Assintotica de ta*g
Q0 = E * (V2' ** U2');
Q = Q0 * mSigma * Q0';

// Estatistica de Teste
L = ta*(g'*(invertsym(Q))*g);

r = n - k; // Graus de Liberdade Para a Chi-quadrado

/*Quantil da Chi-quadrado Vezes a Funcao C_ta = sqrt(log(ta))*/
quantil = quanchi(0.95,r) * (sqrt(log(ta)));

/*Condicao Para Aceitar Ho*/
if(L <= quantil)
break;

} //Fim do Loop Para Testar Ho (Sequencial)

posto_est = k; //Valor estimado do posto

if(L > quantil)
posto_est = n;

adFunc[0] = posto_est;
}  //Fim da função para o teste sequencial

/*######## FUNCAO PARA PREENCHER A MATRIZ COMUTACAO Kpp #######*/
fKpp(const m, const n, const adFunc) {
decl r_i, s_i, r_j, s_j, p, p2, Kpp;

p = m * n;
p2 = p ^ 2;
Kpp = zeros(p2, p2);

for(r_i = 0; r_i < p; r_i++) {
for(s_i = 0; s_i < p; s_i++) {
for(r_j = 0; r_j < p; r_j++) {
for(s_j = 0; s_j < p; s_j++) {
if((r_i == s_j) && (s_i == r_j))
Kpp[(r_i * p) + s_i][(r_j * p) + s_j] = 1;
else
Kpp[(r_i * p) + s_i][(r_j * p) + s_j] = 0;
}
```

```
}
}
}

adFunc[0] = Kpp;

}
/*##### FUNCAO PARA PREENCHER A MATRIZ COMUTACAO Kp^2p ####*/
fKp2p(const m, const n, const adFunc) {
decl r_i, s_i, r_j, s_j, p, p2, p3, Kp2p;

p = m * n;
p2 = p ^ 2;
p3 = p ^ 3;
Kp2p = zeros(p3, p3);

for(r_i = 0; r_i < p2; r_i++) {
for(s_i = 0; s_i < p; s_i++) {
for(r_j = 0; r_j < p; r_j++) {
for(s_j = 0; s_j < p2; s_j++) {
if((r_i == s_j) && (s_i == r_j))
Kp2p[(r_i * p) + s_i][(r_j * p2) + s_j] = 1;
else
Kp2p[(r_i * p) + s_i][(r_j * p2) + s_j] = 0;
}
}
}
}

adFunc[0] = Kp2p;

}
/*##### FUNCAO PARA PREENCHER A MATRIZ COMUTACAO Kp^2p ######*/
fKpp2(const m, const n, const adFunc) {
decl r_i, s_i, r_j, s_j, p, p2, p3, Kpp2;

p = m * n;
p2 = p ^ 2;
p3 = p ^ 3;
Kpp2 = zeros(p3, p3);

for(r_i = 0; r_i < p; r_i++) {
for(s_i = 0; s_i < p2; s_i++) {
for(r_j = 0; r_j < p2; r_j++) {
for(s_j = 0; s_j < p; s_j++) {
if((r_i == s_j) && (s_i == r_j))
Kpp2[(r_i * p2) + s_i][(r_j * p) + s_j] = 1;

}
}
}
}
```

```
adFunc[0] = Kpp2;

}
/*####### FUNCAO PARA PREENCHER A MATRIZ COMUTACAO Kpp^3 #######*/
fKpp3(const m, const n, const adFunc) {
decl r_i, s_i, r_j, s_j, p, p2, p3, p4, Kpp3;

p = m * n;
p2 = p^2;
p3 = p^3;
p4 = p^4;
Kpp3 = zeros(p4, p4);

for(r_i = 0; r_i < p; r_i++) {
for(s_i = 0; s_i < p3; s_i++) {
for(r_j = 0; r_j < p3; r_j++) {
for(s_j = 0; s_j < p; s_j++) {
if((r_i == s_j) && (s_i == r_j))
Kpp3[(r_i * p3) + s_i][(r_j * p) + s_j] = 1;

}
}
}
}

adFunc[0] = Kpp3;

}
/*FUNCAO PARA PREENCHER A RESTRICAO NAO LINEAR g E AS MATRIZES J E L*/
fRestNlinear(const ma, const k, const ad0Func, const ad1Func,
const ad2Func, const ad3Func, const ad4Func ){
decl i, j, l, n, r, n2, m, p, p2, g, mu, md, mv, vdiagdp1GG,
invMP, In, In2, Knn, dpinvMP, mdpinvMP, vdiagdp2GG,
mAux, mdp2G, invGGt, dp2G, svd, baseR, E, V, V2, U, U2,
G, mJ, mL, mdpV2, dpV2,  dp1G, mdp1G, AV2;

m = rows(ma);
n = columns(ma);
r = n-k;
n2 = n^2;
p = m*n;
p2 = p^2;
In = unit(n);
In2 = unit(n2);

// Preenche a Matriz Filtro E
E = zeros(r,r*(m-k));
for(i = 0; i < r; i++)
E[i][i*(m-k)+i] = 1;

//SVD de ma
```

```
svd = decsvd(ma, &mu, &md, &mv);
V = mv;

// Matriz ortogoonal, U, completada para a ordem m por m
if(m == columns(mu))
U = mu;
else
U = mu~nullspace(mu);


//Matrizes U2 e V2
U2 = U[][k:m-1];

if(k == n)
V2 = V;
else
V2 = V[][k:n-1];

G = E*(V2' ** U2'); //Matriz G = dg/dbeta'

baseR = unit(p); //Matriz Base de R^p

//Matriz (G*G')^(-1)
invGGt = unit(n-k);

/*Vetores Com os Elementos da Diagoanl das Derivadas Parciais de
 1ª Ordem da Matriz Inversa Na Estatística de Wald:(GG')^(-1)_(j)*/
vdiagdp1GG = zeros(p,r);

//Inversa Generalizada de Moore-Penrose
/*Cada Coluna de invMP é o vec de B^+_l, l =0,...,n-1 */
invMP = zeros(n2,n);
for(i = 0; i < n; i++)
for(j = 0; j < n; j++){
if(j != i)
invMP[][i] += vec(((md[i]^2-md[j]^2)^(-1))*V[][j]*V[][j]');
}

//Chamada a funcao Kpp (com p = n)
fKpp(1, n, &Knn);
mAux = (In2+Knn)*(In**ma');
AV2 = ma*V2;

//Matriz das Derivadas Parciais das Colunas de V2
/*Cada Coluna de mdpV2 é o vec da Respectiva Derivada Parcial de V2*/
mdpV2 = zeros(n*r,p);
dpV2 = zeros(n,r);
for(l = 0; l < p; l++){
for(i = 0; i < r; i++)
dpV2[][i] = (V2[][i]'**(shape(invMP[][k+i],n,n)))*mAux[][l];
mdpV2[][l] = vec(dpV2);
}
```

```
/*Matriz das Derivadas Parciais de 1ª Ordem das Colunas de G'*/
/*Cada Coluna de mdp1G é o vec da Respectiva Derivada Parcial de G'*/
mdp1G = zeros(p*r,p);
dp1G = zeros(p,r);
for(l = 0; l < p; l++){
for(i = 0; i < r; i++)
dp1G[][i] = -(md[k+i]^(-3))*(V2[][i]'**AV2[][i]')*baseR[][l]*
(V2[][i]**AV2[][i])+(md[k+i]^(-1))*(((V2[][i]'**
(shape(invMP[][k+i],n,n)))*mAux[][l])**AV2[][i]+
V2[][i]**(shape(baseR[][l],m,n)*V2[][i]+ma*((V2[][i]'**
shape(invMP[][k+i],n,n))*mAux[][l])));
mdp1G[][l] = vec(dp1G);
}

mJ = shape(mdp1G[][0],p,r)*G; //Preenche a matriz J
for(i = 1; i < p; i++)
mJ |=  shape(mdp1G[][i],p,r)* G;

/*Vetores Com os Elementos da Diagoanl das Derivadas Parciais de
 2ª Ordem da Matriz Inversa Na Estatística de Wald:(GG')^(-1)_(ij)*/
vdiagdp2GG = zeros(p2,r);

/*Matriz das Derivadas Parciais de 1ª Ordem da Inversa de
Moore-Penrose*/
/*Cada Coluna Desta Matriz é uma Derivada Parcial do vetor
vec(B^+_(k))|vec(B^+_(k+1))|...|vec(B^+_(n-1)) (Concatenação)*/
mdpinvMP = zeros(n2*r,p);
dpinvMP = zeros(n2,r);
for(l = 0; l < p; l++){
for(i = 0; i < r; i++){
for(j = 0; j < n; j++){
if(j != k+i)
dpinvMP[][i] += vec(((md[k+i]^2-md[j]^2)^(-2))*((V[][j]'**
V[][j]')-(V2[][i]'**V2[][i]'))*mAux[][l]*V[][j]*V[][j]'+
((md[k+i]^2-md[j]^2)^(-1))*((V[][j]'**shape(invMP[][j],n,n))*
mAux[][l]*V[][j]'+V[][j]*(mAux[][l])'*(V[][j]**
shape(invMP[][j],n,n))));
}
}
mdpinvMP[][l] = vec(dpinvMP);
}

/*Matriz das Derivadas Parciais de 2ª Ordem da Matriz G': G'_(ij)*/
/*Cada Coluna Desta Matriz é uma Derivada Parcial de 2ª Ordem do
vetor vecG' - deriva 1º com relação a j depois com relação a i*/
mdp2G = zeros(p*r,p2);
dp2G =zeros(p,r);
for(i =0; i < p; i++)
for(j = 0; j < p; j++){
for(l = 0; l < r; l++){
dp2G[][l] = 3*(md[k+l]^(-5))*G[l][j]*G[l][i]*G[l][]'-
```

```
(md[k+l]^(-3))*( shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]'**AV2[][l]'+
V2[][l]'**(shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]'*ma'+V2[][l]'*
shape(baseR[][j],m,n)'))*baseR[][i]*G[l][]'-(md[k+l]^(-3))*
G[l][i]*(shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]**AV2[][l]+V2[][l]**
(shape(baseR[][j],m,n)*V2[][l]+ma*shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]))-
(md[k+l]^(-3))*G[l][j]*(((V2[][l]'**shape(invMP[][k+l],n,n))*
mAux[][i])**AV2[][l]+V2[][l]**(shape(baseR[][i],m,n)*V2[][l]+
ma*(V2[][l]'**shape(invMP[][k+l],n,n))*mAux[][i]))+
(md[k+l]^(-1))*(((shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]'**
shape(invMP[][k+l],n,n)+V2[][l]'**shape(mdpinvMP[l*n2:(l+1)*
n2-1][j],n,n))*mAux[][i]+(V2[][l]'**shape(invMP[][k+l],n,n))*
2*(In2+Knn)*(In**(shape(baseR[][i],m,n))')*baseR[][i])**
AV2[][l]+((V2[][l]'**shape(invMP[][k+l],n,n))*mAux[][i])**
(shape(baseR[][j],m,n)*V2[][l]+ma*shape(mdpV2[][j],n,r)[][l])+
shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]**(shape(baseR[][i],m,n)*V2[][l])+
V2[][l]**(shape(baseR[][i],m,n)*shape(mdpV2[][j],n,r)[][l])+
shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]**((ma*(V2[][l]'**
shape(invMP[][k+l],n,n)))*mAux[][i])+V2[][l]**
((shape(baseR[][j],m,n)*(V2[][l]'**shape(invMP[][k+l],n,n))*
mAux[][i]+ma*(shape(mdpV2[][j],n,r)[][l]'**
shape(invMP[][k+l],n,n)+V2[][l]'**shape(mdpinvMP[l*n2:(l+1)*
n2-1][j],n,n))*mAux[][i]+ma*(V2[][l]'**shape(invMP[][k+l],n,n))*
2*(In2+Knn)*(In**shape(baseR[][j],m,n)')*baseR[][i])));
}
mdp2G[][i*p+j] = vec(dp2G);
}

mL = zeros(p2,p2); //Inicializa  L
for(i = 0; i < p; i++)
for(j = 0; j < p; j++)
for(l = 0; l < p; l++)
mL[i*p+j][l*p:(l+1)*p-1] = (1/4)*(shape(mdp1G[][i],p,r))[j][]*
shape(mdp1G[][l],p,r)'+(1/3)*(shape(mdp2G[][i*p+l],p,r))[j][]*G;

ad0Func[0] = G;
ad1Func[0] = mJ;
ad2Func[0] = mL;
ad3Func[0] = mdp1G;
ad4Func[0] = mdp2G;

}
/*##### FUNCAO PARA  CALCULAR OS COEFICIENTES a_i #####*/
fCoefa_i(const G, const mL, const Kpp, const adFunc){
decl a, i, p, p2, p4, A, Ip, PGl, barPGl, Ip2;

p = columns(G);
p2 = p^2;
p4 = p^4;
PGl = G' * (invertsym(G * G')) * G;
Ip = unit(p);
Ip2 = unit(p2);
barPGl = Ip - PGl;
```

```
A = zeros(p4,3);
A[][0] = vec(mL*((Ip2+Kpp)*(barPGl**barPGl)+(vec(barPGl))*
(vec(barPGl))'));

A[][1] = vec(mL*((Ip2+Kpp)*((barPGl**PGl)+(PGl**barPGl)+
(vec(barPGl))*(vec(PGl))'+ (vec(PGl))*(vec(barPGl))')));

A[][2] = vec(mL*((Ip2+Kpp)*(PGl ** PGl)+ (vec(PGl))*
(vec(PGl))'));

a = zeros(3,1);
for(i = 0; i < 3; i++)
a[i] = trace(shape(A[][i],p2,p2));

adFunc[0] = a;


}
/*#### FUNCAO PARA  CALCULAR OS COEFICIENTES b_i ####*/
fCoefb_i(const mJ, const G, const Kpp, const Kp2p, const Kpp2,
const adFunc){
decl b, i, p, p2, p3, B, H, PGl, barPGl, I_p2, I_p3;

p = columns(G);
p2 = p^2;
p3 = p^3;
I_p2 = unit(p2);
I_p3 = unit(p3);
PGl = G' * (invertsym(G * G')) * G;
barPGl = I_p2 - PGl;
I_p3 = unit(p3);
H = I_p3 + Kpp2 + Kp2p;

B[][0] = vec(H*(barPGl**barPGl**barPGl)+H*(barPGl**((vec(barPGl))*
(vec(barPGl))'))*H+barPGl**(Kpp*(barPGl**barPGl))+(Kpp*(barPGl**
barPGl))**barPGl+Kpp2*(barPGl**(Kpp*(barPGl**barPGl)))*Kp2p);

B[][1] = vec(H*((PGl**barPGl**barPGl)+(PGl**((vec(barPGl))*
(vec(barPGl))'))+(barPGl**((vec(PGl))*(vec(barPGl))'))+(barPGl**
((vec(barPGl))*(vec(PGl))')))*H+PGl**(Kpp*(barPGl**barPGl))+
barPGl**(Kpp*(PGl**barPGl))+barPGl**(Kpp*(barPGl**PGl))+
(Kpp*(PGl**barPGl))**barPGl+(Kpp*(barPGl**PGl))**barPGl+
(Kpp*(barPGl**barPGl))**PGl+Kpp2*(PGl**(Kpp*(barPGl**barPGl))+
barPGl**(Kpp*(PGl**barPGl))+barPGl**(Kpp*(barPGl**PGl)))*Kp2p);

B[][2] = vec(H*((barPGl**PGl**PGl)+(barPGl**((vec(PGl))*(vec(PGl))'))
+(PGl**((vec(barPGl))*(vec(PGl))'))+(PGl**((vec(PGl))*
(vec(barPGl))')))*H+barPGl**(Kpp*(PGl**PGl))+PGl**
(Kpp*(barPGl**PGl))+PGl**(Kpp*(PGl**barPGl))+(Kpp*(barPGl**PGl))**
PGl+(Kpp*(PGl**barPGl))**PGl+(Kpp*(PGl**PGl))**barPGl
+Kpp2*(barPGl**(Kpp*(PGl**PGl))+PGl**(Kpp*(barPGl**PGl))
```

```
+PGl**(Kpp*(PGl**barPGl)))*Kp2p);

B[][3] = vec(H*(PGl**PGl**PGl)+H*(PGl**((vec(PGl))*(vec(PGl))’))*H
+PGl**(Kpp*(PGl**PGl))+(Kpp*(PGl**PGl))**PGl
+Kpp2*(PGl**(Kpp*(PGl**PGl)))*Kp2p);

b = zeros(4,1);
for(i = 0; i < 4; i++)
b[i] = (vec(mJ))’*shape(B[][i],p2,p2)*vec(mJ);

adFunc[0] = b;
}
/*COEFICIENTES DO VALOR CRITICO CORRIGIDO(COVARIÂNCIA IDENTIDADE)*/
/*funcao que devolve os coeficientes de corecao*/
fCoefnccor(const a, const b, const ta, const quantil, const adFunc){
decl alpha, i, c, quantilcor, r, n, k;

r = n-k;

alpha = zeros(4,1);
alpha[0] = (4*a[0]-b[1])/4;
alpha[1] = (4*a[1]+b[1]-b[2])/(4*r);
alpha[2] = (4*a[2]+b[2]-b[3])/(4*r*(r+2));
alpha[3] = b[3]/(4*r*(r+2)*(r+4));

c = 0;
for(i = 0; i < 4; i++)
c += alpha[i]*(quantil^i);

quantilcor = quantil + (ta^(-1))*c;

adFunc[0] = quantilcor;
}
/*---------FUNCOES PARA A CORRECAO DO QUANTIL-------*/
/*FUNCAO PARA PREENCHER AS MATRIZES J E L COM COVARIANCIA CONHECIDA*/
fmJmLCovConh(const k, const mB_est, const mSigma, const P1,
const adFunc0, const adFunc1, const adFunc2){
decl i, j, l, o, m, n, p, p2, r, r2, rp, dp1G, dp2G, mJ, mL, mdp1G,
mdp2G, Ir, Ir2, Psi, mAux, Krr, mdp1Psi, mLtil,
mdp2Psi, mdp2Psitil1, mdp2Psitil, vdiagdp1GG, invGGt,
vdiagdp2GG, ma, mdp1Gtil, mdp1Gtil1, mdp1Gtil2, mdp2Gtil, mdp2Gtil1,
M, Gtil, mdp1Psitil, baseR, G, kPsi, p3, b,
vecJtil;

fRestNlinear(mB_est, k, &G, &mJ, &mL, &mdp1G, &mdp2G);

m = rows(mB_est);
n = columns(mB_est);
r = n - k;
r2 = r^2;
Psi = invertsym(G*mSigma*G’);
Ir = unit(r);
```

```
Ir2 = unit(r2);
fKpp(1, r, &Krr);
mAux = (Ir2+Krr)*((G*mSigma)**Ir);
kPsi = Psi**Psi;
p = m*n;
rp = r*p;
p2 = p^2;
p3 = p^3;
baseR = unit(p2,p2);

//Matriz das Derivadas Parciais de 1ª Ordem de Psi
/*Cada uma das Colunas Desta é o vec da
 Respectiva Derivada Parcial de Psi*/
mdp1Psi = zeros(r2,p);
for(i = 0; i < p; i++)
mdp1Psi[][i] = -kPsi*mAux*vec(shape(mdp1G[][i],p,r)');

//Matriz da Derivadas Parciais de 1ª Ordem de Psi
/*Cada Coluna Desta Matiz é o vec da Respectiva
Derivada Vezes a Respectiva Coluna da Raiz Quadrada
de Sigma*/
mdp1Psitil = mdp1Psi*P1;

//Matriz das Derivadas Parciais de 2ª Ordem de Psi
/*Cada uma das Colunas Desta é o vec da Respectiva
Derivada Parcial de Psi*/
mdp2Psi = zeros(r2,p2);
for (i = 0; i < p; i++)
for(j = 0; j < p; j++)
mdp2G[][i*p+j] = -(((shape(mdp1Psi[][j],r,r)**Psi)+
(Psi**shape(mdp1Psi[][j],r,r)))*mAux*
vec(shape(mdp1G[][i],p,r)')+kPsi*(Ir2+Krr)*
((shape(mdp1G[][j],p,r)'*mSigma)**Ir)*
vec(shape(mdp1G[][i],p,r)')+kPsi*mAux*
vec(shape(mdp2G[][i*p+j],p,r)'));

//Matriz da Derivadas Parciais de 2ª Ordem de Psi-til
/*Cada Coluna Desta Matiz é o vec da Respectiva
Derivada Vezes a Respectiva Coluna da Raiz Quadrada
de Sigma*/
mdp2Psitil1 = zeros(r2*p,p);
M = zeros(r2,p);
for(i = 0; i < p; i++){
for(j = 0; j < p; j++)
M[][j] = mdp2Psi*baseR[][j*p+i];
mdp2Psitil1[][i] = vec(M*P1);
}

/*Cada Coluna Desta Matriz é o vec de
Derivadas de 2ª Ordem de Psi-til*/
mdp2Psitil = mdp2Psitil1*P1;
```

```
//Matriz G Vezes a Matriz Raiz Quadrada de Sigma(P): G-til
Gtil = G*P1;

/*Matriz Com Todas as Possibilidades Para as
Derivadas Parciais de G-til*/
/*Cada Coluna Desta Matriz é o vec da Respectiva Derivada
Parcial de G-til Vezes P1*/
mdp1Gtil1 = (Ir**P1')*mdp1G;
mdp1Gtil = mdp1Gtil1*P1;

//Vetor vecJtil
vecJtil = zeros(p3,1);
for(j = 0; j < p; j++)
for(b = 0; b < p; b++)
for(m = 0; m < p; m++)
vecJtil[j*p2+b*p+m][0] = Gtil'[j][]*shape(mdp1Psitil[][m],r,r)*
Gtil[][b]+shape(mdp1Gtil[][m],p,r)[j][]*Psi*Gtil[][b];

//Matriz das Derivas Parciais de 2ª Ordem de G'-til1
/*Cada Coluna Desta Matriz é o vec da Respectiva Derivada
Parcial de G'-til*/
mdp2Gtil1 = zeros(rp*p,p);
M = zeros(rp,p);
for(i = 0; i < p; i++){
for(j = 0; j < p; j++)
M[][j] = mdp2G*baseR[][j*p+i];
mdp2Gtil1[][i] = vec(M*P1);
}

/*Cada Coluna Desta Matriz é o vec da Respectiva Derivada
Parcial de G'-til*/

//Matriz das Derivas Parciais de 2ª Ordem de G'-til
mdp2Gtil = mdp2Gtil1*P1;

//Matriz L-til preenchida elemento por elemento
mLtil = zeros(p2,p2);
for(i = 0; i < p; i++)
for(j = 0; j < p; j++)
for(l = 0; l < p; l++)
for(o = 0; o < p; o++)
mLtil[i*p+j][l*p+o] = (0.5)*Gtil'[i][]*shape(mdp2Psitil[l*
r2:(l+1)*r2-1][o],r,r)*Gtil[][j]+shape(mdp1Gtil[][l],p,r)[i][]*
shape(mdp1Psitil[][o],r,r)*Gtil[][j]+(1/4)*
shape(mdp1Gtil[][l],p,r)[i][]*Psi*shape(mdp1Gtil[][o],p,r)[j][]'+
(1/3)*shape(mdp2Gtil[l*rp:(l+1)*rp-1][o],p,r)[i][]*Psi*Gtil[][j];

adFunc0[0] = Gtil;
adFunc1[0] = vecJtil;
adFunc2[0] = mLtil;
}
/*### FUNCAO PARA  CALCULAR OS COEFICIENTES a_i-til ###*/
```

```
fCoefa_itil(const Gtil, const mLtil, const Kpp, const adFunc){
decl atil, i, p, p2, A, Ip, PGltil, barPGltil, Ip2;

p = columns(Gtil);
p2 = p^2;
PGltil = Gtil' * (invertsym(Gtil * Gtil')) * Gtil;
Ip = unit(p);
Ip2 = unit(p2);
barPGltil = Ip - PGltil;

A = zeros(p^4,3);
A[][0] = vec(mLtil*((Ip2+Kpp)*(barPGltil**barPGltil)+vec(barPGltil)*
(vec(barPGltil))'));

A[][1] = vec(mLtil*((Ip2+Kpp)*((barPGltil**PGltil)+(PGltil**barPGltil)+
(vec(barPGltil))*(vec(PGltil))'+(vec(PGltil))*(vec(barPGltil))')));

A[][2] = vec(mLtil*((Ip2+Kpp)*(PGltil ** PGltil)+ (vec(PGltil))*
(vec(PGltil))'));

atil = zeros(3,1);
for(i = 0; i < 3; i++)
atil[i] = trace(shape(A[][i],p2,p2));

adFunc[0] = atil;


}
/*#### FUNCAO PARA  CALCULAR OS COEFICIENTES b_i-til ####*/
fCoefb_itil(const vecJtil, const Gtil, const Kpp, const Kp2p,
const Kpp2, const adFunc){
decl btil, i, p, p2, p3, B, H, PGltil, barPGltil, I_p, I_p2, I_p3,
kbarPGltil;

p = columns(Gtil);
p2 = p^2;
p3 = p^3;
I_p = unit(p);
I_p2 = unit(p2);
I_p3 = unit(p3);
PGltil = Gtil' * (invertsym(Gtil * Gtil')) * Gtil;
barPGltil = I_p - PGltil;
kbarPGltil = barPGltil**barPGltil;
I_p3 = unit(p3);
H = I_p3 + Kpp2 + Kp2p;

B = zeros(p^6,4);
B[][0] = vec(H*(kbarPGltil**barPGltil)+H*(barPGltil**((vec(barPGltil))*
(vec(barPGltil))'))*H+barPGltil**(Kpp*kbarPGltil)+(Kpp*kbarPGltil)**
barPGltil+Kpp2*(barPGltil**(Kpp*kbarPGltil))*Kp2p);

B[][1] = vec(H*((PGltil**kbarPGltil)+(PGltil**((vec(barPGltil))*
```

```
(vec(barPGltil))'))+(barPGltil**((vec(PGltil))*(vec(barPGltil))'))+
(barPGltil**((vec(barPGltil))*(vec(PGltil))')))*H+PGltil**
(Kpp*kbarPGltil)+barPGltil**(Kpp*(PGltil**barPGltil))
+barPGltil**(Kpp*(barPGltil**PGltil))+(Kpp*(PGltil**barPGltil))**
barPGltil+(Kpp*(barPGltil**PGltil))**barPGltil+(Kpp*kbarPGltil)**
PGltil+Kpp2*(PGltil**(Kpp*kbarPGltil)+barPGltil**(Kpp*(PGltil**
barPGltil))+barPGltil**(Kpp*(barPGltil**PGltil)))*Kp2p);

B[][2] = vec(H*((barPGltil**PGltil**PGltil)+(barPGltil**
((vec(PGltil))*(vec(PGltil))'))+(PGltil**((vec(barPGltil))*
(vec(PGltil))'))+(PGltil**((vec(PGltil))*(vec(barPGltil))')))*H
+barPGltil**(Kpp*(PGltil**PGltil))+PGltil**(Kpp*(barPGltil**PGltil))
+PGltil**(Kpp*(PGltil**barPGltil))+(Kpp*(barPGltil**PGltil))**PGltil
+(Kpp*(PGltil**barPGltil))**PGltil+(Kpp*(PGltil**PGltil))**barPGltil
+Kpp2*(barPGltil**(Kpp*(PGltil**PGltil))+PGltil**(Kpp*(barPGltil**PGltil))
+PGltil**(Kpp*(PGltil**barPGltil)))*Kp2p);

B[][3] = vec(H*(PGltil**PGltil**PGltil)+H*(PGltil**((vec(PGltil))*
(vec(PGltil))'))*H+PGltil**(Kpp*(PGltil**PGltil))+(Kpp*(PGltil**
PGltil))**PGltil+Kpp2*(PGltil**(Kpp*(PGltil**PGltil)))*Kp2p);

btil = zeros(4,1);
for(i = 0; i < 4; i++)
btil[i] = vecJtil'*shape(B[][i],p3,p3)*vecJtil;

adFunc[0] = btil;


}
/*## COEFICIENTES DO VALOR CRITICO CORRIGIDO(COVARIÂNCIA CONHECIDA) ##*/
fQuantilCor1 (const mB_est, const k, const atil, const btil, const ta,
const quantil, const adFunc1, const adFunc2){
decl alphatil, i, ctil, quantilcor, r, n;

n = columns(mB_est);
r = n-k;

alphatil = zeros(4,1);
alphatil[0] = (4*atil[0]-btil[1])/4;
alphatil[1] = (4*atil[1]+btil[1]-btil[2])/(4*r);
alphatil[2] = (4*atil[2]+btil[2]-btil[3])/(4*r*(r+2));
alphatil[3] = btil[3]/(4*r*(r+2)*(r+4));

ctil = 0;
for(i = 0; i < 4; i++)
ctil += alphatil[i]*(quantil^i);

quantilcor = quantil + ctil/ta; //Valor do quantil corrigido

adFunc1[0] = quantilcor;
adFunc2[0] = alphatil;
```

```
}
/*FUNCAO PARA TESTE SEQUENCIAL CORRIGIDO DE ACORDO COM
 A DISTRIBUIÇÃO NORMAL*/
ftesteseqcor(const ta, const mB_est, const mSigma, const P1,
const adFunc){
decl svd, mu, mv, md, g, r, posto_estcor, k, L, U, m,
V, U2, V2, Q, Q0, quantil, G, i, n, aux_seq, cont_aceitar_seq,
quantilcor, atil, btil, Gtil, mLtil, vecJtil, Kpp, Kp2p,
Kpp2, E, alphatil;

m = rows(mB_est);
n = columns(mB_est);

/*Decomposicao em valores singulares da matriz B estimada de
  ordem m por n*/
svd = decsvd(mB_est, &mu, &md, &mv);
V = mv;

/*Matriz ortogoonal, U, completada para a ordem m por m*/
if(m == rows(diag(md)))
U = mu;
else
U = mu~nullspace(mu);

/*Partição das matrizes U e V*/
for(k = 1; k < n; k ++) { // Inicio do Loop para testar H0
U2 = U[][k:m-1];
V2 = V[][k:n-1];

/*Matriz que filtra apenas os valores singulares de B estimada*/
E = zeros(n-k,(n-k)*(m-k));
for(i = 0; i < n-k; i++)
E[i][i*(m-k)+i]=1;

Q0 = E * (V2' ** U2');
Q =  Q0 * mSigma * Q0';

g = md[k:]';

    L = ta*(g'*(invertsym(Q))*g); //Estatistica de Teste

r = n-k; //Graus de Liberdade Para a Chi-quadrado

/*Quantil da Chi-quadrado Vezes a Funcao C_ta = sqrt(log(ta))*/
quantil = quanchi(0.95, r) * (sqrt(log(ta)));

fmJmLCovConh(k, mB_est, mSigma, P1, &Gtil, &vecJtil, &mLtil);

fKpp(m, n, &Kpp);

fCoefa_itil(Gtil, mLtil, Kpp, &atil);
```

```
fKp2p(m, n, &Kp2p);

fKpp2(m, n, &Kpp2);

fCoefb_itil(vecJtil, Gtil, Kpp, Kp2p, Kpp2, &btil);

/*Funcao que devolve o valor corrigido do quantil*/
fQuantilCor1 (mB_est, k, atil, btil, ta, quantil, &quantilcor, &alphatil);

/*Condicao Para Aceitar Ho*/
if(L <= quantilcor)
   break;

} //Fim do Loop Para Testar Ho (Sequencial)

posto_estcor = k;

/*Condicao Para Rejeitar Ho*/
if(L > quantilcor)
posto_estcor = n;

adFunc[0] = posto_estcor;
}
/*###### COEFICIENTES DO QUANTIL CORRIGIDO DA T-DISTRIBUIÇÃO ######*/
fCoeftsD_c(const ta, const curt, const mxtxinv, const mX, const Gtil,
const Kpp, const Kpp2, const Kpp3, const mOmega, const adFunc){
decl c, p, p2, p3, p4, f0, I_p, I_p2, I_p3, I_p4, I_ta, F2,
F4, C1, C2, Daux, D, PGltil, barPGltil, Kp3p,
glib, invmOmega;

p = columns(Gtil);
p2 = p^2;
p3 = p^3;
p4 = p^4;
I_p = unit(p);
I_p2 = unit(p2);
I_p3 = unit(p3);
I_p4 = unit(p4);
I_ta = unit(ta);
Kp3p = Kpp3';
glib = 5;
C1 = I_p3 + (I_p**Kpp) + Kpp2;

C2 = (I_p4+(Kpp**I_p2))*((I_p**Kpp)**I_p)+(I_p4+(Kpp**I_p2)+
Kp3p)*(I_p**Kpp2)+I_p4;

PGltil = Gtil'*(invertsym(Gtil * Gtil')) * Gtil;
barPGltil = I_p - PGltil;
invmOmega = invertsym(mOmega);

/*Coeficientes da Expansão de Edgeworth de qtil*/
f0 = (curt/24)*(trace(C1*C1'*((vec(mOmega))'**mOmega)'*
```

```
((vec(invmOmega))'**invmOmega)));

F2 = (curt/24)*(shape((((vec((vec(mOmega))'**mOmega))'*
(C1**I_p)*C2*(vec(invmOmega)**I_p2)*(invmOmega**invmOmega)))',p,p))';

F4 = (curt/24)*(shape((vec(((vec(invmOmega))'**invmOmega)*C1)), p2,p2))';

/*Matrizes D para o qualtil corrigido no caso elipitico*/
D = zeros(p4,3);
D[][0] = vec((I_p2+Kpp)*(barPGltil**barPGltil)+vec(barPGltil)*
(vec(barPGltil))');

D[][1] = vec((I_p2+Kpp)*((barPGltil**PGltil)+(PGltil**barPGltil))+
vec(barPGltil)*(vec(PGltil))'+vec(PGltil)*(vec(barPGltil))');

D[][2] = vec((I_p2+Kpp)*(PGltil**PGltil)+vec(PGltil)*(vec(PGltil))');

/*Coeficientes c do qualtil corrigido no caso elipitico*/
c = zeros(3,1);
c[0][0] = f0+trace(F2*barPGltil)+trace(F4*shape(D[][0],p2,p2));
c[1][0] = trace(F2*PGltil)+trace(F4*shape(D[][1],p2,p2));
c[2][0] = trace(F4*shape(D[][2],p2,p2));

adFunc[0] = c;

}
/*FUNCAO PARA TESTE SEQUENCIAL CORRIGIDO DE ACORDO COM t-DISTRIBUIÇÃO*/
fQuantilCor2 (const mB_est, const k, const c, const alphatil,
const quantil, const ta, const adFunc){
decl i, j, Ctil, quantilcor1, r, n, C, gamma, quantilgamma;

n = columns(mB_est);
r = n-k;

C = zeros(3,1);
for(i = 0; i < 3; i++){
for(j = i; j < 3; j++)
C[i][0] += (2^(-i))*(gammafact(r/2) / gammafact((r/2)+i+1))*c[j][0];
}
Ctil = alphatil[0];
for(i = 0; i < 3; i++)
Ctil += (alphatil[i+1]+C[i][0])*(quantil^(i+1));

gamma = 0.95;
for(i = 0; i < 3; i++)
gamma -= c[i][0]/ta;

quantilgamma = quanchi(gamma, r) * (sqrt(log(ta)));
quantilcor1 = quantilgamma + Ctil/ta;

adFunc[0] = quantilcor1;
```

```
}
/*FUNÇÃO QUE DEVOLVE O QUANTIL CORRIGIDO PARA A DISTRIBUIÇÃO T-STUDENT*/
ftesteseqcor1(const ta, const mB_est, const curt, const mX, const mxtxinv,
const mOmega, const P1, const adFunc){
decl c, svd, mu, mv, md, g, r, posto_estcor, k, L, U, m,
V, U2, V2, Q, Q0, quantil, G, i, n, aux_seq, cont_aceitar_seq,
quantilcor, atil, btil, Gtil, mLtil, vecJtil, Kpp, Kp2p,
Kpp2, Kpp3, E, alphatil, quantilcor1;

m = rows(mB_est);
n = columns(mB_est);

/*Decomposicao em valores singulares da matriz B estimada de ordem
m por n*/
svd = decsvd(mB_est, &mu, &md, &mv);
V = mv;

/*Matriz ortogoonal, U, completada para a ordem m por m*/
if(m == rows(diag(md)))
U = mu;
else
U = mu~nullspace(mu);

/*Partição das matrizes U e V*/
for(k = 1; k < n; k ++) { // Inicio do Loop para testar H0
U2 = U[][k:m-1];
V2 = V[][k:n-1];

/*Matriz que filtra apenas os valores singulares de B estimada*/
E = zeros(n-k,(n-k)*(m-k));
for(i = 0; i < n-k; i++)
E[i][i*(m-k)+i]=1;

Q0 = E * (V2' ** U2');
Q =  Q0 * mOmega * Q0';

g = md[k:]';

L = ta*(g' * (invertsym(Q)) * g); //Estatistica de Teste

r = n-k; //Graus de Liberdade Para a Chi-quadrado

/*Quantil da Chi-quadrado Vezes a Funcao C_ta = sqrt(log(ta))*/
quantil = quanchi(0.95, r) * (sqrt(log(ta)));

fmJmLCovConh(k, mB_est, mOmega, P1, &Gtil, &vecJtil, &mLtil);

fKpp(m, n, &Kpp);

fCoefa_itil(Gtil, mLtil, Kpp, &atil);

fKp2p(m, n, &Kp2p);
```

```
fKpp2(m, n, &Kpp2);

fCoefb_itil(vecJtil, Gtil, Kpp, Kp2p, Kpp2, &btil);

/*Funcao que devolve o valor corrigido do quantil da normal*/
fQuantilCor1 (mB_est, k, atil, btil, ta, quantil, &quantilcor, &alphatil);

fKpp3(m, n, &Kpp3);

fCoeftsD_c(ta, curt, mxtxinv, mX, Gtil, Kpp, Kpp2, Kpp3, mOmega, &c);

/*Funcao que devolve o valor corrigido do quantil da t-student*/
fQuantilCor2 (mB_est, k, c, alphatil, quantil, ta, &quantilcor1);

/*Condicao Para Aceitar Ho*/
if(L <= quantilcor1)
break;

} //Fim do Loop Para Testar Ho (Sequencial)

posto_estcor = k;

/*Condicao Para Rejeitar Ho*/
if(L > quantilcor1)
posto_estcor = n;

adFunc[0] = posto_estcor;
}
```

Referências Bibliográficas

[1] Amemiya, T. *Advanced Econometrics*. Harvard University Press, 1985.

[2] Anderson, T. W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*, volume 3rd. Wiley-Interscienc, 2003.

[3] Anderson, T. W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. Wiley, 2nd edition, 1984.

[4] Anderson, T. W. and Kunitomo, N. Tests of overidentification and predeterminedness in simultaneous equation models. *Journal of Econometrics*, 54:49–78, 1992.

[5] Anderson, T. W. and Kunitomo, N. Asymptotic robustness of tests of overidentification and predeterminedness. *Journal of Econometrics*, 62:383–414, 1994.

[6] Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. *Asymptotic Techniques for use in Statistics*. Londres: Chapman and Hall, 1990.

[7] Bartlett, M. S.. Multivariate analysis. *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, 9(2):176–197, 1947.

[8] Camba-Méndez, G. and Kapetanios, G. Statistical tests and estimators of the rank of a matrix and their applications in econometric modelling. Working Paper Series 850, European Central Bank, Jan 2008.

[9] Chandra, T. K. Asymptotic expansions of perturbed chi-square variables. *Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 47:100–110, 1985.

[10] Christ, C. F. Econometric models and methods. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 2(02):217–218, June 1967.

[11] Cordeiro, G. M. On the corrections to the likelihood ratio statistics. *Biometrika*, 74(2):265–274, 1987.

[12] Cordeiro, G. M. *Introdução à Teoria Assintótica*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1999.

[13] Cordeiro, G. M. and Ferrari, S. L. P Uma metodologia geral para corrigir distribuições de estatísticas. *Brazilian Review of Econometrics*, 15(2), 1995.

[14] Cornish, E. A. and Fisher, R. A. Moments and cumulants in the specification of distributions. *Review of the International Statistical Institute*, 5:307–320, 1937.

[15] Cragg, J. G. and Donald, S. G. On the asymptotic properties of ldu-based tests of the rank of a matrix. *Journal of the American Statistical Association*, 91(435):1301–1309, 1996.

[16] Cragg, J. G. and Donald, S. G. Inferring the rank of a matrix. *Journal of Econometrics*, 76(1-2):223–250, 1997.

[17] Doornik, J. A. *An object-oriented matrix programming language Ox 4*. Timberlake Consultants, 2006.

[18] Ferguson, T. S. *A Course in Large Sample Theory*. Chapman and Hall, 1996.

[19] Gill, L. and Lewbel, A. Testing the rank and definiteness of estimated matrices with applications to factor, state-space and arma models. *Journal of the American Statistical Association*, 87(419):766–776, 1992.

[20] Golub, G. H. and Van Loan, C. F. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 3rd edition, 1996.

[21] Hannan, E. J. and Quinn, B. G. The determination of the order of an autoregression. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B Methodological*, 41(2):190–195, 1979.

[22] Hosoya, Y. Hierarchical statistical models and a generalized likelihood ratio test. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 51(3):435–447, 1989.

[23] Hsiao, C. Identification. In Z. Griliches and M. D. Intriligator, editors, *Handbook of Econometrics*, volume 1, pages 223–283. Elsevier, January 1983.

[24] Judge, G. G.; Hill, R. C.; Griffiths, W. E.; Lütkepohl, H. and Lee, T.-C. Tsoung-Chao Lee. *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*. Wiley, 2nd edition, 1988.

[25] Kohn, R. J. Asymptotic estimation and hypothesis testing results for vector linear time series models. *Econometrica*, 47(4):1005–1030, July 1979.

[26] Lagrange, J.-L. Nouvelle méthode pour résoudre les Équations littérales par le moyen des séries. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, 24:251–326, 1770.

[27] Lawley, D. N. Tests of significance in canonical analysis. *Biometrika*, 46(1/2):59–66, 1959.

[28] Lehmann, E. L. and Romano, J. P.. *Testing statistical hypotheses*. Springer New York, 3nd edition, 2005.

[29] Lewbel, A. The rank of demand systems: Theory and nonparametric estimation. *Econometrica*, 59:711–730, 1991.

[30] Lewbel, A. and Perraudin, W. A theorem on portfolio separation with general preferences. *Journal of Econometric Theory*, 65:624–626, 1995.

[31] Magnus, J. R. and Neudecker, H. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Wiley, 1999.

[32] Malinvaud, E. *Statistical Methods of Econometrics*, volume 6. Amsterdam: North-Holland Publishing, 3rd edition, 1980.

[33] McCullagh, P. *Tensor Methods in Statistics*. Londres: Chapman and Hall, 1987.

[34] Muirhead, R. J. *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, volume 2nd. Wiley, 2005.

[35] Penrose, R. A generalized inverse for matrices. *Proc. Cambridge Philos*, Soc. 51:406–413, 1955.

[36] Phillips, P. C. B. and Park, J. Y. On the formulation of wald tests of nonlinear restrictions. *Econometrica*, 56:1065–1083, 1988.

[37] Potscher, B. M. Order estimation in arma-models by lagrangian multiplier tests. *The Annals of Statistics*, 11(3):872–885, 1983.

[38] Ratsimalahelo, Z. Rank test based on matrix perturbation theory. Econometrics 0306008, EconWPA, Jun 2003.

[39] Ratsimalahelo, Z. Strongly consistent determination of the rank of matrix. Econometrics 0307007, EconWPA, Jul 2003.

[40] Robin, J.-M. and Smith, R. J. Tests of rank. *Econometric Theory*, 16(2):151–175, April 2000.

[41] Schwarz, G. Estimating the dimension of a model. *The Annals of Statistics*, 6(2):461–464, 1978.

[42] Zellner, A. A efficient method of estimating seemingly unrelated regression and tests of aggregation bias. *Journal of the American Statistical Association*, 57(298):348–368, 1962.

[43] Zellner, A. Bayesian and non-bayesian analysis of the regression model with multivariate student-t error terms. *Journal of the American Statistical Association*, 71(354):400–405, 1976.

[44] Wald, A. Sequential tests of statistical hypotheses. *The Annals of Mathematical Statistics*, 16(2):117–186, 1945.

Este volume foi tipografado em $\LaTeX$ na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).