



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

CONFINAMENTO MESOSCÓPICO DE
VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES DE
UMA E DUAS BANDAS

por

Juan Carlos Piña Velásquez

Orientador

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva

Recife- PE, Brasil

Agosto - 2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA - CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

CONFINAMENTO MESOSCÓPICO DE
VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES DE
UMA E DUAS BANDAS

por

Juan Carlos Piña Velásquez

Tese apresentada ao programa de Pós-Graduação
em Física do Departamento de Física da Universidade
Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Física

Banca Examinadora:

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva (Orientador-UFPE)

Prof. José Albino Oliveira de Aguiar (DF-UFPE)

Prof. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral (DF-UFPE)

Prof. Edson Sardella (DF-UNESP-Bauru)

Prof. Mauro Melchiades Dória (IF-UFRJ)

Recife- PE, Brasil

Agosto - 2012

Catálogo na fonte
Bibliotecária Joana D'Arc L. Salvador, CRB 4-572

Velásquez, Juan Carlos Piña.

Confinamento mesoscópico de vórtices em
supercondutores de uma e duas bandas / Juan Carlos
Piña Velásquez. – Recife: O Autor, 2012.

xv, 129 f.: fig.

Orientador: Clécio Clemente de Souza Silva.
Tese (Doutorado) - Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Física, 2012.

Inclui bibliografia e apêndice.

1. Supercondutividade. 2. Vórtice fracionário.
I. Silva, Clécio Clemente de Souza (orientador). II. Título.

537.623

(22. ed.)

FQ 2012-028



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-7640/2126-8449 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.ufpe.br/ppqfisica/> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Tese de Doutorado

Juan Carlos Piña Velásquez

CONFINAMENTO MESOSCÓPICO DE VÓRTICES EM SUPERCONDUTORES DE UMA E DUAS BANDAS

A Banca Examinadora composta pelos Professores Clécio Clemente de Souza Silva (Presidente e Orientador), José Albino Oliveira de Aguiar, Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral, todos do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco, Edson Sardella, do Departamento de Física da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Campus Bauru e Mauro Melchiades Dória do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro, consideram o candidato:

(X) Aprovado () Reprovado () Em exigência

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em sete de agosto de dois mil e doze.

Prof. Clécio Clemente de Souza Silva
Presidente e Orientador

Prof. José Albino Oliveira de Aguiar

Prof. Leonardo Ribeiro Eulálio Cabral

Prof. Edson Sardella

Prof. Mauro Melchiades Dória

Resumo

Nesta tese estudamos teoricamente o comportamento de supercondutores convencionais e de duas bandas sujeitos a um confinamento mesoscópico induzido pelo tamanho da amostra ou pelo fluxo magnético não-homogêneo gerado por partículas magnéticas. O primeiro sistema estudado consiste em um filme supercondutor convencional infinito coberto por uma camada nanoestruturada contendo uma rede de partículas magnéticas com magnetização permanente orientada perpendicularmente ao plano do filme. Para esse sistema, solucionamos numericamente as equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo focando o estudo na criação e aniquilação de pares vórtice-antivórtice. Nós encontramos que o sistema apresenta uma variedade de fases com diferentes números de pares vórtice-antivórtice por dipolo, dependendo da intensidade do momento magnético das partículas e da distância de separação entre o filme supercondutor e o arranjo de dipolos. O principal resultado desse estudo foi a constatação da ausência do estado $N=3$ pares vórtice-antivórtice. A região do diagrama que seria ocupada por esse estado é de fato caracterizada por um estado contendo um vórtice com 3 quanta de fluxo localizado sob cada dipolo e uma molécula vórtice-antivórtice, composta por 4 antivórtices formando um quadrado com um vórtice no seu centro, em cada região intersticial. Interpretamos a inibição do estado $N=3$ como

decorrente da simetria quádrupla imposta pelo arranjo de dipolos, efeito semelhante ao que ocorre em supercondutores mesoscópicos quadrados. No segundo sistema, investigamos a região de estabilidade dos estados fracionários num disco supercondutor mesoscópico de duas bandas. O estudo foi feito solucionando numericamente as equações de Ginzburg-Landau adaptadas para o caso de duas bandas usando a aproximação das variáveis de ligação. Nesta análise levamos em conta a relação entre os parâmetros do modelo e os parâmetros microscópicos do material como as densidades de estados parcial, as velocidades de Fermi e os elementos da matriz de acoplamento. Nós apresentamos uma análise detalhada da região de estabilidade dos vórtices fracionários ao variar os parâmetros microscópicos e encontramos que os estados de vorticidade fracionária podem existir na região onde as duas bandas são ativas. Dentre esses estados, destacam-se aqueles onde a vorticidade da banda mais ativa é maior e estados onde a diferença do número de vórtices entre as bandas é maior que 1. Finalmente, nós propomos uma forma eficiente de aumentar a estabilidade dos vórtices fracionários mediante o campo magnético gerado por um disco magnético localizado sobre o disco supercondutor. Este é um resultado importante, uma vez que facilita a observação experimental dos vórtices fracionários em amostras mesoscópicas.

Palavras Chaves: Supercondutividade, duas bandas, vórtice fracionário, Ginzburg-Landau, variáveis de ligação.

Abstract

In this thesis we studied theoretically the behavior of mesoscopic superconductors under a both homogeneous and non-homogeneous magnetic fields. In the first systems, we numerically solve the time-dependent Ginzburg-Landau equations to study the creation and annihilation of vortex-antivortex pairs in an infinity single-band superconducting film with a square array of magnetic dipoles magnetized perpendicularly to the film. We have found that these states have a variety of phases, depending on the magnetic moment intensity m and the dipole array-to-superconducting film distance. We also found that the square symmetry of the array of dipoles prevents states with $N = 3$ vortex-antivortex per dipole, in favor of the formation of a three-quanta giant vortex below each dipole and a vortex-antivortex molecule comprising 4 antivortices forming a square with a vortex in its center. In the second system, we investigate the stability region of the fractional states in a two-band superconducting disk. We solve numerically the Ginzburg-Landau equations adapted to the case of two bands, using the link variables approach. This analysis takes into account the relationship between the parameters of the model and the microscopic parameters of the material, such as partial density of states, the Fermi velocities and the elements of electron-phonon coupling matrix. We performed a detailed analysis of the stability region

of fractional vortices with respect to changing the microscopic parameters and found that fractional vortex states can exist in the region where the two bands are active, including ones where the dominating band carries larger phase winding number and states where the absolute value of the difference between winding numbers is larger than one. Finally, we propose an efficient way of increasing the range of parameters for which these fractional vortex states can be stabilized by the magnetic field generated by a magnetic dot placed nearby the superconducting disk.

Keywords: Superconductivity, two-band, fractional vortex, Ginzburg-Landau, link variable.

Sumário

1	Introdução	1
2	Supercondutividade	5
2.1	História da supercondutividade	5
2.2	Teoria BCS	9
2.3	Teoria de London	11
2.4	Teoria de Ginzburg-Landau	12
2.4.1	Equações de Ginzburg-Landau	13
2.4.2	Comprimentos característicos	16
2.5	Equações de GL dependentes do tempo (TDGL)	18
2.6	Tipos de supercondutores	20
2.6.1	Sistemas macroscópicos	20
2.6.2	Sistemas mesoscópicos	26
2.7	Conceitos básicos sobre materiais magnéticos	29
2.7.1	Sistemas híbrido supercondutor-ferromagnético	30
2.8	Supercondutores de duas bandas	31
2.8.1	MgB ₂	32
2.8.2	Materiais pnictídeos	34

2.9	Teoria de GL para supercondutores de duas bandas	36
3	Método numérico	39
3.1	Unidades adimensionais	40
3.2	Método $U - \Psi$ aplicado às equações TDGL	41
3.2.1	Discretização das equações TDGL	42
3.3	Método semi-implícito	47
3.4	Condições de contorno	50
3.4.1	Condições de contorno supercondutor/isolante	50
3.4.2	Condições de contorno periódicas	51
4	Estados de vórtice-antivórtice no híbrido supercondutor/ferromagnético nanoestruturado	53
4.1	O dipolo magnético	55
4.2	Modelo e detalhes teóricos	56
4.3	Energia livre e nucleação de pares v-av	58
4.4	Diagrama de fase	64
4.5	Interação com um campo homogêneo	67
4.6	Resumo	71
5	Vórtices fracionários num disco mesoscópico de duas bandas	72
5.1	Consistência entre o modelo TCGL e a teoria microscópica	74
5.2	Modelo e detalhes teóricos	76
5.3	Influência dos parâmetros microscópicos	77
5.3.1	Influência da densidade de estados parcial	84
5.3.2	Influência da velocidade de Fermi	90
5.3.3	Influência do acoplamento entre bandas	94
5.4	Resumo	95
6	Efeito de um dot magnético sobre as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários	97
6.1	Variação na energia livre	98
6.2	Diagrama de fase $\Phi_M - \Phi$	101

6.3	Influência dos parâmetros do MD	107
6.4	Resumo	109
7	Conclusões	110
A	Invariância de calibre	116
B	Publicações	118
	Referências Bibliográficas	119

Lista de Figuras

- 2.1 Resistência elétrica do mercúrio em função da temperatura. Para $T \approx 4,2$ observa-se uma queda abrupta da resistência para valores muito pequenos, praticamente zero, o que advierte a transição de fase para o estado supercondutor. 6
- 2.2 Esquema do efeito Meissner observado numa esfera supercondutora sujeita a um campo magnético homogêneo. (Direita) O campo magnético penetra completamente o material no estado normal, ou seja, quando $T > T_c$. (Esquerda) Mantendo ligado o campo, o material é esfriado até alcançar o estado supercondutor onde o fluxo magnético é expulso de dentro do material. 7
- 2.3 Comportamento do funcional da energia livre (2.8) ao variar o valor de Ψ para o caso sem campo magnético e considerando que Ψ varia suavemente no espaço para (a) $\alpha > 0$ e (b) $\alpha < 0$. Os pontos vermelhos mostram a posição dos mínimos do funcional. 13
- 2.4 Cilindro supercondutor infinito sujeito a um campo magnético homogêneo aplicado paralelo ao eixo do cilindro. 20

2.5	Distribuição dos vórtices em supercondutores macroscópicos do tipo II mostrando o ordenamento predito por Abrikosov.	21
2.6	Ilustrações do diagrama de fase H-T para supercondutores macroscópicos do tipo I (esquerda) e do tipo II (direita).	22
2.7	Magnetização em função do campo para supercondutores macroscópicos a) do tipo I e b) do tipo II.	23
2.8	Estado intermediário em um supercondutor do tipo I [1] onde observa-se a coexistência da rede triangular de vórtices de Abrikosov e a estrutura laminar de fluxo magnético. As regiões pretas representam o material no estado normal.	24
2.9	(a) Densidade de pares de Cooper e (b) fase do módulo do parâmetro de ordem para um quadrado supercondutor mesoscópico muito fino de comprimento $L = 20\xi(0)$, $T = 0,9T_c$ e $H = 0,108H_{c2}(0)$. Para a figura da fase, uma mudança de azul para vermelho num caminho fechado indica uma variação de 2π sinalizando a nucleação de um vórtice.	27
2.10	(a) Densidade de pares de Cooper e (b) fase do módulo do parâmetro de ordem para um quadrado supercondutor mesoscópico muito fino de comprimento $L = 15\xi(0)$, $T = 0,9T_c$ e $H = 0,148H_{c2}(0)$. Para a figura da fase, uma mudança de azul para vermelho num caminho fechado indica uma variação de 2π sinalizando a nucleação de um vórtice.	28
2.11	Ciclo de histerese de materiais ferromagnéticos. M_S , M_R e H_{Coe} são a magnetização de saturação, a magnetização remanente e o campo de coercividade, respectivamente.	30
2.12	Resistividade do diborato de magnésio em função da temperatura [2].	33

2.13	Calor específico do MgB_2 em função da temperatura obtido experimentalmente por diferentes grupos de pesquisa. Os resultados são comparados com a teoria BCS (linha preta tracejada) e com a teoria de dois gaps (linha vermelha contínua) onde observa-se o ajuste da teoria de dois gaps [3].	34
2.14	Comportamento do campo crítico inferior com a temperatura do sistema para o material $\text{Ba}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{Fe}_2\text{As}_2$ [4]. Os pontos pretos são as medidas obtidas experimentalmente. A linha vermelha contínua é o comportamento descrito pela teoria de dois gaps. A linha pontuada azul e a linha tracejada azul são a contribuição do gap menor, Δ_a , e do gap maior, Δ_b , ao campo crítico, respectivamente.	35
3.1	Esquema do método de variáveis de ligação para uma rede com um passo de a_x na direção x e um passo a_y na direção y para o caso de um filme supercondutor muito fino.	42
4.1	Esquema do filme supercondutor de espessura $d \ll \lambda, \xi$ interagindo com a rede de dipolos pontuais com magnetização permanente m perpendicular ao plano do filme. A separação entre o filme supercondutor e a rede de dipolos é z_0	56
4.2	Perfis das componentes do potencial vetor e do campo da rede de dipolos para uma separação de $z_0 = 2\xi_0$ (acima) e $z_0 = 6\xi_0$ (abaixo).	57
4.3	Energia livre em função do momento magnético (acima) e nucleação de pares de v-av por dipolo (abaixo) em função do momento magnético para $z_0 = 2$. As linhas verticais ressaltam a transição para a nucleação do par de v-av por dipolo, assim como para o estado normal.	60
4.4	Módulo do parâmetro de ordem para $z_0 = 2$, $T = 0,9$ e os valores de m marcados no gráfico inferior da figura 4.3: (a) $m = 7$, (b) $m = 12$, (c) $m = 18, 5$	61

4.5	Energia livre em função do momento magnético (a) e nucleação de pares de v-av por dipolo (b) em função do momento magnético para $z_0 = 3$	62
4.6	Módulo do parâmetro de ordem do estado $N = 2$ pares de v-av por dipolo para a) $z_0 = 2$ e $m = 17$; b) $z_0 = 3$ e $m = 26$ e c) $z_0 = 6$ e $m = 100$	63
4.7	a) Energia livre e b) nucleação de pares de v-av em função do momento magnético para $z_0 = 6$. As linhas contínuas indicam os estados obtidos aumentando (diminuindo) o momento magnético dos dipolos tomando como condição inicial, para um valor de momento magnético m , o estado de equilíbrio do sistema para o valor de momento magnético $m - dm$ onde dm é o passo do incremento do momento magnético. As linhas tracejadas indicam os estados obtidos usando o processo de esfriamento de campo (FC).	64
4.8	Diagrama de fase no plano $z_0 - m$ para $T = 0,9T_c$. N representa o número de pares de v-av por dipolo. As áreas sem cor são as regiões de transição de um estado de $N = N_1$ para o estado de $N = N_2$ onde o número de pares de v-av que encontram-se na célula unitária não é um múltiplo inteiro do número de dipolos.	65
4.9	a) Módulo do parâmetro de ordem para o estado $N = 4$ para $m = 120$ e $z_0 = 6$ e b) ampliação de a) em escala logarítmica.	66
4.10	Energia em função do fluxo magnético homogêneo aplicado para $z_0 = 3$, $m = 30$, $T = 0,9T_c$ e espaçamento entre dipolos de 16. As linhas verticais sinalizam o valor do fluxo que é múltiplo inteiro do número de dipolos na célula unitária.	67
4.11	Módulo do parâmetro de ordem para a) $\Phi_{\text{ext}} = 56\Phi_0$, b) $\Phi_{\text{ext}} = 64\Phi_0$ e c) $\Phi_{\text{ext}} = 72\Phi_0$. A cor vermelha corresponde de maior supercondutividade e a cor azul corresponde à região no estado normal como mostrado na barra de cores.	68

4.12	(Linha preta) Número de vórtices por dipolo e (linha vermelha) número de antivórtices por dipolo em função do fluxo magnético homogêneo aplicado. As linhas verticais sinalizam o valor do fluxo que é múltiplo inteiro do número de dipolos na célula unitária.	69
4.13	Módulo do parâmetro de ordem para d) $\Phi_{\text{ext}} = 128\Phi_0$, e) $\Phi_{\text{ext}} = 192\Phi_0$ e f) $\Phi_{\text{ext}} = 256\Phi_0$. A cor vermelha corresponde mais supercondutora e a cor azul corresponde à região no estado normal como mostrado na barra de cores.	70
5.1	Energia livre vezes o fluxo magnético em função do fluxo magnético para um disco de raio $R = 10\xi_1$, $T = 0,9T_c$, $n_1 = 0,343$, $\lambda_{11} = 2,415$, $\lambda_{22} = 1,211$ e $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0,001$ e $v_1/v_2 = 1,225$. Com estes parâmetros obtêm-se as temperaturas críticas $T_{c1} = T_c$ e $T_{c2} = 0,95T_c$. (L_1, L_2) representa o estado com vorticidade L_1 na banda 1 e L_2 na banda 2. As linhas contínuas (tracejadas) representam os estados de vorticidade (L_1, L_2) obtidos (não obtidos) durante o processo de aumentar e diminuir o campo magnético.	79
5.2	Módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado (0,1) para a) $\Phi = 1,6$; b) $\Phi = 1,95$; c) $\Phi = 2,45$; d) $\Phi = 2,8$, onde, em cada subfigura, os resultados para a banda 1(2) são mostrados à esquerda(direira).	80
5.3	Módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado (1,0) para a) $\Phi = 1,35$; b) $\Phi = 1,7$; c) $\Phi = 2,15$; d) $\Phi = 2,75$	81
5.4	Módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado (1,2).	82
5.5	Logarítmo do módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado (2,3).	83

-
- 5.6 Regiões de estabilidade das configurações (L_1, L_2) inteiras e fracionárias no plano definido pela densidade de estados parcial n_1 e o fluxo magnético Φ . (Acima) A região de estabilidade de cada estado inteiro (L, L) é a área limitada pelas duas linhas contínuas da mesma cor. (Embaixo) A regiões de estabilidade dos estados fracionários correspondem às regiões encerradas por linhas contínuas para o caso $L_1 < L_2$ e linhas tracejadas para o caso $L_1 > L_2$ 84
- 5.7 (Esquerda) T_{c1}, T_{c2} em função da densidade de estados da banda 1 e (direita) linha de transição entre os estados supercondutor-normal para as bandas no caso sem acoplamento. A região onde as duas bandas são ativas encontra-se dentro destas linhas de transição. Fora destas linhas só uma das bandas é ativa e a outra é supercondutora somente devido ao acoplamento entre as bandas e segue o comportamento da banda ativa. 86
- 5.8 Energia livre vezes o fluxo magnético em função do fluxo magnético para um disco de raio $R = 10\xi_1$, $T = 0,9T_c$, $n_1 = 0,334$, $\lambda_{11} = 2,415$, $\lambda_{22} = 1,211$ e $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0,001$ e $v_1/v_2 = 1,225$. Com estes parâmetros obtêm-se as temperaturas críticas $T_{c1} = T_{c2} \approx T_c$ 87
- 5.9 Energia livre vezes o fluxo magnético em função do fluxo magnético para um disco de raio $R = 10\xi_1$, $T = 0,9T_c$, $n_1 = 0,325$, $\lambda_{11} = 2,415$, $\lambda_{22} = 1,211$ e $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0,001$ e $v_1/v_2 = 1,225$. Com estes parâmetros obtêm-se as temperaturas críticas $T_{c1} = 0,95T_c$ e $T_{c2} = T_c$ 89

-
- 5.10 Energia em função do fluxo magnético externo para a faixa de fluxo magnético onde os estados $(0, 1)$ e $(1, 0)$ são estáveis para (esquerda) $n_1 = 0, 343$, (centro) $n_1 = 0, 334$ e $n_1 = 0, 325$. As linhas contínuas (tracejadas) correspondem aos estados obtidos (não obtidos) durante o processo de aumentar e diminuir o campo magnético. 90
- 5.11 Regiões de estabilidade dos estados fracionários (L_1, L_2) no plano definido pelo quadrado da razão entre as velocidades de Fermi $(v_1/v_2)^2$ e o fluxo magnético aplicado Φ . A área amarela é a região onde a banda 2 é ativa. 91
- 5.12 Logarítmo do módulo do parâmetro de ordem : a) da banda 1 para o estado $(1,0)$ e b) da banda 2 para o estado $(0,1)$ para os pontos marcados na figura 5.11. O círculo central representa o tamanho do núcleo do vórtice definido como o contorno onde o módulo do parâmetro de ordem recupera o 50% do valor máximo alcançado no limite de acoplamento zero. 93
- 5.13 Regiões de estabilidade dos estados fracionários (L_1, L_2) para $|L_1 - L_2| = 1$ no plano definido pelo coeficiente de acoplamento λ_{12} e o fluxo magnético aplicado Φ . A área corida mostra a região onde os estados $(L, L + 1)$ são os estados de equilíbrio termodinâmico. 94
- 6.1 (Esquerda) Disco supercondutor de duas bandas de raio R interagindo com um disco magnético (MD) de raio R_{MD} localizado a uma distância l da superfície do supercondutor e magnetizado perpendicularmente ao plano do disco. (Direita) Perfil do campo não-homogêneo gerado pelo MD de raio $R_{MD} = 5\xi_1$, $l = -0, 7\xi_1$, $h = 4, 8\xi_1$ e $M = 1, 0H_{c2}^1$ 98
- 6.2 Energia livre em função do fluxo magnético aplicado para o sistema composto pelo disco supercondutor estudado no capítulo anterior interagindo com um MD com $\Phi_M = 1, 8\Phi_0$, $R_{MD} = 0, 5R$, $l = -0, 7\xi_1$, e $h = 4, 8\xi_1$ 99

6.3	Energia livre em função do fluxo magnético aplicado para o sistema composto pelo disco supercondutor estudado no capítulo anterior interagindo com um MD com $\Phi_M = -0,5\Phi_0$, $R_{MD} = 0,5R$, $l = -0,7\xi_1$, e $h = 4,8\xi_1$	100
6.4	Região de estabilidade dos estados fracionários (L_1, L_2) no plano definido por Φ_M e Φ para o disco supercondutor estudado no capítulo anterior interagindo com um MD com $R_{MD} = 0,5R$, $l = -0,7\xi_1$, e $h = 4,8\xi_1$	102
6.5	Logarítmo do módulo do parâmetro de ordem para das duas bandas para o estado (2,3) e perfis do fluxo magnético (das contribuições do MD e do campo homogêneo) para (a) $\Phi_M = 2,25$ e $\Phi = 2$, (b) $\Phi_M = 0$ e $\Phi = 5,15$, (c) $\Phi_M = -0,75$ e $\Phi = 6,05$ e (d) $\Phi_M = -1,125$ e $\Phi = 6,33$. As circunferências tracejadas marcam a posição do MD.	103
6.6	Região de estabilidade do estado (0,1) no plano $\lambda_{12} - \Phi$ para diferentes valores de Φ_M	104
6.7	$\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$ do estado (0,1) em função de Φ_M (linha contínua) e os valores de máximos de λ_{12} para alguns valores de Φ_M (os pontos vermelhos).	105
6.8	Região de estabilidade do estado (0,1) no plano $\Phi_M - \Phi$ para um MD de raio $R_{MD} = 5$ e três valores diferentes de h	106
6.9	$\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$ do estado (0,1) em função de Φ_M para $R_{MD} = 5,0\xi_1$ e três diferentes valores de h	107
6.10	(Esquerda) $\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$ em função de Φ_M e (direita) região de estabilidade no plano definido por λ_{12} e o fluxo Φ do estado (0,1) para $h = 4,8\xi_1$ e três diferentes valores de R_{MD}	108

CAPÍTULO 1

Introdução

A supercondutividade é um estado da matéria que alguns materiais apresentam quando são esfriados até temperaturas menores que uma determinada temperatura crítica característica do material. As duas propriedades marcantes deste estado são a condutividade perfeita e o diamagnetismo perfeito que fazem destes materiais ideais para o transporte de energia sem perdas, a fabricação de veículos que levitam, entre outras importantes aplicações. No entanto, existem ainda alguns inconvenientes que impedem aproveitar de forma ampla estas propriedades e fazem com que as aplicações dos supercondutores sejam limitadas. Tratam-se das limitações impostas pelos parâmetros críticos do material: temperatura crítica, campos críticos e corrente crítica. Portanto, é preciso encontrar uma forma de aumentar estes valores para tornar viáveis todas as aplicações dos supercondutores.

Em relação à temperatura crítica, tem-se alcançado avanços significativos com a descoberta dos supercondutores de alta temperatura crítica, com a fabricação de materiais com temperaturas críticas mais próximas da temperatura ambiente do que do zero absoluto [5]. Porém, todos os supercon-

dutores usados atualmente e os que possuem características potenciais para sua possível aplicação são do tipo II e, portanto, permitem a nucleação parcial do campo formando tubos de fluxo magnético quantizados, conhecidos como vórtices, os quais, sob a ação de uma corrente elétrica aplicada, causam dissipação de energia e, conseqüentemente, a perda da condutividade perfeita. Portanto, a ancoragem de vórtices é um requerimento importante para a aplicação dos supercondutores.

Nesse sentido, os avanços em nanofabricação e técnicas de medição permitem a fabricação e o estudo de sistemas nanoestruturados com arranjos de centros de ancoragem de vórtices como dots magnéticos e não magnéticos, buracos (antidots) e buracos cegos (aqueles onde não é perfurado completamente o filme supercondutor). Hoffmann et al. [6] demonstrou experimentalmente que, entre estes sistemas, a ancoragem mais eficiente de vórtices era produzida por um arranjo quadrado de dots ferromagnéticos depositados sobre um filme supercondutor. Além da ancoragem de vórtices, estes sistemas híbridos supercondutor-ferromagnético (SC/FM) apresentam outros efeitos importantes como a criação ou estabilização de pares de vórtice-antivórtice gerados pelo campo não homogêneo do FM e os quais interagem com um campo magnético aplicado e com uma corrente aplicada [7, 8] dando origem a uma rica variedade de fases de equilíbrio. Outro fenômeno interessante é a supercondutividade induzida por campo externo [9] onde um campo homogêneo aplicado perpendicular ao plano do filme supercondutor é compensado pelo campo gerado pelo dots magnético na região compreendida entre os dots e reforçado justo embaixo da posição dos dots. Além disto, os híbridos SC/FM são sistemas com promissórias aplicações como no desenvolvimento da eletrônica supercondutora.

A descoberta da supercondutividade no material diborato de magnésio, MgB_2 , tem motivado uma impressionante quantidade de trabalhos científicos tanto experimentais como teóricos. O motivo de este grande entusiasmo são as interessantes propriedades que este material apresenta como sua temperatura crítica tão alta para um simples composto binário, 39 K, quase o dobro

do anterior recorde. Além disto, este material é o primeiro reconhecido completamente como um supercondutor de dois gaps o que dá origem a novos fenômenos interessantes como estruturas de vórtices com fluxo fracionário, onde cada uma das bandas tem uma vorticidade diferente.

O estudo realizado nesta tese foca-se no comportamento de um filme supercondutor submetido a um campo magnético tanto homogêneo como não-homogêneo. O estudo contempla dois sistemas diferentes: o primeiro trata-se de um filme supercondutor muito fino interagindo com uma rede de dipolos e o segundo trata-se de um supercondutor de duas bandas interagindo com um disco magnético. A tese está organizada da seguinte forma:

No capítulo 2 apresentam-se alguns dos acontecimentos marcantes desde a descoberta da supercondutividade até a recente descoberta de materiais supercondutores de duas bandas. Dentro destes acontecimentos também faz-se uma introdução em algumas das teorias desenvolvidas para descrever e explicar o fenômeno da supercondutividade com ênfase na teoria de Ginzburg-Landau que é a teoria usada nesta tese.

No capítulo 3 descreve-se detalhadamente o método numérico usado para solucionar as equações de Ginzburg-Landau (GL) implementadas nesta tese.

No capítulo 4 estudamos o efeito de um arranjo quadrado de dipolos sobre um filme supercondutor muito fino com condições de contorno periódicas. O estudo é feito variando tanto a distância de separação entre o filme e a rede de dipolos como variando a intensidade do momento magnético dos dipolos.

No capítulo 5 estudamos as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários presentes num disco supercondutor mesoscópico de duas bandas ao variar os parâmetros microscópicos tales como as densidades de estados parciais, as velocidades de Fermi e o acoplamento entre as bandas. A espessura do disco é muito menor que o comprimento de coerência o que permite considerar a aproximação que, em princípio, o filme supercondutor não afeta o campo magnético, de tal forma que o potencial vetor no supercondutor

é o mesmo do campo externo homogêneo e ignorar a segunda equação de Ginzburg-Landau.

No capítulo 6 estudamos o efeito de um disco magnético (MD) sobre a estabilidade dos estados fracionários estudados no capítulo anterior. O MD está magnetizado perpendicular ao plano que contém o disco supercondutor de duas bandas. Também estudamos as diferenças nas regiões de estabilidades ao variar os parâmetros microscópicos para diferentes valores de magnetização.

Finalmente, no capítulo 7 apresentamos a conclusões do estudo realizado.

CAPÍTULO 2

Supercondutividade

2.1 História da supercondutividade

A história da supercondutividade começa em 1911 quando Kamerlingh Onnes, estudando as propriedades elétricas de alguns metais a temperaturas próximas do zero absoluto, encontrou que a resistência do mercúrio caía abruptamente a zero quando a temperatura do material era menor do que 4,2 K [10]. Na época existiam duas teorias opostas. Uma delas estava relacionada com os resultados experimentais onde mostrava-se que, extrapolando para temperaturas muito baixas, a resistência do metal desaparecia. A outra teoria predizia que à temperatura do zero absoluto os elétrons perdiam mobilidade e ficavam ligados aos íons produzindo uma resistência muito grande. O fato da resistência no mercúrio cair de forma abrupta para zero à temperatura de aproximadamente 4,2 K foi algo inesperado e surpreendente. É descoberto assim um novo estado termodinâmico, o estado supercondutor. Portanto, uma corrente elétrica pode fluir num anel de mercúrio no estado supercondutor sem reportar perdas de intensidade relacionada com a geração

de calor. Logo, uma das propriedades dos supercondutores é a condutividade perfeita.

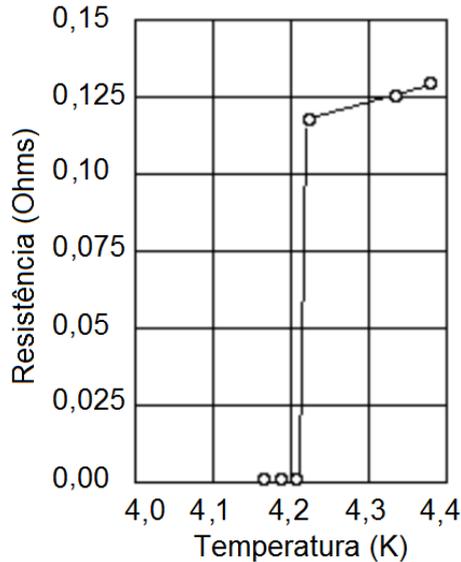


Figura 2.1: Resistência elétrica do mercúrio em função da temperatura. Para $T \approx 4,2$ observa-se uma queda abrupta da resistência para valores muito pequenos, praticamente zero, o que advierte a transição de fase para o estado supercondutor.

Além da condutividade perfeita, o material no estado supercondutor expelle do seu interior o campo magnético, sempre que este é menos intenso do que um valor determinado, conhecido como campo crítico. Esta descoberta foi reportada por Meissner e Ochsenfeld em 1933 e é conhecido como o efeito Meissner [11]. Assim, um material no estado normal sob campo magnético menor do que o campo magnético crítico expelle o campo do seu interior quando sofre a transição ao estado supercondutor, ou seja, o supercondutor é também um material diamagnético perfeito. Este fato não pode ser explicado considerando o material como um condutor perfeito já que, nesse caso, a teoria diz que o campo tem que permanecer dentro do material. Este fato indica que devia-se fazer uma nova teoria para a supercondutividade.

Em 1935, mas de vinte anos depois da descoberta da supercondutividade, os irmãos London desenvolveram a primeira teoria que descrevia as

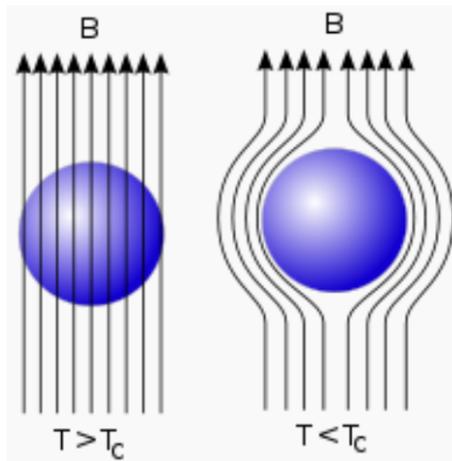


Figura 2.2: Esquema do efeito Meissner observado numa esfera supercondutora sujeita a um campo magnético homogêneo. (Direita) O campo magnético penetra completamente o material no estado normal, ou seja, quando $T > T_c$. (Esquerda) Mantendo ligado o campo, o material é esfriado até alcançar o estado supercondutor onde o fluxo magnético é expulso de dentro do material.

duas propriedades principais da supercondutividade: a condutividade perfeita e o efeito Meissner [12]. Esta teoria demonstra também que o campo magnético decai no interior do supercondutor até uma distância característica conhecida como o comprimento de penetração λ . Já em 1950, Vitaly Ginzburg e Lev Landau, fazendo uma descrição fenomenológica da supercondutividade, introduziram também o conceito de comprimento de coerência ξ relacionado com a variação espacial do condensado [13] e definiram a razão entre o comprimento de penetração e o comprimento de coerência $\kappa = \lambda(T)/\xi(T)$ conhecido como parâmetro de Ginzburg-Landau. Usando este modelo, Alexei Abrikosov estudou o comportamento dos supercondutores com $\kappa > 1/\sqrt{2}$ [14] e encontrou que estes possuíam um estado conhecido como o estado misto onde encontram-se pequenas ilhas de material normal, conhecidas como vórtices, rodeadas por material no estado supercondutor, onde estes vórtices carregam um quantum de fluxo e ordenam-se formando uma rede triangular conhecida como rede de Abrikosov. Mas a teoria que iria descrever microscopicamente a supercondutividade foi proposta por Bar-

deen, Cooper e Schrieffer em 1957 e é conhecida como a teoria BCS [15]. O ponto principal desta teoria é a formação de pares de elétrons, chamados pares de Coopers. Estes pares de Coopers são formados por dois elétrons que interagem mediante uma interação atrativa produzida pela deformação da rede. Nesta teoria os comprimentos de coerência e de penetração aparecem de forma natural.

Para poder aproveitar tecnologicamente os supercondutores era preciso encontrar materiais com temperatura crítica mais alta e campo crítico mais intenso. Porém, todos os esforços não aportavam bons resultados e parecia que a supercondutividade era um fenômeno de temperaturas muito baixas e assim suas aplicações eram pouco viáveis. Um aporte significativo para superar este inconveniente foi a descoberta no fim dos anos 1980 de cerâmicas supercondutoras com temperatura crítica bem mais alta do que a dos supercondutores tradicionais [16]. Atualmente a temperatura crítica destes supercondutores de alta temperatura está mais próxima da temperatura ambiente do que do zero absoluto [5]. Não obstante, a teoria BCS não funciona nestes materiais e atualmente não existe uma teoria que descreva satisfatoriamente estes sistemas.

Mais recentemente, com os avanços em nanotecnologia, tornou-se possível a fabricação e estudo de sistemas com dimensões menores que o comprimento de penetração e da ordem do comprimento de coerência, conhecidos como supercondutores mesoscópicos. Estes sistemas são importantes principalmente porque podem melhorar as propriedades supercondutoras do material como o campo crítico e a corrente crítica. Além disto, estes materiais apresentam uma distribuição de vórtices diferente da rede de Abrikosov o que demonstra a influência da geometria do material nos estados do sistema [17, 18]. Além da distribuição de vórtices diferente da rede de Abrikosov, é possível obter também estados de vórtice gigante, ou seja, um vórtice que carrega vários quanta de fluxo, assim como os estados de pares de vórtice-antivórtice que são formados pelo confinamento imposto pelo tamanho e a forma da amostra [19].

Outros sistemas de muito interesse são as amostras híbridas supercondutor/ferromagnético que conseguem aumentar o valor do campo crítico e são excelentes para ancorar os vórtices permitindo assim aumentar o valor da corrente crítica [20, 21]. Nestes sistemas é possível obter também estados de pares de vórtice-antivórtice no equilíbrio termodinâmico, gerados pela interação com o material ferromagnético, assim como processo de criação e aniquilação de vórtices e antivórtices [22, 23, 24].

Por outra parte, a descoberta da supercondutividade no material diborato de magnésio MgB_2 [2] reanimou o estudo dos supercondutores convencionais, em parte por sua temperatura crítica tão alta (aproximadamente 40 K), que faz dele um possível candidato para substituir o Nb na eletrônica atual, e em parte pelas novas propriedades e fenômenos presentes unicamente nos supercondutores de duas bandas, como é o caso de aglomerados de vórtices formando redes de Abrikosov, o que foi inicialmente atribuído ao fato de uma banda ser do tipo I e a outra do tipo II dando origem à definição de supercondutores do tipo-1.5 [25]. Outros fenômenos característicos dos supercondutores mesoscópicos de duas bandas são: a formação de estados de vórtices não compósitos, onde os vórtices que compartilham o mesmo núcleo nas diferentes bandas encontram-se deslocados um com relação ao outro, e os estados de vórtices fracionários, onde não cumpre-se a quantização total do fluxo e está relacionado com cada banda ter uma vorticidade diferente.

Como mencionou-se anteriormente, os sistemas híbridos melhoram as propriedades dos supercondutor do tipo II e, portanto, é indispensável saber como estes sistemas melhoram as propriedades características dos supercondutores de duas bandas que é um dos temas desta tese.

2.2 Teoria BCS

Desenvolvida por Bardeen, Cooper e Schrieffer, a teoria microscópica para o estado supercondutor gerado pela interação elétron-fônon é conhecida também como a teoria BCS. Eles ganharam o premio Nobel de física em 1972 por

este trabalho. Esta teoria considera que o mecanismo da supercondutividade é a formação de pares de elétrons chamados pares de Cooper. Estes pares de Cooper são formados por dois elétrons que possuem spins e momentos opostos e que estão unidos por uma interação atrativa gerada pela deformação da rede cristalina.

Os elétrons num condutor normal interagem com os átomos da rede cristalina. Durante essa interação existe uma troca de energia que excita os átomos e provoca o aquecimento do material. Por outro lado, a deformação da rede causada pela passagem do elétron gera um excesso de carga positiva que será sentida por outro elétron. Isto pode dar origem a uma interação efetiva atrativa entre dois elétrons. A energia de enlace dos pares de Cooper é 2Δ , onde Δ é o "gap" de energia presente no estado supercondutor. Assim, para destruir os pares de Cooper e formar dois elétrons individuais é necessária uma energia igual a 2Δ . Portanto, os pares de Cooper somente podem interagir com os átomos da rede se a energia de troca for maior que 2Δ . Isto explica a condutividade perfeita. Quando a temperatura é muito alta, a energia de troca térmica é maior que 2Δ e não existem condições para a formação de pares de Cooper no material. Mesmo se formados, serão rapidamente aniquilados.

O sucesso desta teoria observa-se na comparação com os resultados experimentais:

- Se o mecanismo que produz a supercondutividade for a formação de pares de Cooper mediados pelas vibrações da rede cristalina, a temperatura crítica do material deve variar com a massa dos átomos (efeito isótopo). Isto foi comprovado medindo a temperatura crítica dos isótopos do mercúrio e de diversos outros metais supercondutores.
- Segundo esta teoria, a temperatura crítica é diretamente proporcional ao gap, $\Delta(0) = 1,76k_B T_c$, onde k_B é a constante de Boltzmann. Isto foi comprovado medindo o gap de vários supercondutores junto com sua respectiva temperatura crítica.

- Esta teoria também prediz o crescimento exponencial, observado em diversos experimentos, do calor específico quando aproxima-se da temperatura crítica. Ou seja, $C = \Gamma e^{-\gamma/k_B T}$, onde Γ e γ são constantes próprias do material.

Todas estas observações concordam perfeitamente com os resultados experimentais feitos nos supercondutores descobertos até a década dos 80s [26, 27, 28]. Mas, infelizmente, esta teoria não é adequada para descrever o comportamento dos supercondutores de alta temperatura crítica.

2.3 Teoria de London

Esta teoria, proposta pelos irmãos F. e H. London, considera que os portadores de carga movimentam-se livremente dentro do supercondutor. Desta forma, a segunda lei de Newton pode ser escrita como:

$$\vec{F} = m^* \vec{a}_s, \quad (2.1)$$

onde $\vec{F} = e^* \vec{E}$ é a força gerada pelo campo elétrico \vec{E} . e^* , m^* e \vec{a}_s são a carga, a massa e a aceleração dos portadores de carga, respetivamente. A aceleração pode-se obter da derivada temporal da densidade de corrente dos portadores de carga $\vec{j}_s = n_s e^* \vec{v}_s$. Portanto, temos a primeira equação de London

$$\frac{\partial \vec{J}_s}{\partial t} = \frac{n_s (e^*)^2}{m^*} \vec{E}. \quad (2.2)$$

Esta equação diz que qualquer campo elétrico acelera os portadores de carga, ou seja, descreve a condutividade perfeita. Agora, aplicando o rotacional a ambos os lados da equação (2.2) e usando a lei de Faraday obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{J}_s + \frac{n_s (e^*)^2}{m^* c} \vec{H}) = 0. \quad (2.3)$$

Esta equação possui muitas soluções, já que toda função temporalmente constante satisfaz esta equação, mas para garantir a expulsão do campo magnético é necessário que

$$\nabla \times \vec{J}_s = -\frac{n_s (e^*)^2}{m^* c} \vec{H}, \quad (2.4)$$

já que uma densidade de corrente induzida na superfície não permitiria a penetração de qualquer campo magnético externo, e qualquer fluxo magnético inicialmente no interior será expulso quando o sistema fizer a transição para o estado supercondutor.

Substituindo a lei de Ampère, $\nabla \times \vec{H} = 4\pi \vec{J}_s/c$ na equação (2.4) temos:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{4\pi(e^*)^2 n_s}{m^* c^2} \vec{H}, \quad (2.5)$$

a qual pode-se escrever da forma:

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{\lambda_l^2} \vec{H}, \quad (2.6)$$

onde

$$\lambda_l^2 = \frac{m^* c^2}{4\pi(e^*)^2 n_s} \quad (2.7)$$

é o comprimento de penetração de London, isto é, o comprimento característico no qual um campo magnético pode penetrar num material supercondutor. A equação (2.6) é conhecida como a equação de London.

Embora macroscópica, a teoria de London consegue descrever o comportamento supercondutor e estados de vórtices em supercondutores fortemente tipo-II onde não leva-se em conta a estrutura e o tamanho físico do núcleo do vórtice. Isso é possível introduzindo na equação (2.6) um termo não-homogêneo representando a carga topológica da linha de vórtice.

2.4 Teoria de Ginzburg-Landau

Esta teoria está baseada na teoria das transições de fase de segunda ordem de Landau. Nela, a energia livre de Gibbs num campo magnético aplicado pode ser expandida em potências de um parâmetro de ordem complexo Ψ , onde $|\Psi|^2$ é proporcional à densidade de pares de Cooper, n_s , e do potencial vetor \vec{A}

$$F = F_n + \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e\vec{A}}{c} \right) \Psi \right|^2 + \frac{(h - H_0)^2}{8\pi}, \quad (2.8)$$

onde m^* é a massa, \hbar é a constante de Planck, e é a carga do elétron, c é a velocidade da luz e \vec{A} é o potencial vetor relacionado com o campo local $\vec{h} = \nabla \times \vec{A}$. β é uma constante positiva e independente da temperatura e α depende da temperatura, $\alpha = \alpha_0(T - T_c)$, onde α_0 é uma constante positiva.

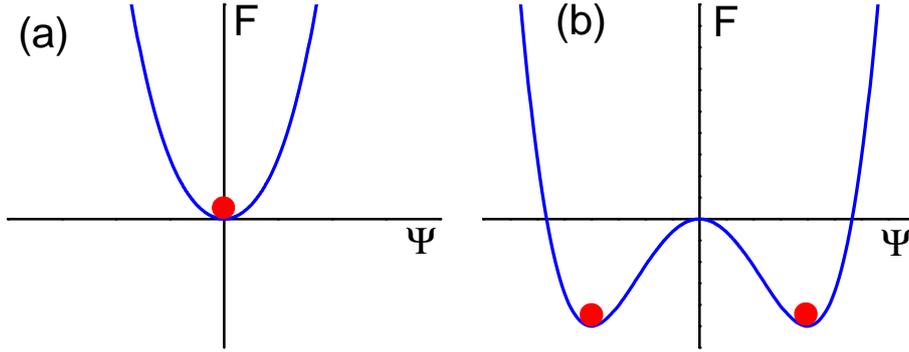


Figura 2.3: Comportamento do funcional da energia livre (2.8) ao variar o valor de Ψ para o caso sem campo magnético e considerando que Ψ varia suavemente no espaço para (a) $\alpha > 0$ e (b) $\alpha < 0$. Os pontos vermelhos mostram a posição dos mínimos do funcional.

Para o caso sem campo magnético e considerando que o parâmetro de ordem é uma função real que varia muito suavemente no supercondutor, a energia tem o comportamento mostrado na figura 2.3. Para $\alpha > 0$ (Fig. 2.3a), ou seja $T > T_c$, o sistema encontra-se no estado normal e o mínimo da energia localiza-se em $\Psi = 0$. Para $\alpha < 0$ (Fig. 2.3b), ou seja $T < T_c$, o sistema encontra-se no estado supercondutor e a energia possui dois mínimos localizados em $\Psi = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$ com um valor de energia:

$$F - F_n = \frac{H_c^2}{4\pi} = -\frac{\alpha^2}{\beta}, \quad (2.9)$$

onde H_c é o campo crítico termodinâmico.

2.4.1 Equações de Ginzburg-Landau

Para encontrar as equações de Ginzburg-Landau (GL) integra-se no volume da amostra o funcional da energia (2.8) e minimiza-se com relação ao parâ-

metro de ordem Ψ e ao potencial vetor \vec{A} . Uma pequena variação de $\delta\Psi$ no parâmetro de ordem e de $\delta\vec{A}$ no potencial vetor o que produz uma variação δF na energia,

$$\begin{aligned} \delta F = \int_V dV \left\{ \left[\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*}\vec{\varphi} \cdot \left(i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \right] \delta\Psi^* - \right. \\ \left. - \frac{e}{mc} \left[\delta\vec{A}\Psi^* \cdot \vec{\varphi} + \vec{\varphi}^* \cdot \delta\vec{A}\Psi \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \left(\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0 \right) \cdot \nabla \times \delta\vec{A} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde define-se,

$$\vec{\varphi} = \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \Psi \quad (2.11)$$

e $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ é o campo na amostra. Fazendo uso da relação $\nabla \cdot (\delta\Psi^*\vec{\varphi}) = \vec{\varphi} \cdot \nabla\delta\Psi^* + \delta\Psi^*\nabla \cdot \vec{\varphi}$ e reagrupando termos tem-se

$$\begin{aligned} \delta F = \int_V dV \left\{ \delta\Psi^* \left[\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi - \frac{i\hbar}{2m^*}\nabla \cdot \vec{\varphi} - \frac{e}{m^*c}\vec{\varphi} \cdot \vec{A} \right] - \right. \\ \left. - \frac{i\hbar}{2m^*}\nabla \cdot (\delta\Psi^*\vec{\varphi}) - \frac{2e}{m^*c} \text{Re} [\Psi^*\vec{\varphi}] \cdot \delta\vec{A} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \left(\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0 \right) \cdot \nabla \times \delta\vec{A} \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando a relação vetorial $\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$, com $\vec{a} = \delta\vec{A}$ e $\vec{b} = \nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0$, pode-se escrever a equação (2.12) da seguinte forma,

$$\begin{aligned} \delta F = \int_V dV \delta\Psi^* \left[\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right)^2 \Psi \right] - \frac{i\hbar}{2m^*} \int_V dV [\nabla \cdot (\delta\Psi^*\vec{\varphi})] - \\ - \int_V dV \left\{ \frac{2e}{m^*c} \text{Re} \left[\Psi^* \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \Psi \right] - \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \right\} \cdot \delta\vec{A} + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left\{ \nabla \cdot \left[\delta\vec{A} \times \left(\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0 \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aplicando o teorema de Gauss, $\int_V dV \nabla \cdot \vec{C} = \oint_S dS \hat{n} \cdot \vec{C}$, onde \hat{n} é o vetor

normal à superfície, tem-se,

$$\begin{aligned} \delta F = & \int_V dV \delta \Psi^* \left[\alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi \right] - \frac{i\hbar}{2m^*} \oint_S dS [\hat{n} \cdot (\delta \Psi^* \vec{\varphi})] - \\ & - \int_V dV \left\{ \frac{2e}{mc} \text{Re} \left[\Psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right] - \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \right\} \cdot \delta \vec{A} + \\ & + \frac{1}{4\pi} \oint_S dS \left\{ \hat{n} \cdot \left[\delta \vec{A} \times \left(\nabla \times \vec{A} - \vec{H}_0 \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde S é a superfície da amostra. Na superfície do supercondutor o campo magnético externo é igual à indução magnética $\nabla \times \vec{A} = \vec{H}_0$ e portanto, a última integral é igual a zero. Fazendo $\delta F = 0$ obtém-se as equações de equilíbrio do sistema

$$\int_V dV \delta \Psi^* \left[\alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi \right] = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{i\hbar}{2m} \oint_S dS [\hat{n} \cdot (\delta \Psi^* \vec{\varphi})] = 0, \quad (2.16)$$

$$- \int_V dV \left\{ \frac{2e}{m^* c} \text{Re} \left[\Psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right] - \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{A} \right\} \cdot \delta \vec{A} = 0, \quad (2.17)$$

que são válidas para qualquer valor arbitrário de $\delta \Psi^*$ e $\delta \vec{A}$. Portanto, para satisfazer as equações anteriores os coeficientes de cada variação têm de ser iguais a zero, ou seja,

$$\alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi = 0, \quad (2.18)$$

$$\hat{n} \cdot \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \Big|_S = 0, \quad (2.19)$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{A} = \frac{2e}{m^*} \Re \left[\Psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right]. \quad (2.20)$$

As equações (2.18) e (2.20) são as equações de Ginzburg-Landau (GL). A primeira equação de GL (equação (2.18)) tem a forma da equação de

Schrödinger com um termo não linear que age como um potencial repulsivo de Ψ . A equação (2.19) expressa que nenhuma supercorrente pode atravessar perpendicularmente o limite da amostra. A equação (2.20) é conhecida como a segunda equação de Ginzburg-Landau.

De Gennes generalizou a condição de contorno (2.19) para quando o supercondutor também encontra-se em contato com outros materiais ou defeitos:

$$\hat{n} \cdot \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \Psi \Big|_s = \frac{i}{b}\Psi, \quad (2.21)$$

onde b é uma constante conhecida como comprimento de extrapolação, sendo um parâmetro fenomenológico que mede a distância (dentro do material que está em contato com o supercondutor) onde o parâmetro de ordem cai a zero. Os diferentes valores que b pode assumir caracterizam o material que está em contato com o supercondutor: $b \rightarrow \infty$ para o isolante ou vácuo, $b > 0$ para o metal, $b = 0$ para o ferromagnético e $b < 0$ para outro supercondutor de temperatura crítica mais alta.

2.4.2 Comprimentos característicos

Da teoria de GL é possível obter dois comprimentos característicos relacionados com o sistema: um deles é o comprimento de penetração já previsto pela teoria de London e que está relacionado com o decaimento do campo no interior do supercondutor. Para obter este comprimento, considera-se uma região do supercondutor onde a densidade de pares de Cooper é constante, ou seja, longe de interfaces supercondutor-outro material. Portanto, da equação (2.20) tem-se que a corrente do sistema torna-se,

$$\vec{j}_s = -\frac{4e^2}{mc}|\Psi|^2\vec{A}. \quad (2.22)$$

Aplicando o rotacional a ambos os lados desta equação e usando a lei de Ampere temos,

$$-\frac{m^*c^2}{16\pi e^2|\Psi|^2}\nabla^2\vec{H} + \vec{H} = 0. \quad (2.23)$$

Quando compara-se esta equação com a equação (2.6) da teoria de London verifica-se que o comprimento de penetração é dado por:

$$\lambda^2 = \frac{m^*c^2}{16\pi e^2|\Psi|^2} = \frac{m^*c^2}{4\pi(e^*)^2n_s}, \quad (2.24)$$

onde $e^* = 2e$ e $|\Psi|^2 = n_s$. Usando o valor do parâmetro de ordem que minimiza a energia livre no caso sem campo, ou seja $\Psi = \sqrt{-\alpha/\beta}$, temos:

$$\lambda^2 = \frac{m^*c^2\beta}{16\pi e^2|\alpha|}. \quad (2.25)$$

Como $\alpha(T) = -\alpha_0(1 - T/T_c)$, pode-se ver que o comprimento de penetração tem uma dependência com a temperatura da forma,

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}, \quad (2.26)$$

onde λ_0 é independente da temperatura.

Além do comprimento de penetração, a teoria de GL também define o comprimento de coerência relacionado com a variação espacial da densidade de pares de Cooper. Para obter este comprimento considera-se o caso sem campo magnético, em que o parâmetro de ordem é real. Para o caso unidimensional da equação (2.18) tem-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \beta\Psi^3 + \alpha\Psi = 0. \quad (2.27)$$

Dividindo por α tem-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{\beta}{\alpha}\Psi^3 + \Psi = 0, \quad (2.28)$$

onde pode-se observar que

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*\alpha} \frac{d^2}{dx^2} \quad (2.29)$$

é um operador adimensional. Portanto, obtém-se o comprimento característico

$$\xi^2(T) = \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|}, \quad (2.30)$$

conhecido como comprimento de coerência. Este comprimento característico também possui uma dependência com a temperatura da forma,

$$\xi(T) = \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}, \quad (2.31)$$

onde ξ_0 é independente da temperatura.

Além disto, também pode-se definir o parâmetro adimensional $\kappa = \lambda/\xi = \lambda_0/\xi_0$ que é independente da temperatura e é conhecido como o parâmetro de Ginzburg-Landau. Dependendo do valor deste parâmetro os supercondutores são classificados em supercondutores do tipo I ($\kappa < 1/\sqrt{2}$) e supercondutores do tipo II ($\kappa > 1/\sqrt{2}$), conforme veremos adiante.

Esta teoria foi desenvolvida supondo que a temperatura do sistema está bem próxima da temperatura crítica. Este critério também foi utilizado por Gor'kov [29] que deduziu as equações de GL usando funções de Green num supercondutor sem gap, ou seja, bem perto da temperatura crítica. Porém, alguns resultados teóricos usando a teoria de GL a temperaturas não tão próximas da temperatura crítica têm mostrado concordar excelentemente com os resultados experimentais.

2.5 Equações de GL dependentes do tempo (TDGL)

Para estudar a dinâmica do sistema é necessário encontrar uma versão dependente do tempo das equações de GL. Uma possível forma de obter estas equações é assumir que o caminho para o equilíbrio segue um processo de relaxação, ou seja, a taxa de relaxação é proporcional ao desvio do sistema em relação ao equilíbrio [30]

$$-\Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\delta F}{\delta \Psi^*} = \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi, \quad (2.32)$$

onde Γ é uma constante positiva. Esta equação não é invariante de calibre (ver apêndice A). Portanto, para assegurar a invariância é preciso modificar

esta equação agregando o potencial escalar φ da seguinte forma

$$-\Gamma \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{2ie\varphi}{\hbar} \Psi \right) = \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi. \quad (2.33)$$

A introdução do potencial escalar faz modificar também a equação para o potencial vetor. Neste caso vamos considerar a corrente total como $\vec{j} = \vec{j}_s + \vec{j}_n$ onde

$$\vec{j}_s = \frac{2e}{m} \text{Re} \left[\Psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right] \quad (2.34)$$

é a corrente supercondutora e $\vec{j}_n = \sigma_n \vec{E}$ é a corrente do estado normal. O campo elétrico é definido como

$$\vec{E} = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \right). \quad (2.35)$$

Assim, as equações TDGL tornam-se,

$$-\Gamma \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{2ie\varphi}{\hbar} \Psi \right) = \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi, \quad (2.36)$$

$$\sigma_n \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) = \frac{2e}{m} \Re \left[\Psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right] - \frac{c}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{A}. \quad (2.37)$$

Usando a conservação da corrente total, $\nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot (\vec{j}_s + \vec{j}_n) = 0$, obtém-se a equação para o potencial escalar:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{2e}{m} \nabla \cdot \Re \left[\Psi^* \left(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right] \quad (2.38)$$

Esta é uma forma fenomenológica de obter as equações TDGL. Gor'kov [29] mostrou que estas equações correspondem ao caso limite da teoria microscópica quando a temperatura do sistema encontra-se perto da temperatura crítica e para supercondutores sem gap. Também existe outra versão das equações de GL para estudar situações fora do equilíbrio obtidas a partir da teoria microscópica e que levam em conta o tempo de relaxação das quase-partículas, as quais não são mostradas nesta tese. O leitor interessado pode consultar a Ref. [31] para mais informação.

2.6 Tipos de supercondutores

2.6.1 Sistemas macroscópicos

Nesta parte vamos considerar um cilindro supercondutor muito longo e com dimensões muito maiores que λ sujeito a um campo magnético homogêneo paralelo ao eixo do cilindro como mostra-se na figura 2.4. Nas proximidades

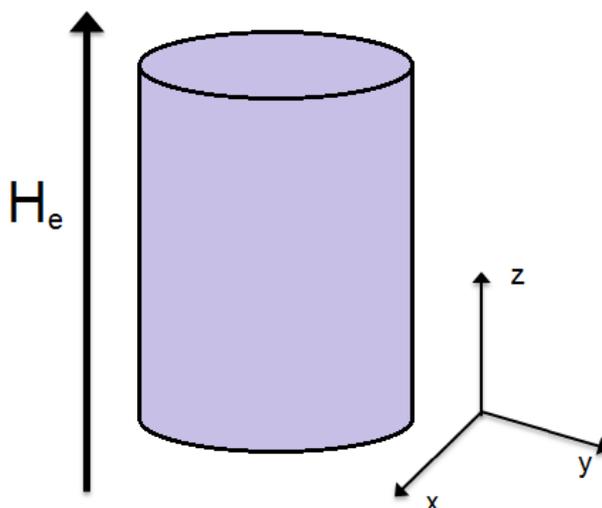


Figura 2.4: Cilindro supercondutor infinito sujeito a um campo magnético homogêneo aplicado paralelo ao eixo do cilindro.

da linha de transição entre o estado supercondutor e o estado normal, a energia superficial é negativa para alguns materiais e positiva para outros. Estes materiais estão caracterizados pelo valor do parâmetro de Ginzburg-Landau de tal forma que todos os materiais com energia superficial negativa (positiva) na interface entre o estado supercondutor-normal possuem $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ($\kappa < 1/\sqrt{2}$). Alexei Abrikosov, estudante de Landau, estudou o comportamento dos supercondutores com $\kappa > 1/\sqrt{2}$ e descobriu que estes permitiam a entrada parcial do campo na forma de vórtices que ordenavam-se formando uma rede hexagonal conhecida como rede de Abrikosov (Fig. 2.5). Assim, os supercondutores foram classificados em dois tipos, conhecidos como supercondutores do tipo I, com $\kappa < 1/\sqrt{2}$, e supercondutores do tipo II, com

$$\kappa > 1/\sqrt{2}.$$

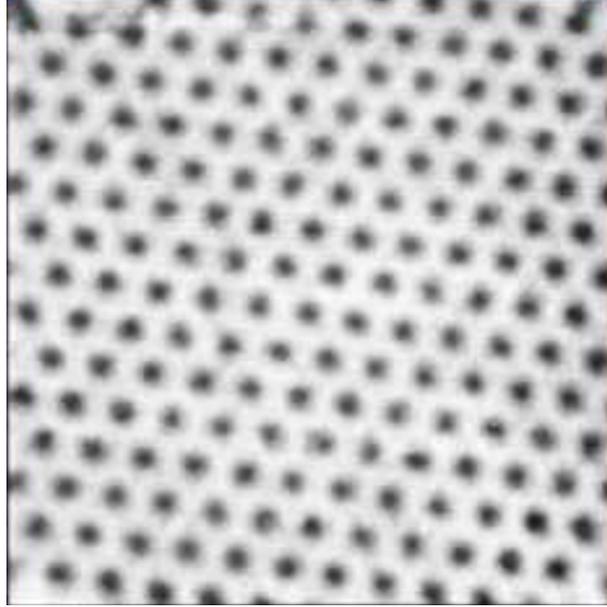


Figura 2.5: Distribuição dos vórtices em supercondutores macroscópicos do tipo II mostrando o ordenamento predito por Abrikosov [32].

Os supercondutores do tipo I conseguem expelir o campo do seu interior quando este campo é menor que um valor crítico conhecido como campo crítico termodinâmico:

$$H_c = \frac{\Phi_0}{2\sqrt{2}\pi\lambda\xi}, \quad (2.39)$$

onde $\Phi_0 = hc/2e$ é o quantum de fluxo magnético. Quando o campo é mais intenso que este campo crítico a supercondutividade é destruída e o material entra no estado normal. Portanto, os supercondutores do tipo I apresentam dois estados: o estado Meissner e o estado normal.

No caso dos supercondutores do tipo II, o estado Meissner existe somente para campos menores que um valor crítico $H_{c1} < H_c$, onde,

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa} H_c \ln \kappa. \quad (2.40)$$

Para campos mais intensos, o fluxo magnético consegue penetrar parcialmente no supercondutor na forma de vórtices. Quanto mais intenso o campo,

mais vórtices conseguem penetrar o supercondutor, até que o campo atinge o valor do campo crítico superior,

$$H_{c2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2} = \sqrt{2}\kappa H_c. \quad (2.41)$$

Acima deste valor existe uma porção da superfície de espessura $\xi(T)$ onde a supercondutividade sobrevive até um valor de campo H_{c3} . O terceiro campo crítico H_{c3} , campo crítico termodinâmico H_c e o campo crítico superior H_{c2} estão relacionados por [33]:

$$H_{c3} = 2,4\kappa H_c = 1,69H_{c2}. \quad (2.42)$$

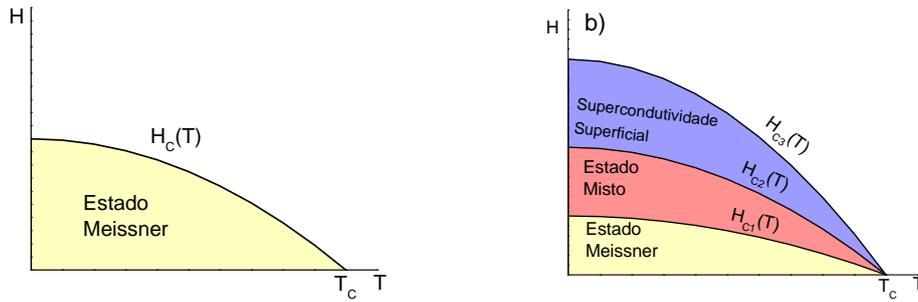


Figura 2.6: Ilustrações do diagrama de fase H-T para supercondutores macroscópicos do tipo I (esquerda) e do tipo II (direita).

Na figura 2.6 mostra-se o comportamento destes campos críticos com a temperatura do sistema. Para $T = 0$, os campos críticos alcançam o valor máximo e começam a diminuir com o aumento da temperatura. Em $T = T_c$ o material encontra-se no estado normal e, portanto, os valores dos campos críticos são zero.

Os dois tipos de supercondutores também apresentam um comportamento da magnetização com relação ao campo magnético aplicado H . Para o caso dos supercondutores macroscópicos do tipo I (Fig. 2.7(a)), quando $H < H_c$ o campo no interior do supercondutor é zero e, portanto, a magnetização é uma função decrescente do campo aplicado, ou seja, quanto mais intenso o

campo aplicado mais negativa é a magnetização. Quando $H > H_c$ o material está no estado normal e a magnetização é zero. Agora, para o caso dos supercondutores macroscópicos do tipo II (Fig. 2.7(b)), a dependência linear da magnetização observa-se para valores de campo menores do que o campo crítico inferior H_{c1} . Quando $H > H_{c1}$ o material está no estado misto e a magnetização começa a aumentar até alcançar o valor de zero em $H = H_{c2}$.

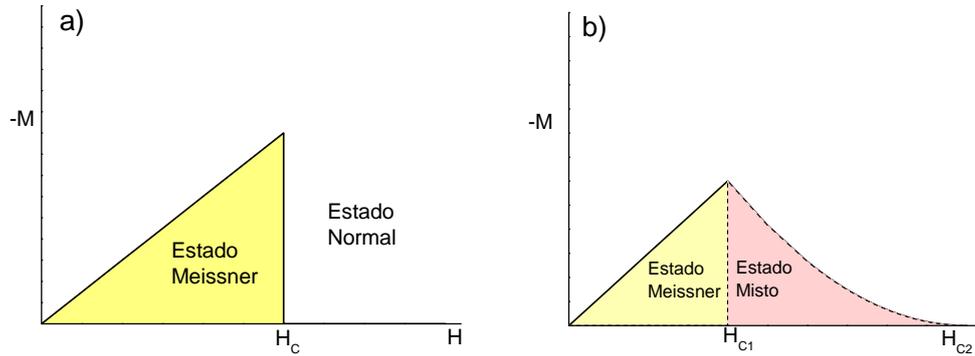


Figura 2.7: Magnetização em função do campo para supercondutores macroscópicos a) do tipo I e b) do tipo II.

Quando o supercondutor não é longo o suficiente, o comportamento da magnetização não é o representado na figura 2.7(a). Neste caso, o campo gerado pelas correntes de blindagem consegue neutralizar o campo externo no interior da amostra, mas reforçam este campo nas bordas gerando regiões no estado normal junto com regiões no estado Meissner conhecido como o estado intermediário dos supercondutores do tipo I (Fig. 2.8).

Também é possível ter estados de vórtices em supercondutores finos com $\kappa < 1/\sqrt{2}$ quando a espessura da amostra é menor que o comprimento de penetração, $d < \lambda$. Nestes casos o comprimento de penetração efetivo $\Lambda = \lambda^2/d$ cresce e é preciso definir um parâmetro de GL efetivo $\kappa^* = \Lambda/\xi$ que indica se o supercondutor é do tipo I ($\kappa^* < 1/\sqrt{2}$) ou do tipo II. Nos supercondutores do tipo II os vórtices são considerados como linhas de fluxo quantizadas, cada um carregando um quantum de fluxo $\Phi_0 = hc/2e$ gerado pelas correntes supercondutoras que circulam este vórtice. No centro do vórtice a

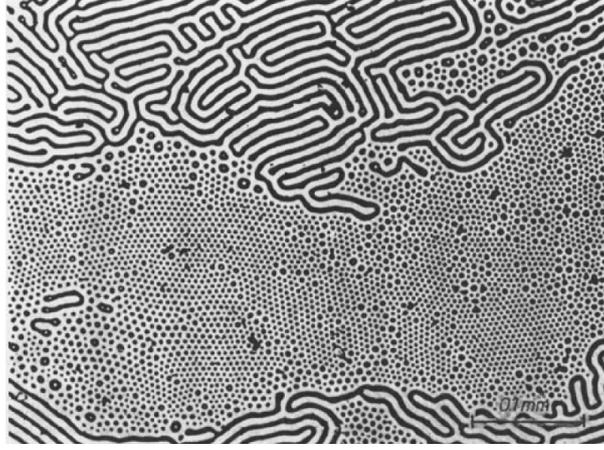


Figura 2.8: Estado intermediário em um supercondutor do tipo I [1] onde observa-se a coexistência da rede triangular de vórtices de Abrikosov e a estrutura laminar de fluxo magnético. As regiões pretas representam o material no estado normal.

supercondutividade é nula e o núcleo do vórtice é definido pela região onde o parâmetro de ordem cai a zero.

A quantização do fluxo magnético que atravessa um supercondutor do tipo II pode ser demonstrada mediante o formalismo de GL inserindo o módulo e a fase do parâmetro de ordem, $\Psi = |\Psi|e^{i\phi}$, explicitamente na equação (2.20) ($\kappa^* > 1/\sqrt{2}$).

$$\vec{j}_s = \frac{2e\hbar}{m}|\Psi|^2\nabla\phi - \frac{4e^2}{mc}|\Psi|^2\vec{A}. \quad (2.43)$$

Para calcular o fluxo magnético

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}, \quad (2.44)$$

onde usou-se o teorema de Stokes, da equação (2.43) pode-se obter o potencial vetor \vec{A} e substituir na equação (2.44), que resulta em

$$\Phi = \frac{c\hbar}{2e} \oint_C \nabla\phi \cdot d\vec{l} - \frac{mc}{4e^2} \oint_C \frac{\vec{j}_s}{|\Psi|^2} \cdot d\vec{l}. \quad (2.45)$$

Em uma trajetória fechada o parâmetro de ordem pode variar sua fase em múltiplos de 2π , mas o valor do parâmetro de ordem não muda porque a

densidade de pares de Cooper não possui dois valores diferentes num mesmo ponto. Dentro da região supercondutora, longe de interfaces, a corrente é zero, portanto, temos que

$$\Phi = n \frac{ch}{2e} = n\Phi_0, \quad (2.46)$$

onde n é um número inteiro que determina a quantidade de quanta de fluxo que atravessam uma área S delimitada pelo caminho de integração C .

Cada vórtice no supercondutor infinito carrega exatamente um quantum de fluxo. Isto pode ser demonstrado considerando a equação de London (2.6) mais um termo de fonte não-homogêneo que representa um vórtice com n quanta de fluxo localizado em $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$,

$$\lambda_l^2 \nabla^2 \vec{H} - \vec{H} = -n\Phi_0 \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \hat{e}_z. \quad (2.47)$$

A solução desta equação em coordenadas cilíndricas, obtida analiticamente para $\vec{H} = H\hat{e}_z$ [34], é dada por,

$$H(\vec{r}) = \frac{n\Phi_0}{2\pi\lambda_l^2} K_0 \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}_i|}{\lambda_l} \right), \quad (2.48)$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero.

Por outro lado, a energia total do estado supercondutor é dada pela energia armazenada no campo magnético (E_{mag}) somado à energia cinética das correntes (E_{cin}) geradas por este, ou seja:

$$E_{\text{total}} = E_{\text{mag}} + E_{\text{cin}}, \quad (2.49)$$

onde,

$$E_{\text{cin}} = \int n_s \frac{1}{2} m v_s^2 dV = \int \frac{\lambda_l^2}{8\pi} (\nabla \times \vec{H})^2 dV \quad (2.50)$$

e

$$E_{\text{mag}} = \int \frac{H^2}{8\pi} dV. \quad (2.51)$$

Portanto, a energia total do estado supercondutor na teoria de London é dada por:

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{8\pi} \int \left[\lambda_l^2 (\nabla \times \vec{H})^2 + H^2 \right] dV. \quad (2.52)$$

Substituindo as equações (2.47) e (2.48) na energia total (2.52), obtém-se:

$$E_{\text{total}} = \left(\frac{n\Phi_0}{4\pi\lambda_l} \right)^2 \ln(\kappa). \quad (2.53)$$

Consideremos o caso simples onde a quantidade total de quanta de fluxo no sistema é 2. Como a energia total é proporcional a n^2 é energeticamente mais favorável ter um sistema com 2 vórtices com um quantum de fluxo cada um do que ter um vórtice com 2 quanta de fluxo. Isto demonstra que, em um sistema infinito no estado fundamental, cada vórtice carrega exatamente um quantum de fluxo.

No material supercondutor de duas bandas MgB_2 foi observada uma distribuição anômala de vórtices que corresponde a uma mistura de regiões no estado Meissner com regiões de aglomerados de vórtices formando localmente a rede de Abrikosov. Inicialmente relacionou-se este comportamento com um novo tipo de supercondutividade conhecido como supercondutividade do tipo 1.5 [25]. A explicação para esta distribuição de vórtices foi dada usando a teoria dos supercondutores de duas banda devido a que o MgB_2 é reconhecido como um supercondutor de duas bandas. Segundo os autores, a razão principal desta distribuição anômala de vórtices está relacionada com a banda mais dominante ser do tipo I e a banda menos dominante do tipo II. Porém, este é um tema ainda em discussão pela falta de informação sobre as interações presentes neste tipo de supercondutores.

2.6.2 Sistemas mesoscópicos

Os sistemas mesoscópicos são aqueles que possuem dimensões da mesma ordem de grandeza que o comprimento de coerência ξ e/ou que o comprimento de penetração λ . Estes sistemas são importantes porque podem apresentar melhorias em algumas propriedades dos supercondutores, pela variedade de configurações de vórtices e novos fenômenos relacionados à simetria e ao tamanho da amostra. Nestes sistemas mesoscópicos existe uma competição entre a distribuição triangular de vórtices de Abrikosov e a distribuição de vórtices imposta pela geometria do sistema [17, 18]. Na figura 2.9 mostra-se

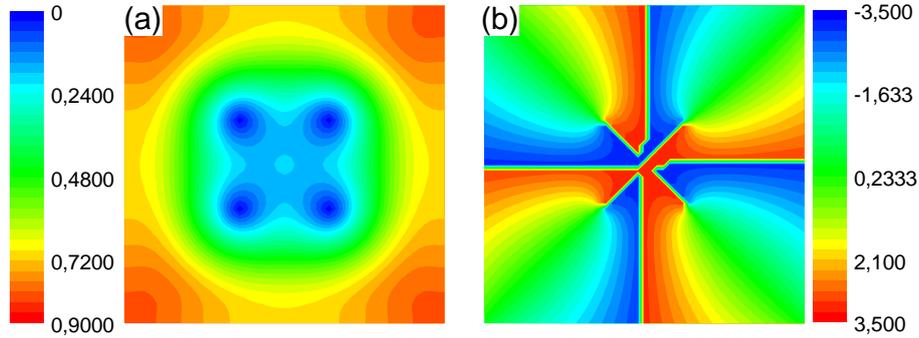


Figura 2.9: (a) Densidade de pares de Cooper e (b) fase do módulo do parâmetro de ordem para um quadrado supercondutor mesoscópico muito fino de comprimento $L = 20\xi(0)$, $T = 0,9T_c$ e $H = 0,108H_{c2}(0)$. Para a figura da fase, uma mudança de azul para vermelho num caminho fechado indica uma variação de 2π sinalizando a nucleação de um vórtice.

um supercondutor quadrado de lado $L = 20\xi(0)$ com 4 vórtices representados por as regiões azuis, na densidade de pares de Cooper (Fig. 2.9(a)), e por uma mudança de vermelho para azul num contorno fechado percorrido no sentido do relógio, na fase do parâmetro de ordem (Fig. 2.9(b)).

Além dos estados de vórtices com apenas um quantum de fluxo magnético, também é possível ter configurações com vórtices gigantes [35, 36]. Estes vórtices gigantes formam-se em supercondutores onde o confinamento imposto pela geometria é tão forte que é energeticamente mais favorável criar um único vórtice com vários quanta de fluxo, caracterizado por um mínimo na densidade de pares de Cooper e uma múltipla mudança de 2π na fase do parâmetro de ordem. Na figura 2.10 tem-se um exemplo de um vórtice gigante com dois quanta de fluxo obtidos num filme supercondutor quadrado muito fino de lado $L = 15\xi(0)$ submetido a um campo magnético homogêneo de $H = 0,148H_{c2}(0)$, onde observa-se que tem-se unicamente um mínimo na densidade de pares de Cooper (Fig. 2.10(a)) e uma mudança de 4π na fase (Fig. 2.10(b)).

Nos sistemas mesoscópicos também é possível obter uma configuração de um par vórtice-antivórtice no estado fundamental numa amostra supercon-

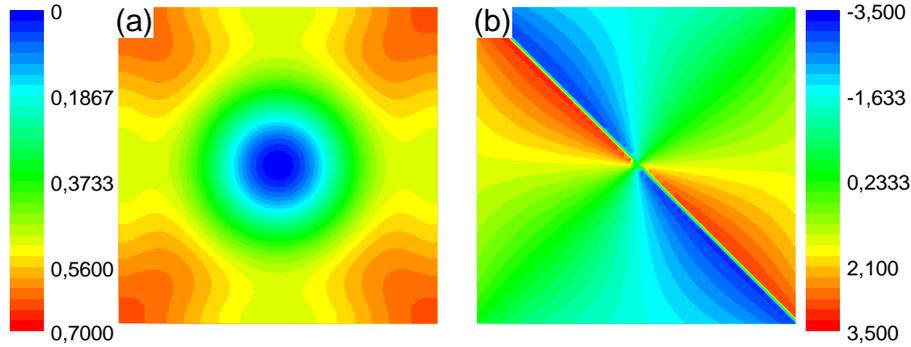


Figura 2.10: (a) Densidade de pares de Cooper e (b) fase do módulo do parâmetro de ordem para um quadrado supercondutor mesoscópico muito fino de comprimento $L = 15\xi(0)$, $T = 0,9T_c$ e $H = 0,148H_{c2}(0)$. Para a figura da fase, uma mudança de azul para vermelho num caminho fechado indica uma variação de 2π sinalizando a nucleação de um vórtice.

dutores quadrados sujeitas a um campo externo homogêneo. Este par vórtice-antivórtice é formado pelo confinamento produzido pelo tamanho e forma da amostra já que para o sistema é mais favorável posicionar 4 vórtices formando um quadrado com o par vórtice-antivórtice no meio do que posicionar 3 vórtices formando um triângulo [19].

Nos sistemas híbridos supercondutor-ferromagnético a variedade de estados que existe é mais rica ainda. Além dos estados de vórtices e vórtices gigantes, é possível criar ou estabilizar pares de vórtice-antivórtice gerados pelo campo não-homogêneo do material magnético que são os responsáveis por muitos fenômenos fascinantes como o movimento controlado de vórtices que são a base de futuros nanodispositivos no moderno campo da fluxônica [7, 37]. Mesmo quando não tem-se pares de vórtice-antivórtice, este sistema é eficiente na ancoragem de vórtices, conseguindo aumentar o valor da corrente crítica [20].

A grande variedade de estados presentes nas amostras mesoscópicas e nos sistemas híbridos tornam interessante o estudo das fases presentes nestes sistemas. Este é o tema principal desta tese.

2.7 Conceitos básicos sobre materiais magnéticos

Os materiais magnéticos são classificados de acordo com seu comportamento ao interagir com campos magnéticos externos em: diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos.

Os materiais diamagnéticos são aqueles que orientam seus momentos magnéticos em sentido contrário ao campo magnético aplicado, diminuindo a intensidade da indução magnética no seu interior. Porém, este efeito é muito fraco. Exemplos destes materiais são o bismuto, o cobre, a prata, o chumbo, os supercondutores no estado Meissner, etc.

Nos materiais paramagnéticos os momentos magnéticos tendem a se alinhar paralelamente ao campo aplicado aumentando assim levemente a intensidade do campo aplicado no seu interior. Estes materiais possuem momento magnético atômico permanente que, devido a flutuações térmicas, estão orientados aleatoriamente na ausência de campo resultando num momento magnético líquido igual a zero. Alguns exemplos destes materiais são o alumínio, o magnésio, o sódio, etc.

O efeito mais forte apresenta-se nos materiais ferromagnéticos onde os momentos magnéticos atômicos alinham-se paralelamente ao campo externo aumentando consideravelmente a intensidade do campo aplicado. O alinhamento continuará mesmo depois de retirar o campo magnético externo, ou seja, o material fica magnetizado e converte-se num ímã por tempo indefinido. Para desmagnetizá-lo é necessário aplicar um campo no sentido oposto.

A figura 2.11 mostra a relação entre a magnetização e campo magnético, conhecida como ciclo de histerese, para ferromagnetos. Quando o material está sujeito a um campo magnético a magnetização aumenta rapidamente até um valor M_S conhecido como magnetização de saturação. Se depois de alcançar o valor de saturação a intensidade do campo aplicado é diminuído, a magnetização decresce mas em uma taxa menor. Portanto, a campo nulo o material permanece ainda com uma magnetização diferente de zero, chamada

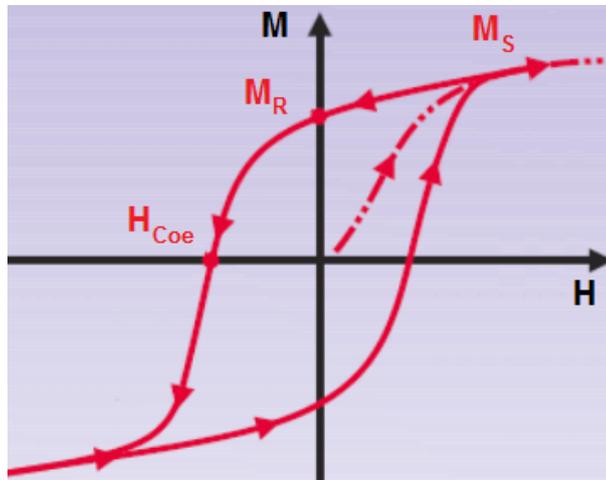


Figura 2.11: Ciclo de histerese de materiais ferromagnéticos. M_S , M_R e H_{Coe} são a magnetização de saturação, a magnetização remanente e o campo de coercividade, respectivamente.

magnetização remanente, M_R . Para anular a magnetização completamente é necessário aplicar um campo magnético no sentido contrário à magnetização. O valor deste campo é conhecido como campo de coercividade H_{Coe} .

2.7.1 Sistemas híbrido supercondutor-ferromagnético

Os avanços em nanotecnologia permitem a fabricação de sistemas nanoestruturados como fitas supercondutoras com "antidots" [38, 39], "dots" magnéticos [20, 21, 6, 40, 41, 42, 43] e não magnéticos [21, 44]. Estes são sistemas muito eficientes na ancoragem de vórtices. Dentre as variedades de armadilhas para ancorar vórtices, os dots magnéticos são especialmente interessantes porque seu momento magnético pode ser facilmente controlado, dando origem a um elevado grau de manipulação das suas propriedades de ancoragem de vórtices. Isto foi mostrado em experimentos onde arranjos de nanomagnetos ancoraram vórtices eficientemente, tanto pela redução local da temperatura crítica mediante os efeitos de proximidade [20, 21, 6] como por seu fluxo magnético quando os dots estão polarizados [41, 42, 45].

Outra característica interessante dos sistemas híbridos supercondutor-

arranjos de dots magnéticos é que estas estruturas conseguem gerar pares de vórtice-antivórtice. Este tema tem atraído uma grande atenção ultimamente. Os resultados de alguns cálculos usando a teoria de Ginzburg-Landau no sistema formado por um arranjo de dots magnéticos polarizados paralelamente à normal do plano do filme supercondutor predizem uma grande variedade de fases de equilíbrio, onde incluem-se moléculas iônicas de vórtice-antivórtice (v-av) e redes compostas de v-av [22, 23, 24]. Também, usando dinâmica molecular tem-se reportado os estados de equilíbrio e estados dinâmicos da corrente induzida de pares de v-av gerados por dots magnéticos polarizados paralelamente ao plano do supercondutor [7].

A formação e implicações de pares de v-av em sistemas híbridos supercondutor-ferromagnéticos (S/F) é geralmente uma matéria de intenso debate. Alguns poucos trabalhos experimentais têm provisto demonstrações indiretas e ainda diretas da formação de pares v-av e suas implicações. Medidas de transporte em filmes supercondutores na presença de arranjos de dots magnéticos têm sugerido que o reforço da supercondutividade por um campo magnético externo, o chamado efeito de supercondutividade induzida de campo, vem da aniquilação de antivórtices com vórtices gerados pelo campo externo [9, 46]. Medidas de filmes supercondutores com arranjos de microbarras polarizadas paralelamente ao plano do supercondutor demonstraram um efeito catraca no caso do campo magnético zero resultando presumivelmente do movimento assimétrico dos vórtices e antivórtices [47].

2.8 Supercondutores de duas bandas

Em décadas passadas foi proposta uma extensão da teoria BCS para supercondutores multibandas [48], mas naquela época não obteve muita repercussão devido, em parte, ao pouco entendimento que tinha-se do fenômeno e, por outra parte, por ser este um fenômeno considerado de temperaturas muito baixas.

Com a descoberta dos supercondutores de alta temperatura, o interesse

principal durante as últimas décadas passou a ser o estudo das propriedades físicas e químicas destes supercondutores. Porém, nestes materiais a teoria BCS não funciona bem e atualmente não tem-se uma teoria que possa explicar microscopicamente o fenômeno da supercondutividade nestes materiais.

O interesse pelos supercondutores convencionais (aqueles onde a teoria BCS funciona) retomou força depois da descoberta da supercondutividade no material MgB_2 [2] devido a este possuir uma temperatura crítica surpreendentemente alta (aproximadamente 40K) quando comparada com a dos outros supercondutores convencionais. Isto motivou um grande número de trabalhos experimentais e teóricos sobre as propriedades, tanto do estado normal, como do estado supercondutor deste material [49].

Outros materiais recentemente descobertos também têm mostrado serem supercondutores de duas bandas, mas, sem dúvida, o mais estudado e que fez renascer o interesse pela supercondutividade multibanda foi o MgB_2 .

2.8.1 MgB_2

Em janeiro de 2011 foi anunciada a descoberta da supercondutividade no material diborato de magnésio, MgB_2 , com uma temperatura crítica de aproximadamente 40 K. Na figura 2.12 é mostrada a dependência da resistividade com a temperatura para este composto [2]. Esta temperatura crítica é a mais alta entre os supercondutores convencionais, quase o dobro do recorde anterior e encontra-se bem próxima da temperatura crítica limite predita pela teoria BCS [50]. Assim que anunciada esta descoberta, uma grande quantidade de trabalhos científicos relacionados com o estudo das propriedades deste material foram desenvolvidos [51, 52, 53, 54]. Alguns destes trabalhos com o objetivo principal de conhecer o mecanismo supercondutor do material, ou seja, se era um supercondutor convencional com uma temperatura crítica muito alta ou era um supercondutor de alta temperatura crítica, que para este caso, não representava uma grande descoberta. Os resultados experimentais, entre eles o efeito isótopo [55], mostraram que efetivamente o diborato de magnésio era um supercondutor convencional (i.e., do tipo BCS).

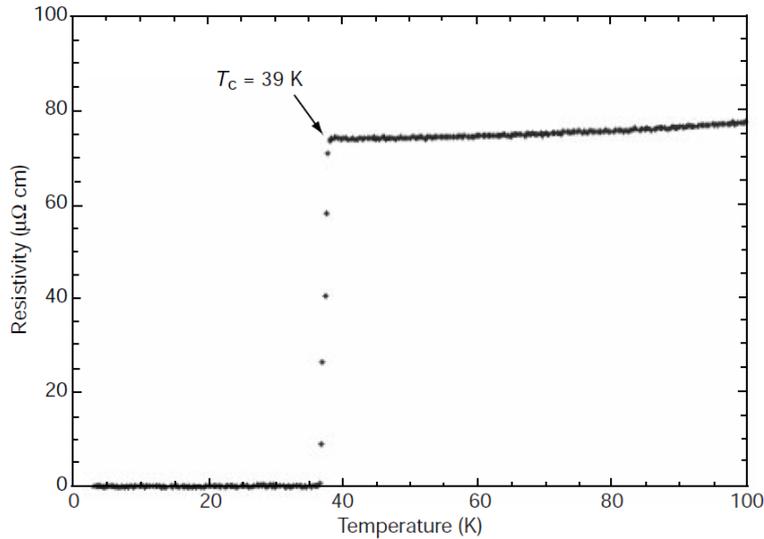


Figura 2.12: Resistividade do diborato de magnésio em função da temperatura [2].

Por outro lado, as medidas experimentais do calor específico mostram um comportamento anômalo que não coincide com a teoria BCS [56, 57, 58]. Este comportamento foi explicado considerando que o material possui dois gaps de energia [3]. Na figura 2.13 comparam-se estes resultados experimentais com os resultados teóricos do calor específico obtidos usando tanto o modelo BCS de um gap (linha tracejada), como o modelo BCS de dois gaps (linha vermelha). Pode-se observar que o modelo que descreve melhor o comportamento do calor específico é o modelo de dois gaps. O comportamento destes gaps com a temperatura obedece à teoria BCS e anulam-se em $T = T_c$ [59].

Os valores reportados dos gaps são: $\Delta_1(0) \approx 7$ meV e $\Delta_2(0) \approx 2$ meV [60, 3]. Usando a relação da teoria BCS entre o gap e a temperatura crítica $\Delta(0) = 1,76k_B T_c$, obtêm-se os valores teóricos para as duas temperaturas críticas: $T_{c1} = 45K$ e $T_{c2} = 15K$ [61]. O acoplamento entre os gaps da origem a uma temperatura crítica de 39 K. Não obstante, teoricamente para falar de duas temperaturas críticas, precisa-se pensar em dois condensados diferentes e, portanto, desacoplados. Nestas condições, a temperatura crítica

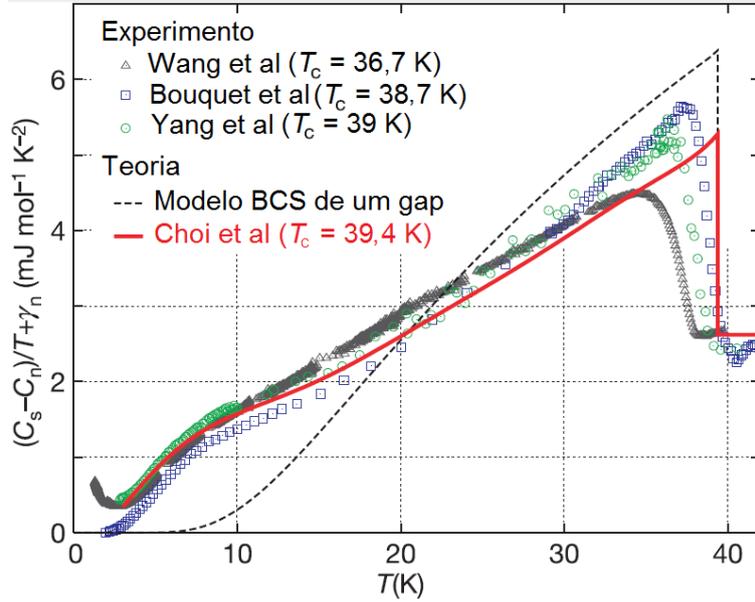


Figura 2.13: Calor específico do MgB_2 em função da temperatura obtido experimentalmente por diferentes grupos de pesquisa. Os resultados são comparados com a teoria BCS (linha preta tracejada) e com a teoria de dois gaps (linha vermelha contínua) onde observa-se o ajuste da teoria de dois gaps [3].

de cada banda para o MgB_2 é $T_{c1} = 38\text{K}$ e $T_{c2} = 3,9\text{K}$ [62] que são menores que T_c .

A vantagem deste material quando comparado com os supercondutores de alta T_c é que possui uma estrutura cristalina mais simples e, portanto, melhores propriedades de transporte. Também é um excelente candidato para substituir o Nb usado na eletrônica atual.

2.8.2 Materiais pnictídeos

A supercondutividade e o magnetismo são dois fenômenos que em princípio pensava-se serem incompatíveis, ou seja, os elementos químicos magnéticos não poderiam formar parte das componentes de um composto supercondutor. Porém, o grupo de Hosono [63] reportou a descoberta de supercondutividade com uma temperatura crítica de 26 K num composto de lântano que possuía

átomos de ferro (Fe) e de arsênico (As). Trocando-se o Lântano por outra terra rara conseguiu-se temperaturas críticas da ordem de 55 K no material $\text{Sm}(\text{O}/\text{F})\text{FeAs}$ [64].

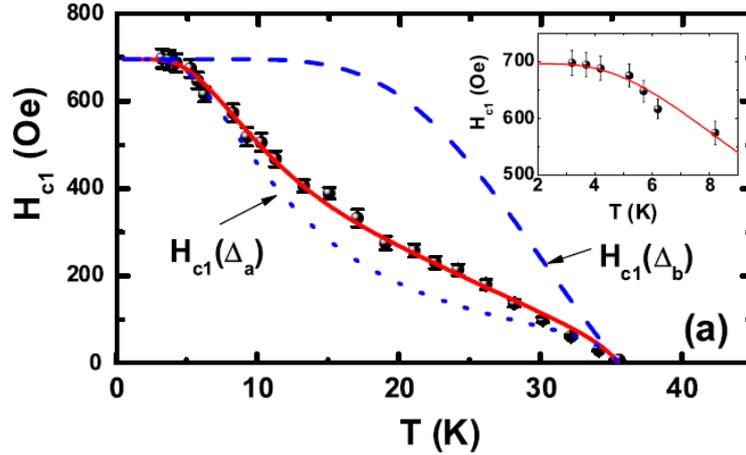


Figura 2.14: Comportamento do campo crítico inferior com a temperatura do sistema para o material $\text{Ba}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{Fe}_2\text{As}_2$ [4]. Os pontos pretos são as medidas obtidas experimentalmente. A linha vermelha contínua é o comportamento descrito pela teoria de dois gaps. A linha pontilhada azul e a linha tracejada azul são a contribuição do gap menor, Δ_a , e do gap maior, Δ_b , ao campo crítico, respectivamente.

Estes materiais são interessantes tanto do ponto de vista experimental (espera-se que novos materiais apresentem temperaturas críticas bem mais altas como aconteceu com os cupratos), como do ponto de vista teórico (alguns destes materiais são reconhecidos como supercondutores multibandas) [4].

A figura 2.14 mostra o comportamento do campo crítico inferior do material $\text{Ba}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{Fe}_2\text{As}_2$ [4] em função da temperatura. Os autores observaram como o comportamento do campo crítico inferior obtido experimentalmente (pontos pretos) é descrito de forma exitosa pelo modelo de supercondutores de dois gaps (linha vermelha). Também mostraram as contribuições do gap menor [$H_{c1}(\Delta_a)$] (linha azul pontilhada) e do gap maior [$H_{c1}(\Delta_b)$] (linha azul tracejada) onde cada um deles está relacionado com sua respectiva densidade de superfluido $\rho_s^i = H_{c1}^i(T)/H_{c1}^i(0)$. Para o caso de dois gaps, a densidade do

superfluido normalizada pode ser expressa como $\rho_s(T) = x\rho_s^a + (1-x)\rho_s^b$ onde x é a fração da densidade de superfluido ρ_s^a relacionada com o gap menor Δ_a . O comportamento multigap dos materiais pnictídeos também manifesta-se no campo crítico superior [65], no calor específico [66] e na densidade de superfluido [67]. O caráter multibanda torna estes materiais tão interessantes quanto o MgB₂.

2.9 Teoria de GL para supercondutores de duas bandas

Como foi dito anteriormente, a teoria de GL é baseada na expansão da energia em termos de um parâmetro de ordem complexo, cujo módulo quadrado é proporcional à densidade de pares de Cooper, e do potencial vetor. Para o caso de múltiplas bandas, o funcional de GL deve ser expresso em termos de um parâmetro de ordem multicomponente, com cada componente representando a amplitude do gap correspondente a cada banda do material.

Nesta seção, nos restringiremos ao caso de duas bandas. O modelo minimalista para esse problema considera o funcional da energia de GL como a soma da energia de cada banda e de um termo de acoplamento do tipo Josephson [68, 69, 70, 71, 72],

$$F = \sum_{n=1}^2 F_n - \int \Gamma (\Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_1^* \Psi_2) dV, \quad (2.54)$$

onde F_n é o funcional de cada banda descrito por,

$$F_n = \int \left[\frac{1}{2m_n} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi_n \right|^2 + \alpha_n |\Psi_n|^2 + \frac{1}{2} \beta_n |\Psi_n|^4 \right] dV, \quad (2.55)$$

onde m_n , α_n e β_n são parâmetros obtidos da teoria microscópica. Esta equação também leva em conta (implicitamente) o acoplamento magnético.

Como de costume, minimiza-se o funcional da energia com relação aos parâmetros de ordem para obter as equações de equilíbrio ,

$$\frac{1}{2m_n} \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi_n + \alpha_n \Psi_n + \beta_n |\Psi_n|^2 \Psi_n - \Gamma \Psi_{3-n} = 0, \quad (2.56)$$

onde $n = 1, 2$. Da minimização com relação ao potencial vetor obtém-se a equação para a supercorrente,

$$\vec{j} = \sum_{n=1}^2 \frac{2e}{m_n} \Re \left[\Psi_n^* \left(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \Psi_n \right]. \quad (2.57)$$

Estas são as equações de GL para supercondutores de duas bandas (TCGL).

No limite $\tau \approx 1 - T/T_c$, o modelo TCGL descrito acima é, em princípio, válido. De fato, para tais temperaturas, esse modelo é reduzido à teoria convencional de GL caracterizando um único parâmetro de ordem com uma única escala de comprimento [73]. No entanto, para temperaturas mais baixas o cenário microscópico correto aponta para dois condensados com dois comprimentos de coerência diferentes. Inspirados no sucesso do formalismo de GL em produzir resultados corretos muito além do seu intervalo de validade em várias outras situações, podemos perguntar se o intervalo de aplicabilidade do modelo TCGL pode ser levado para temperaturas mais baixas. De fato, nas referências [74] e [75] mostrou-se que uma extensão da teoria de GL de forma a incluir termos completos até $\tau^{3/2}$ na expansão do parâmetro de ordem leva à validade da teoria para temperaturas tão baixa quanto $0,62T_c$, dependendo dos valores dos parâmetros microscópicos. Além disso, este modelo prediz corretamente duas escalas de comprimento diferentes para variações de densidade que chegam a ser iguais unicamente quando $T \rightarrow T_c$, em reconciliação com os resultados prévios da teoria microscópica. No entanto, não há ainda uma versão desta teoria para o caso em que há um campo magnético aplicado, de modo que ela não pode ser aplicada aos estudos realizados nessa tese.

Recentemente, evidências que o modelo convencional dá uma descrição correta dos supercondutores de duas bandas foram reportadas na referência [76]. Os autores publicaram uma comparação sistemática com a teoria microscópica de Eilenberger de duas bandas demonstrando que o modelo TCGL minimalista pode oferecer uma descrição quantitativa muito boa de características específicas da supercondutividade de duas bandas, incluindo soluções de vórtice com duas escalas de comprimento, se preservada a forma original

com que τ varia com a temperatura. A faixa de aplicabilidade estende-se até aproximadamente $T = 0,8T_c$, quando os coeficientes do modelo TCGL são conectados diretamente às constantes microscópicas, podendo ser estendida a temperaturas ainda mais baixas quando tratam-se os coeficientes do modelo TCGL como parâmetros meramente fenomenológicos.

CAPÍTULO 3

Método numérico

Na física é muito comum encontrar problemas envolvendo sistemas acoplados de equações diferenciais parciais que, geralmente, possuem solução exata somente em alguns casos específicos. Na maioria dos casos faz-se uso de algum tipo de aproximação que possa garantir uma solução matematicamente aceitável. Dentre estes métodos está, por exemplo, o método de diferenças finitas no qual abandona-se o espaço contínuo e substitui-se por um domínio discreto equivalente. Assim, em cada ponto do espaço discreto obtém-se uma solução aproximada a partir das condições iniciais e das condições de contorno do problema.

No entanto, ao aplicar o método das diferenças finitas às equações TDGL não é possível garantir a invariância de calibre. Para superar este inconveniente faz-se necessário realizar uma transformação unitária adequada antes de discretizar o sistema. Este método é conhecido como o método $U - \Psi$ [77] e será desenvolvido neste capítulo.

3.1 Unidades adimensionais

Para facilitar os cálculos iremos introduzir unidades adimensionais nas equações TDGL descritas por (2.36) e (2.37). Para isto, definem-se as variáveis $\tilde{T} = T/T_c$, $\tilde{\vec{r}} = \vec{r}/\xi(0)$, $\tilde{t} = t/\tau$, $\psi = \Psi/\Psi_0(T)$, $\tilde{\vec{A}} = \vec{A}/A_0$, $\tilde{\varphi} = \varphi/\varphi_0$ e $\alpha = -\alpha_0(1 - \tilde{T})$. A seguir, passaremos a usar essas novas variáveis adimensionais, mas omitiremos o tilde para simplificar a notação. Substituindo estas variáveis nas equações TDGL teremos:

$$-\frac{\Gamma}{\tau} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\varphi\psi \right) = -\alpha_0(1 - T)\psi + \beta\Psi_0^2|\psi|^2\psi + \frac{\hbar^2}{2m\xi(0)^2} \left(-i\nabla - \vec{A} \right)^2 \psi, \quad (3.1)$$

$$\frac{\sigma_n}{2e\tau} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right) = \frac{2e\Psi_0^2}{m} \Re \left[\psi^* \left(-i\nabla - \vec{A} \right) \psi \right] - \frac{c^2}{8\pi e\xi(0)^2} \nabla \times \nabla \times \vec{A}, \quad (3.2)$$

onde $A_0 = \hbar c/2e\xi(0)$ e $\varphi_0 = \hbar/2e\tau$. Igualando todos os coeficientes do lado direito de (3.1) e usando a definição do valor do parâmetro de ordem $\Psi_0^2 = mc^2/16\pi e^2\lambda^2(T)$ na equação (3.2) tem-se

$$-\frac{\Gamma}{\tau} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\varphi\psi \right) = \alpha_0 \left[(i\nabla + \vec{A})^2\psi + (1 - T)(|\psi|^2 - 1)\psi \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\sigma_n}{\tau} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right) = \frac{c^2}{4\pi\lambda^2} \Re \left[\psi^* \left(-i\nabla - \vec{A} \right) \psi \right] - \frac{c^2}{4\pi\xi^2} \nabla \times \nabla \times \vec{A}. \quad (3.4)$$

Lembrando que $\lambda^2(T) = \lambda_0^2/(1 - T/T_c)$ e fazendo simples procedimentos matemáticos na equação (3.4), temos,

$$\frac{\sigma_n}{\tau} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right) = \frac{c^2}{4\pi\lambda_0^2} \left\{ (1 - T) \Re \left[\psi^* \left(-i\nabla - \vec{A} \right) \psi \right] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \vec{A} \right\}. \quad (3.5)$$

Finalmente, fazendo $\tau = 4\pi\lambda_0^2\sigma_n/c^2$, obtém-se as equações TDGL em unidades adimensionais:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\varphi\psi \right) = -\frac{1}{\eta} \left[(i\nabla + \vec{A})^2\psi + (1 - T)(|\psi|^2 - 1)\psi \right], \quad (3.6)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi\right) = (1 - T)\Re \left[\bar{\psi}(-i\nabla - \vec{A})\psi\right] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \vec{A}. \quad (3.7)$$

A invariância de calibre destas equações permite a escolha do calibre de potencial escalar zero. Portanto, finalmente temos que,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{1}{\eta} \left[(i\nabla + \vec{A})^2\psi + (1 - T)(|\psi|^2 - 1)\psi \right], \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (1 - T)\Re \left[\bar{\psi}(-i\nabla - \vec{A})\psi\right] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times \vec{A}, \quad (3.9)$$

onde as distâncias são medidas em unidades do comprimento de coerência $\xi(0) = \sqrt{\hbar/2m\alpha_0}$, o tempo em unidades de $\tau = 4\pi\lambda_0^2\sigma_n/c^2$, o campo externo em unidades de $H_{c2}(0) = \Phi_0/2\pi\xi^2(0)$, o potencial vetor em unidades de $H_{c2}\xi(0)$ e a temperatura em unidades de T_c . $\eta = 4\pi\lambda_0^2\sigma_n\alpha_0/c^2\Gamma = t_\psi/t_A$ é a razão entre os tempos característicos para ψ e A . No limite limpo $\eta = 1$ e no limite sujo $\eta = 5,79$ [31].

Até onde tenho conhecimento, as equações (3.8) e (3.9) não têm solução analítica e, portanto, usam-se métodos aproximados que consigam descrever bem as soluções. Um deles é o método de diferenças finitas com variáveis de ligação que garante a invariância de calibre das equações TDGL [77].

3.2 Método $U - \Psi$ aplicado às equações TDGL

Nesta seção aplicaremos o método $U - \Psi$ às equações TDGL descritas na seção anterior. Consideremos o caso para duas dimensões que representa um supercondutor infinito numa das coordenadas (cilindro supercondutor infinito). As incógnitas deste problema são o parâmetro de ordem $\psi(x, y)$ e as duas componentes do potencial vetor $A_x(x, y)$ e $A_y(x, y)$. O método $U - \Psi$ consiste em fazer uma transformação introduzindo duas novas variáveis que estão relacionadas com o potencial vetor,

$$\mathcal{U}^x(x, y, t) = \exp\left(-i \int_{x_0}^x A^x(\zeta, y, t) d\zeta\right), \quad (3.10)$$

$$\mathcal{U}^y(x, y, t) = \exp\left(-i \int_{y_0}^y A^y(x, \nu, t) d\nu\right), \quad (3.11)$$

onde o ponto (x_0, y_0) é arbitrário e $i = \sqrt{-1}$. Com a introdução destes campos pode-se garantir a invariância de calibre das equações TDGL ao substituí-las por suas equivalentes em diferenças finitas [77]. Agora, as incógnitas do problema serão o parâmetro de ordem e os campos $\mathcal{U}^x(x, y)$ e $\mathcal{U}^y(x, y)$.

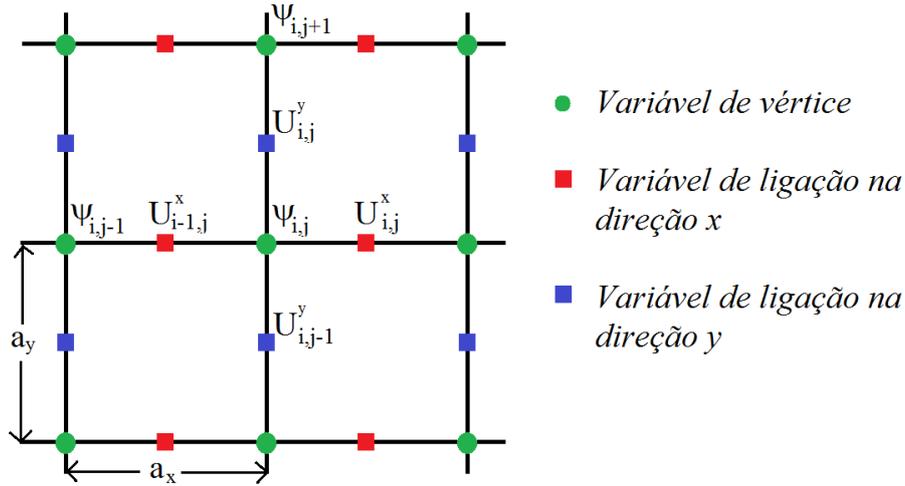


Figura 3.1: Esquema do método de variáveis de ligação para uma rede com um passo de a_x na direção x e um passo a_y na direção y para o caso de um filme supercondutor muito fino.

3.2.1 Discretização das equações TDGL

Para discretizar as equações TDGL é importante notar que os análogos discretos para \mathcal{U}^x e \mathcal{U}^y podem ser obtidos das relações:

$$\mathcal{U}_{i,j}^x = \prod_{k=1}^{i-1} U_{k,j}^x; \quad \mathcal{U}_{i,j}^y = \prod_{k=1}^{j-1} U_{i,k}^y, \quad (3.12)$$

onde $U_{i,j}^x$ é a variável de ligação entre os pontos da malha (i, j) e $(i + 1, j)$ (Fig. 3.1). Similarmente, $U_{i,j}^y$ é a variável de ligação entre os pontos da malha (i, j) e $(i, j + 1)$.

Da equação (3.12), as seguintes relações podem ser obtidas:

$$U_{i,j}^x = \overline{\mathcal{U}_{i,j}^x} \mathcal{U}_{i+1,j}^x; \quad U_{i,j}^y = \overline{\mathcal{U}_{i,j}^y} \mathcal{U}_{i,j+1}^y. \quad (3.13)$$

Usando a equação (3.10), obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{U}^x}{\partial x} = -i\mathcal{U}^x A_x. \quad (3.14)$$

Substituindo-se na derivada

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{U}^x(x, y)\psi(x, y)] = \psi(x, y)\frac{\partial \mathcal{U}^x(x, y)}{\partial x} + \mathcal{U}^x(x, y)\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}, \quad (3.15)$$

encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{U}^x(x, y)\psi(x, y)] = -i\psi(x, y)\mathcal{U}^x(x, y)A_x(x, y) + \mathcal{U}^x(x, y)\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Esta equação, por sua vez, conduz à expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{U}^x\psi] = i\mathcal{U}^x \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right) \psi \quad (3.17)$$

ou

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right) \psi = -i\overline{\mathcal{U}^x} \frac{\partial}{\partial x} [\mathcal{U}^x\psi]. \quad (3.18)$$

Agora, derivando de novo a equação (3.18) e usando a equação (3.14) tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right) \psi = \overline{\mathcal{U}^x} \left[A_x \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{U}^x\psi) - i\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{U}^x\psi) \right]. \quad (3.19)$$

Substituindo a equação (3.17) na expressão anterior e fazendo alguns procedimentos matemáticos, obtém-se

$$-i\frac{\partial}{\partial x} \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right) \psi - A_x \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right) \psi = -\overline{\mathcal{U}^x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{U}^x\psi) \quad (3.20)$$

ou

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right)^2 \psi = -\overline{\mathcal{U}^x} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\mathcal{U}^x\psi). \quad (3.21)$$

Para discretizar esta equação, as expressões equivalentes em diferenças finitas são substituídas em

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x \right)^2 \psi|_{(x_i, y_j)} = -\overline{\mathcal{U}_{i,j}^x} \left(\frac{\mathcal{U}_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\mathcal{U}_{i,j}^x \psi_{i,j} + \mathcal{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right). \quad (3.22)$$

Usando a relação (3.13), obtém-se,

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x\right)^2 \psi|_{(x_i, y_j)} = - \left(\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) \quad (3.23)$$

e similarmente para y . Logo, o termo de energia cinética completo na sua forma discreta toma a forma:

$$\begin{aligned} \left(-i\nabla - \vec{A}\right)^2 \psi|_{(x_i, y_j)} = & - \left(\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2} \right) - \\ & - \left(\frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i,j-1}^y \psi_{i,j-1}}{a_y^2} \right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, a equação (3.8) na sua forma discreta torna-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi = & \left(\frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i-1,j}^x \psi_{i-1,j}}{a_x^2 \eta} \right) + \\ & + \left(\frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \bar{U}_{i,j-1}^y \psi_{i,j-1}}{a_y^2 \eta} \right) + \frac{(1-T)}{\eta} (1 - \bar{\psi}_{i,j} \psi_{i,j}) \psi_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para a evolução temporal do potencial vetor considera-se o cálculo do fluxo magnético num ponto (i, j) da amostra e define-se uma nova variável

$$L_{i,j} = \exp(-i\Phi_{i,j}) = \exp \left\{ -i \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \right\} = U_{i,j}^x U_{i+1,j}^y \bar{U}_{i,j+1}^x \bar{U}_{i,j}^y. \quad (3.26)$$

Substituindo a integral pelo valor no ponto médio, tem-se

$$L_{i,j} \approx \exp \left\{ -i a_x a_y B_z \left(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j + \frac{a_y}{2} \right) \right\}, \quad (3.27)$$

onde considerou-se que o campo magnético é aplicado na direção z . Desta equação é possível obter o campo magnético nos pontos centrais da malha:

$$B_z \left(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j + \frac{a_y}{2} \right) = \frac{i}{a_x a_y} \ln L_{i,j}. \quad (3.28)$$

Portanto, o rotacional do campo magnético pode ser expresso em função da variável $L_{i,j}$ como:

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_x = (\nabla \times \vec{B})_x \approx \frac{i}{a_x a_y^2} (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1), \quad (3.29)$$

$$(\nabla \times \nabla \times \vec{A})_y = (\nabla \times \vec{B})_y \approx \frac{i}{a_x^2 a_y} (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1). \quad (3.30)$$

Para obter o equivalente discreto do termo da corrente supercondutora $\Re[\psi^*(-i\nabla - \vec{A})\psi]$, usa-se a equação (3.18). Tem-se

$$\Re[\bar{\psi}(-i\nabla - \vec{A})_x \psi]_{|x_i + \frac{a_x}{2}, y_j} = \Im \left\{ \bar{\psi}_{i,j} \bar{U}_{i,j}^x \frac{\mathcal{U}_{i+1,j}^x \psi_{i+1,j} - \mathcal{U}_{i,j}^x \psi_{i,j}}{a_x} \right\}, \quad (3.31)$$

o qual depois de alguns procedimentos matemáticos assume a forma

$$\Re[\bar{\psi}(-i\nabla - \vec{A})_x \psi]_{|x_i + \frac{a_x}{2}, y_j} = \frac{1}{a_x} \Im (\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}) \quad (3.32)$$

e similarmente para a componente y ,

$$\Re[\bar{\psi}(-i\nabla - \vec{A})_y \psi]_{|x_i, y_j + \frac{a_y}{2}} = \frac{1}{a_y} \Im (\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}). \quad (3.33)$$

O equivalente discreto da derivada temporal do potencial vetor é obtido tomando a derivada temporal das variáveis de ligação $U_{i,j}^x$ e $U_{i,j}^y$ definidas em (3.13):

$$\frac{\partial}{\partial t} [\bar{U}^x(x, y, t) \mathcal{U}^x(x + \delta, y, t)] = -i \bar{U}^x(x, y, t) \mathcal{U}^x(x + \delta, y, t) \int_x^{x+\delta} \frac{\partial A_x}{\partial t} d\chi. \quad (3.34)$$

Para $\delta = a_x$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} U_{i,j}^x = -i a_x U_{i,j}^x \frac{\partial}{\partial t} A_x(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j, t). \quad (3.35)$$

Portanto, a evolução temporal da componente x do potencial vetor é dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t} A_x(x_i + \frac{a_x}{2}, y_j, t) = \frac{i}{a_x} \bar{U}_{i,j}^x \frac{\partial}{\partial t} U_{i,j}^x \quad (3.36)$$

e similarmente para a componente y . Substituindo (3.30), (3.32), (3.33), (3.36) junto com seu equivalente para y em (3.9) tem-se:

$$\frac{\partial U_{i,j}^x}{\partial t} = -i(1 - T) U_{i,j}^x \Im(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^x \psi_{i+1,j}) - \frac{\kappa^2}{a_y^2} U_{i,j}^x (\bar{L}_{i,j-1} L_{i,j} - 1), \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial U_{i,j}^y}{\partial t} = -i(1 - T) U_{i,j}^y \Im(\bar{\psi}_{i,j} U_{i,j}^y \psi_{i,j+1}) - \frac{\kappa^2}{a_x^2} U_{i,j}^y (\bar{L}_{i,j} L_{i-1,j} - 1). \quad (3.38)$$

A integração temporal pode ser aproximada por um passo simples de Euler,

$$\psi_{i,j}^{t+\Delta t} = \psi_{i,j}^t + \Delta t \frac{\partial}{\partial t} \psi_{i,j}^t + \mathcal{O}(\Delta t). \quad (3.39)$$

O método de Euler é uma aproximação de primeira ordem no tempo e é necessário usar passos suficientemente pequenos para garantir a sua estabilidade. O tamanho do passo temporal depende do tamanho do passo espacial. Por exemplo, para um passo espacial de $h = 0,5\xi$, o limite teórico do passo temporal da equação (3.39), para o caso em que a variação temporal do potencial vetor pode ser desprezada, ou seja, para filmes com espessura menor do que o comprimento de penetração onde o potencial vetor do sistema pode-se considerar como sendo igual ao potencial vetor das fontes externas de campo, é [78]

$$\Delta t < \frac{h^2}{4} = 0,0625. \quad (3.40)$$

Ao contrário do método de Euler, o método semi-implícito é incondicionalmente estável para problemas de difusão permitindo utilizar passos temporais maiores [78].

Além do parâmetro de ordem, calculamos a energia livre (equação 2.8) em unidades adimensionais do filme supercondutor muito fino ($espessura < \xi$) que pode ser expressa como

$$\mathcal{G} = \int_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{2} |\psi|^2 - 1 \right) |\psi|^2 + \frac{1}{1-T} \left| \left(-i\nabla - \vec{A} \right) \psi \right|^2 \right] dV. \quad (3.41)$$

O primeiro termo do lado direito é a energia de condensação no estado supercondutor e o outro termo é a energia cinética dos pares de Cooper. O termo relacionado com a energia do campo magnético não é levada em conta devido a que consideramos que o potencial vetor que gera o campo na amostra é igual ao potencial vetor das fontes de campo externo. A forma discreta da energia de condensação pode-se obter facilmente substituindo pelo seu equivalente em diferenças finitas,

$$\mathcal{G}^{cond} = \frac{1}{4} \sum_{\text{nodos}} |\psi_{i,j}|^2 \left(\frac{1}{2} |\psi_{i,j}|^2 - 1 \right) a_x a_y, \quad (3.42)$$

onde a somatória descreve a soma sobre todos os nodos no supercondutor.

Para obter a forma discreta do termo da energia cinética usa-se a equação (3.18) e a sua equivalente na direção y :

$$\mathcal{G}^{cin} = \frac{1}{1-T} \sum_{nodos} \left[\left| \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{a_x} \right|^2 + \left| \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{a_y} \right|^2 \right] a_x a_y. \quad (3.43)$$

Substituindo estes termos na equação (3.41) tem-se a forma discreta da energia livre do sistema

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \sum_{nodos} & \left[\frac{1}{4} |\psi_{i,j}|^2 \left(\frac{1}{2} |\psi_{i,j}|^2 - 1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{1-T} \left(\left| \frac{U_{i,j}^x \psi_{i+1,j} - \psi_{i,j}}{a_x} \right|^2 + \left| \frac{U_{i,j}^y \psi_{i,j+1} - \psi_{i,j}}{a_y} \right|^2 \right) \right] a_x a_y. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Os sistemas estudados nesta tese apresentam uma grande variedade de configurações de vórtices, como moléculas de vórtices ou de antivórtices, pares de vórtice-antivórtice, vórtices gigantes e combinações destes. Para descrever corretamente estas configurações faz-se necessário medir a mudança na fase do parâmetro de ordem em uma célula unitária da malha no sentido anti-horário,

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{i,j} = \ln & \left(\frac{\psi_{i,j} \bar{\psi}_{i+1,j}}{|\psi_{i,j}| |\bar{\psi}_{i+1,j}|} \right) + \ln \left(\frac{\psi_{i+1,j} \bar{\psi}_{i+1,j+1}}{|\psi_{i+1,j}| |\bar{\psi}_{i+1,j+1}|} \right) \\ & + \ln \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} \bar{\psi}_{i,j+1}}{|\psi_{i+1,j+1}| |\bar{\psi}_{i,j+1}|} \right) + \ln \left(\frac{\psi_{i,j+1} \bar{\psi}_{i,j}}{|\psi_{i,j+1}| |\bar{\psi}_{i,j}|} \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Uma diferença de fase de 2π corresponde a um vórtice, enquanto que uma diferença de -2π corresponde a um antivórtice. Quando a configuração de vórtices no supercondutor não apresenta vórtices gigantes ou antivórtices, a diferença de fase do parâmetro de ordem no sistema é simplesmente o número de vórtices vezes 2π

3.3 Método semi-implícito

A idéia principal deste método é tratar o termo de difusão semi-implicitamente em quanto que os termos não-lineares são tratados explicitamente. Desta

forma, é possível reduzir as restrições de estabilidade [79].

A equação (3.25) tem a forma,

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_{i,j} = D(L_x\psi_{i,j} + L_y\psi_{i,j}) + f, \quad (3.46)$$

onde D é uma constante de difusão e f é usada para simbolizar os outros termos. No caso particular da equação (3.25) tem-se $D = 1/\eta$ e $f = (1 - T)(1 - |\psi_{i,j}|^2)\psi_{i,j}/\eta$. L_x é um operador cuja ação sobre $\{\psi_{i,j}\}_{i=2,3,\dots,N_x}$ pode-se representar pela matriz tridiagonal Υ_x^2 ,

$$L_x\psi_{i,j} \equiv \frac{\Upsilon_x^2}{a_x^2}\psi_{i,j} \equiv \frac{a_{i-1}\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + a_{i+1}\psi_{i+1,j}}{a_x^2}, \quad (3.47)$$

onde para cada j tem-se os coeficientes $a_{i-1} = \bar{U}_{i-1,j}$ e $a_{i+1} = U_{i,j}$.

A versão discreta de equações do tipo (3.46) pode ser expressa da seguinte forma [79]:

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \frac{D\Upsilon_x^2}{a_x^2} (\psi^{(n+1)} + \psi^{(n)}) + \frac{1}{2} \frac{D\Upsilon_y^2}{a_y^2} (\psi^{(n+1)} + \psi^{(n)}) + \\ &+ \frac{1}{2} (f^{(n+1)} + f^{(n)}) + \mathcal{O}(\Delta t^2), \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde $\psi^{(n)}$ representa a função na iteração n .

Reagrupando os termos tem-se,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{D\Delta t}{2a_x^2} \Upsilon_x^2 - \frac{D\Delta t}{2a_y^2} \Upsilon_y^2\right) \psi^{(n+1)} &= \left(1 + \frac{D\Delta t}{2a_x^2} \Upsilon_x^2 + \frac{D\Delta t}{2a_y^2} \Upsilon_y^2\right) \psi^{(n)} + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} (f^{(n+1)} + f^{(n)}) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (3.49)$$

Usando a relação $(1 \pm x)(1 \pm y) = 1 \pm x \pm y + xy$ e desprezando o termo de ordem Δt^2 tem-se:

$$\begin{aligned} \left(1 \pm \frac{D\Delta t}{2a_x^2} \Upsilon_x^2 \pm \frac{D\Delta t}{2a_y^2} \Upsilon_y^2\right) &= \left(1 \pm \frac{D\Delta t}{2a_x^2} \Upsilon_x^2\right) \left(1 \pm \frac{D\Delta t}{2a_y^2} \Upsilon_y^2\right) + \\ &+ \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Considerando que $\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)}$ é da ordem de Δt , a equação (3.49) toma a seguinte forma:

$$M_x M_y \psi^{(n+1)} = R_x R_y \psi^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} (f^{(n+1)} + f^{(n)}) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \quad (3.51)$$

onde as matrizes M_μ e R_μ são definidas por:

$$M_\mu = \left(1 - \frac{D\Delta t}{2a_\mu^2} \Upsilon_\mu^2\right); \quad R_\mu = \left(1 + \frac{D\Delta t}{2a_\mu^2} \Upsilon_\mu^2\right), \quad (3.52)$$

onde $\mu = x, y$.

Para solucionar a equação (3.51), seguem-se os seguintes passos:

$$\begin{aligned} M_x \psi^{(n+1/2)} &= R_x R_y \psi^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} (f^{(n+1)} + f^{(n)}) \psi^{(n)} \\ M_y \psi^{(n+1)} &= \psi^{(n+1/2)}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

O termo $f^{(n+1)}$ pode depender do valor do parâmetro de ordem no seguinte passo temporal e inicialmente entra na equação (3.53) como uma incógnita. Neste caso, assume-se que $\psi^{(n+1)} = \psi^{(n)}$ na primeira iteração da equação (3.53). Depois, o resultado da primeira iteração é substituído em $f^{(n+1)}$ para realizar a segunda iteração e assim por diante. A cada iteração o valor de ψ vai convergindo para uma solução estacionária neste valor de t . A rapidez da convergência depende do passo temporal Δt : quanto menor o passo mais rápida é a convergência. Porém, quanto menor é o passo temporal, maior é o tempo computacional necessário para encontrar o estado de equilíbrio do sistema. Portanto, é preciso escolher um valor de passo temporal que otimize a relação rapidez-precisão. Nesta tese usam-se cinco iterações entre passos temporais para um $\Delta t = 0,001$.

Na equação (3.53), o termo $R_x R_y \psi^{(n)}$ depende de valores conhecidos do passo temporal anterior e pode-se armazenar numa variável auxiliar para as iterações seguintes. As matrizes M_μ são tridiagonais o que permite solucionar estas equações usando rotinas de inversão rápida de matrizes tridiagonais [78].

Para a evolução temporal do potencial vetor, a variável de ligação pode ser expressa na forma exponencial $U_{i,j}^x = \exp(-i\phi_{i,j}^x)$ que ao ser substituída na equação (3.37) resulta na expressão,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{i,j}^x}{\partial t} &= \frac{\kappa^2}{a_y^2} (\phi_{i,j-1}^x - 2\phi_{i,j}^x + \phi_{i,j+1}^x) + \frac{\kappa^2}{a_y^2} (-\phi_{i+1,j}^y + \phi_{i,j}^y + \phi_{i+1,j-1}^y - \phi_{i,j-1}^y) \\ &+ (1 - T) \Im[\psi_{i,j}^- \exp(-i\phi_{i,j}^x) \psi_{i+1,j}] \end{aligned} \quad (3.54)$$

e similarmente para a direção y . A equação (3.54) tem a forma da equação (3.46) com $D = \kappa^2$, $L_x = 0$ e

$$f = \frac{\kappa^2}{a_y^2} (-\phi_{i+1,j}^y + \phi_{i,j}^y + \phi_{i+1,j-1}^y - \phi_{i,j-1}^y) + (1 - T) \Im[\psi_{i,j}^{\bar{}} \exp(-i\phi_{i,j}^x \psi_{i+1,j}^{\sim})]. \quad (3.55)$$

3.4 Condições de contorno

O método $U - \Psi$ descrito anteriormente é usado para obter soluções das equações TDGL nos pontos interiores da malha, ou seja, não aplicam-se nos pontos da borda do sistema. Para obter os pontos faltantes utilizam-se as condições de contorno do problema. Geralmente, nos sistemas supercondutores consideram-se problemas com condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann que representam a interface supercondutor/metal ou a interface supercondutor/isolante ou vácuo, respectivamente.

3.4.1 Condições de contorno supercondutor/isolante

A condição de contorno implica que nenhuma corrente supercondutora pode transpor o limite da amostra supercondutora. Para a interface supercondutor/isolante é descrita pela equação (2.21) com $b \rightarrow \infty$, ou seja,

$$(-i\nabla - \vec{A})\psi \cdot \hat{n} \Big|_S = 0. \quad (3.56)$$

O equivalente discreto no método $U - \Psi$ para o caso de um prisma de seção reta quadrada com a fronteira oeste em $i = 1$, a fronteira leste em $i = N_x + 1$, a fronteira sul em $j = 1$ e a fronteira norte em $j = N_y + 1$ é dado por [77]:

$$\psi_{1,j} = U_{1,j}^x \psi_{2,j}, \quad \psi_{N_x+1,j} = \bar{U}_{N_x,j}^x \psi_{N_x,j}, \quad (3.57)$$

$$\psi_{i,1} = U_{i,1}^y \psi_{i,2}, \quad \psi_{i,N_y+1} = \bar{U}_{i,N_y}^y \psi_{i,N_y}. \quad (3.58)$$

Para as componentes do potencial vetor utiliza-se a continuidade do

campo magnético na borda,

$$\begin{aligned} U_{1,j}^y &= U_{1,j}^x U_{2,j}^y \bar{U}_{1,j+1}^x e^{ia_x a_y H_e}, & U_{N_x+1,j}^y &= U_{N_x,j+1}^x U_{N_x,j}^y \bar{U}_{N_x,j}^x e^{-ia_x a_y H_e}, \\ U_{i,1}^x &= \bar{U}_{i+1,1}^y U_{i,2}^x U_{i,1}^y e^{-ia_x a_y H_e}, & U_{i,N_y+1}^x &= \bar{U}_{i,N_y}^y U_{i,N_y}^x U_{i+1,N_y}^y e^{ia_x a_y H_e}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

onde H_e é o campo magnético aplicado.

3.4.2 Condições de contorno periódicas

As condições de contorno descritas anteriormente são aplicáveis para amostras supercondutoras finitas em duas dimensões e infinita na outra e de fator de demagnetização desprezível. No caso de um filme supercondutor infinito (dimensões infinitamente maiores que os comprimentos característicos) escolhe-se uma célula padrão de tamanho $L_x \times L_y$ e considera-se que o comportamento do supercondutor observado nessa célula repete-se no sistema todo. Isto é equivalente a ter um sistema de tamanho $L_x \times L_y$ com condições de contorno periódicas. Uma das condições necessárias para poder aplicar condições de contorno periódicas é que o potencial vetor seja também periódico de tal forma que, no contorno da célula de simulação, os valores do potencial vetor coincidam com o contorno da célula vizinha. As condições de contorno periódicas para uma translação do potencial vetor e do parâmetro de ordem têm a forma [80]

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r} + \vec{r}_\mu) &= \vec{A}(\vec{r}) + \nabla \chi_\mu(\vec{r}) \\ \Psi(\vec{r} + \vec{r}_\mu) &= \Psi(\vec{r}) \exp \left[i \frac{2e}{\hbar c} \chi_\mu(\vec{r}) \right], \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde $\mu = x, y$; \vec{r}_μ são os vectores da rede e $\chi_\mu(\vec{r})$ é o calibre dos potenciais associado com cada vetor \vec{r}_μ . A escolha do calibre tem de ser adequada de modo que permita manter a condição de que o potencial vetor e o parâmetro de ordem sejam funções univaloradas. Por exemplo, o potencial vetor de um campo magnético homogêneo aplicado na direção z pode ser expresso na forma $\vec{A} = x H_e \hat{e}_y$, onde H_e é o campo aplicado. Porém, este potencial vetor não representa adequadamente o potencial vetor do sistema periódico,

já que apresenta discontinuidade entre células unitárias adjacentes. Pode-se mostrar que a escolha do calibre

$$\chi_x = yH_e L_x = \frac{y\Phi}{L_y}, \quad \chi_y = 0 \quad (3.61)$$

formam a periodicidade desejada tanto ao potencial vetor quanto ao parâmetro de ordem.

Usando a invariância translacional descrita pelas equações (3.60) para o caso de $\vec{r}_x = L_x \hat{e}_x$ e o calibre de potencial dado pela equação (3.61) tem-se:

$$\begin{aligned} A_x(L_x, y) &= A_x(0, y), \\ A_y(L_x, y) &= A_y(0, y) + \frac{\Phi}{L_y}, \\ \Psi(L_x, y) &= \Psi(0, y) \exp\left(2\pi i \frac{y}{L_y} n\right), \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde usou-se a quantização do fluxo magnético, $\Phi = n\Phi_0$. Na direção y tem-se:

$$\begin{aligned} A_x(x, L_y) &= A_x(x, 0), \\ A_y(x, L_y) &= A_y(x, 0), \\ \Psi(x, L_y) &= \Psi(x, 0). \end{aligned} \quad (3.63)$$

A forma discreta das condições de contorno para as componentes do potencial vetor estão contidas na forma discreta das variáveis de ligação. Portanto, na malha de simulação de tamanho $N_x \times N_y$ tem-se:

$$\begin{aligned} U_{N_x+1,j}^x &= U_{1,j}^x, & U_{i,N_y+1}^x &= U_{i,1}^x, \\ U_{N_x+1,j}^y &= U_{1,j}^y \exp(-i2\pi n/N_y), & U_{i,N_y+1}^y &= U_{i,1}^y, \\ \Psi_{N_x+1,j} &= \Psi_{1,j} \exp(i2\pi ny/L_y), & \Psi_{i,N_y+1} &= \Psi_{i,1}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Estas são as condições de contorno que tornam periódico o módulo do parâmetro de ordem e o campo magnético.

CAPÍTULO 4

Estados de vórtice-antivórtice no híbrido supercondutor/ferromagnético nanoestruturado

As amostras híbridas supercondutor/ferromagnético (SC/FM) são sistemas interessantes tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. A interação entre estes dois materiais melhoram as propriedades críticas do supercondutor [9, 81, 82] e dão origem a uma rica variedade de estados de vórtices dentre os quais podem-se ressaltar a formação e estabilização de pares de vórtice-antivórtice (v-av) gerados de forma espontânea pelo campo não-homogêneo do ferromagnético [23, 83, 84].

Como discutido no Capítulo 2, o campo magnético consegue penetrar parcialmente os supercondutores macroscópicos do tipo II em forma de vórtices quantizados. Estes vórtices são representados como laços de correntes que circulam de forma a facilitar a penetração do campo em determinadas regiões do supercondutor e interagem de forma repulsiva entre si formando, em amostras macroscópicas, um arranjo triangular conhecido como rede de Abrikosov. Por outro lado, os antivórtices são representados como laços de correntes que circulam em sentido contrário aos vórtices e interagem de forma

atrativa com os vórtices. Portanto, nestes sistemas não é possível estabilizar um par vórtice-antivórtice. Se são formados, em situações de não equilíbrio, atraem-se até se aniquilarem entre si.

No entanto, nos sistemas mesoscópicos é possível estabilizar um par de v-av mesmo em campos homogêneos. Este par é criado devido ao confinamento imposto pela geometria da amostra. Em [19], por exemplo, foi demonstrado, a partir da teoria de Ginzburg-Landau linearizada, que o estado de vorticidade total $N = 3$ num quadrado mesoscópico manifesta-se numa configuração de 4 vórtices formando um quadrado com um antivórtice no centro, a qual é energeticamente mais favorável que uma configuração contendo apenas 3 vórtices.

No caso dos híbridos SC/FM, a criação e estabilização dos pares de v-av é devido ao campo magnético não-homogêneo da textura magnética, como foi recentemente observado no sistema híbrido Py/Nb [84]. Estes pares de v-av são os responsáveis por fenômenos como a ancoragem de vórtices [85, 86], o movimento controlado de vórtices [47], auto-organização [87], entre outros. O campo não-homogêneo da textura magnética dá origem a uma rica variedade de fases tornando interessante o estudo das configurações de equilíbrio nos sistemas híbridos. Motivados pelos interessantes fenômenos não triviais presentes nestes sistemas, neste capítulo estudaremos as configurações de equilíbrio numa amostra híbrida composta por um filme supercondutor interagindo com um campo magnético não-homogêneo gerado por uma rede de dipolos. Para isto, as equações TDGL serão solucionadas numericamente para que analisemos detalhadamente como nucleiam os pares v-av num filme supercondutor interagindo com um arranjo de dipolos magnéticos polarizados perpendicularmente ao plano do filme supercondutor. Os processos de nucleação serão estudados simulando uma situação experimental na qual o filme supercondutor é resfriado desde o estado normal até a temperatura desejada na presença do campo magnético gerado pelos dipolos. Um diagrama de fases será construído em função das características geométricas do arranjo.

4.1 O dipolo magnético

Considera-se que um dipolo elétrico é formado por uma carga pontual positiva $+q$ interagindo com outra carga pontual negativa $-q$ separadas por uma distância d . O campo elétrico gerado por um dipolo elétrico na origem é dado pela expressão:

$$\vec{E}(r) = \frac{(3\vec{p} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{p}}{r^3}, \quad (4.1)$$

onde $\vec{p} = q\vec{d}$ é o momento do dipolo e \hat{n} é o vetor unitário na direção radial.

No magnetismo não há provas da existência de monopolos magnéticos e, portanto, considera-se que a menor partícula magnética que pode ser obtida é o dipolo magnético pontual. Este dipolo magnético também tem associado um momento magnético e o campo magnético gerado por este dipolo magnético na origem tem uma definição análoga ao campo elétrico do dipolo elétrico:

$$\vec{B}(r) = \frac{(3\vec{m} \cdot \hat{n})\hat{n} - \vec{m}}{r^3}, \quad (4.2)$$

onde \vec{m} é o momento magnético do dipolo. Como toda corrente elétrica tem associado um campo magnético, o campo magnético do dipolo magnético pode ser considerado como aquele gerado por uma corrente elétrica que percorre um anel muito pequeno. Nesse caso, o momento magnético do dipolo é $\vec{m} = I\vec{S}$ onde \vec{S} é a área ocupada pelo anel. Este campo magnético tem associado um potencial vetor

$$\vec{A}(r) = \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (4.3)$$

de tal forma que $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, onde \vec{A} satisfaz o calibre de divergência zero $\nabla \cdot \vec{A} = 0$. Tomando o eixo z na mesma direção do momento magnético, $\vec{m} = m\hat{e}_z$, temos que o valor em coordenadas esféricas do potencial vetor no ponto (r, θ, ϕ) é dado por:

$$\vec{A} = A_\phi \hat{e}_\phi = \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{e}_\phi, \quad (4.4)$$

que em coordenadas cartesianas obtém-se as componentes deste vetor

$$A_x = -\frac{my}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad A_y = \frac{mx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (4.5)$$

4.2 Modelo e detalhes teóricos

O sistema estudado consiste de um arranjo de dipolos magnéticos localizado sobre a superfície de um filme supercondutor de espessura d . Os dipolos são idênticos e magnetizados perpendicularmente ao plano que contém o filme supercondutor. O plano central do filme supercondutor e a camada de dipolos estão separados por uma distância $z_0 > d/2$ (ver figura 4.1). Assume-se que o espaço entre as camadas contém um material isolante de tal forma que a interação entre a textura magnética e o filme supercondutor se dá meramente mediante o efeito eletromagnético do campo não-homogêneo da rede de dipolos. Estudamos, primeiro, o caso sem campo externo aplicado, ou seja, nos restringimos ao caso onde a vorticidade total é zero. Depois, fixaremos o momento magnético dos dipolos, a separação entre o filme supercondutor e a rede de dipolos e ligaremos o campo magnético homogêneo.

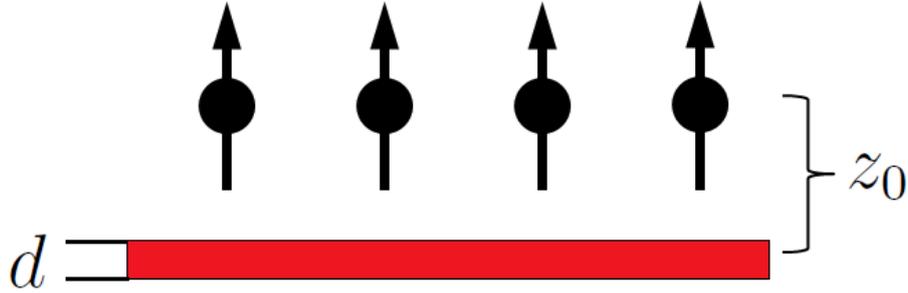


Figura 4.1: Esquema do filme supercondutor de espessura $d \ll \lambda, \xi$ interagindo com a rede de dipolos pontuais com magnetização permanente m perpendicular ao plano do filme. A separação entre o filme supercondutor e a rede de dipolos é z_0 .

O potencial vetor deste sistema pode ser obtido a partir da equação (4.5) e considerando o princípio de superposição. Portanto, o potencial vetor é a soma de cada uma das contribuições individuais de cada dipolo da rede:

$$\vec{A}(r) = \sum_k A_k(|\vec{r} - \vec{r}_k|), \quad (4.6)$$

onde \vec{r}_k é a posição do dipolo k . Na figura 4.2 mostra-se o perfil das componentes do potencial vetor da rede de dipolos para duas separações filme-dipolo

diferentes, $z_0 = 2$ e $z_0 = 6$. Quanto menor é a separação entre o filme e a rede de dipolos mais localizado é o efeito de cada dipolo, fato que é observado tanto nos perfis das componentes do potencial vetor como no perfil do campo magnético.

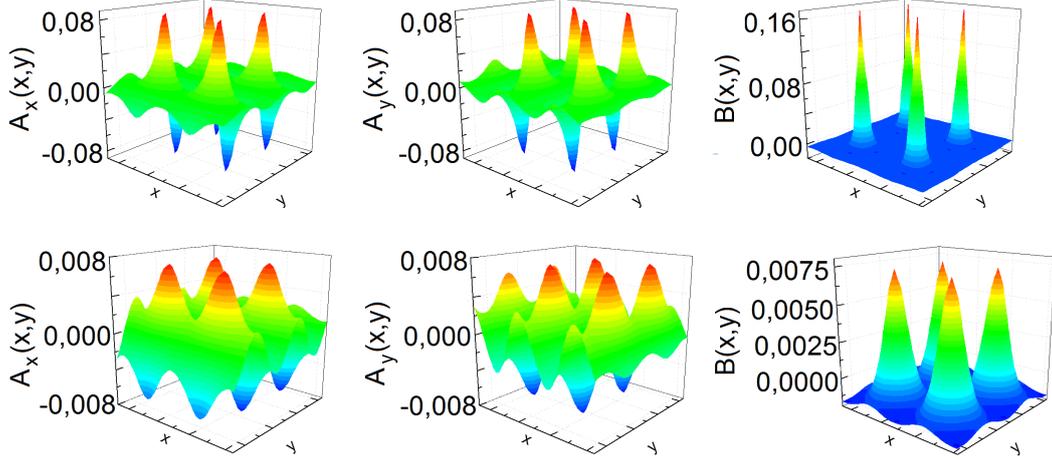


Figura 4.2: Perfil das componentes do potencial vetor e do campo da rede de dipolos para uma separação de $z_0 = 2\xi_0$ (acima) e $z_0 = 6\xi_0$ (abaixo).

O potencial vetor apresenta um comportamento periódico para todo valor de z_0 , o que o torna ideal para a simulação de um filme supercondutor infinito e permite o estudo de uma célula unitária onde considera-se que o comportamento apresentado nesta célula repete-se em todo o filme.

A relaxação para configurações de equilíbrio (estacionárias) do parâmetro de ordem no filme supercondutor é modelada pelas equações de Ginzburg-Landau dependentes do tempo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{\eta} \left[(i\nabla + \vec{A})^2 \psi + (1 - T)(|\psi|^2 - 1)\psi \right], \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{j}_s - \kappa^* \nabla \times \nabla \times \vec{A}, \quad (4.8)$$

onde $\vec{j}_s = (1 - T)\Re[\psi(-i\nabla - \vec{A})\psi]$ é a densidade de corrente e $\kappa^* = \kappa^2/d$ é o parâmetro de Ginzburg-Landau efetivo para um filme supercondutor de espessura d .

No presente caso, consideramos um filme supercondutor muito fino comparado com o comprimento de penetração $\lambda \gg d$, ou seja, $\kappa^* \rightarrow \infty$. Neste limite, o potencial vetor pode ser aproximado por $\vec{A} = \vec{A}_0$ (onde \vec{A}_0 é o potencial vetor das fontes do campo externo). Portanto, precisamos solucionar unicamente a equação (4.7). Além disso, consideramos $d < \xi$, reduzindo o problema para o caso de duas dimensões.

Para modelar um filme infinito, usamos condições de contorno periódicas para o parâmetro de ordem. A simulação é realizada em uma célula unitária de tamanho $128\xi(0) \times 128\xi(0)$ discretizada em uma rede de 512×512 pontos. Para a temperatura de $T = 0,9$ esta discretização possui uma resolução de aproximadamente 150 pontos por $\xi^2(T)$, o que permite estudar detalhadamente estruturas de v-av numa escala menor que $\xi(T)$. Os dipolos estão separados um do outro por uma distância de $16\xi(0)$, formando, assim, um arranjo de 8×8 dipolos dentro da célula de simulação. O potencial vetor é calculado usando uma série de convergência rápida para somar a contribuição de cada dipolo.

4.3 Energia livre e nucleação de pares v-av

Para obter os estados estáveis de vórtices no filme supercondutor, a equação (4.7) é integrada para uma dada distância z_0 , uma intensidade do momento magnético m e uma temperatura $T = 0,9$, supondo como critério de estabilização que o parâmetro de ordem esteja estacionário quando sua mudança relativa depois de 500 passos temporais for menor que $0,0000000001\%$. Para tentar obter configurações estáveis mais próximas do equilíbrio termodinâmico quanto for possível, diferentes escolhas de configurações iniciais do parâmetro de ordem são utilizadas. Encontra-se que, para a faixa de parâmetros estudados, o processo de esfriamento em campo (conhecido como FC) sempre resulta em configurações bem próximas do equilíbrio termodinâmico. Tal processo FC consiste nos seguintes passos: primeiro conduz-se o filme para o estado normal fazendo $\psi = 0$ sobre toda a amostra e fixa-se z_0 e m ; depois

esfria-se o filme até a temperatura $T = 0,9T_c$, na presença do campo dos dipolos, e deixa-se o sistema relaxar. Este processo pode ser feito facilmente de forma experimental.

Iremos considerar o caso em que não há campo magnético homogêneo externo, de forma que todos os estados têm vorticidade total nula, ou seja, vórtices e antivórtices só podem aparecer aos pares, induzidos pela rede de dipolos. Como mostrou-se anteriormente, o perfil do campo varia com a separação entre a camada de dipolos e o supercondutor. Portanto, é interessante estudar o comportamento dos diferentes estados de vorticidade ao variar a separação.

A energia livre do sistema é sensível à alteração dos estados de equilíbrio. Assim, a nucleação de pares de v-av será refletida em uma mudança no comportamento da energia livre. No gráfico superior da figura 4.3 mostra-se a energia como função do momento magnético para uma separação de $z_0 = 2$. As linhas verticais ressaltam o valor de momento magnético onde acontece a transição para a nucleação do primeiro e do segundo par de v-av, assim como o valor de momento magnético onde o sistema alcança o estado normal como pode ser constatado pelo gráfico inferior da figura 4.3 onde mostra-se a dependência da nucleação do número de pares v-av por dipolo. O número de vórtices e antivórtices é medido utilizando a equação (3.45) para cada ponto da rede. Para pequenos valores do momento magnético do dipolo, o sistema encontra-se no estado Meissner e a energia do sistema mostra um crescimento suave e contínuo. Para $m = 8,5$, a derivada da energia muda drasticamente. Isto representa a entrada de um par v-av por dipolo como pode-se constatar no gráfico inferior da figura 4.3 onde, exatamente neste valor de momento magnético, detecta-se um par vórtice-antivórtice em cada dipolo, ou seja, um total de 64 pares de v-av na célula unitária estudada.

Cada discontinuidade na derivada da energia está relacionada com a nucleação de pares de v-av no sistema. Assim, para este valor de separação z_0 , obtêm-se dois estados de nucleação de pares v-av: o estado $N = 1$ e $N = 2$. Depois disto, o sistema alcança o estado normal que é caracterizado pela

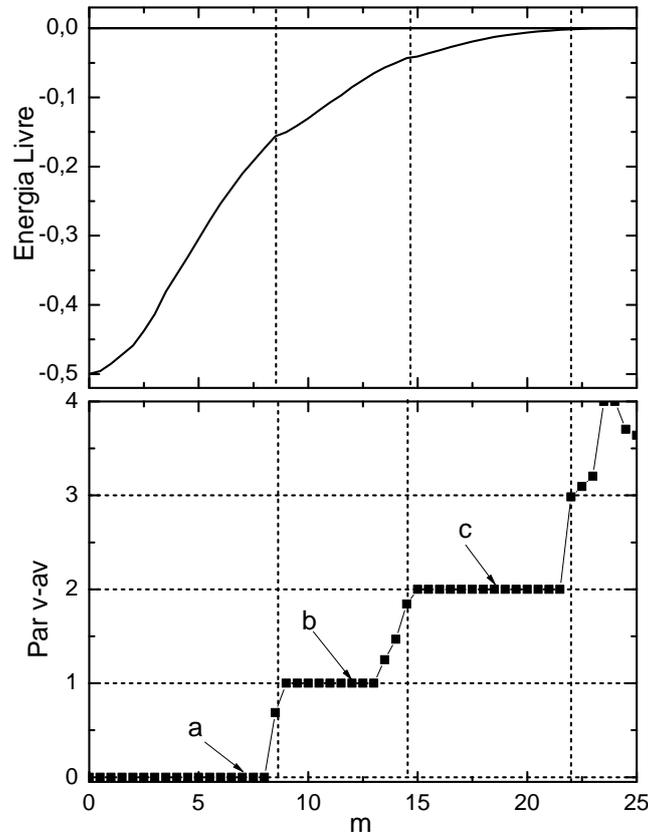


Figura 4.3: Energia livre em função do momento magnético (acima) e nucleação de pares de v-av por dipolo (abaixo) em função do momento magnético para $z_0 = 2$. As linhas verticais ressaltam a transição para a nucleação do par de v-av por dipolo, assim como para o estado normal.

energia livre igual a zero.

Para estudar as diferentes configurações apresentadas no sistema, foi analisado o módulo do parâmetro de ordem, ou seja, a densidade de pares de Cooper na amostra para os pontos marcados no gráfico inferior da figura 4.3.

Na figura 4.4 mostra-se o módulo do parâmetro de ordem para diferentes valores de m . A cor azul representa a destruição dos pares de Cooper, ou seja, a região no estado normal, e a cor vermelha representa a região de máxima supercondutividade. A figura 4.4(a) representa o estado de Meissner quando ainda o momento magnético do sistema não é intenso o suficiente para gerar

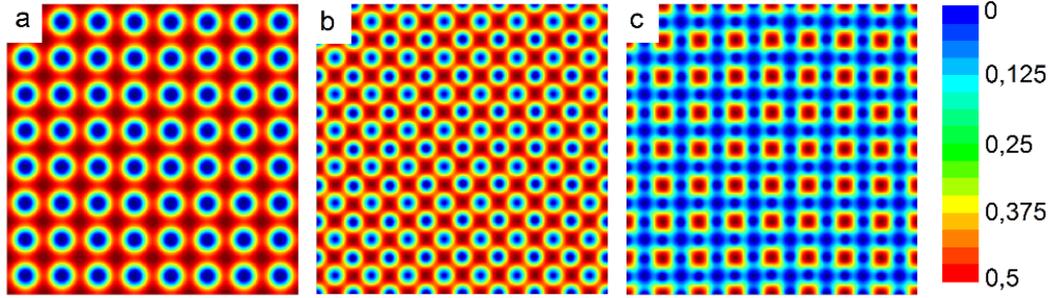


Figura 4.4: Módulo do parâmetro de ordem para $z_0 = 2$, $T = 0,9$ e os valores de m marcados no gráfico inferior da figura 4.3: (a) $m = 7$, (b) $m = 12$, (c) $m = 18,5$.

o primeiro par de v-av. Portanto, predomina a cor vermelha no sistema. Para valores de momento magnético mais intenso (Fig. 4.4(b)), obtém-se a nucleação do primeiro par v-av por dipolo. Os vórtices são localizados logo abaixo da posição dos dipolos e os antivórtices são localizados nos interstícios. Para $N = 2$, aparece um vórtice com dois quanta de fluxo localizado abaixo dos dipolos enquanto os antivórtices são localizados no ponto médio entre os dipolos (Fig. 4.4(c)). Finalmente, para valores de momento magnético mais intenso, obtém-se o estado normal.

Para $z_0 = 3$, a energia mostra um comportamento similar com o caso para $z_0 = 2$, mas os estados são deslocados para valores de momento magnético mais intensos. Porém, a entrada de um par de v-av também é marcada no gráfico (fig. 4.5(a)) com uma discontinuidade na derivada da energia com relação ao momento magnético.

Na figura 4.5(b), observam-se os mesmos estados de nucleação de pares de v-av: $N = 1$ e $N = 2$. Não obstante, o estado $N = 2$ apresenta uma configuração diferente como pode-se observar no módulo do parâmetro de ordem (fig. 4.6(b)) para $m = 26$. Ainda o vórtice com dois quanta de fluxo está localizado abaixo dos dipolos magnéticos, mas neste caso, os antivórtices localizam-se formando uma estrutura oval alternando a orientação perto das posições intersticiais.

Para uma separação maior ($z_0 = 6$), observa-se mais uma discontinuidade na derivada da energia livre como mostra a figura 4.7(a) (linha tracejada) que

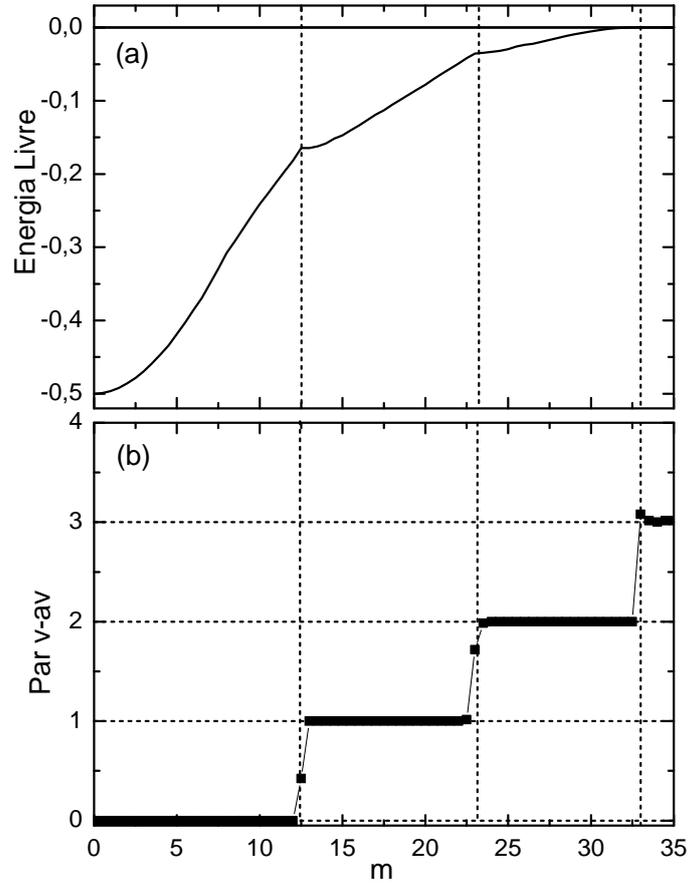


Figura 4.5: Energia livre em função do momento magnético (a) e nucleação de pares de v-av por dipolo (b) em função do momento magnético para $z_0 = 3$.

está relacionado com mais um estado de nucleação de v-av. Segundo o gráfico da nucleação de pares v-av mostrado na figura 4.7(b), este estado adicional corresponde a quatro pares de v-av por dipolo. Isto faz pensar que o estado $N = 3$ não aparece neste sistema e presume-se que esteja relacionado com a geometria quadrada da rede de dipolos. Nesse caso, também procuram-se os estados de equilíbrio mudando a condição inicial para o parâmetro de ordem. Portanto, primeiro esfria-se o sistema até $T < T_c$, depois incrementa-se o momento magnético desde zero até o valor onde alcança-se o estado normal (*signal+*) para depois diminuir o momento magnético até zero (*signal-*). Este processo é similar ao usado na referência [22] (note que nesta referência os

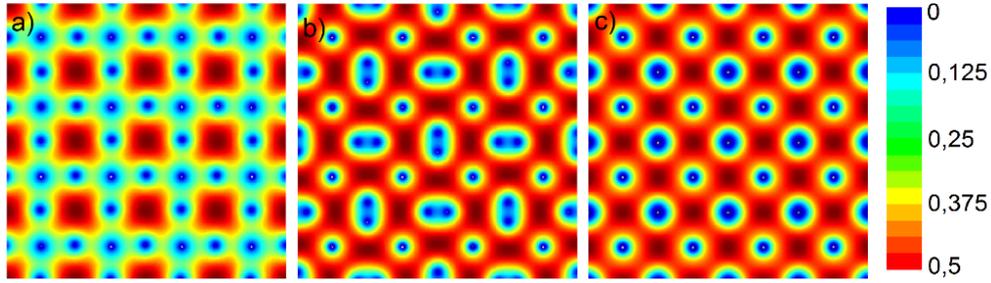


Figura 4.6: Módulo do parâmetro de ordem do estado $N = 2$ pares de v-av por dipolo para a) $z_0 = 2$ e $m = 17$; b) $z_0 = 3$ e $m = 26$ e c) $z_0 = 6$ e $m = 100$.

estados são obtidos mediante uma solução auto-consistente das equações de GL). Embora este processo seja facilmente implementado de forma numérica, não pode ser realizado experimentalmente com magnetos permanentes. No entanto, poderia ser alcançado usando o momento magnético gerado por pequenos eletromagnetos [86]. Observamos que desta forma converge-se mais rápido quando comparado com o FC. Porém, o sistema é levado para um estado metastável longe do equilíbrio termodinâmico. A figura 4.7 ilustra isto mostrando a energia livre, junto com a nucleação de pares v-av por dipolo, ambos em função do momento magnético para $T = 0,9$ e $z_0 = 6$. Quando incrementa-se o momento magnético os estados de v-av são alcançados de forma "superaquecida", enquanto que, quando o momento magnético começa a diminuir, estes estados são alcançados de forma "superesfriada", indicando assim que existe uma barreira de energia para a respectiva criação e destruição de pares v-av. Note que no processo FC (linha tracejada) o sistema está bem próximo da envoltória de mínima de energia, ou seja, perto dos estados termodinamicamente estáveis.

O estado $N = 2$ também possui uma configuração de vórtices diferente das apresentadas para $z_0 = 2$ e $z_0 = 3$. Nesse caso, os antivórtices formam um antivórtice gigante localizado no centro do quadrado formado pelos vórtices (Fig. 4.6(c)). Vemos como a separação entre o filme supercondutor e a rede de dipolos, z_0 , muda a configuração de pares de v-av. Por exemplo, para o estado $N = 2$ observa-se uma configuração onde os antivórtices encontram-se

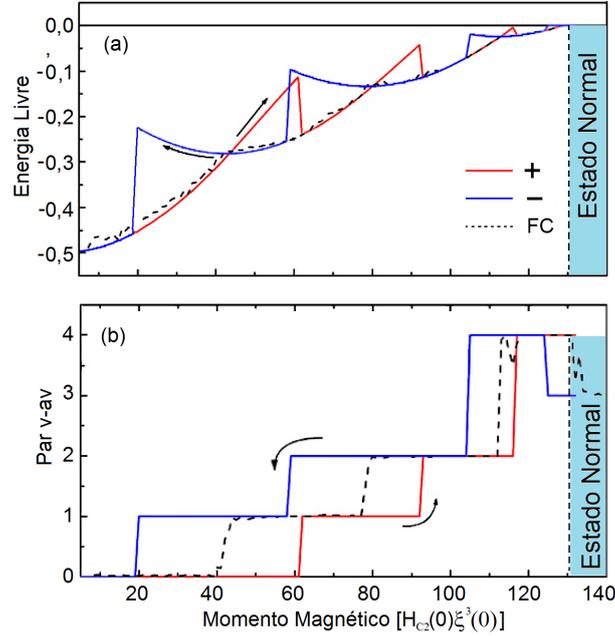


Figura 4.7: a) Energia livre e b) nucleação de pares de v-av em função do momento magnético para $z_0 = 6$. As linhas contínuas indicam os estados obtidos aumentando (diminuindo) o momento magnético dos dipolos tomando como condição inicial, para um valor de momento magnético m , o estado de equilíbrio do sistema para o valor de momento magnético $m - dm$ onde dm é o passo do incremento do momento magnético. As linhas tracejadas indicam os estados obtidos usando o processo de esfriamento de campo (FC).

próximos dos vórtices (fase localizada) quando a separação entre as camadas é pequena, $z_0 < 2,5$, enquanto que para $z_0 > 3$ observa-se uma configuração onde os antivórtices encontram-se o mais longe possível dos vórtices (fase deslocalizada).

4.4 Diagrama de fase

Na figura 4.8 é apresentado o diagrama de fase no plano $z_0 - m$, obtido com o processo FC. Neste diagrama pode-se identificar, além do estado Meissner e o estado normal, três regiões com diferentes densidades de pares v-av: $N = 1$,

$N = 2$ e $N = 4$.

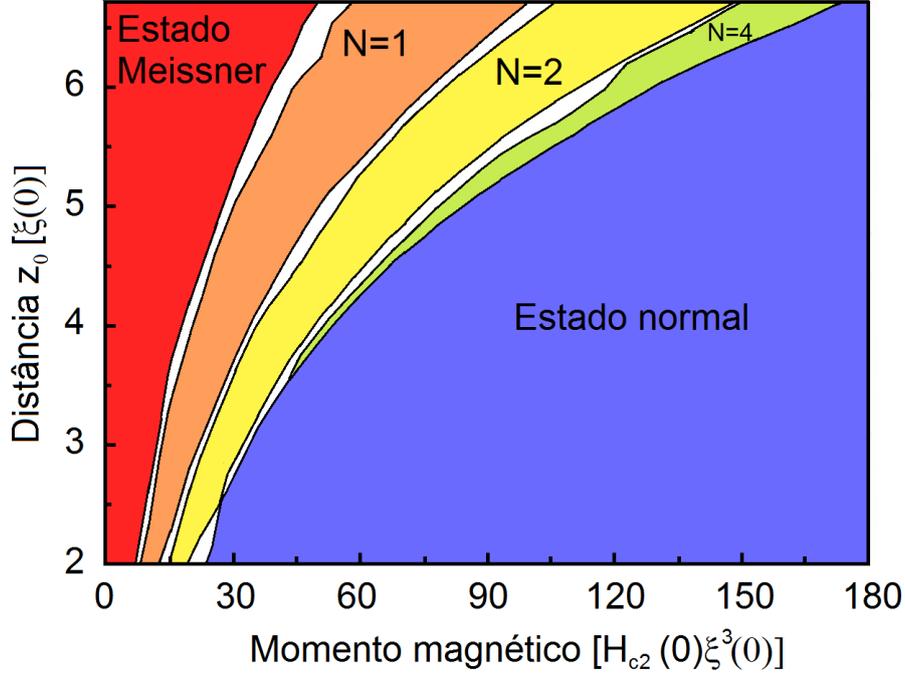


Figura 4.8: Diagrama de fase no plano $z_0 - m$ para $T = 0,9T_c$. N representa o número de pares de v-av por dipolo. As áreas sem cor são as regiões de transição de um estado de $N = N_1$ para o estado de $N = N_2$ onde o número de pares de v-av que encontram-se na célula unitária não é um múltiplo inteiro do número de dipolos.

Para $z_0 > 3,5$, observa-se uma transição do estado $N = 2$ para o estado $N = 4$. Toda a região com $N = 4$ no diagrama mostrado na figura 4.8 é caracterizada por um vórtice com três quanta de fluxo localizado abaixo de cada dipolo e uma molécula vórtice-antivórtice, composta por quatro antivórtices formando um quadrado com um vórtice em seu centro. Claramente, esta configuração com quatro antivórtices e um vórtice no centro, numa região onde o campo é negativo, é induzida pela simetria quadrada da rede de dots magnéticos.

Nos supercondutores mesoscópicos perto do estado normal, as condições de contorno podem induzir o parâmetro de ordem a seguir a simetria imposta

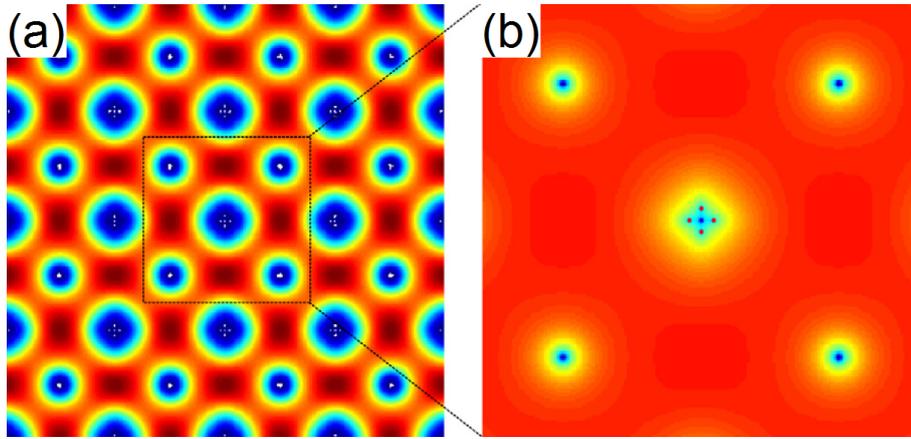


Figura 4.9: a) Módulo do parâmetro de ordem para o estado $N = 4$ para $m = 120$ e $z_0 = 6$ e b) ampliação de a) em escala logarítmica.

pela geometria da amostra. Isto pode dar origem a moléculas v-av induzidas por simetria, onde o antivórtice (neste caso, com vorticidade oposta ao campo) aparece como uma forma de dar a simetria requerida ao parâmetro de ordem [19, 88, 89]. Por exemplo, em [19] mostraram que o estado de vorticidade 3 num supercondutor quadrado pequeno será energeticamente mais favorável formar uma molécula composta por quatro vórtices posicionados nos quatro vértices do quadrado com um antivórtice no centro do que ter uma configuração de 3 vórtices e perder a simetria da amostra [19]. Os resultados apresentados nas figuras 4.7 e 4.9 demonstram que a simetria quadrada da rede de dipolos induz a formação espontânea de moléculas de v-av [90]. Um efeito similar foi predito para o caso de uma rede quadrada de antidots [91]. Isto leva à conclusão que estas moléculas de v-av induzidas por simetria também podem-se manifestar em supercondutores macroscópicos, desde que os pares de Cooper estejam sujeitos a uma modulação mesoscópica induzida por nanoestruturação ou campos não homogêneos. Para este caso em particular, a modulação mesoscópica é dada pelo campo não homogêneo da rede de dipolos.

4.5 Interação com um campo homogêneo

Nesta seção estudaremos o efeito de um campo homogêneo H_{ext} sobre o sistema híbrido SC/FM. O campo magnético é aplicado paralelamente ao momento magnético dos dipolos. Primeiro, faz-se um processo FC no qual o supercondutor é resfriado a partir do estado normal, $\psi = 0$, a uma temperatura $T = 0,9T_c$, na presença apenas do campo não homogêneo induzido pelos dipolos, obtendo assim o estado fundamental para $H_{\text{ext}} = 0$, como na seções anteriores. Depois o campo magnético homogêneo é ligado e aumentado mantendo constante a temperatura e momento magnético dos dipolos, até o supercondutor chegar ao estado normal.

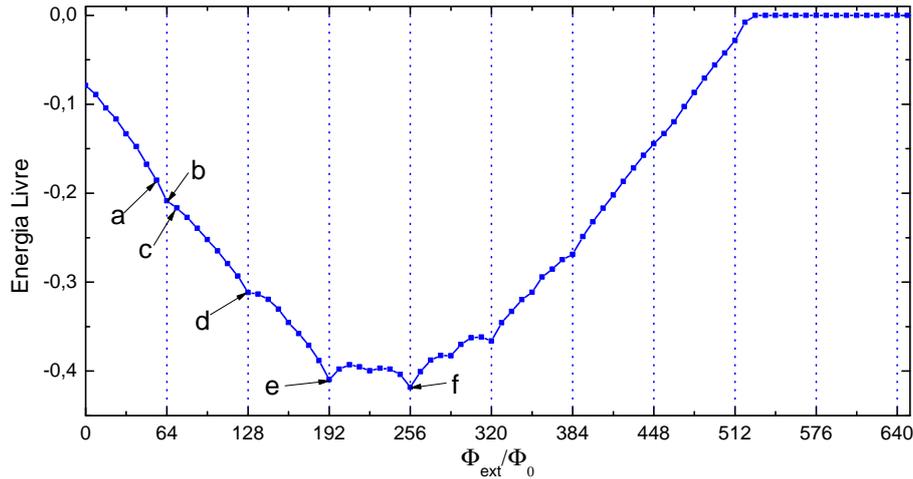


Figura 4.10: Energia em função do fluxo magnético homogêneo aplicado para $z_0 = 3$, $m = 30$, $T = 0,9T_c$ e espaçamento entre dipolos de 16. As linhas verticais sinalizam o valor do fluxo que é múltiplo inteiro do número de dipolos na célula unitária.

A figura 4.10 mostra o comportamento da energia livre com o aumento da intensidade do campo magnético externo para uma separação entre camadas de $z_0 = 3$ e um momento magnético $m = 30$. O valor da energia para o campo nulo é relativamente alta devido ao fato do sistema possuir 2 pares v-av por dipolo o que enfraquece a supercondutividade. Na medida em que a intensidade do campo magnético externo aumenta, a energia livre

começa a diminuir e apresenta uma série de discontinuidades na derivada da energia com relação ao campo externo em valores de campo múltiplos de $64\Phi_0$ que correspondem ao primeiro campo de "matching", no qual tem-se um quantum de fluxo por cada defeito da amostra [92]. Esta diminuição da energia está relacionada com o efeito de compensação dos campos nas regiões onde localizavam-se os antivórtices, os quais são totalmente aniquilados em $\Phi_{\text{ext}} = 192\Phi_0$. Porém, o valor de energia mínimo ocorre para $\Phi_{\text{ext}} = 256\Phi_0$, o valor de campo que compensa o campo negativo gerado pela textura magnética. Portanto, para valores de campos mais altos do que $256\Phi_0$ a energia começa a aumentar até zero em $\Phi_{\text{ext}} = 528\Phi_0$ onde o sistema alcança o estado normal. Para elucidar o que acontece no sistema em cada discontinuidade da deriva da energia e na sua vizinhança, na figura 4.11 mostram-se os módulos dos parâmetros de ordem para $\Phi_{\text{ext}} = 56\Phi_0$, $\Phi_{\text{ext}} = 64\Phi_0$ e $\Phi_{\text{ext}} = 72\Phi_0$. A região vermelha corresponde ao valor máximo de $|\psi|$, ou seja, a região mais supercondutora, enquanto que a região normal, $|\psi| = 0$, é representada com a cor azul. Para $\Phi_{\text{ext}} = 56\Phi_0$ (ver Fig. 4.11(a)) observa-se que o antivórtice duplamente quantizado transforma-se em dois antivórtices com um quantum de fluxo cada. Portanto, para este valor de campo externo, alguns antivórtices são aniquilados e os que ainda sobrevivem ficam mais próximos dos vórtices. Quando o fluxo magnético externo é suficientemente intenso para criar mais

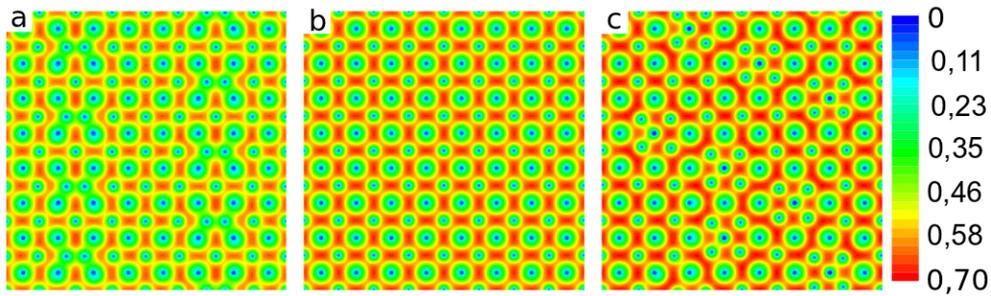


Figura 4.11: Módulo do parâmetro de ordem para a) $\Phi_{\text{ext}} = 56\Phi_0$, b) $\Phi_{\text{ext}} = 64\Phi_0$ e c) $\Phi_{\text{ext}} = 72\Phi_0$. A cor vermelha corresponde de maior supercondutividade e a cor azul corresponde à região no estado normal como mostrado na barra de cores.

um vórtice por cada dipolo, ou seja $\Phi_{\text{ext}} = 64\Phi_0$, obtém-se uma configuração

de um vórtice com dois quanta de fluxo abaixo de cada dipolo e um anti-vórtice localizado nos interstícios (ver Fig. 4.11(b)). Esta é a distribuição de vórtices mais ordenada que obtém-se no intervalo de $0 < \Phi_{\text{ext}} < 64\Phi_0$. Acima deste valor, alguns antivórtices encontram-se mais perto dos vórtices destruindo o ordenamento alcançado em $\Phi_{\text{ext}} = 64\Phi_0$, mas a quantidade de antivórtices não muda (ver Fig. 4.11(c)). Para entender o que acontece com a

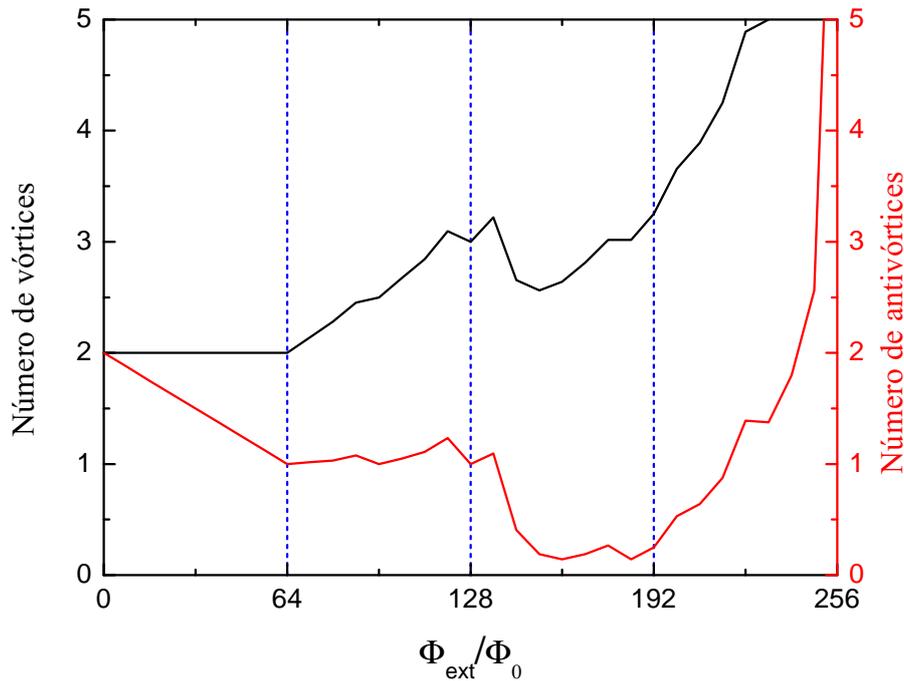


Figura 4.12: (Linha preta) Número de vórtices por dipolo e (linha vermelha) número de antivórtices por dipolo em função do fluxo magnético homogêneo aplicado. As linhas verticais sinalizam o valor do fluxo que é múltiplo inteiro do número de dipolos na célula unitária.

fase de vórtices neste sistema, realiza-se a contagem de vórtices e antivórtices. Na figura 4.12 mostra-se a quantidade de vórtices por dipolo e a quantidade de antivórtices por dipolo em função do fluxo magnético externo aplicado. Pode-se observar que para $\Phi_{\text{ext}} < 64\Phi_0$, a quantidade de antivórtices começa a diminuir linearmente com o aumento do campo até que, em $\Phi_{\text{ext}} = 64\Phi_0$, tem-se um antivórtice por cada dipolo. A quantidade de vórtices mantém-se

constante nesta região de campo. Para $64\Phi_0 < \Phi_{\text{ext}} < 128\Phi_0$, a quantidade de vórtices começa a aumentar quase linearmente com o aumento do campo em quanto que a quantidade de antivórtices permanece quase constante. Isto mostra que, para esta região de campo, é energeticamente mais favorável que o campo externo reforçe o campo abaixo de cada dipolo do que aniquilar mais um antivórtice. Na figura 4.13(d) mostra-se o módulo do parâmetro de or-

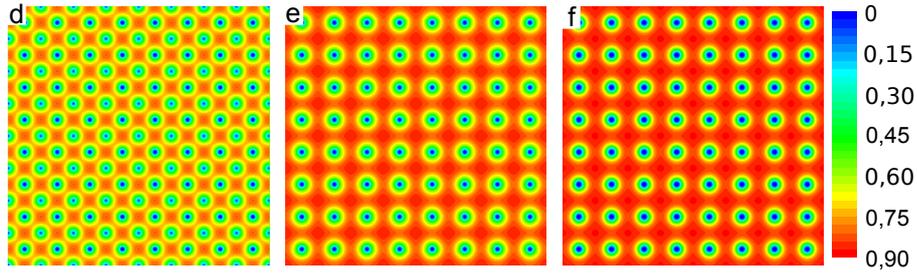


Figura 4.13: Módulo do parâmetro de ordem para d) $\Phi_{\text{ext}} = 128\Phi_0$, e) $\Phi_{\text{ext}} = 192\Phi_0$ e f) $\Phi_{\text{ext}} = 256\Phi_0$. A cor vermelha corresponde mais supercondutora e a cor azul corresponde à região no estado normal como mostrado na barra de cores.

dem para $\Phi_{\text{ext}} = 128\Phi_0$ onde observa-se uma configuração de um vórtice com 3 quanta de fluxo localizado abaixo de cada dipolo e um antivórtice por dipolo. Note o ordenamento da fase de vórtices. Para $128\Phi_0 < \Phi_{\text{ext}} < 192\Phi_0$, a quantidade de antivórtices começa a diminuir até que em $\Phi_{\text{ext}} = 192\Phi_0$ são aniquilados todos os antivórtices como pode ser observado no módulo do parâmetro de ordem mostrado na figura 4.13(e). Para $\Phi_{\text{ext}} > 192\Phi_0$, a contagem de vórtices e antivórtices falha devido ao fato que a fase do parâmetro de ordem atinge o limite máximo de resolução espacial, mas o módulo do parâmetro de ordem para $\Phi_{\text{ext}} = 256\Phi_0$ (ver Fig. 4.13(f)) mostra que o campo externo reforça o campo abaixo do dipolo e favorece a supercondutividade nas outras regiões da amostra. Para $\Phi_{\text{ext}} = 192\Phi_0$ e $\Phi_{\text{ext}} = 256\Phi_0$ não há antivórtices na amostra, mas o material fica mais supercondutor para $\Phi_{\text{ext}} = 256\Phi_0$ devido ao fato que neste valor o campo externo compensa totalmente o campo negativo gerado pela textura magnética.

4.6 Resumo

Neste capítulo, foram realizadas simulações das equações TDGL para obter estados estáveis de pares vórtice-antivórtice no sistema formado por um filme supercondutor muito fino com um arranjo quadrado de pequenos dots magnéticos, tratados como dipolos pontuais com magnetização permanente paralela à normal do plano que contém o filme supercondutor. Para resolver as equações TDGL, usou-se o método de diferenças finitas junto com a aproximação de variáveis de ligação. As diferentes configurações de par vórtice-antivórtice e a energia livre do sistema foram estudadas ao variar tanto o valor do momento magnético m como a separação z_0 . Com os resultados obtidos, foi montado um diagrama de fases no plano definido pelos parâmetros dos dipolos, z_0 e m , caracterizando as diferentes fases de pares v-av. Encontrou-se que a simetria quadrada do arranjo de dipolos força a transição do estado $N = 2$ para o estado $N = 4$ com um vórtice na região de campo negativo. A energia livre do sistema começa a diminuir ao se aplicar um campo externo homogêneo devido à compensação dos campos. A diminuição na energia é produzida pela aniquilação dos antivórtices e pelo reforço do campo abaixo de cada dipolo. Quando todos os antivórtices são aniquilados a energia começa a aumentar com o campo aplicado até o sistema chegar ao estado normal que corresponde ao valor de energia igual a zero.

CAPÍTULO 5

Vórtices fracionários num disco mesoscópico de duas bandas

Em sistemas volumétricos multicomponentes, vórtices podem existir em equilíbrio unicamente no chamado estado compósito, onde o núcleo de cada vórtice é compartilhado pelos diferentes condensados [93]. Porém, devido à diferença das escalas de comprimento ξ_n na qual a densidade de pares de Cooper varia em cada componente, a interação entre estes vórtices compósitos pode ser não-monotônica: repulsiva de curto alcance com uma pequena atração de longo alcance. Este último produz uma aglomeração de vórtices a baixo campo e, portanto, a formação de um estado semi-Meissner, ou seja, uma mistura de regiões livres de fluxo com regiões de aglomerados de vórtices coexistindo em equilíbrio. Esta fase foi prevista de ocorrer em supercondutores de duas bandas por Babaev e Speight [94] e observada experimentalmente por Moshchalkov et al. [25] em um cristal ultralimpo de MgB_2 . Neste caso, o primeiro campo crítico corresponde à estabilização termodinâmica de um aglomerado de vórtice em vez de um vórtice só.

A concorrência entre as interações num material multibanda podem pro-

duzir também topologias de vórtices não convencionais. Por exemplo, fora do equilíbrio podem existir estados (compósitos ou não) onde ambos os condensados têm diferentes vorticidades [93, 95]. Estes vórtices carregam uma quantidade arbitrária de fluxo magnético, diferente do caso dos vórtices quantizados de Abrikosov, sendo portanto chamados de vórtices fracionários.

O fluxo magnético pode ser calculado usando a teoria de GL de duas bandas (seção 2.9) e seguindo o mesmo raciocínio da seção 2.6.1. Assim, cada parâmetro de ordem é expresso da forma $\psi_n = |\psi_n|e^{i\phi_n}$ e é substituído na equação (2.57):

$$\vec{j} = \sum_{n=1}^2 \left[\frac{2e\hbar|\psi_n|^2}{m_n} \nabla\phi_n - \frac{4e^2|\psi_n|^2}{m_n c} \vec{A} \right]. \quad (5.1)$$

Usando esta equação para calcular o fluxo magnético (equação (2.44)) obtém-se

$$\Phi = \frac{\hbar c}{2e} \oint_C \left[\frac{|\psi_1|^2}{m_1} \nabla\phi_1 + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} \nabla\phi_2 \right] \cdot d\vec{l} - \frac{c}{4e^2} \oint_C \left[\frac{\vec{j}}{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2}} \right] \cdot d\vec{l}. \quad (5.2)$$

Tomando um caminho onde $\vec{j} = 0$ e considerando o limite de London obtém-se,

$$\Phi = \Phi_0 \left[\frac{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} L_1 + \frac{|\psi_2|^2}{m_2} L_2}{\frac{|\psi_1|^2}{m_1} + \frac{|\psi_2|^2}{m_2}} \right], \quad (5.3)$$

onde L_n é um número inteiro que corresponde aos quanta de fluxo na banda n . Quando $L_1 = L_2$ obtém-se a quantização convencional do fluxo (equação (2.46)), enquanto que para valores diferente, $L_1 \neq L_2$, o fluxo é fracionário. Este resultado foi obtido no limite de London e, em princípio, não aplica-se para sistemas mesoscópicos. Porém, Chibotaru et al. [69] mostraram que o confinamento mesoscópico também permite estabilizar vórtices fracionários em um supercondutor de duas bandas.

Vórtices fracionários podem ser usados como uma assinatura da supercondutividade multibanda. Portanto, uma questão relevante é como estabilizar e detectar tais vórtices. De fato, a energia de vórtices fracionários aumenta

proibitivamente com o tamanho da amostra, de forma que só podem ser observados em amostras pequenas. Isso faz dos supercondutores mesoscópicos de duas bandas sistemas ideais para a investigação dessas estruturas topológicas.

A primeira demonstração teórica da possibilidade de estabilizar-se vórtices fracionários em supercondutores mesoscópicos de duas bandas foi feita recentemente por Chibotaru et al. [68, 69], que propuseram que os vórtices fracionários poderiam ser realizados e ainda estabilizados termodinamicamente num disco mesoscópico de duas bandas. Em seguida, Geurts et al. [70] estenderam a análise incluindo o acoplamento magnético, além do acoplamento entre bandas tipo Josephson usado nos trabalhos anteriores. Todos estes trabalhos foram desenvolvidos dentro do formalismo de Ginzburg-Landau para duas componentes (TCGL), tomando constantes fenomenológicas como parâmetros da simulação. No entanto, como foi recentemente observado na referência [71], as constantes fenomenológicas não podem ser escolhidas livremente porque elas estão acopladas através dos parâmetros microscópicos do material, tais como as constantes de acoplamento elétron-fônon, velocidades de Fermi e a densidade de estados parcial. Portanto, fica faltando um estudo sistemático dos estados de vórtices compósitos e não-compósitos em supercondutores mesoscópicos de duas bandas usando a representação microscópica correta.

Neste capítulo, investigaremos as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários num supercondutor mesoscópico de duas bandas no espaço definido pelos parâmetros microscópicos do material.

5.1 Consistência entre o modelo TCGL e a teoria microscópica

Na representação de Eilenberger [73, 96, 76] para duas bandas os parâmetros microscópicos relevantes são: a razão entre as velocidades de Fermi de cada banda, v_1/v_2 , a densidade de estados de cada banda, $n_1 = 1 - n_2$, e os

elementos da matriz de acoplamento:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} n_1\lambda_{11} & n_2\lambda_{12} \\ n_1\lambda_{21} & n_2\lambda_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Segundo esta teoria, a temperatura crítica do sistema está definida pela expressão $1,76T_c = 2\hbar\omega_D e^{-S}$, onde ω_D é a frequência de Debye e

$$S = \frac{\text{tr}\Lambda \pm \sqrt{(\text{tr}\Lambda)^2 - 4\det\Lambda}}{2\det\Lambda} \quad (5.5)$$

é a condição para que as raízes do sistema linear das equações autoconsistentes para os dois gaps [97],

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (n_1\lambda_{11}\Delta_1 + n_2\lambda_{12}\Delta_2)S, \\ \Delta_2 &= (n_1\lambda_{12}\Delta_1 + n_2\lambda_{22}\Delta_2)S, \end{aligned} \quad (5.6)$$

sejam não triviais. O valor correto de T_c é dado pela menor raiz. É conveniente definir os seguintes parâmetros auxiliares: $\tau = -\ln(T/T_c) \approx 1 - T/T_c$, $W = 2\sqrt{2}\pi T_c / \sqrt{7\zeta(3)}$, $\eta = \det\Lambda / n_1 n_2$ e as constantes positivas:

$$S_1 = \lambda_{22} - n_1\eta S; \quad S_2 = \lambda_{11} - n_2\eta S. \quad (5.7)$$

Os coeficientes do funcional da energia livre (eq. (2.55)) podem ser expressos em função destes parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= -N(0)n_n \left(\tau - \frac{S_n}{n_n\eta} \right); \quad \beta_n = \frac{N(0)n_n}{W^2}; \\ m_n &= \frac{3W^2}{N(0)n_n v_n^2}; \quad \Gamma = \frac{N(0)\lambda_{12}}{\eta}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

onde $N(0)$ é a densidade de estados do sistema.

Pode-se ver que, a diferença do caso dos supercondutores de uma banda no qual o termo $\alpha(T) = \alpha(T=0)\tau$, com $\tau = \ln(T_c/T) \approx 1 - T/T_c$, nos supercondutores de banda dupla tem uma parte constante relacionada com o termo de acoplamento. Não obstante, em analogia com os supercondutores

de uma banda, considera-se que o valor da temperatura onde α_n muda de sinal é a temperatura crítica da banda n ,

$$T_{cn} = 1 - \frac{S_n}{n_n \eta} \quad (5.9)$$

e define-se um comprimento de coerência para cada banda como se o sistema fosse composto por dois condensados com propriedades diferentes, ou seja,

$$\xi_n = \frac{\hbar v_n}{\sqrt{6W}}. \quad (5.10)$$

Desta forma é possível obter o campo crítico superior para cada banda, $H_{c2}^n = \Phi_0/2\pi\xi_n^2$, onde Φ_0 é o quantum de fluxo magnético.

5.2 Modelo e detalhes teóricos

Neste capítulo estudaremos um disco supercondutor de duas bandas muito fino que possui um acoplamento fraco entre as bandas. O disco supercondutor está sujeito a um campo magnético homogêneo paralelo à normal do plano que contém o disco. Escolhe-se o raio do disco $R = 10\xi_1 \ll \lambda_{eff}$, onde $\lambda_{eff} = \lambda^2/d$ é o comprimento de penetração efetivo, de tal forma que podem ser ignorados os efeitos de blindagem e de desmagnetização. De acordo com isto, não leva-se em conta a equação para a corrente supercondutora (Eq. (2.57)).

Deste modo, as equações que descrevem o comportamento do sistema são as equações (2.56), que em unidades adimensionais tornam-se:

$$\left(-i\nabla - \vec{A}\right)^2 \psi_1 - (\tau_1 - |\psi_1|^2) \psi_1 - \frac{\lambda_{12}}{n_1 \eta} \psi_2 = 0, \quad (5.11)$$

$$\left(-i\nabla - \vec{A}\right)^2 \psi_2 - \frac{v_1^2}{v_2^2} (\tau_2 - |\psi_2|^2) \psi_2 - \frac{\lambda_{12}}{n_2 \eta} \frac{v_1^2}{v_2^2} \psi_1 = 0, \quad (5.12)$$

onde $\tau_n \equiv -\ln(T/T_{cn}) = \tau - S_n/n_n \eta$. Aqui, adota-se as seguintes unidades independentes da temperatura: T_c para a temperatura, W para os dois parâmetros de ordem, ξ_1 para distâncias e $A_0 = \hbar c/2e\xi_1$ para o potencial vetor e o campo crítico superior da banda 1, H_{c2}^1 , para o campo magnético.

Para ter certeza de estar no intervalo de validade do modelo TCGL, fixa-se a temperatura da amostra em $T = 0,9$ e escolhem-se parâmetros microscópicos para que ambas temperaturas T_{c1} e T_{c2} fiquem bem próximas de, mas mais altas do que, T_c .

Os cálculos são realizados na seguinte forma: as equações (5.11) e (5.12) são integradas numericamente pelo método de relaxação onde assume-se uma dependência temporal dos parâmetros do tipo da equação de difusão. Este procedimento é similar ao de solucionar as equações de GL dependentes do tempo. Porém, como estamos interessados unicamente nos estados estacionários, escolhe-se o mesmo valor da constante de difusão, $D = 1$, para os dois parâmetros de ordem.

A integração espacial das equações é feita de acordo com o método de diferenças finitas numa rede de $N_x \times N_y$ junto com o método de variáveis de ligação (veja Seção 3.2). O ponto de partida para solucionar estas equações é considerar uma configuração inicial para cada condensado e deixar o sistema convergir até um estado estável. Para isto, usa-se o método semi-implícito (Seção 3.3). Os resultados são apresentados como funções do fluxo magnético externo que atravessa a área do disco, $\Phi = H_e \pi R^2$, em unidades do quantum de fluxo magnético, $\Phi_0 = hc/2e$.

5.3 Influência dos parâmetros microscópicos

Uma das características dos supercondutores de duas bandas é o estado de vorticidade fracionária, onde a carga topológica (i.e. o número de voltas, ou índice, da fase em torno do vórtice) na banda 1, L_1 , é diferente da carga topológica na banda 2, L_2 . Portanto, para indicar a vorticidade do sistema usaremos a notação (L_1, L_2) . Nesta seção vamos analisar o comportamento dos estados fracionários ao variar os parâmetros microscópicos num disco de raio $R = 10\xi_1$ sob um campo magnético homogêneo paralelo à normal do disco.

Como ponto de partida vamos fixar a temperatura do sistema em $T =$

$0,9T_c$, que é um valor bem próximo da temperatura crítica. Isto para garantir a validade das TCGL. A escolha dos valores de partida dos parâmetros microscópicos é arbitrária, exceto pela imposição que fazemos de que tal escolha deve garantir que a temperatura crítica de cada banda seja maior que $T = 0,9T_c$. Os valores escolhidos para os elementos da matriz de acoplamento são: $\lambda_{11} = 2,415$, $\lambda_{22} = 1,211$ e $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0,001$; para as densidades parciais de estado: $n_1 = 1 - n_2 = 0,343$; e para as velocidades de Fermi: $v_1/v_2 = 1,225$ (vale ressaltar aqui que v_1 é fixo pela escala de comprimento ξ_1). As densidades de estados junto com os elementos da matriz de acoplamento definem a temperatura crítica das bandas: $T_{c1} \approx T_c$ e $T_{c2} \approx 0,95T_c$. Estes parâmetros descrevem um supercondutor de banda dupla com acoplamento fraco entre as bandas, onde a banda 1 é a banda dominante, ou seja, a supercondutividade na banda 2 é mais fraca do que na banda 1.

A figura 5.1 mostra o produto da energia livre com o fluxo magnético em função do fluxo magnético. Esta é uma forma de melhorar a visualização dos estados sem perder a informação do comportamento destes estados ao variarmos o fluxo magnético externo. Esse gráfico foi obtido da seguinte forma: para cada valor de campo H_e tomamos como estado inicial o estado de equilíbrio obtido para o valor de campo anterior $H_e = H_e - \Delta H_e$ (ΔH_e é o passo do campo) e iteravamos até obter o estado de equilíbrio. A energia do sistema é sensível à entrada de vórtices, portanto, cada queda abrupta sinaliza a entrada de vórtices no sistema. Sempre que o sistema caía em um estado de vorticidade diferente, mudavamos o sinal do passo do campo. Isto com a finalidade de obter a região completa de campo onde é estável um dado estado de vorticidade. Nesta figura, por exemplo, podemos observar que para pequenos valores de fluxo magnético o sistema encontra-se no estado Meissner. Para dado valor de campo, a banda 2 torna-se instável em relação à entrada de um vórtice de carga topológica 2, enquanto que a banda 1 ainda encontra-se no estado Meissner. Assim, o estado Meissner dá lugar ao estado de vorticidade fracionária (0,2). Isto mostra que, para esta região de fluxo magnético, as bandas são praticamente independentes. Ou seja, a influência

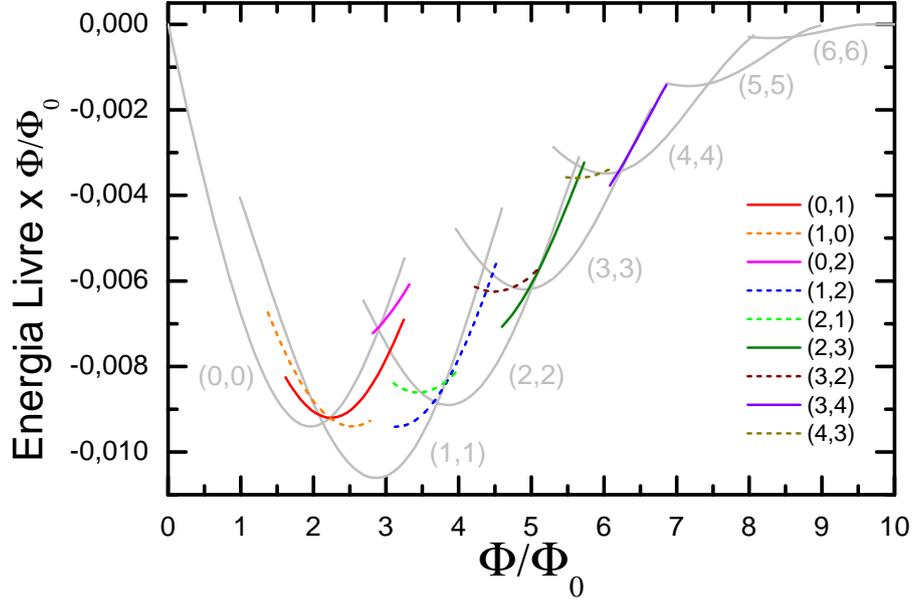


Figura 5.1: Energia livre vezes o fluxo magnético em função do fluxo magnético para um disco de raio $R = 10\xi_1$, $T = 0,9T_c$, $n_1 = 0,343$, $\lambda_{11} = 2,415$, $\lambda_{22} = 1,211$ e $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0,001$ e $v_1/v_2 = 1,225$. Com estes parâmetros obtêm-se as temperaturas críticas $T_{c1} = T_c$ e $T_{c2} = 0,95T_c$. (L_1, L_2) representa o estado com vorticidade L_1 na banda 1 e L_2 na banda 2. As linhas contínuas (tracejadas) representam os estados de vorticidade (L_1, L_2) obtidos (não obtidos) durante o processo de aumentar e diminuir o campo magnético.

da banda 1 sobre a banda 2 é insignificante.

Partindo da configuração $(0,2)$, começamos a diminuir a intensidade do campo até chegar ao estado $(0,1)$ onde um vórtice é expulso da banda 2. Aumentando a intensidade do campo e partindo do estado $(0,1)$, chegamos ao estado $(1,1)$. Aumentando ainda mais a intensidade do campo chegamos ao estado $(2,2)$, depois aos estados $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$ e, finalmente, ao estado normal. Todos estes estados são representados na figura 5.1 por linhas contínuas (estados obtidos de forma espontânea). Os estados que aparecem com linhas tracejadas são obtidos tomando como configuração inicial o estado em questão. Por exemplo, o estado $(1,2)$ foi obtido tomando como configuração inicial um vórtice na banda 1 e dois vórtices na banda

2 e deixavamos o sistema relaxar até a configuração de equilíbrio. Depois incrementávamos e diminuávamos a intensidade do campo para obter completamente a região de campo onde o estado $(1,2)$ é estável (estados obtidos de forma forçada). Note que na região $7 < \Phi < 10$, apenas estados inteiros (L, L) puderam ser estabilizados. Nessa região, a intensidade do campo é maior do que o campo crítico da banda 2, mas esta banda continua sendo supercondutora devido ao efeito de acoplamento entre as bandas.

Na figura 5.1 também podemos observar a variedade de estados possíveis. Por exemplo, para $\Phi = 3, 2\Phi_0$ observamos sete configurações possíveis. Dentre estes, podemos ver que todos os estados fracionários são metaestáveis. Os estados fracionários com energia menor podem-se encontrar para supercondutores com acoplamento bem mais fraco como será mostrado depois. É importante saber o que acontece no sistema em cada estado de vorticidade. Portanto, na figura 5.2 apresentamos o módulo do parâmetro de ordem do estado $(0,1)$ para diferentes valores de fluxo magnético. A cor azul marca a região onde a densidade de pares de Cooper é zero. No lado esquerdo (direito) mostra-se o módulo do parâmetro de ordem para a banda 1(2).

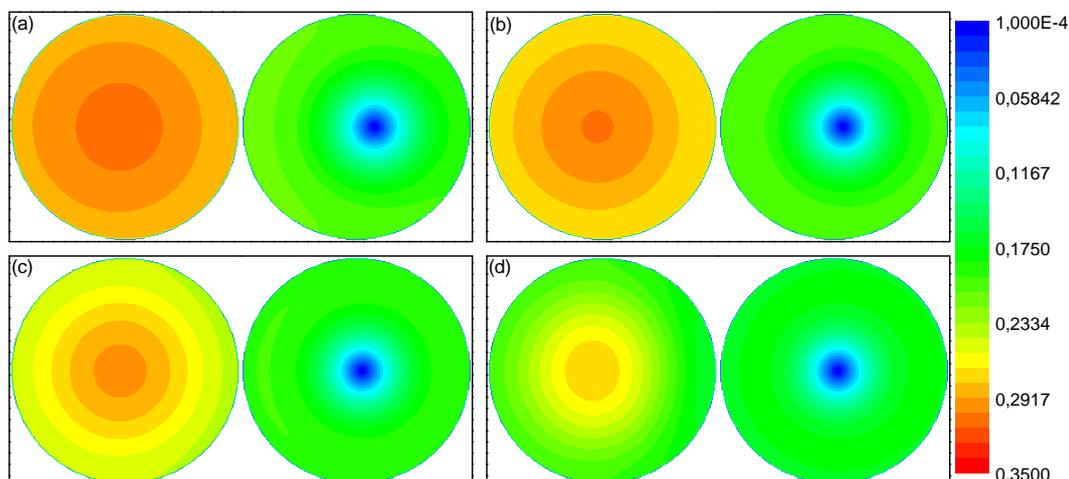


Figura 5.2: Módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado $(0,1)$ para a) $\Phi = 1,6$; b) $\Phi = 1,95$; c) $\Phi = 2,45$; d) $\Phi = 2,8$, onde, em cada subfigura, os resultados para a banda 1(2) são mostrados à esquerda(direita).

No começo, a supercondutividade da banda 1 encontra-se enfraquecida assimetricamente, mas a intensidade do campo não é grande o suficiente para nuclear o primeiro vórtice (Fig. 5.2(a)). Por outro lado, a banda 2 apresenta a entrada de um vórtice o qual encontra-se localizado fora do centro do disco. Este comportamento é bem diferente do reportado para os supercondutores mesoscópicos de uma banda com um único vórtice, onde o vórtice localiza-se sempre no centro do disco. Portanto, esta assimetria é característica dos supercondutores de duas bandas e está relacionada com o acoplamento entre as bandas: a supercondutividade na banda 1 é mais fraca na região que coincide com a posição do vórtice na banda 2 e o vórtice na banda 2 não localiza-se no centro do disco supercondutor devido a essa ser a região da banda 1 onde a supercondutividade é mais forte. Na medida em que a intensidade do campo aumenta, o vórtice na banda 2 consegue se aproximar mais do centro do disco até que, no valor máximo do campo onde pode existir o estado $(0,1)$, o vórtice na banda 2 encontra-se bem perto do centro do disco. Para o estado inteiro $(1,1)$ o vórtice de cada banda encontra-se localizado no centro do disco, recuperando a simetria observada em supercondutores de uma banda.

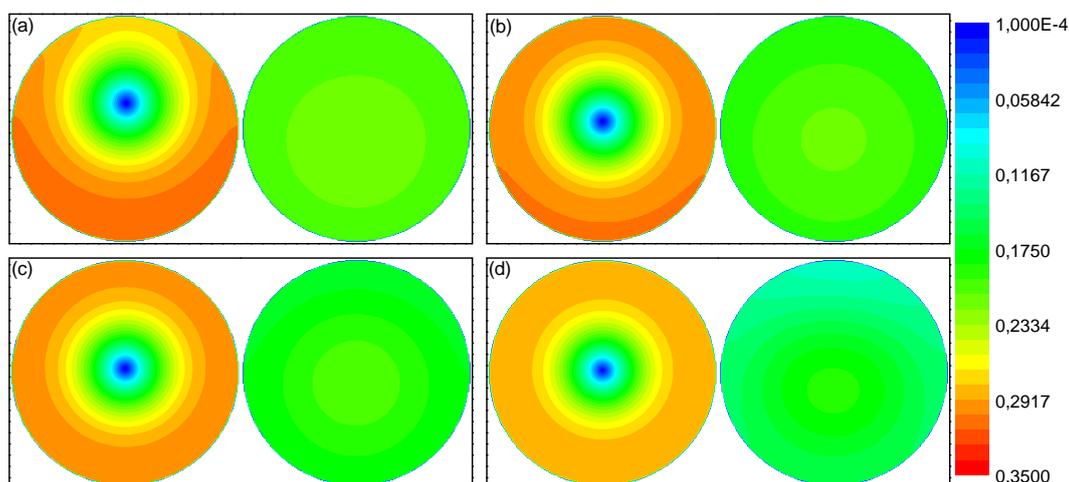


Figura 5.3: Módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado $(1,0)$ para a) $\Phi = 1,35$; b) $\Phi = 1,7$; c) $\Phi = 2,15$; d) $\Phi = 2,75$.

Além das configurações de estado de vorticidade fracionária onde $L_1 < L_2$ (que chamaremos de estados "normais"), que concorda com o fato da banda 1 ser a banda dominante, também é possível encontrar os estados "opostos" onde $L_1 > L_2$. Isto está relacionado com o acoplamento fraco entre as bandas já que, para o caso sem acoplamento entre as bandas, na banda 1 é possível obter tanto o estado sem vorticidade como o estado com a nucleação de um vórtice para esta região do campo. Na figura 5.3 mostramos o módulo do parâmetro de ordem do estado (1,0). Novamente, a influência de uma banda sobre a outra pode-se ver na assimetria das configurações. O comportamento assimétrico é característico de todos os estados fracionários. No caso dos estados com vorticidade inteira, o sistema tende a formar vórtice gigante similar ao caso dos supercondutores de uma banda.

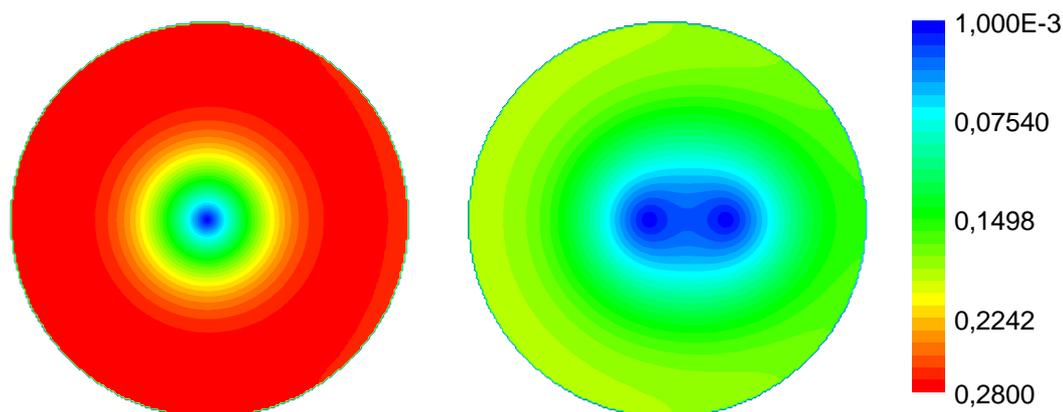


Figura 5.4: Módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado (1,2).

Partindo do estado simétrico (1,1) e incrementando a intensidade do campo conseguimos a nucleação de mais um vórtice na banda 2 como podemos observar na figura 5.4. Este segundo vórtice na banda 2 está localizado fora do centro do disco. No começo do estado é possível identificar os dois vórtices na banda 2, mas na medida que o valor da intensidade do campo aumenta, a distância entre eles reduz-se tanto que quase formam um vórtice gigante. Quando o campo consegue nuclear a banda 1 obtém-se uma

configuração de vórtice gigante $(2,2)$ no centro do disco. Também neste processo observamos o enfraquecimento da supercondutividade na banda 1 na medida que aumenta a intensidade do campo de uma forma similar à observada anteriormente nos estados $(0,1)$ e $(1,0)$. O vórtice da banda 1, no estado $(1,2)$, sempre encontra-se localizado no centro do disco. Uma das coisas para ressaltar neste processo é a formação dos vórtices gigantes nos estados com vorticidade inteira maior que 1 e o arranjo de múltiplos vórtices nos estados com vorticidade fracionária.

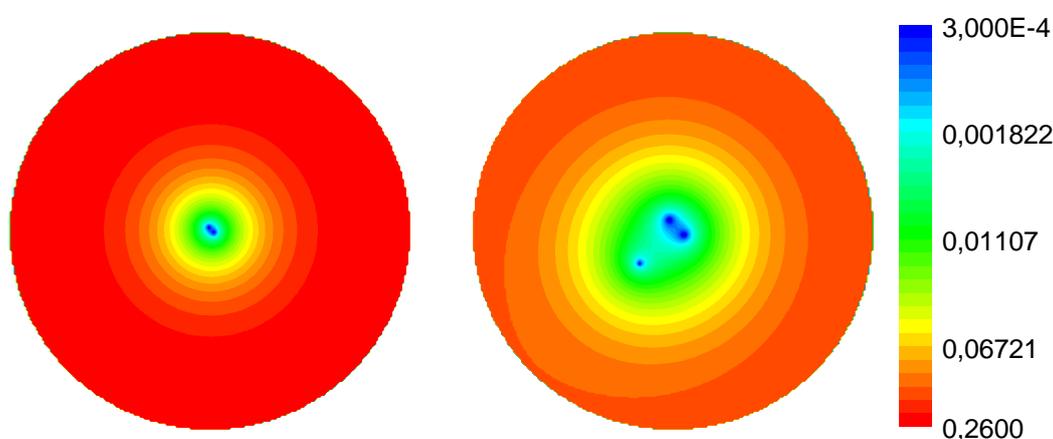


Figura 5.5: Logarítmo do módulo do parâmetro de ordem da banda 1 e da banda 2 para o estado $(2,3)$.

No estado $(2,3)$ (figura 5.5) observamos como a nucleação do terceiro vórtice na banda 2 consegue separar um pouco os dois vórtices na banda 1. Ou seja, inicialmente o sistema encontrava-se no estado de vorticidade inteira $(2,2)$ formado por um vórtice gigante com dois quanta de fluxo em cada banda, mas quando a banda 2 é nucleada por mais um vórtice, o vórtice gigante em cada banda transforma-se em 2 vórtices para obter assim dois vórtices na banda 1 e três vórtices na banda 2. O comportamento deste estado com o aumento da intensidade do campo é o mesmo do já descrito nos outros estados fracionários. A diferença mais marcante é a separação entre os vórtices que é cada vez menor. Portanto, o estado $(3,4)$ vai ter uma configuração de três vórtices na banda 1 e quatro vórtices na banda 2.

Similarmente aos outros estados fracionários, a distância entre os vórtices diminui com o aumento da intensidade do campo.

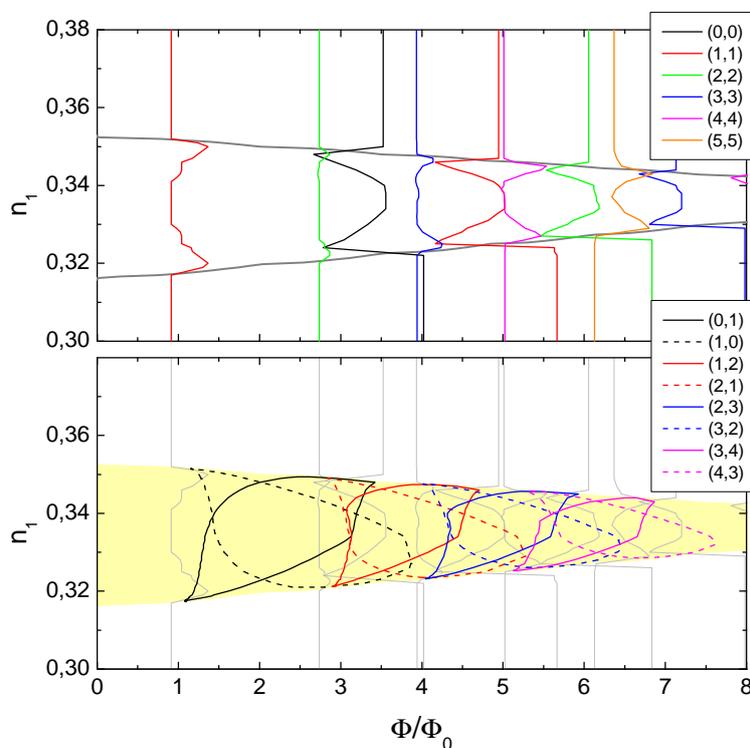


Figura 5.6: Regiões de estabilidade das configurações (L_1, L_2) inteiras e fracionárias no plano definido pela densidade de estados parcial n_1 e o fluxo magnético Φ . (Acima) A região de estabilidade de cada estado inteiro (L, L) é a área limitada pelas duas linhas contínuas da mesma cor. (Embaixo) A regiões de estabilidade dos estados fracionários correspondem às regiões encerradas por linhas contínuas para o caso $L_1 < L_2$ e linhas tracejadas para o caso $L_1 > L_2$.

5.3.1 Influência da densidade de estados parcial

Depois de ter encontrado os valores dos parâmetros microscópicos para os quais observam-se os estados de vorticidade fracionária, procedemos a estudar a região de estabilidade destes no plano $n_1 - \Phi$. No painel superior da figura 5.6 mostramos as regiões onde existem os estados com vorticidade

inteira. A região de estabilidade destes estados é marcada pelas duas linhas contínuas da mesma cor. A do lado esquerdo (direito) marca o valor de campo mínimo (máximo) de forma que para campos menores (maiores) o estado é instável. A curva cinza superior (inferior) é a linha de transição entre os estados supercondutor e normal da banda 2 (1) no caso sem acoplamento, ou seja, o campo crítico da banda em função de sua densidade parcial de estados. Como o acoplamento entre as bandas é fraco, estas curvas também correspondem ao limite de campo onde a banda é ativa. Ou seja, para campos mais intensos a banda continua sendo supercondutora devido ao acoplamento tipo Josephson, mas é totalmente dominada pela outra banda. Portanto, é possível observar uma mudança drástica no comportamento das regiões de estabilidade dos estados inteiros dentro da região onde as duas bandas são ativas, o que está relacionado com o fato das bandas terem um pouco de independência nessa região. No entanto, fora desta região, não observamos uma mudança no comportamento nas regiões de estabilidade destes estados inteiros devido a que, como mencionamos anteriormente, uma das bandas fica completamente dependente da outra. No painel inferior da figura 5.6, mostramos a região de estabilidade dos estados fracionários que correspondem a regiões fechadas representadas com linhas contínuas para os estados com $L_1 < L_2$ e linhas tracejadas para os estados com $L_1 > L_2$. Estas regiões encontram-se dentro da região onde as duas bandas são ativas mostrada com cor amarela no gráfico.

A área da região onde as duas bandas são ativas depende das temperaturas críticas de cada banda, T_{cn} , as quais variam com o valor de n_1 como mostrado no gráfico da esquerda da figura 5.7. a linha vertical azul sinaliza o valor da temperatura do sistema e a linha horizontal cinza superior (inferior) sinaliza o valor de n_1 onde a temperatura crítica da banda 2 (1) é menor do que a temperatura do sistema. Nela, observamos que existe um valor de $n_1 = 0,334$ onde a temperatura crítica das bandas tem o mesmo valor e está bem próxima da temperatura crítica do sistema, ou seja, $T_{c1} = T_{c2} \approx T_c$ que coincide com $n_1\lambda_{11} = n_2\lambda_{22}$. Para $n_1 < 0,334$, a temperatura crítica

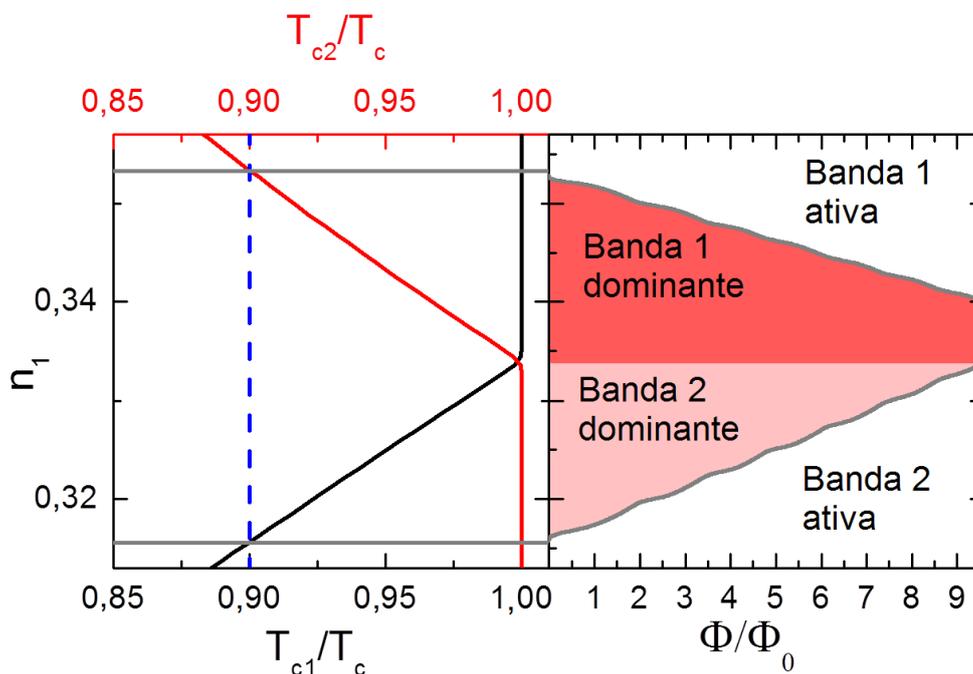


Figura 5.7: (Esquerda) T_{c1}, T_{c2} em função da densidade de estados da banda 1 e (direita) linha de transição entre os estados supercondutor-normal para as bandas no caso sem acoplamento. A região onde as duas bandas são ativas encontra-se dentro destas linhas de transição. Fora destas linhas só uma das bandas é ativa e a outra é supercondutora somente devido ao acoplamento entre as bandas e segue o comportamento da banda ativa.

da banda 2 (linha vermelha) fica mais alta do que a temperatura crítica da banda 1 (linha preta). Este fato faz com que a supercondutividade na banda 1 seja mais fraca que na banda 2. Ou seja, embora os elementos da matriz de acoplamento sejam escolhidos para representar o caso de um supercondutor com a banda 1 dominante, a escolha do valor da densidade de estados da banda 1 pode mudar este quadro e trocar o papel das bandas. Para $n_1 > 0,334$, a temperatura crítica da banda 1 começa a ficar bem próxima da temperatura crítica do sistema enquanto a temperatura crítica da banda 2 começa a diminuir rapidamente com o aumento da densidade de estados da banda 1. Para valores de $n_1 > 0,334$ voltamos à condição inicial: a banda 1 é

a banda dominante e a banda 2 passa a ter a supercondutividade mais fraca. Na parte direita da figura 5.7 mostramos o campo crítico de cada banda para cada valor de n_1 . Nela também ressaltamos as regiões onde a banda 1 e a banda 2 são dominantes. Vale a pena lembrar que banda dominante significa que a supercondutividade nessa banda é mais forte do que na outra e que banda ativa significa que, nessa região de campo, a banda possui um pouco de independência, mas ela é afetada unicamente pelo acoplamento entre as bandas. Este gráfico mostra que a região onde as duas bandas são ativas depende do valor da temperatura crítica das bandas. Elas precisam ser mais altas do que a temperatura do sistema $T < \min[T_{c1}, T_{c2}]$. Portanto, esperamos que a região onde as duas bandas são ativas seja maior para T menores.

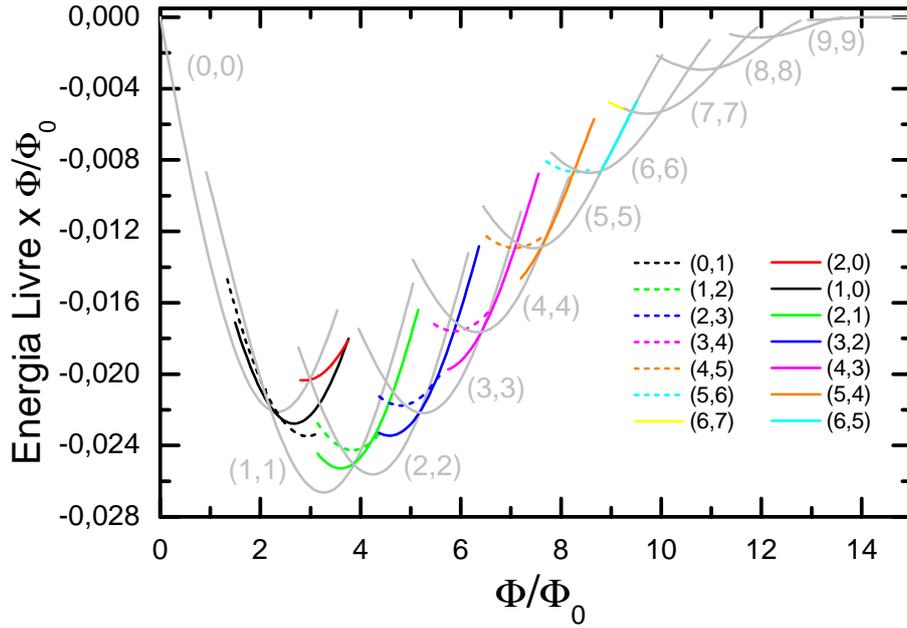


Figura 5.8: Energia livre vezes o fluxo magnético em função do fluxo magnético para um disco de raio $R = 10\xi_1$, $T = 0,9T_c$, $n_1 = 0,334$, $\lambda_{11} = 2,415$, $\lambda_{22} = 1,211$ e $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0,001$ e $v_1/v_2 = 1,225$. Com estes parâmetros obtêm-se as temperaturas críticas $T_{c1} = T_{c2} \approx T_c$.

Na figura 5.8 mostramos a energia livre em função do fluxo magnético

aplicado para $n_1 = 0,334$. Para este valor de n_1 temos que as temperaturas críticas de cada banda são iguais e bem próximas da temperatura crítica do sistema, ou seja, $T_{c1} = T_{c2} \approx T_c$. Nesta figura destaca-se o aumento na quantidade de estados de vórtices, tanto fracionários como inteiros. Também observamos que o estado normal do sistema é alcançado num valor de fluxo magnético maior quando comparado com o caso de $n_1 = 0,343$. Isto pode ser explicado com o fato das temperaturas críticas das bandas estarem bem próximas da temperatura crítica do sistema, já que serão necessários campos mais intensos para conseguir destruir a supercondutividade nas duas bandas e alcançar o estado normal. Como as duas bandas são ativas praticamente na mesma faixa de campo é possível encontrar mais estados fracionários, embora metaestáveis. Os estados com vorticidade $(L + 1, L)$ estão deslocados para a direita enquanto os estados com vorticidade $(L, L + 1)$ estão deslocados para a esquerda o que é característico da banda 2 ter uma temperatura crítica maior quando comparada com a temperatura crítica desta mesma banda para $n_1 = 0,343$, conforme veremos adiante em mais detalhe.

Na figura 5.9 mostramos a energia livre em função do fluxo magnético para $n_1 = 0,325$ que corresponde ao caso de $T_{c1} = 0,95T_c$ e $T_{c2} \approx T_c$. Podemos observar uma diminuição na quantidade de estados com vorticidade fracionária o que indica que a banda 1 é ativa numa faixa de campo menor quando comparada com os outros dois casos: $n_1 = 0,343$ e $n_1 = 0,334$. O valor do fluxo magnético que consegue destruir a supercondutividade e a quantidade de estados de vorticidade inteira não são alterados nesta parte. Isto mostra que a banda 2 permite a nucleação de uma quantidade maior de vórtices o que está relacionado com o fato de que $v_1/v_2 = \xi_1/\xi_2 = 1,225$, ou seja, o núcleo do vórtice na banda 1 é maior do que o núcleo do vórtice na banda 2 como será mostrado na seção seguinte. Por outro lado, os estados com vorticidade $(L + 1, L)$ deslocam-se para a direita enquanto os estados com vorticidade $(L, L + 1)$ deslocam-se para a esquerda. O fato da banda 2 ter uma temperatura crítica maior que a banda 1 faz com que os estados com vorticidade $(L + 1, L)$ tenham uma energia menor do que os estados com

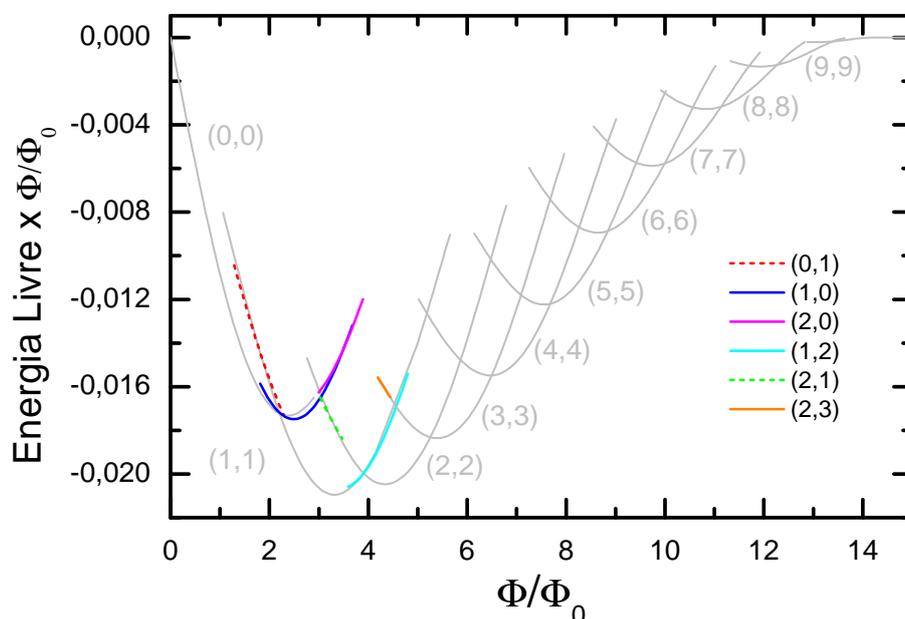


Figura 5.9: Energia livre vezes o fluxo magnético em função do fluxo magnético para um disco de raio $R = 10\xi_1$, $T = 0,9T_c$, $n_1 = 0,325$, $\lambda_{11} = 2,415$, $\lambda_{22} = 1,211$ e $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0,001$ e $v_1/v_2 = 1,225$. Com estes parâmetros obtêm-se as temperaturas críticas $T_{c1} = 0,95T_c$ e $T_{c2} = T_c$.

vorticidade $(L, L + 1)$.

Na figura 5.10 é possível observar e comparar o comportamento de alguns estados fracionários para diferentes valores de n_1 . Para o caso de $n_1 = 0,343$ (esquerda) é possível encontrar os estados $(0,1)$ e $(0,2)$ de forma espontânea, ou seja, o sistema pode entrar nesse estado realizando o processo de aumentar e diminuir o campo externo, enquanto que o estado $(1,0)$ tem de ser forçado, ou seja, o sistema não consegue entrar nesse estado realizando o processo de aumentar e diminuir o campo externo e para poder encontrar a faixa de campo onde o estado é estável precisamos impor o estado $(1,0)$ como condição inicial para um valor de campo onde poderia ser estável este estado e deixar relaxar até o equilíbrio. Se o estado não era estável para esse valor de campo, tentava-se com outro valor de campo até encontrar um valor no qual o estado era estável para depois aumentar e diminuir o campo e assim achar a faixa

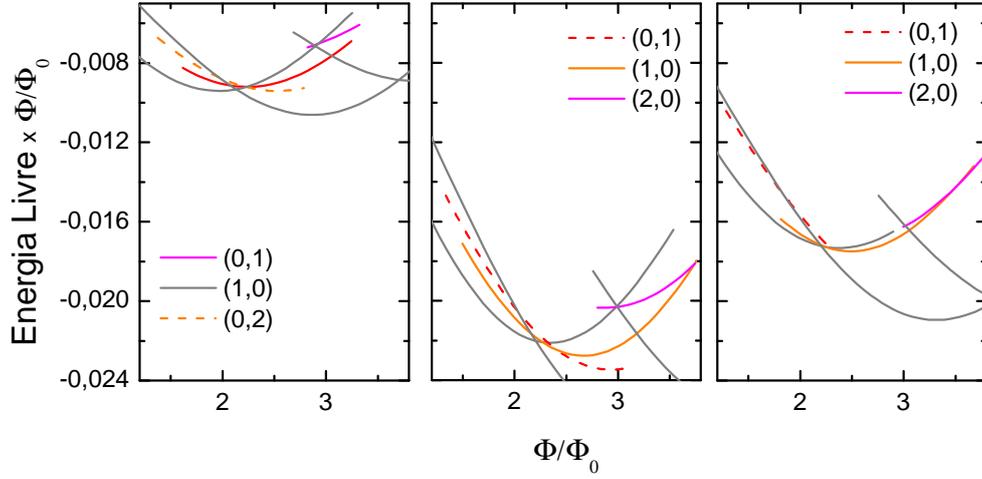


Figura 5.10: Energia em função do fluxo magnético externo para a faixa de fluxo magnético onde os estados $(0,1)$ e $(1,0)$ são estáveis para (esquerda) $n_1 = 0,343$, (centro) $n_1 = 0,334$ e $n_1 = 0,325$. As linhas contínuas (tracejadas) correspondem aos estados obtidos (não obtidos) durante o processo de aumentar e diminuir o campo magnético.

de campo onde o estado é estável. Para $n_1 = 0,334$ (centro) já notamos que o estado que aparece de forma espontânea é o estado $(1,0)$ enquanto o estado $(0,1)$ tem de ser forçado. Também observamos um deslocamento da faixa de campo onde estes estados são estáveis: a faixa correspondente ao estado $(1,0)$ desloca-se para a direita enquanto a faixa para o estado $(0,1)$ desloca-se para a esquerda. Para $n_1 = 0,325$ observamos que o estado $(1,0)$ encontra-se bem deslocado para a direita e o estado $(0,1)$ bastante deslocado para a esquerda. Isto está relacionado com a mudança nos valores das temperaturas críticas das bandas já que de um lado tem-se a situação $T_{c2} < T_{c1}$ que favorece o estado de menor vorticidade na banda 1 e do outro tem-se $T_{c2} > T_{c1}$ que favorece o estado de menor vorticidade na banda 2.

5.3.2 Influência da velocidade de Fermi

Depois de ter analisado o comportamento do sistema ao variar n_1 , procedemos a analisar a influência da razão entre as velocidades de Fermi das bandas

v_1/v_2 sobre os estados fracionários. Como no caso anterior, fixamos os valores dos elementos da matriz de acoplamento nos valores usados na seção anterior e o valor de $n_1 = 0,343$.

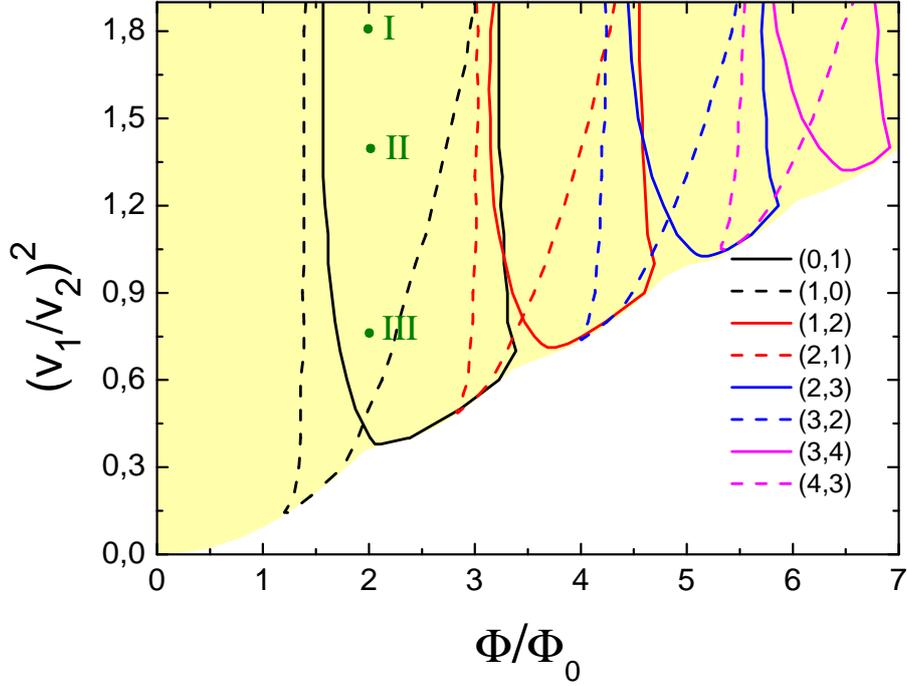


Figura 5.11: Regiões de estabilidade dos estados fracionários (L_1, L_2) no plano definido pelo quadrado da razão entre as velocidades de Fermi $(v_1/v_2)^2$ e o fluxo magnético aplicado Φ . A área amarela é a região onde a banda 2 é ativa.

Na figura 5.11 apresentamos a região de estabilidade dos estados fracionários. Como no caso anterior, a região amarela representa a região onde as duas bandas são ativas. Fora desta região a banda 2 passa a ser completamente dominada pela banda 1. As regiões de estabilidade dos estados com $L_2 = L_1 + 1$ ($L_1 = L_2 + 1$) são mostradas com linhas contínuas (tracejadas). Neste caso, o valor da razão das velocidades de Fermi das bandas não muda a temperatura crítica das bandas. Mais ainda, como a velocidade de Fermi é proporcional ao comprimento de coerência, $\xi_n = \hbar v_n / \sqrt{6}W$, a razão entre as velocidades de Fermi é também a razão entre os comprimentos de coerência das bandas, $(v_1/v_2)^2 = (\xi_1/\xi_2)^2$. Agora, como nossa unidade de distância é

ξ_1 temos que v_1 pode ser considerada constante e $(v_1/v_2)^2 = 1/\xi_2^2$. Assim, um incremento em (v_1/v_2) significa na verdade uma redução de ξ_2 .

Desta figura podemos observar que para valores de $(v_1/v_2)^2 < 0,1$ não encontramos estados fracionários e que aumentando os valores desta razão começam a aparecer mais estados de vorticidade fracionária. Isto está claramente relacionado com o aumento do tamanho do núcleo do vórtice na banda 2: o aumento de v_2 esta relacionado com o aumento do núcleo do vórtice na banda 2 o que enfraquece a supercondutividade desta banda e a leva para o estado onde deixa de ser ativa. Agora, ao diminuir v_2 , mais vórtices conseguem nuclear na banda 2 e favorece a formação de mais estados fracionários.

Para explicar a forma da região de estabilidade dos estados fracionários é importante lembrar que o aumento de v_2 afeta fracamente o comportamento da banda 1. Este efeito está relacionado com o acoplamento tipo Josephson que neste caso é um acoplamento bem fraco. Portanto, o valor da intensidade de campo correspondente tanto à nucleação como à expulsão de um vórtice na banda 1 não muda significativamente ao variar v_2 . Assim, quando o sistema encontra-se no estado fracionário $(L, L + 1)$, o estado $(L + 1, L + 1)$ é alcançado com a entrada de um vórtice na banda 1 num valor de campo que chamaremos de campo "superaquecido", Φ_{sh} , o qual varia muito pouco. De igual forma, o estado (L, L) é alcançado com a expulsão de um vórtice na banda 2 num valor de campo que chamaremos de campo "superesfriado", Φ_{sc} , que varia com o valor de v_2 .

Uma análise similar faz-se para os estados fracionários opostos. Neste caso, o valor da intensidade do campo para o qual o estado $(L + 1, L)$ vai para o estado $(L+1, L+1)$, ou seja Φ_{sh} , varia bastante, já que está relacionado com a nucleação de um vórtice na banda 2. Por outro lado, o valor de Φ_{sc} mantém-se praticamente constante já que está relacionado com a expulsão de um vórtice na banda 1.

Na figura 5.12 mostramos a mudança no núcleo do vórtice ao variar o valor de v_2 . O valor do módulo do parâmetro de ordem está normalizado com

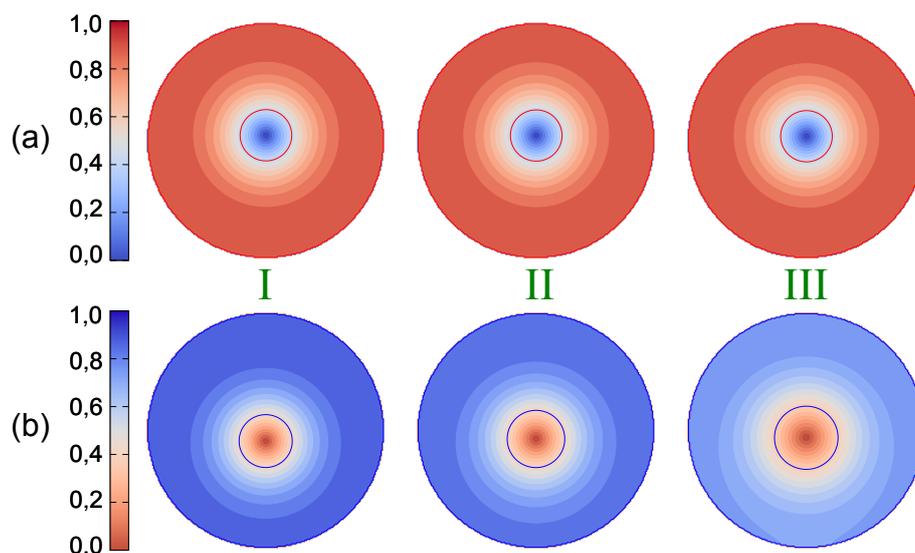


Figura 5.12: Logarítmo do módulo do parâmetro de ordem : a) da banda 1 para o estado (1,0) e b) da banda 2 para o estado (0,1) para os pontos marcados na figura 5.11. O círculo central representa o tamanho do núcleo do vórtice definido como o contorno onde o módulo do parâmetro de ordem recupera o 50% do valor máximo alcançado no limite de acoplamento zero.

seu maior valor. O círculo no centro indica o tamanho do núcleo do vórtice definido como o contorno onde o módulo do parâmetro de ordem recupera o 50% do valor máximo alcançado no limite de acoplamento zero. Como mencionamos anteriormente, na figura 5.12(a) podemos ver que a estrutura do vórtice na banda 1 não é modificada ao variar v_2 , praticamente apresentando a mesma configuração. Mas em relação à banda 2 (Fig. 5.12(b)) é possível observar a mudança no tamanho do núcleo do vórtice. Quanto maior é v_2 , maior é o núcleo do vórtice. Este aumento no tamanho do núcleo faz diminuir a barreira de potencial na banda 2. Portanto, todos os processos que envolvem a nucleação (expulsão) de um vórtice na banda 2 acontecem num valor de campo menor (maior), quanto maior for v_2 .

5.3.3 Influência do acoplamento entre bandas

Para completar o estudo fazemos o estudo da região de estabilidade dos estados fracionários com $|L_1 - L_2| = 1$ no plano definido por λ_{12} e o fluxo magnético aplicado. Os resultados são mostrados na figura 5.13.

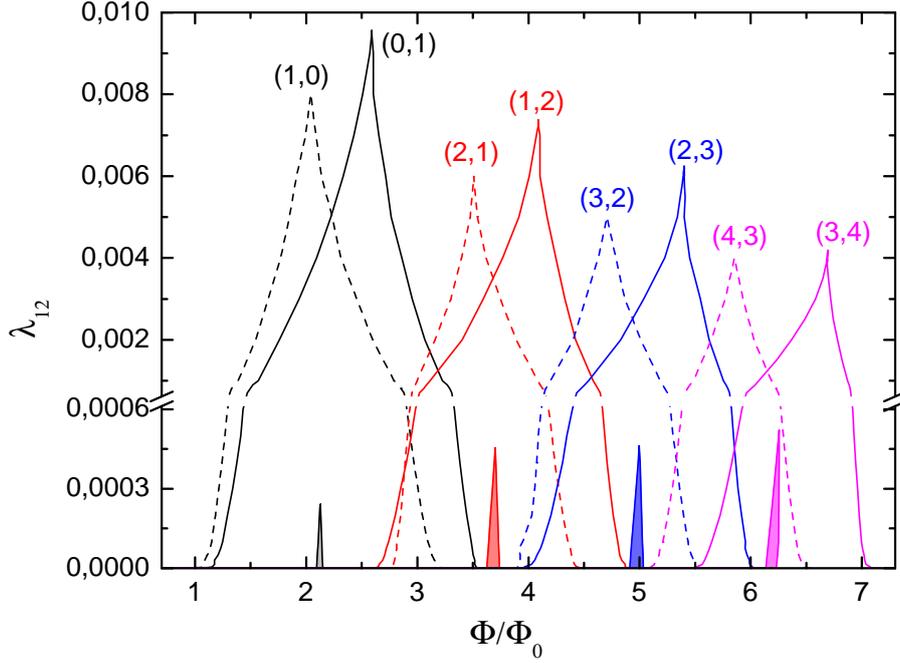


Figura 5.13: Regiões de estabilidade dos estados fracionários (L_1, L_2) no plano definido pelo coeficiente de acoplamento λ_{12} e o fluxo magnético aplicado Φ . A área corida mostra a região onde os estados $(L, L + 1)$ são os estados de equilíbrio termodinâmico.

Para o caso sem acoplamento, que corresponderia a dois condensados com diferentes parâmetros, a região onde aparecem os estados de vórtices fracionários é grande. Quando liga-se o acoplamento, $\lambda_{12} > 0$, estas regiões começam a diminuir devido ao comportamento da banda 1 ter uma influência no comportamento da banda 2. Quanto maior é o acoplamento entre as bandas, menor é a região onde os vórtices fracionários são estáveis. O estado fracionário que mais sobrevive é o estado $(0,1)$ e alcança um valor de $\lambda_{12} = 0,01$. Os estados com vorticidade fracionária oposta $(L + 1, L)$ têm uma forma

similar ao de vorticidade fracionária normal $(L, L + 1)$, mas a altura deles é menor. As regiões preenchidas representam as partes do diagrama onde os estados fracionários são estados fundamentais, ou seja, possuem menor energia que os estados inteiros. Para os valores de parâmetros microscópicos escolhidos nesta seção, os estados fracionários normais são os que possuem menor energia, mas isto acontece para valores de λ_{12} bem pequenos. Este resultado já foi mostrado na referência [70], mas eles consideraram o acoplamento como um parâmetro que pode tomar qualquer valor sem modificar os outros parâmetros e, como mostra-se aqui, o valor deste está conectado com outros parâmetros como a temperatura crítica de cada banda T_{cn} e a densidade de estados das bandas n_n .

Além dos estados fracionários normais, $(L, L + 1)$, aqui obtemos também a região de estabilidade dos estados fracionários opostos, $(L + 1, L)$. Estes estados sempre possuem energia alta e nunca chegam a ser estados fundamentais do sistema. Por este motivo, eles não conseguem sobreviver tanto quanto os estados fracionários normais.

Podemos observar que os estados com $(L + 1, L)$ estão deslocados à esquerda do estado $(L, L + 1)$, ou seja, são antecipados. Isto concorda perfeitamente com o resultado da figura 5.11 e, como explicado naquela parte, o deslocamento está relacionado com a expulsão e a nucleação de um vórtice na banda 2.

5.4 Resumo

Neste capítulo estudamos um disco supercondutor de duas bandas sob o efeito de um campo externo homogêneo focando o estudo nos estados de vorticidade fracionária. Para isto, determinamos primeiro o valor dos parâmetros microscópicos para os quais estes vórtices fracionários podem ser estabilizados. Depois, analisamos a região de estabilidade ao variar as densidades de estados parcial, a velocidade de Fermi da banda 2 e o acoplamento entre as bandas. Encontramos que, nos supercondutores de duas bandas com acopla-

mento fraco, o produto $n_n \lambda_{nn}$ determina qual das bandas é a mais dominante, sem importar os valores dos elementos da matriz de acoplamento que caracterizam as interações interbanda. O valor da velocidade de Fermi de cada banda não determina qual das bandas é a mais dominante. Estes parâmetros caracterizam o tamanho do núcleo do vórtice na respectiva banda. No que se refere ao acoplamento entre as bandas, a região de estabilidade dos estados fracionários no plano $\lambda_{12} - \Phi$ é similar ao reportado na ref. [70]. Adiciona-se aqui a parte da região de estabilidade dos estados de vorticidade fracionária $(L + 1, L)$.

CAPÍTULO 6

Efeito de um dot magnético sobre as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários

Neste capítulo vamos estudar o efeito de um disco magnético (MD) sobre as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários estudados no capítulo anterior. O MD tem um raio R_{MD} , uma altura h e está magnetizado paralelamente à normal do plano que contém o disco supercondutor de duas bandas. A separação entre o MD e o disco supercondutor de duas bandas é l . No espaço entre o supercondutor e o MD existe um material isolante de forma que a interação entre estes dois materiais é meramente o efeito eletromagnético do campo não-homogêneo do MD sobre o supercondutor. O sistema novamente é descrito pelas equações TCGL usadas no capítulo anterior. A influência do MD sobre os estados de equilíbrio do supercondutor é levada em conta no potencial vetor que possui a parte do potencial vetor do campo não-homogêneo do MD, $\vec{A} = \vec{A}_{ext} + \vec{A}_{MD}$, onde [89],

$$\vec{A}_{MD}(r) = 4M \sqrt{\frac{R_M}{r}} \int_0^l dz_{MD} \frac{\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K(k) - E(k)}{k} \hat{e}_\phi. \quad (6.1)$$

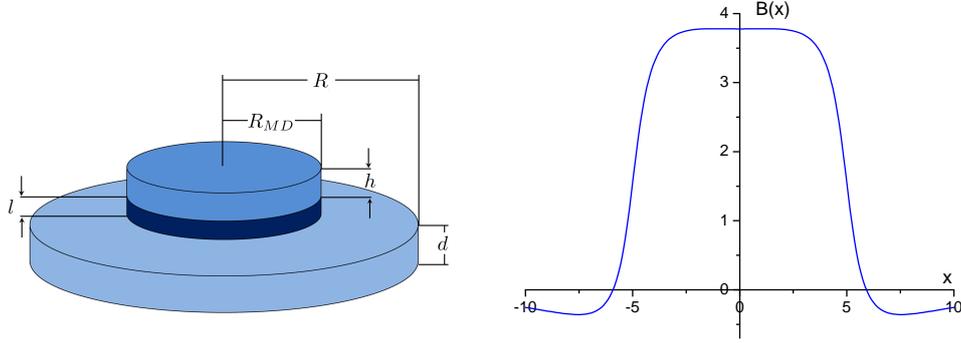


Figura 6.1: (Esquerda) Disco supercondutor de duas bandas de raio R interagindo com um disco magnético (MD) de raio R_{MD} localizado a uma distância l da superfície do supercondutor e magnetizado perpendicularmente ao plano do disco. (Direita) Perfil do campo não-homogêneo gerado pelo MD de raio $R_{MD} = 5\xi_1$, $l = -0,7\xi_1$, $h = 4,8\xi_1$ e $M = 1,0H_{c2}^1$.

onde $\vec{B}_{MD} = \nabla \times \vec{A}_{MD}$ e $k^2 = 4rR_{MD}/[(R_{MD} + r)^2 + (l - z_{MD})^2]$. Na figura 6.1 mostramos o esquema do sistema estudado junto com o perfil do campo magnético do MD com $R_{MD} = 0,5R$, $l = -0,7\xi_1$, $h = 4,8\xi_1$ e $M = 1,0H_{c2}^1$. Para distâncias menores do que o raio do MD, o campo gerado é praticamente constante e igual a $3,8H_{c2}^1$. Para distâncias próximas do raio do MD, o campo varia drasticamente passando rapidamente de um valor positivo muito grande a um valor negativo relativamente pequeno.

6.1 Variação na energia livre

Como ponto de partida para este estudo consideramos as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários obtidos para os valores dos parâmetros microscópicos usados no capítulo anterior e variamos a magnetização do MD. Para expressar a magnetização do MD de forma análoga à do campo magnético, definimos $\Phi_M = M\pi R^2$. Cabe esclarecer que Φ_M é apenas uma notação conveniente e não representa o fluxo magnético do campo não-homogêneo.

Para o caso sem MD, a energia livre do sistema é simétrica com respeito ao eixo da energia, ou seja, o comportamento da energia para campos nega-

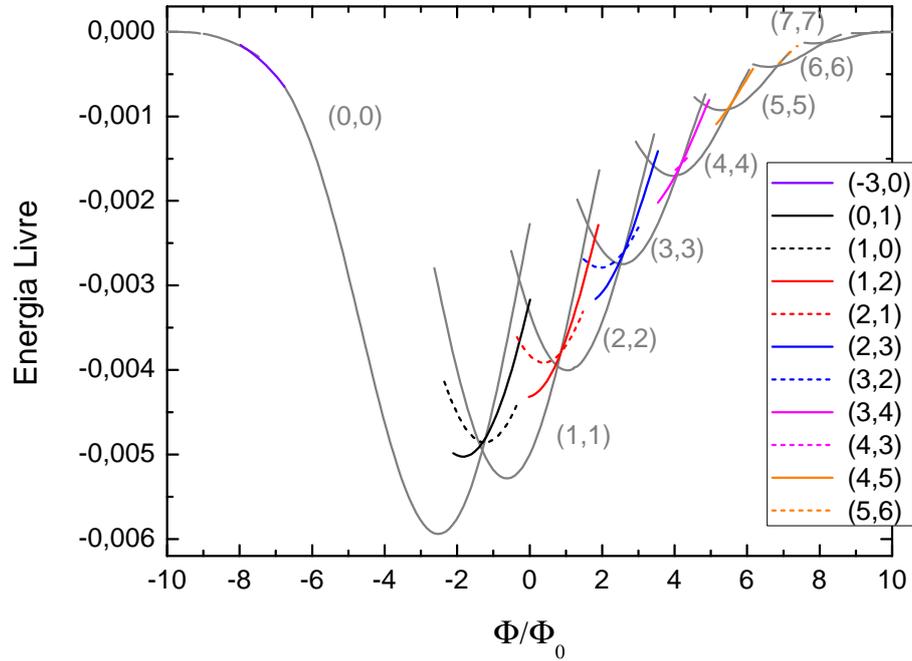


Figura 6.2: Energia livre em função do fluxo magnético aplicado para o sistema composto pelo disco supercondutor estudado no capítulo anterior interagindo com um MD com $\Phi_M = 1,8\Phi_0$, $R_{MD} = 0,5R$, $l = -0,7\xi_1$, e $h = 4,8\xi_1$.

tivos é similar ao comportamento da energia para campos positivos com a diferença que, num lado têm-se vórtices e no outro têm-se antivórtices, dependendo do sentido do campo. No caso com $\Phi_M \neq 0$, a energia perde a sua simetria devido ao fato que o campo gerado pelo MD enfraquece a supercondutividade no centro do disco supercondutor e gera um potencial na borda impedindo a entrada de vórtices. Ao aplicar um campo homogêneo paralelo à magnetização do MD, o campo no centro é reforçado, o que favorece a destruição da supercondutividade.

Na figura 6.2 mostramos a energia em função do fluxo magnético aplicado para um valor de $\Phi_M = 1,8\Phi_0$. Para este caso, o campo gerado pelo MD é intenso o suficiente para gerar vórtices no sistema na ausência do campo externo aplicado, sendo o estado (1,1) o de menor energia. Os outros estados que o sistema pode acessar em $\Phi = 0$ são os estados fracionários (1,2) e (2,1) e o estado inteiro (2,2). O estado Meissner está deslocado para valores de

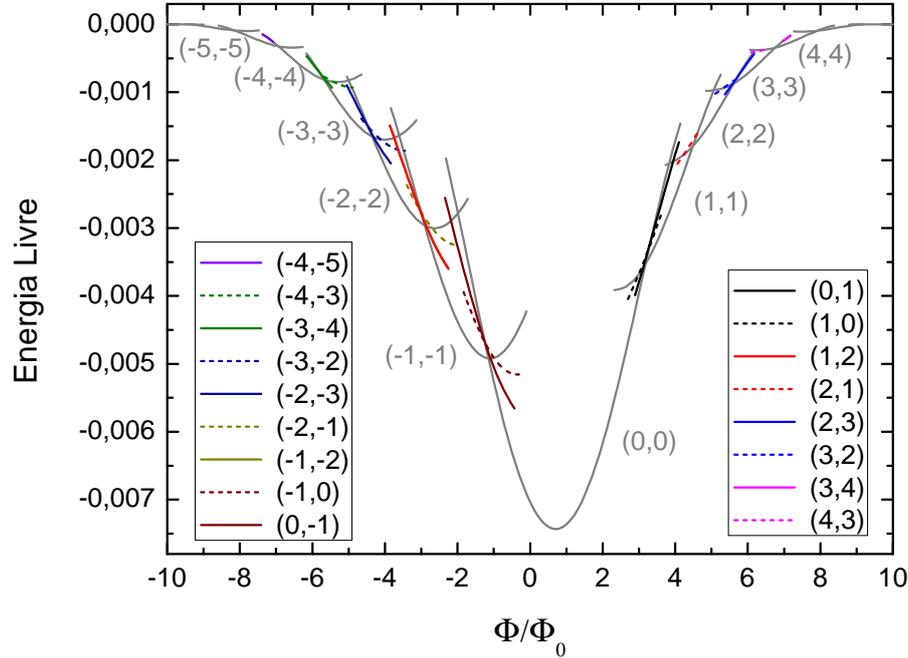


Figura 6.3: Energia livre em função do fluxo magnético aplicado para o sistema composto pelo disco supercondutor estudado no capítulo anterior interagindo com um MD com $\Phi_M = -0,5\Phi_0$, $R_{MD} = 0,5R$, $l = -0,7\xi_1$, e $h = 4,8\xi_1$.

fluxo negativos mostrando que ao aplicar um campo homogêneo antiparalelo à magnetização do MD favorece-se a supercondutividade no centro do disco devido a que os campos se compensam. No obstante, o campo na borda do disco supercondutor reforça-se, a supercondutividade enfraquece-se, e, para valores de campo mais intensos, observamos a entrada de 3 antivórtices na banda 1. Depois, o sistema vai para o estado normal.

Para valores de fluxo magnético positivo, o campo no centro é reforçado e os campos na borda compensam-se. Portanto, os vórtices presentes no sistema concentram-se no centro do disco e o estado normal é alcançado quando o campo na borda é intenso o suficiente para destruir a supercondutividade. O fato dos vórtices concentrarem-se no centro do disco supercondutor permite a presença de mais estados fracionários e inteiros quando comparado com o caso sem MD, ou seja, $\Phi_M = 0$.

Para o caso de $\Phi_M = -0,5\Phi_0$ (Fig. 6.3), o estado Meissner está deslocado

para valores de campo positivos diminuindo a faixa de fluxo onde existem os estados de vórtices fracionários, assim como a quantidade de estados de vorticidade inteira. Para este valor de magnetização, o campo gerado pelo MD não é intenso o suficiente para gerar vórtices no sistema na ausência de campo externo aplicado e o único estado que pode ser acessado pelo sistema em $\Phi = 0$ é o estado Meissner. Para que o primeiro vórtice consiga nuclear uma das bandas, o fluxo de campo aplicado deve ser intenso o suficiente para estabilizar o vórtice perto da borda do disco conseguindo equilibrar a repulsão devida ao fluxo do campo negativo no centro do disco. Por este motivo, todos os estados estão deslocados para valores do fluxo magnético mais positivo e a faixa de fluxo onde existem os vórtices fracionários diminui quando comparado com os casos $\Phi_M = 0$ e $\Phi_M = 1,8\Phi_0$. Novamente, quando o campo magnético é aplicado paralelo à magnetização do MD, os campos no centro do disco compensam-se e favorece a nucleação de antivórtices que concentram-se nesta região do disco. O deslocamento do estado Meissner para a direita permite obter mais um estado de vorticidade fracionária quando comparado com o caso sem MD, o estado $(-4, -5)$.

6.2 Diagrama de fase $\Phi_M - \Phi$

Na figura 6.4 podemos observar as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários $(L, L + 1)$ e $(L + 1, L)$ (para $0 \leq L \leq 4$) no plano $\Phi_M - \Phi$. Podemos ver como, para valores positivos da magnetização, os estados fracionários deslocam-se para valores de campo menores, entrando inclusive na região de fluxo negativo. Além disto, a faixa de campo onde são estáveis estes estados começa a aumentar com o valor de Φ_M até que, para um determinado valor, $\Phi_M \approx 1,8\Phi_0$, esta faixa passa a diminuir, até que os estados fracionários desaparecerem. O primeiro estado que desaparece é o estado $(1,0)$ em $\Phi_M > 4,72\Phi_0$, seguido do estado $(0,1)$ em $\Phi_M > 5,12\Phi_0$ e o último é o estado $(3,4)$ em $\Phi_M > 8,7\Phi_0$. Isto está relacionado com o efeito de compensação do campo. Para valores de magnetização suficientemente altos, o campo pro-

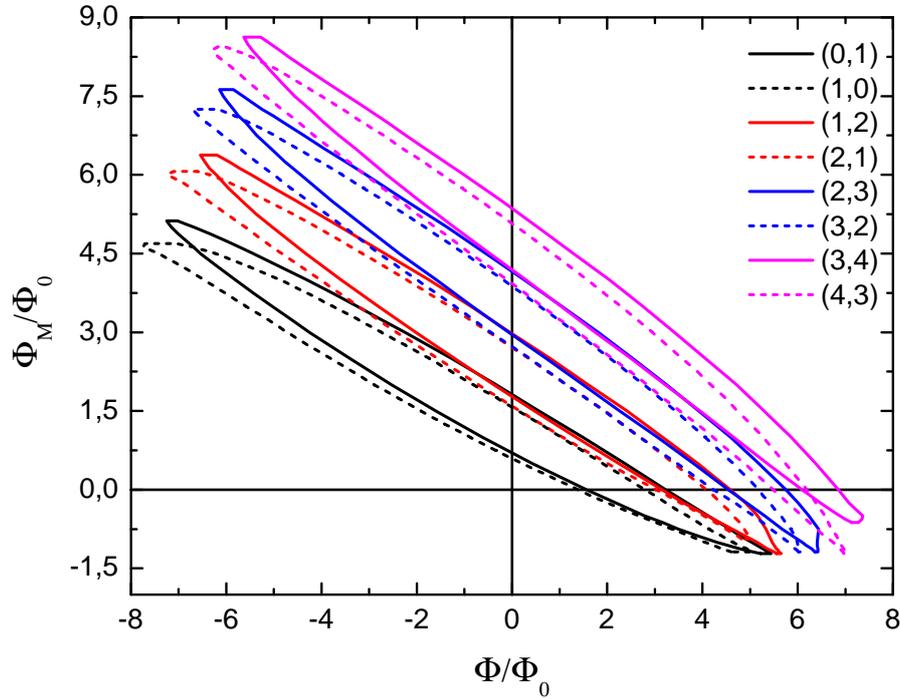


Figura 6.4: Região de estabilidade dos estados fracionários (L_1, L_2) no plano definido por Φ_M e Φ para o disco supercondutor estudado no capítulo anterior interagindo com um MD com $R_{MD} = 0,5R$, $l = -0,7\xi_1$, e $h = 4,8\xi_1$.

duzido pelo MD induz a nucleação de vórtices no supercondutor. Logo, o estado inicial para campo externo zero é um estado de vorticidade diferente de zero. Quando liga-se o campo magnético externo na direção oposta à magnetização do MD, este começa a diminuir a intensidade do campo total e assim começa a expulsão de vórtices nas bandas até chegar ao ponto no qual o campo na borda é tão forte que a supercondutividade é destruída. Muitas vezes, como observamos na figura 6.4, o sistema não consegue chegar até o estado com vorticidade zero e passa para o estado normal.

Para valores negativos da magnetização estes estados deslocam-se para valores de campo maiores. A região de estabilidade é bem menor do que para o caso de magnetização positiva. Para explicar esta parte é melhor analisar o perfil do campo em cada região do diagrama. Na figura 6.5 mostramos os módulos do parâmetro de ordem das bandas do estado $(2,3)$ para diferente

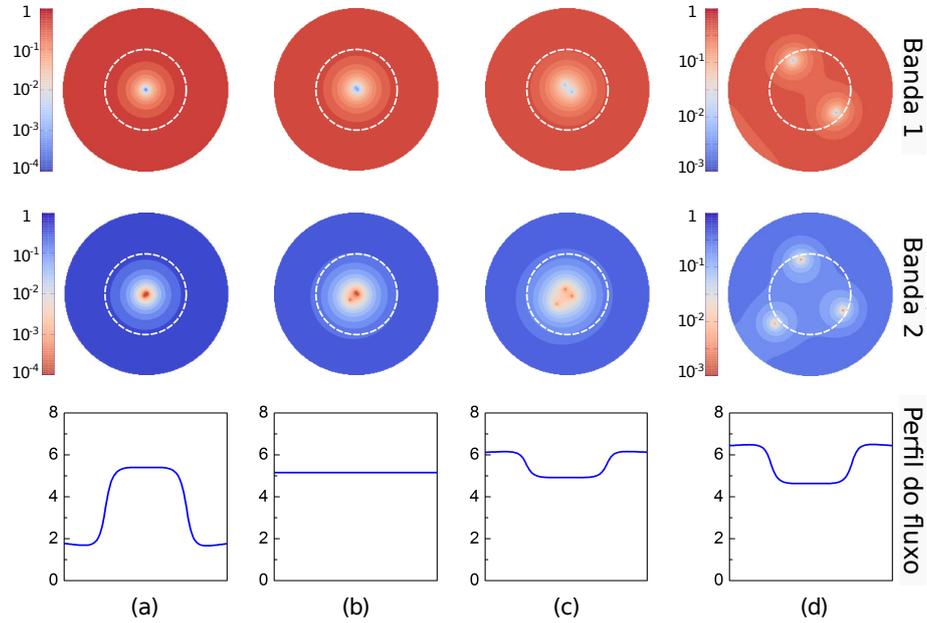


Figura 6.5: Logarítmo do módulo do parâmetro de ordem para das duas bandas para o estado (2,3) e perfis do fluxo magnético (das contribuições do MD e do campo homogêneo) para (a) $\Phi_M = 2,25$ e $\Phi = 2$, (b) $\Phi_M = 0$ e $\Phi = 5,15$, (c) $\Phi_M = -0,75$ e $\Phi = 6,05$ e (d) $\Phi_M = -1,125$ e $\Phi = 6,33$. As circunferências tracejadas marcam a posição do MD.

valores de magnetização e campo junto com o perfil de campo respectivo. Em todos os casos, o fluxo total na região central do disco supercondutor, onde localizam-se os vórtices, tem aproximadamente o mesmo valor, $5\Phi_0$, que é o fluxo necessário para estabilizar o estado (2, 3) para o caso sem MD, $\Phi_M = 0$. Portanto, a barreira de energia para o vórtice escapar é essencialmente a mesma em todos os casos, de tal forma que espera-se que o fluxo Φ_{sc} seja aproximadamente uma função linear decrescente de Φ_M . Por outro lado, para que um novo vórtice possa entrar deve-se superar a barreira de energia perto da borda onde o perfil do fluxo magnético é muito sensível à magnetização do MD. Para $\Phi_M > 0$, as correntes de blindagem são fracas perto da borda do disco supercondutor tornando mais difícil a entrada de um novo vórtice. Portanto, a barreira de energia para a entrada de um novo vórtice aumenta (com relação à mediana da faixa de estabilidade) com

Φ_M . Consequentemente, Φ_{sh} é prolongado para valores de campos mais altos, proporcionando assim a ampliação da faixa de estabilidade de uma dada configuração de vórtices. Uma característica marcante que pode ser obser-

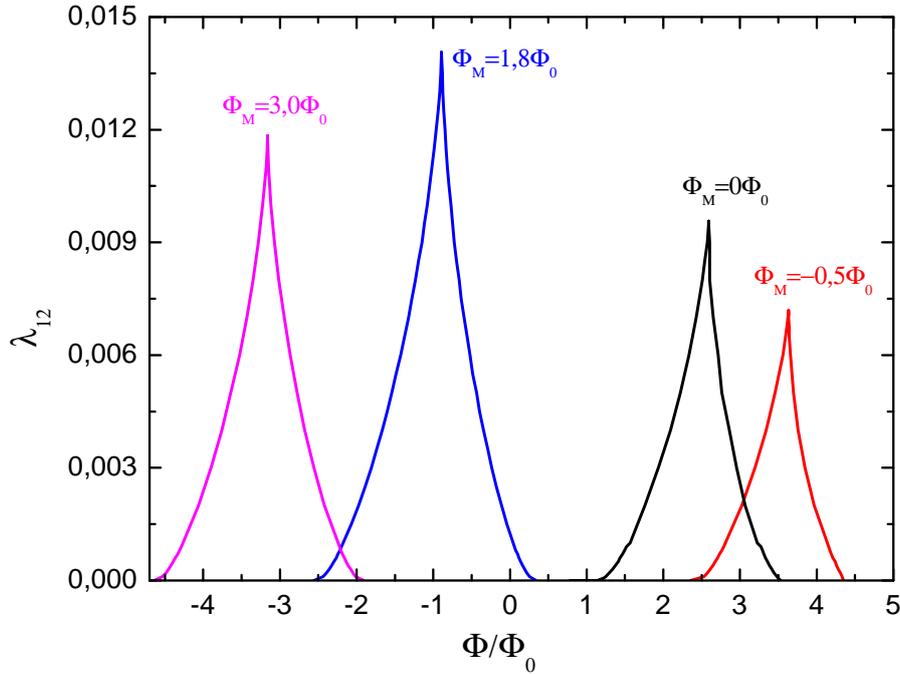


Figura 6.6: Região de estabilidade do estado (0,1) no plano $\lambda_{12} - \Phi$ para diferentes valores de Φ_M .

vada na figura 6.5 é a expansão das regiões ocupadas pelas configurações de vórtices ao diminuir Φ_M para valores negativos. A expansão de configurações de vórtices já foi anunciada em um supercondutor quadrado mesoscópico de uma banda [89]. Aqui, demonstramos que este efeito também pode ser aplicado a materiais multibandas, proporcionando assim uma ferramenta para a visualização de estados de vórtices fracionários. Esta expansão acontece devido ao fato que a diminuição do fluxo magnético na região central do disco supercondutor reduz o poder de confinamento das correntes de blindagem e permite a repulsão dos vórtices no centro da amostra. Diminuindo ainda mais Φ_M conduz à expulsão dos vórtices até se atingir o estado Meissner.

O fato do MD aumentar e diminuir a faixa de campo onde os vórtices fra-

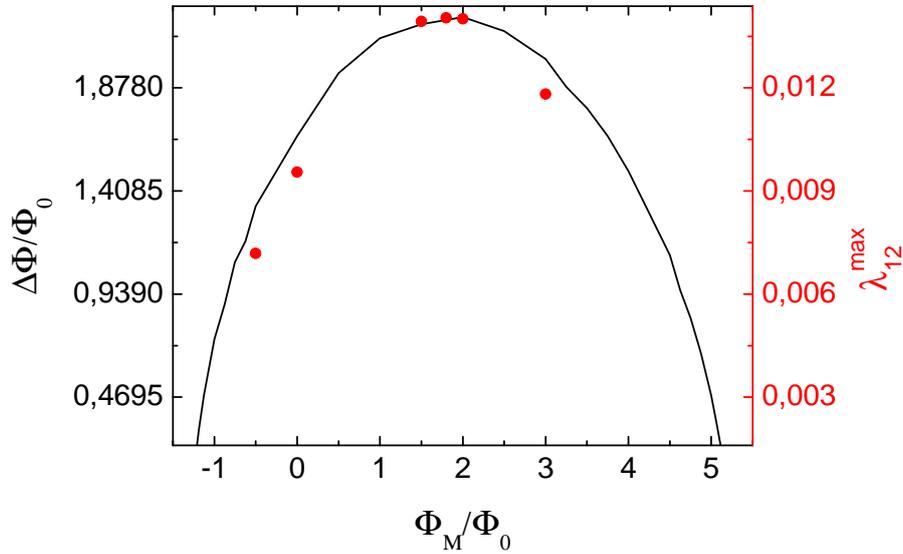


Figura 6.7: $\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$ do estado (0,1) em função de Φ_M (linha contínua) e os valores de máximos de λ_{12} para alguns valores de Φ_M (os pontos vermelhos).

cionários são estáveis faz pensar na possibilidade dele também fazer aumentar e diminuir a região de estabilidade no plano $\lambda_{12} - \Phi$. Para ter certeza disto, obtemos a região de estabilidade do estado (0,1) para diferentes valores da magnetização e comparamos com o resultado obtido para $\Phi_M = 0$. O resultado é apresentado na figura 6.6, onde mostramos as regiões de estabilidade do estado fracionário (0,1) para diferentes valores de Φ_M . Podemos observar que a região de estabilidade deste estado diminui quando a magnetização é antiparalela ao campo, enquanto que, quando a magnetização é paralela ao campo, a região de estabilidade aumenta chegando até seu valor máximo em $\Phi_M = 1,8\Phi_0$. Para valores maiores de magnetização a região diminui novamente. Portanto, o MD colocado perto de um supercondutor mesoscópico de duas bandas e apropriadamente magnetizado pode estabilizar estados de vórtices fracionários, permitindo a observação destes ainda em materiais com acoplamento mais forte onde, em situações diferentes, seriam proibidos em um campo homogêneo. Neste caso, encontramos que a magnetização ótima é $\Phi_M = 1,8\Phi_0$, para o qual o valor máximo de λ_{12} onde o estado (0,1) pode ser estabilizado aumenta em 47% do valor máximo obtido para o caso sem

MD, $\Phi_M = 0$, conforme vemos na figura 6.6.

Para esclarecer mais o efeito do MD sobre as regiões de estabilidade do estado fracionário $(0, 1)$ no plano $\lambda_{12} - \Phi$, o tamanho da faixa do fluxo magnético, $\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$, deste estado em função de Φ_M é mostrado na figura 6.7 junto com os valores de λ_{12} máximos para alguns valores de Φ_M . O maior valor de λ_{12}^{max} coincide com o valor de Φ_M que tem o maior valor de faixa de fluxo. Portanto, podemos dizer que o valor da faixa de fluxo do estado fracionário está relacionado com o valor de λ_{12}^{max} : quanto maior a faixa de fluxo, maior o valor de λ_{12}^{max} , para os parâmetros estudados.

Desta parte podemos ressaltar que, dependendo do valor da faixa de fluxo do estado de vorticidade fracionária, o MD pode influenciar a presença destes vórtices fracionários em supercondutores com acoplamento mais forte. No caso aqui estudado, o valor máximo de λ_{12} para o estado fracionário $(0, 1)$ aumenta em aproximadamente um 47% para $\Phi_M = 1,8\Phi_0$ quando comparado com o caso sem MD.

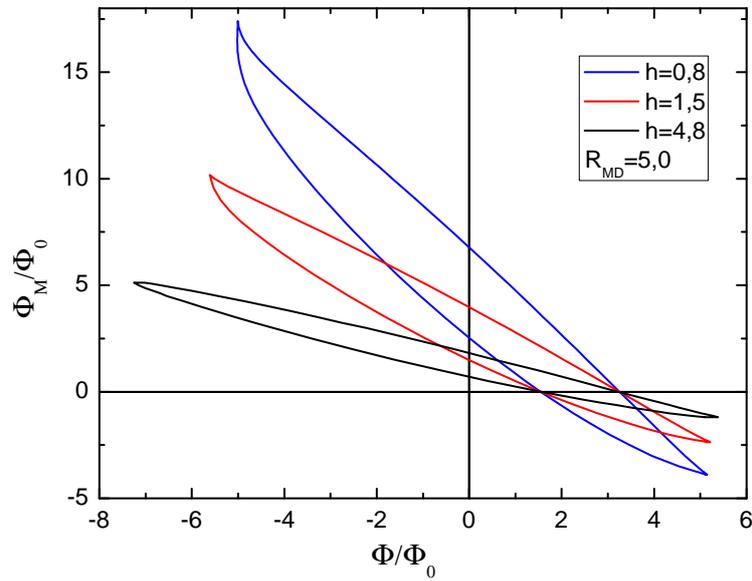


Figura 6.8: Região de estabilidade do estado $(0,1)$ no plano $\Phi_M - \Phi$ para um MD de raio $R_{MD} = 5$ e três valores diferentes de h .

6.3 Influência dos parâmetros do MD

Os resultados anteriores foram obtidos para parâmetros do MD que gerava um perfil de campo ideal para analisar o efeito deste sobre as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários. Agora iremos estudar como as regiões de estabilidade dos vórtices fracionários são influenciadas pela altura e o raio do MD, mantendo o raio do disco supercondutor fixo, $R = 10\xi_1$.

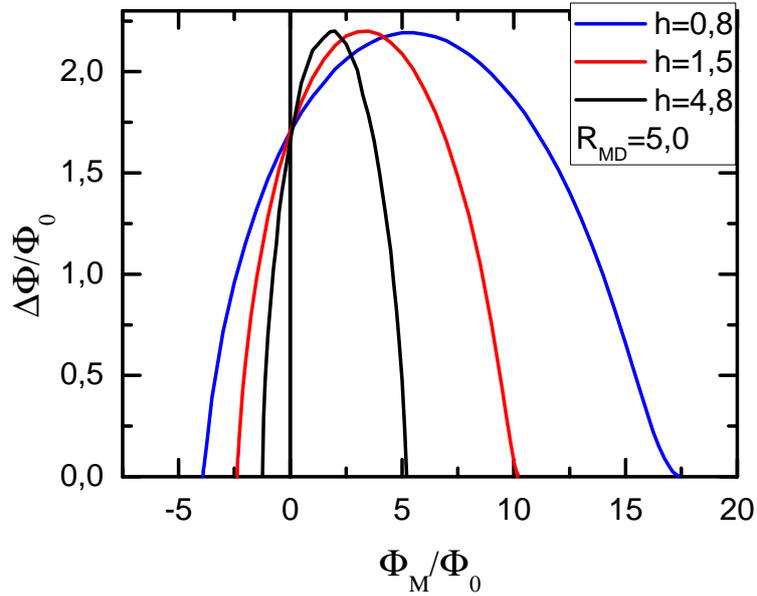


Figura 6.9: $\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$ do estado $(0,1)$ em função de Φ_M para $R_{MD} = 5,0\xi_1$ e três diferentes valores de h .

Na figura 6.8 mostramos a região de estabilidade do estado $(0,1)$ para um MD de raio $R_{MD} = 0,5R$ e três valores diferentes da altura. Para $h = 0,8$ podemos observar que o estado existe para valores grandes de Φ_M , mas a faixa de campo magnético onde é possível estabilizar este estado diminui quando comparado com as regiões de estabilidade obtidas para alturas maiores. Portanto, quanto menor é a altura do MD, menor é a faixa de fluxo e maior é a faixa de Φ_M onde este estado é permitido. A figura 6.8 aparenta ter uma faixa de fluxo de estabilidade do estado fracionário, $\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$, maior para o MD de menor altura. Na figura 6.9 mostra-se a faixa de campo

em função de Φ_M para os três valores de h . Nesta figura observa-se que o valor máximo de $\Delta\Phi$ é o mesmo para todos os valores de h e, portanto, não afeta a região de estabilidade no plano $\lambda_{12} - \Phi$. Esta figura também mostra

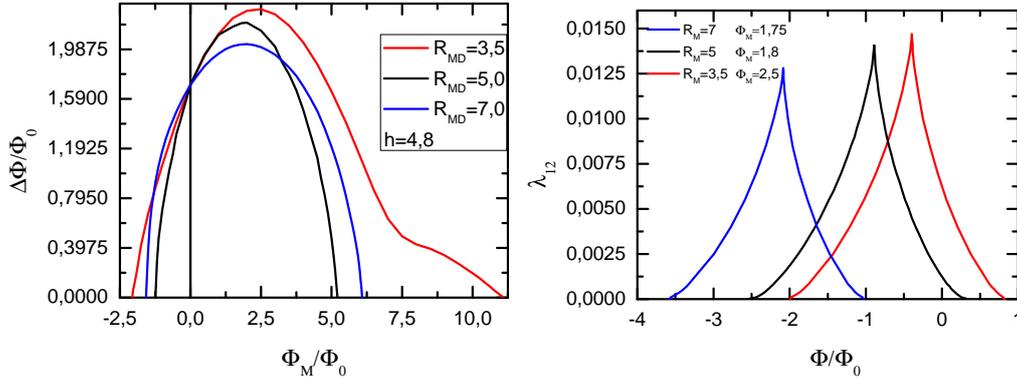


Figura 6.10: (Esquerda) $\Delta\Phi = \Phi_{sh} - \Phi_{sc}$ em função de Φ_M e (direita) região de estabilidade no plano definido por λ_{12} e o fluxo Φ do estado $(0,1)$ para $h = 4, 8\xi_1$ e três diferentes valores de R_{MD} .

o aumento da faixa de Φ_M com a diminuição da altura h do MD. O valor de Φ_M correspondente a cada valor máximo de $\Delta\Phi$ varia com a altura do MD. Quanto maior a altura, menor é o valor de Φ_M correspondente ao máximo valor de $\Delta\Phi$. Podemos concluir que a altura do MD não afeta o valor máximo de λ_{12} onde podem-se estabilizar os estados fracionários.

O seguinte parâmetro a ser estudado é o raio do MD. Na figura 6.10 mostramos a faixa de fluxo em função de Φ_M (esquerda) e a região de estabilidade no plano $\lambda_{12}-\Phi$ (direita) do estado fracionario $(0, 1)$ para $h = 4, 8$ e três diferentes valores do raio do MD. O valor da faixa do fluxo magnético onde o estado é estável varia com o tamanho do raio do MD obtendo o maior valor para o MD de raio menor. Isto indica que é possível aumentar ainda mais o valor de λ_{12}^{max} diminuindo o raio do MD e escolhendo o valor de Φ_M próximo de $2\Phi_0$.

6.4 Resumo

Neste capítulo estudamos um disco supercondutor de duas bandas interagindo com um MD localizado a uma distância l do supercondutor, focando o estudo nos estados de vorticidade fracionária. Para isto, analisamos a região de estabilidade ao variar a magnetização, a altura e o raio do MD. Encontramos que a faixa de fluxo magnético onde os vórtices fracionários são estáveis varia com o valor da magnetização e com o raio do MD. Quanto maior a faixa de fluxo do estado fracionário, maior é o valor máximo de λ_{12} permitindo estabilizar os estados fracionários em supercondutores com acoplamento mais forte.

CAPÍTULO 7

Conclusões

Nesta tese fez-se o estudo teórico dos estados de vorticidade presentes em supercondutores de uma e de duas bandas muito finos interagindo com campos magnéticos externos, em especial aqueles não uniformes produzidos por defeitos ferromagnéticos. O estudo foi realizado mediante a resolução numérica das equações de Ginzburg-Landau usando o método de diferenças finitas com a aproximação de variáveis de ligação. Dois sistemas foram considerados: o primeiro sistema estudo foi um filme supercondutor infinito de uma banda interagindo com uma rede quadrada de dipolos magnéticos. O segundo foi um supercondutor de duas bandas em forma de disco de raio $R = 10\xi_1$ interagindo com um disco ferromagnético (MD) magnetizado perpendicularmente ao plano do disco supercondutor. As conclusões sobre os estudos realizados estão resumidos abaixo.

Com relação ao caso do filme supercondutor infinito de uma banda, para valores de momento magnético suficientemente intenso, o campo não-homogêneo gerado pela rede de dipolos consegue penetrar o supercondutor formando pares de vórtices com antivórtices. A nucleação do par vórtice-

antivórtice (v-av) induz uma variação na derivada da energia livre com relação ao momento magnético quando calculada no valor de m correspondente à transição. Para uma separação pequena entre camadas, $z_0 < 3,5$, a quantidade máxima de pares de v-av por dipolo que podem nuclear o supercondutor é $N = 2$. Para valores de $z_0 > 3,5$ encontrou-se uma transição do estado $N = 2$ para $N = 4$, ao invés da transição $N = 2 \rightarrow N = 3$. A fase $N = 4$ corresponde a um estado com moléculas v-av intersticiais, onde um vórtice com 3 quanta de fluxo localiza-se abaixo de cada dipolo e 4 antivórtices formando um quadrado com um vórtice no centro localizam-se na região intersticial. Este vórtice localizado na região de campo negativo é o resultado da simetria quadrada da distribuição de corrente sobre o filme supercondutor na presença do arranjo quadrado de dipolos magnéticos. Para $N = 2$ pares v-av por dipolo, os antivórtices formam diferentes estados multivórtice e, quando a separação entre o filme supercondutor e a capa de dipolos é grande o suficiente, transformam-se em estados de vórtices gigantes.

Para valores de momento magnético diferentes de zero, a supercondutividade é favorecida ao aplicar um campo magnético homogêneo na direção paralela ao momento magnético dos dipolos. Isto devido ao fluxo magnético externo aniquilar os antivórtices reforçando a supercondutividade na região onde antes localizava-se o antivórtice. A energia livre apresenta umas discontinuidades na derivada com relação ao campo aplicado para os valores de fluxo magnético múltiplos de $64\Phi_0$, que corresponde a um quantum de fluxo magnético por dipolo. Este comportamento está relacionado com o ordenamento da fase de vórtices, ficando cada dipolo com um número inteiro de quanta de fluxo.

Com relação ao disco supercondutor de duas bandas, primeiro considerou-se o caso sem MD e estudou-se os estados de equilíbrio que resultam ao aplicar um campo externo homogêneo, principalmente os estados de vórtices com fluxo fracionário. Para isto, determinaram-se o valor dos parâmetros microscópicos para os quais estes vórtices fracionários podem existir. Depois, analisou-se a região de estabilidade ao variar as densidades de estados parcial, a velocidade

de Fermi da segunda banda e o acoplamento entre as bandas. De todo este estudo pode-se concluir o seguinte:

- Os estados fracionários sempre formam uma configuração multivórtice que distribui-se assimetricamente no disco supercondutor. Para o menor valor de fluxo magnético onde é possível estabilizar o estado fracionário, $\Phi = \Phi_{sc}$, encontra-se a maior separação entre vórtices, onde o vórtice que nucleia uma das bandas localiza-se bem perto da borda do disco. Isto é uma clara demonstração do acoplamento entre bandas devido ao valor do campo ser suficientemente intenso para a entrada de um vórtice na banda menos ativa, mas na outra, as correntes supercondutoras são intensas o suficiente para bloquear a entrada de vórtices nessa banda. Assim, é preciso campos mais intensos para que o vórtice consiga superar a barreira de potencial gerada pelas correntes supercondutoras da banda dominante e localizar-se no centro do disco. Isto acontece justamente quando o valor de Φ supera o valor máximo onde é possível estabilizar o estado, Φ_{sh} , ou seja, quando a outra banda também permite a entrada de um vórtice.
- O acoplamento das bandas no caso estudado é bem fraco, portanto, ainda o sinal do parâmetro α_n indica aproximadamente se a banda é ativa. Por tal motivo, define-se uma temperatura crítica para cada banda, T_{cn} , que coincide com o valor da temperatura onde $\alpha_n = 0$. Quando $T_{cP} < T < T_{cA}$ (onde a banda P marca a banda do supercondutor mais fraco e a banda A marca a do mais ativo), a banda P deixa de ser ativa e continua no estado supercondutor unicamente pelo efeito do acoplamento com a outra banda. O valor de $n_1 = 1 - n_2$ afeta fortemente à temperatura crítica de cada banda, portanto, quando $n_1 \lambda_{11}$ é maior (menor) do que $n_2 \lambda_{22}$ a banda 1 (2) é a banda dominante. Por exemplo, no sistema estudado aqui, escolheram-se os valores dos elementos da matriz de acoplamento de modo a simular um supercondutor com acoplamento entre bandas fraco e com a banda 1 sendo a mais dominante. Mas, para $n_1 = 1 - n_2 < 0,334$ a banda 2 começa

ser a mais dominante. Simultaneamente, mostrou-se o campo crítico dependente da temperatura para o caso sem acoplamento e observou-se que a região de estabilidade dos estados fracionários encontra-se justo na região do campo menor que o campo crítico da banda menos ativa. Portanto, espera-se que a região de estabilidade destes estados fracionário no plano $n_1 - \Phi$ aumente ao diminuir a temperatura do sistema.

- Além dos estados fracionários já reportados com $(L, L+1)$, neste estudo encontraram-se também os estados do tipo $(L+1, L)$. Dependendo de qual das bandas é a dominante, estes estados possuem menor ou maior energia que os estados $(L, L+1)$.
- A velocidade de Fermi da banda 2 não influencia no valor da temperatura crítica das bandas. Este parâmetro está relacionado com o tamanho do núcleo do vórtice na banda 2. Assim, quanto maior o valor de v_2 , maior o núcleo do vórtice e menos estados fracionários são encontrados.
- A região de estabilidade no plano $\lambda_{12} - \Phi$ coincide com a reportada na referencia [70]. Aqui adiciona-se também a parte dos estados “opostos”. Para os valores aqui usados, a região de estabilidade destes estados opostos é menor devido ao fato de ter uma energia mais alta.

Depois de analisar detalhadamente a região de estabilidade dos vórtices fracionários, estudou-se o efeito do campo não-homogêneo do MD sobre a região de estabilidade dos vórtices fracionários no plano $\lambda_{12} - \Phi$. O estudo foi feito em função da magnetização, da altura e do raio do MD. De todo este estudo pode-se concluir o seguinte:

- O campo magnético não-homogêneo gerado pelo MD afeta fortemente as configurações de vórtices presentes no sistema. O estado Meissner é deslocado para valores de fluxo magnético que opõem-se à orientação da magnetização do MD. Isto permite que o sistema possa acessar mais estados de vorticidade tanto inteira como fracionária na região do fluxo

magnético que coincide com a orientação da magnetização do MD e diminui os estados na região contrária do fluxo.

- A faixa de campo de estabilidade dos estados fracionários começa a aumentar até um determinado valor de Φ_M depois do qual esta faixa começa diminuir de novo. Isto faz com que a região de estabilidade no plano $\lambda_{12} - \Phi$ tenha também esse mesmo comportamento. Portanto, dependendo do valor da faixa do fluxo magnético onde o estado fracionário é estável, pode-se diminuir ou aumentar a região de estabilidade dos estados fracionários no plano $\lambda_{12} - \Phi$. Também, esta faixa de campo desloca-se para valores menores de campo, chegando inclusive até valores negativos. Nesta parte, quanto maior é a magnetização, maior é o confinamento dos vórtices no centro do disco. Para valores negativos da magnetização, a faixa de campo de estabilidade dos vórtices fracionários começa a diminuir e desloca-se para valores de campo cada vez mais intensos. Os vórtices começam a ficar mais afastados um do outro, deixando clara a configuração do sistema. Portanto, um disco magnético ajuda a visualizar mais claramente os vórtices nas bandas e poderia ser usado como um método de detectar estes estados fracionários. Também é possível influenciar estados de vórtices fracionários em supercondutores com acoplamento mais forte.
- A altura do MD varia a faixa do fluxo magnético e da magnetização onde é possível estabilizar os estados fracionários, mas não modifica o valor máximo da faixa do fluxo magnético e, portanto, não modifica o valor máximo de λ_{12} que pode-se obter ao variar a magnetização.
- O raio do MD faz variar o valor máximo da faixa de fluxo magnético do estado fracionário, de tal forma que, quanto maior o raio do MD, menor o valor da faixa do fluxo. Isto dá uma orientação para escolher as dimensões do MD e sua magnetização para influenciar estados de vórtices fracionários em supercondutores de duas bandas com acoplamento mais forte.

Esta tese tem como perspectiva estender estes estudos para analisar as fases de vórtices em outros sistemas mesoscópicos com diferentes geometrias, como um quadrado ou filme infinito, interagindo com materiais magnéticos. Principalmente, queremos simular materiais de duas bandas que possuem acoplamento fraco com a intenção de desenvolver uma estratégia para a detecção de estados de vórtices fracionário. Também queremos desenvolver uma teoria para estudar as propriedades de transporte nos supercondutores de duas bandas para estudar o comportamento destes vórtices fracionários quando submetidos a uma corrente elétrica.

APÊNDICE A

Invariância de calibre

Da eletrostática sabemos que cargas de igual sinal atraem-se e cargas de sinal contrário repelem-se entre si. De forma similar, os materiais magnéticos contam com dois pólos, pólo norte e pólo sul, onde pólos contrários atraem-se e pólos iguais repelem-se. No entanto, pólos magnéticos existem aos pares, ou seja, até agora não foi descoberta a existência individual de um pólo (monopólos magnéticos). Isto fica em evidência no fato da divergência do campo magnético ser sempre igual a zero, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, o que permite expressar o campo magnético como o rotacional de um potencial vetorial,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (\text{A.1})$$

onde \vec{A} é conhecido como o potencial vetor. Porém, a escolha deste potencial vetor não é única, já que tanto \vec{A} , como $\vec{A} + \nabla\chi$, satisfazem a equação (A.1), onde χ é uma função bem comportada.

Por outro lado, o campo elétrico está relacionado com o campo magnético mediante a equação de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.2})$$

Usando a notação do potencial vetor e reagrupando termos, temos,

$$\nabla \times \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0, \quad (\text{A.3})$$

cuja solução pode ser expressa como o gradiente de uma função escalar φ conhecida como potencial escalar, i.e.,

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi. \quad (\text{A.4})$$

O campo elétrico não pode ser modificado com a escolha do potencial vetor. Portanto, devem-se fazer as transformações

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \chi, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (\text{A.5})$$

A transformação sofrida por \vec{A} é conhecida como transformação de calibre (gauge). Os campos elétricos e magnéticos não são alterados com a escolha do potencial vetor de acordo com as transformações (A.5), ou seja, são invariantes de calibre.

Para que as equações de GL sejam invariantes de calibre, precisa-se também modificar a fase do parâmetro de ordem da seguinte forma

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{2e}{\hbar c} \chi. \quad (\text{A.6})$$

Pode-se observar que, de acordo com as transformações (A.5) e (A.6) as equações de GL não são modificadas e, portanto, são invariantes de calibre.

APÊNDICE B

Publicações

- Vortex-antivortex states in nanostructured superconductor-ferromagnet hybrids, Juan C. Piña, Miguel A. Zorro, and Clécio C. de Souza Silva, *Physica C* **470**, 762 (2010)
- Stability of fractional vortex state in a two-band mesoscopic superconductor, Juan C. Piña, Clécio C. de Souza Silva, and Milorad V. Milošević, *Physical Review B* **86**, 024512 (2012)

Referências Bibliográficas

- [1] E. H. Brandt and M. P. Das. Attractive vortex interaction and the intermediate-mixed state of superconductors. J. Supercond. Nov. Magn., 24:57, 2011.
- [2] J. Nagamatsu, N. Nakagawa, T. Muranaka, Y. Zenitani, and J. Akimitsu. Superconductivity at 39 K in magnesium diboride. Nature (London), 410:63, 2001.
- [3] H. J. Choi, D. Roundy, H. Sun, M. Cohen, and S. Louie. The origin of the anomalous superconducting properties of MgB₂. Nature (London), 418:758, 2002.
- [4] C. Ren, Zhao-Sheng Wang, Hui-Qian Luo, H. Yang, L. Shan, and Hai-Hu Wen. Evidence for two energy gaps in superconducting Ba_{0.6}K_{0.4}Fe₂As₂ single crystals and the breakdown of the Uemura plot. Phys. Rev. Lett., 101:257006, 2008.
- [5] S. N. Putilin, E. V. Antipov, A. M. Abakumov, M. G. Rozova, K. A. Lokshin, D. A. Pavlov, A. M. Balagurov, D. V. Sheptyakov, and M. Marezio. Phys. C, 338:52, 2000.

-
- [6] A. Hoffmann, P. Prieto, and I. K. Schuller. Periodic vortex pinning with magnetic and nonmagnetic dots: The influence of size. Phys. Rev. B, 61:6958, 2000.
- [7] C. L. Lima and C. C. de Souza Silva. Dynamics of vortex-antivortex matter in nanostructured ferromagnet-superconductor bilayers. Phys. Rev. B, 80:054514, 2009.
- [8] V. Milošević and F. M. Peeters. Vortex-antivortex nucleation in superconducting films with arrays of in-plane dipoles. Physica C, 437:20, 2006.
- [9] M. Lange, M. J. Van Bael, Y. Bruynseraede, and V. V. Moshchalkov. Nanoengineered magnetic-field-induced superconductivity. Phys. Rev. Lett., 90:197006, 2003.
- [10] H. K. Onnes. The resistance of pure mercury at helium temperatures. Leiden Comm, 122b:124, 1911.
- [11] W. Meissner and R. Ochsenfeld. Ein neuer effekt bei eintritt der supra-leitfähigkeit. Naturwiss., 21:787, 1933.
- [12] F. London and H. London. The electromagnetic equations of the superconductor. Proc. Roy. Soc., A149:71, 1935.
- [13] V. L. Ginzburg and L. D. Landau. Zh. Eksp. Teor. Fiz., 20:1064, 1950.
- [14] A. A. Abrikosov. Magnetic properties of superconductors of the second group. Sov. Phys. JETP, 5:1174, 1957.
- [15] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. Phys. Rev., 108:1175, 1957.
- [16] J. G. Bednorz and K. A. Müller. Possible high T_c superconductivity in the Ba-La-Cu-O system. Z. Phys. B, 64:189, 1986.

-
- [17] I. V. Grigorieva, W. Escoffier, J. Richardson, L. Y. Vinnikov, S. Dubonos, and V. Oboznov. Direct observation of vortex shells and magic numbers in mesoscopic superconducting disks. Phys. Rev. Lett., 96:077005, 2006.
- [18] H. J. Zhao, V. R. Misko, F. M. Peeters, V. Oboznov, S. V. Dubonos, and I. V. Grigorieva. Vortex states in mesoscopic superconducting squares: Formation of vortex shells. Phys. Rev. B, 78:104517, 2008.
- [19] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx, and V. V. Moshchalkov. Dipole-induced vortex ratchets in superconducting films with arrays of micromagnets. Nature (London), 408:833, 2000.
- [20] J. I. Martín, M. Vélez, J. Nogués, and I. K. Schuller. Flux pinning in a superconductor by an array of submicrometer magnetic dots. Phys. Rev. Lett., 79:1929, 1997.
- [21] Y. Jaccard, J. I. Martín, M. C. Cyrille, M. Vélez, J. L. Vicent, and I. K. Schuller. Magnetic pinning of the vortex lattice by arrays of submicrometric dots. Phys. Rev. B, 58:8232, 1998.
- [22] D. J. Priour Jr and H. A. Fertig. Vortex states of a superconducting film from a magnetic dot array. Phys. Rev. Lett., 93:057003, 2004.
- [23] M. V. Milošević and F. M. Peeters. Vortex-antivortex lattices in superconducting films with magnetic pinning arrays. Phys. Rev. Lett., 93:267006, 2004.
- [24] M. V. Milošević and F. M. Peeters. Vortex-antivortex nucleation in magnetically nanotextured superconductors: Magnetic-field-driven and thermal scenarios. Phys. Rev. Lett., 94:227001, 2005.
- [25] V. V. Moshchalkov, M. Menghini, T. Nishio, Q. H. Chen, A. V. Silhanek, V. H. Dao, L. F. Chibotaru, N. D. Zhigadlo, and J. Karpinski. Type-1.5 superconductivity. Phys. Rev. Lett., 102:117001, 2009.

-
- [26] E. Maxwell. Isotope effect in the superconductivity of mercury. Phys. Rev., 78:477, 1950.
- [27] H. A. Boorse. Superconducting electronic specific heats, the "exponential law," and the Bardeen, Cooper, Schrieffer theory. Phys. Rev. Lett., 2:391, 1959.
- [28] P. Townsend and J. Sutton. Investigation by electron tunneling of the superconducting energy gaps in Nb, Ta, Sn, and Pb. Phys. Rev., 128:591, 1962.
- [29] L. P. Gor'kov. Microscopic derivation of the Ginzburg-Landau equations in the theory of superconductivity. Sov. Phys. JETP, 9:1364, 1959.
- [30] N. B. Kopnin. Introduction to Ginzburg-Landau and Gross-Pitaevskii theories for superconductors and superfluids. Journal of Low Temperature, 129:219, 2002.
- [31] L. Kramer and R. J. Watts-Tobin. Theory of dissipative current-carrying states in superconducting filaments. Phys. Rev. Lett., 40:1041, 1978.
- [32] H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles Jr., and J. V. Waszczak. Scanning-tunneling-microscope observation of the abrikosov flux lattice and the density of states near and inside a fluxoid. Phys. Rev. Lett., 62:214, 1989.
- [33] J. B. Ketterson and S. N. Song. Introduction to superconductivity. Cambridge University Press, 1999.
- [34] P. D. Gennes. Superconductivity of metals and alloys. W. A. Benjamin, Inc., 1996.
- [35] A. Kanda, B. J. Baelus, F. M. Peeters, K. Kadowaki, and Y. Ootuka. Experimental evidence for giant vortex states in a mesoscopic superconducting disk. Phys. Rev. Lett., 93:257002, 2004.

-
- [36] E. Sardella, A. L. Malvezzi, P. N. Lisboa-Filho, and W. A. Ortiz. Temperature-dependent vortex motion in a square mesoscopic superconducting cylinder: Ginzburg-Landau calculations. Phys. Rev. B, 74:014512, 2006.
- [37] N. Verellen, A. V. Silhanek, W. Gillijns, V. V. Moshchalkov, V. Metlushko, F. Gozzini, and B. Ilic. Switchable magnetic dipole induced guided vortex motion. Appl. Phys. Lett., 93:022507, 2008.
- [38] V. V. Moshchalkov, M. Baert, V. V. Metlushko, E. Rosseel, M. J. Van Bael, and K. Temst. Magnetization of multiple-quanta vortex lattices. Phys. Rev. B, 54:7385, 1996.
- [39] A. V. Silhanek, S. Raedts, M. Lange, and V. V. Moshchalkov. Field-dependent vortex pinning strength in a periodic array of antidots. Phys. Rev. B, 67:064502, 2003.
- [40] D. J. Morgan and J. B. Ketterson. Asymmetric flux pinning in a regular array of magnetic dipoles. Phys. Rev. Lett., 80:3614, 1998.
- [41] M. J. Van Bael, K. Temst, V. V. Moshchalkov, and Y. Bruynseraede. Magnetic properties of submicron Co islands and their use as artificial pinning centers. Phys. Rev. B, 59:14674, 1999.
- [42] M. J. Van Bael, J. Bekaert, K. Temst, L. Van Look, V. V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, G. D. Howells, A. N. Grigorenko, S. J. Bending, and G. Borghs. Local observation of field polarity dependent flux pinning by magnetic dipoles. Phys. Rev. Lett., 86:155, 2001.
- [43] A. Belkin, V. Novosad¹, M. Iavarone, J. Pearson, and G. Karapetrov. Superconductor/ferromagnet bilayers: Influence of magnetic domain structure on vortex dynamics. Phys. Rev. B, 77:180506(R), 2008.
- [44] G. Karapetrov, J. Fedor, M. Iavarone, D. Rosenmann, and W. K. Kwok. Direct observation of geometrical phase transitions in mesoscopic su-

-
- perconductors by scanning tunneling microscopy. Phys. Rev. Lett., 95:167002, 2005.
- [45] J. E. Villegas, K. D. Smith, L. Huang, Y. Zhu, R. Morales, and I. K. Schuller. Switchable collective pinning of flux quanta using magnetic vortex arrays: Experiments on square arrays of Co dots on thin superconducting films. Phys. Rev. B, 77:134510, 2005.
- [46] W. Gillijns, A. V. Silhanek, and V. V. Moshchalkov. Tunable field-induced superconductivity. Phys. Rev. B, 74:220509(R), 2006.
- [47] C. C. de Souza Silva, A. V. Silhanek, J. Van de Vondel, W. Gillijns, V. Metlushko, B. Ilic, and V. V. Moshchalkov. Dipole-induced vortex ratchets in superconducting films with arrays of micromagnets. Phys. Rev. Lett., 98:117005, 2007.
- [48] H. Suhl, B. T. Matthias, and L. R. Walker. Bardeen-Cooper-Schrieffer theory of superconductivity in the case of overlapping bands. Phys. Rev. Lett., 3:552, 1959.
- [49] Edição especial da Physica C. Phys. C, 385, 2003.
- [50] W. L. McMillan. Phys. Rev., 167:331, 1968.
- [51] D. K. Finnemore, J. E. Ostenson, S. L. Bud'ko, G. Lapertot, and P. C. Canfield. Thermodynamic and transport properties of superconducting Mg¹⁰B₂. Phys. Rev. Lett., 86:2420, 2001.
- [52] J. M. An and W. E. Pickett. Superconductivity of MgB₂: covalent bonds driven metallic. Phys. Rev. Lett., 86:4366, 2001.
- [53] J. Kortus, I. I. Mazin, K. D. Belashchenko, V. P. Antropov, and L. L. Boyer. Superconductivity of metallic boron in MgB₂. Phys. Rev. Lett., 86:4656, 2001.

-
- [54] Y. Bugoslavsky, G. K. Perkins, X. Qi, L. F. Cohen, and A. D. Caplin. Vortex dynamics in superconducting MgB₂ and prospects for applications. Nature, 410:563, 2001.
- [55] S. L. Bud'ko, G. Lapertot, C. Petrovic, C. E. Cunningham, N. Anderson, and P. C. Canfield. Boron isotope effect in superconducting MgB₂. Phys. Rev. Lett., 86:1877, 2001.
- [56] Y. Wang, T. Plackowski, and A. Junod. Specific heat in the superconducting and normal state (2-300 K, 0-16 T), and magnetic susceptibility of the 38 K superconductor MgB₂. Physica C, 179:355, 2001.
- [57] F. Bouquet, R. A. Fisher, N. E. Phillips, D. G. Hinks, and J. D. Jorgensen. Specific heat of Mg¹¹B₂: evidence for a second energy gap. Phys. Rev. Lett., 87:047001, 2001.
- [58] H. D. Yang, J.-Y. Lin, H. H. Li, F. H. Hsu, C. J. Liu, S.-C. Li, R.-C. Yu, and C.-Q. Jin. Order parameter of MgB₂: A fully gapped superconductor. Phys. Rev. Lett., 87:167003, 2001.
- [59] M. Iavarone et al. Two-band superconductivity in MgB₂. Phys. Rev. Lett., 89:187002, 2002.
- [60] P. C. Canfield and G. W. Crabtree. Magnesium diboride: Better late than never. Phys. Today, 56:34, 2003.
- [61] W. Pickett. Mind the double gap. Nature, 418:733, 2002.
- [62] L. Komendová, Y. Chen, A. A. Shanenkov, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Two-band superconductors: Hidden criticality deep in the superconducting state. Phys. Rev. Lett., 108:207002, 2012.
- [63] Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, and H. Hosono. Iron-based layered superconductor La[O_{1-x}F_x]FeAs (x = 0.05-0.12) with T_c = 26 K. J. Am. Chem. Soc., 130:3296, 2008.

-
- [64] X. H. Chen, T. Wu, G. Wu, R. H. Liu, H. Chen, and D. F. Fang. Superconductivity at 43 K in $\text{SmFeAsO}_{1-x}\text{F}_x$. Nature (London), 453:761, 2008.
- [65] F. Hunte, J. Jaroszynski, A. Gurevich, D. C. Larbalestier, R. Jin, A. S. Sefat, M. A. McGuire, B. C. Sales, D. K. Christen, and D. Mandrus. Two-band superconductivity in $\text{LaFeAsO}_{0.89}\text{F}_{0.11}$ at very high magnetic fields. Nature (London), 453:903, 2008.
- [66] G. Mu, H. Luo, Z. Wang, L. Shan, C. Ren, and Hai-Hu Wen. Low temperature specific heat of the hole-doped $\text{Ba}_{0.6}\text{K}_{0.4}\text{Fe}_2\text{As}_2$ single crystals. Phys. Rev. B, 79:174501, 2009.
- [67] L. Malone, J. D. Fletcher, A. Serafin, A. Carrington, N. D. Zhigadlo, Z. Bukowski, S. Katrych, and J. Karpinski. Magnetic penetration depth of single-crystalline $\text{SmFeAsO}_{1-x}\text{F}_y$. Phys. Rev. B, 79:140501(R), 2009.
- [68] L. F. Chibotaru, V. H. Dao, and A. Ceulemans. Thermodynamically stable noncomposite vortices in mesoscopic two-gap superconductors. EPL, 78:47001, 2007.
- [69] L. F. Chibotaru and V. H. Dao. Stable fractional flux vortices in mesoscopic superconductors. Phys. Rev. B, 81:020502(R), 2010.
- [70] R. Geurts, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Vortex matter in mesoscopic two-gap superconducting disks: Influence of Josephson and magnetic coupling. Phys. Rev. B, 81:214514, 2010.
- [71] A. Chaves, L. Komendová, M. V. Milošević, J. S. Andrade Jr., G. A. Farias, and F. M. Peeters. Conditions for nonmonotonic vortex interaction in two-band superconductors. Phys. Rev. B, 83:214523, 2011.
- [72] M. E. Zhitomirsky and V. H. Dao. Ginzburg-Landau theory of vortices in a multigap superconductor. Phys. Rev. B, 69:054508, 2004.

-
- [73] V. G. Kogan and J. Schmalian. Ginzburg-Landau theory of two-band superconductors: Absence of type-1.5 superconductivity. Phys. Rev. B, 83:054515, 2011.
- [74] L. Komendová, M. V. Milošević, A. A. Shanenko, and F. M. Peeters. Different length scales for order parameters in two-gap superconductors: Extended Ginzburg-Landau theory. Phys. Rev. B, 84:064522, 2011.
- [75] A. A. Shanenko, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Extended Ginzburg-Landau formalism for two-band superconductors. Phys. Rev. Lett., 106:047005, 2011.
- [76] M. Silaev and E. Babaev. Microscopic derivation of two-component Ginzburg-Landau model and conditions of its applicability in two-band systems. Phys. Rev. B, 85:134514, 2012.
- [77] G. C. Buscaglia, Carlos Bolech, and A. López. On the numerical solution of the time-dependent Ginzburg-Landau equations in multiply connected domains. Connectivity and Superconductivity, 2000.
- [78] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. Numerical recipes in fortran - the art of scientific Computing, 2 ed. Cambridge Univ. Press, 1992.
- [79] W. F. Ames. Numerical methods for partial differential equations, 2 ed. Academic Press, San Diego, 1997.
- [80] M. M. Doria, J. E. Gubernatis, and D. Rainer. Virial theorem for Ginzburg-Landau theories with potential applications to numerical studies of tipe-II superconductors. Phys. Rev. B, 39:9573, 1989.
- [81] A. V. Silhanek, W. Gillijns, M. V. Milošević, A. Volodin, V. V. Moshchalkov, and F. M. Peeters. Optimization of superconducting critical parameters by tuning the size and magnetization of arrays of magnetic dots. Phys. Rev. B, 76:100502, 2007.

-
- [82] L. N. Bulaevskii, E. M. Chudnovsky, and M. P. Maley. Magnetic pinning in superconductor-ferromagnet multilayers. Appl. Phys. Lett., 76:2594, 2000.
- [83] M. V. Milošević, G. R. Berdiyrov, and F. M. Peeters. Stabilized vortex-antivortex molecules in a superconducting microdisk with a magnetic nanodot on top. Phys. Rev. B, 75:052502, 2007.
- [84] M. Iavarone, A. Scarfato, F. Bobba, M. Longobardi, G. Karapetrov, V. Novosad, V. Yefremenko, F. Giubileo, and A. M. Cucolo. Imaging the spontaneous formation of vortex-antivortex pairs in planar superconductor/ferromagnet hybrid structures. Phy. Rev. B, 84:024506, 2011.
- [85] I. F. Lyuksyutov and V. L. Pokrovsky. Ferromagnet-superconductor hybrids. Adv. Phys., 54:67, 2005.
- [86] A. Yu Aladyshkin, A. V. Silhanek, W. Gillijns, and V. V. Moshchalkov. Nucleation of superconductivity and vortex matter in superconductor-ferromagnet hybrids. Supercond. Sci. Technol., 22:053001, 2009.
- [87] J. Van de Vondel, A. V. Silhanek, V. Metlushko, P. Vavassori, B. Ilic, and V. V. Moshchalkov. Self-organized mode-locking effect in superconductor/ferromagnet hybrids. Phys. Rev. B, 79:054527, 2009.
- [88] A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, and P. P. Vysheslavtsev. Vortex states and magnetization curve of square mesoscopic superconductors. Phys. Rev. B, 65:140503, 2000.
- [89] C. Carballeira, V. V. Moshchalkov, L. F. Chibotaru, and A. Ceulemans. Multiquanta vortex entry and vortex-antivortex pattern expansion in a superconducting microsquare with a magnetic dot. Phys. Rev. Lett, 95:237003, 2005.
- [90] J. C. Pina, M. A. Zorro, and C. C. de Souza Silva. Vortex-antivortexstates in nanostructured superconductor-ferromagnet hybrids. Physica C, 470:762, 2010.

-
- [91] G. R. Berdiyrov, M. V. Milošević, and F. M. Peeters. Novel commensurability effects in superconducting films with antidot arrays. Phys. Rev. Lett., 96:207001, 2006.
- [92] M. Baert, V. V. Metlushko, R. Jonckheere, V. V. Moshchalkov, and Y. Bruynseraede. Composite flux-line lattices stabilized in superconducting films by a regular array of artificial defects. Phys. Rev. Lett., 74:3269, 1995.
- [93] E. Babaev. Vortices with fractional flux in two-gap superconductors and in extended Faddeev model. Phys. Rev. Lett., 89:067001, 2002.
- [94] E. Babaev and M. Speight. Semi-meissner state and neither type-I nor type-II superconductivity in multicomponent superconductors. Phys. Rev. B, 72:180502, 2005.
- [95] Y. M. Cho and P. M. Zhang. Topological objects in two-gap superconductor. Eur. Phys. J. B, 65:155–178, 2008.
- [96] M. Silaev and E. Babaev. Microscopic theory of type-1.5 superconductivity in multiband systems. Phys. Rev. B, 84:094515, 2011.
- [97] V. G. Kogan, C. Martin, and R. Prozorov. Superfluid density and specific heat within a self-consistent scheme for a two-band superconductor. Phys. Rev. B, 80:014507, 2009.