UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

THIAGO BANANEIRA CASTRO E SILVA

SAÚDE E CRESCIMENTO ENDÓGENO ÓTIMO

Recife
2011

THIAGO BANANEIRA CASTRO E SILVA

SAÚDE E CRESCIMENTO ENDÓGENO ÓTIMO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Pernambuco como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Economia

Orientador: Prof. Dr. Nelson Leitão Paes

Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre Stamford da Silva

Recife
2011

Catalogação na Fonte
Bibliotecária Ângela de Fátima Correia Simões, CRB4-773

S586s Silva, Thiago Bananeira Castro e
Saúde e crescimento endógeno ótimo / Thiago Bananeira Castro e Silva. - Recife : O Autor, 2011.
39 folhas : il. 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Nelson Leitão Paes e Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre Stamford da Silva.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCSA. Economia, 2011.
Inclui bibliografia e anexos.

1. Economia da saúde. 2. Crescimento econômico. 3. Modelos macroeconômicos. I. Paes, Nelson Leitão (Orientador). II. Silva, Alexandre Stamford da (Co-orientador). III. Título.

338.9 CDD (22.ed.) UFPE (CSA 2012 – 102)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA
PIMES/PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

PARECER DA COMISSÃO EXAMINADORA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO MESTRADO ACADÊMICO EM ECONOMIA DE

THIAGO BANANEIRA CASTRO E SILVA

A Comissão Examinadora composta pelos professores abaixo, sob a presidência do primeiro, considera o aluno Thiago Bananeira Castro e Silva **APROVADO**.

Recife, 23/08/2011

Prof. Dr. Nelson Leitão Paes
Orientador

Prof. Dr. Alexandre Stamford da Silva
Examinador Interno e Co-orientador

Prof. Dr. Maurício Assuero Lima de Freitas
Examinador Externo - PROPAD/UFPE

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à toda minha família e, especialmente, à minha mãe Márcia, ao meu pai Ademir, à minha avó Joujou, à minha madrinha Nazaré e à minha tia Vera, pelo suporte e apoio incondicionais sem os quais esta caminhada teria sido muito mais tortuosa e cujos conselhos sempre levarei comigo. Espero que este momento de realização possa de alguma maneira confortá-los pelos momentos em que a distância não permitiu que estivéssemos juntos.

Agradeço ainda à minha sempre compreensiva companheira Fernanda, por ser minha eterna fonte de inspiração e meu porto seguro em dias de tormenta. Espero podermos juntos alçar voos que nos aproximem cada vez mais dos objetivos que temos traçado para o nosso futuro.

Agradeço também aos docentes do Programa de Pós Graduação em Economia da Universidade Federal de Pernambuco, principalmente aos Professores Nelson Paes e Alexandre Stamford, que com afinco e dedicação forjaram parte significante do caminho que segui rumo a um melhor entendimento sobre os fenômenos econômicos que tanto me fascinam. À eles, dedico meus sinceros agradecimentos pelas valiosas sugestões durante a elaboração deste trabalho.

Por fim, gostaria de agradecer aos amigos Guilherme, Marcelo, Leandro, Luiz e Rafael por dividirem não só discussões valiosas acerca deste trabalho e dos mais variados temas mas também o companheirismo às vezes esquecido no ritmo frenético da vida moderna.

Resumo

Este trabalho analisa a influência da saúde no crescimento econômico, ampliando a visão tradicional na qual a relação positiva observada entre as duas variáveis é vista apenas como resultado de um efeito renda, de forma a apresentar a saúde como um importante determinante do crescimento. Para atingir este objetivo, além de uma revisão acerca desta relação, elabora-se um modelo utilizando o arcabouço da teoria do crescimento endógeno, onde saúde e crescimento são complementares na perspectiva da oferta e substitutos na perspectiva da demanda. Os principais resultados são: a) a morbidade influencia negativamente a alocação de horas de trabalho no setor de conhecimento e positivamente a alocação dessas horas no setor de saúde e b) a influência da morbidade sobre o crescimento da economia depende fundamentalmente do valor do parâmetro B relacionado à produtividade do setor de saúde.

Palavras-Chave: Economia da Saúde, Crescimento Econômico, Modelos Macroeconômicos

Abstract

This work analyzes the influence of health on economic growth, expanding the traditional view that the positive relationship between the two variables is only a result of an income effect, in order to present health as an important growth determinant. For this purpose, beyond a review of that relationship, we formulate a model using as background the endogenous growth theory, in which health and growth are complementary from a supply perspective and substitute from a demand one. Our main findings are: a) mobidity influences negatively the allocation of labour hours to the knowledge sector and positively to the health sector and b) the influence of morbidity on growth depends fundamentaly on the valeu of the parameter B related to the productivity of the health sector.

Key Words: Health Economics, Economic Growth, Macroeconomic Models

Sumário

Introdução

Atualmente os gastos com saúde das economias desenvolvidas se situam por volta de 9% do PIB, enquanto os gastos com educação estão por volta de 7%[1]. Os gastos em educação são geralmente justificados pela idéia de que a educação contribui de maneira decisiva para o crescimento econômico. Já os gastos com saúde têm sido motivo de inquietação a algum tempo, especialmente por causa do caráter aparentemente autônomo e permanente do aumento de seus custos (MUYSKEN; VAN ZON, 2001).

Por muito tempo, a relação positiva amplamente observada entre gastos com saúde e crescimento foi considerada o resultado de um forte efeito renda. No entanto, gradualmente os economistas têm reconhecido que a relação entre saúde e crescimento econômico não é somente guiada pela demanda, mas que a saúde é também um importante determinante do crescimento.[2]

Como aponta Ashraf, Lester e Weil (2008), os economistas têm identificado vários canais através dos quais a saúde afeta o nível de produto de um país. Primeiro, parece existir um efeito direto sobre a produtividade dos indivíduos, ou seja, pessoas saudáveis tendem a trabalhar mais e melhor. Existem ainda inúmeros canais indiretos: (i) melhorias na saúde aumentam os incentivos para adquirir educação, uma vez que este investimento pode ser amortizado ao longo de um período de tempo maior; (ii) estudantes saudáveis faltam menos às aulas e possuem funções conginitvas mais apuradas; (iii) reduções nas taxas de mortalidade podem levar as pessoas a poupar mais para a aposentadoria, elevando os níveis de investimento e o nível de capital por trabalhador.[3]

Já o efeito de melhorias na saúde sobre o crescimento da população é ambíguo. No curto prazo, maiores taxas de sobrevivência entre as crianças podem causar um aumento na taxa de crescimento da população. No entanto, considerando horizontes mais longos, a diminuição da mortalidade infantil pode levar a uma queda da fecundidade, de forma que a taxa de reprodução líquida caia.

Vários trabalhos abordam a provisão de serviços relacionados a saúde de uma perspectiva

---

[1]Ver OECD, 2009.

[2]Como afirmam Muysken e van Zon (2003), esse reconhecimento tem se dado com base em estudos empíricos, primeiramente para economias em desenvolvimento (ver STRAUSS; THOMAS, 1998, para uma revisão) e depois cobrindo as economias desenvolvidas (KNOWLES; OWEN (1995, 1997); BHARGAVA et al., 2001; MCDONALD, 2002; WEBBER, 2002.)

[3]Existe também a questão levantada por Acemoglu, Johnson e Robison (2001). Os autores argumentam que a presença de um ambiente com altas taxas de mortalidade em certos lugares do mundo levou os colonizadores europeus a criar instituições com caráter extrativo, o que acabou por reduzir os níveis de produto até hoje.

microeconômica, ignorando seu efeito sobre a produtividade como um argumento adicional em favor da provisão desses serviços (MUYSKEN; VAN ZON, 2003). Estes trabalhos também não reconhecem a possível interação entre saúde e o processo de acumulação de conhecimento como uma força por trás do crescimento econômico.

Em contrapartida, este trabalho tem por objetivo examinar a relação entre saúde e crescimento econômico do ponto de vista macroeconômico. Para tanto, além de uma revisão sobre o assunto, será elaborado um modelo analítico utilizando a ferramenta matemática conhecida como controle ótimo, dada a característica intertemporal do problema. Assim, espera-se contribuir na discussão acerca da influência da saúde sobre certas variáveis econômicas como a acumulação de conhecimento e a taxa de crescimento da economia.

Justificativa

Como apontam Aísa e Pueyo (2004), não existe consenso na literatura empírica sobre o sinal do efeito de uma extensão da longevidade no ritmo do crescimento econômico. Segundo os autores, a dificuldade de se analisar esta relação vem da bidirecionalidade envolvida na questão: o crescimento econômico afeta a longevidade, e a longevidade, por sua vez, influencia a alocação de recursos que causam o crescimento.

Também é grande a carência de modelos teóricos com uma estrutura sólida que integre saúde e crescimento econômico. Enquanto a relação entre crescimento e educação tem sido intensamente investigada, a ligação entre saúde e crescimento tem sido alvo de pouca pesquisa na literatura teórica. Gallego (2000) atribui esse fato à falta de interação entre as contribuições da economia da saúde e da teoria do crescimento econômico e ao viés em relação à importância da educação como determinante do crescimento, o que ocorre, basicamente, devido à dificuldade de desagregar o impacto das duas variáveis no produto.

Assim, este trabalho justifica-se por contribuir na integração da economia da saúde e da teoria do crescimento econômico, como fazem Muysken (2001), Muysken (2003), Aísa (2006), Agénor (2008), Freitas (2009), entre outros. Dessa forma pretende-se que os resultados possibilitem uma melhor compreensão das implicações da saúde no crescimento econômico.

Objetivos

O objetivo deste trabalho é examinar a relação entre saúde e crescimento econômico do ponto de vista macroeconômico. Mais especificamente, objetiva-se revisar a literatura sobre tal relação, elaborar um modelo teórico no contexto dos modelos de crescimento endógenos e interpretar a relação da saúde com certas variáveis econômicas, entre elas a acumulação de conhecimento e a taxa de crescimento da economia.

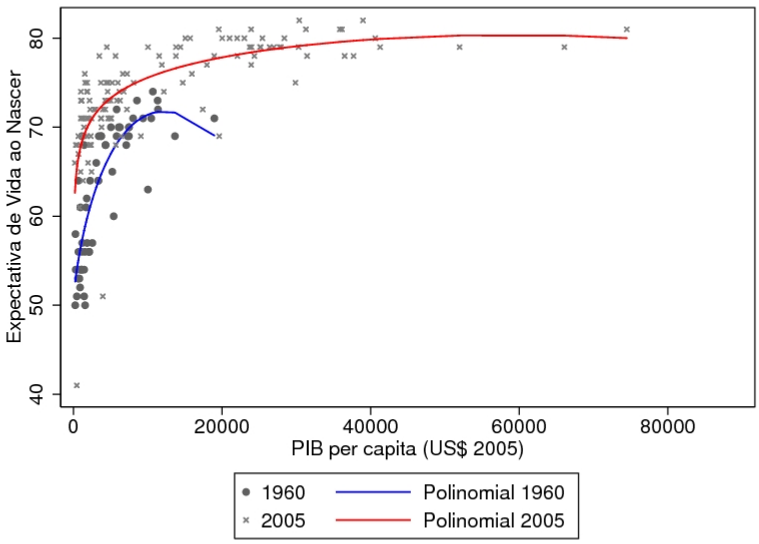
1 A Relação entre Saúde e Crescimento Econômico

1.1 Expectativa de Vida, Escolaridade e Fertilidade

A renda é, normalmente, vista como a variável conduzindo ou resumindo mudanças nas dimensões relevantes do bem-estar. Nessa perspectiva, ganhos de renda *per capita* aumentam a nutrição e a demanda por saúde, o que reduz as taxas de mortalidade. Ganhos na renda também mudam o *trade-off* entre o número e o nível de educação das crianças, reduzindo a fertilidade e aumentando o investimento em capital humano (SOARES, 2005).

Embora correta, esta visão fornece um quadro incompleto da realidade. As Figuras 1, 2 e 3 mostram[4] que, para níveis constantes de renda, a expectativa de vida e a escolaridade vêm aumentando e a fertilidade diminuindo. Além disso, como apontado por Soares (2005), mantendo a expectativa de vida constante, tanto a fertilidade quanto a escolaridade têm se mantido praticamente constantes, o que indica a existência de uma dimensão de mudança na expectativa de vida que não está associada à renda e sim à fertilidade e à escolaridade. Como a fertilidade e a educação são objetos da escolha individual e a expectativa de vida possui um grande componente exógeno, relacionado ao desenvolvimento da tecnologia do setor de saúde, o autor sugere que mudanças exógenas na mortalidade, juntamente com um comportamento estável entre expectativa de vida, escolaridade e fertilidade, pode estar por trás das mudanças observadas.

Figura 1: Relação entre Expectativa de Vida ao Nascer e PIB *per capita*



[4]Os dados para renda, fertilidade e expectativa de vida foram coletados da base de dados *World Development Indicators 2009* do Banco Mundial e os referentes à escolaridade são da base de dados de Barro e Lee (2010). Para nos concentrar em economias com o mesmo regime demográfico, as figuras dizem respeito apenas aos países que já haviam começado a transição demográfica, aqui entendido por serem aqueles países cuja expectativa de vida em 1960 era maior que 50 anos.

Figura 2: Relação entre Taxa de Fertilidade e PIB *per capita*

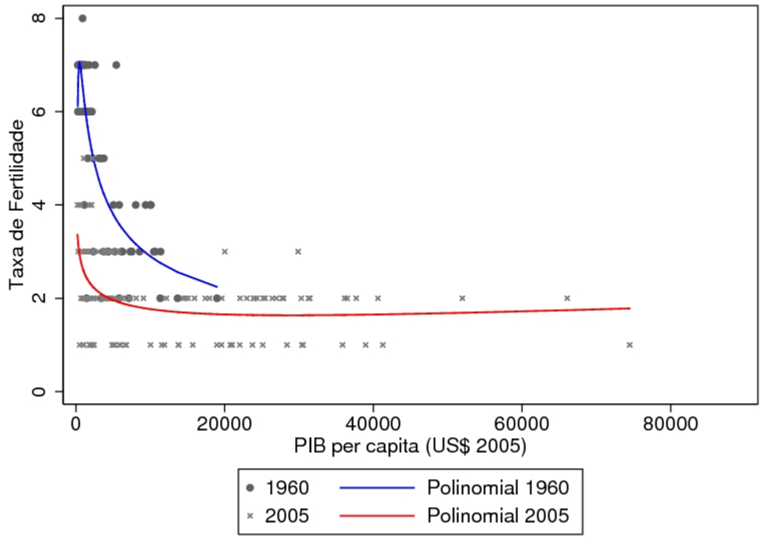
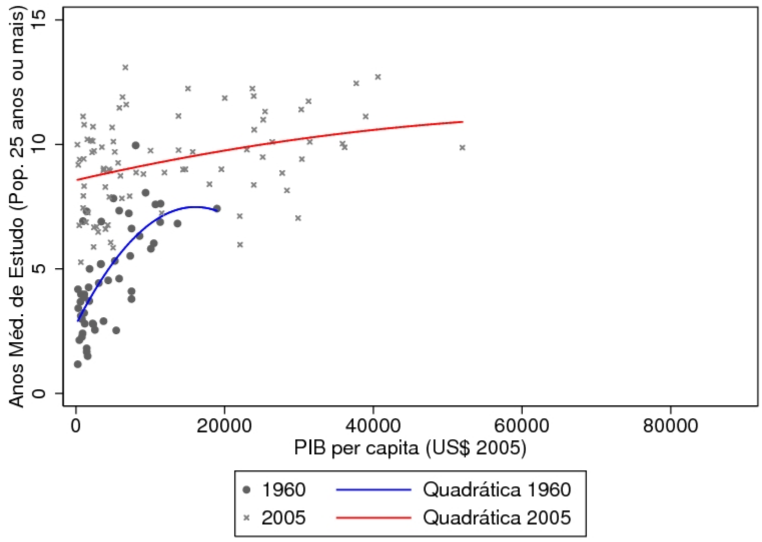


Figura 3: Relação entre Anos Médios de Estudo e PIB *per capita*



A evidência empírica levanta a possiblidade da relação entre redução da mortalidade e fertilidade ser não-monotônica, ou seja, a redução da mortalidade e o consequente aumento da expectativa de vida têm diferentes efeitos dependendo dos seus níveis iniciais. Neste sentido, dois estágios distintos podem ser delineados: (i) em uma situação de alta mortalidade e baixa expectativa de vida, a redução da mortalidade afeta mais fortemente a taxa de mortalidade infantil, aumentando a taxa de fertilidade, num primeiro momento; (ii) num segundo momenro, os pais reconhecem essa mudança, o que pode reduzir a fertilidade no longo prazo, entretanto, uma vez que a expectativa de vida atinja determinado nível, a queda na mortalidade passa a se dar nas idades mais avançadas, e a taxa de fertilidade não é mais afetada (ZHANG; ZHANG; LEE, 2003).

Já a relação entre expectativa de vida e escolaridade parece ser mais direta. Um resultado comum a vários estudos teóricos é que a redução da mortalidade, ao aumentar a expectativa de vida, torna maior o período no qual o investimento em capital humano pode ser recuperado, o que se traduz em maiores taxas de investimento nesse tipo de capital[5]. Esta visão é parcialmente amparada para várias economias[6], embora seu efeito sobre o crescimento seja ambíguo.

De acordo com o que foi exposto, um ponto de partida para explorar uma perspectiva geral da relação entre saúde e crescimento, de modo a integrar, acumulação de conhecimento, saúde e crescimento econômico, parece ser o arcabouço da teoria do crescimento endógeno. Para isso, uma breve revisão faz-se necessária.

1.2 A Teoria do Crescimento Endógeno

O ponto central da teoria do crescimento endógeno é o fato de que o avanço tecnológico envolve a criação de novas ideias, as quais são parcialmente não-rivais e portanto possuem aspectos de bens públicos. Para uma dada tecnologia é razoável assumir retornos constantes de escala nos fatores de produção rivais, como trabalho não-qualificado e capital. Porém, os retornos de escala tendem a ser crescentes se ideias não-rivais são incluídas como fatores de produção. Por sua vez, esses retornos crescentes não são compatíveis com competição perfeita. Além disso, a compensação das ideias antigas de acordo com seu custo marginal de produção, que é igual a zero, não irá oferecer a recompensa apropriada para o esforço de pesquisa subjacente à criação de novas idéias (BARRO, 1996).

Arrow (1962) e Sheshinski (1967) foram pioneiros nesta análise, construindo modelos onde as idéias eram produtos involuntários da produção ou do investimento, um mecanismo descrito como *learning-by-doing*. Nesses modelos, a descoberta de cada agente "transborda" imediatamente para toda a economia, um processo de difusão instantâneo que pode ser tecnicamente factível porque o conhecimento é não-rival. Romer (1986) mostrou mais tarde que o arcabouço competitivo pode ser mantido neste caso para determinar uma taxa de avanço tencnológico de equilíbrio, mas a taxa de crescimento resultante não seria ótima de Pareto. No entanto, ainda segundo Barro (1996), caso as descobertas dependam em parte de esforço de P&D propositasl e as inovações individuais se espalham somente gradualmente, uma teoria descentralizada do progresso tecnológico requer mudanças no arcabouço a fim de incorporar elementos de competição imperfeita.

Um primeiro passo nessa direção ocorreu após um longo período de ostracismo no qual o foco da pesquisa em macroeconomia foi o curto prazo, quando em meados da década de 1980, começou uma nova onda de pesquisa em crescimento. Romer (1986), Lucas (1988) e Rebelo (1991), baseados, respectivamente, nos trabalhos de Arrow (1962), Sheshinski (1967) e

[5]Ehrlich e Lui (1991) mostram, em um modelo de gerações sobrepostas, como aumentos na expectativa de vida diminuem a fertilidade, aumentando o investimento em educação. Meltzer (1992) também acha que reduções na mortalidade podem favorecer o crescimento ao aumentar o investimento em educação.

[6]Miguel e Kremer (2004) e Jayachandran e Lleras-Muney (2009) fornecem evidências microeconômicas que uma saúde melhor aumenta o investimento em capital humano.

Uzawa (1965), criaram modelos em que o crescimento é sustentado pelo fato de que os retornos para um conceito amplo de capital, entendido como uma coleção de fatores de produção acumuláveis, incluindo o capital humano, não são necessariamente decrescentes devido a presença de transbordamento de conhecimento entre os produtores e de externalidades ligadas ao capital humano.

Porém, a incorporação de teorias de P&D e de competição imperfeita na literatura de crescimento só começou com Romer (1987, 1990) e inclui significantes contribuições de Aghion e Howitt (1962) e Grossman e Helpman (1991). Nesse contexto, o avanço tecnológico resulta da atividade de P&D intencional e essa atividade é recompensada por alguma forma de poder de monopólio *ex-post*. Como não há tendência clara de que as ideias se esgotem, então a taxa de crescimento pode se manter constante no longo prazo (BARRO, 1996).

Embora no modelo de Romer (1990) as decisões sejam tomadas por agentes individuais em situações de competição imperfeita ao invés de uma entidade onisciente como em Lucas (1988), como apontado por Muysken (1997), do ponto de vista do planejador social, os modelos de Lucas (1988) e Romer (1990) são matematicamente equivalentes, indicando uma coerência interna entre os trabalhos nessa linha de pesquisa e justificando o uso do modelo de Lucas em certos estudos que tem a saúde como foco. A seguir, uma revisão dos estudos que integram crescimento endógeno e saúde.

1.3 Crescimento Endógeno e Saúde

Segundo Figueiredo, Noronha e Andrade (2003), a relação entre o estado de saúde médio e o estoque de capital humano da economia tem sido a forma mais tradicional de se incorporar a saúde em modelos de crescimento. Dois argumentos, em particular, fortalecem essa abordagem. Primeiro, é provável que, em um nível agregado, a perda de bem-estar individual tenha um impacto na produtividade e na oferta de trabalho, dado que na maioria dos casos os indivíduos afetados permanecem na força de trabalho [7]. Segundo, também é provável que a acumulação de capital humano seja afetada pelo estado de saúde da população, uma vez que elevadas taxas de depreciação do capital humano, as quais podem ser refletidas em níveis mais elevados de mortalidade, seriam um desincentivo ao investimento nesta forma de capital.

Além disso, como observa Grossman (1972) em seu estudo pioneiro, a provisão de saúde requer recursos e, consequentemente, parece haver um *trade-off* direto entre saúde e acumulação de capital humano, uma vez que a expansão do setor de saúde pode promover crescimento através de um aumento na produtividade da população enquanto a contração do setor de saúde também poderia liberar os recursos necessários para promover o crescimento por meio de um aumento nas atividades relacionadas à acumulação de capital humano.

Com o intuito de estudar a relação entre saúde e crescimento, no arcabouço dos modelos

[7] De fato, os resultados de Cole e Neumayer (2006) sugerem que baixos níveis de saúde podem reduzir a produtividade agregada. Dessa forma, segundo os autores, a saúde parece ser um fator chave na existência do persistente subdesenvolvimento de várias partes do mundo

endógenos, Muysken e van Zon (2001) estendem o modelo de Lucas (1988) de modo a integrar ambos os custos e benefícios da saúde no nível macroeconômico. Seu modelo leva em consideração três maneiras às quais a saúde influencia o processo de decisão intertemporal. Primeiro, ela serve de condição *sine qua non* para a provisão de capital humano. Segundo, a provisão de serviços de saúde compete por recursos com a provisão de trabalho alocado na produção e no setor de acumulação de capital humano. Terceiro, a saúde pode gerar utilidade por sí própria. Os autores mostram, então, que diferentes situações de crescimento balanceado são possíveis. Por um lado, uma desaceleração do crescimento pode ser explicada por uma preferência pela saúde que seja positivamente influenciada pelo crescimento da renda *per capita* ou pelo envelhecimento da população. Por outro lado, o investimento em saúde também pode influenciar positivamente o crescimento caso haja uma redução da taxa de desconto e uma elevação na elasticidade intertemporal de substituição face a ganhos estruturais na expectativa de vida. Desse modo, assim como a produtividade do processo de acumulação de capital humano, a produtividade do setor de saúde é um importante determinante do crescimento no modelo.

Em um trabalho posterior, para estudar as implicações de mudanças nos parâmetros demográficos e epidemiológicos, Muysken e van Zon (2003) introduzem dinâmica populacional no arcabouço de Lucas (1988), o que implica em decisões endógenas com respeito à provisão dos serviços de saúde ao lado de uma evolução exógena na morbidade e mortalidade. Os resultados deste trabalho reforçam a idéia de que diferentes trajetórias de crescimento podem surgir de diferentes parâmetros estruturais e que políticas que ajam diretamente sobre estes parâmetros, como por exemplo a produtividade das atividades de cura e prevenção, podem ter impactos semelhantes na produção da saúde e portanto na performance do crescimento.

Com o objetivo de identificar os tipos de interações bidirecionais existentes entre longevidade e crescimento, Aísa e Sanso (2006) integram, em um ambiente de equilíbrio geral, um setor de saúde com a possiblidade de inovações da tecnologia utilizada na área médica e um setor de acumulação de capital humano com decisões endógenas a respeito da saúde e da longevidade. Um dos principais resultados do modelo é o de que a taxa de deterioração biológica é um elemento chave tanto no ritmo do progresso médico como no crescimento. A conclusão parte do fato de que a necessidade de combater a deterioração biológica encoraja a pesquisa na área médica. Inovações médicas, por sua vez, aumentam a saúde das novas gerações, gerando um aumento na sua capacidade produtiva, o que acaba resultando na sustentação do crescimento. Esse crescimento financia o setor de pesquisas médicas e o gasto em saúde, estabelecendo uma inter-relação entre crescimento econômico e inovação na área médica.

Já Agénor (2008) examina as implicações da complementariedade entre saúde e infraestrutura na produção. Um aspecto chave do modelo é que a infraestrutura afeta não somente a produção mas também a oferta de serviços de saúde. Seus resultados indicam que a parcela do gasto do governo em infraestrutura que maximiza o bem-estar é menor do que a que maximiza o crescimento. Dessa forma, enquanto a elasticidade dos serviços de saúde com respeito ao gasto em infraestrutura não for muito alta, restringir a parcela de recursos alocada na infraestrutura para um valor abaixo daquele que maximiza a taxa de crescimento tem um resultado positivo sobre bem-estar, pois o aumento na oferta de serviços de saúde aumenta o consumo, uma vez que, no modelo, saúde e consumo são complementares nas preferências, o que acaba compensando a perda de consumo associada a uma menor taxa de acumulação de capital.

1.4 Evidências Empíricas

Grande parte dos trabalhos empíricos sobre crescimento do começo dos anos 90 incorporaram o capital humano na função de produção, como proposto por Lucas (1988), enfatizando o papel do capital educacional, representado por variáveis como anos de estudo, matrículas escolares e taxa de alfabetização[8].

Ainda que seja razoável que os estudos sobre países industrializados se concentrem na educação e no treinamento como principais aspectos do capital humano, parece haver fortes razões a priori para a inclusão da saúde como importante aspecto do capital humano em estudos para países em desenvolvimento ou *cross sections* que abrangem uma gama de níveis de desenvolvimento[9].

Como observam Figueiredo, Noronha e Andrade (2003), o trabalho pioneiro nesta literatura foi realizado por Knowles e Owen (1995). Os autores estendem a estimação de Mankiw, Romer e Weil (1992) de modo a incluir o que denominam de capital saúde na função de produção. A variável explicada é a taxa de crescimento do PIB no período 1960/85 e a proxi utilizada para o estoque de capital saúde é a expectativa de vida ao nascer. O trabalho apresenta dois resultados importantes: existe uma relação robusta e positiva entre saúde e crescimento econômico; e, uma vez incluso o capital saúde, a variável escolaridade deixa de ser significante, o que aponta certa fragilidade na relação entre capital humano e crescimento.

Vários trabalhos seguiram esta linha de pesquisa, encontrando uma correlação positiva e significante entre saúde e crescimento[10]. No entanto, embora esses estudos mostrem uma forte correlação entre as duas variáveis, a relação causal entre elas só foi explorada muito recentemente.

Acemoglu e Johnson (2007) examinam a relação entre expectativa de vida e renda *per capita* usando uma abordagem semelhante à de Lucas (1988), explorando variações *within-country* para dados pós-1940. Para isso, os autores estudam o período conhecido como

---

[8]Como fazem Romer (1990); Barro (1991); Mankiw, Romer e Weil (1992); Villanueva, Knight e Loayza (1993); Tallman e Wang (1994); e Benhabib e Spiegel (1994).

[9]Como apontam Cole e Neumayer (2006), a incidência de doenças representa um grande fardo para os indivíduos afetados. Enquanto difícil de ser quatificada, a perda de bem-estar pode ser significante, particularmente nas regiões em desenvolvimento, as quais possuem rede de segurança social e sistema de saúde limitados.

[10]Podemos citar os trabalhos de Barro e Sala-i-Martin (1995); Knowles e Owen (1997); Bhargava et al. (2001); Mcdonald e Roberts (2002); Webber (2002)

transição epidemiológica, o qual introduziu choques potencialmente exógenos na expectativa de vida resultantes da introdução de novas tecnologias no combate de diversas doenças. Instrumentalizando as mudanças na expectativa de vida pelos choques de mortalidade, eles acham que aumentos na expectativa de vida tiveram um efeito insignificante ou até negativo no produto *per capita*.[11]

Em oposição a esse resultado, Lorentzen, Mcmillan e Wacziarg (2008), usando uma abordagem semelhante à de Nelson e Phelps (1966)[12], encontram evidências de que horizontes de tempo curtos, induzidos por altas taxas de mortalidade, levam a decisões que produzem benefícios de curto prazo em detrimento de custos de longo prazo. Utilizando diversos instrumentos relacionados a variáveis climáticas e geográficas, os autores apontam que a mortalidade adulta pode explicar a totalidade do déficit de crescimento do continente africano no período que vai de 1960 a 2000 e que os principais canais pelos quais a mortalidade adulta afeta o crescimento são o investimento e a fertilidade.

Já Aghion, Howitt e Murtin (2010) argumentam que combinar as abordagens de Lucas (1988) e Nelson e Phelps (1966) para o capital humano melhora o nosso entendimento sobre a relação entre saúde e crescimento. Combinando os instrumentos para saúde dos dois trabalhos citados acima, os autores encontram que uma maior expectativa de vida, no sentido de maiores níveis ou taxas de acumulação, influenciam positivamente o crescimento.

2 Metodologia

2.1 O Problema do Controle Ótimo

O desenvolvimento da teoria do controle ótimo começou na década de 1950, parcialmente em resposta a vários problemas de diferentes ramos da engenharia e da economia. Apesar da sua origem moderna, a teoria do controle ótimo, do ponto de vista matemático, é uma variante de um dos mais importantes subcampos da matemática, o cálculo das variações (BERKOVITZ, 1976).

Segundo Intriligator (2002), o problema dinâmico da economia é o de alocar recursos escassos entre diferentes finalidades, em um intervalo de tempo que vai do tempo inicial ao tempo final. Em termos matemáticos o problema do controle é o de escolher trajetórias temporais para certas variáveis, chamadas variáveis de controle, de uma dada classe de trajetórias temporais, chamada de conjunto de controle. A escolha das trajetórias temporais para as variáveis de controle implica trajetórias temporais para certas variáveis que descrevem

[11] A explicação dada por Ashraf, Lester e Weil (2008) para essa divergência é a presença de viés de variável omitida e de causalidade reversa naqueles estudos.

[12] O argumento dos autores parte de dois componentes distintos. O primeiro postula que enquanto a fronteira tecnológica reflete a taxa na qual descobertas são feitas, o crescimento da produtividade total dos fatores depende da implementação dessas descobertas. O segundo sugere que a taxa com que o "gap"entre a fronteira tecnológica e o nível atual de produtividade é fechado depende do nível de capital humano. contrariando a visão do capital humano como um insumo no processo de produção.

o sistema, chamadas variáveis de estado, via um conjunto de equações diferenciais, chamadas equações de movimento. Além disso, as trajetórias das variáveis de controle são escolhidas de forma a maximizar um dado funcional que depende das trajetórias das variáveis de controle e estado, chamado funcional objetivo. De outra forma:

$$
\begin{aligned}
\max_{\{\mathbf{u}(t)\}} \; & J = \int_{t_0}^{t_1} I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)dt + F(\mathbf{x_1}, t_1) \\
s.a. \; & \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\
& \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\
& (\mathbf{x}(t), t) \in \mathbf{T} \text{ em } t = t_1 \\
& \{(\mathbf{u}(t)\} \in \mathbf{U}
\end{aligned}
$$

onde $\mathbf{u}(t)$ é um vetor r-dimencional de variáveis de controle, $r \in \mathbb{N}$; $\mathbf{x}(t)$ é um vetor n-dimencional de variáveis estado, onde $n \in \mathbb{R}$; $\{\mathbf{u}(t)\}$ é a trajetória de controle associda a $\mathbf{u}(t)$, uma função-valor contínua no tempo[13]; $\mathbf{U}$ é o conjunto de controle, um conjunto de todas as trajetórias de controle admissíveis[14]; $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ são as equações de movimento, um conjunto de n equações diferenciais que nos dá a taxa de variação no tempo de cada variável de estado como um função das variáveis de estado, controle e do tempo; J é o funcional objetivo, o qual relaciona as trajetórias de controle a pontos na linha dos reais; $I(\cdot)$ é chamada função intermediária, pois mostra com o funcional depende das trajetórias das variáveis de controle, estado e do tempo, dentro do intervalo temporal relevante; $F(\cdot)$ é chamada função final, e mostra como o funcional depende do estado e tempo terminais; e onde $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ e $(\mathbf{x}(t), t) \in \mathbf{T}$ em $t = t_1$ dizem respeito, respectivamente, ao estado inicial e terminal da economia, e $\mathbf{T}$ é um dado subconjunto de E^{n+1} chamado superfície terminal.

2.2 O Princípio do Máximo

No final dos anos 1950, L. S. Pontryagin e seus alunos V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mishchenko, anunciaram, em uma série de artigos, o que ficou conhecido por Princípio do Máximo de Pontryagin. O princípio é um conjunto de condições necessárias, no contexto do problema do controle ótimo, as quais precisam ser válidas ao longo de uma trajetória ótima (BERKOVITZ, 1976).

O restante desta subseção é baseado em Intriligator (2002). Segundo o autor, o princípio do máximo pode ser considerado uma extensão do método do multiplicador de Lagrange para otimização dinâmica[15]. A técnica envolve adicionar ao problema um vetor $\mathbf{y}(t)$ de variáveis, chamadas de variáveis de coestado, e montar um função Lagrangeana que é igual à expressão

[13] Para que $\{\mathbf{u}(t)\}$ seja contínua, cada variável de controle também deve ser contínua por intervalos de tempo.

[14] Uma trajetória de controle é dita admissível se ela é uma função-valor contínua no tempo e cujo valor, em qualquer ponto no intervalo de tempo relevante, pertence à Ω, um subconjunto não-vazio do r-espaço euclidiano. Normalmente supões-se que Ω é compacto, convexo e invariante no tempo.

[15] Para uma prova do princípio do máximo ver Berkovits (1976).

a ser maximizada mais o produto interno entre o vetor de variáveis de coestado e as restrições. De outra forma:

$$\begin{aligned} L &= J + \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{y}[\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) - \dot{\mathbf{x}}]dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} I\{(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \mathbf{y}[\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) - \dot{\mathbf{x}}]\}dt + F(\mathbf{x_1}, t_1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Note que o termo $\mathbf{y}(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$ pode ser integrado por partes, o que resulta em:

$$\begin{aligned} L = \int_{t_0}^{t_1} & I\{(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \mathbf{y}\dot{\mathbf{x}}]\}dt \\ & + F(\mathbf{x_1}, t_1) - [\mathbf{y}(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1) - \mathbf{y}(t_0)\dot{\mathbf{x}}(t_0)] \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pode-se, então, definir a função Hamiltoniana como:

$$H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y},t) = I(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \mathbf{y}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \tag{2.3}$$

ou seja, a função Hamiltoniana é definida como a soma da função intermediária do funcional objetivo mais a soma do produto interno do vetor de variáveis de coestado a o vetor de funções definindo a taxa de variação das variáveis de estado. Assim:

$$\begin{aligned} L = \int_{t_0}^{t_1} & H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{y},t)dt \\ & + F(\mathbf{x_1}, t_1) - [\mathbf{y}(t_1)\dot{\mathbf{x}}(t_1) - \mathbf{y}(t_0)\dot{\mathbf{x}}(t_0)] \end{aligned} \tag{2.4}$$

Considere o efeito de uma mudança na trajetória de controle de $\{\mathbf{u}(t)\}$ para $\{\mathbf{u}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)\}$ com uma mudança correspondente na trajetória de estado de $\{\mathbf{x}(t)\}$ para $\{\mathbf{x}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)\}$. A mudança no Lagrangeano é igual a:

$$\Delta L = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \Delta\mathbf{u} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{y}} \right) \Delta\mathbf{x} \right\} dt + \left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x_1}} - \mathbf{y}(t_1) \right] \Delta\mathbf{x_1} \tag{2.5}$$

Para um máximo é preciso que a mudança no Lagrangeano desapareça, implicando:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \qquad t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2.6}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \qquad \mathbf{y}(t_1) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x_1}} \tag{2.7}$$

Já as equações de movimento podem ser expressas, em termos do Hamiltoniano, como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}, \qquad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.8}$$

Dessa forma, o problema se resume a achar as trajetórias $\{\mathbf{u}(t)\}$, $\{\mathbf{y}(t)\}$ e $\{\mathbf{x}(t)\}$ de modo a satisfazer (2.7), (2.8) e (2.9). Estas condições são necessárias para um máximo local, embora, como aponta Intriligator (2002), geralmente não sejam suficientes nem, necessariamente, produzam uma única solução ou um máximo global.

3 Modelo de Crescimento Endógeno com Setor de Saúde

3.1 Hipóteses do Modelo

H_1: A capacidade de produção da economia é representada por uma função de produção que transforma horas de trabalho L e capital K em produto Y. O produto é repartido entre consumo C e investimento I de modo que $Y = C + I$. Assume-se que a função de produção é do tipo Cobb-Douglas, com retornos constantes de escala.

H_2: Há três setores na economia: o setor de produção, o setor de pesquisa e o setor de saúde. As horas de trabalho, L, são dividas entre esses setores. A fração das horas de trabalho utilizada no setor de conhecimento é dada por u, a fração utilizada no setor de saúde é dada por v e a fração utilizada no setor de produção por $(1 - u - v)$.

H_3: A função utilidade da sociedade permite o trade-off entre consumo presente e futuro com elasticidade constante de substituição intertamporal, sendo expressa por:

$$U(C) = \frac{(C^{1-\theta} - 1)}{(1 - \theta)}$$

Desta forma, o consumo aumenta a utilidade presente, enquanto o investimento aumenta a produção futura e portanto as possibilidades de consumo futuro. Adicionalmente, assume-se $\theta > 1$, ou seja, elasticidade de substituição maior do que a unidade.

H_4: O setor de pesquisa usa uma fração u das horas de trabalho e o estoque de conhecimento A na produção de mais conhecimento, com o objetivo de aumentar a eficiência do processo de transformação. A variação do nível de conhecimento pode, então, ser representada pela equação $\dot{A} = \delta_A u L A^{\phi}$, onde δ_A é um parâmetro de produtividade e assume-se $\phi < 1$, ou seja, retornos decrescentes do estoque de conhecimento na produção de mais conhecimento.

H_5: Existe uma taxa de morbidade, $m \in [0, 1]$, que reduz a quantidade de horas de trabalho disponíveis nos três setores da economia. Em cada instante, a quantidade de horas perdidas será dada por mL, onde m é a taxa de morbidade. Deste total, uma fração b se recupera devido ao esforço empreendido no setor de saúde. Sendo $n > m$ a taxa de crescimento das horas de trabalho na ausência de morbidade, a variação nas horas de trabalho pode ser expressa pela equação $\dot{L} = (m(b - 1) + n)L$.

H_6: No equilíbrio, a taxa de recuperação das horas de trabalho b^* é uma função da fração v^* alocada no setor de saúde.

3.2 O Modelo

O objetivo desta subseção é resolver o problema de um planejador social que tem por objetivo maximizar a utilidade dos indivíduos sujeito ao conjunto de hipóteses descrito na subseção anterior:

$$\max_{C,u,v} \int_0^{\infty} U(C)e^{-\rho t}dt$$

$$Y = A[(1-u-v)L]^{(1-\alpha)}K^{\alpha} \qquad 0 < \alpha < 1 \qquad Y(0) = Y_0 > 0 \tag{3.1}$$

$$\dot{K} = I = Y - C \qquad K(0) = K_0 > 0 \tag{3.2}$$

$$\dot{L} = \Big(m(b-1) + n\Big)L \qquad 0 < b < 1 \qquad L(0) = L_0 > 0 \tag{3.3}$$

$$\dot{A} = \delta_A uLA^{\phi} \qquad \phi < 1 \qquad A(0) = A_0 > 0 \tag{3.4}$$

$$b^* = f(v^*) \tag{3.5}$$

As taxas de crescimento das horas de trabalho e do conhecimento podem ser encontradas a partir de (3.3) e (3.4), respectivamente. Já a taxa de crescimento da produção pode ser achada a partir da log-diferenciação de (3.1) em relação ao tempo:

$$g_L = m(b-1) + n \tag{3.6}$$

$$g_A = \delta_A uLA^{\phi-1} \tag{3.7}$$

$$g_Y = g_A - \frac{1-\alpha}{1-u-v}(ug_u + vg_v) + (1-\alpha)g_L + \alpha g_K \tag{3.8}$$

Seja $z = Y/K$ e $\chi = C/K$, a partir de (3.2) pode-se escrever a taxa de crescimento do capital como:

$$g_K = z - \chi \tag{3.9}$$

Das condições de primeira ordem do problema podemos achar as taxas de crescimentos do consumo, da fração das horas de trabalho utilizada no setor de conhecimento e da fração das horas de trabalho utilizada no setor de saúde[16]. Elas são dadas por:

$$g_C = \frac{\alpha}{\theta}z - \frac{\rho}{\theta} \tag{3.10}$$

$$g_u = \frac{(1-u-v)}{u}\left[\alpha z - \frac{(1-u-v)}{(1-\alpha)u}g_A + g_L - g_Y\right] - \frac{v}{u}g_v \tag{3.11}$$

$$g_v = \frac{1-u-v}{v}\left[\alpha z - (1-v)m\frac{\partial b^*}{\partial v} - g_Y\right] - \frac{u}{v}g_u \tag{3.12}$$

[16] Para uma derivação completa do modelo ver o Apêndice B

3.3 A Trajetória de Crescimento Balanceado

Nesta subseção[17] serão definidos que tipos de trajetórias são interessantes considerar para um crescimento econômico permanente no longo prazo.

Definição 4.1: Uma trajetória $(C, Y, K, A, u, v, L)_{t=0}^{\infty}$ é dita viável se:

(a) K, L e A são funções contínuas no tempo.

(b) C, Y, u e v são funções contínuas por intervalo de tempo.

(c) A trajetória satisfaz a função de produção e as equações de movimento do capital, das horas de trabalho e do estoque de conhecimento para todo $t > 0$, exceto em algum ponto de discontinuidade de C, u ou v.

(d) A trajetória satisfaz as condições de não negatividade C, K, A, u, v, $L \geq 0$ para todo $t > 0$.

Definição 4.2: Um caminho viável é uma trajetória de crescimento balanceado (BGP, da sigla em inglês) se C, Y, K, A, u, v e L são estritamente positivas para $t \geq 0$ e suas taxas de variação são constantes.[18]

Lema 4.1: As seguintes propriedades são válidas no BGP:

(i) $g_C^* = g_K^* = g_Y^*$

(ii) $g_u^* = g_v^* = 0$

(iii) $(1 - \phi)g_A^* = g_L^*$

(iv) z e χ são constantes positivas.

Prova: Considere um BGP. Por definição, as variáveis C, Y, K, u e L são estritamente positivas para todo $t \geq 0$. Também por definição, g_C, g_Y, g_K, g_A e g_L são constantes.

(i) Como g_K é constante, derivar (3.9) em relação ao tempo nos dá $\dot{z} = \dot{\chi}$. Da definição de z, tem-se que $\dot{z} = z(g_Y - g_K)$ e da definição de χ tem-se que $\dot{\chi} = \chi(g_C - g_K)$, logo $z(g_Y - g_K) = \chi(g_C - g_K)$. A expressão anterior pode ainda ser expressa por $(Y - C)g_K = Yg_Y - Cg_C = Ig_K$. Desta forma, para que a igualdade $Y = C + I$ seja obedecida, as taxas de crescimento precisam ser iguais, logo $g_C^* = g_K^* = g_Y^*$.

(ii) Considere $g_u \neq 0$. Dessa forma, $\lim_{t \to \infty}(1 - u - v) = 0$ e $Y = 0$, contrariando a definição do BGP. Logo, no BGP $g_u = 0$. Argumento análogo é verdade para g_v.

[17]Esta subseção é baseada nos trabalhos de Groth (2004), Stamford da Silva (2008) e Freitas (2009).

[18]A partir deste ponto usaremos o asterisco (*) para representar as taxas de crescimento de longo prazo.

(iii) Como a partir de (ii) $g_u = 0$, log-diferenciar (3.7) em relação ao tempo nos dá $(1-\phi)g_A^* = g_L^*$

(iv) Da positividade estrita de Y, C e K, temos que z e χ são positivas por definição. Como as taxas de crescimento precisam ser iguais, z e χ são constantes.

3.4 Análise do Equilíbrio e Resultados

A partir da discussão acima pode-se reescrever a equação (3.8) de forma a obter:

$$g_y^* = \frac{g_L^*}{\gamma} \tag{3.13}$$

onde $\gamma = (1-\alpha)(1-\phi) > 0$.

Desta maneira, o modelo avança em relação ao que Jones (1995) denomina de crescimento semi-endógeno, situação na qual a taxa de crescimento de longo prazo da economia é uma função de parâmetros tomados como exógenos, como geralmente é o caso da taxa de crescimento das horas de trabalho, de modo a apresentar uma situação na qual as taxas de crescimento em questão são endógenas.

Por simplicidade, vamos assumir uma especificação linear para a taxa de recuperação das horas de trabalho:

$$b^* = Bv^* \tag{3.14}$$

onde B pode ser interpretado como a produtividade do setor de saúde. Deste modo, $\partial b^*/\partial v^* = B$, e podemos achar o valor de equilíbrio das variáveis. A partir de (3.6), (3.10), (3.12) e (3.13) tem-se:

$$g_L^* = \left[\frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi \tag{3.15}$$

onde é necessário que $\psi = m(B-1) + n - \rho > 0$ para que o crescimento seja positivo, uma vez que $\theta > 1$ e $\gamma > 0$. Esta restrição impõe um limite inferior para a produtividade do setor de saúde[19]. A partir de (3.8), temos:

$$g_Y^* = \frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\psi \tag{3.16}$$

Em termos *per capita*:

$$g_y^* = \frac{\psi}{(\theta-1)+\theta\gamma} \tag{3.17}$$

A equação (3.14) acima nos diz que a taxa de crescimento da economia depende dos parâmetros relacionados aos setores de produção (α) e conhecimento (ϕ) e às preferências (θ e ρ), assim como dos parâmetros relacionados ao setor de saúde (m e B). Logo, se $B < 1$, caso

[19] É necessário que $B > 1 + (\rho - n + m)/m$

que considera-se ser de maior relevância para o problema proposto,[20,21] o crescimento varia negativamente com o aumento da morbidade e positivamente com o aumento da produtividade do setor de saúde.

O valor de equilíbrio das frações das horas de trabalho alocadas no setor de pesquisa e no setor de saúde podem ser encontradas a partir de (3.10), (3.11), (3.12), (3.14), (3.15) e (3.16):

$$v^* = 1 - \frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi - \frac{\rho}{mB} \tag{3.18}$$

$$u^* = \frac{\left\{\dfrac{(\theta-1)}{mB}\left[\dfrac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \dfrac{\rho}{mB}\right\}\left[\dfrac{\psi}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]}{\theta\left[\dfrac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \rho} \tag{3.19}$$

Note que, assim como a taxa de crescimento da economia, as duas frações dependem dos parâmetros relacionados à função de produção, ao setor de conhecimento, às preferências e ao setor de saúde.

Por fim, a propensão a consumir pode ser encontrada partir de (3.9), (3.10) e (3.16):

$$c^* = \frac{\left(\dfrac{\theta}{\alpha} - 1\right)\left[\dfrac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \dfrac{\rho}{\alpha}}{\dfrac{\theta}{\alpha}\left[\dfrac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \dfrac{\rho}{\alpha}} \tag{3.20}$$

O modelo apresentado possui uma série de implicações interessantes. Antes de discutí-las, no entanto, vale enfatizar que a análise feita aqui se aplica a situações de crescimento balanceado. Desta forma, os fenômenos discutidos podem ser explicados como o resultado de um processo de crescimento balanceado onde diferentes situações correspondem a diferentes constelações de parâmetros com respeito à tecnologia e às preferências.

Com o objetivo de ilustrar o que acontece com as variáveis de interesse, entre elas a taxa de crescimento da economia e o tamanho dos setores de pesquisa e saúde, frente a mudanças nos parâmetros do modelo, realiza-se a análise de sensibilidade do modelo, cujo resultado se encontra resumido na Tabela 1[22]. A influência positiva ou negativa de uma variação (positiva) em um parâmetro é indicada por um sinal de adição ou subtração, respectivamente. Reações ambíguas são indicadas por uma interrogação seguida por um sinal dentro de parênteses, o qual indica alta probabilidade do efeito ter aquele sinal em particular.

Primeiro, é importante notar a correlação negativa entre os efeitos da mudança nos

[20]Se $B > 1$, a taxa de crescimento das horas de trabalho e, consequentemente, a taxa de crescimento da economia variam positivamente com o aumento da morbidade. A literatura levanta esta possibilidade para o caso de uma economia com baixa espectativa de vida e alta taxa de morbidade, porém o modelo descreve uma entidade que depende da criação de idéias para crescer e, neste sentido, é mais razoável que seja aplicado a economias desenvolvidas, onde essa previsão dificilmente se sustenta.

[21]Para que $B < 1$ é necessário que $n - m > \rho$

[22]Para mais detalhes ver o Anexo C

Tabela 1: Respostas à mudanças nos parâmetros

Parâmetros	c^*	u^*	v^*	g_y^*	b^*	z^*	χ^*
θ	+	? (-)	-	-	-	-	-
ρ	+	? (-)	-	-	-	-	-
m	? (+)	-	+	? (-)	+	? (-)	? (-)
B	-	? (+)	? (-)	+	+	+	+
ϕ	-	+	-	-	-	+	+

parâmetros sobre a taxa de crescimento da economia e a propensão a consumir. Este fato decorre da correlação positiva entre a taxa de poupança e a taxa de crescimento, uma vez que, para uma razão capital-produto constante, um aumento na taxa poupança é necessário para sustentar uma maior taxa de crescimento. Da mesma forma existe uma correlação negativa entre os efeitos dos parâmetros m e B relacionados ao setor de saúde, com exceção da influência sobre a taxa de recuperação

Em relação aos resultados específicos, tem-se que um aumento em θ implica uma redução no valor da elasticidade intertemporal de subsituição, o que significa que os indivíduos estão mais relutantes em esperar o retorno ao investimento e, consequentemente, mais inclinados a aumentar o consumo presente. Logo, c aumenta e v, b e g_y diminuem. Da mesma forma, há uma redução em z e χ, a qual é mais acentuada na primeira que na segunda.

Os resultados para um aumento de θ são similares àqueles obtidos para um aumento na taxa de desconto ρ, pois este aumento representa uma redução na avaliação subjetiva da utilidade derivada do consumo no futuro relativa ao consumo presente. Logo, é de se esperar que os indivíduos aloquem mais recursos nas atividades que aumentem as possibilidades de consumo presente. Novamente, isto se reflete no aumento de c e consequente redução de v, b, g_y, z e χ.

Já o aumento da morbidade possui efeitos ambíguos, relacionados ao valor do parâmetro B. Os valores reportados na Tabela 1 dizem respeito ao caso em que $B < 1$. Por um lado, o aumento da fração das horas de trabalho alocadas no setor de saúde e da taxa de recuperação das horas de trabalho acabam por aumentar a taxa de crescimento da população, porém este efeito é compensado pela redução da fração das horas de trabalho alocadas no setor de pesquisa e pelo aumento na propensão a consumir, de modo que o efeito líquido sobre a taxa de crescimento da economia é negativo.

Os resultados para a fração das horas de trabalho alocadas no setor de pesquisa e para a taxa de crescimento da economia vão ao encontro de um conjunto de evidências que estimam o impacto econômico de mudanças na saúde, geralmente representada pela expectativa de vida, os quais mostram, utilizando diferentes tipos de dados e metodologias, que reduções na mortalidade tendem a aumentar o crescimento [23] e o investimento em educação [24]

Vale destacar a importância da produtividade do setor de saúde no sinal da influência da

[23]Como em: Aghion, Howitt e Murtin (2010); Barro (1995); Bhargava et al. (2001); Knowles e Owen (1997); Lorentzen, Mcmillan e Wacziarg (2008); Mcdonald (2002); Webber (2002).

[24]Como em: Jayachadran e Lleras-Muney (2009); Miguel e Kremer (2004).

morbidade sobre o crescimento, uma vez que, como as horas de trabalho utilizadas nos diversos processos de produção dependem dos parâmetros relacionados ao setor de saúde, a saúde é um complemento ao crescimento na perspectiva da oferta, porém, como o aumento da demanda pelos serviços relacionados à saúde se utiliza de recursos escassos, a saúde e o crescimento também são substitutos, sendo a magnitude destes efeitos dependente da produtividade do setor de saúde.

4 Considerações Finais

Neste trabalho foi analisada a literatura teórica e empírica acerca da relação entre saúde e crescimento econômico a fim de construir um modelo de modo a integrar acumulação de conhecimento, saúde e crescimento econômico. O modelo proposto se baseia na escolha da alocação das horas de trabalho no setor de saúde, a qual torna a taxa de crescimento das horas de trabalho endógena.

A partir da análise do modelo chega-se à conclusão que a morbidade influencia negativamente a alocação de horas de trabalho no setor de conhecimento, desincentivando o investimento neste tipo de ativo, e positivamente a alocação dessas horas no setor de saúde. Já a influência da morbidade sobre o crescimento da economia depende fundamentalmente do valor do parâmetro B relacionado à produtividade do setor de saúde, uma vez que saúde e crescimento se mostram complementares na perspectiva da oferta e substitutos na perspectiva da demanda por horas de trabalho. Os resultados encontrados reforçam a idéia que diferentes trajetórias de crescimento podem surgir de diferentes parâmetros estruturais e vão ao encontro de um conjunto de evidências que estimam o impacto econômico de mudanças na saúde.

Um ponto a ser considerado, e que por ventura seria um bom tema para estudos futuros, diz respeito ao fato da influência da morbidade e da produtividade do setor de saúde, sobre diferentes variáveis do modelo, depender fundamentalmente do valor dos parâmetros. Neste sentido, a calibração dos parâmetros de maneira a permitir que os resultados do modelo e seu comportamento geral sejam razoáveis, aliada à posterior realização de simulações numéricas nos permitiria identificar os canais pelos quais as variáveis relacionadas à saúde agem sobre o modelo, fortalecendo a análise.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACEMOGLU, D. e S. JOHNSON, "Disease and development: The effect of life expectancy on economic growth", *Journal of Political Economy*, 115(6): 925-985, 2007.

ACEMOGLU, D., S. JOHNSON e J. ROBINSON, "The colonial origins of comparative development: An empirical investigation", *American Enonomic Review*, 91(5): 1369-1401, 2001.

AGÉNOR, P. R., "Health and infrastructure in a model of endogenous growth", *Journal of Macroeconomics*, 30(4): 1407-1422, 2008.

AGHION, P. E P. HOWITT, "A model of growth through creative destruction", *Econometrica*, 60(2): 323-351, 1992.

AGHION, P., P. HOWITT, e P. MURTIN, "The relationship between health and growth: When Lucas meets Nelson-Phelps", National Bureau of Economic Research, Inc, *NBER Working Papers*, 15813, 2010.

AÍSA, R. e F. PUEYO, "Endogenous longevity, health and economic growth: a slow growth for a longer life?", *Economics Bulletin*, 9(3): 1-10, 2004.

AÍSA, R. e M. SANSO, "Endogenous longevity, biological deterioration and economic growth", *Journal of Health Economics*, 25(3): 555-578, 2006.

ARROWS, K. J., "The economic implications od learning by doing", *The Review of Economic Studies*, 29(3): 155-173, 1962.

ASHRAF, Q. H., A. LESTER e D. N. WEIL, "When does improving health raise gdp?", *NBER: Macroeconomics Annual 2008*, National Bureau of Economic Research, Inc, 2008.

BANCO MUNDIAL. *World Development Indicators*, 2009. Disponível em: <http://data.worldbank.org/products/data-books/WDI-2009>. Acessado em: 20 Jul 2011

BARRO, R. J., "Economic Growth in a Cross Section of Countries", *NBER Working Papers*, 3120, 1991.

BARRO, R. J., "Determinants of Economic Growth: A cross-conutry empirical study", *NBER Working Papers*, 5698, 1996.

BARRO, R. J. e X. SALA-i-MARTIN, *Economic Growth*. McGraw-Hill, Nova Iorque, 1995.

BARRO, R. J e J. W. LEE, "A New Data Set of Educational Attainment in the World, 1950-2010". *NBER Working Papers*, 15902, 2010.

BENHABIB, J. e M. M. SPIEGEL, "The role of humam capital in economic development evidence from aggregate cross-country data", *Journal of Monetary Economics* 34(2): 143-173, 1994.

BERKOVITZ, L. D., "Optimal control theory", *The American Mathematical Monthly*, Mathematical Association of America, 83(4): 225-239, 1976.

BHARGAVA, A., D. T. JAMISON, L. J. LAU e C. J. MURRAY, "Modeling the effects of health on economic growth", *Journal of Health Economics*, 20(3): 423-440, 2001.

COLE, M. e E. NEUMAYER, "The impact of poor health on total factor productivity", *The Journal of Development*, 42(6): 918-938, 2006.

EHRLICH, I. e F. LUI, "Intergenerational Trade, Longevity, and Economic Growth", *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, 99(5): 1029-59, 1991.

FIGUEIREDO, L., K. NORONHA e M. V. ANDRADE, "Os Impactos da Saúde sobre o crescimento Econômico na Década de 90: Uma análise para os Estados Brasileiros", *Textos para Discussão Cedeplar-UFMG*, td219, 2003.

FREITAS, M. A. L., *Crescimento Econômico Ótimo*: A influência do Setor de Saúde, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

GALLEGO, J. M., Aspectos teóricos sobre la salud como determinante del crecimiento econḿico, *Borradores de Investigación*, 002029, 2000.

GROSSMAN, G. e E. HELPMAN, *Innovation and Growth in the Global Enocomy*, 1ª Ed., The MIT Press, Cambridge, 1991.

GROSSMAN, M. "On the concept of health capital and demand for health", *Journal of Political Economy*, 800(2): 223-255, 1972.

GROTH, C., "Strictly Endogenous Growth with Non-renewable Resources Implies an

Unbounded Growth Rate", *The B.E. Journal of Macroeconomics*, 4(1), 2004

INTRILIGATOR, M. D. *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2002.

JAYACHANDRAN, S. e A. LLERAS-MUNEY, "Life expectation and human capital investments: Evidence from maternal mortality declines, *Quartely Journal of Economics*, 124(1): 349-397, 2009.

JONES, C. I., "Based models of economic growth", *Journal of Political Economy*, 103(4): 759–784, 1995.

KNOWLES, S., P. D. OWEN, "Health capital and cross-country variation in income per capita in the mankiw-romer-weil model", *Economics Letters*, 48(1): 99-160, 1995.

KNOWLES, S., P. D. OWEN, "Education and health in an effective-labour empirical growth model", *The Economic Record*, 73(223): 314–28, 1997.

LORENTZEN, P., J. MCMILLAN e R. WACZIARG, "Death and development", *Journal of Economic Growth*, 13(2): 81–124, 2008.

LUCAS, R. E., "On the mechanics of economic development", *Journal of Monetary Economics*, 22(1): 3 – 42, 1988.

MANKIW, N. G., D. ROMER e D. N. WEIL, "A contribution to the empirics of economic growth", *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2): 407–37, 1992.

MCDONALD, S. e J. ROBERTS, "Growth and multiple forms of human capital in an augmented solow model: a panel data investigation", *Economics Letters*, 74(2): 271-276, 2002.

MELTZER, D. *Mortality Decline, the Demographic Transition and Economic Growth*, Tese de Doutorado, University of Chicago, Chicago, 1992.

MIGUEL, E. e M. KREMER, "Worms: Identifying impacts on education and health in the presence of treatment externalities", *Econometrica*, The Econometric Society, 72(1): 159–217, 2004.

MUYSKEN, J. e A. VAN ZON, "Health, education and endogenous growth", *Research Memoranda*, 006, 1997.

MUYSKEN, J. e A. VAN ZON, "Health and endogenous growth". *Journal of Health Economics*, 20(2): 169–185, 2001.

MUYSKEN, J. e A. VAN ZON, Health as a Principal Determinant of Economic Growth, *Research Memoranda*, 024, 2003.

NELSON, R. R. e E. S. PHELPS, "Investment in humans, technological diffusion, and economic growth", *The American Economic Review*, American Economic Association, 56(1/2): 69–75, 1966.

OECD. Banco de dados completo via sourceoecd, 2009. Disponível em: <http://stats.oecd.or>.

REBELO, S., "Long-run policy analysis and long-run growth", *Journal of Political Economy*,99(3): 500–521, 1991.

ROMER, P. M., "Increasing returns and long-run growth", *The Journal of Political Economy*, The University of Chicago Press, 94(5): 1002–1037, 1986.

ROMER, P. M., "Endogenous technological change", *The Journal of Political Economy*, 98(5): S71–S102, 1990.

SHESHINSKI, E., "Optimal Accumulation with Learning by Doing", in SHELL, K.,hell (ed.), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth* M.I.T. Press, Cambridge, p. 31-52, 1967.

SOARES, R. R., "Mortality reductions, educational attainment, and fertility choice", *American Economic Review*, 95(3): 580–601, 2005.

STAMFORD DA SILVA, A., "Growth with exhaustible resource and endogenous extraction rate", Elsevier, *Economic Modelling*, 25(6): 1165-1174, 2008.

STRAUSS, J. e D. THOMAS,"Health, nutrition, and economic development", *Journal of Economic Literature*, 36(2): 766–817, 1998.

TALLMAN, E. W. e P. WANG, "Human capital and endogenous growth evidence from taiwan", *Journal of Monetary Economics*, 34(1): 101–124, 1994.

UZAWA, H., "Optimum technical change in an aggregative model of economic growth", *International Economic Review*, 6: 18–31, 1965.

VILLANUEVA, D., M.D. KNIGHT, e N. LOAYZA, "Testing the Neoclassical Theory of Economic Growth - A Panel Data Approach", *Staff Papers - International Monetary Fund*, 40(3): 512-541, 1993.

WEBBER, D. J., "Policies to stimulate growth: Should we invest in health or education?", *Applied Economics*, 34(13): 1633–43, 2002.

ZHANG, J., J. ZHANG, e R. LEE, "Rising longevity, education, savings, and growth", *Journal of Development Economics*, 70(1): 83–101, 2003.

Anexos

Anexo A

O problema do planejador social é:

$$\max_{C,u,v} \int_0^{\infty} U(C)e^{-\rho t}dt$$

$$Y = A[(1-u-v)L]^{(1-\alpha)}K^{\alpha} \qquad 0<\alpha<1 \qquad Y(0)=Y_0>0 \tag{A.1}$$

$$\dot{K} = I = Y - C \qquad K(0)=K_0>0 \tag{A.2}$$

$$\dot{L} = nL - mL + mbL \Rightarrow \dot{L} = \Big(m(b-1)+n\Big)L \qquad L(0)=L_0>0 \tag{A.3}$$

$$\dot{A} = \delta_A uLA^{\phi} \qquad \phi<1 \qquad A(0)=A_0>0 \tag{A.4}$$

$$b^* = f(v^*) \tag{A.5}$$

Considerando a função utilidade descrita em H_3, o Hamiltoniano do problema será:

$$J = e^{-\rho t}\left(\frac{C^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)+\lambda_K\Big[A\Big((1-u-v)L\Big)^{(1-\alpha)}K^{\alpha}-C\Big]+\lambda_A[\delta_A uLA^{\phi}]+\lambda_L\Big[\Big(m(b^*-1)+n\Big)L\Big]$$

As condições de primeira ordem, supondo solução interior, são:

$$\frac{\partial H}{\partial C} = e^{-\rho t}C^{-\theta} - \lambda_K = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K} = -\rho - \theta\frac{\dot{C}}{C} \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial u} &= -\frac{\lambda_K(1-\alpha)Y}{(1-u-v)} + \lambda_A\delta_A LA^{\phi} = 0\\ \Rightarrow \frac{\lambda_K}{\lambda_A} &= \frac{(1-u-v)\delta_A LA^{\phi}}{(1-\alpha)Y}\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial v} &= -\frac{\lambda_K(1-\alpha)Y}{(1-u-v)} + \lambda_L mL\frac{\partial b^*}{\partial v} = 0\\ \Rightarrow \frac{\lambda_K}{\lambda_L} &= \frac{(1-u-v)mL}{(1-\alpha)Y}\frac{\partial b^*}{\partial v}\end{aligned} \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = -\dot{\lambda}_K \Rightarrow \lambda_K\frac{\alpha Y}{K} = -\dot{\lambda}_K \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_K}{\lambda_K} = -\frac{\alpha Y}{K} \tag{A.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial L} &= -\dot{\lambda}_L \Rightarrow \lambda_K\frac{(1-\alpha)Y}{L} + \lambda_A\delta_A uA^{\phi} + \lambda_L(m(b^*-1)+n) = -\dot{\lambda}_L\\ \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_L}{\lambda_L} &= -\frac{\lambda_K}{\lambda_L}\frac{(1-\alpha)Y}{L} - \frac{\lambda_A}{\lambda_L}\delta_A uA^{\phi} - (m(b^*-1)+n)\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial A} &= -\dot{\lambda}_A \Rightarrow \lambda_K\frac{Y}{A} + \lambda_A\phi\delta_A uLA^{\phi-1} = -\dot{\lambda}_A\\ \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} &= -\frac{\lambda_K}{\lambda_A}\frac{Y}{A} - \phi\delta_A uLA^{\phi-1}\end{aligned} \tag{A.11}$$

É possível reescrever (A.7) e (A.11), respectivamente, como:

$$\frac{\lambda_K}{\lambda_A} = \frac{(1-u-v)}{u}\frac{\dot{A}}{(1-\alpha)Y} \tag{A.12}$$

$$\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = -\frac{\lambda_K}{\lambda_A}\frac{Y}{A} - \phi\frac{\dot{A}}{A} \tag{A.13}$$

Substituindo (A.12) em (A.13), temos:

$$\frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = -\frac{(1-u-v)}{u}\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{\dot{A}}{A} - \phi\frac{\dot{A}}{A} \Rightarrow \frac{\dot{\lambda}_A}{\lambda_A} = -\left[\frac{(1-u-v)}{(1-\alpha)u} + \phi\right]g_A \tag{A.14}$$

De (A.7) e (A.8):

$$\frac{\lambda_A}{\lambda_L} = \frac{\lambda_K}{\lambda_L}\frac{\lambda_L}{\lambda_A} = \frac{(1-u-v)mL}{(1-\alpha)Y}\frac{\partial b^*}{\partial v}\frac{(1-\alpha)Y}{(1-u-v)\delta_A LA^{\phi}} = \frac{m}{\delta_A A^{\phi}}\frac{\partial b^*}{\partial v} \tag{A.15}$$

Substituindo (A.8) e (A.15) em (A.10):

$$\frac{\dot{\lambda}_L}{\lambda_L} = -(1-u-v)m\frac{\partial b^*}{\partial v} - mu\frac{\partial b^*}{\partial v} - g_L = -(1-v)m\frac{\beta b^*}{v} - g_L \tag{A.16}$$

As taxas de crescimento podem ser expressas por:

1. Tecnologia

$$\dot{A} = \delta uLA^{\phi} \Rightarrow g_A = \delta_A uLA^{\phi-1} \tag{A.17}$$

Log-diferenciando (A.17) com relação ao tempo e levando em conta que g_A é constante no BGP:

$$g_u^* + g_L^* + (\phi-1)g_A^* = 0 \tag{A.18}$$

2. Capital

Seja $z = Y/K$ e $\chi = C/K$, pode-se reescrever (A.2) como:

$$\dot{K} = Y - C \Rightarrow \dot{K}/K = Y/K - C/K \Rightarrow g_K = z - \chi \tag{A.19}$$

3. Consumo

De (A.7) e (A.10):

$$-\rho - \theta\frac{\dot{C}}{C} = -\frac{\alpha Y}{K} \Rightarrow g_C = \frac{\alpha}{\theta}z - \frac{\rho}{\theta} \tag{A.20}$$

4. Produto

Log-diferenciando (A.1) no tempo:

$$g_Y = g_A - (1-\alpha)\left[\frac{\dot{u}}{1-u-v} + \frac{\dot{v}}{1-u-v}\right] + (1-\alpha)g_L + \alpha g_K \tag{A.21}$$

Note que (o mesmo sendo verdade para g_v):

$$g_u = \frac{\dot{u}}{u} = \frac{\dot{u}}{(1-u-v)}\frac{(1-u-v)}{u} \Rightarrow \frac{\dot{u}}{1-u-v} = \frac{u}{1-u-v}g_u \tag{A.22}$$

É possível então reescrever (A.21) como:

$$g_Y = g_A - \frac{(1-\alpha)}{1-u-v}(ug_u + vg_v) + (1-\alpha)g_L + \alpha g_K \tag{A.23}$$

5. Fração das horas de trabalho utilizada no setor de pesquisa (u)

   Log-diferenciando (A.7) no tempo:

$$g_{\lambda_K} - g_{\lambda_A} = \phi g_A - \frac{\dot{u}}{1-u-v} - \frac{\dot{v}}{1-u-v} + g_L - g_Y$$

$$g_{\lambda_K} - g_{\lambda_A} = \phi g_A - \frac{u}{1-u-v}g_u - \frac{v}{1-u-v}g_v + g_L - g_Y \tag{A.24}$$

   Substituindo (A.9) e (A.14) na equação acima:

$$-\alpha z + \frac{(1-u-v)}{(1-\alpha)u}g_A = -\frac{1}{1-u-v}(ug_u + vg_v) + g_L - g_Y$$

   Rearrumando:

$$g_u = \frac{1-u-v}{u}\left[\alpha z - \frac{1-u-v}{(1-\alpha)u}g_A + g_L - g_Y\right] - \frac{v}{u}g_v \tag{A.25}$$

6. Fração das horas de trabalho utilizada no setor de saúde (v)

   Log-diferenciando (A.8) com relação ao tempo:

$$g_{\lambda_K} - g_{\lambda_L} = -\frac{1}{1-u-v}(ug_u + vg_v) + g_L - g_Y \tag{A.26}$$

   Substituindo (A.10) e (A.16) na expressão acima:

$$-\alpha z + (1-v)m\frac{\partial b^*}{\partial v} = -\frac{1}{1-u-v}(ug_u + vg_v) - g_Y$$

   Rearrumando:

$$g_v = \frac{1-u-v}{v}\left[\alpha z - (1-v)m\frac{\partial b^*}{\partial v} - g_Y\right] - \frac{u}{v}g_u \tag{A.27}$$

Com as taxas de crescimento em mãos é possível achar o valor de equilíbrio das variáveis.

No BGP tem-se $g_u^* = g_v^* = 0$ e $g_Y^* = g_K^* = g_C^*$, logo as equações (A.3), (A.18), (A.19), (A.20), (A.23), (A.25) e (A.27) podem ser expressas, respectivamente, por:

$$g_L^* = m(b^* - 1) + n \tag{A.28}$$

$$g_A^* = \frac{g_L^*}{1-\phi} \tag{A.29}$$

$$g_Y^* = z^* - \chi^* \tag{A.30}$$

$$g_Y^* = \frac{\alpha}{\theta} z^* - \frac{\rho}{\theta} \tag{A.31}$$

$$g_Y^* = g_A^* + (1-\alpha) g_L^* + \alpha g_Y^* \tag{A.32}$$

$$\alpha z^* - \frac{1 - u^* - v^*}{(1-\alpha)u^*} g_A^* + g_L^* - g_Y^* = 0 \tag{A.33}$$

$$\alpha z^* - (1 - v^*) m \frac{\partial b^*}{\partial v} - g_Y^* = 0 \tag{A.34}$$

Assumindo uma especificação linear para a taxa de recuperação das horas de trabalho, $b^* = Bv^*$, tem-se $\partial b^* / \partial v = B$. Substituindo esta expressão e (A.31) em (A.34):

$$(\theta - 1) g_Y^* + \rho - (1 - v^*) mB = 0$$

$$(\theta - 1) g_Y^* + \rho - mB + mb^* = 0 \tag{A.35}$$

Substituindo (A.28) na equação acima:

$$(\theta - 1) g_Y^* + \rho - mB + g_L^* - (n - m) = 0 \tag{A.36}$$

De (A.29) e (A.32):

$$(1-\alpha) g_Y^* = \frac{g_L^*}{(1-\phi)} + (1-\alpha) g_L^*$$

$$g_Y^* = \left[\frac{(1-\alpha)(1-\phi) + 1}{(1-\alpha)(1-\phi)} \right] g_L^* = \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma} \right) g_L^* \tag{A.37}$$

onde substituímos o termo $(1-\alpha)(1-\phi)$ por $\gamma | \gamma > 0$.

Substituindo (A.37) em (A.36):

$$(\theta - 1)\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma}\right)g_L^* + \rho + g_L^* - \Big(m(B-1) + n\Big) = 0$$

$$\left\{(\theta - 1)\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma}\right) + 1\right\}g_L^* = \Big(m(B-1) + n\Big) - \rho$$

$$\left\{\theta\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma}\right) - \frac{1}{\gamma}\right\}g_L^* = \Big(m(B-1) + n\Big) - \rho$$

$$g_L^* = \left[\frac{\gamma}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi \tag{A.38}$$

onde o termo $\Big(m(B-1) + n\Big) - \rho$ foi substituído por ψ.

Substituindo de volta em (A.37):

$$g_Y^* = \left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi \tag{A.39}$$

Desta forma, a taxa de crescimento da economia em termos *per capita* é:

$$g_y^* = g_Y^* - g_L^* \Rightarrow g_y^* = \left[\frac{1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi \tag{A.40}$$

Substituindo (A.38) em (A.29):

$$g_A^* = \left[\frac{(1 - \alpha)}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi \tag{A.41}$$

Substituindo (A.39) em (A.31):

$$z^* = \frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi + \frac{\rho}{\alpha} \tag{A.42}$$

Subsituindo (A.39) e (A.42) em (A.30):

$$\chi^* = \left(\frac{\theta}{\alpha} - 1\right)\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi + \frac{\rho}{\alpha} \tag{A.43}$$

Substituindo (A.42) em (A.34):

$$(1 - v^*)mB = (\theta - 1)\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi + \rho$$

$$v^* = 1 - \frac{(\theta - 1)}{mB}\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi - \frac{\rho}{mB} \tag{A.44}$$

Pode-se, então, achar b^*:

$$b^* = B - \frac{(\theta - 1)}{m}\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi - \frac{\rho}{m} \tag{A.45}$$

Reescrevendo (A.33) e substituindo (A.32):

$$\alpha z^* - \frac{1 - v^*}{(1-\alpha)u} g_A^* + \frac{g_A^*}{1-\alpha} + g_L^* - g_Y^* = 0$$

$$\alpha z^* - \frac{1 - v^*}{(1-\alpha)u} g_A^* = 0$$

$$u^* = \frac{1 - v^*}{(1-\alpha)\alpha z^*} g_A^* \tag{A.46}$$

Substituindo (A.41), (A.42) e (A.44) em (A.46):

$$u^* = \frac{\frac{(\theta - 1)}{mB}\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi + \frac{\rho}{mB}}{\theta\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi + \rho}\left[\frac{\psi}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right] \tag{A.47}$$

Por fim, a partir de (A.42) e (A.43) tem-se a expressão para a propensão a consumir:

$$c = \frac{C}{Y} = \frac{\chi}{z} \Rightarrow c^* = \frac{\chi^*}{z^*} = \frac{\left(\frac{\theta}{\alpha} - 1\right)\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi + \frac{\rho}{\alpha}}{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi + \frac{\rho}{\alpha}} \tag{A.48}$$

Anexo B

Nesta subseção tem-se por objetivo analisar as restrições dos parâmetros necessárias para que o ponto (z^*, χ^*, u^*, v^*) tenha interesse econômico. Neste sentido, se $g_Y^* < 0$, então $\lim_{t \to \infty} Y^* = 0$. Desta forma, é necessário que $g_Y^* \geq 0$, ou ainda:

$$\left[\frac{\gamma + 1}{(\theta - 1) + \theta\gamma}\right]\psi \geq 0 \tag{B.1}$$

Como $0 < \gamma$ e $\theta > 1$, tem-se que tanto o numerador como o denominador da fração são positivos, logo é preciso que ψ seja não-negativo:

$$\psi \geq 0 \tag{B.2}$$

A desigualdade acima também é condição suficiente para a positividade de z^* e χ^*.

Adicionalmente, tem-se que $0 < v^*$, $0 < u^*$ e $v^* + u^* < 1$:

$$0 < 1 - \frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi - \frac{\rho}{mB} \tag{B.3}$$

$$0 < \frac{\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \frac{\rho}{mB}}{\theta\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \rho}\left[\frac{\psi}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] \tag{B.4}$$

$$1 - \frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi - \frac{\rho}{mB} + \frac{\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \frac{\rho}{mB}}{\theta\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi + \rho}\left[\frac{\psi}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] < 1 \tag{B.5}$$

Por último, vamos impor a condição $b^* \leq 1$, de modo que o sistema de saúde não possa aumentar a quantidade de horas trabalhadas na ausência de crescimento populacional:

Anexo C

Nesta subseção é feita a análise de sensibilidade do modelo.

1. Taxa de crescimento do produto per capita (g_y)

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial m} = \frac{B-1}{(\theta-1)+\theta\gamma} \tag{C.1}$$

Se $B > 1$, tem-se $\partial g_y^*/\partial m > 0$ e o aumento da morbidade influencia positivamente a taxa de crescimento da economia g_y^*. Caso $B < 1$, temos $\partial g_y^*/\partial m < 0$ e a mortalidade influencia negativamente a taxa de crescimento da economia.

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial B} = \frac{m}{(\theta-1)+\theta\gamma} > 0 \tag{C.2}$$

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial \phi} = -\frac{\theta(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\psi < 0 \tag{C.3}$$

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial \theta} = -\frac{1+\gamma}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\psi < 0 \tag{C.4}$$

$$\frac{\partial g_y^*}{\partial \rho} = -\frac{1}{(\theta-1)+\theta\gamma} < 0 \tag{C.5}$$

2. Fração das horas de trabalho utilizada no setor de saúde (v)

$$\frac{\partial v^*}{\partial m} = \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{(n-\rho)}{m^2B} + \frac{\rho}{m^2B}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial m} = \frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{\rho}{mB^2} + \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{n}{mB^2} > 0 \tag{C.6}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial B} = \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{(n-m-\rho)}{mB^2} + \frac{\rho}{mB^2}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial B} = \frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{\rho}{mB^2} + \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{(n-m)}{mB^2} \tag{C.7}$$

Se $n-m>0$, então $\partial v^*/\partial B > 0$. Caso contrário tem-se que se o primeiro termo da expressão for maior que o segundo, $\partial v^*/\partial B > 0$, se não, $\partial v^*/\partial B < 0$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \theta} = -\frac{\psi}{mB}\left\{\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma} - (\theta-1)\frac{(1+\gamma)^2}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right\}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \theta} = -\frac{\psi}{mB}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\left\{1-\frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \theta} = -\frac{\psi}{mB}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\left[\frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] < 0 \tag{C.8}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \rho} = \frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] - \frac{1}{mB}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \rho} = \frac{1}{mB}\left\{\frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma} - 1\right\}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \rho} = -\frac{1}{mB}\left[\frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] < 0 \tag{C.9}$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \phi} = -\frac{(\theta-1)\psi}{mB}\left[\frac{[(\theta-1)+\theta\gamma][-(1-\alpha)] - (\gamma+1)[-\theta(1-\alpha)]}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right]$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \phi} = -\frac{(\theta-1)\psi}{mB}\left[\frac{1-\alpha}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right] < 0 \tag{C.10}$$

3. Fração das horas de trabalho utilizada no setor de conhecimento (u)

Note que a derivada parcial de u^* pode ser expressa em função de z^*, g_A*, v^* e de suas derivadas parciais. No caso da derivada parcial em relação a m (equação semelhante pode ser encontrada para os outros parâmetros), tem-se:

$$\frac{\partial u^*}{\partial m} = \frac{z^*\left(-\dfrac{\partial v^*}{\partial m}g_A^* + (1-v^*)\dfrac{\partial g_A^*}{\partial m}\right) - (1-v^*)g_A^*\dfrac{\partial z^*}{\partial m}}{z^{*2}}$$

Começando a análise pela expressão dentro do parênteses:

$$
\begin{aligned}
&\left\{-\frac{(\theta-1)}{m^2B}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](n-\rho)-\frac{\rho}{m^2B}\right\}\left[\frac{1-\alpha}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi \\
&+\left\{\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{mB}\right\}\left[\frac{(1-\alpha)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1) \\
&=\left\{-\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](n-\rho)-\frac{\rho}{mB}\right\}\left[\frac{1-\alpha}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1) \\
&+\left\{\frac{-(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](n-\rho)-\frac{\rho}{mB}\right\}\left[\frac{1-\alpha}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\left(\frac{n-\rho}{m}\right) \\
&+\left\{\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](n-\rho)+\frac{\rho}{mB}\right\}\left[\frac{(1-\alpha)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1) \\
&+\left\{\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m(B-1)\right\}\left[\frac{(1-\alpha)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1) \\
&=\left\{-\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\frac{(n-\rho)^2}{m}-\frac{(n-\rho)\rho}{mB^2}\right\}\left[\frac{1-\alpha}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] \\
&+\left\{\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m(B-1)^2\right\}\left[\frac{(1-\alpha)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] \\
&=\left[\frac{(1-\alpha)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\left\{\frac{(\theta-1)}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\left[m(B-1)^2-\frac{(n-\rho)^2}{m}\right]-\frac{(n-\rho)\rho}{mB^2}\right\} \qquad \text{(C.11)}
\end{aligned}
$$

Logo, se $(n-\rho)^2/m > m(B-1)^2$, a expressão será negativa. Note que é possível reescrever esta condição como:

$$(n-\rho)^2 > m^2(B-1)^2 \Rightarrow n-\rho > m(B-1)$$

que é justamente a condição $\psi > 0$. Desta forma, tem-se que o numerador da primeira equação é negativo e, consequentemente, $\partial u^*/\partial m < 0$.

$$\frac{\partial u^*}{\partial B} = \frac{z^*\left(-\dfrac{\partial v^*}{\partial B}g_A^* + (1-v^*)\dfrac{\partial g_A^*}{\partial B}\right) - (1-v^*)g_A^*\dfrac{\partial z^*}{\partial B}}{z^{*2}}$$

Como o denominador da fração é positivo, analisa-se somente seu numerador. O primeiro termo é positivo, uma vez que $z^* > 0$, $\partial v^*/\partial B < 0$ e $g_A^* > 0$. Desta forma, se o terceiro termo for menor que o segundo, $\partial u^*/\partial B > 0$. Analisando os dois últimos termos:

$$(1-v^*)\left[z^*\frac{\partial g_A^*}{\partial B} - g_A^*\frac{\partial z^*}{\partial B}\right]$$

Uma vez que $(1-v) > 0$, analisa-se o termo dentro dos colchetes:

$$\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left[\frac{1-\alpha}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m-\left[\frac{1-\alpha}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m\right\}$$

$$= \frac{\rho}{\alpha}\left[\frac{1-\alpha}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m > 0 \tag{C.12}$$

Logo, $\partial u^*/\partial B > 0$.

$$\frac{\partial u^*}{\partial \theta} = \frac{z^*\left(-\frac{\partial v^*}{\partial \theta}g_A^* + (1-v^*)\frac{\partial g_A^*}{\partial \theta}\right) - (1-v^*)g_A^*\frac{\partial z^*}{\partial \theta}}{z^{*2}}$$

A partir de (A.41), (A.44), (C.4), (C.8) e (C.21), podemos reescrever o primeiro termo do numerador da expressão a direita da equação acima como:

$$z^*\left[\frac{\gamma(\gamma+1)\psi}{mB[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}g_A^* - \frac{(1-v^*)(\gamma+1)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]}g_A^*\right]$$

$$= \frac{z^*g_A^*(\gamma+1)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]}\left[\frac{\psi\gamma}{mB[(\theta-1)+\theta\gamma]} - (1-v^*)\right]$$

$$= \frac{z^*g_A^*(\gamma+1)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]}\left[\frac{\psi\gamma}{mB[(\theta-1)+\theta\gamma]} - \frac{(\theta-1)(\gamma+1)\psi}{mB[(\theta-1)+\theta\gamma]} - \frac{\rho}{mB}\right]$$

$$= \frac{z^*g_A^*(\gamma+1)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]}\left[\frac{\gamma-\theta\gamma+\gamma-(\theta-1)}{mB[(\theta-1)+\theta\gamma]}\psi - \frac{\rho}{mB}\right] \tag{C.13}$$

Logo, se $\theta > 2$, $\partial u^*/\partial \theta < 0$.

$$\frac{\partial u^*}{\partial \rho} = \frac{z^*\left(-\frac{\partial v^*}{\partial \rho}g_A^* + (1-v^*)\frac{\partial g_A^*}{\partial \rho}\right) - (1-v^*)g_A^*\frac{\partial z^*}{\partial \rho}}{z^{*2}}$$

A partir de (A.41), (A.44), (C.5), (C.9) e (C.22), podemos reescrever o numerador da equação acima como:

$$z^*\left[\frac{{g_A}^*\gamma}{mB[(\theta-1)+\theta\gamma]} - \frac{(1-v)}{\psi}{g_A}^*\right] + \left[\frac{\alpha z^*}{mB} - \frac{1}{mB}\left(\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right)\psi\right]\frac{{g_A}^*}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}$$

$$= z^*\left[\frac{{g_A}^*(\gamma+1)}{mB[(\theta-1)+\theta\gamma]} - \frac{(1-v^*)}{\psi}{g_A}^*\right] - \frac{1}{mB}\left(\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right)\psi\frac{{g_A}^*}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}$$

$$= \frac{z^*{g_A}^*}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma} - \frac{(1-v^*)mB}{\psi}\right] - \frac{1}{mB}\left(\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right)\psi\frac{{g_A}^*}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}$$

$$= \frac{z^*{g_A}^*}{mB}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma} - \frac{(\theta-1)(\gamma+1)}{(\theta-1)+\theta\gamma} - \frac{\rho}{\psi}\right] - \frac{1}{mB}\left(\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right)\psi\frac{{g_A}^*}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}$$

$$= \frac{z^*{g_A}^*}{mB}\left[\frac{1-(\theta-1)}{(\theta-1)+\theta\gamma}(\gamma+1) - \frac{\rho}{\psi}\right] - \frac{1}{mB}\left(\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right)\psi\frac{{g_A}^*}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]} \tag{C.14}$$

Logo, se $\theta > 2$, $\partial u^*/\partial\rho < 0$.

$$\frac{\partial u^*}{\partial\phi} = \frac{z^*\left(-\frac{\partial v^*}{\partial\phi}g_A^* + (1-v^*)\frac{\partial g_A^*}{\partial\phi}\right) - (1-v^*)g_A^*\frac{\partial z^*}{\partial\phi}}{z^{*2}}$$

A partir de (A.41), (A.44), (C.3), (C.10) e (C.24), podemos reescrever o numerador da equação acima como:

$$\begin{aligned}
&z^*\left(\frac{(1-v^*)(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma](\gamma+1)}g_A^* + (1-v^*)(1-\alpha)g_A^*\right) \\
&\qquad - (1-v^*)g_A^*\left(\frac{z^*(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma](\gamma+1)} - \frac{\rho(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma](\gamma+1)}\right) \\
&= z^*(1-v^*)(1-\alpha)\left(\frac{g_A^*}{[(\theta-1)+\theta\gamma](\gamma+1)} + g_A^* - \frac{g_A^*}{[(\theta-1)+\theta\gamma](\gamma+1)}\right) \\
&\qquad + \frac{\rho(1-\alpha)(1-v^*)g_A^*}{[(\theta-1)+\theta\gamma](\gamma+1)} \\
&= z^*(1-v^*)(1-\alpha)g_A^* + \frac{\rho(1-\alpha)(1-v^*)g_A^*}{[(\theta-1)+\theta\gamma](\gamma+1)} > 0
\end{aligned}$$

Logo, $\partial u^*/\partial\phi > 0$.

4. Taxa de recuperação das horas de trabalho (b)

$$\frac{\partial b^*}{\partial\theta} = -\frac{\psi}{m}\left\{\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma} - (\theta-1)\frac{(1+\gamma)^2}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right\}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial\theta} = -\frac{\psi}{m}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\left\{1 - \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial\theta} = -\frac{\psi}{m}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\left[\frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] < 0 \tag{C.15}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial\rho} = \frac{(\theta-1)}{m}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] - \frac{1}{m}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial\rho} = \frac{1}{m}\left\{\frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma} - 1\right\}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial\rho} = -\frac{1}{m}\left[\frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] < 0 \tag{C.16}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial m} = \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{(n-\rho)}{m^2} + \frac{\rho}{m^2}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial m} = \frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{\rho}{m^2} + \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma}\frac{n}{m^2} > 0 \tag{C.17}$$

.

$$\frac{\partial b^*}{\partial B} = 1 - \frac{(\theta-1)(1+\gamma)}{(\theta-1)+\theta\gamma} = \frac{\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma} > 0 \tag{C.18}$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial \phi} = -\frac{(\theta-1)\psi}{m}\left[\frac{[(\theta-1)+\theta\gamma][-(1-\alpha)] - (\gamma+1)[-\theta(1-\alpha)]}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right]$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial \phi} = -\frac{(\theta-1)\psi}{m}\left[\frac{1-\alpha}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right] < 0 \tag{C.19}$$

5. Razão Produto-Capital (z)

$$\frac{\partial z^*}{\partial \theta} = \left\{\frac{1}{\alpha} - \frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \theta} = \left\{\frac{(\theta-1)+\theta\gamma-\theta(1+\gamma)}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \theta} = \left\{\frac{-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi < 0 \tag{C.20}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \rho} = -\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right] + \frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \rho} = \frac{(\theta-1)+\theta\gamma-\theta(\gamma+1)}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \rho} = \frac{-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]} < 0 \tag{C.21}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial m} = \frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1) \tag{C.22}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial B} = \frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m > 0 \tag{C.23}$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \phi} = \frac{\theta}{\alpha}\left\{\frac{[(\theta-1)+\theta\gamma][-(1-\alpha)] - (\gamma+1)\theta[-(1-\alpha)]}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right\}\psi$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \phi} = \frac{\theta}{\alpha}\left\{\frac{(1-\alpha)[(\gamma+1)\theta-(\theta-1)-\theta\gamma]}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right\}\psi$$

$$\frac{\partial z^*}{\partial \phi} = \frac{\theta}{\alpha}\frac{(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\psi > 0 \tag{C.24}$$

6. Razão Consumo-Capital (χ)

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \theta} = \left\{\frac{1}{\alpha} - \left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \theta} = \left\{\frac{(\theta-1)+\theta\gamma-(\theta-\alpha)(1+\gamma)}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \theta} = \left\{\frac{(\alpha-1)+\alpha\gamma}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \theta} = \left\{\frac{(1-\alpha)[\alpha(1-\phi)-1]}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi < 0 \tag{C.25}$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \rho} = -\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]+\frac{1}{\alpha}$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \rho} = \frac{(\theta-1)+\theta\gamma-(\theta-\alpha)(1+\gamma)}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \rho} = \frac{(\alpha-1)+\alpha\gamma}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \rho} = \frac{(1-\alpha)[\alpha(1-\phi)-1]}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]} < 0 \tag{C.26}$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial m} = \left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1) \tag{C.27}$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial B} = \left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m > 0 \tag{C.28}$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \phi} = \left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left\{\frac{[(\theta-1)+\theta\gamma][-(1-\alpha)]-(\gamma+1)\theta[-(1-\alpha)]}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right\}\psi$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \phi} = \left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left\{\frac{(1-\alpha)[(\gamma+1)\theta-(\theta-1)-\theta\gamma]}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\right\}\psi$$

$$\frac{\partial \chi^*}{\partial \phi} = \left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\frac{(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\psi > 0 \tag{C.29}$$

6. Propensão a consumir (c)

Note que a derivada parcial de c^* pode ser expressa em função de z^*, χ^* e de suas derivadas parciais. No caso da derivada parcial em relação a θ (equação semelhante pode ser encontrada para os outros parâmetros), tem-se:

$$\frac{\partial c^*}{\partial \theta} = \frac{z^*\frac{\partial \chi^*}{\partial \theta} - \chi^*\frac{\partial z^*}{\partial \theta}}{z^{*2}}$$

Como o denominador da fração é positivo, a análise se restringe ao numerador:

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{(1-\alpha)[\alpha(1-\phi)-1]}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\\
&-\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi=\\
&\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\left\{\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\alpha\gamma+\alpha-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\right.\\
&\left.-\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\right\}=\\
&\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\left\{\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right\}\right.\\
&\left.+\left\{\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\right\}\left\{\frac{-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\right\}=\\
&\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]^2\psi\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi-\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}=\\
&\left[\frac{1+\gamma}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]^2\psi\left\{\left(\frac{\theta(\gamma+1)-1}{\alpha}\right)\left[\frac{1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}>0
\end{aligned} \tag{C.30}$$

Logo, $\partial c^*/\partial\theta>0$.

Analisando o numerador para a derivada em relação a m, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1)\right\}\\
&-\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1)\right\}=\\
&\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1)\right\}\\
&+\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{-\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1)\right\}\\
&-\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1)\right\}\\
&-\left\{-\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1)\right\}=\\
&-\frac{\rho}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right](B-1)
\end{aligned} \tag{C.31}$$

Logo se $B<1$, $\partial c^*/\partial m>0$

Analisando o numerador para a derivada em relação a B, tem-se:

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m\right\}\\
&-\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m\right\}=\\
&\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m\right\}\\
&+\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{-\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m\right\}\\
&-\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m\right\}\\
&-\left\{-\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m\right\}=\\
&-\frac{\rho}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]m<0
\end{aligned}\tag{C.32}$$

Logo, $\partial c^*/\partial B < 0$

Analisando o numerador para a derivada em relação a ρ, temos:

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{(1-\alpha)[\alpha(1-\phi)-1]}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\\
&-\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}=\\
&\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\alpha(1-\phi)-1-\alpha^2(1-\phi)+\alpha}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}\\
&-\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{-1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}-\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\frac{1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}=\\
&\left\{\theta\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\rho\right\}\left\{\frac{(1-\alpha)(1-\phi)+1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}-\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\frac{1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}=\\
&\left\{(\theta-1)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi\right\}\frac{1}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}+\frac{\rho}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\\
&+\left\{\theta\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\rho\right\}\left\{\frac{(1-\alpha)(1-\psi)}{\alpha[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}>0
\end{aligned}\tag{C.33}$$

Logo, $\partial c^*/\partial \rho > 0$

Analisando o numerador para a derivada em relação a ϕ, temos:

$$\left\{\frac{\theta}{\alpha}\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\frac{(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}\psi\right\}$$
$$-\left\{\left(\frac{\theta}{\alpha}-1\right)\left[\frac{\gamma+1}{(\theta-1)+\theta\gamma}\right]\psi+\frac{\rho}{\alpha}\right\}\left\{\frac{\theta}{\alpha}\frac{(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]}\right\}=$$
$$-\frac{\rho}{\alpha}\frac{(1-\alpha)}{[(\theta-1)+\theta\gamma]^2}<0 \tag{C.34}$$

Logo, $\partial c^*/\partial\phi<0$