UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CARTOGRÁFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO

APLICAÇÃO DE MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DO DESVIO DA VERTICAL NA INTEGRAÇÃO DE POSICIONAMENTO GNSS COM LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

WENDSON DE OLIVEIRA SOUZA

Orientador: Prof. Dr. Silvio Jacks dos Anjos Garnés

Dissertação de Mestrado

Recife, 2012.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CARTOGRÁFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEODÉSICAS E TECNOLOGIAS DA GEOINFORMAÇÃO

Wendson de Oliveira Souza

APLICAÇÃO DE MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DO DESVIO DA VERTICAL NA INTEGRAÇÃO DE POSICIONAMENTO GNSS COM LEVANTAMENTOS TOPOGRÁFICOS

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, do Centro de Tecnologia e Geociências da Universidade Federal de Pernambuco, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, área de concentração Geodésia Aplicada defendida e aprovada no dia 20/11/2012.

Orientador: Prof. Dr. Silvio Jacks dos Anjos Garnés

Recife
2012

Catalogação na fonte
Bibliotecário Marcos Aurélio Soares da Silva, CRB-4 / 1175.

S729a Souza, Wendson de Oliveira.
Aplicação de métodos para determinação do desvio da vertical na integração de posicionamento GNSS com levantamentos topográficos / Wendson de Oliveira Souza. - Recife: O Autor, 2012.
198 folhas, il., gráfs., tabs.

Orientador: Profº Drº. Silvio Jacks dos Anjos Garnés.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação, 2012.
Inclui Referências e Apêndices.

1. Engenharia Cartográfica. 2. Posicionamento Geodésico. 3. Levantamento Topográfico. 4. Desvio da Vertical. I. Garnés, Silvio Jacks dos Anjos (Orientador). II. Título.

621.45 CDD (22. ed.)

UFPE
BCTG/2013-023

APLICAÇÃO DE MÉTODOS PARA DETERMINAÇÃO DO DESVIO DA VERTICAL NA NTEGRAÇÃO DO POSICIONAMENTO GNSS COM LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICOS

POR

WENDSON DE OLIVEIRA SOUZA

Dissertação defendida e aprovada em 20/11/2012.

Banca Examinadora:

_____

Prof. Dr. SILVIO JACKS DOS ANJOS GARNÉS
Departamento de Engenharia Cartográfica – Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. HAROLDO ANTONIO MARQUES
Departamento de Engenharia Cartográfica – Universidade Federal de Pernambuco

_____

Prof. Dr. ROOSEVELT DE LARA SANTOS JÚNIOR
Departamento de Geodésia – Universidade Federal do Rio Grande do Sul

DEDICATÓRIA

A minha namorada Anne Caroliny, aos meus pais Gilvaneide e Evandro, aos meus irmãos Nazaré e Wendel, e aos meus Amigos; pelo amor incondicional, compreensão e constante incentivo.

AGRADECIMENTOS

Externo meus agradecimentos, primeiramente e acima de tudo, a Deus Pai todo poderoso pela dádiva da vida e pela oportunidade de estudar em uma Universidade pública e de excelência.

A minha namorada Anne Caroliny por me fazer perceber e sentir que o Amor não depende da Geodésia; pois o verdadeiro Amor não precisa de nenhuma ciência para ser explicada. Mas a Geodésia precisa de muito amor para ser compeendida. Que o nosso amor transcenda a planos superiores da existência.

A minha família, aos meus irmãos: Maria de Nazaré e Wendel pela cumplicidade e união acima de qualquer coisa; e principalmente aos meus pais Gilvaneide e Evandro, por me apoiarem e incentivarem em todas as etapas da minha vida. Eles são os grandes responsáveis pela pessoa que sou hoje.

Ao meu orientador, o Professor Doutor Silvio Jacks dos Anjos Garnés, pela oportunidade, dedicação e confiança para trabalhar neste trabalho; que nossa parceria seja uma eterna pesquisa pautada nos valores de uma grande amizade.

A Agência Estadual de Planejamento e Pesquisas do Estado de Pernambuco – CONDEPE/FIDEM, pelo suporte necessário ao desenvolvimento desta Dissertação. Em especial aos amigos Engenheiros Orlando Valois e Paulo Carvalho, pessoas extraordinárias... A vocês minha eterna gratidão.

Ao Henrique Lins, pelo apoio, companheirismo e lealdade acima de tudo, onde antes de qualquer ato provou ser mais que um amigo: irmão-amigo.

Aos meus ilustres companheiros e guerreiros para todas as horas: Liviano Ramos, Hugo Gonçalves, Edmilson Marques, Guilherme Almeida, Jaelson, Rafael Gonçalves, Gilmar Esteves e Vitor Hugo. Saibam que nossa amizade é imensurável.

As professoras Teresa Amélia e Emanuella Barros, e ao Senhor Rivaldo pelo carinho, motivação e solidariedade. Pessoas abençoadas na minha vida.

Aos Professores do DECart pelos ensinamentos e esclarecimentos repassados; principalmente Ana Lúcia por sua alegria em educar, Portugal por suas suas idéias “brilhantes”, Schuler por suas “pespectivas” de vistas, Andrea Carneiro por sua “parcela” de contribuição, Verônica pelas ciências geodésicas, Andrea de Seixas por sua “acurácia” nas medições, Jaime por sua expertise nos “ajustamentos”, Tarcísio por seus pensamentos “refinados”, Lucilene por seus “valores cartográficos”, Haroldo por suas colaborações “celestes”, Rodrigo por sua visão moderna as “observáveis” clássicas, Gurgel por suas “soluções” além das salas de aula.

Aos colegas da pós-graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação: Thatiana Vasconcelos, Charles de Moçambique, Samuel Pinho, Wanessa Souza, Alexandre Souza, Rejane Luna, Claudia Vergetti, Ana Itamara; pelo apoio e momentos de descontração durante o curso. Manterei eternas lembranças por toda vida.

Aos colegas de trabalho: Maurílio de Lima, Maria das Graças, Wainer Araujo, Sergio Oliveira, Bartolomeu de Freitas, Ângela Maria, Edjane Leite, Fátima Rocha, Carlos Rique, Jéssica Menezes, Carlos Junior, Vanessa Maranhão, Fábio André; pelo apoio, incentivo e solidariedade.

Ao Alexandre Marinho, Victor de Moura e Anderson Schwab, pessoas essas que estiveram envolvidas no andamento da pesquisa.

À Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pela concessão da bolsa de estudos.

Enfim, a todos que acreditaram, incentivaram e participaram de alguma maneira desta jornada.

Muito Obrigado!

EPÍGRAFE

"Tudo o que se pensa e não se diz pode se tornar vítima do esquecimento. Tudo o que se diz e não se pensa pode se destruir pela inconsequência. Tudo o que se pensa em dizer e não se fala pode se transformar em arma quando dito pela boca de uma outra pessoa. Mas tudo o que se escreve pode se tornar fala ou pensamento de quem o faz leitura. Porque escrever é o único caminho para se tornar eterno."

(Ana Paula Nogueira da Cruz)

SUMÁRIO

RESUMO ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
LISTA DE FIGURAS ..... **iii**
LISTA DE TABELAS ..... **v**
LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS ..... **vii**
LISTA DE SÍMBOLOS ..... **x**

1. INTRODUÇÃO **1**
1.1. Formulação do Problema 6
1.2. Hipótese 6
1.3. Justificativas 7
1.4. Objetivos 8
1.4.1. Objetivo Geral 8
1.4.2. Objetivos Específicos 8
1.5. Estruturação do Trabalho 8

2. REFERENCIAIS CARTESIANOS **10**
2.1. Superfícies de Referência 10
2.2. Sistemas de Referência 11
2.2.1. Córrego Alegre 13
2.2.2. Astro Datum Chuá 13
2.2.3. SAD69 (*South American Datum 1969*) 14
2.2.4. WGS84 (*World Geodetic System 1984*) 15
2.2.5. SIRGAS2000 (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas) 17
2.2.6. Referencial Altimétrico 18
2.3. Concepção de Sistema Geodésico de Referência Global e Local 20
2.4. Sistemas de Coordenadas 22
2.5. Sistemas de Coordenadas Geodésicas 25
2.5.1. Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas 25

2.5.2. Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais 28
2.5.3. Transformações entre o Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e o Sistema Geodésico Cartesiano Local 30
2.6. Sistemas de Coordenadas Terrestres 31
2.6.1. Movimento Polar 31
2.6.2. Sistema de Coordenadas Astronômicas Cartesianas Locais 33
2.6.3. Sistema Topográfico Local 35
2.6.3.1. Plano Topográfico Local (PTL) 37
2.6.4. Transformações entre Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e Sistema Topográfico Local 38
2.7. Propagação de Covariâncias 39
2.7.1. Lei de Propagação das Covariâncias 40
2.7.2. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Elipsoidais em Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas 42
2.7.3. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas em Coordenadas Geodésicas Elipsoidais 43
2.7.4. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas em Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais. 43
2.7.5. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas em Coordenadas Topográficas Cartesianas Locais 44
2.8. Ajustamento por Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) 45
2.8.1. Método Paramétrico 46
2.8.2. Método Combinado 48
2.8.3. Teste de Qualidade do Ajustamento 51
2.8.4. Detecção de Erros Grosseiros – *Data Snooping* 53

3. INTEGRAÇÃO ENTRE GNSS E LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO ... 54
3.1. Desvio da vertical 54
3.1.1. Aplicações do Desvio da Vertical 57

3.1.1.1. Transformação entre Coordenadas Geodésicas e Astronômicas 58
3.1.1.2. Transformação entre Azimutes Geodésicos e Astronômicos 58
3.1.1.3. Redução de Ângulos Zenitais Medidos ao Elipsoide 59
3.1.1.4. Redução de Direções Horizontais e Ângulos Medidos ao Elipsoide 59
3.1.1.5. Redução das Distâncias Inclinadas Medidas Eletronicamente ao Elipsoide Através de Ângulos Zenitais 60
3.1.1.6. Determinação de Desníveis Elipsoidais Através de Ângulos Zenitais e Distâncias Inclinadas 62
3.1.1.7. Transformação do Sistema Topográfico Local em Geodésico Local 62
3.2. Determinação do desvio da vertical 64
3.2.1. Método astrogeodésico 64
3.2.2. Método gravimétrico 67
3.2.3. Método astrogravimétrico 70
3.2.4. Método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos 72
3.2.5. Método de Procrustes Parcial 76
3.2.6. Método do modelo relativo do Geoide local 79
3.2.7. Método do relacionamento de coordenadas topocêntricas 81
3.3. Levantamento Topográfico 83
3.3.1. Observações Lineares e Angulares 83
3.3.2. Nivelamento Geométrico de Precisão 85
3.4. Posicionamento Pelo GNSS 87
3.4.1. Posicionamento Relativo 87
3.5. Transporte de Coordenadas Geodésicas Elipsoidais 89

4. METODOLOGIA 90
4.1. Área de estudo 91
4.2. Materiais utilizados 92
4.3. Levantamento Topográfico 93
4.3.1. Observações Angulares e Lineares 93
4.3.2. Nivelamento Geométrico 95
4.4. Posicionamento pelo GNSS 97
4.5. Componentes do desvio da Vertical 98
4.5.1. Método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos 98

4.5.2. Método do modelo relativo do Geoide local 100
4.5.3. Método de Procrustes Parcial 103
4.5.4. Método do relacionamento de coordenadas topocêntricas 106

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES 107
5.1. Observações angulares e lineares 107
5.2. Coordenadas no Sistema Topográfico Local 108
5.3. Altitudes ortométricas 110
5.4. Coordenadas geodésicas do posicionamento GNSS 112
5.5. Resultantes das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η) 115
5.5.1. Método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos 116
5.5.2. Método do modelo relativo do Geoide local 118
5.5.3. Método de Procrustes Parcial 119
5.5.4. Método do relacionamento de coordenadas topocêntricas 121
5.5.5. Comparação dos Métodos 123

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES 124

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 126

APÊNDICE I Observáveis Angulares e Lineares
APÊNDICE II Observáveis do Nivelamento
APÊNDICE III Relatório do método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométrico
APÊNDICE IV Relatório do método do modelo relativo do Geoide local
APÊNDICE V Relatório do método de Procrustes Parcial
APÊNDICE VI Relatório do método do relacionamento de coordenadas topocêntricas

RESUMO

SOUZA, Wendson de Oliveira. **Aplicação de métodos para determinação do desvio da vertical na integração de posicionamento GNSS com levantamentos topográficos.** Recife, 2012, 198p. Defesa da Dissertação (Mestrado). Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco.

A evolução tecnológica espacial do sistema de posicionamento global possibilita aos usuários especialistas em Geociências efetuar posicionamento por satélite com precisão sub-métrica. Nos dias atuais, mesmo com as modernas tecnologias disponíveis para os satélites nas atividades de posicionamento GNSS, ainda assim, este tipo de levantamento não substitui as aplicações das estações totais em diversas áreas consideradas relevantes para a engenharia, tais como, Topografia de minas subterrâneas e execução de projetos da construção civil. É proposta desta pesquisa investigar integração entre posicionamento GNSS e levantamento topográfico por meio da determinação das componentes do desvio da vertical, fundamentais na compatibilização dos sistemas de coordenadas de concepção geodésica segundo a normal, e topográfica sobre a vertical do lugar, ou seja, na integração de sistemas de referências global e local, respectivamente. O desconhecimento do desvio da vertical na associação de tais sistemas pode ocasionar discrepância milimétrica, ou maior, nas resultantes das coordenadas transformadas. Em meio aos métodos da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos, da elaboração do modelo relativo do Geoide local, do problema de Procrustes Parcial, e do relacionamento de coordenadas topocêntricas; foi possível analisar oito experimentos envolvidos na densificação de coordenadas de pontos planialtimétricas situadas no *campus* Recife da UFPE. Os resultados evidenciam consistência entre tais métodos. A utilização conjunta de diferentes sistemas de referencias é possível via conhecimento das componentes do desvio da vertical. As quais proporcionam aos interessados em levantamentos desfrutar das reais potencialidades quando da combinação de medidas GNSS e observáveis topográficas convencionais.

Palavras-chave: Desvio da vertical; Posicionamento geodésico; Levantamento topográfico; Ajustamento das observações.

ABSTRACT

SOUZA, Wendson de Oliveira. **Aplicação de métodos para determinação do desvio da vertical na integração de posicionamento GNSS com levantamentos topográficos.** Recife, 2012, 198p. Defesa da Dissertação (Mestrado). Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco.

The technological evolution of the spatial positioning system enables users to make experts Geosciences satellite positioning with sub-meter accuracy. Nowadays, even with modern technologies available for satellites in GNSS positioning activities, yet this type of survey does not replace the applications of total stations in several areas considered relevant to engineering, such as topography and underground mines execution of construction projects. It is proposed in this research was to investigate the integration between GNSS positioning, and surveying by determining the deviation of vertical components, the fundamental aligning the coordinate systems design geodesic according to normal, and on the topographic vertical position, in other words, the integration systems of global and local references, respectively. The lack of deviation from the vertical in the association of such systems may cause discrepancy millimeter or greater, resulting in the transformed coordinates. Amid the methods of combination of the ellipsoidal height differences with orthometric, drawing on the model of the geoid place, the problem of Partial Procrustes, and the relationship of local coordinates; parse eight experiments involved in densification coordinates of three-dimensional points located on the *campus* Recife of UFPE. The results show consistency between such methods. The combined use of different reference systems is possible by means of knowledge of the components of the deviation from vertical. Which provide those interested in surveying enjoy the real potential when combining GNSS measurements and conventional topographic observable.

Keywords: Deviation from vertical; Geodetic positioning; Topographic surveying; Adjustment of observations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Superfícies Física e geométrica da Terra 10
Figura 2 – Superfície Física da Terra, Geoide e Elipsoide. 19
Figura 3 – Rede de estação do ITRF2008. 21
Figura 4 – Elipsoides global, local e convencional da Terra. 22
Figura 5 – Referenciais geodésico cartesiano e geodésico elipsoidal 25
Figura 6 – Referencial geodésico cartesiano local e coordenadas polares. 28
Figura 7 – Movimento polar de Chandler. 32
Figura 8 – Referenciais astronômico cartesiano local e coordenadas polares. 33
Figura 9 – Sistema Topográfico Local e coordenadas polares. 36
Figura 10 – Dimensionamento do Plano Topográfico Local. 37
Figura 11 – Relação entre Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e Sistema Topográfico Local. 38
Figura 12 – Desvio da vertical. 54
Figura 13 – Componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η) do desvio da vertical (θ) projetadas na esfera celeste a partir de um ponto P na Superfície Física da Terra. 55
Figura 14 – Projeção do desvio da vertical no alinhamento de azimute (α) em função das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η). Vista de uma porção plana da esfera celeste. 56
Figura 15 – Geometria da redução das distâncias inclinadas para o Elipsoide via ângulos zenitais. 60
Figura 16 – Ângulo esférico (Ψ), elemento de área ($ds=R2d\sigma$) na esfera de raio médio (R), elemento de ângulo (dA) no plano do equador 68
Figura 17 – Desvio da vertical e ondulação geoidal ao longo de uma seção normal de azimute (α) 69
Figura 18 – Raios das zonas de cálculos, onde os pontos azuis são as estações gravimétricas e os números correspondem pontos de Laplace. 71
Figura 19 – Relação entre Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e Sistema Topográfico Local. 76

Figura 20 – Relacionamento entre Sistemas Geodésicos Cartesianos e Sistema Topográfico Local. 81
Figura 21 – Levantamento por irradiação no Sistema Topográfico Local. 84
Figura 22 – Nivelamento geométrico. 85
Figura 23 – Elementos do transporte de coordenadas. 89
Figura 24 – Localização dos pontos na área de estudo em maquete 3D. 92
Figura 25 – Pontos visados a partir do LAASTRO (LAA) em maquete 3D. 94
Figura 26 – Nivelamento dos pontos na área de estudo. 96
Figura 27 – Vetores dos pontos a estação RECF/RBMC. 97
Figura 28 – Relação entre os 13 pontos na área de estudo. 99
Figura 29 – Relação entre o ponto médio (P_o) e os 13 pontos na área de estudo. 101
Figura 30 – Relação dos pontos envolvidos nas situações i) e iii). 104
Figura 31 – Relação dos pontos envolvidos na situação ii). 104
Figura 32 – Resíduos das observáveis de diferença de nível envolvidas em 46 sessões. 111
Figura 33 – Modelo de obtenção das precisões e das correlações. 113

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do Córrego Alegre. 13
Tabela 2 – Parâmetros do SAD69. 14
Tabela 3 – Parâmetros do vértice Chuá em SAD69. 15
Tabela 4 – Parâmetros do WGS84. 17
Tabela 5 – Pré-análise da componente meridiana (ξ) da Equação 102. 66
Tabela 6 – Pré-análise da componente primeiro vertical (η) da Equação 103. 66
Tabela 7 – Pré-análise da componente primeiro vertical (η) da Equação 104. 66
Tabela 8 – Pré-análise da incerteza da projeção do desvio da vertical tendo como base as incertezas nos desníveis elipsoidais e ortométricos. 74
Tabela 9 – Levantamento realizado em 06/04/2011. 107
Tabela 10 – Levantamento realizado em 13/04/2011. 107
Tabela 11 – Redução do ângulo zenital e distância inclinada ao solo. 108
Tabela 12 – Coordenadas topográficas locais da situação i. 108
Tabela 13 – Coordenadas topográficas locais da situação ii. 109
Tabela 14 – Coordenadas topográficas locais da situação iii. 109
Tabela 15 – Teste estatístico do ajustamento do nivelamento. 110
Tabela 16 – Resultado do nivelamento de precisão. 111
Tabela 17 – Coordenadas no Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico SIRGAS2000. 112
Tabela 18 – Correlações das linhas de base dos pontos a estação RECF. 113
Tabela 19 – Coordenadas geodésicas elipsoidais SIRGAS2000. 114
Tabela 20 – Correlações das coordenadas geodésicas elipsoidais. 114
Tabela 21 – Coordenadas no Sistema Geodésico Cartesiano Local. 115
Tabela 22 – Componentes do desvio da vertical através da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos. 116
Tabela 23 – Teste estatístico do método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos. 117
Tabela 24 – Teste estatístico do método do modelo relativo do Geoide local. 118
Tabela 25 – Resultado do método de Procrustes Parcial para as três situações. 120

Tabela 26 – Resultado do método do relacionamento de coordenadas topocêntricas. 122
Tabela 27 – Teste estatístico do método do relacionamento de coordenadas topocêntricas. 122
Tabela 28 – Resultado geral dos métodos envolvidos na pesquisa. 123

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AstGeoTop	Programa computacional para Astronomia, Geodésia e Topografia
BIH	*Bureau International de L'Heure*
GAGAN	*GPS Aided Geo Augmented Navigation ou GPS and GEO Augmentation System*
CIO	*Conventional International Origin*
Compass	*Compass Navigation Satellite System*
CTG	Centro de Tecnologia e Geociências
CTP	*Conventional International Pole*
DECart	Departamento de Engenharia Cartográfica
DoD	*Department of Defense*
DORIS	*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*
EGNOS	*European GPS Navigation Overlay System*
Galileo	*European Satellite Navigation System*
GLONASS	*Global Orbiting Navigation Satellite System*
GNSS	*Global Navigation Satellite System*
GPS	*Global Positioning System*
GRS80	*Geodetic Reference System 1980*
IAG	*International Association of Geodesy*
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IERS	*International Earth Rotation Service*
IGS	*International GNSS Service*
ILS	*International Latitude Service*
INCRA	Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária
IPMS	*International Polar Motion Service*
IRM	*International Reference Meridian*
IRP	*International Reference Pole*
IRNSS	*Indian Regional Navigational Satellite System*
ITRF	*International Terrestrial Reference Frame*

ITRS	*International Terrestrial Reference System*
IUGG	*International Union of Geodesy and Geophisics*
LAASTRO	Laboratório de Astronomia
LLR	*Lunar Laser Range*
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados
MSAS	*Multi-functional Satellite Augmentation System*
MVC	Matriz Variância-Covariância
NAVSTAR-GPS	*Navigation Satellite with Time and Ranging-Global Positioning System*
NE	Ponto cardeal de Nordeste
NIMA	*National Imagery and Mapping Agency*
NW	Ponto cardeal de Noroeste
ppm	partes por milhão
PTL	Plano Topográfico Local
QZSS	*Quasi-Zenith Satellite System*
RBMC	Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo
RECF	Estação Recife pertencente à RBMC
RIBaC	Rede INCRA de Bases Comunitárias
RN	Referência de nível
RRNN	Plural de Referência de Nível
SAD69	*South American Datum 1969*
SBAS	*Satellite-Based Augmentation System*
SCN	Sistema Cartográfico Nacional
SCA	Sistema de Controle Ativo
SE	Ponto cardeal de Sudeste
SFT	Superfície Física da Terra
SGB	Sistema Geodésico Brasileiro
SGL	Sistema Geodésico Local
SGR	Sistema Geodésico de Referência
SIRGAS	Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas
SLR	*Satellite Laser Ranging*
STL	Sistema Topográfico Local
SW	Ponto cardeal de Sudoeste

UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
VLBI	*Very Long Baseline Interferometry*
WGS84	*World Geodetic System 1984*
WAAS	*Wide Area Augmentation System*

LISTA DE SÍMBOLOS

ξ	Componente meridiana do desvio da vertical
η	Componente primeiro vertical do desvio da vertical
θ	Desvio da vertical
a	Semi-eixo maior do Elipsoide
b	Semi-eixo menor do Elipsoide
f	Achatamento do Elipsoide
h	Altitude geométrica ou elipsoidal
ϕ	Latitude geodésica
Φ	Latitude astronômica
λ	Longitude geodésica
Λ	Longitude astronômica
H	Altitude ortométrica
ω	Velocidade angular da Terra
GM	Constante gravitacional geocêntrica
J_2	Fator dinâmico de forma
$\vec{g}$	Vetor gravidade
N	Ondulação geoidal
N	Raio de curvatura da seção primeiro vertical ou grande normal
M	Raio de curvatura da seção meridiana
e^2	Primeira excentricidade ao quadrado
e'^2	Segunda excentricidade ao quadrado
u	Grandeza auxiliar (latitude reduzida)
o	Ponto origem
α	Azimute geodésico
Z	Ângulo zenital geodésico ou elipsoidal
S, D	Distâncias inclinadas
Q	Quadrante
h'	Altura angular

A'	Azimute do sistema astronômico local
$(X,Y,Z)_G$	Coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas
$(X,Y,Z)_{GL}$	Coordenadas geodésicas cartesianas locais
$(X,Y,Z)_{AL}$	Coordenadas astronômicas cartesianas locais
$(X,Y,Z)_{TL}$	Coordenadas topográficas cartesianas locais
R_1	Matriz de rotação entorno do eixo X_G
R_3	Matriz de rotação entorno do eixo Z_G
A	Azimute topográfico
z	Ângulo zenital terrestre
R	Matriz de rotação
D	Matriz Jacobiano
σ_{ij}	Covariância entre as variáveis i e j
σ_i^2	Variância da variável i
σ_i	Desvio padrão da variável i
Σ_i	Matriz variância-covariância da variável i
α	Azimute geodésico da projeção do desvio da vertical entre dois pontos
β	Azimute geodésico da vertical
δ	Ângulo de refração
κ	Coeficiente de refração atmosférico
R	Raio médio da Terra esférica
γ	Valor da gravidade normal média
Δg	Anomalia da gravidade média
$S(\Psi)$	Função de Stokes
Ψ	Ângulo esférico
θ_α	Desvio da vertical ao longo de uma seção normal
s	Distância geodésica
U,V	Matrizes da decomposição de valor singular
I	Matriz identidade
H_Z	Ângulo horizontal
D_H	Distância horizontal

ΔH_{ij}	Desnível entre as variáveis i e j
L_a	Vetor das observações ajustadas
L_b	Vetor das observações
V	Vetor dos resíduos
gl	Grau de liberdade
ε	Ângulo de orientação plana entre os eixos Y_{GL} e Y_{TL}
χ^2	Distribuição qui-quadrado
X_a	Vetor dos parâmetros ajustados
A	Matriz das derivadas parciais das equações de observações em relação aos parâmetros
B	Matriz das derivadas parciais das equações de observações em relação às observações
L_o	Vetor do valor aproximado
L	Vetor da diferença entre L_b e L_o
P	Matriz dos pesos
σ_o^2	Variância de referência *a priori*
$\hat{\sigma}_o^2$	Variância de referência *a posteriori*
X	Vetor das correções
K	Vetor dos multiplicadores de Lagrange ou dos correlatos
W	Vetor erro de fechamento
w	Resíduo normalizado
Z_r	Ângulo zenital reduzido ao solo
e	Erro de curvatura da Terra

1. INTRODUÇÃO

Algumas décadas atrás no mundo, cerca da metade do século passado, as medições geodésicas e topográficas se valiam de forma exclusiva de equipamentos analógicos para a aquisição de observáveis angulares e lineares. Da qual eram necessárias várias campanhas para que os trabalhos de campo fossem finalizados, onde as dificuldades para se determinar as coordenadas de uma estação ocupada contracenava com o tempo despendido no processamento dos dados levantados. Nesse sentido, vale destacar a bravura e a força de vontade “daqueles” envolvidos nessas atividades geodésicas e topográficas em meio às condições oferecidas.

Aliado a isso, nessa época não havia calculadora eletrônica e os computadores existentes eram enormes e pesados. Com isso os cálculos matemáticos apresentavam-se de forma apenas manual, às vezes por meio de Ábaco, e os ângulos efetuados pelas funções trigonométricas eram obtidos através de tabelas. Todavia, a precisão de uma determinada coordenada calculada possuía dependência quanto à precisão das tabelas trigonométricas, as quais não chegavam a cinco casas decimais.

A partir do surgimento da microeletrônica e, especialmente, da informática ocorreu o desenvolvimento de instrumentos e o aperfeiçoamento de métodos de medição; revolucionando as fases de aquisição, processamento e representação das informações coletadas em campo. Os cálculos até então manuais deram lugar as calculadoras digitais e programas computacionais específicos. Os antigos equipamentos ótico-mecânicos aos poucos foram sendo substituídos por outros eletrônicos. As inovações possibilitaram melhorias dos aspectos de confiabilidade e velocidade.

Além disso, ainda nesse momento a obtenção das coordenadas geodésicas tridimensionais era limitada, ou seja, as coordenadas planimétricas eram operações independentes da obtenção das coordenadas altimétricas. Esta distinção fez com que não houvesse correlação entre ambas, onde muitas estações tinham apenas coordenadas planimétricas, mas não coordenadas altimétricas e vice-versa.

Com o advento do sistema de posicionamento global por satélite a Geodésia obteve elevado grau de sofisticação para o cumprimento dos objetivos a que se destina, da determinação da forma, das dimensões e do campo gravitacional do planeta Terra. Em consequência, tal sofisticação também ocorre na Topografia em sua finalidade de determinar áreas limitadas da superfície terrestre. Assim, a partir do recebimento dos sinais enviados pelos satélites as antenas dos receptores era possível obter as coordenadas tridimensionais de uma determinada estação rastreada em qualquer região na superfície da Terra independentemente do horário, das condições climáticas e da intervisibilidade entre as estações. O que permitiu ampliar a atuação da Geodésia para aplicações até então inimagináveis como, por exemplo, no controle de frotas de veículos, na agricultura, com a moderna agriculta de precisão, entre outros.

Dessa abordagem histórica até os dias atuais, onde graças à evolução tecnológica espacial acompanhada pela modernização instrumental e por processadores computacionais cada vez mais rápidos, tornou-se possível aos usuários especialistas em Geociências e áreas afins efetuar posicionamento por satélite com precisão sub-métrica. Proporcionando menos recursos humanos, e mais agilidade nos levantamentos de campo.

Hoje em dia, entretanto, mesmo com as potencialidades da tecnologia disponível para os satélites nas atividades de posicionamento, ainda assim, este tipo de levantamento não substitui as aplicações das estações totais em diversas áreas consideradas relevantes para a Engenharia, tais como, Topografia de minas subterrâneas e na parte da execução de projetos da construção civil. Além de que, as estações totais tem papel imprescindível nos levantamentos topográficos, sendo a Topografia essencial em todas as fases nos empreendimentos da Engenharia Civil; como, por exemplo, terraplenagem, locação de obras, execução do monitoramento estrutural e levantamento *“as-built”.*

Portanto, desse contexto, investiga-se a integração entre posicionamento por satélite e levantamento topográfico por meio do conhecimento do desvio da vertical nos ambientes de trabalho, algo que raramente ocorre em território brasileiro. Aliás, ressalta-se que esse conhecimento é argumento fundamental à ligação dos dois sistemas, o primeiro efetuando medidas segundo a normal geodésica e o segundo sobre a vertical do lugar, respectivamente, os sistemas globais e os sistemas locais. O desconhecimento do desvio da vertical na associação de tais sistemas pode ocasionar discrepância milimétrica, ou maior, nas resultantes das coordenadas transformadas.

Cabe evidenciar que o sistema global é utilizado pela Geodésia para determinar posições de pontos sobre a superfície terrestre tendo como a origem do sistema o centro de massa da Terra ou um local próximo a ela, onde incluiu os oceanos e a atmosfera, através de sistemas de coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas ou elipsoidais. Enquanto que, o sistema local é empregado na Topografia para referenciar áreas limitadas do território terrestre por meio de um sistema de coordenadas cartesiano retangular ou polar.

Nessa visão introdutória chama-se a atenção para a NBR 13.133[1] publicada em maio de 1994, quando pela primeira vez no Brasil uma norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) define o sistema local empregado na Topografia por Sistema Topográfico Local (STL). No entanto, ainda assim, de acordo com a Norma Técnica citada, a Topografia continua com um caráter apenas relativo, pois não houve integração definitiva com a Geodésia (GARNÉS, 2005).

No âmbito desta pesquisa são adotados métodos que utilizam medidas do rastreio por satélite e observáveis clássicas da Topografia para a determinação das componentes do desvio da vertical. Assim, são empregados os métodos: da elaboração do modelo relativo do Geoide local, do problema de Procrustes Parcial, do relacionamento de coordenadas topocêntricas, e da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos.

[1] ABNT NBR 13.133 (1994) trata sobre Execução de Levantamento Topográfico, e pode ser obtida no endereço eletrônico: http://www.abnt.org.br.

O método da modelagem relativa do Geoide local determina as componentes do desvio da vertical através das diferenças de ondulações geoidais como função das diferenças de coordenadas geodésicas elipsoidais, latitude e longitude. Resultando-se na interpolação pelo Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) no desenvolvimento de uma função polinomial, da qual assume a forma de uma equação quadrática em duas variáveis.

Salienta-se que os métodos de Procrustes Parcial e do relacionamento de coordenadas topocêntricas, possuem o mesmo princípio na obtenção das componentes do desvio da vertical pelo uso do posicionamento geodésico por satélite em função da normal geodésica, e do posicionamento por goniometria[2] vinculado a vertical do lugar. Com isso, faz-se necessário o conhecimento de coordenadas de pontos envolvidos nos sitemas global e local utilizados pelos receptores GNSS[3] e estação total, respectivamente.

O método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos determina as componentes do desvio da vertical a partir do relacionamento entre posicionamento pelo GNSS e nivelamento de precisão. As observáveis GNSS fornecem, após transformação, latitude e longitude geodésicas, assim como, altitude elipsoidal. De modo que, o levantamento altimétrico de precisão proporciona alturas relativas à Referência de Nível. Assim, a determinação das componentes do desvio da vertical por esse método permite resultados de melhor qualidade em função da precisão envolvida nos equipamentos, receptores GNSS e Nível.

[2] Goniometria é a parte da topografia onde se estuda os instrumentos, métodos e processos utilizados na determinação dos ângulos.

[3] GNSS (*Global Navigation Satellite System*) traduzido por Sistema Global de Navegação por Satélite é o termo mais usual para se referir aos atuais sistemas de navegação por satélite, ou seja: o norte americano NAVSTAR-GPS (*Navigation Satellite with Time and Ranging-Global Positioning System*), o russo GLONASS (*Global Orbiting Navigation Satellite System*), o europeu Galileo (*European Satellite Navigation System*), o chinês Beidou/Compass (*Compass Navigation Satellite System*), o indiano IRNSS (*Indian Regional Navigational Satellite System*) e os satélites baseados em sistemas de aumentação SBAS (*Satellite-Based Augmentation System*), tais como, WAAS (*Wide Area Augmentation System*), EGNOS (*European GPS Navigation Overlay System*), MSAS (*Multi-functional Satellite Augmentation System*), QZSS (*Quasi-Zenith Satellite System*), e GAGAN (*GPS Aided Geo Augmented Navigation* ou *GPS and GEO Augmentation System*). Maiores considerações teóricas sobre a tecnologia GNSS podem ser encontradas em Monico (2008).

Nesta pesquisa a determinação das componentes do desvio da vertical envolveu a investigação de oito experimentos, desenvolvidos pela densificação de coordenadas de pontos planialtimétricos referenciados aos sistemas global e local. Em que, as coordenadas foram obtidas por meio do pós-processamento de medidas do posicionamento por satélite e das transformações dos levantamentos de medições lineares, angulares, e altimétricas vinculadas ao nivelamento de precisão. Por conseguinte, utilizou-se como área de estudo o *campus* universitário de Recife da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e seu entorno.

Convém destacar que tal área de estudo foi requerida em virtude da utilização de uma das estações da Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC), denominada RECF[4], e o Laboratório de Astronomia (LAASTRO), onde consta de um pilar de concreto dotado de dispositivo de centragem forçada responsável por determinar os valores das componentes do desvio da vertical.

Assim, com as condições adequadas à pesquisa, foi possível investigar a determinação das componentes do desvio da vertical visando solucionar a integração entre sistemas de referências glocal e local, isto é, a compatibilização entre posicionamento pelo GNSS e levantamento topográfico. De modo que os procedimentos metodológicos e os resultados alcançados sirvam de estímulo e de incentivo aos usuários interessados na obtenção de tais componentes, assim como, possam beneficiar os mapeamentos cartográficos e obras de engenharia.

[4] RECF pertence à RBMC de código internacional 93110.

1.1. Formulação do Problema

Hoje em dia é cada vez maior a utilização conjunta de diferentes sistemas de coordenadas em função do avanço tecnológico disponível nas Geociências e áreas afins. É comum a convivência ou a junção de levantamentos entre receptores GNSS e estações totais. No entanto, em determinadas situações alguns pontos não podem ser ocupados por receptores GNSS devido à obstrução nos sinais enviados pelos satélites. Geralmente nessa situação é realizada uma poligonal topográfica do tipo enquadrada, apoiada ou fechada, onde se inicia e termina em coordenadas de pontos conhecidas obtidas pelo uso do posicionamento por satélite, e as coordenadas dos pontos intermediários são determinadas topograficamente a partir de medições angulares e lineares. Por conseguinte, o problema consiste em integrar as coordenadas dos pontos relacionadas às medidas GNSS e as coordenadas dos pontos obtidas a partir de transformações de observáveis topográficas.

As coordenadas dos pontos levantados por receptores GNS*S* são determinadas em um Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas, vinculadas a um Sistema Geodésico de Referência. Enquanto que as observáveis angulares e lineares coletadas em campo são remetidas a um plano topográfico local. Dessa forma, a questão relevante perdura em como compatibilizar o referencial geodésico cartesiano geocêntrico e o cartesiano local, respectivamente, envolvidos nos receptores de satélites e estações totais?

1.2. Hipótese

Face ao questionamento apresenta-se a seguinte hipótese:

- A determinação das componentes do desvio da vertical com incertezas melhores a 1” é obtida por meio da densificação de coordenadas de pontos no *campus* Recife da UFPE e arredores, de concepção global e local, relacionadas as medidas GNSS e observáveis clássicas da topografia, respectivamente.

1.3. Justificativas

Com o surgimento da tecnologia de posicionamento por satélite, os levantamentos geodésicos atuais tornaram-se, mais eficientes e mais práticos do que os levantamentos executados com procedimentos clássicos da Geodésia. O rastreio por GNSS permite a obtenção das coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas $(X,Y,Z)_G$ que após a transformação obtém-se as coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ, λ, h) referidas a um Sistema Geodésico de Referência. No entanto, as atividades de mapeamento cartográfico e obras de engenharia rotineiramente utilizam equipamentos vinculados a sistemas de referências global e local, ou seja, receptores de satélite e estações totais, respectivamente. Contudo, em tais execuções de trabalhos faz-se necessário o relacionamento de observáveis referenciadas ao centro de massa da Terra ou próxima a ela, com outras obtidas por meio de levantamentos referenciados a superfície terrestre.

Além do mais, é válido resaltar que a qualidade do posicionamento pelo GNSS depende que os sinais enviados pelos satélites as antenas dos receptores não sejam obstruídos. Caso contrário, há uma perda de potencialidade quando se realiza posicionamento em locais com alguma espécie de obstrução dos sinais transmitidos pelos satélites, tais como, matas fechadas, minas subterrâneas, túneis, edificações, entre outras. Nestes casos, o posicionamento pelo GNSS pode ser integrado a métodos de levantamentos topográficos por meio de equipamentos como estações totais. Os dois procedimentos combinados e devidamente integrados se tornam uma ferramenta de grande importância, possibilitando continuidade e confiabilidade nos levantamentos realizados, principalmente, em áreas de difícil acesso.

Nesse sentido, faz-se necessária integração de sistemas de referências global e local, ou seja, transformações das coordenadas vinculadas as observáveis do posicionamento GNSS e do levantamento topográfico. Portanto, o conhecimento do desvio da vertical é imprescindível para a integração de tais sistemas, cujo desconhecimento provoca discrepância milimétrica ou superior nas resultantes das coordenadas transformadas.

1.4. Objetivos

Esta pesquisa tem como objetivos:

1.4.1. Objetivo Geral

Estabelecer integração de sistemas de referências global e local, envolvidos no posicionamento pelo GNSS e nos levantamentos topográficos, respectivamente.

1.4.2. Objetivos Específicos

- determinar as componentes do desvio da vertical, componente meridiana (ξ) e componente primeiro vertical (η);
- analisar os métodos quanto a sua viabilidade na determinação do desvio da vertical (θ): método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos, método da elaboração do modelo relativo do Geoide local, método do problema de Procrustes Parcial, e método do relacionamento de coordenadas topocêntricas; e
- desenvolver uma metodologia exequível via análises experimentais na compatibilização entre coordenadas vinculadas as medidas GNSS e observáveis clássicas da topografia.

1.5. Estruturação do Trabalho

O trabalho está dividido, organizado e sucintamente descrito como segue:

- Capítulo 1 – Introdução: são apresentadas as considerações gerais sobre a importância do desvio da vertical nos ambientes de trabalhos no que visa integração entre posicionamento por satélite e levantamento topográfico.

- Capítulo 2 – Referenciais Cartesianos: abordagem de conceitos relevantes para o melhor entendimento deste trabalho por meio das superfícies de referências empregadas nos levantamentos geodésicos, sistemas de coordenadas e demais assuntos essenciais à pesquisa.

- Capítulo 3 – Integração entre GNSS e levantamento topográfico: apresenta-se a definição, a importância, e os principais métodos envolvidos na obtenção das componentes do desvio da vertical. Assim como, as características e o contexto no qual a pesquisa foi desenvolvida.

- Capítulo 4 – Metodologia: maior ênfase para os detalhes do desenvolvimento e implementação da área de estudo. Assim como, os procedimentos metodológicos empregados em campo para a obtenção das componentes do desvio da vertical.

- Capítulo 5 – Resultados e Discussões: abordagem geral dos dados obtidos oriundos dos métodos empregados. Consequentemente, comparação e análises dos experimentos.

- Capítulo 6 – Conclusões e Recomendações com os conhecimentos adquiridos ao longo da pesquisa, e contribuições para trabalhos futuros. De modo a subsidiar um eventual estudo aos interessados nos assuntos tratados.

- Referências Bibliográficas: tem-se a intenção de agrupar o texto da dissertação de um conjunto suficiente e adequado de referências necessárias para a consolidação dos argumentos expostos, desde livros, artigos e informações de endereço eletrônico.

- Apêndices: informações fundamentais referentes, principalmente, aos cálculos matemáticos utilizados nos métodos da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos, da elaboração do modelo relativo do Geoide local, do problema de Procrustes Parcial, e do relacionamento de coordenadas topocêntricas, na determinação das componentes do desvio da vertical no *campus* Recife da UFPE.

2. REFERENCIAIS CARTESIANOS

O presente capítulo visa apresentar e revisar a respeito dos sistemas de coordenadas cartesianas tridimensionais utilizados nas aplicações geodésicas e topográficas; assim como, o interrelacionamento de tais sistemas por meio de suas transformações.

2.1. Superfícies de Referência

Diariamente os geodesistas encontram-se envolvidos com três superfícies[5]: a Superfície Física da Terra, a do modelo geométrico (Elipsoide) e a do modelo físico (Geoide), segundo Gemael (1999). Essas três quantidades são essenciais para as atividades geodésicas e o entendimento sobre a Terra, representados na Figura 1.

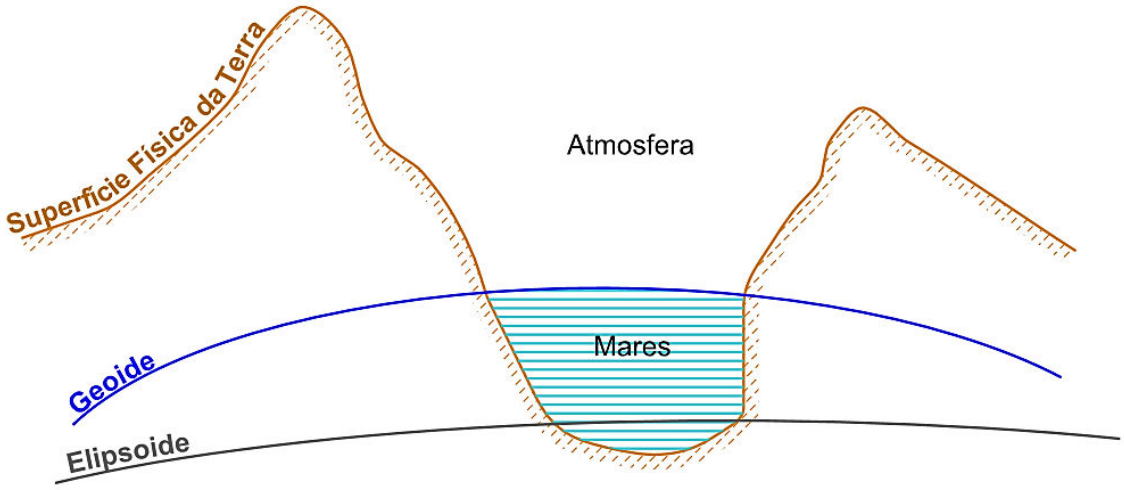

Figura 1 – Superfícies Física e geométrica da Terra.
Fonte: Adaptada de Seeber (2003).

A Superfície Física da Terra ou também conhecida por superfície topográfica, onde são realizadas as operações geodésicas e topográficas, é definida como o limite entre as massas sólidas ou fluidas (continentes e oceanos) e atmosfera; caracteriza-se por ser uma superfície irregular e de geometria complexa. Na qual, traz muitas dificuldades para descrever matematicamente sobre tal superfície a posição espacial dos pontos na Terra (ROMÃO, 2005).

[5] As atividades geodésicas não se limitam apenas a essas superfícies, haja vista que há aplicações geodésicas em áreas fluidas, como por exemplo, levantamentos batimétricos.

De acordo com De Freitas e Blitzkow (1999), a forma atribuída à Terra é a do Geoide. Este é limitado pela superfície geopotencial, entendida até o momento como sendo materializada pela superfície equipotencial melhor ajustada com o nível médio não perturbado dos mares. A adoção do Geoide como superfície de referência geométrica esbarra no conhecimento limitado do campo da gravidade da Terra, em virtude do seu equacionamento matemático laborioso. No entanto, essa superfície é tomada como referência na determinação da altitude dos pontos na superfície terrestre.

Contudo, tendo em vista a impossibilidade de execução dos cálculos geodésicos nas superfícies irregulares da Terra e do Geoide, em função da complexidade de um modelo matemático que as definam, é que os geodesistas adotaram uma superfície onde o tratamento matemático é mais viável, ou seja, trata-se do Elipsoide de revolução. O Elipsoide é uma superfície matemática com forma e dimensões próximas ao Geoide; e é utilizado nos levantamentos e cálculos geodésicos como uma superfície de referência no posicionamento horizontal (GEMAEL, 1999), e nos dias atuais também no posicionamento vertical para diversos propósitos.

2.2. Sistemas de Referência

Os sistemas de referência ou sistemas de coordenadas são utilizados para descrever de modo único as posições de objetos. Em atividades ligadas as Ciências Geodésicas, quando é necessário definir a posição de um determinado objeto na superfície da Terra, são utilizados os Sistemas Geodésicos de Referência[6] (SGR); no qual tem como superfície de referência o Elipsoide de revolução. Além do mais, segundo Oliveira (1998) as etapas necessárias para o estabelecimento de um sistema de referência são descritas por: concepção, definição; materialização e densificação.

[6] Pode-se encontrar a expressão: Referencial Geodésico.

A concepção ou idealização é pertinente ao espaço abstrato, evidencia o princípio conceitual que se pretende atingir com o sistema (OLIVEIRA, 1998). De acordo com Blitzkow e Matos (2002) a conceituação de um referencial ideal é aquele em que a origem do sistema segue a lei newtoniana da inércia, ou seja, se mantém em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Assim, é necessário um referencial geodésico cujos eixos coordenados sejam fixos no espaço, tanto em relação à origem quanto à orientação, ou estejam sujeitos a variações no tempo bem conhecidas em relação a algo fixo, por exemplo, estação de referência.

Segundo Zanetti (2006) e Oliveira (1998) a definição ou convenção de um sistema de referência inclui o estabelecimento de princípios que fixam a origem, a orientação e a escala de sistemas de coordenadas. No qual inclui a escolha de constantes, parâmetros (implícita a seleção do Elipsoide de revolução) e informações necessárias para correlacionar os espaços abstrato e físico.

A materialização de um sistema de referência é feita por um conjunto de coordenadas de estações devidamente materializadas sobre a superfície da Terra, obtidas através de diferentes técnicas de posicionamento, criando a estrutura ou Rede de referência[7] (BLITZKOW; MATOS, 2002).

A densificação de uma rede de referência tem como propósito a implantação e distribuição de um conjunto de coordenadas de estações com um espaçamento menor entre as estações materializadas, das quais compõem as redes de referência continental, nacional ou regional (BLITZKOW; MATOS, 2002).

A seguir serão apresentados cronologicamente os principais Sistemas Geodésicos de Referência utilizados em território brasileiro.

[7] Segundo Oliveira (1998) Rede de referência estabelece um conjunto de estações, interligadas por modelo geométrico adequado, que permite descrever, quatitativamente e qualitativamente, os valores relativos à posição e movimento de objetos, associados ao sistema de coordenadas ou sistema de referência.

2.2.1. Córrego Alegre

Historicamente este foi o primeiro Sistema Geodésico de Referência a ser adotado no Brasil no início da década de 50 até o fim da década de 70. Na definição deste sistema adotou-se como parâmetros, Tabela 1:

Tabela 1 – Parâmetros do Córrego Alegre.

Elipsoide	Elipsoide Internacional de Hayford
Semi-eixo maior (*a*)	6378388 m
Achatamento (*f*)	1/297

Fonte: IBGE (1996).

Como ponto origem foi escolhido o vértice de triangulação Córrego Alegre, no qual o posicionamento e a orientação do Elipsoide de referência foram determinados astronomicamente. Neste vértice as componentes do desvio da vertical foram ignoradas, isto é, foi assumida a coincidência entre Geoide e Elipsoide, implicando numa igualdade das coordenadas geodésicas (ϕ,λ) e astronômicas (Φ,Λ), e no valor da ondulação geoidal igual a zero, neste ponto (GEMAEL; ANDRADE, 2004):

$$\phi = \Phi = 19^{\circ}\ 50'\ 14{,}91''\ \mathrm{S} \tag{1}$$

$$\lambda = \Lambda = 48^{\circ}\ 57'\ 41{,}98''\ \mathrm{W} \tag{2}$$

O vértice Córrego Alegre tem como altitude ortométrica (IBGE, 1996):

$$H = 683{,}81\ \ m \tag{3}$$

2.2.2. Astro Datum Chuá

Este sistema foi estabelecido pelo IBGE em caráter provisório, entre Sistema Geodésico de Referência Córrego Alegre e SAD69. O Astro Datum Chuá tem como origem o vértice Chuá, localizado na mesma rede de triangulação do Córrego Alegre e também de mesmo Elipsoide de referência, Elipsoide internacional de Hayford.

Segundo IBGE (2012a), tal sistema desenvolveria o papel de um sistema razoável a ser utilizado na uniformização dos dados disponíveis na época (o IBGE tinha recém concluído um ajustamento da rede planimétrica referido a este sistema). Isso não representaria ainda o sistema "ótimo" para a América do Sul, faltando ainda a boa adaptação Geoide-Elipsoide para que as observações geodésicas terrestres pudessem ser reduzidas à superfície do Elipsoide. Assim, na condição de um sistema provisório, as componentes do desvio da vertical foram desprezadas, ou seja, foi adotada a coincidência entre Geoide e Elipsoide, no ajustamento das coordenadas em Astro Datum Chuá.

2.2.3. SAD69 (*South American Datum 1969*)

O SAD69 é um Sistema Geodésico de Referência de concepção clássica que tinha como objetivo a unificação do referencial para os trabalhos geodésicos e cartográficos na América do Sul (COSTA, 1999). Tal sistema adota o Elipsoide de referência internacional de 1967, aceito pela Assembleia Geral da Associação Geodésica Internacional (*International Association of Geodesy* – IAG) que teve lugar em Lucerne, no ano de 1967 (IBGE, 1983). A utilização do SAD69 como sistema de referência único para a América do Sul foi recomendada em 1969 devido à aprovação do relatório final do Grupo de Trabalho sobre o *datum* Sul Americano, pelo Comitê de Geodésia reunido na XI Consultoria Pan-americana sobre Cartografia, em Washington, EUA (CASTAÑEDA, 1986). Sua materialização foi realizada por técnicas e métodos de posicionamento terrestre, destacando-se triangulação e poligonação. Este sistema foi adotado no Brasil no final da década de 70, na definição deste sistema adotou-se como parâmetros, Tabela 2:

Tabela 2 – Parâmetros do SAD69.

Parâmetros	Notação	Valor
Semi-eixo maior	a	6378160 m
Achatamento	f	1/298,25
Velocidade angular da Terra	ω	7,292115146 x 10^{-5} rad/s
Constante gravitacional geocêntrica	GM	398,603x10^{9} m^3/s^2
Fator dinâmico de forma	J_2	10827 x 10^{-7}

Fonte: IBGE (1983).

A definição da origem e a orientação do Elipsoide de referência foram feitas de forma a minimizar as diferenças em relação ao Geoide no continente sul-americano (IBGE, 1996). Como ponto origem adotou-se o vértice de triangulação Chuá da cadeia de triangulação do paralelo 20°S, no Estado de Minas Gerais, cujo os parâmetros são apresentados na Tabela 3:

Tabela 3 – Parâmetros do vértice Chuá em SAD69.

Parâmetros	Astronômicas	Geodésicas
Latitude	19º 45’ 41,34” S	19º 45’ 41,6527” S
Longitude	48º 06’ 07,80” W	48º 06’ 04,0639” W
Azimute ao vértice Uberaba (contado a partir do Sul)	271º 30’ 05,42”	271º 30’ 04,05” SWNE
Ondulação geoidal (N)	0,0 m	
Componente meridiana (ξ)	-0,31”	
Componente primeiro vertical (η)	3,59”	

Fonte: Gemael (1981); IBGE (1983).

O referencial altimétrico coincide com a superfície equipotencial que contém o nível médio do mar, definido pelas observações maregráficas tomadas na baía de Imbituba, no Estado de Santa Catarina, onde a altitude ortométrica corresponde a (IBGE, 1996):

$$H = 763{,}28m \tag{4}$$

2.2.4. WGS84 (*World Geodetic System 1984*)

As efemérides transmitidas pelo GPS (*Global Positioning System*) utilizam o WGS84 como Sistema de Referência Geodésico. A rede terrestre de referência do WGS84 foi originalmente estabelecida em 1987, contando somente com coordenadas de 10 estações, obtidas do posicionamento do efeito Doppler (TRANSIT) e efemérides precisas. Esta realização fornecia precisão métrica devido à limitação da técnica utilizada, o posicionamento Doppler. Por esta razão, uma série de refinamentos foram feitos ao WGS84 nos últimos anos com o objetivo de melhorar a precisão de sua versão original (NIMA, 1997).

Desse modo, foram realizados três refinamentos no sistema no intuito de melhorar a precisão da realização inicial. O primeiro refinamento recebeu a denominação WGS84 (G730), onde “G” indica o uso exclusivo da técnica GPS no refinamento e “730” se refere à semana GPS, referente às órbitas dos satélites GPS a partir de 29 de junho de 1994 à 29 de janeiro de 1997. Deste primeiro refinamento participaram 32 estações, 10 estações do Departamento de Defesa dos Estados Unidos (DoD) e 22 estações da rede IGS, a precisão das coordenadas desta solução foi de 10 cm (1σ) para as estações DoD. Esta solução possui uma consistência com o ITRF92 (*International Terrestrial Reference Frame* 1992) ao nível de 10 cm (NIMA, 1997).

O segundo refinamento recebeu a denominação WGS84 (G873), referida à semana GPS 873 e foi implementado no segmento de controle operacional em 29 de janeiro de 1997. Esta materialização foi baseada em observações GPS de 12 estações DoD. As coordenadas destas estações foram determinadas com uma precisão absoluta de 5 cm (1σ), onde essas coordenadas correspondem às do ITRF94 diferenças sistemáticas inferiores a 2 cm (NIMA,1997).

O último refinamento correspondente à materialização utilizada até os dias de hoje foi designado como WGS84 (G1150), e é referente à semana GPS 1150. Neste refinamento participaram 49 estações da rede IGS. Do qual a precisão estimada é da ordem de 1 cm (1σ) nas coordenadas de cada uma das estações de observação. De acordo com NIMA (2000) esta solução possui uma consistência com o ITRF2000. Isto indica que as realizações do WGS84 (1150) e o ITRF2000 são essencialmente equivalentes, com diferenças estatisticamente insignificante para a maioria das aplicações.

Os parâmetros fundamentais do WGS84, apresentados na Tabela 4, foram baseados no GRS80 (*Geodetic Reference System 1980*), onde a IAG passou a recomendá-lo como o modelo de referência para as atividades de Geodésia a partir da XVII Assembleia Geral da União Internacional de Geodésia e Geofísica (*International Union of Geodesy and Geophysics* – IUGG), em 1978.

Tabela 4 – Parâmetros do WGS84.

Parâmetros	Notação	Valor
Semi-eixo maior	a	6378137 m
Achatamento	f	1/298,257223563
Velocidade angular da Terra	ω	7292115 x 10^{-11} rad/s
Constante gravitacional geocêntrica	GM	3986004,418 x 10^{8} m^3/s^2
Fator dinâmico de forma	J_2	108263 x 10^{-8}

Fonte: NIMA (2000).

2.2.5. SIRGAS2000 (Sistema de Referência Geocêntrico para as Américas)

É o atual Sistema Geodésico Brasileiro (SGB), de acordo com a Resolução PR número 1 de 25 de fevereiro de 2005 (IBGE, 2005). Define-se por SGB o conjunto de pontos geodésicos implantados na porção da superfície terrestre delimitada pelas fronteiras do país. Em outras palavras é o sistema do qual estão referenciadas todas as informações espaciais no Brasil, Resolução PR número 22 de 21 de julho de 1983 (IBGE, 1983).

O presente Sistema está em conformidade com o Sistema de Referência Terrestre Internacional (*International Terrestrial Reference System* – ITRS). Sua realização é uma densificação regional do ITRF, onde o Brasil consta com 86 estações da RBMC[8] (IBGE, 2012b). O SIRGAS2000, realização de 2000 (época de referência 2000,4), foi adotado oficialmente em território Nacional a partir de fevereiro de 2005, alterando a caracterização do SGB e do Sistema Cartográfico Nacional (SCN) (IBGE, 2005).

A figura geométrica da Terra representada pelo Elipsoide de revolução desse sistema é o GRS80, onde possui características muito próximas ao WGS84 (G1150), podendo ambos, para efeitos práticos de Cartografia, serem considerados como equivalentes. As constantes dos dois Elipsoides são as mesmas empregadas na Tabela 4, com exceção de uma variação no achatamento terrestre:

$$f_{SIRGAS2000} = 1/298{,}257222101 \tag{5}$$

[8] Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo aos sinais dos satélites GNSS.

Além do mais, vale ressaltar que o referencial altimétrico do SIRGAS2000 continua sendo as observações maregráficas tomadas no porto de Imbituba no litoral de Santa Catarina, na qual o valor da altitude ortométrica do vértice de Imbituba foi descrita anteriormente na Equação (4).

2.2.6. Referencial Altimétrico

A materialização de um referencial altimétrico consta de uma etapa distinta da materialização dos Sistemas Geodésicos de Referências, abordados nos subitens 2.2.1 ao 2.2.5.

Até 1946, não existia no Brasil uma superfície equipotencial de referência a partir da qual permitisse os cálculos das altitudes, ou seja, ainda não havia sido determinado o *datum* vertical brasileiro. Somente depois que o IBGE deu início à sua Rede de Nivelamento de Precisão, é que foi adotado a Referência de Nível (RN) do Marégrafo de Torres-RS, como o primeiro *datum* vertical brasileiro (IBGE, 1990).

Em 1958, quando a Rede Altimétrica contava com cerca de 30.000 km de linhas de nivelamento, houve a substituição do *datum* Torres pelo *datum* Imbituba, definido pela estação maregráfica de Imbituba, localizada no município de mesmo nome, no litoral do Estado de Santa Catarina, do qual prevalece até os dias atuais (IBGE, 2011).

Os pontos conhecidos pela RN tem sua altitude ortométrica (H) determinada por técnicas de nivelamento de precisão e gravimetria. De modo que as altitudes ortométricas estão vinculadas a um conceito físico do campo de gravidade da Terra, podendo ou não ter uma interpretação geométrica (DE FREITAS; BLITZKOW, 1999).

No estabelecimento das redes verticais existe maior preocupação com a precisão das altitudes do que com a precisão das coordenadas horizontais. No entanto, assim como as coordenadas geodésicas, as altitudes das RN's do Sistema Geodésico Brasileiro são periodicamente recalculadas, em função da incorporação de novas observações, correção de inconsistências, e utilização de novas técnicas de observação e cálculo, pela fundação IBGE (IBGE, 2011).

A diferença entre o Geoide e o Elipsoide em termos de forma é a altura geoidal ou ondulação geoidal (N), medida ao longo da normal de um ponto P na Superfície Física da Terra (DE FREITAS; BLITZKOW, 1999). A altitude geométrica ou elipsoidal (h) é a distância entre o ponto P na superfície terrestre até sua projeção (P') no Elipsoide, contada sobre a normal que passa pelo ponto P (GEMAEL, 1999). Enquanto que altitude ortométrica (H) está intimamente associada à direção do vetor gravidade ($\vec{g}$) (tangente à linha de força) no referido ponto (P), conforme Figura 2.

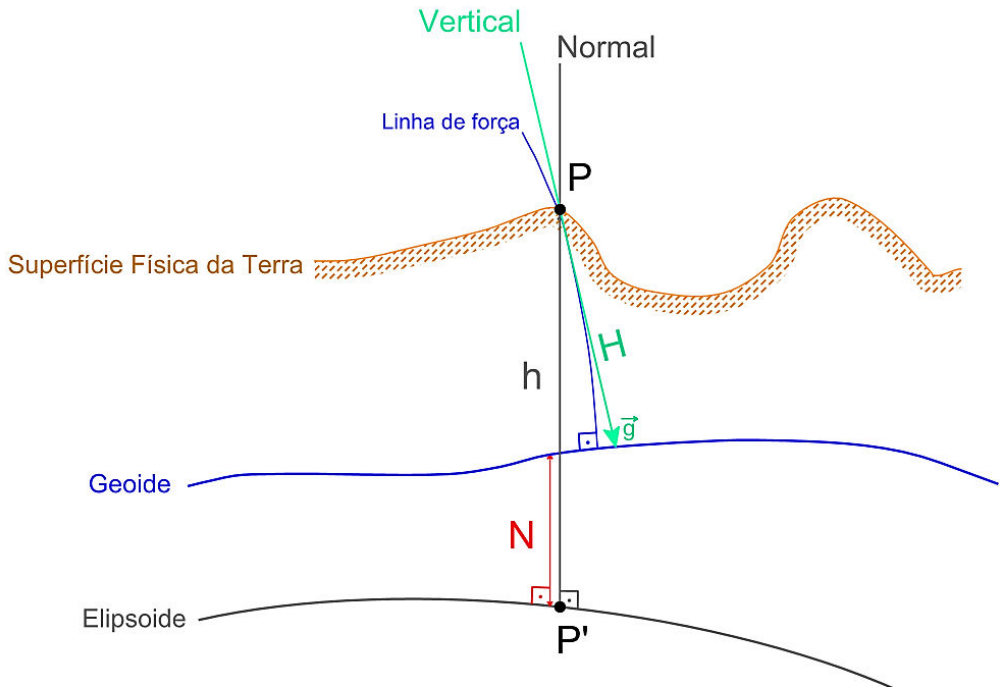

Figura 2 – Superfície Física da Terra, Geoide e Elipsoide.
Fonte: Adaptada de Jekeli (2002).

A relação geométrica (matemática) entre as superfícies de referências pode ser obtida pela Equação (6) (GEMAEL, 1999). O valor de N será positivo quando a superfície do Geoide estiver acima do Elipsoide.

$$h = H + N \tag{6}$$

2.3. Concepção de Sistema Geodésico de Referência Global e Local

A definição de um Sistema Geodésico de Referência Global ou Local está associada à localização do ponto origem do sistema. No sistema Global o centro do Elipsoide é feito coincidir com o centro de massa da Terra, geocêntrico. Assim como, o eixo menor do Elipsoide fica coincidente com o eixo de rotação da Terra numa determinada época, por exemplo, a Convenção Internacional da Origem (*Conventional International Origin* – CIO) de 1984.

No sistema Geodésico de referência Local[9], o Elipsoide não tem seu centro coincidente com o centro de massa da Terra pela consequência da coincidência do Elipsoide a uma posição particularizada do Geoide ou um geope qualquer. O eixo menor do Elipsoide nesses casos é paralelo ao eixo de rotação da Terra para uma determinada época, como exemplo, CIO de 1900 a 1905.

Nos dias atuais, de acordo com Zanetti (2006) existem diferentes técnicas de posicionamento e orientação estabelecida nos referenciais geodésicos globais na determinação de coordenadas tais como: GPS, VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*), SLR (*Satellite Laser Range*), LLR (*Lunar Laser Range*) e DORIS (*Doppler Orbitography and Radiopositioning Integrated by Satellite*). O Sistema de Referência Terrestre Internacional, *ITRS,* é um exemplo de referencial baseado nas técnicas de posicionamento descritas anteriormente. As suas realizações recebem a denominação de ITRFyy[10] Exemplo disso é a rede do ITRF2008 composta por 934 estações localizadas em 580 locais, sendo 463 no hemisfério norte e 117 no hemisfério Sul conforme detalhado na Figura 3.

[9] O contexto aqui é abordar os sistemas geodésicos de referências, e não os sistemas de coordenadas topocêntricos, cuja relação é um plano na superfície da Terra como será visto mais adiante.

[10] yy correspondem os dois últimos dígitos do último ano cujos dados contribuíram para a realização em consideração, sendo exceção a versão a partir do ano 2000, o ITRF2000 (ZANETTI, 2006).

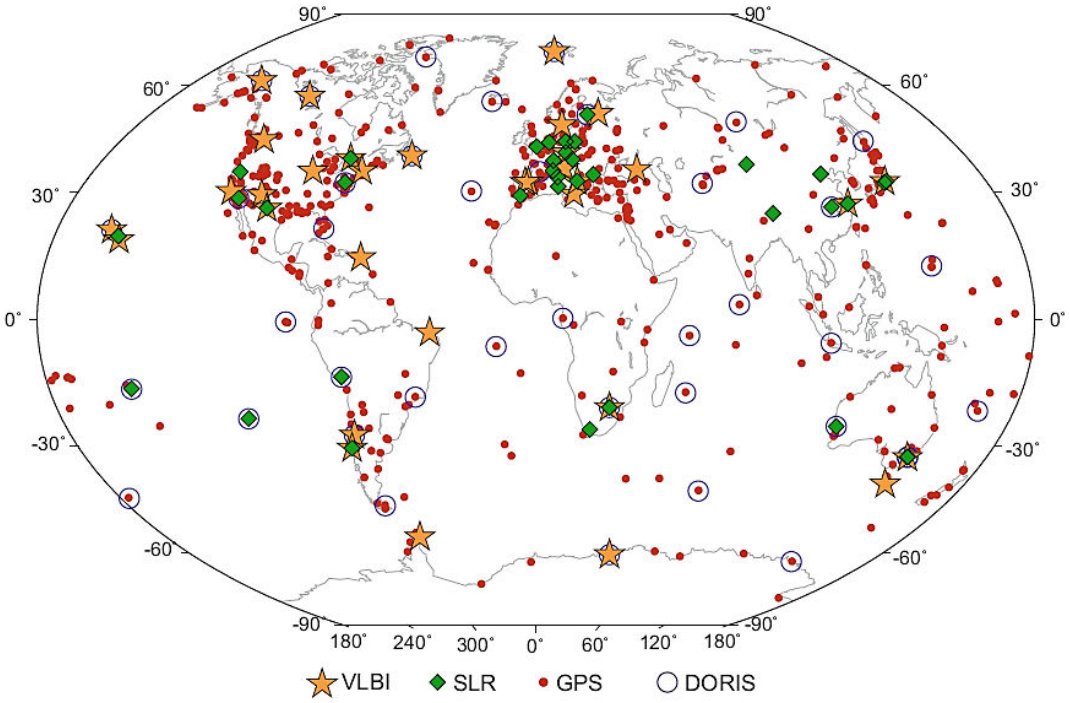

Figura 3 – Rede de estação do ITRF2008.
Fonte: Altamimi, Collilieux e Métivier (2011).

As atuais técnicas espaciais de posicionamento e orientação possuem duas vantagens em relação às técnicas clássicas da Geodésia: o posicionamento tridimensional de uma estação geodésica e a alta precisão fornecida às coordenadas, implica como consequência uma quarta componente associada a época (t) de obtenção das coordenadas. Desse modo, as coordenadas das estações que compõem a materialização de um referencial geodésico global, possuem quatro componentes, três de definição espacial e uma de definição temporal (ZANETTI, 2006).

Por outro lado, vale destacar que o tamanho e a origem do Elipsoide associado a um Sistema Geodésico de Referência Global ou Local variam de acordo com a sua utilização em áreas da superfície terrestre. No qual, dependendo dos fins a que se destine adota-se um Elipsoide global ou local na região de interesse de um país, de um continente ou grupo de países (ROMÃO, 2005). Existem ainda os Elipsoides convencionais, que não são geocêntricos e nem seu eixo menor é paralelo ao eixo médio de rotação da Terra, mas sua superfície adapta-se melhor a geometria do Geoide na área empregada, conforme Figura 4.

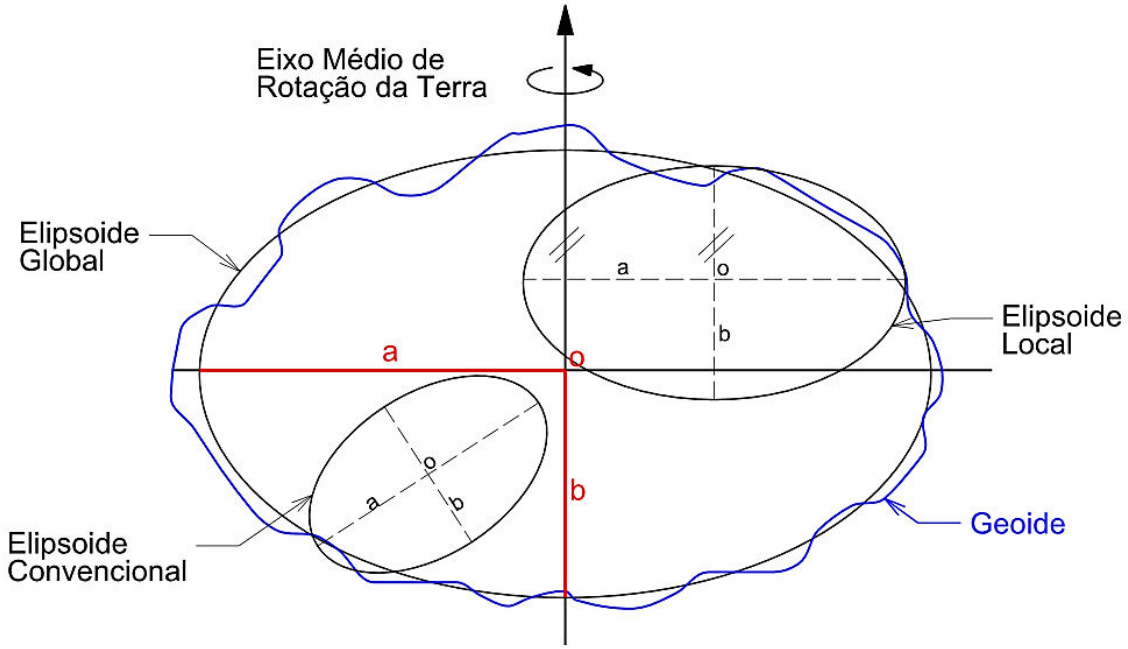

Figura 4 – Elipsoides global, local e convencional da Terra.

Fonte: Seeber *et al.* (1998) *apud* Romão (2005).

Nota: a, b e o são os semi eixos maior e menor, e a origem dos Elipsoides, respectivamente.

2.4. Sistemas de Coordenadas

Segundo Gemael e Andrade (2004) o objetivo último da Geodésia é a determinação da forma e dimensões do planeta Terra, o que não impede que com o desenvolvimento da era espacial a sua ação não se estenda a outros componentes do sistema solar. No entanto para se estudar a forma e a dimensão da Terra, ou porções de sua superfície, é necessário o estabelecimento de pontos sobre ela, cujas coordenadas são determinadas a partir das medições realizadas e referenciadas a um sistema de coordenadas convencionado.

Contudo, para se definir um sistema de coordenadas devem-se especificar três itens fundamentais (ROMÃO, 2005):

i. localização da origem do sistema;
ii. orientação dos eixos do sistema; e
iii. coordenadas (cartesianas ou curvilíneas), que definem a posição de um ponto no sistema.

Conforme o detalhamento dado em Oliveira (1998) outro aspecto importante condiz com a classificação dos sistemas de coordenadas associados à Geodésia que podem ser:

a) Celestes – apropriados para o posicionamento e estudo do movimento de objetos extragalácticos, estrelas, e planetas. Caso o sistema seja fixo no espaço, ou apresente movimento retilíneo uniforme, isto é, sem rotação diferencial e/ou aceleração, é qualificado de sistema Inercial, pois atende à Lei da Inércia de Newton (MORITZ, 1979). Atualmente, para a definição do Sistema Celeste, são empregados os quasares, observados através de técnicas espaciais, por definirem direções fixas no espaço (sem rotação). A origem do sistema é o baricentro do Sistema Solar (MA & FEISSEL, 1997);

b) Orbitais – dedicados ao posicionamento e estudo do movimento de satélites naturais e artificiais em órbita terrestre. Neste caso acompanham o movimento de translação da Terra em torno do Sol e/ou rotação[11]. Esses sistemas pertencem aos chamados quase-inerciais (REIGBER, 1989);

c) Terrestres – associados ao planeta Terra podendo abordar, distintamente, os espaços: unidimensional (1D), exemplo dos sistemas altimétricos; bidimensional (2D), quando só interessar a posição planimétrica; tridimensional (3D), quando o sistema for de natureza planialtimétrica; e quadridimensional (4D), sendo que neste caso está inclusa a coordenada época, associada à dimensão tempo;

[11] Os satélites de órbita geoestacionária acompanham o movimento de rotação da Terra. Com isso mantém a mesma posição em relação a um ponto fixo na superfície terrestre.

d) Temporais – definidos para estudo e concretização da dimensão tempo. Estão baseados na ocorrência de fenômenos astronômicos ou físicos, sendo fundamental que o fenômeno apresente uniformidade e repetibilidade, possibilitando, desta forma, condições de ser continuamente quantificado. Com relação aos fenômenos astronômicos, podem estar associados tanto ao movimento de rotação, escalas de tempo Astronômico, quanto ao movimento de revolução [12] terrestre, escalas de tempo dinâmicos (escala de tempo das Efemérides). Com relação aos fenômenos físicos, podem estar associados, por exemplos, às oscilações atômicas, tempo Atômico Internacional, e as dinâmicas, tempo Universal (THOMAS; WOLF; TAVELLA, 1994).

Além desses referencias associados à Geodésia, há também o sistema de coordenadas geodésicas, onde o referencial geodésico[13] está vinculado não a Terra verdadeira, mas a um modelo geométrico descrito pela superfície matemática do Elipsoide de revolução, empregado nos Sistemas Geodésico de Referência descritos nos subitens 2.2.1 ao 2.2.5.

Embora as ciências geodésicas envolvam diferentes sistemas de coordenadas para as mais diversas aplicações a que se destine, no contexto desta dissertação serão apresentados apenas os referenciais elipsoidais e terrestres conduzidos nos receptores GNSS e nas estações totais; respectivamente, bem como as transformações matemáticas que permitem vinculá-los entre si.

[12] Termo usado para se referir ao movimento de translação.

[13] Quando um referencial não está vinculado a Terra verdadeira, mas a um modelo geométrico recebe o nome particular de Terno Cartesiano Geodésico, no que tange a origem do sistema pode ser classificado de Terno Cartesiano Geodésico geocêntrico ou topocêntrico (GEMAEL, 1981).

2.5. Sistemas de Coordenadas Geodésicas

Para atender a maioria das aplicações práticas em Geodésia são usados os referenciais geodésicos cartesianos e as coordenadas geodésicas elipsoidais, tendo como superfície de referência o Elipsoide de revolução[14] (também conhecido como Elipsoide biaxial) de caráter global ou local, por ser o Elipsoide a figura matemática ou geométrica que mais se aproxima da superfície do Geoide.

2.5.1. Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas

O Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas[15], conforme caracterizado na Figura 5, tem sua origem (O) no centro do Elipsoide e seus eixos definidos em (SEEBER, 2003):

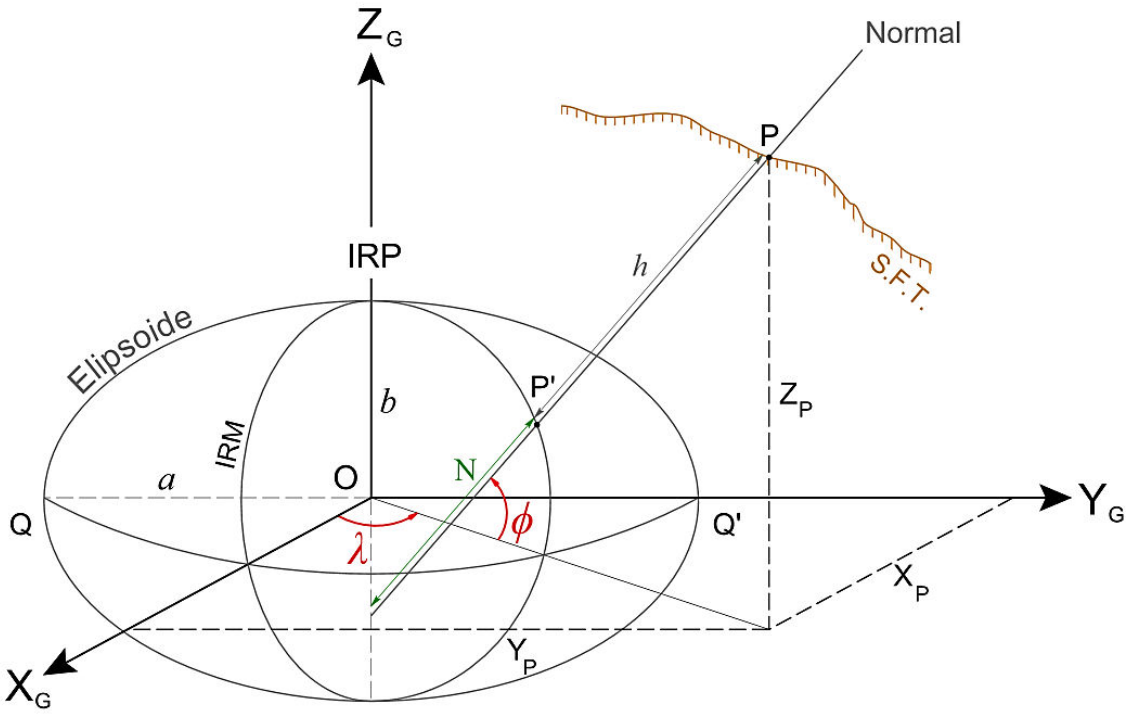

Figura 5 – Referenciais geodésico cartesiano e geodésico elipsoidal.

Fonte: Adaptada de Torge (2001).

[14] Forma geométrica gerada pela rotação de uma elipse em torno do seu eixo menor (*b*).

[15] O termo "geocêntricas" está inserido no sentido de que a origem dos eixos coordenados, coincide com o centro do modelo geométrico da Terra, no caso, o Elipsoide associado ao sistema geodésico em uso independente de sua posição; conforme Figura 4.

Z_G: coincide com o eixo menor (b) do Elipsoide e com o eixo médio de rotação da Terra, pólo de referência internacional (*International Reference Pole* – IRP) se o Elipsoide de referência for global, ou é paralelo a este se o Elipsoide de referência for local;

X_G: é definido na interseção do meridiano de referência internacional (*International Reference Meridian* – IRM), coincidente como Observatório Médio de Greenwich (*Greenwich Mean Observatory* – GMO) com o equador elipsóidico se for o Elipsoide global, ou paralelo a este se for o Elipsoide local; e

Y_G: forma um sistema dextrógiro.

Assim, um ponto P na Superfície Física da Terra (SFT) fica definido nesse sistema através das coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ,λ,h), onde a latitude geodésica (ϕ) é definida como o ângulo entre a normal ao Elipsoide que passa por P e o plano equatorial elipsóidico. A longitude geodésica (λ) é o ângulo formado entre o plano do meridiano geodésico de Greenwich e o plano do meridiano do ponto contado no plano do equador elipsóidico (GEMAEL, 1999).

As coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ,λ,h) do ponto P podem ser transformadas em coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas (X_P,Y_P,Z_P) através do modelo matemático da Equação (7) (IBGE, 1989):

$$\begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+h)\cos(\phi)\cos(\lambda) \\ (N+h)\cos(\phi)sen(\lambda) \\ \left[(1-e^2)N+h\right]sen(\phi) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Onde:

N é a grande normal (raio de curvatura da seção primeiro vertical):

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\phi}} \tag{8}$$

e^2 é a primeira excentricidade ao quadrado, sendo obtida do relacionamento do semi-eixo maior (a), semi-eixo menor (b) ou do achatamento (f) do Elipsoide:

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 2f - f^2 \tag{9}$$

O achatamento do Elipsoide é definido:

$$f = \frac{a - b}{a} \tag{10}$$

A transformação inversa faz-se por método interativo ou direto. A solução iterativa é encontrada em Gemael (1981) e, Vaníček e Krakiwsky (1986). As equações a seguir referem-se ao método direto de forma sequenciada (IBGE, 1989):

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \tag{11}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{Z + e'^2 \cdot b \cdot sen^3 u}{\sqrt{X^2 + Y^2} - e^2 \cdot a \cdot \cos^3 u}\right) \tag{12}$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \quad \text{(para o quadrante em que se situa o Brasil)} \tag{13}$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\phi} - N \tag{14}$$

$$senu = \frac{\tan u}{\sqrt{1 + \tan^2 u}} \tag{15}$$

$$\cos u = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 u}} \tag{16}$$

$$\tan u = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \cdot \frac{a}{b} \tag{17}$$

Onde: $(X,Y,Z)_G$ são coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas;

e'^2 é a segunda excentricidade ao quadrado.

2.5.2. Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais

Tal sistema atende também pelo nome de Sistema Geodésico Local (GARNÉS, 1998; ANDRADE, 2003; MONICO, 2008). Por definição, ilustrada na Figura 6, tem sua origem no ponto P_o na Superfície Física da Terra, ao longo da reta normal ao Elipsoide de referência passando por esse mesmo ponto de observação; onde seus eixos estão descritos como segue:

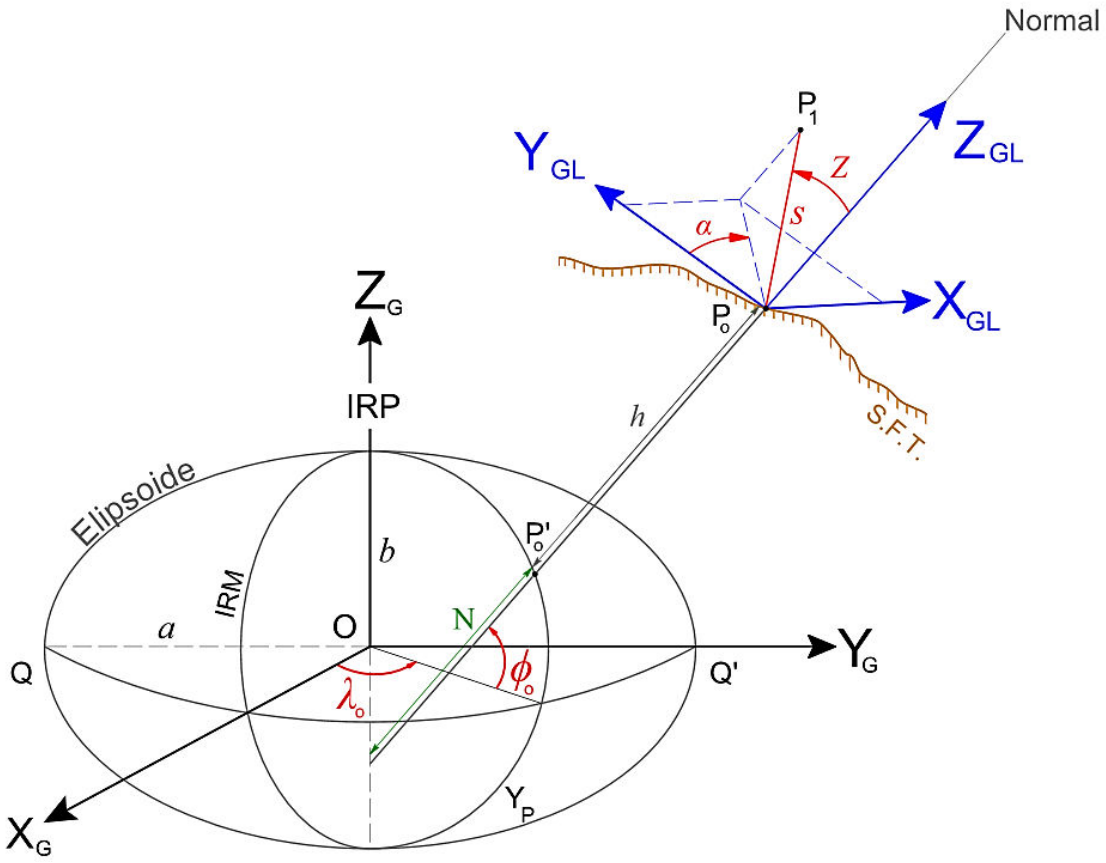

Figura 6 – Referencial geodésico cartesiano local e coordenadas polares.

Fonte: Adaptada de Garnés (1998).

Z_{GL}: coincide com a direção da normal ao Elipsoide de referência global ou local, sendo positivo o sentido “zenital”;

Y_{GL}: tem sentido positivo coincidente com a direção do norte definido pelo meridiano geodésico; e

X_{GL}: forma com os demais eixos um terno cartesiano ortogonal dextrógiro, com orientação positiva para leste.

As coordenadas polares (α, Z, s) de um ponto P_1 qualquer nesse sistema são: (α) azimute geodésico ou elipsoidal entre o norte elipsóidico e a projeção da direção de $\overline{P_o P_1}$ contado no plano $Y_{GL}X_{GL}$; (Z) ângulo zenital geodésico ou elipsoidal, formado entre a normal e a direção de $\overline{P_o P_1}$; e distância (s) inclinada entre P_o e P_1.

A partir das coordenadas polares obtêm-se as coordenadas geodésicas cartesianas locais através da Equação (18) (SEEBER, 2003):

$$\begin{bmatrix} X_{GL} \\ Y_{GL} \\ Z_{GL} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} sen(Z) \cdot sen(\alpha) \\ sen(Z) \cdot \cos(\alpha) \\ \cos(Z) \end{bmatrix} \tag{18}$$

Consequentemente, em função da equação (18) têm-se as coordenadas polares por (SEEBER, 2003):

$$\begin{bmatrix} s \\ \alpha \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{X_{GL}^2 + Y_{GL}^2 + Z_{GL}^2} \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{X_{GL}}{Y_{GL}}\right) + Q \\ \cos^{-1}\left(\dfrac{Z_{GL}}{\sqrt{X_{GL}^2 + Y_{GL}^2 + Z_{GL}^2}}\right) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} 0^\circ, & se & NE \\ 180^\circ & se & SE \cdot ou \cdot SW \\ 360^\circ & se & NW \end{Bmatrix} \tag{19}$$

Sendo "Q" o estudo do quadrante. Do qual as siglas NE, SE, SW e NW são os pontos colaterais denotados por: nordeste, sudeste, sudoeste e noroeste, respectivamente.

2.5.3. Transformações entre o Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e o Sistema Geodésico Cartesiano Local

É a relação na mesma escala entre as coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas $(X,Y,Z)_G$ e as coordenadas geodésicas cartesianas locais $(X,Y,Z)_{GL}$ com origem em um ponto P_o (ϕ_o,λ_o), na Superfície Física da Terra conforme exposto na Figura 6.

A transformação de coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas em coordenadas geodésicas cartesianas locais é obtida por meio da Equação (20) (TORGE, 2001; ANDRADE, 2003; SEEBER, 2003):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{GL} = R_1\left(90° - \phi_o\right) \cdot R_3\left(90° + \lambda_o\right) \cdot \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}_G \tag{20}$$

Onde,

R_1 e R_3 são as matrizes de rotação em torno dos eixos X_G e Z_G, respectivamente, do sistema geodésico cartesiano geocêntrico; e

$(X_o,Y_o,Z_o)_G$ são as coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas do ponto (P_o) origem do sistema.

A partir do desenvolvimento da Equação (20) tem-se:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{GL} = \begin{bmatrix} -sen\lambda_o & \cos\lambda_o & 0 \\ -sen\phi_o\cos\lambda_o & -sen\phi_o sen\lambda_o & \cos\phi_o \\ \cos\phi_o\cos\lambda_o & \cos\phi_o sen\lambda_o & sen\phi_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}_G \tag{21}$$

Em Andrade (2003) a transformação inversa é obtida:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} -sen\lambda_o & -sen\phi_o\cos\lambda_o & \cos\phi_o\cos\lambda_o \\ \cos\lambda_o & -sen\phi_o sen\lambda_o & \cos\phi_o sen\lambda_o \\ 0 & \cos\phi_o & sen\phi_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{GL} + \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix}_G \tag{22}$$

2.6. Sistemas de Coordenadas Terrestres

Estão relacionados ao planeta Terra, acompanhando os seus movimentos, tanto de rotação, quanto de translação. Podem ser geocêntrico, quando a origem do sistema coincide com o centro de massa da Terra e topocêntrico, quando a origem situa-se num ponto da superfície terrestre.

2.6.1. Movimento Polar

Há mais de cem anos descobriu-se que a direção do eixo de rotação da Terra se movia com relação à superfície física, denominado movimento do pólo. O movimento polar afeta as coordenadas de todos os pontos terrestres. A causa desse movimento é devido ao fato de a Terra não ser rígida e possuir oceanos, ocasionando variações na distribuição de suas massas e de sua atmosfera, as quais podem ocorrer devido a fenômenos meteorológicos, geológicos e geofísicos, tais como (SCHWARZ; KRYNSKI, 1997):

- movimento da atmosfera e dos oceanos;
- mudanças na distribuição de massas da superfície (erosão);
- mudanças na crosta e nos fluidos (erupções vulcânicas, terremotos); e
- movimento entre a crosta terrestre e seu interior.

Os parâmetros de orientação da Terra não podem ser descritos por teoria, sendo, portanto, determinados por observações. Por muito tempo as observações astronômicas foram utilizadas para monitorar o movimento dos pólos, dentro do contexto de um serviço internacional; inicialmente pelo patrocínio do Serviço Internacional da Latitude (*International Latitude Service – ILS*) e depois pelo Serviço Internacional do Movimento do Pólo (*International Polar Motion Service* - IPMS), juntamente com o Birô Internacional da Hora (*Bureau International de L'Heure – BIH*). A partir de 1° de janeiro de 1988 essas duas agências foram incorporadas no Serviço Internacional de Rotação da Terra (*International Earth Rotation Service - IERS*) que passou a realizar essas funções. Atualmente, as tecnologias utilizadas nessa atividade são: GNSS, VLBI, SLR, LLR e DORIS (MONICO, 2008).

A posição do pólo na época da observação (pólo instantâneo) é dado através de duas coordenadas (x_P,y_P) referenciadas a um sistema cartesiano cuja a origem é a posição média do pólo (pólo médio) entre os anos de 1900 a 1905, que é chamada de Convenção Internacional da Origem (*Conventional International Origin – CIO*). Sendo, ainda, denominado de Pólo Convencional Internacional (*Conventional International Pole – CTP)* (SEEBER, 1993).

Durante 1900 a 2000, o eixo de rotação da Terra se moveu aproximadamente 0,004 arcsec por ano na direção do meridiano de 80°W (JEKELI, 2006). A Figura 7 mostra o movimento polar de Chandler.

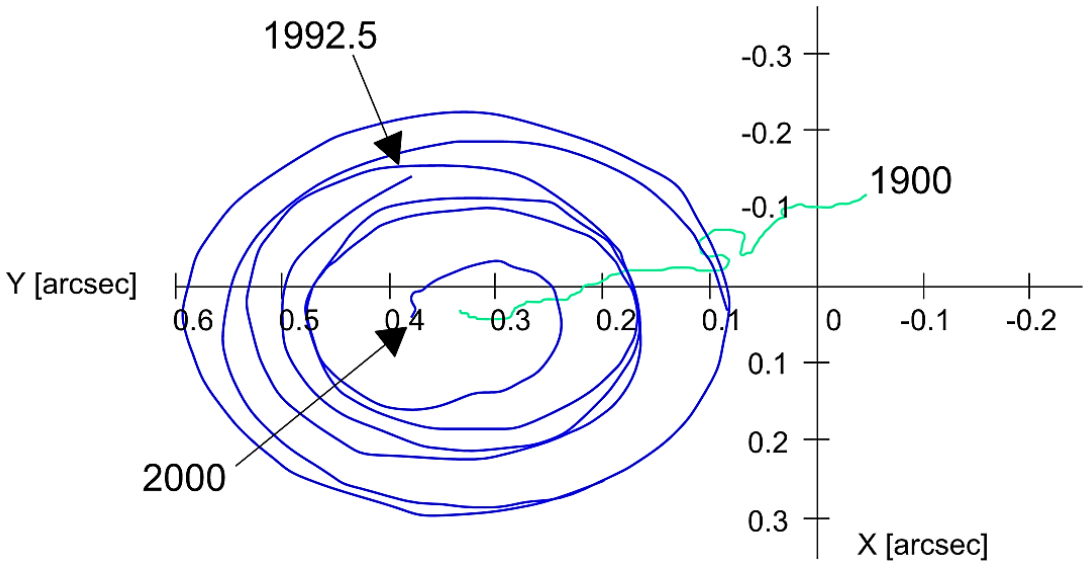

Figura 7 – Movimento polar de Chandler.

Fonte: Jekeli (2006).

2.6.2. Sistema de Coordenadas Astronômicas Cartesianas Locais

O presente sistema é denominado também por Sistema Astronômico Local com origem no ponto (P_o) na Superfície Física da Terra, Figura 8; onde seus eixos são definidos (GEMAEL, 1981):

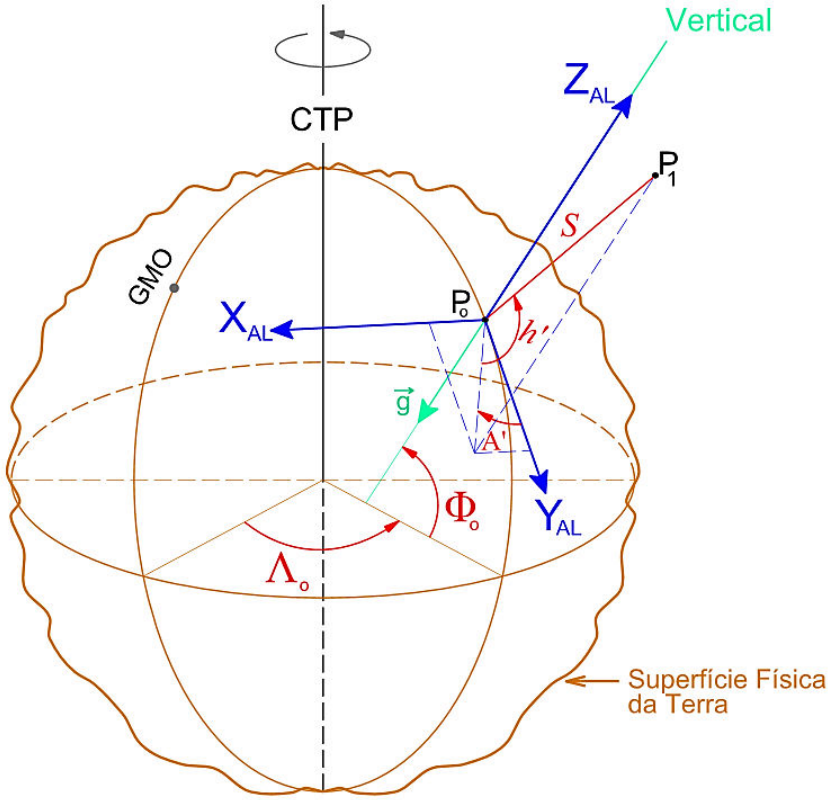

Figura 8 – Referenciais astronômico cartesiano local e coordenadas polares.

Fonte: Adaptada de Gemael (1981).

Z_{AL}: coincide com a direção da vertical passante no ponto origem (P_o) com sentido positivo para o zênite;

Y_{AL}: tem sentido positivo coincidente com a direção do Sul definido pelo meridiano terrestre; e

X_{AL}: forma com os demais eixos um sistema cartesiano ortogonal dextrógiro, com orientação positiva para Oeste.

A posição de um ponto P_o na Superfície Física da Terra fica definida astronomicamente através de duas grandezas: latitude astronômica (Φ_o) e longitude astronômica (Λ_o). A latitude astronômica de um ponto é o ângulo que a vertical desse ponto forma com a sua projeção equatorial. Por convenção, as latitudes são consideradas positivas no hemisfério norte. Já a longitude astronômica de um ponto é o ângulo medido entre o plano meridiano de Greenwich e o plano meridiano astronômico do ponto (TORGE, 2001; GEMAEL, 1999). Segundo Torge (2001), o plano meridiano astronômico do ponto é o plano definido pela vertical do lugar.

De acordo com a Figura 9, as coordenadas polares são assim estabelecidas: (A') azimute inicia-se no eixo Y_{AL} (a partir do Sul) no sentido horário contado no plano $Y_{AL}X_{AL}$; (h') altura angular inicia-se no plano passante pelo ponto origem (P_o) e perpendicular a vertical do lugar; e (S) é a distância inclinada (espacial) medida do ponto (P_o) ao ponto (P_1). Na literatura, são encontradas essas definições com algumas variantes em termos dos eixos, X_{AL} e Y_{AL}, ver, por exemplo, Torge (2001), Gemael (1981) e Seeber (2003).

Logo, segundo Gemael (1981) as coordenadas polares do ponto P_1 em cartesianas são assim obtidas:

$$\begin{bmatrix} X_{AL} \\ Y_{AL} \\ Z_{AL} \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} sen(A')\cos(h') \\ \cos(A')s\cos(h') \\ sen(h') \end{bmatrix} \tag{23}$$

De modo inverso, determina-se as coordenadas polares em função das coordenadas cartesianas:

$$\begin{bmatrix} S \\ A' \\ h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(X_{AL})^2 + (Y_{AL})^2 + (Z_{AL})^2} \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{X_{AL}}{Y_{AL}}\right) \\ sen^{-1}\left(\dfrac{Z_{AL}}{\sqrt{(X_{AL})^2 + (Y_{AL})^2 + (Z_{AL})^2}}\right) \end{bmatrix} \tag{24}$$

2.6.3. Sistema Topográfico Local

Historicamente, por muito tempo trabalhou-se com o Sistema Topográfico Local de forma apenas natural. A primeira tentativa de formalização desse sistema ocorreu no Brasil em 1994 com a NBR 13.133, e depois com mais ênfase em 1998 com a NBR 14.166[16]. Mesmo com as duas normas da ABNT publicadas, ao longo desses anos, alguns trabalhos foram realizados no sentido de levantar os pontos fracos e os pontos não contemplados pelas referidas normas. Dentre esses trabalhos, vale destacar Garnés (1998; 2005), Dal' Forno *et al.* (2010) e Silva *et al.* (2003). No primeiro trabalho de 1998 foram colocadas varias projeções cartográficas, com respectivas formulações, que se enquadrariam nas definições dadas pela NBR 13.133, a saber:

- as projetantes são ortogonais à superfície de projeção, significando estar o centro de projeção localizado no infinito; e
- a superfície de projeção é um plano perpendicular à vertical do lugar no ponto da superfície terrestre considerado como origem do levantamento, sendo seu referencial altimétrico referido ao *datum* vertical brasileiro.

Em Garnés (2005) são apresentadas as deduções, bem como as simplificações utilizadas nas normas. Ainda de acordo com o autor, apontou-se para as deficiências dos resultados dos formulários e ficou sugerido o uso da transformação do sistema geodésico cartesiano geocêntrico em sistema geodésico cartesiano local, conforme Equação (20).

Detalhado por Garnés (1998) chama-se atenção que o Sistema Topográfico Local seria idêntico ao Sistema Astronômico Local (subitem 2.6.2) com os eixos definidos conforme utilizado nos trabalhos de Topografia no Brasil. Assim, ilustrado na Figura 9, um ponto origem (P_o) na superfície terrestre tem seus eixos caracterizados neste Sistema Topográfico Local:

[16] ABNT NBR 14.166 (1998) trata sobre Rede de Referência Cadastral Municipal, e pode ser obtida no endereço eletrônico: http://www.abnt.org.br.

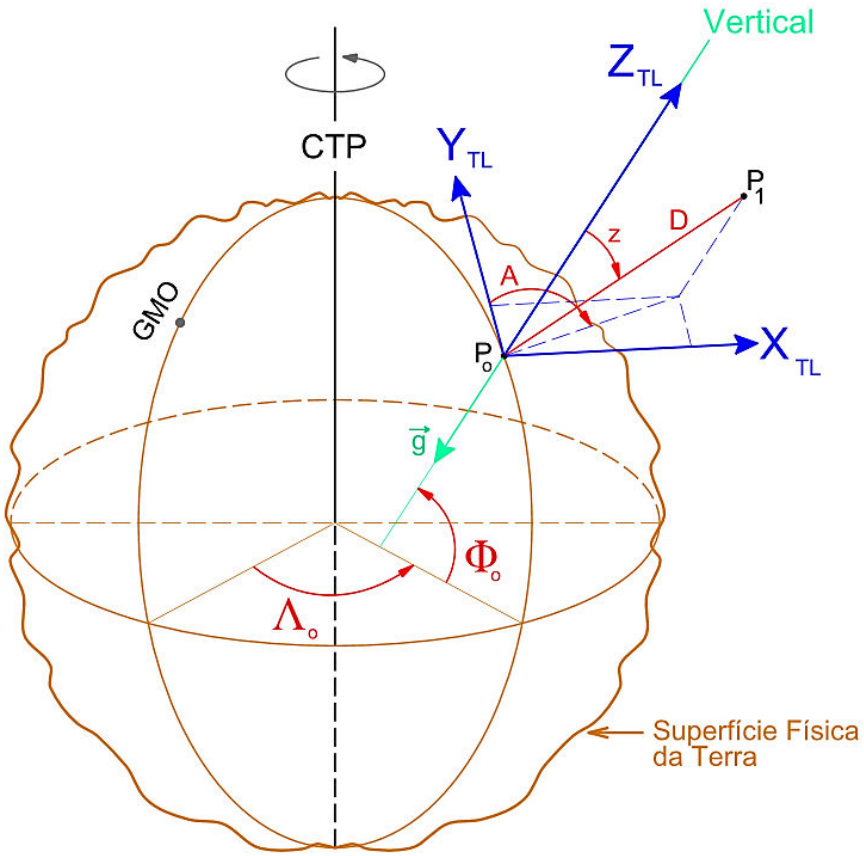

Figura 9 – Sistema Topográfico Local e coordenadas polares.

Fonte: Adaptada de Seeber (2003).

Z_{TL}: coincide com a direção da vertical passante no ponto origem (P_o) com sentido positivo para o zênite;

Y_{TL}: tem sentido positivo para o Norte e coincidente com a direção do meridiano Astronômico;

X_{TL}: forma com os demais eixos um sistema cartesiano ortogonal, com orientação positiva para Leste.

Conforme Figura 9, as coordenadas polares (*A, z, D*) de um ponto P_1 nesse sistema ficam definidas por: (*A*) azimute topográfico entre o eixo Y_{TL} e a projeção da direção de $\overline{P_oP_1}$ no plano $Y_{TL}X_{TL}$; (*z*) ângulo zenital terrestre formado entre a vertical e a direção de $\overline{P_oP_1}$; e distância (*D*) inclinada entre P_o e P_1.

A transformada das coordenadas polares do ponto P_1 em cartesianas, tem-se:

$$\begin{bmatrix} X_{TL} \\ Y_{TL} \\ Z_{TL} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} sen(z)sen(A) \\ sen(z)\cos(A) \\ \cos(z) \end{bmatrix} \tag{25}$$

Conhecidas as coordenadas cartesianas, obtêm-se as coordenadas polares:

$$\begin{bmatrix} D \\ A \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{(X_{TL})^2 + (Y_{TL})^2 + (Z_{TL})^2} \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{X_{TL}}{Y_{TL}}\right) \\ \cos^{-1}\left(\dfrac{Z_{TL}}{\sqrt{(X_{TL})^2 + (Y_{TL})^2 + (Z_{TL})^2}}\right) \end{bmatrix} \tag{26}$$

2.6.3.1. Plano Topográfico Local (PTL)

Segundo ABNT NBR 14.166 (1998), o Plano Topográfico Local é definido por um quadrado de dimensões 100 km x 100 km, onde o centro (P_o) é a origem do sistema e ortogonal à vertical do lugar no ponto da superfície terrestre, Figura 10.

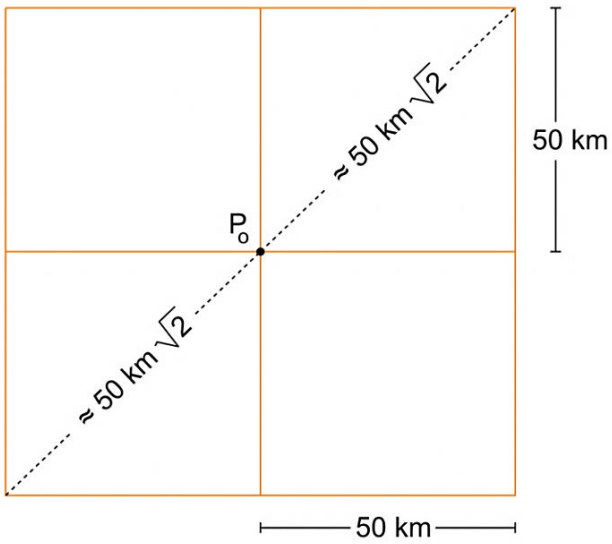

Figura 10 – Dimensionamento do Plano Topográfico Local.

Fonte: ABNT NBR 14.166 (1998).

2.6.4. Transformações entre Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e Sistema Topográfico Local

Explorando a Figura 11, nota-se que o Sistema Topográfico Local é similar ao Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais (subitem 2.5.2). De acordo com Garnés (1998) há uma proximidade entre ambos os sistemas. Sendo, diferenciados apenas pela orientação do eixo "Z", que no Sistema de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais está seguindo a direção da normal do ponto P_o ao Elipsoide (P'_o), enquanto que no Sistema Topográfico Local o eixo "Z" é definido segundo a direção da vertical no ponto P_o.

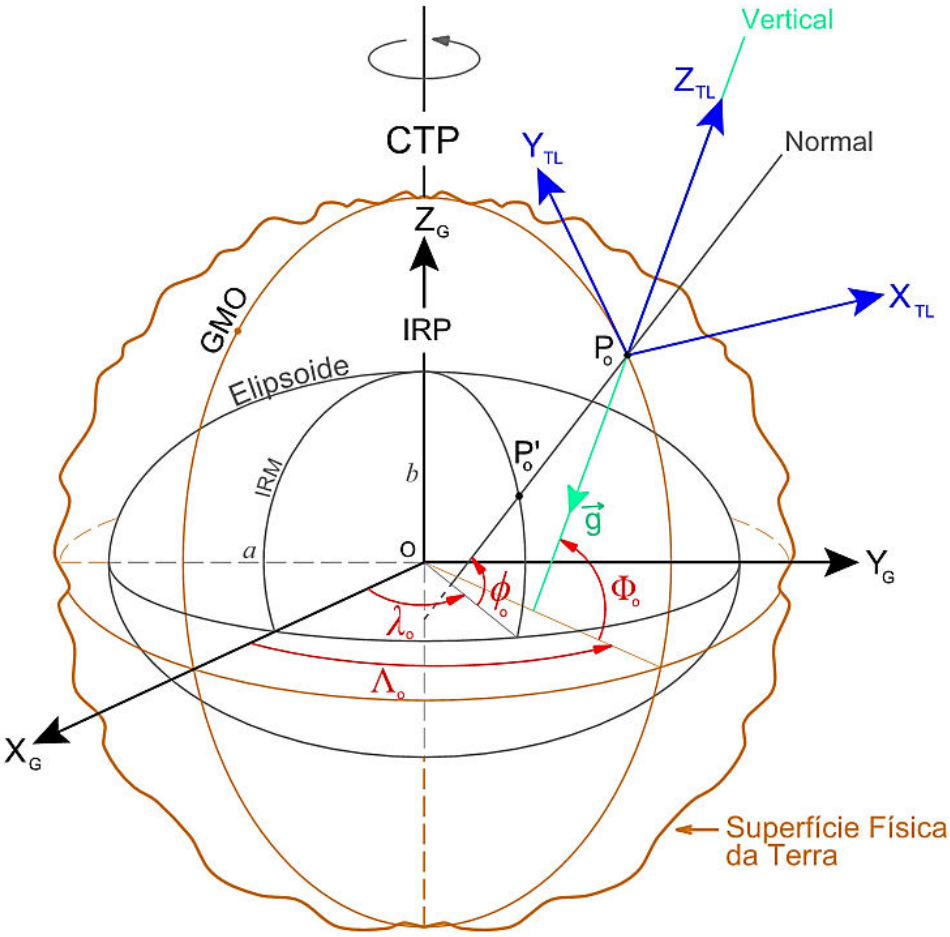

Figura 11 – Relação entre Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e Sistema Topográfico Local.

Fonte: Autor (2012).

Assim, a relação do sistema geodésico cartesiano geocêntrico com o Sistema Topográfico Local na mesma escala é definida em Garnes (1998):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{TL} = \underbrace{\begin{bmatrix} -sen\Lambda_o & \cos\Lambda_o & 0 \\ -sen\Phi_o\cos\Lambda_o & -sen\Phi_o sen\Lambda_o & \cos\Phi_o \\ \cos\Phi_o\cos\Lambda_o & \cos\Phi_o sen\Lambda_o & sen\Phi_o \end{bmatrix}}_{R} \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}_G \quad (27)$$

Onde:

$(X,Y,Z$ e $X_o,Y_o,Z_o)_G$ são coordenadas geodésicas cartesianas tridimensionais calculadas por meio da Equação (7);

$(X,Y,Z)_{TL}$ são coordenadas topográficas locais;

(Φ_o,Λ_o) são coordenadas astronômicas do ponto (P_o), origem do sistema; e

R é matriz de rotação.

2.7. Propagação de Covariâncias

Muitas vezes nas transformações de coordenadas envolvendo referenciais cartesianos tridimensionais e cartesianos locais faz-se necessário estimar a precisão da transformação, isto é, determinar a matriz variância-covariância (MVC) das coordenadas transformadas. Contudo, para que isso ocorra é preciso conhecer a matriz variância-covariância das coordenadas no sistema inicial e realizar a propagação de variância-covariância, ou simplesmente a propagação de covariância (AGUIAR; CAMARGO; GALO, 2002).

Para Gemael (1994), no caso de transformação de coordenadas, a tarefa da propagação consiste em determinar as propriedades estocásticas das coordenadas transformadas, a partir das propriedades das coordenadas originais. Mesmo considerando que eventualmente as coordenadas originais sejam independentes, não correlacionadas, mas não significa que o mesmo ocorra com as coordenadas transformadas, já que o próprio modelo matemático que interliga as coordenadas às correlaciona.

Assim, a precisão de uma variável aleatória é fornecida pelo desvio padrão (σ_i) dessa variável. Quando se tem uma variável aleatória multidimensional X à precisão é representada pela matriz variância-covariância (Σ_X) que é formada pelas variâncias σ_i^2 dos i-ésimos elementos que compõe a variável aleatória, e pelas covariâncias σ_{ij} ($i \neq j$) desses mesmos elementos, conforme Equação (28) (GEMAEL, 1994):

$$\Sigma_X = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Vale destacar que a raiz quadrada positiva das variâncias (σ_i^2) fornece o desvio padrão associada à precisão dessa variável aleatória, e a covariância (σ_{ij}) indica o grau de dependência ou relação entre os elementos i e j da variável aleatória.

2.7.1. Lei de Propagação das Covariâncias

De forma sucinta será abordada a lei de propagação de covariância, onde sua demonstração completa pode ser encontrada em obras consagradas de Ajustamento de Observações, tais como: Mikail e Ackerman (1976), Gemael (1994), Ghilani e Wolf (2006) e outros autores.

Admitindo duas vareáveis aleatórias multidimensionais Y e X, pode-se considerar que elas são relacionadas por um modelo linear na forma:

$$_mY_1 = {}_mG_{n\,n}\,X_1 + {}_mC_1 \tag{29}$$

Onde:

G é a matriz dos coeficientes; e C é a matriz dos termos independentes.

A lei de propagação das covariâncias está relacionada com o conhecimento da matriz variância-covariância da variável aleatória Y (Σ_Y), a partir do modelo funcional vinculado a variável aleatória X e sua matriz variância-covariância (Σ_X), definido em (GEMAEL, 1994):

$$\Sigma_Y = G\Sigma_X G^T \tag{30}$$

Quando o modelo funcional não é linear, a lei de propagação é dada pela seguinte expressão:

$$\Sigma_Y = D\Sigma_X D^T \tag{31}$$

Onde:

D representa a matriz Jacobiana formada pelas derivadas parciais da função em relação a variável aleatória X, ou seja:

$$D = \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{X^\circ} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{X^\circ} \tag{32}$$

2.7.2. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Elipsoidais em Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas

A propagação de covariância, na conversão de coordenadas geodésicas elipsoidais em coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas pode ser realizada aplicando a seguinte fórmula:

$$\Sigma_{XYZ} = D\Sigma_{\phi\lambda h}D^T \tag{33}$$

Onde:

D é matriz Jacobiana;

Σ_{XYZ} é a matriz variância-covariância das coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas; e

$\Sigma_{\phi\lambda h}$ é a matriz variância-covariância das coordenadas geodésicas elipsoidais;

Os elementos da matriz D são obtidos a partir das derivadas parciais da Equação (7) em relação a (ϕ,λ,h), obtendo-se (ANDRADE, 1990; LEICK, 1995):

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_G}{\partial \phi} & \frac{\partial X_G}{\partial \lambda} & \frac{\partial X_G}{\partial h} \\ \frac{\partial Y_G}{\partial \phi} & \frac{\partial Y_G}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y_G}{\partial h} \\ \frac{\partial Z_G}{\partial \phi} & \frac{\partial Z_G}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z_G}{\partial h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(M+h)sen\phi\cdot\cos\lambda & -(N+h)\cos\phi\cdot sen\lambda & \cos\phi\cdot\cos\lambda \\ -(M+h)sen\phi\cdot sen\lambda & (N+h)\cos\phi\cdot\cos\lambda & \cos\phi\cdot sen\lambda \\ (M+h)\cos\phi & 0 & sen\phi \end{bmatrix} \tag{34}$$

Em que

N é o raio de curvatura da seção primeiro vertical e;

M é o raio de curvatura da seção meridiana, obtida pela equação (35):

$$M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\sqrt{\left(1-e^2 sen^2\phi\right)^3}} \tag{35}$$

2.7.3. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas em Coordenadas Geodésicas Elipsoidais

A matriz variância covariância das coordenadas geodésicas elipsoidais em função das coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas são obtidas a partir da Equação (34), por meio da inversa da matriz D, como segue:

$$\Sigma_{\phi\lambda h} = D^{-1}\Sigma_{(XYZ)_G}D^{-1^T} \tag{36}$$

Sendo a matriz D^{-1} calculada em (ANDRADE, 1990; LEICK, 1995):

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_G}{\partial \phi} & \frac{\partial X_G}{\partial \lambda} & \frac{\partial X_G}{\partial h} \\ \frac{\partial Y_G}{\partial \phi} & \frac{\partial Y_G}{\partial \lambda} & \frac{\partial Y_G}{\partial h} \\ \frac{\partial Z_G}{\partial \phi} & \frac{\partial Z_G}{\partial \lambda} & \frac{\partial Z_G}{\partial h} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{sen\phi \cdot \cos\lambda}{M+h} & -\frac{sen\phi \cdot sen\lambda}{M+h} & \frac{\cos\phi}{M+h} \\ -\frac{sen\lambda}{(N+h)\cos\phi} & \frac{\cos\lambda}{(N+h)\cos\phi} & 0 \\ \cos\phi \cdot \cos\lambda & \cos\phi \cdot sen\lambda & sen\phi \end{bmatrix} \tag{37}$$

2.7.4. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas em Coordenadas Geodésicas Cartesianas Locais.

Aplicando-se a lei de propagação das covariâncias conforme modelo dado pela Equação (29), tem-se a matriz variância-covariância ($\Sigma_{(XYZ)_G}$) da transformação de coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas em coordenadas geodésicas cartesianas locais ($\Sigma_{(XYZ)_{GL}}$), em (AGUIAR; CAMARGO; GALO, 2002):

$$\Sigma_{(XYZ)_{GL}} = D\Sigma_{(XYZ)_G}D^T \tag{38}$$

Onde:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{GL}}{\partial X_G} & \frac{\partial X_{GL}}{\partial Y_G} & \frac{\partial X_{GL}}{\partial Z_G} \\ \frac{\partial Y_{GL}}{\partial X_G} & \frac{\partial Y_{GL}}{\partial Y_G} & \frac{\partial Y_{GL}}{\partial Z_G} \\ \frac{\partial Z_{GL}}{\partial X_G} & \frac{\partial Z_{GL}}{\partial Y_G} & \frac{\partial Z_{GL}}{\partial Z_G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sen\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -sen\phi \cdot \cos\lambda & -sen\phi \cdot sen\lambda & \cos\phi \\ \cos\phi \cdot \cos\lambda & \cos\phi \cdot sen\lambda & sen\phi \end{bmatrix} \quad (39)$$

2.7.5. Propagação das Covariâncias na Transformação de Coordenadas Geodésicas Cartesianas Geocêntricas em Coordenadas Topográficas Cartesianas Locais

Procedimento análogo à propagação das covariâncias na transformação de coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas em coordenadas geodésicas cartesianas locais, exceto pela substituição das coordenadas geodésicas elipsoidais por coordenadas astronômicas (Φ,Λ).

Logo a matriz variância-covariância ($\Sigma_{(XYZ)_G}$) da transformação de coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas em coordenadas topográficas locais ($\Sigma_{(XYZ)_{TL}}$) resulta em (AGUIAR; CAMARGO; GALO, 2002):

$$\Sigma_{(XYZ)_{TL}} = D\Sigma_{(XYZ)_G} D^T \quad (40)$$

Onde:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{TL}}{\partial X_G} & \frac{\partial X_{TL}}{\partial Y_G} & \frac{\partial X_{TL}}{\partial Z_G} \\ \frac{\partial Y_{TL}}{\partial X_G} & \frac{\partial Y_{TL}}{\partial Y_G} & \frac{\partial Y_{TL}}{\partial Z_G} \\ \frac{\partial Z_{TL}}{\partial X_G} & \frac{\partial Z_{TL}}{\partial Y_G} & \frac{\partial Z_{TL}}{\partial Z_G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sen\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ -sen\Phi \cdot \cos\Lambda & -sen\Phi \cdot sen\Lambda & \cos\Phi \\ \cos\Phi \cdot \cos\Lambda & \cos\Phi \cdot sen\Lambda & sen\Phi \end{bmatrix} \quad (41)$$

2.8. Ajustamento por Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)

A obtenção da posição de uma estação de observação a partir de posicionamento pelo GNSS e levantamento topográfico, geralmente é obtida a partir da técnica de ajustamento. Segundo Gemael (1994) o ajustamento visa uma solução única tornando as observações coerentes com um modelo matemático (funcional[17] e estocástico[18]) adotado. Permite, assim, a estimação de um valor para cada variável do modelo matemático e, bem como, a estimação da precisão dessas variáveis.

Convém ressaltar que o ajustamento é aplicado nos casos em que o número de observações é maior que o número de incógnitas, ou seja, quando há redundância ou superabundância de informações, como, por exemplo, o levantamento topográfico e o posicionamento pelo GNSS envolvidos nesta pesquisa.

Conforme visto anteriormente quando existem observações redundantes é necessário proceder a um ajustamento a fim de se conseguir uma solução única para o modelo matemático empregado. Logo, de modo geral, o princípio do Método dos Mínimos Quadrados estabelece que: a soma dos quadrados dos resíduos (V) das observações seja mínima:

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + \ldots + V_n^2 = \sum_{i=1}^{n} V_i^2 = mínima \tag{42}$$

O ajustamento por Método dos Mínimos Quadrados pode ser efetuado usando-se o método das equações de observações (método paramétrico), o método das equações de condição (método dos correlatos) ou o método combinado. Neste estudo são empregados o método paramétrico e o método combinado, ambos de ampla aplicação nas Ciências Geodésicas.

[17] O modelo funcional descreve as propriedades determinísticas da realidade física.

[18] O modelo estocástico descreve as propriedades não determinísticas (probabilísticas) das variáveis envolvidas, particularmente aquelas que representam as observações.

2.8.1. Método Paramétrico

Segundo Gemael (1994), o método paramétrico ajusta observações diretas e indiretas. No caso das indiretas, as observações realizadas não se processam sobre as grandezas procuradas. É possível descrever matematicamente as observações em função dos seus parâmetros, que são grandezas vinculadas às grandezas observadas e consistem em incógnitas de interesse.

O modelo matemático do ajustamento paramétrico, também chamado modelo explícito ou método das observações indiretas ou ainda método das equações de observações, definido em (DALMOLIN, 2010):

$$L_a = F(X_a) \tag{43}$$

Onde:

L_a é o vetor das observações ajustadas, e pode ser escrita em função do vetor das observações (L_b) e vetor dos resíduos (V):

$$L_a = L_b + V \tag{44}$$

X_a é o vetor dos parâmetros ajustados, e pode ser escrita em função do vetor dos valores aproximados (X_o) e vetor das correções aos parâmetros (X):

$$X_a = X_o + X \tag{45}$$

F é a função que relaciona L_a a X_a, podendo ser linear ou não linear.

Como a maioria das operações de ajustamento pelo método paramétrico às relações funcionais entre observações e parâmetros são não lineares, faz-se necessário o desenvolvimento em série de Taylor na Equação (45). Com o objetivo de linearizar a função em torno de valores aproximados do vetor X_o (DALMOLIN, 2010), Equação (46):

$$F(X_a) = F(X_o) + \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_o} (X_a - X_o) = L_o + AX \tag{46}$$

Onde se está representando

$$L_o = F(X_o) \tag{47}$$

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_o} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial X_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_u} \end{bmatrix}_{n \times u} \tag{48}$$

Assim, a Equação (46) pode ser escrita como:

$$L_b + V = F(X_o + X) \tag{49}$$

Introduzindo na Equação (43) o vetor L_o, resultante das n soluções de $F(X_o)$, e a matriz A, denominada matriz dos coeficientes, formada pelas derivadas parciais de F em relação aos parâmetros ajustados, calculadas para os valores aproximados desses parâmetros, tem-se:

$$V = L + AX \tag{50}$$

Em que:

L é a diferença entre L_o e L_b

Da Equação (51), tem-se que o cálculo do vetor das correções aos parâmetros em (GEMAEL, 1994):

$$X = -\left(A^T PA\right)^{-1} A^T PL \tag{51}$$

Na Equação (51) o elemento P representa a matriz dos pesos; definida inversamente proporcional à variância da observação:

$$P = \sigma_o^2 \sum_{l_b}^{-1} \tag{52}$$

Onde:

$\sum_{l_b}^{-1}$ é a matriz variância covariância das observações; e

σ_o^2 é a variância de referência a priori.

Em seguida, após o ajustamento, é possível obter a matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados pela Equação (53):

$$\sum_{XX} = \hat{\sigma}_o^2 \left(A^T P A \right)^{-1} \tag{53}$$

A matriz variância-covariância das observações ajustadas é obtida em função da precisão dos parâmetros ajustados:

$$\sum_{ll} = A \sum_{XX} A^T \tag{54}$$

Consequentemente, a matriz variância-covariância dos resíduos é obtida pela diferença das matrizes variância covariância dos valores observados e ajustados:

$$\sum_{VV} = \sum_{l_b} - \sum_{ll} \tag{55}$$

2.8.2. Método Combinado

Tal método relaciona dois métodos de ajustamento: o paramétrico e o dos correlatos, onde o modelo matemático reúne tanto parâmetros ajustados como valores observados ajustados, porém ligados por uma função não explcita. Seu modelo matemático funcional é definido em (GEMAEL, 1994), Equação (56):

$$F(L_a, X_a) = 0 \quad (56)$$

Onde:

L_a vetor das observações ajustadas;

X_a parâmetros ajustados; e

F é uma função genericamente não linear.

A linearização do modelo F é obtida por série de Taylor, escrita como:

$$F(L_a, X_a) = F(L_b + V, X_o + X) \approx F(L_b, X_o) + \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_a = L_b} (L_a - L_b) + \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_o} (X_a - X_o) = 0 \quad (57)$$

Ou

$$AX + BV + W = 0 \quad (58)$$

Em que:

$A = \left.\frac{\partial F}{\partial X_a}\right|_{X_a = X_o}$ é a matriz das derivadas parciais das equações de observação em relação aos parâmetros;

$B = \left.\frac{\partial F}{\partial L_a}\right|_{L_a = L_b}$ é a matriz das derivadas parciais das equações de observação em relação às observações;

$W = F(L_b, X_o)$ é o vetor erro de fechamento;

$V = L_a - L_b$ é o vetor dos resíduos; e

$X = X_a - X_o$ é o vetor da diferença.

Aplica-se o princípio do Método dos Mínimos Quadrados ao modelo da Equação (57), que consiste em minimizar a função (Φ) em (DALMOLIN, 2010):

$$\Phi = V^T PV - 2K^T (AX + BV + W) = mínimo \tag{59}$$

Onde:

P é a matriz dos pesos;

K é o vetor dos multiplicadores de Lagrange ou dos correlatos; e

V, A, B e W são como definidos anteriormente.

A derivada da Equação (59) parcialmente em relação a V, K e X, e igualando a zero as três equações resultantes, tem-se (GEMAEL, 1994):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = 2PV - 2B^T K \therefore PV - B^T K = 0 \tag{60}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial K} = -2(AX + BV + W) \therefore AX + BV + W = 0 \tag{61}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = -2A^T K \therefore A^T K = 0 \tag{62}$$

Logo, isolando V na Equação (60) resulta:

$$V = P^{-1} B^T K \tag{63}$$

E substituindo este vetor na Equação (61) e isolando K, obtém-se:

$$K = -\left(BP^{-1}B^T\right)^{-1}(AX + W) \tag{64}$$

Onde, para simplificação de cálculo assume-se:

$$M = \left(BP^{-1}B^T\right)^{-1} \tag{65}$$

Substituindo a Equação (64) na (62), tem-se:

$$X = -\left(A^T M^{-1} A\right)^{-1} A^T M^{-1} W \tag{66}$$

A estimativa de um valor ou de um conjunto de valores deve vir acompanhada de um indicador de qualidade dos mesmos, que no caso é a matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados, obtida em (CAMARGO, 2000):

$$\sum X_a = \hat{\sigma}_o^2 \left(A^T M^{-1} A\right)^{-1} \tag{67}$$

Assim, a matriz variância covariância dos valores observados ajustados, vetor dos resíduos e vetor erro de fechamento são determinadas, respectivamente, em (GEMAEL, 1994):

$$\sum L_a = \hat{\sigma}_o^2 \left[P^{-1} + P^{-1} B^T M^{-1} A \left(A^T M^{-1} A\right)^{-1} A^T M^{-1} B P^{-1} - P^{-1} B^T M^{-1} B P^{-1} \right] \tag{68}$$

$$\sum V = \hat{\sigma}_o^2 P^{-1} - \sum L_a \tag{69}$$

$$\sum W = \hat{\sigma}_o^2 M \tag{70}$$

2.8.3. Teste de Qualidade do Ajustamento

Após as etapas de cálculos desenvolvidas até o momento faz-se necessário realizar uma análise crítica do processo de ajustamento, determinando-se o nível de precisão das grandezas ajustadas, bem como, a validade do modelo funcional estabelecido. Isso é feito estimando-se o fator de variância a posteriori em (DALMOLIN, 2010):

$$\hat{\sigma}_o^2 = \frac{V^T P V}{(n-u)} \tag{71}$$

Onde:

n é o número de observações; e u é o número de parâmetros.

Cabe ressaltar, que a estimação da variância a posteriori é uma medida para a precisão das observações se o modelo funcional e a matriz variância-covariância das observações estão corretos. Com isso, a partir do conhecimento inicial da variância a priori pode-se aplicar um teste estatístico para verificar se a diferença entre o valor a priori e o valor a posteriori é significativa dentro de um determinado nível de confiança. A comparação é feita através de teste de hipótese baseado na distribuição do χ^2, para constatar se a discrepância é significativa a certo grau de confiança, sob a hipótese nula (GEMAEL, 1994):

$$H_o : \sigma_o^2 = \hat{\sigma}_o^2 \tag{72}$$

O valor calculado do χ_C^2 é dado pela equação:

$$\frac{V^T P V}{\sigma_o^2} = (n-u)\frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \tag{73}$$

Da tabela de distribuição do χ^2 é retirado o valor do correspondente quantil $\chi_{f,a}^2$, obtido em função dos graus de liberdade f e do nível de significância α.

De acordo com Gemael (1994) se $\chi_C^2 > \chi_{f,\alpha}^2$, então a hipótese nula H_o, em um nível de significância α, é rejeitada. Nesse caso, o ajustamento deve ser avaliado. As causas para que o teste apresente uma grande discrepância entre os dois fatores de variância podem ser:

- o valor de σ_o^2 não corresponde as condições de medição reais;
- pode haver erro na matriz variância covariância das observações;
- o modelo estocástico é inadequado, podendo apresentar erros grosseiros ou sistemáticos, bem como pesos errados as observações ou correlações não consideradas;
- o modelo funcional não é consistente com as observações; e
- o sistema pode estar mal condicionado.

2.8.4. Detecção de Erros Grosseiros – *Data Snooping*

A teoria do ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados pressupõe observações inexistentes de erros grosseiros e erros sistemáticos por algum processo anterior ao ajustamento, ou seja, são admitidas observações eivadas apenas de erros aleatórios. No entanto, nem sempre tais pressupostos são atendidos, logo, faz-se necessário a verificação da confiabilidade das observações e do modelo matemático. Para isso, os resíduos das observações ajustadas são submetidos a testes estatísticos que buscam detectar *Outliers*[19], localizar e eliminar erros grosseiros de pequena magnitude, já que é assumido que erros grosseiros de grande magnitude foram eliminados por procedimentos de controle anterior ao ajustamento (AMORIM, 2004).

A técnica empregada por *Data Snooping* visa procurar a existência de erro grosseiro em apenas uma observação de cada vez. Tal técnica consiste em verificar todos os resíduos ajustados, um a um, na busca por erros grosseiros. Assim, o *Data Snooping* propõe que a divisão dos resíduos (v) de uma observação i por seus respectivos desvios padrão (σ_v) resulta em uma estatística conhecida como resíduo normalizado (w) expresso por (BAARDA, 1968):

$$w_i = \frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}} \tag{74}$$

Assim, a observação é rejeitada quando o resíduo normalizado for maior que o nível de significância sugerido por Baard (1968), α = 0,001 (0,1%), que corresponde a 3,29 desvios padrão. Logo, a observação possue erro grosseiro se:

$$|w_i| > n_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{ou} \quad |w_i| > 3{,}29 \tag{75}$$

Em que, n é a distribuição de densidade normal.

[19] *Outliers* são resíduos provocados por erros grosseiros que conforme determinado testes estatísticos ultrapassam certos valores críticos (AMORIM, 2004).

3. INTEGRAÇÃO ENTRE GNSS E LEVANTAMENTO TOPOGRÁFICO

Este capítulo aborda integração entre o posicionamento pelo GNSS e o levantamento topográfico através do conhecimento do desvio da vertical. Assim, serão apresentados os principais métodos envolvidos na determinação das componentes do desvio da vertical para a integração mencionada.

3.1. Desvio da vertical

Para um ponto P situado na Superfície Física da Terra duas retas imaginárias ficam definidas; uma pela direção do vetor gravidade desse ponto, conhecida como vertical do ponto (tangente à linha de força), e outra pela normal geodésica que passa pelo ponto. O ângulo formado entre essas duas retas imaginarias é conhecido como deflexão da vertical ou desvio da vertical (θ) em P[20], Figura 12.

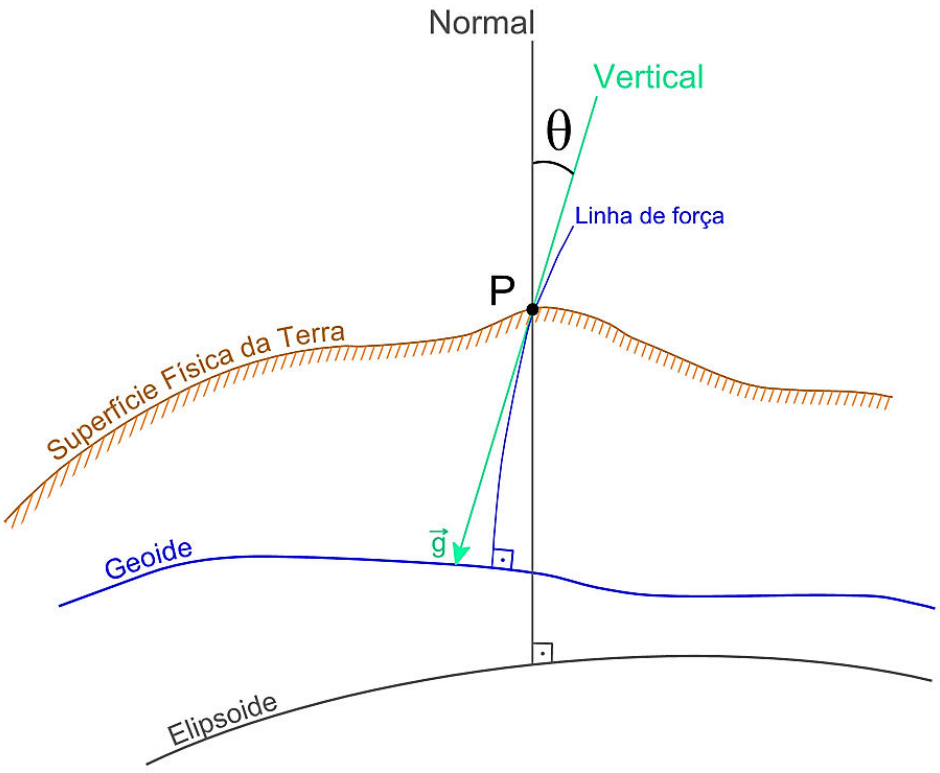

Figura 12 – Desvio da vertical.

Fonte: Autor (2012).

[20] Neste trabalho, serão negligenciadas diferenças entre o desvio da vertical em um ponto P na superfície da Terra, e o desvio da vertical definido pela projeção desse ponto segundo a linha de força no Geoide ou segundo a vertical no Geoide, como tratado, por exemplo, em Vanícek e Krakiwsky (1982).

O cálculo do desvio da vertical é realizado por suas duas componentes ortogonais, uma na direção Norte-Sul do meridiano astronômico do lugar denominada componente meridiana (ξ) e outra na direção Leste-Oeste no plano que contém o círculo primeiro vertical, chamada componente primeiro vertical (η). Convenciona-se valor positivo para a componente meridiana (ξ) quando a vertical está ao norte da normal e valor positivo para a componente primeiro vertical (η), quando a vertical esta a leste da normal, Figura 13.

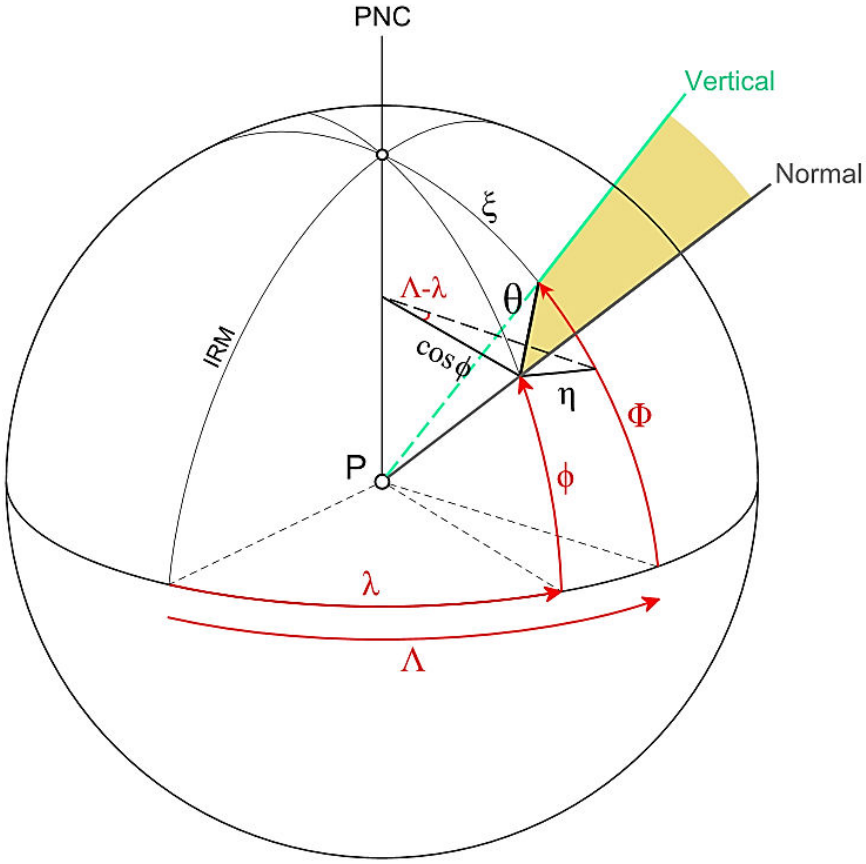

Figura 13 – Componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η) do desvio da vertical (θ) projetadas na esfera celeste a partir de um ponto P na Superfície Física da Terra.
Fonte: Hofmann-Wellenhof e Moritz (2005).

Pela magnitude das componentes ξ e η o triangulo esférico pode ser tratado como um triângulo plano e o módulo do desvio da vertical calculado pelo teorema de Pitágoras.

$$|\theta| = \left|\sqrt{\xi^2 + \eta^2}\right| \tag{76}$$

A projeção do desvio da vertical no alinhamento entre dois pontos (P_1 e P_2) de azimute geodésico (α) pode ser obtida com auxilio das componentes do desvio da vertical utilizando a fórmula de Helmert, Equação (77) (HEISKANEN; MORITZ, 1967). A representação dessa equação é ilustrada na Figura 14.

$$\theta_\alpha = \xi \cos\alpha + \eta sen\alpha \tag{77}$$

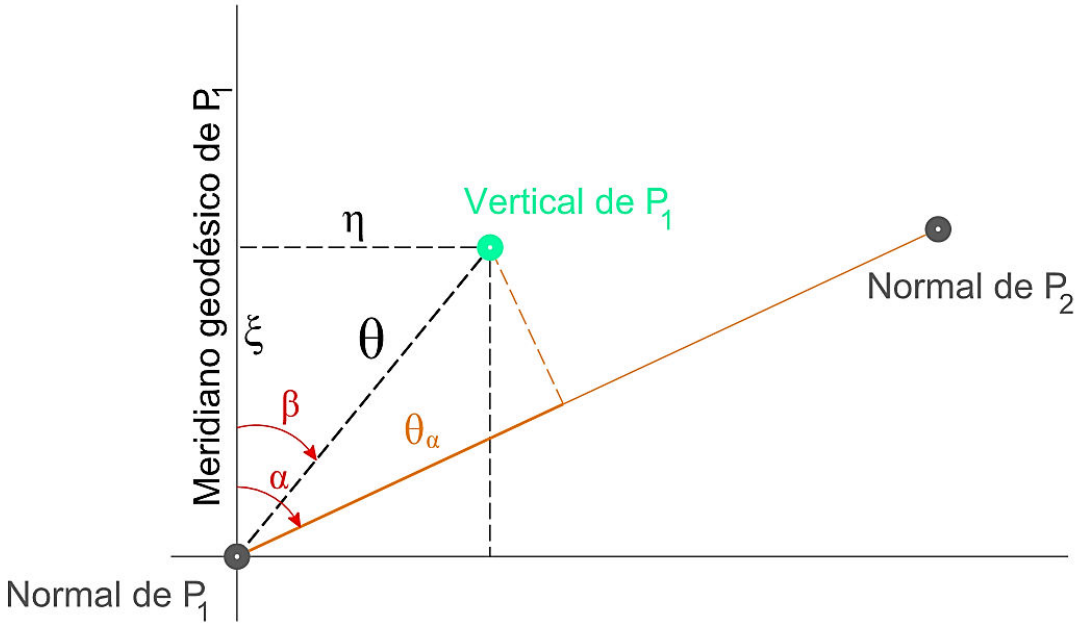

Figura 14 – Projeção do desvio da vertical no alinhamento de azimute (α) em função das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η). Vista de uma porção plana da esfera celeste. Fonte: Autor (2012).

O azimute geodésico da vertical (β) em P_1 pode ser obtido a partir das componentes do desvio da vertical em função da tangente:

$$tg\beta = \frac{\eta}{\xi} \tag{78}$$

Sendo a Equação (77) desenvolvida pela projeção:

$$\theta_\alpha = \theta \cos(\alpha - \beta) \tag{79}$$

Para a realização de pré-análise ou mesmo obtenção da precisão do desvio da vertical estimado, vale à pena destacar o uso da aplicação da lei de propagação das variâncias para determinar o desvio padrão da grandeza desejada (MIKAIL; ACKERMAN, 1976). Assim, a partir do conhecimento dos desvios-padrão das componentes do desvio da vertical (σ_ξ, σ_η), pode-se calcular o desvio padrão do desvio da vertical (σ_θ):

$$\sigma_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 \cdot {\sigma_\xi}^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2 \cdot {\sigma_\eta}^2} = \sqrt{\frac{\xi^2 \cdot {\sigma_\xi}^2 + \eta^2 \cdot {\sigma_\eta}^2}{\xi^2 + \eta^2}} \tag{80}$$

Da aplicação da lei de propagação das variâncias na Equação (77), o desvio padrão do desvio da vertical para uma seção de azimute (α) pode ser obtido pela Equação (81):

$$\sigma_{\theta\alpha} = \sqrt{\left(\sigma_\xi \cos\alpha\right)^2 + \left(\sigma_\eta sen\alpha\right)^2 + \left(\eta\cos\alpha - \xi sen\alpha\right)^2 \sigma_\alpha^2} \tag{81}$$

3.1.1. Aplicações do Desvio da Vertical

Segundo Featherstone e Rüeger (2000); Zanetti, De Freitas e Faggion (2008) e Ceylan (2009) o desvio da vertical com suas componentes possuem seis aplicações principais em levantamentos de campo, sendo estas: *a)* transformação entre coordenadas geodésicas e astronômicas; *b)* transformação entre azimutes geodésicos e astronômicos; *c)* redução de ângulos zenitais medidos ao Elipsoide; *d)* redução de direções horizontais e ângulos medidos ao Elipsoide; *e)* redução das distâncias inclinadas medidas eletronicamente ao Elipsoide através de ângulos zenitais; *f)* determinação de desníveis elipsoidais através de ângulos zenitais e distâncias inclinadas.

Inclui-se também nas aplicações do desvio da vertical a transformação de sistemas terrestres topocêntricos: Topográfico Local entre Geodésico Local conforme exposto em Garnés (1998). Nos subitens seguintes serão abordados os detalhes dessas aplicações.

3.1.1.1. Transformação entre Coordenadas Geodésicas e Astronômicas

As componentes do desvio da vertical são empregadas na transformação entre coordenadas astronômicas (Φ,Λ) obtidas com relação ao vetor de gravidade e coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ,λ) referidas ao Elipsoide de referência. Conforme demostrada em Heiskanen e Moritz (1967); Bomford (1977); Gemael (1977); tem-se a relação:

$$\phi = \Phi - \xi \tag{82}$$

$$\lambda = \Lambda - \frac{\eta}{\cos\phi} \tag{83}$$

3.1.1.2. Transformação entre Azimutes Geodésicos e Astronômicos

O conhecimento do desvio da vertical faz-se necessário para converter azimutes astronômicos (A) em azimutes geodésicos (α). Sendo alcançada por meio da fórmula de Heiskanen e Moritz (1967); Vaníček e Krakiwsky, (1986):

$$\alpha = A - \eta \cdot \tan\phi - \left(\xi \cdot sen\alpha - \eta \cdot \cos\alpha\right) \cdot \cot Z \tag{84}$$

Onde:

Z é o ângulo zenital elipsoidal.

De acordo com Featherstone e Rüeger (2000), na prática, o terceiro termo a direita na Equação (84) pode ser negligenciado, especialmente para ângulo zenital elipsoidal próximo de 90°. Logo, a expressão resulta na equação de Laplace:

$$\alpha = A - \eta \cdot \tan\phi \tag{85}$$

3.1.1.3. Redução de Ângulos Zenitais Medidos ao Elipsoide

A redução de ângulos zenitais ao Elipsoide de referência faz-se necessário quando a estação de observação e o ponto visado, ambos na superfície terrestre, não se encontram na mesma altitude elipsoidal (h). Por meio das componentes do desvio da vertical corrige-se o ângulo zenital terrestre, conduzido sobre a vertical do observador, para obter o ângulo zenital elipsoidal (Z) em relação a normal ao Elipsoide (HEISKANEN; MORITZ, 1967); (VANÍČEK; KRAKIWSKY, 1986):

$$Z = z + \left(\xi \cdot \cos\alpha + \eta \cdot sen\alpha\right) \tag{86}$$

Onde:

z é o ângulo zenital medido.

3.1.1.4. Redução de Direções Horizontais e Ângulos Medidos ao Elipsoide

As observações das direções horizontais, assim como os ângulos, obtidas na superfície da Terra devem ser corrigidas pelas componentes do desvio da vertical para a sua redução no Elipsoide de referência. A correção para uma direção horizontal é dada por (BOMFORD, 1980):

$$d = D_H - \left(\xi \cdot sen\alpha - \eta \cdot \cos\alpha\right) \cdot \cot Z \tag{87}$$

Onde:

d é a direção desejada relacionada ao Elipsoide de referência;

D_H é a direção observada com relação ao vetor de gravidade na Terra; e

Z é o ângulo zenital elipsoidal obtido na Equação (86).

Para um ângulo medido (ang), a correção composta da diferença de duas direções envolvidas, Equação (87), resulta:

$$ang = d_2 - d_1 = D_{H_2} - D_{H1} + \left(\xi \cdot sen\alpha_1 - \eta \cdot \cos\alpha_1\right) \cdot \cot Z_1 - \left(\xi \cdot sen\alpha_2 - \eta \cdot \cos\alpha_2\right) \cdot \cot Z_2 \tag{88}$$

Analisando as Equações (86) e (87), se os ângulos zenitais estiverem entre 89° e 91° e sendo os desvios da vertical até um máximo de 70”, comum no mundo, a redução a ser aplicada ficaria abaixo de 1”.

3.1.1.5. Redução das Distâncias Inclinadas Medidas Eletronicamente ao Elipsoide Através de Ângulos Zenitais

Detalhado por Featherstone e Rüeger (2000), as distâncias medidas eletronicamente podem ser reduzidas sobre a superfície do Elipsoide empregando-se o ângulo zenital e o conhecimento da altitude elipsoidal (h) na estação de observação e num ponto visado qualquer, conforme ilustrado na Figura 15.

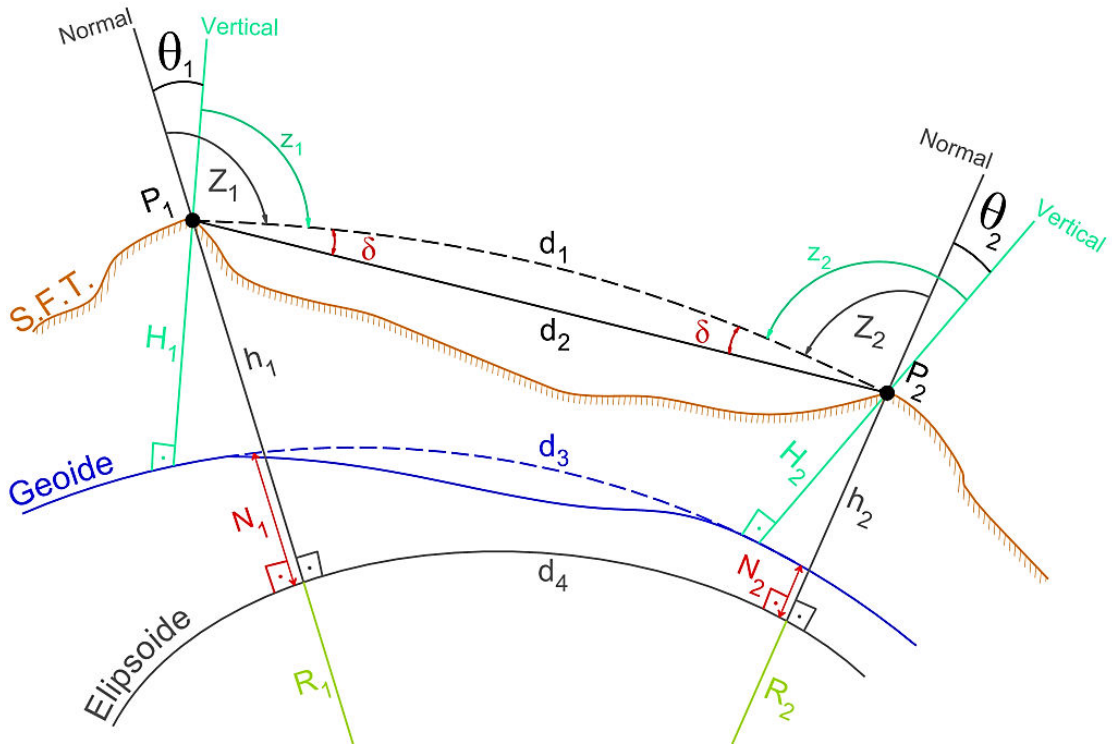

Figura 15 – Geometria da redução das distâncias inclinadas para o Elipsoide via ângulos zenitais.
Fonte: Featherstone e Rüeger (2000).

Em que:

d_1 é a distância medida em curva conforme refração do sinal;

d_2 é a distância inclinada corrigida da refração (corda);

d_3 é a distância reduzida ao Geoide;

d_4 é à distância elipsoidal;

δ é o ângulo de refração; e

R_1 e R_2 raios de seções normais do Elipsoide segundo azimutes das seções normais direta e recíproca de P_1 para P_2.

O cálculo da distância no "Elipsoide" a partir da distância inclinada medida eletronicamente pode ser obtido em (RÜEGER, 1996):

$$d_4 = R_\alpha \cdot \arctan\left(\frac{d_2 \cdot sen(z_1 + \theta_1 + \delta)}{R_\alpha + h_1 + d_2 \cdot \cos(z_1 + \theta_1 + \delta)}\right) \tag{89}$$

Onde:

R_α é o raio de curvatura elipsoidal da seção de azimute α na latitude média dos pontos P_1 e P_2, pode ser calculado pelo teorema de Euler (BOMFORD, 1977):

$$R_\alpha = \frac{NM}{N \cdot \cos^2 \alpha + M \cdot sen^2 \alpha} \tag{90}$$

Na prática a Equação (89) pode ser simplificada assumindo $d_2 \approx d_1$ e expressando o ângulo de refração (δ) em função do coeficiente de refração atmosférica (k) (RÜEGER, 1996):

$$\delta = \frac{d_1 k}{2R_\alpha} \tag{91}$$

Com a substituição da Equação (91) em (89) a expressão para d_4 torna-se:

$$d_4 = R_\alpha \cdot \arctan\left(\frac{d_1 \cdot sen\left(z_1 + \theta_1 + \frac{d_1 k}{2R_\alpha}\right)}{R_\alpha + h_1 + d_1 \cdot \cos\left(z_1 + \theta_1 + \frac{d_1 k}{2R_\alpha}\right)}\right) \tag{92}$$

3.1.1.6. Determinação de Desníveis Elipsoidais Através de Ângulos Zenitais e Distâncias Inclinadas

Desníveis elipsoidais ou diferença de altitude elipsoidal entre dois pontos quaisquer na Superfície Física da Terra, conforme apresentado na Figura 15, é obtida do posicionamento 3D por GNSS, principalmente porque esta técnica é mais cômoda. Contudo, a diferença de altitude elipsoidal também pode ser determinada a partir de distância inclinada (d_2) e ângulo zenital elipsoidal (Z), corrigido pelo desvio da vertical, empregando-se a Equação (93) (FEATHERSTONE; RUEGER, 2000):

$$h_2 - h_1 = d_2 \cdot \cos Z_1 + \frac{\left(1 - \frac{k}{senZ_1}\right)}{2 \cdot R_\alpha} \cdot \left(d_2 \cdot senZ_1\right)^2 + h_{ET(1)} - h_{T(2)} \tag{93}$$

Onde:

$h_2 - h_1$ diferença de altitude elipsoidal entre os pontos P_2 e P_1;

$h_{ET(1)}$ altura do instrumento no ponto P_1; e

$h_{T(2)}$ altura do alvo no ponto P_2.

Nota-se que os demais elementos já foram anteriormente definidos.

3.1.1.7. Transformação do Sistema Topográfico Local em Geodésico Local

Conforme definições do Sistema Topográfico Local visto no subitem (2.6.3), o eixo Z_{TL} coincide com a vertical na origem do sistema; o eixo Y_{TL} coincide com a direção do meridiano astronômico, sentido positivo para o norte; e o eixo X_{TL} forma um terno ortogonal com os outros dois eixos, com o sentido positivo para leste. Se forem conhecidas as coordenadas astronômicas (Φ_o,Λ_o) e coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ_o,λ_o,h_o) da origem do Sistema Topográfico Local, então qualquer ponto de coordenadas geodésicas elipsoidais P(ϕ,λ,h) dentro do Plano Topográfico Local poderá ter coordenadas no Sistema Topográfico Local calculado pela Equação (94):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{TL} = \begin{bmatrix} -sen\Lambda_o & \cos\Lambda_o & 0 \\ -sen\Phi_o \cos\Lambda_o & -sen\Phi_o sen\Lambda_o & \cos\Phi_o \\ \cos\Phi_o \cos\Lambda_o & \cos\Phi_o sen\Lambda_o & sen\Phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}_G \tag{94}$$

Todavia se o processo inverso for o desejado, ou seja, tendo-se as coordenadas no Sistema Topográfico Local $(X,Y,Z)_{TL}$ e requer-se o cálculo das coordenadas no Sistema Geodésico Local $(X,Y,Z)_{GL}$. Então o cálculo a ser feito é obter as coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e novamente transformá-las conforme equações (95) e (96).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_G = \begin{bmatrix} -sen\Lambda_o & -sen\Phi_o \cos\Lambda_o & \cos\Phi_o \cos\Lambda_o \\ \cos\Lambda_o & -sen\Phi_o sen\Lambda_o & \cos\Phi_o sen\Lambda_o \\ 0 & \cos\Phi_o & sen\Phi_o \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{TL} + \begin{bmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{bmatrix}_G \tag{95}$$

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{GL} = \begin{bmatrix} -sen\lambda_o & \cos\lambda_o & 0 \\ -sen\phi_o \cos\lambda_o & -sen\phi_o sen\lambda_o & \cos\phi_o \\ \cos\phi_o \cos\lambda_o & \cos\phi_o sen\lambda_o & sen\phi_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}_G \tag{96}$$

Nesse processo de transformação foi suposto o conhecimento de ambos os conjuntos de coordenadas no ponto origem, coordenadas astronômicas (Φ_o,Λ_o) e coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ_o,λ_o,h_o). Se apenas um conjunto de coordenadas é conhecido, as componentes do desvio da vertical são imprescindível, pois permitirão a transformação de coordenadas, por exemplo, de geodésicas elipsoidais em astronômicas conforme equação (82) e (83), reescritas aqui.

$$\Phi = \phi + \xi \tag{97}$$

$$\Lambda = \lambda + \frac{\eta}{\cos\phi} \tag{98}$$

3.2. Determinação do desvio da vertical

Existem vários métodos na determinação do desvio da vertical. Dentre eles o método astrogeodésico em que as componentes do desvio da vertical são determinadas por meio do conhecimento das coordenadas astronômicas e coordenadas geodésicas no mesmo ponto. Outro método é o gravimétrico, onde as componentes do desvio da vertical (ξ,η) são obtidas em função de anomalias da gravidade [21], através da fórmula de Vening-Meinesz. Um terceiro método de determinação do desvio da vertical é o método astrogravimétrico, que conjuga determinações astrogeodésicas com gravimétricas. Um quarto método para obter as componentes do desvio da vertical é por meio de posicionamento por GNSS com nivelamento de precisão. Um quinto método de obtenção das componentes do desvio da vertical é através de medidas GNSS e Topográficas, utilizando-se do método de Procrustes Parcial (ZANETTI, 2006). Outro método na obtenção das componentes do desvio da vertical envolve o desenvolvimento do modelo relativo da ondulação geoidal local em função de coordenadas geodésicas elipsoidais. Um sétimo método na determinação de tais componentes ocorre no relacionamento de coordenadas topocêntricas via observações por satélite e levantamento topográfico.

Em seguida são descritos os principais métodos empregados na determinação do desvio da vertical.

3.2.1. Método astrogeodésico

O método astrogeodésico foi introduzido por Helmert em 1884 (HIRT; FLURY, 2008), é um dos métodos mais antigos para a determinação do desvio da vertical. Baseia-se no princípio de se ter num mesmo ponto as coordenadas astronômicas (Φ,Λ) e as coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ,λ). Seu cálculo utiliza as bem conhecidas Equações (82) e (83), repetidas em (97) e (98) e novamente expressadas pelas (99) e (100) para as componentes ξ e η:

[21] De acordo com Gemael (1999) define-se anomalia da gravidade como a diferença entre o valor da gravidade real medida sobre a Superfície Física da Terra (e reduzida ao Geoide) e o valor da gravidade normal calculada no Elipsoide de referência.

$$\xi = \Phi - \phi \tag{99}$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda)\cos\phi \tag{100}$$

Ainda a componente (η) pode ser definida pela equação simplificada de Laplace, Equação (85), rearranjada como:

$$\eta = (\Lambda - \alpha)\cdot \cot\phi \tag{101}$$

Neste método é interessante a realização de uma pré-análise levando-se em conta as precisões das coordenadas astronômicas e azimute astronômico e das coordenadas geodésicas e azimute geodésico. Isso pode ser feito aplicando-se a lei de propagação de variâncias nas Equações (99), (100) e (101). Assim, obtêm-se, respectivamente, as precisões das componentes do desvio da vertical pelas equações:

$$\sigma_\xi = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \Phi}\right)^2 \cdot {\sigma_\Phi}^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \phi}\right)^2 \cdot {\sigma_\phi}^2} = \sqrt{{\sigma_\Phi}^2 + {\sigma_\phi}^2} \tag{102}$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \Lambda}\right)^2 \cdot {\sigma_\Lambda}^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \lambda}\right)^2 \cdot {\sigma_\lambda}^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \phi}\right) \cdot {\sigma_\phi}^2} = \sqrt{\left({\sigma_\Lambda}^2 + {\sigma_\lambda}^2\right)\cdot \cos^2\phi + \left((\lambda - \Lambda)\cdot sen\phi\right)^2 \cdot {\sigma_\phi}^2} \tag{103}$$

$$\sigma_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial A}\right)^2 \cdot {\sigma_A}^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \alpha}\right)^2 \cdot {\sigma_\alpha}^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \phi}\right) \cdot {\sigma_\phi}^2} = \sqrt{\left({\sigma_A}^2 + {\sigma_\alpha}^2\right)\cdot \cot g^2\phi + \left((A - \alpha)\cos\sec\phi\right)^2 \cdot {\sigma_\phi}^2} \tag{104}$$

Nas Tabelas 5, 6 e 7 são apresentadas as pré-análises realizadas com base nas precisões de coordenadas astronômicas classificadas como de 1ª ordem ($\sigma \leq$ 0,1”) e 2ª ordem ($\sigma \leq$ 1,5”), (EXÉRCITO, 1977). Também foi adotado para as coordenadas geodésicas elipsoidais uma acurácia de 1 cm ($\sigma \approx$ 0,0003”) tanto para latitude quanto para longitude. Esse valor é facilmente obtido nos dias de hoje com o posicionamento por GNSS. O azimute astronômico para as redes fundamentais de triangulação do IBGE admitia um erro máximo de 0,3” e para levantamentos de precisão admitia um erro máximo de 0,6” (IBGE, 1983).

Sendo um espaçamento de 500 m entre dois pontos como ocorre nas densificações de pontos de controle das redes de referencias cadastrais dos municípios, NBR 13.133 (ABNT, 1994) e NBR 14166 (ABNT, 1998) a incerteza do azimute geodésico com erro posicional de 1 cm em apenas um dos pontos, daria em torno de $\sigma \approx 4$". As pré-análises foram realizadas utilizando as coordenadas geodésicas elipsoidais, SIRGAS2000, de Recife para um ponto localizado na UFPE (-8°03'10,89"S; -34°57'16,9"W), com supostas componentes do desvio da vertical nesse ponto, sendo: $\xi = -2,78$" e $\eta = 3,90$".

Tabela 5 – Pré-análise da componente meridiana (ξ) da Equação 102.

Precisão da componente meridiana		
σξ (")	σΦ (")	σϕ (")
1,0	1,0	0,0
1,4	1,0	1,0
1,8	1,5	1,0
2,1	1,5	1,5
2,5	2,0	1,5
2,8	2,0	2,0

Fonte: Autor (2012).

Tabela 6 – Pré-análise da componente primeiro vertical (η) da Equação 103.

Precisão da componente primeiro vertical				
ση (")	σΛ (")	σλ (")	σϕ (")	(λ - Λ) (")
1,0	1,0	0,0003	0,0003	1,0
1,3	1,3	0,0003	0,0003	1,5
1,5	1,5	0,0003	0,0003	2,0
1,7	1,7	0,0003	0,0003	2,5
2,0	2,0	0,0003	0,0003	3,0
2,1	2,1	0,0003	0,0003	3,5

Fonte: Autor (2012).

Tabela 7 – Pré-análise da componente primeiro vertical (η) da Equação 104.

Precisão da componente primeiro vertical				
ση (")	σA (")	σα (")	σϕ (")	(A - α) (")
7,2	1,0	0,0003	0,0003	1,0
9,3	1,3	0,0003	0,0003	1,5
10,7	1,5	0,0003	0,0003	2,0
12,2	1,7	0,0003	0,0003	2,5
14,3	2,0	0,0003	0,0003	3,0
15,0	2,1	0,0003	0,0003	3,5

Fonte: Autor (2012).

As pré-análises das Tabelas 5, 6 e 7 mostram que o método Astrogeodésico é bastante sensível, pois as incertezas nos valores de ξ e η são da mesma ordem que as incertezas nos valores das coordenadas e, no caso, muito próximas do próprio valor a ser determinado.

3.2.2. Método gravimétrico

O método gravimétrico tem como ponto de partida a relação entre a ondulação geoidal e o desvio da vertical pelo conhecimento das anomalias da gravidade. A solução teórica para a ondulação geoidal utilizando as anomalias da gravidade foi publicada por George Gabriel Stokes em 1849 (HEISKANEN; MORITZ, 1967), utilizando uma integral função do ângulo esférico (ψ) em pontos de cálculo do elemento de área ($d\sigma$) que recebeu a denominação de integral de Stokes, representada em (LEICK, 1995):

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma}\iint_{\sigma}\Delta g S(\psi)d\sigma \tag{105}$$

Onde:

γ : valor da gravidade normal média;

Δg : anomalia da gravidade média para $d\sigma$;

$d\sigma$: elemento de área da superfície diferencial;

σ: área da superfície da terra esférica;

$S(\psi)$: função de Stokes;

ψ : ângulo esférico do ponto de cálculo; e

R: raio médio da Terra esférica (≅ 6.371.000 m).

A função de Stokes $S(\psi)$ é obtida pela expressão (GEMAEL, 1999):

$$S(\psi) = \cos\sec(\psi/2) + 1 - 6sen(\psi/2) - 5\cos(\psi) - 3\cos(\psi)\ln\left[sen(\psi/2) + sen^2(\psi/2)\right] \tag{106}$$

A Figura 16 ilustra alguns dos elementos da Integral de Stokes, mas uma atenção especial deve ser dada para o elemento de área dS e $d\sigma$, na dedução apresentada por Heiskanen e Moritz (1967), $d\sigma$ é o elemento de área de uma esfera de raio unitário ao passo que dS é o elemento de área correspondente na esfera de raio médio (R). Alguns autores suprimem essa informação e interpretam como apresentado na Equação (105) por questão de conveniência.

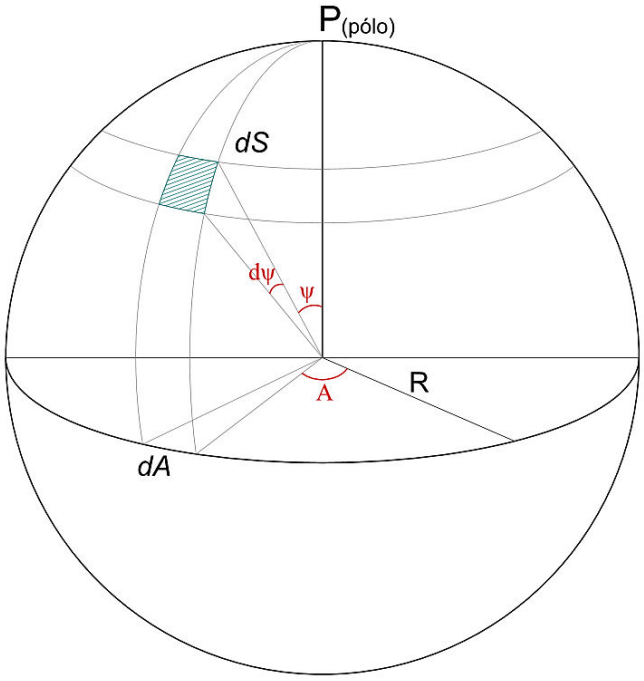

Figura 16 – Ângulo esférico (Ψ), elemento de área ($ds=R^2 d\sigma$) na esfera de raio médio (R), elemento de ângulo (dA) no plano do equador.
Fonte: Adaptada de Gemael (1999).

A Figura 17 evidencia a importante relação do desvio da vertical com a ondulação geoidal, não só para o método gravimétrico, mas também para outros métodos que integram resultados de posicionamento por GNSS e também resultados de modelos geoidais. Em tal figura estão representadas na seção plana de azimute (α) a linha que o Elipsoide e o Geoide interceptam o plano, o valor projetado do desvio da vertical nessa seção (θ_α), bem como a diferença pelo não paralelismo das duas superfícies (dN) ao longo de uma distância (ds) da projeção de um ponto P_o no Geoide (P_o”) segundo a vertical.

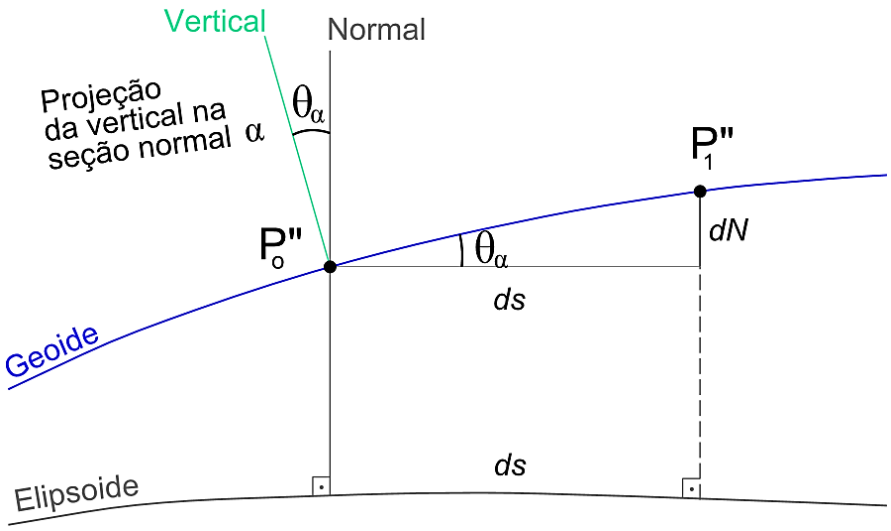

Figura 17 – Desvio da vertical e ondulação geoidal ao longo de uma seção normal de azimute (α).
Fonte: Adaptada de Heiskanen e Moritz (1967).

Da Figura 17, tem-se:

$$tg\theta_\alpha \cong \theta_\alpha = \frac{dN}{ds} \tag{107}$$

No entanto, para o sinal ficar de acordo com a convenção definida no subitem 3.1, deve-se considerar o desvio da vertical positivo quando o Geoide tem declive em relação ao Elipsoide (ondulações geoidais decrescem a partir de P'', Figura 17) a partir do ponto considerado. Nesse caso é preciso introduzir o sinal negativo no segundo membro da equação (107). Comparando-se ainda com a equação (77), tem-se:

$$tg\theta_\alpha \cong \theta_\alpha = -\frac{dN}{ds} = \xi\cos\alpha + \eta\, sen\alpha \tag{108}$$

Para o azimute nulo $\alpha = 0$, o diferencial da distância na superfície esférica pode ser calculado por $dS_\phi = Rd\phi$. Para o azimute igual a $\alpha = 90°$ o diferencial da distância ao longo do paralelo esférico pode ser calculada por $dS_\lambda = Rcos\phi d\lambda$.

Com tais considerações levadas a equação (108) as componentes do desvio da vertical ficam representadas:

$$\xi = -\frac{dN}{ds_\phi} = -\frac{1}{R}\frac{\partial N}{\partial \phi} \tag{109}$$

$$\eta = -\frac{dN}{ds_\lambda} = -\frac{1}{R\cos\phi}\frac{\partial N}{\partial \lambda} \tag{110}$$

Com algumas manipulações na integral de Stokes e derivando em relação à latitude e longitude geodésica obtém-se as fórmulas de Vening-Meinesz para o cálculo das componentes do desvio da vertical (HEISKANEN; MORITZ,1967):

$$\xi = -\frac{1}{4\pi\gamma}\iint_S \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi}\cos\alpha \, d\sigma \tag{111}$$

$$\eta = -\frac{1}{4\pi\gamma}\iint_s \Delta g \frac{dS(\psi)}{d\psi} sen\alpha \, d\sigma \tag{112}$$

3.2.3. Método astrogravimétrico

O princípio do método astrogravimétrico consiste na interpolação de desvios astrogeodésicos (relativos ao sistema geodésico em questão), que encerram a influência do mundo todo, com os correspondentes gravimétricos (absolutos), e restritos a uma região. Tal associação é executada com objetivo de se determinar a influência das anomalias nas zonas remotas (MOLODENSKII; EREMEEV; YURKINA[22], 1962 *apud* DELARA, 1993).

A Figura 18 representa três regiões: a região s_o onde deseja efetuar a interpolação dos desvios da vertical e que possui pontos astronômicos; a região s, que contém s_o, e é gravimetricamente conhecida; e a região S que representa a influência gravimétrica do resto do mundo.

[22] MOLODENSKII, M. S.; EREMEEV, V. F.; YURKINA, M. I. Methods for study of the external gravitational field and figure of the Earth. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translation, 1962. 248 p.

O método supõe que a influencia de S seja linear sobre ambas as sub-regiões s e s_0, e mais especificamente em s_o (GEMAEL, 1999). Na verdade a influência da região S é a diferença do todo (S+s) menos a influencias de s, isto é, S=(S+s)-s. No caso a influência (S+s) é implicitamente detectada pelo método astrogeodésico quando da determinação da posição astronômica (GEMAEL,1999; DELARA,1993).

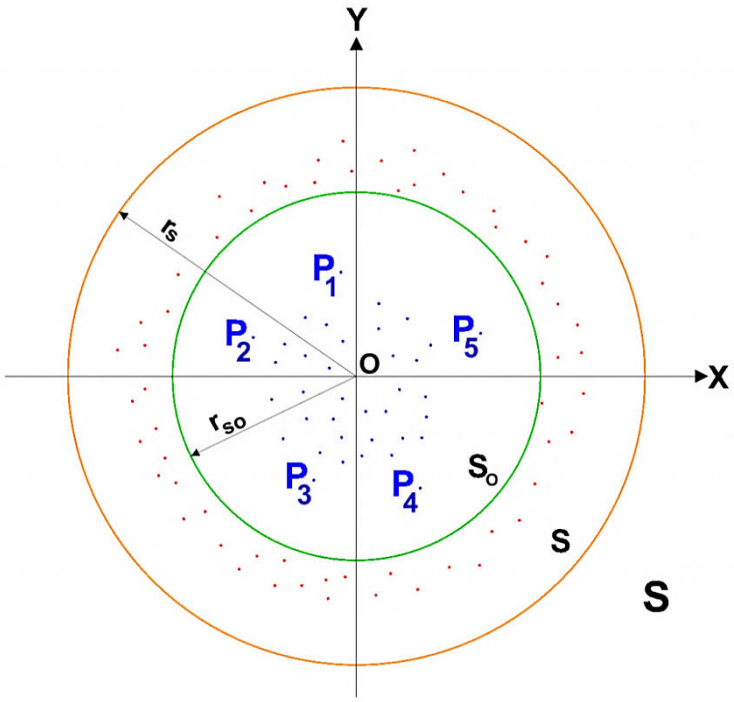

Figura 18 – Raios das zonas de cálculos, onde os pontos azuis são as estações gravimétricas e os números correspondem pontos de Laplace.
Fonte: Delara (1993).

Para um grupo de pontos P_i, i=1,2,...,n, dentro da região s_o cujos desvios da vertical são conhecidos por gravimetria (θ_i^g) e também pelo método astrogeodésico (θ_i^a). A diferença $\Delta\theta_i = \theta_i^a - \theta_i^g$ representa a influencia da região S não contemplada pelo desvio da vertical gravimétrico. Em sendo conhecidas essas diferenças em pelo menos três pontos não colineares e pela suposição da variação linear na região s_0, pode-se definir/ajustar (mais de 3 pontos pode-se usar o ajuste por MMQ) um plano $\Delta\theta$= AX+BY+C por meio dos parâmetros A, B e C. A origem do sistema de eixos cartesianos O(X,Y) preferencialmente deve ser no centro de s_0 para minimizar o efeito do mal escalonamento da matriz de coeficientes dos parâmetros.

$$\begin{bmatrix}\Delta\theta_1\\ \Delta\theta_2\\ \Delta\theta_3\\ \vdots\\ \Delta\theta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_1^a-\theta_1^g\\ \theta_2^a-\theta_2^g\\ \theta_3^a-\theta_3^g\\ \vdots\\ \theta_n^a-\theta_n^g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_n & y_n & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A\\ B\\ C\end{bmatrix} \tag{113}$$

Finalmente, após estimativa dos parâmetros A, B e C da equação (113) a interpolação do desvio astrogravimétrico num ponto P (X,Y) de s_o é obtido:

$$\theta_P^a=\theta_P{}^g+Ax_p+By_p+C \tag{114}$$

3.2.4. Método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos

Este método passou a ser utilizado com o surgimento do posicionamento por satélite a partir do momento em que altitudes elipsoidais ficaram factíveis de serem determinadas com acurácia compatível ao nível do milímetro. Entre os trabalhos que apresentam esse método cita-se: Soler *et al*. (1988), Tse e Iz (2006), Ceylan (2009), Ferreira *et al.* (2008). O método baseia-se na Equação (108) aqui repetida por conveniência para novas inserções.

$$tg\theta_\alpha\cong\theta_\alpha=-\frac{dN}{ds}=\xi.\cos\alpha+\eta.sen\alpha \tag{115}$$

Onde:

dN: diferencial da ondulação geoidal para dois pontos P_o e P_1 situado num azimute (α); e

ds: distância infinitesimal entre os pontos P_o e P_1.

Substituindo os diferenciais pelas diferenças na Equação (115), tem-se:

$$\theta_\alpha=-\frac{\Delta N_{P_0P1}}{\Delta s_{P_0P_1}}\approx\xi.\cos(\alpha)+\eta\cdot sen(\alpha) \tag{116}$$

Em que:

$$\Delta N_{P_0P_1} = N_{P_1} - N_{P_0} = \left(h_{P_1} - H_{P_1}\right) - \left(h_{P_0} - H_{P_0}\right) = \left(h_{P_1} - h_{P_0}\right) - \left(H_{P_1} - H_{P_0}\right)$$

$\Delta s_{P_0P_n}$: distância entre os pontos P_o e P_n

Desse modo a equação para ΔN é independente do conhecimento da ondulação geoidal nos pontos. Depende do conhecimento do desnível entre os pontos obtidos por posicionamento GNS*S* e o desnível obtido por nivelamento geométrico.

Numa aplicação prática torna-se muito importante a realização de uma pré-análise na Equação (116) em relação à propagação das variâncias. Uma primeira parte seria considerando apenas as diferenças de nível e as distâncias, e num segundo momento a consideração do azimute no último termo. Na primeira parte o resultado ficaria (TSE; IZ, 2006):

$$\sigma_{\theta\alpha}^2 = \frac{1}{\Delta s^2}\left(\sigma_{\Delta h}^2 + \sigma_{\Delta H}^2\right) + \left(\frac{\Delta h - \Delta H}{\Delta s^2}\right)^2 \sigma_{\Delta S}^2 \tag{117}$$

Ou simplesmente pela desconsideração do último termo em face de sua magnitude em relação ao primeiro termo.

$$\sigma_{\theta\alpha}^{"} = \frac{1}{\Delta s\ sen.(1")}\sqrt{\sigma_{\Delta h}^2 + \sigma_{\Delta H}^2} \tag{118}$$

É comum nos nivelamentos geométricos de alta precisão se trabalhar com um desvio padrão de 2,5 mm.$\sqrt{s}$, onde s a distância da seção nivelada em quilômetros. Nos levantamentos GNSS, exceto as redes com centragem forçada e as de monitoramento contínuo, o desvio padrão em geral infere o milímetro, mas a acurácia real fica garantida quase sempre no centímetro.

Portanto, considerando que seria inviável ter incertezas maiores que 2” para a projeção do desvio da vertical ao longo da seção de azimute α (máximo aceitável $\sigma_\theta^{"} < 2"$), de quanto deveria ser o afastamento Δs para essa possibilidade. Uma verificação rápida com esses supostos valores na Equação (118) mostra que o afastamento do ponto deveria ser de pelo menos 1063 m de distância. A Tabela 8 completa essa análise para várias outras distâncias, mostrando o quanto é difícil aplicar esse método para conseguir um desvio da vertical consistente com sua ordem de grandeza de poucos segundos em distâncias de até 1 km.

Tabela 8 – Pré-análise da incerteza da projeção do desvio da vertical tendo como base as incertezas nos desníveis elipsoidais e ortométricos.

Precisão da projeção do desvio da vertical			
σ_θ”	Δs (m)	$\sigma_{H\,(m)}$	$\sigma_{h\,(m)}$
20,7	100	0,001	0,01
10,4	200	0,001	0,01
6,9	300	0,001	0,01
5,2	400	0,001	0,01
4,1	500	0,001	0,01
3,5	600	0,001	0,01
3,0	700	0,001	0,01
2,6	800	0,001	0,01
2,3	900	0,001	0,01
2,1	1000	0,001	0,01
1,9	1100	0,001	0,01
1,7	1200	0,001	0,01
1,6	1300	0,001	0,01

Fonte: Autor (2012).

Antes de prosseguir com o método é interessante completar a análise da Equação (116), mas considerando apenas o erro no azimute geodésico, isto é, σ_α. Aplicando a lei de propagação das variâncias, tem-se como resultado:

$$\sigma_\theta^{"} = \sigma_\alpha^{"} \left| \eta^{"} \cos\alpha - \xi^{"} .sen\alpha \right| \tag{119}$$

A pré-análise da Equação (119) terá como suposição que as componentes do desvio são: ξ = -2.78"; η = 3,90" e σ_θ = 2". Assim, de quanto será o desvio padrão no azimute para que o desvio padrão do desvio da vertical fique com 2". Fazendo variar o azimute de 0° a 180°, o valor máximo ocorre nas proximidades de α = 125° com um σ_α = 49,6" e o valor mínimo ocorre nas proximidades de α = 35° com σ_α = 0,4". Essa análise mostra o quão acuradas devem ser as coordenadas geodésicas elipsoidais nas proximidades do azimute α = 35°. A incerteza posicional por GNSS de 1 cm na análise prévia da Tabela 5 com uma incerteza aproximada do azimute de 4" resultaria para os dados supostos uma incerteza do desvio de σ_θ = 19,1" portanto maior que a grandeza a ser determinada.

Na continuidade do método, irradiando-se n pontos a partir de um ponto central (P_o), com os azimutes geodésicos $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ conhecidos do problema inverso da Geodésia, a partir das coordenas geodésicas elipsoidais (ϕ,λ) de cada ponto, e chamando $\alpha_i = cos(\alpha_i)$, $b_i = sen(\alpha_i)$ supostos sem erros. Fazendo $c_i = -\Delta N_i/\Delta s_i$, $i = 1...,n$ corresponderem a um vetor de observações L_b com correspondente matriz variância-covariancia ΣL_b. Com tais suposições tem-se o modelo paramétrico de ajuste por mínimos quadrados $L_a=F(x_a)$, onde o sistema de equações $Ax=L_b$ é representado em n-equações a duas incógnitas, Equação (120):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}}_{L_b} \tag{120}$$

A solução dos parâmetros (ξ,η) e a correspondente matriz variância-covariância dos parâmetros podem ser obtidos pelo método paramétrico, subitem 2.8.1. Nos trabalhos de Ceylan (2009); Tse e Iz (2006) foi utilizado o modelo combinado, subitem 2.8.2., com a seguinte equação de condição:

$$\frac{1}{\Delta s_{ij}} v_{\Delta h_{ij}} - \frac{1}{\Delta s_{ij}} v_{\Delta H_{ij}} + \xi \cos\alpha_{ij} + \eta\, sen\alpha_{ij} + \frac{\Delta h_{ij} - \Delta H_{ij}}{\Delta s_{ij}} = 0 \tag{121}$$

A vantagem de usar o modelo combinado é que tanto as distâncias Δs_{ij} quanto os azimutes geodésicos α_{ij} podem compor o conjunto de equações como se fossem observações e dessa forma a matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados ficam mais consistentes no conjunto modelo/observações.

3.2.5. Método de Procrustes Parcial

O método de Procrustes Parcial, ou também conhecido por método de Procrustes simples, tem por princípio a determinação de coordenadas astronômicas (Φ_o,Λ_o) de um ponto P_o na Superfície Física da Terra por meio do relacionamento entre coordenadas no sistema geodésico cartesiano geocêntrico e coordenadas no Sistema Topográfico Local, abordados anteriormente no subitem 2.6.4 e reapresentados na Figura 19. Sendo obtidas a partir de medidas de posicionamento por GNSS e observações topográficas efetuadas por um teodolito, ou estação total, em uma estação origem, Awange (1999) recomenda que seja ao menos a quatro estações.

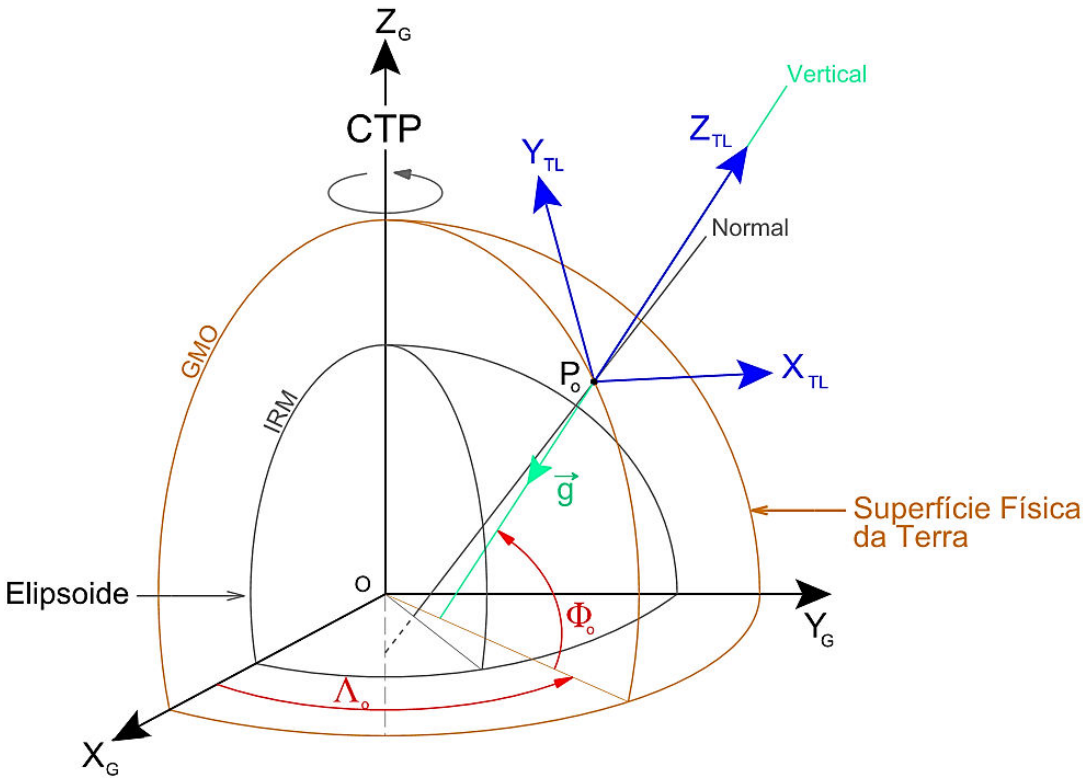

Figura 19 – Relação entre Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e Sistema Topográfico Local.

Fonte: Autor (2012).

Convém ressaltar que o método de Procrustes Parcial envolve apenas rotações, e consiste de uma simplificação do método de Procrustes Geral que envolve rotações, translações, escala e reflexão (AWANGE, 1999). Desse modo, o relacionamento entre Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico e Sistema Topográfico Local é obtido através da determinação da matriz de rotação (R), Equação 27, cujos parâmetros são as coordenadas astronômicas (Λ,Φ).

Com isso, a partir de um levantamento por GNSS determinam-se as coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas da estação origem $(X_o,Y_o,Z_o)_G$ e das estações alvos $(X_i,Y_i,Z_i)_G$. Posteriormente, um levantamento efetuado por um teodolito, ou estão total, proporciona coordenadas topográficas cartesianas locais $(X_i,Y_i,Z_i)_{TL}$., para $i=1,2,...,n$. Logo, se *n* pontos forem conhecidos nos dois sistemas fica formado um sistema de (*3xn*) equações não lineares a dois parâmetros incógnitos (Φ_o,Λ_o). A solução pode ser obtida por meio da aplicação do Método dos Mínimos Quadrados.

A transformação do sistema de (*3xn*) equações não lineares a dois parâmetros em um sistema linear pode ser conseguida explicitando cada elemento da matriz de rotação (R), como um parâmetro e transpondo os vetores. Desta forma resulta num sistema de *n*-equações e 9 incógnitas, da seguinte forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1-X_o & Y_1-Y_o & Z_1-Z_o \\ X_2-X_o & Y_2-Y_o & Z_2-Z_o \\ X_3-X_o & Y_3-Y_o & Z_3-Z_o \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n-X_o & Y_n-Y_o & Z_n-Z_o \end{bmatrix}_{TL}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1-X_o & Y_1-Y_o & Z_1-Z_o \\ X_2-X_o & Y_2-Y_o & Z_2-Z_o \\ X_3-X_o & Y_3-Y_o & Z_3-Z_o \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n-X_o & Y_n-Y_o & Z_n-Z_o \end{bmatrix}_{G}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}}_{R} \qquad (122)$$

Desse modo, a solução de Procrustes Parcial surge como uma alternativa à solução de equações não lineares. De acordo Awange e Grafarend (2005), o método de Procrustes Parcial, transforma a matriz A em uma matriz G. Tal transformação consiste de uma matriz de transformação ortogonal T no sentido de minimizar a soma de quadrado da matriz de resíduos, conforme Equação (123):

$$E = (A - GR^T) \tag{123}$$

Da qual, a matriz de rotação (R) é ortogonal:

$$R^T R = I \tag{124}$$

A solução detalhada pode ser obtida em Awange e Grafarend (2005):

$$R^T = VU^T \tag{125}$$

Em que as matrizes V e *U* são matrizes da decomposição de valor singular expressa em (GOLUB e REINCH, 1970):

$$\mathrm{A}^T\mathrm{B} = U\sum V^T \tag{126}$$

Sendo assim, os valores da latitude astronômica e da longitude astronômica são obtidos a partir dos elementos da matriz de rotação (R) como:

$$\Phi_o = \tan^{-1}\left(\frac{r_{32}}{r_{31}}\right) \tag{127}$$

$$\Lambda_o = \tan^{-1}\left(\frac{r_{33}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}}\right) \tag{128}$$

Portanto, conhecidas as coordenadas geodésicas elipsoidais (ϕ,λ) em função da normal e as coordenadas astronômicas (Φ,Λ) em função da vertical de uma estação origem, obtêm-se as componentes do desvio da vertical através das Equações (82) e (83).

3.2.6. Método do modelo relativo do Geoide local

Neste método são obtidas as componentes do desvio da vertical por meio de modelo relativo do Geoide local utilizando-se interpolação pelo Método dos Mínimos Quadrados no desenvolvimento em função polinomial. Desse modo, pode-se modelar a superfície através das diferenças de ondulações geoidais como função das diferenças de coordenadas geodésicas elipsoidais, latitude e longitude; cuja função polinomial das diferenças de ondulações geoidais assume a forma de uma equação quadrática em duas variáveis (ARISTOV, 1987):

$$dN(\Delta\phi,\Delta\lambda)=\Delta N(\phi_o,\lambda_o)+\frac{dN}{d\phi}\Delta\phi+\frac{dN}{d\lambda}\Delta\lambda+\frac{d^2N}{d\phi^2}\Delta\phi^2+\frac{d^2N}{d\phi d\lambda}\Delta\phi\Delta\lambda+\frac{d^2N}{d\lambda^2}\Delta\lambda^2 \qquad (129)$$

Onde:

$d\phi$: diferença de latitude geodésica elipsoidal;

$d\lambda$: diferença de longitude geodésica elipsoidal;

dN: diferença de ondulação geoidal

Contudo, na Equação (129), a importância maior no cálculo das componentes do desvio da vertical é para o segundo e o terceiro termo, respectivamente: $\frac{dN}{d\phi}$ e. $\frac{dN}{d\lambda}$. Em geral, a quantidade $\Delta N(\phi_o,\lambda_o)$ apresenta valor próximo de zero, e os termos adicionais $\frac{d^2N}{d\phi^2}$, $\frac{d^2N}{d\phi d\lambda}$ e $\frac{d^2N}{d\lambda^2}$ não são necessários na determinação do desvio da vertical.

Pode-se expressar via ajuste por Método dos Mínimos Quadrados, modelo paramétrico, a matriz dos coeficientes, dos parâmetros e das observações, respectivamente, em (LANCASTER; SALKAUSKAS, 1986):

$$A=\begin{bmatrix}1 & \Delta\phi_1 & \Delta\lambda_1 & \Delta\phi_1^2 & \Delta\phi_1\Delta\lambda_1 & \Delta\lambda_1^2\\ 1 & \Delta\phi_2 & \Delta\lambda_2 & \Delta\phi_2^2 & \Delta\phi_2\Delta\lambda_2 & \Delta\lambda_2^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \Delta\phi_n & \Delta\lambda_n & \Delta\phi_n^2 & \Delta\phi_n\Delta\lambda_n & \Delta\lambda_n^2\end{bmatrix} \qquad (130)$$

$$X = \begin{bmatrix} \Delta N(\phi_o, \lambda_o) \\ \frac{dN}{d\phi} \\ \frac{dN}{d\lambda} \\ \frac{d^2N}{d\phi^2} \\ \frac{d^2N}{d\phi d\lambda} \\ \frac{d^2N}{d\lambda^2} \end{bmatrix} \tag{131}$$

$$L = \begin{bmatrix} dN_1 \\ dN_2 \\ \vdots \\ dN_n \end{bmatrix} \tag{132}$$

Sendo a solução:

$$X = -\left(A^T P A\right)^{-1} A^T P L \tag{133}$$

Onde a matriz dos pesos P é igual à precisão das diferenças de ondulações geoidais, em que as diferenças de latitude e de longitude são assumidas sem erros.

Uma vez conhecido os termos $\frac{dN}{d\phi}$, $\frac{dN}{d\lambda}$ e o ponto médio da área de estudo, pode-se determinar as componentes do desvio da vertical em (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$\xi = -\frac{1}{M} \cdot \frac{dN}{d\phi} \tag{134}$$

$$\eta = -\frac{1}{N \cos\phi} \cdot \frac{dN}{d\lambda} \tag{135}$$

Do qual, M é o raio de curvatura da seção meridiana e N é a grande normal (raio de curvatura da seção primeiro vertical).

3.2.7. Método do relacionamento de coordenadas topocêntricas

A partir da relação geométrica de coordenadas topocêntricas de um ponto P sobre a Superfície Física da Terra e origem dos sistemas de referência Geodésico Local e Topográfico Local, determinam-se as componentes do desvio da vertical por meio de coordenadas de pontos conhecidos nos dois sistemas; Figura 20.

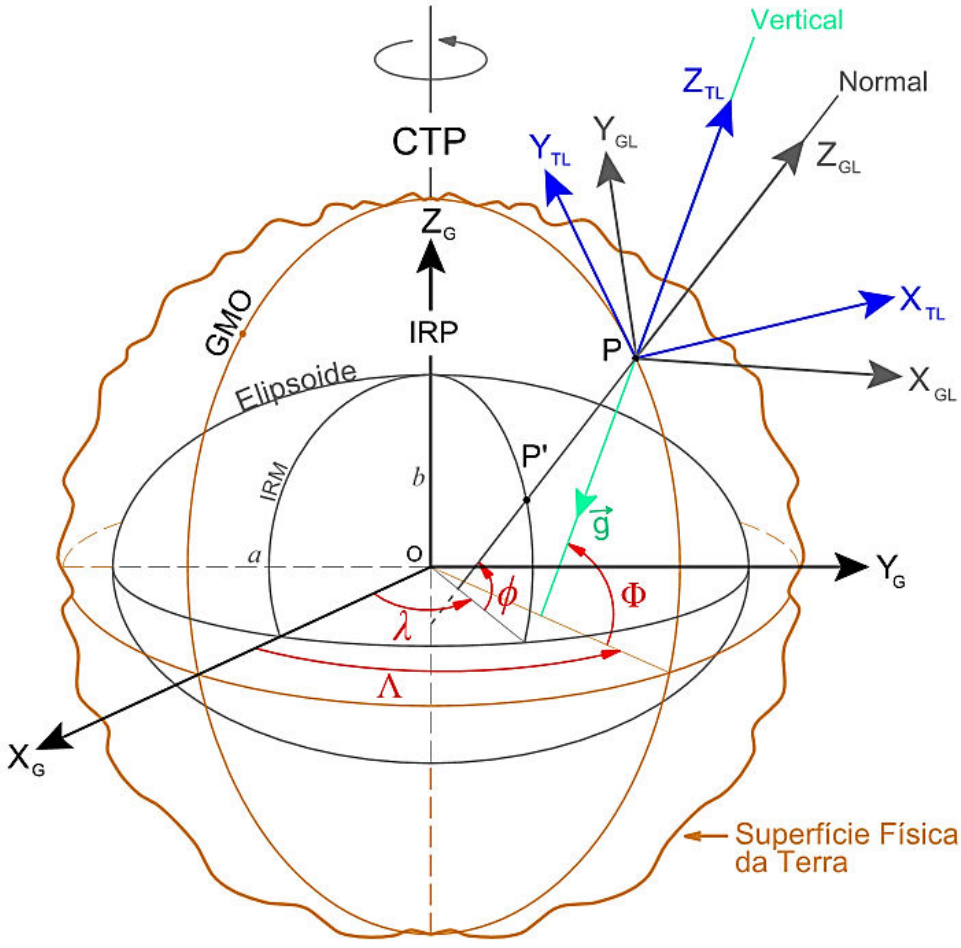

Figura 20 – Relacionamento entre Sistemas Geodésicos Cartesianos e Sistema Topográfico Local.
Fonte: Autor (2012).

Desse modo, a relação de pontos obtidos nos dois sistemas um sobre a normal ao Elipsoide e outra sobre a vertical do lugar são relacionados via transformação de sistemas em função das componentes do desvio da vertical, componente meridiana (ξ) e componente primeiro vertical (η).

Assim, obtém-se as componentes do desvio da vertical da transformação de Sistema Geodésico Local $(X,Y,Z)_{GL}$ entre Sistema Topográfico Local $(X,Y,Z)_{TL}$ em (SOLER; HOTHEM, 1988):

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{TL} = \begin{bmatrix} 1 & \eta\tan\phi & -\eta \\ -\eta\tan\phi & 1 & -\xi \\ \eta & \xi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{GL} \tag{136}$$

Onde:

ϕ: é a latitude geodésica elipsoidal.

Cabe ressaltar que a solução apresentada em Soler e Hothem (1988), Equação (136), despreza a diferença angular horizontal plana (ε) entre os eixos Y_{GL} e Y_{TL} na transformação entre os sistemas de referências topocêntricos: Geodésico Local e Topográfico Local, respectivamente.

Nos trabalhos de Andrade (2008) foi utilizado um modelo que leva em consideração a orientação horizontal de um sistema em relação ao outro, (ε), conforme Equação (137).

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{TL} = \begin{bmatrix} \cos\varepsilon & -\xi\eta\cos\varepsilon + sen\varepsilon & -\eta\cos\varepsilon - \xi sen\varepsilon \\ -sen\varepsilon & \xi\eta sen\varepsilon + \cos\varepsilon & -\eta sen\varepsilon - \xi\cos\varepsilon \\ \eta & \xi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{GL} \tag{137}$$

Considerando observações em ambos os sistemas, Topográfico Local e Geodésico Local, o modelo de ajustamento para encontrar os parâmetros (ε,ξ,η) recai no método combinado, $F(L_a, X_a) = 0$, conforme abordado no subitem 2.8.2.

A seguir, serão abordados os procedimentos topográficos e geodésicos utilizados nos levantamentos de campo com o objetivo de se coletar pontos planialtimétricos.

3.3. Levantamento Topográfico

De acordo com a ABNT NBR 13.133 (1994), o levantamento topográfico é definido por um conjunto de métodos e processos que, através de medições de ângulos horizontais e verticais, de distâncias horizontais, verticais e inclinadas, com instrumental adequado à exatidão pretendida, primordialmente, implanta e materializa pontos de apoio no terreno, determinando suas coordenadas topográficas. A estes pontos se relacionam os pontos de detalhe visando a sua exata representação planimétrica numa escala pré-determinada e a sua representação altimétrica por intermédio de curvas de nível, com equidistância também pré-determinada e/ou pontos cotados.

Assim, o levantamento topográfico caracteriza-se por efetuar, ou executar, medições de ângulos, distâncias e desníveis que permite representar uma área limitada da superfície terrestre em uma escala adequada. Logo, serão descritos os procedimentos empregados nas observações angulares, lineares e altimétricas.

3.3.1. Observações Lineares e Angulares

As operações utilizadas para aquisição de medições angulares e lineares na Topografia são fundamentais para o estabelecimento de coordenadas de pontos, normalmente, no Sistema Topográfico Local de modo a representar uma determinada área levantada, por meio de equipamentos topográficos, como por exemplo, estação total. De forma sucinta, pode-se dizer que uma estação total é a junção de um teodolito eletrônico (medida angular), um distanciômetro eletrônico (medida linear) e um processador matemático, associados em um só equipamento.

Além do mais, tal equipamento permite realizar correções no momento da obtenção das observações angulares e lineares relacionadas às condições ambientais (temperatura e pressão atmosférica) e constante do prisma. Sendo possível obter com uma estação total, ao ponto visado, além de coordenadas topográficas, distâncias inclinadas e desnível, Figura 21.

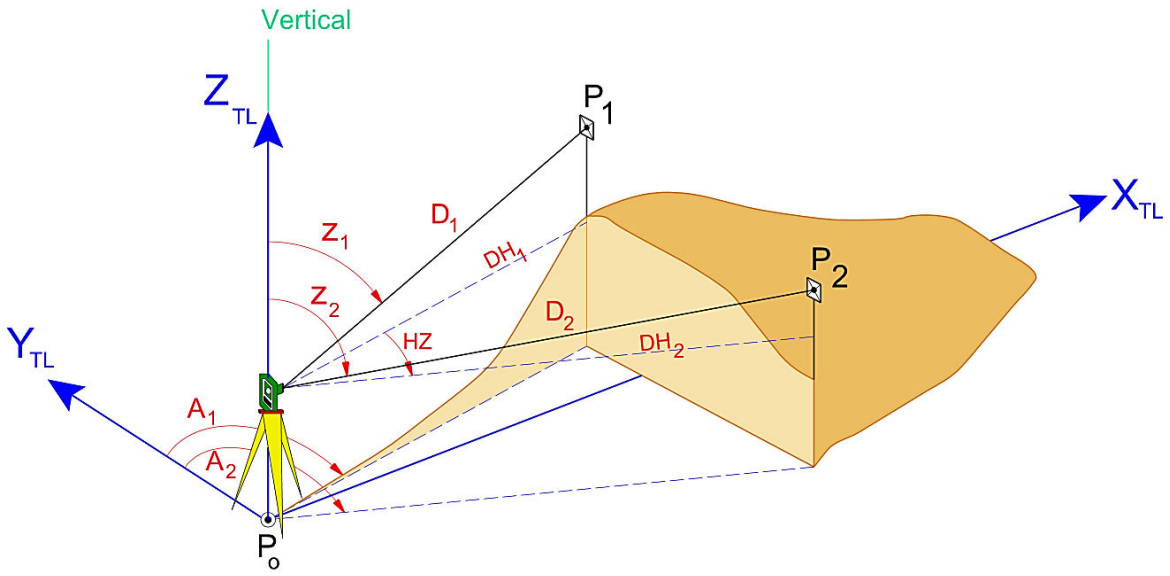

Figura 21 – Levantamento por irradiação no Sistema Topográfico Local.

Fonte: Autor (2012).

Nota: HZ é o ângulo horizontal, DH é a distância horizontal e os demais elementos já foram definidos.

O método empregado nesta pesquisa para a aquisição de ângulos horizontais e verticais, e distâncias inclinadas, compatibilizados no Sistema Topográfico Local, é o levantamento topográfico por irradiação, onde, segundo Espartel (1977) é aplicado na avaliação de pequenas superfícies relativamente planas. O levantamento topográfico por irradiação consiste em se escolher um ponto P_o na Superfície Física da Terra de situação adequada em que se possa avistar os demais pontos de interesse, conforme apresenta-se na Figura 21.

Explorando a Figura 21, percebe-se que as coordenadas topográficas locais $(X,Y,Z)_{TL}$ dos pontos visados (P_1,P_2) podem ser obtidas através da Equação (25). O levantamento topográfico por irradiação aplicado a esta pesquisa envolve a redundância de observações angulares e lineares, principalmente por ser empregado o método das direções em que faz observação no sentido direto e inverso da posição da luneta. Neste contexto, o processamento de pontos planialtimétricos no Sistema Topográfico Local é realizado por meio das médias das observações. Permitindo com isso, a obtenção das coordenadas topográficas, assim como suas respectivas precisões via a propagação de variância-covariância.

Para tanto, inicialmente faz-se necessário estimar a precisão das medidas efetuadas para compor a matriz das covariâncias dos valores observados (GEMAEL, 1994). Portanto, neste estudo, tal matriz será composta pelo cálculo do desvio-padrão (precisão) das observações angulares em posição direta e inversa da luneta por meio dos procedimentos matemáticos da norma DIN 18.723, descritos na ABNT NBR 13.133 (1994).

3.3.2. Nivelamento Geométrico de Precisão

O nivelamento[23] geométrico ou também conhecido por nivelamento direito é a operação que visa à determinação do desnível entre dois pontos a partir da leitura em miras (estádias ou em código de barras) colocadas na posição vertical nos referidos pontos, e efetuados por visadas horizontais com níveis ópticos ou digitais, ilustrado na Figura 21. Este procedimento pode ser executado para fins geodésicos ou topográficos. A diferença entre ambas está na precisão (maior no caso do nivelamento para fins geodésicos) e no instrumental utilizado (VEIGA; ZANETTI; FAGGION, 2012).

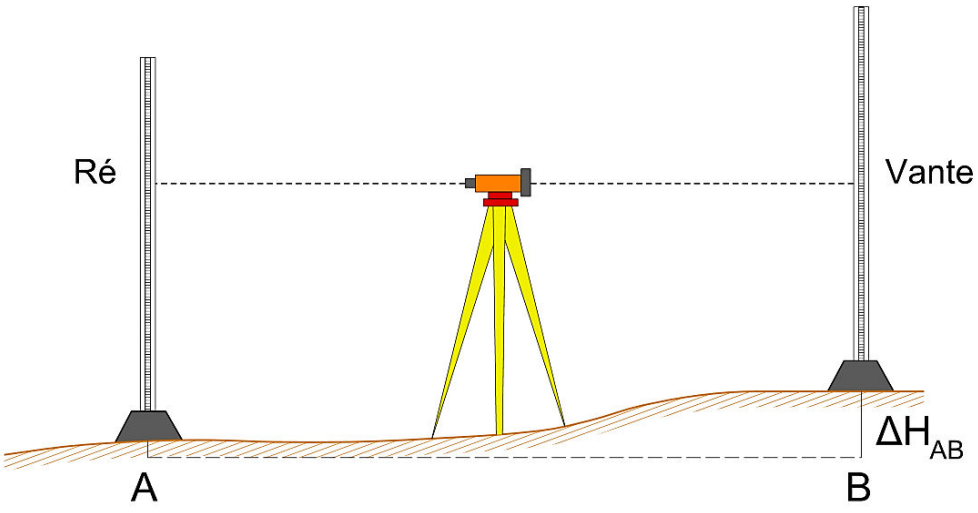

Figura 22 – Nivelamento geométrico.

Fonte: Veiga, Zanetti e Faggion (2012).

[23] Nivelamento ou levantamento topográfico altimétrico é definido por levantamento que objetiva, exclusivamente, a determinação das alturas relativas a uma superfície de referência dos pontos de apoio e/ou dos pontos de detalhe, pressupondo-se o conhecimento de suas posições planimétricas, visando à representação altimétrica da superfície levantada (ABNT NBR 13.133, 1994).

Desse modo, observando a Figura 22, nota-se que o desnível fica determinado pela diferença entre a leitura de Ré (ponto A) e a leitura de Vante (ponto B), expresso pela Equação (138):

$$\Delta H_{AB} = Ré_{(A)} - Vante_{(B)} \tag{138}$$

As altitudes ortométricas das estações de referências de nível (RRNN, plural de RN) da rede brasileira foram determinadas por nivelamento geométrico de precisão. Sendo este um procedimento lento e delicado, em virtude da precisão com que devem ser obtidos os desníveis. Além do mais, os principais instrumentos utilizados neste tipo de nivelamento correspondem por: nível óptico ou digital, mira de ínvar e sapata, para apoio básico da mira.

São recomendados pelo IBGE (1983) alguns cuidados usuais para se evitar a ocorrência e propagação dos erros sistemáticos, tão comuns nas operações de nivelamento geométrico, como por exemplo:

- os comprimentos das visadas de ré e vante deverão ser aproximadamente iguais, de modo a se compensar o efeito da curvatura terrestre e da refração atmosférica, sendo ideal o comprimento de 60 m;
- para evitar turbulências causadas pela reverberação, as visadas e, por tanto, as leituras deverão situar-se acima de 20 cm do solo;
- as miras deverão ser utilizadas aos pares, tomando-se o cuidado de alterná-las a ré e a vante, de modo que a mira posicionada no ponto de partida (lida a Ré) seja posicionada no ponto de chegada (lida a Vante), eliminando-se, assim, o erro de índice;
- convém observar a obrigatoriedade da colocação das miras sobre chapas ou pinos e, no caminhamento, sobre sapatas, nunca diretamente sobre o solo.

3.4. Posicionamento Pelo GNSS

O posicionamento geodésico, a partir de medidas de satélites GNSS, consiste na obtenção de coordenadas tridimensionais de um determinado ponto na superfície terrestre com relação a um referencial cartesiano geocêntrico definido.

Segundo Monico (2008) o posicionamento pode ser classificado em posicionamento absoluto, quando as coordenadas estão associadas diretamente ao geocentro sendo necessário apenas um receptor, e relativo, no caso em que as coordenadas são determinadas com relação a um referencial materializado por um ou mais vértices com coordenadas conhecidas (estações de referência), proporcionando assim resultados de melhor qualidade. Sendo este último método de posicionamento utilizado nesta pesquisa.

3.4.1. Posicionamento Relativo

O posicionamento relativo tem como objetivo determinar as coordenadas de uma estação desconhecida com relação à outra conhecida, ou seja, objetiva a determinação do vetor entre dois pontos que são chamados de linha de base (HOFMANN-WELLENHOF, LICHTENEGGER; COLLINS, 2001).

A realização do posicionamento relativo faz-se por meio da utilização de no mínimo dois receptores, onde devem rastrear simultaneamente um grupo de pelo menos dois satélites comuns. No entanto, a partir do surgimento dos chamados sistemas de controle ativos (SCA) qualquer usuário dispondo de apenas um receptor consegue efetuar posicionamento relativo através dos dados de uma ou mais estações pertencentes ao SCA, nos quais os receptores rastreiam continuamente os satélites que estão visíveis e o centro responsável pelo sistema disponibiliza os dados via internet. (MONICO, 2008).

No Brasil, os sistemas de controle ativos estão espalhados por todo território nacional em 86 estações ativas que compõem a Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RBMC), sob responsabilidade do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), e a Rede INCRA de Bases Comunitárias do GPS (RIBaC) sob responsabilidade do INCRA (Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária), onde atualmente estão integradas e podem ser obtidas através do sítio eletrônico do IBGE: http://www.ibge.gov.br.

No caso do posicionamento relativo, geralmente utilizam-se as duplas diferenças como observações fundamentais. O posicionamento relativo pode ser realizado de diversas maneiras, dentre as quais se têm: relativo estático; estático rápido; semicinemático e cinemático. Os quais podem utilizar uma das seguintes observações originais: pseudodistância, fase da onda portadora ou ambas (MONICO, 2008).

Ainda de acordo com Monico (2008), o processamento de dados no método relativo pode ser realizado após a coleta (pós-processado) ou durante a coleta (tempo real). No caso do processamento em tempo real faz-se necessário a utilização de um *link* de rádio ou outro sistema de comunicação para a transmissão dos dados e também de *software* apropriado para o processamento dos dados em tempo real, no qual realiza a solução das ambiguidades[24] de forma instantânea.

O pós-processamento pode ser efetuado nas observáveis de pseudodistância, fase da onda portadora ou ambas, coletadas por receptores de simples ou dupla frequência, com o uso de efemérides precisas disponíveis a qualquer usuário pelo *International GNSS Service* – IGS. Em que são apresentadas as precisões das órbitas e dos relógios dos satélites com alta precisão. Além do mais, o IGS produz três tipos de efemérides e correções para o relógio dos satélites, sendo a efeméride precisa final do IGS, disponível após 13 dias, é a de melhor qualidade com precisão melhor que 5 cm e menor que 0,1 ns (MONICO, 2008).

[24] Ambiguidade é o número inteiro de ciclos entre a antena do satélite e a do receptor.

3.5. Transporte de Coordenadas Geodésicas Elipsoidais

O transporte de coordenadas sobre o Elipsoide de revolução implica em duas situações denominadas de problema direto e problema inverso da geodesia, conforme Figura 23. As fórmulas utilizadas nesta pesquisa são as de Puissant para o problema inverso da Geodésia.

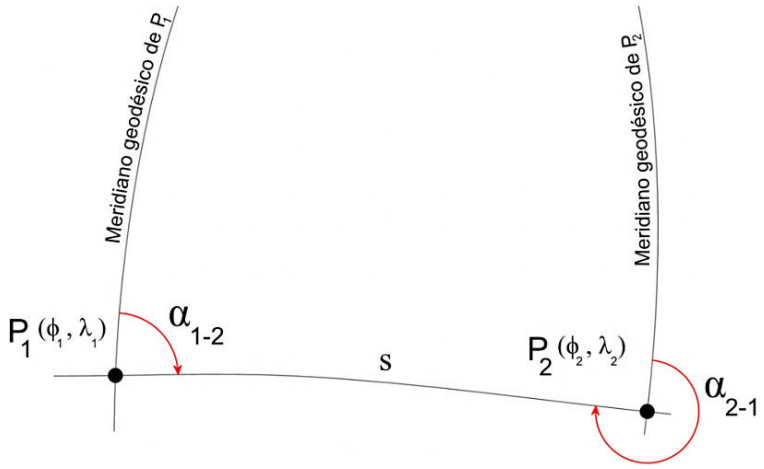

Figura 23 – Elementos do transporte de coordenadas.
Fonte: Zanetti (2006).

As fórmulas de Puissant são assim chamadas em homenagem ao matemático francês que as demonstrou. Sua demonstração está baseada sobre uma esfera auxiliar tangente ao Elipsoide, com raio coincidindo com o raio de curvatura da seção primeiro vertical. Tais fórmulas são consideradas com precisão de 1 ppm (parte por milhão) em até 80 km (BOMFORD, 1977).

Chama-se de Problema Direto, ao transporte de coordenadas, quando são conhecidas as coordenadas geodésicas elipsoidais de um ponto $P_1(\phi_1,\lambda_1)$, a distância geodésica ($s_{1\text{-}2}$) e o respectivo azimute ($\alpha_{1\text{-}2}$) e deseja-se obter as coordenadas geodésicas elipsoidais do segundo ponto $P_2(\phi_2,\lambda_2)$, e o contra-azimute da direção ($\alpha_{2\text{-}1}$).

Já o Problema Inverso é dito quando são conhecidas as coordenadas geodésicas elipsoidais de dois pontos $P_1(\phi_1,\lambda_1)$, e $P_2(\phi_2,\lambda_2)$ e deseja-se determinar a distância geodésica ($s_{1\text{-}2}$) entre os mesmos e os respectivos azimute e contra azimute geodésicos ($\alpha_{1\text{-}2}$ e $\alpha_{2\text{-}1}$).

4. METODOLOGIA

Os procedimentos abordados neste capítulo foram fundamentados e desenvolvidos para atender os objetivos propostos a esta pesquisa, ou seja, uma diretriz que consolide a metodologia de maneira eficiente na integração entre posicionamento pelo GNSS e levantamento topográfico. Assim, são evidenciados e implementados processos norteadores que visam à determinação das componentes do desvio da vertical. Para isso, foram empregados métodos que fazem uso de medidas do rastreio por satélite e observáveis clássicas da topografia.

A escolha pelos métodos conduzidos neste estudo deu-se em função das potencialidades adquiridas quando da combinação instrumental entre receptores de satélites, estação total e nível de precisão. De modo a permitir que o Sistema Geodésico Geocêntrico e o Sistema Topográfico Local, um efetuando medidas segundo a normal geodésica e outro sobre a vertical do lugar, respectivamente, possam ser compatibilizados em função do conhecimento das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η), envolvidas nos levantamentos.

Para tanto foram investigadas, tomando-se como base o *campus* universitário de Recife da UFPE e arredores, oito análises experimentais desenvolvidas pelo uso de coordenadas de pontos planialtimétricas referenciadas aos Sistemas Geodésico e Topográfico; obtidos por meio do pós-processamento de medidas do posicionamento por satélites e das transformações dos levantamentos de observáveis lineares, angulares e altimétricas. Sendo esta última determinada pelo nivelamento geométrico de precisão.

Na sequência são evidenciados os requisitos operacionais, aspectos técnicos e científicos envolvidos na caracterização deste estudo. Além do mais, estima-se que os procedimentos metodológicos apresentados sirvam de apoio e motivação aos leitores interessados na determinação das componentes (ξ,η), especificamente, no que visa a compatibilização ente coordenadas de concepção geodésica e topográfica.

4.1. Área de estudo

Para a determinação das componentes do desvio da vertical adotou-se como área de estudo a densificação de pontos planialtimétricos situados no *campus* Joaquim Amazonas da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, e o seu entorno na cidade universitária, sediado no município de Recife-PE. A materialização dos pontos deu-se por parafusos, hastes de ferro e marcos fixados nas calçadas ou próximo às mesmas.

A área de estudo foi adotada em função da disponibilidade de uma rede geodésica tridimensional implantada no *campus* Recife da UFPE, onde consta a estação RECF pertencente à Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo (RMBC) e o Laboratório de Astronomia (LAASTRO) do Departamento de Engenharia Cartográfica (DECart) da UFPE, localizado na cobertura do prédio da administração do Centro de Tecnologia e Geociências (CTG), onde existe um pilar de concreto dotado de dispositivo de centragem forçada.

Vale ressaltar que o LAASTRO encontra-se a mais de quarenta e cinco metros acima da superfície terrestre. Permitindo com isso uma visão panorâmica privilegiada sem obstrução para se efetuar medições de posicionamento geodésico por receptores de satélites e levantamento topográfico por irradiação aos pontos materializados.

Os pontos empregados foram nomeados de acordo com sua inserção no local de referência, isto é, LAA no laboratório de astronomia; CEE fica vizinho ao prédio do Centro de Estudos e Ensaios em Risco e Modelagem Ambiental; CON e ACT situam-se próximos a Concha Acústica; CAV próximo ao riacho Cavouco; LDN próximo ao Laboratório de Dispositivos e Nanoestruturas; NTI perto do Núcleo de Tecnologia da Informação; LAG está materializado perto do laguinho (afluente do rio Capibaribe); RNB utilização do marco de RN3641B; REC referente a Rede Brasileira de Monitoramento Contínuo de Recife – RECF; RNC utilização do marco de RN3641C, ambos dentro do *campus* Recife da UFPE.

Enquanto que os demais pontos foram demarcados circunvizinhos ao *campus,* denominados por: EXE localizado na rua que dá acesso ao alojamento Militar do Exército brasileiro; ITE referente à proximidade do Instituto de Tecnologia de Pernambuco; BRE situado perto ao Instituto Ricardo Brennand; e por último o ponto IGR junto à calçada da Igreja da Várzea, ilustrados na Figura 24.

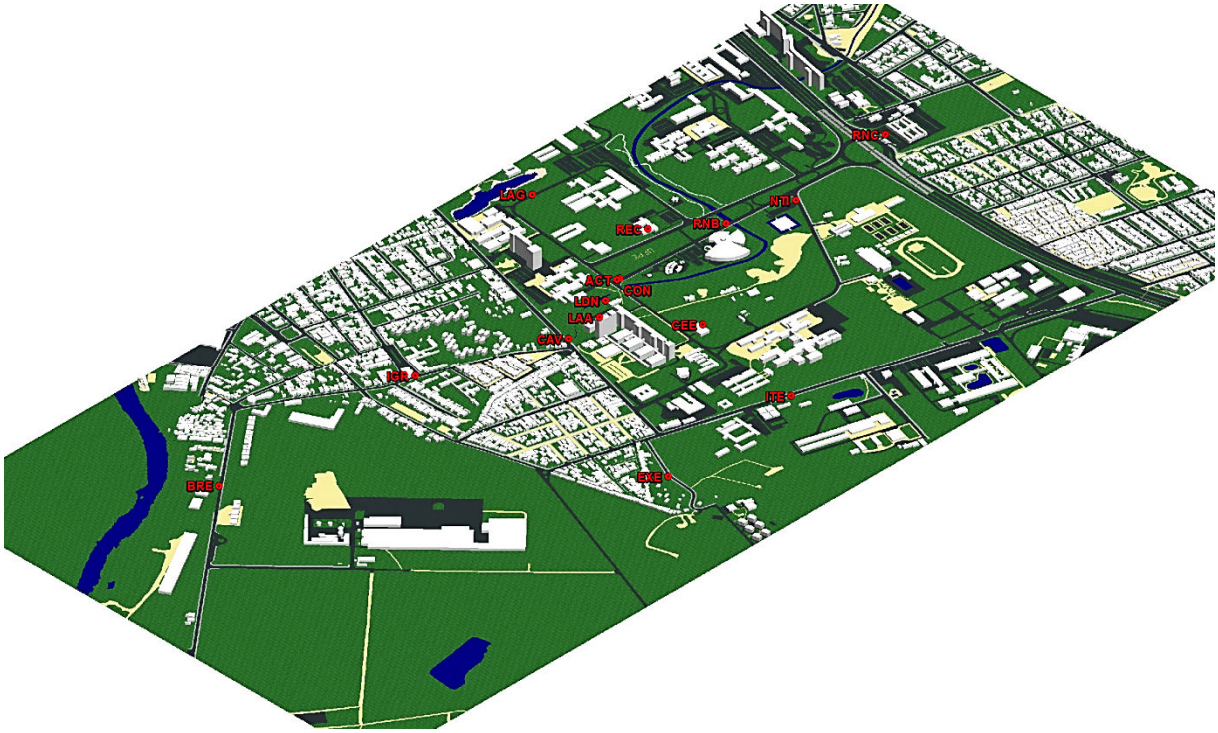

Figura 24 – Localização dos pontos na área de estudo em maquete 3D.

Fonte: Autor (2012).

4.2. Materiais utilizados

A investigação experimental da pesquisa contou com a utilização dos seguintes materiais:

01 (uma) estação total *Trimble* modelo 3303 DR, série 604240-A, precisão nominal angular ± 3” e linear com prisma ± (2 mm + 2 ppm);

01 (um) par de receptores *Topcon* modelo *Hiper Lite Plus* L_1/L_2, com precisão nominal ± (3 mm + 1 ppm) horizontal e ± (5 mm + 1,4 ppm) vertical;

01 (um) nível digital *Leica* modelo DNA03, precisão com mira de ínvar 0,3 mm a 0,9 mm por 1 km de duplo nivelamento;

01 (uma) mira em ínvar de código de barra;

01 (uma) sapata para sustentar a mira de ínvar;

01 (um) altímetro digital responsável por informar além da altitude aproximada valores de temperatura e pressão atmosférica;

02 (dois) bi-pés para instalação das antenas dos receptores;

05 (cinco) tripés de alumínio de pernas extensíveis;

04 (quatro) bastões;

04 (quatro) prismas;

Recursos computacionais: MathWorks MatLab 7; PTC Mathcad 15; Microsoft Excel e Word 2010; Autodesk AutoCAD Civil 3D; ArcGIS versão 10; Bentley MicroStation V8i; Topcon Tools versão 8.2; e AstGeoTop 2012 – programa desenvolvido em Delphi pelo Prof. Dr. Silvio Garnés para as disciplinas de Astronomia, Geodésia e Topografia.

4.3. Levantamento Topográfico

Foram executadas medições angulares, lineares e de diferenças de nível permitindo o cálculo das coordenadas planialtimétricas dos pontos da área de estudo. As atividades de campo foram separadas em função dos equipamentos empregados para as observações de: direções horizontais, ângulos zenitais, distância inclinada, e nivelamento geométrico de precisão.

4.3.1. Observações Angulares e Lineares

De modo a garantir as condições normais de medição, inicialmente foi configurado na estação total *Trimble* modelo 3303 DR os valores de: coeficiente do prisma, escala, temperatura e pressão atmosférica; estes dois últimos por meio de altímetro. Em seguida, tendo a estação centrada e nivelada no ponto central do LAASTRO, foram visados nas posições direta e inversa sete pontos, ilustrados na Figura 25. Esta etapa foi executada em dois dias. Sendo quatro pontos (ITE, EXE, BRE e IGR) visados no primeiro dia e três pontos (CEE, LAG e CON) restantes no segundo dia.

Figura 25 – Pontos visados a partir do LAASTRO (LAA) em maquete 3D.
Fonte: Autor (2012).

Utilizou-se o método das direções, totalizando dez repetições de visada para cada ponto, cinco visadas na posição direta da luneta e cinco visadas na posição inversa. Os alvos visados foram materializados pelo conjunto de bastão com prisma nivelado sobre os parafusos, hastes de ferro e marcos, e fixados por tripé.

No programa AstGeoTop realizou-se os cálculos dos ângulos horizontais e zenitais, no que visa as discrepâncias, as séries de observações, ajustamento por Método dos Mínimos Quadrados, classificação angular, e redução dos ângulos zenitais e distâncias inclinadas ao solo.

A partir das observações angulares e lineares empregou-se o programa PTC Mathcad 15 para o cálculo das coordenadas no Sistema Topográfico Local, assim como a propagação da variância-covariância em função das observáveis entre o ponto origem do sistema, LAASTRO, e os demais pontos visados, conforme Equação (25).

Ressalta-se que foram obtidas as coordenadas no Sistema Topográfico Local por meio do conhecimento das componentes do desvio da vertical conforme apresentada na Equação (137), e do relacionamento de observáveis angulares horizontais e zenitais reduzidas ao solo efetuadas por estação total, distâncias inclinadas via coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas compatibilizados do erro de curvatura da Terra, de acordo com a Equação (139).

$$\begin{bmatrix} X_{TL} \\ Y_{TL} \\ Z_{TL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_i sen(z_r) sen(A) \\ D_i sen(z_r) \cos(A) \\ [H_i - e] - H_o \end{bmatrix} \tag{139}$$

Onde:

$D_i = \sqrt{(X_o - X_i)_G^2 + (Y_o - Y_i)_G^2 + (Z_o - Z_i)_G^2}$;

z_r: ângulo zenital reduzido ao solo;

e: erro de curvatura da Terra, conforme Equação (140):

$$e = \frac{D_H{}^2}{2R} \tag{140}$$

Em que:

D_H: é a distância horizontal;

R: raio médio da Terra esférica, 6371000 m.

4.3.2. Nivelamento Geométrico

O nivelamento de precisão foi executado com Nível DNA03 da Leica. De acordo com as especificações técnicas do manual do fabricante informa que o equipamento faz leitura no centésimo do milímetro, mede distâncias e possui precisão nominal com mira de ínvar de 0,3 mm a 0,9 mm por km de duplo nivelamento. Sendo classificado como de precisão muito alta conforme ABNT NBR 13.133 (1994).

Os acessórios utilizados durante o levantamento altimétrico foram: um tripé de alumínio com pernas extensível, uma mira em ínvar de código de barra fixa por uma sapata para ocupar as estações visadas e mais um tripé de alumínio para auxiliar a verticalização pelo operador. O caminhamento foi desenvolvido com visadas equidistantes menores que 35 m e 1,50 m acima do solo. Os pontos da área de estudo foram nivelados a partir de Referência de Nível da estação 3641B (RNB) homologada do IBGE e de altitude ortométrica 8,9217 m.

A rede de nivelamento estende-se no *campus* universitário de Recife e em seu entorno por 14,7 km ao longo dos circuitos. Sendo composta, num total, de 46 sessões, conforme Figura 26, onde as setas indicam o sentido em que o terreno se eleva. O ajustamento envolveu o método Paramétrico contendo 46 equações de observações a 32 parâmetros, tendo a matriz dos pesos valor de observação proporcional ao inverso da distância da sessão em quilômetros. Os procedimentos de ajustamento foram executados em rotinas do *software* MathWorks MatLab 7.

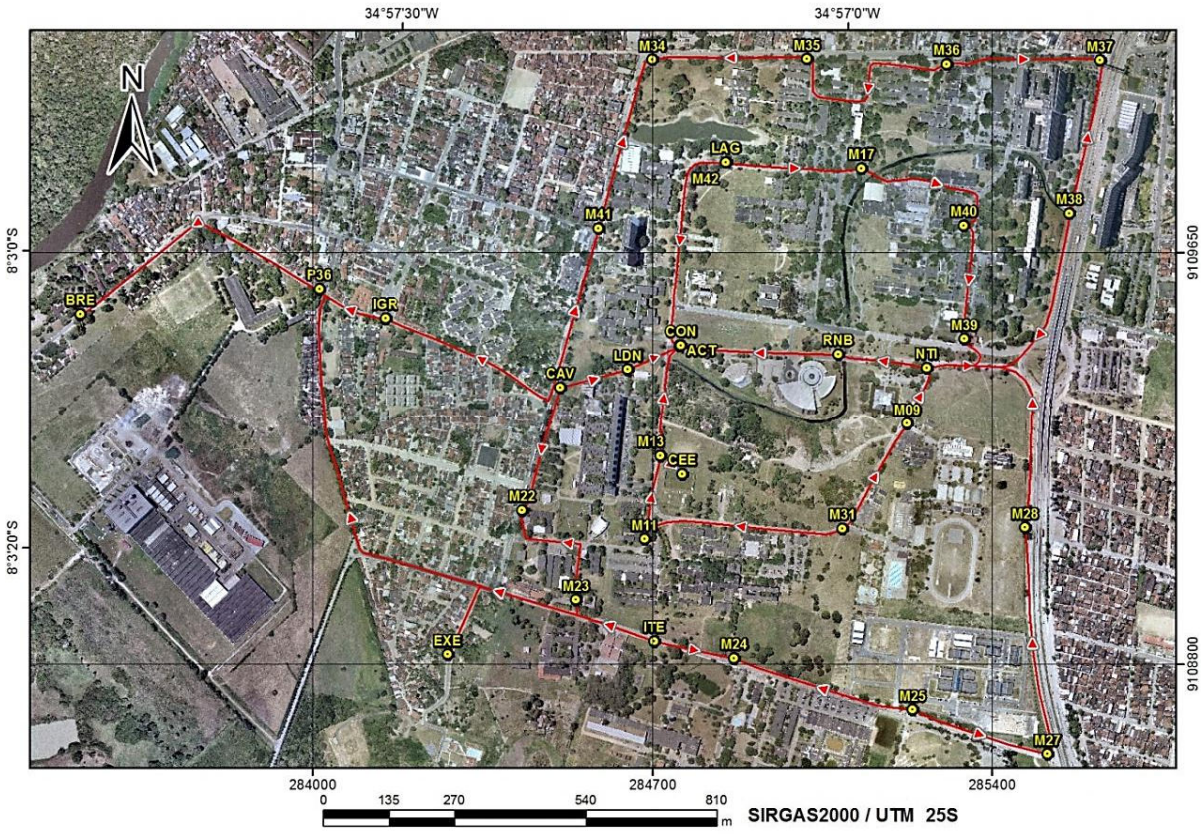

Figura 26 – Nivelamento dos pontos na área de estudo.

Fonte: Base cartográfica da Prefeitura da Cidade do Recife, ano 2007.

4.4. Posicionamento pelo GNSS

Os pontos da área de estudo foram rastreados no método de posicionamento relativo estático usando a pseudodistância e fase da portadora, através de um par de receptores *Topcon Hiper Lite Plus* L_1/L_2. A ocupação dos pontos deu-se com altura do bastão em 2 m fixo ao bi-pé, em que foram utilizadas sessões de aproximadamente uma hora com taxa de armazenamento de 15 segundos.

Todavia, não foi possível rastrear todos os pontos ao mesmo tempo devido à limitação instrumental de apenas dois receptores GNSS. Utilizou-se a estação RECF da RBMC, que faz parte da rede IGS, como vértice de referência conhecido, ilustrada na Figura 27. Tal estação consiste de um pilar de concreto dotado de dispositivo de centragem forçada, localizado na cobertura do prédio da biblioteca central, no *campus* Recife da Universidade Federal de Pernambuco.

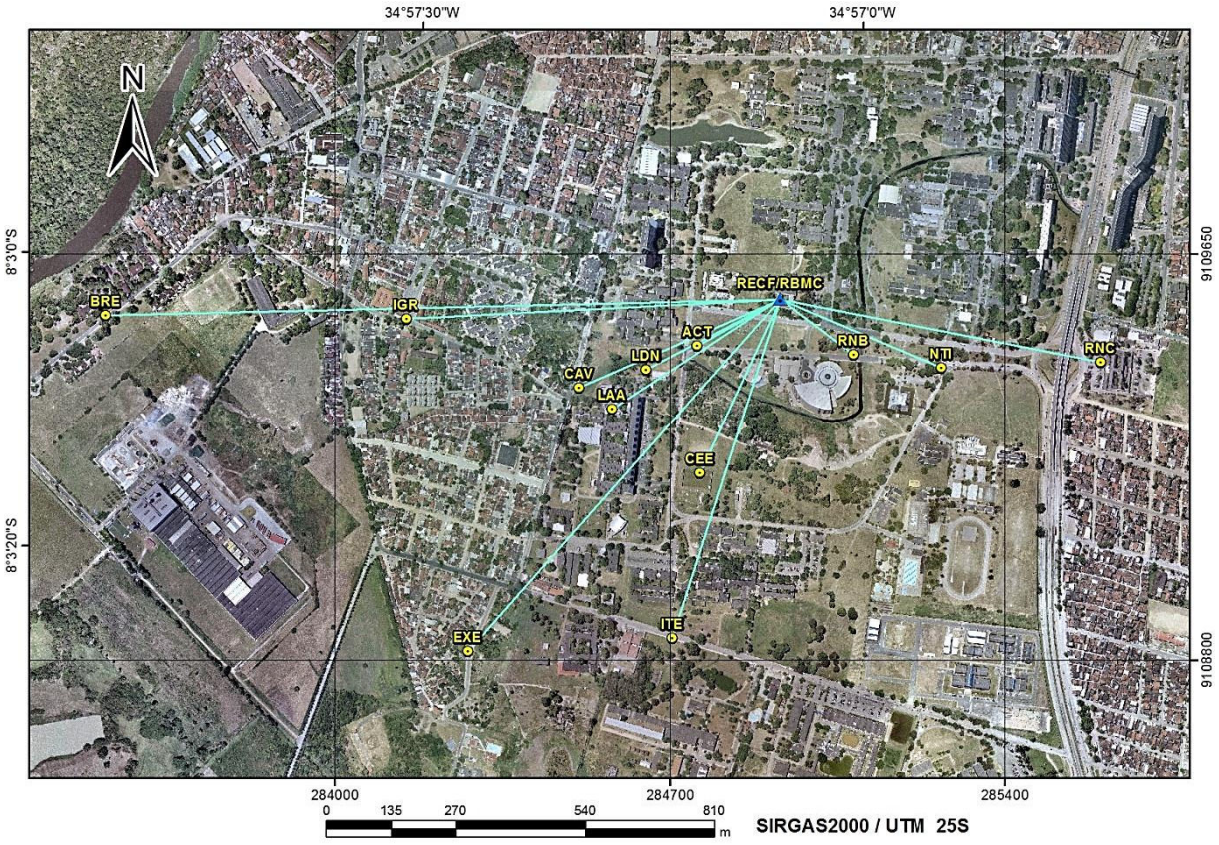

Figura 27 – Vetores dos pontos a estação RECF/RBMC.

Fonte: Base Cartográfica da Prefeitura da Cidade do Recife, ano 2007.

Os dados foram selecionados no *software Topcon Tools versão 8.2*, onde realizou-se o pós-processamento e o ajustamento dos pontos da área de estudo tendo como configuração: máscara de elevação de 15˚, estação conhecida RECF/RBMC, e solução do tipo fixa.

Por meio das coordenadas geodésicas elipsoidais calculou-se no programa AstGeoTop as coordenadas no Sistema Geodésico Local do ponto origem do sistema LAASTRO, e os demais pontos rastreados por posicionamento GNSS. Tal programa foi empregado no cálculo do transporte de coordenadas geodésicas via formulário de Puissant.

4.5. Componentes do desvio da Vertical

As componentes do desvio da vertical determinadas nesta pesquisa são obtidas a partir do conhecimento de coordenadas referenciadas via: levantamentos topográficos e posicionamento geodésico por satélite. Em que os procedimentos matemáticos e os métodos empregados na obtenção dessas componentes ξ e η foram abordados e detalhados nos subitens 3.2.4 ao 3.2.7, e aqui reapresentados como segue.

4.5.1. Método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos

A aplicação do método deu-se com 13 pontos distribuídos na área de estudo, conforme Figura 28. A partir do conhecimento das distâncias geodésicas entre os 13 pontos, assim como, dos desníveis obtidos por meio de posicionamento GNSS e desníveis por nivelamento geométrico, empregou-se a Equação (141) para obter as componentes do desvio da vertical para cada um dos 13 pontos.

$$-\frac{dN}{dS} \approx -\frac{\left(h_{P_i} - h_{P_0}\right) - \left(H_{P_i} - H_{P_0}\right)}{\Delta s_{P_0 P_i}} = \xi.\cos\alpha + \eta.sen\alpha \qquad (141)$$

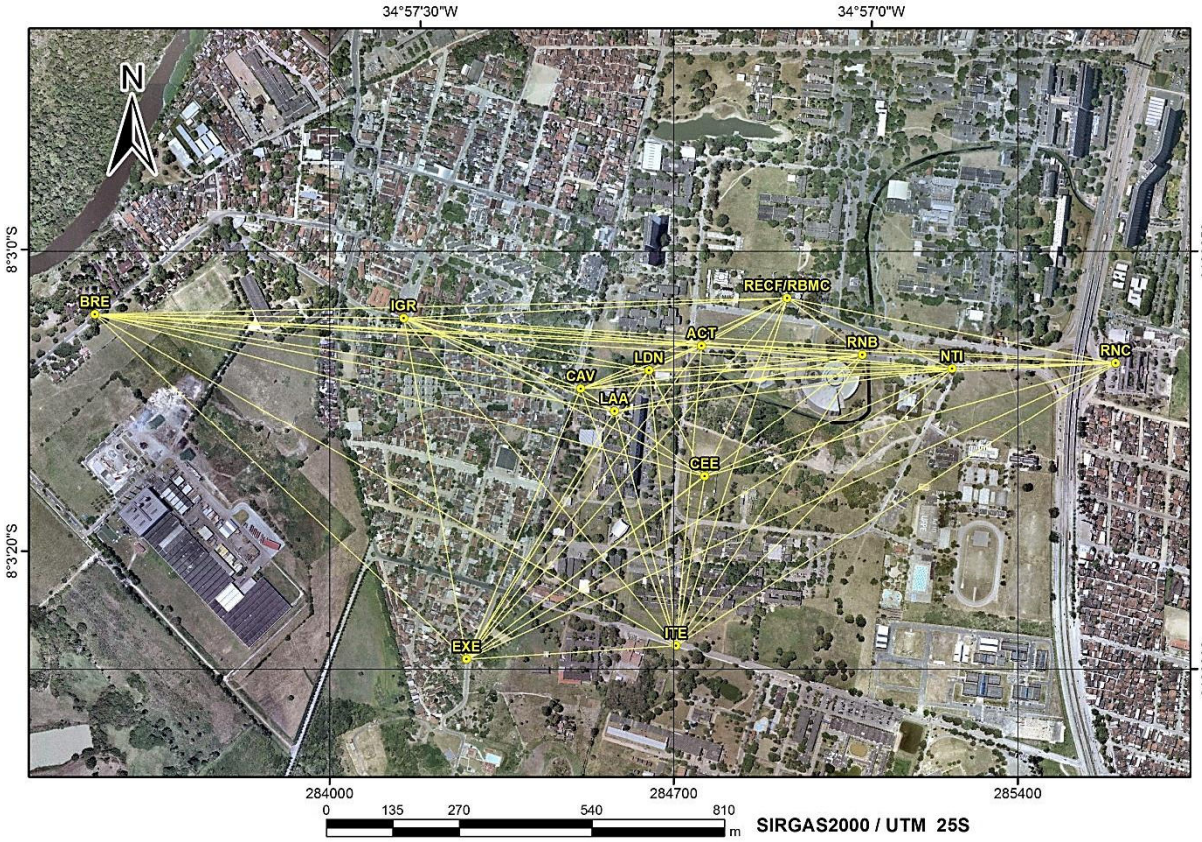

Figura 28 – Relação entre os 13 pontos na área de estudo.
Fonte: Base Cartográfica da Prefeitura da Cidade do Recife, ano 2007.

Ilustrado na Figura 28 foram obtidos entre os 13 pontos: 78 desníveis elipsoidais e geométricos; igualmente, 78 valores de distâncias geodésicas; e 144 azimutes geodésicos. Sendo os dois últimos determinados do problema inverso da Geodésia, via conhecimento das coordenas geodésicas elipsoidais (ϕ,λ) de cada ponto.

Assim, para cada um dos 13 treze pontos assumiu-se a condição de ponto central (P_o); irradiando-se aos demais 12 pontos: azimutes geodésicos, e desníveis elipsoidais e geométricos. Totalizando um sistema de 12-equações a 2 incógnitas (ξ,η), com 10 graus de liberdades. Logo, através da Equação (141), foi utilizado o ajuste pelo Método dos Mínimos Quadrados por meio do método paramétrico.

No método paramétrico, adotou-se os $cos(\alpha_i)$ e $sen(\alpha_i)$ dos azimutes geodésicos sem erros na matriz dos coeficientes A. A matriz das observações L_b foi expressa por:$-\Delta N_i/\Delta s_i$. Sendo a matriz variância-covariância ΣL_b das observações composta das diferenças de ondulações geoidais: $\Delta N_i = \left(h_{P_i} - h_{P_0}\right) - \left(H_{P_i} - H_{P_0}\right)$, $i=1,...,12$. Com isso, a Equação (141) fica caracterizada conforme Equação (142), cuja solução (X) e matriz variância-covariância (Σ_{xx}) dos parâmetros foram determinadas segundo abordagem do subitem 2.8.1., e implementado no programa AstGeoTop.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & sen(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) & sen(\alpha_2) \\ \vdots & \vdots \\ \cos(\alpha_{12}) & sen(\alpha_{12}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{12x2}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{2x1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\dfrac{(h_{P_1} - h_{P_0}) - (H_{P_1} - H_{P_0})}{\Delta s_{P_0P_1}} \\ -\dfrac{(h_{P_2} - h_{P_0}) - (H_{P_2} - H_{P_0})}{\Delta s_{P_0P_2}} \\ \vdots \\ -\dfrac{(h_{P_{12}} - h_{P_0}) - (H_{P_{12}} - H_{P_0})}{\Delta s_{P_0P_{12}}} \end{bmatrix}}_{L_{b\,12x1}} \tag{142}$$

4.5.2. Método do modelo relativo do Geoide local

O presente método envolveu a utilização dos mesmos 13 pontos abordados no método anterior, subitem 4.5.1. Do qual, foi empregada a função polinomial de equação cartesiana do plano, pertencente ao espaço bidimensional para o modelo relativo do Geoide.

Dessa forma, modelou-se a superfície correspondente aos 13 pontos a partir da obtenção de um ponto médio de coordenadas geodésicas elipsoidais $(\phi_o, \lambda_o) = \left(\dfrac{\phi_1 + \phi_2 \ldots \phi_i}{i}, \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2 \ldots \lambda_i}{i}\right)$, conforme Figura 29. Sendo o ponto médio responsável por estimar as diferenças de ondulações geoidais $\Delta N_i = \left(h_{P_i} - h_{P_o}\right) - \left(H_{P_i} - H_{P_o}\right)$ e, igualmente, pelas as diferenças de latitudes geodésicas $\Delta\phi_i = \left(\phi_{P_i} - \phi_{P_o}\right)$ e longitudes geodésicas $\Delta\lambda_i = \left(\lambda_{P_i} - \lambda_{P_o}\right)$, $i=1,...,13$.

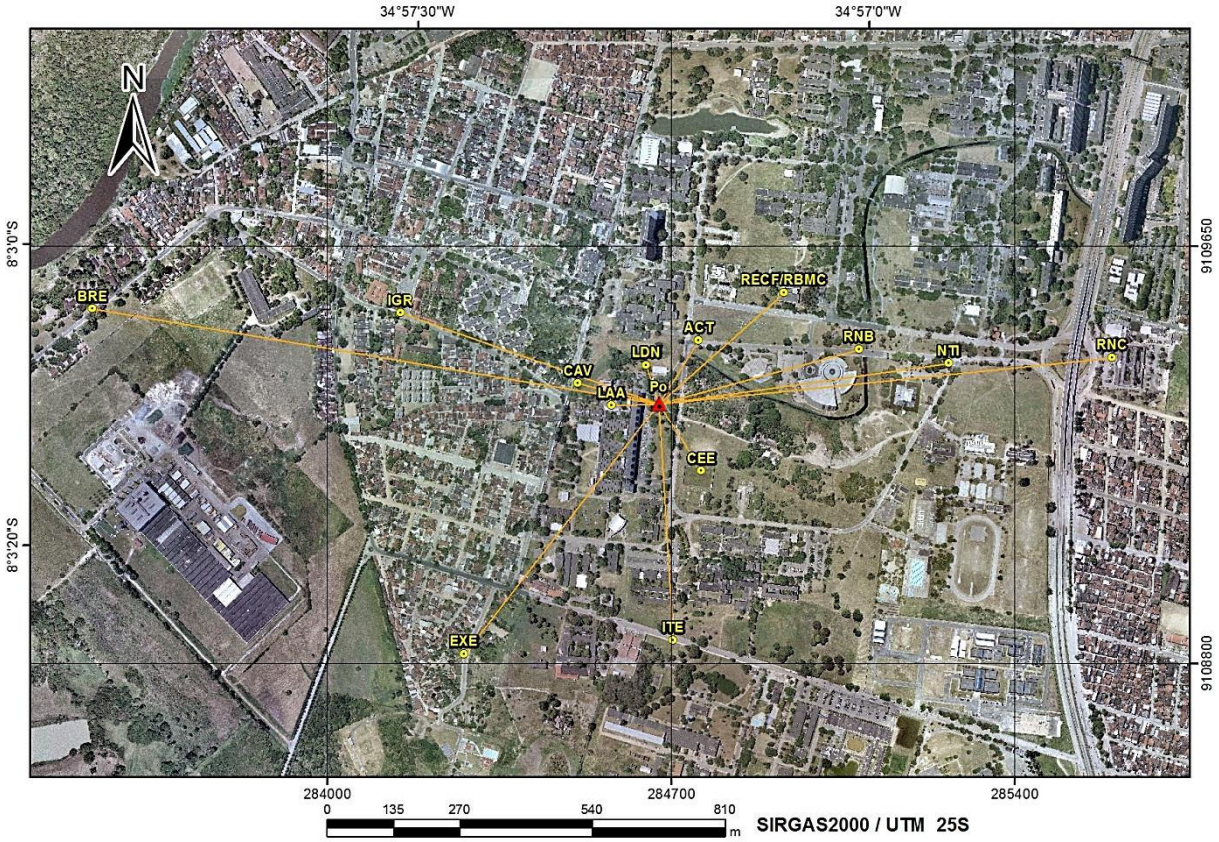

Figura 29 – Relação entre o ponto médio (P_o) e os 13 pontos na área de estudo.
Fonte: Base Cartográfica da Prefeitura da Cidade do Recife, ano 2007.

Com isso, tem-se a função polinomial das diferenças de ondulações geoidais escrita segundo a Equação (143):

$$dN(\Delta\phi,\Delta\lambda)=\Delta N(\phi_o,\lambda_o)+\frac{dN}{d\phi}\Delta\phi+\frac{dN}{d\lambda}\Delta\lambda \tag{143}$$

Onde, a partir do conhecimento dos termos $\frac{dN}{d\phi}$ e $\frac{dN}{d\lambda}$ determinou-se as componentes do desvio da vertical em função do raio de curvatura da seção meridiana (M) e do raio de curvatura da seção primeiro vertical (N), como segue:

$$\xi=-\frac{1}{M}\cdot\frac{dN}{d\phi} \tag{144}$$

$$\eta=-\frac{1}{N\cos\phi}\cdot\frac{dN}{d\lambda} \tag{145}$$

Rearranjando a Equação (143) pela substituição das diferenças de ondulações geoidais, e assumindo $a = \frac{dN}{d\lambda}$, $b = \frac{dN}{d\phi}$ e $c = \Delta N(\phi_o, \lambda_o)$, tem-se a seguinte expressão:

$$\left(h_{P_i} - h_{P_o}\right) - \left(H_{P_i} - H_{P_o}\right) = a \cdot \Delta\lambda_i + b \cdot \Delta\phi_i + c \tag{146}$$

Para 13 pontos resulta num sistema de 13-equações a 3 incógnitas (a,b,c), com 10 graus de liberdades; onde via ajuste por Método dos Mínimos Quadrados, modelo paramétrico, a matriz dos coeficientes A, dos parâmetros X e das observações L_b, ficam definidas, respectivamente, como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta\lambda_1 & \Delta\phi_1 & 1 \\ \Delta\lambda_2 & \Delta\phi_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta\lambda_{13} & \Delta\phi_{13} & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{13x3}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}_{3x1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \left(h_{P_1} - h_{P_o}\right) - \left(H_{P_1} - H_{P_o}\right) \\ \left(h_{P_2} - h_{P_o}\right) - \left(H_{P_2} - H_{P_o}\right) \\ \vdots \\ \left(h_{P_{13}} - h_{P_o}\right) - \left(H_{P_{13}} - H_{P_o}\right) \end{bmatrix}}_{L_{b\,13x1}} \tag{147}$$

Onde, as diferenças de latitude e de longitude são assumidas sem erros na solução pelo método paramétrico; cuja obtenção dos parâmetros e a matriz variância-covariância dos parâmetros foram determinadas conforme apresentado no subitem 3.6.1.

Por meio do método combinado, $F(L_a, X_a) = 0$, foram obtidos também os parâmetros (a,b,c) e a matriz variância-covariância dos parâmetros; onde a Equação (146) de condição assume a expressão:

$$a \cdot \Delta\lambda_i + b \cdot \Delta\phi_i + c - \left(\left(h_{P_i} - h_{P_o}\right) - \left(H_{P_i} - H_{P_o}\right)\right) = 0 \tag{148}$$

Dessa forma as diferenças de latitude e de longitude, juntamente com as diferenças de ondulação geoidal, são consideradas na matriz variância-covariância ΣL_b das observações. Consequentemente, a solução procedeu-se conforme apresentada no subitem 2.8.2.; e desenvolvida no programa AstGeoTop.

4.5.3. Método de Procrustes Parcial

A utilização do referido método envolveu o relacionamento das coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas referentes ao posicionamento pelo GNSS, e coordenadas topográficas locais obtidas segundo os procedimentos elucidados no subitem 4.3.1.

Para tanto, foram empregados no método de Procrustes Parcial três situações distintas, em função da obtenção das coordenadas topográficas locais. Com isso, o método de Procrustes Parcial foi aplicado nas seguintes situação:

i) coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas topográficas locais obtidas a partir de medições efetuadas por estação total;
ii) coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas topográficas locais obtidas por meio do conhecimento das componentes (ξ,η), exposta na Equação (137); e
iii) coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas topográficas locais obtidas via relacionamento de observáveis angulares horizontais e zenitais reduzidas ao solo efetuadas por estação total; distâncias inclinadas por coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas compatibilizados do erro de curvatura da Terra; segundo Equação (139).

A partir do ponto central do LAASTRO (LAA) foram empregados 4 pontos na situação i) e iii), conforme Figura 30, e 12 pontos na situação ii) de acordo com a Figura 31.

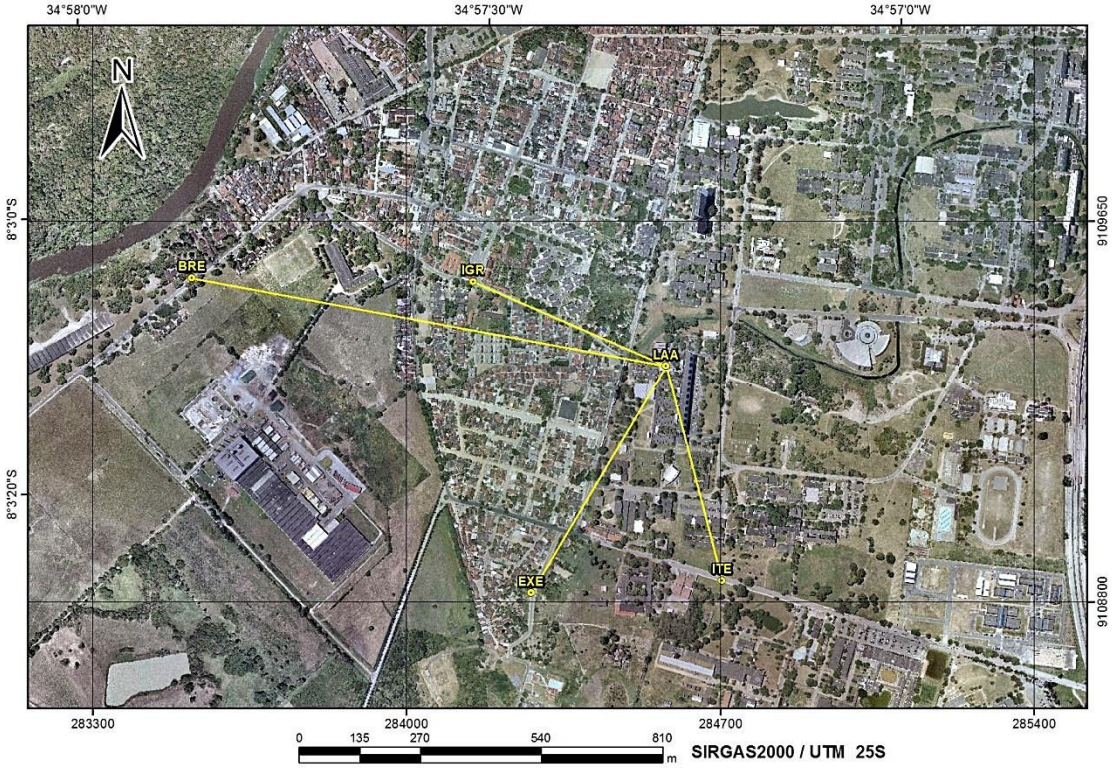

Figura 30 – Relação dos pontos envolvidos nas situações i) e iii).

Fonte: Base Cartográfica da Prefeitura da Cidade do Recife, ano 2007.

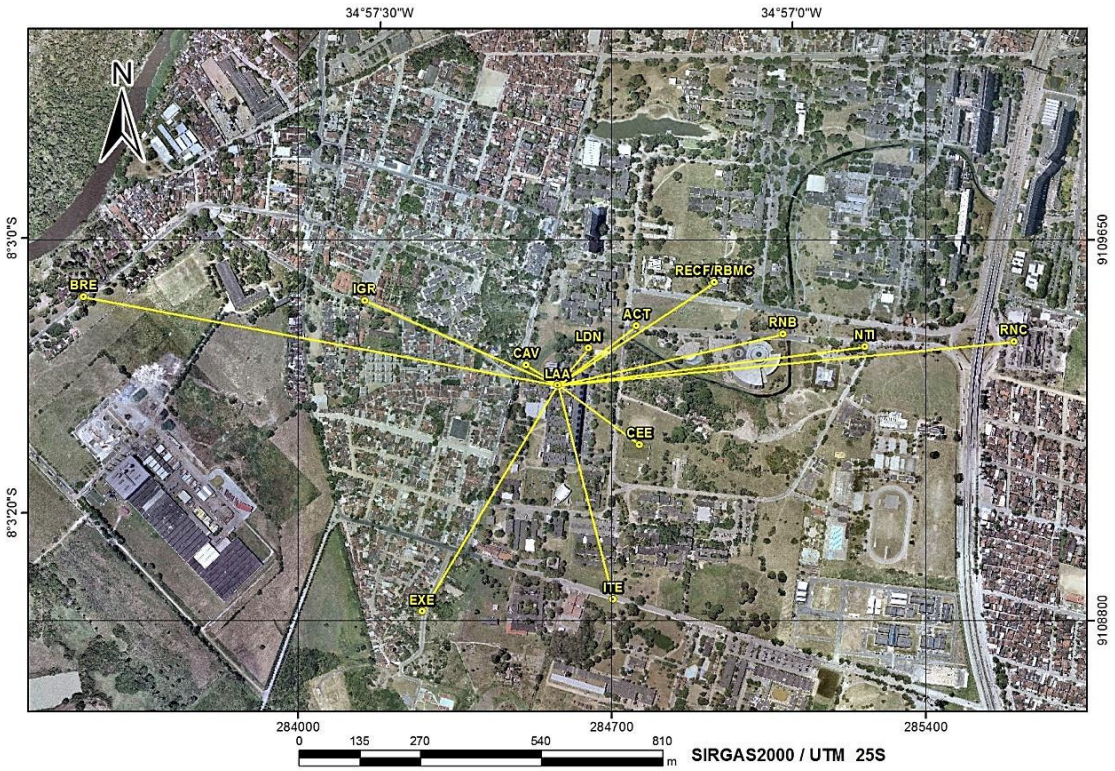

Figura 31 – Relação dos pontos envolvidos na situação ii).

Fonte: Base Cartográfica da Prefeitura da Cidade do Recife, ano 2007.

Assim, a relação entre coordenadas no Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico $(X,Y,Z)_G$ e Sistema Topográfico Local $(X,Y,Z)_{TL}$ procede a transformação de sistema (*3xn*) equações não lineares a dois parâmetros incógnitos (Φ_o,Λ_o). Sendo, 4 equações para as situações i) e iii), e 12 equações para a situação ii), via Equação (149).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1 - X_o & Y_1 - Y_o & Z_1 - Z_o \\ X_2 - X_o & Y_2 - Y_o & Z_2 - Z_o \\ X_3 - X_o & Y_3 - Y_o & Z_3 - Z_o \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n - X_o & Y_n - Y_o & Z_n - Z_o \end{bmatrix}_{TL}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 - X_o & Y_1 - Y_o & Z_1 - Z_o \\ X_2 - X_o & Y_2 - Y_o & Z_2 - Z_o \\ X_3 - X_o & Y_3 - Y_o & Z_3 - Z_o \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n - X_o & Y_n - Y_o & Z_n - Z_o \end{bmatrix}_{G}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}}_{R} \tag{149}$$

Logo, a solução de Procrustes Parcial resulta na obtenção de coordenadas astronômicas por meio da determinação da matriz de rotação (R) em função das matrizes da decomposição de valor singular U e *V*, conforme detalhado por (GOLUB e REINCH, 1970):

$$\mathrm{A}^T\mathrm{B} = U\sum V^T \tag{150}$$

Através dos elementos da matriz de rotação (R) são obtidos os valores da latitude astronômica e da longitude astronômica. No entanto, a partir das conhecidas Equações (99) e (100), foram calculadas as componentes do desvio da vertical de forma:

$$\eta = \left(\left(\arctan\left(\frac{r_{33}}{\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}}\right)\right) - \lambda\right)\cos\phi \tag{151}$$

$$\xi = \arctan\left(\frac{r_{32}}{r_{31}}\right) - \phi_o \tag{152}$$

Sendo os procedimentos matemáticos desenvolvidos em linguagem de programação do *software* PTC Mathcad.

4.5.4. Método do relacionamento de coordenadas topocêntricas

As coordenadas geodésicas elipsoidais, obtidas via posicionamento por GNSS foram transformadas ao Sistema Geodésico Cartesiano Local. Enquanto que as coordenadas topográficas locais foram compatibilizadas conforme subitem 4.3.1. A origem dos dois sistemas coincide com o ponto LAASTRO (LAA).

De forma análoga ao subitem anterior, 4.5.3, foi necessário utilizar-se de 3 situações distintas, em virtude da obtenção das coordenadas topográficas locais. Assim, o presente método foi empregado nas seguintes condições:

i) coordenadas geodésicas cartesianas locais e coordenadas topográficas locais obtidas a partir de medições efetuadas por estação total;
ii) coordenadas geodésicas cartesianas locais e coordenadas topográficas locais obtidas por meio do conhecimento das componentes (ξ,η), exposta na Equação (137); e
iii) coordenadas geodésicas cartesianas locais e coordenadas topográficas locais obtidas via relacionamento de observáveis angulares horizontais e zenitais reduzidas ao solo efetuadas por estação total; distâncias inclinadas por coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas compatibilizados do erro de curvatura da Terra; segundo Equação (139).

Por meio do ponto origem dos sistemas locais (LAA), foram utilizados 4 pontos na situação i) e iii), Figura 30, e 12 pontos na situação ii) de acordo com a Figura 31. Os procedimentos matemáticos foram implementados no programa AstGeoTop.

5. RESULTADOS E DISCUSSÕES

O presente capítulo é o reflexo da implementação da metodologia, quanto à execução dos métodos empregados e à descrição das análises envolvidas. Assim, são apresentados e discutidos os resultados que viabilizam os procedimentos metodológicos propostos no âmbito da pesquisa.

5.1. Observações angulares e lineares

O Apêndice I apresenta observáveis levantadas na superfície terrestre de: ângulos horizontais e zenitais, e distâncias horizontais e inclinadas, bem como, discrepâncias, séries de observações, classificação angular, e redução dos ângulos zenitais e distâncias inclinadas ao solo. As tabelas a seguir apresentam os valores do ajustamento pelo Método dos Mínimos Quadrados em função das datas de levantamento a partir do LAASTRO.

Tabela 9 – Levantamento realizado em 06/04/2011.

Pontos	Azimute	Ângulo zenital	Distância inclinada (m)	Distância horizontal (m)
ITE	70°19`57,6" ± 3,2"	95°11`34,7" ± 3,7"	496,419	494,382
EXE	115°42`59,3" ± 3,2"	94°16`39,9" ± 3,7"	590,557	588,912
BRE	185°28`47,1" ± 3,2"	92°11`57,5" ± 3,7"	1076,498	1075,705
IGR	198°40`12,5" ± 3,2"	95°12`52,2" ± 3,7"	471,070	469,121

Fonte: Autor (2012).

Tabela 10 – Levantamento realizado em 13/04/2011.

Pontos	Azimute	Ângulo zenital	Distância inclinada (m)	Distância horizontal (m)
CEE	31°15`49,8" ± 4,9"	101°02`21,3" ± 7,0	231,336	227,077
LAG	293°00`45,6" ± 4,9"	94°19`44,9" ± 7,0	580,480	578,824
CON	318°24`57,4" ± 4,9"	101°13`14,7" ± 7,0	227,477	223,130

Fonte: Autor (2012).

Percebe-se a partir das Tabelas 9 e 10, que a precisão angular das observáveis horizontais e zenitais foi melhor no primeiro dia de medição, em que as diferenças de precisões em tais observáveis foram de ± 1,7" e ± 3,3", respectivamente.

Em virtude das altas diferenças em relação às observáveis levantadas, ficou descartada a utilização dos dados do levantamento realizado na Tabela 10. Com isso, optou-se em trabalhar com 4 pontos irradiados a partir do LAASTRO. Em seguida são apresentadas as reduções às estações (ao solo) dos ângulos zenitais e distâncias inclinadas, em função da altura do instrumento e da altura do sinal.

Tabela 11– Redução do ângulo zenital e distância inclinada ao solo.

Pontos	Ângulo zenital	Distância inclinada (m)
ITE	95°21`38,7"	496,553
EXE	94°25`08,3"	590,667
BRE	92°16`37,0"	1076,555
IGR	95°23`28,7"	471,205

Fonte: Autor (2012).

5.2. Coordenadas no Sistema Topográfico Local

Conforme procedimentos abordados no subitem 4.3.1., foram obtidas coordenadas no Sistema Topográfico Local em três situações distintas via LAASTRO (LAA), a saber:

i. coordenadas topográficas locais por meio das observáveis angulares e lineares efetuadas pela estação total, apresentadas na Tabela 9, calculadas via Equação (25) e as precisões via propagação das covariâncias; onde os resultados são ilustrados na Tabela 12:

Tabela 12 – Coordenadas topográficas locais da situação i.

Ponto	Coordenadas Topográficas Locais					
	X (m)	σ_X (m)	Y (m)	σ_Y (m)	Z (m)	σ_Z (m)
LAA	0	0,0010	0	0,0010	0	0,0010
ITE	465,5405	0,0038	166,3883	0,0073	-44,9311	0,0089
EXE	530,5814	0,0049	-255,5395	0,0083	-44,0505	0,0106
BRE	-102,7233	0,0166	-1070,7891	0,0045	-41,3113	0,0193
IGR	-150,1745	0,0069	-444,4340	0,0037	-42,8130	0,0084

Fonte: Autor (2012).

ii. coordenadas topográficas locais em função do conhecimento das componentes (ξ_{LAA}, η_{LAA}), Tabela 13:

Tabela 13 – Coordenadas topográficas locais da situação ii.

Ponto	Coordenadas topográficas locais		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
LAA	0	0	0
CEE	182,0606	-135,2430	-45,5707
ITE	122,2811	-478,8828	-46,3471
EXE	-303,7822	-504,3958	-45,4914
BRE	-1056,5337	201,9379	-42,8095
IGR	-428,4026	190,8424	-44,2526
CAV	-69,1483	45,6788	-46,5709
LDN	70,2354	82,3243	-45,7812
ACT	179,6303	131,7741	-45,5891
REC	351,9738	228,1788	-29,0236
RNB	504,2575	112,1862	-45,7178
NTI	686,9540	82,8590	-45,8280
RNC	1019,8200	92,7651	-45,4516

Fonte: Autor (2012).

Ressalta-se que na Tabela 13 foram obtidas as coordenadas topográficas locais em função do conhecimento das componentes do desvio da vertical no ponto central do LAASTRO (LAA), isto é, ξ_{LAA} e η_{LAA} conhecidas do Apêndice III.

iii. coordenadas topográficas locais do relacionamento de observáveis angulares horizontais e zenitais reduzidas ao solo efetuadas por estação total; distâncias inclinadas via coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas compatibilizados do erro de curvatura da Terra, via Equação (137), exposta na Tabela 14:

Tabela 14 – Coordenadas topográficas locais da situação iii.

Ponto	Coordenadas topográficas locais		
	X (m)	Y (m)	Z (m)
LAA	0	0	0
ITE	465,4123	166,3424	-46,3458
EXE	530,4901	-255,4955	-45,4894
BRE	-102,7190	-1070,7450	-42,8043
IGR	-150,1318	-444,3077	-44,2457

Fonte: Autor (2012).

5.3. Altitudes ortométricas

No Apêndice II são apresentadas as observações referentes ao nivelamento de precisão composto por 46 sessões, realizados no *campus* Recife da UFPE e em seu entorno por 14,7 km ao longo dos circuitos. Os procedimentos de ajustamento foram executados em rotinas do *software* MathWorks MatLab 7 a partir de Referência de Nível da estação 3641B (RNB) de altitude ortométrica 8,9217 m.

O ajustamento foi realizado pelo método paramétrico, e envolveu 46 equações de observações e 32 parâmetros incógnitos. A matriz dos pesos assumiu valor de observação proporcional ao inverso da distância da sessão em quilômetros A estimativa da variância *a priori* (σ_o^2) foi igual a 1,00 x 10^{-6}. De modo que, sendo a variância *a priori* relacionada com a matriz variância-covariância das observações e o peso ($\Sigma_{ll} = \sigma_o^2 \cdot P^{-1}$), resultasse numa precisão consistente nas observações. Já que o Nível digital *Leica* DNA03, empregado no nivelamento, permite precisão no décimo do milímetro com mira de ínvar por 1 km de duplo nivelamento.

Com isso, o ajustamento envolveu 14 graus de liberdade (gl) e resultou numa variância de referência *a posteriori* ($\hat{\sigma}_o^2$) igual a 5,74 x 10^{-7} em que não foi rejeitada pelo teste estatístico de hipótese básica ao nível de significância de 5% (α), conforme Tabela 15.

Tabela 15 – Teste estatístico do ajustamento do nivelamento.

Estatística qui-quadrado:		
$\chi^2_{gl,\frac{\alpha}{2}} = 5{,}63$	$\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \cdot gl = 8{,}04$	$\chi^2_{gl,1-\frac{\alpha}{2}} = 26{,}12$
Nível de aceitação:		
$5{,}63 < 8{,}04 < 26{,}12$		

Fonte: Autor (2012).

Assim, o ajustamento resultou em resíduos com pequenas discrepâncias nas observáveis de diferenças de nível envolvidas em 46 sessões, cujo valor máximo absoluto foi igual a 0,74 mm, ilustrado no gráfico da Figura 32.

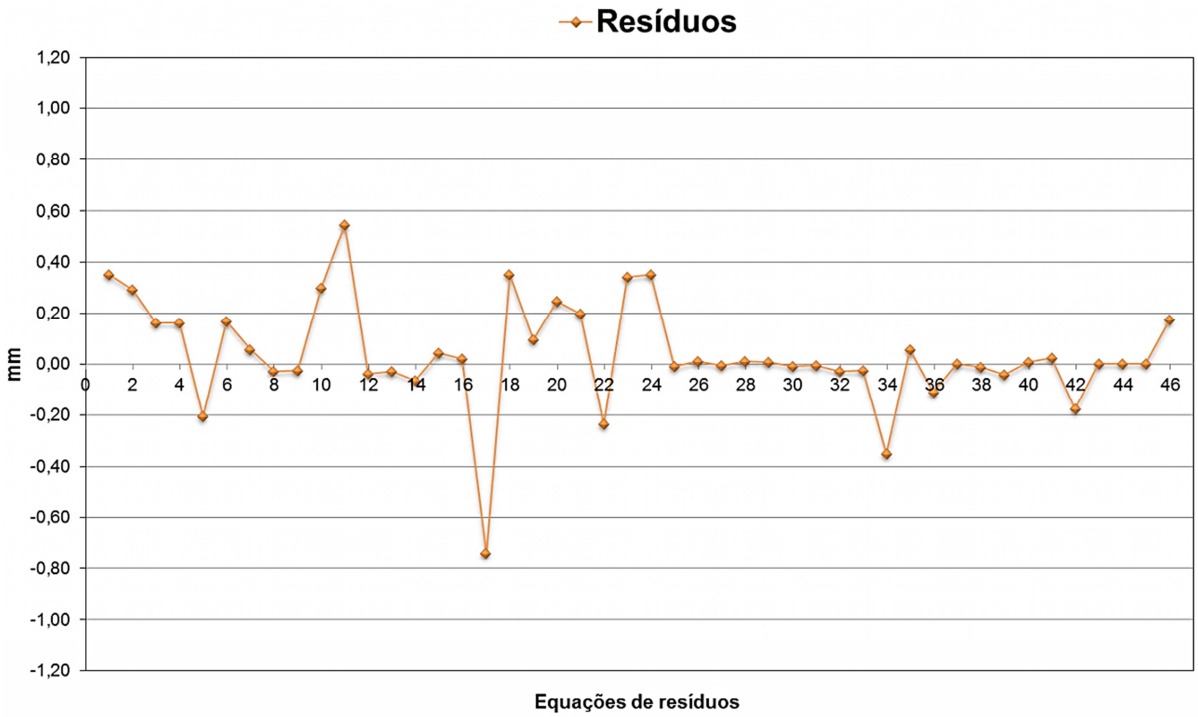

Figura 32 – Resíduos das observáveis de diferença de nível envolvidas em 46 sessões.

Fonte: Autor (2012).

Por conseguinte foram obtidas as incógnitas (parâmetros) e, assim como, as estimativas de precisão das 32 altitudes ortométricas do nivelamento de precisão, do qual a precisão resultou no décimo do milímetro conforme apresentado na Tabela 16.

Tabela 16 – Resultado do nivelamento de precisão.

Pontos	Altitudes Ortométricas H (m)	σ_H (m)
NTI	8,8276	0,0002
M28	7,6760	0,0006
M27	7,4105	0,0006
M25	7,1906	0,0006
M24	8,6546	0,0006
M23	8,6435	0,0005
M22	9,8245	0,0004
CAV	8,0347	0,0003
ACT	9,0301	0,0002
M09	8,4168	0,0003
M31	8,1008	0,0004
M11	8,6521	0,0004
M13	8,6562	0,0004

Continuação da Tabela 16 – Resultado do nivelamento de precisão.

Pontos	Altitudes Ortométricas H (m)	σ_H (m)
M39	8,6882	0,0003
M40	8,4434	0,0004
M17	7,9714	0,0005
M42	9,4184	0,0004
M38	8,2767	0,0005
M37	8,8309	0,0006
M36	8,8173	0,0006
M35	9,6685	0,0006
M34	10,3806	0,0006
M41	9,2642	0,0005
ITE	8,2907	0,0006
EXE	9,1551	0,0006
IGR	10,3889	0,0006
BRE	11,9039	0,0007
CEE	9,0451	0,0005
CON	9,0229	0,0003
LAG	9,4116	0,0006
P36	10,9818	0,0006
LDN	8,8417	0,0003

Fonte: Autor (2012).

5.4. Coordenadas geodésicas do posicionamento GNSS

A partir do *software Topcon tools versão 8.2* referente ao receptor Topcon Hiper Lite Plus L_1/L_2, realizou-se o pós-processamento, ajustamento das pseudodistâncias e fase da portadora L_1/L_2, tendo-se como referência a estação RECF/RBMC. Com isso, foram obtidas coordenadas ajustadas no Sistema Geodésico Brasileiro SIRGAS2000, expressas na Tabela 17.

Tabela 17 – Coordenadas no Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico SIRGAS2000.

Ponto	X(m)	σ_X (m)	Y(m)	σ_Y (m)	Z(m)	σ_Z (m)
LAA	5176384,355	0,001	-3618448,796	0,001	-887593,914	0,000
CEE	5176436,144	0,002	-3618262,868	0,002	-887721,438	0,001
ITE	5176361,802	0,004	-3618283,839	0,003	-888061,579	0,002
EXE	5176115,473	0,002	-3618631,488	0,002	-888086,960	0,001
BRE	5175767,513	0,036	-3619306,681	0,020	-887387,970	0,012
IGR	5176124,926	0,009	-3618790,141	0,005	-887398,754	0,005
CAV	5176312,192	0,005	-3618482,721	0,005	-887542,160	0,002
LDN	5176396,895	0,004	-3618371,868	0,003	-887505,987	0,002

Continuação da Tabela 17 – Coordenadas no Sistema Geodésico Cartesiano Geocêntrico SIRGAS2000.

Ponto	X(m)	σ_X (m)	Y(m)	σ_Y (m)	Z(m)	σ_Z (m)
ACT	5176465,402	0,001	-3618286,284	0,001	-887457,052	0,000
REC	5176588,653	0,000	-3618162,163	0,000	-887363,920	0,000
RNB	5176649,028	0,002	-3618018,567	0,001	-887476,429	0,001
NTI	5176750,238	0,012	-3617866,408	0,005	-887505,451	0,003
RNC	5176942,382	0,019	-3617594,592	0,015	-887495,695	0,009

Fonte: Autor (2012).

Por meio do *software Topcon tools versão 8.2* foi possível obter também as covariâncias das correlações das coordenadas no sistema geodésico geocêntrico SIRGAS2000; como por exemplo, na Figura 33 e expressas na Tabela 18.

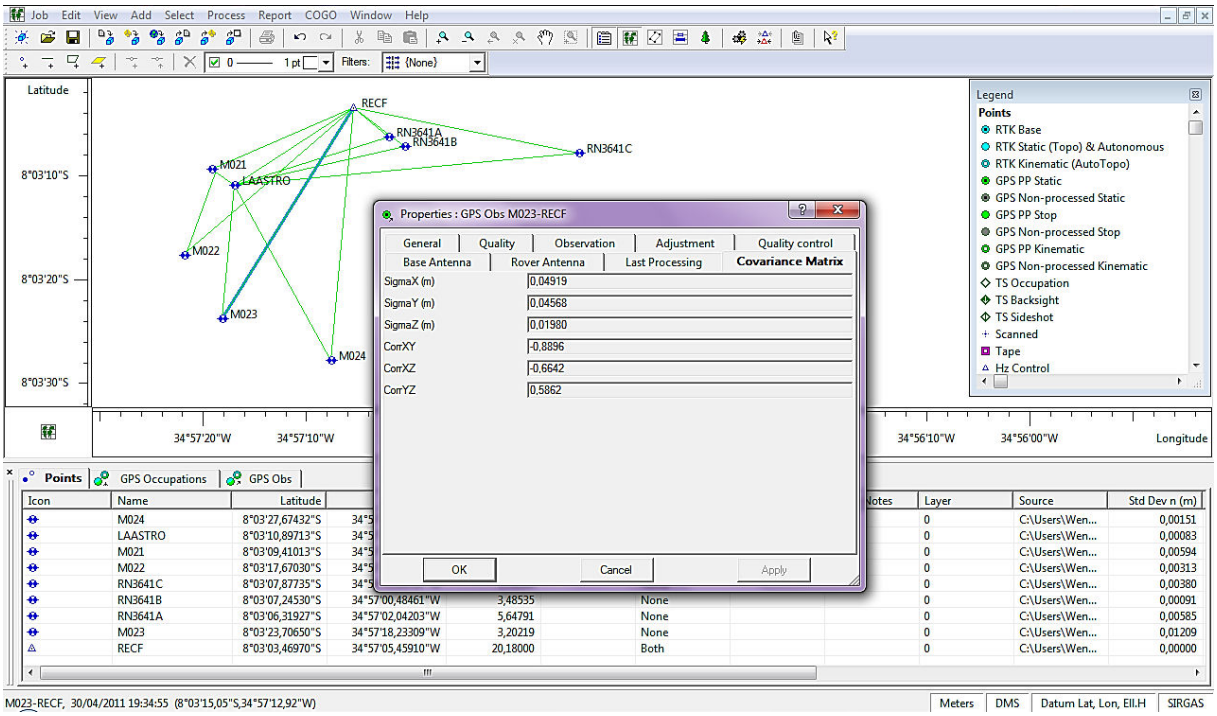

Figura 33 – Modelo de obtenção das precisões e das correlações.

Fonte: Autor (2012).

Tabela 18 – Correlações das linhas de base dos pontos a estação RECF.

Ponto	Corr XY	Corr XZ	Corr YZ
LAA	-6,261126E-01	-6,010252E-01	5,132354E-01
CEE	-6,797541E-01	-4,864992E-01	3,723255E-01
ITE	-8,277127E-01	-5,810091E-01	4,312576E-01
EXE	-6,831510E-01	-3,921151E-01	3,545539E-01
BRE	-8,478068E-01	-5,401632E-01	3,870717E-01

Continuação da Tabela 18 – Correlações das linhas de base dos pontos a estação RECF.

Ponto	Corr XY	Corr XZ	Corr YZ
IGR	-6,103270E-01	-3,790419E-01	-2,545315E-01
CAV	-7,998573E-01	-4,773550E-01	3,206590E-01
LDN	-7,178639E-01	-5,823493E-01	3,463408E-01
ACT	-6,975582E-01	-1,182394E-01	5,366885E-02
REC	3,195164E-06	1,093514E-06	-7,643036E-07
RNB	-7,862104E-01	-2,219912E-01	2,227613E-01
NTI	-8,526015E-01	-5,895905E-01	5,240650E-01
RNC	-7,743643E-01	-4,320515E-01	2,871187E-01

Fonte: Autor (2012).

Consequentemente, a partir da transformação das coordenadas cartesianas geocêntricas SIRGAS2000 foram obtidas as coordenadas geodésicas elipsoidais; e as coordenadas geodésicas cartesianas locais. As Tabelas 19, 20 e 21 apresentam os resultados dessas transformações:

Tabela 19 – Coordenadas geodésicas elipsoidais SIRGAS2000.

Ponto	ϕ	σ_ϕ (m)	λ	σ_λ (m)	h (m)	σ_h (m)
LAA	8°03'10,89712"	0,0002	34°57'16,95422"	0,0006	49,1941	0,0013
CEE	8°03'15,29937"	0,0009	34°57'11,00830"	0,0012	3,6180	0,0026
ITE	8°03'26,48514"	0,0017	34°57'12,96068"	0,0014	2,8490	0,0049
EXE	8°03'27,31552"	0,0009	34°57'26,87575"	0,0012	3,7250	0,0026
BRE	8°03'04,32328"	0,0102	34°57'51,45968"	0,0110	6,5130	0,0402
IGR	8°03'04,68487"	0,0048	34°57'30,94549"	0,0042	4,9770	0,0095
CAV	8°03'09,41018"	0,0018	34°57'19,21259"	0,0025	2,6270	0,0067
LDN	8°03'08,21736"	0,0017	34°57'14,66042"	0,0018	3,4139	0,0048
ACT	8°03'06,60773"	0,0002	34°57'11,08767"	0,0006	3,6070	0,0013
REC	8°03'03,46970"	0,0001	34°57'05,45910"	0,0001	20,1800	0,0001
RNB	8°03'07,24530"	0,0010	34°57'00,48561"	0,0007	3,4850	0,0021
NTI	8°03'08,19987"	0,0024	34°56'54,51888"	0,0040	3,3850	0,0125
RNC	8°03'07,87726"	0,0082	34°56'43,64775"	0,0079	3,7962	0,0232

Fonte: Autor (2012).

Tabela 20 – Correlações das coordenadas geodésicas elipsoidais.

Pontos	Corr. $\phi\lambda$	Corr. ϕh	Corr. λh
LAA	-3,0020E-02	8,4050E-02	-3,2942E-02
CEE	-7,0994E-02	-1,8927E-01	-2,9802E-01
ITE	-2,3180E-01	-2,9176E-01	-6,7681E-03
EXE	-1,7155E-03	-9,7493E-02	-3,0698E-01
BRE	-2,4396E-01	-8,7907E-02	4,9172E-01
IGR	-6,1409E-01	-2,1764E-02	4,7246E-01
CAV	-2,3878E-01	-3,5623E-03	-4,0618E-01
LDN	-2,9569E-01	-2,7895E-01	5,3531E-02

Continuação da Tabela 20 – Correlações das coordenadas geodésicas elipsoidais.

Pontos	Corr. $\phi\lambda$	Corr. ϕh	Corr. λh
ACT	-3,1498E-01	8,6382E-01	-3,2049E-01
REC	1,4016E-07	4,6931E-07	9,9087E-07
RNB	6,4274E-02	-1,3718E-02	5,7098E-01
NTI	-3,1250E-02	-3,6332E-02	7,7378E-01
RNC	-1,8785E-01	-9,7218E-02	-5,6874E-02

Fonte: Autor (2012).

Tabela 21 – Coordenadas no Sistema Geodésico Cartesiano Local.

Ponto	X (m)	σ_X (m)	Y (m)	σ_Y (m)	Z (m)	σ_Z (m)
LAA	0,000	0,001	0,000	0,001	0,000	0,001
CEE	182,059	0,001	-135,243	0,001	-45,580	0,002
ITE	122,278	0,001	-478,882	0,002	-46,364	0,005
EXE	-303,786	0,001	-504,393	0,001	-45,496	0,003
BRE	-1056,534	0,011	201,944	0,010	-42,772	0,040
IGR	-428,403	0,004	190,845	0,005	-44,234	0,010
CAV	-69,150	0,003	45,680	0,002	-46,568	0,007
LDN	70,234	0,002	82,325	0,002	-45,781	0,005
ACT	179,629	0,001	131,775	0,000	-45,591	0,001
REC	351,974	0,001	228,178	0,001	-29,028	0,001
RNB	504,257	0,001	112,185	0,001	-45,730	0,002
NTI	686,953	0,004	82,857	0,002	-45,847	0,013
RNC	1019,819	0,008	92,762	0,008	-45,480	0,023

Fonte: Autor (2012).

5.5. Resultantes das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η)

As componentes (ξ,η) permitem a integração entre coordenadas geodésicas e topográficas, sendo uma associada ao posicionamento pelo GNSS e outra associada ao levantamento de técnicas clássicas da topografia, respectivamente, e essenciais nas atividades diárias desenvolvidas pelos profissionais envolvidos com Geociências.

Assim, são apresentados os resultados de tais componentes a partir dos métodos envolvidos nesta pesquisa e descritos na sequência.

5.5.1. Método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos

A realização do método permitiu a obtenção das componentes do desvio da vertical para 13 pontos na área de estudo a partir da combinação dos desníveis elipsoidais (Δh) com desníveis ortométricos (ΔH), e mais implicitamente com o problema inverso da Geodesia (α,s). No Apêndice III estão caracterizados os resultados das componentes (ξ,η), e resumidas na Tabela 22.

Tabela 22 – Componentes do desvio da vertical através da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos.

Ponto	ξ ('')	σ_ξ ('')	η ('')	σ_η ('')
LAA	-5,792	1,172	6,264	0,969
CEE	-2,826	1,518	3,970	1,668
ITE	-6,469	0,576	6,376	1,093
EXE	-6,183	1,153	5,776	1,234
BRE	-4,969	1,324	5,618	0,329
IGR	-4,311	1,191	4,584	0,619
CAV	-9,814	2,597	10,776	1,931
LDN	-2,886	1,779	3,924	1,733
ACT	-6,729	1,266	7,013	1,381
REC	-5,122	1,355	6,612	1,410
RNB	-5,902	1,264	6,660	0,785
NTI	-5,617	1,401	6,270	0,569
RNC	-5,491	1,542	7,086	0,413

Fonte: Autor (2012).

Explorando a Tabela 22, percebe-se que a precisão das componentes (σ_ξ,σ_η) foi melhor que 2” para quase todos os 13 pontos envolvidos, com exceção do ponto CAV.

Ressalta-se que foi utilizado o método paramétrico de ajustamento na obtenção das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η), cuja variância de referência *a priori* (σ_o^2) foi igual a 1 e envolveu 10 graus de liberdade (gl). De modo que nem todos os valores encontrados atendem ao nível de aceitação do teste estatístico de significância de 5%, ilustrado na Tabela 23.

Tabela 23 – Teste estatístico do método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos.

Estatística qui-quadrado:		
$\chi^2_{gl,\frac{\alpha}{2}} = 3{,}25$	$\chi^2 = \frac{\bar{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \cdot gl$	$\chi^2_{gl,1-\frac{\alpha}{2}} = 20{,}48$
	Nível de aceitação:	
LAA	$3{,}25 < 9{,}01 < 20{,}48$	
CEE	$3{,}25 < 18{,}91 < 20{,}48$	
ITE	$3{,}25 < 5{,}22 < 20{,}48$	
EXE	$3{,}25 < 8{,}74 < 20{,}48$	
BRE	$3{,}25 > 0{,}20 < 20{,}48$	
IGR	$3{,}25 > 2{,}83 < 20{,}48$	
CAV	$3{,}25 < 17{,}71 < 20{,}48$	
LDN	$3{,}25 < 13{,}40 < 20{,}48$	
ACT	$3{,}25 < 15{,}51 < 20{,}48$	
REC	$3{,}25 < 15{,}50 < 20{,}48$	
RNB	$3{,}25 < 8{,}20 < 20{,}48$	
NTI	$3{,}25 > 1{,}53 < 20{,}48$	
RNC	$3{,}25 > 0{,}62 < 20{,}48$	

Fonte: Autor (2012).

Percebe-se que os pontos BRE, IGR, NTI e RNC foram rejeitados para o limite inferior da distribuição qui-quadrada. Isso implica que as observações estão mais precisas do se espera para a distribuição normal ou que os pesos atribuídos às observações estão superestimados.

Assim, o experimento permitiu calcular de forma satisfatória as componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η) dos treze pontos utilizados na área de estudo. Verifica-se que a geometria dos pontos favoreceu o ponto Instituto de Tecnologia de Pernambuco (ITE) estimativa de melhores componentes do desvio da vertical entre os demais pontos: $\xi_{LAA} = -6{,}469'' \pm 0{,}576''$ e $\eta_{LAA} = 6{,}376'' \pm 1{,}093''$.

5.5.2. Método do modelo relativo do Geoide local

Foram obtidas as componentes do desvio da vertical para os mesmos 13 pontos abordados no subitem anterior. Tal procedimento contou com a utilização de um ponto médio (-8°3`10,77175"; -34°57`13,79047") e de modelagem da superfície do Geoide em uma função cartesiana do plano, conforme Equação (153):

$$dN = a \cdot \Delta\lambda + \cdot\Delta\phi + c = -3{,}485\Delta\lambda + 2{,}995\Delta\phi + 0{,}001 \tag{153}$$

Onde, os parâmetros (a,b,c) foram obtidos via ajustamento pelos métodos paramétrico e combinado, e as ($\Delta\lambda,\Delta\phi$) representam as diferenças de longitude e latitude, respectivamente.

Dessa forma, o ajustamento realizado deu-se com variância de referência *a priori* (σ_o^2) igual a 1, envolveu 10 graus de liberdade (gl) e resultou numa variância de referência *a posteriori* ($\hat{\sigma}_o^2$) igual a 1,59, não sendo rejeitado o teste estatístico de hipótese básica ao nível de significância de 5% (α), conforme Tabela 24.

Tabela 24 – Teste estatístico do método do modelo relativo do Geoide local.

Estatística qui-quadrado:		
$\chi^2_{gl,\frac{\alpha}{2}} = 3{,}25$	$\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \cdot gl$	$\chi^2_{gl,1-\frac{\alpha}{2}} = 20{,}48$
Nível de aceitação:		
$3{,}25 < 15{,}92 < 20{,}48$		

Fonte: Autor (2012).

Com isso, foram obtidos valores consistentes para as componentes do desvio da vertical por meio de modelagem plana da superfície do Geoide para todos os pontos da área de estudo. Logo, qualquer ponto do modelo possui igual valor nas componentes, ou seja, $\xi = -5{,}586" \pm 1{,}342"$ e $\eta = 6{,}522" \pm 1{,}377"$. Os procedimentos conduzidos na obtenção das componentes estão evidenciados no Apêndice IV.

No entanto, cabe salientar que a estimativa das componentes (ξ,η) fica limitada ao comprimento das linhas de base dos pontos empregados ao ponto médio, e o relevo da superfície terrestre.

Desse contexto, Hofmann-Wellenhof e Moritz (2005) recomendam empregar distâncias inferiores a 20 km em regiões de relevo quase plano. Fato este observado na área de estudo desta pesquisa. Da qual a distância máxima das linhas de base não ultrapassam a 3 km, e a superfície terrestre assume formato próximo ao plano, isto é, com mínimas variações do terreno.

5.5.3. Método de Procrustes Parcial

Neste método foram obtidas as componentes do desvio da vertical para o ponto central do LAASTRO (LAA), por meio da combinação de coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas topográficas locais. Em virtude das variantes das coordenadas topográficas locais, os resultados do método de Procrustes Parcial ocorreram do desenvolvido de três situações seguintes:

i) coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas topográficas locais obtidas a partir de medições efetuadas por estação total, apresentadas na Tabela 12.
ii) coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas topográficas locais obtidas por meio do conhecimento das componentes (ξ,η), abordadas na Tabela 13.
iii) coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e coordenadas topográficas locais obtidas via relacionamento de observáveis angulares horizontais e zenitais reduzidas ao solo efetuadas por estação total; distâncias inclinadas por coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas compatibilizados do erro de curvatura da Terra; evidenciadas na Tabela 14.

Com isso, foram obtidas as componentes (ξ,η) do ponto central do ponto LAA envolvidas nas três situações descritas; e ilustradas na Tabela 25. Além do mais, os resultados estão apresentados no Apêndice V.

Tabela 25 – Resultado do método de Procrustes Parcial para as três situações.

Ponto Central	Situação	ξ	η
LAA	i)	-7’ 38,968"	-6’ 58,160"
	ii)	-5,644"	6,244"
	iii)	-5,552"	5,122"

Fonte: Autor (2012).

Explorando a Tabela 25, constata-se para as resultantes ξ e η:

Na situação *i)* evidencia-se elevada discrepância nas componentes do desvio da vertical quando comparadas com as demais situações: $\xi_{LAA} = -7'38{,}968''$ e $\eta_{LAA} = -6'58{,}160''$. Resultado este improvável para a área de estudo. Já que segundo Featherstone e Rüeger (2000) dependendo da orientação, forma e tamanho do Elipsoide utilizado, o desvio da vertical pode chegar a 20’’ em planícies e 70’’ em regiões acidentadas. Tal discrepância pode estar associada aos aspectos de erros instrumentais, baixa precisão nominal angular da estação total ou mesmo instabilidade do prédio do Laboratório de Astronomia; envolvidos no levantamento.

Para a situação *ii)*, era esperado obter valores consistente para: $\xi_{LAA} = -5{,}644''$ e $\eta_{LAA} = 6{,}244''$, em função do conhecimento prévio das componentes do desvio da vertical na transformação das coordenadas topográficas locais.

Na situação *iii)* foram encontrados valores similares para as componentes do desvio da vertical, iguais a $\xi_{LAA} = -5{,}552''$ e $\eta_{LAA} = 5{,}122''$.

Desse modo, verifica-se elevada discrepância pelo uso de coordenadas topográficas locais advindas de observáveis em campo por estação total. No entanto, o método de Procrustes Parcial resultou em valores consistentes quando as coordenadas topográficas locais são adquiridas por meio do conhecimento das componentes do desvio da vertical. Caso contrário, uma alternativa satisfatória surge na utilização de coordenadas topográficas locais via combinação de observáveis por estação total, coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas.

Contudo chama-se atenção ao método de Procrustes Parcial para o fato que não foi possível determinar as precisões das coordenadas latitude e longitude astronômicas; pois estas não estão contempladas em Awange (1999). Já que tal método não obtém diretamente as componentes do desvio da vertical, sendo-as obtidas por meio do relacionamento das coordenadas geodésicas com as astronômicas; e suas incertezas por meio da propagação de covariâncias.

5.5.4. Método do relacionamento de coordenadas topocêntricas

De forma análoga ao método de Procrustes Parcial, obteve-se as componentes do desvio da vertical para o ponto central do LAASTRO (LAA) por meio da associação de coordenadas geodésicas cartesianas locais e as variantes das bem conhecidas três situações das coordenadas topográficas locais; conforme evidenciadas anteriormente e aqui reescrita:

i) coordenadas geodésicas cartesianas locais e coordenadas topográficas locais obtidas a partir de medições efetuadas por estação total, apresentadas na Tabela 12.
ii) coordenadas geodésicas cartesianas locais e coordenadas topográficas locais obtidas por meio do conhecimento das componentes (ξ,η), abordadas na Tabela 13.
iii) coordenadas geodésicas cartesianas locais e coordenadas topográficas locais obtidas via relacionamento de observáveis angulares horizontais e zenitais reduzidas ao solo efetuadas por estação total; distâncias inclinadas por coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas compatibilizados do erro de curvatura da Terra; evidenciadas na Tabela 14.

Consequentemente, para o ponto central do LAASTRO foram determinadas as componentes (ξ,η) envolvidas em tais situações, apresentadas no Apêndice VI e resumidas na Tabela 26.

Tabela 26 – Resultado do método do relacionamento de coordenadas topocêntricas.

Ponto Central	Situação	ξ	η
LAA	i)	-7’ 39,203"	-6’ 58,001"
	ii)	-5,775" ± 0,013”	6,270" ± 0,010”
	iii)	-5,702" ± 2,269”	5,152" ± 1,436”

Fonte: Autor (2012).

Percebe-se que as resultantes das componentes meridiana e primeiro vertical, nas três situações, apresentaram valores similares, nas mesmas condições impostas, ao método de Procrustes Parcial. Já que as coordenadas no sistema geodésico cartesiano local foram transformadas a partir das coordenadas geodésicas geocêntricas.

Na situação *i)* observa-se elevada discrepância na resultante das componentes (ξ,η) quando analisadas com as demais situações, sendo este resultado improvável e de forma análoga foi comentado no subitem anterior.

Para as situações *ii)* e *iii)*, o teste estatístico da Tabela 27 apresenta rejeição no limite inferior. No entanto, os valores obtidos para as componentes são consistentes, evidenciando que não existe erro grosseiro nas observações, ou seja, os resultados são satisfatórios para (ξ,η)

Tabela 27 – Teste estatístico do método do relacionamento de coordenadas topocêntricas.

Estatística qui-quadrado:		
$\chi^2_{gl,\frac{\alpha}{2}}$	$\chi^2 = \frac{\hat{\sigma}_o^2}{\sigma_o^2} \cdot gl$	$\chi^2_{gl,1-\frac{\alpha}{2}}$
Situação	**Nível de aceitação:**	
ii)	$19{,}05 > 0{,}0074 < 50{,}73$	
iii)	$2{,}70 > 0{,}0003 < 19{,}02$	

Fonte: Autor (2012).

5.5.5. Comparação dos Métodos

A Tabela 28, a seguir, ilustra de modo geral os resultados obtidos pelos métodos aplicados a esta pesquisa; assim como os pontos envolvidos na determinação das componentes (ξ,η) nos arredores e no *campus* Recife da UFPE.

Tabela 28 – Resultado geral dos métodos envolvidos na pesquisa.

Pontos	Métodos							
	Combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos		Modelo relativo do Geoide local		Procrustes Parcial		Relacionamento de coordenadas topocêntricas	
	ξ	η	ξ	η				
CEE	-2,826" ± 1,518"	3,970" ± 1,668"	-5,586" ± 1,342"	6,522" ± 1,377"				
ITE	-6,469" ± 0,576"	6,376" ± 1,093"						
EXE	-6,183" ± 1,153"	5,776" ± 1,234"						
BRE	-4,969" ± 1,324"	5,618" ± 0,329"						
IGR	-4,311" ± 1,191"	4,584" ± 0,619"						
CAV	-9,814" ± 2,597"	10,776" ± 1,931"						
LDN	-2,886" ± 1,779"	3,924" ± 1,733"						
ACT	-6,729" ± 1,266"	7,013" ± 1,381"						
REC	-5,12" ± 1,355	6,612" ± 1,410"						
RNB	-5,902" ± 1,264"	6,660" ± 0,785"						
NTI	-5,617" ± 1,401"	6,270" ± 0,569"						
RNC	-5,491" ± 1,542"	7,086" ± 0,413"						
LAA	-5,792" ± 1,172"	6,264" ± 0,969"			ξ	η	ξ	η
					-7’ 38,968"	-6’ 58,160"	-7’ 39,203"	-6’ 58,001"
					-5,644"	6,244"	-5,775" ± 0,013"	6,270" ± 0,010"
					-5,552"	5,122"	-5,702" ± 2,269"	5,152" ± 1,436"

Fonte: Autor (2012).

Vale destacar que as componentes do desvio da vertical estão relacionadas ao Elipsoide de referência GRS80 e ao Geoide que corresponde à referência de nível do marégrafo de Imbituba, atual *datum* vertical brasileiro.

6. CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Os objetivos desta pesquisa foram alcançados, ou seja, determinação das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η) na integração de sistemas de referências global e local em função da combinação de equipamentos de observação e recursos computacionais apropriados vinculados aos métodos propostos. Com isso, as aplicações dos métodos envolvidos neste estudo permitiram investigar oito experimentos desenvolvidos pela utilização de coordenadas de pontos planialtimétricas referenciadas aos sistemas de concepção geodésica e topográfica, na obtenção das componentes (ξ,η), tendo-se como área de estudo o *campus* universitário de Recife da UFPE e o seu entorno.

No entanto, verificou-se sensibilidade na determinação das componentes do desvio da vertical por meio da componente Z_{TL} do Sistema Topográfico Local, obtida a partir da distância zenital medida diretamente da estação total, onde os erros instrumentais não controlados como o caso do erro do eixo principal e o modelo não exato da correção da refração atmosférica entram diretamente no cálculo das componentes do desvio da vertical e mascaram o resultado. Uma alternativa satisfatória surge na utilização de coordenadas topográficas locais via combinação de observáveis por estação total, coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas e altitudes ortométricas. Essa estratégia existe consistência nos resultados conforme ficou demonstrado, como segue:

a) método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos:

$\xi_{LAA} = -5{,}792'' \pm 1{,}172''$ e $\eta_{LAA} = 6{,}264'' \pm 0{,}969''$;

b) método da elaboração do modelo relativo do Geoide local:

$\xi_{LAA} = -5{,}586'' \pm 1{,}342''$ e $\eta_{LAA} = 6{,}522'' \pm 1{,}377''$;

c) método do problema de Procrustes Parcial:

$\xi_{LAA} = -5{,}552''$ e $\eta_{LAA} = 5{,}122''$;

d) método do relacionamento de coordenadas topocêntricas:

$\xi_{LAA} = -5{,}702'' \pm 2{,}269''$ e $\eta_{LAA} = 5{,}152'' \pm 1{,}436''$.

Nesse sentido, a conclusão fundamentada pelos resultados é de que existe consistência entre os métodos utilizados, pois pequenas discrepâncias, do ponto de vista prático, não trazem maiores consequências às aplicações. Assim, ressalta-se que o conhecimento das componentes do desvio da vertical fornecem subsídios vitais a compatibilização entre coordenadas vinculadas ao posicionamento pelo GNSS e levantamentos clássicos da topografia. Sendo questionável o desconhecimento das componentes do desvio da vertical nos dias atuais face a elevada sofisticação instrumental e programas computacionais específicos. Portanto, o presente estudo contempla uma metodologia eficiente e exequível na obtenção das componentes meridiana (ξ) e primeiro vertical (η). De modo, que os usuários envolvidos com Geociências ou áreas correlatas possam se beneficiar das reais potencialidades quanto à integração de posicionamento GNSS e levantamentos topográficos.

Recomenda-se a realização de pesquisas do método do problema de Procrustes Parcial no tocante a obtenção da matriz variância-covariância dos parâmetros ajustados, fato este não investigado nesta pesquisa. Assim como, pequisas na associação de métodos que contemplem o uso do campo gravitacional, principalmente no entorno do ponto de análise.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT. NBR 13.133 – **Execução de Levantamento Topográfico**. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro. 1994. 35 p.

ABNT. NBR 14.166 – **Rede de Referência Cadastral Municipal – Procedimento**. ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas, Rio de Janeiro. 1998. 23 p.

AGUIAR, C. R.; CAMARGO, P. O.; GALO, M. **Transformação de coordenadas e DATUM com propagação de variâncias.** Anais do Simpósio Brasileiro de Geomática. Presidente Prudente. 2002. 113-120p.

ALTAMIMI, Z.; COLLILIEUX, X.; MÉTIVIER, L. **ITRF2008: an improved solution of the international terrestrial reference frame**. J Geodesy doi: 10.1007/s00190-011-0444-4. 2011.

AMORIM, G. P. **Confiabilidade de Rede GPS de referência cadastral municipal – estudo de caso: Rede do município de Vitória-ES.** São Carlos-SP, Dissertação em Engenharia de Transportes, Universidade de São Paulo, 2004.

ANDRADE, J. B. **Injunções num referencial local**. Boletim de Ciências Geodésicas, n° 38. UFPR. Curitiba. 1990.

ANDRADE, J. B. **Fotogrametria**. Curitiba; SBEE, 2003; 2ª edição. 274p.

ANDRADE, R. J. O. **Determinação do desvio da vertical empregando observáveis da topografia clássica e do posicionamento por satélites**. Viçosa-MG, Dissertação em engenharia civil, Universidade Federal de Viçosa, 109 p., 2008.

ARISTOV, A. **Determination of deflection of the vertical using the global positioning system.** 52 p. Masters of Science degree in Geodetic Science. Department of Geodetic Science and Surveying. Ohio State University. 1987.

AWANGE, J. L. **Integrating the Global Positioning System (GPS) with the Local Positioning System (LPS) – The Threedimensional Orientation Problem.** 85 p. Thesis of the Ph.D. studies in Geodesy. Institute of Geodesy and Geoinformatics. University of Sttutgart. 1999.

AWANGE, J. L.; GRAFAREND, E. W. **Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics - The Answer to Modern Challenges.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2005.

BOMFORD, G. 1977 - **Geodesy**, 3ª ed., Oxford University Press, 731pp.

_____. 1980 - **Geodesy**, 4ª ed, Oxford University Press, 700 pp.

BLITZKOW, D.; MATOS, A. C. O. C. **A evolução dos referenciais usados em Geodésia: a era espacial**. Boletim de Ciências Geodésicas, Curitiba-PR, v. 8, p. 3-16, 2002.

CAMARGO, P. O. **Ajustamento de Observações**. Presidente Prudente. (Notas de aula do Curso de Graduação em Engenharia Cartográfica, FCT/UNESP), 2000.

CASTAÑEDA, R. M. **Ensaio para determinação de parâmetros de transformação entre o SAD69 e o NSWS-9Z2**. 1986. 180 p. Dissertação em Ciências Geodésicas - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1999.

CEYLAN, A. **Determination of the deflection of vertical components via GPS and leveling measurement: A case study of a GPS test network in Konya, Turkey**. Scientific Research and Essays Vol. 4, pp. 1438–1444, December 2009 ISSN 1992- 2248 © 2009 Academic Journals.

COSTA, S. M. A. **Integração da rede geodésica brasileira aos sistemas de referência terrestre.** 1999. 169 p. Tese (Doutorado em Ciências Geodésicas)- Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 1999.

DAL'FORNO, G. L.; AGUIRRE, A. J.; HILLEBRAND, F. L.; GREGORIO, F. V. 2010. **Transformação de coordenadas geodésicas em coordenadas no plano topográfico local pelos métodos da norma NBR 14.166/1998 e o de rotações e translações.** In: III Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife, 2010.

DALMOLIN, Q. **Ajustamento por mínimos quadrados** – 3ª edição. Curitiba 2010.

DE FREITAS, S. R. C.; BLITZKOW, D. **Altitudes e Geopotencial**. IGeS Bulletin - Special Issue for South America, Milan, Italy., v. 9, p. 47-61, 1999.

DELARA, JR. R. **Aplicação de método astrogravimétrico na regiâo do datum chuá**. Curitiba-PR, Dissertação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, 109 p., 1993.

ESPARTEL, L. **Curso de Topografia**. Porto Alegre, RS: Globo, 1977. 655 p

FEATHERSTONE, W. E.; RÜEGER, J. M. **The Importance of using deviations of the vertical for the reduction of survey data to a geocentric datum.** The Australian Surveyor, vol. 45, n.2, p. 46-61. dec 2000.

FERREIRA, V. G.; PEREIRA, R. A. D.; CARVALHO, A. S.; DE FREITAS, S. R. C. Metodologia para a determinação das componentes do desvio da vertical. In. **II SIMGEO**, II Simpósio Brasileiro de Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. Recife-PE, de 8 -11 de set. 2008. p. 1-7.

GARNÉS, S. J. A. **Sistema de projeção e orientação das plantas topográficas**. In: COBRAC 98. Congresso Brasileiro de Cadastro Técnico Multifinalitário, UFSC Florianópolis 18 a 22 de Outubro 1998.

GARNÉS, S. J. A.; SIQUEIRA, V. S.; CACHO, J. P. **Definição para implantação do Sistema Topográfico Local de Campo Grande – MS e análise das fórmulas da NBR 14.166/1998**, In. IV CBCG, IV Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, Curitiba. 2005.

GOLUB, G. H.; REINCH, C. **Singular value decomposition and least squares solutions.** Handbook series linear Algebra, New York, Number. Math. 14, p 403-420, 1970.

GEMAEL, C. **Inversas generalizadas.** Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Curitiba, 1977.

_____. **Referenciais cartesianos utilizados em Geodésia.** Curso de Pós-graduação em ciências geodésicas. UFPR. Curitiba. 1981.

_____. **Introdução ao ajustamento de observações**. Curitiba, 1994. 319 p. Editora UFPR. 1994.

_____. **Introdução à Geodésia Física**. 2ª ed. Curitiba: Ed. UFPR, 302 p., 1999.

GEMAEL, C.; ANDRADE, J. B. **Geodésica Celeste**. 1° ed. Curitiba: Ed. UFPR, 2004.

GHILANI, C. D.; WOLF, P. R. **Adjustment Computations: Spatial Data Analysis.** 4º Ed. Editora: John Wiley & Sons, 2006.

HEISKANEN, W. A.: MORITZ, H. **Physical Geodesy**. São Francisco, EUA : W.H. Freeman and Company, 1967, 364 p.

HIRT, C. **The Digital Zenith Camera TZK2-D - A Modern High-Precision Geodetic Instrument for Automatic Geographic Positioning in Real-Time**. In: Astronomical Society of the Pacific ASP Conference Series: Astronomical Data Analysis *Software* and Systems XII. ASP: San Francisco. v. 295 p. 156-159. 2003. Disponível em <http://www.adass.org/adass/proceedings/adass02/P6-1_>. Acesso em: 29 de setembro de 2010.

HIRT, C; FLURY, J. **Astronomical-topographic levelling using high-precision astro-geodetic vertical deflections and digital terrain model data**. J Geodesy 82(4-5):231-248, doi:10.1007/s00190-007-0173-x (2008)

HOFMANN-WELLENHOF, B.; LICHTENEGGER, H.; COLLINS, J. **GPS: theory and practice**. 5th. rev. ed. Wien: New York: Springer-Verlag, 2001. 382 p.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. New York: Springer-Verlag Wien, 2005.

IBGE, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Resolução PR nº. 22 Especificações e Normas Gerais para Levantamentos Geodésicos.** Rio de Janeiro: IBGE. 1983. Disponível em <http://www.ibge.gov.br> Acesso em: 15 de abril de 2011.

_____. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Resolução PR nº. 23 Parâmetros para Transformação de Sistemas Geodésicos.** Rio de Janeiro: IBGE. 1989. Disponível em <http://www.ibge.gov.br> Acesso em: 19 de julho de 2011.

_____. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Datum Altimétrico Brasileiro**. Rio de Janeiro, 1990. Disponível em: ftp://ftp.gales.uem.br/pub/nanni/geod%E9sia_ibge/artigos/1990-datum%20altimetrico%20brasileiro.pdf Acesso em: 21 de julho de 2011.

_____. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Ajustamento da Rede Planimétrica do Sistema Geodésico Brasileiro**. Rio de Janeiro, 1996.

_____. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Resolução nº. 1/2005 - Altera a caracterização do Sistema Geodésico Brasileiro.** Rio de Janeiro: IBGE. 2005. Disponível em <http://www.ibge.gov.br> Acesso em: 20 de julho de 2011.

_____. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Ajustamento simultâneo da rede altimétrica de alta precisão do sistema geodésico brasileiro.** Relatório. Rio de Janeiro, 2011. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/RelatorioAjustamento.pdf>. Acesso em 25 de julho de 2011.

_____. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Sistemas de Referência**. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/documentos/geodesia/sisref_2.pdf>. Acesso em 3 de agosto de 2012a.

_____. Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. **Cartograma da Localização das Estações da RBMC**. Disponível em: <ftp://geoftp.ibge.gov.br/RBMC/relatorio/RBMC_2012.pdf>. Acesso em 6 de agosto de 2012b.

IERS. **International Earth Rotation and Reference Systens Service.** Disponível em < http://www.iers.org >. Acesso em: 12/07/2011.

JEKELI, C. **Geometric Reference System inGeodesy**. Ohio State University, Lecture Note. 2002.

_____. **Geometric Reference System inGeodesy**. Ohio State University,. 2006.

LANCASTER, P.; SALKAUSKAS, K. **Curve and surface fitting**. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1986.

LEICK, A. **GPS Satellite surveying**. 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1995.

MA, C.; & FEISSEL, M. 1997, **Definition and Realization of the International Celestial Reference System by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects, IERS Technical.** Paris, Observatoire de Paris, june, 1997.

MINISTÉRIO DO EXÉRCITO. Estado-Maior do Exército. Manual Técnico. **Astronomia Expedita**. 1ª edição. 1977.

MIKHAIL, E. M.; ACKERMAN, F. **Observations and least squares**. New York: University Press of America, Inc.,1976.

MONICO, J. F. G. **Posicionamento pelo GNSS: descrição, fundamentos e aplicações.** 2ª ed. São Paulo: Ed. da UNESP,476 p., 2008.

MORITZ, H. **Concepts in Geodetic Reference Frames**. The Ohio State University / Department of Geodetic Science, 1979.

NIMA - National Imagery and Mapping Agency, Department of Defense World Geodetic System 1984, NIMA TR 8350.2, Third Edition, 171p., 1997.

_____. National Imagery and Mapping Agency. **Department of Defense World Geodetic System 1984: Its definition and relationships with local gedetic systems**. 3 ed. NIMA, Technical Report 8350.2. 2000. Disponível em: < http://earth-info.nga.mil/GandG/publications/tr8350.2/tr8350_2.html> Acesso em: 25 de julho de 2011.

_____. National Imagery and Mapping Agency, **Department of Defense World Geodetic System 1984**, NIMA TR 8350.2, Third Edition, 171p., 1997.

OLIVEIRA, L. C. **Realizações do Sistema Geodésico Brasileiro associadas ao SAD-69 – Uma proposta metodológica de transformação.** Tese de doutorado apresentada à Escola Politécnica da USP, Departamento de Engenharia de Transportes. São Paulo. 1998.

PCR, Prefeitura da Cidade do Recife. **Levantamento Aerofotogramétrico de Recife.** Ano 2007. Escala do voo 1/6.000. Base cartográfica da cidade do Recife. Escala de mapeamento 1/1.000.

REIGBER, C. **Reference Frames for Artificial Satellites the Earth.** eds. in reference Frames in Astronomy and Geophysics. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1989. (Astrophysics and Space Science Library) p. 91–114.

ROMÃO, V. M. C. **Conceitos de Geodésia.** Curso de Pós-graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação. UFPE. Recife. 2005.

RÜEGER, J. M. 1996. **Electronic Distance Measurement – An Introduction** (fourth edition), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

SEEBER, G. I. **Satellite Geodesy: foundations, methods and aplications**. 2nd . ed., Berlin, New York: Walter de Gruyter,: 589 p., 2003.

_____. **Satellite Geodesy: foundations, methods, and applications**, Berlin, New-York: Walter de Gruyter, Berlin, 356 p., 1993.

SILVA, M. M. S; ZANETTI, M. A. Z.; VEIGA, L. A. K.; KRUEGER, C. P.; DE FREITAS, S. R. C. **Implantação de um Sistema Topográfico Local no Centro Politécnico de acordo com a NBR14166 - Rede de referência cadastral municipal - procedimento**. In: III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, 2003, Curitiba. III Colóquio Brasileiro de Ciências Geodésicas, 2003.

SOLER, T.; HOTHEM, L. D. **Coordinate systems used in geodesy: basic definitions and concepts.** Journal of Surveying Engineering. Vol. 114, No.2. May, 1988.

SCHWARZ, K. P.; KRYNSKI, J. **Fundamental of Geodesy**. 189 p. IUGG Reports - The University of Calgary, Calgary. 1997.

TORGE, W. **Geodesy**. 3. ed. Berlin; New York: de Gruyter, 2001.

THOMAS, C.; WOLF, P. & TAVELLA, P. **Times scale**. Bureau International des et Mesures, 1994. (Monographie 94/1).

TSE, C. M.; IZ, H. B. **Deflection of the Vertical Components from GPS and Precise Leveling Measurements in Hong Kong.** Journal of surveying engineering © asce / august 2006.

VANIÍČEK, P.; KRAKIWSKY, E. **Geodesy: The conpets**. 1 ed. Amsterdam: Ed. ELSEVIER, 1982.

_____. **Geodesy: The conpets**. 2 ed. Amsterdam: Ed. ELSEVIER, 1986.

VEIGA, L. A. K.; ZANETTI, M. A. Z.; FAGGION, P. L. **Fundamentos de Topografia.** Engenharia Cartográfica e de Agrimensura UFPR. 2012.

ZANETTI, M. A. Z. **Implicações atuais no relacionamento entre sistemas terrestres de referência de origem local e geocêntrica.** Curitiba-PR, Tese em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 111 p., 2006.

ZANETTI, M. A. Z.; DE FREITAS, S. R. C.; FAGGION, P. L. **Determinação do Desvio da Vertical.** Revista Brasileira de Cartografia, nº. 60/04, 2008.

APÊNDICE I Observáveis Angulares e Lineares

Programa AstGeoTop : Módulo de Cálculo de Ângulos Horizontais e Zenitais
Versão 2012.06.08 - Prof. Dr. Silvio Garnés - silvio.jacks@ufpe.br

---

Local da Base de Classificação: UFPE - Recife / Pernambuco
Modelo do Equipamento: Estação Total
N° Id. do Equipamento : 3303Dr604240-A
Coeficiente de refração: 0,055
Constante do prisma   : 0,035m
Temperatura   : 36°C
Pressão   : 759 mmHg
Número de séries observadas : 5
Número de alvos observados : 5
Altura do Instrumento : 0,240
Altura do Alvo   : 1,70
Data do Levantamento : 06/04/2011

			ÂNGULOS OBSERVADOS								
N° Obs.	N°Série	Alvo_Vis.	Ang_Hor_PD	Ang_Zen_PD	Ang_Hor_PI	Ang_Zen_PI	Hor(PI-PD)	Hor(PD+PI)/2	Zen(PI-PD)	Zen(PD+PI)/2	Ang_H_Reduz.
1	1	Az-01	0°00`00,0"	90°18`32,0"	180°00`55,0"	269°40`22,0"	0°00`55,0"	0°00`27,5"	0°01`06,0"	90°19`05,0"	0°00`00,0"
2	1	ITE	70°20`05,0"	95°11`35,0"	250°20`10,0"	264°48`31,0"	0°00`05,0"	70°20`07,5"	-0°00`06,0"	95°11`32,0"	70°19`40,0"
3	1	EXE	115°43`08,0"	94°16`46,0"	295°43`10,0"	265°43`31,0"	0°00`02,0"	115°43`09,0"	-0°00`17,0"	94°16`37,5"	115°42`41,5"
4	1	BRE	185°28`56,0"	92°11`56,0"	5°28`58,0"	267°48`03,0"	0°00`02,0"	185°28`57,0"	0°00`01,0"	92°11`56,5"	185°28`29,5"
5	1	IGR	198°40`20,0"	95°12`57,0"	18°40`23,0"	264°47`13,0"	0°00`03,0"	198°40`21,5"	-0°00`10,0"	95°12`52,0"	198°39`54,0"
***	***	***	***	***	***		***	***	***	***	***
6	2	Az-01	34°59`56,0"	90°18`35,0"	215°00`28,0"	269°40`54,0"	0°00`32,0"	35°00`12,0"	0°00`31,0"	90°18`50,5"	0°00`00,0"
7	2	ITE	105°20`00,0"	95°11`40,0"	285°20`08,0"	264°48`39,0"	0°00`08,0"	105°20`04,0"	-0°00`19,0"	95°11`30,5"	70°19`52,0"
8	2	EXE	150°43`05,0"	94°16`41,0"	330°43`09,0"	265°43`25,0"	0°00`04,0"	150°43`07,0"	-0°00`06,0"	94°16`38,0"	115°42`55,0"
9	2	BRE	220°28`52,0"	92°12`00,0"	40°28`56,0"	267°48`06,0"	0°00`04,0"	220°28`54,0"	-0°00`06,0"	92°11`57,0"	185°28`42,0"
10	2	IGR	233°40`21,0"	95°12`56,0"	53°40`20,0"	264°47`17,0"	-0°00`01,0"	233°40`20,5"	-0°00`13,0"	95°12`49,5"	198°40`08,5"
***	***	***	***	***	***		***	***	***	***	***
11	3	Az-01	69°59`59,0"	90°18`35,0"	250°00`13,0"	269°41`27,0"	0°00`14,0"	70°00`06,0"	-0°00`02,0"	90°18`34,0"	0°00`00,0"
12	3	ITE	140°20`07,0"	95°11`40,0"	320°20`16,0"	264°48`22,0"	0°00`09,0"	140°20`11,5"	-0°00`02,0"	95°11`39,0"	70°20`05,5"
13	3	EXE	185°43`14,0"	94°16`45,0"	5°43`15,0"	265°43`22,0"	0°00`01,0"	185°43`14,5"	-0°00`07,0"	94°16`41,5"	115°43`08,5"
14	3	BRE	255°28`59,0"	92°11`55,0"	75°29`04,0"	267°48`02,0"	0°00`05,0"	255°29`01,5"	0°00`03,0"	92°11`56,5"	185°28`55,5"
15	3	IGR	268°40`26,0"	95°12`52,0"	88°40`29,0"	264°47`14,0"	0°00`03,0"	268°40`27,5"	-0°00`06,0"	95°12`49,0"	198°40`21,5"
***	***	***	***	***	***		***	***	***	***	***
16	4	Az-01	105°00`08,0"	90°18`30,0"	285°00`13,0"	269°41`27,0"	0°00`05,0"	105°00`10,5"	0°00`03,0"	90°18`31,5"	0°00`00,0"
17	4	ITE	175°20`12,0"	95°11`43,0"	355°20`22,0"	264°48`26,0"	0°00`10,0"	175°20`17,0"	-0°00`09,0"	95°11`38,5"	70°20`06,5"
18	4	EXE	220°43`15,0"	94°16`46,0"	40°43`17,0"	265°43`22,0"	0°00`02,0"	220°43`16,0"	-0°00`08,0"	94°16`42,0"	115°43`05,5"
19	4	BRE	290°29`04,0"	92°11`57,0"	110°29`07,0"	267°48`02,0"	0°00`03,0"	290°29`05,5"	0°00`01,0"	92°11`57,5"	185°28`55,0"
20	4	IGR	303°40`28,0"	95°13`01,0"	123°40`33,0"	264°47`09,0"	0°00`05,0"	303°40`30,5"	-0°00`10,0"	95°12`56,0"	198°40`20,0"
***	***	***	***	***	***		***	***	***	***	***
21	5	Az-01	140°00`01,0"	90°18`31,0"	320°00`11,0"	269°41`30,0"	0°00`10,0"	140°00`06,0"	-0°00`01,0"	90°18`30,5"	0°00`00,0"
22	5	ITE	210°20`06,0"	95°11`37,0"	30°20`14,0"	264°48`30,0"	0°00`08,0"	210°20`10,0"	-0°00`07,0"	95°11`33,5"	70°20`04,0"
23	5	EXE	255°43`12,0"	94°16`43,0"	75°43`12,0"	265°43`22,0"	0°00`00,0"	255°43`12,0"	-0°00`05,0"	94°16`40,5"	115°43`06,0"
24	5	BRE	325°28`57,0"	92°12`00,0"	145°29`02,0"	267°48`00,0"	0°00`05,0"	325°28`59,5"	-0°00`00,0"	92°12`00,0"	185°28`53,5"
25	5	IGR	338°40`24,0"	95°12`54,0"	158°40`25,0"	264°47`05,0"	0°00`01,0"	338°40`24,5"	0°00`01,0"	95°12`54,5"	198°40`18,5"
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***

DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS HORIZONTAIS E ÂNGULOS ZENITAIS

Série	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS HORIZONTAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS ZENITAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad
1	55,00"	2,00"	13,40"	23,29"	66,00"	-17,00"	6,80"	33,73"
2	32,00"	-1,00"	9,40"	13,03"	31,00"	-19,00"	-2,60"	19,55"
3	14,00"	1,00"	6,40"	5,18"	3,00"	-7,00"	-2,80"	3,96"
4	10,00"	2,00"	5,00"	3,08"	3,00"	-10,00"	-4,60"	6,11"
5	10,00"	0,00"	4,80"	4,32"	1,00"	-7,00"	-2,40"	3,44"

RESULTADO CONJUNTO DAS 5 SÉRIES

Série	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS HORIZONTAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS ZENITAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad
TODAS	55,00"	-1,00"	7,80"	11,78"	66,00"	-19,00"	-1,12"	16,77"

ANGULOS AJUSTADOS POR MÍNIMOS QUADRADOS

ÂNGULOS HORIZONTAIS AJUSTADOS POR MMQ			ÂNGULOS ZENITAIS AJUSTADOS POR MMQ		
x0 =	0°00`00,0"	+/- 0,0"	z1 =	90°18`42,3"	+/- 3,7"
x1 =	70°19`57,6"	+/- 3,2"	z2 =	95°11`34,7"	+/- 3,7"
x2 =	115°42`59,3"	+/- 3,2"	z3 =	94°16`39,9"	+/- 3,7"
x3 =	185°28`47,1"	+/- 3,2"	z4 =	92°11`57,5"	+/- 3,7"
x4 =	198°40`12,5"	+/- 3,2"	z5 =	95°12`52,2"	+/- 3,7"

RESIDUOS ESTIMADOS DAS DIREÇÕES HORIZONTAIS		RESIDUOS ESTIMADOS DOS ÂNGULOS ZENITAIS	
v1 =	-0°00`14,3"	v1 =	-0°00`22,7"
v2 =	0°00`03,3"	v2 =	0°00`02,7"
v3 =	0°00`03,5"	v3 =	0°00`02,4"
v4 =	0°00`03,3"	v4 =	0°00`01,0"
v5 =	0°00`04,2"	v5 =	0°00`00,2"
v6 =	-0°00`03,8"	v6 =	-0°00`08,2"
v7 =	0°00`01,8"	v7 =	0°00`04,2"
v8 =	0°00`00,5"	v8 =	0°00`01,9"
v9 =	0°00`01,3"	v9 =	0°00`00,5"
v10 =	0°00`00,2"	v10 =	0°00`02,7"
v11 =	0°00`06,9"	v11 =	0°00`08,3"

v12 =	-0°00`01,0"		v12 =	-0°00`04,3"
v13 =	-0°00`02,3"		v13 =	-0°00`01,6"
v14 =	-0°00`01,5"		v14 =	0°00`01,0"
v15 =	-0°00`02,1"		v15 =	0°00`03,2"
v16 =	0°00`06,1"		v16 =	0°00`10,8"
v17 =	-0°00`02,8"		v17 =	-0°00`03,8"
v18 =	-0°00`00,1"		v18 =	-0°00`02,1"
v19 =	-0°00`01,8"		v19 =	0°00`00,0"
v20 =	-0°00`01,4"		v20 =	-0°00`03,8"
v21 =	0°00`05,1"		v21 =	0°00`11,8"
v22 =	-0°00`01,3"		v22 =	0°00`01,2"
v23 =	-0°00`01,6"		v23 =	-0°00`00,6"
v24 =	-0°00`01,3"		v24 =	-0°00`02,5"
v25 =	-0°00`00,9"		v25 =	-0°00`02,3"

CLASSIFICAÇÃO DA PRECISÃO ANGULAR HORIZONTAL
Desvio padrão = 5,1"

CLASSIFICAÇÃO DA PRECISÃO ANGULAR VERTICAL
Desvio padrão = 8,3"

==========

REDUÇÃO DO ÂNGULO ZENITAL E DISTÂNCIA ÀS ESTAÇÕES
Redução da altura do Instrumento e da altura do Sinal

ID.Alvo	Z_Medido	Di_Medida	Z_Estação	Z_SOLO	Di_SOLO
Az-01	90°18`42,3"	22,164	89°41`28,8"	94°04`44,8"	22,2200
ITE	95°11`34,7"	496,419	95°09`55,4"	95°21`38,7"	496,5533
EXE	94°16`39,9"	590,557	94°15`16,3"	94°25`08,3"	590,6677
BRE	92°11`57,5"	1076,498	92°11`11,5"	92°16`37,0"	1076,5550
IGR	95°12`52,2"	471,070	95°11`07,5"	95°23`28,7"	471,2049

Estação	Ponto visado	Nº Obs.	Distância Inclinada	Distância Horizontal	Estação	Ponto visado	Nº Obs.	Distância Inclinada	Distância Horizontal
			m	m				m	m
LAASTRO	ITE	1	496,416	494,377	LAASTRO	EXE	1	590,558	588,913
		2	496,417	494,379			2	590,558	588,911
		3	496,419	494,383			3	590,557	588,914
		4	496,417	494,378			4	590,558	588,912
		5	496,420	494,385			5	590,558	588,914
		6	496,422	494,383			6	590,558	588,911
		7	496,419	494,381			7	590,558	588,913
		8	496,422	494,383			8	590,557	588,910
		9	496,419	494,382			9	590,557	588,912
		10	496,421	494,383			10	590,557	588,911
		Média	496,419	494,382			Média	590,557	588,912

Estação	Ponto visado	Nº Obs.	Distância Inclinada	Distância Horizontal	Estação	Ponto visado	Nº Obs.	Distância Inclinada	Distância Horizontal
			m	m				m	m
LAASTRO	BRE	1	1076,501	1075,708	LAASTRO	IGR	1	471,070	469,119
		2	1076,500	1075,707			2	471,071	469,123
		3	1076,498	1075,705			3	471,071	469,121
		4	1076,495	1075,703			4	471,070	469,122
		5	1076,497	1075,705			5	471,071	469,121
		6	1076,497	1075,704			6	471,071	469,123
		7	1076,497	1075,704			7	471,070	469,119
		8	1076,498	1075,705			8	471,070	469,121
		9	1076,499	1075,706			9	471,070	469,120
		10	1076,498	1075,705			10	471,070	469,120
		Média	1076,498	1075,705			Média	471,070	469,121

Programa AstGeoTop : Módulo de Cálculo de Ângulos Horizontais e Zenitais
Versão 2012.06.08 - Prof. Dr. Silvio Garnés - silvio.jacks@ufpe.br

---

Local da Base de Classificação: UFPE - Recife / Pernambuco
Modelo do Equipamento: Estação Total
N° Id. do Equipamento : 3303Dr604240-A
Coeficiente de refração: 0,055
Constante do prisma   : 0,035m
Temperatura   : 33°C
Pressão   : 756 mmHg
Número de séries observadas : 5
Número de alvos observados : 4
Altura do Instrumento : 0,238
Altura do Alvo   : 1,70
Data do Levantamento: 13/04/2011

Â N G U L O S O B S E R V A D O S

N° Obs.	N°Série	Alvo_Vis.	Ang_Hor_PD	Ang_Zen_PD	Ang_Hor_PI	Ang_Zen_PI	Hor(PI-PD)	Hor(PD+PI)/2	Zen(PI-PD)	Zen(PD+PI)/2	Ang_H_Reduz.
1	1	Az-01	5°10`14,0"	90°18`37,0"	185°10`12,0"	269°41`17,0"	-0°00`02,0"	5°10`13,0"	0°00`06,0"	90°18`40,0"	0°00`00,0"
2	1	CEE	36°26`12,0"	101°03`50,0"	216°26`30,0"	258°58`55,0"	0°00`18,0"	36°26`21,0"	-0°02`45,0"	101°02`27,5"	31°16`08,0"
3	1	LAG	298°11`03,0"	94°19`40,0"	118°11`05,0"	265°40`23,0"	0°00`02,0"	298°11`04,0"	-0°00`03,0"	94°19`38,5"	293°00`51,0"
4	1	COM	323°35`14,0"	101°13`10,0"	143°35`08,0"	258°47`13,0"	-0°00`06,0"	323°35`11,0"	-0°00`23,0"	101°12`58,5"	318°24`58,0"
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***
5	2	Az-01	45°09`42,0"	90°18`36,0"	225°09`44,0"	269°41`16,0"	0°00`02,0"	45°09`43,0"	0°00`08,0"	90°18`40,0"	0°00`00,0"
6	2	CEE	76°25`38,0"	101°03`50,0"	256°25`41,0"	258°59`36,0"	0°00`03,0"	76°25`39,5"	-0°03`26,0"	101°02`07,0"	31°15`56,5"
7	2	LAG	338°10`37,0"	94°19`37,0"	158°10`33,0"	265°40`26,0"	-0°00`04,0"	338°10`35,0"	-0°00`03,0"	94°19`35,5"	293°00`52,0"
8	2	COM	3°34`40,0"	101°13`10,0"	183°35`13,0"	258°46`18,0"	0°00`33,0"	3°34`56,5"	0°00`32,0"	101°13`26,0"	318°25`13,5"
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***
9	3	Az-01	90°09`33,0"	90°18`38,0"	270°09`58,0"	269°40`32,0"	0°00`25,0"	90°09`45,5"	0°00`50,0"	90°19`03,0"	0°00`00,0"
10	3	CEE	121°25`24,0"	101°04`00,0"	301°25`46,0"	258°58`54,0"	0°00`22,0"	121°25`35,0"	-0°02`54,0"	101°02`33,0"	31°15`49,5"
11	3	LAG	23°10`23,0"	94°19`38,0"	203°10`42,0"	265°39`51,0"	0°00`19,0"	23°10`32,5"	0°00`31,0"	94°19`53,5"	293°00`47,0"
12	3	COM	48°34`33,0"	101°12`58,0"	228°35`03,0"	258°46`17,0"	0°00`30,0"	48°34`48,0"	0°00`45,0"	101°13`20,5"	318°25`02,5"
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***
13	4	Az-01	135°09`20,0"	90°18`37,0"	315°10`08,0"	269°40`12,0"	0°00`48,0"	135°09`44,0"	0°01`11,0"	90°19`12,5"	0°00`00,0"
14	4	CEE	166°25`15,0"	101°04`10,0"	346°25`38,0"	258°59`00,0"	0°00`23,0"	166°25`26,5"	-0°03`10,0"	101°02`35,0"	31°15`42,5"
15	4	LAG	68°10`18,0"	94°19`41,0"	248°10`21,0"	265°40`17,0"	0°00`03,0"	68°10`19,5"	0°00`02,0"	94°19`42,0"	293°00`35,5"
16	4	COM	93°34`20,0"	101°13`20,0"	273°34`26,0"	258°47`05,0"	0°00`06,0"	93°34`23,0"	-0°00`25,0"	101°13`07,5"	318°24`39,0"
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***
17	5	Az-01	180°09`07,0"	90°18`34,0"	0°09`52,0"	269°40`15,0"	0°00`45,0"	180°09`29,5"	0°01`11,0"	90°19`09,5"	0°00`00,0"
18	5	CEE	211°25`03,0"	101°03`40,0"	31°25`01,0"	258°59`32,0"	-0°00`02,0"	211°25`02,0"	-0°03`12,0"	101°02`04,0"	31°15`32,5"
19	5	LAG	113°10`01,0"	94°19`37,0"	293°10`23,0"	265°39`47,0"	0°00`22,0"	113°10`12,0"	0°00`36,0"	94°19`55,0"	293°00`42,5"
20	5	COM	138°34`11,0"	101°13`10,0"	318°34`36,0"	258°46`28,0"	0°00`25,0"	138°34`23,5"	0°00`22,0"	101°13`21,0"	318°24`54,0"
***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***	***

DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS HORIZONTAIS E ÂNGULOS ZENITAIS

Série	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS HORIZONTAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS ZENITAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad
1	18,00"	-6,00"	3,00"	10,52"	6,00"	-165,00"	-46,25"	80,09"
2	33,00"	-4,00"	8,50"	16,62"	32,00"	-206,00"	-42,25"	110,14"
3	30,00"	19,00"	24,00"	4,69"	50,00"	-174,00"	-12,00"	108,30"
4	48,00"	3,00"	20,00"	20,64"	71,00"	-190,00"	-35,50"	110,65"
5	45,00"	-2,00"	22,50"	19,26"	71,00"	-192,00"	-15,75"	119,29"

RESULTADO CONJUNTO DAS 5 SÉRIES

Série	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS HORIZONTAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad	DISCREPÂNCIAS ÂNGULOS ZENITAIS DMax	Dmin	Dmédia	Desv.Pad
TODAS	48,00"	-6,00"	15,60"	16,23"	71,00"	-206,00"	-30,35"	95,73"

ANGULOS AJUSTADOS POR MÍNIMOS QUADRADOS

ÂNGULOS HORIZONTAIS AJUSTADOS POR MMQ			ÂNGULOS ZENITAIS AJUSTADOS POR MMQ		
x0 =	0°00`00,0"	+/- 0,0"	z1 =	90°18`57,0"	+/- 7,0"
x1 =	31°15`49,8"	+/- 4,9"	z2 =	101°02`21,3"	+/- 7,0"
x2 =	293°00`45,6"	+/- 4,9"	z3 =	94°19`44,9"	+/- 7,0"
x3 =	318°24`57,4"	+/- 4,9"	z4 =	101°13`14,7"	+/- 7,0"

RESIDUOS ESTIMADOS DAS DIREÇÕES HORIZONTAIS		RESIDUOS ESTIMADOS DOS ÂNGULOS ZENITAIS	
v1 =	0°00`06,1"	v1 =	0°00`17,0"
v2 =	-0°00`12,1"	v2 =	-0°00`06,2"
v3 =	0°00`00,6"	v3 =	0°00`06,4"
v4 =	0°00`05,4"	v4 =	0°00`16,2"
v5 =	0°00`07,3"	v5 =	0°00`17,0"
v6 =	0°00`00,6"	v6 =	0°00`14,3"
v7 =	0°00`00,9"	v7 =	0°00`09,4"
v8 =	-0°00`08,8"	v8 =	-0°00`11,3"
v9 =	0°00`01,5"	v9 =	-0°00`06,0"
v10 =	0°00`01,9"	v10 =	-0°00`11,7"
v11 =	0°00`00,2"	v11 =	-0°00`08,6"
v12 =	-0°00`03,6"	v12 =	-0°00`05,8"

v13 =	-0°00`09,0"	|	v13 =	-0°00`15,5"
v14 =	-0°00`01,6"	|	v14 =	-0°00`13,7"
v15 =	0°00`01,1"	|	v15 =	0°00`02,9"
v16 =	0°00`09,4"	|	v16 =	0°00`07,2"
v17 =	-0°00`06,0"	|	v17 =	-0°00`12,5"
v18 =	0°00`11,3"	|	v18 =	0°00`17,3"
v19 =	-0°00`02,9"	|	v19 =	-0°00`10,1"
v20 =	-0°00`02,5"	|	v20 =	-0°00`06,3"

CLASSIFICAÇÃO DA PRECISÃO ANGULAR HORIZONTAL
Desvio padrão = 7,7"

CLASSIFICAÇÃO DA PRECISÃO ANGULAR VERTICAL
Desvio padrão = 15,7"

==========

REDUÇÃO DO ÂNGULO ZENITAL E DISTÂNCIA ÀS ESTAÇÕES
Redução da altura do Instrumento e da altura do Sinal

ID.Alvo	Z_Medido	Di_Medida	Z_Estação	Z_SOLO	Di_SOLO
Az-01	90°18`57,0"	22,164	89°42`02,1"	94°05`18,0"	22,2202
CEE	101°02`21,3"	231,336	100°58`53,0"	101°23`39,2"	231,6204
LAG	94°19`44,9"	580,480	94°18`20,6"	94°28`22,8"	580,5922
CON	101°13`14,7"	227,477	101°09`43,0"	101°34`53,4"	227,7660

Estação	Ponto visado	Nº Obs.	Distância Inclinada	Distância Horizontal
			m	m
LAASTRO	CEERMA	1	231,336	227,078
		2	231,336	227,072
		3	231,337	227,079
		4	231,335	227,080
		5	231,336	227,078
		6	231,337	227,073
		7	231,336	227,078
		8	231,337	227,074
		9	231,337	227,079
		10	231,336	227,080
		Média	231,336	227,077

Estação	Ponto visado	Nº Obs.	Distância Inclinada	Distância Horizontal
			m	m
LAASTRO	LAGO	1	580,480	578,825
		2	580,480	578,826
		3	580,480	578,825
		4	580,480	578,827
		5	580,479	578,824
		6	580,479	578,818
		7	580,481	578,826
		8	580,481	578,826
		9	580,481	578,827
		10	580,481	578,820
		Média	580,480	578,824

Estação	Ponto visado	Nº Obs.	Distância Inclinada	Distância Horizontal
			m	m
LAASTRO	CONCHA	1	227,477	223,131
		2	227,476	223,134
		3	227,477	223,131
		4	227,478	223,124
		5	227,477	223,132
		6	227,478	223,124
		7	227,477	223,132
		8	227,476	223,132
		9	227,478	223,133
		10	227,477	223,125
		Média	227,477	223,130

APÊNDICE II Observáveis do Nivelamento

Observações	Distâncias (km)	Desníveis (m)
RNB-NTI	0,187945	0,09379
NTI-M28	0,652915	1,15125
M28-M27	0,358990	0,26534
M27-M25	0,354735	0,21973
M24-M25	0,462455	1,46418
M24-M23	0,373935	0,01096
M22-CAV	0,250000	1,78968
LDN-CAV	0,146875	0,80698
ACT-LDN	0,128030	0,18848
ACT-RNB	0,354245	0,10813
ACT-RNB	0,354245	0,10788
ACT-M13	0,236860	0,37391
M13-M11	0,186495	0,00418
M11-M31	0,405785	0,55140
M09-M31	0,253790	0,31596
NTI-M09	0,126370	0,41078
RNB-NTI	0,177225	0,09488
RNB-NTI	0,187225	0,09379
NTI-M39	0,115140	0,13923
M39-M40	0,304130	0,24461
M40-M17	0,243695	0,47177
M42-M17	0,293995	1,44723
M42-ACT	0,421510	0,38795
RNB-NTI	0,187225	0,09379
NTI-M38	0,501685	0,55089
M37-M38	0,382040	0,55424
M37-M36	0,314105	0,01365
M35-M36	0,346700	0,85119
M34-M35	0,284455	0,71212
M34-M41	0,447470	1,11644
M41-CAV	0,302750	1,22947
LDN-CAV	0,146875	0,80698
ACT-LDN	0,128030	0,18848
ACT-RNB	0,354245	0,10877
M22-CAV	0,298145	1,78968
M22-M23	0,276090	1,18109
M23-ITE	0,222160	0,35277
EXE-M23	0,347535	0,51164
P36-EXE	0,985595	1,82680
P36-IGR	0,153555	0,59297
IGR-CAV	0,475475	2,35410
BRE-P36	0,624475	0,92330
ACT-CON	0,063490	0,00726
CEE-CON	0,276575	0,02222
LAG-ACT	0,457255	0,38143
BRE-P36	0,607620	0,92183

APÊNDICE III Relatório do método da combinação dos desníveis elipsoidais com ortométricos

Programa AstGeoTop - Módulo: Desvio da Vertical Versão 2012.08.18 Data:14/09/2012
Cálculo do Desvio da Vertical

RELATÓRIO

METODO QUE USA O GNNSS + NIVELAMENTO GEOMÉTRICO
Sistema Geodésico : SIRGAS2000
Semi-eixo maior Elipsoide =6378137
Achatamento = 1/298,257222101

AJUSTAMENTO PELO MÉTODO PARAMÉTRICO La=F(Xa) - Equação de observação: -dN/dS=Xi*cos(Az)+Eta*sen(Az)
Obs.: no método paramétrico os azimutes são considerados sem erros.

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
CEE	182,0587	-135,2425	-45,5800	226,795	126°36`24,71695"	
ITE	122,2776	-478,8820	-46,3643	494,247	165°40`34,22021"	
EXE	-303,7857	-504,3932	-45,4963	588,811	211°03`34,91570"	
BRE	-1056,5342	201,9436	-42,7717	1075,661	280°49`15,14506"	
IGR	-428,4031	190,8454	-44,2343	468,990	294°00`43,42468"	
CAV	-69,1495	45,6804	-46,5675	82,876	303°26`56,09061"	
LDN	70,2344	82,3252	-45,7810	108,214	40°28`06,95315"	
ACT	179,6295	131,7746	-45,5909	222,781	53°44`11,59083"	
REC	351,9739	228,1781	-29,0279	419,465	57°02`43,48477"	
RNB	504,2566	112,1853	-45,7299	516,585	77°27`26,30208"	
NTI	686,9530	82,8574	-45,8465	691,932	83°07`20,81204"	
RNC	1019,8190	92,7620	-45,4800	1024,029	84°48`09,78229"	

LAA Xi = -5,7924" Eta = 6,2643"
vtpv = 9,013 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 29,710" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	-182,0605	135,2428	45,5720	226,796	306°36`23,88859"	
CEE	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
ITE	-59,7796	-343,6397	-0,7786	348,801	189°52`06,34501"	
EXE	-485,8429	-369,1526	0,0777	610,178	232°46`18,28470"	
BRE	-1238,5943	337,1812	2,7658	1283,669	285°13`42,74497"	
IGR	-610,4632	326,0856	1,3214	692,096	298°06`33,80523"	
CAV	-251,2089	180,9220	-0,9985	309,578	305°45`41,87899"	
LDN	-111,8251	217,5673	-0,2088	244,623	332°47`51,97134"	
ACT	-2,4303	267,0172	-0,0166	267,028	359°28`42,73664"	
REC	169,9133	363,4217	16,5492	401,181	25°03`28,27137"	
RNB	322,1970	247,4291	-0,1460	406,241	52°28`39,95926"	
NTI	504,8935	218,1020	-0,2567	549,987	66°38`12,49731"	
RNC	837,7594	228,0080	0,1191	868,233	74°46`29,72497"	

CEE Xi = -2,8264" Eta = 3,9703"
vtpv = 18,911 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 8,052" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	-122,2798	478,8852	46,3257	494,250	345°40`33,66298"	
CEE	59,7801	343,6397	0,7594	348,801	9°52`06,61859"	
ITE	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
EXE	-426,0633	-25,5122	0,8617	426,826	266°34`23,79796"	
BRE	-1178,8137	680,8227	3,5185	1361,294	300°00`30,74638"	
IGR	-550,6826	669,7261	2,0688	867,055	320°34`16,43901"	
CAV	-191,4285	524,5619	-0,2466	558,400	339°57`05,19457"	
LDN	-52,0447	561,2072	0,5398	563,615	354°42`06,14884"	
ACT	57,3502	610,6569	0,7283	613,344	5°21`54,82808"	
REC	229,6940	707,0620	17,2873	743,435	17°59`48,28913"	
RNB	381,9774	591,0684	0,5970	703,753	32°52`21,09587"	
NTI	564,6738	561,7410	0,4861	796,498	45°08`57,05486"	
RNC	897,5398	571,6466	0,8583	1064,123	57°30`24,41686"	

ITE Xi = -6,4693" Eta = 6,3756"
vtpv = 5,219 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 4,510" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	303,7913	504,3948	45,4417	588,815	31°03`36,30170"	
CEE	485,8469	369,1474	-0,1363	610,178	52°46`20,50836"	
ITE	426,0635	25,5082	-0,8903	426,826	86°34`25,74839"	
EXE	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
BRE	-752,7435	706,3421	2,7042	1032,251	313°10`42,63220"	
IGR	-124,6127	695,2396	1,2126	706,319	349°50`18,15341"	
CAV	234,6399	550,0720	-1,1262	598,026	23°06`04,54255"	
LDN	374,0241	586,7159	-0,3492	695,794	32°31`01,21525"	
ACT	483,4195	636,1645	-0,1683	798,999	37°13`51,93098"	
REC	655,7653	732,5682	16,3788	983,201	41°50`01,01681"	
RNB	808,0465	616,5730	-0,3212	1016,416	52°39`17,51817"	
NTI	990,7427	587,2439	-0,4442	1151,706	59°20`36,47407"	
RNC	1323,6087	597,1463	-0,0943	1452,076	65°43`02,91572"	

EXE Xi = -6,1827" Eta = 5,7764"
vtpv = 8,744 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 4,468" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az
LAA	1056,5365	-201,9697	42,5903	1075,668	100°49`19,98005"
CEE	1238,5844	-337,2151	-3,0242	1283,669	105°13`48,41142"
ITE	1178,7952	-680,8531	-3,8095	1361,293	120°00`36,14018"

EXE	752,7314	-706,3543	-2,8718	1032,250	133°10`46,07644"	
BRE	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
IGR	628,1305	-11,1128	-1,5669	628,229	91°00`48,84025"	
CAV	987,3804	-156,2862	-3,9643	999,673	98°59`39,72258"	
LDN	1126,7653	-119,6447	-3,1998	1133,100	96°03`40,30132"	
ACT	1236,1615	-70,1979	-3,0262	1238,153	93°15`00,58659"	
REC	1408,5109	26,2010	13,5113	1408,755	88°56`03,51829"	
RNB	1560,7882	-89,7948	-3,2196	1563,369	93°17`33,70042"	
NTI	1743,4838	-119,1270	-3,3674	1747,549	93°54`31,58080"	
RNC	2076,3501	-109,2301	-3,0557	2079,221	93°00`40,93908"	

BRE Xi = -4,9687" Eta = 5,6177"

vtpv = 0,197 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 2,882" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	428,4043	-190,8509	44,1997	468,993	114°00`45,38801"	
CEE	610,4586	-326,0938	-1,3966	692,096	118°06`36,59801"	
ITE	550,6743	-669,7326	-2,1872	867,055	140°34`18,95868"	
EXE	124,6107	-695,2398	-1,2914	706,319	169°50`18,72359"	
BRE	-628,1308	11,1041	1,5051	628,229	271°00`45,96707"	
IGR	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
CAV	359,2521	-145,1683	-2,3618	387,474	112°00`10,40226"	
LDN	498,6364	-108,5249	-1,5835	510,310	102°16`42,82307"	
ACT	608,0320	-59,0766	-1,3993	610,895	95°32`58,04028"	
REC	780,3784	37,3248	15,1551	781,270	87°15`42,06219"	
RNB	932,6589	-78,6690	-1,5607	935,971	94°49`17,17504"	
NTI	1115,3550	-107,9986	-1,6904	1120,571	95°31`50,32762"	
RNC	1448,2211	-98,0971	-1,3460	1451,540	93°52`30,30499"	

IGR Xi = -4,3112" Eta = 4,5844"

vtpv = 2,830 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 8,149" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	69,1499	-45,6809	46,5665	82,876	123°26`56,41155"	
CEE	251,2079	-180,9234	0,9835	309,578	125°45`43,02849"	
ITE	191,4263	-524,5628	0,1974	558,400	159°57`06,07063"	
EXE	-234,6371	-550,0733	1,0698	598,026	203°06`03,46866"	
BRE	-987,3844	156,2647	3,8077	999,673	278°59`35,20585"	
IGR	-359,2534	145,1655	2,3382	387,474	292°00`08,75900"	
CAV	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
LDN	139,3840	36,6446	0,7853	144,120	75°16`12,18438"	
ACT	248,7791	86,0938	0,9746	263,255	70°54`39,76335"	
REC	421,1238	182,4969	17,5364	458,967	66°34`12,63645"	
RNB	573,4062	66,5039	0,8319	577,250	83°23`03,70930"	

NTI	756,1026	37,1758	0,7131	757,016	87°11`06,60894"
RNC	1088,9686	47,0799	1,0761	1089,986	87°31`28,00255"

CAV Xi = -9,8136" Eta = 10,7755"

vtpv = 17,707 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 23,729" em LAA

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	-70,2348	-82,3259	45,7792	108,215	220°28`06,62700"	
CEE	111,8246	-217,5676	0,1994	244,623	152°47`52,48300"	
ITE	52,0441	-561,2072	-0,5900	563,615	174°42`06,38700"	
EXE	-374,0192	-586,7190	0,2730	695,794	212°30`59,50358"	
BRE	-1126,7688	119,6166	2,9984	1133,100	276°03`35,14701"	
IGR	-498,6377	108,5194	1,5427	510,310	282°16`40,54212"	
CAV	-139,3838	-36,6450	-0,7885	144,120	255°16`11,54675"	
LDN	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
ACT	109,3950	49,4495	0,1920	120,052	65°40`32,60821"	
REC	281,7390	145,8531	16,7581	317,254	62°37`47,70617"	
RNB	434,0222	29,8607	0,0563	435,048	86°03`51,31637"	
NTI	616,7186	0,5331	-0,0587	616,719	89°57`01,70359"	
RNC	949,5846	10,4383	0,3116	949,642	89°22`12,73534"	

LDN Xi = -2,8857" Eta = 3,9242"

vtpv = 13,400 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 28,454" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az	
LAA	-179,6302	-131,7763	45,5831	222,782	233°44`10,76441"	
CEE	2,4302	-267,0172	0,0054	267,028	179°28`42,74776"	
ITE	-57,3494	-610,6569	-0,7877	613,344	185°21`54,56566"	
EXE	-483,4127	-636,1697	0,0677	798,999	217°13`49,71876"	
BRE	-1236,1640	70,1640	2,7858	1238,154	273°14`54,93198"	
IGR	-608,0329	59,0684	1,3407	610,895	275°32`55,25893"	
CAV	-248,7786	-86,0952	-0,9854	263,255	250°54`38,62531"	
LDN	-109,3949	-49,4498	-0,1942	120,052	245°40`32,10778"	
ACT	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000"	<--Referência
REC	172,3435	96,4038	16,5698	197,474	60°46`43,17636"	
RNB	324,6272	-19,5880	-0,1303	325,218	93°27`10,97416"	
NTI	507,3237	-48,9152	-0,2424	509,676	95°30`26,38626"	
RNC	840,1897	-39,0092	0,1337	841,095	92°39`29,81604"	

ACT Xi = -6,7291" Eta = 7,0129"

vtpv = 15,510 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 14,924" em LDN

PONTO	x	y	z	dist	Az
LAA	-351,9737	-228,1819	29,0003	419,467	237°02`41,87179"

CEE	-169,9115	-363,4214	-16,5746	401,179	205°03`27,49538"
ITE	-229,6898	-707,0613	-17,3745	743,433	197°59`47,23918"
EXE	-655,7530	-732,5758	-16,5310	983,198	221°49`58,01785"
BRE	-1408,5071	-26,2450	-13,8225	1408,752	268°55`57,07569"
IGR	-780,3759	-37,3382	-15,2507	781,269	267°15`38,49280"
CAV	-421,1210	-182,5003	-17,5694	458,965	246°34`10,71140"
LDN	-281,7374	-145,8544	-16,7739	317,253	242°37`46,41885"
ACT	-172,3427	-96,4042	-16,5760	197,473	240°46`42,38952"
REC	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000" <--Referência
RNB	152,2846	-115,9910	-16,6978	191,428	127°17`43,93536"
NTI	334,9812	-145,3175	-16,8054	365,143	113°27`05,68869"
RNC	667,8471	-135,4102	-16,4201	681,436	101°27`42,13875"

REC Xi = -5,1216" Eta = 6,6120"

vtpv = 15,496 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 5,731" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az
LAA	-504,2590	-112,1917	45,6881	516,589	257°27`23,99308"
CEE	-322,1952	-247,4314	0,1200	406,241	232°28`38,48510"
ITE	-381,9723	-591,0716	-0,6750	703,753	212°52`19,34794"
EXE	-808,0355	-616,5875	0,1588	1016,416	232°39`13,82035"
BRE	-1560,7920	89,7408	2,8364	1563,370	273°17`26,56078"
IGR	-932,6608	78,6497	1,4233	935,971	274°49`12,90868"
CAV	-573,4053	-66,5112	-0,8841	577,250	263°23`01,08609"
LDN	-434,0219	-29,8649	-0,0859	435,048	266°03`49,33085"
ACT	-324,6274	19,5857	0,1137	325,218	273°27`09,48913"
REC	-152,2854	115,9908	16,6920	191,428	307°17`43,24048"
RNB	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000" <--Referência
NTI	182,6967	-29,3259	-0,1027	185,035	99°07`08,88260"
RNC	515,5626	-19,4175	0,2903	515,928	92°09`24,82166"

RNB Xi = -5,9020" Eta = 6,6603"

vtpv = 8,191 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 4,326" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az
LAA	-686,9567	-82,8684	45,7715	691,937	263°07`17,66806"
CEE	-504,8910	-218,1076	0,2093	549,987	246°38`10,18723"
ITE	-564,6668	-561,7480	-0,5859	796,498	225°08`54,47084"
EXE	-990,7298	-587,2657	0,2358	1151,706	239°20`31,94011"
BRE	-1743,4893	119,0596	2,8886	1747,550	273°54`23,60530"
IGR	-1115,3580	107,9711	1,4936	1120,572	275°31`45,22545"
CAV	-756,1018	-37,1884	-0,8029	757,016	267°11`03,14987"
LDN	-616,7186	-0,5415	-0,0009	616,719	269°56`58,88223"
ACT	-507,3243	48,9095	0,2016	509,676	275°30`24,06543"

REC	-334,9832	145,3154	16,7844	365,144	293°27`04,15765"
RNB	-182,6968	29,3251	0,0973	185,035	279°07`08,04682"
NTI	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000" <--Referência
RNC	332,8658	9,9097	0,4025	333,013	88°17`41,12042"

NTI Xi = -5,6165" Eta = 6,2701"

vtpv = 1,529 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 3,449" em CAV

PONTO	x	y	z	dist	Az
LAA	-1019,8241	-92,7858	45,3156	1024,036	264°48`05,11577"
CEE	-837,7551	-228,0235	-0,2373	868,233	254°46`25,89197"
ITE	-897,5283	-571,6643	-1,0361	1064,123	237°30`20,30963"
EXE	-1323,5912	-597,1852	-0,2367	1452,076	245°42`56,85855"
BRE	-2076,3560	109,1346	2,3779	2079,222	273°00`31,44093"
IGR	-1448,2245	98,0506	1,0156	1451,540	273°52`23,68014"
CAV	-1088,9672	-47,1062	-1,2623	1089,986	267°31`23,02068"
LDN	-949,5843	-10,4583	-0,4530	949,642	269°22`08,39121"
ACT	-840,1904	38,9936	-0,2447	841,095	272°39`25,97247"
REC	-667,8508	135,4007	16,3473	681,438	281°27`39,08444"
RNB	-515,5628	19,4116	-0,3321	515,928	272°09`22,46312"
NTI	-332,8657	-9,9122	-0,4199	333,013	268°17`39,59765"
RNC	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0°00`00,00000" <--Referência

RNC Xi = -5,4911" Eta = 7,0861"

vtpv = 0,616 gl = 10 limite superior qui-quadrado = 20,48 Resíduo máximo = 2,415" em CAV

R E S U M O

Ponto	COMPONENTES DO DESVIO DA VERTICAL (Xi)	sXi	(Eta)	sEta	T. Hipótese alfa=5%
LAA	-5,7924"	1,1720"	6,2643"	0,9693"	Aceito
CEE	-2,8264"	1,5184"	3,9703"	1,6678"	Aceito
ITE	-6,4693"	0,5758"	6,3756"	1,0934"	Aceito
EXE	-6,1827"	1,1529"	5,7764"	1,2342"	Aceito
BRE	-4,9687"	1,3240"	5,6177"	0,3294"	Rejeitado
IGR	-4,3112"	1,1905"	4,5844"	0,6190"	Rejeitado
CAV	-9,8136"	2,5967"	10,7755"	1,9307"	Aceito
LDN	-2,8857"	1,7794"	3,9242"	1,7332"	Aceito
ACT	-6,7291"	1,2661"	7,0129"	1,3810"	Aceito
REC	-5,1216"	1,3549"	6,6120"	1,4103"	Aceito
RNB	-5,9020"	1,2635"	6,6603"	0,7852"	Aceito
NTI	-5,6165"	1,4005"	6,2701"	0,5692"	Rejeitado
RNC	-5,4911"	1,5419"	7,0861"	0,4131"	Rejeitado
MÉDIA	-5,5470"	0,4055"	6,2254"	0,3324"	

APÊNDICE IV Relatório do método do modelo relativo do Geoide local

Programa AstGeoTop - Módulo: Desvio da Vertical Versão 2012.08.18
Data:14/09/2012
Cálculo do Desvio da Vertical

RELATÓRIO
Sistema Geodésico : SIRGAS2000
Semi-eixo maior Elipsoide =6378137
Achatamento = 1/298,257222101

Modelo relativo do Geoide Local ao ponto médio: dN=A(dlong)+B(dlat)+C
Ponto médio da avaliação
Latitude = -8°03`10,77175"
Longitude = -34°57`13,79047"
Altitude elipsoidal = 8,567
Altitude ortométrica = 13,994

****

AJUSTAMENTO PELO MÉTODO COMBINADO F(La,Xa)=0
Critério de parada ||dx||<1e-12
Numero de Iterações = 0
Vetor Estimado dos Parâmetros
A = -3,48562220528135
B = 2,99504591153368
C = 0,0009016787347636

Valor estimado da quadrática
VtPV = 15,9166040902899
Graus de liberdade = 10
Variância da unidade peso a priori (sig2pri) = 1
Variância da unidade peso a posteriori (sig2pos) = 1,59166040902899

TESTE DE HIPÓTESE
H0: si2pri=sig2pos
H1: si2pri<>sig2pos
Nível de significância (alfa)= 5%
Estatística do teste (v`Pv/sig2_pri) = 15,9166040902899
Valor crítico inferior (Chi2_inf) =3,25
Valor crítico superior (Chi2_sup) = 20,48

Conclusão:
Hipótese nula (H0) não foi rejeitada ao nível de significância alfa=5%.
As observações estão de acordo com o esperado.

Componentes do Desvio da Vertical para todos os pontos do modelo
Meridiana   (Xi) = -5,5858"   +/- 1,3429"
Primeiro vertical (Eta) = 6,5224"   +/- 1,3768"

****

AJUSTAMENTO PELO MÉTODO PARAMÉTRICO La=F(Xa)
Obs.: no método paramétrico as diferenças de latitude e de longitude são consideradas sem erros.

Vetor Estimado dos Parâmetros
A = -3,48562220528135
B = 2,99504591153368
C = 0,0009016787347636

Vetor Estimado dos Resíduos
V1 =-0,000144011987923551
V2 =-0,00548350411205012
V3 =0,00228076376997896
V4 =0,00335288897997704
V5 =0,00672430751056498
V6 =0,00754105894430624

V7 =-0,0120403236025379
V8 =0,0065645113502586
V9 =-0,00213558336733445
V10 =0,00130538200647222
V11 =0,000348770193884163
V12 =-0,000312548571853754
V13 =0,00372011243844002

VtPV = 15,9166040902899
Graus de liberdade = 10
Variância da unidade peso a priori (sig2pri) = 1
Variância da unidade peso a posteriori (sig2pos) = 1,59166040902899

TESTE DE HIPÓTESE
H0: si2pri=sig2pos
H1: si2pri<>sig2pos
Nível de significância (alfa)= 5%
Estatística do teste (v`Pv/sig2_pri) = 15,9166040902899
Valor critico inferior (Chi2_inf) =3,25
Valor critico superior (Chi2_sup) = 20,48

Conclusão:
Hipótese nula (H0) não foi rejeitada ao nível de significância alfa=5%.
As observações estão de acordo com o esperado.

Componentes do Desvio da Vertical para todos os pontos do modelo
Meridiana (Xi) = -5,5858" +/- 1,3429"
Primeiro vertical (Eta) = 6,5224" +/- 1,3768"

APÊNDICE V Relatório do método de Procrustes Parcial

Dados de entrada

Coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas (X,Y,Z):

LAA $E_K := (5176384.355 \; -3618448.796 \; -887593.914)m$

ITE $P_2 := (5176361.802 \; -3618283.839 \; -888061.579)m$

EXE $P_3 := (5176115.473 \; -3618631.488 \; -888086.960)m$

BRE $P_4 := (5175767.513 \; -3619306.681 \; -887387.970)m$

IGR $P_5 := (5176124.926 \; -3618790.141 \; -887398.754)m$

Coordenadas Geodésicas Elipsoidais:

LAASTRO

$$\phi_{LA} := -\begin{pmatrix} 08 \\ 03 \\ 10.89712 \end{pmatrix} DMS = -0.1405518355 \quad \text{radianos}$$

$$\lambda_{LA} := -\begin{pmatrix} 34 \\ 57 \\ 16.95422 \end{pmatrix} DMS = -0.61007477 \quad \text{radianos}$$

Cálculos

Sistema Topográfico Local da situação i)

$$A := \begin{pmatrix} 465.5405 & 166.3883 & -44.9311 \\ 530.5814 & -255.5395 & -44.0505 \\ -102.7233 & -1070.7891 & -41.3113 \\ -150.1745 & -444.4340 & -42.8130 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} P2_{1,1} - EK_{1,1} & P2_{1,2} - EK_{1,2} & P2_{1,3} - EK_{1,3} \\ P3_{1,1} - EK_{1,1} & P3_{1,2} - EK_{1,2} & P3_{1,3} - EK_{1,3} \\ P4_{1,1} - EK_{1,1} & P4_{1,2} - EK_{1,2} & P4_{1,3} - EK_{1,3} \\ P5_{1,1} - EK_{1,1} & P5_{1,2} - EK_{1,2} & P5_{1,3} - EK_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22.553 & 164.957 & -467.665 \\ -268.882 & -182.692 & -493.046 \\ -616.842 & -857.885 & 205.944 \\ -259.429 & -341.345 & 195.16 \end{pmatrix} m$$

$$C := A^T \cdot B = \begin{pmatrix} -50839.45671 & 119247.28005 & -529781.33759 \\ 840764.17472 & 1144451.16792 & -259079.58585 \\ 49447.19633 & 50690.32257 & 25868.42626 \end{pmatrix} m$$

$M := svd2(C)$ $\quad M = \begin{pmatrix} \{3,1\} \\ \{3,3\} \\ \{3,3\} \end{pmatrix} m$ Decomposição em Valor Singular

$\Sigma := M_1$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1455015.54513714 \\ 519479.7973204 \\ 1465.59114483 \end{pmatrix} m$ Matriz Diagonal

$U := M_2$ $\quad U = \begin{pmatrix} 0.12557882 & -0.98924637 & 0.07497715 \\ 0.99115143 & 0.12182652 & -0.0526985 \\ 0.0429976 & 0.08093153 & 0.99579179 \end{pmatrix} m$ Matriz U ortogonal

$V := M_3^T$ $\quad V = \begin{pmatrix} 0.56979898 & 0.30169019 & 0.76440313 \\ 0.79138599 & 0.04920694 & -0.60933316 \\ -0.22144378 & 0.95213534 & -0.21071533 \end{pmatrix} m$ Matriz V é a Transposta de M_3

$$T := V \cdot U^T = \begin{pmatrix} -0.16957848 & 0.56122804 & 0.8101026 \\ 0.00501747 & 0.82248901 & -0.56875887 \\ -0.98550391 & -0.0923846 & -0.14229238 \end{pmatrix} m^2$$ Solução de Procrustes

$$R := T^T = \begin{pmatrix} -0.16957848 & 0.00501747 & -0.98550391 \\ 0.56122804 & 0.82248901 & -0.0923846 \\ 0.8101026 & -0.56875887 & -0.14229238 \end{pmatrix} m^2$$ Matriz de Rotação

Coordenadas Astronômicas da Estação LAASTRO

$$\Lambda_\Gamma := \operatorname{atan}\left(\frac{R_{3,2}}{R_{3,1}}\right) = -0.6121222571 \qquad \Lambda_\Gamma = \begin{pmatrix} -35 \\ -4 \\ -19.279 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Longitude astronômica

$$\Phi_\Gamma := \operatorname{atan}\left[\frac{R_{3,3}}{\sqrt{\left(R_{3,1}\right)^2 + \left(R_{3,2}\right)^2}}\right] = -0.1427769743 \qquad \Phi_\Gamma = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -49.865 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Latitude astronômica

Componente Meridiana

$$\xi := \Phi_\Gamma - \phi_{LA} = -0.0022251 \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ -38.96781 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Minutos

Componente Primeiro-Vertical:

$$\eta := \left(\Lambda_\Gamma - \lambda_{LA}\right) \cdot \cos\left(\phi_{LA}\right) = -0.0020273 \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -58.15993 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Minutos

Desvio da Vertical na Estação LAASTRO

$$\theta := \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 0.0030102$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20.894 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Minutos

Dados de entrada

Coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas (X,Y,Z):

LAA $E_K := (5176384.355 \; -3618448.796 \; -887593.914)m$

CEE $P_1 := (5176436.144 \; -3618262.868 \; -887721.438)m$

ITE $P_2 := (5176361.802 \; -3618283.839 \; -888061.579)m$

EXE $P_3 := (5176115.473 \; -3618631.488 \; -888086.960)m$

BRE $P_4 := (5175767.513 \; -3619306.681 \; -887387.970)m$

IGR $P_5 := (5176124.926 \; -3618790.141 \; -887398.754)m$

CAV $P_6 := (5176312.192 \; -3618482.721 \; -887542.160)m$

LDN $P_7 := (5176396.895 \; -3618371.868 \; -887505.987)m$

ACT $P_8 := (5176465.402 \; -3618286.284 \; -887457.052)m$

REC $P_9 := (5176588.653 \; -3618162.163 \; -887363.920)m$

RNB $P_{10} := (5176649.028 \; -3618018.567 \; -887476.429)m$

NTI $P_{11} := (5176750.238 \; -3617866.408 \; -887505.451)m$

RNC $P_{12} := (5176942.382 \; -3617594.592 \; -887495.695)m$

Coordenadas Geodésicas Elipsoidais:

LAASTRO

$$\phi_{LA} := -\begin{pmatrix} 08 \\ 03 \\ 10.89712 \end{pmatrix} DMS = -0.1405518355 \quad \text{radianos}$$

$$\lambda_{LA} := -\begin{pmatrix} 34 \\ 57 \\ 16.95422 \end{pmatrix} DMS = -0.61007477 \quad \text{radianos}$$

Cálculos

Sistema Topográfico Local da situação ii)

$$A := \begin{pmatrix} 182.0606 & -135.243 & -45.5707 \\ 122.2811 & -478.8828 & -46.3471 \\ -303.7822 & -504.3958 & -45.4914 \\ -1056.5337 & 201.9379 & -42.8095 \\ -428.4026 & 190.8424 & -44.2526 \\ -69.1483 & 45.6788 & -46.5709 \\ 70.2354 & 82.3243 & -45.7812 \\ 179.6303 & 131.7741 & -45.5891 \\ 351.9738 & 228.1788 & -29.0236 \\ 504.2575 & 112.1862 & -45.7178 \\ 686.954 & 82.859 & -45.828 \\ 1019.82 & 92.7651 & -45.4516 \end{pmatrix} m$$

$$B := \begin{pmatrix} P1_{1,1} - EK_{1,1} & P1_{1,2} - EK_{1,2} & P1_{1,3} - EK_{1,3} \\ P2_{1,1} - EK_{1,1} & P2_{1,2} - EK_{1,2} & P2_{1,3} - EK_{1,3} \\ P3_{1,1} - EK_{1,1} & P3_{1,2} - EK_{1,2} & P3_{1,3} - EK_{1,3} \\ P4_{1,1} - EK_{1,1} & P4_{1,2} - EK_{1,2} & P4_{1,3} - EK_{1,3} \\ P5_{1,1} - EK_{1,1} & P5_{1,2} - EK_{1,2} & P5_{1,3} - EK_{1,3} \\ P6_{1,1} - EK_{1,1} & P6_{1,2} - EK_{1,2} & P6_{1,3} - EK_{1,3} \\ P7_{1,1} - EK_{1,1} & P7_{1,2} - EK_{1,2} & P7_{1,3} - EK_{1,3} \\ P8_{1,1} - EK_{1,1} & P8_{1,2} - EK_{1,2} & P8_{1,3} - EK_{1,3} \\ P9_{1,1} - EK_{1,1} & P9_{1,2} - EK_{1,2} & P9_{1,3} - EK_{1,3} \\ P10_{1,1} - EK_{1,1} & P10_{1,2} - EK_{1,2} & P10_{1,3} - EK_{1,3} \\ P11_{1,1} - EK_{1,1} & P11_{1,2} - EK_{1,2} & P11_{1,3} - EK_{1,3} \\ P12_{1,1} - EK_{1,1} & P12_{1,2} - EK_{1,2} & P12_{1,3} - EK_{1,3} \end{pmatrix}$$

$$C := A^{T} \cdot B = \begin{pmatrix} 1897438.88678 & 2788119.96291 & 96492.80011 \\ 132152.44797 & 16989.95297 & 678465.14419 \\ -12264.76786 & -58829.77608 & -776.8218 \end{pmatrix} m^2$$

$M := svd2(C)$ $\quad M = \begin{pmatrix} \{3,1\} \\ \{3,3\} \\ \{3,3\} \end{pmatrix} m^2$ Decomposição em Valor Singular

$\Sigma := M_1$ $\quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3376149.90197294 \\ 682626.87049108 \\ 22591.20686638 \end{pmatrix} m^2$ Matriz Diagonal

$U := M_2$ $\quad U = \begin{pmatrix} -0.99931094 & 0.0331711 & 0.01665297 \\ -0.03327644 & -0.99942764 & -0.00608919 \\ 0.01644146 & -0.00663915 & 0.99984279 \end{pmatrix} m^2$ Matriz U ortogonal

$$V := M_3^{T} \qquad V = \begin{pmatrix} -0.56298764 & -0.10116105 & 0.82025079 \\ -0.82571316 & 0.11118131 & -0.55302486 \\ -0.03525199 & -0.98863803 & -0.14612371 \end{pmatrix} m^2$$

Matriz V é a Transposta de M_3

$$T := V \cdot U^{T} = \begin{pmatrix} 0.5729037 & 0.11484271 & 0.81153713 \\ 0.81962269 & -0.08027341 & -0.56725199 \\ 0.00000009 & 0.99013501 & -0.14011662 \end{pmatrix} m^4$$

Solução de Procrustes

$$R := T^{T} = \begin{pmatrix} 0.5729037 & 0.81962269 & 0.00000009 \\ 0.11484271 & -0.08027341 & 0.99013501 \\ 0.81153713 & -0.56725199 & -0.14011662 \end{pmatrix} m^4$$

Matriz de Rotação

Coordenadas Astronômicas da Estação LAASTRO

$$\Lambda_\Gamma := \operatorname{atan}\left(\frac{R_{3,2}}{R_{3,1}}\right) = -0.6100441956 \qquad \Lambda_\Gamma = \begin{pmatrix} -34 \\ -57 \\ -10.648 \end{pmatrix} \cdot DMS$$

Longitude astronômica

$$\Phi_\Gamma := \operatorname{atan}\left[\frac{R_{3,3}}{\sqrt{\left(R_{3,1}\right)^2 + \left(R_{3,2}\right)^2}}\right] = -0.140579198 \qquad \Phi_\Gamma = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -16.541 \end{pmatrix} \cdot DMS$$

Latitude astronômica

Componente Meridiana

$$\xi := \Phi_\Gamma - \phi_{LA} = -0.0000274 \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.64392 \end{pmatrix} \cdot DMS$$

Segundos

Componente Primeiro-Vertical:

$$\eta := \left(\Lambda_\Gamma - \lambda_{LA}\right) \cdot \cos\left(\phi_{LA}\right) = 0.0000303 \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6.24422 \end{pmatrix} \cdot DMS$$

Segundos

Desvio da Vertical na Estação LAASTRO

$$\theta := \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 0.0000408$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8.417 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS} \qquad \text{Segundos}$$

Dados de entrada

Coordenadas geodésicas cartesianas geocêntricas (X,Y,Z):

LAA $E_K := (5176384.355 \; -3618448.796 \; -887593.914)\,m$

ITE $P_2 := (5176361.802 \; -3618283.839 \; -888061.579)\,m$

EXE $P_3 := (5176115.473 \; -3618631.488 \; -888086.960)\,m$

BRE $P_4 := (5175767.513 \; -3619306.681 \; -887387.970)\,m$

IGR $P_5 := (5176124.926 \; -3618790.141 \; -887398.754)\,m$

Coordenadas Geodésicas Elipsoidais:

LAASTRO

$$\phi_{LA} := -\begin{pmatrix} 08 \\ 03 \\ 10.89712 \end{pmatrix} DMS = -0.1405518355 \quad \text{radianos}$$

$$\lambda_{LA} := -\begin{pmatrix} 34 \\ 57 \\ 16.95422 \end{pmatrix} DMS = -0.61007477 \quad \text{radianos}$$

Cálculos

Sistema Topográfico Local da situação iii)

$$A := \begin{pmatrix} 465.4123 & 166.3424 & -46.3458 \\ 530.4901 & -255.4955 & -45.4894 \\ -102.7190 & -1070.7450 & -42.8043 \\ -150.1318 & -444.3077 & -44.2457 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} P2_{1,1} - EK_{1,1} & P2_{1,2} - EK_{1,2} & P2_{1,3} - EK_{1,3} \\ P3_{1,1} - EK_{1,1} & P3_{1,2} - EK_{1,2} & P3_{1,3} - EK_{1,3} \\ P4_{1,1} - EK_{1,1} & P4_{1,2} - EK_{1,2} & P4_{1,3} - EK_{1,3} \\ P5_{1,1} - EK_{1,1} & P5_{1,2} - EK_{1,2} & P5_{1,3} - EK_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22.553 & 164.957 & -467.665 \\ -268.882 & -182.692 & -493.046 \\ -616.842 & -857.885 & 205.944 \\ -259.429 & -341.345 & 195.16 \end{pmatrix} m$$

$$C := A^T \cdot B = \begin{pmatrix} -50825.74653 & 119224.54801 & -529667.14895 \\ 840693.41048 & 1144354.61334 & -259046.08322 \\ 51158.6254 & 52489.70071 & 26652.3957 \end{pmatrix} m$$

$$M := svd2(C) \qquad M = \begin{pmatrix} \{3,1\} \\ \{3,3\} \\ \{3,3\} \end{pmatrix} m$$

Decomposição em Valor Singular

$$\Sigma := M_1 \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1454985.44849703 \\ 519481.07253384 \\ 1512.12914451 \end{pmatrix} m$$

Matriz Diagonal

$$U := M_2 \qquad U = \begin{pmatrix} 0.12551494 & -0.98907077 & 0.07736289 \\ 0.99109179 & 0.12150637 & -0.05452769 \\ 0.04453166 & 0.08351776 & 0.99551078 \end{pmatrix} m$$

Matriz U ortogonal

$$V := M_3^T \qquad V = \begin{pmatrix} 0.56983602 & 0.30163278 & 0.76439817 \\ 0.79139099 & 0.04910417 & -0.60933495 \\ -0.22133054 & 0.95215883 & -0.21072814 \end{pmatrix} m$$

Matriz V é a Transposta de M_3

$$T := V \cdot U^T = \begin{pmatrix} -0.16767719 & 0.55972925 & 0.81153406 \\ 0.00362398 & 0.82353321 & -0.56725649 \\ -0.98583529 & -0.09217499 & -0.14011618 \end{pmatrix} m^2$$

Solução de Procrustes

$$R := T^T = \begin{pmatrix} -0.16767719 & 0.00362398 & -0.98583529 \\ 0.55972925 & 0.82353321 & -0.09217499 \\ 0.81153406 & -0.56725649 & -0.14011618 \end{pmatrix} m^2$$

Matriz de Rotação

Coordenadas Astronômicas da Estação LAASTRO

$$\Lambda_\Gamma := \operatorname{atan}\left(\frac{R_{3,2}}{R_{3,1}}\right) = -0.61004969 \qquad \Lambda_\Gamma = \begin{pmatrix} -34 \\ -57 \\ -11.781 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Longitude astronômica

$$\Phi_\Gamma := \operatorname{atan}\left[\frac{R_{3,3}}{\sqrt{\left(R_{3,1}\right)^2 + \left(R_{3,2}\right)^2}}\right] = -0.1405787515 \qquad \Phi_\Gamma = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -16.449 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Latitude astronômica

Componente Meridiana

$$\xi := \Phi_\Gamma - \phi_{LA} = -0.0000269 \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5.55181 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Segundos

Componente Primeiro-Vertical:

$$\eta := \left(\Lambda_\Gamma - \lambda_{LA}\right) \cdot \cos\left(\phi_{LA}\right) = 0.0000248 \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.12211 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Segundos

Desvio da Vertical na Estação LAASTRO

$$\theta := \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = 0.0000366$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.554 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{DMS}$$

Segundos

APÊNDICE VI Relatório do método do relacionamento de coordenadas topocêntricas

Programa AstGeoTop - Módulo: Desvio da Vertical Versão 2012.08.18 Data:09/10/2012
Cálculo do Desvio da Vertical

RELATÓRIO
-- M É T O D O --
DETERMINA AS ORIENTAÇÕES ENTRE UM SISTEMA GEODÉSICO LOCAL E UM SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL DA SITUAÇÃO i)
Sistema Geodésico : SIRGAS2000
Semi-eixo maior Elipsoide =6378137
Achatamento = 1/298,257222101

ORIGEM GEODÉSICA DO SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL
Coordenadas Geodésicas
Latitude = -8°03`10,89712"
Longitude = -34°57`16,95422"
Altitude Elipsoidal = 49,194m

Coordenadas Topográficas
x = 0,000 m
y = 0,000 m
z = 0,000 m

COORDENADAS CARTESIANAS NO SISTEMA GEODÉSICO LOCAL(SGL)

PONTO	e(m)	n(m)	u(m)	se(m)	sn(m)	su(m)	corr_en	corr_eu	corr_nu
LAA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0002	0,0013	-3,002E-02	-3,294E-02	8,405E-02
ITE	122,2776	-478,8820	-46,3643	0,0014	0,0017	0,0049	-2,318E-01	-6,714E-03	-2,919E-01
EXE	-303,7857	-504,3932	-45,4963	0,0012	0,0009	0,0026	-1,631E-03	-3,071E-01	-9,770E-02
BRE	-1056,5342	201,9436	-42,7717	0,0110	0,0102	0,0402	-2,439E-01	4,913E-01	-8,779E-02
IGR	-428,4031	190,8454	-44,2343	0,0042	0,0048	0,0095	-6,141E-01	4,724E-01	-2,173E-02

COORDENADAS CARTESIANAS NO SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL(STL) DA SITUAÇÃO i)

PONTO	x(m)	y(m)	z(m)
LAA	0,0000	0,0000	0,0000
ITE	465,5405	166,3883	-44,9311
EXE	530,5814	-255,5395	-44,0505
BRE	-102,7233	-1070,7891	-41,3113
IGR	-150,1745	-444,4340	-42,8130

AJUSTAMENTO PELO MMQ - Modelo Combinado F(xa,La)=0
Parâmetros iniciais
Xi = 0
Eta = 0
Az = 0

INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO
iteração = 1
normdx = 1,00257517566687
vtpv = 1172150,70831643
iteração = 2
normdx = 1,37732615851367
vtpv = 45100,2160703517
iteração = 3
normdx = 0,72602280165429
vtpv = 53751,2155283823
iteração = 4
normdx = 0,0561982192735174
vtpv = 0,91083525010171
iteração = 5
normdx = 0,00659511664394042
vtpv = 0,766198987996099
iteração = 6
normdx = 6,0306228287424E-6
vtpv = 0,7649364792683
iteração = 7
normdx = 4,1143321041487E-9
vtpv = 0,764936481027759
iteração = 8
normdx = 2,55836993674767E-13
vtpv = 0,764936481027818

RESULTADO
Matriz dos Pesos = I
Número de Iterações - Método Combinado = 8
Critério de parada ||dx|| = 2,55836993674767E-13
vtpv = 0,764936481027818
Graus de liberdade = 9
Variância da unidade peso a priori (sig2pri) = 1
Variância da unidade peso a posteriori (sig2pos) = 0,0849929423364242

TESTE DE HIPÓTESE
H0: si2pri=sig2pos
H1: si2pri<>sig2pos
Nível de significância (alfa)= 5%
Estatística do teste (v`Pv/sig2_pri) = 0,764936481027818
Valor crítico inferior (Chi2_inf) =2,7
Valor crítico superior (Chi2_sup) = 19,02
Conclusão :
Hipótese nula (H0) foi rejeitada ao nível de significância alfa=5% !
Procure por erros grosseiros nas observações e verifique se as precisões estão adequadas.

Orientações entre o SGL e o STL
Componentes do Desvio da Vertical
Xi = -459,2026"   +/- 115,938"
Eta = -418,0067"   +/- 73,353"
Ângulo de Orientação a partir do y (STL) para o Az_geodésico = 95°20`19,60005"
Latitude Astrônomica   = -8°10`50,09971"   +/- 115,938"
Longitude Astrônomica = -35°04`19,12405"   +/- 73,353"
Ângulo de Orientação a partir do y (STL) para o Az_astronômico = 95°21`18,74162"

Programa AstGeoTop - Módulo: Desvio da Vertical Versão 2012.08.18 Data:09/10/2012
Cálculo do Desvio da Vertical

RELATÓRIO
-- M É T O D O --
DETERMINA AS ORIENTAÇÕES ENTRE UM SISTEMA GEODÉSICO LOCAL E UM SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL DA SITUAÇÃO ii)
Sistema Geodésico : SIRGAS2000
Semi-eixo maior Elipsoide =6378137
Achatamento = 1/298,257222101

ORIGEM GEODÉSICA DO SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL
Coordenadas Geodésicas
Latitude = -8°03`10,89712"
Longitude = -34°57`16,95422"
Altitude Elipsoidal = 49,194m

Coordenadas Topográficas
x = 0,000 m
y = 0,000 m
z = 0,000 m

COORDENADAS CARTESIANAS NO SISTEMA GEODÉSICO LOCAL(SGL)

PONTO	e(m)	n(m)	u(m)	se(m)	sn(m)	su(m)	corr_en	corr_eu	corr_nu
LAA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0002	0,0013	-3,002E-02	-3,294E-02	8,405E-02
CEE	182,0587	-135,2425	-45,5800	0,0012	0,0009	0,0026	-7,099E-02	-2,980E-01	-1,893E-01
ITE	122,2776	-478,8820	-46,3643	0,0014	0,0017	0,0049	-2,318E-01	-6,714E-03	-2,919E-01
EXE	-303,7857	-504,3932	-45,4963	0,0012	0,0009	0,0026	-1,631E-03	-3,071E-01	-9,770E-02
BRE	-1056,5342	201,9436	-42,7717	0,0110	0,0102	0,0402	-2,439E-01	4,913E-01	-8,779E-02
IGR	-428,4031	190,8454	-44,2343	0,0042	0,0048	0,0095	-6,141E-01	4,724E-01	-2,173E-02
CAV	-69,1495	45,6804	-46,5675	0,0025	0,0018	0,0067	-2,388E-01	-4,062E-01	-3,539E-03
LDN	70,2344	82,3252	-45,7810	0,0018	0,0017	0,0048	-2,957E-01	5,356E-02	-2,789E-01
ACT	179,6295	131,7746	-45,5909	0,0006	0,0002	0,0013	-3,149E-01	-3,204E-01	8,639E-01
REC	351,9739	228,1781	-29,0279	0,0001	0,0001	0,0001	1,402E-07	9,905E-07	4,691E-07
RNB	504,2566	112,1853	-45,7299	0,0007	0,0010	0,0021	6,429E-02	5,711E-01	-1,370E-02
NTI	686,9530	82,8574	-45,8465	0,0040	0,0024	0,0125	-3,122E-02	7,739E-01	-3,629E-02
RNC	1019,8190	92,7620	-45,4800	0,0079	0,0082	0,0232	-1,879E-01	-5,646E-02	-9,717E-02

COORDENADAS CARTESIANAS NO SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL(STL) DA SITUAÇÃO ii)

PONTO	x(m)	y(m)	z(m)	sx(m)	sy(m)	sz(m)
LAA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
CEE	182,0606	-135,2430	-45,5707	0,0010	0,0010	0,0010
ITE	122,2811	-478,8828	-46,3471	0,0010	0,0010	0,0010
EXE	-303,7822	-504,3958	-45,4914	0,0010	0,0010	0,0010

BRE	-1056,5337	201,9379	-42,8095	0,0010	0,0010	0,0010
IGR	-428,4026	190,8424	-44,2526	0,0010	0,0010	0,0010
CAV	-69,1483	45,6788	-46,5709	0,0010	0,0010	0,0010
LDN	70,2354	82,3243	-45,7812	0,0010	0,0010	0,0010
ACT	179,6303	131,7741	-45,5891	0,0010	0,0010	0,0010
REC	351,9738	228,1788	-29,0236	0,0010	0,0010	0,0010
RNB	504,2575	112,1862	-45,7178	0,0010	0,0010	0,0010
NTI	686,9540	82,8590	-45,8280	0,0010	0,0010	0,0010
RNC	1019,8200	92,7651	-45,4516	0,0010	0,0010	0,0010

AJUSTAMENTO PELO MMQ - Modelo Combinado F(xa,La)=0
Parâmetros iniciais
Xi = 0
Eta = 0
Az = 0

INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO
iteração = 1
normdx = 4,15524689311061E-5
vtpv = 0,00749052336180922
iteração = 2
normdx = 4,92469856331338E-10
vtpv = 0,00747404006583409
iteração = 3
normdx = 5,78493647472304E-17
vtpv = 0,00747404006583144

RESULTADO
Número de Iterações - Método Combinado = 3
Critério de parada ||dx|| = 5,78493647472304E-17
vtpv = 0,00747404006583144
Graus de liberdade = 33
Variância da unidade peso a priori (sig2pri) = 1
Variância da unidade peso a posteriori (sig2pos) = 0,000226486062600953

TESTE DE HIPÓTESE
H0: si2pri=sig2pos
H1: si2pri<>sig2pos
Nível de significância (alfa)= 5%
Estatística do teste (v`Pv/sig2_pri) = 0,00747404006583144
Valor crítico inferior (Chi2_inf) =19,05
Valor crítico superior (Chi2_sup) = 50,73

Conclusão :
Hipótese nula (H0) foi rejeitada ao nível de significância alfa=5% !
Procure por erros grosseiros nas observações e verifique se as precisões estão adequadas.

Orientações entre o SGL e o STL
Componentes do Desvio da Vertical
Xi = -5,7750"   +/- 0,013"
Eta = 6,2705"   +/- 0,010"
Ângulo de Orientação a partir do y (STL) para o Az_geodésico = 0°00`00,88931"
Latitude Astrônomica   = -8°03`16,67211"   +/- 0,013"
Longitude Astrônomica = -34°57`10,62130"   +/- 0,010"
Ângulo de Orientação a partir do y (STL) para o Az_astronômico = 0°00`00,00213"

Programa AstGeoTop - Módulo: Desvio da Vertical Versão 2012.08.18 Data:13/10/2012
Cálculo do Desvio da Vertical

RELATÓRIO
Sistema Geodésico : SIRGAS2000
Semi-eixo maior Elipsoide =6378137
Achatamento = 1/298,257222101

-- M É T O D O --
DETERMINA AS ORIENTAÇÕES ENTRE UM SISTEMA GEODÉSICO LOCAL E UM SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL DA SITUAÇÃO iii)
Sistema Geodésico : SIRGAS2000
Semi-eixo maior Elipsoide =6378137
Achatamento = 1/298,257222101

ORIGEM GEODÉSICA DO SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL
Coordenadas Geodésicas
Latitude = -8°03`10,89712"
Longitude = -34°57`16,95422"
Altitude Elipsoidal = 49,194m

Coordenadas Topográficas
x = 0,000 m
y = 0,000 m
z = 0,000 m

COORDENADAS CARTESIANAS NO SISTEMA GEODÉSICO LOCAL(SGL)

PONTO	e(m)	n(m)	u(m)	se(m)	sn(m)	su(m)	corr_en	corr_eu	corr_nu
LAA	0,0000	0,0000	0,0000	0,0006	0,0002	0,0013	-3,002E-02	-3,294E-02	8,405E-02
ITE	122,2776	-478,8820	-46,3643	0,0014	0,0017	0,0049	-2,318E-01	-6,714E-03	-2,919E-01
EXE	-303,7857	-504,3932	-45,4963	0,0012	0,0009	0,0026	-1,631E-03	-3,071E-01	-9,770E-02
BRE	-1056,5342	201,9436	-42,7717	0,0110	0,0102	0,0402	-2,439E-01	4,913E-01	-8,779E-02
IGR	-428,4031	190,8454	-44,2343	0,0042	0,0048	0,0095	-6,141E-01	4,724E-01	-2,173E-02

COORDENADAS CARTESIANAS NO SISTEMA TOPOGRÁFICO LOCAL(STL) DA SITUAÇÃO iii)

PONTO	x(m)	y(m)	z(m)
LAA	0,0000	0,0000	0,0000
ITE	465,4123	166,3424	-46,3458
EXE	530,4901	-255,4955	-45,4894
BRE	-102,7190	-1070,7450	-42,8043
IGR	-150,1318	-444,3077	-44,2457

AJUSTAMENTO PELO MMQ - Modelo Combinado F(xa,La)=0
Parâmetros iniciais
Xi = 0
Eta = 0
Az = 0

INÍCIO DO PROCESSO ITERATIVO
iteração = 1
normdx = 1,00280677143894
vtpv = 1171897,83306903
iteração = 2
normdx = 1,37729423805571
vtpv = 45119,4986928402
iteração = 3
normdx = 0,725901030048705
vtpv = 53682,894022258
iteração = 4
normdx = 0,0560642423624304
vtpv = 0,124844705925026
iteração = 5
normdx = 0,00657370126872676
vtpv = 0,000581684595788206
iteração = 6
normdx = 6,00090019171396E-6
vtpv = 0,000293044856800053
iteração = 7
normdx = 1,36976618557017E-11
vtpv = 0,000293044951292016
iteração = 8
normdx = 2,32423739342094E-16
vtpv = 0,000293044951292017

RESULTADO
Matriz dos Pesos = I
Número de Iterações - Método Combinado = 8
Critério de parada ||dx|| = 2,32423739342094E-16
vtpv = 0,000293044951292017
Graus de liberdade = 9
Variância da unidade peso a priori (sig2pri) = 1
Variância da unidade peso a posteriori (sig2pos) = 3,25605501435574E-5

TESTE DE HIPÓTESE
H0: si2pri=sig2pos
H1: si2pri<>sig2pos
Nível de significância (alfa)= 5%
Estatística do teste (v`Pv/sig2_pri) = 0,000293044951292017
Valor crítico inferior (Chi2_inf) =2,7
Valor crítico superior (Chi2_sup) = 19,02
Conclusão :
Hipótese nula (H0) foi rejeitada ao nível de significância alfa=5% !
Procure por erros grosseiros nas observações e verifique se as precisões estão adequadas.

Orientações entre o SGL e o STL
Componentes do Desvio da Vertical
Xi = -5,7021"   +/- 2,269"
Eta = 5,1518"   +/- 1,436"
Ângulo de Orientação a partir do y (STL) para o Az_geodésico = 95°20`30,49206"
Latitude Astrônomica   = -8°03`16,59922"   +/- 2,269"
Longitude Astrônomica = -34°57`11,75108"   +/- 1,436"
Ângulo de Orientação a partir do y (STL) para o Az_astronômico = 95°20`29,76316"

"A corrida para a excelência não tem linha de chegada"

(David Rye)