

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE ENERGIA NUCLEAR
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM TECNOLOGIAS
ENERGÉTICAS E NUCLEARES – PROTEN**

GILVAN DA SILVA FARIAS

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO
FLUIDODINÂMICO DE UM RISER ATRAVÉS DO
FORMALISMO DIFERENCIAL PERTURBATIVO**

**RECIFE
2007**

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO
FLUIDODINÂMICO DE UM RISER ATRAVÉS DO
FORMALISMO DIFERENCIAL PERTURBATIVO**

GILVAN DA SILVA FARIAS

**ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO
FLUIDODINÂMICO DE UM RISER ATRAVÉS DO
FORMALISMO DIFERENCIAL PERTURBATIVO**

**Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Tecnologias Energéticas
e Nucleares do Departamento de Energia
Nuclear da Universidade Federal de
Pernambuco para obtenção do título de
Mestre em Ciências.**

**Área de Concentração:
Engenharia de Reatores**

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Co-Orientador: Prof. Dr. Carlos Costa Dantas

**RECIFE
2007**

F224a Farias, Gilvan da Silva.

Análise de sensibilidade do modelo fluidodinâmico de um Riser através do formalismo diferencial perturbativo / Gilvan da Silva Farias. – Recife: O Autor, 2007.

138 folhas.; il., gráfs., tabs.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CTG. Programa de Pós-Graduação em Tecnologias Energéticas e Nucleares, 2007.

Inclui bibliográficas, Anexo e Apêndice..

1. Tecnologia Energética Nuclear. 2.Fluidodinâmica – Gás Sólidos. 3.Método Diferencial Perturbativo. 4.Sistema Adjunto I. Título.

621.483 CDD (22.ed.)

UFPE/BCTG/2008-010

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO FLUIDODINÂMICO DE UM RISER ATRAVÉS DO FORMALISMO DIFERENCIAL PERTURBATIVO

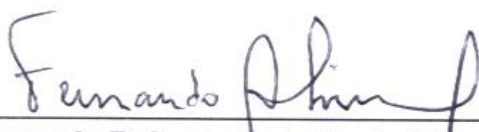
Gilvan da Silva Farias

APROVADO EM: 23.11.2007

ORIENTADOR: Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Carlos Costa Dantas

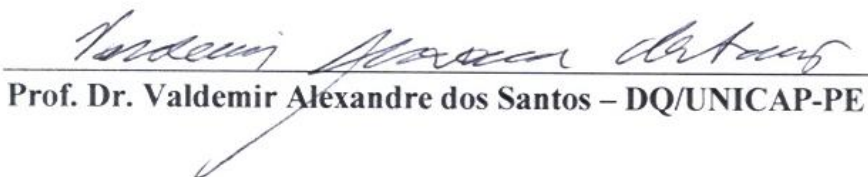
COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. Fernando Roberto de Andrade Lima – CRCN/CNEN-PE



Prof. Dr. Gustavo Koury Costa – CEFET/PE



Prof. Dr. Valdemir Alexandre dos Santos – DQ/UNICAP-PE

Visto e permitida a impressão



Coordenador do PROTEN/DEN/UFPE

Aos meus pais **Darci Soares Farias** e **Maria José da Silva Farias**
pelos exemplos de dignidade, perseverança
e afeto que deles recebo.

A minha esposa **Elce Ana** pela paciência, estímulo e
cumplicidade na nossa convivência.

Aos meus filhos **Ana Carolina** e **Gilvan Felipe**
pelo amor, respeito e carinho que norteiam
os nossos relacionamentos.

Dedico.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que me contemplou com a oportunidade de realizar este trabalho.

Ao Professor Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira pela dedicação, paciência, seriedade, respeito e sinceridade que regeram a nossa amigável, e desprovida de vaidades, convivência como orientador e orientando.

Ao Professor Carlos Costa Dantas pelo respeito e colaboração a mim destinados.

Aos Professores Anderson Stevens Leônidas Gomes e Fernando Antônio Cardoso que gentilmente forneceram as cartas de apresentação ao DEN.

Ao amigo Gilvan Lindolfo, companheiro de estudos e dos momentos mais difíceis.

A todos os Professores do DEN-UFPE que contribuíram com a formação e a informação.

Aos Servidores lotados no DEN-UFPE pelo carinho com que me acolheram: Antônio, Eliete, Edvaldo, Fernando, Juarez, Luis, Magali, Nilvânia e Zeza.

Aos Professores Fernando Roberto de Andrade Lima, José Wilson Vieira, Rita de Cássia Fernandes de Lima e Valdemir Alexandre dos Santos que deram suas contribuições ao participarem das bancas de acompanhamento no 1º e 2º Seminários.

Ao amigo Wagner Eustáquio por sua valiosa contribuição para a conclusão deste trabalho.

Ao amigo Jair Bezerra pelas contribuições nos estudos das disciplinas que juntos cursamos.

À Professora Eunice Leônidas Gomes pelo incentivo e apoio.

Aos amigos e colegas do CEFETPE pelas demonstrações de apoio: Aldo Bueno, Edílson Accioly, Edílson Araújo, Gilberto Holanda, Guilherme Pereira, José Geraldo, Lenival Silva, Luiz Abelardo, Marcos Macedo, Osanan Lira, Oscarino Bastos e Viriato Leal.

Aos amigos e colegas do Colégio da Polícia Militar de Pernambuco pelos incentivos nas horas mais difíceis: Cleide Sá, Gilvan Correia, Ivson Braga, Nívio Bernardo, Paulo Alves e Sérgio Barreto.

ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO FLUIDODINÂMICO DE UM RISER ATRAVÉS DO FORMALISMO DIFERENCIAL PERTURBATIVO

Autor: Gilvan da Silva Farias

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Co-Orientador: Prof. Dr. Carlos Costa Dantas

RESUMO

Em uma refinaria de petróleo o óleo cru é pré-aquecido sofrendo fracionamento. Do resíduo desta operação obtém-se o gasóleo que sofre um craqueamento catalítico fluido realizado em uma das suas unidades operacionais. Nela localiza-se o riser por onde escoam, de forma ascendente e simultânea, o gasóleo e o catalisador sólido. Um sistema de quatro equações descreve o comportamento fluidodinâmico do riser em um modelo experimental a frio, sendo tal comportamento avaliado por meio das medições das velocidades e das frações volumétricas do gás e do catalisador sólido ao longo do riser. Foi realizada a análise de sensibilidade da concentração média do catalisador sólido ao longo do riser em relação a 7(sete) parâmetros. São eles: massa específica do catalisador sólido, massa específica do gás, diâmetro do riser, fluxo de sólidos, vazão do gás, comprimento do riser e viscosidade dinâmica do gás. Nesta análise foram usados os métodos perturbativo diferencial e o direto. Por meio do método perturbativo diferencial foram calculados os operadores derivado e adjunto, o concomitante bilinear e foi obtido o sistema adjunto. A partir daí foram calculadas as parcelas do coeficiente de sensibilidade em relação a cada parâmetro e, então, calculados estes coeficientes. Os mesmos coeficientes de sensibilidade foram também calculados usando-se o método direto. Por fim, de posse dos coeficientes obtidos pelos dois métodos, foram também calculadas as sensibilidades em relação a cada parâmetro para ambos os métodos. Comparando-se os resultados obtidos pelos métodos perturbativo diferencial e direto verificou-se um erro percentual para a maioria dos parâmetros inferior a 1%. O parâmetro que menos influenciou na fração volumétrica média do sólido foi a viscosidade dinâmica do gás e o de maior influência foi o diâmetro do riser. Concluiu-se então que o método perturbativo

diferencial apresenta-se bem sucedido em relação aos parâmetros analisados, com a vantagem de eliminar a necessidade de exaustivas repetições dos cálculos que são necessárias pelo método direto para a obtenção das sensibilidades em relação aos parâmetros.

Palavras-chave: fluidodinâmica de sistema gás-sólido, análise de sensibilidade, método perturbativo diferencial, sistema adjunto, método direto.

SENSITIVITY ANALYSIS FOR A FLUID-DYNAMIC MODEL OF A RISER VIA THE DIFFERENTIAL PERTURBATION METHOD

Author: Gilvan da Silva Farias

Adviser: Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira

Co-Adviser: Prof. Dr. Carlos Costa Dantas

ABSTRACT

In an oil refinery, the crude oil is pre-heated in order to promote the cracking of the large hydrocarbon chains, transforming the heavy oil into lighter components. These lighter and vaporized oil (gas oil) is now submitted to a fluid catalyst cracking inside a long column denominated riser, where an ascending mixture of gas oil and solid catalyst are simultaneously flowing. A set of four differential equations is sufficient to describe the fluid-dynamic behavior of the riser in an experimental model placed at room temperature, such behavior being evaluated by means of the velocity and volumetric fraction profiles of the gas and the solid catalyst phases along the riser. The sensitivity analysis for the mean concentration of the solid catalyst along the riser was carried out in relation to 7 parameters, namely: solid catalyst density, gas density, riser diameter, solid catalyst flow, gas flow, riser length and dynamic viscosity of the gas. In this analysis, the differential perturbation method and the response surface (direct) method were used. In the perturbation method, the derivative and adjoint operators were calculated, the bi-linear concomitant was determined and the adjoint system was established and numerically solved. Starting from the obtained adjoint functions, the contributions to the sensitivity coefficient for each parameter were calculated. The same coefficients were also calculated using the direct method. Finally, the sensitivities of the solid catalyst volumetric fraction in relation to each parameter were determined for both methods. When these results are compared, a good agreement is verified, showing a percentual deviation of less than 1% for most of the parameters. The riser diameter showed the highest value of absolute sensitivity, indicating its major influence on the solid catalyst volumetric

fraction, whereas the dynamic viscosity of the gas had a minor influence on the same variable. It can be concluded that the differential perturbation method is well suited to sensitivity calculations in relation to the parameters of a fluid-dynamic gas-solid system, having the important advantage of eliminating the exhaustive repetitions in the computations, which are necessary in the direct method, especially if a great number of parameters is to be considered.

Keywords: gas-solid fluid-dynamic systems, sensitivity analysis, perturbation methods, adjoint system.

LISTA DE FIGURAS

	Página
Figura 1: Esquema de refino para a produção de combustíveis.....	19
Figura 2: Esquema simplificado de uma unidade de FCC.....	20
Figura 3: Esquema básico para funcionamento de um MEF de uma unidade de FCC.....	21
Figura 4: (a) Esquema ilustrativo do MEF e (b) Fotografia do MEF usado por Melo (2004)	23
Figura 5: Velocidade do sólido em função da altura relativa no riser.....	34
Figura 6: Velocidade do gás em função da altura relativa no riser.....	34
Figura 7: Pressão total em função da altura relativa no riser.....	35
Figura 8: Fração volumétrica do gás em função da altura relativa no riser.....	36
Figura 9: Fração volumétrica do sólido em função da altura relativa no riser.....	36
Figura 10: Fração volumétrica média do sólido em função de ρ_s	59
Figura 11: Fração volumétrica média do sólido em função de ρ_g	60
Figura 12: Fração volumétrica média do sólido em função de D.....	61
Figura 13: Fração volumétrica média do sólido em função de W.....	62
Figura 14: Fração volumétrica média do sólido em função de Q	63
Figura 15: Fração volumétrica média do sólido em função de L.....	64
Figura 16: Fração volumétrica média do sólido em função de μ_g	65
Figura 17: Erro relativo percentual entre os métodos perturbativo diferencial e o direto em função do parâmetro.....	70

LISTA DE TABELAS

	Página
Tabela 1: Valores dos parâmetros geométricos e de entrada.....	33
Tabela 2: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de ρ_s	59
Tabela 3: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de ρ_g	60
Tabela 4: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de D.....	61
Tabela 5: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de W.....	62
Tabela 6: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de Q.....	63
Tabela 7: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de L.....	64
Tabela 8: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de μ_g	65
Tabela 9: Coeficientes de sensibilidade obtidos através dos métodos perturbativo e direto e erro relativo percentual.....	66
Tabela 10: Sensibilidades relativas aos parâmetros para os métodos perturbativo diferencial e direto.....	67
Tabela 11: Método perturbativo diferencial x Método direto.....	68

LISTA DE SÍMBOLOS

LATINOS

$\mathbf{C}$	Vetor das condições de contorno do sistema
CB	Concomitante bilinear
d	Diâmetro médio das partículas do catalisador
D	Diâmetro interno do riser
$\mathbf{f}$	Vetor de estado
f_w	Força de atrito do gás na parede do riser por unidade de volume da mistura
g	Aceleração da gravidade
H	Operador derivado
H^*	Operador adjunto
L	Comprimento do riser
M	Massa molecular média do gás
p	Parâmetro
p_0	Parâmetro de referência
P	Pressão no riser
Q	Vazão do gás
$\mathbf{r}$	Vetor de posição no espaço de fase
R	Resposta
R_0	Resposta de referência
Re_g	Número de Reynolds para o gás
S	Sensibilidade em relação a um parâmetro
$S_{(i)}$	Termo de fonte das equações derivadas
S^+	Termo de fonte das equações adjuntas
S_∞	Razão entre a velocidade do sólido e a do gás na região de escoamento completamente desenvolvido
T	Temperatura no riser
U_g	Velocidade local do gás
U_s	Velocidade local do sólido
V_g	Volume do gás
V_s	Volume do sólido
V_t	Volume total
W	Fluxo de sólidos por unidade de área no riser
z	Coordenada na direção axial do riser
z_0	Comprimento característico

GREGOS

δ	Variação
ϵ_a	Fração volumétrica na região diluída do riser
ϵ_g	Fração volumétrica do gás no riser

$\overline{\varepsilon_g}$	Fração volumétrica média do gás no riser
ε_s	Fração volumétrica do sólido no riser
$\overline{\varepsilon_s}$	Fração volumétrica média do sólido no riser
ε^*	Fração volumétrica na região densa do riser
μ_g	Viscosidade dinâmica do gás
ρ_g	Massa específica do gás
ρ_s	Massa específica do sólido

SUBSCRITOS

$/i$	Derivada parcial de uma grandeza em relação a um parâmetro p_i
------	--

SOBRESCRITOS

T	Matriz Transposta
-----	-------------------

OPERACIONAIS

$[\]$	Representa matriz nos métodos perturbativos
$< >$	Integral definida no espaço de fase
$\frac{\overline{\partial m}}{\partial f}$	Derivada de Frechet
$'$	Sistema perturbado
$*$	Função ou operador adjunto

SUMÁRIO

	Página
1 INTRODUÇÃO.....	16
2 REVISÃO DE LITERATURA.....	18
2.1 Fluidodinâmica do riser.....	18
2.2 A Teoria da perturbação e os métodos perturbativos nos cálculos de coeficientes de sensibilidade.....	27
3 METODOLOGIA.....	30
3.1 Análise de sensibilidade pelo método perturbativo diferencial.....	37
3.1.1 Cálculo do operador H.....	38
3.1.2 Cálculo do operador adjunto H^* e do concomitante bilinear CB.....	41
3.1.3 Determinação do sistema adjunto.....	48
3.1.4 Coeficientes de sensibilidade e as sensibilidades.....	51
3.1.4.1 Cálculo de $\langle S_{i1}^+, f \rangle$	53
3.1.4.2 Cálculo de $\langle f^*, S_{(i)} \rangle$	54
3.1.4.3 Cálculo de CB.....	56
3.1.4.4 Cálculo do coeficiente de sensibilidade.....	56
3.2 Análise de sensibilidade pelo método direto.....	57
4 RESULTADOS E ANÁLISES.....	59
4.1 Método Direto.....	59
4.2 Método Perturbativo Diferencial.....	66
5 CONCLUSÕES.....	71
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	72
ANEXO.....	75
Teoria da Perturbação.....	76
1 Fundamentação teórica.....	76
2 Formalismo diferencial.....	80
APÊNDICES.....	81
Apêndice (AP1) Cálculo do operador H.....	82
Apêndice (AP2) Cálculo de $H.f_{i1}$	87
Apêndice (AP3) Cálculo do operador adjunto H^* e do concomitante bilinear CB.....	90
Apêndice (AP4) Cálculo de $\langle S_{i1}^+, f \rangle$	103

Apêndice (AP5) Cálculo dos termos de fonte $S_{(i)}$ para qualquer parâmetro.....	105
Apêndice (AP6) Cálculo de $\langle \mathbf{f}^* . S_{(i)} \rangle$ para cada parâmetro.....	110
Apêndice (AP7) Cálculo de $CB(\mathbf{f}^*, f_{/i})$ para cada parâmetro.....	112
Apêndice (AP8) Cálculo do coeficiente de sensibilidade generalizado.....	121
Apêndice (AP9) Programas computacionais utilizados.....	122

1 INTRODUÇÃO

O petróleo que chega a uma refinaria é tratado como óleo cru, sendo inicialmente pré-aquecido nas colunas de fracionamento. A partir daí obtêm-se os seus primeiros derivados, como por exemplo, o óleo diesel. O resíduo obtido a partir desta primeira operação é então submetido a um novo fracionamento, o que permite se obter gasóleo e óleo combustível. Este gasóleo sofre então um refino cuja operação é chamada de craqueamento catalítico fluido, que é realizada em uma das unidades operacionais da refinaria. Faz parte desta unidade operacional, um elemento denominado riser, por onde há o escoamento simultâneo e ascendente do gasóleo e do catalisador, o que se pode concluir que este processo é de natureza cinética e fluidodinâmica, sendo de fundamental importância a sua modelagem matemática (MELO, 2004). É, portanto, conveniente ressaltar a importância do estudo dos escoamentos gás-sólido nos processos industriais, visto que há necessidade de otimização dos sistemas de transporte destes materiais e de segurança. O riser é então considerado o “coração” da unidade de refino sendo, portanto, o foco das investigações levadas a efeito. Modelos experimentais a frio permitem que sejam feitas medições dos parâmetros fluidodinâmicos nos escoamentos, e técnicas nucleares modernas possibilitam a realização destas medidas sem interferir no processo fluidodinâmico. Neste trabalho utiliza-se um modelo matemático constituído por quatro equações básicas que descrevem de maneira aproximada a fluidodinâmica de um riser (MELO, 2004).

Ao ser observado o modelo matemático adotado, vê-se o grande número de fenômenos envolvidos na modelagem, levando-se à necessidade de usar uma metodologia adequada para os cálculos de sensibilidade. Deste modo, faz-se necessário construir uma superfície de resposta em função dos parâmetros de entrada. Devido ao grande número de parâmetros que podem provocar variações na resposta de interesse e das incertezas contidas nestes parâmetros, o código computacional precisa ser repetido inúmeras vezes, e por esta razão, o estudo da sensibilidade hoje é feito, em boa parte das situações, pelos métodos perturbativos.

Os métodos perturbativos são aplicados na análise de sensibilidade, principalmente quando não há solução analítica do sistema de equações que rege o modelo. Uma das metodologias apresenta particularidades como o sistema adjunto e o operador adjunto. Elas apresentam vantagens como, por exemplo, obter uma única expressão para a variação de cada parâmetro. Três métodos perturbativos aqui citados podem ser usados para se calcular o

coeficiente de sensibilidade em relação a um parâmetro. São eles: o método da Teoria da Perturbação Generalizada (GPT¹), o método variacional e o método diferencial (GANDINI, 1987; LIMA e BLANCO, 1994).

Este trabalho dá ênfase e utiliza o Método Diferencial. A sua aplicação no modelo matemático constituído pelas quatro equações básicas que descrevem a fluidodinâmica de um riser possibilita que se chegue ao coeficiente de sensibilidade do funcional-resposta em relação aos parâmetros considerados. Para tanto, seguem-se os passos que são fundamentados pela teoria da perturbação e faz-se uso do referido método.

Portanto, o objetivo principal deste trabalho é realizar a análise de sensibilidade utilizando o método perturbativo diferencial, da teoria da perturbação, para determinar a influência da variação de parâmetros em um funcional-resposta de interesse, sendo aqui analisada a fração volumétrica média do sólido $\overline{\varepsilon_s}$, pois a fração volumétrica do sólido ε_s pode ser medida através da atenuação, pelo sólido, de radiação gama.

Para tanto, destacam-se os objetivos específicos que se seguem:

- Utilizar um modelo matemático fluidodinâmico constituído pelas quatro equações básicas que descrevem a fluidodinâmica de um riser a frio;
- Aplicar a teoria da perturbação na realização da análise de sensibilidade, utilizando o formalismo diferencial, para determinar a influência da variação de parâmetros na fração volumétrica média do sólido $\overline{\varepsilon_s}$ no modelo matemático fluidodinâmico anteriormente citado;
- Realizar a análise de sensibilidade do modelo matemático usado neste trabalho pelo método direto, para determinação da influência dos parâmetros na fração volumétrica média do sólido $\overline{\varepsilon_s}$ do mesmo modelo já mencionado;
- Comparar os resultados obtidos na análise de sensibilidade por meio do formalismo diferencial com os resultados da análise de sensibilidade realizada usando o método direto.

¹ Generalized Perturbation Theory

2 REVISÃO DE LITERATURA

O estudo do comportamento fluidodinâmico do riser, num modelo experimental a frio (MEF) de uma unidade de craqueamento catalítico fluido (Fluid Catalytic Cracking - FCC), destina-se à investigação da distribuição da concentração do catalisador. Modelos matemáticos são usados para a simulação da fluidodinâmica do riser, visando assim obter perfis de velocidade para diferentes vazões dos componentes da mistura gás-sólido. A partir dos resultados obtidos na simulação do riser, o formalismo perturbativo, com base na teoria da perturbação, vem a ser aplicado para determinar efeitos de pequenas variações nas grandezas envolvidas no processo, visando reduzir custos e o tempo de cálculo destes resultados. Aqui se computam efeitos provocados por pequenas mudanças nos parâmetros envolvidos, motivando assim a determinação dos coeficientes de sensibilidade dos parâmetros para as situações de interesse.

2.1 Fluidodinâmica do riser

No refino do petróleo (transformação da matéria prima bruta em seus derivados) há no estágio inicial o fracionamento do óleo cru nas colunas de fracionamento (destilação atmosférica), em vários estágios de separação (MARIANO², 2001 apud MELO, 2004), sendo o petróleo pré-aquecido para obtenção dos seus primeiros derivados: gás liquefeito de petróleo (GLP), nafta, querosene e óleo diesel. O resíduo atmosférico da destilação, após o aquecimento, é submetido a um novo fracionamento a vácuo, o que permite que se obtenha gasóleo e óleo combustível. As frações geradas na forma de destilação a vácuo são submetidas a um refino para a obtenção de produtos com peso molecular menor através da ruptura (cracking, quebra) de moléculas grandes em moléculas menores. Tal operação é chamada de craqueamento catalítico fluido de gasóleo (derivado de petróleo mais pesado do que a nafta e mais leve que o óleo combustível), como gasolina e GLP e através do craqueamento retardado de resíduo a vácuo, já usado há mais de 50 anos (AVIDAN³, 1993 apud MELO, 2004), que leva à obtenção de querosene, óleo diesel e coque. É conveniente salientar a importância da unidade de FCC numa refinaria de petróleo, visto que nela se obtêm

² MARIANO, B. J. **Impactos ambientais do refino de petróleo**. Dissertação de Mestrado, UFRJ -Rio de Janeiro, 2001.

³ AVIDAN, A. **Fluid catalytic cracking**. Science and technology, Elsevier: Amsterdam, v. 1, n. 76, 1993.

produtos que serão comercializados com maior valor agregado. Devido à sua importância, estudos sobre o seu funcionamento permitem que ocorram modificações para a otimização de tal unidade. A Figura 1 mostra o esquema simplificado do funcionamento de uma refinaria de petróleo com ênfase para a unidade de FCC, onde se destacam os produtos obtidos e já citados anteriormente.

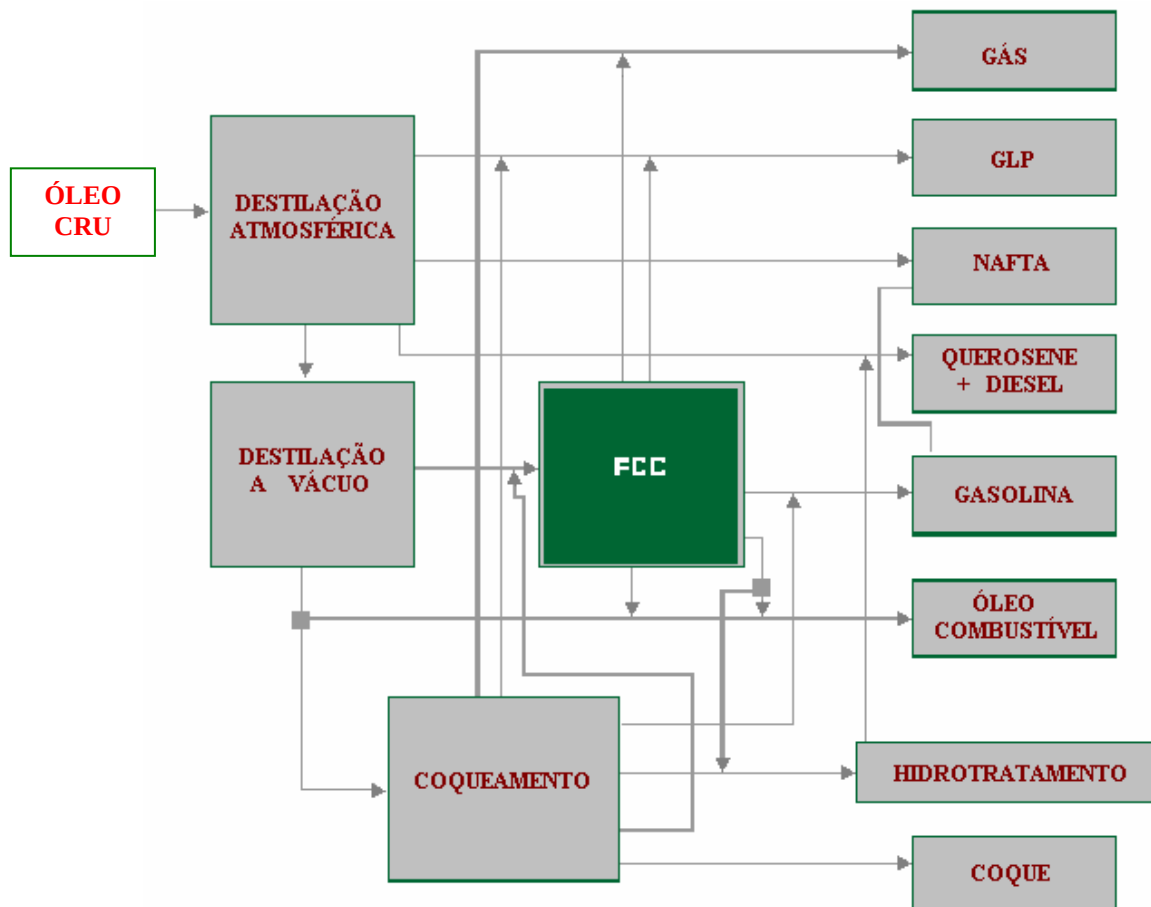


Figura 1: Esquema de refino para a produção de combustíveis (disponível em <http://www.anp.gov.br/petro/imagens/esq4.>)

Três partes básicas compõem uma unidade de FCC, cuja operação é cíclica: o riser, o separador de partículas gás-sólido e o regenerador do catalisador (substância que modifica a velocidade de uma reação química sem se alterar no processo). O esquema está apresentado na Figura 2.

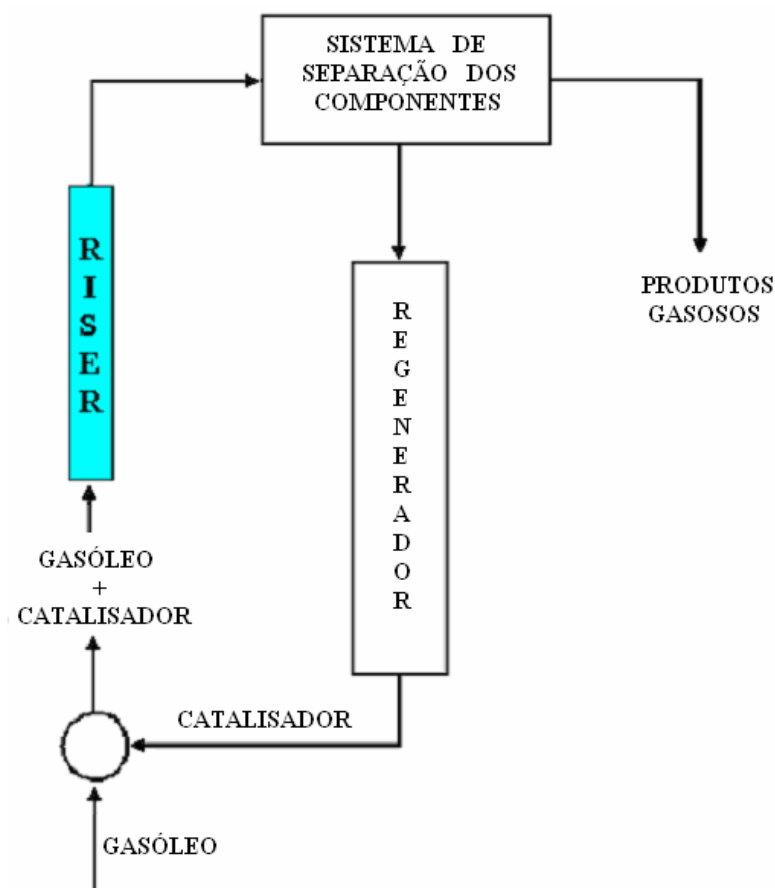


Figura 2: Esquema simplificado de uma unidade de FCC

No interior do riser de uma unidade de FCC ocorre o escoamento concorrente e ascendente do gásleo com o catalisador (ALI; ROHANI; CORRIOU⁴, 1997 apud MELO, 2004), de modo que na parte superior do mesmo há um sistema de separação dos componentes, como mostrado na Figura 2, chamado de ciclone (para separar as partículas sólidas dos produtos gasosos). O regenerador do catalisador é usado para recuperar o catalisador através da combustão do coque, tido como um leito fluidizado composto de duas zonas: uma densa (com presença do catalisador) e a outra diluída (onde quase não há catalisador).

Assim, o craqueamento catalítico fluido de hidrocarbonetos é um sistema de natureza cinética e também fluidodinâmica, sendo o riser o componente de maior relevância no processo, pois é nele que a mistura de vapores, gásleo em vácuo e o catalisador sofrem

⁴ ALI, H.; ROHANI, S.; CORRIOU, J. P. **Modeling and control of a riser type fluid catalytic cracking (FCC) unit** Transactions of the Institution of Chemical Engineers Part A, v. 75, p. 401, 1997.

reações de craqueamento, que são diretamente influenciadas pela fluidodinâmica do escoamento.

Modelos experimentais a frio (MEF), conforme a Figura 3, são geralmente modelos físicos utilizados para reproduzir operações de equipamentos à temperatura ambiente, destacando-se seu uso na elaboração de métodos para medição dos parâmetros fluidodinâmicos nos escoamentos.

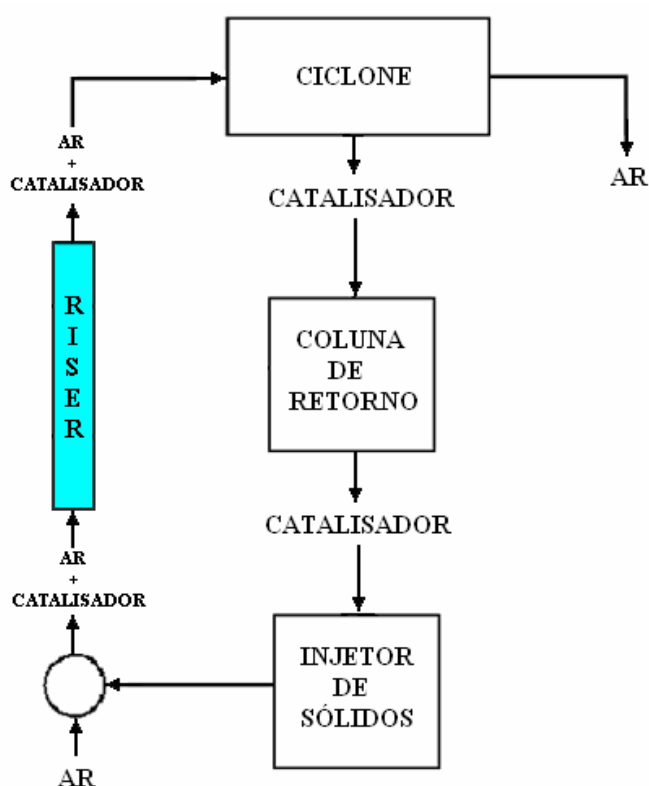


Figura 3: Esquema básico para funcionamento de um MEF de uma unidade de FCC

De acordo com Melo (2004), um modelo experimental a frio de uma unidade de FCC (ver Figura 4) possui basicamente o riser, o ciclone, a coluna de retorno que permite a circulação das partículas sólidas de catalisador para a base do riser, um compressor, um injetor de sólidos e os instrumentos auxiliares como medidores de vazão, pressão e umidade.

Uma vantagem do modelo experimental a frio é que a sua construção pode ser realizada com materiais transparentes, o que permite visualizar-se os movimentos dos componentes, além de terem custo reduzido quando comparado com outros modelos.

O riser de uma unidade de FCC é um tubo vertical de diâmetro pequeno em relação ao seu comprimento, onde são realizadas as observações experimentais. O catalisador é introduzido através do injetor de sólidos, juntamente com o gás, na base do riser, de modo que ambos percorrem ascendentemente o riser. No topo do mesmo há o ciclone que separa o componente sólido do gasoso. O gás sairá pelo topo do ciclone, enquanto o sólido cai sob o efeito da gravidade e das forças radiais, para ser novamente injetado no riser (MELO, 2004).

Segundo Melo (2004), a simulação das condições operacionais de uma unidade de FCC, por meio de um modelo experimental a frio, deve estar de acordo com a necessidade básica de se trabalhar com dados experimentais em situações de extrapolações que favoreçam o uso em escalas maiores. Portanto, um MEF deve operar com critérios que permitam uma semelhança dinâmica com uma unidade de FCC em escala comercial.

Basicamente, o modelo experimental a frio construído por Melo (2004), mostrado a seguir na Figura 4, possui: o riser, onde o catalisador é introduzido juntamente com o ar na sua base, o ciclone onde se efetua a separação das fases sólida e gasosa que saem pelo topo do riser, a coluna de retorno, cuja função é permitir a circulação das partículas sólidas do catalisador para a base do riser, o compressor para injeção de ar no sistema, injetor de sólidos que controla a entrada de sólidos na base do riser e os instrumentos auxiliares para medir vazão, pressão e umidade. A medição da fração volumétrica de sólido foi feita por meio da absorção de radiação gama pelo catalisador. Para tanto, foi usada uma fonte de radiação gama colocada em posição diametralmente oposta a um detector desta radiação, em uma secção reta do riser. Como foi admitido que o coeficiente de atenuação do catalisador é maior do que o do gás considera-se, então, que a atenuação da intensidade da radiação deve-se ao catalisador sólido.

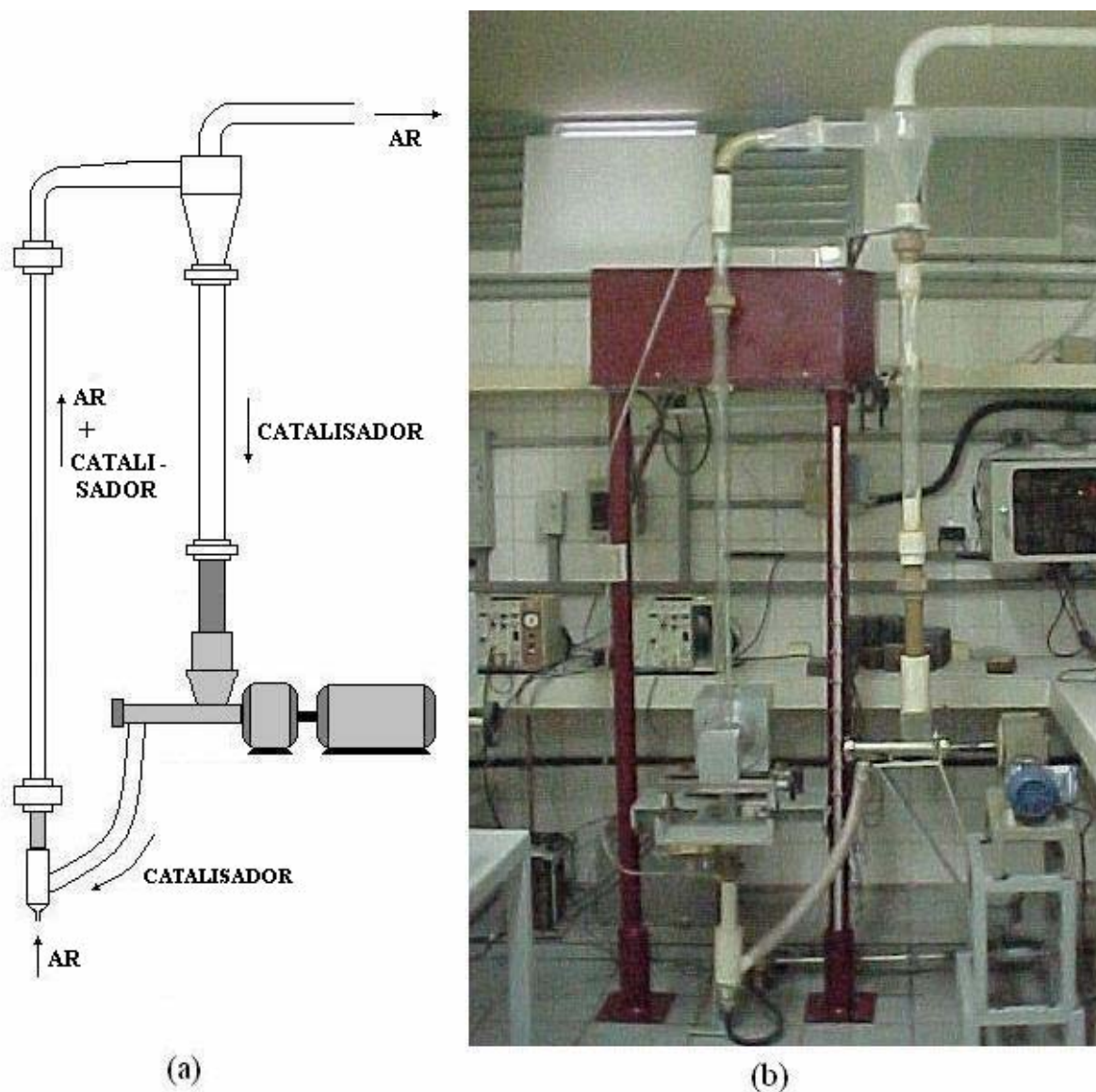


Figura 4: (a) Esquema ilustrativo do MEF e (b) Fotografia do MEF usado por Melo (2004)

Na Figura 4 vê-se que o riser é um tubo vertical cilíndrico de comprimento L que contém uma mistura de gás e sólido em transporte diluído, formando na direção axial um escoamento vertical e ascendente, onde o gás entra em contato inicial com o sólido na base do riser, de modo que aparecem duas regiões na direção axial (FAKEEHA; SOLIMAN; IBRAHIM⁵, 2000 apud MELO, 2004). Uma das regiões é a de aceleração das partículas sólidas, começando na base até onde a suspensão adquire uma velocidade constante. A outra é

⁵ FAKEEHA, A. H.; SOLIMON, M. A.; IBRAHIM, A. A. **Modeling of circulating fluidized bed for ammoxidation of propane to acrylonitrile**. Chemical Engineering and Processing. v. 39, p. 161-170, 2000.

uma região de escoamento completamente desenvolvido na parte acima da região de aceleração. Ainda, há também duas regiões na direção radial, sendo que em uma delas um núcleo com gás e sólido fluem para cima, enquanto que na outra, com formato anular, os sólidos possuem movimento descendente. São parâmetros relevantes as velocidades do sólido e do gás, a razão de escorregamento, as frações volumétricas dos componentes que escoam e a queda de pressão.

Para se fazer a descrição do comportamento fluidodinâmico de gás-sólido em um riser, em estado estacionário, supostamente isotérmico e unidimensional, utilizou-se um modelo matemático constituído de equações de conservação da massa do gás, conservação da massa do sólido, conservação da quantidade de movimento da mistura juntamente com uma equação característica que descreva a variação da fração volumétrica do gás (ARASTOPOUR; GIDASPOW⁶, 1979 apud MELO, 2004) ao longo do riser.

Em geral, estabelecem-se as seguintes hipóteses:

- o escoamento se dá em regime permanente;
- o modelo é unidimensional e bicomponente, em coordenadas cartesianas e não considera a variação na distribuição radial de sólido porque o riser tem diâmetro pequeno em relação ao seu comprimento;
- o escoamento é incompressível;
- não há reações químicas;
- o catalisador (fase sólida) é descrito como meio contínuo – o sólido entra no riser já totalmente fluidizado;
- despreza-se o atrito entre a parede do riser e o sólido;
- supõe-se que as partículas sólidas têm formato esférico.

A seguir, apresentam-se as equações básicas correspondentes ao modelo matemático que, segundo Melo (2004), é composto pela equação da conservação da massa do gás,

⁶ ARASTOPOUR, H.; GIDASPOW, D. **Vertical pneumatic using four hydrodynamic models**. Ind. & Eng. Chem. v. 18, p. 123-130, 1993.

conservação da massa do sólido, conservação da quantidade de movimento da mistura, correspondentes, respectivamente, às Equações (01) a (03) que se seguem, mais uma quarta equação que descreva a variação da fração volumétrica do gás ao longo do riser.

a) Equação da conservação da massa do gás:

$$\frac{dU_g}{dz} = -\frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \quad (01)$$

onde U_g é a velocidade do gás, z é a coordenada na direção do riser e ε_g é a fração volumétrica do gás.

b) Equação da conservação da massa do sólido:

$$\frac{dU_s}{dz} = \frac{U_s}{\varepsilon_s} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \quad (02)$$

onde U_s é a velocidade do sólido e ε_s é a fração volumétrica do sólido.

c) Equação da conservação da quantidade de movimento da mistura:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{d\varepsilon_g}{dz} \left(\rho_s U_s^2 - \rho_g U_g^2 \right) - f_w - \left[(\varepsilon_s \rho_s + \varepsilon_g \rho_g) g \right] \quad (03)$$

onde P é a pressão da mistura no riser, ρ_s é a massa específica do sólido, ρ_g é a massa específica do gás, g é a aceleração da gravidade, f_w é a força de atrito do gás com a parede do riser por unidade de volume, dada pela equação de Fanning como

$$f_w = \frac{0,316 \rho_g U_g^2}{2D Re_g^{\frac{1}{4}}}, \text{ sendo} \quad (04)$$

Re_g o número de Reynolds para o gás, dado por

$$Re_g = \frac{\rho_g U_g D}{\mu_g}, \quad (05)$$

onde D é o diâmetro do riser e μ_g é a viscosidade dinâmica do gás.

d) Equação da variação da fração volumétrica do gás ao longo do riser:

Esta equação poderá ser escolhida dentre uma das opções a seguir:

Opção I:

Equação deduzida por Malladi e Otero (1983), que considera forças de sustentação e arraste das partículas com a condição de que a velocidade do sólido tenha atingido um valor constante ao longo do riser. Ela é assim escrita:

$$\frac{d\varepsilon_g}{dz} = \frac{g\varepsilon_s}{U_s^2} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_s} \right) \left[\left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - 1 \right], \quad (06)$$

onde S_∞ é a razão entre a velocidade do sólido e a do gás na região de escoamento completamente desenvolvido.

Opção II:

Equação proposta por Mendes e Santana (1983), que foi desenvolvida por Li et al. (1981) e baseia-se num modelo de difusão vertical:

$$\frac{d\varepsilon_g}{dz} = \frac{(\varepsilon^* - \varepsilon_g)(\varepsilon_g - \varepsilon_a)}{z_0(\varepsilon^* - \varepsilon_a)} \quad (07)$$

onde ε^* é a fração volumétrica na região densa do riser, ε_a é a fração volumétrica na região diluída do riser e z_0 é o comprimento característico no riser e

$$\ln \left(\frac{\varepsilon_g - \varepsilon_a}{\varepsilon^* - \varepsilon_g} \right) = -\frac{1}{z_0} (z - z_i). \quad (08)$$

Opção III:

Equação proposta por Santana et al. (1988), que se baseia na equação da velocidade relativa utilizada por Arastoopour e Gidaspow, dada por:

$$\frac{d\varepsilon_g}{dz} = \left[\frac{1}{\left(-\frac{U_g}{\varepsilon_g} - \frac{U_s}{\varepsilon_s} \right) (U_g - U_s)} \right] \left(g - \frac{F_{\text{arraste}}}{\rho_s} \right) \quad (09)$$

onde a força de arraste exercida pelo fluido nas partículas, por unidade de volume, é dada por

$$F_{\text{arraste}} = 3C_D \rho_g (U_g - U_s)^2 \frac{0,25}{d\varepsilon_g^{2,6}}, \quad (10)$$

sendo C_D o coeficiente de arraste e d o diâmetro das partículas sólidas.

2.2 A teoria da perturbação e os métodos perturbativos nos cálculos de coeficientes de sensibilidade

Ao se analisar um sistema de equações que compõem um modelo matemático, determina-se o efeito na solução obtida (ou no funcional-resposta), provocado por variações nos parâmetros do sistema, sendo este procedimento chamado de análise de sensibilidade.

Grandes códigos de computação foram desenvolvidos para modelar problemas de distribuição de fluxo de nêutrons, blindagem e dose nos cálculos neutrônicos, e ainda, transferência de calor, momento e massa nos cálculos termoidráulicos em um reator nuclear. Porém, o grande número de fenômenos físicos envolvidos nestas modelagens e o custo computacional elevado fazem com que estes códigos nem sempre sejam adequados para a análise de sensibilidade. Atualmente, executam-se códigos sucessivas vezes para se obter uma superfície de resposta, pois se deseja obter o comportamento da resposta em função de um parâmetro inicial. Mediante a grande quantidade de parâmetros provocadores de desvios nas respostas de interesse, esta metodologia é lenta, de custo alto e, às vezes, impraticável (LIMA

e BLANCO, 1994). A estrutura descrita constitui o Método Direto ou Método da Superfície de Resposta para a análise de sensibilidade.

Os Métodos Perturbativos permitem calcular a sensibilidade de uma resposta de forma generalizada para qualquer parâmetro do sistema, sem haver a necessidade de elegê-lo previamente, além da rapidez e facilidade que apresenta o sistema de equações que se deve usar como resultado de cada resposta analisada (LIMA e BLANCO, 1994). Primeiramente, determina-se o coeficiente de sensibilidade, e o novo valor do funcional resposta de primeira ordem é dado por $R = R_0 + \frac{\delta R}{\delta p} \Delta p$, onde R é a nova resposta, R_0 é a solução de referência ou não perturbada e Δp é o intervalo de variação do parâmetro (TITO, 2001). Ainda, eles são usados para se obter uma maior eficiência na análise, adicionando-se a vantagem da redução de custos computacionais. Estes métodos perturbativos demonstraram-se vantajosos quando aplicados a problemas de natureza não-linear. A desvantagem por eles apresentada é que se restringem à análise do comportamento linear da resposta nas vizinhanças do ponto. Porém, isto pode ser remediado se for usada a teoria da perturbação de ordens superiores, considerada por Gandini (1987) e por Cacuci et al. (1980).

A teoria da perturbação tem importância no tratamento de sistemas de equações não lineares com respostas não lineares, com larga utilização inicialmente nos estudos da física dos reatores nucleares (TITO, 2001). O seu aproveitamento requer uma metodologia que computa o efeito de pequenas alterações, consideradas como sendo as perturbações, que resultam em pequenas mudanças nos elementos de interesse. De acordo com Gandini (1987), a primeira aplicação dos métodos perturbativos foi realizada por Wigner em 1945 para o estudo de valores tais como a reatividade de diferentes materiais. A partir daí, houve a expansão das aplicações para análise e a blindagem de núcleos de reatores nucleares e a sua termoidráulica.

Segundo Gandini (1987), as equações adjuntas lineares das equações que formam o sistema em apreço foram introduzidas em 1962, sendo também estas equações adjuntas aplicadas na blindagem de reatores nucleares.

Três métodos perturbativos (GANDINI, 1987; LIMA e BLANCO, 1994) podem ser usados para a obtenção das mesmas expressões que identificam o coeficiente de sensibilidade de um parâmetro, sendo apresentados como:

- a) O método da Teoria da Perturbação Generalizada (GPT), que usa a conservação da função importância, foi utilizado nos trabalhos de Gandini (1982, 1987, 1995), Lima et al. (1986), Lima e Alvim (1987), Lima (1990) e Lima et al. (1993). Estudos feitos por Lima et al. (1985) analisaram a sensibilidade de funcionais como temperatura média do refrigerante e temperatura do refrigerante na saída do canal, com referência aos parâmetros termohidráulicos calor específico e massa específica, por exemplo, em problemas de transmissão de calor de uma vareta combustível para o refrigerante, usando o método GPT.
- b) O método Variacional que, segundo Tito (2001), minimiza o funcional de interesse.
- c) O método Diferencial, cuja fundamentação está no Anexo (A), baseia-se no uso de funções adjuntas. Ele foi proposto por Oblow (1976, 1978), Weber et al. (1979) e aplicado por Cacuci et al. (1980). Segundo Castrillo (2003), este método segue as etapas seguintes:
- Formulação de um sistema de equações diretas que fornecerá a solução espacial e temporal das variáveis de estado;
 - Formulação de um sistema de equações derivadas e seu correspondente sistema de equações adjuntas, que fornecerá a solução espacial e temporal das funções adjuntas;
 - Obtenção dos coeficientes de sensibilidade por meio de operações envolvendo a solução dos problemas direto e adjunto.

3 METODOLOGIA

Partindo do modelo matemático apoiado nas quatro equações básicas que regem o comportamento fluidodinâmico de um riser é necessário encontrar os coeficientes de sensibilidade dos parâmetros do modelo, o que será determinado através da teoria da perturbação, a partir do formalismo diferencial, e também pelo método direto.

Neste trabalho será utilizado um modelo matemático formado pelas equações básicas que regem o comportamento fluidodinâmico em reatores verticais gás-sólido (riser), composto pelas Equações (01), (02), (03) e (06), respectivamente, equação da conservação da massa do gás, equação da conservação da massa do sólido, equação da conservação da quantidade de movimento da mistura e equação da variação da fração volumétrica do gás ao longo do riser.

Sabendo-se que a fração volumétrica do gás em um leito gás-sólido é a relação entre o volume do gás e o volume total do leito, tem-se então que:

$$\varepsilon_g = \frac{V_g}{V_t} = \frac{V_t - V_s}{V_t} = 1 - \frac{V_s}{V_t} = 1 - \varepsilon_s \quad . \quad (11)$$

Da Equação (11) vem que

$$\varepsilon_s = 1 - \varepsilon_g \quad . \quad (12)$$

Substituindo a Equação (12) nas Equações (02) e (03), tem-se que o modelo matemático será constituído das equações:

1) A primeira equação será mantida, a da conservação da massa do gás:

$$\frac{dU_g}{dz} = - \frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right), \quad (01) \quad (13)$$

2) A segunda equação, Equação (02), será reescrita pela substituição da Equação (12) na mesma, sendo apresentada na forma:

$$\frac{dU_s}{dz} = \frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right). \quad (13)$$

3) A terceira equação, obtida da Equação (03) é reescrita como:

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_s U_s^2) + \frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_g U_g^2) - f_w - g\rho_s + g\varepsilon_g \rho_s - g\varepsilon_g \rho_g. \quad (14)$$

4) A quarta equação é a Equação (06), deduzida por Malladi e Otero (1983). Ela é obtida, conforme Rolim et al. (1995), pela substituição da Equação (02) na equação da conservação do momento do sólido:

$$\frac{dU_s}{dz} = \frac{g}{U_s} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_s} \right) \left[\left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - 1 \right], \quad (15)$$

procedimento este que fornece a Equação (06).

Embora Melo (2004) tenha encontrado uma melhor descrição dos seus resultados experimentais fazendo uso do modelo de Santana (1988), a formulação de Malladi e Otero (1983) foi adotada para este trabalho pelo fato de ser mais consistente, em termos físicos, para a reprodução da distribuição axial do sólido, pois ela é decorrente do princípio da conservação do momento do sólido e nela aparecem fatores que contemplam tanto a situação na região de aceleração como a região de escoamento completamente desenvolvido.

Pela substituição da Equação (12) dada por $\varepsilon_s = 1 - \varepsilon_g$ na Equação (06), esta é reescrita na forma:

$$\frac{d\varepsilon_g}{dz} = \frac{g(1 - \varepsilon_g)}{U_s^2} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_s} \right) \left[\left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - 1 \right] \quad (16)$$

Neste trabalho é utilizado $S_{\infty} = 0,79$ para a razão entre a velocidade do sólido e a do gás na região de escoamento completamente desenvolvido, valor que foi obtido a partir da observação dos resultados experimentais encontrados por Melo (2004) usando o MEF.

Desta maneira tem-se o modelo matemático da fluidodinâmica do riser constituído das Equações (01), (13), (14) e (16), que formam o sistema direto do modelo matemático.

De posse do sistema direto (ver Anexo A), é possível, de início, observar que há quatro variáveis dependentes. São elas: U_g , U_s , P e ϵ_g , pois se dispõem de quatro equações. As medições destas grandezas são de fundamental importância no funcionamento do riser. Em seguida estabelecem-se o espaço de fase, os parâmetros para análise de sensibilidade e o funcional-resposta motivo da análise. Pelo método perturbativo, usando-se o método diferencial, determina-se o operador do sistema direto, o operador derivado, o operador adjunto e o concomitante bilinear, obtendo-se na seqüência o sistema adjunto, com suas condições de contorno. Por fim, chega-se à expressão geral para os coeficientes de sensibilidade em relação a qualquer parâmetro, sendo então possível determinar a sensibilidade relativa ao funcional-resposta. Pelo método direto deve-se variar um parâmetro e verificar a correspondente variação ocorrida no funcional, obtendo-se a partir daí o coeficiente de sensibilidade e a sensibilidade do funcional-resposta, como no método perturbativo.

Portanto, relacionados ao sistema direto, tem-se:

- a) Variáveis dependentes, que são as grandezas de maior relevância a serem consideradas no riser: U_g , U_s , P e ϵ_g .
- b) Espaço de fase ou variável independente: z , com $0 \leq z \leq L$, onde L é o comprimento do riser.
- c) Parâmetros: massa específica do sólido (ρ_s), massa específica do gás (ρ_g), diâmetro do riser (D), fluxo do sólido por unidade de área (W), vazão do gás (Q), comprimento do riser (L) e a viscosidade dinâmica do gás (μ_g).
- d) Funcional-resposta a ser analisado: fração volumétrica média do sólido $\overline{\epsilon_s}$.

A rotina ODE 45 do aplicativo MATLAB foi utilizada na resolução numérica do sistema de equações para a simulação dinâmica do riser do MEF desenvolvido por Melo (2004). Esta rotina emprega o método de Runge-Kutta de 4ª ordem na integração numérica das equações do modelo. Foram usados os parâmetros geométricos e de entrada para utilização do aplicativo apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Valores dos parâmetros geométricos e de entrada

PARÂMETRO	SÍMBOLO	VALOR
Comprimento do riser	L	2,3 m
Diâmetro do riser	D	0,032 m
Diâmetro médio das partículas do catalisador	d	0,000072 m
Massa molecular média do gás	M	28 kg/kmol
Pressão no riser	P	104,364 kPa
Temperatura no riser	T	302 K
Aceleração da gravidade	g	9,806 m/s ²
Viscosidade dinâmica do gás a 29°C	μ_g	0,0000186 kg/m.s
Fluxo do sólido por unidade de área	W	7,1 kg/m ² .s
Massa específica do gás	ρ_g	1,164 kg/m ³
Massa específica do sólido	ρ_s	850 kg/m ³
Vazão do gás	Q	0,0038 m ³ /s

Os dados da Tabela 1 juntamente com as expressões obtidas no Apêndice 7 permitem ao aplicativo MATLAB calcular as condições na base do riser ($z=0$), as quais são necessárias para a resolução do sistema de equações, cujos valores estão reproduzidos a seguir:

a) $U_{g0} = 4,740912904 \text{ m/s}$

b) $U_{s0} = 0,098198685 \text{ m/s}$

c) $P_0 = 104.364 \text{ Pa}$

d) $\varepsilon_{g0} = 0,996622680$

Os gráficos a seguir, apresentados nas Figuras 5 a 9, que correspondem à solução do sistema direto, mostram como variam a velocidade do sólido U_s , a velocidade do gás U_g , a pressão P, a fração volumétrica do gás ε_g e a fração volumétrica do sólido ε_s ao longo do riser.

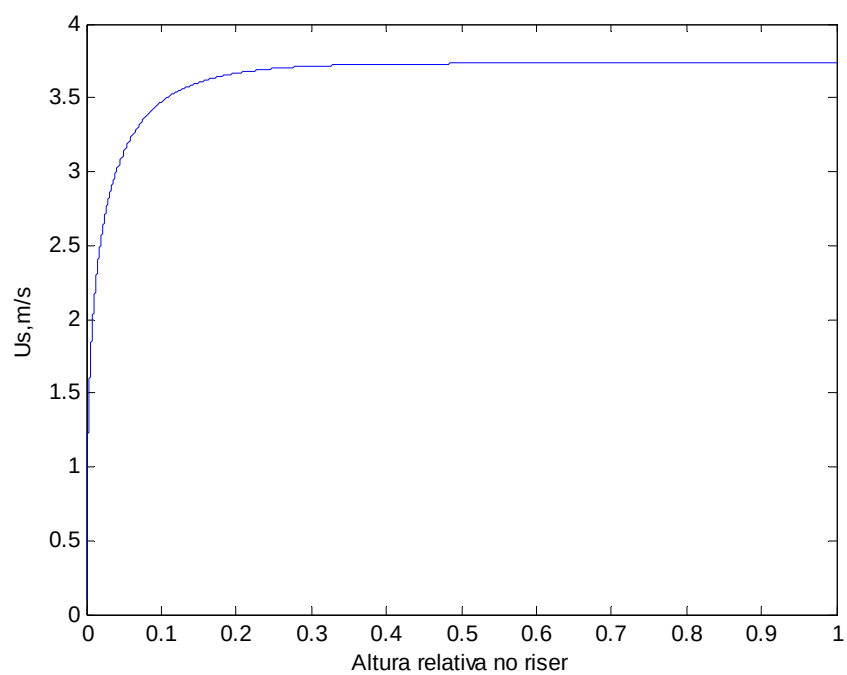


Figura 5: Velocidade do sólido em função da altura relativa no riser

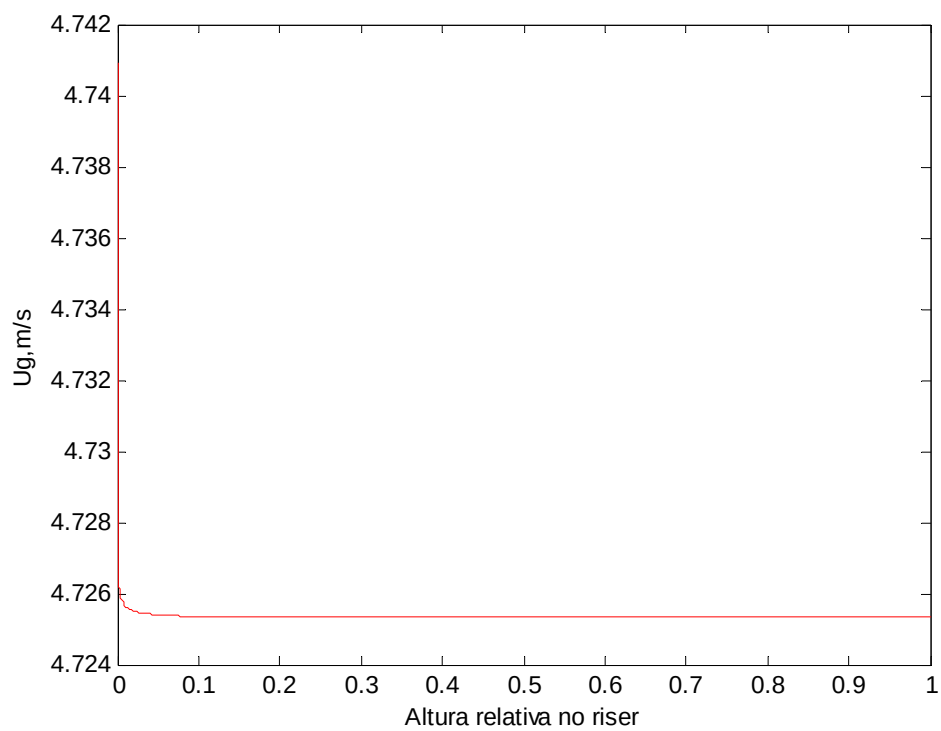


Figura 6: Velocidade do gás em função da altura relativa no riser

Observando os gráficos das Figuras 5 e 6 percebe-se que a velocidade do sólido, partindo de um pequeno valor, aumenta na região de aceleração de sólidos até ficar praticamente constante na região de escoamento completamente desenvolvido, enquanto que a do gás, na primeira região, diminui até ficar praticamente constante na segunda região citada, devido ao arraste entre o gás e o sólido.

A Figura 7 apresenta o gráfico da pressão total em função da altura relativa no riser.

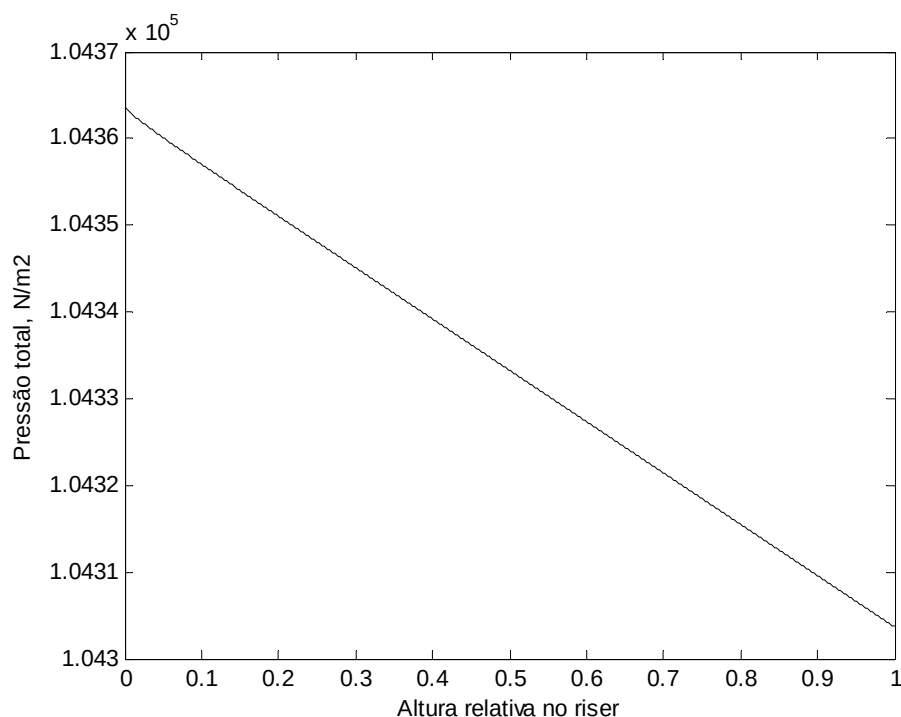


Figura 7: Pressão total em função da altura relativa no riser

Relativamente ao gráfico da Figura 7 nota-se claramente a queda de pressão da mistura ao longo do riser, sendo visível a linearidade desta queda.

A seguir são apresentados os gráficos da fração volumétrica do gás e do sólido em função da altura relativa no riser.

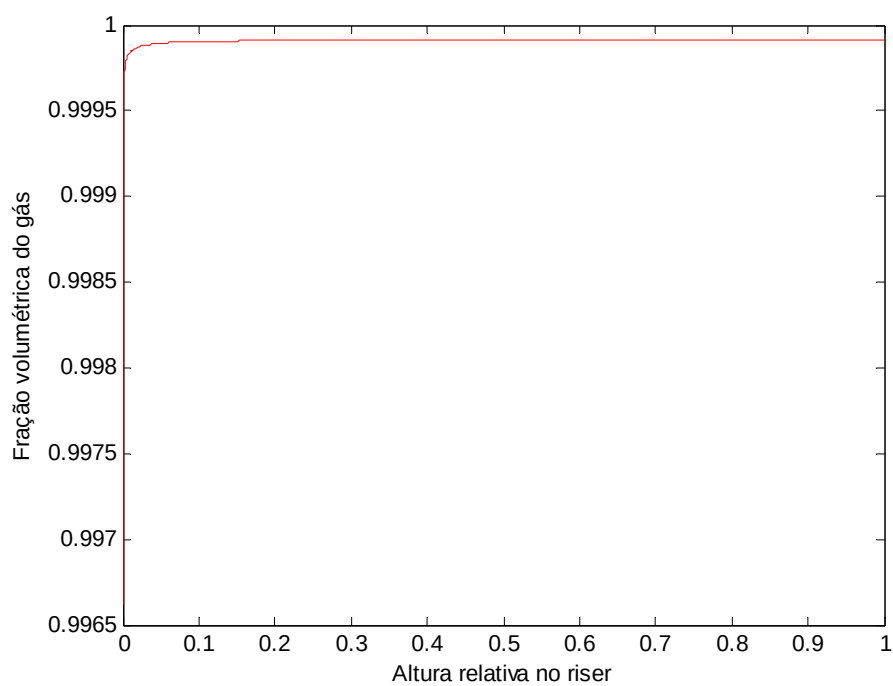


Figura 8: Fração volumétrica do gás em função da altura relativa no riser

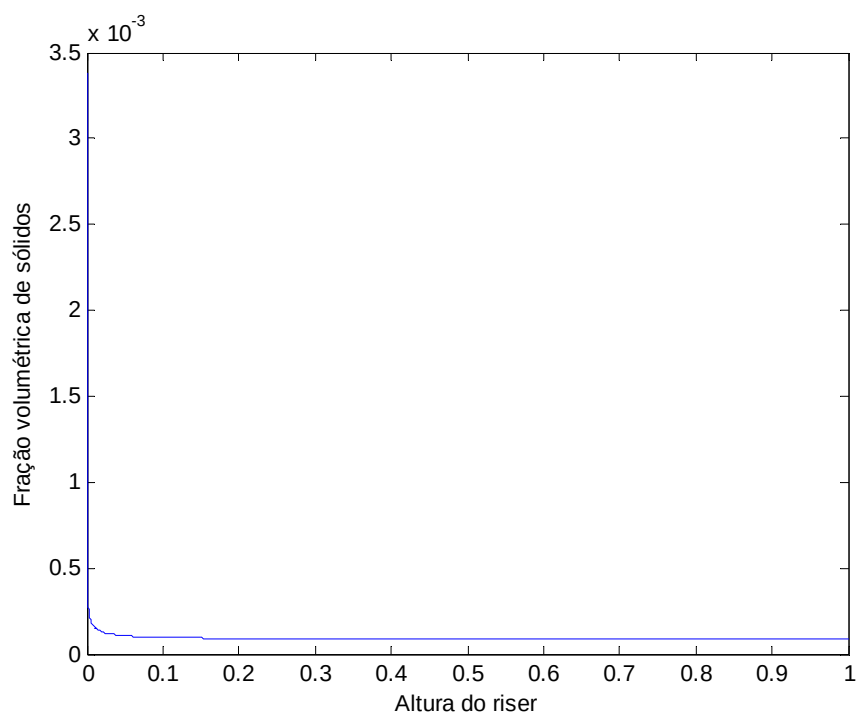


Figura 9: Fração volumétrica do sólido em função da altura relativa no riser

Os gráficos das Figuras 8 e 9 mostram que as frações volumétricas dos componentes da mistura têm comportamentos opostos. Enquanto a fração do sólido diminui, a do gás aumenta e ambas permanecem praticamente constantes na região de escoamento completamente desenvolvido, onde o escoamento é ainda mais diluído.

Em suma, tem-se que a partir destas observações, a velocidade do sólido tem aumento substancial até, aproximadamente, 15% da altura do riser. A partir daí, este aumento é menos acentuado até atingir um valor praticamente constante. É conveniente ainda salientar que os resultados obtidos com a solução do sistema direto estão perfeitamente compatíveis com a fluidodinâmica do riser e também com os resultados obtidos por Melo (2004).

3.1 Análise de sensibilidade pelo método perturbativo diferencial

Para realizar a análise de sensibilidade pelo método perturbativo diferencial deve-se escrever formalmente o sistema direto, determinar o operador H , o operador adjunto H^* , o concomitante bilinear CB , o sistema adjunto e a expressão do coeficiente de sensibilidade. A partir daí é possível calcular a sensibilidade relativa a cada parâmetro.

De início, escrevendo formalmente o sistema direto como sendo $\mathbf{m}[f(r),p]=\mathbf{0}$, pela Equação (A.01), onde $\mathbf{m}$ inclui, em geral, operações em relação às variáveis do espaço de fase e os vetores $\mathbf{f}$, $\mathbf{r}$ e $\mathbf{p}$ são apresentados no Anexo, tem-se:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ onde:}$$

$$m_1 = \frac{dU_g}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) = 0 \quad (17)$$

$$m_2 = \frac{dU_s}{dz} - \frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) = 0 \quad (18)$$

$$m_3 = -\frac{dP}{dz} - \frac{d\varepsilon_g}{dz}(\rho_s U_s^2) + \frac{d\varepsilon_g}{dz}(\rho_g U_g^2) - f_w - g\rho_s + g\varepsilon_g\rho_s - g\varepsilon_g\rho_g = 0 \quad (19)$$

$$m_4 = \frac{d\varepsilon_g}{dz} + \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) = 0 \quad (20)$$

Temos então o sistema generalizado $\mathbf{m}$ que assumirá a forma:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} \frac{dU_g}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \\ \frac{dU_s}{dz} - \frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \\ -\frac{dP}{dz} - \frac{d\varepsilon_g}{dz}(\rho_s U_s^2) + \frac{d\varepsilon_g}{dz}(\rho_g U_g^2) - f_w - g\rho_s + g\varepsilon_g\rho_s - g\varepsilon_g\rho_g \\ \frac{d\varepsilon_g}{dz} + \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

3.1.1 Cálculo do operador H

Para a determinação do operador matricial H tem-se, pela Equação (A.12), que

$$H = \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \mathbf{f}}. \text{ Portanto:}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_4} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

onde $f_1 = U_g$, $f_2 = U_s$, $f_3 = P$ e $f_4 = \varepsilon_g$.

Calculando cada elemento da matriz no APÊNDICE (AP1), tem-se que as Equações (AP1.01) a (AP1.16) correspondem, respectivamente, às Equações (23) a (38):

$$\frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_1} = \frac{d}{dz} + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (23)$$

$$\frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_2} = 0 \quad (24)$$

$$\frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_3} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_4} = \frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} - \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (26)$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} = \frac{d}{dz} - \frac{1}{(1-\varepsilon_g)} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (28)$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_3} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_2}{\partial f_4} = -\frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)} \frac{d}{dz} - \frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (30)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_3}{\partial f_1} = 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D \text{Re}_g^{\frac{1}{4}}} \right) \quad (31)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_3}{\partial f_2} = -2 \frac{d\varepsilon_g}{dz} \rho_s U_s \quad (32)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_3}{\partial f_3} = -\frac{d}{dz} \quad (33)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_3}{\partial f_4} = -\rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} + \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} + g\rho_s - g\rho_g \quad (34)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_4}{\partial f_1} = \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_4}{\partial f_2} = & \left[-2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \right] \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) + \\ & \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) \right] + \frac{2g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_4}{\partial f_3} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\bar{\partial} \mathbf{m}_4}{\partial f_4} = \frac{d}{dz} + \left[\frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \quad (38)$$

Deste modo, conhecendo-se cada elemento da matriz, o operador H está determinado.

3.1.2 Cálculo do operador adjunto H^* e do concomitante bilinear CB

Usando o formalismo diferencial para encontrar o operador adjunto H^* , deve-se utilizar a Equação (A.16) reescrita na forma:

$$\langle \mathbf{f}^* . H \mathbf{f}_{/i} \rangle = \langle \mathbf{f}_{/i} . H^* \mathbf{f}^* \rangle - \text{CB}(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/i}) \quad (39)$$

Para determinar o primeiro membro da Equação (39), calcula-se $H \mathbf{f}_{/i}$, onde H é o operador matricial dado pela Equação (22), $\mathbf{f}_{/i} = \begin{bmatrix} U_{g/i} \\ U_{S/i} \\ P_{/i} \\ \varepsilon_{g/i} \end{bmatrix}$, que corresponde à Equação (A.10)

e $\mathbf{f}^*$ é o vetor adjunto de $\mathbf{f}_{/i}$ escrito como

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_S^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Então, chega-se a $\langle \mathbf{f}^* . H \mathbf{f}_{/i} \rangle$.

Calculando-se $H \mathbf{f}_{/i}$, tem-se:

$$H \mathbf{f}_{/i} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{g/i} \\ U_{S/i} \\ P_{/i} \\ \varepsilon_{g/i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix},$$

ou

$$\mathbf{H}\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_1} U_{g/i} + \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_2} U_{s/i} + \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_3} P_{/i} + \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_4} \varepsilon_{g/i} \\ \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_1} U_{g/i} + \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_2} U_{s/i} + \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_3} P_{/i} + \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_4} \varepsilon_{g/i} \\ \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_1} U_{g/i} + \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_2} U_{s/i} + \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_3} P_{/i} + \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_4} \varepsilon_{g/i} \\ \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_1} U_{g/i} + \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_2} U_{s/i} + \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_3} P_{/i} + \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_4} \varepsilon_{g/i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} . \quad (41)$$

Desta maneira, as Equações (42) a (45) correspondem, respectivamente, às equações (AP2.02) a (AP2.05) do APÊNDICE (AP2). Tem-se então que:

$$\beta_1 = \frac{d}{dz} U_{g/i} + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{g/i} + \frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} - \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \varepsilon_{g/i} \quad (42)$$

$$\beta_2 = \frac{d}{dz} U_{s/i} - \left(\frac{1}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{s/i} - \left(\frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} - \left[\frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)^2} \right] \frac{d\varepsilon_g}{dz} \varepsilon_{g/i} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{g/i} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D \text{Re}_g^{\frac{1}{4}}} \right) U_{g/i} - 2\rho_s U_s \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{s/i} - \frac{d}{dz} P_{/i} - \rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} + \\ & \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} + g\rho_s \varepsilon_{g/i} - g\rho_g \varepsilon_{g/i} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 = & \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} - \\
& 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} + \\
& \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} + \frac{2g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} + \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} + \\
& \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \varepsilon_{g/i}
\end{aligned} \tag{45}$$

Agora, calcula-se $\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{Hf}_{/i} \rangle$ usando-se as Equações (40) e (41):

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{Hf}_{/i} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix}^T . \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle U_g^* \beta_1 + U_s^* \beta_2 + P^* \beta_3 + \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle . \text{ Então:}$$

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{Hf}_{/i} \rangle = \langle U_g^* \beta_1 \rangle + \langle U_s^* \beta_2 \rangle + \langle P^* \beta_3 \rangle + \langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle \tag{46}$$

que corresponde à Equação (AP3.04) do Apêndice (AP3).

Têm-se então as Equações (47) a (50) que se seguem, correspondentes, respectivamente, às Equações (AP3.05) a (AP3.08).

$$\begin{aligned}
\langle U_g^* \beta_1 \rangle = & U_g^* U_{g/i} - \left\langle U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{g/i} U_g^* \right\rangle + U_g^* \frac{U_g}{\varepsilon_g} \varepsilon_{g/i} - \\
& \left\langle \frac{U_g}{\varepsilon_g} \varepsilon_{g/i} U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} \right\rangle - \left\langle \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \varepsilon_{g/i} U_g^* \right\rangle
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\langle U_s^* \beta_2 \rangle = & U_s^* U_{s/i} - \left\langle U_{s/i} \frac{dU_s^*}{dz} \right\rangle - \left\langle \left(\frac{1}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{s/i} U_s^* \right\rangle - \\
& U_s^* \left(\frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \right) \varepsilon_{g/i} + \left\langle \left(\frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \right) \varepsilon_{g/i} \frac{dU_s^*}{dz} \right\rangle - \left\langle \left[\frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)^2} \right] \frac{d\varepsilon_g}{dz} \varepsilon_{g/i} U_s^* \right\rangle
\end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
\langle P^* \beta_3 \rangle = & \langle 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{g/i} P^* \rangle - \left\langle \frac{7}{8} \left(\frac{0,316 \rho_g U_g}{DR \varepsilon_g^4} \right) U_{g/i} P^* \right\rangle - \\
& \langle 2\rho_s U_s \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{s/i} P^* \rangle - P^* P_{/i} + \langle P_{/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle - P^* \rho_s U_s^2 \varepsilon_{g/i} + \\
& \langle \rho_s U_s^2 \varepsilon_{g/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle + P^* \rho_g U_g^2 \varepsilon_{g/i} - \\
& \langle \rho_g U_g^2 \varepsilon_{g/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle + \langle g \rho_s \varepsilon_{g/i} P^* \rangle - \langle g \rho_g \varepsilon_{g/i} P^* \rangle
\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle = & \left\langle \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} \varepsilon_g^* \right\rangle - \\
& \left\langle 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{2g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* \right\rangle + \varepsilon_g^* \varepsilon_{g/i} - \\
& \left\langle \varepsilon_{g/i} \frac{d\varepsilon_g^*}{dz} \right\rangle + \left\langle \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \varepsilon_{g/i} \varepsilon_g^* \right\rangle
\end{aligned} \tag{50}$$

Substituindo as Equações (47) a (50) na Equação (46):

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{H} \mathbf{f}_{/i} \rangle = & U_g^* U_{g/i} + U_g^* \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} + U_s^* U_{s/i} - U_s^* \left(\frac{U_s}{1 - \epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} - P^* P_{/i} - P^* \rho_s U_s^2 \epsilon_{g/i} + \\
& P^* \rho_g U_g^2 \epsilon_{g/i} + \epsilon_g^* \epsilon_{g/i} - \langle U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle + \langle \frac{1}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} U_g^* \rangle - \langle \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle - \\
& \langle \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_g^* \rangle - \langle U_{s/i} \frac{dU_s^*}{dz} \rangle - \left\langle \left(\frac{1}{1 - \epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} U_s^* \right\rangle + \left\langle \left(\frac{U_s}{1 - \epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} \frac{dU_s^*}{dz} \right\rangle - \\
& \left\langle \left[\frac{U_s}{(1 - \epsilon_g)^2} \right] \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_s^* \right\rangle + \langle 2 \rho_g U_g \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} P^* \rangle - \left\langle \frac{7}{8} \left(\frac{0,316 \rho_g U_g}{D \text{Re}_g^{1/4}} \right) U_{g/i} P^* \right\rangle + \\
& \langle \rho_s U_s^2 \epsilon_{g/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle - \langle \rho_g U_g^2 \epsilon_{g/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle + \langle g \rho_s \epsilon_{g/i} P^* \rangle - \langle g \rho_g \epsilon_{g/i} P^* \rangle + \langle P_{/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle + \\
& \left\langle \frac{g(1 - \epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} \epsilon_g^* \right\rangle - \langle 2 \rho_s U_s \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} P^* \rangle - \\
& \left\langle 2 \frac{g(1 - \epsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} \epsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{g(1 - \epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} \epsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{2g(1 - \epsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} \epsilon_g^* \right\rangle - \langle \epsilon_{g/i} \frac{d\epsilon_g^*}{dz} \rangle + \\
& \left\langle \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \epsilon_{g/i} \epsilon_g^* \right\rangle
\end{aligned} \tag{51}$$

Esta Equação (51) corresponde à Equação (AP3.10).

Utilizando a Equação (39), que corresponde à Equação (AP3.01), devem-se comparar os seus primeiro e segundo membros. Tem-se então que encontrar $\langle \mathbf{f}_{/i} . \mathbf{H}^* \mathbf{f}^* \rangle$, pois $\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{H} \mathbf{f}_{/i} \rangle$ é a Equação (51).

Definindo uma matriz genérica $\mathbf{H}^*$ por

$$H^* = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{24} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} & \theta_{34} \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{bmatrix}, \quad (52)$$

que corresponde a Equação (AP3.11), tem-se que os elementos da matriz H^* apresentados nas Equações (53) a (68) correspondem às Equações (AP3.14) a (AP3.29) do Apêndice (AP3). Assim:

$$\theta_{11} = -\frac{d}{dz} + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (53)$$

$$\theta_{12} = 0 \quad (54)$$

$$\theta_{13} = 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D Re_g^{\frac{1}{4}}} \right) \quad (55)$$

$$\theta_{14} = \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) \quad (56)$$

$$\theta_{21} = 0 \quad (57)$$

$$\theta_{22} = -\frac{d}{dz} - \left(\frac{1}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (58)$$

$$\theta_{23} = -2\rho_s U_s \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \theta_{24} = & -2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) + \\ & \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) + 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \end{aligned} \quad (60)$$

$$\theta_{31} = 0 \quad (61)$$

$$\theta_{32} = 0 \quad (62)$$

$$\theta_{33} = -\frac{d}{dz} \quad (63)$$

$$\theta_{34} = 0 \quad (64)$$

$$\theta_{41} = -\frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (65)$$

$$\theta_{42} = \left(\frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d}{dz} + \left[\frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)^2} \right] \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (66)$$

$$\theta_{43} = 2\rho_s \frac{U_s^2}{(1-\varepsilon_g)} \frac{d\varepsilon_g}{dz} + \rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} + 2\rho_g \frac{U_g^2}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} + g\rho_s - g\rho_g \quad (67)$$

$$\theta_{44} = -\frac{d}{dz} + \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \quad (68)$$

Agora, é possível encontrar o concomitante bilinear CB, correspondente às parcelas que não contêm integrais. Desta forma, o concomitante bilinear apresentado na Equação (69) a seguir é a Equação (AP3.30).

$$CB = \left[\begin{aligned} & -U_g^* U_{g/i} - U_g^* \frac{U_g}{\varepsilon_g} \varepsilon_{g/i} - U_s^* U_{s/i} + U_s^* \left(\frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \right) \varepsilon_{g/i} + P^* P_{/i} + \\ & P^* \rho_s U_s^2 \varepsilon_{g/i} - P^* \rho_g U_g^2 \varepsilon_{g/i} - \varepsilon_g^* \varepsilon_{g/i} \end{aligned} \right]_0^L \quad (69)$$

Estabelecendo as condições iniciais para o sistema direto e de contorno para o sistema adjunto, tem-se que as Equações (70) e (71) correspondem, respectivamente, às Equações (AP3.33) e (AP3.34).

Para $z = 0$:

$$U_{g(0)} = U_{g0} \quad , \quad U_{s(0)} = U_{s0} \quad , \quad P_{(0)} = P_0 \quad , \quad \varepsilon_{g(0)} = \varepsilon_{g0} \quad (70)$$

Para $z = L$:

$$U_{g(L)}^* = 0 \quad , \quad U_{s(L)}^* = 0 \quad , \quad P_{(L)}^* = 0 \quad , \quad \varepsilon_{g(L)}^* = 0 \quad (71)$$

Substituindo as Equações (70) e (71) em (69) tem-se o concomitante bilinear CB na Equação (72) a seguir, que corresponde à Equação (AP3.35):

$$\begin{aligned} \text{CB} = & U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} \epsilon_{g0/i} + U_{s0}^* U_{s0/i} - U_{s0}^* \left(\frac{U_{s0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) \epsilon_{g0/i} - P_0^* P_{0/i} - \\ & P_0^* \rho_s U_{s0}^2 \epsilon_{g0/i} + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 \epsilon_{g0/i} + \epsilon_{g0}^* \epsilon_{g0/i} \end{aligned} \quad (72)$$

3.1.3 Determinação do sistema adjunto

O sistema adjunto é obtido para que se tenham U_g^* , U_s^* , P^* e ϵ_g^* . Este sistema pode ser escrito pela Equação (A.17) como $\mathbf{S}^+ = \mathbf{H}^* \mathbf{f}^*$, onde $\mathbf{H}^*$ é o operador adjunto definido pela Equação (52), cujos elementos já são conhecidos, o vetor adjunto $\mathbf{f}^*$ é definido

na Equação (40) e $\mathbf{S}^+$ é uma função conhecida e escrita por $\mathbf{S}^+ = \begin{bmatrix} S_{U_g}^+ \\ S_{U_s}^+ \\ S_P^+ \\ S_{\epsilon_g}^+ \end{bmatrix}$, conforme a

Equação (A.07).

É possível obter-se a função $\mathbf{S}^+$ da seguinte maneira: Pela Equação (A.06), $R = \langle \mathbf{S}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle$, onde R é o funcional-resposta, que neste trabalho será usado, de início, $\overline{\epsilon_g}$ (fração volumétrica média do gás), sendo a integração realizada no espaço de fase (de 0 a L). Depois, far-se-á $\overline{\epsilon_s} = 1 - \overline{\epsilon_g}$, pois a análise de sensibilidade será feita para $\overline{\epsilon_s}$ (fração volumétrica média do sólido). Assim, tem-se que:

$$\overline{\epsilon_g} = \int_0^L S_{\epsilon_g}^+ \epsilon_g dz. \quad (73)$$

Como, pelo teorema do valor médio, $\overline{\epsilon_g} = \frac{1}{L} \epsilon_g >$ ou

$$\overline{\epsilon_g} = \int_0^L \frac{1}{L} \epsilon_g dz, \quad (74)$$

obtem-se, por comparação das Equações (73) e (74) e a partir da Equação (A.07), que

$$\mathbf{S}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}. \quad (75)$$

$$\text{Assim, vem que: } \mathbf{H}^* \mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Portanto, tem-se

$$\begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{24} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} & \theta_{34} \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \text{ onde os elementos } \theta_{11} \text{ a } \theta_{44} \text{ são vistos nas Equações}$$

(53) a (68), respectivamente.

Realizando a multiplicação de matrizes indicada e substituindo os valores de Θ , tem-se:

$$\begin{aligned} \theta_{11} U_g^* + 0 \cdot U_s^* + \theta_{13} P^* + \theta_{14} \varepsilon_g^* &= 0 \quad \rightarrow \\ \left(-\frac{d}{dz} + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) U_g^* + \left[2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D \text{Re}_g^{\frac{1}{4}}} \right) \right] P^* + \\ \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) \right] \varepsilon_g^* &= 0 \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{dz} U_g^* + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_g^* + 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} P^* - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D Re_g^{\frac{1}{4}}} \right) P^* + \\
& \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) \varepsilon_g^* = 0
\end{aligned} \tag{77}$$

$$0.U_g^* + \theta_{22}U_s^* + \theta_{23}P^* + \theta_{24}\varepsilon_g^* = 0 \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{d}{dz} - \left(\frac{1}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right] U_s^* + \left(-2\rho_s U_s \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) P^* + \\
& \left[-2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) + \right. \\
& \left. \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) + 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \varepsilon_g^* = 0 \quad \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d}{dz} U_s^* - \left(\frac{1}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_s^* - 2\rho_s U_s \frac{d\varepsilon_g}{dz} P^* - \\
& 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) \varepsilon_g^* + \\
& \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) \varepsilon_g^* + 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \varepsilon_g^* = 0
\end{aligned} \tag{78}$$

$$0.U_g^* + 0.U_s^* + \theta_{33}P^* + 0.\varepsilon_g^* = 0 \quad \therefore$$

$$\frac{d}{dz} P^* = 0 \tag{79}$$

$$\theta_{41}U_g^* + \theta_{42}U_s^* + \theta_{43}P^* + \theta_{44}\varepsilon_g^* = \frac{1}{L} \quad \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) U_g^* + \left\{ \left(\frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d}{dz} + \left[\frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)^2} \right] \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right\} U_s^* + \\ & \left(\rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} - \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} + 2\rho_s \frac{U_s^2}{1-\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} + 2\rho_g \frac{U_g^2}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} + g\rho_s - g\rho_g \right) P^* + \\ & \left\{ -\frac{d}{dz} + \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \right\} \varepsilon_g^* = \frac{1}{L} \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) U_g^* + \left\{ \left(\frac{U_s}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d}{dz} + \left[\frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)^2} \right] \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right\} U_s^* + \\ & \left(\rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} - \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} + 2\rho_s \frac{U_s^2}{1-\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} + 2\rho_g \frac{U_g^2}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} + g\rho_s - g\rho_g \right) P^* + \\ & \left\{ -\frac{d}{dz} + \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \right\} \varepsilon_g^* = \frac{1}{L} \end{aligned} \quad (80)$$

Portanto, o sistema adjunto é constituído pelas Equações (77) a (80) e igualmente resolvido pelo método de Runge-Kutta do aplicativo MATLAB, com as condições de contorno da Equação (71).

3.1.4 Coeficientes de sensibilidade $\frac{\partial R}{\partial p_i}$ e as sensibilidades S

Para se fazer análise de sensibilidade foi escolhida a fração volumétrica média do sólido $\overline{\varepsilon_s}$ ao longo do riser e os parâmetros estudados são:

- a) massa específica do sólido ρ_s ;
- b) massa específica do gás ρ_g ;
- c) diâmetro do riser D ;
- d) fluxo de sólidos por unidade de área no riser W ;
- e) vazão volumétrica do gás Q ;
- f) comprimento do riser L ;
- g) viscosidade dinâmica do gás μ_g .

Pela Equação (A.15) tem-se que o coeficiente de sensibilidade relativo a um parâmetro é definido por $\frac{\partial R}{\partial p_i} = \langle S_{/i}^+ . f \rangle + \langle S^+ . f_{/i} \rangle$. Sabe-se ainda que, pela Equação (A.19) $\langle S^+ . f_{/i} \rangle = \langle f^* . S_{(i)} \rangle + CB(f^*, f_{/i})$, de modo a se escrever o coeficiente de sensibilidade como

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \langle S_{/i}^+ . f \rangle + \langle f^* . S_{(i)} \rangle + CB(f^*, f_{/i}) \quad (81)$$

É conveniente salientar que serão calculados os coeficientes de sensibilidade para a fração volumétrica média do gás. Porém, desejam-se os coeficientes de sensibilidade para a fração volumétrica média do sólido. Como $\overline{\varepsilon_s} = 1 - \overline{\varepsilon_g}$ tem-se que, derivando esta expressão em relação a um parâmetro genérico: $\frac{\partial \overline{\varepsilon_s}}{\partial p_i} = \frac{\partial (1 - \overline{\varepsilon_g})}{\partial p_i}$. Portanto: $\frac{\partial \overline{\varepsilon_s}}{\partial p_i} = - \frac{\partial \overline{\varepsilon_g}}{\partial p_i}$. Desta forma, serão obtidos os coeficientes de sensibilidade para $\overline{\varepsilon_s}$ simplesmente pela troca de sinal dos coeficientes calculados para $\overline{\varepsilon_g}$.

Também é importante calcular a sensibilidade (S) do funcional-resposta em relação a um parâmetro, podendo esta ser obtida pela expressão que se segue:

$$S = \frac{\frac{\delta R}{\delta p}}{\frac{R_0}{p_0}} = \frac{\delta R}{R_0} \cdot \frac{p_0}{\delta p} = \frac{\delta R}{\delta p} \cdot \frac{p_0}{R_0} \quad (82)$$

onde R_0 é o valor do funcional-resposta relativo ao valor do parâmetro de referência p_0 e $\frac{\partial R}{\partial p_i}$ é o coeficiente de sensibilidade. Logo, para um parâmetro p_i qualquer:

$$S = \frac{\partial R}{\partial p_i} \cdot \frac{p_0}{R_0} \quad (83)$$

Desta forma, de posse do coeficiente de sensibilidade é possível calcular a sensibilidade do funcional-resposta em relação a qualquer parâmetro.

Para se determinar o coeficiente de sensibilidade e, posteriormente, a sensibilidade, é necessário que sejam obtidas as parcelas: $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle$, $\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle$ e $CB(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/i})$.

3.1.4.1 Cálculo de $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle$

A Equação (84) a seguir corresponde à Equação (AP4.01) que foi demonstrada no APÊNDICE (AP4) e apresenta $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle$ em relação a qualquer parâmetro.

$$\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L} \right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle \quad (84)$$

Para os parâmetros ρ_s , ρ_g , D , W , Q e μ_g tem-se, conforme as Equações (AP4.02) a (AP4.06) e (AP4.08) do Apêndice (AP4), respectivamente, que

$$\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = 0 \quad (85)$$

e para o parâmetro L tem-se que

$$\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle -\frac{1}{L^2} \varepsilon_g \right\rangle \quad (86)$$

que corresponde à Equação (AP4.07).

3.1.4.2 Cálculo de $\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle$

Pela Equação (AP3.02), $\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix}$. Sendo $\mathbf{S}_{(i)} = \begin{bmatrix} S_{(i)1} \\ S_{(i)2} \\ S_{(i)3} \\ S_{(i)4} \end{bmatrix}$ os termos de fonte, tem-se

que:

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} S_{(i)1} \\ S_{(i)2} \\ S_{(i)3} \\ S_{(i)4} \end{bmatrix} \right\rangle = \langle U_g^* S_{(i)1} + U_s^* S_{(i)2} + P^* S_{(i)3} + \varepsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad \therefore$$

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* S_{(i)1} + U_s^* S_{(i)2} + P^* S_{(i)3} + \varepsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad , \quad (87)$$

que corresponde à Equação (AP6.01)

onde, os termos de fonte para todos os parâmetros são:

$$S_{(i)1} = 0 \quad (88)$$

que corresponde a Equação (AP5.01),

$$S_{(i)2} = 0 \quad (89)$$

que corresponde a Equação (AP5.02),

$$\begin{aligned}
S_{(i)3} = & \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} U_s^2 - \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} U_g^2 \right) + \\
& \left[\frac{(0,158 D^{1,25}) \frac{\partial (\rho_g^{0,75})}{\partial p_i} - (0,158 \rho_g^{0,75}) \frac{\partial (D^{1,25})}{\partial p_i}}{D^{2,5}} \right] (U_g^{1,75} \mu_g^{0,25}) + \\
& \left(\frac{0,158 \rho_g^{0,75}}{D^{1,25}} \right) \left[U_g^{1,75} \cdot \frac{\partial (\mu_g^{0,25})}{\partial p_i} \right] + \\
& g \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} - \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} \rho_s - \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} \varepsilon_g + \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} \rho_g + \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} \varepsilon_g \right)
\end{aligned} \tag{90}$$

que corresponde à Equação (AP5.03) e

$$\begin{aligned}
S_{(i)4} = & \left[\frac{g U_s^2 \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} + g(1 - \varepsilon_g) \frac{\partial (U_s^2)}{\partial p_i}}{U_s^4} \right] \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] - \left[\frac{g(1 - \varepsilon_g)}{U_s^2} \right] \\
& \left\{ \left(\frac{\rho_s \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} \rho_g}{\rho_s^2} \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{(1 - S_\infty)^2} \right) \left(\frac{U_s \frac{\partial U_g}{\partial p_i} - U_g \frac{\partial U_s}{\partial p_i}}{U_g^2} \right) \right\} - \\
& \left\{ \left(\frac{\rho_s \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} \rho_g}{\rho_s^2} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{91}$$

que corresponde à Equação (AP5.04).

Os termos de fonte $S_{(i)1}$ e $S_{(i)2}$ dados pelas Equações (AP5.01) e (AP5.02), respectivamente, são iguais a zero para todos os parâmetros analisados. As expressões de $S_{(i)3}$ e $S_{(i)4}$ escritas para um parâmetro genérico encontram-se no APÊNDICE 5 (AP5), respectivamente, nas Equações (AP5.03) e (AP5.04).

3.1.4.3 Cálculo de $CB(f^*, f_{/i})$

O concomitante bilinear já foi apresentado na Equação (72) e a sua expressão geral, para todos os parâmetros é dada pela Equação (AP7.33) e apresentada na seguinte forma:

$$CB = U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{s0}^* U_{s0/i} + \varepsilon_{g0/i} \left[-U_{s0}^* \left(\frac{U_{s0}}{1 - \varepsilon_{g0}} \right) \varepsilon_{g0/i} + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\varepsilon_{g0}} - P_0^* \rho_s U_{s0}^2 + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 + \varepsilon_{g0}^* \right] \quad (92)$$

De posse dos valores de $U_{g0/i}$, $U_{s0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{0/i}$ mostrados no APÊNDICE 7 para todos os parâmetros, Equações (AP7.05) a (AP7.32), é possível calcular o seu valor para cada um destes.

3.1.4.4 Cálculo do coeficiente de sensibilidade

Sabe-se que o coeficiente geral de sensibilidade para a fração volumétrica média do gás é dado por $\frac{\partial \overline{\varepsilon_g}}{\partial p_i} = \langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle + CB(f^*, f_{/i})$.

De posse dos valores de $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle$, $\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle$ e $CB(f^*, f_{/i})$ obtém-se a expressão geral de $\frac{\partial \overline{\varepsilon_g}}{\partial p_i}$.

Pela Equação (84) sabe-se que, para um parâmetro genérico qualquer, $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L} \right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle$ e que já são conhecidas as derivadas $\left(\frac{1}{L} \right)_{/i}$ para cada parâmetro. Ainda, pela Equação (87) tem-se também, para um parâmetro genérico qualquer, que $\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* S_{(i)1} + U_s^* S_{(i)2} + P^* S_{(i)3} + \varepsilon_g^* S_{(i)4} \rangle$, onde já são conhecidos os quatro termos de fonte para todas as variáveis de estado e que U_g^* , U_s^* , P^* e ε_g^* já foram calculados no sistema adjunto por meio do aplicativo MATLAB. Conhecendo-se também o concomitante bilinear $CB(f^*, f_{/i})$ dado pela Equação (72) e escrito como

$$CB = U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} \epsilon_{g0/i} + U_{S0}^* U_{S0/i} - U_{S0}^* \left(\frac{U_{S0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) \epsilon_{g0/i} - P_0^* P_{0/i} - \\ P_0^* \rho_S U_{S0}^2 \epsilon_{g0/i} + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 \epsilon_{g0/i} + \epsilon_{g0}^* \epsilon_{g0/i}$$

relativamente a todos os parâmetros, é possível escrever uma expressão geral para o coeficiente de sensibilidade. Assim:

$$\frac{\partial \overline{\epsilon_g}}{\partial p_i} = \left\langle \left(\frac{1}{L} \right)_{/i} \epsilon_g \right\rangle + \langle U_g^* S_{(i)1} + U_S^* S_{(i)2} + P^* S_{(i)3} + \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle + U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} \epsilon_{g0/i} + \\ U_{S0}^* U_{S0/i} - U_{S0}^* \left(\frac{U_{S0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) \epsilon_{g0/i} - P_0^* P_{0/i} - P_0^* \rho_S U_{S0}^2 \epsilon_{g0/i} + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 \epsilon_{g0/i} + \epsilon_{g0}^* \epsilon_{g0/i} \quad (93)$$

É conveniente salientar que, para o coeficiente de sensibilidade de $\overline{\epsilon_g}$ relativo ao parâmetro L, há uma dependência do funcional-resposta em relação ao limite superior de integração, que é o próprio L. Portanto, o coeficiente de sensibilidade em relação a L receberá como acréscimo o termo a seguir, conforme a Equação (AP8.05) do APÊNDICE 8 :

$$\frac{1}{L} \epsilon_g(L) \quad (94)$$

Como exemplo, pode-se verificar que o coeficiente de sensibilidade relativo à viscosidade dinâmica do gás é dado por $\frac{\partial \overline{\epsilon_g}}{\partial \mu_g} = \left\langle P^* \left(\frac{0,0395 \rho_g^{0,75} U_g^{1,75}}{D^{1,25} \mu_g^{0,75}} \right) \right\rangle$.

3.2 Análise de sensibilidade pelo método direto

Para determinar os coeficientes de sensibilidade pelo método direto faz-se o valor de referência p_0 do parâmetro diminuir em n% e aumentar em n%, onde geralmente $0 < n \leq 15$, e verificam-se os respectivos valores dos funcionais-resposta para as respectivas diminuição e aumento do parâmetro, obtendo-se assim os coeficientes de sensibilidade pela expressão:

$$\frac{\delta R}{\delta p} = \frac{R_{(p_0 + n\%p_0)} - R_{(p_0 - n\%p_0)}}{(p_0 + n\%p_0) - (p_0 - n\%p_0)}, \quad (95)$$

onde R_0 é o valor do funcional-resposta relativo ao valor p_0 do parâmetro de referência. É conveniente ressaltar que também é possível calcular o coeficiente de sensibilidade fazendo o parâmetro variar entre o valor de referência p_0 e o valor $p_0 + n\%p_0$ ou entre $p_0 - n\%p_0$ e p_0 . A sensibilidade (S) do funcional-resposta em relação a um parâmetro pode ser calculada pela Equação (84) já mostrada anteriormente.

Como o coeficiente de sensibilidade $\frac{\delta R}{\delta p}$ fornece apenas a inclinação da reta em um gráfico R versus p, sendo R o funcional-resposta e p o parâmetro, a sensibilidade S em relação a este parâmetro nos mostra a influência do mesmo no funcional-resposta.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

4.1 Método direto

A seguir são mostradas as tabelas (Tabelas 2 a 8) e os respectivos gráficos ou superfícies-resposta (Figuras 10 a 16) de $\overline{\varepsilon_s}$ em função dos parâmetros, o que mostra uma quase linearidade dos gráficos, fato que permite calcular cada coeficiente de sensibilidade usando qualquer valor de n , sendo $0 < n \leq 15$. Foi então escolhido $n = 5$, de modo que a Equação (92) ficou assim escrita:

$$\frac{\delta \overline{\varepsilon_s}}{\delta p} = \frac{R_{(p_0 + 5\% p_0)} - R_{(p_0 - 5\% p_0)}}{(p_0 + 5\% p_0) - (p_0 - 5\% p_0)} \quad (96)$$

Tabela 2: Valores de $\overline{\varepsilon_s}$ para cada valor de ρ_s

Massa específica do sólido - ρ_s (kg/m ³)		$\overline{\varepsilon_s}$
$\rho_s - 15\% \rho_s$	722,5	$10,944300969 \cdot 10^{-5}$
$\rho_s - 10\% \rho_s$	765,0	$10,334542034 \cdot 10^{-5}$
$\rho_s - 5\% \rho_s$	807,5	$9,790211520 \cdot 10^{-5}$
ρ_s	850,0	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
$\rho_s + 5\% \rho_s$	892,5	$8,857240764 \cdot 10^{-5}$
$\rho_s + 10\% \rho_s$	935,0	$8,454424583 \cdot 10^{-5}$
$\rho_s + 15\% \rho_s$	977,5	$8,086663002 \cdot 10^{-5}$

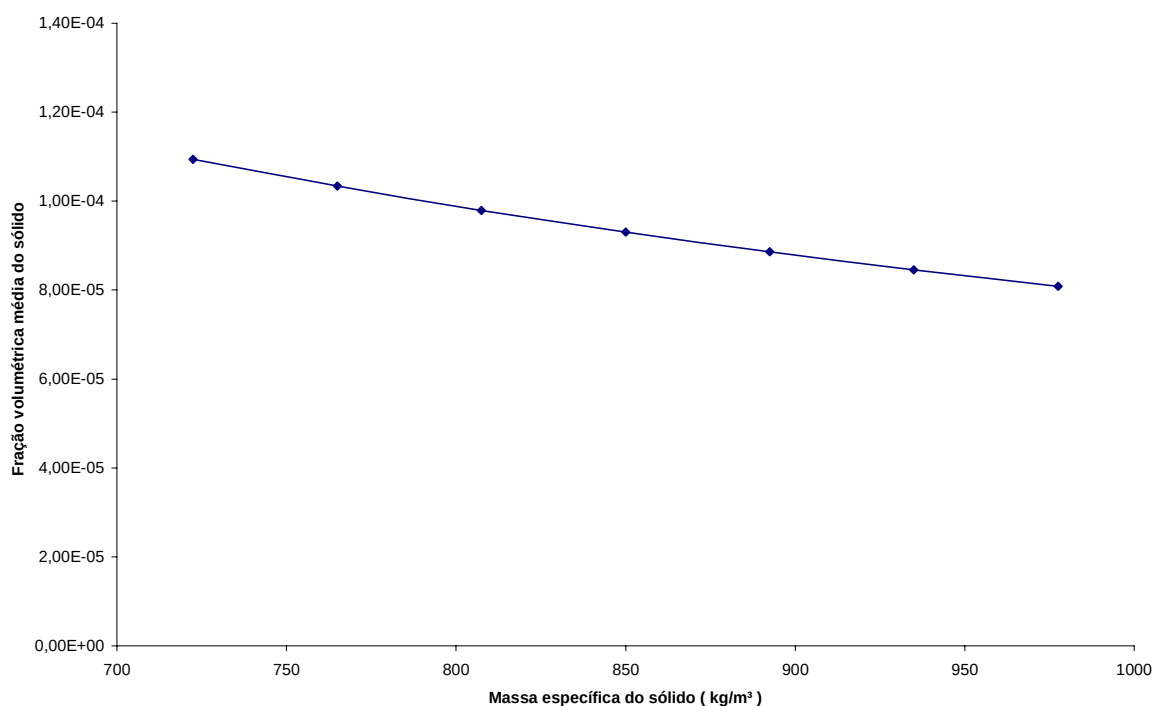


Figura 10: Fração volumétrica média do sólido em função de ρ_s

Observando-se o gráfico da Figura 10 verifica-se que o aumento no valor da massa específica do sólido, mantidos todos os outros parâmetros, provoca uma diminuição quase linear no funcional-resposta em apreço. Isto indica, previamente, que o coeficiente de sensibilidade em relação a este parâmetro será negativo. Esta comprovação será apresentada na Tabela 9.

Tabela 3: Valores de $\bar{\varepsilon}_s$ para cada valor de ρ_g

Massa específica do gás - ρ_g (kg/m ³)		$\bar{\varepsilon}_s$
$\rho_g - 15\% \rho_g$	0,9894986	$9,300294160 \cdot 10^{-5}$
$\rho_g - 10\% \rho_g$	1,0477044	$9,300321883 \cdot 10^{-5}$
$\rho_g - 5\% \rho_g$	1,1059102	$9,300349612 \cdot 10^{-5}$
ρ_g	1,1641160	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
$\rho_g + 5\% \rho_g$	1,2223218	$9,300405078 \cdot 10^{-5}$
$\rho_g + 10\% \rho_g$	1,2805276	$9,300432817 \cdot 10^{-5}$
$\rho_g + 15\% \rho_g$	1,3387334	$9,300460560 \cdot 10^{-5}$

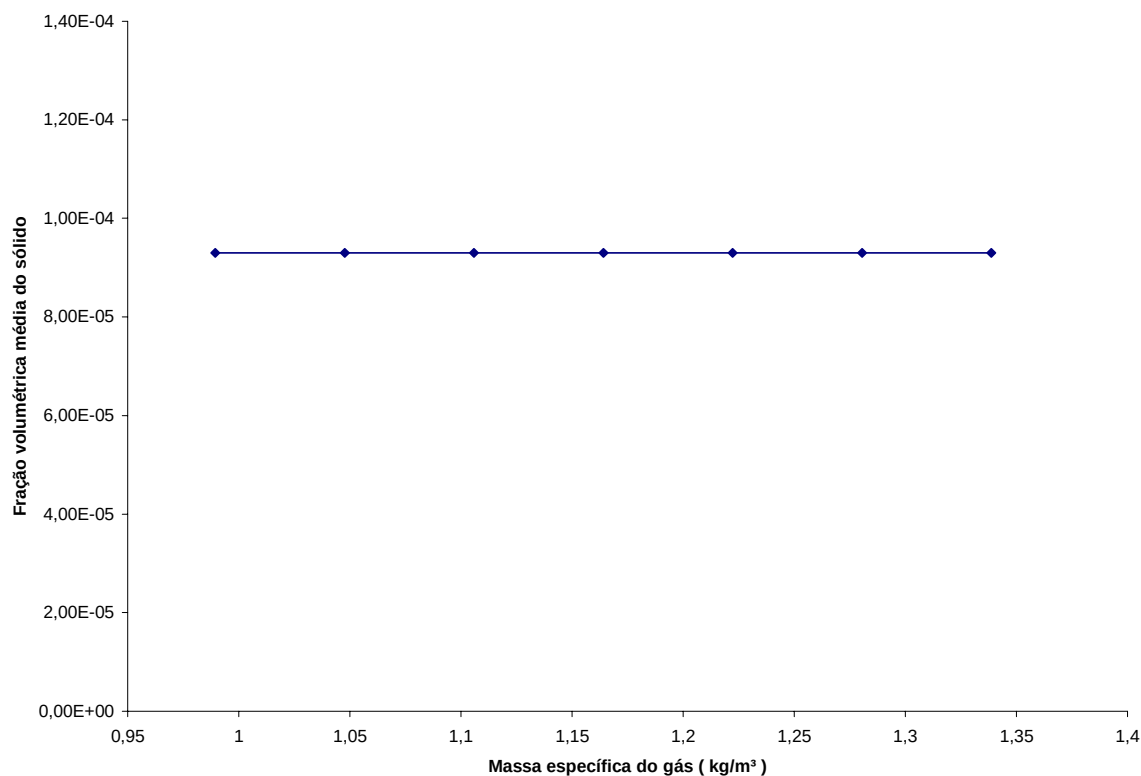


Figura 11: Fração volumétrica média do sólido em função de ρ_g

A análise do gráfico apresentado na Figura 11 permite verificar-se que o aumento no valor da massa específica do gás, mantendo-se todos os outros parâmetros, provoca um aumento quase linear no funcional-resposta de interesse. Esta constatação indica que o coeficiente de sensibilidade em relação a este parâmetro será positivo, fato que será mostrado na Tabela 9.

Tabela 4: Valores de $\bar{\epsilon}_s$ para cada valor de D

Diâmetro do riser - D (m)		$\bar{\epsilon}_s$
D - 15%D	0,0272	$6,985884953 \cdot 10^{-5}$
D - 10%D	0,0288	$7,704247958 \cdot 10^{-5}$
D - 5%D	0,0304	$8,476272175 \cdot 10^{-5}$
D	0,032	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
D+5%D	0,0336	$10,175266284 \cdot 10^{-5}$
D+10%D	0,0352	$11,099940147 \cdot 10^{-5}$
D+15%D	0,0368	$12,073655317 \cdot 10^{-5}$

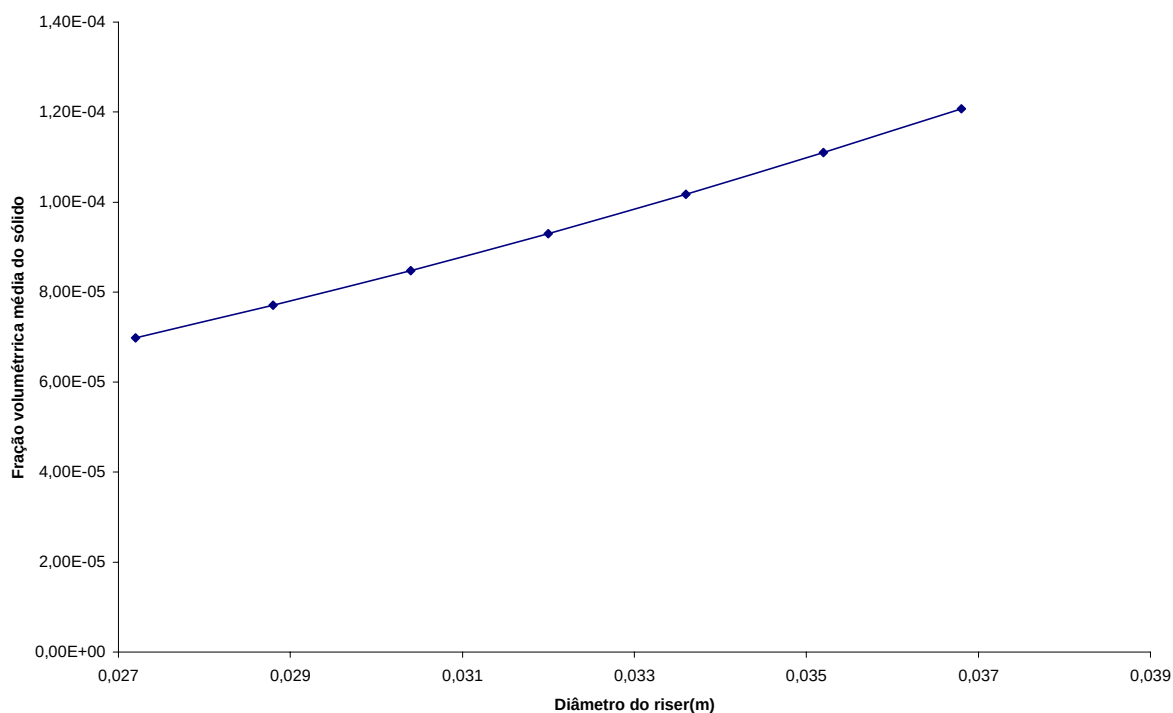


Figura 12: Fração volumétrica média do sólido em função de D

Tabela 5: Valores de $\bar{\varepsilon}_s$ para cada valor de W

Fluxo de sólidos por unidade de área -W (kg/m ² .s)		$\bar{\varepsilon}_s$
W - 15%W	6,035	$7,904700729.10^{-5}$
W - 10%W	6,390	$8,369887111.10^{-5}$
W - 5%W	6,745	$8,835111772.10^{-5}$
W	7,100	$9,300377343.10^{-5}$
W+5%W	7,455	$9,765689321.10^{-5}$
W+10%W	7,810	$10,231052141.10^{-5}$
W+15%W	8,165	$10,696471266.10^{-5}$

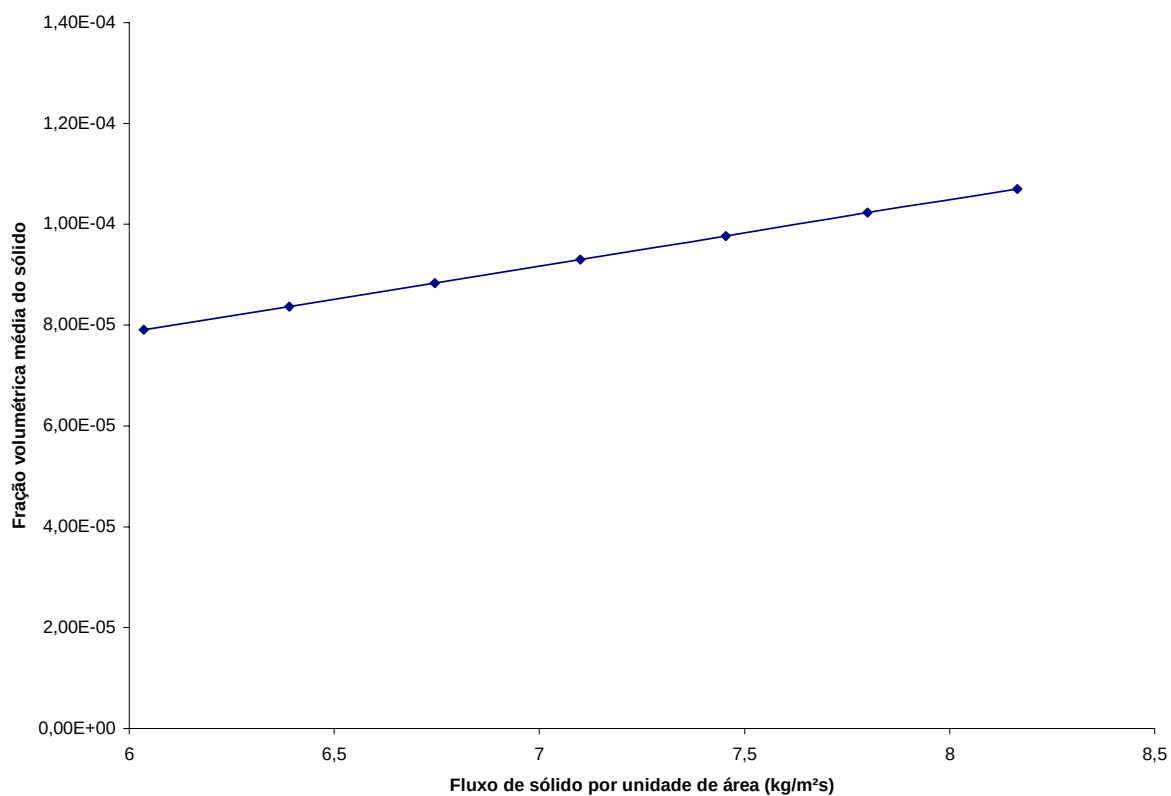
**Figura 13:** Fração volumétrica média do sólido em função de W

Tabela 6: Valores de $\bar{\varepsilon}_s$ para cada valor de Q

Vazão do gás – Q (m ³ /s)		$\bar{\varepsilon}_s$
Q - 15% Q	0,00323	10,81086121.10 ⁻⁵
Q - 10% Q	0,00342	10,249092725.10 ⁻⁵
Q - 5% Q	0,00361	9,748672229.10 ⁻⁵
Q	0,00380	9,300377343.10 ⁻⁵
Q + 5% Q	0,00399	8,896747449.10 ⁻⁵
Q + 10% Q	0,00418	8,531681081.10 ⁻⁵
Q + 15% Q	0,00437	8,200138871.10 ⁻⁵

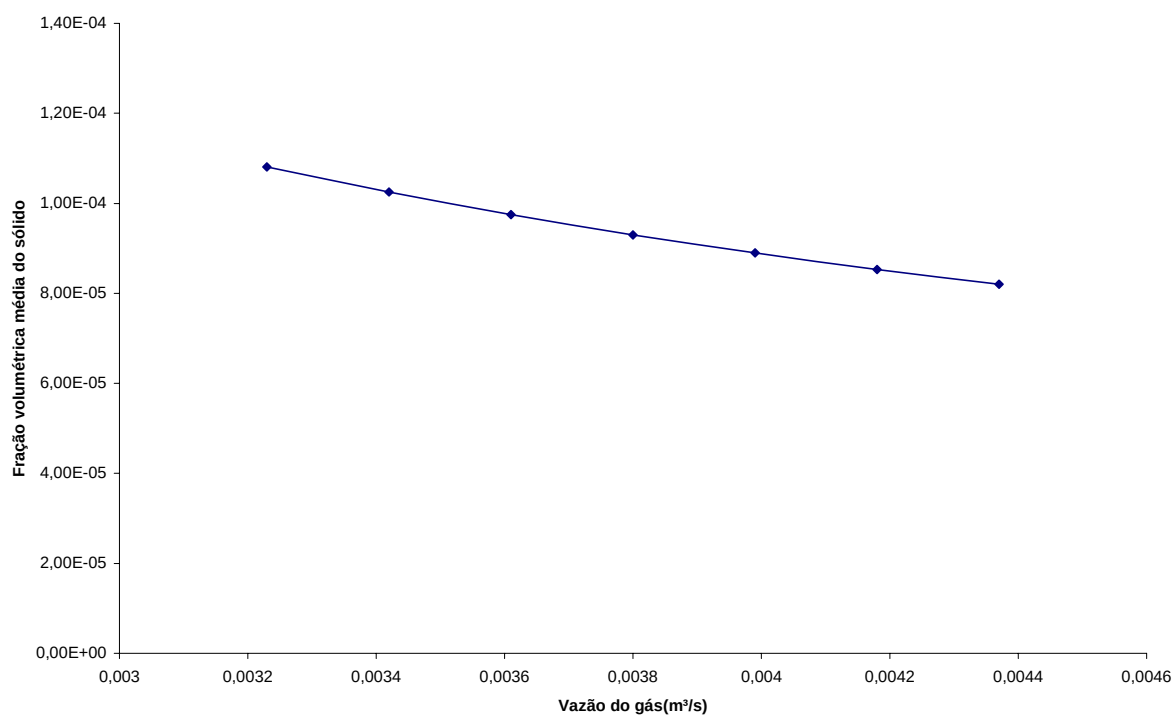
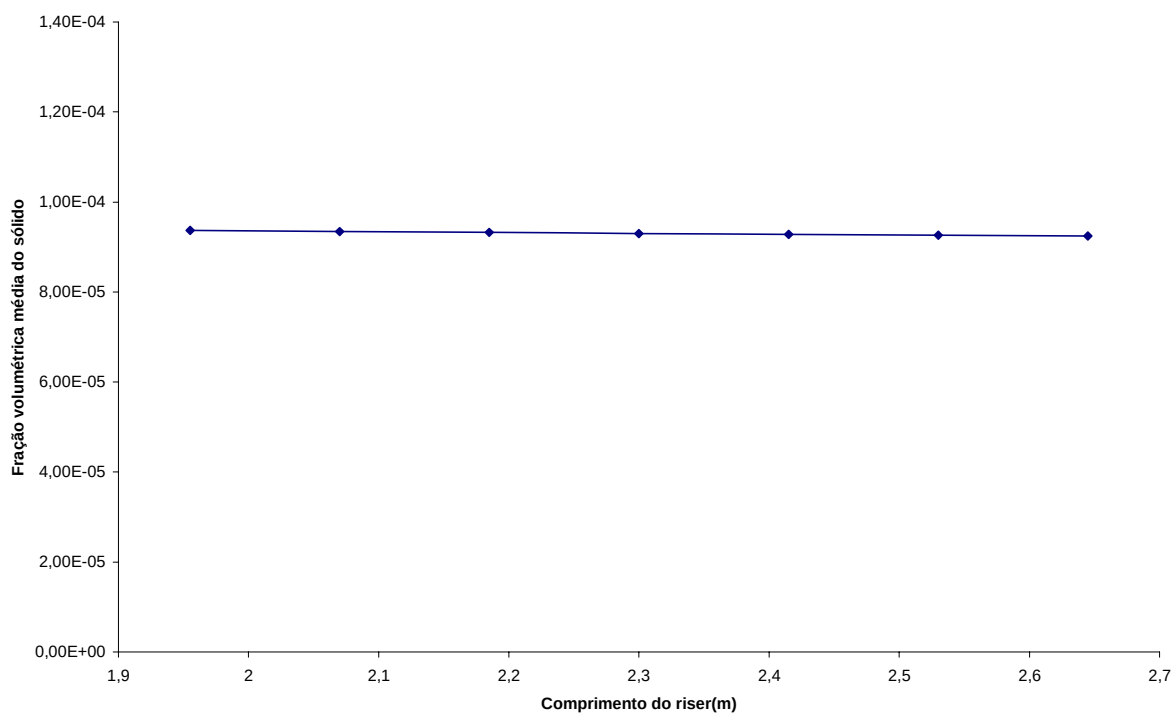
**Figura 14:** Fração volumétrica média do sólido em função de Q

Tabela 7: Valores de $\bar{\varepsilon}_s$ para cada valor de L

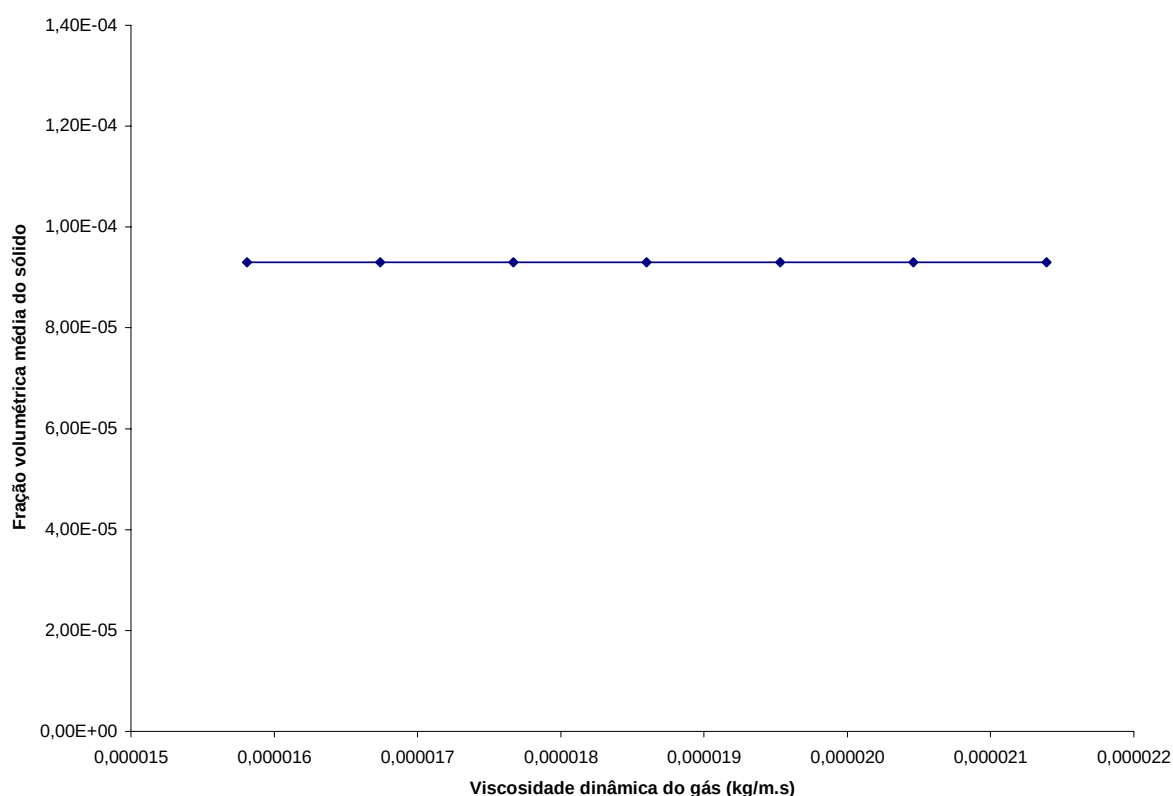
Comprimento do riser - L (m)		$\bar{\varepsilon}_s$
L - 15%L	1,955	$9,371751431 \cdot 10^{-5}$
L - 10%L	2,070	$9,345316601 \cdot 10^{-5}$
L - 5%L	2,185	$9,321664205 \cdot 10^{-5}$
L	2,300	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
L+5%L	2,415	$9,281118259 \cdot 10^{-5}$
L+10%L	2,530	$9,263610638 \cdot 10^{-5}$
L+15%L	2,645	$9,247625999 \cdot 10^{-5}$

**Figura 15:** Fração volumétrica média do sólido em função de L

Analisando-se os gráficos apresentados nas Figuras 12 e 13 vê-se que eles seguem o mesmo comportamento do apresentado na Figura 11 e que os das Figuras 14 e 15 têm o mesmo comportamento do gráfico mostrado na Figura 10, cujos comentários foram feitos anteriormente.

Tabela 8: Valores de $\bar{\varepsilon}_s$ para cada valor de μ_g

Viscosidade dinâmica do gás - μ_g (kg/m.s)	$\bar{\varepsilon}_s$	
$\mu_g - 15\% \mu_g$	0,00001581	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
$\mu_g - 10\% \mu_g$	0,00001674	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
$\mu_g - 5\% \mu_g$	0,00001767	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
μ_g	0,00001860	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
$\mu_g + 5\% \mu_g$	0,00001953	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
$\mu_g + 10\% \mu_g$	0,00002046	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$
$\mu_g + 15\% \mu_g$	0,00002139	$9,300377343 \cdot 10^{-5}$

**Figura 16:** Fração volumétrica média do sólido em função de μ_g

A respeito do gráfico apresentado na Figura 16 vê-se que não há variação da fração volumétrica média do sólido quando o parâmetro é a viscosidade dinâmica do gás. Isto implica ser aproximadamente igual a zero o coeficiente de sensibilidade em relação a este parâmetro.

Observando-se os gráficos obtidos a partir das superfícies de resposta, vê-se claramente a quase linearidade destas superfícies, mesmo para um sistema físico descrito por um modelo matemático de natureza não linear como o da fluidodinâmica do riser utilizado neste trabalho. Isto indica ser desnecessária uma análise de sensibilidade de 2ª ordem, que por

sua vez é bastante onerosa em termos de cálculos computacionais. Os coeficientes de sensibilidade calculados serão mostrados na Tabela 9 do item 4.2 .

4.2 Método perturbativo diferencial

Na Tabela 9 apresentam-se os valores dos coeficientes de sensibilidade para a fração volumétrica média do sólido $\bar{\varepsilon}_s$, relativos aos parâmetros, usando o método perturbativo diferencial e o método direto e o erro relativo percentual observado quando comparados os resultados em ambos os métodos. O erro relativo percentual foi calculado a partir da expressão:

$$E_p = \left(\frac{\frac{\delta \bar{\varepsilon}_s}{\delta p} \text{ (MÉTODO PERTURBATIVO)}}{\frac{\delta \bar{\varepsilon}_s}{\delta p} \text{ (MÉTODO DIRETO)}} - 1 \right) 100 \quad . \quad (97)$$

Tabela 9: Coeficientes de sensibilidade obtidos através dos métodos perturbativo diferencial e direto e o erro relativo percentual

PARÂMETRO	Valor do coeficiente de sensibilidade $\frac{\delta \bar{\varepsilon}_s}{\delta p}$		E_p (%)
	Método perturbativo diferencial	Método direto	
ρ_s	$-1,145952 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{kg}$	$-1,097613 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{kg}$	4,40
ρ_g	$4,760860 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{kg}$	$4,764645 \cdot 10^{-9} \text{ m}^3/\text{kg}$	-0,08
D	$0,005284 \text{ m}^{-1}$	$0,005309 \text{ m}^{-1}$	-0,47
W	$1,371836 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}/\text{kg}$	$1,310673 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}/\text{kg}$	4,67
Q	$-0,022250 \text{ s}/\text{m}^3$	$-0,022419 \text{ s}/\text{m}^3$	-0,75
L	$-1,759246 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$	$-1,762867 \cdot 10^{-6} \text{ m}^{-1}$	-0,21
μ_g	~ 0	~ 0	-----

Observando-se a Tabela 9 vê-se que os erros relativos percentuais têm valores cujos módulos estão entre 0,08% e 4,67% . Ainda, em apenas dois parâmetros, o referido erro foi superior a 4%, tendo os demais apresentado valores, em módulo, inferiores ou iguais a 0,75%. Isto indica que há uma boa precisão do método perturbativo usado.

Fazendo uso da expressão $S = \frac{\partial R}{\partial p_i} \cdot \frac{p_0}{R_0}$, correspondente à Equação (83), é possível calcular a sensibilidade S relativa a cada parâmetro, tanto para o método perturbativo diferencial como para o direto. A Tabela 10 apresenta os resultados que foram obtidos.

Tabela 10: Sensibilidades relativas aos parâmetros para os métodos perturbativo diferencial e direto

PARÂMETRO	Valor da sensibilidade S	
	Método perturbativo diferencial	Método direto
ρ_s	-1,0473	-1,0032
ρ_g	$5,9591 \cdot 10^{-5}$	$5,9639 \cdot 10^{-5}$
D	1,8181	1,8267
W	1,0473	1,0006
Q	-0,9091	-0,9160
L	-0,0435	-0,0436
μ_g	~ 0	~ 0

Observando-se a Tabela 9 vê-se que a viscosidade dinâmica do gás não exerce nenhuma influência no valor de $\overline{\varepsilon_s}$ e que a massa específica do gás tem influência muito pequena se comparada com a dos parâmetros restantes. Estabelecendo uma ordem crescente de influência dos parâmetros no funcional-resposta, podem-se relacionar: a viscosidade dinâmica do gás (μ_g), a massa específica do gás (ρ_g), o comprimento do riser (L), a vazão do gás (Q), o fluxo de sólidos por unidade de área (W) e a massa específica do sólido (ρ_s), sendo que estes dois últimos estão no mesmo patamar, e o diâmetro do riser (D) que é de fato o mais influente dos parâmetros.

Note-se ainda que a ordem crescente dos valores dos coeficientes de sensibilidade não é a mesma ordem para a sensibilidade. É mais importante a sensibilidade relativa ao parâmetro do que o coeficiente de sensibilidade porque é ela que efetivamente fornece a influência do parâmetro no funcional-resposta.

É conveniente salientar que as Sensibilidades obtidas por Melo (2004) não foram as mesmas encontradas neste trabalho, visto que os cálculos de Melo (2004) foram para a fração

volumétrica do sólido na base do riser e usou para a fração volumétrica do gás a equação proposta por Santana et al. (1988), enquanto aqui elas foram calculadas para a fração volumétrica média do sólido e a equação usada foi a de Malladi e Otero (1983) .

A Tabela 11 mostra os valores da fração volumétrica média do sólido obtidos pelo método perturbativo diferencial usando a equação $R = R_0 + \frac{\delta R}{\delta p} \Delta p$ e os valores encontrados pelo método direto, juntamente com os erros relativos percentuais calculados pela equação

$$E_p = \left(\frac{\overline{\varepsilon_s(\text{MÉTODO PERTURBATIVO})}}{\overline{\varepsilon_s(\text{MÉTODO DIRETO})}} - 1 \right) 100. \quad (98)$$

Tabela 11: Método perturbativo diferencial x Método direto

Valores dos parâmetros		$\bar{\varepsilon}_s$ pelo Método Perturbativo Diferencial	$\bar{\varepsilon}_s$ pelo Método Direto	Erro percentual (%)
$\rho_s - 15\% \rho_s$	722,5	$10,761466.10^{-5}$	$10,944301.10^{-5}$	-1,67
$\rho_s - 10\% \rho_s$	765,0	$10,274436.10^{-5}$	$10,334542.10^{-5}$	-0,58
$\rho_s - 5\% \rho_s$	807,5	$9,787407.10^{-5}$	$9,790212.10^{-5}$	-0,03
ρ_s (kg/m ³)	850,0	$9,300377.10^{-5}$	$9,300377.10^{-5}$	0
$\rho_s + 5\% \rho_s$	892,5	$8,813348.10^{-5}$	$8,857241.10^{-5}$	-0,50
$\rho_s + 10\% \rho_s$	935,0	$8,326318.10^{-5}$	$8,454425.10^{-5}$	-1,52
$\rho_s + 15\% \rho_s$	977,5	$7,839289.10^{-5}$	$8,086663.10^{-5}$	-3,06
$\rho_g - 15\% \rho_g$	0,9894986	$9,300294.10^{-5}$	$9,300294.10^{-5}$	~0
$\rho_g - 10\% \rho_g$	1,0477044	$9,300298.10^{-5}$	$9,300322.10^{-5}$	~0
$\rho_g - 5\% \rho_g$	1,1059102	$9,300350.10^{-5}$	$9,300350.10^{-5}$	~0
ρ_g (kg/m ³)	1,1641160	$9,300377.10^{-5}$	$9,300377.10^{-5}$	0
$\rho_g + 5\% \rho_g$	1,2223218	$9,300405.10^{-5}$	$9,300405.10^{-5}$	~0
$\rho_g + 10\% \rho_g$	1,2805276	$9,300457.10^{-5}$	$9,300405.10^{-5}$	~0
$\rho_g + 15\% \rho_g$	1,3387334	$9,300460.10^{-5}$	$9,300405.10^{-5}$	~0
D - 15%D	0,0272	$6,764377.10^{-5}$	$6,985885.10^{-5}$	-3,17
D - 10%D	0,0288	$7,609377.10^{-5}$	$7,704248.10^{-5}$	-1,23
D - 5%D	0,0304	$8,454977.10^{-5}$	$8,476272.10^{-5}$	-0,25
D(m)	0,032	$9,300377.10^{-5}$	$9,300377.10^{-5}$	0
D + 5%D	0,0336	$10,145777.10^{-5}$	$10,175266.10^{-5}$	-0,29
D + 10%D	0,0352	$11,979377.10^{-5}$	$11,099940.10^{-5}$	-1,09
D + 15%D	0,0368	$11,836377.10^{-5}$	$12,073655.10^{-5}$	-1,64

Valores dos parâmetros		$\bar{\varepsilon}_s$ pelo Método Perturbativo Diferencial	$\bar{\varepsilon}_s$ pelo Método Direto	Erro percentual (%)
W - 15%W	6,035	$7,839372 \cdot 10^{-5}$	$7,904701 \cdot 10^{-5}$	-0,83
W - 10%W	6,390	$8,326374 \cdot 10^{-5}$	$8,369887 \cdot 10^{-5}$	-0,52
W - 5%W	6,745	$8,813376 \cdot 10^{-5}$	$8,835112 \cdot 10^{-5}$	-0,25
W(kg/m ² .s)	7,100	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
W+5%W	7,455	$9,787379 \cdot 10^{-5}$	$9,765689 \cdot 10^{-5}$	0,22
W+10%W	7,810	$10,274380 \cdot 10^{-5}$	$10,231052 \cdot 10^{-5}$	0,42
W+15%W	8,165	$10,761382 \cdot 10^{-5}$	$10,696471 \cdot 10^{-5}$	0,61
Q - 15% Q	0,00323	$10,568627 \cdot 10^{-5}$	$10,810860 \cdot 10^{-5}$	-2,24
Q - 10% Q	0,00342	$10,145877 \cdot 10^{-5}$	$10,249093 \cdot 10^{-5}$	-1,01
Q - 5% Q	0,00361	$9,723127 \cdot 10^{-5}$	$9,748672 \cdot 10^{-5}$	-0,26
Q(m ³ /s)	0,00380	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
Q + 5% Q	0,00399	$8,877627 \cdot 10^{-5}$	$8,896748 \cdot 10^{-5}$	-0,25
Q + 10% Q	0,00418	$8,454877 \cdot 10^{-5}$	$8,531681 \cdot 10^{-5}$	-0,90
Q + 15% Q	0,00437	$8,032152 \cdot 10^{-5}$	$8,200139 \cdot 10^{-5}$	-2,05
L - 15%L	1,955	$9,361071 \cdot 10^{-5}$	$9,371751 \cdot 10^{-5}$	-0,14
L - 10%L	2,070	$9,340840 \cdot 10^{-5}$	$9,345317 \cdot 10^{-5}$	-0,05
L - 5%L	2,185	$9,320609 \cdot 10^{-5}$	$9,321664 \cdot 10^{-5}$	-0,01
L(m)	2,300	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
L+5%L	2,415	$9,283542 \cdot 10^{-5}$	$9,281118 \cdot 10^{-5}$	0,03
L+10%L	2,530	$9,259915 \cdot 10^{-5}$	$9,263611 \cdot 10^{-5}$	-0,04
L+15%L	2,645	$9,239683 \cdot 10^{-5}$	$9,247626 \cdot 10^{-5}$	-0,09
μ_g - 15% μ_g	0,00001581	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
μ_g - 10% μ_g	0,00001674	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
μ_g - 5% μ_g	0,00001767	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
μ_g (kg/m.s)	0,00001860	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
μ_g + 5% μ_g	0,00001953	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
μ_g + 10% μ_g	0,00002046	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0
μ_g + 15% μ_g	0,00002139	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	$9,300377 \cdot 10^{-5}$	0

A análise da Tabela 11 permite a verificação de que os erros relativos percentuais têm valores, em módulo, abaixo de 3,18%. Na maioria dos casos este erro é bem inferior a 1,00%.

Nota-se ainda que houve boa concordância nos cálculos para os parâmetros massa específica do gás e viscosidade dinâmica do gás. Ainda, relativamente ao comprimento do riser, o erro relativo percentual foi inferior a 0,15% , o que sugere, em geral, uma excelente aproximação nos cálculos.

A Figura 17 apresenta um gráfico que sumariza os erros relativos percentuais em relação a cada parâmetro, correspondentes aos valores da Tabela 11. Observa-se que os erros relativos percentuais encontrados na confrontação dos resultados do método direto e do perturbativo são bastante pequenos, apresentando um leve aumento à medida que o valor do

parâmetro se afasta do ponto de referência, quando considerados os seus módulos, como já era esperado.

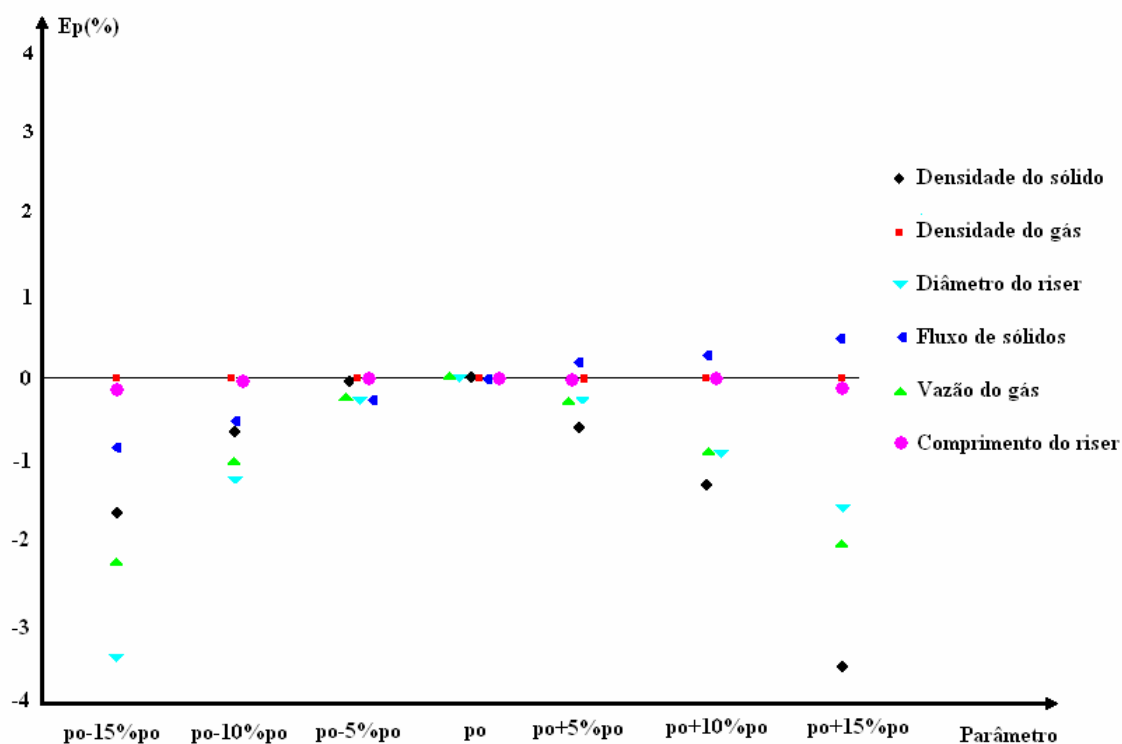


Figura 17: Erro relativo percentual entre os métodos perturbativo diferencial e o direto em função do parâmetro

5 CONCLUSÕES

Apresentam-se aqui as principais conclusões:

- a) Comparando-se os resultados obtidos para a análise de sensibilidade pelos dois métodos, verifica-se que o método perturbativo diferencial apresenta-se bem sucedido em relação aos parâmetros analisados. Para a maioria dos parâmetros nota-se considerável precisão abaixo de 1%.
- b) O diâmetro do riser é o parâmetro que mais influencia no funcional-resposta $\bar{\epsilon}_s$.
- c) A massa específica do gás e a viscosidade dinâmica deste pouco influenciam no $\bar{\epsilon}_s$.
- d) O formalismo diferencial é uma boa ferramenta para se fazer a análise de sensibilidade. Elimina-se com isto a necessidade de exaustivas repetições dos cálculos encontradas no método direto para se obter os coeficientes de sensibilidade.
- e) Como a análise de sensibilidade de primeira ordem foi realizada com considerável sucesso, torna-se desnecessária uma análise de segunda ordem. Isto pode ser visto pela linearidade das curvas nas superfícies-resposta e pelos pequenos desvios em relação aos resultados fornecidos pelo método direto.

São sugestões para a continuação deste trabalho:

- a) Realizar a análise de sensibilidade do funcional-resposta fração volumétrica do sólido na saída do riser.
- b) Realizar a análise de sensibilidade para o valor médio de outro funcional-resposta ao longo do riser como, por exemplo, a velocidade do gás.
- c) Usar o formalismo GPT para avaliar a equivalência com os resultados aqui obtidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CACUCI, D. G.; WEBER, C. F.; OBLOW, E.M.; MARABLE, J. H. Sensitivity theory for general systems of nonlinear equations. **Nuclear Science and Engineering**, v. 75, p. 88-110, 1980.

CASTRILLO, L. S. **Aplicações de métodos perturbativos para análise de sensibilidade em escoamento bifásico**, Tese de Doutorado, UFPE-DEN, Recife-PE, 2003.

GANDINI, A. **Métodos perturbativos para a análise de reatores nucleares**. Rio de Janeiro: IEN/CNEN, 1982.

GANDINI, A. Generalized perturbation theory (GPT) methods. A heuristic approach. **Advances in Nuclear and Science Technology**, v. 19, p.205-380, 1987.

GANDINI, A. Transposition methods of experimental data to reference design. In: BRAZILIAN MEETING ON REACTOR PHYSICS AND THERMOHYDRAULICS, 10., Águas de Lindóia, p. 169-177, 1995.

LI, Y.; CHEN, B.; WANG, Y.; ANDGUO, M.; **International Chemical Engineering**, v.21, n.4, p. 670,1981.

LIMA, F. R. A.; DA SILVA, F. C.; THOMÉ FILHO, Z.D.; ALVIM, A. C. M.; BARROSO, A.C.O.; SILVA, G. A. **Cálculo de sensibilidade de temperatura do refrigerante em relação aos parâmetros termoidráulicos**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1985.113p. (Programa de Engenharia Nuclear, PEN-130)

LIMA, F. R. A.; DA SILVA, F. C.; ALVIM, A. C. M. **Tempera V2 – Um programa para análise de sensibilidade num canal de refrigerante de reatores nucleares**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1986, 81p. (Programa de Engenharia Nuclear, PEN-139)

LIMA, F. R. A.; ALVIM, A. C. M. **Aplicação da teoria da perturbação para análise de sensibilidade num canal refrigerante de reatores nucleares**. Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Nuclear, Rio de Janeiro: p. 5-36, 1987.

LIMA, F. R. A. **Aplicações de métodos perturbativos ao modelo multicanal COBRA-IV-I para cálculos de sensibilidade em núcleos de reatores nucleares**, Tese de Doutorado, UFRJ– Programa de Engenharia Nuclear/COPPE, Rio de Janeiro-RJ, 1990.

LIMA, F. R. A.; LIRA, C. A. B. O.; GANDINI, A. **Sensitivity analysis of thermohydraulics system via heuristic generalized perturbation theory (HGPT) methods**. Annals of Nuclear Energy, Grã Bretanha, v.20, n. 10, p. 679-690, 1993.

LIMA, F. R. A.; BLANCO, A. **Introducción a los métodos perturbativos aplicados a problemas de ingeniería nuclear**, San Carlos de Bariloche: CNEA, Universidade Nacional de Cuyo, Instituto Balseiro, 61p., 1994.

MALLADI, M. P. H.; OTERO-SCHIPPER, F. J. **An analysis of gas solid transport in small and large diameter riser reactor**. Mobil Research & Develop. Corp., Research department, March 2, 1983.

MELO, A. C. B. A. de. **Validação de modelos matemáticos para descrever a fluidodinâmica de um riser a frio utilizando atenuação gama**, Tese de Doutorado, UFPE-DEN, Recife-Pe, 2004.

MENDES, S. E.; SANTANA, C. C. Contato gás-sólido em leito fluidizado recirculante: Um modelo matemático para o movimento vertical com aceleração. **IX ENEMP**, p. 75-83, Rio de Janeiro, 1983.

OBLow, E. M. **Sensitivity theory for reactor thermal-hydraulics problems**. Nuclear Science and Engineering, v. 68, p. 322-337, 1978.

OBLow, E. M. **Sensitivity theory from a different viewpoint**. Nuclear Science and Engineering, v. 59, p. 187-189, 1976.

ROLIM, T. L.; FREITAS, A. M.R.; GALDINO, S. M. L.; SILVA FILHO, E.; DANTAS, C. C. Numerical simulation of the vertical flow in a gas-solid system based on nuclear techniques. **Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry Articles**, v. 198, nº1, p. 69-76, 1995.

SANTANA, C. C.; ROCHA, S. C. S.; KACHAN, G. C. Modelagem dinâmica do escoamento gás-sólido aplicada à secagem pneumática. **Anais do 8º Congresso Brasileiro de Engenharia Química**, p. 371-377. São Paulo, 1988.

SPIEGEL, M. R. Cálculo avançado, **Coleção Schaum**, São Paulo-SP, Mc Graw-Hill, 1971, p. 216-217.

TITO, M. W. C. **Análise de sensibilidade na difusão de calor em uma aleta de um elemento combustível nuclear**, Dissertação de Mestrado, UFPE-DEN, Recife-PE, 2001.

WEBER, C. F.; CACCUCI, D. G.; OBLOW, E. M. Sensitivity theory for nonlinear equations with nonlinear responses. **American Nuclear Society**, v. 33, p. 338-340, 1979.

ANEXO

Teoria da perturbação

1 Fundamentação teórica

Considera-se um sistema físico definido por K equações não-lineares acopladas (LIMA, 1986):

$$\mathbf{m}[\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] = \begin{bmatrix} m_1[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] \\ m_2[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] \\ \vdots \\ m_K[f(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad , \quad (\text{A.01})$$

onde $\mathbf{m}$ inclui, em geral, operações com relação às variáveis do espaço de fase. O vetor de estado, que descreve o comportamento das variáveis de estado do sistema é função do vetor do espaço de fase e pode ser escrito:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{c} f_1(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \\ \vdots \\ f_K(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \end{array} \right\}. \quad (\text{A.02})$$

O vetor de espaço de fase pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_R \end{array} \right\}. \quad (\text{A.03})$$

onde R é o número de variáveis independentes do espaço de fase.

O vetor $\mathbf{r}$ define as variáveis independentes, geralmente representadas pela posição e o tempo.

As componentes m_k , $k = 1, 2, \dots, K$, são funções não lineares de $\mathbf{f}$ e do vetor dos parâmetros de entrada, representados pelo vetor

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_I \end{Bmatrix} \quad (\text{A.04})$$

que é geralmente função da posição e do tempo, onde I é o número de parâmetros.

As condições de contorno da Eq. (A.01) são escritas formalmente como:

$$C(\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}) = 0 \quad (\text{A.05})$$

em que $\mathbf{r}$ define um ponto na superfície de contorno do espaço de fase.

Um funcional - resposta $R[\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}]$ pode ser definido da seguinte forma:

$$R[\mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \mathbf{p}] = \langle \mathbf{S}^+(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle \quad (\text{A.06})$$

em que $\mathbf{S}^+$ é uma função conhecida e dada por:

$$\mathbf{S}^+(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} S_1^+(\mathbf{r}) \\ S_2^+(\mathbf{r}) \\ \cdot \\ \cdot \\ S_K^+(\mathbf{r}) \end{bmatrix} . \quad (\text{A.07})$$

O símbolo $\langle \rangle$ da Eq. (A.06) representa a integração em todo o espaço de fase.

O principal objetivo da análise de sensibilidade é avaliar a variação do funcional - resposta δR resultante de uma perturbação δp_i num parâmetro p_i do sistema. A variação de R na Eq. (A.06), para pequenas perturbações no sistema, é representada pela seguinte equação:

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = \sum_{i=1}^I \left[\langle S_{/i}^+ \cdot f \rangle + \langle S^+ \cdot f_{/i} \rangle \right], \quad (A.08)$$

onde

$$S_{/i}^+ \equiv \frac{\partial S^+}{\partial p_i} \quad (A.09)$$

e

$$f_{/i} \equiv \frac{\partial f}{\partial p_i}. \quad (A.10)$$

O termo $\frac{\delta R}{\delta p}$ da Eq. (A.08) representa a expressão do coeficiente de sensibilidade resultante para uma perturbação de primeira ordem e o termo $S_{/i}^+$ é facilmente calculável visto que, como foi dito anteriormente, S^+ é uma função conhecida. O termo $f_{/i}$ é obtido a partir da expansão da equação perturbada $m'(f, p) = 0$ em torno de uma solução de referência f até a primeira ordem.

Do exposto temos:

$$\delta m = m'(f, p) - m(f, p) = \sum_{i=1}^I \delta p_i \left\{ \frac{\partial m}{\partial p_i} + H \frac{\partial f}{\partial p_i} \right\} = 0, \quad (A.11)$$

onde H é um operador matricial definido pela derivada de “Frechet” como

$$H = \frac{\partial \bar{m}}{\partial f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial f_1} & \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial f_k} \\ \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial f_1} & \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial f_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{m}_k}{\partial f_1} & \frac{\partial \bar{m}_k}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{m}_k}{\partial f_k} \end{bmatrix} . \quad (A.12)$$

Como a Equação (A.11) vale para qualquer parâmetro p_i , tem-se que:

$$H \mathbf{f}_{/i} = \mathbf{S}_{(i)} , \quad (A.13)$$

em que:

$$\mathbf{S}_{(i)} \equiv - \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial p_i} . \quad (A.14)$$

O sistema formado pela Eq. (A.13) é chamado de sistema de equações derivadas e a sua condição de contorno é obtida a partir da derivação das condições de contorno do problema direto. Em particular, para cada parâmetro do sistema é definido um coeficiente de sensibilidade que assume a forma:

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{S}^+ \cdot \mathbf{f}_{/i} \rangle \quad (A.15)$$

A Eq. (A.13) é uma equação linear, visto que a matriz dos coeficientes e o vetor dos termos independentes não são funções do vetor de estado derivado. Entretanto, teremos de resolver uma nova equação derivada para cada parâmetro p_i . Em outras palavras, para um dado funcional, será necessário resolver tantas equações derivadas quantos forem os parâmetros de interesse. Isto não apresentaria grandes problemas para um número de parâmetros pequeno. Quando o número de parâmetros cresce, este procedimento é oneroso do ponto de vista computacional. Recorre-se então ao formalismo de perturbação.

2 O formalismo diferencial

O operador adjunto H^* de H pode ser obtido através da expressão:

$$\langle \mathbf{f}_{/i} \cdot H^* \mathbf{f}^* \rangle = \langle \mathbf{f}^* \cdot H \mathbf{f}_{/i} \rangle + CB(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/i}), \quad (\text{A.16})$$

sendo $\mathbf{f}^*$ o vetor adjunto de $\mathbf{f}_{/i}$ e $CB(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/i})$ o concomitante bilinear avaliado no contorno do sistema.

O sistema adjunto pode ser escrito como:

$$H^* \mathbf{f}^* = \mathbf{S}^+, \quad (\text{A.17})$$

com condições de contorno representadas por:

$$\mathbf{C}^*(\mathbf{f}^*) = \mathbf{0} \quad . \quad (\text{A.18})$$

Uma escolha adequada das condições de contorno permitirá calcular o concomitante bilinear a partir de termos conhecidos de $\mathbf{f}_{/i}$, avaliados no limite do sistema.

Tendo em vista a equação (A.17), a Eq. (A.16) pode ser reescrita como:

$$\langle \mathbf{S}^+ \cdot \mathbf{f}_{/i} \rangle = \langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle + CB(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/i}). \quad (\text{A.19})$$

Substituindo a Eq. (A.19) na Eq. (A.08) obtém-se uma nova expressão para o coeficiente de sensibilidade resultante, desta vez sem o termo que contém a derivada do vetor de estado em relação ao parâmetro, isto é:

$$\frac{\partial R}{\partial p} = \sum_{i=1}^I [\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle] + CB(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/i}) \quad . \quad (\text{A.20})$$

APÊNDICES

APÊNDICE 1 (AP1)

Cálculo do operador H

Para a determinação do operador H, tem-se pela Equação (A.12) que $H = \frac{\bar{\partial}m}{\partial f}$.

Portanto:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial}m_2}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial}m_3}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial}m_4}{\partial f_4} \end{bmatrix}, \text{ onde } f_1 = U_g, \quad f_2 = U_s, \quad f_3 = P \quad \text{e} \quad f_4 = \varepsilon_g.$$

Calculando cada elemento da matriz:

$$\frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_1} = \frac{\partial}{\partial U_g} \left(\frac{dU_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial U_g} \left[\frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_1} = \frac{d}{dz} + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP1.01})$$

$$\frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_2} = \frac{\partial}{\partial U_s} \left(\frac{dU_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial U_s} \left[\frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_2} = 0 \quad (\text{AP1.02})$$

$$\frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_3} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dU_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial}m_1}{\partial f_3} = 0 \quad (\text{AP1.03})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_4} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left(\frac{dU_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left[\frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_4} = \frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} - \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP1.04})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} = \frac{\partial}{\partial U_g} \left(\frac{dU_s}{dz} \right) - \frac{\partial}{\partial U_g} \left[\frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} = 0 \quad (\text{AP1.05})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} = \frac{\partial}{\partial U_s} \left(\frac{dU_s}{dz} \right) - \frac{\partial}{\partial U_s} \left[\frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} = \frac{d}{dz} - \frac{1}{1 - \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \quad (\text{AP1.06})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_3} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{dU_s}{dz} \right) - \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_3} = 0 \quad (\text{AP1.07})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_4} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left(\frac{dU_s}{dz} \right) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left[\frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_4} = -\frac{U_s}{(1 - \varepsilon_g)} \frac{d}{dz} - \frac{U_s}{(1 - \varepsilon_g)^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP1.08})$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} = & \frac{\partial}{\partial U_g} \left(-\frac{dP}{dz} \right) - \frac{\partial}{\partial U_g} \left[\frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_s U_s^2) \right] + \frac{\partial}{\partial U_g} \left[\frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_g U_g^2) \right] - \\ & \frac{\partial}{\partial U_g} (f_w) - \frac{\partial}{\partial U_g} (g\rho_s) + \frac{\partial}{\partial U_g} (g\varepsilon_g \rho_s) - \frac{\partial}{\partial U_g} (g\varepsilon_g \rho_g) \end{aligned} \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} = 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \frac{0,316\rho_g}{2D} \frac{\partial}{\partial U_g} \left(\frac{U_g^2}{Re_g^{\frac{1}{4}}} \right)$$

Como Re_g varia ao longo do riser, pois pela Equação (05) $Re_g = \frac{\rho_g U_g D}{\mu_g}$, tem-se:

$$\frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} = 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \frac{0,316\rho_g}{2D} \frac{\partial}{\partial U_g} \left(Re_g^{-\frac{1}{4}} U_g^2 \right) \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} = 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D Re_g^{\frac{1}{4}}} \right) \quad (AP1.09)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_2} = & \frac{\partial}{\partial U_s} \left(-\frac{dP}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial U_s} \left[-\frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_s U_s^2) + \frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_g U_g^2) \right] - \frac{\partial}{\partial U_s} (f_w) + \frac{\partial}{\partial U_s} (g\rho_s) + \frac{\partial}{\partial U_s} (g\rho_s \varepsilon_g) - \\ & \frac{\partial}{\partial U_s} (g\rho_g \varepsilon_g) \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_2} = -2 \frac{d\varepsilon_g}{dz} \rho_s U_s \quad (AP1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_3} = & \frac{\partial}{\partial P} \left(-\frac{dP}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left[-\frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_s U_s^2) + \frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_g U_g^2) \right] - \frac{\partial}{\partial P} (f_w) + \frac{\partial}{\partial P} (g\rho_s) + \frac{\partial}{\partial P} (g\rho_s \varepsilon_g) - \\ & \frac{\partial}{\partial P} (g\rho_g \varepsilon_g) \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_3} = -\frac{d}{dz} \quad (AP1.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_4} = & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left(-\frac{dP}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left[-\frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_s U_s^2) + \frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_g U_g^2) \right] - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} (f_w) - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} (g\rho_s) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} (g\rho_s \varepsilon_g) - \\ & \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} (g\rho_g \varepsilon_g) \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_4} = -\rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} + \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} + g\rho_s - g\rho_g \quad (\text{AP1.12})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_1} = \frac{\partial}{\partial U_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial U_g} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial U_g} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_1} = \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) \quad (\text{AP1.13})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_2} = \frac{\partial}{\partial U_s} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial U_s} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial U_s} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \quad \therefore$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_2} = & \left[-2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \right] \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) + \\ & \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) \right] + \frac{2g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{AP1.14})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_3} = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_3} = 0 \quad (\text{AP1.15})$$

$$\frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_4} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_g} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_4} = \frac{d}{dz} + \left[\frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \quad (\text{AP1.16})$$

Desse modo, conhecendo-se cada elemento da matriz, o operador H estará conhecido.

APÊNDICE 2 (AP2)

Cálculo de $H \mathbf{f}_{/i}$:

Sendo H o operador matricial dado pela equação (A12) como

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_4} \end{bmatrix} \quad \text{e } \mathbf{f}_{/i} = \begin{bmatrix} U_{g/i} \\ U_{S/i} \\ P_{/i} \\ \varepsilon_{g/i} \end{bmatrix} \text{ corresponde à equação (A.10),}$$

temos então:

$$H \mathbf{f}_{/i} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_1}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_2}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_3}{\partial f_4} \\ \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_1} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_2} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_3} & \frac{\bar{\partial} m_4}{\partial f_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{g/i} \\ U_{S/i} \\ P_{/i} \\ \varepsilon_{g/i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{AP2.01})$$

Portanto:

$$\beta_1 = \left(\frac{d}{dz} + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) U_{g/i} + 0 + 0 + \left(\frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} - \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \varepsilon_{g/i} \quad \therefore$$

$$\beta_1 = \frac{d}{dz} U_{g/i} + \frac{1}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} + \frac{U_g}{\epsilon_g} \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} - \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} \quad (\text{AP2.02})$$

$$\beta_2 = 0 + \left(\frac{d}{dz} - \frac{1}{(1-\epsilon_g)} \frac{d\epsilon_g}{dz} \right) U_{s/i} + 0 + \left\{ -\frac{U_s}{(1-\epsilon_g)} \frac{d}{dz} - \left[\frac{U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \right] \frac{d\epsilon_g}{dz} \right\} \epsilon_{g/i} \quad \therefore$$

$$\beta_2 = \frac{d}{dz} U_{s/i} - \left(\frac{1}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} - \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} - \left[\frac{U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \right] \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} \quad (\text{AP2.03})$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \left[2\rho_g U_g \frac{d\epsilon_g}{dz} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D\text{Re}_g^{\frac{1}{4}}} \right) \right] U_{g/i} + \left(-2\rho_s U_s \frac{d\epsilon_g}{dz} \right) U_{s/i} + \\ & \left(-\frac{d}{dz} \right) P_{/i} + \left[-\rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} + \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} + g\rho_s - g\rho_g \right] \epsilon_{g/i} \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3 = & 2\rho_g U_g \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D\text{Re}_g^{\frac{1}{4}}} \right) U_{g/i} - 2\rho_s U_s \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} + \\ & \left(-\frac{d}{dz} \right) P_{/i} - \rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} + \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} + g\rho_s \epsilon_{g/i} - g\rho_g \epsilon_{g/i} \quad (\text{AP2.04}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 = & \left[\frac{g(1-\epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) \right] U_{g/i} + \\
& \left\{ \left[-2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \frac{g(1-\epsilon_g)}{U_s^3} \right] \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) + \right. \\
& \left. + \left[\frac{g(1-\epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{2g(1-\epsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right\} U_{s/i} + 0 + \\
& \left\{ \frac{d}{dz} + \left[\frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \right\} \epsilon_{g/i} \quad \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_4 = & \frac{g(1-\epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} - \\
& 2 \frac{g(1-\epsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} + \\
& \frac{g(1-\epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} + \frac{2g(1-\epsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} + \quad (AP2.05) \\
& \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} + \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \epsilon_{g/i}
\end{aligned}$$

APÊNDICE 3 (AP3)

Cálculo do operador adjunto H^* e do concomitante bilinear CB

Escrevendo a equação (A.16) na forma

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot H \mathbf{f}_{/i} \rangle = \langle \mathbf{f}_{/i} \cdot H^* \mathbf{f}^* \rangle - \text{CB}(\mathbf{f}^*, \mathbf{f}_{/i}),$$

(AP3.01) e sabendo que $\mathbf{f}^*$ é o vetor adjunto de $\mathbf{f}_{/i}$, que será escrito como

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix}, \quad (\text{AP3.02})$$

e conhecendo $H \mathbf{f}_{/i}$ já mostrado no APÊNDICE 2, é possível calcular $\langle \mathbf{f}^* \cdot H \mathbf{f}_{/i} \rangle$. Logo:

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot H \mathbf{f}_{/i} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle U_g^* \beta_1 + U_s^* \beta_2 + P^* \beta_3 + \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle. \quad (\text{AP3.03})$$

Assim:

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot H \mathbf{f}_{/i} \rangle = \langle U_g^* \beta_1 \rangle + \langle U_s^* \beta_2 \rangle + \langle P^* \beta_3 \rangle + \langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle \quad (\text{AP3.04})$$

Temos, então:

Cálculo de $\langle U_g^* \beta_1 \rangle$:

$$\langle U_g^* \beta_1 \rangle = \underbrace{\int \frac{d}{dz} U_{g/i} U_g^* dz}_{K_1} + \underbrace{\int \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{g/i} U_g^* dz}_{K_2} + \underbrace{\int \frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} U_g^* dz}_{K_3} - \underbrace{\int \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \varepsilon_{g/i} U_g^* dz}_{K_4} \quad \therefore$$

Calculando por partes K_1 e K_3 , mantendo K_2 e K_4 na forma em que se apresentam:

$$K_1 = \int \frac{d}{dz} U_{g/i} U_g^* dz = U_g^* U_{g/i} - \int U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} dz$$

$$K_3 = \int \frac{U_g}{\epsilon_g} \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} U_g^* dz = U_g^* \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} - \int \epsilon_{g/i} \frac{d}{dz} \left(\frac{U_g}{\epsilon_g} U_g^* \right) dz \quad \therefore$$

$$K_3 = U_g^* \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} - \int \epsilon_{g/i} \left[-2 \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_g^* + \frac{U_g}{\epsilon_g} \frac{dU_g^*}{dz} \right] dz$$

$$\text{Como } \langle U_g^* \beta_1 \rangle = K_1 + K_2 + K_3 - K_4$$

$$\begin{aligned} \langle U_g^* \beta_1 \rangle &= U_g^* U_{g/i} - \int U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} dz + \int \frac{1}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} U_g^* dz + U_g^* \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} - \\ &\quad \int \epsilon_{g/i} \left[-2 \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_g^* + \frac{U_g}{\epsilon_g} \frac{dU_g^*}{dz} \right] dz - \int \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_g^* dz \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle U_g^* \beta_1 \rangle &= U_g^* U_{g/i} - \langle U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle + \langle \frac{1}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} U_g^* \rangle + U_g^* \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} + \\ &\quad \langle \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_g^* \rangle - \langle \epsilon_{g/i} \frac{U_g}{\epsilon_g} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle \end{aligned} \quad (\text{AP3.05})$$

Calculo de $\langle U_s^* \beta_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle U_s^* \beta_2 \rangle &= \underbrace{\int \frac{d}{dz} U_{s/i} U_s^* dz}_{L_1} - \underbrace{\int \left(\frac{1}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} U_s^* dz}_{L_2} - \underbrace{\int \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} U_s^* dz}_{L_3} - \\ &\quad \underbrace{\int \left[\frac{U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \right] \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_s^* dz}_{L_4} \end{aligned}$$

Calculando por partes L_1 e L_3 , mantendo L_2 e L_4 :

$$L_1 = \int \frac{d}{dz} U_{s/i} U_s^* dz = U_s^* U_{s/i} - \int U_{s/i} \frac{dU_s^*}{dz} dz$$

$$L_3 = \int \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d}{dz} \epsilon_{g/i} U_s^* dz = U_s^* \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} - \int \epsilon_{g/i} \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) U_s^* \right] dz \quad \therefore$$

$$L_3 = U_s^* \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} - \int \epsilon_{g/i} \left[\frac{2U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_s^* + \frac{U_s}{(1-\epsilon_g)} \frac{dU_s^*}{dz} \right] dz$$

Como $\langle U_s^* \beta_2 \rangle = L_1 - L_2 - L_3 - L_4$, vem que:

$$\begin{aligned} \langle U_s^* \beta_2 \rangle &= U_s^* U_{s/i} - \int U_{s/i} \frac{dU_s^*}{dz} dz - \int \left(\frac{1}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} U_s^* dz - \\ &\quad \left\{ U_s^* \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} - \int \left[\frac{2U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_s^* \epsilon_{g/i} + \frac{U_s}{(1-\epsilon_g)} \frac{dU_s^*}{dz} \epsilon_{g/i} \right] dz \right\} - \\ &\quad \int \left[\frac{U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \right] \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_s^* dz \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle U_s^* \beta_2 \rangle &= U_s^* U_{s/i} - \left\langle U_{s/i} \frac{dU_s^*}{dz} \right\rangle - \left\langle \left(\frac{1}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} U_s^* \right\rangle - \\ &\quad U_s^* \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} + \left\langle \left[\frac{2U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_s^* \epsilon_{g/i} + \frac{U_s}{(1-\epsilon_g)} \frac{dU_s^*}{dz} \epsilon_{g/i} \right] \right\rangle - \\ &\quad \left\langle \left[\frac{U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \right] \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_s^* \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle U_s^* \beta_2 \rangle &= U_s^* U_{s/i} - \left\langle U_{s/i} \frac{dU_s^*}{dz} \right\rangle - \left\langle \left(\frac{1}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} U_s^* \right\rangle - \\ &\quad U_s^* \left(\frac{U_s}{1-\epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} + \left\langle \frac{2U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_s^* \epsilon_{g/i} \right\rangle + \left\langle \frac{U_s}{(1-\epsilon_g)} \frac{dU_s^*}{dz} \epsilon_{g/i} \right\rangle - \\ &\quad \left\langle \left[\frac{U_s}{(1-\epsilon_g)^2} \right] \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_s^* \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle U_S^* \beta_2 \rangle = & U_S^* U_{S/i} - \langle U_{S/i} \frac{dU_S^*}{dz} \rangle - \left\langle \left(\frac{1}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{S/i} U_S^* \right\rangle - \\
& U_S^* \left(\frac{U_S}{1-\varepsilon_g} \right) \varepsilon_{g/i} + \left\langle \frac{U_S}{(1-\varepsilon_g)^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_S^* \varepsilon_{g/i} \right\rangle + \left\langle \frac{U_S}{(1-\varepsilon_g)} \frac{dU_S^*}{dz} \varepsilon_{g/i} \right\rangle
\end{aligned} \tag{AP3.06}$$

Calculo de $\langle P^* \beta_3 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle P^* \beta_3 \rangle = & \underbrace{\int 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{g/i} P^* dz}_{M_1} - \underbrace{\int \frac{7}{8} \left(\frac{0,316 \rho_g U_g}{\text{Re}_g^{\frac{1}{4}} D} \right) U_{g/i} P^* dz}_{M_2} - \\
& \underbrace{\int 2\rho_s U_s \frac{d\varepsilon_g}{dz} U_{s/i} P^* dz}_{M_3} + \underbrace{\int -\frac{d}{dz} P_{/i} P^* dz}_{M_4} - \underbrace{\int \rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} P^* dz}_{M_5} + \\
& \underbrace{\int \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} P^* dz}_{M_6} + \underbrace{\int g \rho_s \varepsilon_{g/i} P^* dz}_{M_7} - \underbrace{\int g \rho_g \varepsilon_{g/i} P^* dz}_{M_8}
\end{aligned}$$

Calculando por partes M_4 , M_5 e M_6 e mantendo M_1 , M_2 , M_3 , M_7 e M_8 :

$$M_4 = \int -\frac{d}{dz} P_{/i} P^* dz = -P^* P_{/i} + \int P_{/i} \frac{dP^*}{dz} dz$$

$$M_5 = \int \rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} P^* dz = P^* \rho_s U_s^2 \varepsilon_{g/i} - \int \varepsilon_{g/i} \frac{d}{dz} (\rho_s U_s^2 P^*) dz \quad \therefore$$

$$M_5 = P^* \rho_s U_s^2 \varepsilon_{g/i} - \int 2\rho_s \frac{U_s^2}{1-\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} P^* \varepsilon_{g/i} dz - \int \rho_s U_s^2 \frac{dP^*}{dz} \varepsilon_{g/i} dz$$

$$M_6 = \int \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} P^* dz = P^* \rho_g U_g^2 \varepsilon_{g/i} - \int \varepsilon_{g/i} \frac{d}{dz} (\rho_g U_g^2 P^*) dz \quad \therefore$$

$$M_6 = P^* \rho_g U_g^2 \epsilon_{g/i} + \int 2\rho_g \frac{U_g^2}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} P^* \epsilon_{g/i} dz - \int \rho_g U_g^2 \frac{dP^*}{dz} \epsilon_{g/i} dz$$

Como $\langle P^* \beta_3 \rangle = M_1 - M_2 - M_3 + M_4 - M_5 + M_6 + M_7 - M_8$, vem que:

$$\begin{aligned} \langle P^* \beta_3 \rangle = & \int 2\rho_g U_g \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} P^* dz - \int \frac{7}{8} \left(\frac{0,316 \rho_g U_g}{D Re_g^{\frac{1}{4}}} \right) U_{g/i} P^* dz - \\ & \int 2\rho_s U_s \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} P^* dz - P^* P_{/i} + \int P_{/i} \frac{dP^*}{dz} dz - \\ & \left(P^* \rho_s U_s^2 \epsilon_{g/i} - \int \epsilon_{g/i} \frac{d}{dz} (\rho_s U_s^2 P^*) dz \right) + P^* \rho_g U_g^2 \epsilon_{g/i} - \\ & \int \epsilon_{g/i} \frac{d}{dz} (\rho_g U_g^2 P^*) dz + \int g \rho_s \epsilon_{g/i} P^* dz - \int g \rho_g \epsilon_{g/i} P^* dz \quad \therefore \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle P^* \beta_3 \rangle = & \langle 2\rho_g U_g \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} P^* \rangle - \left\langle \frac{7}{8} \left(\frac{0,316 \rho_g U_g}{D Re_g^{\frac{1}{4}}} \right) U_{g/i} P^* \right\rangle - \langle 2\rho_s U_s \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} P^* \rangle - \\ & P^* P_{/i} + \langle P_{/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle - P^* \rho_s U_s^2 \epsilon_{g/i} + \langle 2\rho_s \frac{U_s^2}{1 - \epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} P^* \epsilon_{g/i} \rangle + \\ & \langle \rho_s U_s^2 \frac{dP^*}{dz} \epsilon_{g/i} \rangle + P^* \rho_g U_g^2 \epsilon_{g/i} + \langle 2\rho_g \frac{U_g^2}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} P^* \epsilon_{g/i} \rangle - \\ & \langle \rho_g U_g^2 \frac{dP^*}{dz} \epsilon_{g/i} \rangle + \langle g \rho_s \epsilon_{g/i} P^* \rangle - \langle g \rho_g \epsilon_{g/i} P^* \rangle \end{aligned} \quad (AP3.07)$$

Calculo de $\langle \epsilon_g^* \beta_4 \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle = & \underbrace{\int \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} \varepsilon_g^* dz}_{N_1} - \\
& \underbrace{\int 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* dz}_{N_2} + \\
& \underbrace{\int \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* dz}_{N_3} + \\
& \underbrace{\int \frac{2g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* dz}_{N_4} + \underbrace{\int \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} \varepsilon_g^* dz}_{N_5} + \\
& \underbrace{\int \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \varepsilon_{g/i} \varepsilon_g^* dz}_{N_6}
\end{aligned}$$

Calculando por partes N_5 e mantendo N_1 , N_2 , N_3 , N_4 , e N_6 :

$$N_5 = \int \frac{d}{dz} \varepsilon_{g/i} \varepsilon_g^* dz = \varepsilon_g^* \varepsilon_{g/i} - \int \varepsilon_{g/i} \frac{d\varepsilon_g^*}{dz} dz$$

Como $\langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle = N_1 - N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6$, vem que:

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle = & \int \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} \varepsilon_g^* dz - \\
& \int 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* dz + \\
& \int \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* dz + \\
& \int \frac{2g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* dz + \varepsilon_g^* \varepsilon_{g/i} - \int \varepsilon_{g/i} \frac{d\varepsilon_g^*}{dz} dz + \\
& \int \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \varepsilon_{g/i} \varepsilon_g^* dz \quad \therefore
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle = & \left\langle \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} \varepsilon_g^* \right\rangle - \\
& \left\langle 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{2g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} \varepsilon_g^* \right\rangle + \langle \varepsilon_g^* \varepsilon_{g/i} \rangle - \langle \varepsilon_{g/i} \frac{d\varepsilon_g^*}{dz} \rangle + \\
& \left\langle \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \varepsilon_{g/i} \varepsilon_g^* \right\rangle
\end{aligned} \tag{AP3.08}$$

Como $\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{Hf}_{/i} \rangle = \langle U_g^* \beta_1 \rangle + \langle U_s^* \beta_2 \rangle + \langle P^* \beta_3 \rangle + \langle \varepsilon_g^* \beta_4 \rangle$, Equação (AP3.04), então:

$$\begin{aligned}
\langle f^* . H f_{/i} \rangle = & U_g^* U_{g/i} - \langle U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle + \langle \frac{1}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} U_g^* \rangle + U_g^* \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} + \\
& \langle \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_g^* \rangle - \langle \epsilon_{g/i} \frac{U_g}{\epsilon_g} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle + U_S^* U_{S/i} - \langle U_{S/i} \frac{dU_S^*}{dz} \rangle - \\
& \langle \left(\frac{1}{1-\epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{S/i} U_S^* \rangle - U_S^* \left(\frac{U_S}{1-\epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} + \langle \frac{U_S}{(1-\epsilon_g)^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_S^* \epsilon_{g/i} \rangle + \\
& \langle \frac{U_S}{(1-\epsilon_g)} \frac{dU_S^*}{dz} \epsilon_{g/i} \rangle + \langle 2\rho_g U_g \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} P^* \rangle - \langle \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{DRe_g^{\frac{1}{4}}} \right) U_{g/i} P^* \rangle - \\
& \langle 2\rho_S U_S \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{S/i} P^* \rangle - P^* P_{/i} + \langle P_{/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle - \\
& P^* \rho_S U_S^2 \epsilon_{g/i} + \langle 2\rho_S \frac{U_S^2}{1-\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} P^* \epsilon_{g/i} \rangle + \\
& \langle \rho_S U_S^2 \frac{dP^*}{dz} \epsilon_{g/i} \rangle + P^* \rho_g U_g^2 \epsilon_{g/i} + \langle 2\rho_g \frac{U_g^2}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} P^* \epsilon_{g/i} \rangle - \\
& \langle \rho_g U_g^2 \frac{dP^*}{dz} \epsilon_{g/i} \rangle + \langle g\rho_S \epsilon_{g/i} P^* \rangle - \langle g\rho_g \epsilon_{g/i} P^* \rangle + \\
& \langle \frac{g(1-\epsilon_g)}{U_S^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_S} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_S}{U_g^2} - \frac{2U_S^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} \epsilon_g^* \rangle - \\
& \langle 2 \frac{g(1-\epsilon_g)}{U_S^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_S} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_S}{U_g} + \frac{U_S^2}{U_g^2} \right) U_{S/i} \epsilon_g^* \rangle + \\
& \langle \frac{g(1-\epsilon_g)}{U_S^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_S} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_S}{U_g^2} \right) U_{S/i} \epsilon_g^* \rangle + \\
& \langle \frac{2g(1-\epsilon_g)}{U_S^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_S} - 1 \right) U_{S/i} \epsilon_g^* \rangle + \epsilon_g^* \epsilon_{g/i} - \langle \epsilon_{g/i} \frac{d\epsilon_g^*}{dz} \rangle + \\
& \langle \frac{g}{U_S^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_S} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1-\frac{U_S}{U_g}}{1-S_\infty} \right)^2 \right] \epsilon_{g/i} \epsilon_g^* \rangle
\end{aligned}
\tag{AP3.09}$$

Separando as parcelas sem integrais das com integrais, tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle f^* . H f_{/i} \rangle = & U_g^* U_{g/i} + U_g^* \frac{U_g}{\epsilon_g} \epsilon_{g/i} + U_s^* U_{s/i} - U_s^* \left(\frac{U_s}{1 - \epsilon_g} \right) \epsilon_{g/i} - P^* P_{/i} - \\
& P^* \rho_s U_s^2 \epsilon_{g/i} + P^* \rho_g U_g^2 \epsilon_{g/i} + \epsilon_g^* \epsilon_{g/i} - \langle U_{g/i} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle + \\
& \langle \frac{1}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} U_g^* \rangle + \langle \frac{U_g}{\epsilon_g^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} \epsilon_{g/i} U_g^* \rangle - \langle \epsilon_{g/i} \frac{U_g}{\epsilon_g} \frac{dU_g^*}{dz} \rangle - \langle U_{s/i} \frac{dU_s^*}{dz} \rangle - \\
& \left\langle \left(\frac{1}{1 - \epsilon_g} \right) \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} U_s^* \right\rangle + \left\langle \frac{U_s}{(1 - \epsilon_g)^2} \frac{d\epsilon_g}{dz} U_s^* \epsilon_{g/i} \right\rangle + \left\langle \frac{U_s}{(1 - \epsilon_g)} \frac{dU_s^*}{dz} \epsilon_{g/i} \right\rangle + \\
& \langle 2\rho_g U_g \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{g/i} P^* \rangle - \left\langle \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D Re_g^{\frac{1}{4}}} \right) U_{g/i} P^* \right\rangle - \langle 2\rho_s U_s \frac{d\epsilon_g}{dz} U_{s/i} P^* \rangle + \\
& \langle P_{/i} \frac{dP^*}{dz} \rangle + \langle 2\rho_s \frac{U_s^2}{1 - \epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} P^* \epsilon_{g/i} \rangle + \langle \rho_s U_s^2 \frac{dP^*}{dz} \epsilon_{g/i} \rangle + \\
& \langle 2\rho_g \frac{U_g^2}{\epsilon_g} \frac{d\epsilon_g}{dz} P^* \epsilon_{g/i} \rangle - \langle \rho_g U_g^2 \frac{dP^*}{dz} \epsilon_{g/i} \rangle + \langle g\rho_s \epsilon_{g/i} P^* \rangle - \\
& \langle g\rho_g \epsilon_{g/i} P^* \rangle + \left\langle \frac{g(1 - \epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) U_{g/i} \epsilon_g^* \right\rangle - \\
& \left\langle 2 \frac{g(1 - \epsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) U_{s/i} \epsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{g(1 - \epsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1 - S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) U_{s/i} \epsilon_g^* \right\rangle + \\
& \left\langle \frac{2g(1 - \epsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) U_{s/i} \epsilon_g^* \right\rangle - \langle \epsilon_{g/i} \frac{d\epsilon_g^*}{dz} \rangle + \\
& \left\langle \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \epsilon_{g/i} \epsilon_g^* \right\rangle
\end{aligned}$$

(AP3.10)

Para comparar os primeiro e segundo membros da equação (AP3.01), tem-se que encontrar $\langle \mathbf{f}_{/i} \cdot \mathbf{H}^* \mathbf{f}^* \rangle$, pois $\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{H} \mathbf{f}_{/i} \rangle$ é dada pela equação (AP3.10). Para tanto, será utilizado o vetor $\mathbf{f}_{/i}$ definido por

$$\mathbf{f}_{/i} = \begin{bmatrix} U_{g/i} \\ U_{S/i} \\ P_{/i} \\ \varepsilon_{g/i} \end{bmatrix}, \text{ equação (A.10),}$$

uma matriz genérica $\mathbf{H}^*$ definida por

$$\mathbf{H}^* = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{24} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} & \theta_{34} \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{AP3.11})$$

e o vetor $\mathbf{f}^*$ definido por

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_S^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix}, \text{ Equação (AP3.02).}$$

Assim:

$$\langle \mathbf{f}_{/i} \cdot \mathbf{H}^* \mathbf{f}^* \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} U_{g/i} \\ U_{S/i} \\ P_{/i} \\ \varepsilon_{g/i} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} & \theta_{14} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{24} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} & \theta_{34} \\ \theta_{41} & \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_S^* \\ P^* \\ \varepsilon_g^* \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{AP3.12})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}_{/i} \cdot \mathbf{H}^* \mathbf{f}^* \rangle = & \langle \theta_{11} U_{g/i} U_g^* \rangle + \langle \theta_{12} U_{g/i} U_S^* \rangle + \langle \theta_{13} U_{g/i} P^* \rangle + \langle \theta_{14} U_{g/i} \varepsilon_g^* \rangle + \\ & \langle \theta_{21} U_{S/i} U_g^* \rangle + \langle \theta_{22} U_{S/i} U_S^* \rangle + \langle \theta_{23} U_{S/i} P^* \rangle + \langle \theta_{24} U_{S/i} \varepsilon_g^* \rangle + \\ & \langle \theta_{31} P_{/i} U_g^* \rangle + \langle \theta_{32} P_{/i} U_S^* \rangle + \langle \theta_{33} P_{/i} P^* \rangle + \langle \theta_{34} P_{/i} \varepsilon_g^* \rangle + \\ & \langle \theta_{41} \varepsilon_{g/i} U_g^* \rangle + \langle \theta_{42} \varepsilon_{g/i} U_S^* \rangle + \langle \theta_{43} \varepsilon_{g/i} P^* \rangle + \langle \theta_{44} \varepsilon_{g/i} \varepsilon_g^* \rangle \end{aligned} \quad (\text{AP3.13})$$

Substituindo as equações (AP3.10) e (AP3.13) na equação (AP3.01) e comparando ambos os membros, obtêm-se os elementos do operador adjunto $\mathbf{H}^*$ e o concomitante bilinear CB.

Assim, os elementos da matriz H^* são:

$$\theta_{11} = -\frac{d}{dz} + \frac{1}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP3.14})$$

$$\theta_{12} = 0 \quad (\text{AP3.15})$$

$$\theta_{13} = 2\rho_g U_g \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \frac{7}{8} \left(\frac{0,316\rho_g U_g}{D\text{Re}_g^{\frac{1}{4}}} \right) \quad (\text{AP3.16})$$

$$\theta_{14} = \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(\frac{2U_s}{U_g^2} - \frac{2U_s^2}{U_g^3} \right) \quad (\text{AP3.17})$$

$$\theta_{21} = 0 \quad (\text{AP3.18})$$

$$\theta_{22} = -\frac{d}{dz} - \left(\frac{1}{1-\varepsilon_g} \right) \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP3.19})$$

$$\theta_{23} = -2\rho_s U_s \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP3.20})$$

$$\begin{aligned} \theta_{24} = & -2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(1 - \frac{2U_s}{U_g} + \frac{U_s^2}{U_g^2} \right) + \\ & \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1}{1-S_\infty} \right)^2 \left(-\frac{2}{U_g} + \frac{2U_s}{U_g^2} \right) + 2 \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^3} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{AP3.21})$$

$$\theta_{31} = 0 \quad (\text{AP3.22})$$

$$\theta_{32} = 0 \quad (\text{AP3.23})$$

$$\theta_{33} = \frac{d}{dz} \quad (\text{AP3.24})$$

$$\theta_{34} = 0 \quad (\text{AP3.25})$$

$$\theta_{41} = -\frac{U_g}{\varepsilon_g} \frac{d}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g^2} \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP3.26})$$

$$\theta_{42} = \left(\frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \right) \frac{d}{dz} + \left[\frac{U_s}{(1 - \varepsilon_g)^2} \right] \frac{d\varepsilon_g}{dz} \quad (\text{AP3.27})$$

$$\theta_{43} = 2\rho_s \frac{U_s^2}{(1 - \varepsilon_g)} \frac{d\varepsilon_g}{dz} + \rho_s U_s^2 \frac{d}{dz} + 2\rho_g \frac{U_g^2}{\varepsilon_g} \frac{d\varepsilon_g}{dz} - \rho_g U_g^2 \frac{d}{dz} + g\rho_s - g\rho_g \quad (\text{AP3.28})$$

$$\theta_{44} = -\frac{d}{dz} + \frac{g}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left[1 - \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] \quad (\text{AP3.29})$$

Agora, é possível encontrar o concomitante bilinear CB, que corresponde às parcelas que não estão nas integrais. Assim:

$$\text{CB} = \left[\begin{array}{l} -U_g^* U_{g/i} - U_g^* \frac{U_g}{\varepsilon_g} \varepsilon_{g/i} - U_s^* U_{s/i} + U_s^* \left(\frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \right) \varepsilon_{g/i} + P^* P_{/i} + \\ P^* \rho_s U_s^2 \varepsilon_{g/i} - P^* \rho_g U_g^2 \varepsilon_{g/i} - \varepsilon_g^* \varepsilon_{g/i} \end{array} \right]_0^L \quad (\text{AP3.30})$$

$$\begin{aligned} \text{CB} = & \left[-U_g^* U_{g/i} \right]_0^L - \left[U_g^* \frac{U_g}{\varepsilon_g} \varepsilon_{g/i} \right]_0^L - \left[U_s^* U_{s/i} \right]_0^L + \left[U_s^* \left(\frac{U_s}{1 - \varepsilon_g} \right) \varepsilon_{g/i} \right]_0^L + \\ & \left[P^* P_{/i} \right]_0^L + \left[P^* \rho_s U_s^2 \varepsilon_{g/i} \right]_0^L - \left[P^* \rho_g U_g^2 \varepsilon_{g/i} \right]_0^L - \left[\varepsilon_g^* \varepsilon_{g/i} \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{AP3.31})$$

$$\begin{aligned}
CB = & -U_{g(L)}^* U_{g(L)/i} + U_{g(0)}^* U_{g(0)/i} - U_{g(L)}^* \frac{U_{g(L)}}{\epsilon_{g(L)}} \epsilon_{g(L)/i} + U_{g(0)}^* \frac{U_{g(0)}}{\epsilon_{g(0)}} \epsilon_{g(0)/i} - \\
& U_{S(L)}^* U_{S(L)/i} + U_{S(0)}^* U_{S(0)/i} + U_{S(L)}^* \left(\frac{U_{S(L)}}{1 - \epsilon_{g(L)}} \right) \epsilon_{g(L)/i} - \\
& U_{S(0)}^* \left(\frac{U_{S(0)}}{1 - \epsilon_{g(0)}} \right) \epsilon_{g(0)/i} + P_{(L)}^* P_{(L)/i} - P_{(0)}^* P_{(0)/i} + P_{(L)}^* \rho_S U_{S(L)}^2 \epsilon_{g(L)/i} - \\
& P_{(0)}^* \rho_S U_{S(0)}^2 \epsilon_{g(0)/i} + P_{(L)}^* \rho_g U_{g(L)}^2 \epsilon_{g(L)/i} + P_{(0)}^* \rho_g U_{g(0)}^2 \epsilon_{g(0)/i} - \\
& \epsilon_{g(L)}^* \epsilon_{g(L)/i} + \epsilon_{g(0)}^* \epsilon_{g(0)/i}
\end{aligned} \tag{AP3.32}$$

Estabelecendo as condições iniciais para o sistema direto e de contorno para o sistema adjunto, vem:

Para $z = 0$:

$$U_{g(0)} = U_{g0} \quad , \quad U_{S(0)} = U_{S0} \quad , \quad P_{(0)} = P_0 \quad , \quad \epsilon_{g(0)} = \epsilon_{g0} \tag{AP3.33}$$

Para $z = L$:

$$U_{g(L)}^* = 0 \quad , \quad U_{S(L)}^* = 0 \quad , \quad P_{(L)}^* = 0 \quad , \quad \epsilon_{g(L)}^* = 0 \tag{AP3.34}$$

Substituindo as equações (AP3.33) e (AP3.34) em (AP3.32) :

$$\begin{aligned}
CB = & U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} \epsilon_{g0/i} + U_{S0}^* U_{S0/i} - U_{S0}^* \left(\frac{U_{S0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) \epsilon_{g0/i} - P_0^* P_{0/i} - \\
& P_0^* \rho_S U_{S0}^2 \epsilon_{g0/i} + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 \epsilon_{g0/i} + \epsilon_{g0}^* \epsilon_{g0/i}
\end{aligned} \tag{AP3.35}$$

APÊNDICE 4 (AP4)

Cálculo de $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle$

Pela Eq. (A.07), $\mathbf{S}^+ = \begin{bmatrix} S_{U_g}^+ \\ S_{U_S}^+ \\ S_P^+ \\ S_{\varepsilon_g}^+ \end{bmatrix}$ ou $\mathbf{S}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix}$ e $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} U_g \\ U_S \\ P \\ \varepsilon_g \end{bmatrix}$. Logo,

$$\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} S_{U_g/i}^+ \\ S_{U_S/i}^+ \\ S_{P/i}^+ \\ S_{\varepsilon_g/i}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_g \\ U_S \\ P \\ \varepsilon_g \end{bmatrix} \right\rangle \rightarrow \langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 0_{/i} \\ 0_{/i} \\ 0_{/i} \\ \left(\frac{1}{L}\right)_{/i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_g \\ U_S \\ P \\ \varepsilon_g \end{bmatrix} \right\rangle \therefore$$

$$\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L}\right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle. \quad (\text{AP4.01})$$

Para o parâmetro ρ_s : $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L}\right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle \frac{d\left(\frac{1}{L}\right)}{d\rho_s} \varepsilon_g \right\rangle = \langle 0 \cdot \varepsilon_g \rangle = 0$ (AP4.02)

Para o parâmetro ρ_g : $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L}\right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle \frac{d\left(\frac{1}{L}\right)}{d\rho_g} \varepsilon_g \right\rangle = \langle 0 \cdot \varepsilon_g \rangle = 0$ (AP4.03)

Para o parâmetro D: $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L}\right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle \frac{d\left(\frac{1}{L}\right)}{dD} \varepsilon_g \right\rangle = \langle 0 \cdot \varepsilon_g \rangle = 0$ (AP4.04)

Para o parâmetro W: $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L}\right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle \frac{d\left(\frac{1}{L}\right)}{dW} \varepsilon_g \right\rangle = \langle 0 \cdot \varepsilon_g \rangle = 0$ (AP4.05)

Para o parâmetro Q: $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L}\right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle \frac{d\left(\frac{1}{L}\right)}{dQ} \varepsilon_g \right\rangle = \langle 0 \cdot \varepsilon_g \rangle = 0$ (AP4.06)

Para o parâmetro L : $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L} \right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle \frac{d\left(\frac{1}{L}\right)}{dL} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{L^2} \varepsilon_g \right\rangle$ (AP4.07)

Para o parâmetro μ_g : $\langle \mathbf{S}_{/i}^+ \cdot \mathbf{f} \rangle = \left\langle \left(\frac{1}{L} \right)_{/i} \varepsilon_g \right\rangle = \left\langle \frac{d\left(\frac{1}{L}\right)}{d\mu_g} \varepsilon_g \right\rangle = \langle 0 \cdot \varepsilon_g \rangle = 0$ (AP4.08)

APÊNDICE 5 (AP5)

Cálculos dos termos de fonte $S_{(i)}$ para qualquer parâmetro

Como $m_1 = \frac{dU_g}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right)$ e pela equação (A.14) tem-se $S_{(i)} \equiv -\frac{\partial m}{\partial p_i}$, então:

$$S_{(i)1} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{dU_g}{dz} + \frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \rightarrow$$

$$S_{(i)1} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\left(\frac{dU_g}{dz} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{U_g}{\varepsilon_g} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \therefore$$

$$S_{(i)1} = 0 \quad (\text{Para todos os parâmetros}) \quad (\text{AP5.01})$$

Sendo $m_2 = \frac{dU_s}{dz} - \frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right)$ tem-se:

$$S_{(i)2} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{dU_s}{dz} - \frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \rightarrow$$

$$S_{(i)2} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{dU_s}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{U_s}{(1-\varepsilon_g)} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \right] \therefore$$

$$S_{(i)2} = 0 \quad (\text{Para todos os parâmetros}) \quad (\text{AP5.02})$$

Sendo $m_3 = -\frac{dP}{dz} - \frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_s U_s^2) + \frac{d\varepsilon_g}{dz} (\rho_g U_g^2) - f_w - g\rho_s + g\varepsilon_g \rho_s - g\varepsilon_g \rho_g \therefore$

$$m_3 = -\frac{dP}{dz} - \frac{d\varepsilon_g}{dz} \left[(\rho_s U_s^2) - (\rho_g U_g^2) \right] - f_w - g(\rho_s - \varepsilon_g \rho_s + \varepsilon_g \rho_g), \quad \text{vem que:}$$

$$S_{(i)3} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ -\frac{dP}{dz} - \frac{d\varepsilon_g}{dz} \left[(\rho_s U_s^2) - (\rho_g U_g^2) \right] - f_w - g(\rho_s - \varepsilon_g \rho_s + \varepsilon_g \rho_g) \right\} \rightarrow$$

$$S_{(i)3} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{dP}{dz} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \frac{d\varepsilon_g}{dz} \left[(\rho_s U_s^2) - (\rho_g U_g^2) \right] \right\} + \frac{\partial f_w}{\partial p_i} + \frac{\partial}{\partial p_i} \left[g(\rho_s - \varepsilon_g \rho_s + \varepsilon_g \rho_g) \right] \quad \therefore$$

$$S_{(i)3} = \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} U_s^2 - \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} U_g^2 \right) + \frac{\partial f_w}{\partial p_i} + g \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} - \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} \rho_s - \varepsilon_g \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} + \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} \rho_g + \varepsilon_g \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} \right)$$

Como $f_w = \frac{0,316 \rho_g U_g^2}{2D Re_g^{\frac{1}{4}}}$ e $Re_g = \frac{\rho_g U_g D}{\mu_g}$, então:

$$f_w = \frac{0,316 \rho_g U_g^2}{2D \left(\frac{\rho_g U_g D}{\mu_g} \right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{0,158 \rho_g U_g^2}{\frac{D \rho_g^{0,25} U_g^{0,25} D^{0,25}}{\mu_g^{0,25}}} = \frac{0,158 \rho_g U_g^2 \mu_g^{0,25}}{\rho_g^{0,25} U_g^{0,25} D^{1,25}} \quad \therefore$$

$$f_w = \frac{0,158 \rho_g^{0,75} U_g^{1,75} \mu_g^{0,25}}{D^{1,25}}. \text{ Então: } \frac{\partial f_w}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{0,158 \rho_g^{0,75} U_g^{1,75} \mu_g^{0,25}}{D^{1,25}} \right)$$

Assim:

$$\frac{\partial f_w}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\left(\frac{0,158 \rho_g^{0,75}}{D^{1,25}} \right) (U_g^{1,75} \mu_g^{0,25}) \right] \quad \therefore$$

$$\frac{\partial f_w}{\partial p_i} = \left[\frac{(0,158 D^{1,25}) \frac{\partial (\rho_g^{0,75})}{\partial p_i} - (0,158 \rho_g^{0,75}) \frac{\partial (D^{1,25})}{\partial p_i}}{D^{2,5}} \right] (U_g^{1,75} \mu_g^{0,25}) + \left(\frac{0,158 \rho_g^{0,75}}{D^{1,25}} \right) \left[U_g^{1,75} \frac{\partial (\mu_g^{0,25})}{\partial p_i} \right] \quad \therefore$$

Substituindo $\frac{\partial f_w}{\partial p_i}$ em $S_{(i)3}$ vem:

$$\begin{aligned}
S_{(i)3} = & \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} U_s^2 - \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} U_g^2 \right) + \\
& \left[\frac{(0,158 D^{1,25}) \frac{\partial (\rho_g^{0,75})}{\partial p_i} - (0,158 \rho_g^{0,75}) \frac{\partial (D^{1,25})}{\partial p_i}}{D^{2,5}} (U_g^{1,75} \mu_g^{0,25}) + \right. \\
& \left. \left(\frac{0,158 \rho_g^{0,75}}{D^{1,25}} \right) \left[U_g^{1,75} \frac{\partial (\mu_g^{0,25})}{\partial p_i} \right] + g \left(\frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} - \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} \rho_s - \varepsilon_g \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} + \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} \rho_g + \varepsilon_g \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} \right) \right]
\end{aligned} \tag{AP5.03}$$

$$\text{Para } m_4 = \frac{d\varepsilon_g}{dz} + \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \therefore$$

$$m_4 = \frac{d\varepsilon_g}{dz} + \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right], \text{ vem:}$$

$$S_{(i)4} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \frac{d\varepsilon_g}{dz} + \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \right\} \rightarrow$$

$$S_{(i)4} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{d\varepsilon_g}{dz} \right) - \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ \frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] \right\} \therefore$$

$$S_{(i)4} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \right] \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] -$$

$$\left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \right] \left\{ \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] - \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right\}$$

Efetutando as derivações em separado:

$$-\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \right] = - \left[\frac{U_s^2 \frac{\partial}{\partial p_i} [g(1-\varepsilon_g)] - \frac{\partial(U_s^2)}{\partial p_i} g(1-\varepsilon_g)}{U_s^4} \right] \therefore$$

$$-\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\frac{g(1-\varepsilon_g)}{U_s^2} \right] = \frac{g U_s^2 \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} + g(1-\varepsilon_g) \frac{\partial(U_s^2)}{\partial p_i}}{U_s^4}$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 + \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2$$

Como $\frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) = \frac{\rho_s \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} \rho_g}{\rho_s^2}$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 \right] &= \left(\frac{\rho_s \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} \rho_g}{\rho_s^2} \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 + \\ &+ 2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{(1 - S_\infty)^2} \right) \left(\frac{U_s \frac{\partial U_g}{\partial p_i} - U_g \frac{\partial U_s}{\partial p_i}}{U_g^2} \right) \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas já calculadas na expressão de $S_{(i)4}$:

$$\begin{aligned} S_{(i)4} &= \left[\frac{g U_s^2 \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial p_i} + g(1 - \varepsilon_g) \frac{\partial (U_s^2)}{\partial p_i}}{U_s^4} \right] \left[\left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 - \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \right] - \left[\frac{g(1 - \varepsilon_g)}{U_s^2} \right] \\ &\left\{ \left[\left(\frac{\rho_s \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} \rho_g}{\rho_s^2} \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{1 - S_\infty} \right)^2 + 2 \left(\frac{\rho_g}{\rho_s} - 1 \right) \left(\frac{1 - \frac{U_s}{U_g}}{(1 - S_\infty)^2} \right) \left(\frac{U_s \frac{\partial U_g}{\partial p_i} - U_g \frac{\partial U_s}{\partial p_i}}{U_g^2} \right) \right] - \right. \\ &\left. \left[\left(\frac{\rho_s \frac{\partial \rho_g}{\partial p_i} - \frac{\partial \rho_s}{\partial p_i} \rho_g}{\rho_s^2} \right) \right] \right\} \quad (\text{AP5.04}) \end{aligned}$$

APÊNDICE 6 (AP 6)

Cálculo de $\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle$ para cada parâmetro

Pela Eq. (AP3.02), $\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \epsilon_g^* \end{bmatrix}$. Sendo $\mathbf{S}_{(i)} = \begin{bmatrix} S_{(i)1} \\ S_{(i)2} \\ S_{(i)3} \\ S_{(i)4} \end{bmatrix}$, vem que:

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} U_g^* \\ U_s^* \\ P^* \\ \epsilon_g^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{(i)1} \\ S_{(i)2} \\ S_{(i)3} \\ S_{(i)4} \end{bmatrix} \right\rangle = \langle U_g^* S_{(i)1} + U_s^* S_{(i)2} + P^* S_{(i)3} + \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad \therefore$$

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* S_{(i)1} \rangle + \langle U_s^* S_{(i)2} \rangle + \langle P^* S_{(i)3} \rangle + \langle \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad (\text{AP6.01})$$

Para o parâmetro ρ_s :

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* \cdot 0 \rangle + \langle U_s^* \cdot 0 \rangle + \langle P^* S_{(i)3} \rangle + \langle \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad \therefore$$

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle P^* S_{(i)3} \rangle + \langle \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad (\text{AP6.02})$$

Para o parâmetro ρ_g :

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* S_{(i)1} + U_s^* S_{(i)2} + P^* S_{(i)3} + \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle$$

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* \cdot 0 \rangle + \langle U_s^* \cdot 0 \rangle + \langle P^* S_{(i)3} \rangle + \langle \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad \therefore$$

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle P^* S_{(i)3} \rangle + \langle \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle \quad (\text{AP6.03})$$

Para o parâmetro D:

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* S_{(i)1} \rangle + \langle U_s^* S_{(i)2} \rangle + \langle P^* S_{(i)3} \rangle + \langle \epsilon_g^* S_{(i)4} \rangle$$

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle U_g^* \cdot 0 \rangle + \langle U_s^* \cdot 0 \rangle + \langle P^* S_{(i)3} \rangle + \langle \epsilon_g^* \cdot 0 \rangle \quad \therefore$$

$$\langle \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle P^* S_{(i)3} \rangle \quad (\text{AP6.04})$$

Para o parâmetro W:

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle \mathbf{U}_g^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{U}_s^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{P}^* . 0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_g^* . 0 \rangle \quad \therefore \quad \langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = 0 \quad (\text{AP6.05})$$

Para o parâmetro Q:

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle \mathbf{U}_g^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{U}_s^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{P}^* . 0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_g^* . 0 \rangle \quad \therefore \quad \langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = 0 \quad (\text{AP6.06})$$

Para o parâmetro L :

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle \mathbf{U}_g^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{U}_s^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{P}^* . 0 \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_g^* . 0 \rangle \quad \therefore \quad \langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = 0 \quad (\text{AP6.07})$$

Para o parâmetro μ_g :

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle \mathbf{U}_g^* \mathbf{S}_{(i)1} \rangle + \langle \mathbf{U}_s^* \mathbf{S}_{(i)2} \rangle + \langle \mathbf{P}^* \mathbf{S}_{(i)3} \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_g^* \mathbf{S}_{(i)4} \rangle$$

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle \mathbf{U}_g^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{U}_s^* . 0 \rangle + \langle \mathbf{P}^* \mathbf{S}_{(i)3} \rangle + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_g^* . 0 \rangle \quad \therefore$$

$$\langle \mathbf{f}^* . \mathbf{S}_{(i)} \rangle = \langle \mathbf{P}^* \mathbf{S}_{(i)3} \rangle \quad (\text{AP6.08})$$

APÊNDICE 7 (AP7)

Cálculo de $CB(f^*, f_{/i})$ para cada parâmetro

Pela Equação (AP3.35) tem-se que:

$$CB = U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} \epsilon_{g0/i} + U_{s0}^* U_{s0/i} - U_{s0}^* \left(\frac{U_{s0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) \epsilon_{g0/i} - P_0^* P_{0/i} - \\ P_0^* \rho_s U_{s0}^2 \epsilon_{g0/i} + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 \epsilon_{g0/i} + \epsilon_{g0}^* \epsilon_{g0/i}$$

ou, reescrevendo-a:

$$CB = U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{s0}^* U_{s0/i} + \\ \epsilon_{g0/i} \left[-U_{s0}^* \left(\frac{U_{s0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} - P_0^* \rho_s U_{s0}^2 + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 + \epsilon_{g0}^* \right] - P_0^* P_{0/i} \quad (AP7.01)$$

Os parâmetros ρ_g , ρ_s , D , W , Q , L e μ_g são fixados com valores de entrada.

EXPRESSÕES DOS VALORES DE U_{g0} , U_{s0} , ϵ_{g0} e P_0 E SUAS DERIVADAS EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS

$$\text{Tem-se que } U_{g0} = \frac{U_{gb}}{\epsilon_{g0}} \text{ e que } U_{gb} = \frac{Q_1}{A_g} = \frac{Q_1}{\pi \cdot \frac{D^2}{4}} \text{ ou}$$

$$U_{gb} = 1,2732 \cdot Q_1 \cdot D^{-2}. \quad (AP7.02)$$

Sabe-se ainda que $\epsilon_{g0} = 1 - \epsilon_{s0} = 1 - \epsilon_{sb}$, $F_{holdup} = 1 - (1 - \epsilon_{gb}) F_{holdup}$, onde $F_{holdup} = \beta \cdot e^{-\gamma(z/L)}$ é o fator de Holdup. Como este fator somente será aplicado para $z = 0$, então $F_{holdup} = \beta \cdot e^{-\gamma(0/L)} = \beta$, onde β é uma constante. Então, tem-se que $\epsilon_{g0} = 1 - (1 - \epsilon_{gb}) \beta$ ou $\epsilon_{g0} = 1 - \beta + \beta \cdot \epsilon_{gb}$.

$$\text{Logo: } U_{g0} = \frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \epsilon_{gb}}, \text{ ou } U_{g0} = \frac{1,2732 \cdot Q_1 \cdot D^{-2}}{1 - \beta + \beta \epsilon_{gb}}.$$

$$\text{Sendo } \epsilon_{gb} = \frac{U_{gb} \cdot \rho_s}{2W + U_{gb} \cdot \rho_s}, \text{ então:}$$

$$U_{g0} = \frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right)} \rightarrow U_{g0} = f(D, Q, W, \rho_s) \quad (\text{AP7.03})$$

onde U_{gb} é dado por (AP7.02).

$$U_{s0} = U_{sb} \cdot (1 - \text{Fholdup})$$

Sendo $U_{sb} = \frac{W}{\rho_s \varepsilon_{sb}}$ e $\text{Fholdup} = \beta$, então:

$$U_{s0} = \frac{W(1 - \beta)}{\rho_s \varepsilon_{sb}}. \text{ Como } \varepsilon_{sb} = (1 - \varepsilon_{gb}) \text{ e } \varepsilon_{gb} = \frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s}, \text{ então:}$$

$$U_{s0} = \frac{W(1 - \beta)}{\rho_s \left(1 - \frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right)}. \text{ Logo:}$$

$$U_{s0} = \frac{2W + U_{gb} \rho_s - 2W\beta - U_{gb} \rho_s \beta}{2\rho_s} \rightarrow U_{s0} = f(D, Q, W, \rho_s) \quad (\text{AP7.04})$$

onde U_{gb} é dado por (AP7.01).

$$\varepsilon_{g0} = 1 - \beta + \beta \varepsilon_{gb}$$

$$\varepsilon_{g0} = 1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right) \rightarrow \varepsilon_{g0} = f(D, Q, W, \rho_s) \quad (\text{AP7.05})$$

onde U_{gb} é dado por (AP7.01).

P_0 = Dado de entrada. Logo, não há dependência dos parâmetros.

Calculo de $U_{g0/i}$, $U_{s0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{/i}$ em relação ao parâmetro ρ_s :

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{d\rho_s} = \frac{d \left(\frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \cdot \rho_s}{2W + U_{gb} \cdot \rho_s} \right)} \right)}{d\rho_s}$$

Sendo $U_{gb} = 1,2732Q_1 D^{-2}$, onde U_{gb} independe de ρ_s , então:

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{d\rho_s} = \frac{\left(\frac{-2W\beta U_{gb}^2}{(2W + U_{gb} \cdot \rho_s)^2} \right)}{\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \cdot \rho_s}{2W + U_{gb} \cdot \rho_s} \right) \right]^2} \quad (\text{AP7.06})$$

onde U_{gb} é dado por (AP7.01).

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{d\rho_s} = \frac{d \left(\frac{2W + U_{gb} \cdot \rho_s - 2W\beta - U_{gb} \rho_s \beta}{2\rho_s} \right)}{d\rho_s} \therefore$$

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{d\rho_s} = \frac{-W(1-\beta)}{\rho_s^2} \quad (\text{AP7.07})$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{d\rho_s} = \frac{d \left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right) \right]}{d\rho_s} \therefore$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{d\rho_s} = \frac{2WU_{gb}\beta}{(2W + U_{gb}\rho_s)^2} \quad (\text{AP7.08})$$

onde U_{gb} é dado por (AP7.01).

$$P_{0/i} = \frac{dP_0}{d\rho_s} = 0 \quad (\text{AP7.09})$$

Calculo de $U_{g0/i}$, $U_{s0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{0/i}$ em relação ao parâmetro ρ_g :

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{d\rho_g} = - \frac{d \left(\frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right)} \right)}{d\rho_g} \quad \therefore$$

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{d\rho_g} = 0 \quad (\text{AP7.10})$$

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{d\rho_g} = - \frac{d \left(\frac{2W + U_{gb}\rho_s - 2W\beta - U_{gb}\rho_s\beta}{2\rho_s} \right)}{d\rho_g} \quad \therefore$$

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{d\rho_g} = 0 \quad (\text{AP7.11})$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{d\rho_g} = - \frac{d \left(1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right) \right)}{d\rho_g} \quad \therefore$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{d\rho_g} = 0 \quad (\text{AP7.12})$$

$$P_{0/i} = \frac{dP_0}{d\rho_g} = 0 \quad (\text{AP7.13})$$

Calculo de $U_{g0/i}$, $U_{s0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{0/i}$ em relação ao parâmetro D :

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dD} = - \frac{d \left(\frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right)} \right)}{dD}$$

onde U_{gb} é dado por (AP7.02). Então:

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dD} = \left\{ \frac{\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right) \right] (-2U_{gb}D^{-1})}{\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right) \right]^2} \right\} - \left\{ \frac{U_{gb} \frac{(2W + U_{gb}\rho_s)\beta\rho_s(-2U_{gb}D^{-1}) - \beta U_{gb}\rho_s\rho_s(-2U_{gb}D^{-1})}{(2W + U_{gb}\rho_s)^2}}{\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right) \right]^2} \right\} \quad (AP7.14)$$

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{dD} = \frac{d\left(\frac{2W + U_{gb}\rho_s - 2W\beta - U_{gb}\rho_s\beta}{2\rho_s} \right)}{dD} \quad \therefore$$

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{dD} = U_{gb}D^{-1}(\beta - 1) \quad (AP7.15)$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dD} = \frac{d\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right) \right]}{dD} \quad \therefore$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dD} = \frac{-4WU_{gb}D^{-1}\beta\rho_s}{(2W + U_{gb}\rho_s)^2} \quad (AP7.16)$$

$$P_{0/i} = \frac{dP_0}{dD} = 0 \quad (AP7.17)$$

Calculo de $U_{g0/i}$, $U_{s0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{0/i}$ em relação ao parâmetro W :

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dW} = \frac{d\left(\frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right)} \right)}{dW} \quad \therefore$$

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dW} = \frac{\left[\frac{2\beta U_{gb}^2 \rho_s}{(2W + U_{gb} \rho_s)^2} \right]}{\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right) \right]^2} \quad (\text{AP7.18})$$

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{dW} = \frac{d \left(\frac{2W + U_{gb} \rho_s - 2W\beta - U_{gb} \rho_s \beta}{2\rho_s} \right)}{dW} \quad \therefore$$

$$U_{s0/i} = \frac{dU_{s0}}{dW} = \frac{1}{\rho_s} (1 - \beta) \quad (\text{AP7.19})$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dW} = \frac{d \left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right) \right]}{dW}$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dW} = \frac{-2\beta U_{gb} \rho_s}{(2W + U_{gb} \rho_s)^2} \quad (\text{AP7.20})$$

$$P_{0/i} = \frac{dP_0}{dW} = 0 \quad (\text{AP7.21})$$

Calculo de $U_{g0/i}$, $U_{s0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{0/i}$ em relação ao parâmetro Q :

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dQ} = \frac{d \left(\frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right)} \right)}{dQ} \quad \therefore$$

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dQ} = \frac{\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right) \right] U_{gb} Q^{-1} - U_{gb} \left[\frac{2W\beta \rho_s U_{gb} Q^{-1}}{(2W + U_{gb} \rho_s)^2} \right]}{\left[1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb} \rho_s}{2W + U_{gb} \rho_s} \right) \right]^2} \quad (\text{AP7.22})$$

$$U_{S0/i} = \frac{dU_{S0}}{dQ} = \frac{d\left(\frac{2W + U_{gb}\rho_s - 2W\beta - U_{gb}\rho_s\beta}{2\rho_s}\right)}{dQ} \quad \therefore$$

$$U_{S0/i} = \frac{dU_{S0}}{dQ} = \frac{1}{2\rho_s} U_{gb} Q^{-1} \rho_s (1-\beta) \quad (AP7.23)$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dQ} = \frac{d\left[1-\beta+\beta\left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s}\right)\right]}{dQ} \quad \therefore$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dQ} = \frac{2W\beta\rho_s U_{gb} Q^{-1}}{(2W + U_{gb}\rho_s)^2} \quad (AP7.24)$$

$$P_{0/i} = \frac{dP_0}{dQ} = 0 \quad (AP7.25)$$

Calculo de $U_{g0/i}$, $U_{S0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{0/i}$ em relação ao parâmetro L :

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dL} = \frac{d\left(\frac{U_{gb}}{1-\beta+\beta\left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s}\right)}\right)}{dL} \quad \therefore$$

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{dL} = 0 \quad (AP7.26)$$

$$U_{S0/i} = \frac{dU_{S0}}{dL} = \frac{d\left(\frac{2W + U_{gb}\rho_s - 2W\beta - U_{gb}\rho_s\beta}{2\rho_s}\right)}{dL} \quad \therefore$$

$$U_{S0/i} = \frac{dU_{S0}}{dL} = 0 \quad (AP7.27)$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dL} = \frac{d\left(1-\beta+\beta\left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s}\right)\right)}{dL} \quad \therefore$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{dL} = 0 \quad (\text{AP7.28})$$

$$P_{0/i} = \frac{dP_0}{dL} = 0 \quad (\text{AP7.29})$$

Calculo de $U_{g0/i}$, $U_{S0/i}$, $\varepsilon_{g0/i}$ e $P_{0/i}$ em relação ao parâmetro μ_g :

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{d\mu_g} = \frac{d \left(\frac{U_{gb}}{1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right)} \right)}{d\mu_g} \quad \therefore$$

$$U_{g0/i} = \frac{dU_{g0}}{d\mu_g} = 0 \quad (\text{AP7.30})$$

$$U_{S0/i} = \frac{dU_{S0}}{d\mu_g} = \frac{d \left(\frac{2W + U_{gb}\rho_s - 2W\beta - U_{gb}\rho_s\beta}{2\rho_s} \right)}{d\mu_g} \quad \therefore$$

$$U_{S0/i} = \frac{dU_{S0}}{d\mu_g} = 0 \quad (\text{AP7.31})$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{d\mu_g} = \frac{d \left(1 - \beta + \beta \left(\frac{U_{gb}\rho_s}{2W + U_{gb}\rho_s} \right) \right)}{d\mu_g} \quad \therefore$$

$$\varepsilon_{g0/i} = \frac{d\varepsilon_{g0}}{d\mu_g} = 0 \quad (\text{AP7.32})$$

$$P_{0/i} = \frac{dP_0}{d\mu_g} = 0 \quad (\text{AP7.33})$$

Na Equação (AP7.01) , para encontrar CB, tem-se:

$$CB = U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{S0}^* U_{S0/i} + \epsilon_{g0/i} \left[-U_{S0}^* \left(\frac{U_{S0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} - P_0^* \rho_S U_{S0}^2 + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 + \epsilon_{g0}^* \right] - P_0^* P_{0/i}$$

Como $P_{0/i} = 0$ para todos os parâmetros, então:

$$CB = U_{g0}^* U_{g0/i} + U_{S0}^* U_{S0/i} + \epsilon_{g0/i} \left[-U_{S0}^* \left(\frac{U_{S0}}{1 - \epsilon_{g0}} \right) + U_{g0}^* \frac{U_{g0}}{\epsilon_{g0}} - P_0^* \rho_S U_{S0}^2 + P_0^* \rho_g U_{g0}^2 + \epsilon_{g0}^* \right] \quad (AP7.34)$$

Para se determinar CB para cada parâmetro, basta substituir $U_{g0/i}$, $U_{S0/i}$ e $\epsilon_{g0/i}$ relativos a cada parâmetro na Equação (AP7.34).

APÊNDICE 8 (AP8)

Cálculo do coeficiente de sensibilidade generalizado

Seja o funcional-resposta R definido por:

$$R = \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} S^+ f(r, p) dr \quad (\text{AP8.01})$$

Observa-se que os limites da integração no espaço de fase r dependem de algum parâmetro p_i pertencente ao vetor de parâmetros p .

Deseja-se obter o coeficiente de sensibilidade $\frac{\delta R}{\delta p_i}$ de R em relação ao parâmetro p_i .

Para tanto, é necessário aplicar a Regra de Leibnitz (SPIEGEL, 1971) para obter o resultado correto.

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial}{\partial p_i} [S^+ f(r, p)] dr + S^+ (\beta(p)) f(\beta(p), p) \frac{\partial \beta(p)}{\partial p_i} - S^+ (\alpha(p)) f(\alpha(p), p) \frac{\partial \alpha(p)}{\partial p_i} \quad (\text{AP8.02})$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta R}{\delta p_i} = & \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial S^+}{\partial p_i} f(r, p) dr + \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} S^+ \frac{\partial f(r, p)}{\partial p_i} dr + S^+ (\beta(p)) f(\beta(p), p) \frac{\partial \beta(p)}{\partial p_i} - \\ & S^+ (\alpha(p)) f(\alpha(p), p) \frac{\partial \alpha(p)}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (\text{AP8.03})$$

Usando a notação convencional dos métodos perturbativos tem-se:

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = \langle S_{/i}^+ f \rangle + \langle S^+ f_{/i} \rangle + S^+ (\beta(p)) f(\beta(p), p) \frac{\partial \beta(p)}{\partial p_i} - S^+ (\alpha(p)) f(\alpha(p), p) \frac{\partial \alpha(p)}{\partial p_i} \quad (\text{AP8.04})$$

Verifica-se que os dois primeiros termos do lado direito da Equação (AP8.04) representam o valor do coeficiente de sensibilidade conforme o método perturbativo diferencial. Entretanto, os demais termos devem ser adicionados para se obter o coeficiente de sensibilidade correto no tratamento generalizado.

Assim, relativamente ao parâmetro L , os termos adicionados estão apresentados a seguir com o respectivo resultado da operação indicado:

$$\frac{1}{L} \varepsilon_g(L) \frac{\partial L}{\partial L} - \frac{1}{L} \varepsilon_g(0) \frac{\partial(0)}{\partial L} = \frac{1}{L} \varepsilon_g(L) \quad (\text{AP8.05})$$

APÊNDICE 9 (AP9)

Programas computacionais utilizados

% PROGRAMA PARA SISTEMA ADJUNTO

% PROGRAMA B1 - SIMULAÇÕES DOS PARÂMETROS FLUIDODINÂMICOS DO RISER

%sdriser.m

% Programa "sdriser" para simulação dinâmica de um riser de um

% Modelo a Frio com perfil axial não uniforme da fase sólida

% O programa auxiliar (rotina) é: frisermaladi

% O programa auxiliar para o adjunto é: frisermalaiadjunto

clear

clc

global L D d e M R P g mig T W ves a b alfa alum beta gama Rog Rosap Rosk Rosp Q1 Q
Ug0 epsongb epsonsb Us0 Sinf SmaisUg SmaisUs Smaisepsong SmaisP

global v1 v2 v3 v4 h

L=2.3; % Comprimento do riser, m

format long

D=0.032; % Diâmetro médio do riser, m;

d=0.000072; % Diâmetro médio do catalisador, m

e=0.0000015; % Altura média da rugosidade, m

M=28; % Massa molecular média do gas, kg-mol

R=8312; % Constante dos gases, N.m/(kg-mol.K)

P=104364; % Pressão no riser, N/m² (Pa)

T=273+29; % Temperatura no riser, K

g=9.806; % Aceleração gravitacional, m/s²

mig=0.0000186; % Viscosidade gás (29 °C), kg/(m.s)

$W=7.1;$ % Taxa de circulação de sólidos, $\text{kg}/(\text{m}^2.\text{s})$
 $ves=0.00025;$ % Vol. espec.(catalisador SD-X), m^3/kg
 $a=2134;$ % Const. da massa espec. do catalisador
 $b=892;$ % Const. da massa espec. do catalisador
 $\alpha=0.0075;$ % Coeficiente de absorção mássica do cat., m^2/kg
 $\text{alum}=33;$ % Percent. Al_2O_3 na compos. do cat., %
 $\text{beta}=0.95858;$ % Constante do fator de correção da porosidade
sólida
 $\text{gama}=3.06675;$ % Expoente do fator de correção da porosidade sólida
 $\text{Rog}=M*P/(R*T);$ % Massa específica do gás, kg/m^3
 $\text{Rosap}=850.;$ % Massa específica aparente do sólido
 $Q1=13680;$ % Vazão do gás, Q , (L/h)
 $Q=Q1/3600000;$
% Estimativa da velocidade superficial da fase gasosa, m/s
 $Ug0=Q/(0.7854*(D^2));$
% Estimativa do número de Reynolds para a fase gasosa
 $\text{Re}=Ug0*D*\text{Rog}/\text{mig};$
% Massa específica do esqueleto sólido (catalisador de FCC SDX), kg/m^3
 $\text{Rosk}=a+b*(\text{alum}/100);$
% Massa específica do sólido poroso; kg/m^3
 $\text{Rosp}=\text{Rosk}/(1+\text{Rosk}*ves);$
% Estimativa para o coeficiente de atrito do gás, ffg
if $\text{Re}<2000;$
 $ffg=64/\text{Re};$
else

```

ffg=(2*log10(0.27*(e/D)+((7/Re)^0.9)))^(-2);

end

% Fração volumétrica do gás na base do riser
epsongb=(Ug0*Rosap)/((2*W)+(Ug0*Rosap));

% epsongb=0.97

% Fração volumétrica básica de sólido no riser
epsontb=(1-epsongb);

% epsontb=0.03;

% Estimativa da velocidade superficial da fase sólida, m/s
Us0=W/(epsontb*Rosap);

%Sinf=Razão de escorregamento na região de escoamento completamente desenvolvido
Sinf=0.79;

% Slip

% Slip=Ug0/Us0;

% Frações volumétricas locais

z=0;L1=1;L2=1;MM=50000;h=L/MM; %modificado para acomodar intervalos de integração iguais

%z=0;L1=1;L2=1;h=0.01;MM=L/h

for j=1:MM+1

Fholdup(j)=beta*exp(-gama*(z/L));

epsontz(j)=epsontb*Fholdup(j);

epsongz(j)=1-epsontz(j);

% Massa específica local do catalisador no riser, kg/m3

Rosrz=epsontz(j)*Rosap;

% Velocidades médias de sólido e gás no riser, m/s

```

```

Ugz=Ug0/epsongz(j);
Usz=Us0*(1-Fholdup(j));
% Logarítmo neperiano da razão entre as taxas de contagens, Ln(Iv/Iz)
Ln=Rosrz*alfa*D;
% Preparando gráficos
x(j)=z/L;
r(j)=Rosrz;
s(j)=Usz;
ss(j)=Ugz;
y(j)=Ugz/Usz;
z=z+h;
zd(j)=(j-1)*h;
end
Usf=s(j);
Usi=s(1);
Ugf=ss(j);
Ugi=ss(1);
% Coeficiente de atrito para os sólidos, ffs
ffs=(0.0206*(((epsonsb)*(1-(Us0/Ug0)))^(-0.896)))/((epsongb^3)/(epsonsb)));
% Queda de pressão devido à fricção do gás (DPfg), N/m2
DPfg=ffg*(L/D)*Rog*((Ug0^2)/2);
% Queda de pressão por fricção do sólido,DPfs
% Us=Ug/Slip;
DPfs=ffs*(L/D)*epsonsb*Rosap*((Us0^2)/2);
% Queda de pressão devido à coluna estática de sólidos, DPEs

```

```

DPEs=L*epsonsb*Rosp*g*epsonsb;

% Queda de pressão devido à aceleração, DPAc
DPAc=((Usf^2)-(Usi^2))*(epsonsb*Rosap))/2;

% Queda de pressão total, DPt
DPt=DPfg+DPfs+DPEs+DPAc;

%options=odeset('Reltol',1e-6);

options=odeset('RelTol',1e-5,'AbsTol',1e-7);

%z=[0,2*h,4*h,6*h,8*h,10*h,12*h,14*h,16*h,18*h,20*h,22*h,24*h,26*h,28*h,30*h,32*h,3
4*h,36*h,38*h,40*h,42*h,44*h,46*h,48*h,50*h,52*h,54*h,56*h,58*h,60*h,62*h,64*h,66*h,
68*h,70*h,72*h,74*h,76*h,78*h,80*h,82*h,84*h,86*h,88*h,90*h,92*h,94*h,96*h,98*h,L];

%zd=[0 L];

xin=[ss(1) s(1) epsongz(1) P]'

[zd x]=ode45('frisermaladi',zd,xin,options);

EpsonGmedio=integral(zd,x(:,3))/L

figure(1);

plot(zd/L,x(:,1),'r');

%title('Velocidade da fase gasosa em função da altura relativa')

xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Ug,m/s');

figure(2);

plot(zd/L,x(:,2),'b');

%title('Velocidade da fase sólida em função da altura relativa')

xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Us,m/s');

figure(3);

plot(zd/L,x(:,3),'r');

% title('Porosidade do gás em função da altura relativa')

xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Fração volumétrica do gás');
```



```

figure(4);

plot(zd/L,1-x(:,3),'b');

% title('Porosidade do sólido em função da altura relativa')

xlabel('Altura do riser'); ylabel('Fração volumétrica de sólidos');

figure(5);

plot(zd/L,x(:,4),'k');

% title('Porosidade do sólido em função da altura relativa')

xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Pressão total, N/m2');

m=length(zd)

for i=1:1:m

v1(i)=x(i,1);

v2(i)=x(i,2);

v3(i)=x(i,3);

v4(i)=x(i,4);

%S(i)=v1(i)./v2(i);

zadj(i)=L-zd(i);

end

%figure(6);

%plot(z/L,S,'m');

%xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Razão de escorregamento(Ug/Us),-');

% Alterações para o sistema adjunto

% Programa “sdriseradjunto”

% O programa auxiliar B3 (rotina) é: frisermaladiadjunto

SmaisUg=0;

SmaisUs=0;

```

```
Smaisepsong=1/L;
```

```
SmaisP=0;
```

```
%z=[L,L-2*h,L-4*h,L-6*h,L-8*h,L-10*h,L-12*h,L-14*h,L-16*h,L-18*h,L-20*h,L-22*h,L-24*h,L-26*h,L-28*h,L-30*h,L-32*h,L-34*h,L-36*h,L-38*h,L-40*h,L-42*h,L-44*h,L-46*h,L-48*h,L-50*h,L-52*h,L-54*h,L-56*h,L-58*h,L-60*h,L-62*h,L-64*h,L-66*h,L-68*h,L-70*h,L-72*h,L-74*h,L-76*h,L-78*h,L-80*h,L-82*h,L-84*h,L-86*h,L-88*h,L-90*h,L-92*h,L-94*h,L-96*h,L-98*h,0];
```

```
%zadj=[0 L];
```

```
yin=[0 0 0 0]';
```

```
options2=odeset('RelTol',1e-7,'AbsTol',1e-9);
```

```
[zadj y]=ode45('frisermaladiadjuntotest',zadj,yin,options2);
```

```
%z=[0,2*h,4*h,6*h,8*h,10*h,12*h,14*h,16*h,18*h,20*h,22*h,24*h,26*h,28*h,30*h,32*h,34*h,36*h,38*h,40*h,42*h,44*h,46*h,48*h,50*h,52*h,54*h,56*h,58*h,60*h,62*h,64*h,66*h,68*h,70*h,72*h,74*h,76*h,78*h,80*h,82*h,84*h,86*h,88*h,90*h,92*h,94*h,96*h,98*h,L];
```

```
m1=length(zadj)
```

```
for i=1:1:m1
```

```
w1(i)=y(m1-i+1,1);
```

```
w2(i)=y(m1-i+1,2);
```

```
w3(i)=y(m1-i+1,3);
```

```
w4(i)=y(m1-i+1,4);
```

```
end
```

```
%Cálculo dos coeficientes de sensibilidade
```

```
fwpart=0.316*Rog/(2*D*Re^0.25);
```

```
%Parâmetro Rosap
```

```
Smaisp=0;
```

```
for i=1:1:m
```

```
SUg(i)=0.;
```

```
SUs(i)=0.;
```

```

Sepsg(i)=g*(1-v3(i))*Rog*(((1-v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1)/(v2(i)*Rosap)^2;

SP(i)=g*(1-v3(i))*(1-Rog/Rosap)*(((1-v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1) + g*(1-v3(i));

end

sdirect=Smaispi*integral(zd,v3);

sum=integral2(zd,SUg,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,
SP,w4,h)

depsgb=2*W*Ug0/(2*W+Ug0*Rosap)^2;

dUgz=-Ug0*depsgb*beta/(v3(1))^2;

dUsz=-W*(epsonsb-Rosap*depsgb)*(1-beta)/(epsonsb*Rosap)^2;

depsgz=depsgb*beta;

dPz=0.;

CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUsz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);

dRdp=sdirect+sum+CB

%Parâmetro Rog

Smaispi=0;

for i=1:1:m

SUg(i)=0.;

SUs(i)=0.;

Sepsg(i)=-g*(1-v3(i))*(((1-v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1)/(v2(i)^2*Rosap);

SP(i)=-g*(1-v3(i))*(1-Rog/Rosap)*(((1-v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1)*(v1(i)/v2(i))^2 +
3/4*(fwpart/Rog)*v1(i)^2 + g*v3(i);

end

sdirect=Smaispi*integral(zd,v3);

sum=integral2(zd,SUg,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,
SP,w4,h)

```

```

depsgb=0;

dUgz=0;

dUsz=0;

depsgz=0;

dPz=0;

CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUsz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);

dRdp=sdirect+sum+CB

%Parâmetro D

Smaispi=0;

for i=1:1:m

SUG(i)=0.;

SUs(i)=0.;

Sepsg(i)=0.;

SP(i)=-5/4*(fwpart/D)*v1(i)^2;

end

sdirect=Smaispi*integral(zd,v3);

sum=integral2(zd,SUG,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,
SP,w4,h);

depsgb=-4*W*Rosap*Ug0/(D*(2*W+Ug0*Rosap)^2);

dUgz=(-2*v3(1)*Ug0/D-Ug0*depsgb*beta)/(v3(1))^2;

dUsz=(W*depsgb)*(1-beta)/((epsonsb)^2*Rosap);

depsgz=depsgb*beta;

dPz=0.;

CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUsz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);

```

```
dRdp=sdirect+sum+CB
```

```
%Parâmetro W
```

```
Smaispi=0;
```

```
for i=1:1:m
```

```
SUg(i)=0.;
```

```
SUs(i)=0.;
```

```
Sepsg(i)=0.;
```

```
SP(i)=0.;
```

```
end
```

```
sdirect=Smaispi*integral(zd,v3);
```

```
sum=integral2(zd,SUg,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,SP,w4,h);
```

```
depsgb=-2*Rosap*Ug0/(2*W+Ug0*Rosap)^2;
```

```
dUgz=-Ug0*depsgb*beta/(v3(1))^2;
```

```
dUsz=(epsonsb+W*depsgb)*(1-beta)/((epsonsb)^2*Rosap);
```

```
depsgz=depsgb*beta;
```

```
dPz=0.;
```

```
CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUsz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +  
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);
```

```
dRdp=sdirect+sum+CB
```

```
%Parâmetro Q1
```

```
Smaispi=0;
```

```
for i=1:1:m
```

```
SUg(i)=0.;
```

```
SUs(i)=0.;
```

```
Sepsg(i)=0.;
```

```

SP(i)=0.;

end

sdirect=Smaispi*integral(zd,v3);

sum=integral2(zd,SUg,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,
SP,w4,h);

depsgb=2*W*Rosap*Ug0/(Q*(2*W+Ug0*Rosap)^2);

dUgz=(v3(1)*Ug0/Q-Ug0*depsgb*beta)/(v3(1))^2;

dUsz=(W*depsgb)*(1-beta)/((epsonsb)^2*Rosap);

depsgz=depsgb*beta;

dPz=0.;

CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUsz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);

dRdp=sdirect+sum+CB

%Parâmetro L

Smaispi=-1/L^2;

for i=1:1:m

SUg(i)=0.;

SUs(i)=0.;

Sepsg(i)=0.;

SP(i)=0.;

end

sdirect=Smaispi*integral(zd,v3)+v3(m)/L;

sum=integral2(zd,SUg,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,
SP,w4,h);

depsgb=0;

dUgz=0;

```

```

dUsz=0;

depsgz=0;

dPz=0;

CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUsz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);

dRdp=sdirect+sum+CB

%Parâmetro dp

Smaispi=0;

for i=1:1:m

SUg(i)=0.;

SUs(i)=0.;

Sepsg(i)=0.;

SP(i)=0.;

end

sdirect=Smaispi*integral(zd,v3);

sum=integral2(zd,SUg,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,
SP,w4,h);

depsgb=0;

dUgz=0;

dUsz=0;

depsgz=0;

dPz=0;

CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUsz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);

dRdp=sdirect+sum+CB

%Parâmetro mig

```

```

Smaispi=0;

for i=1:1:m

SUg(i)=0.;

SUs(i)=0.;

Sepsg(i)=0.;

SP(i)=1/4*(fwpart/mig)*v1(i)^2;

end

sdirect=Smaispi*integral(zd,v3);

sum=integral2(zd,SUg,w1,h)+integral2(zd,SUs,w2,h)+integral2(zd,Sepsg,w3,h)+integral2(zd,
SP,w4,h);

depsgb=0;

dUgz=0;

dUusz=0;

depsgz=0;

dPz=0;

CB=w1(1)*(dUgz+v1(1)*depsgz/v3(1)) + w2(1)*(dUusz-v2(1)*depsgz/(1-v3(1))) +
w3(1)*depsgz + w4(1)*(-dPz+(Rog*v1(1)^2-Rosap*v2(1)^2)*depsgz);

dRdp=sdirect+sum+CB

figure(10);

plot(zd/L,Sepsg,'r');

figure(6);

plot(zd/L,w1,'r');

%title('Velocidade da fase gasosa em função da altura relativa')

%xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Ug,m/s');

figure(7);

plot(zd/L,w2,'b');

```



```

% title('Velocidade da fase sólida em função da altura relativa')

%xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Us,m/s');

figure(8);

plot(zd/L,w3,'r');

% title('Porosidade do gás em função da altura relativa')

%xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Fração volumétrica do gás');

figure(9);

plot(zd/L,w4,'k');

% title('Porosidade do sólido em função da altura relativa')

%xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Pressão total, N/m2');

%m=length(z);

%for i=1:1:m

%v1(i)=x(i,1);

%v2(i)=x(i,2);

%S(i)=v1(i)./v2(i);

%end

%figure(6);

%plot(z/L,S,'m');

%xlabel('Altura relativa no riser'); ylabel('Razão de escorregamento(Ug/Us),-');

% PROGRAMA B2: AUXILIAR DO PROGRAMA B1 – CÁLCULO DIRETO

%friser.m

function fv=frisermaladi(z,x)

global L D d e M R P g mig T W ves a b alfa alum beta gama Rog Rosap Rosk Rosp Q1 Q
Ug0 epsongb eponsb Us0 Sinf SmaisUg SmaisUs Smaisepsong SmaisP

```

```

fv=zeros(4,1);

fv(1)=((-x(1))/(x(3)))*(((g*(1-x(3)))/(x(2)^2))*(1-(Rog/Rosap))*(((1-x(2)/x(1)))/(1-Sinf))^2-1));

fv(2)=(x(2)/(1-x(3)))*((g*(1-x(3)))/(x(2)^2))*(1-(Rog/Rosap))*(((1-x(2)/x(1)))/(1-Sinf))^2-1));

fv(3)=g*(1-x(3))/x(2)^2*(1-Rog/Rosap)*(((1-x(2)/x(1)))/(1-Sinf))^2-1);

fv(4)=-(((g*(1-x(3)))/(x(2)^2))*(1-(Rog/Rosap))*(((1-x(2)/x(1)))/(1-Sinf))^2-1))*((Rosap*x(2)^2)-(Rog*x(1)^2))-((.158*Rog*(mig^.25)/(D*((D*Rog)^.25)))*(x(1)^1.75))-((Rosp*(1-x(3))+Rog*x(3))*g);

%%5% PROGRAMA B3: AUXILIAR DO PROGRAMA B1 – CÁLCULO ADJUNTO

%friser

function fy=frisermaladiadjunto(z,y)

global L D d e M R P g mig T W ves a b alfa alum beta gama Rog Rosap Rosk Rosp Q1 Q
Ug0 epsongb epsonsb Us0 Sinf SmaisUg SmaisUs Smaisepsong SmaisP

global v1 v2 v3 v4 h

fy=zeros(4,1);

i=int16(z/h)+1;

%m=length(zd);

%p=1;

%while (z >= zd(p)) & (p<m)

%   p=p+1;

%end

%i=m;

fy(1)=((((1/v3(i))*((g*(1-v3(i))/(v2(i)^2))*(1-(Rog/Rosap))*(((1-(v2(i)/v1(i)))/(1-Sinf))^2-1)))*y(1))+((2*Rog*v1(i))*((g*(1-v3(i))/(v2(i)^2))*(1-(Rog/Rosap))*(((1-(v2(i)/v1(i)))/(1-Sinf))^2-1)))*y(4))-(((.158*Rog*(mig^.25)/(D*((D*Rog)^.25)))*(v1(i)^1.75))*y(4)+ ((g*(1-v3(i))/v2(i)^2)* ((Rog/Rosap)-1)* ((1/(1-Sinf))^2)* ((2*v2(i)/v1(i)^2)-(2*v2(i)^2/v1(i)^3))*y(3))-SmaisUg);

fy(2)=(((((-1/(1-v3(i)))*((g*(1-v3(i))/(v2(i)^2))*(1-(Rog/Rosap))*(((1-(v2(i)/v1(i)))/(1-Sinf))^2-1)))*y(2))+((-2*Rosap*v2(i))*((g*(1-v3(i))/(v2(i)^2))*(1-(Rog/Rosap))*(((1-

```

```

(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf)^2-1))) * y(4)) + ((-2 * g*(1-v3(i))/v2(i)^3) * ((Rog/Rosap)-1) * ((1/(1-
Sinf))^2) * (1-(2*v2(i)/v1(i)) + (v2(i)^2/v1(i)^2)) + (g*(1-v3(i))/v2(i)^2) * ((Rog/Rosap)-1) *
((1/(1-Sinf))^2) * ((-2/v1(i)) + 2*v2(i)/v1(i)^2) + (2*(g*(1-v3(i))/v2(i)^3) * ((Rog/Rosap)-
1))) * y(3)) - SmaisUs;

```

```

fy(3) = (((-v1(i)/v3(i))) * (((1/v3(i)) * ((g*(1-v3(i))/v2(i)^2) * (1-(Rog/Rosap))) * (((1-
(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1))) * y(1))) + ((2*Rog*v1(i) * ((g*(1-v3(i))/v2(i)^2) * (1-
(Rog/Rosap))) * (((1-(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1))) * y(4)) -
(((158*Rog*(mig^.25)/(D*((D*Rog)^.25))) * (v1(i)^1.75)) * y(4)) + ((g*(1-v3(i))/v2(i)^2) *
((Rog/Rosap)-1) * ((1/(1-Sinf))^2) * ((2*v2(i)/v1(i)^2) - (2*v2(i)^2/v1(i)^3)) * y(3)) - SmaisUg)) -
((v1(i)/v3(i)^2) * ((g*(1-v3(i))/v2(i)^2) * (1-(Rog/Rosap))) * (((1-(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-
1)) * y(1)) + ((v2(i)/(1-v3(i))) * (((-1/(1-v3(i))) * ((g*(1-v3(i))/v2(i)^2) * (1-(Rog/Rosap))) * (((1-
(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1))) * y(2)) + ((-2*Rosap*v2(i) * ((g*(1-v3(i))/v2(i)^2) * (1-
(Rog/Rosap))) * (((1-(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1))) * y(4)) + ((-2*g*(1-
v3(i))/v2(i)^3) * ((Rog/Rosap)-1) * ((1/(1-Sinf))^2) * (1-(2*v2(i)/v1(i)) + (v2(i)^2/v1(i)^2)) + (g*(1-
v3(i))/v2(i)^2) * ((Rog/Rosap)-1) * ((1/(1-Sinf))^2) * ((-2/v1(i)) + 2*v2(i)/v1(i)^2) + (2*(g*(1-
v3(i))/v2(i)^3) * ((Rog/Rosap)-1))) * y(3)) - SmaisUs)) - ((v2(i)/(1-v3(i))^2) * ((g*(1-
v3(i))/v2(i)^2) * (1-(Rog/Rosap))) * (((1-(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2-1)) * y(2)) - ((Rog*v1(i)^2) *
SmaisP) + (((Rosap-Rog)*g) * y(4)) + (Rosap*v2(i)^2) * SmaisP) + (((g/v2(i)^2) * ((Rog/Rosap)-
1) * (1-((1-(v2(i)/v1(i))/(1-Sinf))^2))) * y(3)) - Smaisepsong;

```

```

fy(4) = (SmaisP);

```

% PROGRAMA B2: AUXILIAR DO PROGRAMA B1 – CÁLCULO DIRETO

```

%friser.m

```

```

function eps=integral(z,x)

```

```

m=length(z);

```

```

n=(m-1)/2;

```

```

h=z(2)-z(1);

```

```

eps1=0;

```

```

eps2=0.;

```

```

for j=1:1:n-1;

```

```

    eps1=eps1+x(2*j);

```

```

    eps2=eps2+x(2*j+1);

```

```

end;

```

```

eps=h/3*(x(1)+4*(eps1+x(m-1))+2*eps2+x(m));

```

% PROGRAMA B2: AUXILIAR DO PROGRAMA B1 – CÁLCULO DIRETO

%friser.m

function area=integral2(zd,S,w,h)

%m=length(zd);

%soma=0;

%for i=1:1:m-1;

% soma=soma+(2*S(i+1)*w(i+1)+S(i+1)*w(i)+S(i)*w(i+1)+2*S(i)*w(i));

%end

%area=h/6*soma;

m=length(zd);

n=(m-1)/2;

for i=1:1:m;

x(i)=S(i)*w(i);

end;

eps1=0;

eps2=0.;

for j=1:1:n-1;

eps1=eps1+x(2*j);

eps2=eps2+x(2*j+1);

end;

area=h/3*(x(1)+4*(eps1+x(m-1))+2*eps2+x(m));