



Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Energia Nuclear

Pós-graduação em Tecnologias Energéticas e Nucleares

**Aplicações do método de fontes e
sumidouros em configurações uni e
bidimensional para fluxos neutrônicos em
reatores nucleares**

Francisco Lopes Lavor Neto

Dissertação de Mestrado
Recife-PE, Brasil

Agosto-2011

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Tecnologia e Geociências
Departamento de Energia Nuclear

Francisco Lopes Lavor Neto

**Aplicações do método de fontes e sumidouros em
configurações uni e bidimensional para fluxos neutrônicos em
reatores nucleares**

*Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em
Tecnologias Energéticas e Nucleares do Departamento de
Energia Nuclear da Universidade Federal de Pernambuco
como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre
em Tecnologias Energéticas e Nucleares.*

Orientador: Prof. Dr. Rajendra Narain

Co-orientador: Prof. Dr. Mário Augusto Bezerra da Silva

Recife-PE, Brasil

Agosto-2011

Catálogo na fonte
Bibliotecária Rosineide Mesquita Gonçalves Luz / CRB4-1361 (BCTG)

L414a Lavor Neto, Francisco Lopes.

Aplicações do método de fontes e sumidouros em configurações uni e bidimensional para fluxos neutrônicos em reatores nucleares / Francisco Lopes Lavor Neto-Recife: O Autor, 2011.

90f.,il.,figs.,gráf.,tab.

Orientador Prof. Dr. Rajendra Narain.

Co-Orientador: Prof. Dr. Mário Augusto Bezerra da Silva.

Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Pernambuco.
CTG. Programa de Pós Graduação em Tecnologias Energéticas e Nucleares (PROTEN), 2011.

Inclui Referências Bibliográficas e Apêndices.

1. Energia Nuclear. 2.Fluxo Neutrônico 3. Fontes e Sumidouros.4. Processo Interativo. 5. Kernel. I. Narain, Rajendra(Orientador). II. Silva, Mário Augusto Bezerra da (Co-Orientador). III. Título.

621.48CDD (22.ed)

UFPE/BCTG-174/2011

**APLICAÇÕES DO MÉTODO DE FONTES E SUMIDOUROS EM
CONFIGURAÇÕES UNI E BIDIMENSIONAL PARA FLUXOS
NEUTRÔNICOS EM REATORES NUCLEARES**

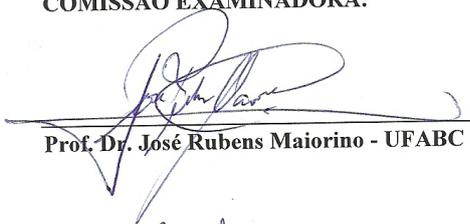
Francisco Lopes Lavôr Neto

APROVADO EM: 12.08.2011

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rajendra Narain

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. Mário Augusto Bezerra da Silva

COMISSÃO EXAMINADORA:



Prof. Dr. José Rubens Maiorino - UFABC



Prof. Dr. Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira – DEN/UFPE



Prof. Dr. Carlos Costa Dantas – DEN/UFPE

Visto e permitida a impressão



Coordenador do PROTEN/DEN/UFPE

Dedico este trabalho aos meus pais.

Agradecimentos

Gostaria, primeiramente, de agradecer ao meu orientador, Dr. Rajendra Narain sempre com muita paciência, visão e competência, ensinou-me a superar as dificuldades inerentes ao trabalho.

Aos professores Elias Silva Filho e Lázara Silveira Castrillo por ter aceitado participar dos seminários dando sugestões valorosas.

Ao professor Carlos Costa Dantas, que com sua visão científica diferenciada ajudou-me bastante.

Ao professor Carlos Alberto Brayner de Oliveira Lira, que acompanhou o trabalho desde o início levantando pontos importantes para o desenvolvimento do mesmo.

Ao professor Mário Augusto Bezerra da Silva, co-orientador deste trabalho, que me deu significativa ajuda para a confecção deste trabalho.

Ao professor José Rubens Maiorino por participar de minha banca e com sua visão de especialista contribuir enormemente para o trabalho.

Aos colegas do DEN Jair e Mardson pela ajuda nos momentos em que precisei.

Aos amigos que fiz aqui em Recife Joaquim, Igo, Lenival (Bai), Samuel, Jussiê, Afonso, Lázaro pelo apoio e momentos de diversão.

Aos amigos de graduação Pablo e Márcio pela inestimável ajuda desde de a minha chegada ao Recife.

À CAPES, pelo apoio financeiro a esta pesquisa.

À Magali, por tratar das questões burocráticas da Pós-graduação de maneira rápida e eficiente.

A maior glória não é ficar de pé, mas levantar-se cada vez que se cai.

—CONFÚCIO

Resumo

A distribuição de fluxo neutrônico em reatores nucleares é normalmente descrita por soluções numéricas da equação de difusão ou da equação de transporte. O método de fontes e sumidouros fornece uma aproximação para tal distribuição de fluxo neutrônico usando contribuições positivas para fontes e contribuições negativas para sumidouros. Usou-se esse método em simulações para distribuição de fluxo em configurações uni e bidimensional por meio de programas implementados em linguagem FORTRAN. Utilizam-se kernels para fontes puntiforme e linear em um meio uniforme infinito para cálculo dos fluxos, representando as contribuições de fontes ou sumidouros, através do princípio da superposição. Analisou-se, a partir de processos iterativos, a convergência da razão do fluxo máximo pelo médio para valores teóricos previamente calculados para reatores do tipo placa e cilíndrico infinito, em que se obtiveram boas aproximações em relação à distribuição de fluxo teórico. Depois, simetricamente em torno do centro do reator, inseriram-se sumidouros na configuração unidimensional para simular a cortina d'água necessária para desacoplar os subnúcleos formados devido à simetria do fluxo neutrônico em torno dos sumidouros, obtendo-se resultados coerentes devido à simetria apresentada na distribuição de fluxo para os subnúcleos. Inseriu-se também na configuração bidimensional um sumidouro para simular barras de controle negras para simular a perturbação devida a essas barras na distribuição de fluxo. Devido à qualidade com que se reproduziram essas perturbações e tendo sido atingido o objetivo principal do estudo, resolveu-se estendê-lo para o comportamento das reatividades devidas a essas mesmas barras de controle negras, comparando os resultados obtidos pelas simulações com os resultados dado por fórmulas teóricas.

Palavras-chave: fontes e sumidouros, fluxo neutrônico, processo iterativo, kernel.

Abstract

The knowledge of neutron flux distribution in nuclear reactors is usually predicted by numeric solutions of the diffusion equation or transport equation. The source and sink method provides an approximate solution for such distribution by using positive contributions for sources and negative ones for sinks. This method was used to analyze flux distribution in systems with one and two-dimensional configurations by developing programs in FORTRAN. Point and linear kernels for infinite medium were utilized to obtain neutron fluxes, and the contributions of sources and sinks were considered by adopting the principle of superposition. The convergence for the ratio of maximum to average flux was evaluated by iterative processes and compared with theoretical values available for plate and infinite cylindrical geometries, and the results showed good agreement. Sinks were inserted symmetrically in the reactor core for one-dimensional configuration to evaluate the water curtain necessary to decouple sub-regions neutronically. Sinks simulating black control rods were inserted in the two-dimensional configuration to evaluate the flux perturbations due to these rods. Once such perturbations presented reasonable results together with the attainment of the main objective, it was decided to investigate the reactivity of control rods and compare the simulated results with those predicted by theoretical relationships.

Keywords: sources and sinks, neutron flux, iterative process, kernel.

Sumário

1	Introdução	13
2	Revisão da literatura	16
2.1	Método de fontes e sumidouros	16
3	Fundamentos teóricos	18
3.1	Teoria da difusão	18
3.1.1	Soluções elementares da equação de difusão no estado estacionário . . .	18
3.1.1.1	Fonte puntiforme em um meio infinito	18
3.1.1.2	Fonte linear em um meio infinito	19
3.2	Princípio da superposição	20
3.3	Reatividade do reator	21
3.4	Barras de controle	22
3.4.1	Barra de controle central	23
3.5	Ciclo de nêutrons	25
3.6	Distribuição de fontes	26
3.6.1	Fontes distribuídas em um meio infinito	27
3.6.2	Fontes distribuídas em um meio finito	28
4	Metodologia	29
4.1	Introdução ao problema	29
4.1.1	Configuração unidimensional	30
4.1.2	Configuração bidimensional	34
5	Resultados e discussões	46
5.1	Configuração unidimensional	46
5.1.1	Configuração unidimensional sem sumidouros	46

5.1.2	Configuração unidimensional com sumidouros	48
5.2	Configuração bidimensional	52
5.2.1	Configuração bidimensional sem sumidouros	52
5.2.2	Configuração bidimensional com sumidouro	54
5.3	Análise de reatividade em configuração bidimensional	58
5.3.1	Cálculo da probabilidade da não-fuga de nêutrons	58
5.3.2	Fator de utilização térmica global do reator	61
5.3.3	Barra de controle central no reator	61
5.3.4	Barra de controle assimétrica no reator	63
6	Conclusões	67
	Referências Bibliográficas	70
A	Cálculos das áreas das células	72
A.1	Área de célula do tipo A_0	72
A.2	Área de célula periférica do tipo A_1	72
A.3	Área de célula periférica do tipo A_2	75
A.4	Área de célula periférica do tipo A_3	76
A.5	Área de célula do tipo A_4	78
B	Cálculos dos centróides das células	79
B.1	Centróide de célula do tipo A_0	79
B.2	Centróide de célula periférica do tipo A_1	79
B.3	Centróide de célula periférica do tipo A_2	82
B.4	Centróide de célula periférica do tipo A_3	84
B.5	Centróide de célula do tipo A_4	88
C	Funções especiais	89
C.1	Funções de Bessel	89
C.2	Funções de Bessel modificadas	90

Lista de Figuras

1	Contribuições para o fluxo térmico na posição P de fontes puntiformes que compõem a fonte plana	21
2	Fluxo em um reator descoberto com e sem barra de controle central	24
3	Geometria para cálculo do fluxo de uma distribuição de fontes num meio infinito	27
4	Fluxo normalizado de um reator do tipo placa	29
5	Configuração unidimensional com sete nós	30
6	Subdivisão da célula para avaliar-se a autocontribuição	30
7	Redivisão do comprimento do reator tipo placa	32
8	Fluxograma descrevendo a análise feita na configuração unidimensional	33
9	Figura do corte de um reator cilíndrico, mapeado por uma malha quadrática 7×7	34
10	Subdivisão da célula quadrada para avaliar-se a autocontribuição	35
11	Exemplo de célula periférica do tipo A ₂ delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$	36
12	Exemplo de célula periférica do tipo A ₂ rotacionada em 90°	37
13	Centro geométrico da célula quadrada (preto) e centróide da área periférica (branco)	38
14	Exemplo de célula periférica do tipo A ₂ , para cálculo do centróide	38
15	Exemplo de célula periférica do tipo A ₂ rotacionada em 90°, para cálculo do centróide	40
16	Fluxo normalizado de um reator cilíndrico infinito	42
17	Redivisão da área transversal do reator cilíndrico infinito	43
18	Fluxograma descrevendo a análise feita na configuração bidimensional	44

19	Fluxo 1-D normalizado obtido da simulação e comparado ao teórico	48
20	Esquema da ponderação das propriedades nucleares em configuração 1-D	49
21	(a) Desacoplamento dos subnúcleos (b)Ampliação da região onde ocorre o de- sacoplamento	51
22	Fluxo bidimensional normalizado obtido da simulação e comparado ao teórico . .	53
23	Superfície da distribuição de fluxo normalizado obtido da simulação	53
24	Esquema da célula com barra de controle	55
25	Esquema da ponderação das propriedades nucleares para configuração 2-D	57
26	Distribuição de fluxo normalizado para configuração bidimensional obtido da simulação com uma barra de controle central	57
27	Esquema do cálculo da fuga de nêutrons	59
28	Superfície da distribuição de fluxo normalizado com perturbação devida a uma barra central	62
29	Comportamento das reatividades em função do raio	63
30	(a) Superfície da distribuição de fluxo normalizado com perturbação devida a uma barra assimétrica (b) Superfície da distribuição de fluxo normalizado com perturbação devida a uma barra assimétrica mais próximo à fronteira	64
31	Comportamento das reatividades em função do deslocamento radial da barra	66
32	Célula do tipo A_0 , fora do reator	72
33	Célula do tipo A_1 delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$	73
34	Célula do tipo A_2 delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$	75
35	Célula do tipo A_2 rotacionada em 90°	76
36	Célula do tipo A_3 delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$	77
37	Célula do tipo A_4	78
38	Célula do tipo A_0	79
39	Célula do tipo A_1 , para cálculo do centróide	80
40	Célula do tipo A_2 , para cálculo do centróide	82
41	Célula do tipo A_2 rotacionada em 90° , para cálculo do centróide	83
42	Célula do tipo A_3 , para cálculo do centróide	85
43	Célula do tipo A_4 , cujo centróide coincide com o centro geométrico	88

44	Comportamento da função J_0 e da função Y_0	89
45	Comportamento da função I_0 e da função K_0	90

Lista de Tabelas

1	Descrição do programa para configuração bidimensional.....	45
2	Composição típica de um reator PWR.....	47
3	Evolução da razão Ω até atingir Ω^{711}	47
4	Parâmetros para simulação sem sumidouros.....	48
5	Parâmetros para simulação em 1-D com sumidouros.....	49
6	Fluxo normalizado no centro na iminência do desacoplamento.....	50
7	Evolução da razão Ω até atingir Ω^{35}	54
8	Parâmetros para simulação para configuração 2-D com sumidouros.....	56
9	Valores da reatividade para barras centrais de diversos raios.....	62
10	Valores da reatividade para barras assimétricas para vários deslocamentos radiais.....	65

Lista de Símbolos

B_0^2	buckling do reator sem barra de controle
B^2	buckling do reator com a barra de controle inserida
D	coeficiente de difusão
E	energia
F	taxa de interação neutrônica
G_{pt}	kernel de difusão puntiforme
I	intensidade do feixe neutrônico
I_0	função de Bessel modificada de ordem zero de primeiro tipo
J	vetor densidade de corrente neutrônica
J_0	função de Bessel de ordem zero de primeiro tipo
l_p	tempo de vida do nêutron rápido
k	fator de mutiplicação
k_∞	fator de mutiplicação num sistema infinito
K_0	função modificada de Bessel de ordem zero de segundo tipo
L	comprimento de difusão
L_T	comprimento térmico de difusão
L^2	área de difusão
L_T^2	área térmica de difusão
M_T^2	área térmica de migração
n	função distribuição de densidade neutrônica
s	intensidade da fonte de nêutrons
t_d	tempo médio de vida de um nêutron rápido
T	período do reator

Letras Gregas

β	fração de nêutrons atrasados
ε_g	critério de convergência global
ε_l	critério de convergência local
λ	constante de decaimento
ϑ	velocidade de nêutrons num feixe
ρ	distância radial; reatividade
ρ_w	valor de reatividade da barra
τ_T	idade de Fermi térmica
ϕ	fluxo de nêutrons
ϕ_T	fluxo de nêutrons térmicos
Σ_a	seção de choque macroscópica de absorção
Σ_t	seção de choque macroscópica total
ω	direção do ângulo sólido; raízes da equação da reatividade
Ω	ângulo sólido; razão entre fluxo máximo e fluxo médio
ΔB	variação da raiz quadrada do buckling

Introdução

O valor máximo do fluxo em um reator sem refletor homogêneo é sempre encontrado no centro do reator. Desde que a densidade de potência é proporcional ao fluxo, significa que tal densidade é também maior no centro do reator. A razão do fluxo máximo sobre o fluxo médio dá a medida da variação geral do fluxo dentro do reator e é uma avaliação do quanto a densidade de potência no centro do reator excede a densidade de potência média [1].

Nos reatores de usinas nucleares, a obrigação de retirar o calor sem violar as restrições de valores sobre a temperatura máxima admissível de materiais, de fluxo de calor do revestimento para o refrigerante, e assim por diante, coloca limites no pico admissível do fluxo de nêutrons.

O controle do fluxo é realizado também por meio do uso de barras de controle absorvedoras de nêutrons, causando redução no fluxo dessa região, de maneira contribuir no controle da criticidade e do fluxo dentro do reator. Daí a importância da variação geral do fluxo dentro do reator, dada pela razão do fluxo máximo sobre o fluxo médio, para quantificar em quanto o fluxo máximo excede o médio e decidir ou não por exercer um controle.

O método de fontes e sumidouros usa o kernel para meios difusivos como alternativa à resolução da equação da difusão em meios multiplicativos. Esses kernels serão usados para quantificar as contribuições das fontes e sumidouros. Avalia-se o fluxo em um ponto qualquer do meio como a soma das contribuições individuais de toda a distribuição discreta de fontes de acordo com o princípio da superposição [2].

Aqui, trabalhar-se-á com modelos de distribuição de fontes em regime estacionário, que é um regime em que a densidade de nêutrons, em qualquer ponto do sistema permanece constante ao longo do tempo [3]. Esses modelos são distribuições discretas de fontes, em que é atribuída a cada fonte individual o seu correspondente kernel. Embora obtidos para meios infinitos, o kernel de difusão puntiforme e o kernel de difusão linear, considerados nesse trabalho, fornecem boas aproximações para meios finitos devidas ao comportamento monotonicamente decrescente da função exponencial negativa e da função modificada de Bessel de ordem zero

de segundo tipo, presentes, respectivamente, no kernel de difusão puntiforme e no kernel de difusão linear [1].

Todos os nêutrons são tratados como nêutrons monoenergéticos na Teoria de um grupo, na qual se baseia o método de fontes e sumidouros, muito útil na obtenção de primeiras aproximações para o tamanho do reator crítico, distribuição de fluxos, efetividade de refletores e regime ideal de reatores heterogêneos. Na análise da reatividade, usam-se fórmulas para cálculo dos valores da reatividade devidos à inserção da barra central e assimétrica de controle negra computada para Teoria de um grupo modificada.

Para o caso unidimensional, simulou-se um reator do tipo placa sem sumidouros a fim de encontrar-se a distribuição de fluxo compatível com a da razão do fluxo máximo sobre o médio para esse tipo de reator. O mesmo foi feito para o caso bidimensional, em que se simulou um reator cilíndrico infinito sem sumidouros. Depois, como mencionado, simulou-se uma barra central e uma assimétrica de controle negra inserida uma de cada vez em um reator para o caso bidimensional e fez-se uma análise da reatividade devido à inserção das barras. Para o caso unidimensional, inseriram-se sumidouros a fim de simular a cortina d'água necessária para desacoplar os subnúcleos formados pela inserção de maneira simétrica desses sumidouros em torno do centro do reator.

Em um trabalho anterior se gerou distribuições de fluxo para reatores conhecidos como reator do tipo placa e cilíndrico infinito, em que resultados razoáveis foram obtidos [4], [5].

Neste trabalho, se gerou a distribuição de fluxo neutrônico para os reatores do tipo placa e cilíndrico infinito homogêneos e após a inserção de sumidouros, a partir de aplicações do método de fontes e sumidouros, que fornece uma aproximação para a distribuição de fluxo neutrônico usando contribuições positivas para fontes e contribuições negativas para sumidouros. A metodologia é baseada no método de fontes e sumidouros associado a um processo iterativo para gerar a distribuição de fluxo.

O objetivo deste trabalho é demonstrar a confiabilidade da metodologia, descrita no capítulo 4, através de simulações, realizadas por programas computacionais implementados em FORTRAN, para gerar distribuições de fluxo para reatores em configurações uni e bidimensional tendo como base de comparação teórica, valores da razão do fluxo máximo sobre o fluxo médio para reatores homogêneos do tipo placa e cilíndrico infinito.

Além disso, tenta-se simular perturbações nas distribuições de fluxo pela inserção de sumidouros nas duas configurações. Adicionalmente, estendeu-se o estudo para o comportamento das reatividades devidas às barras de controle negras simuladas.

Revisão da literatura

2.1 Método de fontes e sumidouros

O método de fontes e sumidouros foi desenvolvido por Galanin [6] e Feinberg [7] para cálculos do fluxo de nêutrons e parâmetros críticos de reatores de largura infinita. Feinberg e Galanin assumiram o combustível como um elemento linear infinito e o refletor com as mesmas propriedades do moderador.

O método é baseado nas seguintes suposições:

- 1) A equação de difusão elementar pode ser usada na descrição do fluxo neutrônico entre barras;
- 2) O fluxo neutrônico próximo das barras possui simetria esférica ou axial, de modo que sumidouros possam ser associados a kernels puntiforme ou linear;
- 3) A intensidade de fontes e sumidouros se relaciona com o fluxo local e as seções de choque de fissão e absorção, respectivamente, pelas relações abaixo:

$$\begin{aligned} s_{fonte} &= \nu \Sigma_f \phi \\ s_{sumidouro} &= \Sigma_a \phi \end{aligned} \quad (1)$$

A aproximação do método de fontes e sumidouros consiste em resolver a equação de difusão num moderador infinito contendo um arranjo arbitrário de elementos lineares.

Códigos foram desenvolvidos para sistemas moderados a D_2O , com interações entre barras descritas por kernels de difusão para meios infinitos. Como os reatores a água pesada são de dimensões finitas, foi necessário desenvolver kernels para meios finitos [8]. Entretanto, usam-se kernels para meios infinitos em cálculos para meios finitos com a justificativa que uma boa convergência é obtida quando os componentes harmônicos do kernel para meio finito se anulam

rapidamente conforme aumenta a distância, de modo que, a grandes distâncias, os dois kernels se comportam de maneira a produzir resultados próximos [9].

O método de fontes e sumidouros foi aplicado para cálculo de utilização térmica, por simplicidade, para reatores assumidos finitos [10], para cálculo de efeitos de multi-polo para sumidouros em moderador finito [11] e como alternativa quando o método homogêneo, no qual se emprega o modelo de célula única, é inadequado a um pequeno número de barras de combustível [12].

Fundamentos teóricos

3.1 Teoria da difusão

Nêutrons se movimentam em reatores em trajetórias aleatórias devido às repetidas colisões a que são submetidos, conhecidos como processos de auto-difusão. Ao percorrerem esses caminhos aleatórios, sofrem variações de energia a cada colisão, aparecendo, assim, com outra energia numa outra posição no reator. Diz-se que esses nêutrons foram transportados da primeira posição e da primeira energia para uma segunda, e o estudo desse processo é chamado *teoria de transporte*. A teoria de transporte é governada por uma equação chamada *equação de Boltzmann*, que é muito mais fácil de ser obtida do que resolvida. A introdução da lei de Fick obtida sob certas condições que correlaciona a corrente de nêutrons com um gradiente de fluxo, entretanto, reduz a equação de transporte a um modelo do contínuo para nêutrons chamado *teoria da difusão*. Mesmo os requisitos para a validade da teoria de difusão não sendo totalmente satisfeitos em problemas práticos de reatores, o uso desta produz uma boa aproximação em relação à solução exata da equação de transporte e, devido a sua simplicidade, é usada em engenharia nuclear.

3.1.1 Soluções elementares da equação de difusão no estado estacionário

3.1.1.1 Fonte puntiforme em um meio infinito

Considere-se uma fonte puntiforme emitindo, por unidade de tempo, S nêutrons isotropicamente em um meio infinito. Estando a fonte localizada no centro de um sistema de coordenadas esféricas, o fluxo dependerá de r . Assim, a equação de difusão, tomando-se o laplaciano em coordenadas esféricas, será:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) - \frac{1}{L^2} \phi = 0, \quad r \neq 0 \quad (2)$$

exceto na origem, onde se localiza a fonte. Aplicando as condições de contorno à equação (2), encontra-se o fluxo devido uma fonte puntiforme [1]:

$$\phi = \frac{se^{-r/L}}{4\pi Dr} \quad (3)$$

3.1.1.2 Fonte linear em um meio infinito

Considerem-se fontes de nêutrons distribuídas linearmente, emitindo, por unidade de tempo e comprimento, S nêutrons isotropicamente num meio infinito. Para fontes uniformes distribuídas ao longo de uma linha infinita de simetria axial, tomando-se o laplaciano em coordenadas cilíndricas, tem-se a seguinte equação de difusão:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d\phi(\rho)}{d\rho} \right] - \frac{1}{L^2} \phi(\rho) = 0 \quad \text{para } \rho > 0 \quad (4)$$

em que ρ é a distância radial em relação à fonte linear. A solução geral da equação (4) é:

$$\phi(\rho) = AI_0\left(\frac{\rho}{L}\right) + BK_0\left(\frac{\rho}{L}\right) \quad (5)$$

em que I_0 e K_0 são as *funções de Bessel modificadas de ordem zero de primeiro e segundo tipo* [13], respectivamente. Devido ao comportamento da função I_0 , deve-se fazer $A = 0$ para que a solução seja finita, caso contrário a solução divergirá. Tem-se para a condição de fonte que $\lim_{\rho \rightarrow 0} 2\pi\rho J = S$ [14], [15]. A solução, observadas as condições de contorno e a condição de fonte, é dada por:

$$\phi(\rho) = \frac{s}{2\pi D} K_0\left(\frac{\rho}{L}\right) \quad (6)$$

3.2 Princípio da superposição

Uma importante propriedade associada a equações diferenciais lineares é o princípio da superposição. Conhecidas as soluções das equações de difusão para diferentes fontes individuais, a solução da equação de difusão, para multifontes ou combinações destas fontes individuais, é dada pelo somatório de soluções devido a fontes individuais. Para o caso de difusão de nêutrons, as soluções podem ser superpostas devido às interações do tipo nêutron-nêutron serem desprezíveis comparativamente a interações de nêutrons com outras partículas. Aplica-se o princípio tratando cada fonte como sendo o somatório de fontes puntiformes. Na figura 1, tem-se uma fonte plana infinita emitindo s' nêutrons por unidades de área e tempo, tratada como um conjunto de fontes puntiformes, cuja solução da equação de difusão pode ser obtida pelo somatório de soluções (3) devido à fonte puntiforme.

O fluxo devido à fonte plana no ponto P é determinado, segundo o princípio da superposição, como o somatório das contribuições dos fluxos devido a fontes puntiformes que compõem a fonte plana. O elemento de área $dA = 2\pi y dy$, contendo N_{pt} fontes puntiformes s , satisfaz a relação $sN_{pt} = s'dA$. Assim, o fluxo devido a todas as N_{pt} fontes puntiformes localizadas no elemento de área dA é dado por:

$$d\phi_{dA} = \left(\frac{se^{-r/L}}{4\pi Dr}\right)\left(\frac{s'}{s}2\pi y dy\right) \quad (7)$$

O fluxo total em P é determinado integrando-se o fluxo do elemento de área dA sobre todo o plano, fazendo-se a mudança de variável adequada. Como resultado, tem-se:

$$\phi = \frac{Ls'}{2D}e^{-x/L} \quad (8)$$

A equação (8) é o fluxo devido uma fonte plana, e x é a distância da fonte ao ponto onde se avalia o fluxo [2].

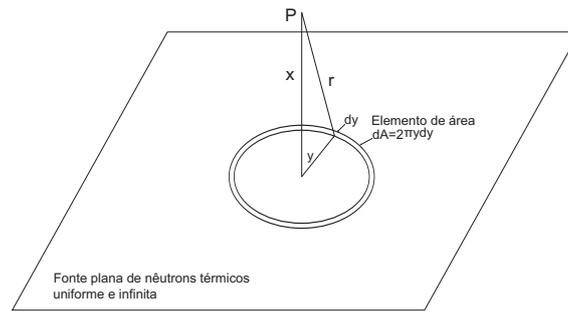


Figura 1 Contribuições para o fluxo térmico na posição P de fontes puntiformes que compõem a fonte plana

3.3 Reatividade do reator

A maioria dos nêutrons liberados em fissão (mais de 99%) são emitidos cerca de 10^{-17} segundos após o evento de fissão, e são considerados *nêutrons prontos*.

O restante desempenha um papel importante na operação de um reator. Estes aparecem um longo tempo depois da ocorrência da fissão com o decaimento dos produtos de fissão, e são chamados *nêutrons atrasados*. Cada produto de fissão, cuja produção pode conduzir à emissão de um nêutron atrasado, é conhecido como *precursor de nêutron atrasado*. Br^{87} e I^{137} são exemplos de precursores.

A reatividade é uma grandeza que descreve o desvio fracional da criticalidade que um reator apresenta, sendo definida como:

$$\rho = \frac{k_{ef} - 1}{k_{ef}} \quad (9)$$

Em um cálculo preciso da cinética de reator, é necessário considerar em detalhes a produção e o decaimento de cada um dos seis grupos dos precursores de nêutrons atrasados. Fazendo-se esse cálculo para a equação de difusão dependente do tempo para um reator térmico homogêneo infinito, obtém-se a equação da reatividade:

$$\rho = \frac{k_{\infty} - 1}{k_{\infty}} = \frac{\omega l_p}{1 + \omega l_p} + \frac{\omega}{\omega l_p} \sum_{i=0}^6 \frac{\beta_i}{\omega + \lambda_i} \quad (10)$$

$\beta_i \rightarrow$ representa a fração do total de nêutrons de fissão que são atrasados em relação ao i-ésimo grupo.

$\lambda_i \rightarrow$ representa a constante de decaimento do i -ésimo precursor.

$l_p \rightarrow$ representa o *tempo de vida do nêutron rápido*, que é o tempo médio decorrido entre a emissão do nêutron rápido até sua absorção no reator. Para um reator térmico infinito, tem-se $l_p \simeq t_d$.

$t_d \rightarrow$ representa o tempo médio de vida de um nêutron térmico em um sistema infinito.

Para um reator infinito supercrítico, $k_\infty > 1$ e $\rho > 0$; para um reator infinito subcrítico, $k_\infty < 1$ e $\rho < 0$, e a criticalidade é alcançada com $k_\infty = 1$ e $\rho = 0$. É importante salientar que a equação (9) é válida também para sistemas finitos, apenas substituindo-se k_∞ por k .

Plotando-se o lado direito da equação (10), verifica-se a existência de sete raízes seja $\rho > 0$ ou $\rho < 0$. O fluxo é dado por uma soma de sete exponenciais, cujos expoentes são dados por essas raízes. Entretanto, com o crescimento da variável tempo, o fluxo aproxima-se de $e^{\omega_1 t}$, em que ω_1 é a primeira (maior) raiz da equação, se $\rho > 0$ ou $\rho < 0$. O inverso de ω_1 é o *período do reator* ou *período estável* [1].

$$T = \frac{1}{\omega_1} \quad (11)$$

Esse é o intervalo de tempo em que tanto o fluxo quanto a potência crescem (ou diminuem) de um fator exponencial. Os nêutrons atrasados aumentam consideravelmente o período do reator, e, como consequência, pode-se controlar mais facilmente os reatores.

3.4 Barras de controle

O grau de criticalidade de um reator é normalmente regulado pelo uso de barras de controle. Barras de controle são elementos contendo material absorvedor de nêutrons, cuja inserção ou retirada do sistema influencia seu fator de multiplicação. Assim, se uma barra de controle é retirada de um reator crítico, o reator tende a tornar-se supercrítico (acréscimo de reatividade), enquanto que, se esta é inserida, o reator tende a tornar-se subcrítico (decréscimo de reatividade).

As barras de controle são utilizadas para alterar o grau de criticalidade do reator com o propósito de aumentar ou diminuir o nível de potência ou manter um reator crítico, compensando as mudanças nas propriedades do sistema que ocorrem ao longo de sua vida. As barras

de controle podem ser classificadas, ainda, de acordo com o material absorvedor em barras de controle negra, cinza e branca, conforme o material absorvedor que a constitua seja fortemente, moderadamente ou fracamente absorvedor, respectivamente.

Quando utilizada para alterar o grau de criticalidade do reator, com o propósito de aumentar ou diminuir o nível de potência, o efeito é colocar o reator sobre um período estável. A alteração na reatividade causada pela barra de controle (*rod worth*) é definida em termos da magnitude da reatividade requerida para atingir o período observado. Por outro lado, quando utilizada para manter um reator crítico, tal reatividade é medida em termos da mudança no fator mutiplicação do sistema para o qual a barra de controle pode compensar [1].

3.4.1 Barra de controle central

Supondo-se que o reator está exatamente crítico quando a barra está fora, o fluxo de nêutrons tem a forma mostrada na figura 2 e é determinado pela equação abaixo:

$$\nabla^2 \phi_T + B_0^2 \phi_T = 0 \quad (12)$$

onde B_0^2 é o buckling do reator sem barra. Se a barra é completamente inserida no reator, o fluxo toma a forma mostrada na figura 2 e é determinado pela equação abaixo:

$$\nabla^2 \phi_T + B^2 \phi_T = 0 \quad (13)$$

onde B^2 é o buckling do reator com barra inserida no mesmo.

Da teoria de um grupo modificada, o fator mutiplicação do reator inicialmente crítico é dado por:

$$k_0 = \frac{k_\infty}{1 + B_0^2 M_T^2} = 1 \quad (14)$$

em que $M_T^2 = L_T^2 + \tau_T$ é a *área de migração térmica*, e τ_T é a *idade de Fermi térmica*. O fator mutiplicação do reator com a barra de controle inserida é dado por:

$$k = \frac{k_\infty}{1 + B^2 M_T^2} \quad (15)$$

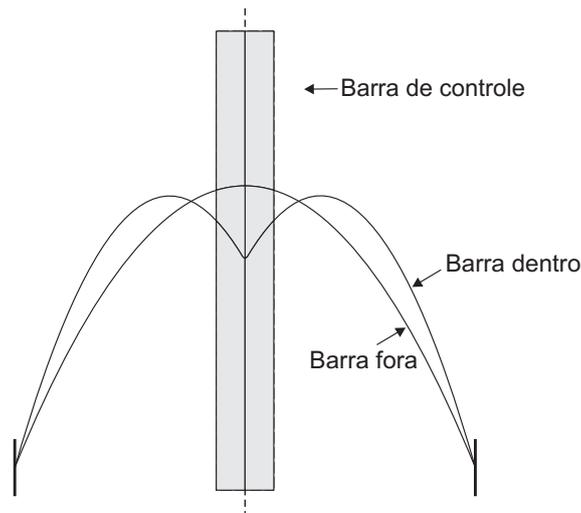


Figura 2 Fluxo em um reator descoberto com e sem barra de controle central

Pela definição de "rod worth", obtém-se a magnitude da reatividade dada a seguir, tomando $B^2 \simeq B_0^2$:

$$\rho_w = \frac{2M_T^2 B_0 \Delta B}{1 + B_0^2 M_T^2} \quad (16)$$

em que $\Delta B = B - B_0$ [3].

Com a barra fora, B_0^2 é dado por:

$$B_0^2 = \left(\frac{2.405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{H}\right)^2 \quad (17)$$

Com o cálculo de B^2 existem duas complicações:

- 1) A geometria do problema torna-se mais complexa com a inserção da barra;
- 2) A barra, especificamente para um material fortemente absorvedor, invalida a teoria da difusão em sua vizinhança. A segunda dificuldade pode ser contornada requerendo-se que o fluxo satisfaça a seguinte condição de contorno na superfície da barra:

$$\frac{1}{\phi_T} \frac{d\phi_T}{dr} = \frac{1}{d} \quad (18)$$

em que d é chamado distância de extrapolação, cujo valor varia no seguinte intervalo $0.71\lambda_{tr} \leq d \leq \frac{4}{3}\lambda_{tr}$, em que λ_{tr} é o livre caminho médio de transporte do meio que circunda a barra de controle.

A solução da equação (13) sujeita à condição (18), bem como as condições usuais na superfície do reator, é:

$$\phi_T(r) = A \left[J_0(\alpha r) - \frac{J_0(\alpha R)}{Y_0(\alpha R)} Y_0(\alpha r) \right] \cos\left(\frac{\pi z}{H}\right) \quad (19)$$

O cálculo de B^2 requer a solução de uma complicada equação transcendental. Entretanto, o caso em que B^2 não é diferente de B_0^2 , essa equação pode ser resolvida para ΔB , e, quando esse é substituído em (13) o seguinte resultado é obtido:

$$\rho_w = \frac{7.43M_T^2}{(1 + B_0^2M_T^2)R^2} \left[0.116 + \ln\left(\frac{R}{2.405a}\right) + \frac{d}{a} \right]^{-1} \quad (20)$$

A equação (20) fornece a reatividade devido a inserção de uma barra de controle negra localizada no centro de um reator cilíndrico térmico descoberto computado pela teoria de um grupo modificada.

3.5 Ciclo de nêutrons

O ciclo inicia-se com a fissão de um núcleo U^{235} por um nêutron térmico, no qual ν nêutrons são emitidos. Parte desses nêutrons rápidos podem causar fissão em núcleos U^{238} , conhecida como fissão rápida. O número de nêutrons passa de ν para $\nu\varepsilon$, no qual $\varepsilon \geq 1$, chama-se *fator de fissão rápida*.

Esses $\nu\varepsilon$ nêutrons difundem-se no reator, e parte deles escapa da estrutura deste. Isso é contabilizado pela probabilidade de não-fuga rápida P_f . Os $\nu\varepsilon P_f$ nêutrons rápidos restantes têm a energia moderada por colisões com núcleos de elementos moderadores no reator. Durante a moderação de nêutrons rápidos para térmicos alguns são absorvidos em ressonâncias de absorção e $\nu\varepsilon P_f p$ nêutrons escapam dessas ressonâncias e são termalizados.

Na faixa de energias térmicas, tanto fissão como captura radioativa ocorrem, mas alguns desses nêutrons térmicos difundem-se sem ser capturados e escapam do reator. Isso é contabilizado pela probabilidade de não-fuga térmica P_{th} . Os $\nu\varepsilon P_f p P_{th}$ nêutrons térmicos que não escapam são absorvidos no combustível e em outros elementos não combustíveis que constituem o núcleo do reator e sua estrutura. Então, apenas $\nu\varepsilon P_f p P_{th} f$ nêutrons absorvidos no

combustível podem causar fissão térmica, no qual f é o *fator de utilização térmica*. Desses $\nu \epsilon P_f p P_{th} f$ nêutrons térmicos absorvidos pelo combustível, apenas uma fração $(\sigma_f^{comb.} / \sigma_a^{comb.})$ causa, efetivamente, fissão térmica, e a outra absorvida pelos núcleos do material combustível forma outros elementos.

Assim, a razão entre o número de nêutrons na 2ª geração causada por um nêutron na 1ª geração, denominada *fator de multiplicação*, é dada por:

$$k = \nu \epsilon P_f p P_{th} f \left(\frac{\sigma_f^{comb.}}{\sigma_a^{comb.}} \right) \quad (21)$$

O produto $\left(\nu \frac{\sigma_f^{comb.}}{\sigma_a^{comb.}} \right)$ representa o número de nêutrons produzidos por fissão por nêutron térmico absorvido no combustível, designado por η . O fator de multiplicação efetivo para um reator de tamanho finito é dado pela fórmula de seis fatores da equação (22).

$$k = \eta \epsilon p f P_f P_{th} \quad (22)$$

O valor k dado pela fórmula de quatro fatores da equação (23) para um sistema é útil na teoria e projeto de reatores nucleares:

$$k_{\infty} = \eta \epsilon p f \quad (23)$$

pois, a probabilidade de não-fuga total $P = P_f P_{th}$ depende, somente, do tamanho do reator [16].

3.6 Distribuição de fontes

Nas seções precedentes, os problemas abordados sobre este tema foram simples devido aos tipos especiais de distribuição de fontes que foram assumidos, como fontes puntiforme, linear e plana. Entretanto, pode-se deparar com problemas mais complicados envolvendo distribuição de fontes arbitrárias. Os métodos matemáticos utilizados nesses problemas depende do fato de o meio de difusão ser infinito ou finito.

3.6.1 Fontes distribuídas em um meio infinito

Considere-se um meio infinito contendo uma distribuição arbitrária de fontes isotrópicas de nêutrons. Sendo a distribuição de fontes descrita pela função $s(\vec{r}')$, por definição $s(\vec{r}') dv'$ nêutrons são emitidos, por unidade de tempo, do elemento de volume dv' localizado em \vec{r}' .

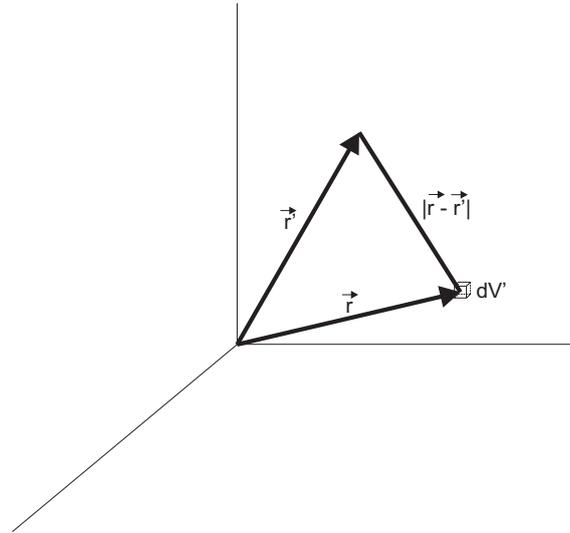


Figura 3 Geometria para cálculo do fluxo de uma distribuição de fontes num meio infinito

Desde que dv' é infinitesimal, estes são assumidos como fontes puntiformes, como na figura 3, e sua contribuição para o fluxo em \vec{r} é dada por:

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{s(\vec{r}')dv' e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{L}}}{4\pi D|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (24)$$

A equação anterior é a forma mais geral da equação (3), a qual foi obtida para a fonte puntiforme localizada na origem, isto é, $\vec{r}' = 0$. O fluxo total em \vec{r} é o somatório das contribuições $d\phi(\vec{r})$ advindas de todas as fontes do espaço .

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\text{todo espaço}} s(\vec{r}') \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{L}}}{4\pi D|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad (25)$$

A grandeza definida por

$$G_{pt}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{L}}}{4\pi D|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (26)$$

é conhecida como o *kernel de difusão puntiforme para um meio infinito*. Kernel de difusão é a unidade de fonte isotrópica e um exemplo de uma grande classe de funções chamadas Funções de Green.

Em um reator, as fontes $s(\vec{r}')$ correspondem às fissões nucleares que emitem nêutrons e localizam-se nas barras de combustível. Sendo essa uma distribuição discreta de fontes, pode-se substituir a integral em (25) por um somatório:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_n s_n(\vec{r}') \frac{e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'_n|}{L}}}{4\pi D|\vec{r}-\vec{r}'_n|} \quad (27)$$

em que n identifica as fontes [3].

3.6.2 Fontes distribuídas em um meio finito

Quando as fontes são distribuídas em um meio finito, o fluxo pode ser determinado por uma técnica conhecida como *método das autofunções*. Para simplificar a discussão assume-se que essas fontes sejam distribuídas simetricamente no meio, ou seja, $s(\vec{x})$ é uma função par, isto é, $s(\vec{x}) = s(-\vec{x})$.

Nesse caso, o fluxo necessariamente será uma função par, pois distribuições simétricas de fontes não dão origem a fluxos assimétricos. Resolvendo a equação de difusão sob essas condições, a solução encontrada será do tipo:

$$\phi(x) = \phi(0) \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (28)$$

em que $\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ é a autofunção para o caso unidimensional e a é a distância sobre a qual as fontes estão simetricamente distribuídas [3].

Metodologia

4.1 Introdução ao problema

Tanto em configuração 1-D como em 2-D, usar-se-á o método de fontes e sumidouros, no qual consideram-se, para a análise do fluxo neutrônico, fontes e sumidouros, localizados em nós, cujas contribuições são positiva e negativa, respectivamente [4]. Nó é o ponto representativo da célula, onde considera-se concentrado o fluxo e localiza-se as fontes ou sumidouros.

Usando o fluxo para uma distribuição de fontes em um meio finito, dada pela equação (28), semelhantemente ao fluxo de um reator do tipo placa como na figura 4, analisar-se-á, através de um processo iterativo, a razão entre o fluxo máximo e o fluxo médio, $\Omega = \frac{\phi_{\text{máx}}}{\phi_{\text{méd}}}$, a fim de descrever como ocorre a convergência dessa razão para o valor teórico.

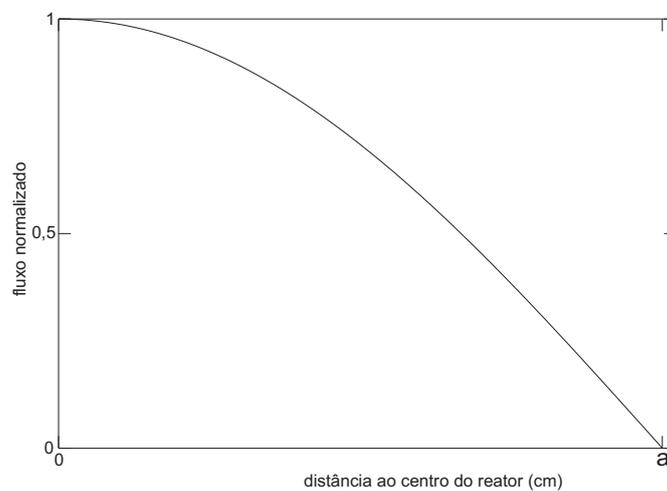


Figura 4 Fluxo normalizado de um reator do tipo placa

4.1.1 Configuração unidimensional

O máximo valor do fluxo em uma configuração unidimensional de fontes puntiformes, simetricamente distribuídas, localiza-se no centro do sistema. O fluxo médio é a média aritmética dos fluxos, para uma distribuição uniforme como na figura 5.

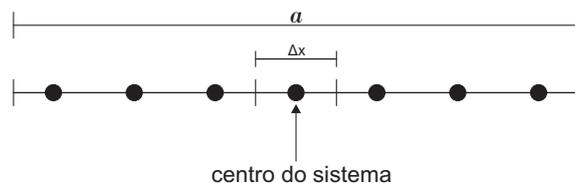


Figura 5 Configuração unidimensional com sete nós

O fluxo calculado em cada nó é dado pelo somatório das contribuições das fontes ou sumidouros em outros nós do sistema, de acordo com o princípio da superposição, adicionada a contribuição da fonte ou sumidouro sobre si mesma, dita autocontribuição.

Para fontes puntiformes, a contribuição é dada pela equação (3) e, para sumidouros, utiliza-se o mesmo kernel de difusão puntiforme com a diferença que s_i será contabilizado diferente para o sumidouro e sendo negativo.

Para autocontribuição, tem-se uma singularidade pela equação (3). A fim de contornar essa singularidade, faz-se a subdivisão igualitária da célula em duas subcélulas e calcula-se a contribuição de cada fonte ou sumidouro das subcélulas sobre o nó original, como mostrado na figura 6.

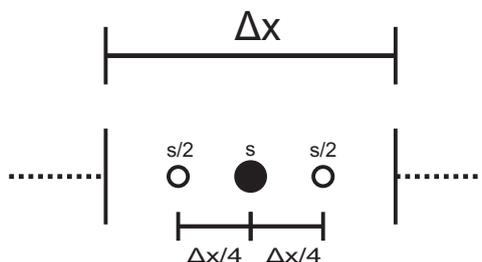


Figura 6 Subdivisão da célula para avaliar-se a autocontribuição

A soma das contribuições das subcélulas sobre o nó original será a autocontribuição, dada pela equação (29):

$$\phi_{\text{auto}} = s \frac{e^{-\frac{0,25\Delta x}{L}}}{\pi D \Delta x} \quad (29)$$

Para o processo iterativo, inicialmente se atribui um valor uniforme, igual à unidade, aos fluxos avaliados nas posições dos nós. A partir disso, na primeira iteração, atualizam-se os valores das fontes ou sumidouros s_i pelos fluxos iniciais unitários e calculam-se os novos fluxos. Da segunda iteração em diante, sempre serão atualizadas as intensidades s_i das fontes ou sumidouros de uma determinada iteração pelos valores dos fluxos a menos de uma constante, da iteração anterior, avaliados nos respectivos nós, como mostrado na equação a seguir:

$$s_i^n \propto \phi_i^{n-1} \quad (30)$$

A equação (30) diz que, na n -ésima iteração, a intensidade da fonte ou sumidouro localizada no i -ésimo nó é proporcional ao fluxo da iteração anterior, avaliado nesse mesmo nó.

Nesse processo iterativo, um critério de convergência observado é quando entre uma iteração e a anterior, os fluxos praticamente não variam. À medida que um fluxo localizado em um nó qualquer i , numa iteração $n-1$, se aproxima do fluxo do mesmo nó, na iteração posterior n , a razão entre os dois tende à unidade. Segundo o critério de convergência local, o máximo valor para essa razão, entre todos os nós, deve diferir da unidade por um valor não superior a ε_l , em que ε_l dá a medida da exatidão do processo.

$$\text{critério local} = \left| \frac{\phi_i^n}{\phi_i^{n-1}} - 1 \right|_{\text{máx}} < \varepsilon_l \quad (31)$$

No processo iterativo, portanto, é feito o cálculo e o recálculo do fluxo nos nós do sistema, com s_i fontes ou sumidouros sendo atualizados a cada iteração, até atingir-se o critério local ε_l . Atingido o critério local ε_l , calcula-se, a partir da distribuição do fluxo dos nós do sistema, a razão $\Omega = \frac{\phi_{\text{máx}}}{\phi_{\text{méd}}}$, entre o fluxo máximo e o fluxo médio e a compara-se com o valor teórico.

No reator, o centro do seu núcleo faz-se coincidir com a origem do sistema, daí $\phi(0) = \phi_{\text{máx}}$. Então, pode-se calcular a razão teórica $\Omega = \frac{\phi_{\text{máx}}}{\phi_{\text{méd}}}$, a partir do cálculo para o fluxo médio $\phi_{\text{méd}}$, em um reator tipo placa, cuja distribuição de fluxo é dada na equação (28).

$$\phi_{\text{méd}} = \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \phi(x) dx}{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx} \quad (32)$$

Fazendo-se a integração anterior para o fluxo dado na equação (28), encontra-se:

$$\frac{\phi_{\text{máx}}}{\phi_{\text{méd}}} = \frac{\pi}{2} \quad (33)$$

Esse será o valor teórico usado como parâmetro para se estabelecer o critério de convergência global a seguir:

$$\text{critério global} = \left| \frac{\phi_{\text{máx}}^i}{\phi_{\text{méd}}^i} - \frac{\pi}{2} \right| \leq \epsilon_g \quad (34)$$

Ao final de cada processo iterativo, determina-se um Ω^i para um número i de nós. Caso esse Ω^i não satisfaça o critério de convergência global especificado na equação (34), atualiza-se o número i de nós em dois nós adicionais, interpolam-se linearmente os valores dos fluxos iniciais do novo sistema a partir da distribuição de fluxo produzido pelo processo iterativo referente ao sistema anterior, e executa-se novo processo iterativo para $(i+2)$ nós até se atingir o critério de convergência global. Quando se eleva em dois o número de nós, redivide-se o reator mantendo o mesmo comprimento, como na figura 7.

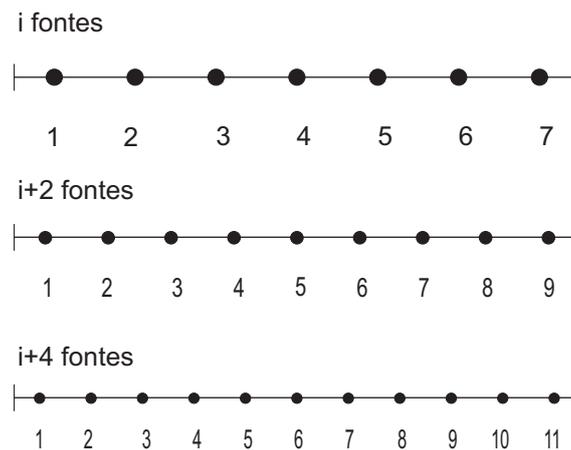


Figura 7 Redivisão do comprimento do reator tipo placa

Os fluxos que dão origem ao Ω^i , ao final de cada processo iterativo, serão normalizados em relação ao fluxo máximo.

Apresenta-se na figura 8 o fluxograma que descreve cada passo na análise da configuração unidimensional. Em toda a metodologia, faz-se uso de um programa de computador implementado em linguagem FORTRAN.

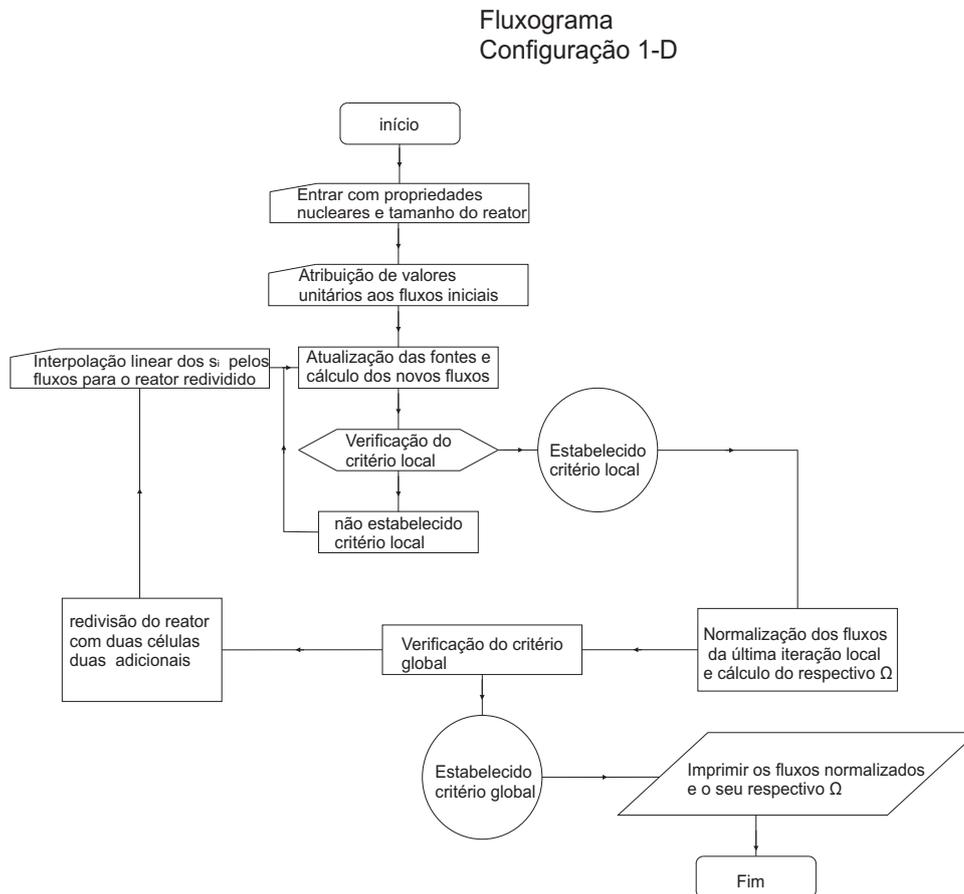


Figura 8 Fluxograma descrevendo a análise feita na configuração unidimensional

O programa usado para gerar resultados para configuração unidimensional tem um programa principal responsável por realizar o processo iterativo e, uma subrotina e uma função para realizar a interpolação dos s_i a partir da distribuição de fluxo da configuração de nós anterior. A partir desse programa criou-se uma versão levemente modificada para simular a cortina d'água.

4.1.2 Configuração bidimensional

A metodologia aplicada para a configuração bidimensional é similar a aplicada à configuração unidimensional. Porém, é diferente em alguns aspectos devido à inserção de um eixo adicional, para sistematizar um corte de um reator cilíndrico e o uso do kernel de difusão linear.

Na figura 9, o centro de cada célula quadrada (nó) da malha tem uma fonte ou sumidouro. Para fontes lineares, a contribuição é dada pela equação (6) e, para sumidouros, utiliza-se o mesmo kernel de difusão linear, com a diferença que $s_{i,j}$ será contabilizado diferentemente para o sumidouro, sendo negativo.

O cálculo dos fluxos em cada nó nesse caso é semelhante ao do caso unidimensional, no qual o fluxo num nó é dado pela soma das contribuições, segundo o princípio da superposição, das outras fontes ou sumidouros localizados em outros nós da malha, cujas células estejam total ou parcialmente inseridas no interior do reator como na figura 9, adicionada a contribuição da fonte ou sumidouro sobre si, dita autocontribuição.

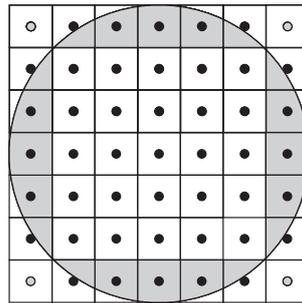


Figura 9 Figura do corte de um reator cilíndrico, mapeado por uma malha quadrática 7×7

Para autocontribuição, tem-se uma singularidade na equação (6). A fim de contornar essa singularidade, faz-se a subdivisão igualitária da célula quadrada em quatro subcélulas e calcula-se a contribuição de cada fonte ou sumidouro das subcélulas sobre o nó original, como mostrado na figura 10.

A soma das contribuições das subcélulas sobre o nó original será a autocontribuição, dada pela equação (35) :

$$\phi_{\text{auto}} = \frac{s}{2\pi D} K_0 \left(\frac{\sqrt{2}\Delta x}{4L} \right) \quad (35)$$

O fluxo devido a cada célula é proporcional a sua área e assume-se estar concentrado no nó

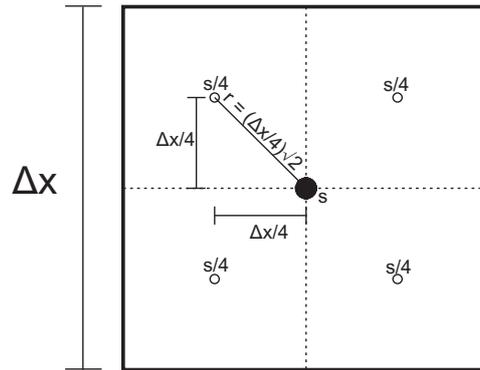


Figura 10 Subdivisão da célula quadrada para avaliar-se a autocontribuição

da célula que normalmente localiza-se no centro geométrico da célula que por simetria também é o centróide. Para as células localizadas na fronteira do reator, ditas células periféricas (áreas em cinza na figura 9), deve-se considerar apenas o fluxo proporcional a área da célula englobada pelo reator e assume-los concentrados em seus nós, que por sua vez, assume-se estarem localizados nos centróides destas células periféricas. A fim de quantificar com exatidão a contribuição devida a cada fonte ou sumidouro em cada nó, insere-se um fator área, em que considera-se apenas a fração da área da célula englobada pelo do reator. Assim, contabiliza-se apenas a contribuição para o fluxo correspondente à área da célula englobada, total ou parcialmente, pelo reator (nós pretos na figura 9). Nós cujas células se localizem totalmente fora do reator terão suas contribuições excluídas (nós em cinza na figura 9). Isso corresponderá, matematicamente, a um fator área nulo. Na figura 9, as áreas em cinza são as áreas periféricas cujos cálculos estão mostrados no apêndice A.

$$\text{fator área(FA)} = \frac{\text{área da célula periférica}}{\text{área da célula inteira}} \quad (36)$$

Fazendo um exemplo de uma célula cujas coordenadas de dois de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_2 , com dois vértices dentro do raio do reator.

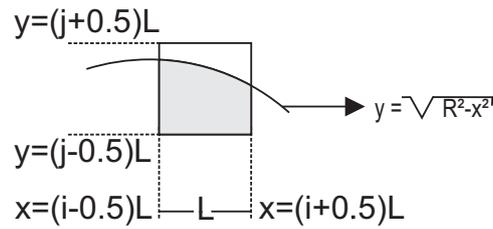


Figura 11 Exemplo de célula periférica do tipo A_2 delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

A área A_2 da figura 11 é calculada pela relação a seguir:

$$A_2 = \int_{(i-0.5)L}^{(i+0.5)L} \left[\sqrt{R^2 - x^2} - (j-0.5)L \right] dx \quad (37)$$

Devido à substituição de variáveis feita anteriormente, tem-se:

$$(i-0.5)L \Rightarrow \theta_{inf} = \arcsen \left[\frac{(i-0.5)L}{R} \right]$$

$$(i+0.5)L \Rightarrow \theta_{sup} = \arcsen \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right]$$

Utilizando os limites anteriores, e aplicando-os a integral da equação (37), obtém-se:

$$A_2 = \frac{R^2}{2} \left\{ \arcsen \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right] - \arcsen \left[\frac{(i-0.5)L}{R} \right] + \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right] \right. \\ \left. \times \left[\frac{\sqrt{R^2 - (i+0.5)^2 L^2}}{R} \right] - \left[\frac{(i-0.5)L}{R} \right] \left[\frac{\sqrt{R^2 - (i-0.5)^2 L^2}}{R} \right] \right\} - (j-0.5)L^2 \quad (38)$$

A figura 12 é do tipo A_2 rotacionada em 90° , e sua área, aplicando o mesmo cálculo é:

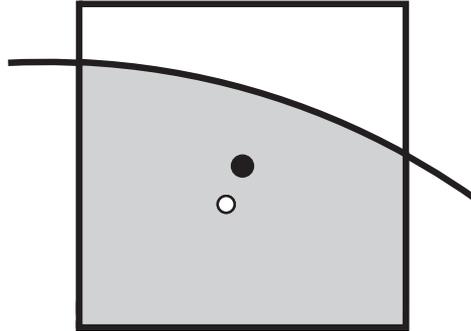


Figura 13 Centro geométrico da célula quadrada (preto) e centróide da área periférica (branco)

Fazendo um exemplo de uma célula cujas coordenadas de apenas dois de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_2 , com apenas dois vértices dentro do raio do reator.

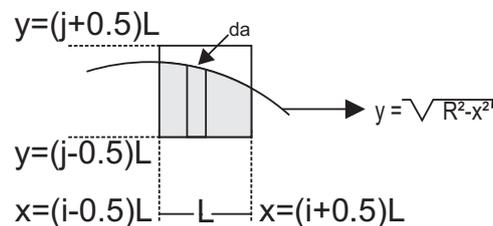


Figura 14 Exemplo de célula periférica do tipo A_2 , para cálculo do centróide

O da na figura anterior é dado por $[\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L]dx$.

A ordenada do centróide da área A_2 da figura 14 é calculada pela relação abaixo:

$$S_x = A_2 \bar{y} = \int y_{da} da = \int \left[\frac{\sqrt{R^2 - x^2} + (j - 0.5)L}{2} \right] \left[\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L \right] dx$$

Na equação anterior, y_{da} é a ordenada do centróide do elemento de área da , e \bar{y} , a ordenada do centróide da área A_2 , região em cinza na figura 14. Aplicando-se os limites de integração,

tem-se:

$$S_x = \int_{(i-0.5)L}^{(i+0.5)L} \frac{[(R^2 - x^2) - (j-0.5)^2 L^2]}{2} dx$$

$$S_x = \left\{ \left[\frac{R^2 - (j-0.5)^2 L^2}{2} x \right] - \frac{x^3}{6} \right\} \Big|_{(i-0.5)L}^{(i+0.5)L}$$

Assim, obtém-se o momento em relação ao eixo x :

$$S_x = \frac{1}{2} [R^2 - (j-0.5)^2 L^2] L - \frac{(i+0.5)^3 L^3}{6} + \frac{(i-0.5)^3 L^3}{6} \quad (42)$$

Obtém-se a ordenada do centróide para área A_2 pela razão a seguir:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A_2}$$

Analogamente, $\bar{x} = \frac{S_y}{A_2}$, sendo:

$$S_y = \frac{1}{3} [R^2 - (i-0.5)^2 L^2]^{3/2} - \frac{1}{3} [R^2 - (i+0.5)^2 L^2]^{3/2} + \frac{(j-0.5)}{2} L^3 [(i-0.5)^2 - (i+0.5)^2] \quad (43)$$

A figura 15 é do tipo A_2 rotacionada em 90° .

Suas coordenadas são dadas por:

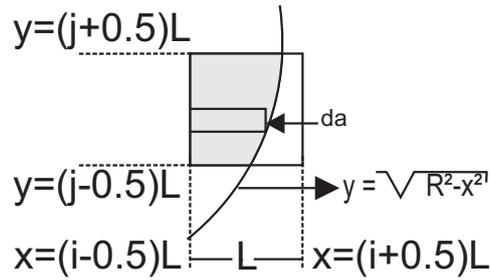


Figura 15 Exemplo de célula periférica do tipo A_2 rotacionada em 90° , para cálculo do centróide

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A_2} \quad (44)$$

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A_2} \quad (45)$$

Pelo método das fatias, os seus respectivos momentos em relação aos eixos x e y são:

$$S_x = -\frac{1}{3} [R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{3/2} + \frac{1}{3} [R^2 - (j-0.5)^2 L^2]^{3/2} + \frac{(i-0.5)}{2} L^3 [(j-0.5)^2 - (j+0.5)^2] \quad (46)$$

$$S_y = \frac{1}{2} [R^2 - (i-0.5)^2 L^2] (j+0.5)L - \frac{(j+0.5)^3 L^3}{6} - \frac{1}{2} [R^2 - (i-0.5)^2 L^2] (j-0.5)L + \frac{(j-0.5)^3 L^3}{6} \quad (47)$$

Para o processo iterativo, inicialmente se atribui um valor uniforme, igual à unidade, aos fluxos avaliados nas posições dos nós da malha. A partir disso na primeira iteração, atualizam-se os valores das fontes ou sumidouros, $s_{i,j}$, pelos fluxos iniciais unitários e calculam-se os novos fluxos. Da segunda iteração em diante, sempre serão atualizadas as intensidades $s_{i,j}$ das fontes ou sumidouros de uma determinada iteração pelos valores dos fluxos a menos de uma constante, da iteração anterior, avaliados nos respectivos nós, como mostrado na equação a seguir:

$$s_{i,j}^n \propto \phi_{i,j}^{n-1} \quad (48)$$

Segundo a equação (48), na n -ésima iteração, a intensidade da fonte ou sumidouro localizado no (i, j) -ésimo nó é proporcional ao fluxo, da iteração anterior, avaliado nesse mesmo nó.

Nesse processo iterativo, um critério de convergência observado é quando, entre uma iteração e a anterior, os fluxos praticamente não variam. À medida que um fluxo localizado em um nó qualquer (i, j) na malha, numa iteração $n-1$, se aproxima do fluxo do mesmo nó, na iteração posterior n , a razão entre os dois tende à unidade. Segundo o critério de convergência local, o máximo valor para essa razão entre todos os nós deve diferir da unidade por um valor não superior a ε_l , onde ε_l dá a medida da exatidão do processo.

$$\text{critério local} = \left| \frac{\phi_{i,j}^n}{\phi_{i,j}^{n-1}} - 1 \right|_{\text{máx}} < \varepsilon_l \quad (49)$$

No processo iterativo, portanto, é feito o cálculo e o recálculo do fluxo nos nós do sistema, com $s_{i,j}$ de fontes ou sumidouros sendo atualizados a cada iteração, até atingir-se o critério local ε_l . Attingido o critério local ε_l , calcula-se a partir da distribuição do fluxo dos nós do sistema, a razão $\Omega = \frac{\phi_{\text{máx}}}{\phi_{\text{méd}}}$, entre o fluxo máximo e o fluxo médio e a compara-se com o valor teórico.

O fluxo médio, para uma malha quadrada $i \times i$, é calculado por meio de uma média ponderada dos fluxos em relação ao fator área de suas respectivas células.

$$\phi_{\text{méd}} = \frac{\sum_{(i',j')}^{i,i} (\text{FA})_{i',j'} \phi_{i',j'}}{\sum_{i',j'}^{i,i} (\text{FA})_{i',j'}} \quad (50)$$

A distribuição do fluxo para o reator cilíndrico infinito é dada pela equação (51) e exemplificada na figura 16.

$$\phi(r) = \phi(0) J_0\left(\frac{2.405r}{R}\right) \quad (51)$$

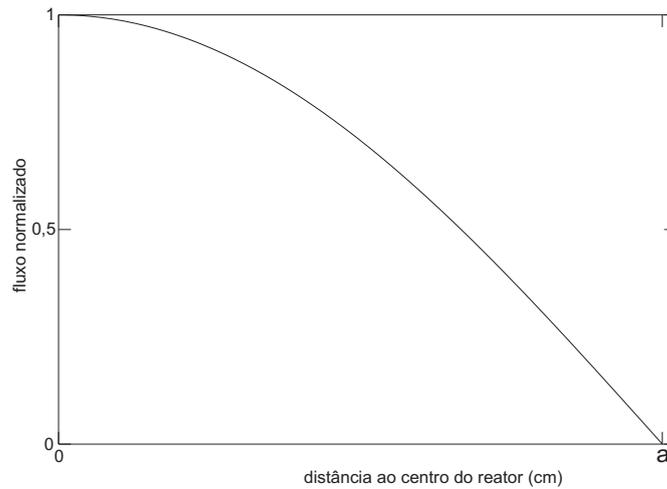


Figura 16 Fluxo normalizado de um reator cilíndrico infinito

Como mencionado na seção anterior, no reator o centro do núcleo coincide com a origem do sistema, daí $\phi(0) = \phi_{\text{máx}}$. Assim, pode-se calcular a razão teórica Ω a partir do cálculo para o fluxo médio $\phi_{\text{méd}}$, usando-se a distribuição de fluxo da equação (51).

$$\phi_{\text{méd}} = \frac{\int_0^R 2\pi r \phi(r) dr}{\int_0^R 2\pi r dr} \quad (52)$$

Fazendo-se a integração dada pela equação (51), encontra-se:

$$\frac{\phi_{\text{máx}}}{\phi_{\text{méd}}} = 2,3125 \quad (53)$$

Esse será o valor teórico usado como parâmetro para estabelecer o critério de convergência global a seguir:

$$\text{critério global} = \left| \frac{\phi_{\text{máx}}^i}{\phi_{\text{méd}}^i} - 2,3125 \right| \leq \epsilon_g \quad (54)$$

Ao final de cada processo iterativo, determina-se um Ω^i para uma determinada malha quadrada $i \times i$. Caso esse Ω^i não satisfaça o critério de convergência global especificado na equação (54), eleva-se em dois a ordem da malha quadrada, interpolam-se linearmente os valores dos fluxos iniciais do novo sistema a partir da distribuição de fluxo produzido pelo processo iterativo referente ao sistema anterior, e executa-se novo processo iterativo para uma malha $(i+2) \times (i+2)$, e repete-se o processo até se atingir o critério de convergência global. Quando

se eleva a ordem de grandeza da malha, faz-se a redivisão do reator, mantendo a mesma área da malha anterior como mostrado na figura 17.

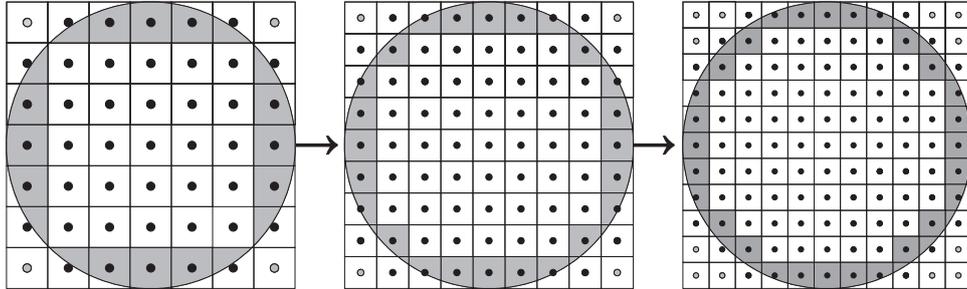


Figura 17 Redivisão da área transversal do reator cilíndrico infinito

Os fluxos que dão origem ao Ω^i ao final do processo iterativo, são normalizados a cada iteração em relação ao fluxo máximo.

Apresenta-se na figura 18, o fluxograma que descreve cada passo na análise da configuração bidimensional. Toda a metodologia será realizada por um programa de computador implementado em linguagem FORTRAN.

Vê-se que a análise é semelhante ao do caso unidimensional, com a mudança apenas de alguns parâmetros. Mudanças ocorreram devido à geometria do problema, ou na tentativa de produzir um modelo mais próximo da realidade, como na adoção de fontes lineares (semelhantes as varetas de combustível no reator) cujo kernel representativo é função de K_0 que é calculada por um algoritmo tirado da referência [17].

O programa usado para gerar resultados para configuração bidimensional tem um programa principal responsável por realizar o processo iterativo e uma série de funções e subrotinas cujas funções estão descritas na tabela 1.

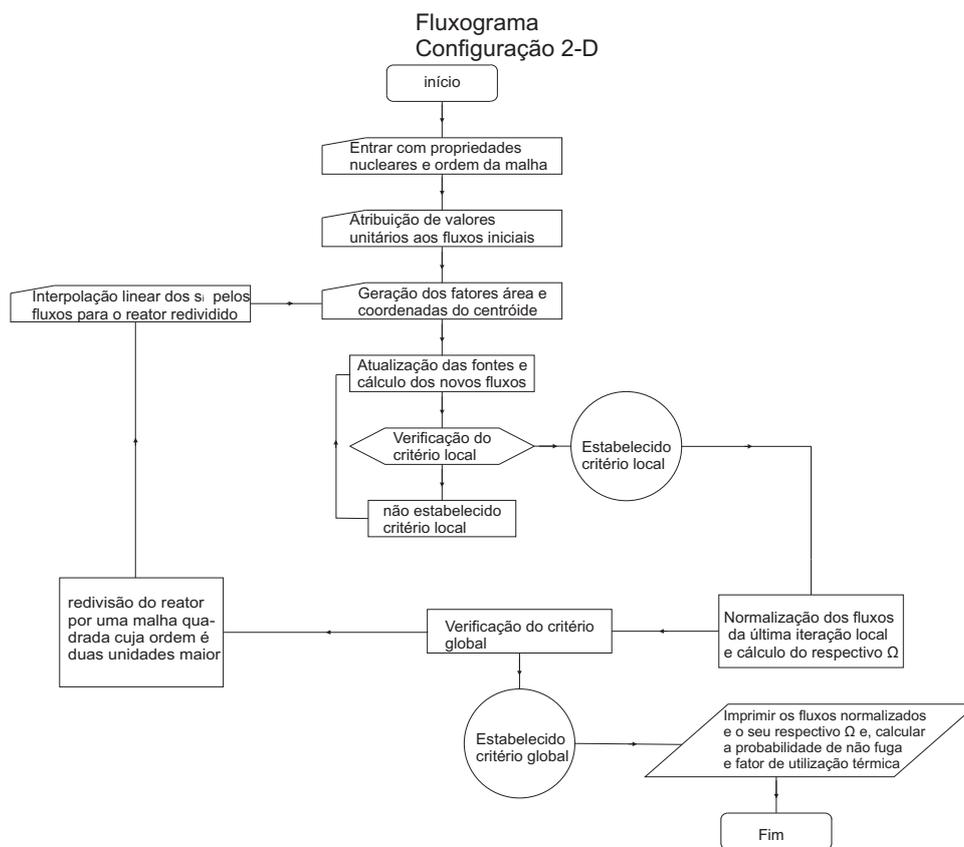


Figura 18 Fluxograma descrevendo a análise feita na configuração bidimensional

Tabela 1 Descrição do programa para configuração bidimensional

parte do programa	função
programa principal	realiza o processo iterativo, o cálculo da probabilidade de não fuga e o fator de utilização térmica.
subrotina REDE	aloca os valores dos fatores área e das coordenadas dos centróides para cada célula.
subrotina DADOS-FUGA	aloca os valores o comprimento de arco e o versor relativo a cada célula periférica.
subrotina CORRENTE-NEUTRON	aloca os valores para o vetor densidade de corrente neutrônica para cada célula.
subrotina INTERPOLATION	faz a interpolação para os $s_{i,j}$ a partir da distribuição de fluxo anterior.
funções área	calculam as áreas das células periféricas, ao todo são 4 funções desse tipo.
funções momento	calculam os momentos a partir dos quais se obtêm as coordenadas dos centróides das células periféricas, segundo o método das fatias, ao todo são 8 desse tipo.
funções Dphi	calculam as derivadas do fluxo, que são os componentes do vetor densidade de corrente neutrônica, ao todo são duas desse tipo.
funções SIG	calculam as seções de choque de absorção e de transporte efetivas, segundo a ponderação pela trajetória.
funções theta	calculam os componentes dos versores relativos a cada célula periférica, ao todo são 4 desse tipo.
funções arco	calculam os comprimentos dos arcos relativos a cada célula periférica, ao todo são 4 desse tipo.
função bessel	calcula o valor da função de Bessel K_0 .

Resultados e discussões

5.1 Configuração unidimensional

Para a configuração unidimensional, foram feitas simulações para dois sistemas, um sem sumidouros e outro com sumidouros, através de algoritmos implementados em FORTRAN. Os algoritmos foram todos elaborados baseados na metodologia apresentada no capítulo anterior.

As propriedades nucleares foram tiradas da tabela 2, na qual está contida a composição típica do núcleo de um reator PWR com as respectivas propriedades nucleares tomadas na região térmica, respeitando-se os limites de energia da Teoria de um grupo [14], [18].

O comprimento de difusão é dado por $L = \sqrt{\frac{D}{\Sigma_a}}$, assim como o coeficiente de difusão é dado por $D = (3\Sigma_{tr})^{-1}$. Além de L e D, seções de choque e outras propriedades nucleares foram todas inferidas da tabela 2.

O tamanho de 342 cm para o reator unidimensional é um tamanho típico do diâmetro para reatores PWR encontrado na literatura [14].

5.1.1 Configuração unidimensional sem sumidouros

Inicialmente, simulou-se um reator em configuração unidimensional partindo com um número de 9 fontes puntiformes, realizando-se o processo iterativo descrito na metodologia até que, para 711 fontes, obteve-se um $\Omega^{711} = 1,55$, com um critério local para as iterações de $\epsilon_l = 1,0 \times 10^{-6}$ e um critério global $\epsilon_g = 1,0 \times 10^{-2}$. A tabela 3 mostra a evolução do Ω para configurações com diferentes números de células. Observa-se um processo monotônico de convergência do parâmetro omega para valores cada vez mais próximos do valor teórico à medida que a razão $\Delta x/L$ diminui.

Tabela 2 Composição típica de um reator PWR

isótopo	n ($10^{24} \times \text{cm}^{-3}$)	σ_{tr} (barns)	σ_a (barns)	σ_f (barns)	ν	Σ_{tr} (cm^{-1})	Σ_a (cm^{-1})	$\nu\Sigma_f$ (cm^{-1})
H	$2,748 \times 10^{-2}$	12,87	0,33	0	0	0,3537	$9,07 \times 10^{-3}$	0
O	$2,757 \times 10^{-2}$	4,025	$2,0 \times 10^{-4}$	0	0	0,111	$5,5 \times 10^{-6}$	0
Zr	$3,694 \times 10^{-3}$	8,142	0,185	0	0	$3,0 \times 10^{-2}$	$6,83 \times 10^{-4}$	0
Fe	$1,71 \times 10^{-3}$	13,47	2,62	0	0	$2,3 \times 10^{-2}$	$4,48 \times 10^{-3}$	0
U ²³⁵	$1,909 \times 10^{-4}$	28	678	577	2,43	$5,35 \times 10^{-3}$	0,1294	0,268
U ²³⁸	$6,592 \times 10^{-3}$	14	2,73	0	2,84	$9,23 \times 10^{-2}$	$1,8 \times 10^{-2}$	0
B ¹⁰	$1,001 \times 10^{-5}$	18,33	3837	0	0	$1,83 \times 10^{-4}$	$3,84 \times 10^{-2}$	0
soma						0,6155	0,2	0,268

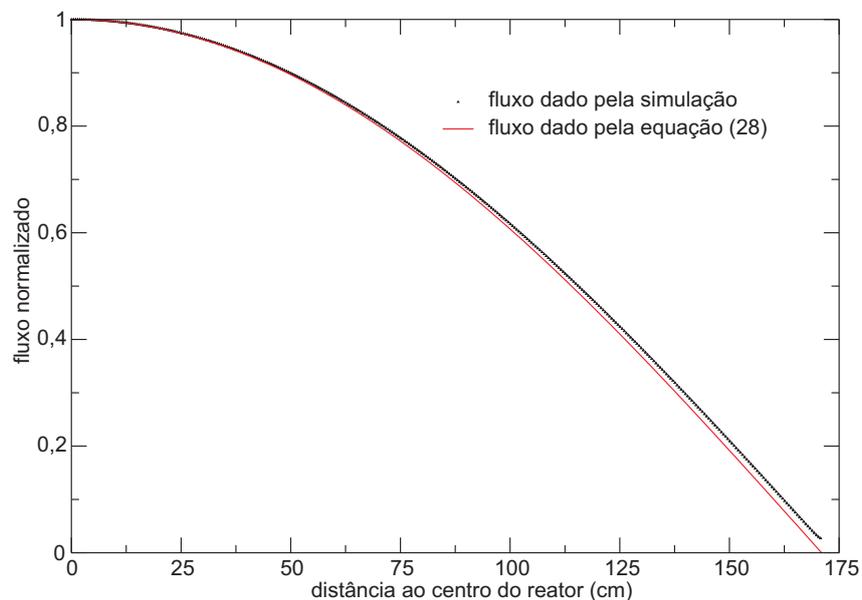
Tabela 3 Evolução da razão Ω até atingir Ω^{711}

nº de células	Ω	$\Delta x/L$
9	1	23,17
11	1,0824	18,96
13	1,3739	16,04
15	1,4542	13,9
17	1,4792	12,27
19	1,4917	10,98
119	1,5484	1,75
203	1,5496	1,03
227	1,5497	0,92
265	1,5498	0,79
335	1,5499	0,62
711	1,55	0,29

Tabela 4 Parâmetros para simulação sem sumidouros

L (cm)	D (cm)	$\Sigma_a(cm^{-1})$	$\Sigma_f(cm^{-1})$	ν	diâmetro (cm)
1,64	0,541	0,2	0,1294	2,43	342

Ao final da simulação, obteve-se, para um reator em configuração unidimensional com 711 células, sem sumidouros e os parâmetros de simulação da tabela 4, um $\Omega^{711} = 1.55$ para a distribuição de fluxo da figura 19, obtida após 747937 iterações, cujo Ω obtido aproxima-se do valor teórico por um erro percentual de cerca de 1,3%. Esse erro percentual de 1,3%, que é um parâmetro global, não descreve plenamente a boa aproximação da distribuição obtida pela simulação em relação a teórica como mostra a figura 19.

**Figura 19** Fluxo 1-D normalizado obtido da simulação e comparado ao teórico

5.1.2 Configuração unidimensional com sumidouros

Para sistema com sumidouros, utilizou-se o sistema obtido anteriormente com 711 células, inicialmente com 29 sumidouros, depois 49 sumidouros, e, em seguida, 69 sumidouros, localizados simetricamente em torno do centro. As propriedades nucleares associadas aos sumidouros são as mesmas da água comum, de modo que o comprimento equivalente ao número de células com sumidouros convencionou-se chamar cortina d'água. Durante o processo itera-

Tabela 5 Parâmetros para simulação em 1-D com sumidouros

$\Sigma_a^{PWR}(cm^{-1})$	$\Sigma_a^{sumid.}(cm^{-1})$	$\Sigma_{tr}^{PWR}(cm^{-1})$	$\Sigma_{tr}^{sumid.}(cm^{-1})$	$\Sigma_f(cm^{-1})$	ν	diâmetro (cm)
0,2	0,022	0,6155	2,332	0,1294	2,43	342

tivo, a atualização de s para fontes e sumidouros é feita como mostrado na equação (30), sendo que é $s_i = \nu\Sigma_f\phi_i$ para fontes e $s_i = \Sigma_a\phi_i$ para sumidouros, em que $\Sigma_a^{sumid.}$ é a seção de choque de absorção da água comum e $\nu\Sigma_f$ é relativa a composição típica de um PWR, cujos valores estão na tabela tabela 5. No cálculo da atualização de s , foi negligenciado o volume das células por esses serem iguais para todas as células.

Com relação ao comprimento e coeficiente de difusão, inseriram-se modificações na especificação destes nos cálculos dos fluxos. Entende-se que a inserção do sumidouro no sistema implicou alterações no comprimento e no coeficiente de difusão, pois a presença do moderador influencia no comprimento e coeficiente de difusão. Assim, calcula-se o comprimento e o coeficiente de difusão usando-se seções de choque de absorção e de transporte ponderadas pela trajetória do nêutron como na equação (1).

$$\Sigma_{ef} = \frac{\Sigma^{sumid.} \times \Delta x + \Sigma^{PWR} \times (r - \Delta x)}{r} \quad (55)$$

A propriedade do sumidouro (água comum) e do reator PWR da tabela 5 são ponderadas pelas distâncias que ocupam, e esta ponderação só é feita quando a trajetória que une os nós das células envolvidas no cálculo da contribuição passa pelos sumidouros como esquematizado na figura 20.

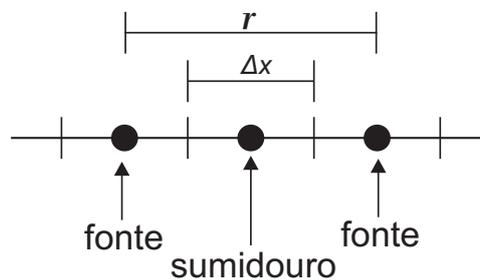
**Figura 20** Esquema da ponderação das propriedades nucleares em configuração 1-D

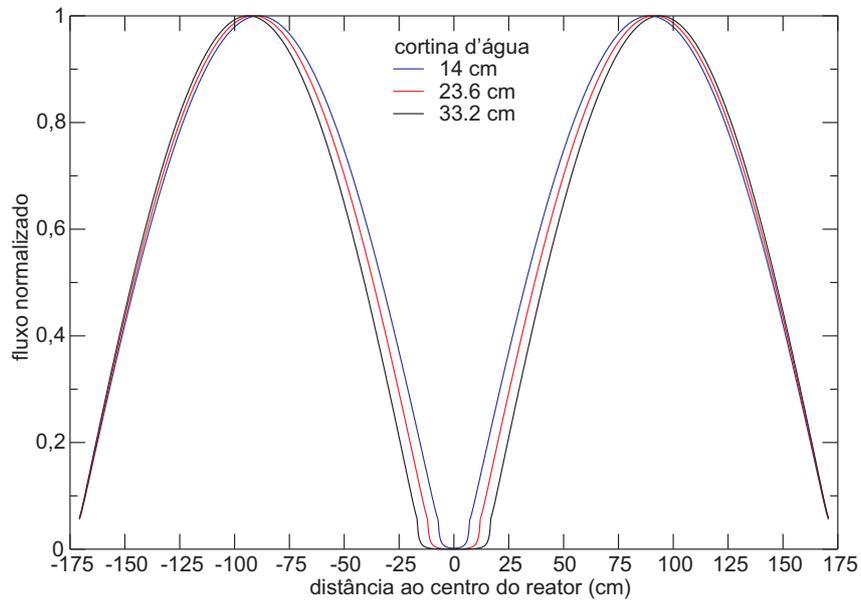
Tabela 6 Fluxo normalizado no centro na iminência do desacoplamento

cortina d'água (cm)	sumidouros	fluxo normalizado no centro
14	29	$1,9 \times 10^{-3}$
23,6	49	$3,0 \times 10^{-4}$
33,2	69	$< 1,0 \times 10^{-4}$

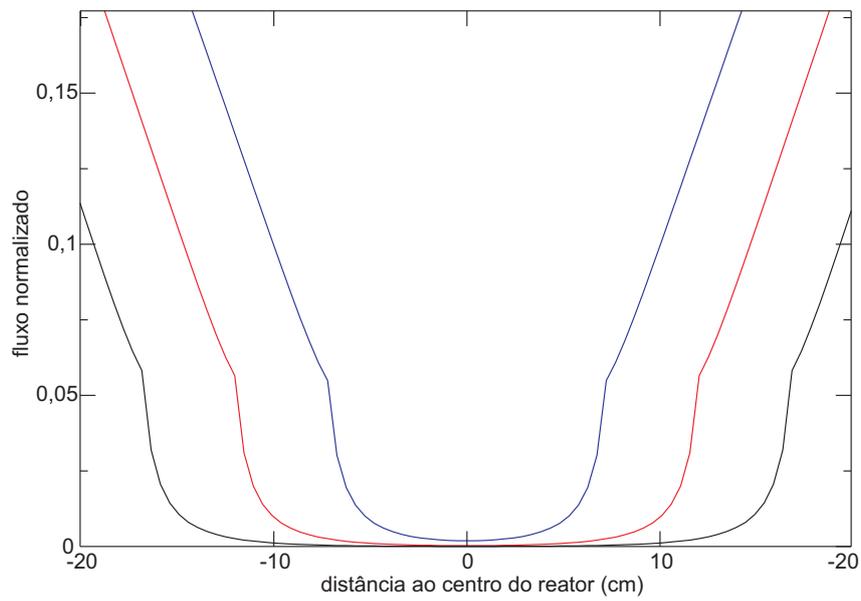
O coeficiente e o comprimento de difusão efetivos tornam-se, respectivamente, $D_{ef} = (3\Sigma_{tr}^{ef})^{-1}$ e $L_{ef} = \sqrt{\frac{D_{ef}}{\Sigma_a^{ef}}}$. Essa ponderação pela trajetória embora simplificada por sugerir que nêutrons tenham trajetórias retilíneas foi bastante útil para manter a simetria na distribuição de fluxo.

Verificou-se que, em função da localização simétrica dos sumidouros no sistema, a distorção causada no fluxo também é simétrica, de modo a evidenciar a existência de dois subnúcleos como na figura 21. Diante dessa evidência, tentou-se estimar a cortina d'água necessária para o desacoplamento desses dois subnúcleos. Constatou-se que, para uma cortina d'água de, aproximadamente 33,2 cm (equivalente a 69 células com sumidouros), o fluxo central normalizado é inferior a $1,0 \times 10^{-4}$, limite para o qual considera-se os subnúcleos desacoplados, pois representa uma diminuição no fluxo de mais de 99,99% em relação ao fluxo máximo.

As distribuições de fluxo obtidas na figura 21 resultaram do processo iterativo apenas com aplicação do critério local $\varepsilon_l = 1,0 \times 10^{-6}$ para o sistema com 711 células e 480 iterações para 29 sumidouros (cortina d'água 14 cm), 457 iterações para 49 sumidouros (cortina d'água 23,6 cm) e 435 iterações para 69 sumidouros (cortina d'água 33,2 cm), como posto na tabela 6. O resultado se mostrou qualitativamente coerente visto que o fato de os sumidouros terem sido inseridos simetricamente em torno do centro do reator implica-se na formação de dois subnúcleos simétricos como mostrados na figura 21.



(a)



(b)

Figura 21 (a) Desacoplamento dos subnúcleos (b)Ampliação da região onde ocorre o desacoplamento

5.2 Configuração bidimensional

Para a configuração bidimensional foram feitas simulações para dois sistemas, um sem sumidouros e outro com sumidouros, através de algoritmos implementados em FORTRAN. Os algoritmos foram todos elaborados baseados na metodologia apresentada no capítulo anterior.

As propriedades nucleares, a exemplo da configuração unidimensional, foram tiradas da tabela 2 [14], [18], as seções de choque e outras propriedades nucleares foram todas inferidas da tabela 2 e o diâmetro do reator usado foi 342 cm como anteriormente [14].

5.2.1 Configuração bidimensional sem sumidouros

Inicialmente, simulou-se um reator em configuração bidimensional com uma malha 9×9 , com células contendo fontes lineares. Realizou-se o processo iterativo descrito na metodologia até que, para uma malha 35×35 , obteve-se um $\Omega^{35} = 2,3085$, com um critério local para as iterações de $\varepsilon_l = 1,0 \times 10^{-6}$ e um critério global $\varepsilon_g = 1,0 \times 10^{-2}$.

Os parâmetros descritos na tabela 4 são os mesmos para esta simulação em configuração 2-D sem sumidouros. Ao final da simulação, obteve-se, para um reator em configuração bidimensional com uma malha 35×35 , sem sumidouros e um $\Omega^{35} = 2,3085$, a distribuição de fluxo mostrada na figura 22.

A distribuição de fluxo simulada pelo programa foi obtida após 1496301 iterações e o Ω^{35} obtido aproxima-se do Ω teórico por um erro percentual de cerca de 0,71%. Novamente o erro percentual de 0,71%, que é um parâmetro global, não descreve plenamente a boa aproximação da distribuição obtida pela simulação em relação a teórica como mostram as figuras 22 e 23, e nesse caso melhor tanto qualitativamente como quantitativamente em relação ao unidimensional. Os processos de convergência para os valores teóricos são diferentes como pode-se observar nas tabelas 3 e 7. A primeira mostra um processo monotônico com a diminuição da razão $\Delta x/L$ e a segunda tem um início não monotônico.

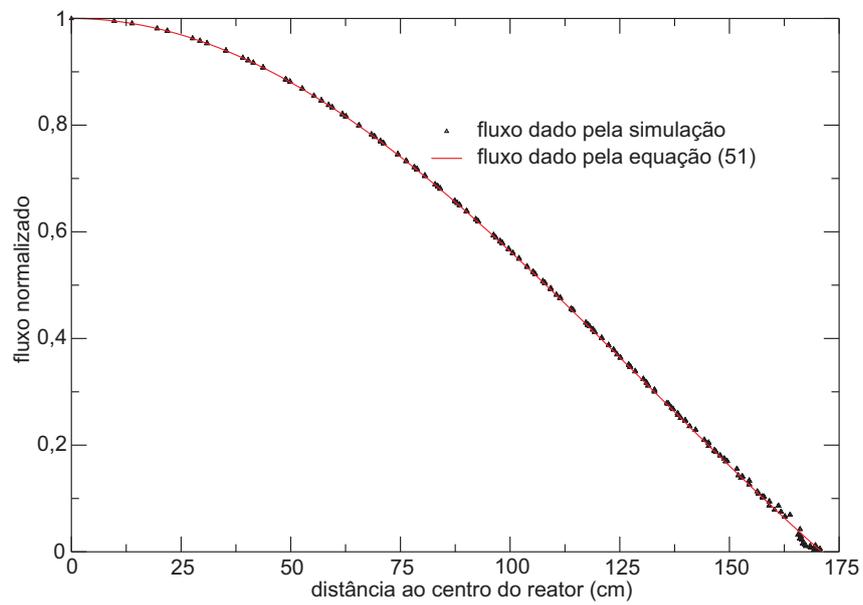


Figura 22 Fluxo bidimensional normalizado obtido da simulação e comparado ao teórico

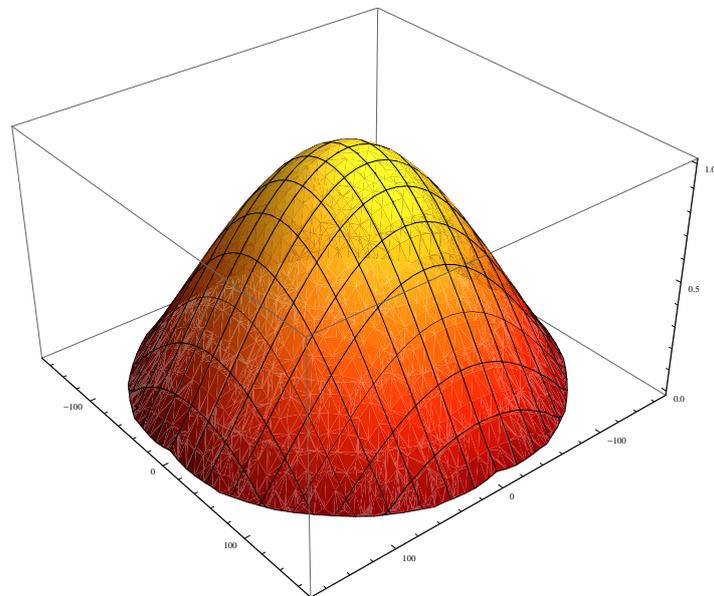


Figura 23 Superfície da distribuição de fluxo normalizado obtido da simulação

Tabela 7 Evolução da razão Ω até atingir Ω^{35}

ordem da malha	Ω	$\Delta x/L$
9	1,414	23,17
13	2,6645	16,04
17	2,4929	12,27
21	2,4372	9,93
25	2,3919	8,34
29	2,3435	7,19
33	2,3073	6,32
35	2,3085	5,96

5.2.2 Configuração bidimensional com sumidouro

Para o sistema com sumidouro, utilizou-se o sistema obtido anteriormente com malha 35×35 com um sumidouro localizado, inicialmente, no centro.

Durante o processo iterativo, a atualização de s para fontes e sumidouros é feita como mostrado na equação (48), sendo que é $s_{i,j} = v\Sigma_f \times \phi_{i,j} \times area(i,j) \times h$ para fontes e $s_{i,j} = \Sigma_a^{sumidouro} \times \phi_{i,j} \times area(i,j) \times h$ para o sumidouro. Porém, no caso de tentar-se simular uma barra de controle negra, deve-se considerar a absorção de nêutrons diferente do sumidouro comum.

Para se calcular a absorção de nêutrons na barra de controle negra deve-se levar em consideração a distribuição de fluxo dentro da barra, onde o fluxo anula-se para a distância de extrapolação d entrando na barra. Supondo-se uma distribuição de fluxo dentro da barra caindo linearmente com a distância tem-se:

$$\phi(x) = \phi_b \left[1 + \left(\frac{x-r}{d} \right) \right] \quad \text{para } r-d \leq x \leq r \quad (56)$$

Em que x é a distância radial em relação ao eixo da barra, ϕ_b é o fluxo de nêutrons, dado pela simulação, no nó onde está localizada a barra e r é o raio da barra. Para o cálculo sobre a absorção na barra, usou-se uma distância de extrapolação aproximadamente igual ao livre caminho médio de transporte do meio que circunda a barra como mostrado na equação a seguir:

$$d \cong \lambda_{tr} = \frac{1}{\Sigma_{tr}^{PWR}} \quad (57)$$

A absorção na barra de controle negra constituída de cádmio, é calculada usando-se a distribuição de fluxo de nêutrons dentro da barra mostrada na equação (56):

$$ABS = \int_{r-d}^r \Sigma_a^{Cd} \phi_b \left[1 + \left(\frac{x-r}{d} \right) \right] \times 2\pi x h dx \quad (58)$$

A absorção dada em função do raio, da distância de extrapolação, do fluxo no nó onde esta a barra e uma altura típica de $h = 1$ cm é dada pela integração na equação (58):

$$ABS = 2\pi\phi_b\Sigma_a^{Cd} \left\{ \left[\frac{r^3}{3d} + \left(1 - \frac{r}{d}\right) \frac{r^2}{2} \right] - \left[\frac{(r-d)^3}{3d} + \left(1 - \frac{r}{d}\right) \frac{(r-d)^2}{2} \right] \right\} \quad (59)$$

Na célula onde localiza-se o sumidouro, tem-se uma barra de controle ocupando uma área πr^2 , e o restante da área da célula é ocupado pelos elementos da composição típica do PWR da tabela 2, como mostrado na figura 24. Portanto, o termo s de tal célula é contabilizado pela absorção da barra de controle negra e pela composição do restante da área da célula, onde ocorre fissão, ambos para uma altura típica de 1 cm.

$$s_b = v\Sigma_f \times \phi_b \times [(\Delta x)^2 - \pi r^2] - ABS \quad (60)$$



Figura 24 Esquema da célula com barra de controle

Com relação ao comprimento e ao coeficiente de difusão, inseriram-se modificações na especificação destes nos cálculos dos fluxos. Entende-se que a inserção do sumidouro no sistema implicou alterações no comprimento e no coeficiente de difusão, pois a presença do material

Tabela 8 Parâmetros para simulação para configuração 2-D com sumidouros

$\Sigma_a^{PWR}(cm^{-1})$	$\Sigma_a^{Cd}(cm^{-1})$	$\Sigma_{tr}^{PWR}(cm^{-1})$	$\Sigma_{tr}^{Cd}(cm^{-1})$	$\Sigma_f(cm^{-1})$	ν	diâmetro (cm)
0,2	113,6	0,6155	113,92	0,1294	2,43	342

fortemente absorvedor influencia no comprimento e coeficiente de difusão. Assim, calcula-se o comprimento e o coeficiente de difusão usando-se seções de choque de absorção e de transporte do cádmio e do reator sem barra, que constam na tabela 8, ponderadas pela trajetória do nêutron e o seu comprimento médio percorrido dentro da barra como na equação (61).

$$\Sigma^{efetivo} = \frac{\Sigma^{Cd} \times \bar{\ell} + \Sigma^{PWR} \times (d_c - \bar{\ell})}{d_c} \quad (61)$$

A propriedade do cádmio e do reator são ponderadas pelos termos da equação (61), em que $\bar{\ell} = 2r$ é o comprimento médio percorrido pelo nêutron dentro da barra de controle e, d_c é a distância entre os centróides das células envolvidas.

O coeficiente e o comprimento de difusão efetivos tornam-se, respectivamente, $D_{ef} = (3\Sigma_{tr}^{ef})^{-1}$ e $L_{ef} = \sqrt{\frac{D_{ef}}{\Sigma_a^{ef}}}$.

Esta ponderação pela trajetória só é feita quando a trajetória que une os centróides das células envolvidas no cálculo da contribuição passa pelo corte transversal da barra de controle, como esquematizado na figura 25, embora sendo uma aproximação simplificadoria por sugerir que nêutrons tenham trajetórias retilíneas foi bastante útil para manter a simetria na distribuição de fluxo.

A distribuição de fluxo obtida, mostrada na figura 26, resultaram do processo iterativo apenas com aplicação do critério local $\epsilon_l = 1,0 \times 10^{-6}$ para o sistema com malha 35×35 com uma barra de controle negra de raio $r = 1,905$ cm no centro do reator. Embora não se tenha base de comparação teórica a distribuição de fluxo se mostra simétrica como deveria ser já que a barra foi introduzida no centro do reator. A simetria para esse caso foi obtida pela ponderação pela trajetória que fizemos que mesmo sendo uma aproximação simplificadoria se mostrou útil.

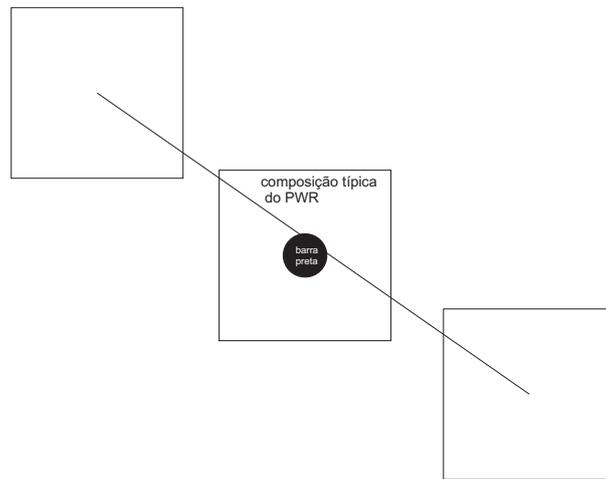


Figura 25 Esquema da ponderação das propriedades nucleares para configuração 2-D

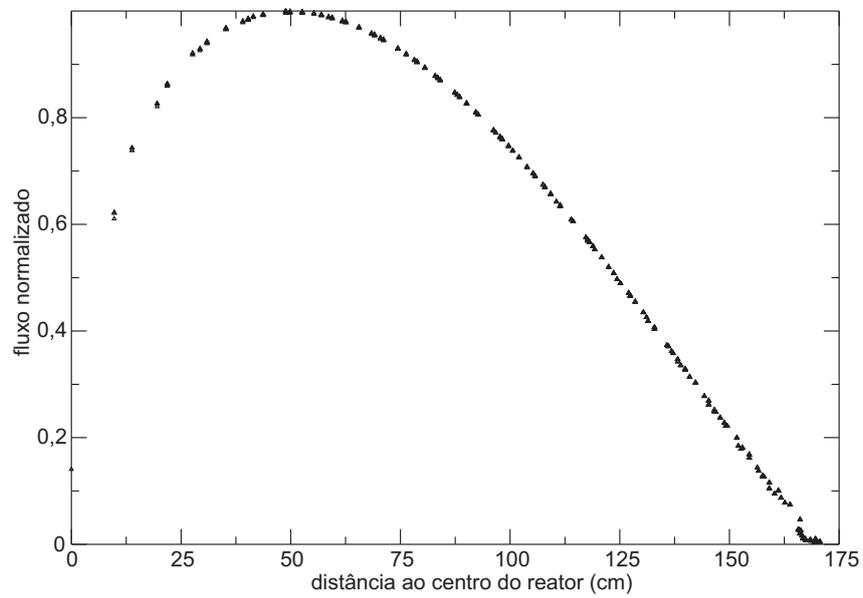


Figura 26 Distribuição de fluxo normalizado para configuração bidimensional obtido da simulação com uma barra de controle central

5.3 Análise de reatividade em configuração bidimensional

Baseando-se nos resultados das simulações em configuração bidimensional, faz-se uma comparação entre a reatividade da barra inserida no reator descrito na subsecção 5.2.2 calculado numericamente no programa e a reatividade calculada analiticamente pela equação (20).

Afim de se calcular a reatividade da barra inserida no caso descrito na subsecção 5.2.2, usa-se a equação a seguir:

$$\rho_w = \frac{|k_0 - k|}{k_0} \quad (62)$$

em que k_0 e k são, respectivamente, os fatores de multiplicação do sistema sem barra e com barra, calculando-se ambos pela equação (22). Como se trabalha com Teoria de um grupo, em que todos os nêutrons são considerados térmicos, desprezam-se as perdas em ressonâncias de absorção e acréscimos devidos a fissões rápidas. Além disso, como η depende apenas das propriedades do combustível e isto permanece inalterado nos dois casos, a equação (62) torna-se:

$$\rho_w = 1 - \frac{fP}{f_0P_0} \quad (63)$$

em que f_0, P_0 e f, P são, respectivamente, os fatores de utilização térmica e as probabilidades total de não fuga do sistema sem barra e com barra.

5.3.1 Cálculo da probabilidade da não-fuga de nêutrons

A fuga de nêutrons pela superfície do reator, por unidade de tempo, é dada pela equação a seguir:

$$fuga = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA \quad (64)$$

em que \mathbf{J} dado pela equação (65) é a densidade de corrente de nêutrons na superfície e \mathbf{n} , um versor normal à mesma.

$$\mathbf{J} = -D\nabla\phi = -D \left(\mathbf{i} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial\phi}{\partial y} \right) \quad (65)$$

Os componentes do gradiente são calculados numericamente a partir da expansão de Taylor até a primeira ordem, pelo sistema abaixo:

$$\begin{aligned}\phi(x + \varepsilon_x^1, y + \varepsilon_y^1) &\simeq \phi^1(x, y) + \varepsilon_x^1 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \varepsilon_y^1 \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \phi(x + \varepsilon_x^2, y + \varepsilon_y^2) &\simeq \phi^2(x, y) + \varepsilon_x^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \varepsilon_y^2 \frac{\partial \phi}{\partial y}\end{aligned}\quad (66)$$

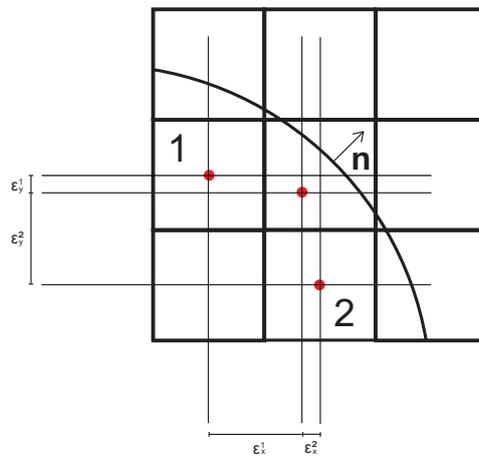


Figura 27 Esquema do cálculo da fuga de nêutrons

No sistema (66) as variáveis relativas as células 1 e 2 como mostrado na figura 27, são dadas pelo programa e a partir desses dados resolve-se o sistema, encontram-se as derivadas, e assim, os componentes do gradiente. Discretizando-se o cálculo da fuga para cada célula na superfície do reator, a uma altura típica de 1 cm, tem-se:

$$fuga(i, j) = J_n(i, j) \times arco(i, j) \quad (67)$$

em que $J_n(i, j) = \mathbf{J}(i, j) \cdot \mathbf{n}$ é o componente da corrente de nêutrons normal à superfície do

reator, e o arco(i,j) é o comprimento de arco na superfície do reator, ambos para a i,j -ésima célula.

A probabilidade de não fuga de nêutrons é dada pela razão dos nêutrons absorvidos no reator e a soma dos nêutrons absorvidos no reator e os que fogem por toda a superfície do reator.

$$P_{NF} = \frac{\text{Absorção total}}{\text{Absorção total} + \text{fuga total}} \quad (68)$$

Ao implementar um algoritmo para o cálculo da fuga, verificou-se que a fuga é praticamente igual para o reator com e sem barra, de modo que a equação (63) torna-se:

$$\rho_w = 1 - \frac{f}{f_0} \quad (69)$$

5.3.2 Fator de utilização térmica global do reator

O fator de utilização térmica para o reator sem barra f_0 é calculado a partir dos parâmetros da tabela 2 pela equação abaixo:

$$f_0 = \frac{\Sigma_a^{U^{235}}}{\Sigma_a^{PWR}} \quad (70)$$

Com a inserção da barra o reator perdi a homogeneidade tornando-se necessário a ponderação pela distribuição do fluxo e o volume em cada célula para uma altura típica de 1 cm. O fator de utilização térmica para o reator com barra de controle negra torna-se:

$$f = \frac{\Sigma_a^{U^{235}} [\sum_{i,j} \phi(i,j) \times area(i,j) - \phi_b \times \pi r^2]}{\Sigma_a^{PWR} [\sum_{i,j} \phi(i,j) \times area(i,j) - \phi_b \times \pi r^2] + ABS} \quad (71)$$

Simplificando obtém-se:

$$f = \frac{\Sigma_a^{U^{235}}}{\Sigma_a^{PWR} + \frac{ABS}{fator}} \quad (72)$$

em que $fator = \sum_{i,j} \phi(i,j) \times area(i,j) - \phi_b \times \pi r^2$ e a equação (72) são implementados no programa para obter f .

5.3.3 Barra de controle central no reator

Usou-se o mesmo método para tentar simular a distribuição de fluxo devida uma barra de controle negra no centro do reator. Embora não se tenha base de comparação teórica o resultado se mostrou excelente do ponto de vista qualitativo, pois a reprodução da perturbação no fluxo devida a barra foi simulada com precisão e simetria como mostra a figura 28.

Devido a qualidade do resultado para a distribuição de fluxo causada por uma barra central negra de raio $r = 1.905$ cm, tentou-se adicionalmente estender o estudo para o comportamento da reatividade devida a esse tipo de barra em função de seu raio, considerando-se todas as aproximações a respeito da absorção de nêutrons por essa barra introduzidas nas seções anteriores.

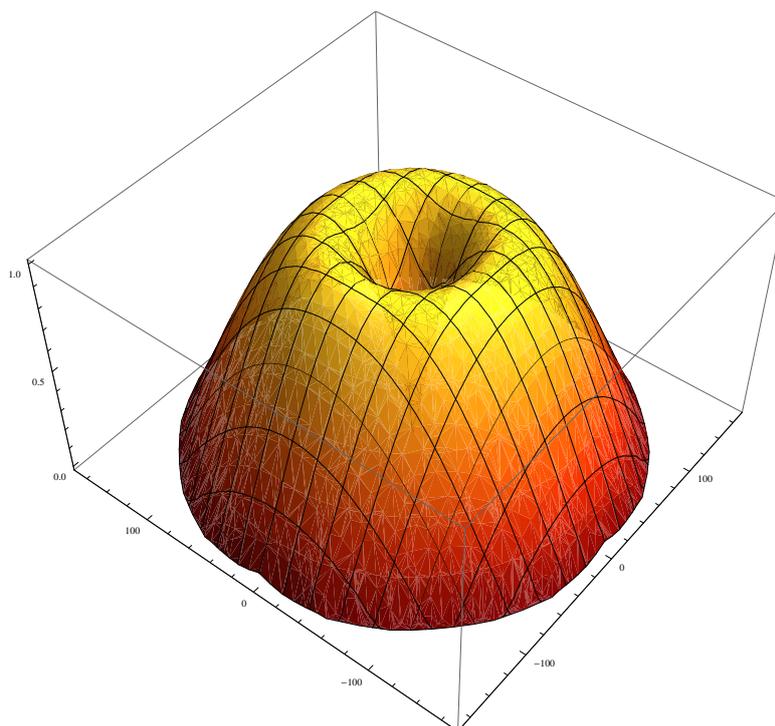


Figura 28 Superfície da distribuição de fluxo normalizado com perturbação devida a uma barra central

Usou-se o método de cálculo da reatividade abordado anteriormente, e implementado no programa, para simular barras de controle negras com diversos raios. Para cada raio, de barra calcularam-se os valores das reatividades dados pela simulação e compararam-se aos valores teóricos reproduzidos pela equação (20), como posto na tabela 9. Os valores teóricos das reatividades são sempre maiores por um fator de, aproximadamente, 2, e o comportamento da reatividade em função do raio da barra é mostrado na figura 29.

Tabela 9 Valores da reatividade para barras centrais de diversos raios

raio (cm)	simulação(%)	equação (20)(%)
1,9050	0,1099	0,2327
2,5400	0,1347	0,2613
3,1750	0,1523	0,2858
3,8100	0,1656	0,3079
4,4450	0,1758	0,3282

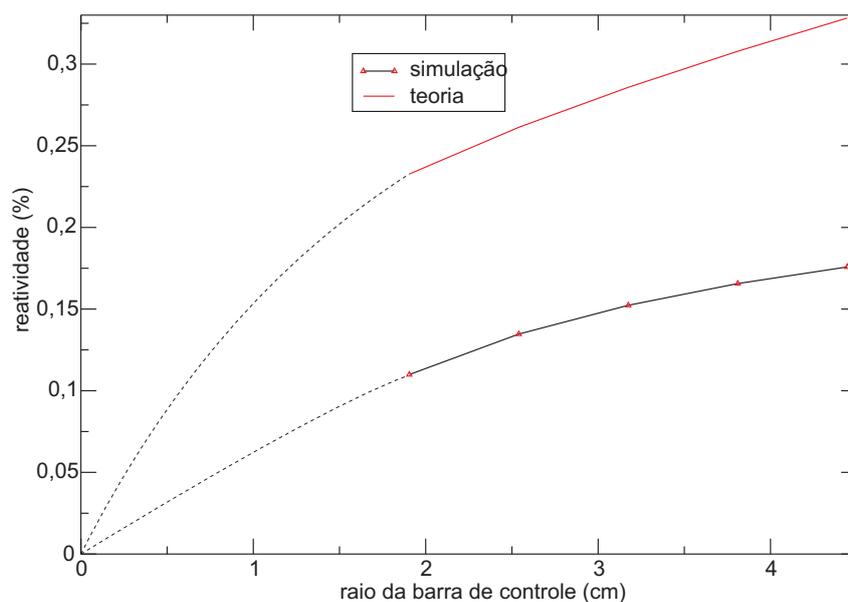


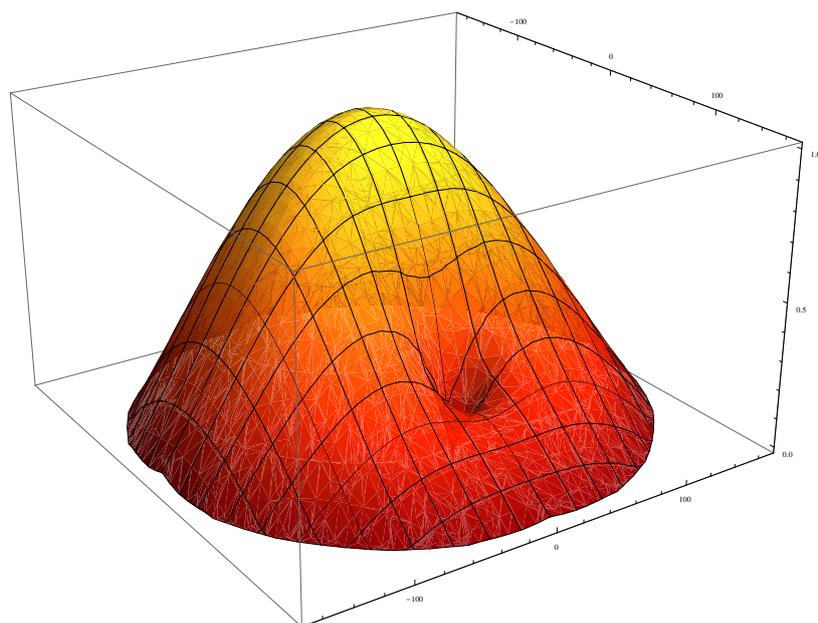
Figura 29 Comportamento das reatividades em função do raio

Não se sabe justificar pontualmente os erros observados nas reatividades, o certo é que não se-pode atribuí-los a somente uma limitação do método de fontes e sumidouros visto que nesses resultados estão aproximações simplificatórias introduzidas no cálculo de absorção de nêutrons por barras de controle negras.

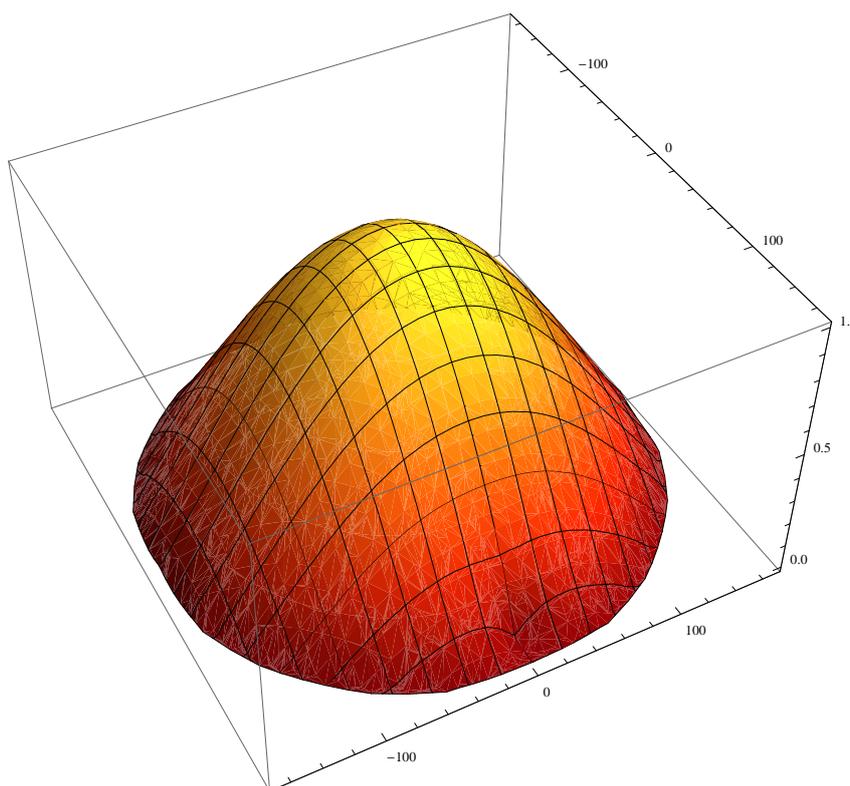
5.3.4 Barra de controle assimétrica no reator

Da mesma maneira se tentou simular a distribuição de fluxo devida uma barra de controle negra deslocada radialmente do centro do reator. Da mesma forma que para a seção anterior não se tem base de comparação teórica, mas do ponto de vista qualitativo resultado se mostrou excelente, pois a reprodução da perturbação no fluxo devido a barra foi simulada com precisão e simetria como mostra a figura 30.

A figura 30 mostra as perturbações na distribuição de fluxo causada por uma barra assimétrica negra com deslocamentos radiais de 68,4 cm e 146,5714 cm, e de raio $r = 1,905$ cm. É importante destacar que como a absorção devido a barra é proporcional ao fluxo local, a perturbação devida a uma barra assimétrica mais próximo à fronteira será cada vez mais suave, pois próximo à fronteira o fluxo é bem menor que no centro. Devido a qualidade para com a qual o método simula a perturbação na distribuição de fluxo tentou-se adicionalmente estender



(a)



(b)

Figura 30 (a) Superfície da distribuição de fluxo normalizado com perturbação devida a uma barra assimétrica (b) Superfície da distribuição de fluxo normalizado com perturbação devida a uma barra assimétrica mais próximo à fronteira

Tabela 10 Valores da reatividade para barras assimétricas para vários deslocamentos radiais

deslocamento (cm)	reatividade(%)
0	0,1099
9,7714	0,1070
19,5429	0,1018
29,3143	0,0952
39,0857	0,0879
48,8571	0,0805
58,6286	0,0732
68,4000	0,0662
78,1714	0,0595
87,9429	0,0531
97,7143	0,0470
107,4857	0,0411
117,2571	0,0353
127,0286	0,0296
136,8000	0,0239
146,5714	0,0180

o estudo para o comportamento das reatividades normalizadas em comparação com resultados obtidos pela equação (73) baseada na Teoria de perturbação de primeira ordem. Primeiro calcularam-se as reatividades de uma barra de controle negra com raio $r = 1,905$ cm para vários deslocamentos radiais como posto na tabela 10.

Os métodos de teoria de perturbação desenvolvidos para tratar situações em que as alterações no sistema são suficientemente pequenas a ponto de as características do sistema perturbado poderem ser construídas a partir de uma análise do sistema original, permite escrever a equação a seguir:

$$\rho(x) = \rho(0)J_0^2\left(\frac{2.405x}{R}\right) \quad (73)$$

em que x é a distância ao centro do reator, $\rho(0)$ é a reatividade da barra de controle negra no

centro, $\rho(x)$ é a reatividade da barra de controle negra com deslocamento radial x e R o raio do reator.

Assim, comparou-se o comportamento das reatividades normalizadas, pela reatividade máxima, com os valores de $J_0^2\left(\frac{2,405x}{R}\right)$ associados ao quadrado do fluxo normalizado referente ao reator sem barra, ou seja, o sistema original, como mostrado na figura 31.

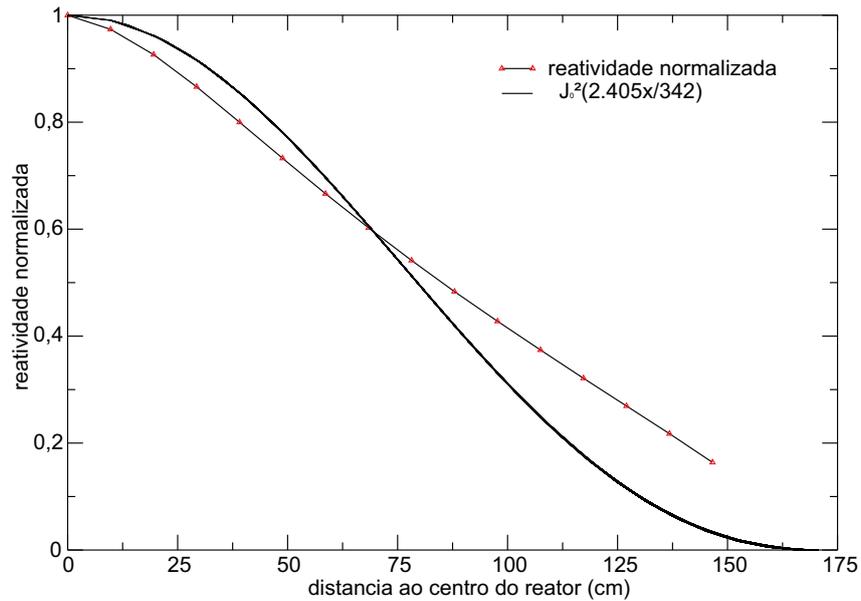


Figura 31 Comportamento das reatividades em função do deslocamento radial da barra

Apesar da reatividade decair com a distância, esta o faz com um gradiente diferente com o que se esperava pela Teoria de perturbação de primeira ordem.

Nesse caso além das aproximações simplificatórias introduzidas no cálculo da absorção da barra de controle negra, o que pode ter influenciado para obter-se um gradiente diferente foi o fato que a equação (73) é válida apenas para pequenas perturbações o que não é uma condição plenamente satisfeita para a barra negra.

Conclusões

O método de fontes e sumidouros foi proposto por Galanin e Feinberg em 1955, época em que se tinha limitações em relação a cálculos iterativos. Aqui investigamos a eficácia do método associado a um processo iterativo para gerar distribuições de fluxo para reatores em configurações uni e bidimensional tendo como base de comparação resultados analíticos conhecidos.

Esse trabalho tem raízes num trabalho anterior em que se tentou gerar distribuições de fluxo para reatores conhecidos como reator do tipo placa e cilíndrico infinito. Apesar da metodologia simples obteve-se resultados razoáveis, porém com alguma dispersão no caso bidimensional. A metodologia do trabalho original foi melhorada com a introdução de algumas modificações e estendida para sistemas com sumidouros. Entre as principais modificações estão a introdução da autocontribuição e o uso de dados típicos de um PWR tirados da literatura.

O foco desse trabalho é a aplicação do método de fontes e sumidouros para simular distribuições de fluxo de sistemas conhecidos, como reator do tipo placa e cilíndrico infinito para diversos casos com e sem sumidouros.

Para os casos homogêneos usou-se o parâmetro Ω , dado pela razão entre o fluxo máximo pelo médio, e comparou-se valores teóricos desses parâmetros com os valores obtidos por simulações realizadas a partir de programas computacionais implementados em linguagem FORTRAN para configuração uni e bidimensional.

Na análise do fluxo, obteve-se por simulação uma distribuição de fluxo muito próxima da teórica, com erros percentuais, em relação ao parâmetro teórico Ω , de 1.3% e 0.71%, para as configurações uni e bidimensional, respectivamente. Os pequenos erros percentuais em relação ao parâmetro global Ω é ratificado pelas boas aproximações das distribuições de fluxo obtidas em relação as distribuições de fluxo teóricas.

Com bases nesses resultados de distribuição de fluxo, aplicou-se o método de fontes e sumidouros a sistemas mais complexos devidos à inserção de sumidouros por meio de versões dos programas anteriores para as configurações uni e bidimensional levemente modificados.

No caso unidimensional simulou-se uma cortina d'água necessária para estudar o desacoplamento dos subnúcleos do reator e obteve-se um resultado coerente do ponto de vista qualitativo, uma vez que os subnúcleos do reator mantiveram-se simétricos. Esse resultado mostra que para uma cortina d'água de 33,2 cm os subnúcleos estão essencialmente isolados, ou seja, a essa distância o fluxo devido a um não causa fissão no outro e vice-versa. Para a condição de isolamento considera-se uma redução no fluxo central de mais de 99,99% do fluxo máximo. Salvo algumas aproximações simplificadoras, esse estudo pode ser útil para a questão da estocagem de material físsil na piscina de um reator por exemplo, para estocar o material com segurança deve-se respeitar uma distância que garanta o isolamento.

No caso bidimensional, simulou-se a inserção de um sumidouro para simular uma barra de controle negra no reator. Qualitativamente, obtiveram-se resultados coerentes, com destaque para a simetria na superfície da distribuição de fluxo apresentada para o reator com barra central e com barra assimétrica. Essas superfícies da distribuição de fluxo mostram, com precisão, a perturbação no fluxo causada pelas barras central e assimétrica negra.

Devido a qualidade com que reproduziu-se essas perturbações e tendo sido atingido o objetivo principal do nosso estudo sobre as distribuições de fluxo de diversos sistemas, resolveu-se estender o estudo para o comportamento das reatividades. Qualitativamente, pelos resultados a reatividade devido a barra de controle negra reduz com o aumento da distância ao centro do reator, porém com um gradiente diferente com o que se esperava pela Teoria de perturbação de primeira ordem. Entretanto, os erros observados para as reatividades não podem ser atribuídos ao método de fontes e sumidouros, uma vez que incluem erros advindos de aproximações simplificadoras utilizadas no cálculo da absorção de nêutrons devido a barra de controle negra, como por exemplo a suposição da distribuição de fluxo interna da barra e a escolha da distância de extrapolação.

Não se podem apontar causas específicas para erros pontuais sobre as reatividades, mas, em linhas gerais, pode-se atribuí-los às limitações do método e às aproximações simplificadoras utilizadas, dentre as quais as mais importantes são:

- 1) *Os kernels para meios infinitos foram usados para meios finitos.*
- 2) *O cálculo da absorção, na suposição da distribuição de fluxo dentro da barra de controle negra e a escolha da distância de extrapolação como sendo $d \cong \lambda_{tr}$, ou seja, um meio termo para o intervalo $0.71\lambda_{tr} \leq d \leq \frac{4}{3}\lambda_{tr}$;*

3) *As ponderações pela trajetória, trajetórias retilíneas foram usadas para calcular o coeficiente e o comprimento de difusão após a inserção de sumidouros;*

4) *No caso de o reator com barras, a equação baseada na Teoria de Perturbação de primeira ordem tem sua validade restringida a pequenas perturbações, restrição que não se mostra plenamente válida para barras negras.*

Algumas destas aproximações podem ser revistas em trabalhos posteriores para tentar melhorar os resultados das reatividades, além disto pode-se tentar estender a metodologia para três dimensões, ou para o caso bidimensional rever as aproximações simplificatórias no cálculo da absorção de nêutrons devido a barra de controle negra e inserir barras múltiplas, para gerar resultados tanto de distribuição de fluxo como de reatividade. Além disto pode-se tentar aplicar a metodologia desse trabalho a reatores com outras geometrias.

Referências Bibliográficas

- [1] LAMARSH, J. R. *Introduction to Nuclear Engineering*. ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1975.
- [2] ISBIN, H. S. *Introduction to Nuclear Reactor Theory*. Reinhold Publishing Corporation, 1963.
- [3] LAMARSH, J. R. *Introduction to Nuclear Reactor Theory*. ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, 1972.
- [4] NARAIN, R. An iterative method for evaluation of flux distribution in 1d and 2d geometries using superposition of contributions from sources and sinks. *International Nuclear Atlantic Conference - INAC*, Rio de Janeiro, Brasil, 2009.
- [5] de LIMA, A. J. P. *Estudo da distribuição do fluxo de nêutrons através do método de superposição*. Monografia(Bacharelado em física)-UNICAP, 2008.
- [6] GALANIN, A. D. Application of the method of effective boundary conditions for calculating the critical dimensions of reactors. *Proc. 1st U.N International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy*, vol.5: 451–453, 1955.
- [7] FEINBERG, S. M. Heterogeneous methods for calculating reactors: Survey of results and comparison with experiment. *Proc. 1st U.N International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy*, vol.5: 484–500, 1955.
- [8] BAHTTI, R. A. and HAHN, O. J. Derivation of finite medium age-diffusion kernels in source-sink theory. *Journal of Nuclear Science and Technology*, vol.14: 241–243, 1976.
- [9] KAWASHIMA, KANAU. Iterative method of multi-pole source-sink calculation. *Journal of Nuclear Science and Technology*, vol.4: 27–31, 1967.

- [10] JOVANIĆ, M. M. and GRANT, P. J. The use of feynberg-galanin method for the calculation of the thermal-flux fine structure in liquid-moderated nuclear reactors. *British Journal of Applied Physics*, vol.18: 693–701, 1967.
- [11] KAWASHIMA, KANAU. Iterative method of multi-pole source-sink calculation for finite moderator. *Journal of Nuclear Science and Technology*, vol.4: 261–263, 1967.
- [12] KANEKO, YOSHIHIKO. Adjoint equation in source-sink method. *Journal of Nuclear Science and Technology*, vol.6: 540–542, 1969.
- [13] BUTKOV, EUGENE. *Física Matemática*. LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1988.
- [14] STACEY, WESTON M. *Nuclear Reactor Physics*. WILEY-VCH, 2004.
- [15] MEGHREBLIAN, ROBERT V. and HOLMES, DAVID K. *Reactor Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1960.
- [16] L. A. A. TERREMOTO. *Fundamentos de Tecnologia Nuclear: Reatores*. IPEN-CNEN-SP, 2004.
- [17] PRESS, WILLIAM H., TEUKOLSKY, SAUL A., VETTERLING, WILLIAM T., and FLANNERY, BRIAN P. *Numerical Recipes in Fortran 77: Volume 1 (Fortran 77): The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1992.
- [18] *Reactor Physics Constants*. USAEC Report ANL-5800, 2nd ed.,1963.

Cálculos das áreas das células

A.1 Área de célula do tipo A_0

Para células cujas coordenadas de seus quatro vértices não satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_0 , com nenhum vértice dentro do raio do reator. Essas áreas possuem fator área nulo.

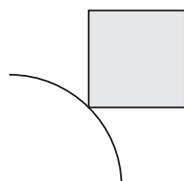


Figura 32 Célula do tipo A_0 , fora do reator

A.2 Área de célula periférica do tipo A_1

Para células cujas coordenadas de apenas um de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_1 , com apenas um vértice dentro do raio do reator.

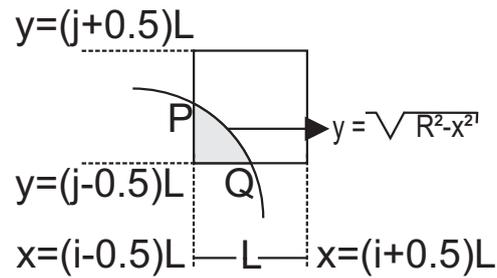


Figura 33 Célula do tipo A_1 delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

O ponto P tem abscissa $x_P = (i - 0.5)L$. A ordenada do ponto Q é dada pela equação da circunferência:

$$\begin{aligned} (j - 0.5)L &= \sqrt{R^2 - x_Q^2} \\ \Rightarrow x_Q &= \sqrt{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2} \end{aligned}$$

A área A_1 da figura 33 é calculada pela relação abaixo:

$$A_1 = \int_{x_P}^{x_Q} [\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L] dx \quad (74)$$

Separa-se esse cálculo em duas integrais:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ I_2 &= \int (j - 0.5)L dx \end{aligned}$$

Daí, tem-se que

$$A_1 = (I_1 - I_2)|_{x_P}^{x_Q} \quad (75)$$

Fazendo a substituição $x = R \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = R \cos \theta d\theta$:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int R\sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} R \cos \theta d\theta \\
&= R^2 \int \cos^2 \theta d\theta \\
&= R^2 \int \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{R^2}{2} (\theta + \text{sen}\theta \cos \theta)
\end{aligned} \tag{76}$$

Para a outra integral:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int (j - 0.5)L dx \\
\Rightarrow I_2 &= (j - 0.5)Lx
\end{aligned} \tag{77}$$

Devido à substituição de variáveis feita, tem-se:

$$\begin{aligned}
x_P &= (i - 0.5)L \Rightarrow \theta_{inf} = \arcsen \left[\frac{(i - 0.5)L}{R} \right] \\
x_Q &= \frac{\sqrt{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2}}{R} \Rightarrow \theta_{sup} = \arcsen \left[\frac{\sqrt{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2}}{R} \right]
\end{aligned}$$

Substituindo-se I_1 e I_2 em (75) e usando os limites acima:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{R^2}{2} \left\{ \arcsen \frac{\sqrt{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2}}{R} - \arcsen \left[\frac{(i - 0.5)L}{R} \right] \right. \\
&\quad + \left. \left[\frac{\sqrt{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2}}{R} \right] \left[\frac{(j - 0.5)L}{R} \right] - \left[\frac{\sqrt{R^2 - (i - 0.5)^2 L^2}}{R} \right] \left[\frac{(i - 0.5)L}{R} \right] \right\} \\
&\quad - (j - 0.5)L \left[\sqrt{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2} - (i - 0.5)L \right]
\end{aligned} \tag{78}$$

A.3 Área de célula periférica do tipo A_2

Para células cujas coordenadas de dois de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_2 , com dois vértices dentro do raio do reator.

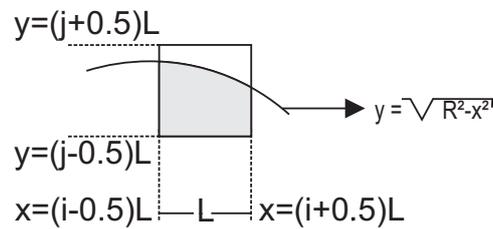


Figura 34 Célula do tipo A_2 delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

A área A_2 da figura 34 é calculada pela relação a seguir:

$$A_2 = \int_{(i-0.5)L}^{(i+0.5)L} \left[\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L \right] dx \quad (79)$$

Devido à substituição de variáveis feita anteriormente, tem-se:

$$(i - 0.5)L \Rightarrow \theta_{inf} = \arcsen \left[\frac{(i - 0.5)L}{R} \right]$$

$$(i + 0.5)L \Rightarrow \theta_{sup} = \arcsen \left[\frac{(i + 0.5)L}{R} \right]$$

Utilizando os limites anteriores, e aplicando-os as equações (76) e (77), obtém-se:

$$A_2 = \frac{R^2}{2} \left\{ \arcsen \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right] - \arcsen \left[\frac{(i-0.5)L}{R} \right] + \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right] \right. \\ \left. \times \left[\frac{\sqrt{R^2 - (i+0.5)^2 L^2}}{R} \right] - \left[\frac{(i-0.5)L}{R} \right] \left[\frac{\sqrt{R^2 - (i-0.5)^2 L^2}}{R} \right] \right\} - (j-0.5)L^2 \quad (80)$$

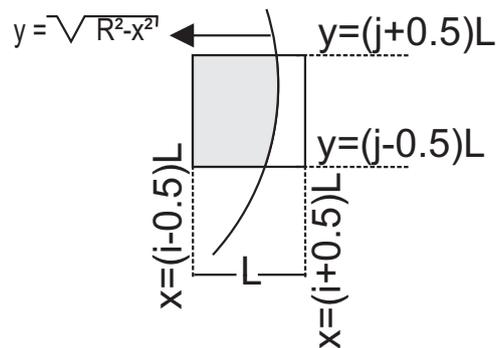


Figura 35 Célula do tipo A_2 rotacionada em 90°

A figura 35 é do tipo A_2 rotacionada em 90° , e sua área, aplicando o mesmo cálculo é:

$$A_2 = \frac{R^2}{2} \left\{ \arcsen \left[\frac{(j+0.5)L}{R} \right] - \arcsen \left[\frac{(j-0.5)L}{R} \right] + \left[\frac{(j+0.5)L}{R} \right] \right. \\ \left. \times \left[\frac{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}{R} \right] - \left[\frac{(j-0.5)L}{R} \right] \left[\frac{\sqrt{R^2 - (j-0.5)^2 L^2}}{R} \right] \right\} - (i-0.5)L^2 \quad (81)$$

A.4 Área de célula periférica do tipo A_3

Para células cujas coordenadas de três de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_3 , com três vértices dentro do raio do reator.

A ordenada de P é dada pela equação da circunferência:

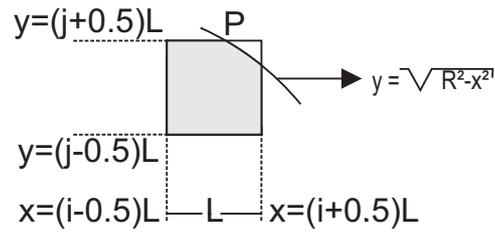


Figura 36 Célula do tipo A_3 delimitada pela circunferência $y = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$\begin{aligned} (j+0.5)L &= \sqrt{R^2 - x_p^2} \\ \Rightarrow x_p &= \sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2} \end{aligned}$$

A área em branco A_{branca} da figura 36 é calculada pela relação a seguir:

$$A_{branca} = \int_{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}^{(i+0.5)L} \left[(j+0.5)L - \sqrt{R^2 - x^2} \right] dx \quad (82)$$

A área A_3 da figura 36 é calculada pela relação a seguir:

$$A_3 = L^2 - A_{branca} = L^2 - \int_{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}^{(i+0.5)L} \left[(j+0.5)L - \sqrt{R^2 - x^2} \right] dx = L^2 (I_3 - I_1) \Big|_{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}^{(i+0.5)L} \quad (83)$$

Para a primeira integral da equação (83):

$$\begin{aligned} I_3 &= \int (j+0.5)L dx \\ \Rightarrow I_3 &= (j+0.5)Lx \end{aligned} \quad (84)$$

Devido à substituição de variáveis feita para I_1 , tem-se:

$$x_P = \sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2} \Rightarrow \theta_{inf} = \arcsen \left[\frac{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}{R} \right]$$

$$(i+0.5)L \Rightarrow \theta_{sup} = \arcsen \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right]$$

Substituindo-se os limites anteriores na equação (83), obtém-se:

$$A_3 = L^2 - (j+0.5)L [(i+0.5)L - R^2 - (j+0.5)^2 L^2] + \frac{R^2}{2} \left\{ \arcsen \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right] \right.$$

$$- \arcsen \left[\frac{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}{R} \right] + \left[\frac{(i+0.5)L}{R} \right] \left[\frac{\sqrt{R^2 - (i+0.5)^2 L^2}}{R} \right]$$

$$\left. - \left[\frac{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}{R} \right] \left[\frac{(j+0.5)L}{R} \right] \right\} \quad (85)$$

A.5 Área de célula do tipo A_4

Para células cujas coordenadas de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_4 , com todos os vértices dentro do raio do reator. Essas áreas possuem fator área unitário.

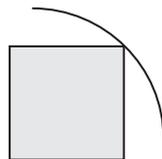


Figura 37 Célula do tipo A_4

Cálculos dos centróides das células

O método das fatias será usado a seguir para determinarmos as coordenadas do centróide.

B.1 Centróide de célula do tipo A_0

Para células cujas coordenadas de seus quatro vértices não satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_0 , com nenhum vértice dentro do raio do reator. Essas áreas possuem seu centróide como as coordenadas do centro da célula.

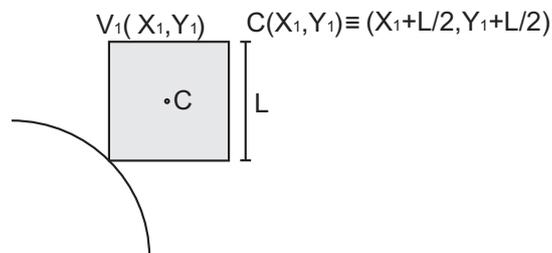


Figura 38 Célula do tipo A_0

B.2 Centróide de célula periférica do tipo A_1

Para células cujas coordenadas de apenas um de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_1 , com apenas um vértice dentro do raio do reator.

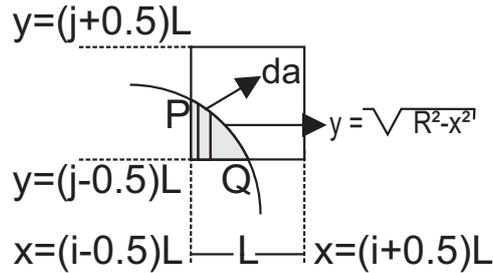


Figura 39 Célula do tipo A_1 , para cálculo do centróide

O da na figura anterior é dado por $[\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L]dx$. O ponto P tem abscissa $x_P = (i - 0.5)L$. A abscissa do ponto Q é dada pela equação da circunferência:

$$\begin{aligned} (j - 0.5)L &= \sqrt{R^2 - x_Q^2} \\ \Rightarrow x_Q &= \sqrt{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2} \end{aligned}$$

A ordenada do centróide da área A_1 da figura 39 é calculada pela relação a seguir:

$$S_x = A_1 \bar{y} = \int y_{da} da = \int \left[\frac{\sqrt{R^2 - x^2} + (j - 0.5)L}{2} \right] [\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L] dx$$

Na equação anterior y_{da} é a ordenada do centróide do elemento de área da , e \bar{y} , a ordenada do centróide da área A_1 , região em cinza na figura 39. Aplicando-se os limites de integração tem-se:

$$S_x = \int_{(i-0.5)L}^{\sqrt{R^2 - (j-0.5)^2 L^2}} \frac{[(R^2 - x^2) - (j-0.5)^2 L^2]}{2} dx$$

$$S_x = \left\{ \left[\frac{R^2 - (j-0.5)^2 L^2}{2} x \right] - \frac{x^3}{6} \right\} \Big|_{\sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2}}^{(i-0.5)L}$$

Assim, obtém-se o momento em relação ao eixo x :

$$S_x = \frac{1}{3} [R^2 - (j-0.5)^2 L^2]^{3/2} - \frac{1}{2} [R^2 - (j-0.5)^2 L^2] (i-0.5)L + \frac{(i-0.5)^3 L^3}{6} \quad (86)$$

Obtém-se a ordenada do centróide para área A_1 pela razão a seguir:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A_1}$$

Analogamente, $\bar{x} = \frac{S_y}{A_1}$, sendo:

$$S_y = \frac{1}{3} [R^2 - (i-0.5)^2 L^2]^{3/2} - \frac{1}{2} [R^2 - (j-0.5)^2 L^2] (j-0.5)L - \frac{(j-0.5)^3 L^3}{3} + \frac{1}{2} (i-0.5)^2 (j-0.5)L^3 \quad (87)$$

B.3 Centróide de célula periférica do tipo A_2

Para células cujas coordenadas de apenas dois de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_2 , com apenas dois vértices dentro do raio do reator.

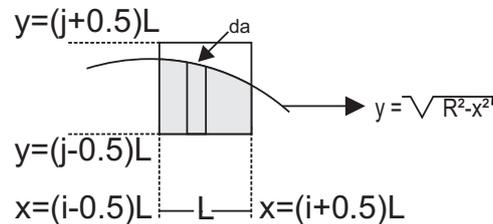


Figura 40 Célula do tipo A_2 , para cálculo do centróide

O da na figura anterior é dado por $[\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L]dx$.

A ordenada do centróide da área A_2 da figura 40 é calculada pela relação abaixo:

$$S_x = A_2 \bar{y} = \int y_{da} da = \int \left[\frac{\sqrt{R^2 - x^2} + (j - 0.5)L}{2} \right] [\sqrt{R^2 - x^2} - (j - 0.5)L] dx$$

Na equação anterior, y_{da} é a ordenada do centróide do elemento de área da , e \bar{y} , a ordenada do centróide da área A_2 , região em cinza na figura 40. Aplicando-se os limites de integração, tem-se:

$$S_x = \int_{(i-0.5)L}^{(i+0.5)L} \frac{[(R^2 - x^2) - (j - 0.5)^2 L^2]}{2} dx$$

$$S_x = \left\{ \left[\frac{R^2 - (j - 0.5)^2 L^2}{2} x \right] - \frac{x^3}{6} \right\} \Big|_{(i-0.5)L}^{(i+0.5)L}$$

Assim, obtém-se o momento em relação ao eixo x :

$$S_x = \frac{1}{2} [R^2 - (j - 0.5)^2 L^2] L - \frac{(i + 0.5)^3 L^3}{6} + \frac{(i - 0.5)^3 L^3}{6} \quad (88)$$

Obtém-se a ordenada do centróide para área A_2 pela razão a seguir:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A_2}$$

Analogamente, $\bar{x} = \frac{S_y}{A_2}$, sendo:

$$S_y = \frac{1}{3} [R^2 - (i - 0.5)^2 L^2]^{3/2} - \frac{1}{3} [R^2 - (i + 0.5)^2 L^2]^{3/2} + \frac{(j - 0.5)}{2} L^3 [(i - 0.5)^2 - (i + 0.5)^2] \quad (89)$$

A figura 41 é do tipo A_2 rotacionada em 90° .

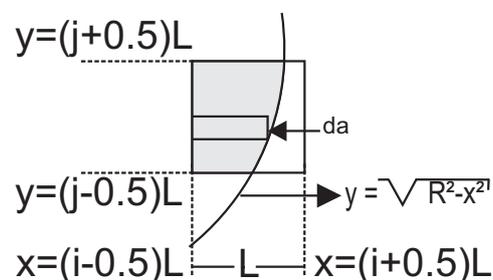


Figura 41 Célula do tipo A_2 rotacionada em 90° , para cálculo do centróide

Suas coordenadas são dadas por:

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A_2} \quad (90)$$

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A_2} \quad (91)$$

Pelo método das fatias, os seus respectivos momentos em relação aos eixos x e y são:

$$S_x = -\frac{1}{3} [R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{3/2} + \frac{1}{3} [R^2 - (j-0.5)^2 L^2]^{3/2} + \frac{(i-0.5)}{2} L^3 [(j-0.5)^2 - (j+0.5)^2] \quad (92)$$

$$S_y = \frac{1}{2} [R^2 - (i-0.5)^2 L^2] (j+0.5)L - \frac{(j+0.5)^3 L^3}{6} - \frac{1}{2} [R^2 - (i-0.5)^2 L^2] (j-0.5)L + \frac{(j-0.5)^3 L^3}{6} \quad (93)$$

B.4 Centróide de célula periférica do tipo A_3

Para células cujas coordenadas de três de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_3 , com três vértices dentro do raio do reator.

A abcissa de P é dada pela equação da circunferência:

$$\begin{aligned} (j+0.5)L &= \sqrt{R^2 - x_p^2} \\ \Rightarrow x_p &= \sqrt{R^2 - (j+0.5)^2 L^2} \end{aligned}$$

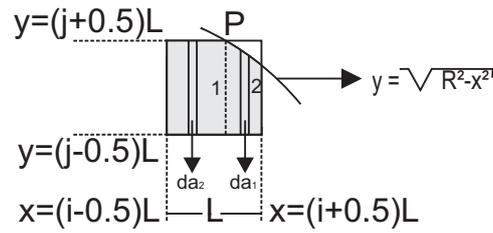


Figura 42 Célula do tipo A_3 , para cálculo do centróide

Os momentos em relação a x e y , são calculados pela soma dos momentos em relação a x e y das regiões 1 e 2 separadas pela linha tracejada na figura 42.

$$S_x = S_x^1 + S_x^2$$

$$S_y = S_y^1 + S_y^2$$

Assim, o momento em relação a x para região 1 é:

$$S_x^1 = \int_{(i-0.5)L}^{x_p} y da_1 da_1 = \int_{(i-0.5)L}^{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}} \frac{[(j+0.5)L + (j-0.5)L]}{2} [(j+0.5)L - (j-0.5)L] dx$$

$$S_x^1 = jL^2 \left\{ [R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2} - (i-0.5)L \right\} \quad (94)$$

Assim, o momento em relação a x para região 2 é:

$$S_x^2 = \int_{x_p}^{(i+0.5)L} y da_2 da_2 = \int_{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}}^{(i+0.5)L} \frac{[\sqrt{R^2 - x^2} + (j-0.5)L]}{2} [\sqrt{R^2 - x^2} - (j-0.5)L] dx$$

$$S_x^2 = \int_{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}}^{(i+0.5)L} \frac{[(R^2 - x^2) - (j - 0.5)^2 L^2]}{2} dx$$

Aplicando-se os limites ao resultado da integral, tem-se:

$$S_x^2 = \frac{[R^2 - (j - 0.5)^2 L^2] x}{2} - \frac{x^3}{6} \Big|_{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}}^{(i+0.5)L}$$

$$S_x^2 = \frac{[R^2 - (j - 0.5)^2 L^2] (i - 0.5)L}{2} - \frac{1}{6} (i + 0.5)^3 L^3 - \frac{1}{2} [R^2 - (j - 0.5)^2 L^2] [R^2 - (j + 0.5)^2 L^2]^{1/2} + \frac{1}{6} [R^2 - (j + 0.5)^2 L^2]^{3/2} \quad (95)$$

Assim, tem-se que o momento em relação a x é a soma dos respectivos momentos em relação às regiões 1 e 2, dados nas equações (94) e (99).

$$S_x = jL^2 \left\{ [R^2 - (j + 0.5)^2 L^2]^{1/2} - (i - 0.5)L \right\} + \frac{[R^2 - (j - 0.5)^2 L^2] (i - 0.5)L}{2} - \frac{1}{6} (i + 0.5)^3 L^3 - \frac{1}{2} [R^2 - (j - 0.5)^2 L^2] [R^2 - (j + 0.5)^2 L^2]^{1/2} + \frac{1}{6} [R^2 - (j + 0.5)^2 L^2]^{3/2} \quad (96)$$

Assim, o momento em relação a y para região 1 é:

$$S_y^1 = \int_{(i-0.5)L}^{x_p} x_{da_2} da_2 = \int_{(i-0.5)L}^{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}} x [(j + 0.5)L - (j - 0.5)L] dx$$

$$S_y^1 = \frac{L}{2} \{ [R^2 - (j+0.5)^2 L^2] - (i-0.5)^2 L^2 \} \quad (97)$$

Assim, o momento em relação a x para região 2 é:

$$S_y^2 = \int_{x_p}^{(i+0.5)L} x_{da_2} da_2 = \int_{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}}^{(i+0.5)L} x \frac{[\sqrt{R^2 - x^2} - (j-0.5)L]}{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}} dx$$

Aplicando-se os limites ao resultado da integral, tem-se:

$$S_y^2 = -\frac{[(R^2 - x^2)^{3/2}]}{3} - (j-0.5)L \frac{x^2}{2} \Big|_{[R^2 - (j+0.5)^2 L^2]^{1/2}}^{(i+0.5)L}$$

$$S_y^2 = -\frac{[R^2 - (i+0.5)^2 L^2]^{3/2}}{3} - \frac{1}{2}(j-0.5)(i+0.5)^2 L^3 + \frac{1}{3}(j+0.5)^3 L^3 + (j-0.5)\frac{L}{2} [R^2 - (j+0.5)^2 L^2] \quad (98)$$

Assim, tem-se que o momento em relação a y é a soma dos respectivos momentos em relação às regiões 1 e 2, dados nas equações (97) e (98).

$$S_y = \frac{L}{2} \{ [R^2 - (j+0.5)^2 L^2] - (i-0.5)^2 L^2 \} - \frac{[R^2 - (i+0.5)^2 L^2]^{3/2}}{3} - \frac{1}{2}(j-0.5)(i+0.5)^2 L^3 + \frac{1}{3}(j+0.5)^3 L^3 + (j-0.5)\frac{L}{2} [R^2 - (j+0.5)^2 L^2] \quad (99)$$

B.5 Centróide de célula do tipo A_4

Para células cujas coordenadas de seus quatro vértices satisfazem a relação a seguir:

$$x^2 + y^2 < R^2$$

Diz-se ser esta célula do tipo A_4 , com todos os vértices dentro do raio do reator. Essas áreas possuem seu centróide como as coordenadas do centro da célula.

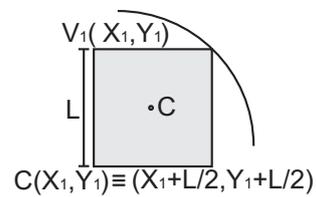


Figura 43 Célula do tipo A_4 , cujo centróide coincide com o centro geométrico

Funções especiais

C.1 Funções de Bessel

Na resolução da equação difusão para o reator cilíndrico infinito depara-se com a equação de Bessel:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dx} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)\phi = 0 \quad (100)$$

Quando se tem n não inteiro ou zero, as soluções independentes são:

$$\phi(x) = \begin{cases} J_n(\alpha x) \\ J_{-n}(\alpha x) \end{cases}$$

Se n é zero ou um inteiro, essas funções não são independentes e as duas soluções são:

$$\phi(x) = \begin{cases} J_n(\alpha x) \\ Y_n(\alpha x) \end{cases}$$

As funções J_n e Y_n são conhecidas como *funções de Bessel de primeiro e segundo tipo*, respectivamente.

Para as condições de contorno específicas do problema do reator cilíndrico infinito, encontra-se a distribuição de fluxo (51) em função de J_0 .

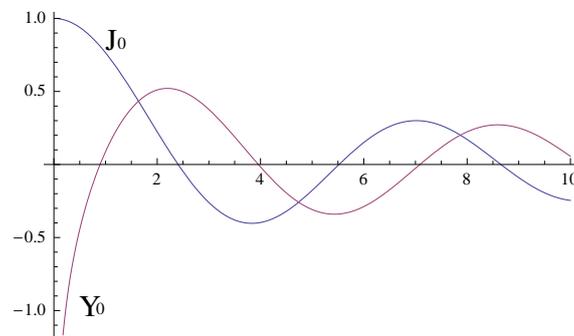


Figura 44 Comportamento da função J_0 e da função Y_0

C.2 Funções de Bessel modificadas

Na resolução da equação (4), no sistema de coordenadas cilíndricas, deparou-se com a equação modificada de Bessel:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\phi}{dx} - \left(\alpha^2 + \frac{n^2}{x^2}\right)\phi = 0 \quad (101)$$

Quando se tem n não inteiro ou zero, as soluções independentes são:

$$\phi(x) = \begin{cases} I_n(\alpha x) \\ I_{-n}(\alpha x) \end{cases}$$

Se n é zero ou um inteiro, essas funções não são independentes e as duas soluções são:

$$\phi(x) = \begin{cases} I_n(\alpha x) \\ K_n(\alpha x) \end{cases}$$

As funções I_n e K_n são conhecidas como *funções de Bessel modificadas de primeiro e segundo tipo*, respectivamente.

Para as condições de contorno específicas do problema da fonte linear num meio infinito, encontra-se a solução da equação (4) em função de K_0 .

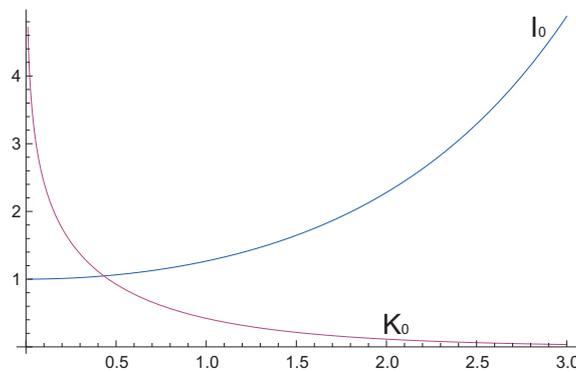


Figura 45 Comportamento da função I_0 e da função K_0