

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Sociais Aplicadas
Curso de Mestrado em Administração

**Avaliação da Estimativa do Risco de Mercado pela Metodologia
Value at Risk (VaR) com Simulação de Monte Carlo**

Fabio Luiz de Oliveira Bezerra

Dissertação apresentada
como requisito complementar para
obtenção do grau de Mestre em
Administração.

Recife, 2001

CLASSIFICAÇÃO DE ACESSO A MONOGRAFIA DE DISSERTAÇÃO

Considerando a natureza das informações e compromissos com suas fontes, o acesso a monografias do Mestrado em Administração da Universidade Federal de Pernambuco é definido em três graus:

- “Grau 1”: livre (sem prejuízo das referências ordinárias em citações diretas e indiretas);
- “Grau 2”: com vedação a cópias, no todo ou em parte, sendo, em consequência, restrita a consulta em ambientes de biblioteca com saída controlada;
- “Grau 3”: apenas com autorização expressa do autor, por escrito, devendo, por isso, o texto, se confiado a bibliotecas que assegurem a restrição, ser mantido em local sob chave ou custódia.

A classificação desta monografia se encontra, abaixo, definida por seu autor.

Solicita-se aos depositários e usuários sua fiel observância. A fim de que se preservem as condições éticas e operacionais da pesquisa científica na área da administração.

Título da Monografia: Avaliação da Estimativa do Risco de Mercado pela Metodologia
Value at Risk (VaR) com Simulação de Monte Carlo

Nome do Autor: Fabio Luiz de Oliveira Bezerra

Data da Aprovação: 15 de fevereiro de 2001

Classificação, conforme especificação acima:

Grau 1 ☒

Grau 2 ☐

Grau 3 ☐

Local e data:

Assinatura do autor

Agradecimentos

Ao orientador, Prof. Dr. Charles Carmona, pela dedicação com que transmitiu seus conhecimentos, que extrapolaram, muitas vezes, as fronteiras acadêmicas.

Ao Curso de Mestrado em Administração da Universidade Federal de Pernambuco, pela estrutura oferecida.

Ao amigo, Prof. Dr. Nilson Campos, pela colaboração no desenvolvimento do método de Monte Carlo.

À bibliotecária Berta, pela relevante ajuda nas pesquisas bibliográficas.

À Economática e à Dinheironet.com.Br, pela disponibilização dos dados utilizados neste trabalho.

À Divisão de Arrecadação do INSS, em Recife, pelo apoio recebido na realização deste projeto.

Ao tio Luís, pelo incentivo recebido ao longo desses anos.

À Bebê, por quem tenho imensa gratidão pelo acompanhamento constante de meus estudos.

Aos meus irmãos, Valéria, Neto, Daniel e Ana Paula, pelo carinho e amizade.

Aos meus pais, Socorro e Bismarck, pelo amor e ternura.

A Deus, pela paz e tranquilidade.

Ao meu amor, Luciana.

Resumo

Este trabalho tem o intuito de avaliar a capacidade da abordagem *Value at Risk* com simulação de Monte Carlo (SMC), na previsão do risco de mercado da ação da Petrobrás (PETR4) e das opções de compra da PETR4 (PETRJ39, PETRH6, PETRH5). Compara-se a performance da SMC com os métodos denominados paramétricos: para a carteira de ações, considera-se o modelo do desvio padrão, e, para a carteira de opções, utiliza-se as aproximações Delta e Delta-Gama.

Sabendo que a exatidão da estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo reside no modelo de precificação do valor da carteira, analisam-se os seguintes modelos: o de Black & Scholes (SMC Univariada), o de Hull & White, que inclui volatilidade estocástica (SMC Bivariada), e, por último, a inclusão da taxa de juros também estocástica através do modelo de Rendleman e Bartter (SMC Trivariada).

As evidências empíricas sugerem que a estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo supera a dos métodos paramétricos. Especificamente quando se refere às opções, a performance da SMC é ainda melhor, devido a sua capacidade de capturar os efeitos da não-linearidade desses ativos financeiros.

Abstract

This study investigates the performance of the Value at Risk approach, applying Monte Carlo simulation (SMC), on Petrobrás stocks (PETR4) and PETR4 options (PETRJ39, PETRH6, PETRH5). SMC was compared with the parametric methods considering the standard deviation model for stocks, and Delta and Delta-Gama approximations for options. This simulation was based in three models: Black & Scholes (SMC Univariate); Hull & White, which includes stochastic volatility (SMC Bivariate), and a model with stochastic interest rate by Rendleman and Bartter's process (SMC Trivariate).

The empirical results show that Monte Carlo simulation overcomes the parametric methods. For PETR4 options, the SMC performance is better, due to the ability to capture their non-linearity.

Sumário

1 Introdução	9
1.1 Apresentação do tema	9
1.2 Problema de pesquisa	12
1.3 Objetivos da pesquisa	13
1.4 Justificativa e delimitação do estudo	15
2 Referencial teórico	17
2.1 Risco	17
2.2 VaR - <i>Value at Risk</i>	19
2.3 Modelos de precificação de opções	25
2.4 Simulação de Monte Carlo	30
2.4.1 Gerando números aleatórios	35
2.4.2 Seqüências determinísticas de baixa discrepância	37
2.5 Modelos de estimação da volatilidade	40
2.5.1 Volatilidade de preço	41
2.5.2 Volatilidade implícita	45
2.6 Critérios de avaliação dos modelos de VaR	48
2.7 Evidências empíricas	51
3 Metodologia	59
3.1 Hipóteses	59
3.2 Dados	60
3.3 Retornos	61
3.4 Valor de mercado da carteira	63
3.5 VaR - simulação de Monte Carlo	65
3.6 Geradores de números aleatórios	67
3.7 VaR paramétrico	68
3.8 Horizonte de tempo e significância	71
4 Resultados empíricos	73
4.1 Pseudo-aleatórios <i>versus</i> quase-aleatórios	75
4.2 SMC <i>versus</i> métodos paramétricos	81
5 Conclusões	89
Referências bibliográficas	93
Apêndices	97
Anexos	104

1

Introdução

1.1 Apresentação do tema

Os elevados prejuízos sofridos por bancos como Daiwa e Barings e, aqui no Brasil, mais recentemente, pelos Bancos Garantia, Marka, Boa Vista e FonteCindam têm revelado a ineficiência do gerenciamento do risco nas instituições financeiras e, também, a precária supervisão dos órgãos reguladores.

Perdas desse tipo, decorrentes de variações de fatores de risco financeiros, não são exclusividade de instituições financeiras. O Metallgesellschaft, o 14º maior conglomerado industrial alemão que empregava 58.000 trabalhadores, quase chegou à falência, devido a perdas de cerca de 1,3 bilhões de dólares em sua subsidiária norte-americana, a MG Refining & Marketing (MGRM), em contratos nos mercados futuros de óleo combustível.

Os órgãos reguladores dos principais países, em diversas oportunidades, estabeleceram regras para controle do risco, visando à proteção do sistema financeiro. O

Comitê de Basileia¹ emitiu, em 1988, uma regulamentação específica para o controle de riscos de crédito, na qual estabelecia limites mínimos de capital para as instituições financeiras baseados na qualidade dos seus empréstimos. Esta regulamentação, no entanto, não contemplava regras para a incorporação de riscos de mercado, ou seja, perdas potenciais devidas às alterações nos valores dos fatores de risco como, por exemplo, preço de ativos, taxa de câmbio e taxa de juros, aos quais estão expostas as carteiras das instituições financeiras.

O risco de mercado tem estreita ligação com o risco de crédito, uma vez que perdas decorrentes das variações de preços de variáveis financeiras podem implicar falta de recursos para o pagamento de compromissos por parte dos participantes do mercado. Com o aumento das operações de derivativos financeiros, a interligação entre o risco de crédito e o risco de mercado tornou-se mais intensa.

O Comitê de Basileia emitiu, em 1995, normas contemplando o controle e a divulgação de informações de risco de mercado, pelas quais as instituições financeiras deverão manter capital próprio mínimo de acordo com o risco de crédito de suas contrapartes e, também, conforme o risco de mercado assumido. O objetivo destas normas é estabelecer um vínculo entre o risco incorrido e a provisão necessária para a cobertura de eventuais resultados adversos. Ademais, foi estabelecido que a medida do risco de mercado assumido, ou seja, a perda potencial devido às flutuações de fatores de risco de mercado, deveria ser calculada através da técnica de avaliação do risco conhecida como *Value at Risk* (VaR). Jorion (2000) estabelece uma definição formal para tal medida: “o VaR mede a pior expectativa de perda durante um certo período de tempo, sob condições normais de mercado e com um dado nível de confiança”.

¹ É formado por representantes dos Bancos Centrais e autoridades do grupo dos 10 países, G-10 (Bélgica, Canadá, França, Alemanha, Itália, Japão, Holanda, Suíça, Reino Unido, EUA) e de Luxemburgo.

Por outro lado, as instituições financeiras vêm desenvolvendo seus próprios modelos de controle de riscos de mercado. Através do aprimoramento de seus sistemas de gestão de risco, as instituições estão obtendo uma visão mais precisa dos riscos assumidos e tomando melhores decisões, considerando a relação risco e retorno.

A abordagem *Value at Risk* tem sido a mais utilizada no gerenciamento de risco e tem-se tornado padrão na indústria bancária. Uma grande vantagem da estimativa do risco através do VaR consiste na capacidade de mensurar e agregar diversas posições de risco de toda a instituição em um único valor. Isso torna a compreensão do nível de risco da empresa muito mais fácil para seus diretores, acionistas e investidores.

Segundo Jorion (2000), o VaR é útil para uma série de propósitos:

- a) fornecimento de informações dos riscos de uma operação, úteis para a alta gerência e acionistas;
- b) definição de limites para as operações, ajudando a decidir aonde alocar o capital disponível;
- c) estabelecimento de uma associação entre o desempenho dos operadores e o risco por eles assumidos.

Apesar da metodologia do VaR ter surgido visando à aplicação em instituições financeiras, ela também pode ser utilizada em outros tipos de empresas, para medir os seus riscos em uma larga variedade de casos:

- para medir os riscos das empresas devido às flutuações das taxas de custo de oportunidade;
- para medir a exposição ao risco cambial de empresas que, por terem fornecedores, clientes ou subsidiárias em outros países, possuem fluxo de caixa em diversos tipos de moeda;

Muitas empresas industriais como, por exemplo, a Siemens (Priest, 1997), vêm aplicando o conceito do VaR para monitorar os riscos em suas obrigações financeiras e aplicações em derivativos de proteção, em função das variações das taxas cambiais e das taxas de juros. Utiliza-se também a metodologia do VaR para calcular o risco global da empresa. Neste caso, a empresa é considerada como se fosse uma grande carteira, cujos contratos são as unidades operacionais, as quais estão expostas ao risco de mercado, devido à exposição a uma série de fatores de risco financeiro, como os preços de matérias-primas, as taxas de juros e as taxas cambiais.

Com a ajuda do VaR, as empresas não-financeiras podem minimizar seus riscos financeiros, através da identificação dos pontos que propiciam maior exposição ao risco, e, então, podem se proteger, através da utilização de derivativos ou outros mecanismos. Assim, podem se concentrar na administração da essência de seus negócios, que são os produtos e serviços oferecidos a seus clientes.

1.2 Problema de pesquisa

Embora a abordagem do VaR para a estimativa do risco de mercado seja de fácil entendimento, existem diversas metodologias para sua obtenção, cada uma apoiando-se em suposições diferentes quanto às características dos fatores de risco de mercado e adequando-se melhor a diferentes perfis de composição da carteira.

As metodologias possuem diferentes hipóteses e, portanto, os valores de VaR obtidos segundo cada método apresentarão provavelmente valores distintos. As estimativas do VaR estarão, a priori, identificando riscos potenciais que deverão ser controlados, e,

embora o risco real de uma posição seja independente da metodologia empregada, estimativas diferentes levarão à adoção de medidas diferenciadas para controle de um mesmo risco. Assim, a identificação da metodologia que mais se adapta às características da carteira da instituição financeira e dos fatores de risco a que está exposta é de grande relevância por permitir um controle mais eficiente sobre os verdadeiros riscos assumidos.

É conveniente, portanto, realizar uma análise de acuidade das metodologias para o cálculo do VaR, comparando-se a estimativa de perda potencial de uma carteira medida pelo VaR com a perda efetiva ou real observada após a passagem do tempo.

Diante deste contexto, formulam-se as seguintes perguntas de pesquisa:

- A estimativa do *Value at Risk* (VaR) obtida pela simulação de Monte Carlo (SMC) é adequada para a avaliação do risco de mercado das ações e das opções de compra da Petrobrás?
- A estimativa *Value at Risk* (VaR) obtida pela simulação de Monte Carlo (SMC) tem melhor desempenho do que a obtida pelo método paramétrico na avaliação do risco de mercado das ações e opções especificadas acima?

1.3 Objetivos da pesquisa

Este trabalho visa a atingir o seguinte objetivo geral:

- Avaliar o desempenho do método VaR com simulação de Monte Carlo no cálculo do risco de mercado das ações e das opções de compra da Petrobrás S/A.

Para atingir este objetivo principal, delineiam-se os seguintes objetivos específicos:

- Avaliar o desempenho da simulação de Monte Carlo na estimativa do VaR quando os números aleatórios são gerados pela sequência de Sobol e comparar com a estimativa obtida com as sequências de números pseudo-aleatórios.
- Para a carteira de ações:
 - Modelar o comportamento do preço da ação por um processo estocástico de Itô.
 - Comparar o VaR obtido pela simulação de Monte Carlo e pelo método paramétrico do desvio padrão.
- Para a carteira de opções:
 - Simular a variação na carteira utilizando o modelo de precificação de Black & Scholes, onde apenas o preço da ação segue um processo estocástico (SMC Univariada).
 - Simular a variação na carteira utilizando o modelo de Hull & White, onde, além do preço da ação, a volatilidade também segue um processo estocástico (SMC Bivariada).
 - Simular a variação da carteira utilizando o modelo de Hull & White com a taxa de juros seguindo o modelo estocástico de Rendleman e Bartter (SMC Trivariada).
 - Comparar a estimativa do VaR pelos três modelos de precificação acima com a obtida pelas aproximações Delta e Delta-Gama.
- Aplicar para a avaliação da estimativa de VaR o procedimento de *backtesting* (proposto pelo Comitê de Basiléia) e o teste de hipótese para proporções desenvolvido por Kupiec (1995).

1.4 Justificativa e delimitação do estudo

Diante da gama de metodologias utilizadas para o controle do risco de mercado ou sistêmico por parte das instituições financeiras, tornou-se um grande desafio para os bancos centrais e também para as próprias instituições avaliar os modelos de gerenciamento para qualificá-los como adequados ou não.

Conforme destacam Hull e White (1987), os modelos matemáticos e estatísticos mais utilizados para o cálculo do VaR (metodologia paramétrica) admitem que retornos diários das variáveis de mercado (preço de ativos, taxas de juros, câmbio) seguem uma distribuição de probabilidade do tipo normal. Na prática, as séries de retornos diários dessas variáveis apresentam assimetria e significativos graus de curtose. Neste último, significa que eventos extremos ocorrem com uma probabilidade maior do que aquela prevista por uma curva normal. Portanto, os valores calculados por essa metodologia podem estar subestimando o verdadeiro risco embutido nas variáveis de mercado (Lemgruber, 1997).

Percebe-se, também, conforme evidenciam Almeida e Ghirardi (1999), que diferentes critérios de avaliação podem levar a diferentes resultados na análise do desempenho de um método de gerenciamento de riscos. Por exemplo, funções-objetivo, comumente utilizadas, procuram avaliar o desempenho ao longo de toda a curva de distribuição de resultados, em vez de avaliar os pontos críticos sob o enfoque do risco (caudas de distribuição), ficando impedidos de captar as deficiências do modelo.

Diante do exposto, faz-se necessária uma análise de acuidade das metodologias utilizadas, comparando-se a estimativa de perda potencial da instituição financeira medida pelo VaR com a perda efetiva ou real observada após a passagem do tempo.

A simulação de Monte Carlo é o método analítico mais abrangente para a mensuração de riscos financeiros. Jorion (2000) comenta que este método é capaz de

capturar grande variedade de riscos, inclusive de preço, de volatilidade e de crédito. Como destaca Duarte Jr. (1996b), os modelos de volatilidade estocástica necessitam de uma melhor análise acadêmica para se precisar sua adequação à dinâmica dos mercados financeiros.

No capítulo 2, a seguir, apresenta-se o referencial teórico utilizado para o desenvolvimento deste trabalho. No capítulo 3, tem-se a metodologia do trabalho, onde são delineados os modelos utilizados e os tratamentos dos dados realizados. No capítulo 4, procede-se à discussão dos resultados da investigação empírica. E, por fim, no capítulo 5, as conclusões deste trabalho e sugestões para pesquisas posteriores.

2

Referencial teórico

2.1 Risco

A quantificação do risco como variável financeira representa, ainda hoje, um dos grandes desafios para os pesquisadores de finanças. O modelo proposto no trabalho seminal de Harry Markowitz (1952), que deu origem à Moderna Teoria das Carteiras, é a base para os modelos de gestão de risco desenvolvidos desde então. Este modelo utiliza a variância dos retornos como uma medida significativa do risco de uma carteira, sob determinadas restrições. Além de introduzir uma medida de risco, ressalta-se a importância da diversificação de investimentos para a redução do risco (Markowitz, 1959).

O modelo de Markowitz é baseado em diversas hipóteses sobre o comportamento do investidor, entre as quais destacamos:

- a) os investidores consideram cada investimento alternativo como sendo representado por uma distribuição probabilística de retornos esperados em um determinado período;
- b) os investidores maximizam a utilidade esperada de um período, e suas curvas de utilidade demonstram utilidade marginal decrescente de riqueza (comportamento racional do investidor);

- c) os investidores estimam o risco de uma carteira com base na variabilidade dos retornos esperados;
- d) os investidores baseiam suas decisões, primariamente, nos níveis de retorno e risco esperados, de forma que suas curvas de utilidade são uma função somente do retorno esperado e da variância dos retornos;
- e) para um determinado nível de risco, os investidores preferem retornos maiores a retornos menores. Similarmente para um determinado nível de retorno esperado, os investidores preferem menor risco.

O modelo proposto por Markowitz não assume, explicitamente, nenhuma distribuição probabilística específica, muito embora sabe-se que, se a distribuição não for normal, a variância não será uma boa estimativa. Muitas metodologias foram desenvolvidas para o cálculo da volatilidade, ou seja o risco de mercado, assumindo ou não a hipótese da distribuição normal, e constata-se que não existe muita uniformidade no cálculo do risco de instituições financeiras. As metodologias para estimação do risco requerem conhecimentos sobre a mecânica dos mercados de interesse, alguma sofisticação matemática, sistemas computacionais e de informações confiáveis.

A elevada instabilidade dos mercados financeiros, motivada por fatores internos e externos às diversas economias, expressa-se através do fenômeno da heterocedasticidade dos retornos dos ativos negociados. A metodologia de variância condicionada, em alguns casos, pode captar tais variações.

O risco financeiro é um conceito multidimensional englobando quatro grandes grupos: risco de mercado, risco operacional, risco de crédito e risco legal. O risco de mercado reflete o comportamento do preço do ativo diante das condições de mercado. Esta pesquisa enfoca apenas o risco de mercado. Este tipo de risco resulta basicamente de

quatro fontes: risco de taxa de câmbio, risco de taxa de juros, risco dos preços de ações e risco de preços de *commodities*.

Há duas formas de medir o risco de mercado:

- a) Risco de mercado relativo. É uma medida do “deslocamento” dos rendimentos de uma carteira de investimentos em relação a um índice utilizado como *benchmark*;
- b) Risco de mercado absoluto. Medem-se as perdas de uma carteira de investimento sem qualquer relação a índices de mercado.

Para o cálculo do risco de mercado absoluto de uma carteira, podem ser usadas diferentes medidas, por exemplo: desvio padrão dos retornos passados (Markowitz, 1952), *downside risk* (média – momento parciais) dos retornos passados e *Value at Risk* (VaR).

2.2 VaR - *Value at Risk*

A abordagem atualmente mais utilizada para o cálculo do risco de mercado é o VaR – *Value at Risk*. VaR é uma medida da alteração máxima do valor de um ativo (ou carteira de ativos), com uma dada probabilidade, dentro de um horizonte de tempo pré-determinado.

Considerando-se VC_0 o valor da carteira no momento inicial e R a sua taxa esperada de retorno no final do horizonte de tempo, o valor esperado da carteira após o horizonte determinado será de $VC = VC_0(1 + R)$.

Jorion (1996) define VaR como a perda da carteira relativa ao seu valor esperado:

$$VaR = VC - VC^* = VC_0(R - R^*)$$

onde VC^* é o valor esperado mínimo admitido para a carteira referente ao nível de significância desejado, e R^* é o retorno associado a VC^* .

Em algumas situações, por exemplo quando há interesse em comparar modelos de VaR, é interessante calcular o VaR para o retorno da carteira:

$$VaR_{retorno} = R - R^*$$

O VaR pode ser definido como a perda absoluta da carteira, ou seja, relativa a zero ou sem referência com o valor esperado da carteira:

$$VaR = VC_0 - VC^* = -VC_0 R^*$$

Esta última forma é a comumente utilizada no meio acadêmico e de mercado, pois representa a perda real da carteira em relação ao momento em que está se medindo o VaR.

Para encontrar o valor mínimo esperado, necessita-se estabelecer um nível de confiança e conhecer a função de distribuição de probabilidade futura da carteira de ativos ou do retorno da carteira, respectivamente quando se calcula o VaR do valor da carteira ou de retorno. Considerando a função de distribuição de probabilidade do valor futuro da carteira, $f(x)$, a determinado nível de confiança, q , deseja-se descobrir a pior realização possível para a carteira, VC^* , tal que a probabilidade de exceder esse valor seja q :

$$q = \int_{VC^*}^{\infty} f(x) \cdot dx$$

ou tal que a probabilidade de um valor menor que VC^* , $p = P(x \leq VC^*)$, seja $1-q$:

$$1 - q = \int_{-\infty}^{VC^*} f(x) \cdot dx = P(x \leq VC^*) = p$$

Portanto, tem-se que $VC^* = F^{-1}(p)$, que corresponde ao valor do quantil de probabilidade p , onde F^{-1} é a função inversa de densidade de probabilidade. Daí:

$$VaR = VC_0 - VC^* = VC_0 - F^{-1}(p)$$

Se não há a função de distribuição de probabilidade analiticamente, deve-se proceder empiricamente à construção da distribuição do valor da carteira e calcular o quantil pela ordenação direta das frequências de ocorrências dos valores.

Como se vê, o VaR é obtido do quantil da função de distribuição de probabilidade da carteira, logo sendo aplicado a qualquer distribuição, seja ela normal ou não, discreta ou contínua, com cauda grossa ou fina.

Se a distribuição for normal, considerando μ e σ , respectivamente, média e desvio padrão, a função de distribuição de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, x \in \Re$$

A função de distribuição normal cumulativa de probabilidade é:

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^p e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Então, o quantil genérico p é a função inversa $\Phi^{-1}(p)$. Sabe-se que não é possível aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, porque não há função cuja derivada seja igual a $f(x)$. Fazem-se necessários métodos de integração numérica para resolver tal questão. Para a função normal padronizada, têm-se seus valores tabulados em livros estatísticos e pode-se derivar o VaR, o quantil, dos parâmetros estatísticos que caracterizam a distribuição normal, essencialmente a variância.

Para as distribuições normais, o VaR é dado por:

$$VaR = VC_0 \cdot \alpha \sigma \quad (2-1)$$

onde α é desvio normalizado para a significância selecionada, σ é o desvio padrão e VC_0 é o valor inicial da carteira do momento do cômputo do VaR.

A estimativa do VaR terá o horizonte determinado pela medida do desvio padrão, isto é, se o desvio padrão é calculado a uma base diária o VaR pela fórmula acima será uma estimativa diária. Para associar o VaR a outros horizontes de tempo diferentes da medida do desvio, deve-se utilizar a agregação no tempo do desvio padrão pela seguinte relação:

$$\sigma_T = \sigma\sqrt{T}, \text{ onde } T \text{ é o tempo em dias.}$$

Considere agora que a carteira possui vários fatores de risco. A função de distribuição de probabilidade da carteira é obtida a partir da distribuição dos fatores de risco ou variáveis financeiras aos quais está exposta a carteira.

Considerando-se que as variáveis aleatórias que representam os fatores de risco são dados por $X_1, \dots, X_d$, a função que representa o valor da carteira, que pode ser uma função perda ou modelo de precificação da carteira, será dada por $\eta = L(X_1, X_2, \dots, X_d)$. Denota-se F_L como a função de distribuição cumulativa de probabilidade da função perda, $F_L(l) = \Pr(\eta < l)$. Considerando G a função de distribuição multivariada das variáveis $X_1, \dots, X_d$, a função de distribuição cumulativa é:

$$F_L(l) = \Pr(L(X_1, \dots, X_d) < l) = \int_0^{l \in \mathbb{R}^d} [L(X_1, \dots, X_d)] dG(X_1, \dots, X_d) \quad (2-2)$$

O cálculo do VaR consiste, então, na estimativa do quantil: para um dado p , encontrar l_p tal que $F_L(l_p) = p$. Então VaR é dado por $l_p = F_L^{-1}(p)$. Portanto, para calcular o VaR é preciso aproximar a inversa da função de distribuição cumulativa de probabilidade da função de perda da carteira. O erro-padrão assintótico de l_p é $\sqrt{\frac{p(1-p)}{Tf(p)^2}}$, onde T é o tamanho da amostra e $f(\cdot)$ é a função de distribuição de probabilidade do valor da carteira.

Observe que, neste caso, foi definido a distribuição da perda da carteira e não o valor da carteira, de modo que o quantil já é o próprio VaR, não sendo necessário fazer a diferença com o valor inicial da carteira.

No cálculo do VaR, é necessário definir arbitrariamente um nível de significância e um período de tempo. A escolha do nível de significância é realizada de acordo com o propósito da utilização do VaR, conforme recomendam Beder (1995) e Jorion (2000). Se for para determinação de capital, a escolha depende do grau de aversão ao risco do administrador. Quanto mais avesso ao risco, menor deve ser o nível de significância, para que o capital alocado seja maior. Se a finalidade for a comparação de diferentes sistemas de risco, sob a hipótese de normalidade, o nível de significância não é muito relevante, pois o VaR pode ser diretamente transformado num outro nível de significância qualquer com a simples alteração do parâmetro da volatilidade.

Pela definição utilizada nesta seção, o cálculo do VaR envolve apenas um problema probabilístico, haja vista que supõe-se conhecer a distribuição de retornos da carteira. Na prática, no entanto, o cálculo do VaR envolve também um problema de inferência, pois a única informação disponível é a realização do processo estocástico gerador dos retornos.

Pelo que foi abordado, pode-se classificar em duas as formas de se estimar o VaR, quando se considera a distribuição de probabilidade dos fatores de risco:

- a) Métodos paramétricos. Quando se tenta adequar os resultados a uma distribuição conhecida parametrizada, como a normal, e calcula-se o VaR diretamente dos parâmetros que caracterizam as distribuições.
- b) Métodos não paramétricos. Quando o VaR é estimado pelo quantil amostral da distribuição empírica.

Intuitivamente, a abordagem paramétrica parece ser mais precisa, pois seus estimadores utilizam informações pertinentes à distribuição inteira, enquanto que o quantil utiliza apenas a ordenação de dados e as observações ao redor do valor estimado. No entanto, se as variáveis financeiras não se comportarem como a distribuição parametrizada, os resultados podem ser bastante distorcidos.

Em relação à abordagem das correlações entre os fatores de risco aos quais está exposto a carteira, pode-se agrupar as metodologias para cálculo do VaR em dois grandes grupos:

- Local valuation. A estimativa do VaR é feita para cada ativo e, posteriormente, obtém-se o VaR da carteira utilizando-se as correlações entre os ativos na forma de matriz. Um exemplo de método deste grupo é o Delta-Normal, conhecido também como analítico ou de matrizes de covariâncias.
- Full valuation. Monta-se a função de distribuição de probabilidade de perda da carteira a partir da simulação das variações dos fatores de risco e estima-se diretamente desta distribuição o VaR. Exemplos: simulação histórica e simulação de Monte Carlo.

A simulação histórica é similar à simulação de Monte Carlo, exceto no que diz respeito às mudanças nos valores dos fatores de risco, que não são simuladas por meio de modelos estocásticos e sim são retiradas aleatoriamente dos valores históricos. Esses dois métodos resolvem o problema de convexidade enfrentado pelo método analítico. No entanto, a simulação histórica apresenta o pressuposto de que o passado representa o futuro, ou seja, a distribuição dos fatores de risco é assumida como estacionária, o que não é muito realista com relação às evidências empíricas observadas das características das séries financeiras. Por outro lado, este método não depende de modelos de avaliação ou da estrutura estocástica subjacente ao mercado.

2.3 Modelos de precificação de opções

Para calcular o VaR de contratos não-lineares como, por exemplo, contratos de opções, torna-se fundamental determinar o modelo de precificação dos mesmos, que, subtraído do valor inicial da carteira, representa a função perda do valor da carteira.

Uma opção simples é um ativo que dá a seu detentor o direito de comprar/vender um outro ativo por um determinado preço K (preço de exercício) em um instante de tempo futuro T (data de vencimento). As opções podem ser de compra (*call*) ou de venda (*put*), conforme o direito de opção seja de comprar ou vender o ativo objeto.

Existe uma série de modelos matemáticos para o cálculo dos prêmios de opções. O modelo proposto por Black & Scholes (1973) – B&S – foi a primeira solução para a fórmula de equilíbrio geral na avaliação do prêmio de opções. Para o caso de opções do tipo européia, ou seja, aquelas opções que só podem ser exercidas na data do vencimento, sobre ativos que não distribuam dividendos, B&S apresentaram as seguintes fórmulas para a avaliação dos seus prêmios:

Para opção de compra:

$$c = S \cdot N(d) - K \cdot e^{-R \cdot (T-t)} \cdot N(d - \sigma \sqrt{T-t}) \quad (2-3)$$

Para opção de venda:

$$p = S \cdot N(-d) + K \cdot e^{-R \cdot (T-t)} \cdot N(\sigma \sqrt{T-t} - d)$$

onde:

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S}{K \cdot e^{-R \cdot (T-t)}}\right)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}} + \frac{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}{2}$$

c é o valor teórico de uma opção de compra;

p é o valor teórico de uma opção de venda;

S é o preço à vista do ativo objeto;

K é o preço de exercício da opção;

$T-t$ é a fração de tempo anual até o vencimento;

σ é a volatilidade expressa da forma decimal;

R é a taxa de juros livre de risco, na forma de capitalização contínua;

$N(.)$ é a função de distribuição cumulativa normal.

O modelo B&S parte do pressuposto de que o ativo objeto tem um comportamento estocástico contínuo, na forma de movimento geométrico *browniano*. Isto quer dizer que se assume que a distribuição probabilística dos preços do ativo objeto, em uma data futura, é log-normal e, por conseguinte, a distribuição probabilística das taxas de retorno calculadas de forma contínua e composta entre duas datas é normal. O preço da ação é a solução da seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw(t)$$

onde $S(0) = S_0 > 0$, $w(t)$ é um processo de Wiener, com tendência instantânea e desvio dados, respectivamente, por σ e μ .

O modelo também assume que a taxa de juros e a variância são constantes durante toda a vida da opção. Além destas, há ainda outras hipóteses inseridas no modelo de B&S:

- Não existem imperfeições de mercado como, por exemplo, custos de transação, impostos e restrições à venda a descoberto. Os títulos são perfeitamente divisíveis;
- Qualquer ativo pode ser comprado ou vendido em qualquer quantidade, inclusive a descoberto;

- Existe um ativo sem risco, e sua taxa de retorno é constante no tempo (taxa de juros);
- Não existem oportunidades de arbitragem sem risco;
- A negociação de ativos é contínua e o preço da ação-objeto obedece a um processo estocástico contínuo e estacionário, do tipo “processo de difusão”.

Por esta última razão, torna-se necessário, ao introduzir o valor da taxa de juros sem risco na fórmula de B&S, transformar sua forma discreta R_D (como é negociada no mercado) em contínua R_C (conforme está definida a taxa R), pela seguinte relação:

$$R_C = \ln(1 + R_D)$$

No mercado brasileiro, as opções de compra são do tipo americano, ou seja, podem ser exercidas em qualquer momento até sua data de vencimento. No entanto, é muito raro alguém exercer a opção de compra antes do seu vencimento, pois seria o caso de o investidor desembolsar um valor (para comprar o ativo-objeto, no preço de exercício da série da opção) algum tempo antes, quando poderia esperar a data de vencimento para realizar este mesmo desembolso. Em outras palavras, poderia deixar o dinheiro aplicado, rendendo juros, para pagar só na data limite, até mesmo para ver como estará o mercado na data do vencimento, se vale a pena exercer a opção (Hull, 2000).

Uma das razões para a enorme difusão do modelo B&S é a existência de uma solução analítica² do preço c como função dos parâmetros.

Há vários problemas na condução de pesquisas empíricas utilizando o modelo de B&S, na precificação de opções, segundo Hull (2000). O primeiro é que qualquer hipótese estatística a respeito de como precificar opções deve sustentar que:

- a fórmula de precificação está correta
- os mercados são eficientes

² Não é inteiramente correto, pois a distribuição normal padrão acumulada é aproximada numericamente.

O segundo problema é que a suposição de variância constante é uma simplificação inserida no modelo B&S, implicando a necessidade de mudar continuamente o parâmetro de volatilidade como forma de incorporar as inovações mais recentes ocorridas sobre o ativo, conforme destaca Engle (1993). Ademais, o fato de a volatilidade de preços da ação ser uma variável não-observável requer métodos precisos de estimação.

Um terceiro problema é certificar se as informações de preço da ação e de preço da opção estão sincronizadas. Por exemplo, se a opção for pouco negociada, não será adequado comparar seus preços de fechamento com os preços de fechamento da ação, isto porque, o preço de fechamento da opção poderá corresponder a um negócio às 13h e o da ação, a um negócio às 16h.

Um modelo alternativo ao B&S é o proposto por Hull e White (1987), no qual pressupõem-se as mesmas hipóteses de B&S, exceto a que se refere ao comportamento do preço e da volatilidade. Neste, o preço de uma ação assume um processo estocástico mais geral e a volatilidade é assumida como estocástica, da seguinte forma:

$$dS_t = \mu(S_t, \sigma_t, t)S_t dt + \sigma_t S_t dw(t)$$

$$dV_t = \phi(\sigma_t, t)V_t dt + \xi(\sigma_t, t)V_t dz(t)$$

onde $V_t = \sigma_t^2$ é a variância instantânea dos retornos, $w(t)$ e $z(t)$ são dois processos de Wiener independentes entre si, e S_t é o preço da ação no instante t .

Hull e White (1987) demonstram que, quando a volatilidade não é correlacionada com o preço da ação, pode-se escrever o valor de uma opção de compra européia em t como:

$$c(S_t, \sigma_t, t) = \int c_{BS}(\bar{V}) f(\bar{V} | \sigma_t^2) d\bar{V}$$

onde $c_{BS}(\bar{V})$ é a fórmula de B&S, $f(\cdot)$ é a função de densidade de probabilidade de $\bar{V}$, e $\bar{V}$ é o valor médio da taxa de variância definido como:

$$\bar{V} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds$$

Isto é, o preço da opção é a esperança condicional em t do preço B&S, utilizando-se o valor da integral acima como parâmetro de volatilidade. Pode-se usar uma aproximação do modelo de H&W que o torna tão prático como o de B&S, utilizando-se como parâmetro de volatilidade na fórmula de B&S a raiz quadrada da média das previsões da volatilidade ao quadrado até $T-t$ passos à frente (Duffie e Pan, 1997).

Considerar a taxa de juros determinística pode não ser tão realista, assim, o ideal seria relaxar esta hipótese e abrir a possibilidade de juros estocástico. Hull (2000) atesta que, em geral, a taxa de curto prazo é descrita, num modelo neutro ao risco, pelo processo de Itô, da seguinte forma:

$$dR = m(R)dt + s(R)dz$$

Assume-se que o desvio instantâneo $m(R)$ e a tendência $s(R)$ sejam funções de R , mas independentes do tempo. Esse modelo implica que todas as taxas se movem da mesma direção durante qualquer intervalo de tempo, mas não na mesma proporção.

No modelo de Rendleman e Bartter (1980), considera-se que $m(R) = \mu R$ e o $s(R) = \sigma R$, onde μ é a taxa de crescimento esperada e σ a volatilidade da taxa de juros. Há alguns fatos econômicos que levam a crer que as taxas de juros tenham tendência de reversão à média em longo prazo. Quando as taxas são altas, a economia tende a desacelerar-se, havendo menos demanda por recursos pelos tomadores de empréstimo, e, por conseguinte, as taxas caem. Quando as taxas estão baixas, tende a haver uma forte demanda por recursos e conseqüentemente elas sobem. Outros modelos, tais como os de

Vasicek³ ou Cox, Ingersoll e Ross⁴, incorporam características adicionais, como, por exemplo, a tendência de retorno à média.

2.4 Simulação de Monte Carlo

Para as distribuições de probabilidade, nas quais não há os valores da função de distribuição cumulativa de probabilidade em forma analítica ou pelo menos tabulados, necessita-se utilizar os métodos numéricos de integração, para o cálculo do quantil que representa o VaR. Uma das técnicas possíveis é o método de Monte Carlo. A aplicação mais comum do método de Monte Carlo é o cálculo de integrais, embora seja também utilizado para outras finalidades como, por exemplo, a resolução de equações.

Considera-se, primeiramente, a seguinte integral definida:

$$\theta = \int_a^b f(x)dx$$

Para encontrar o valor de θ , identifica-se uma variável Y aleatória com uma função de densidade de probabilidade $p(y)$ e uma função $g(\cdot)$ tal que $E(g(Y)) = \theta$. Ou seja:

$$E(g(Y)) = \int_a^b g(y)p(y)dy = \int_a^b f(y)dy = \theta$$

Em muitos casos, Y é retirada de uma função de densidade de probabilidade uniforme e $g(\cdot)$ é considerada como $f(\cdot)$. Assim temos: $\theta = (b-a)E(f(Y))$.

³ VASICEK, O. A. "An equilibrium characterization of the term structure", *Journal of Financial Economics*, n. 5, p. 177-188, 1977.

⁴ COX, J. C., INGERSOLL, J.E. e ROSS, S.A. "A theory of the term structure of interest rates", *Econometrica*, n. 53, p. 385-407, 1985.

O problema de calcular a integral torna-se um problema de estimativa da média, $E(f(Y))$. Um estimador para a média é dado pela fórmula: $\hat{\theta} = (b - a) \frac{\sum f(y_i)}{n}$ onde y_i são valores de uma amostra aleatória de tamanho n retirada da distribuição de probabilidade uniforme sob o intervalo $[a, b]$.

A variância dessa estimativa é dada por:

$$Var(\hat{\theta}) = (b - a)^2 \frac{\sum Var(f(y_i))}{n^2} = \frac{(b - a)^2}{n} Var(f(Y))$$

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{(b - a)^2}{n} \int_a^b \left(f(x) - \int_a^b f(t) dt \right)^2 dx$$

O desvio padrão está diretamente associado ao erro de convergência, e, da equação anterior, conclui-se que a ordem do erro é de $n^{-1/2}$.

Um estimador da variância é:

$$Var(\hat{\theta}) = \frac{(b - a)^2}{n - 1} \sum (f(y_i) - \hat{\theta})^2$$

Uma importante propriedade do desvio padrão da estimativa pelo método Monte Carlo é a independência com a dimensão da integral. Os erros normalmente são dependentes da dimensão d : $n^{\frac{-1}{2d}}$ (Gentle, 1998).

Se não dispuser da função analítica de distribuição de probabilidade, deve-se construir empiricamente tal função e calcular diretamente da mesma o quantil correspondente ao nível de significância desejado. Utilizam-se os passos abaixo para estimar o quantil da distribuição de probabilidade de perda da carteira pela simulação de Monte Carlo:

1. Gerar aleatoriamente n amostras de valores de uma distribuição multivariada de

$$X_1, \dots, X_d;$$

2. Para cada amostra de valores gerada, calcular os valores simulados da perda da carteira através da função perda L , obtendo-se $\eta_1, \dots, \eta_d$;
3. Construir empiricamente (uma amostra) a função de distribuição cumulativa, $\hat{F}_L$, da função perda L ;
4. Calcular o quantil amostral $\hat{l}_p$ tal que $p = \hat{F}_L(\hat{l}_p)$ e considerá-lo como estimador do quantil real. Se a distribuição do quantil amostral for normal, quando n tender ao infinito, o estimador $\hat{l}_p$ será o quantil real l_p e o desvio padrão $\frac{\sqrt{p(1-p)}}{f(l_p)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, onde f é a função de distribuição de probabilidade do valor da carteira.

Verifica-se que a metodologia de simulação de Monte Carlo para cálculo do VaR substitui o universo real dos valores dos fatores de risco por um universo teórico correspondente, para se obter uma amostra da população teórica mediante sucessivos números aleatórios. Basicamente, usam-se mudanças passadas de fatores de risco para gerar um modelo de equação para essas mudanças. Simula-se em seguida o comportamento dos fatores de risco no próximo período. Dados valores atuais e uma distribuição de valores artificiais que predizem valores futuros, o modelo deverá calcular um possível valor futuro para cada um de risco. Quando essa simulação é repetida um grande número de vezes, forma uma distribuição de possíveis valores futuros. Cada um desses valores tem a probabilidade determinada de ocorrência. Tendo como base a distribuição artificial é produzida uma distribuição das variáveis do modelo.

O método de Monte Carlo também é bastante utilizado na precificação de opções: simula-se as trajetórias dos fatores de risco até o prazo de vencimento da opção, aplica-se esses valores na função que representa o valor da opção e desconta até a data desejada a uma taxa de juros livre de risco.

O preço atual de uma opção de compra européia, considerando as hipóteses de B&S, é o valor esperado da opção numa situação de indiferença ao risco, descontado a uma taxa de juros livre de risco:

$$c_t = e^{-R(T-t)} E[g(S_{T-t})] \quad (2-4)$$

onde $T-t$ é o tempo até o vencimento da opção, S_t é o preço do ativo no tempo t , e $g(\cdot)$ é a função *pay-off* da opção e R é a taxa livre de risco. Por simplificação algébrica, supõe-se que $t=0$.

Num mundo neutro ao risco, $\ln S_T$ possui a seguinte distribuição de probabilidade:

$$\ln S_T \sim \phi \left[\ln S_0 + \left(R - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right]$$

e o preço da ação num tempo futuro T será dado pela expressão, conforme destacado em Boyle (1977):

$$S_T = S_0 e^{(R - (\sigma^2/2))T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}} \quad (2-5)$$

onde ε é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, R é a taxa livre de risco e S_T é o preço do ativo no tempo T .

Aplicando esta última equação na função do valor esperado da opção (Eq. 2.4), tem-se (Joy, Boyle e Tan, 1996):

$$c = e^{-RT} \int_{-\infty}^{\infty} g[S_0 e^{((R - (\sigma^2/2))T + \sigma \varepsilon \sqrt{T})}] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon$$

Através da inversa da função de distribuição de probabilidade da variável normal ε , transforma-se a integral de menos a mais infinito para uma integral com distribuição uniforme sobre o intervalo $[0,1]$:

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} h(\varepsilon) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon = \int_0^1 h(\Phi^{-1}(x)) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

Esta simplificação permite obter uma aproximação eficiente para a integral pela seleção apropriada de amostras de pontos no intervalo $[0,1]$. Pela simulação de Monte Carlo, gera-se n valores de variáveis com distribuição uniforme e o valor da opção será dado por:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \text{ onde } \xi_i \sim U(0,1)$$

Pode-se optar pela geração de valores de variáveis normais e o valor da opção tornará:

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(\varepsilon_i), \text{ onde } \varepsilon_i \sim N(0,1).$$

Será visto em item posterior que, com os números pseudo-aleatórios, o erro da estimativa acima será da ordem de $n^{-1/2}$, enquanto que, com os números quase-aleatórios será da ordem de $\frac{(\log(n))^d}{n}$.

A função $g(\cdot)$ de uma opção européia é $\max[S_T - X, 0]$, e o valor da opção torna-se:

$$c = e^{-rT} \int_X^{\infty} (S_T - X) q(S_T) dS_T$$

onde $q(\cdot)$ é a função de distribuição de probabilidade de S_T .

Duarte Jr. (1996a) sintetiza o que foi descrito nesta seção, apresentando um algoritmo, na forma de fluxograma, bastante acessível para precificar opções européias utilizando simulação de Monte Carlo. A precificação de opções pela simulação de Monte Carlo apresenta maior vantagem quando o retorno do ativo-objeto da opção depende de vários processos estocástico (Boyle, 1977).

2.4.1 Gerando números aleatórios

Para implementar a simulação Monte Carlo é necessário simular a trajetória dos fatores de risco e para tanto precisa-se gerar números aleatórios e aplicar no modelo do comportamento do fator de risco, para determinar a distribuição de probabilidade da variação da carteira.

Há diversas formas de se obter números aleatórios. Sobol (1994) divide em três as maneiras de se obter tais números: tabelas de números aleatórios, geradores de números aleatórios (por exemplo, tubo de vácuo) e métodos de números pseudo-aleatórios. Gentle (1998) diz que se pode obter seqüências de números aleatórios através de geradores de congruência linear, geradores baseados em sistemas caóticos e tabelas de números aleatórios.

Para uniformizar a linguagem, podem-se classificar os números aleatórios em três grupos:

- a) Aleatórios. Os números aleatórios são os números puramente aleatórios, que são selecionados por meio não determinístico, que não envolvem algoritmos ou funções, e normalmente são obtidos por intermédio de eventos naturais ou físicos. Nesta classificação, enquadram-se os geradores de números aleatórios (Sobol, 1994). Estes geradores apresentam algumas desvantagens: é muito difícil verificar a qualidade dos números produzidos e praticamente impossível reproduzir a mesma seqüência de números, a menos que sejam gravados, o que demandaria muito espaço em memória de processadores.
- b) Pseudo-aleatórios. São os obtidos por meio de algoritmos, de tal forma que apresentem um ciclo de repetição tão alto quanto possível, de modo a simular uma distribuição

verdadeiramente randômica. Neste grupo, enquadram-se os métodos de congruência linear abordados por Gentle (1998).

- c) Quase-aleatórios. Conhecidos como seqüências de baixa discrepância, são também obtidos por procedimentos matemáticos, mas apresentam algumas peculiaridades adicionais, que serão detalhadas na próxima seção.

O componente essencial de um gerador de números pseudo-aleatórios é uma distribuição uniforme sobre o intervalo $[0,1]$, que produz uma variável aleatória x . A partir de uma distribuição uniforme, pode-se transformar esta em diversas distribuições desejadas.

No caso de integração de funções, que corresponde ao procedimento de inversão da função de distribuição para estimar o quantil, utilizam-se distribuições uniformes. Para simular as trajetórias de preços dos fatores de risco, partindo da suposição de que seguem o movimento *browniano* geométrico, precisa-se de uma distribuição normal padronizada.

Existem vários métodos para transformar uma distribuição uniforme em normal padrão. Um dos mais utilizados é o método de Box Miller (Press *et al.*, 1992), no entanto apresenta perda de eficiência em seqüências quase-aleatórias (Galanti e Jung, 1997) que será de fundamental importância para este trabalho, como será visto logo a seguir. Utilizar-se-á o método proposto por Moro (1995) que está especificado no apêndice 3. Este método transforma o número aleatório com distribuição uniforme na distribuição desejada, através da inversa da função de distribuição de probabilidade cumulativa.

2.4.2 Seqüências determinísticas de baixa discrepância

Desenhando um conjunto de números pseudo-aleatórios em duas dimensões, vê-se que os mesmos não preenchem regularmente os espaços (Figura 2.1), verificando-se regiões onde não há pontos, ou seja, os números pseudo-aleatórios não são distribuídos uniformemente no espaço (Paskov e Traub, 1995). Para tornar melhor a estimativa da integração pela sua média (Sobol, 1994), seria conveniente que os números aleatórios pudessem ser distribuídos uniformemente a cada amostra subsequente.

Há um conceito em teoria dos números denominado *discrepância*, que mede o desvio da uniformidade de um conjunto de pontos em uma dimensão d . A questão em saber qual conjunto de pontos em uma dimensão d tem a discrepância mais baixa ainda não foi resolvida, porém há várias seqüências de pontos de baixa discrepância conhecidas. Definições mais aprofundadas e também construções eficientes são analisadas em Tezuka (1995) incorporando os conceitos anteriores.

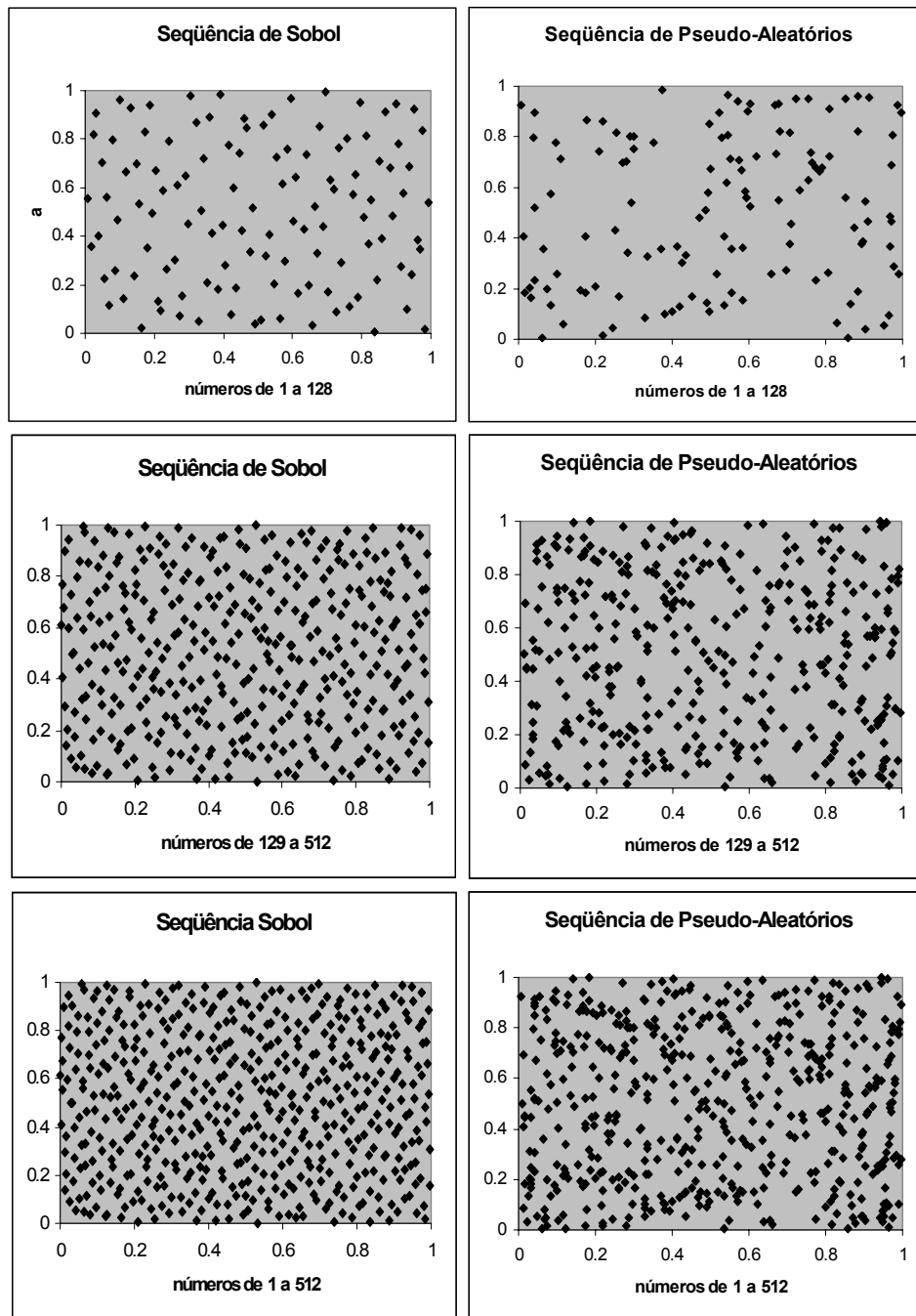


Figura 2.1. Distribuição em 2(duas) dimensões de seqüências de números pseudo-aleatórios gerados pela função ran2 e de quase-aleatórios gerados pelo algoritmo de Sobol⁵

⁵ A função ran2 e o algoritmo de Sobol obtidas em Press *et al.* (1996).

Recentes construções de seqüências de baixa discrepância têm levado a avanços significativos em termos de redução de custo computacional em precificação de derivativos financeiros, por exemplo. Quase-Monte Carlo (método de Monte Carlo com seqüências de quase-aleatórios) alcança uma performance equivalente em uma fração de tempo menor que a exigida pelo método de Monte Carlo.

Para algumas funções de distribuição, por exemplo, a normal ou a log-normal, pode-se transformar a equação 2.2, selecionando uma apropriada função ρ_l , em:

$$F_L(l) = \int_{[0,1]^d} \rho_l(x_1, \dots, x_d) dx_1, \dots, dx_d$$

Conforme Papageorgious e Paskov (1999), o erro de aproximação utilizando números determinísticos é o produto da variância, $Var(\rho_l)$, da função ρ_l , com a discrepância da amostra D_n , $D_n = C_d \frac{(\log(n))^d}{n}$, onde C_d é uma constante que depende da seqüência de baixa discrepância e d é a dimensão do problema.

Percebe-se que o erro de convergência para pontos de baixa discrepância é proporcional ao inverso da quantidade de números utilizados, sugerindo que este método é superior que o método de Monte Carlo (Paskov, 1994). Esta vantagem diminui com o aumento da dimensão d e alguns pesquisadores relatam que esta vantagem teórica desaparece para $d > 30$ (Paskov e Traub, 1995).

Como exemplo desta técnica, realizou-se a integração da função normal padronizada resultando na conhecida função normal acumulada:

$$N(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \text{ onde } f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Calculou-se, em função do número de simulações, o erro relativo percentual, como sendo a diferença entre o valor obtido pela simulação e o valor exato da função

dividido por esse mesmo valor. Na figura abaixo, percebe-se a convergência mais rápida da integração utilizando números quase-aleatórios.

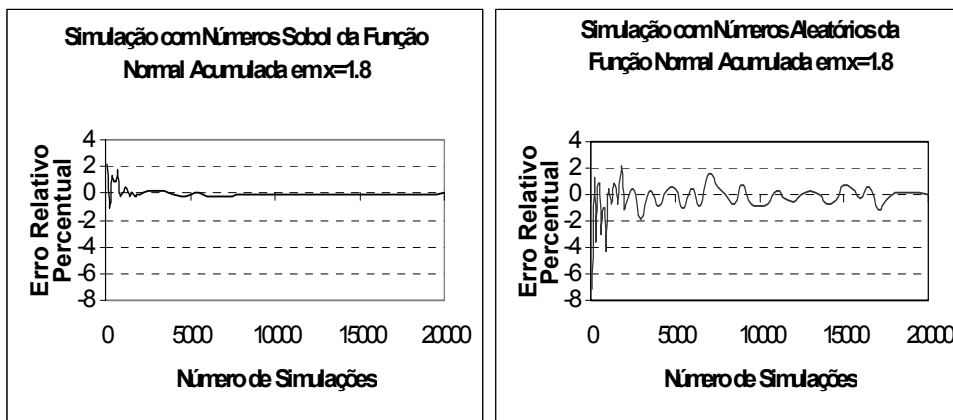


Figura 2.2. Convergência da Função Normal Acumulada utilizando números quase-aleatórios e pseudo-aleatórios

2.5 Modelos de estimação da volatilidade

O conceito de volatilidade desempenha papel fundamental na precificação de ativos financeiros e no gerenciamento do risco de mercado. Tratando-se de derivativos, o conceito assume ainda maior importância, pois a volatilidade é a única variável não observável no modelo B&S. Existem basicamente dois tipos de volatilidade: a de preço e a implícita. A primeira diferença importante entre volatilidade implícita e a de preço está relacionada com a informação necessária para o seu cálculo: enquanto a volatilidade de preço usa dados de preços, a volatilidade implícita depende de cotações dos prêmios de opções sobre o ativo/índice de interesse. A segunda diferença é que a volatilidade de preço

é obtida através de estimadores estatísticos, enquanto a implícita depende para sua obtenção de modelos de precificação de opções.

2.5.1 Volatilidade de preço

Considerando que o fator de risco tem sua distribuição de probabilidade dada pela normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad x \in \Re$$

onde μ e σ denotam respectivamente a média e o desvio padrão dessa distribuição, podem-se utilizar diversos estimadores e modelos estatísticos na literatura para o cálculo da volatilidade de preços. O mais simples estimador é o de máxima verossimilhança com mínima variância dado por:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(x_i - \hat{\sigma} \right)^2}{n-1}} \quad (2-6)$$

Este estimador apresenta algumas deficiências, das quais destacam-se o fato de ponderar igualmente todas as observações, dando a mesma importância tanto para a observação mais recente quanto para a mais antiga, o que não permite ao estimador reagir rapidamente a mudanças bruscas no preço de ativos.

Uma alternativa para contornar esta deficiência é o estimador de média móvel com amortecimento exponencial (EWMA - *Exponentially Weighted Moving Average*):

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \tilde{\mu})^2}, \text{ onde } w_i \propto \lambda^{n-i+1}, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad \tilde{\mu} = \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

O parâmetro λ é conhecido como fator de decaimento e determina como os pesos das observações passadas decaem à medida que elas se distanciam da data de previsão do desvio padrão. Uma importante consequência da utilização de ponderações dos retornos corresponde ao número de dados históricos necessários para a estimativa da volatilidade: quanto menor o fator de decaimento, menor é o número de dados históricos que efetivamente influenciam a estimativa da volatilidade.

A forma discursiva da abordagem EWMA no cálculo do desvio padrão dos retornos diários do ativo i para a data t , condicionado às informações disponíveis até a data $t-1$, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{i,t+1}^2 = \lambda \sigma_{i,t}^2 + (1 - \lambda) r_i^2, \quad 0 < \lambda < 1$$

Para cada variável de mercado, existe um λ ótimo que produz melhores estimativas de volatilidade através do modelo de alisamento exponencial. Esse λ ótimo individual é obtido por comparação entre as volatilidades estimadas e as observadas, isto é, calculam-se as estimativas de volatilidade em cada dia das séries de dados históricos de cada variável de mercado utilizando diferentes valores de λ , até encontrar aquele que produz o menor erro acumulado. Entretanto, ao se calcular o VaR de uma carteira exposta às oscilações de diferentes variáveis de mercado, é preciso que todas elas tenham suas respectivas volatilidades calculadas com o mesmo λ .

Uma variante deste estimador foi implementada no sistema para gerenciamento de risco desenvolvido pelo banco J. P. Morgan, o *RiskMetrics™* (1995). A estimativa da variância dos instrumentos financeiros em *RiskMetrics™* é feita utilizando o fator de decaimento igual a 0.94, determinado a partir de critério de minimização do erro quadrático da previsão da volatilidade para ativos de diversos países.

2.5.1.1 Modelos de volatilidade condicionada

Diversas regularidades empíricas têm sido identificadas nos retornos diários de variáveis financeiras (Taylor, 1986), das quais destacam-se:

- as distribuições dos retornos apresentam *fat tails* ou excesso de curtose;
- o pico em torno da média da distribuição dos retornos é mais alto do que numa distribuição normal;
- os retornos dos ativos apresentam uma assimetria negativa;
- os retornos dos ativos apresentam pequenas autocorrelações; e os quadrados dos retornos apresentam fortes correlações, implicando a existência de relações não lineares;
- a heterocedasticidade, ou seja, a variância varia com o tempo;
- a volatilidade dos retornos tem tendência de reversão à média, o que contradiz a hipótese frequentemente assumida de que os preços seguem um movimento do tipo *browniano*, que considera a volatilidade crescente proporcionalmente à raiz quadrada do tempo;
- a volatilidade dos retornos tende a se agrupar (*volatility clustering*): altas volatilidades são seguidas por altas, e baixas, por baixas.

Os modelos convencionais revelavam dificuldade de se adequar à última regularidade empírica. Somente com os modelos auto-regressivos foi possível incorporar, em alguns casos, estas características aos modelos. Os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heterocedasticity*) são extensões do modelo ARCH proposto por Engle (1982), e foi estendido por diversos autores, dentre os quais destaca-se Bollerslev (1986).

A especificação de um GARCH (1,1) é:

$$\Delta \ln S_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \sigma_{t-1}^2 + \beta \varepsilon_{t-1}^2$$

onde ε_t é NID (0,1) e S_t é o preço da ação no instante t .

A variante GARCH-M tem como motivação o fato de a teoria financeira moderna preconizar que o retorno esperado de um ativo é função do seu risco. Dessa forma, na equação do retorno é introduzido um termo proporcional a raiz da variância h_t . Este modelo captura mudanças no regime de volatilidade mais rapidamente que o estimador de verossimilhança. Entre outras limitações, o modelo não capta o efeito assimetria: o fato de choques positivos e negativos de mesma magnitude, no retorno de ativos, exercerem impactos diferenciados sobre a volatilidade. Com o intuito de captar o efeito assimétrico, desenvolveram-se os modelos TARCH⁶ e EGARCH⁷.

Apesar de, nos modelos auto-regressivos da família ARCH, a variância condicional à informação passada ser determinística, ela não deixa de ser um processo estocástico, pois, mesmo sendo conhecida em $t-1$, ε_{t-1} continua sendo uma variável aleatória. Intuitivamente, é só imaginar as previsões da variância condicional mais de um passo a frente e perceber que de fato a variância segue um processo estocástico estacionário, mas que é perfeitamente previsível um passo a frente.

2.5.1.2 Modelos de volatilidade estocástica

No modelo de volatilidade estocástica – VE – introduzido por Taylor (1986), o conjunto de informação utilizado é composto de uma variável latente que está relacionada

⁶ GLOSTEN, L. R., JAGANNATHAN, R. e RUNKLE, D. E. “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks”, *Journal of Finance*, n. 48, v. 5, p. 1779-1801, 1994.

⁷ NELSON, D. “Conditional Heteroscedasticity in Asset Returns: a New Approach”, *Econometrica*, n. 52, p. 245-266, 1991.

ao fluxo de notícias que chegam ao mercado. Neste caso, esta variável latente segue um processo estocástico, em geral, um AR (1). Uma das possíveis especificações do modelo VE é dada por:

$$\Delta \ln S_t = \mu + e^{\frac{h_t}{2}} \varepsilon_t$$

$$h_t = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot h_{t-1} + \eta_t$$

onde S_t é o preço, h_t é variância da ação no instante t , ε_t e η_t são erros independentes com distribuições $NID(0, h_t)$ e $NID(0, \sigma_n^2)$ respectivamente.

A variância dos retornos logarítmicos é dada por $\sigma_t^2 = e^{h_t}$ e portanto:

$$\ln \sigma_t^2 = \psi_0 + \psi_1 \ln \sigma_{t-1}^2 + \eta_t$$

Embora esta equação seja parecida com a especificação dos modelos auto-regressivos, uma diferença fundamental entre eles é a existência do termo aleatório η_t na equação do modelo estocástico. No modelo auto-regressivo, a variância do instante t está completamente determinada no instante $t-1$, pois ela só depende de seus valores passados e dos distúrbios passados. No modelo VE, existe um comportamento aleatório independente do movimento dos preços que altera a variância dos retornos para todo instante t .

2.5.2 Volatilidade implícita

O estimador de volatilidade implícita é o método de estimação do parâmetro de volatilidade mais utilizado na prática no mercado de opções. Ele consiste em utilizar a volatilidade implícita no preço da opção negociada no instante anterior para precificar a opção no instante seguinte via fórmula B&S. Então, a partir do prêmio praticado pelo

mercado, encontra-se qual o valor da volatilidade que na fórmula de precificação resulta este prêmio.

A fórmula de determinação do prêmio de uma opção pelo modelo de B&S não permite que se deduza a volatilidade como função do preço de mercado da opção e dos demais parâmetros envolvidos. Necessita-se, então, recorrer a métodos numéricos de solução de equações. Alguns exemplos são: o método da bissecção e o método de Newton-Raphson.

No método da bissecção, atribui-se um primeiro valor à volatilidade, σ_0 . Com esse valor, calcula-se com o modelo o prêmio justo da opção. Efetua-se uma segunda rodada, agora com a volatilidade $\sigma_1 = \sigma_0 / 2$. O valor da volatilidade para a nova rodada dependerá do prêmio justo obtido na rodada anterior, da seguinte forma:

$$c(\sigma_1) > S \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_0 / 4$$

$$c(\sigma_1) < S \Rightarrow \sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_0 / 4$$

De forma geral, $\sigma_k = \sigma_{k-1} \pm \sigma_0 / 2^k$.

O método de Newton-Raphson invoca os primeiros termos de uma expansão de Taylor e conseqüentemente faz uso da primeira derivada da função em foco – no caso presente, o chamado vega da opção, isto é, a sensibilidade do prêmio da opção de compra a variações na volatilidade dos retornos do ativo-objeto:

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma} = v = \frac{e^{\frac{-d_1}{2}} S \sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}$$

Atribui-se inicialmente um valor σ_1 à volatilidade. Aplicando-se esse valor na fórmula do modelo e do vega, encontram-se os respectivos prêmio justo e vega: $c(\sigma_1)$ e $v(\sigma_1)$. A partir daí, cada novo valor da volatilidade é calculado de acordo com a expressão:

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} - \frac{c - c(\sigma_{k-1})}{\nu(\sigma_{k-1})}, \text{ onde } c \text{ é o preço de mercado da opção de compra.}$$

É importante ressaltar que, devido à não linearidade da fórmula de B&S, nem sempre o algoritmo de estimação da volatilidade implícita converge para um limite e portanto não é possível obter um estimador.

O procedimento de utilizar a volatilidade implícita no preço de uma opção já negociada para achar o preço teórico de uma opção a ser negociada é de difícil sustentação dentro do modelo de B&S. No entanto, no modelo de H&W, é possível justificar a sua utilização, bastando supor que a volatilidade segue um processo *martingale* diferença. Isto quer dizer que o $\mu(\sigma_t, t) \equiv 0$ e o preditor ótimo da volatilidade é a volatilidade do instante anterior.

Tanto no modelo de B&S como no modelo de H&W, o parâmetro de volatilidade é uma característica do processo estocástico seguido pelo preço da ação. O parâmetro de volatilidade, em tese, não depende das características da opção, e portanto o estimador de volatilidade implícita deveria ser igual para toda opção negociada no instante t . No entanto, o mercado assinala tantos níveis de volatilidade quantas forem as séries de opções lançadas sobre este ativo. Hull (2000) menciona o efeito “volatility smile”, o qual se refere a uma relação inversa entre os preços de exercício de séries de opções lançadas sobre um ativo-objeto e os níveis de volatilidade dos retornos desses ativos.

Neste caso, o problema é saber qual a opção utilizar para obter o estimador de volatilidade implícita. No caso do modelo H&W, a resposta é naturalmente a opção mais próxima do dinheiro, pois é neste caso que a aproximação linear do preço da opção vale. No caso do modelo de B&S, a resposta não é óbvia. Recomenda-se⁸ que o estimador seja a volatilidade implícita para todas as opções ponderada por uma função distância em relação

ao dinheiro. Foi feita análise⁹ de volatilidade com informações da CBOE¹⁰, comparando a volatilidade implícita ponderada de opções sobre uma ação em certo momento com a volatilidade calculada a partir de dados históricos, concluindo que o primeiro fornece uma previsão muito melhor para a volatilidade de preço da ação durante a vida da opção.

2.6 Critérios de avaliação dos modelos de VaR

A avaliação de modelos de gerenciamento de risco é dependente do critério de desempenho utilizado. Diferentes critérios podem levar a diferentes interpretações dos modelos.

As funções-objetivo são utilizadas para avaliar a capacidade do modelo em estimar a curva de distribuição dos retornos. Há vários exemplos e os mais utilizados são: erro absoluto médio, erro quadrático percentual médio e erro absoluto percentual médio. As funções-objetivo calculam o desempenho considerando as variâncias de cada ativo e não levam em consideração as covariâncias entre eles.

Uma alternativa de avaliação para os modelos é baseada em uma função definida pela raiz quadrada dos erros quadráticos médios (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (r_t^2 - \sigma_t^2)^2}$$

Assumindo que a distribuição dos retornos é normal e que tem média igual a zero, a função logarítmica de verossimilhança, excluído o termo constante, é dada por:

⁸ TOMPKINS, R. "Options analysis", Revised Edition, Chicago: Probus Publishing, 1994.

⁹ CHIRAS, D. e MANASTER, S. "The Information Content of Stock Prices and Test of Market Efficiency", *Journal of Financial Economics*, n. 6, p. 213-234, set. 1978.

$$LF = \sum_{t=1}^N \left[\left(\frac{r_t^2}{\sigma_t^2} \right) + \ln(\sigma_t^2) \right]$$

Na avaliação de cada modelo, é calculada a quantidade da equação acima para cada ativo. Para obter o valor para a carteira, pode-se optar por calcular a média simples dos valores, com o intuito de verificar a capacidade de previsão conjunta das volatilidades, ou outra medida de média como, por exemplo, a média ponderada que se apresenta mais coerente.

Do ponto de vista do risco, o interessante é que os critérios procurem identificar a ocorrência de falhas nas previsões, importando para a avaliação os pontos onde a previsão foi inferior à efetivamente ocorrida (caudas da distribuição de retornos). Critérios de avaliação que procuram captar o desempenho da previsão ao longo de toda a curva de distribuição dos retornos não necessariamente serão os melhores critérios do ponto de vista do risco, principalmente quando a abordagem é o VaR.

Existe um problema no uso de funções como RMSE e LF na avaliação de modelos de gerenciamento de riscos. Esses critérios avaliam a capacidade do modelo em estimar a curva de distribuição de retornos, contudo, a grande preocupação com o risco é a capacidade de prever exceções, já que o VaR procura capturar os piores cenários. Dessa forma, as caudas da distribuição de probabilidade são mais importantes do ponto de vista do risco. Dessa forma, optou-se por avaliar a estimativa do VaR pelo critério de *backtesting*, proposto pelo Comitê de Basileia, conjugado com o teste de proporção de falhas proposto por Kupiec (1995).

Este procedimento consiste em comparar diariamente os resultados obtidos pela carteira da instituição (lucro ou prejuízo) com as medidas de risco (VaR) estimadas pelo modelo de gerenciamento. A estimativa de perda feita pelo cálculo do VaR deve ser

¹⁰ Chicago Board Options Exchange - EUA

superior ao eventual prejuízo que venha a ocorrer no horizonte considerado. Caso contrário, o modelo estará prevendo uma perda inferior àquela ocorrida, o que poderá ocasionar problemas para a instituição.

Kupiec (1995) comenta que o Comitê de Basileia recomenda o *backtesting* mas não provê detalhes de testes para verificar a sua eficácia e desenvolve um modelo para verificar se o número de vezes em que as perdas efetivas superaram as perdas estimadas pelo VaR pode ser considerado aceitável.

Ele considera que a probabilidade de se observar x falhas numa amostra de tamanho n é:

$$\binom{n}{x} (1-p)^{n-x} p^x$$

Considerando a seguinte razão de log-verossimilhança:

$$-2\text{Log}\left[(1-p^*)^{n-x} (p^*)^x\right] + 2\text{Log}\left[\left(1-\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n-x} \left(\frac{x}{n}\right)^x\right]$$

Kupiec desenvolveu, para vários períodos, intervalos de não rejeição da hipótese nula de que p é a correta probabilidade da proporção (número de falhas dividido pelo total de dias) a um nível de significância de 5%, conforme indicado na tabela abaixo.

P=p* (%)	N=255 dias	N=510 dias	N=1000 dias
1,0	$x < 7$	$1 < x < 11$	$4 < x < 17$
2,5	$2 < x < 12$	$6 < x < 21$	$15 < x < 36$
5,0	$6 < x < 21$	$16 < x < 36$	$37 < x < 65$
7,5	$11 < x < 28$	$27 < x < 51$	$59 < x < 92$
10,0	$16 < x < 36$	$38 < x < 65$	$81 < x < 120$

Tabela 2.1. Intervalos de não-rejeição da hipótese nula H_0 de que a proporção de falhas p^* é igual a p , a 5% de confiança

O número x indica a quantidade de insucessos que poderia se observado numa amostra de tamanho n , sem rejeitar a hipótese nula de que p é a correta probabilidade a um nível de significância 5%.

Kupiec também fornece outra maneira de testar o modelo de VaR, através da quantidade máxima que a amostra utilizada deverá conter para rejeitar a hipótese anterior, conforme tabela 2.2. Ressalta, ainda, que a técnica de avaliação das estimativas de VaR só será confiável com um grande número de observações.

Número de falhas	$p^*=0.01$	$p^*=0.02$	$p^*=0.03$	$p^*=0.04$	$p^*=0.05$
1	6	3	-	-	-
2	34	17	11	9	-
3	75	38	26	19	16
4	125	63	42	32	26
5	180	91	61	46	37
6	240	121	81	61	49
7	302	152	102	77	62
8	367	184	124	93	75
9	434	218	146	110	88
10	501	253	169	127	102

Tabela 2.2. Número máximo do tamanho da amostra para que a hipótese nula $p=p^*$ seja rejeitada a 95% de confiança.

2.7 Evidências empíricas

Apresenta-se, nesta seção, uma síntese dos principais trabalhos sobre previsão de volatilidade e avaliação de estimativas de VaR, utilizando as metodologias paramétricas e não-paramétricas.

Beder (1995) realizou um estudo das estimativas de VaR obtida pela simulação histórica e pela SMC, em 3 (três) carteiras hipotéticas: títulos do Tesouro americano, índice S&P 500 e uma combinação das duas primeiras. A SMC utilizada se resume a uma

técnica de amostragem para gerar os cenários dos valores possíveis da carteira para o horizonte de tempo considerado, não sendo construído nenhum modelo para o comportamento dos fatores de risco. Não é realizada avaliação da estimativa do VaR com a perda efetivamente ocorrida com a carteira, no horizonte de tempo considerado. Realizou uma análise comparativa das estimativas obtidas pelas citadas metodologias, variando a quantidade de dados históricos utilizados para o cálculo dos parâmetros e o horizonte de tempo do VaR. Concluiu que o VaR é extremamente dependente dos parâmetros (horizonte de tempo e nível de significância), da quantidade dos dados históricos e das metodologias. Por esta razão, o VaR deve ser complementado não apenas com testes de estresses, mas também com controles, auditorias e procedimentos adicionais de gerenciamento de risco.

Formatado: Inglês (E.U.A.)

Jackson *et al.* (1997) e Jackson *et al.* (1998) examinaram a performance da metodologia paramétrica (baseada no desvio padrão) e da não-paramétrica (baseada na SMC), no cálculo do VaR de carteiras influenciadas pela taxa de câmbio e de juros. A SMC também é utilizada como técnica de amostragem, não sendo utilizados modelos de comportamento dos fatores de risco. Adotando-se o procedimento de *backtesting*, chegaram a algumas conclusões, das quais destacam-se:

- a metodologia não-paramétrica apresentou melhor desempenho que a paramétrica, por capturar com mais precisão as caudas de distribuição;
- a estimativa de VaR pela metodologia paramétrica é pior quando se utiliza poucos dados históricos para calcular os parâmetros da distribuição normal.

Boudoukh *et al.* (1997) compararam o desempenho de regressão de quatro métodos de gerenciamento de riscos, utilizando o erro quadrático médio (MSE) e os coeficientes de regressão das volatilidades estimadas com os quadrados dos retornos de

títulos do Tesouro americano. Encontraram evidências de que o método do *RiskMetrics*TM é superior ao do desvio padrão da série histórica e ao GARCH(1,1).

Alexander e Leigh (1997) investigaram alguns métodos de gerenciamento de riscos usando dados de índices de ações da Alemanha, França, Grã-Bretanha, Japão e EUA, além das taxas de câmbio das moedas desses países em relação ao dólar, utilizando como critério de avaliação a raiz quadrada da média dos desvios entre as volatilidades estimadas e os retornos quadráticos (RSME), uma função de verossimilhança e o procedimento de *backtesting*. Não identificaram o melhor método com base nos critérios de RSME e a função de verossimilhança, devido a variação do desempenho em função do ativo selecionado. Utilizando o procedimento de *backtesting*, o método GARCH (1,1) apresentou melhor desempenho na maioria dos casos.

Silveira *et al.* (1997) compararam os modelos *RiskMetrics*TM, GARCH(1,1), EGARCH (GARCH exponencial) e TARCH, na estimação da volatilidade de uma carteira teórica composta por três ações negociadas na Bovespa, no segundo semestre de 1996: Telebrás PN, Eletrobrás PN e Petrobrás PN. Concluíram que, com relação à atividade de gerenciamento de risco, o modelo *RiskMetrics*TM apresenta um desempenho superior em relação aos demais modelos analisados.

Santos (1997) analisou o poder de previsão da volatilidade dos modelos GARCH, *RiskMetrics*TM, Ingênuo (a melhor previsão para amanhã é o que aconteceu hoje), Volatilidade Implícita e o composto da combinação deste último com os dois primeiros. A série estudada foi a volatilidade para um período de 25 dias dos retornos diários do contrato futuro do Ibovespa, no período de agosto de 1995 a janeiro de 1997. Para a análise de eficiência utilizou equações de perdas simétricas (raiz do erro quadrático médio - RMSE, erro absoluto médio - MAE, raiz do erro quadrático percentual médio - RMSPE e erro absoluto percentual médio - MAPE). Constatou que:

- o modelo GARCH (1,1) apresentou melhor performance em relação aos demais modelos em períodos de alta volatilidade. Quando a volatilidade não é alta, não apresentou destaque em relação ao modelo Ingênuo;
- o modelo da Volatilidade Implícita, derivada da aproximação de Baroni-Adesi & Whaley, não superou o modelo Ingênuo. O primeiro quando combinado com o *RiskMetrics*TM e o GARCH apresentou melhorias, sendo superior a cada modelo separadamente.

Farias Filho (1997) identificou, na avaliação da estimativa do VaR, melhor desempenho do *RiskMetrics*TM em relação ao GARCH (1,1), utilizando o critério RMSE e dados do Índice Bovespa (Ibovespa) de 2 de janeiro de 1995 a 30 de dezembro de 1996. Embora teoricamente seja capaz de capturar os efeitos de assimetria, o modelo TARCH não revelou melhores resultados do que os obtidos pelo *RiskMetrics*TM para a série analisada.

Kimura e Suen (1997) avaliaram a estimativa de VaR obtida pela simulação histórica e pela metodologia paramétrica (baseada no desvio padrão), para as posições comprada e vendida de três carteiras hipotéticas: ações Telebrás PN, dólar, e ações Telebrás PN conjuntamente com dólares. Foi utilizado o procedimento de *backtesting* para avaliar a performance dos métodos, sendo considerada superior aquela que resultou na proporção de falhas mais próxima do nível de significância do VaR, independente da proporção estar acima ou abaixo deste nível. Foram sintetizados os seguintes resultados:

- a simulação histórica apresentou melhor performance nas três carteiras;
- o modelo paramétrico foi inadequado para estimar o risco de posições em moeda estrangeira;
- para a carteira composta por ações e dólar, o modelo paramétrico apresentou melhorias em relação à carteira de dólar.

A vantagem comparativa da simulação histórica foi basicamente devido ao critério utilizado para avaliar o *backtesting*. Utilizando testes de hipótese para considerar a variação amostral da proporção de falhas, o resultado seria diferente.

Bertucci (1999) avaliou a habilidade do modelo GARCH e suas extensões EGARCH e TARCH, em prever as variâncias diárias de retornos da ação Telebrás PN negociada na Bovespa, as quais possam a ser utilizadas na precificação de opções de compra pelo modelo B&S. A baixa performance dos modelos de volatilidade condicionada em relação aos procedimentos numéricos de volatilidade implícitas foi devido basicamente à sensibilidade da variância dos retornos de Telebrás PN relativamente aos preços das opções lançadas sobre o papel, bem como ao efeito denominado de “volatility smile”. Foram utilizadas 12 (doze) séries de opções de compra da Telebrás PN, que foram negociadas por períodos aproximadamente de 40 (quarenta) dias. As projeções de variâncias obtidas através dos três modelos foram operadas sobre uma janela móvel de 787 dados diários de retornos passados. No modelo de B&S, foi utilizada a volatilidade média estimada para o período compreendido entre o dia da negociação e o dia do vencimento da opção analisada. A medida de desempenho utilizada foi o desvio absoluto médio entre os valores de opções precificadas e dos preços de fechamento diários dos prêmios.

Almeida e Ghirardi (1999) fizeram um estudo comparativo da estimativa do VaR obtido pelo modelo do desvio padrão (com pesos iguais), pelo *RiskMetrics*TM e pelo GARCH, utilizando três critérios para a avaliação de performance: *backtesting*, função de verossimilhança e uma função de perda RMSE. A análise foi realizada para uma carteira hipotética composta por quatro ativos (IBOVESPA, PETROBRÁS, TELESP e CDI), com dados de julho de 1994 a dezembro de 1998, obtendo-se os seguintes resultados:

- o procedimento *backtesting* revelou desvantagem do modelo baseado no desvio padrão dos retornos distribuídos igualmente em relação aos outros modelos;

- pelos outros dois critérios, não foi possível chegar a nenhuma conclusão;
- a avaliação de modelos de gerenciamento de riscos depende do critério de desempenho utilizado. Um mesmo modelo, avaliado por um mesmo critério, pode apresentar desempenho satisfatório em determinados períodos, enquanto que, em outros períodos, não.

Mollica (1999) comparou os seguintes modelos utilizados para a estimação da volatilidade e para o cálculo do VaR: simulação histórica, alisamento exponencial, o modelo GARCH e o modelo de volatilidade estocástica – VE (os parâmetros estimados com quase-máxima verossimilhança). Foram utilizadas duas carteiras. A primeira era composta de cinco ativos: os três primeiros vencimentos de Depósito Interbancário futuro, ação Telebrás PN e o Índice Bovespa futuro; e a segunda, composta por quatro ativos: os vértices da curva de juros de 20 (vinte) e 40 (quarenta) dias úteis, a ação Telebrás PN e o Índice Bovespa à vista. O critério utilizado para avaliar a performance das estimativas do VaR foi o teste de Lopez (1998). As evidências empíricas mais importantes foram:

- o modelo VE apresentou maior adaptabilidade, reagindo mais nitidamente às observações recentes;
- para a primeira carteira, o modelo VE apresentou melhor performance; enquanto que, para a segunda carteira, o alisamento exponencial se mostrou superior aos demais.

Os trabalhos mais recentes acerca de SMC têm realizado análises comparativas entre as diversas formas de geração de números aleatórios. As seqüências de números quase-aleatórios utilizadas são geralmente as de Sobol, Faure e Halton (Gentle, 1998). A SMC utilizando tais seqüências tem apresentado performance superior à SMC com números pseudo-aleatórios na precificação de derivativos financeiros em termos de velocidade e precisão.

Paskov e Traub (1995) mostraram que, para determinado tipo de hipotecas com elevada dimensão (*CMO – collateralized mortgage obligation*), o uso de simulações com conjuntos de pontos determinísticos aumenta consideravelmente a taxa de convergência do cálculo de derivativos financeiros. As seqüências de pontos de baixa discrepância utilizadas foram as de Sobol e de Halton. As principais conclusões a que chegaram foram:

- o método de Sobol tem performance superior ao Monte Carlo;
- o método de Sobol tem performance superior ao de Halton;
- o método de Sobol teve performance superior ao de Monte Carlo com variáveis antitéticas e este último teve performance superior ao de Monte Carlo “puro”.

Joy, Boyle e Tan (1996), analisando opções de compra européias, concluíram que o método Quase-Monte Carlo baseado na seqüência de Faure é mais eficiente no cálculo dos preços das opções. Simularam apenas o processo estocástico das ações.

Galanti e Jung (1997) compararam os valores precificados de derivativos complexos obtidos através da simulação de Monte Carlo com números quase-aleatórios e com números pseudo-aleatórios. Simularam apenas o comportamento do ativo-objeto do derivativo, portanto sendo uma simulação univariada. Os derivativos avaliados foram opções européias, asiáticas e *look-back*. As seqüências de baixa discrepância utilizadas foram as de Halton, Faure e Sobol. A convergência dos valores precificados foi medida pelo erro relativo percentual, sendo o valor verdadeiro aquele encontrado pelo modelo de B&S. Destacam-se as seguintes conclusões:

- para dimensões elevadas, a seqüência de Sobol apresentou maior convergência;
- a seqüência de Halton apresentou desempenho inferior às demais seqüências de baixa discrepância, até mesmo em relação às seqüências de números pseudo-aleatórios;

- dependendo do derivativo considerado e da dimensão correspondente, os números quase-aleatórios podem não apresentar melhores resultados na precificação de tais ativos.

Papageorgious e Paskov (1999) observaram que o método de Monte Carlo é menos eficiente que a sequência de Faure generalizada para o cálculo de VaR. O teste é feito utilizando duas carteiras: opções de compra européia e CMO - *collateralized mortgage obligation*. Os resultados foram obtidos utilizando o software FINDER. No primeiro teste, foi construído um portfólio de 34 opções européias *at-the-money* de índice de ações e de moeda. Cada opção era um índice de ação ou de moeda, considerado como um fator de risco. A dimensão portanto era 34. Os valores obtidos com a simulação de Monte Carlo utilizando 100.000 números foram considerados como os valores verdadeiros, já que não havia uma fórmula exata para calcular o valor da opção. A SMC que teve sua performance comparada foi aquela com 1.000 pontos. O nível de significância utilizado nos testes foi de 98% e o horizonte de tempo foi de um dia. No segundo teste, foi utilizado CMO – *collateralized mortgage obligation*, que consistia de um conjunto de hipotecas de 30 anos e 10 (dez) *tranches*. Como as hipotecas tinham pagamentos mensais, a dimensão do problema era 360. Foi considerada a estimativa verdadeira do VaR a obtida com simulação utilizando 150.000 pontos. Foi estimado o VaR do portfólio para a simulação de Monte Carlo com sequência de Faure de 1.500 pontos.

3

Metodologia

3.1 Hipóteses

Para ser capaz de responder as perguntas de pesquisa, baseado no referencial teórico que dá sustentação a este trabalho, são formuladas as seguintes hipóteses a serem testadas:

1. A simulação de Monte Carlo (SMC) com gerador de números quase-aleatórios apresenta maior convergência que com números pseudo-aleatórios, na estimativa do VaR das ações e das opções da Petrobrás S/A.
2. O VaR calculado pela simulação Monte Carlo (SMC) e gerador de números quase-aleatórios apresenta-se adequado na previsão da variação de tais ativos.
3. A simulação de Monte Carlo (SMC) apresenta melhor desempenho na avaliação do VaR do que os métodos paramétricos.

3.2 Dados

Os dados secundários de mercado utilizados neste trabalho foram coletados da Economática (ações) e da Dinheironet.com.br (séries de opções). Os dados sofreram correção das séries considerando ajustes por eventos das ações, ou seja, eventos como dividendos, bonificação (emissão de novas ações), subscrição, e *splits* (ajustes no valor nominal das ações). Para tratar os *outliers*, analisaram-se as distribuições das frequências dos retornos e foram filtradas e eliminadas aqueles superiores (inferiores) a 50%. Nos poucos casos de *missing data*, empregou-se o critério de *random walk*.

A base de dados empregada neste trabalho é composta pelos preços observados da ação preferencial nominativa da Petrobrás S/A, nos mercados à vista (PETR4), e de contrato de opções de compra da PETR4 (PETRJ39, PETRH5 e PETRH6). Esta escolha foi motivada pela elevada participação que a empresa apresenta em ambos os segmentos, ao longo do período amostral, principalmente após a cisão ocorrida na Telebrás S/A em 28/07/1998.

Os dados da ação PETR4 foram coletados no período de 4 de julho de 1994 a 18 de agosto de 2000, enquanto foram obtidos os preços das opções de compra de séries negociadas no período de 20 de abril de 1998 a 18 de agosto de 2000. Utilizam-se as cotações diárias de fechamento da ação e da opção de compra como realização do processo estocástico dos preços (Taylor, 1986). Especificamente em relação aos dados do mercado à vista, a data inicial para constituição da amostra marca o lançamento do plano de estabilização da economia (Plano Real) que reduziu drasticamente os níveis inflacionários que comumente se observava no Brasil.

Na Bovespa, as opções de venda sobre a Petrobrás são do tipo europeu e poderiam ser precificadas utilizando os modelos considerados neste trabalho. No entanto o volume de negócios de opções de venda não é muito grande e poderia causar distorções

devido ao mal funcionamento dos mecanismos de mercado. Optou-se, portanto, pelas opções de compra.

Para a análise proposta por este trabalho, utilizou-se uma carteira linear hipotética composta de 1 (uma) ação PETR4 e uma carteira não-linear hipotética composta por 1 (uma) opção de compra da PETR4.

3.3 Retornos

Existem basicamente duas formas de calcular o retorno de uma variável: a percentual e a logarítmica.

A fórmula do retorno percentual é dada por:

$$R_t = \frac{F_t - F_{t-1}}{F_{t-1}}$$

onde:

R_t é o retorno percentual (ou aritmético) do fator de risco F no instante t;

F_t é o valor do fator de risco no instante t;

F_{t-1} é o valor do fator de risco no instante t – 1.

O retorno logarítmico é dado por:

$$r_t = \ln\left(\frac{F_t}{F_{t-1}}\right)$$

onde:

r_t é o retorno logarítmico do fator de risco F no momento t;

F_t é o valor do fator de risco no instante t ;

F_{t-1} é o valor do fator de risco no instante $t - 1$.

Segundo Jorion (2000), as vantagens que levam à escolha do retorno logarítmico são diversas. Primeiramente, ele tem um significado econômico mais consistente. Por exemplo, caso os retornos logarítmicos sigam uma distribuição normal, então não existe nenhum valor desses retornos que leve a um preço negativo do fator de risco. Isso se deve ao fato de que à medida que $\ln(F_t/F_{t-1}) \rightarrow -\infty$, $(F_t/F_{t-1}) \rightarrow 0$, ou seja, $F_t \rightarrow 0$. Enquanto isso, a atribuição da distribuição normal aos retornos percentuais levaria a resultados totalmente sem sentido para os valores localizados na cauda esquerda da curva, pois à medida que $(F_t - F_{t-1}) / F_{t-1} \rightarrow -\infty$, $F_t \rightarrow -\infty$, ou seja, valores negativos para os fatores de risco.

Uma outra vantagem prática da utilização dos retornos logarítmicos é a fácil manipulação de períodos múltiplos. Como exemplo, o retorno logarítmico entre dois dias de um certo fator de risco pode ser facilmente decomposto:

$$\ln(F_t / F_{t-2}) = \ln(F_t / F_{t-1}) + \ln(F_{t-1} / F_{t-2}) = r_{t-1} + r_t$$

A decomposição em termos de retornos percentuais não é tão simples assim.

Ademais, em muitas situações pode-se admitir que as diferenças entre os retornos percentuais e os logarítmicos são desprezíveis. Considere o retorno logarítmico como $r_t = \ln(F_t / F_{t-1}) = \ln(1 + R_t)$. Se R_t é pequeno, r_t pode ser decomposto segundo a série de Taylor por:

$$r_t = R_t + \frac{R_t^2}{2} + \frac{R_t^3}{3} + \dots$$

A equação acima pode ser aproximada por:

$$r_t \approx R_t$$

Se R_t for pequeno o suficiente, haverá pouca diferença entre os retornos na forma logarítmica quanto na forma percentual.

A relação entre as duas formas de computar retornos é:

$$r_t = \ln(1 + R_t)$$

Ainda outro aspecto que leva a considerar o retorno em termos logarítmicos é que os modelos de precificação aqui utilizados consideram que os preços possuem uma distribuição log-normal. Neste trabalho, optou-se por esta linha, pelas considerações acima.

3.4 Valor de mercado da carteira

O primeiro item necessário para o cálculo do VaR é a avaliação do montante exposto ao risco. Para tal, utilizou-se a metodologia chamada “marcação a mercado”. Nesta metodologia, o cálculo do valor financeiro da carteira é feito através da cotação dos preços de mercado de cada um dos ativos que a compõem. Isto é muito importante, porque muitos desastres com derivativos ocorridos poderiam ter sido evitados se as posições fossem divulgadas por seu valor de mercado e não por seu valor contábil ou de custo.

Para ativos negociados no mercado à vista e que possuam grande liquidez, o valor de mercado é facilmente calculado através da simples multiplicação da cotação unitária pela quantidade disponível na carteira.

$$VC_i = Q_i \cdot S_i$$

onde:

VC_i é o valor de mercado do contrato contendo o ativo i ;

Q_i é a quantidade do ativo i possuído pela empresa;

S_i é o preço unitário de mercado do ativo i .

Como exemplos de ativos desse tipo, citam-se as ações e taxas de câmbio do mercado à vista (como dólar, marco alemão, iene, etc.). Os contratos cujos preços de mercado sejam do tipo dado pela equação acima são também conhecidos como lineares, pois seus valores de mercado são uma função linear das variáveis de mercado.

Para o caso de alguns derivativos, como opções, a suposição da linearidade dos contratos não pode ser feita. Isso se deve ao fato de que, devido à complexidade de seus contratos, as opções têm seus preços formados não somente em função dos valores das variáveis de mercado, mas também em função das expectativas futuras de fluxos de caixa. Estas, por sua vez, são influenciadas por uma série de fatores como forma do contrato e suas condições, o tempo para a expiração do contrato, os valores atuais de diversas variáveis de mercado.

Os contratos com esse tipo de natureza também são conhecidos como não-lineares, pois seus valores de mercado podem ser representados por uma função não-linear das variáveis de mercado que formam seus preços.

O valor de mercado de contratos de opções é calculado a partir do preço de seus prêmios. Logo, o valor de uma carteira que contenha Q contratos de opções poderia ser calculado a partir da seguinte expressão:

$$VC = Q \cdot \text{Prêmio da opção}, \text{ onde } Q \text{ é quantidade de contratos de opção.}$$

O valor do prêmio da opção reflete as expectativas de exercício ou não da opção e leva também em conta o aspecto do fluxo de caixa conforme o qual o contrato é estruturado. Utilizaram-se os modelos de B&S, H&W e o modelo de H&W associado com

o modelo de Rendleman e Bartter (1980), que considera a taxa de juros como variável estocástica, para a avaliação dos prêmios de contratos de opção. E, para representar a taxa de retorno do ativo livre de risco, utilizou-se a taxa de juros SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), que reflete o custo médio das operações com títulos públicos federais.

A Petrobrás S/A não distribuiu dividendos para a ação PETR4 entre os dias em que as opções foram negociadas, portanto estas opções do tipo americano terão comportamento idêntico a do tipo europeu (Hull, 2000), justificando a utilização dos modelos de precificação de opções.

A carteira hipotética é composta de opções de compra da ação PETR4, no entanto a posição pode ser comprada ou vendida, e, a depender desta, a avaliação do desempenho dos métodos em prever a pior perda na carteira será diferente. Para uma posição comprada, uma variação negativa no prêmio da opção representa uma perda, enquanto que para a posição vendida a perda ocorrerá com a variação positiva na opção. É conveniente, então, analisar as duas situações.

3.5 VaR - simulação de Monte Carlo

O próximo passo a ser efetuado é construir a função de distribuição de probabilidade futura do valor da carteira para, em seguida, estimar o quantil.

Para a carteira linear, formada apenas com ações à vista, basta simular os valores da ação utilizando trajetórias de preço. Como foi visto, num mundo neutro ao risco, $\ln S_T$ possui a seguinte distribuição de probabilidade, e pela equação 2.5 pode-se escrever

uma fórmula recursiva, discretizada no intervalo Δt , para o preço da ação da seguinte forma:

$$S_t = S_{t-1} e^{(R - (\sigma^2 / 2)) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (3-1)$$

onde ε é uma variável aleatória com distribuição normal padrão, R é a taxa livre de risco e S_t é o preço do ativo na etapa t .

Para a carteira de opções, no modelo de B&S, simulam-se as trajetórias de preço da ação para o momento de tempo desejado, e aplica-se a fórmula de precificação para obter uma distribuição empírica do valor da opção. O VaR então é medido diretamente pelo quantil da significância desejada.

No modelo H&W, simulam-se as trajetórias de preço e de volatilidade implícita, e aplica-se o modelo de precificação para obter o valor esperado da opção para o momento em que se está estimando a perda da carteira. No terceiro modelo analisado, além dessas duas trajetórias, também simula-se o processo estocástico da taxa de juros pelo modelo de Rendleman e Bartter (1980).

Quando há mais de um fator de risco, ter-se-á a seguinte expressão para a simulação:

$$X_t^j = X_{t-1}^j e^{(R - (\sigma_j^2 / 2)) \Delta t + \sigma_j \varepsilon_j \sqrt{\Delta t}}$$

onde X_t^i são os valores no instante t dos fatores de risco j , sejam preço da ação, volatilidade ou taxa de juros, e ε são variáveis aleatórias independentes entre períodos de tempo e entre as séries j .

Entretanto, os fatores de risco são geralmente correlacionados, e, para modelar essa correlação, utiliza-se a fatoração de Cholesky¹¹ para as variáveis aleatórias. Por essa fatoração, transformam-se variáveis independentes em variáveis aleatórias correlacionadas, a partir da matriz de covariância entre os fatores de risco. No caso de duas variáveis, obtém-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \eta_1 \\ \varepsilon_2 &= \rho\eta_1 + (1 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}\eta_2\end{aligned}$$

onde ρ é o coeficiente de correlação entre os fatores de risco, η são as variáveis aleatórias independentes, e ε são as variáveis correlacionadas.

3.6 Geradores de números aleatórios

Como geradores de números aleatórios, utiliza-se a função `ran2` (Press *et al.*, 1992), que é baseado no método de congruência linear, e, como gerador de números quase-aleatórios, utiliza-se a sequência de Sobol (Press *et al.*, 1992), implementados em Fortran.

Para verificar quão próximas estão as seqüências de números da distribuição uniforme teórica, utiliza-se o teste de aderência χ^2 . A hipótese nula é considerada H_0 : a distribuição é do tipo uniforme no intervalo $[0,1]$. Divide-se o intervalo em 40 categorias e aplica-se a seguinte estatística:

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{(o - e)^2}{e} \right] \quad (3-2)$$

¹¹ Apresentamos a fatoração de Cholesky no apêndice 2.

onde o e e são as frequências observada e esperada para cada categoria. Compara-se, em seguida, para o nível de confiança desejado, este valor com o valor crítico da distribuição χ^2 tabelado.

Estes algoritmos fornecem variáveis uniformes e para proceder a transformação em variável aleatória normal, utiliza-se o algoritmo de Moro (1995), sintetizado no apêndice 3.

3.7 VaR paramétrico

As variações de valor para contratos lineares podem ser totalmente explicadas pelos termos de primeira ordem da expansão da série de Taylor, já que os de maiores são nulos. Para a carteira hipotética composta da ação PETR4, assumiu-se que o retorno seguirá uma distribuição normal, de modo a utilizar a seguinte fórmula do VaR apresentada no referencial teórico, a que denomina-se de método paramétrico do desvio padrão:

$VaR = VC_0 \cdot \alpha \sigma$, onde α é desvio normalizado para a significância selecionada, σ é o desvio padrão ou volatilidade do preço da ação e VC_0 é o valor de mercado da carteira. Utiliza-se o desvio padrão amostral em janelas móveis de tamanho de 100 dias como estimador da volatilidade do preço.

Para derivar uma expressão analítica do VaR para a carteira não-linear composta de opção de compra, recorre-se ao modelo de precificação de Black&Scholes (equação 2.3), que relaciona o valor de uma opção a vários fatores de risco:

$$c = g(S, \sigma, R, t) = S \cdot N(d) - K \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(d - \sigma \sqrt{T - t})$$

Utilizando os primeiros termos da expansão de Taylor para esta função $g(\cdot)$, a variação no valor da opção pode ser escrita da seguinte forma:

$$dc = \frac{\partial g}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial g}{\partial r} dr + \frac{\partial g}{\partial t} dt$$

É comum definir as derivadas parciais da função $g(\cdot)$ do valor da opção pelas seguintes letras gregas:

Delta da opção: $\Delta = \frac{\partial g}{\partial S} = N(d)$

Gama da opção: $\Gamma = \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} = \frac{\Phi(d)}{S \sigma \sqrt{T - t}}$

Vega da opção: $\Lambda = \frac{\partial g}{\partial \sigma} = S \sqrt{T - t} \Phi(d)$

Rô da opção: $\rho = \frac{\partial g}{\partial r} = K e^{-R(T-t)} (T - t) n(d - \sigma \sqrt{T - t})$

O grande fator de risco da opção é sem dúvida o preço da ação. É por isso que normalmente se usa a aproximação linear do Delta para a análise do risco da opção. A grande vantagem da aproximação Delta é a adição, ou seja, se temos uma carteira com várias opções, o risco pode ser analisado como a soma das posições Delta de cada opção.

Considerando só o Delta, a variação do valor do prêmio da opção, dc , será:

$$dc = \Delta dS$$

A variância dessa variação é portanto:

$$Var(dc) = \Delta^2 Var(dS)$$

Considerando σ a volatilidade das variações do preço da ação, $\sigma(dS/S)$, e recorrendo a equação do processo de Itô, $dS = \mu S dt + \sigma S dz$, tem-se que :

$$Var(dS) = Var[\mu Sdt + \sigma Sdz] = Var(\mu Sdt) + Var(\sigma Sdz) = 0 + \sigma S Var(dz)$$

$$Var(dS) = \sigma S$$

Supondo agora que a distribuição dessa variação é normal, pode-se aplicar a fórmula do VaR dada pela equação 2.1. Então, o VaR da variação do valor da opção será:

$$VaR(dc) = -\alpha \Delta S \sigma$$

Os modelos analíticos podem ser melhorados a fim de resolver alguns problemas com opções, tais como sua não-linearidade, através da inclusão de termos da expansão de Taylor de ordem maior que o Delta, tal como o Gama.

Considerando que a variação do prêmio da opção está inserida nas gregas Delta e Gama, da série de Taylor, a variação do prêmio da opção será:

$$dc = \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2$$

Calculando-se a variância de ambos os lados, obtém-se:

$$Var(dc) = \Delta^2 Var(dS) + \left(\frac{1}{2} \Gamma\right)^2 Var(dS^2) + 2\left(\Delta \frac{1}{2} \Gamma\right) \text{cov}(dS, dS^2)$$

Se a variável dS for normalmente distribuída, $Var(dS^2) = 2(Var(dS))^2$, todos os seus momentos ímpares serão zero (o último termo da equação desaparecerá), e $V(dS^2) = 2V(dS)^2$, obtendo-se:

$$Var(dc) = \Delta^2 Var(dS) + \frac{1}{2} (\Gamma Var(dS))^2$$

Considerando σ a volatilidade das variações do preço da ação, $\sigma(dS/S)$, o VaR da opção será:

$$VaR(dc) = -\alpha \sqrt{\Delta^2 S^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} (\Gamma S^2 \sigma^2)^2}$$

A composição Delta-Gama fornece uma aproximação muito melhor para as variações na opção, entretanto sempre se estará incorrendo em erro, devido ao fato de os

termos de ordens maiores que o Gama estejam sendo desprezados. Em Fong e Lin (1999), é apresentada uma abordagem para o cálculo do VaR em que se evita as aproximações de Taylor para os derivativos, sendo possível a utilização de fórmulas exatas.

Na prática, mesmo com as deficiências das aproximações analíticas, esta abordagem é escolhida quando se trata de carteiras com muitos ativos, pois a simulação de Monte Carlo torna-se demorada e com custo computacional elevado (Duffie, 1997).

Utiliza-se a volatilidade implícita como estimador para a volatilidade do ativo-objeto quando da aplicação dos modelos de precificação de opções.

3.8 Horizonte de tempo e significância

A escolha do horizonte de tempo é subjetiva. Para a carteira de um banco investida em moedas de alta liquidez, o prazo de manutenção de um dia pode ser aceitável. Para o administrador que tenha de rebalancear sua carteira e emitir relatórios em bases trimestrais, o período de 90 dias pode ser mais apropriado. O prazo de manutenção deve corresponder ao maior período necessário, para que a liquidação da carteira seja feita de maneira ordenada. Do ponto de vista de um órgão regulador, segundo Jorion (2000), o horizonte deve refletir o *trade-off* entre os custos de um monitoramento frequente e os benefícios da detecção antecipada de grandes problemas. O Comitê de Basileia, em abril em 1995, recomendou o horizonte de 10 dias, ou duas semanas seguidas.

A escolha do nível de significância é realizada de acordo do propósito da utilização do VaR. Se for para determinação de capital, a escolha depende do grau de aversão ao risco do administrador. Quanto mais avesso ao risco, menor deve ser o nível de

significância, para que o capital alocado seja maior. Se a finalidade for a comparação de diferentes sistemas de risco, sob a hipótese de normalidade, o nível de significância não é muito relevante, pois o VaR pode ser diretamente transformado num outro nível de significância com a simples alteração do parâmetro da volatilidade.

Os bancos comerciais publicam seu VaR dentro de vários parâmetros que se diferenciam um do outro. O Bankers Trust utiliza nível de 99%; o Chemical e o Chase, de 97,55; o Citybank, de 95,4%, e o Bank of America e o J.P.Morgan, de 95%. O Comitê de Basileia, em abril em 1995, recomendou um intervalo de confiança de 99%.

Utilizou-se um intervalo de confiança de 99% no cálculo do VaR para a carteira linear de ações da Petrobrás, devido ao fato de se ter os valores de negociações em quantidade suficiente para avaliar os modelos. Já no caso da carteira de opções, como as séries de opções não são muito negociadas, utilizou-se o intervalo de 95%.

4

Resultados empíricos

Como o cerne da precisão da simulação de Monte Carlo é o gerador de números com distribuição uniforme (Gentle, 1998), realizou-se o teste de aderência qui-quadrado, de acordo com a seção 3.6, para a distribuição uniforme dos números quase e pseudo-aleatórios, gerados pela função `ran2` e algoritmo de Sobol, respectivamente (Press *et al.*, 1992).

Dividiu-se o intervalo de valores da distribuição uniforme $[0,1]$ em 40 categorias, e destacou-se, na figura 4.1, a distribuição de frequência de 10.000 números oriundos dos dois tipos de geradores. O valor esperado é de 250 ocorrências por categoria. Comparando os histogramas dos números quase e pseudo-aleatórios, observa-se que algumas categorias da distribuição de números pseudo-aleatórios tiveram mais ocorrências que o esperado, enquanto outras categorias tiveram menos ocorrências. A distribuição dos números quase-aleatórios apresentou o valor de frequência esperado de 250 em quase todas as categorias, estando portanto mais próxima de uma distribuição uniforme teórica.

Pode-se perceber a diferença das distribuições de números pseudo e quase-aleatórios ao desenhar a dispersão das 2 (duas) seqüências em 2 (duas) dimensões. Na figura 2.1, nota-se a capacidade dos números quase-aleatórios de se distribuírem mais uniformemente a cada seqüência de números do que a seqüência de pseudo-aleatórios.

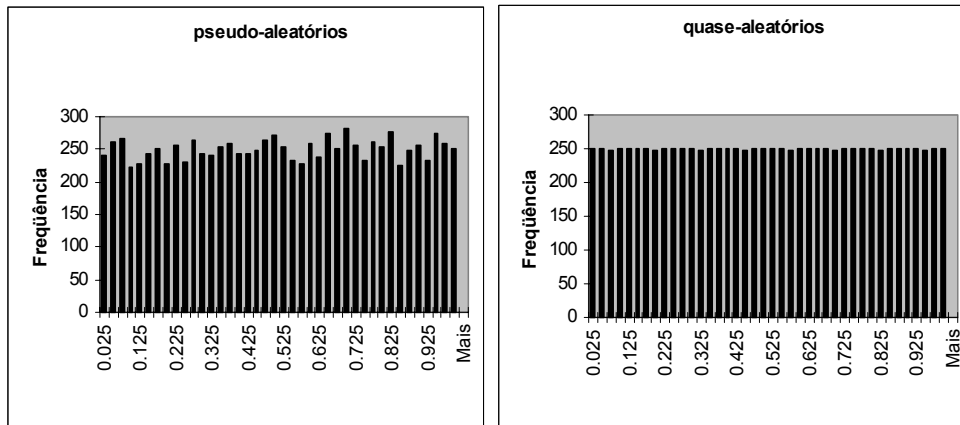


Figura 4.1. Histograma de 10000 números pseudo-aleatórios (ran2) e quase-aleatórios (Sobol).

Aplicando o teste de aderência χ^2 pela fórmula 3.2, obtém-se os valores apresentados na tabela 4.1, de onde não é rejeitada a hipótese de que as duas distribuições são uniformemente distribuída no intervalo $[0,1]$ a 99% de confiança.

Distribuição	Estatística qui-quadrado (valor crítico a 99% = 63.70)
pseudo-aleatórios	38.02
quase-aleatórios	0.22

Tabela 4.1. Teste de aderência qui-quadrado com 40 categorias para a distribuição uniforme de números quase e pseudo-aleatórios

Embora, para as duas distribuições, não tenha sido rejeitada a hipótese de que as amostras foram retiradas de uma distribuição uniforme, a sequência de números quase-aleatórios apresentou uma estatística qui-quadrado que reflete uma aderência muito maior que a de pseudo-aleatórios. Esta característica é de fundamental importância para a convergência da estimativa do VaR, pois, ao aplicar a função inversa¹² para construir uma distribuição normal e então simular as trajetórias dos fatores de risco, a distribuição com

¹² Utilizamos o algoritmo de Moro que se encontra no apêndice

números quase-aleatórios se aproximará da normal mais rapidamente do que os números pseudo-aleatórios.

4.1 Pseudo-aleatórios *versus* quase-aleatórios

Compara-se, nesta seção, a eficiência dos números quase-aleatórios e pseudo-aleatórios, no cálculo do VaR utilizando a simulação de Monte Carlo para carteiras lineares e não-lineares.

A carteira linear hipotética utilizada para a análise é composta de 1 (uma) ação preferencial da Petrobrás S/A – PETR4. O preço da ação segue um processo de Itô, e o seu valor num instante futuro t , considerando um intervalo discreto de um dia ($\Delta t = 1$), de acordo com a equação 3.1 é:

$$S_t = S_0 e^{(R - (\sigma^2 / 2)) + \sigma \varepsilon}$$

Utilizando a expressão anterior, implementam-se diversas trajetórias de preço da ação para o dia seguinte, a partir da simulação de uma distribuição normal da variável ε . Com a distribuição dos preços, determina-se a distribuição da perda da carteira, de onde retira-se, pela significância desejada, o VaR do quantil amostral correspondente.

Utilizando as informações até o dia 30/04/1998, procede-se ao cálculo do VaR para o dia seguinte, 01/05/1998, com significância de 99%. Considera-se o valor verdadeiro do VaR, o obtido com simulação de Monte Carlo com 50.000 pontos (valor exato = -0.0895). A convergência do procedimento numérico é verificada pelo gráfico do erro relativo percentual *versus* número de simulações, constante na figura 4.2.

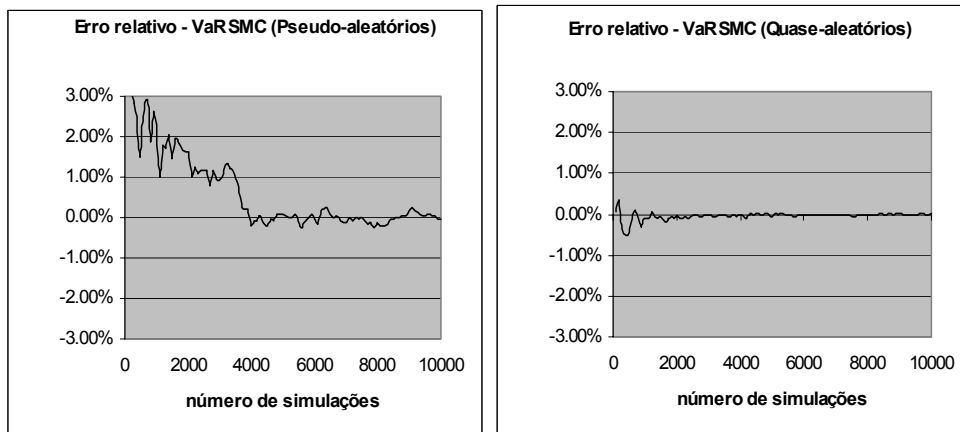


Figura 4.2. Erro relativo percentual do VaR da ação PETR4 calculado pela SMC com números pseudo-aleatórios e quase-aleatórios

Pode-se também comparar estes métodos utilizando-se o critério referenciado por Papageorgiou e Traub (1996), verificando-se para um mesmo nível de erro relativo percentual (ER), $10E-4$ por exemplo, quantos pontos são necessários para atingir tal erro pela utilização dos dois tipos de geradores de aleatórios. A velocidade relativa, calculada pela razão entre a quantidade de números utilizado para o mesmo nível de precisão, também serve de parâmetro para verificar a taxa de convergência relativa entre os geradores.

Método	Erro relativo (ER= $10E-4$)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatórios	4100	0.15
SMC quase-aleatórios	600	6.83

Tabela 4.2. Erro relativo percentual e velocidade relativa da estimativa VaR através da SMC com números pseudo-aleatórios e quase-aleatórios.

Constata-se pela tabela 4.2 que a velocidade relativa da SMC com números quase-aleatórios é bem superior a da SMC com números pseudo-aleatórios. Isto representa, além da eficiência numérica, um tempo computacional muito menor e, por conseguinte, um custo também menor.

Verifica-se, em seguida, a performance da simulação de Monte Carlo e Quase Monte Carlo no cálculo do VaR de uma carteira composta de opção de compra da Petrobrás S/A, que representa neste trabalho uma carteira não-linear. A PETRJ39 é uma opção de compra da ação PETR4 com vencimento em 10 de outubro de 2000 e com preço de exercício de R\$ 50,00, para o lote de 100 (cem) ações. Mais informações – dias de negociação e prêmios – sobre a mesma encontram-se nos anexos.

Utiliza-se, para o cálculo da volatilidade da série da ação objeto da opção, o estimador de máxima verossimilhança com mínima variância dado pela equação 2.6, utilizando como base histórica os últimos 100 dias de negociação da ação PETR4. O valor verdadeiro para o VaR da carteira de opção foi considerado o valor obtido com simulação de 100.000 números.

Considera-se, inicialmente, como variável estocástica, apenas o preço do ativo-objeto (SMC Univariada), obedecendo a movimento definido como um processo de Itô, enquanto que os demais parâmetros necessários para o cálculo do prêmio são considerados constantes. Este é o modelo original de Black & Scholes.

Para comparação da performance da geração dos números aleatórios, calcula-se o VaR para o dia 01/08/2000, utilizando o modelo acima e combinando seqüências de Sobol e de números pseudo-aleatórios. Pelo figura 4.3, observam-se que os números quase-aleatório fazem com que a estimativa do VaR tenha convergência mais rápida para o valor verdadeiro. Com menos de 20000 simulações, já foi possível atingir o valor verdadeiro, e permanecer em torno deste valor com erros relativos inferiores a $10E-4$.

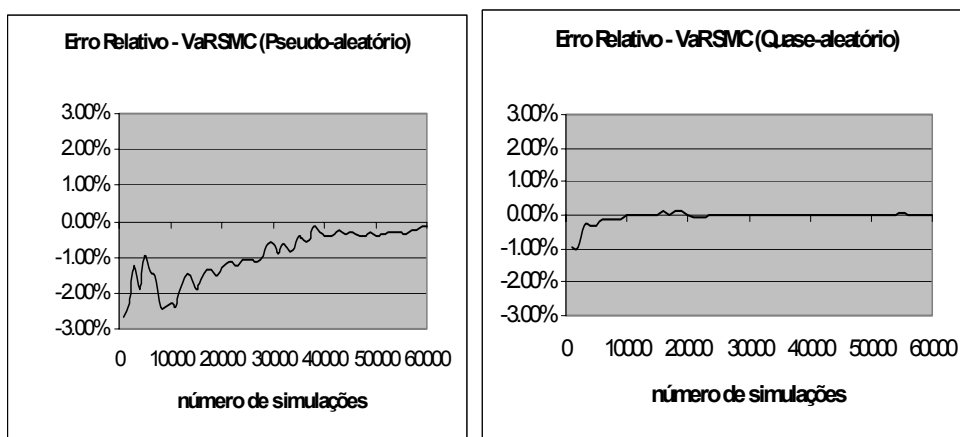


Figura 4.3. Convergência do VaR da carteira de opções de compra PETRJ39 utilizando simulação de Monte Carlo (Univariada)

Na tabela 4.3, comparam-se os métodos, utilizando o critério da velocidade relativa referenciado no item anterior. Observa-se que a velocidade relativa é quase cinco vezes maior para a sequência de números quase-aleatórios. Esta velocidade diminuiu um pouco em relação à velocidade relativa obtida para a carteira linear.

Método	Erro relativo (ER=10E-4)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatório	38000	0.21
SMC quase-aleatório	8000	4.75

Tabela 4.3. Erro relativo percentual (ER) e velocidade relativa do VaR da opção de compra PETRJ39 utilizando simulações de Monte Carlo (Univariada)

Supõe-se, em seguida, que o ativo-objeto e a volatilidade implícita seguem um processo estocástico (SMC Bivariada). Utiliza-se a aproximação do modelo de H&W para precificar a opção e calcular o seu valor no horizonte de um dia a frente, de modo a estimar o VaR.

O erro relativo percentual do VaR para o dia 04/08/2000, utilizando os dois tipos de geradores de números aleatórios, em função da quantidade de simulação, está apresentado na figura 4.4.

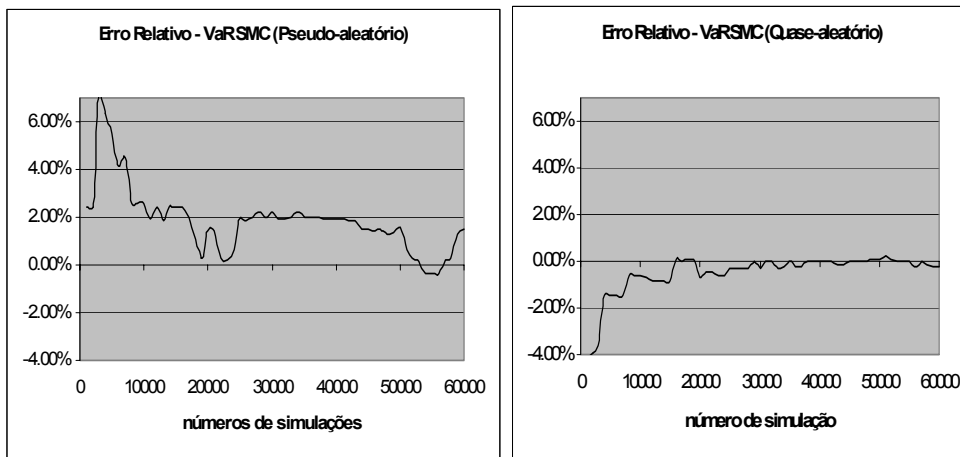


Figura 4.4. Erro relativo percentual do VaR da opção PETRJ39 utilizando SMC Bivariada

Na tabela 4.4, apresentam-se os valores dos erros relativos percentuais, considerando o valor exato para a estimativa o calculado com 100.000 simulações. Verifica-se que a estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo (SMC Bivariada) com gerador de números quase-aleatórios converge a uma velocidade relativa de quatro vezes em comparação com o de números pseudo-aleatórios. Percebe-se que esta vantagem diminui em relação à SMC Univariada onde se considerou apenas o preço da ação como uma variável estocástica.

Método	Erro relativo (ER=10E-4)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatórios	60000	0.25
SMC quase-aleatórios	15000	4.00

Tabela 4.4. Erro relativo percentual e velocidade relativa do VaR da opção PETRJ39 calculado com SMC Bivariado

Considera-se, agora, que as três variáveis, o preço da ação, a volatilidade da ação e a taxa de juros, são estocásticas e acima seguem um processo de Itô. O modelo dos juros é admitido como sendo o modelo de Rendleman e Bartter (1980).

O erro relativo do VaR para o dia 04/08/00, utilizando-se os dois tipos de geradores de números aleatórios está apresentado na figura 4.5.

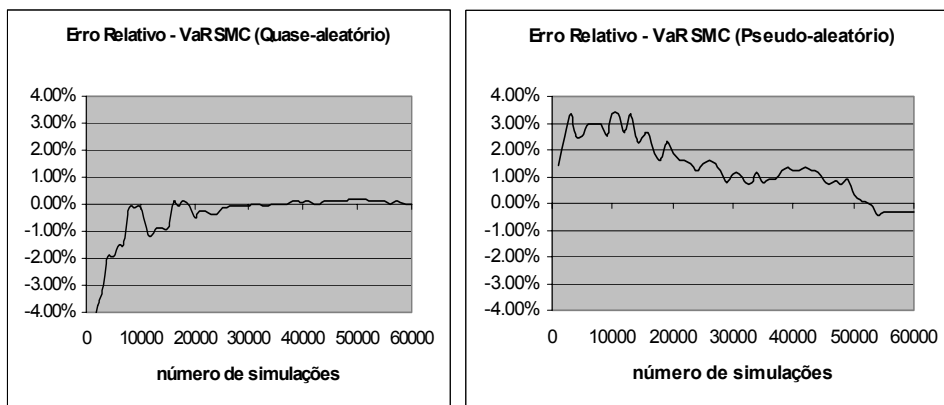


Figura 4.5. Convergência do VaR da opção PETRJ39 com SMC Trivariada

Na tabela 4.5, apresentam-se os valores dos erros relativos, considerando o valor exato para a estimativa o calculado com 100000 simulações. Observa-se novamente que a sequência de números quase-aleatórios foi mais eficiente, considerando-se que atingiu um erro relativo com uma quantidade menor de simulação. No entanto, quando comparado com a SMC Bivariada, percebe-se que a velocidade relativa diminuiu mais um pouco.

Métodos	Erro relativo (ER=10E-4)	Velocidade relativa
SMC pseudo-aleatórios	52000	0.31
SMC quase-aleatórios	16000	3.25

Tabela 4.5. Erro relativo percentual e velocidade relativa do VaR da opção PETRJ39 com SMC Trivariada

Depreende-se da análise que, independentemente do gerador de aleatórios utilizado, a convergência do procedimento numérico de cálculo do VaR é maior quando se trata de carteira lineares. A velocidade relativa da estimativa, utilizando-se sequências de quase-aleatórios, apresentou-se em todos os momentos mais eficiente.

Ademais, percebe-se que, à medida que se incluiu uma dimensão no procedimento numérico, com a inclusão sucessiva de variáveis estocásticas, a performance relativa dos quase-aleatórios diminui, embora a vantagem em relação aos pseudo-aleatórios continue grande. Este resultado está coerente com a análise das fórmulas do erro de estimativa utilizando números pseudo-aleatórios, obtido na seção 2.4, que é da ordem de $n^{-1/2}$, e do erro da estimativa utilizando números quase-aleatórios, que é da ordem de $\frac{(\log(n))^d}{n}$. Esses resultados também estão coerentes com os obtidos por Paskov e Traub (1995), Joy, Boyle e Tan (1996), Papageorgiou e Traub (1996) e Galanti e Jung (1997).

Em síntese, pode-se concluir que a simulação de Monte Carlo (SMC) com gerador de números quase-aleatórios apresenta maior convergência que com números pseudo-aleatórios, na estimativa do VaR de uma carteira de ações e de uma carteira de opções da Petrobrás (Hipótese 1 – não rejeitada).

4.2 SMC *versus* métodos paramétricos

Utilizando agora apenas as seqüências de números quase-aleatórios, verifica-se a capacidade dos modelos de SMC e paramétrico, para uma carteira linear e outra não-linear, em prever a variação na carteira para um dia de horizonte de tempo.

Calcula-se o VaR da ação PETR4 para o horizonte de 1 (um) dia e a 99% de confiança, para os 510 dias compreendidos entre 01/01/1998 e 15/12/1999. Os 100 (cem) dias anteriores a 01/01/1998 foram utilizados para calcular os parâmetros volatilidade e média, a serem aplicados nos modelos. A figura, a seguir, retrata o VaR de retorno para

esta carteira pelos dois métodos, comparado com os retornos efetivamente ocorridos, dos 510 dias seguintes.

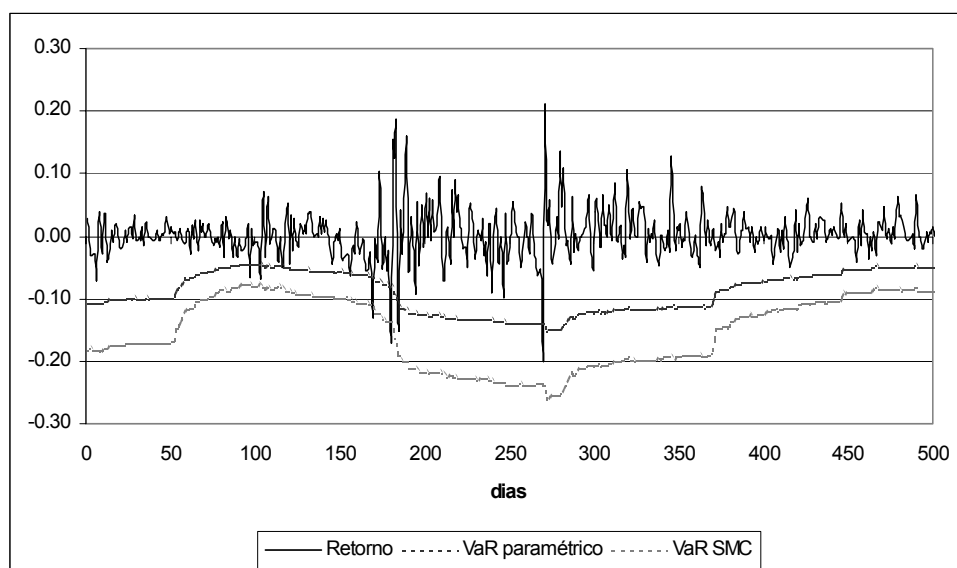


Figura 4.6. VaR da carteira de ações PETR4, posição comprada, pela simulação de Monte Carlo e pelo método paramétrico do desvio padrão

O VaR paramétrico em mais de 9 (nove) dias foi superado pelo retorno efetivo, enquanto que o VaR pela SMC só foi excedido em 2 (dois) momentos. Resta saber se as falhas ocorridas para os métodos estão dentro da incerteza oriunda da variação amostral. Para tanto utiliza-se a tabela 2.1, construída por Kupiec (1995).

Método	Posição	Número de falhas	Proporção de falhas
VaR paramétrico	comprada	10	1.96%
	vendida	12	2.35%
VaR SMC	comprada	2	0.39%
	vendida	2	0.39%

Tabela 4.6. Teste de rejeição da hipótese de que a proporção de falhas é de 1%

Para um nível de confiança de 95%, a máxima quantidade de falhas permitida para não rejeitar a hipótese de que a proporção das mesmas é igual ao nível de confiança

do VaR, ou seja 99%, é de 11 ocorrências, conforme Kupiec (tabela 2.1). Rejeita-se, portanto, apenas o VaR paramétrico da carteira com posição vendida. Verifica-se que, embora, para a carteira com posição comprada, não tenham sido rejeitados os dois métodos, é significativa a diferença da quantidade de erros para cada método, apresentando o método de SMC menos erros.

Para verificar a capacidade das estimativas de VaR dos métodos propostos para carteiras não-lineares, utiliza-se uma carteira hipotética composta de opções de compra PETRH5 e PETRH6, pois as mesmas apresentam o maior intervalo de negociação para o período analisado, de modo a ter maior consistência para o teste de proporção das falhas.

Realizou-se o cálculo do VaR para todo o período de negociação da opção utilizando a simulação de Monte Carlo com números quase-aleatórios e também pelas aproximações Delta e Delta-Gama. Os resultados são comparados com o valor da perda efetiva da carteira.

Inicialmente, realizou-se o procedimento para a opção PETRH6 e os resultados encontram-se na tabela 4.7.

Data	Varição no prêmio	SMC Uni	SMC Bi	SMC Tri	Delta	Delta-Gama
15-Jun-00	0.000	-0.600	-0.334	-0.336	0.000	0.000
16-Jun-00	0.370	-0.591	-0.512	-0.512	0.000	0.000
19-Jun-00	1.498	-0.713	-0.550	-0.548	0.000	0.000
20-Jun-00	-0.499	-0.855	-0.775	-0.776	0.000	0.000
21-Jun-00	0.300	-0.838	-0.988	-0.988	0.000	0.000
23-Jun-00	0.000	-0.894	-1.002	-1.003	0.000	-0.006
26-Jun-00	0.000	-0.889	-1.024	-1.027	-0.018	-0.003
27-Jun-00	1.000	-0.887	-1.019	-1.019	-0.053	-0.004
28-Jun-00	0.400	-1.048	-1.086	-1.086	-0.012	-1.451
29-Jun-00	-1.200	-1.165	-1.143	-1.139	-0.052	-2.272
30-Jun-00	0.290	-1.004	-1.145	-1.145	-0.054	-1.321
03-Jul-00	0.410	-1.145	-1.174	-1.176	-0.062	-2.253
04-Jul-00	1.200	-1.300	-1.274	-1.274	-0.060	-2.394
05-Jul-00	-0.400	-1.477	-1.396	-1.394	0.000	-2.461
06-Jul-00	-0.300	-1.294	-1.241	-1.245	-0.033	-2.409
07-Jul-00	-1.290	-1.295	-1.268	-1.270	-0.004	-2.411
10-Jul-00	-0.110	-1.024	-1.077	-1.077	0.000	-1.879
11-Jul-00	-1.550	-1.015	-1.061	-1.063	0.000	-2.082
12-Jul-00	-0.450	-0.637	-0.784	-0.783	0.000	0.000
13-Jul-00	-0.390	-0.536	-0.670	-0.670	0.000	0.000
14-Jul-00	0.090	-0.396	-0.521	-0.520	0.000	0.000
17-Jul-00	0.100	-0.471	-0.558	-0.558	0.000	0.000
18-Jul-00	-0.100	-0.468	-0.577	-0.577	0.000	0.000
19-Jul-00	-0.100	-0.435	-0.538	-0.538	0.000	0.000
20-Jul-00	0.400	-0.421	-0.502	-0.501	0.000	0.000
21-Jul-00	0.150	-0.638	-0.655	-0.656	0.000	0.000
24-Jul-00	-0.400	-0.654	-0.674	-0.676	0.000	0.000
25-Jul-00	-0.250	-0.501	-0.536	-0.538	0.000	0.000
26-Jul-00	0.100	-0.367	-0.421	-0.422	0.000	0.000
27-Jul-00	-0.240	-0.412	-0.462	-0.463	0.000	0.000
28-Jul-00	-0.260	-0.320	-0.367	-0.368	0.000	0.000
31-Jul-00	-0.050	-0.208	-0.248	-0.248	0.000	0.000
01-Ago-00	-0.200	-0.191	-0.224	-0.223	0.000	0.000
02-Ago-00	0.000	-0.091	-0.112	-0.111	0.000	0.000
03-Ago-00	0.030	-0.097	-0.112	-0.112	0.000	0.000
04-Ago-00	0.010	-0.113	-0.130	-0.130	0.000	0.000
07-Ago-00	0.110	-0.112	-0.132	-0.132	0.000	0.000
08-Ago-00	-0.160	-0.173	-0.194	-0.194	0.000	0.000
09-Ago-00	0.000	-0.087	-0.101	-0.101	0.000	0.000
10-Ago-00	0.060	-0.084	-0.100	-0.100	0.000	0.000
11-Ago-00	0.050	-0.149	-0.137	-0.137	0.000	0.000
14-Ago-00	-0.040	-0.182	-0.167	-0.167	0.000	0.000
15-Ago-00	0.040	-0.156	-0.144	-0.145	0.000	0.000
16-Ago-00	-0.060	-0.188	-0.172	-0.172	0.000	0.000
17-Ago-00	0.160	-0.161	-0.150	-0.150	0.000	0.000
18-Ago-00	-0.330	-0.307	-0.289	-0.289	0.000	0.000

Tabela 4.7. Estimativas do VaR da opção PETRH6 pela simulação de Monte Carlo (SMC) em 3 variantes e para os métodos paramétricos Delta e Delta-Gama

Aplicando o procedimento de *backtesting*, calcula-se a proporção de falhas dos métodos na previsão da perda da carteira.

Método	Posição	Número de falhas	Proporção de falhas (p)	Hipótese nula: $p=0.05$
SMC Uni	comprada	4	8.70%	não rejeita
	vendida	2	4.35%	não rejeita
SMC Bi	comprada	4	8.70%	não rejeita
	vendida	2	4.35%	não rejeita
SMC Tri	comprada	4	8.70%	não rejeita
	vendida	2	4.35%	não rejeita
Delta	comprada	23	50.00%	rejeita
	vendida	22	47.83%	rejeita
Delta-Gama	comprada	17	36.96%	rejeita
	vendida	19	41.30%	rejeita

Tabela 4.8. Teste de Hipótese de que a proporção de falhas do VaR é 0.05 a 95% de confiança

A proporção de falhas pelos métodos paramétricos foi rejeitada a 95% de confiança, enquanto os 3 (três) modelos de SMC não foram rejeitados. A performance dos 3 (três) tipos de simulação de Monte Carlo foi exatamente a mesma. Conclui-se, portanto, que a inclusão de variáveis estocásticas, quase sejam, a volatilidade implícita e juros, não agregou ao modelo capacidade de prever a variação da carteira.

Replicou-se o mesmo procedimento para a opção PETRH5, obtendo-se os resultados seguintes. Não constam valores para a SMC Trivariada, em alguns dias, porque não foi possível realizar a fatoração de Cholesky, no entanto, no cálculo das proporções das falhas, não foram incluídos tais dias. Os resultados estão apresentados na tabela 4.9.

Também para a opção PETRH5, os métodos paramétricos foram reprovados. Os resultados obtidos pela SMC Univariada, Bivariada e Trivariada foram equivalentes. A não melhoria do método com a inclusão da volatilidade implícita como variável estocástica está de acordo com o que Hull (2000) preconiza: “para opções com vida inferior a um ano, o impacto da precificação de uma volatilidade estocástica é razoavelmente pequeno”.

Data	Varição no prêmio	SMC Uni	SMC Bi	SMC Tri	Delta	Delta-Gama
20-Jun-00	-0.850	-1.179	-0.808		-0.034	-2.167
21-Jun-00	0.750	-1.251	-1.477		-0.021	-2.188
23-Jun-00	0.000	-1.303	-1.460	-1.293	-0.026	-2.213
26-Jun-00	0.300	-1.293	-1.440		0.000	-2.215
27-Jun-00	1.900	-1.284	-1.420		-0.004	-2.214
28-Jun-00	-0.100	-1.412	-1.618		-0.069	-2.281
29-Jun-00	-1.000	-1.624	-1.621	-1.074	-0.056	-2.346
30-Jun-00	0.900	-1.471	-1.569	-0.828	-0.056	-2.293
03-Jul-00	0.700	-1.638	-1.648	-0.702	-0.056	-2.334
04-Jul-00	1.500	-1.834	-1.772	-0.775	-0.054	-2.394
05-Jul-00	-1.200	-1.917	-1.842	-1.594	-0.062	-2.461
06-Jul-00	-0.350	-1.770	-1.789	-1.858	-0.060	-2.409
07-Jul-00	-1.150	-1.844	-1.831	-1.797	0.000	-2.412
10-Jul-00	-0.350	-1.489	-1.479	-1.935	-0.093	-2.308
11-Jul-00	-2.340	-1.529	-1.496	-1.016	-0.009	-2.290
12-Jul-00	-1.010	-1.130	-1.282	-1.089	-0.133	-2.155
13-Jul-00	-0.100	-1.028	-1.185	-0.409	-0.037	-2.106
14-Jul-00	0.750	-0.863	-1.096	-1.033	-0.003	-0.463
17-Jul-00	-0.600	-1.069	-1.211	-1.232	-0.064	-2.093
18-Jul-00	-0.150	-0.954	-1.100	-1.081	-0.018	-2.193
19-Jul-00	0.230	-0.914	-1.070	-1.068	-0.004	-1.710
20-Jul-00	0.970	-0.969	-1.115	-1.440	-0.011	-2.266
21-Jul-00	0.000	-1.384	-1.360	-0.942	-0.112	-2.230
24-Jul-00	-0.600	-1.317	-1.278	-1.151	-0.013	-2.249
25-Jul-00	-1.050	-1.121	-1.146	-1.385	-0.052	-2.185
26-Jul-00	0.140	-0.814	-0.885	-1.427	0.000	-0.070
27-Jul-00	-0.390	-0.882	-0.932	-1.283	-0.001	-0.649
28-Jul-00	-0.400	-0.753	-0.823	-1.143	0.000	0.000
31-Jul-00	-0.050	-0.592	-0.696	-0.856	0.000	0.000
01-Ago-00	-0.560	-0.592	-0.686	-0.774	0.000	0.000
02-Ago-00	0.110	-0.391	-0.476	-0.494	0.000	0.000
03-Ago-00	0.140	-0.461	-0.530	-0.502	0.000	0.000
04-Ago-00	-0.170	-0.509	-0.572	-0.654	0.000	0.000
07-Ago-00	0.270	-0.427	-0.495	-0.638	0.000	0.000
08-Ago-00	-0.260	-0.567	-0.596	-0.765	0.000	0.000
09-Ago-00	-0.030	-0.418	-0.478	-0.738	0.000	0.000
10-Ago-00	0.530	-0.393	-0.459	-0.722	0.000	0.000
11-Ago-00	-0.030	-0.854	-0.729	-0.407	-0.149	-3.175
14-Ago-00	-0.080	-0.867	-0.763	-0.445	0.000	-3.760
15-Ago-00	0.230	-0.816	-0.712	-0.362	-0.003	-3.611
16-Ago-00	0.200	-0.979	-0.869	-1.021	-0.032	-2.293
17-Ago-00	1.450	-1.340	-1.250	-0.847	-0.046	-2.344
18-Ago-00	-1.490	-2.194	-2.194	-1.491	-0.083	-2.433

Obs.: nos dias em branco não foi possível fatorar (Cholesky) a matriz de covariâncias

Tabela 4.9. Estimativas do VaR da opção PETRH5 pela simulação de Monte Carlo (SMC) em 3 variantes e para o métodos paramétricos Delta e Delta-Gama

Método	Posição	Número de falhas	Proporção de falhas (p)	Hipótese nula: p=0.05
SMC Uni	comprada	1	2.33%	não rejeita
	vendida	4	9.30%	não rejeita
SMC Bi	comprada	2	4.65%	não rejeita
	vendida	3	6.98%	não rejeita
SMC Tri	comprada	1	2.63%	não rejeita
	vendida	3	7.89%	não rejeita
Delta	comprada	23	53.49%	rejeita
	vendida	17	39.53%	rejeita
Delta-Gama	comprada	7	16.28%	rejeita
	vendida	6	13.95%	rejeita

Tabela 4.10. Teste de Hipótese de que a proporção de falhas do VaR é 0.05 a 95% de confiança

Como o tamanho das amostras para as duas opções é maior que 30 (trinta), pode-se utilizar a distribuição normal como aproximação da distribuição binomial, que representa a distribuição das falhas na previsão da perda admitida da carteira para o nível de confiança (Kupiec, 1995), para fazer o teste de hipótese de que as proporções das falhas dos métodos entre as duas séries de opções são iguais. Tem-se como resultado a não rejeição de que as duas amostras possuem a mesma proporção de falhas.

Métodos	Posição	PETRH6		PETRH5		Desvio	Z =(p1-p2)/desvio	Hipótese Nula: p1=p2 2.58 (a 99%)
		p1	n1	p2	n2			
SMC Uni	comprada	8.70%	46	2.33%	43	0.059783	1.065522335	não rejeita
	vendida	4.35%	46	9.30%	43	0.043268	-1.144026866	não rejeita
SMC Bi	comprada	8.70%	46	4.65%	43	0.059783	0.677451406	não rejeita
	vendida	4.35%	46	6.98%	43	0.043268	-0.607836497	não rejeita
SMC Tri	comprada	8.70%	46	2.63%	38	0.061782	0.982482327	não rejeita
	vendida	4.35%	46	7.89%	38	0.044715	-0.791675523	não rejeita

Tabela 4.11. Teste da hipótese nula de que as proporções de falhas do VaR entre as séries de opções PETRH6 e PETRH5 são iguais

Em síntese, pode-se concluir que o VaR calculado pela simulação Monte Carlo (SMC) e gerador de números quase-aleatórios apresenta-se adequado na previsão da

variação das carteiras de ações PETR4 e de opções da Petrobrás, PETRH5 e PETRH6 (Hipótese 2 – não rejeitada), bem como apresenta melhor desempenho comparativamente com os métodos paramétricos (Hipótese 3 – não rejeitada). Ademais, com a não-rejeição das três hipóteses formuladas na seção 4.1, consegue-se responder adequadamente as duas perguntas de pesquisa formuladas na seção 1.2.

5 Conclusões

Foi proposto, com este trabalho, avaliar o desempenho da técnica de VaR calculada por simulação de Monte Carlo (SMC) na previsão das variações do valor de uma carteira de ações da Petrobrás (PETR4) e de uma carteira de opções de compra da ação PETR4. Para as ações PETR4, foram considerados os preços de fechamento no período de 4 de julho de 1994 a 18 de agosto de 2000, enquanto que, para as opções, utilizaram-se as três séries mais negociadas no período de 20 de abril de 1998 a 18 de agosto de 2000: PETRJ39, PETRH5 e PETRH6.

Sabendo-se que a precisão da estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo (SMC) depende da qualidade do gerador de números “aleatórios”, certificou-se, primeiramente, para a carteira de ações PETR4 e para a carteira de opções, esta última utilizando os três modelos de precificação propostos, de que as seqüências de números quase-aleatórios superam em convergência as tradicionais seqüências de números pseudo-aleatórios. Verificou-se que esta vantagem comparativa decresceu com o aumento da dimensão do problema, ou seja, quando foram incluídas variáveis estocásticas no modelo de precificação. Este resultado está compatível com a formulação teórica para os erros de estimativas: a SMC com números pseudo-aleatórios, obtido na seção 2.4, tem erro de estimativa da ordem de $n^{-1/2}$, enquanto a SMC com números quase-aleatórios tem erro da

ordem de $\frac{(\log(n))^d}{n}$. Esses resultados também estão coerentes com os obtidos por Papageorgiou e Traub (1996) e por Galanti e Jung (1997).

A estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo para a ação PETR4, no período compreendido entre 01 de janeiro de 1998 e 15 de dezembro de 1999, foi considerada adequada para previsão da perda da carteira, ao nível de confiança de 99%, utilizando-se o teste de proporção de falhas proposto por Kupiec (1995), apresentado na seção 2.6. Ademais, este método teve performance melhor que o método paramétrico do desvio padrão. Essa vantagem era esperada, pois o método paramétrico do desvio padrão pressupõe que a melhor previsão para a variância em $t+1$ é a realizada em t , não se levando em conta a possibilidade de mudanças nas condições de mercado. Pela simulação de Monte Carlo, obteve-se o VaR pela distribuição simulada das variações da carteira, a partir das trajetórias do preço que seguem um processo estocástico de Itô.

A exatidão da estimativa do VaR pela simulação de Monte Carlo reside na adequada especificação do modelo que representa a perda ou precificação do valor da carteira. Dessa forma, analisaram-se os três modelos: o Black&Scholes (SMC Univariada), o de Hull&White que inclui volatilidade estocástica (SMC Bivariada) e, por último, a inclusão da taxa de juros também estocástica através do modelo de Rendleman e Bartter (SMC Trivariada).

O VaR calculado pela simulação de Monte Carlo, utilizando os três modelos de precificação, apresentou-se adequado na avaliação da perda do valor das opções. Nas séries analisadas, não se rejeitou a hipótese de que a estimativa de VaR é suficiente para prever as piores realizações da carteira de opções, dentro de um nível de confiança desejado de 95%. A SMC teve performance melhor do que os modelos paramétricos de aproximação pela expansão de Taylor, Delta e Delta-Gama. Na realidade, as estimativas do VaR pelos

métodos Delta e Delta-Gama foram inclusive rejeitadas pelo teste de Kupiec (1995). Uma das razões para essa deficiência dos métodos paramétricos é que a expansão de Taylor pressupõe pequenas variações no valor da opção, o que realmente não ocorreu para as opções PETRH5 e PETRH6. Na prática, mesmo com as deficiências das aproximações analíticas, esta abordagem é escolhida quando se trata de carteiras com muitos ativos, pois a simulação de Monte Carlo torna-se demorada e com custo computacional elevado (Duffie e Pan, 1997). No entanto, a tendência atual é ter cada vez capacidade de processamento mais elevada a preços mais baixos, potencializando a utilização da simulação de Monte Carlo.

Entre os modelos utilizados pela SMC para precificação da opção, não foram obtidas evidências de que algum deles seja superior aos demais. As estimativas do VaR pelos modelos de Black & Scholes (SMC Univariado), Hull & White (SMC Bivariada) e o do Hull & White com juros estocásticos (SMC Trivariada) foram compatíveis. Não houve melhorias significativas na estimativa de VaR pelo modelo de B&S com a inclusão da volatilidade implícita como variável estocástica (SMC Bivariado). Como as opções utilizadas foram pouco negociadas, menos de 60 dias, o impacto da precificação de uma volatilidade estocástica é muito pequena (Hull, 2000), levando, portanto, a poucas alterações na distribuição simulada da perda da carteira e por conseguinte não influenciando muito a estimativa do VaR.

A estimativa do VaR considerando-se, além do preço e da volatilidade, a taxa de juros como variável estocástica, também não apresentou diferenças significativas com relação àquelas obtidas pelos modelos de Black & Scholes e de Hull & White. A utilização de modelos de taxa de juros que incorporem algumas características que o modelo de Rendleman e Bartter não satisfaz, como a tendência de reversão à média, pode levar a precificações mais adequadas e, por isso, próximos trabalhos deverão abordar tais modelos.

Como a SMC pode simular a trajetória da variável estocástica, por exemplo o preço, desde o momento inicial até o vencimento da opção, este procedimento numérico torna-se vital na análise de derivativos que dependam dos valores das variáveis em pontos intermediários, e não apenas do valor no vencimento da opção. Próximas pesquisas poderão abordar a eficiência da SMC na precificação e cálculo do VaR em opções exóticas e dependentes de trajetória.

Embora, para a carteira hipotética de ações e de opções da Petrobrás e para o período considerado, os métodos utilizados para estimar o VaR tenham sido eficientes, deve-se entender tal abordagem como um procedimento necessário, mas não suficiente, para o controle eficaz de risco. Em momentos de crise, as condições de mercado poderão não ser as mesmas, e, portanto, o VaR deve ser complementado por outros procedimentos de controle de risco.

Referências bibliográficas

- ALEXANDER, C. O. e LEIGH, C. T. "On the covariance matrices used in value at risk models". *The Journal of Derivatives*, spring, v. 4, n. 3, p. 50-62, 1997.
- ALMEIDA, A. F. e GHIRARDI, A. "Estudo comparativo de modelos de gerenciamento de risco de mercado com uma carteira composta por ativos típicos de um fundo de ações". *Anais da ENANPAD*, Brasil, 1999.
- BEDER, T. S. "VaR: seductive but dangerous". *Financial Analysts Journal*, p. 12-24, set./out. 1995.
- BERTUCCI, L. A. "Avaliação de modelos de volatilidade condicionada na precificação de opções de compra no mercado da Bovespa". *Anais da ENANPAD*, Brasil, 1999.
- BLACK, F. e SCHOLES, M. "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, n. 81, p. 637-657, mai./jun. 1973.
- BOLLERSLEV, T. "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity". *Journal of Econometrics*, v. 31, p. 307-327, 1986.
- BOLLERSLEV, T., CHOU, R. Y. e KRONER, K. F. "ARCH modeling in finance: a review of the theory and empirical evidence". *Journal of Econometrics*, v. 52, n. 1, p. 55-59, 1992.
- BOYLE, P. P. "Options: a monte carlo approach". *Journal of Financial Economics*, n. 4, p. 323-338, 1977.
- DUARTE JR, A. M., "Simulação Monte Carlo para análise de opções". *Resenha BM&F*, n. 115, p. 52-64, 1996a.
- _____, "Estimação da volatilidade de ativos e índices brasileiros". *Resenha BM&F*, n. 111, São Paulo, jul. 1996b.
- DUFFIE, D. e PAN, J. "An overview of value at risk". *Journal of Derivatives*, v. 4, n. 3, p. 7-49, spring 1997.

- ENGLE, R. F. "Autoregressive Conditional Heterocedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation". *Econometrica*, v. 50, p. 987-1007, 1982.
- ENGLE, R. F. "Statistical models for financial volatility". *Financial Analysts Journal*, p.72-78, jan./fev., 1993.
- FARIAS FILHO, A.C. "Avaliação do value at risk do índice Bovespa usando os modelos GARCH, TARCH e *RiskMetrics™* para se estimar a volatilidade". *Dissertação de Mestrado em Administração*, FGV-SP, 1997.
- FONG, H. G. e LIN, K.C. "A new analytical approach to value at risk". *The Journal of Portfolio Management*, p. 88-97, mai. 1999.
- GALANTI, S. e JUNG, A. "Low-discrepancy sequences: Monte Carlo simulation of options prices". *The Journal of Derivatives*, p. 63- 83, fall 1997.
- GENTLE, J. E. "Random number generation and Monte Carlo methods". New York: Springer-Verlag, 1998.
- HULL, J. C. e WHITE, A. "The pricing of options on assets with stochastic volatilities", *The Journal of Finance*, n. 42, p. 281-300, jun. 1987.
- _____, "Options, futures & others derivatives". 4^a ed., Upper Saddler River: Prentice-Hall, 2000.
- JACKSON, P., MAUDE, D. J. e PERRAUDIN, W. "Bank capital and value at risk". *The Journal of Derivatives*, v. 4, n. 3, p. 73-89, spring 1997.
- _____, "Testing value at risk approaches to capital adequacy". *Bank of England Quarterly Bulletin*, p.256-266, ago., 1998.
- JOY, C., BOYLE, P. P. e TAN. K. S. "Quasi-Monte Carlo methods in numerical finance". *Management Science*, v. 42, n. 6, p. 926-936, jun. 1996.
- JORION, P. "Risk²: measuring the risk in value-at-risk". *Financial Analysts Journal*, p. 47-56, nov./dez., 1996.
- _____, "Value at risk: the new benchmarking for managing financial risk". 2^a ed., New York: McGraw-Hill, 2000.
- KIMURA, H. e SUEN, A. S. "Aplicação de procedimentos de backtesting para a avaliação de performance de metodologias de value-at-risk em carteiras com ativos financeiros brasileiros". *Anais da ENANPAD*, Brasil, 1997.
- KUPIEC, P. "Techniques for verifying the accuracy of risk measurements models". *Journal of Derivatives*, v. 2, p. 73-84, dez. 1995.

- LEMGRUBER, E. F. “O modelo de projeção de volatilidade do *RiskMetrics™* e a hipótese de distribuição normal condicional para alguns fatores de risco do Brasil”. *Anais da ENANPAD*, Brasil, 1997.
- LOPEZ, J. A. “Methods for evaluating value-at-risk estimates”. *FRBSF Economic Review*, n. 2, p. 3-17, 1998.
- MARKOWITZ, H. “Portfolio selection”. *Journal of Financial*, n. 7, p. 77-91, mar. 1952.
- MARKOWITZ, H. “Portfolio selection: efficient diversification of investments”. New York: John Wiley, 1959.
- MOLLICA, M. A. “Avaliação de modelos de value at risk: comparação entre métodos tradicionais e de variância condicional”. Dissertação de Mestrado, FEAC-USP, 1999.
- MORO, B. “The full monte”. *Risk*, v. 8, n. 2, p. 57-58, fev. 1995.
- PAPAGEORGIOU, A. e TRAUB, J.T. “Beating Monte Carlo”. *Risk*, v.9, n.6, p. 63-65, jun. 1996.
- PAPAGEORGIOU, A. e PASKOV, S. “Deterministic simulation for risk management”. *The Journal of Portfolio Management*, p. 122-127, mai. 1999.
- PASKOV, S. H. “New methodologies for valuing derivatives”. Technical Report, Computer Science Department, Columbia University, out. 1994.
- PASKOV, S. H. e TRAUB, J. F. “Faster valuation of financial derivatives”. *The Journal of Portfolio Management*, p. 113-120, fall 1995.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T. e FLANNERY, B. P. “Numerical recipes in Fortran 77: the art of scientific computing”, 2ª ed., Cambridge - EUA: Cambridge University Press, 1996.
- RiskMetrics™* - Technical Document, 4ª ed., J.P.Morgan, New York, 1995.
- PRIEST, A. “Not so simple for Siemens, VAR: Understanding and applying value-at-risk”. London, *Risk*, p.362-365, 1997.
- RENDLEMAN, R. e BARTTER, B. “The pricing of options on debt securities”. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, n. 15, p. 11-24, mar. 1980.
- SANTOS, J. E. “Previsão de volatilidade no Brasil: *RiskMetrics™*, GARCH, Volatilidade Implícita ou uma combinação desses modelos? Um estudo empírico”. *Tese de Doutorado em Administração*, FGV-SP, 1997.
- SILVEIRA, M. A. et al. “Estimação da volatilidade do retorno das ações brasileiras – um método alternativo à família GARCH”. *Resenha da BM&F*, n. 116, p. 21-39, 1997.
- SOBOL, I. M. “A primer for the Monte Carlo Method”. USA: CRC Press LLC, 1994.

TAYLOR, S. J. "Modelling Financial Time Series". UK: John Wiley & Sons, 1986.

TEZUKA, S. "Uniform Random numbers: theory and practice". Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995.

TRAUB, J. F. e WOZNIAKOWSKI, H. "Breaking intractability", *Scientific American*, p. 102-107, jan. 1994.

Apêndices

Apêndice 1. Tabelas

Tabela 2.1. Intervalos de não-rejeição da hipótese nula H_0 de que a proporção de falhas p^* é igual a p , a 5% de confiança.....	50
Tabela 2.2. Número máximo do tamanho da amostra para que a hipótese nula $p=p^*$ seja rejeitada a 95% de confiança.	51
Tabela 4.1. Teste de aderência qui-quadrado com 40 categorias para a distribuição uniforme de números quase e pseudo-aleatórios	74
Tabela 4.2. Erro relativo percentual e velocidade relativa da estimativa VaR através da SMC com números pseudo-aleatórios e quase-aleatórios.	76
Tabela 4.3. Erro relativo percentual (ER) e velocidade relativa do VaR da opção de compra PETRJ39 utilizando simulações de Monte Carlo (Univariada)	78
Tabela 4.4. Erro relativo percentual e velocidade relativa do VaR da opção PETRJ39 calculado com SMC Bivariado	79
Tabela 4.5. Erro relativo percentual e velocidade relativa do VaR da opção PETRJ39 com SMC Trivariada	80
Tabela 4.6. Teste de rejeição da hipótese de que a proporção de falhas é de 1%.....	82
Tabela 4.7. Estimativas do VaR da opção PETRH6 pela simulação de Monte Carlo (SMC) em 3 variantes e para os métodos paramétricos Delta e Delta-Gama.....	84
Tabela 4.8. Teste de Hipótese de que a proporção de falhas do VaR é 0.05 a 95% de confiança	85
Tabela 4.9. Estimativas do VaR da opção PETRH5 pela simulação de Monte Carlo (SMC) em 3 variantes e para o métodos paramétricos Delta e Delta-Gama	86
Tabela 4.10. Teste de Hipótese de que a proporção de falhas do VaR é 0.05 a 95% de confiança.....	87
Tabela 4.11. Teste da hipótese nula de que as proporções de falhas do VaR entre as séries de opções PETRH6 e PETRH5 são iguais.....	87

Apêndice 2. Figuras

Figura 2.1. Distribuição em 2(duas) dimensões de seqüências de números pseudo-aleatórios gerados pela função ran2 e de quase-aleatórios gerados pelo algoritmo de Sobol	38
Figura 2.2. Convergência da Função Normal Acumulada utilizando números quase-aleatórios e pseudo-aleatórios	40
Figura 4.1. Histograma de 10000 números pseudo-aleatórios (ran2) e quase-aleatórios (Sobol).....	74
Figura 4.2. Erro relativo percentual do VaR da ação PETR4 calculado pela SMC com números pseudo-aleatórios e quase-aleatórios.....	76
Figura 4.3. Convergência do VaR da carteira de opções de compra PETRJ39 utilizando simulação de Monte Carlo (Univariada).....	78
Figura 4.4. Erro relativo percentual do VaR da opção PETRJ39 utilizando SMC Bivariada	79
Figura 4.5. Convergência do VaR da opção PETRJ39 com SMC Trivariada.....	80
Figura 4.6. VaR da carteira de ações PETR4, posição comprada, pela simulação de Monte Carlo e pelo método paramétrico do desvio padrão.....	82

Apêndice 3. Função Normal Inversa

Este apêndice explica o procedimento utilizado nesta dissertação para inverter a função de densidade normal cumulativa (Moro, 1995).

O algoritmo Box-Müller usualmente utilizado para tal procedimento não foi seguido neste trabalho, devido ao fato de este algoritmo alterar a ordem das seqüências de baixa discrepância. Moro (1995) afirma que seu algoritmo é mais rápido do que o Box-Müller e tem um erro máximo de 3×10^{-9} .

Considere a função de densidade normal cumulativa padronizada:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

O algoritmo de Moro considera duas aproximações. A primeira é empregada no centro da distribuição, ou mais especificamente, quando $0.08 \leq \Phi(x) \leq 0.92$. Neste caso a função inversa $\Phi^{-1}(x)$ é dada pela seguinte aproximação, considerando-se $y = \Phi(x) - 0.5$:

$$\Phi^{-1}(x) = y \frac{\sum_{n=0}^3 a_n y^{2n}}{\sum_{n=0}^4 b_n y^{2n}}$$

As constantes a_n e b_n são apresentadas na tabela a seguir.

A segunda aproximação é utilizada nas caudas da distribuição, ou seja, quando $\Phi(x) < 0.08$ e $\Phi(x) > 0.92$. Neste caso, a função inversa é aproximada pela série truncada de Chebyshev (Press *et al.*, 1996) da seguinte forma:

$$\Phi^{-1}(x) \begin{cases} \sum_{n=0}^8 c_n T_n(z) - \frac{c_0}{2}, & \text{se } y > 0 \\ \frac{c_0}{2} - \sum_{n=0}^8 c_n T_n(z), & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

Onde $z = k_1 \cdot [2 \cdot \text{Log}(-\text{Log}(0.5 - |y|)) - k_2]$ e as constantes k estão na tabela a seguir. $T_n(z)$ é o polinômio de Chebyshev de grau n , que é dado pela fórmula exata $\cos(n \cdot \arccos(z))$. Outra maneira de determinar esta fórmula é através da identidade trigonométrica, onde se determinam as seguintes relações:

$$T_0(z) = 1$$

$$T_{n+1}(z) = 2zT_n(z) - T_{n-1}(z)$$

O limite superior da somatória, $n=8$, é determinado arbitrariamente. Para o valor acima, o máximo erro absoluto é de 3×10^{-9} .

Uma forma mais rápida para calcular a série de Chebyshev é utilizar a fórmula recursiva de Clenshaws (Press *et al.*, 1992), onde se tem que:

$$f(z) = \sum_{n=0}^8 c_n T_n(z) - \frac{c_0}{2} = zd_1 - d_2 + \frac{c_0}{2}$$

n	a_n	b_n	c_n	k_n
0	2.5066282388400	1.0000000000000	7.7108870705488	
1	-18.6150006252900	-8.4735109309000	2.7772013533685	0.4179886424926
2	41.3911977353400	23.0833674374300	0.3614964129261	4.2454686881377
3	-25.4410604963700	-21.0622410182600	0.0373418233435	
4		3.1308290983300	0.0028297143037	
5			0.0001625716918	
6			0.0000080173305	
7			0.0000003840920	
8			0.0000000129707	

Tabela. Constantes para Inverter a Função Normal Acumulada

Apêndice 4. Fatoração de Cholesky

Uma matriz simétrica e positiva definida pode ser eficientemente decomposta em duas matrizes triangulares (uma inferior e outra superior) através da decomposição de Cholesky. Para uma matriz de qualquer tipo, isso é alcançado através da decomposição L.U que fatoriza $A = L.U$. Se A satisfaz o critério anterior, ela pode ser decomposta mais eficientemente em $A = LL^T$, onde L (que pode ser interpretada como “raiz quadrada” de A) é a matriz triangular inferior com todos os elementos de sua diagonal positivos. Uma variante do método de Cholesky é a decomposição da forma $A = R^T R$, onde R é uma matriz triangular superior.

A decomposição de Cholesky é geralmente utilizada para resolver as equações normais de um problema linear por mínimos, onde temos $A^T Ax = A^T b$, onde $A^T A$ é simétrica e positiva definida.

Para resolver o problema $A = LL^T$, é feita a simples equalização dos coeficientes dos dois lados da equação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

para obter:

$$a_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{21} = l_{21} \cdot l_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{l_{11}}$$

$$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$a_{32} = l_{31} \cdot l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{(a_{32} - l_{31} \cdot l_{21})}{l_{22}}$$

genericamente, para $i = 1, \dots, n$ e $j = i+1, \dots, n$:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$$l_{ji} = \frac{\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot l_{ik} \right)}{l_{ii}}$$

Como A é simétrica e positiva definida, a expressão que é tirada a raiz quadrada é sempre positiva e todos os l_{ij} são reais.

Anexos

Anexo 1. Dados de negociação da opção de compra PETRJ39

Data	Prêmio	
27-Jul-00	3.18	Preço de exercício
28-Jul-00	3.18	50
31-Jul-00	3.18	
01-Ago-00	3.10	Data de exercício
02-Ago-00	3.55	16-Out-00
03-Ago-00	4.00	
04-Ago-00	3.36	Ativo
07-Ago-00	4.00	PETR4
08-Ago-00	3.88	lote de 100
09-Ago-00	3.55	
10-Ago-00	4.29	
11-Ago-00	4.75	
14-Ago-00	4.57	
15-Ago-00	4.83	
16-Ago-00	5.33	
17-Ago-00	6.40	
18-Ago-00	5.66	

Anexo 2. Dados de negociação da opção de compra PETRH6

Data	Prêmio	
13-Jun-00	1.000	Preço de exercício
14-Jun-00	1.631	55
15-Jun-00	1.631*	
16-Jun-00	2.001	Data de exercício
19-Jun-00	3.499	21-Ago-00
20-Jun-00	3.000	
21-Jun-00	3.300	Ativo
23-Jun-00	3.300*	PETR4
26-Jun-00	3.300*	lote de 100
27-Jun-00	4.300	
28-Jun-00	4.700	
29-Jun-00	3.500	
30-Jun-00	3.790	
03-Jul-00	4.200	
04-Jul-00	5.400	
05-Jul-00	5.000	
06-Jul-00	4.700	
07-Jul-00	3.410	
10-Jul-00	3.300	
11-Jul-00	1.750	
12-Jul-00	1.300	
13-Jul-00	0.910	
14-Jul-00	1.000	
17-Jul-00	1.100	
18-Jul-00	1.000	
19-Jul-00	0.900	
20-Jul-00	1.300	
21-Jul-00	1.450	
24-Jul-00	1.050	
25-Jul-00	0.800	
26-Jul-00	0.900	
27-Jul-00	0.660	
28-Jul-00	0.400	
31-Jul-00	0.350	
01-Ago-00	0.150	
02-Ago-00	0.150	
03-Ago-00	0.180	
04-Ago-00	0.190	
07-Ago-00	0.300	
08-Ago-00	0.140	
09-Ago-00	0.140*	
10-Ago-00	0.200	
11-Ago-00	0.250	
14-Ago-00	0.210	
15-Ago-00	0.250	
16-Ago-00	0.190	
17-Ago-00	0.350	
18-Ago-00	0.020	*random walk

Anexo 3. Dados de negociação da opção de compra PETRH5

Data	Prêmio	
19-Jun-00	4.90	Preço de exercício
20-Jun-00	4.05	50
21-Jun-00	4.80	
23-Jun-00	4.80*	Data de exercício
26-Jun-00	5.10	21-Ago-00
27-Jun-00	7.00	
28-Jun-00	6.90	Ativo
29-Jun-00	5.90	PETR4
30-Jun-00	6.80	lote de 100
03-Jul-00	7.50	
04-Jul-00	9.00	
05-Jul-00	7.80	
06-Jul-00	7.45	
07-Jul-00	6.30	
10-Jul-00	5.95	
11-Jul-00	3.61	
12-Jul-00	2.60	
13-Jul-00	2.50	
14-Jul-00	3.25	
17-Jul-00	2.65	
18-Jul-00	2.50	
19-Jul-00	2.73	
20-Jul-00	3.70	
21-Jul-00	3.70	
24-Jul-00	3.10	
25-Jul-00	2.05	
26-Jul-00	2.19	
27-Jul-00	1.80	
28-Jul-00	1.40	
31-Jul-00	1.35	
01-Ago-00	0.79	
02-Ago-00	0.90	
03-Ago-00	1.04	
04-Ago-00	0.87	
07-Ago-00	1.14	
08-Ago-00	0.88	
09-Ago-00	0.85	
10-Ago-00	1.38	
11-Ago-00	1.35	
14-Ago-00	1.27	
15-Ago-00	1.50	
16-Ago-00	1.70	
17-Ago-00	3.15	
18-Ago-00	1.66	*random walk