

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de doutorado em matemática

O problema restrito elíptico dos três corpos com colisão

por

Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias

sob orientação do

Prof. Dr. José Cláudio Vidal Diaz

Recife/2007

Recife - PE

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática Curso de
doutorado em matemática

O problema restrito elíptico dos três corpos com colisão

por

Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão Dias

sob orientação do

Prof. Dr. José Cláudio Vidal Diaz

Tese apresentada ao Corpo Docente
do Programa de Pós-graduação em
Matemática - CCEN -UFPE, como
requisito parcial para obtenção do
título de Doutora em Matemática.

Maio/2007

Recife - PE

Dias, Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão
O problema restrito elíptico dos três corpos
com colisão. / Lúcia de Fátima de Medeiros
Brandão Dias – Recife: O autor, 2007.
iv, 151 folhas : il., fig., tab.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Matemática, 2007.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Caos. 2. Problema restrito. 3. Órbitas
Periódicas. I. Título.

515.39

CDD (22.ed.)

MEI2007-071

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Ciências.

Aprovado:

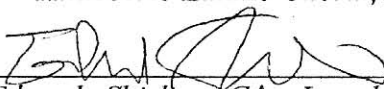


José Cláudio Vidal Díaz, UFPE

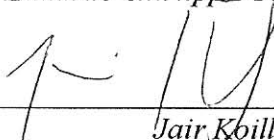
Orientador



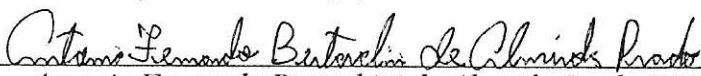
Hildeberto Eulálio Cabral, UFPE



Eduardo Shirloppe, UFPE



Jair Koiller, UGV



Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, INPE

O PROBLEMA RESTRITO ELÍPTICO DOS TRÊS CORPOS COM COLISÃO

por
Lúcia de Fátima de Medeiros Brandão

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Maio – 2007

*Pois dele, por ele e para ele são todas
as coisas. Rm 11:36*

Agradecimentos

Ao meu esposo Francisco Alcides, pelo apoio, compreensão e tudo mais.

À minha mãe e irmãos, por compreender a minha justificada ausência.

Ao meu orientador José Cláudio Vidal Diaz, pelo investimento, pela dedicação, pelo despertar do espírito científico em mim, pela amizade. Serei eternamente grata.

Ao professor César Castilho, pelas longas horas de trabalho e discussões e aos professores Hildeberto Cabral e Eduardo Leandro, pelo apoio.

À Capes, pela bolsa de doutorado.

E aos colegas e amigos da UFPE, pelo companheirismo.

Conteúdo

Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Introdução	2
2 O problema dos 2-corpos	5
2.1 Equação de movimento	5
2.2 Movimento elíptico com colisão	7
3 Método da Continuação e soluções aproximadas	10
3.1 Método da continuação com dependência regular do parâmetro de perturbação	10
3.1.1 Método de Continuação para sistemas periódicos	11
3.2 Método da continuação com dependência não-regular do parâmetro de perturbação	12
3.3 Aproximações das soluções do sistema perturbado	14
4 O problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão	18
4.1 Equações de movimento	18
4.2 Subproblemas	21
4.3 Resultados preliminares	22
4.3.1 Pontos de equilíbrio	22
4.3.2 Integral primeira	22
4.4 O problema em coordenadas giratórias	22
4.5 O problema em coordenadas pulsantes	23

4.5.1	Soluções homográficas	24
4.6	Simetrias	25
4.7	O problema como uma perturbação do problema de Kepler	28
4.8	O problema em variáveis de Poincaré-Delaunay	30
4.9	Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares	34
4.9.1	Continuação de soluções periódicas duplamente simétricas	37
4.9.2	Continuação de soluções periódicas S_2 -simétrica	47
4.9.3	Continuação de soluções periódicas S_1 -simétricas	55
4.10	Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas	62
4.10.1	Continuação de soluções periódicas elípticas duplamente simétricas	62
5	O problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão	68
5.1	Equação de movimento	68
5.2	Simetrias	70
5.3	Existência de soluções periódicas usando simetrias	72
5.3.1	Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares	75
5.3.2	Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas	78
6	O problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão	84
6.1	Equações de movimento	84
6.2	Reduzindo a dimensão do espaço de fase	86
6.3	Propriedades do fluxo global	86
6.4	Comportamento assintótico	88
6.5	O problema isósceles em diferentes coordenadas	90
6.5.1	O problema isósceles em coordenadas giratórias	90
6.5.2	O espaço de fase estendido	91
6.5.3	Introduzindo a anomalia excêntrica como um novo tempo	91
6.6	Simetrias	93
6.7	Continuação analítica de órbitas periódicas simétricas	94
6.7.1	Variáveis de Poincaré-Delaunay e variáveis de Delaunay.	95
6.7.2	Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares	97
6.7.3	Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas	106

6.8	Soluções periódicas distantes dos primários	111
6.9	O fluxo perto do infinito	113
6.10	Topologia das variedades invariantes.	117
6.11	Transversalidade das variedades instável e estável	118
6.12	A aplicação de Poincaré	119
6.13	A dinâmica simbólica	121
6.13.1	O shift de Bernoulli como uma aplicação topológica	121
6.13.2	A ferradura de Smale	123
6.13.3	Conclusão	133
7	Apêndice	135
7.1	Apêndice A- Cálculo das variedades invariantes e do mapa de Poincaré	135
7.1.1	Cálculo das variedades invariantes	135
7.1.2	Cálculo do mapa de Poincaré mediante equações variacionais	137
7.2	Apêndice B: Teorema da média	141
7.3	Apêndice C: A vizinhança de soluções circulares e de soluções elípticas do problema de Kepler	142
7.4	Apêndice D: Elementos orbitais clássicos	145
7.4.1	Encontrando os elementos orbitais	147
7.5	Apêndice E: Uma decomposição do vetor $\mathbf{q}$	148
7.6	Apêndice F: Cálculo numérico da interseção transversal das variedades.	149

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema restrito dos três corpos onde os primários movem-se numa órbita elíptica de colisão, isto é, o momento angular dos primários é identicamente zero e a energia é negativa. Este problema apresenta três subproblemas, a saber: o caso estritamente espacial (isto é, a partícula infinitesimal move-se no espaço); o caso planar (isto é, a partícula infinitesimal move-se num plano que contém os primários) e o caso isósceles (isto é, a partícula infinitesimal move-se em um plano Γ perpendicular a reta que contém os primários e passando através do centro de massa dos primários). É relevante observar que a dinâmica dos primários é periódica e contém um número infinito de colisões. Assim, os primários representam um termo de força periódica no sistema, fazendo com que esse sistema seja não conservativo. Esta é uma das grandes dificuldades em se obter uma descrição completa da dinâmica deste problema.

Esses três subproblemas foram escritos como uma perturbação do problema de Kepler, desta maneira obtivemos uma grande quantidade de órbitas periódicas. A técnica usada para conseguirmos tais órbitas foi o método da Continuação Analítica de Poincaré. No entanto, não foi possível usar o Teorema da Função Implícita na sua forma padrão, uma vez que não temos a diferenciabilidade suficiente do campo devido ao parâmetro perturbador introduzido. Para contornar este problema, usamos o Teorema de Arenstorf, o qual exige um pouco menos do campo.

No caso isósceles, o qual chamamos por problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão, obtemos mais informações sobre a dinâmica da partícula. Além de provarmos a existência de uma grande quantidade de órbitas periódicas, conseguimos mergulhar o shift de Bernoulli em uma seção conveniente do fluxo, mostrando que este problema possui uma dinâmica caótica. Além disso, construímos esta dinâmica simbólica.

Palavras chave

problema restrito; órbitas periódicas; caos.

Abstract

In this work we study the restricted three-body problem where the primaries move in a elliptic collision orbit, that is, the angular momentum of the primaries is identically null and the motion has negative energy. This problem presents three subproblems, namely: the strictly spatial case (that is, the infinitesimal particle moves in the space); the planar case (that is, the infinitesimal particle moves in the plane which contains the primaries) and the isosceles case (that is, the infinitesimal particle moves in a plane Γ orthogonal to the straight line that contains the primaries and going through the center of mass of the primaries). It is important to note that the dynamic of the primaries is periodic and contains an infinite number of collisions. Thus, the primaries represent a term of periodic force making the system to be not conservative. This is one of the great difficulties to obtain a complete description of the dynamics of this problem.

These three subproblems were written as a perturbation of the Kepler's problem, and, in this way, we obtain very periodic orbits. For this, we use the Method of Analytic Continuation due to Poincaré. However, we can not use the Theorem of Implicit Function, since the field does not have the necessary differentiability because of the introduced perturbation parameter. To solve this problem, we use the Arenstorf's Theorem, which demands a little less of the field.

In the isosceles case, which is called the isosceles elliptic restricted three body problem with collision, we obtain more information about the dynamics of the particle. We prove a great quantity of periodic orbits and, among other results, we can embed a Bernoulli shift on a suitable cross section of the flow, showing that this problem possesses chaotic dynamics. Moreover, we built this symbolic dynamic.

Key words

Restricted problem, periodic orbits, chaos.

Capítulo 1

Introdução

O principal objetivo da Mecânica Celeste é estudar a dinâmica de n -partículas no espaço, onde cada uma delas está sujeita a atração gravitacional das outras. Tal problema é conhecido por "Problema dos n -corpos". Este problema teve sua primeira formulação descrita em *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* de Newton (1687). Neste trabalho nós encontramos as leis da Mecânica e da Gravitação Universal, as quais nos permitem expressar o problema dos n -corpos como um sistema de equações diferenciais.

Até a publicação de *Méthodes Nouvelles dela Mécanique Céleste* de Poincaré (1899), as equações diferenciais que aparecem nos problemas de Mecânica Celeste foram tratadas de maneira quantitativa. Poincaré introduziu métodos qualitativos com o intuito de descrever completamente as órbitas do problema em seu espaço de fase. Nós podemos dizer que Poincaré iniciou a teoria moderna qualitativa das equações diferenciais.

O problema dos 2-corpos é integrável, e usando as integrais primeiras dadas pela energia $\mathcal{E}$ e momento angular c , podemos classificar todas as órbitas do problema dos 2-corpos, a saber: se $c \neq 0$, o movimento está localizado em um plano e nós temos órbitas elípticas (em particular, circulares) quando $\mathcal{E} < 0$; órbitas parabólicas se $\mathcal{E} = 0$ e órbitas hiperbólicas quando $\mathcal{E} > 0$. Se $c = 0$, o movimento dos dois corpos é retilíneo com colisão e podemos ter as seguintes órbitas com colisão: órbitas elípticas quando $\mathcal{E} < 0$; órbitas parabólicas quando $\mathcal{E} = 0$ e órbitas hiperbólicas quando $\mathcal{E} > 0$.

O problema dos n -corpos para $n > 2$ tem resistido a todas as tentativas de uma completa resolução, de fato, sabe-se que o problema não pode ser integrável no sentido clássico. Ao longo dos anos, usando distintas técnicas matemáticas, muitos tipos especiais de soluções para o problema dos n -corpos para $n > 2$ têm sido encontradas, mas até então não se pode dizer muito sobre o comportamento das soluções, em geral. Casos especiais do problema dos 3-corpos, são os diferentes problemas restritos de 3-corpos (i.e., quando uma das massas é suficientemente pequena tal que sua influência sobre as outras duas massas é desprezível) os quais tem sido estudados mais intensamente por uma grande variedade de autores com o intuito de entender a dinâmica do problema geral dos três corpos.

Os problemas restritos de 3-corpos consistem em descrever o movimento de uma partícula infinitesimal que se move sob a influência da força de atração gravitacional de dois corpos, chamados de primários, os quais descrevem uma solução particular do problema dos dois corpos. Pode-se classificar o problema restrito dos 3-corpos dependendo do tipo de movimento dos primários e da dimensão do espaço onde se encontra a partícula infinitesimal. Como é observado em [1], existem exatamente 13, 10 e 7 diferentes problemas restrito dos três corpos em dimensão 1, 2 e 3, respectivamente. No mínimo 10 destes problemas tem sido estudado por vários autores. Além disso, nós observamos que para os problemas restritos dos

três corpos de dimensão 1 (a saber, parabólico, hiperbólico e elíptico) o estudo do fluxo global não é óbvio nem simples, principalmente porque este tipo de problema não é conservativo. É importante ressaltar que o problema restrito circular dos três corpos é o problema restrito de três corpos que mais atenção tem recebido pela comunidade científica e existem muitos resultados importantes acerca da dinâmica deste problema. Além disso, por muitos pesquisadores ele é considerado como o sistema dinâmico “mais rico” de natureza, devido a que apresenta uma grande diversidade de fenômenos em seu comportamento. Uma referência importante é Szebehely [48].

Neste trabalho, estudamos o problema restrito dos três corpos onde os primários movem-se numa órbita elíptica de colisão, isto é, o momento angular dos primários é identicamente zero. Este problema apresenta três subproblemas, a saber: o caso estritamente espacial (isto é, a partícula infinitesimal move-se no espaço); o caso planar (isto é, a partícula infinitesimal move-se num plano que contém os primários) e o problema restrito isósceles elíptico com colisão (isto é, a partícula infinitesimal move-se em um plano Γ perpendicular a reta que contém os primários e passando através do centro de massa dos primários). Inicialmente nosso objetivo era abordar somente o estudo da dinâmica do último subproblema, isto é, o caso isósceles a partir de um ponto de vista analítico. Mas, com o decorrer do trabalho, decidimos adicionar certos resultados sobre órbitas periódicas para o problema nas duas primeiras situações. É relevante observar que a dinâmica dos primários é periódica e contém um número infinito de colisões. Assim, os primários representam um termo de força periódica no sistema fazendo com que o sistema seja não conservativo. Esta é uma das grandes dificuldades para se obter uma descrição completa da dinâmica.

Antes de falar de nossos principais resultados sobre a dinâmica, relataremos alguns trabalhos que encontramos na literatura e dizem relação ao nosso projeto. Broucke, em [6], considera o caso planar e o coloca em coordenadas apropriadas usando a transformação de Nechvile. Após isto ele obtém resultados numéricos sobre a existência de algumas famílias de órbitas periódicas simétricas. No caso unidimensional (a partícula move-se sobre a reta que contém os primários), outros autores, usando o método de continuação analítica de Poincaré e o método de Melnikov, estudaram um modelo do problema elíptico restrito dos três corpos unidimensional com colisão, veja em [25], [10]. No problema isósceles elíptico com colisão, devemos subdividir este problema nos casos onde o momento angular do corpo infinitesimal é nulo e onde é não nulo. Nos dedicaremos a estudar o caso onde o momento angular é não nulo, uma vez que o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão onde a partícula infinitesimal ou partícula teste está confinada a mover-se sobre uma reta em Γ (isto é, o momento angular da partícula infinitesimal é nulo) já foi estudado, de modo que informações bastante completas da dinâmica foram dadas. Com efeito, Alvarez e Llibre em [1, 2] (este problema foi chamado pelos autores de *problema restrito isósceles dos três corpos elíptico colisional em dimensão 1*) mostraram que a colisão tripla não pode ser regularizável no sentido de McGehee e a existência de uma grande classe de diferentes movimentos para o corpo infinitesimal. Já para o caso de momento angular não nulo encontramos em [40] as equações de movimento em coordenadas polares, e em seguida se introduz a anomalia excêntrica como nova variável tempo. Olhando para as superfícies de seção, o autor numericamente examina a existência de órbitas periódicas e também sua estabilidade. Em [38] também se coloca o problema isósceles em coordenadas polares e considera-se o novo tempo como sendo a anomalia excêntrica. Tomando o momento angular como parâmetro obtém-se, por continuação numérica, a existência de famílias de órbitas periódicas simétricas. Por último, citamos o trabalho [26], no qual se considera um modelo de problema isósceles. Dizemos modelo, pois ele de fato não representa um problema restrito verdadeiro de três corpos uma vez que o parâmetro perturbador é introduzido de forma artificial. Nesse trabalho, estuda-se a existência de famílias de órbitas periódicas simétricas. Após este apanhado de informações podemos concluir que o *problema restrito elíptico dos três corpos com colisão* está longe de ter uma descrição completa de sua dinâmica, tanto desde um ponto de vista analítico quanto numérico.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 decidimos fazer um estudo detalhado do problema de dois corpos com colisão, pois achamos que tal problema não tem sido discutido profundamente na literatura. Além disso, é a partir deste problema que nós introduzimos um parâmetro

perturbador (ϵ) associado à energia, de tal forma que se ϵ tende a zero é equivalente a dizer que a energia dos primários se torna muito negativa. Na literatura nós observamos que este parâmetro nunca foi considerado por outros autores nas suas abordagens. Também reforçamos aqui que, com esta descrição, o campo que define o sistema de equações de movimento do corpo infinitesimal não é diferenciável com respeito ao parâmetro ϵ , desta maneira este fator faz com que muitas das técnicas de teoria de perturbações não se apliquem imediatamente. No Capítulo 3 fazemos uma rápida revisão dos métodos de continuação de soluções periódicas de sistemas perturbados, no caso diferenciável (como função do parâmetro perturbador) o Método da Continuação de Poincaré (veja [39]) e o Teorema de Arenstorf [3] no caso não diferenciável. Além disso, mostramos aproximações das soluções do sistema perturbado via o sistema não perturbado. Tais relações serão de muita utilidade nos capítulos posteriores. O problema restrito elíptico com colisão no caso estritamente espacial é apresentado no Capítulo 4. Estudamos seus subproblemas e as simetrias associadas. Mostramos, na Proposição 4.1.1, uma interessante e relevante propriedade do potencial associado ao problema, a qual nos permite passar de um valor específico do parâmetro ϵ a um valor arbitrário dele. Em seguida, o problema é colocado em diferentes tipos de coordenadas e as soluções homográficas são obtidas. Após isto, estudamos a existência de várias famílias de órbitas periódicas simétricas fazendo uso do Teorema de Arenstorf. Prova-se que nosso problema é uma perturbação do problema de Kepler espacial. Tais órbitas são obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares e como continuação de órbitas Keplerianas elípticas. No Capítulo 5, usando coordenadas convenientes, consideramos o caso planar, o qual é definido como sendo o plano xz . Neste capítulo nos concentramos na obtenção de órbitas periódicas simétricas, pensando nelas como um caso particular do caso espacial. O Capítulo 6 é dedicado a um estudo bastante completo da dinâmica do *problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão*. Um primeiro resultado diz que se o momento angular não for zero, o movimento do corpo infinitesimal não admite colisões triplas (veja Proposições 6.3.3 e 6.3.4). Portanto, a regularização não é uma dificuldade no problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão. Mesmo sabendo que a partícula teste não passa por qualquer colisão, a dinâmica deste problema não se torna menos complicada do que a do problema unidimensional. Prova-se, de maneira analítica, a existência de uma grande variedade de órbitas periódicas simétricas, tanto obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares quanto elípticas, além de órbitas periódicas onde a partícula infinitesimal encontra-se muito longe. Também usando resultados padrões do Método da Média provamos a existência de órbitas periódicas e comparamos as soluções do sistema médio com as do sistema completo em coordenadas convenientes. Demonstra-se de forma analítica a existência de soluções de escape parabólicas (i.e., atingem o infinito com velocidade nula) e hiperbólicas (i.e., atingem o infinito com velocidade não nula). Introduzindo coordenadas de McGehee no infinito, com o objetivo de obter informações sobre a dinâmica do problema no infinito, fazemos um "blow-up" e, usando o resultado de McGehee sobre Variedade Estável no caso degenerado [31] provamos que as órbitas parabólicas formam uma variedade analítica bi-dimensional. O sistema no infinito apresenta uma órbita periódica, a qual age como o conjunto α e ω limite das órbitas parabólicas. Evidenciamos, usando métodos numéricos, que as variedades estáveis e instáveis da órbita periódica no infinito interceptam-se transversalmente para qualquer valor de ϵ . Usando esta evidência numérica, provamos a existência de uma dinâmica caótica e no Teorema 6.13.14 mostramos a diversidade de movimentos associados a esta dinâmica caótica. Salientamos que a prova analítica da transversalidade é uma questão bastante complicada devido a que trabalha-se com dimensões altas e poucos argumentos analíticos são conhecidos a este respeito. Os trabalhos [9], [30], [16], [2] também apresentam argumentos semelhantes ao nosso, no qual faz-se uso dos cálculos numéricos para assumir a transversalidade e logo introduzir uma dinâmica simbólica. Por último no Apêndice detalhamos o cálculo do mapa de Poincaré para o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão, além de muitos outros cálculos necessários ao bom entendimento do texto da tese.

Capítulo 2

O problema dos 2-corpos

No problema dos 2-corpos os movimentos são totalmente conhecidos e classificados de acordo com o momento angular e a energia do sistema. Se o momento angular $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$, o movimento do sistema formado pelos dois corpos é classificado como elíptico (que inclui o caso circular), parabólico ou hiperbólico de acordo com a energia do sistema $\mathcal{E}$. Se $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, os corpos estão confinados sobre uma reta e seus movimentos são classificados de maneira análoga ao caso $\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$. Este caso é pouco tratado na literatura, por isso nesta seção falaremos sobre este caso, em que $\mathcal{E} < 0$, i.e., o caso elíptico com colisão.

2.1 Equação de movimento

O problema dos 2-corpos consiste em descrever o movimento de duas partículas movendo-se de acordo com suas atrações gravitacionais no espaço. Seja m_1, m_2 as massas das duas partículas e $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ suas respectivas posições. De acordo com a lei de Newton da gravitação universal, a força de atração entre as partículas é $\mathcal{G} m_1 m_2 \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^{-2}$, onde $\mathcal{G}$ é a constante de Gravitação universal. As equações de movimento são,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^2} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{\mathcal{G} m_1 m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde $(\cdot)$ denota a derivada com respeito ao tempo t , i.e., if $\gamma = \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor posição, então $\dot{\gamma}$ é o vetor velocidade e $\ddot{\gamma}$ é o vetor aceleração da partícula.

De (2.1) segue que

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}$$

e integrando duas vezes nós obtemos

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{A}t + \mathbf{B}, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são vetores constantes dependentes somente das condições iniciais do problema. Seja $\mathbf{R}$ o vetor centro de massa, i.e.,

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2.$$

Assim, de (2.2) nós temos que

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{A}}{M}t + \frac{\mathbf{B}}{M}.$$

Portanto, nós podemos ver que o vetor centro de massa das suas partículas move-se sobre uma reta no espaço. Os movimentos de m_1 e m_2 com respeito ao centro de massa são dados desta maneira: seja

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_2,$$

onde os vetores $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ denotam respectivamente os vetores posição de m_1 e m_2 relativos ao centro de massa deles. Definindo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e uma vez que $\dot{\mathbf{R}} = 0$, temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}_1, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_2.$$

Portanto, o sistema (2.1) pode ser escrito da seguinte maneira

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mas agora $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$, então

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_2 & \mathbf{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r} &= \frac{M}{m_2}\mathbf{r}_1 & \mathbf{r} &= -\frac{M}{m_1}\mathbf{r}_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

E usando (2.4) o sistema (2.3) torna-se

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\mathcal{G}\kappa_1 \frac{\mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_1\|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 &= -\mathcal{G}\kappa_2 \frac{\mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_2\|^3}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $\kappa_1 = \frac{m_2^3}{M^2}$ e $\kappa_2 = \frac{m_1^3}{M^2}$. Assim, sempre podemos pensar que o centro de massa das partículas está localizado na origem. Um sistema de coordenadas onde o centro de massa está na origem é chamado de sistema de *coordenadas baricêntricas*. Uma outra maneira de estudarmos o sistema (2.1) é considerar $\mathbf{r}$ definido anteriormente. Fazendo a diferença das equações em (2.1), nós obtemos

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}, \tag{2.6}$$

onde $\kappa = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$ e $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ é o vetor posição da massa m_1 com respeito a massa m_2 fixada na origem do sistema de coordenadas relativas. O estudo das órbitas de m_1 com respeito a m_2 , soluções do sistema (2.6), definem o problema de Kepler ou problema de força central. Portanto, sempre é possível considerar o problema de dois corpos como um problema de força central em coordenadas baricêntricas.

O problema de Kepler herda do problema de dois corpos quatro integrais primeiras:

1. A energia: $\frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2 - \frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|} = \mathcal{E}$.
2. O momento angular : $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{G}$.
3. O vetor de Laplace $\mathbf{e}$ definido pela equação $\kappa \left(\mathbf{e} + \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}$.

Proposição 2.1.1. *a) Se $\mathbf{G} = 0$, o movimento é retilíneo e pode ser classificado em*

1. *Elíptico com colisão* $\mathcal{E} < 0$.
2. *Parabólico com colisão* $\mathcal{E} = 0$.
3. *Hiperbólico com colisão* $\mathcal{E} > 0$.

b) Se $\mathbf{G} \neq 0$, o movimento ocorre em um plano perpendicular ao vetor $\mathbf{G}$. Este plano passa através do centro de massa das partículas e o vetor $\mathbf{e}$ está localizado nele. bi) Se $\mathbf{e} = 0$, o movimento é circular e uniforme. bii) Se $\mathbf{e} \neq 0$, o movimento é descrito por uma cônica com foco na origem do sistema inercial e excentricidade e .

Além disso, a órbita Kepleriana para momento angular diferente de zero é:

Proposição 2.1.2. a) *Elíptico (que inclui o caso circular) se $\mathcal{E} < 0$.*

b) *Parabólico se, $\mathcal{E} = 0$.*

c) *Hiperbólico se, $\mathcal{E} > 0$.*

2.2 Movimento elíptico com colisão

Seja z_i a distância entre o centro de massa e o primário m_i , onde $i = 1, 2$ (parametrizaremos as massas tais que $m_1 = \mu$, $m_2 = 1 - \mu$ com $\mu \in (0, 1/2]$) e seja $\rho = z_1 - z_2$ a distância entre os primários. Uma vez que o centro de massa está na origem, segue que $z_1 = (1 - \mu)\rho$ e $z_2 = -\mu\rho$. Nestas coordenadas, pela equação (2.1), a distância entre os primários satisfaz a equação

$$\ddot{\rho} = -\frac{1}{\rho^2} \quad (2.7)$$

e a energia para os primários é

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \dot{\rho}^2 - \frac{1}{\rho}. \quad (2.8)$$

Durante todo este trabalho assumiremos que **os primários descrevem um movimento elíptico com colisão**, i.e., nós assumiremos que a energia dos primários é $\mathcal{E} < 0$. Esta equação é singular na colisão $z = 0$ e esta singularidade pode ser removida introduzindo um novo tempo s definido por (argumento usado em [1])

$$dt = \rho ds \quad (2.9)$$

Denotando $' = \frac{d}{ds}$ a equação (2.7) no novo tempo torna-se

$$\rho \rho'' - \rho'^2 + \rho = 0.$$

Usando a energia dada em (2.8) temos

$$\rho'' - 2\mathcal{E}\rho - 1 = 0, \quad (2.10)$$

e a solução desta equação é dada por

$$\rho(s) = \frac{1}{2\mathcal{E}} [b \cos(\sqrt{-2\mathcal{E}} s - s_0) - 1],$$

onde b e s_0 são constantes. Sem perda de generalidade, assumiremos que $s_0 = 0$. Assumindo que $\rho(0) = 0$ temos que $b = 1$, e assim

$$\rho(s) = -\frac{1}{2\mathcal{E}} [1 - \cos(\sqrt{-2\mathcal{E}} s)].$$

O ângulo $E = \sqrt{-2\mathcal{E}} s$ é chamado anomalia excêntrica. Definimos um parâmetro auxiliar $\epsilon \geq 0$ através da relação

$$\epsilon^2 = -\frac{1}{2\mathcal{E}}, \quad (2.11)$$

e, usando ϵ e a anomalia excêntrica, obtemos

$$\rho(E) = \epsilon^2 [1 - \cos E]. \quad (2.12)$$

Por outro lado, integrando a equação (2.9) temos a equação de Kepler

$$l = n(t - \tau) = E - \sin E, \quad (2.13)$$

onde $n = \frac{1}{\epsilon^3}$ é chamado movimento médio e l é chamado anomalia média. Consideramos o tempo de passagem pelo pericentro como sendo $\tau = 0$.

A equação (2.13) e a expressão (2.12) nos dão a posição dos primários em um tempo arbitrário t . O principal problema aqui é a solução da equação de Kepler. Observe que, se simultaneamente somarmos e subtrairmos qualquer múltiplo de 2π a ambos l e E , a equação (2.13) não é alterada. Isto significa que, dado l , podemos trazê-lo e analisá-lo apenas no intervalo $-\pi \leq l \leq \pi$. Assim, é suficiente analisar a solução da equação de Kepler somente neste intervalo. Além disso, a equação é inalterada se l e E são simultaneamente trocados por $-l$ e $-E$, respectivamente. Isto significa que E é uma função ímpar de l e portanto é suficiente resolver a equação quando $0 \leq l \leq \pi$. Quando $l = 0, E = 0$ e quando $l = \pi, E = \pi$. Desta maneira, o problema é reduzido ao intervalo $0 < l < \pi$. Fazendo o gráfico de l versus E , onde $0 \leq l \leq \pi$, vemos que os valores de E também pertence ao intervalo $0 \leq E \leq \pi$. Assim, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma única função $E(l)$ tal que $l = E - \sin E$, $0 < l < \pi$. Deste modo, vê-se que a função E depende das variáveis t e ϵ . Portanto, escreveremos

$$E = E(l) \equiv E(t, \epsilon) := E_\epsilon(t) \quad (2.14)$$

e segue que a equação (2.12) pode ser vista da seguinte maneira

$$\rho(t) = \epsilon^2 [1 - \cos E_\epsilon(t)]. \quad (2.15)$$

Observação 2.2.1. Quando for conveniente escreveremos $E(l)$ ou $E(t/\epsilon^3)$ ao invés de $E_\epsilon(t)$.

O seguinte lema mostrará importantes propriedades da anomalia excêntrica

Lema 2.2.2. *A função anomalia excêntrica E é tal que*

1. $E(nt + \hat{k}\pi) = E(nt) + \hat{k}\pi$, where $\hat{k} \in 2\mathbb{Z}$,
2. $\frac{\partial E_\epsilon}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon^3 [1 - \cos E_\epsilon(t)]}$,
3. $\frac{\partial E_\epsilon}{\partial \epsilon} = -\frac{3[E_\epsilon(t) - \sin E_\epsilon(t)]}{\epsilon [1 - \cos E_\epsilon(t)]}$
4. $E(-l) = -E(l)$.

Demonstração: 1. Somando $\hat{k}\pi$, onde $\hat{k} \in 2\mathbb{Z}$ a ambos E e l na equação (2.13) se obtém

$$l + \hat{k}\pi = E(l) + \hat{k}\pi - \sin(E(l) + \hat{k}\pi) \quad (2.16)$$

Por outro lado, temos

$$l + \hat{k}\pi = E(l + \hat{k}\pi) - \sin E(l + \hat{k}\pi) \quad (2.17)$$

Mas, pelo Torema da Função Inversa, existe uma única função $E(l)$ tal que $l = E - \sin E$, para $0 < l < \pi$. Assim, concluímos que $E(l + \hat{k}\pi) = E(l) + \hat{k}\pi$. Portanto, uma vez que $l = n t$ segue que

$$E(n t + \hat{k}\pi) = E(n t) + \hat{k}\pi$$

2. e 3. Diferenciando ambos os lados da equação de Kepler (2.13) com respeito à variável t , obtém-se 2 e agora diferenciando a mesma equação com respeito a ϵ segue que

$$0 = 3\epsilon^2[E_\epsilon(t) - \sin E_\epsilon(t)] + \epsilon^3 \frac{\partial E}{\partial \epsilon}[1 - \cos E_\epsilon(t)],$$

de onde concluímos 3.

Para provar o item 4, note que pela equação de Kepler (2.13) segue que

$$-l = E(-l) - \sin E(-l).$$

Por outro lado, escrevemos

$$-l = -E(l) + \sin E(l) = -E(l) - \sin -E(l),$$

assim, analogamente ao item 1, concluímos que $E(-l) = -E(l)$. ■

Observação 2.2.3. Gostaríamos aqui de destacar os seguintes fatos:

(1) Observe que do Lema 2.2.2 item 1 concluímos que a função $\rho(t)$, dada em (2.15), é $2\pi\epsilon^3$ periódica em t . De fato, sabemos que $\rho(t) = \epsilon^2(1 - \cos E(l))$, assim usando o item 1 do Lema 2.2.2 segue que

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \epsilon^2[1 - \cos E(l)] = \epsilon^2[1 - \cos E(n t)] = \\ &= \epsilon^2[1 - \cos(E(n t + 2\pi) - 2\pi)] = \epsilon^2[1 - \cos E(n t + 2\pi)] = \\ &= \epsilon^2[1 - \cos E(n(t + \frac{2\pi}{n}))] = \\ &= \rho(t + \frac{2\pi}{n}). \end{aligned}$$

(2) Note que do Lema 2.2.2 temos que $E(k\pi) = k\pi$, onde $k \in 2\mathbb{Z}$. De fato, se $t = 0$, do Lema 2.2.2 item 1, uma vez que $E(0) = 0$, segue que $E(k\pi) = k\pi$. Observe que, deste fato, concluímos que se $t = k\pi\epsilon^3$, onde $k \in 2\mathbb{Z}$ obtém-se que $E_\epsilon(t) = E(t/\epsilon^3) = E(k\pi) = k\pi$. Assim, por exemplo, se desejarmos $E(T/2) = k\pi$, onde k é um inteiro par devemos tomar $T = 2k\pi\epsilon^3$.

(3) Além disso, por (2.13), tem-se que a função $E_\epsilon(t)$ não está definida em $\epsilon = 0$ e assim, nem está a função $\rho(t)$ dada em (2.15). No entanto, nós podemos estender de maneira contínua a função $\rho(t)$ em $\epsilon = 0$ definindo $\rho(t)$ em $\epsilon = 0$ por $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho(t) = 0$. Note que, uma vez que $(1 - \cos E_\epsilon(t))$ é limitado, podemos definir $\rho(t)$ em $\epsilon = 0$ deste modo.

Informações sobre o problema de Kepler com momento angular nulo ou não nulo pode ser encontrada em [41].

Capítulo 3

Método da Continuação e soluções aproximadas

Neste capítulo descreveremos o Método da Continuação Analítica, devido a Poincaré. Este método usa fortemente o Teorema da Função Implícita e, desta maneira, é necessário que a função em questão seja diferenciável em todas as variáveis. Contudo, existem problemas em que tal exigência não ocorre. Nestes casos, o Método da Continuação Analítica de Poincaré ainda pode ser aplicado, mas nesse caso usamos o Teorema de Arenstorf, o qual não exige tanta diferenciabilidade quanto o Teorema da Função Implícita. Falaremos deste caso na seção 3.2.

3.1 Método da continuação com dependência regular do parâmetro de perturbação

Nesta seção apresentaremos o Método da Continuação Analítica, o qual foi introduzido por Poincaré em [39]. Uma boa apresentação dele pode ser encontrada em [44].

Considere um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{x}_k = f_k(t, \mathbf{X}, \mathbf{P}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

com $(t, \mathbf{X}) = (t, x_1, \dots, x_n)$ em um domínio D de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{P} = (\nu, y_1, \dots, y_{m-1})$ em um subconjunto aberto A de $\mathbb{R}^m$, e $f_k : D \times A \rightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$. As variáveis $t, \mathbf{X}, \mathbf{P}$ denotam, respectivamente, o tempo, as coordenadas do espaço de fase e os parâmetros do sistema de equações diferenciais. O Método da Continuação Analítica, devido a Poincaré, é um dos mais frequentes métodos usados para a obtenção de órbitas periódicas. A idéia deste método é usar uma solução periódica conhecida e, por pequenas variações dos parâmetros e das condições iniciais, continuá-la a outras órbitas periódicas. Assumimos que ou o lado direito do sistema de equações (3.1) são funções periódicas em t ou que o sistema (3.1) é autônomo. Se o lado direito de (3.1) são funções periódicas de período T_e , então as soluções periódicas desse sistema devem ter um período T tal que $T/T_e \in \mathbb{Q}$. Se o sistema (3.1) for autônomo isto não se aplica.

Seja $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})$ uma solução do sistema (3.1) com condição inicial $\mathbf{X}(0, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}) = \mathbf{X}_0$. A solução $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})$ é uma solução periódica de (3.1) com período $\tau > 0$ (aqui τ deve ser necessariamente o

menor período positivo) se $\mathbf{X}(t + \tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}) = \mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Desta maneira, usando o Teorema de Unicidade de Soluções de um sistema de equações diferenciais (assumindo que ele possa ser aplicado) nós temos que uma condição necessária e suficiente para $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})$ ser uma solução periódica com período τ é

$$\mathbf{X}(0, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}) = \mathbf{X}(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}). \quad (3.2)$$

Seja $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ uma solução periódica do sistema (3.1) sobre um intervalo fechado $I = \{t, 0 \leq t \leq \tau^*\}$ com período $\tau^* > 0$. Vamos assumir que esta solução não é uma solução de equilíbrio e que o sistema (3.1) é diferenciável em $D \times A$. Uma vez que $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ é uma solução τ^* -periódica, estas hipóteses são satisfeitas para todo $t \in \mathbb{R}$. Destacamos que se o sistema (3.1) for um sistema periódico de período T_e , então τ^* deve ser tal que $\tau^*/T_e \in \mathbb{Q}$.

O Método da Continuação Analítica consiste em: dada uma solução τ^* -periódica $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$, encontrar valores $\tau, \mathbf{X}_0$ próximos a $\tau^*, \mathbf{X}_0^*$, respectivamente, tais que $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})$ é uma solução periódica de (3.1) com período τ . Se esses valores puderem ser encontrados, então dizemos que a solução periódica $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ pode ser continuada. Considere a função

$$\phi_k(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}) = x_k(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}) - x_k^0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Da condição necessária e suficiente para obtermos órbitas periódicas (3.2), segue que $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})$ é uma solução τ -periódica do sistema (3.1) se, e somente se, $\tau, \mathbf{X}_0$ and $\mathbf{P}$ satisfazem as n equações

$$\phi_k(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

chamada equação de periodicidade. Portanto, para continuar uma solução periódica $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ é suficiente encontrar soluções do sistema (3.3) com $\tau, \mathbf{X}_0$ e $\mathbf{P}$ perto de $\tau^*, \mathbf{X}_0^*$ e $\mathbf{P}^*$, respectivamente.

3.1.1 Método de Continuação para sistemas periódicos

Assuma que (3.1) é um sistema periódico com período mínimo T_e . Como as soluções τ -periódicas de (3.1) devem sempre satisfazer a condição de comensurabilidade $\tau/T_e \in \mathbb{Q}$, $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ é uma solução periódica com período $\tau^* = q\tau = pT_e$, onde $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Na continuação da órbita periódica $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ podemos encontrar duas situações: o período da órbita continuada é igual ao da órbita inicialmente conhecida $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$, i.e., $\tau = \tau^*$ ou o período da órbita continuada é próximo de τ^* , veremos que isso se resume a escolher τ como variável independente ou não.

Período da órbita continuada igual ao da órbita inicialmente conhecida.

Neste caso procuramos soluções de (3.3) que estão próximas da solução conhecida $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ com período $\tau = \tau^*$, onde $\tau^* = q\tau = pT_e$, com $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$. Em resumo, uma condição necessária e suficiente para $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})$ seja uma solução τ -periódica do sistema (3.1), onde $\tau = \tau^*$, perto da solução $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ é que $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{P}$ satisfaçam as n equações

$$\phi_k(\tau^*, \mathbf{X}_0, \mathbf{P}) = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.4)$$

O teorema abaixo nos diz como as equações (3.4) podem ser resolvidas. Este teorema é uma aplicação direta do Teorema da Função Implícita.

Teorema 3.1.1. *Assuma que (3.1) é um sistema periódico em t e diferenciável em todas as variáveis.*

Seja $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ uma solução periódica conhecida de (3.1) com período $\tau^* > 0$. Se

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\tau^*, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_1^0} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\tau^*, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_n^0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(\tau^*, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_1^0} & \dots & \frac{\partial \phi_n(\tau^*, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_n^0} \end{pmatrix} \Big|_{\mathbf{X}_0=\mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}=\mathbf{P}^*} \neq 0,$$

então, existe uma única função diferenciável $\mathbf{X}_0(\mathbf{P})$, definida em uma vizinhança pequena de $\mathbf{P}^*$, tal que $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0(\mathbf{P}), \mathbf{P})$ é uma solução τ^* -periódica de (3.1).

Período da órbita continuada próximo ao da órbita inicialmente conhecida.

Para este caso, o teorema correspondente ao Teorema 3.1.1, é descrito da seguinte maneira:

Teorema 3.1.2. *Assuma que (3.1) é um sistema periódico e diferenciável. Seja $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}^*)$ uma solução periódica conhecida de (3.1) com período $\tau^* > 0$. Se o determinante da matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial \tau} & \frac{\partial \phi_1(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_1^0} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_{k-1}^0} & \frac{\partial \phi_1(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_{k+1}^0} & \dots & \frac{\partial \phi_1(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_n^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial \tau} & \frac{\partial \phi_n(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_1^0} & \dots & \frac{\partial \phi_n(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_{k-1}^0} & \frac{\partial \phi_n(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_{k+1}^0} & \dots & \frac{\partial \phi_n(\tau, \mathbf{X}_0, \mathbf{P})}{\partial x_n^0} \end{pmatrix} \Big|_{\tau=\tau^*, \mathbf{X}_0=\mathbf{X}_0^*, \mathbf{P}=\mathbf{P}^*},$$

for diferente de zero, então existem únicas funções diferenciáveis $x_1^0 = \mathbf{x}_1^0(\mathbf{P}, x_k^0), \dots, x_{k-1}^0 = \mathbf{x}_{k-1}^0(\mathbf{P}, x_k^0)$, $x_{k+1}^0 = \mathbf{x}_{k+1}^0(\mathbf{P}, x_k^0), \dots, x_n^0 = \mathbf{x}_n^0(\mathbf{P}, x_k^0)$ e $\tau(\mathbf{P}, x_k^0)$, definidas em uma vizinhança pequena de $(\mathbf{P}^*, x_k^{0*})$, tais que $\mathbf{X}(t, \mathbf{X}_0(\mathbf{P}, x_k^0), \mathbf{P})$ é uma solução $\tau(\mathbf{P}, x_k^0)$ -periódica de (3.1).

Observação 3.1.3. Como o sistema (3.1) é T_e -periódico, o período $\tau(\mathbf{P}, x_k^0)$ tem que satisfazer a condição de comensurabilidade $\tau(\mathbf{P}, x_k^0)/T_e \in \mathbb{Q}$. Pela demonstração do Teorema da Função Implícita temos que a função $\tau(\mathbf{P}, x_k^0)$ é contínua, desta maneira podemos escolher $\mathbf{P}$ e x_k^0 tais que $\tau(\mathbf{P}, x_k^0)$ satisfaça a condição de comensurabilidade.

3.2 Método da continuação com dependência não-regular do parâmetro de perturbação

Seja U um domínio aberto em $\mathbb{R}^n$. No caso em que a função $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ em (3.1) não é diferenciável com respeito ao parâmetro $\mathbf{P}$ não podemos aplicar o Teorema da Função Implícita, mas Arenstorff provou um resultado que contorna este problema. A diferenciabilidade com respeito a $\mathbf{P}$ não é necessária e ao invés desta condição, ele supõe que a função ϕ satisfaz condições de regularidade. Mais precisamente, o resultado de Arenstorff é conhecido como o Teorema do Ponto Fixo de Arenstorff, o qual enunciamos abaixo e uma demonstração pode ser encontrada em [3]:

Teorema B (Teorema de Arenstorff) *Sejam W e V espaços de Banach com elementos $\mathbf{X}$ e $\mathbf{P}$ respectivamente. Seja $\mathbf{g}$ um mapa do espaço produto $W \times V$ em W , $(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) \in W$, e definido para $\mathbf{X}$ em uma bola B^* com centro em $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 \in W$ e $\mathbf{P}$ em uma região B de V contendo $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, com $\mathbf{g}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{X}_0$, e $B^* = \{\mathbf{X} \in W \mid \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| \leq \alpha^*, \alpha^* > 0\}$. Se, para todo $\mathbf{P} \in B$, $\mathbf{g}$ é diferenciável com respeito a $\mathbf{X} \in B^*$ e*

$$|D_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{P})| \leq \zeta^* \leq \frac{1}{2} \text{ on } B^* \times B,$$

(onde a norma do operador linear $D_{\mathbf{X}}g(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ é a norma do sup) e se

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{X}_0, \mathbf{P}) - \mathbf{X}_0\| \leq \frac{\alpha^*}{2}, \text{ sobre } B,$$

então existe uma função $\mathbf{X}(\mathbf{P})$ com

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}(\mathbf{P}), \mathbf{P}) = \mathbf{X}(\mathbf{P}), \mathbf{X}(\mathbf{P}) \in B^* \text{ for } \mathbf{P} \in B, \mathbf{X}(\mathbf{0}) = \mathbf{X}_0.$$

Observe que nem continuidade de $\mathbf{g}$ em $\mathbf{X}, \mathbf{P}$ juntos, nem continuidade de $D_{\mathbf{X}}g(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ é necessário aqui, em contraste às hipóteses do Teorema da Função Implícita. Aplicações do Teorema de Arenstorf foram dadas por Cors em [14], [15] e Meyer e Howison em [34]. Eles mostraram a existência de órbitas periódicas simétricas num problema de três corpos restrito, ao contrário de outros resultados os quais geralmente usam o método da continuação analítica de Poincaré ou, mais precisamente, o Teorema da Função Implícita para obter órbitas periódicas.

Observação 3.2.1. É possível verificar através da prova do Teorema de Arenstorf ([3]) que se a função $\mathbf{g}$ é contínua em $(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ então a função $\mathbf{X}(\mathbf{P})$ é também contínua em $\mathbf{P}$ numa vizinhança apropriada.

Através deste teorema pode ser visto que uma condição suficiente para existência de solução da equação $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = 0$, em uma vizinhança de $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0, \mathbf{P} = \mathbf{0}$ é que o determinante da matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0})$ não seja nulo e que algumas condições de regularidade sejam satisfeitas, como provaremos no seguinte lema, o qual é uma aplicação do Teorema de Arenstorf

Lema 3.2.2. *Seja U um domínio aberto em $\mathbb{R}^n$ contendo $\mathbf{X}_0$, V uma região de $\mathbb{R}^k$ contendo $\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Seja $\mathbf{X} \in U$, $\mathbf{P} = (\nu, y_1, \dots, y_{k-1}) \in V$ e $\phi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ com $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, diferenciável, para todo $\mathbf{P} \in V$, com respeito a $\mathbf{X} \in U$, e $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ não-singular. Assuma que existem constantes positivas b, c, d e $\nu \leq 1/4bc(db + 1/2)$, tais que para $\mathbf{X} \in U$*

1. $|(D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}))^{-1}| \leq b$,
2. $|D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0})| \leq c(\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| + \nu)$,
3. $\|\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{P})\| \leq d\nu$.

Então, existe uma função $\mathbf{X}(\mathbf{P}) \in U$, definida para $\mathbf{P} \in V' \subset V$, tal que $\phi(\mathbf{X}(\mathbf{P}), \mathbf{P}) = 0$ e $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$.

Demonstração: Seja

$$\alpha^* = \frac{d}{2c(db + 1/2)}, \quad \beta = \frac{1}{4bc(db + 1/2)},$$

e consideramos a função

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \mathbf{X} - (D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}))^{-1}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}). \quad (3.5)$$

Uma vez que, por hipótese, $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ é diferenciável com respeito a $\mathbf{X} \in U$ para todo $\mathbf{P} \in V$, nós temos que $\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ é diferenciável, para todo $\mathbf{P} \in V$, com respeito a $\mathbf{X} \in U$.

Por hipótese 1 e 2 temos

$$\begin{aligned}\|D_{\mathbf{X}}\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{P})\| &= \|I - (D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0))^{-1}D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})\| \\ &\leq \|(D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0))^{-1}\| \|D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, \mathbf{0})\| \\ &\leq bc(\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| + \nu) \leq bc(\alpha^* + \beta) = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

considerando $\mathbf{X} \in U$ e ν tal que $\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\| \leq \alpha^*$ e $\nu \leq \beta$, aqui I representa a matriz identidade.

Por outro lado, pelas hipóteses 1 e 3, para $\nu \leq \beta$ as seguintes desigualdades valem,

$$\|g(\mathbf{X}_0, \mathbf{P}) - \mathbf{X}_0\| = \|(D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0))^{-1}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{P})\| \leq b d \nu \leq b d \beta = \frac{1}{2} \alpha^*.$$

Portanto, $\mathbf{g}$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Arenstorf e existe uma vizinhança da origem $V' \subset V$ e uma função $\mathbf{X}(\mathbf{P}) \in U$ tal que $\phi(\mathbf{X}(\mathbf{P}), \mathbf{P}) = 0$ para $\mathbf{P} \in V'$. ■

Este resultado será usado para mostrar a existência de órbitas periódicas no *problema restrito elíptico dos três corpos com colisão nos casos: espacial, planar e isósceles*.

3.3 Aproximações das soluções do sistema perturbado

Considere a seguinte equação diferencial

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}, t, \epsilon) \tag{3.6}$$

onde $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e

$$\mathbf{F}(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^l \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^{l+r} \mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon),$$

onde $l > 0, r > 0$.

Seja $\mathbf{z}_0$ uma condição inicial tal que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ é uma solução de $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z})$ que permanece limitada e afastada das singularidades. Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ uma vizinhança compacta de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ sem singularidades e sejam as funções $\mathbf{F}_0, \epsilon^l \mathbf{F}_1, \epsilon^{l+r} \mathbf{F}_r$ contínuas para $\mathbf{Z} \in \mathcal{C}$, $\epsilon \in [0, \epsilon_1]$, $t \in \mathbb{R}$. Além disso, suponha que $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_r$, junto com todas suas derivadas com respeito à $\mathbf{Z}$, são limitadas em $\mathcal{C}$ por uma constante positiva, digamos, c_1 independente de ϵ . Assim, temos que $\mathbf{F}_0$ é Lipschitz com respeito a variável $\mathbf{Z}$ com constante Lipschitziana c_2 , digamos, uma contante c_2 . No que segue, a norma do máximo para vetores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e a norma usual do supremo sobre a bola unitária para operadores lineares será usada. Os próximos dois lemas, os quais são versões, um pouco mais geral, dos encontrados em [15], mostram que a solução da equação (3.6) pode ser escrita como uma solução de $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z})$ mais termos os quais são de ordem ϵ^l , e o mesmo é verdadeiro com relação a suas derivadas parciais com respeito as condições iniciais.

Lema 3.3.1. *Seja $\mathbf{z}_0$ a condição inicial tal que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ é uma solução de*

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z})$$

a qual permanece limitada e afastada das singularidades. Seja $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ uma solução do sistema (3.6) com condição inicial $\mathbf{z}_0$. Então é verificado que

$$\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) + \epsilon^l \mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon),$$

onde $\mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é a solução da equação variacional

$$\dot{\mathbf{Z}}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = DF(\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0))\mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0), t, \epsilon) \quad (3.7)$$

a qual é limitada sobre $\mathcal{C}$ com condição inicial $\mathbf{Z}^{(1)}(0, \mathbf{z}_0, \epsilon) = 0$, onde $DF(\cdot)$ é a matriz cujas entradas são as derivadas parciais de F com respeito a variável $\mathbf{Z}$, e $\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é $\mathcal{O}(\epsilon^{l+s})$, onde $s = \min\{l, r\}$ em um intervalo finito de tempo.

Demonstração: Primeiro definamos $\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) - \mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ e assim vê-se que $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) - \mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ é $\mathcal{O}(\epsilon^l)$. De fato, seja $\mathcal{C}$ a vizinhança de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ dita anteriormente. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| &\leq \int_0^t \|\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}(\tau)) - \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}(\tau))\| d\tau + \epsilon^l \int_0^t \|\mathbf{F}_1(\mathbf{Z}(\tau), \tau, \epsilon) + \epsilon^r \mathbf{F}_r(\mathbf{Z}(\tau), \tau, \epsilon)\| d\tau \\ &\leq \int_0^t c_2 \|\mathbf{Z}(\mathbf{z}_0, \tau, \epsilon) - \mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)\| d\tau + \epsilon^l c_1 (1 + \epsilon^r) t \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade generalizada de Gronwall (veja [21]) segue que

$$\|\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| \leq \epsilon^l (1 + \epsilon^r) \frac{c_1}{c_2} (e^{c_2 t} - 1) \leq \epsilon^l c_3 \quad (3.8)$$

para todo $t \in [0, T^*]$, onde T^* , c_3 são constantes positivas e c_1, c_2 são constantes ditas anteriormente. Provaremos agora que $\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é da ordem de ϵ^{l+s} , isto é, $\mathcal{O}(\epsilon^{l+s})$, onde $s = \min\{l, r\}$ e $\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) - \mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) - \epsilon^l \mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$, com $\mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ solução de (3.7), onde $\mathbf{Z}^{(1)}(0, \mathbf{z}_0, \epsilon) = 0$. Seja δ tal que a bola de raio δ e centro $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ está contida em $\mathcal{C}$ para todo $t \in [0, T^*]$. Uma vez que $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) - \mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ é $\mathcal{O}(\epsilon^l)$, por continuidade com respeito às condições iniciais e parâmetros, existe ϵ_2 tal que se $\|\mathbf{z}_0 - \mathbf{z}_0^*\| < \epsilon_2$ temos que $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0^*, \epsilon)$ está na bola de raio δ e centro $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ para todo $t \in [0, T^*]$. Então, podemos obter estimativas importantes estudando o comportamento de $\mathbf{F}_0$ em uma vizinhança de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$. De fato, escreva o desenvolvimento de Taylor para $\mathbf{F}_0$ em torno de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$ e use (3.8) para obter a desigualdade

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}(\tau), \tau) - \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}(\tau), \tau) - D\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}(\tau), \tau)\mathbf{Z}_1(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| &\leq \frac{1}{2} \|D^2\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}(\tau), \tau)\mathbf{Z}_1^2(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| \\ &\quad + \mathcal{O}(\|\mathbf{Z}_1(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)\|^3) \\ &\leq \epsilon^{2l} c_4. \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde c_4 é uma constante positiva. Uma vez que $\mathbf{F}_1(t, \mathbf{Z}, \epsilon)$ e todas suas derivadas com respeito a $\mathbf{Z}$ são limitadas por uma constante independente de ϵ , segue que $\mathbf{F}_1$ tem derivada contínua com respeito a $\mathbf{Z}$. Assim,

$$\|\mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{Z}(\tau), \epsilon) - \mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau), \epsilon)\| \leq c_5 \|\mathbf{Z}_1(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| \leq \epsilon^l c_6. \quad (3.10)$$

onde c_5 e c_6 são constantes positivas. Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| &\leq \int_0^t \|\dot{\mathbf{Z}}(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon) - \dot{\mathbf{Z}}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0) - \epsilon^l \dot{\mathbf{Z}}^{(1)}(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| d\tau \\ &\leq \int_0^t \|\mathbf{F}_0(\tau, \mathbf{Z}(\tau)) - \mathbf{F}_0(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau)) - D\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0))[\mathbf{Z}_1(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon) - \mathbf{Z}_r(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)] + \\ &\quad \epsilon^l [\mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{Z}(\tau), \epsilon) - \mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau), \epsilon)] + \epsilon^{l+r} \mathbf{F}_r(\tau, \mathbf{Z}(\tau), \epsilon)\| d\tau. \end{aligned}$$

Portanto, usando (3.9), (3.10) fica determinado que

$$\|\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| \leq [c_4 t \epsilon^{2l} + c_6 t \epsilon^{2l} + c_1 t \epsilon^{l+r}] + \int_0^t c_7 \|\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| d\tau$$

e pela desigualdade generalizada de Gronwall, a desigualdade acima nos dá

$$\|\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| \leq \frac{[c_4\epsilon^{2l} + c_6\epsilon^{2l} + c_1\epsilon^{l+r}]}{c_7}(e^{c_7 t} - 1).$$

Portanto, para todo $t \in [0, T^*]$, segue que

$$\|\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| \leq c_8\epsilon^{l+s},$$

onde $s = \min\{l, r\}$ e c_7, c_8 são constantes positivas. Desta maneira, concluimos a prova deste lema. ■

O próximo lema mostra que estimativas semelhantes são válidas para as derivadas parciais de $\mathbf{Z}_1$ e $\mathbf{Z}_r$ com respeito a $\mathbf{Z}$.

Lema 3.3.2. *Seja $\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ e $\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ como no Lema 3.3.1. Então, $D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é $\mathcal{O}(\epsilon^{l+s})$, onde $s = \min\{l, r\}$ e $D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é $\mathcal{O}(\epsilon^l)$ para $t \in [0, T^*]$.*

Demonstração: Seja $\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ como no Lema anterior. Então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e por diferenciação de integrais (see [42], p. 236) segue que

$$D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \int_0^t [D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{Z})D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z} - D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)})D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)}]d\tau. \quad (3.11)$$

Observe, uma vez que $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) + \mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ e $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + \epsilon^l\mathbf{F}_1 + \epsilon^{l+r}\mathbf{F}_r$ a expressão (3.11) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = & \int_0^t [D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{Z})D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1 + D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z})D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)} - D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)})D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)} + \epsilon^l D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_1(\mathbf{Z})D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)} \\ & + \epsilon^{l+r} D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_r(\mathbf{Z})D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)}]d\tau. \end{aligned}$$

Assim, pela desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned} \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| & \leq \int_0^t [\|D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{Z})\| \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1\| + \|D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) - D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) + \epsilon^l D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_1(\mathbf{Z}) + \epsilon^{l+r} D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_r(\mathbf{Z})\| \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)}\|]d\tau \\ & \leq \int_0^t [\|D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{Z})\| \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1\| + \|D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{Z}) - D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)})\| \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)}\|]d\tau. \end{aligned}$$

Considere $f(Z) = [D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\mathbf{Z}) - D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)})](D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}^{(0)})$, desenvolvendo ela em série de Taylor, em torno de $Z^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$, e usando o fato que todos operadores envolvidos, assim como as derivadas de primeira e segunda ordem, são limitados sobre a vizinhança compacta $\mathcal{C}$ segue que

$$\begin{aligned} \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| & \leq \int_0^t c_8 \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1\| d\tau + \epsilon^l \int_0^t c_9 d\tau \\ & \leq \int_0^t c_8 \|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1\| d\tau + c_9 \epsilon^l t. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade generalizada de Gronwall segue que

$$\|D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| \leq \frac{c_9 \epsilon^l}{c_8} (e^{c_8 t} - 1) \leq c \epsilon^l$$

para todo $t \in [0, T^*]$.

A fim de provarmos que $D_{\mathbf{z}_0}\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é $\mathcal{O}(\epsilon^{l+s})$, escrevemos, como no Lema 3.3.1,

$$\mathbf{Z}_r(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{Z}) - \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) - \epsilon^l [\mathbf{F}_1(\mathbf{Z}^{(0)}) + D_{\mathbf{z}}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)})\mathbf{Z}^{(1)}]d\tau.$$

Então, diferenciando a integral acima e usando a expressão dada para $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ no Lema 3.3.1 obtemos

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r(t, z_0, \epsilon) &= \int_0^t [D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z} - D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} - \epsilon^l D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} - \\
&\quad \epsilon^l [D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} \cdot \mathbf{Z}^{(1)} + D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(1)}]] d\tau \\
&= \int_0^t [D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}(\mathbf{Z}) [D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} + \epsilon^l D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(1)} + D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r] - D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} - \epsilon^l D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} \\
&\quad - \epsilon^l [D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} \cdot \mathbf{Z}^{(1)} + D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(1)}]] d\tau \\
&= \int_0^t [D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_1 + M_1 D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)} + M_2 D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r] d\tau,
\end{aligned}$$

onde

$$M_1 = D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) - D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) - D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) \mathbf{Z}_1 + \epsilon^l [D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}) - D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}^{(0)})] + \epsilon^{l+r} D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_r(\mathbf{Z}) + D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) \mathbf{Z}_r$$

e

$$M_2 = D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) - D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}) + \epsilon^l D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}) + \epsilon^{l+r} D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_r(\mathbf{Z})$$

onde $D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} F(p)h$ significa que $D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} F(p)(h, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} F(p)$ é a segunda derivada de F .

Desta maneira, segue que

$$\begin{aligned}
\|D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r(t, z_0, \epsilon)\| &\leq \int_0^t \|D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0)) D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_1(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)\| d\tau + \\
&\quad \int_0^t [|M_1| \|D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0)\| + |M_2| \|D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r(\tau, \mathbf{z}_0, \epsilon)\|] d\tau,
\end{aligned}$$

onde $|B| = \sup \|Bxy\|$, $\|x\| = 1 = \|y\|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ é a norma do operador bilinear contínuo B o qual leva $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Como $D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_r(\mathbf{Z})$, $D_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_1(\mathbf{Z})$ e $D_{\mathbf{Z}\mathbf{Z}} \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}(t))$ são todos limitados, é claro que

$$|M_1| \leq c_{12} \|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{(0)}\|^2 + \epsilon^l c_{13} \|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{(0)}\| + \epsilon^{l+r} c_{14} + \epsilon^{l+s} c_{15} \leq c_{16} \epsilon^{l+s}, \quad (3.12)$$

e, analogamente

$$|M_2| \leq c_{17} \|\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^{(0)}\| + \epsilon^l c_{18} + \epsilon^{l+r} c_{19} \leq c_{20} \epsilon^l. \quad (3.13)$$

Portanto, da expressão dada acima para $D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r(t, z_0, \epsilon)$ e por (3.12)-(3.13) segue que

$$\|D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r(t, z_0, \epsilon)\| \leq c_{21} \epsilon^{l+s} t + \int_0^t c_{22} \|D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r(t, z_0, \epsilon)\|$$

e, usando a desigualdade generalizada de Gronwall

$$\|D_{\mathbf{z}_0} \mathbf{Z}_r(t, z_0, \epsilon)\| \leq \frac{c_{21} \epsilon^{l+s}}{c_{22}} (e^{c_{22} t} - 1) \leq c_{23} \epsilon^{l+s}.$$

Portanto, o lema está provado. ■

Capítulo 4

O problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão

Neste capítulo, descrevemos um dos problemas a pesquisar nesta tese, o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão, no caso em que a terceira componente do momento angular é não nula. Damos informações sobre a dinâmica da partícula infinitesimal e apresentamos os subproblemas contidos neste.

4.1 Equações de movimento

O problema geral dos três corpos consiste no estudo da dinâmica de três partículas, as quais se movem no espaço $\mathbb{R}^3$ de acordo com suas forças mútuas de atração gravitacional. Sejam m_1 , m_2 e m_3 as três partículas no espaço cuja posição dos vetores são $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ and $\mathbf{r}_3$, respectivamente. De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton, a força de atração entre as partículas é $\mathcal{G}m_i m_j r_{ij}^{-2}$, where $i, j = 1, 2, 3$, $r_{ij} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|$ e $\mathcal{G}$ é a constante de gravitação universal. As equações diferenciais do problema dos três corpos são

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \frac{\mathcal{G}m_1 m_2}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \frac{\mathcal{G}m_1 m_3}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \frac{\mathcal{G}m_2 m_1}{r_{12}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \frac{\mathcal{G}m_2 m_3}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \frac{\mathcal{G}m_3 m_1}{r_{13}^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + \frac{\mathcal{G}m_3 m_2}{r_{23}^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \end{aligned} \tag{4.1}$$

De agora por diante assumiremos, sem perda da generalidade, que $\mathcal{G}$ é uma constante unitária.

A seguir consideramos um caso limite do problema geral dos três corpos no espaço, nele a dinâmica de duas partículas m_1 , m_2 , as quais chamamos de primários, é fixada de tal forma que seu movimento é um movimento Kepleriano elíptico com colisão, conforme Capítulo 2. Desta maneira, o problema limite (restrito) consiste em descrever o movimento da terceira partícula $\mathbf{r}_3$ de massa infinitesimal $m_3 \approx 0$, sob a ação do campo gravitacional criado pelos primários. Chamamos este problema por *problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão*, veja a Figura 4.1. Escolhemos $m_1 = \mu$ e $m_2 = 1 - \mu$, onde $\mu \in (0, 1/2]$ e consideramos as coordenadas inerciais no espaço $\mathbb{R}^3$ dadas por (x, y, z) . Assumiremos que os primários movem-se, por todo tempo, sob o eixo z com o centro de massa fixado na origem do sistema de coordenadas. Assim, as equações de movimento do corpo

infinitesimal são

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -x \left[\frac{\mu}{r_1^3(t)} + \frac{1-\mu}{r_2^3(t)} \right] \\ \ddot{y} &= -y \left[\frac{\mu}{r_1^3(t)} + \frac{1-\mu}{r_2^3(t)} \right] \\ \ddot{z} &= - \left[\frac{\mu(z-z_1)}{r_1^3(t)} + \frac{(1-\mu)(z-z_2)}{r_2^3(t)} \right]\end{aligned}\tag{4.2}$$

onde

$$r_1^2(t) = x^2 + y^2 + (z - z_1(t))^2 = x^2 + y^2 + (z - (1-\mu)\rho(t))^2\tag{4.3}$$

$$r_2^2(t) = x^2 + y^2 + (z - z_2(t))^2 = x^2 + y^2 + (z + \mu\rho(t))^2,$$

com $z_1(t) = (1-\mu)\rho(t)$, $z_2 = \mu\rho(t)$ e $\rho(t)$ satisfazendo a equação diferencial (2.7). Assim $\rho(t)$ determina um

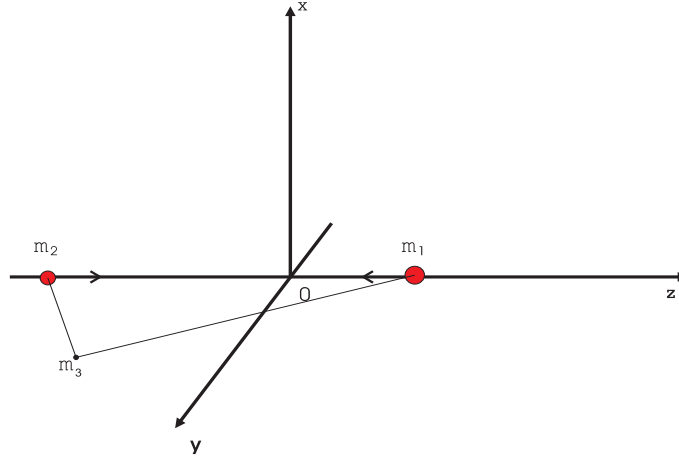


Figura 4.1: O problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão.

movimento elíptico com colisão $2\pi\epsilon^3$ -periódico em t (veja Observação 2.2.3 item 1), onde ϵ é definido por (2.11).

Denotando $\dot{x} = p_x$, $\dot{y} = p_y$ e $\dot{z} = p_z$ o sistema (4.2) torna-se:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -x \left[\frac{\mu}{r_1^3(t)} + \frac{1-\mu}{r_2^3(t)} \right] \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -y \left[\frac{\mu}{r_1^3(t)} + \frac{1-\mu}{r_2^3(t)} \right] \\ \dot{z} &= p_z, & \dot{p}_z &= - \left[\frac{\mu(z-z_1)}{r_1^3(t)} + \frac{(1-\mu)(z-z_2)}{r_2^3(t)} \right].\end{aligned}\tag{4.4}$$

Observe que o sistema (4.2) é um sistema Hamiltoniano não autônomo, $2\pi\epsilon^3$ -periódico em t , com 3 graus de liberdade (de fato 3 graus e meio de liberdade), cuja função Hamiltoniana é dada por:

$$H^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \left[\frac{\mu}{r_1} + \frac{1-\mu}{r_2} \right],\tag{4.5}$$

onde $\mathbf{q} = (x, y, z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Esta função é definida no espaço de fase

$$\Omega = \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \in \mathbb{R}^7 / (x, y, z) \neq (0, 0, (1-\mu)\rho(t)), (x, y, z) \neq (0, 0, -\mu\rho(t))\},$$

os pontos excluídos de $\mathbb{R}^7$ correspondem as singularidades do seguinte tipo:

(i) Colisão tripla: $x = y = 0$ e $t = 0 \pmod{2\pi\epsilon^3}$.

(ii) Colisão binária: $(x, y, z) = (0, 0, (1 - \mu)\rho(t))$ e $t \neq 0 \pmod{2\pi\epsilon^3}$, entre as partículas m_3 e m_1 .

(iii) Colisão binária: $(x, y, z) = (0, 0, -\mu\rho(t))$ e $t \neq 0 \pmod{2\pi\epsilon^3}$, entre as partículas m_3 e m_2 .

Desde que $\rho(t)$ depende do parâmetro ϵ , pois

$$\rho(t) = \epsilon^2[1 - \cos E_\epsilon(t)], \quad (4.6)$$

segue que o potencial Newtoniano associado ao problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão é uma função que depende de (x, y, z, t, ϵ) , a saber:

$$V(\mathbf{q}, t, \epsilon) = -\frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - (1 - \mu)[\epsilon^2(1 - \cos E_\epsilon(t))])^2}} - \frac{1 - \mu}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + \mu[\epsilon^2(1 - \cos E_\epsilon(t))])^2}}. \quad (4.7)$$

Consequentemente, as equações de movimento (4.2) podem ser reescritas como uma formulação mecânica, dada por

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q}, t, \epsilon), \quad (4.8)$$

onde ∇V é o gradiente de V com respeito à $\mathbf{q}$. Segue imediatamente da definição de E e V as seguintes importantes propriedades:

Proposição 4.1.1. *Suponha que $\epsilon \neq 0$, as seguintes propriedades são verdadeiras:*

1. $V(\epsilon^2 \mathbf{q}, \epsilon^3 t, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} V(\mathbf{q}, t, 1)$,
2. $\nabla V(\epsilon^2 \mathbf{q}, \epsilon^3 t, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon^4} \nabla V(\mathbf{q}, t, 1)$,
3. $\mathbf{s}(t) = \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{q}(\epsilon^3 t)$ é uma solução de $\ddot{\mathbf{s}} = -\nabla V(\mathbf{s}, t, 1)$ se $\mathbf{q}(t)$ é uma solução de $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q}, t, \epsilon)$, e se $\mathbf{s}(t)$ é uma solução de $\ddot{\mathbf{s}} = -\nabla V(\mathbf{s}, t, 1)$, então $\mathbf{q}(t) = \epsilon^2 \mathbf{s}(t/\epsilon^3)$ é uma solução de $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q}, t, \epsilon)$.
4. Se o momento angular de $\mathbf{q}(t)$ é c , então o momento angular de $\mathbf{s}(t)$ is $\tilde{c} = \epsilon^{-1} c$.

Demonstração: A fim de provar o primeiro item é suficiente observar que, de (2.13), $E_\epsilon(\epsilon^3 t) = E_1(t)$, de acordo com a notação descrita em (2.14). De fato, sabemos que a função $E_\epsilon(t)$ é dada pela inversa da equação de Kepler (2.13) assim, se um novo tempo τ é introduzido tal que $\tau = \epsilon^3 t$, segue da equação de Kepler que

$$t = E - \sin E.$$

Assim, temos que $E_\epsilon(\epsilon^3 t) = E_1(t)$. O segundo item é trivial. O terceiro item é consequência direta do segundo item, mas o provaremos com detalhes agora. Seja $\mathbf{q}(t)$ uma solução de $\ddot{\mathbf{q}} = -\nabla V(\mathbf{q}, t, \epsilon)$ e

$$\mathbf{s}(t) = \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{q}(\epsilon^3 t). \quad (4.9)$$

Diferenciando duas vezes a equação (4.9) obtemos $\ddot{\mathbf{s}}(t) = \epsilon^4 \ddot{\mathbf{q}}(\epsilon^3 t) = -\epsilon^4 \nabla V(\mathbf{q}(\epsilon^3 t), \epsilon^3 t, \epsilon)$. Assim,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{s}}(t) &= -\epsilon^4 \nabla V(\mathbf{q}(\epsilon^3 t), \epsilon^3 t, \epsilon) \\ &= -\epsilon^4 \nabla V(\frac{1}{\epsilon^2} \epsilon^2 \mathbf{q}(\epsilon^3 t), \epsilon^3 t, \epsilon) \\ &= -\nabla V(\frac{\mathbf{q}(\epsilon^3 t)}{\epsilon^2}, t, 1) \\ &= -\nabla V(\mathbf{s}(t), t, 1), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue do item 2. Agora, seja $\mathbf{s}(t)$ uma solução de $\ddot{\mathbf{s}} = -\nabla V(\mathbf{s}, t, 1)$, e considere

$$\mathbf{q}(t) = \epsilon^2 \mathbf{s}(t/\epsilon^3). \quad (4.10)$$

Portanto, diferenciando a equação (4.10) e usando as hipóteses segue que

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = 1/\epsilon^4 \ddot{\mathbf{s}}(t/\epsilon^3) = -1/\epsilon^4 \nabla V(s(\frac{t}{\epsilon^3}), t/\epsilon^3, 1)$$

e assim,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}(t) &= -1/\epsilon^4 \nabla V(s(\frac{t}{\epsilon^3}), t/\epsilon^3, 1) \\ &= -\nabla V(\epsilon^2 \mathbf{s}(t/\epsilon^3), t, \epsilon) \\ &= -\nabla V(\mathbf{q}(t), t, \epsilon) \end{aligned}$$

e desta maneira terminamos de provar este item.

O quarto item segue diretamente da definição do momento angular. ■

Uma importante consequência desta proposição é a seguinte:

Observação 4.1.2. Se conhecemos uma solução do sistema $\ddot{\mathbf{q}} = \nabla V(\mathbf{q}, t, \epsilon)$, o qual depende do parâmetro ϵ , então pela Proposição 4.1.1 item 3 temos uma solução do sistema $\ddot{\mathbf{q}} = \nabla V(\mathbf{q}, t, 1)$, i.e., com $\epsilon = 1$. Além disso, a recíproca também é válida. Observe que se $q(t)$ é uma solução T -periódica de (4.8) com algum valor pequeno de ϵ ; então $s(t) = \frac{1}{\epsilon^2} q(\epsilon^3 t)$ é uma solução T/ϵ^3 -periódica de (4.8) com $\epsilon = 1$.

4.2 Subproblemas

É importante chamar a atenção sobre os subproblemas deste problema restrito espacial, os quais abaixo destacamos:

1. $M_1 = \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6 | x = p_x = 0, y = p_y = 0\}$, assim o sistema (4.4) é reduzido em 2 graus de liberdade. Este sistema foi estudado por Lacombe e Llibre [24], e por Kaplan, Lacombe e Llibre em [23]. Observa-se que, neste caso, o corpo infinitesimal move-se sobre o eixo z e pode ter três possibilidades: entre os primários, à direita de m_1 , ou à esquerda de m_2 . Os autores chamaram este problema por *problema restrito retilíneo elíptico dos três corpos*.
2. Se $x = z = 0$, então $y^2 + z_1^2 = y^2 + z_2^2 = r_1^2 = r_2^2$ sempre que $m_1 = m_2 = 1/2$ já que neste caso $z_2 = -z_1$. Então, sob a condição $\mu = 1/2$ o subconjunto $M_2 = \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6 | x = p_x = 0, z = p_z = 0\}$ é invariante pelo fluxo da equação (4.4). Neste caso, o sistema (4.4) é reduzido também em 2 graus de liberdade. Alguns autores estudaram este problema, tais como Martinez e Orellana em [29] e Alvarez e Llibre em [1], [2]. Veja que no sistema o corpo infinitesimal move-se sobre o eixo y e os primários são simétricos com respeito ao eixo y . Um dos trabalhos citados acima denominou este subproblema por *problema restrito isósceles dos três corpos elíptico colisional*.
3. O conjunto $M_3 = \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6 | z = p_z = 0\}$ é invariante, se $m_1 = m_2 = 1/2$. Neste caso, o sistema (4.4) é reduzido em 1 grau de liberdade. Nós estudaremos este problema no Capítulo 6. Observando que a massa infinitesimal movimenta-se no plano xy e os primários estão sobre o eixo z , eles são simétricos com respeito ao plano xy . Nós somente conhecemos alguns resultados deste caso, os quais são numéricos e eles foram obtidos por Puel em [40] e por Ollé e Pasca em [38].
4. O conjunto $M_4 = \{(x, y, z, p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^6 | y = p_y = 0\}$ é invariante pelo fluxo de (4.4) para qualquer massa dos primários. Neste problema os primários e o corpo infinitesimal movem-se no mesmo plano, i.e., no plano xz . Estudaremos este problema no Capítulo 5. Em [6] Broucke obteve algumas órbitas periódicas para este problema usando argumentos numéricos.

Como podemos ver os casos definidos nos itens 1 e 2 têm sido estudados de forma bastante completa e nos subproblemas 3 e 4 quase nada é conhecido sobre a dinâmica destes problemas sob o ponto de vista analítico. Enfatizamos que nesta tese temos como objetivo dar informações relevantes sobre a dinâmica da partícula infinitesimal no problema restrito elíptico dos três corpos com colisão, nos casos a saber:

- Espacial, neste caso a partícula move-se livremente no espaço $\mathbb{R}^3$. E, como foi dito no início do capítulo, será estudado aqui. Para nosso conhecimento, após revisar cuidadosamente a literatura, nada é conhecido analiticamente sobre a dinâmica deste problema.
- Planar, o subproblema definido no item 4 no qual a partícula infinitesimal move-se no plano xz . Até onde sabemos este problema só foi tratado por Broucke em [6]. Ele, em seu trabalho, considera o caso planar em coordenadas apropriadas usando a transformação de Nechvile e desta forma obtém resultados numéricos sobre a existência de algumas famílias de órbitas periódicas simétricas.
- Isósceles, nele a partícula infinitesimal move-se no plano xy de tal forma que a configuração das três partículas é um triângulo isósceles. Ressaltamos que Puel, em [40], usando a anomalia excêntrica como uma nova variável tempo obtém, numericamente, órbitas periódicas para este problema isósceles e além disso, estuda a estabilidade de tais órbitas. Em [38] também se coloca o problema isósceles em coordenadas polares e considera-se o novo tempo como sendo a anomalia excêntrica. Tomando o momento angular como parâmetro obtém-se, por continuação numérica, a existência de famílias de órbitas periódicas simétricas. No Capítulo 6 desta tese descreveremos de forma detalhada e completa a dinâmica deste problema. Em quase todos os desenvolvimentos deste trabalho os argumentos são analíticos.

4.3 Resultados preliminares

Nesta seção descrevemos alguns resultados básicos, que foi possível a nós constatar, sobre o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão.

4.3.1 Pontos de equilíbrio

É claro de (4.4) que não há pontos de equilíbrio no espaço de fase M .

4.3.2 Integral primeira

Seja $R = SO(2)$ o subgrupo de $SO(3)$ dado pelas rotações em torno do eixo z , então segue facilmente

Proposição 4.3.1. *O potencial V , definido por (4.7), é invariante sob o grupo R .*

Como consequência,

Proposição 4.3.2. *A componente polar do momento angular, i.e., $c = x\dot{y} - \dot{x}y$ é constante ao longo das soluções do sistema (4.4).*

Demonstração: Derivando c em uma solução de (4.4) temos que

$$\frac{dc}{dt} = y\ddot{x} - x\ddot{y}$$

assim substituindo as expressões de $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ dadas em (4.4), obtemos $\frac{dc}{dt} = 0$. ■

4.4 O problema em coordenadas giratórias

Desde que o sistema (4.4) é invariante com respeito ao grupo R , para estudos futuros (veja subseção 4.10.1), é conveniente escrevê-lo em um sistema giratório. Considere um sistema simplético de coordenadas giratória

$(\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta)$ relacionado com o sistema fixo da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ p_\xi \\ p_\eta \\ p_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos t & \sin t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Assim, nessas novas coordenadas, a função Hamiltoniana (4.5) torna-se

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 - \xi p_\eta + \eta p_\xi - \left[\frac{\mu}{\hat{r}_1} + \frac{1-\mu}{\hat{r}_2} \right], \quad (4.12)$$

onde $\hat{\mathbf{q}} = (\xi, \eta, \zeta)$, $\hat{\mathbf{p}} = (p_\xi, p_\eta, p_\zeta)$ and $\hat{r}_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z_1(t))^2$, $\hat{r}_2^2 = \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z_2(t))^2$ (veja os detalhes em [33]).

As equações de movimento nas coordenadas giratórias são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= p_\xi + \eta, & \dot{p}_\xi &= p_\eta - \xi \left[\frac{\mu}{\hat{r}_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\hat{r}_2^3} \right], \\ \dot{\eta} &= p_\eta - \xi, & \dot{p}_\eta &= -p_\xi - \eta \left[\frac{\mu}{\hat{r}_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\hat{r}_2^3} \right], \\ \dot{\zeta} &= p_\zeta, & \dot{p}_\zeta &= - \left[\frac{\mu(\zeta - z_1)}{\hat{r}_1^3} + \frac{(1-\mu)(\zeta - z_2)}{\hat{r}_2^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.5 O problema em coordenadas pulsantes

Introduziremos coordenadas pulsantes a fim de fixar os primários e, sem perda da generalidade, nós fixaremos um deles na origem do sistema de coordenadas. Começemos definindo

$$u = \frac{x}{\rho}, \quad v = \frac{y}{\rho}, \quad w = \frac{z}{\rho} + z_0, \quad z_0 = \frac{1}{2}(m_1 - m_2) = -(1 - \mu). \quad (4.14)$$

Agora, é possível ver que as coordenadas dos primários m_1 e m_2 com respeito ao novo sistema de coordenadas são, respectivamente,

$$(0, 0, 0) \quad \text{e} \quad (0, 0, -1).$$

Também verifica-se

$$r_1 \equiv \rho \rho_1 \quad \text{and} \quad r_2 \equiv \rho \rho_2,$$

onde $\rho_1 = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ e $\rho_2 = \sqrt{u^2 + v^2 + (w+1)^2}$. Introduzindo o reescalonamento no tempo

$$\frac{dt}{ds} = \rho^2, \quad (4.15)$$

a dinâmica do corpo infinitesimal associada ao sistema (4.2) assume a forma

$$\begin{aligned} u'' &= -\rho u \left[-1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} \right] \\ v'' &= -\rho v \left[-1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} \right] \\ w'' &= -\rho \left[-(w + (1 - \mu)) + \frac{\mu w}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)(w+1)}{\rho_2^3} \right], \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $(\cdot)'$ significa derivar com respeito a s . Definindo o momento conjugado por

$$p_u = u', \quad p_v = v', \quad p_w = w' \quad (4.17)$$

o sistema acima (4.16) assume a forma

$$\begin{aligned} u' &= p_u, & p'_u &= -\rho u \left[-1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} \right], \\ v' &= p_v, & p'_v &= -\rho v \left[-1 + \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} \right], \\ w' &= p_w, & p'_w &= -\rho \left[-(w + (1-\mu)) + \frac{\mu w}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)(w+1)}{\rho_2^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

e a função Hamiltoniana associada ao sistema é

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(u, v, w, p_u, p_v, p_w, s) = \frac{1}{2}(p_u^2 + p_v^2 + p_w^2) - \rho \left\{ \frac{1}{2}[u^2 + v^2 + (w + (1-\mu))^2] + \frac{\mu}{\rho_1} + \frac{1-\mu}{\rho_2} \right\}. \quad (4.19)$$

4.5.1 Soluções homográficas

De acordo com Winter [52] as soluções homográficas de (4.4) correspondem às soluções de equilíbrio do sistema (4.18).

Proposição 4.5.1. *No problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão há dois tipos de soluções homográficas, a saber: colinear e equilátera.*

Demonstração: Os pontos de equilíbrio de (4.18) são dados por $u = 0$ ou $\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} = 1$ e $v = 0$ ou $\frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)}{\rho_2^3} = 1$ e $-(w + (1-\mu)) + \frac{\mu w}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)(w+1)}{\rho_2^3} = 0$.

Se $u = v = 0$, a terceira relação implica que

$$-(w + (1-\mu)) + \frac{\mu w}{\|w\|^3} + \frac{(1-\mu)(w+1)}{\|w+1\|^3} = 0, \quad (4.20)$$

Assim, nós subdividimos a análise em três casos:

1. $w > 0$,
2. $-1 < w < 0$,
3. $w < -1$.

Procederemos a analisar somente o primeiro caso, porque a análise nos outros casos é similar. Neste caso, as soluções homográficas são dadas pelos zeros da função

$$f(w) := -(w + (1-\mu)) + \frac{\mu}{w^2} + \frac{(1-\mu)}{(w+1)^2}. \quad (4.21)$$

Facilmente verifica-se que f é uma função decrescente para $w > 0$. Como $f \rightarrow +\infty$ quando $w \rightarrow 0^+$ e $f \rightarrow -\infty$ quando $w \rightarrow +\infty$, segue que f possui um único zero w_* . Consequentemente, neste caso, a solução homográfica é dada por $(u = 0, v = 0, w = w_*)$.

No caso não colinear, i.e., $u \neq 0$ ou $v \neq 0$, devemos ter $1 = \frac{\mu}{\rho_1^3} + \frac{1-\mu}{\rho_2^3}$. Da relação $-(w + (1-\mu)) + \frac{\mu w}{\rho_1^3} + \frac{(1-\mu)(w+1)}{\rho_2^3} = 0$ segue que $\rho_1 = \rho_2 = 1$, i.e., a configuração é um triângulo equilátero. Além disso, tem-se que os pontos da configuração equilátera são da forma $(u, v, -1/2)$, tal que $u^2 + v^2 = 3/4$. ■

Observação 4.5.2. Nas coordenadas originais, as soluções homográficas colineares são dadas por

$$x(t) = 0, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = (w_* + 1 - \mu) \rho(t),$$

e as soluções homográficas equiláteras correspondem à

$$x(t) = u_* \rho(t), \quad y(t) = v_* \rho(t), \quad z(t) = (1/2 + \mu) \rho(t), \quad \text{de tal forma que } u_*^2 + v_*^2 = 3/4.$$

As soluções homográficas são soluções particulares do problema, e elas se caracterizam por manter ao longo do tempo a mesma configuração inicial.

4.6 Simetrias

Nesta seção indicaremos as simetrias do sistema (4.4) e como elas podem simplificar o problema de encontrar órbitas periódicas desse sistema.

Pelo Lema 2.2.2 item 4, se tem que $E(-l) = -E(l)$. Uma vez que $\cos(E(-l)) = \cos(-E(l))$ e $l = t/\epsilon^3$ verifica-se, facilmente, que a equação de movimento (4.4) possui, sempre que $\mu = 1/2$, as seguintes simetrias:

$$\begin{aligned}
 I &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \\
 S_1 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, -y, -z, -p_x, p_y, p_z; -t) \\
 S_2 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, y, z, p_x, -p_y, -p_z, -t) \\
 S_3 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, -y, z, -p_x, p_y, -p_z; -t) \\
 S_4 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, -y, -z, p_x, p_y, p_z; -t) \\
 S_5 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, -y, z, p_x, p_y, -p_z; -t) \\
 S_6 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, y, -z, p_x, -p_y, p_z; -t) \\
 S_7 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, y, z, -p_x, -p_y, -p_z; -t) \\
 S_8 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, y, -z, -p_x, -p_y, p_z; -t) \\
 S_9 &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, -y, z, -p_x, -p_y, p_z; t) \\
 S_{10} &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, -y, -z, p_x, -p_y, -p_z; t) \\
 S_{11} &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, y, z, -p_x, p_y, p_z; t) \\
 S_{12} &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, -y, z, p_x, -p_y, p_z; t) \\
 S_{13} &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, y, -z, -p_x, p_y, -p_z; t) \\
 S_{14} &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (x, y, -z, p_x, p_y, -p_z; t) \\
 S_{15} &: (x, y, z, p_x, p_y, p_z; t) \rightarrow (-x, -y, -z, -p_x, -p_y, -p_z; t)
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Observação 4.6.1. 1) Observe que a t -variável nas simetrias acima foi introduzida somente para dizer que esta simetria é reversa no tempo ou direta no tempo, conforme for o caso. Assim, por exemplo, se

$$\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t))$$

é uma solução de (4.4), escreveremos

$$S_1(\varphi(t)) = (x(-t), -y(-t), -z(-t), -p_x(-t), p_y(-t), p_z(-t)).$$

2) As simetrias $S_2, S_3, S_5, S_7, S_9, S_{11}$ e S_{12} existem para todo valor de $\mu \in (0, 1/2]$.

As simetrias em (4.22) podem ser interpretadas da seguinte maneira:

Lema 4.6.2. *Seja $\varphi(t)$ uma solução do sistema Hamiltoniano (4.4), então $\hat{\varphi}_i(t) = S_i(\varphi(t))$ é outra solução do sistema (4.4) para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots, 15\}$.*

Demonstração: Provaremos somente este resultado para a simetria S_1 porque os outros são semelhantes. Precisamos verificar que, se $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t))$ é uma solução de (4.4), então

$$\hat{\varphi}(t) = (x(-t), -y(-t), -z(-t), -p_x(-t), p_y(-t), p_z(-t))$$

também é uma solução (4.4) se $m_1 = m_2$, i.e., $\mu = 1/2$. É bastante observar que

$$\begin{aligned}
 \frac{d(-p_x(-t))}{dt} &= \dot{p}_x(-t) = -x(-t) \left[\frac{1/2}{r_2^3(-t)} + \frac{1/2}{r_1^3(-t)} \right] = -x(-t) \left[\frac{1/2}{r_1^3(-t)} + \frac{1/2}{r_2^3(-t)} \right], \text{ analogamente} \\
 \frac{dp_y(-t)}{dt} &= -\dot{p}_y(-t) = y(-t) \left[\frac{1/2}{r_2^3(-t)} + \frac{1/2}{r_1^3(-t)} \right] = -(-y(-t)) \left[\frac{1/2}{r_1^3(-t)} + \frac{1/2}{r_2^3(-t)} \right], \text{ e} \\
 \frac{dp_z(-t)}{dt} &= -\dot{p}_z(-t) = \left[\frac{1/2(z(-t)-z_1(-t))}{r_2^3(-t)} + \frac{(1/2)(z(-t)-z_2(-t))}{r_1^3(-t)} \right] = - \left[-\frac{1/2(z(-t)-z_1(-t))}{r_2^3(-t)} - \frac{1/2(z(-t)-z_2(-t))}{r_1^3(-t)} \right] \\
 &= - \left[\frac{1/2(-z(-t)-(-z_1)(-t))}{r_2^3(-t)} + \frac{(1/2)(-z(-t)-(-z_2)(-t))}{r_1^3(-t)} \right] = - \left[\frac{1/2(-z(-t)-z_2(-t))}{r_2^3(-t)} + \frac{1/2(-z(-t)-z_1(-t))}{r_1^3(-t)} \right] \\
 &= - \left[\frac{1/2(-z(-t)-z_1(-t))}{r_1^3(-t)} + \frac{(1/2)(-z(-t)-z_2(-t))}{r_2^3(-t)} \right]
 \end{aligned}$$

porque, quando $m_1 = m_2$, é verificado que $z_1(-t) = -z_2(-t)$. ■

$\circ$	I	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}
I	I	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{13}	S_{14}	S_{15}
S_1	S_1	I	S_{15}	S_{14}	S_{11}	S_{13}	S_9	S_{10}	S_{12}	S_6	S_7	S_4	S_8	S_5	S_3	S_2
S_2	S_2	S_{15}	I	S_9	S_{10}	S_{12}	S_{14}	S_{11}	S_{13}	S_3	S_4	S_7	S_5	S_8	S_6	S_1
S_3	S_3	S_{14}	S_9	I	S_{13}	S_{11}	S_{15}	S_{12}	S_{10}	S_2	S_8	S_5	S_7	S_4	S_1	S_6
S_4	S_4	S_{11}	S_{10}	S_{13}	I	S_{14}	S_{12}	S_{15}	S_9	S_8	S_2	S_1	S_6	S_3	S_5	S_7
S_5	S_5	S_{13}	S_{12}	S_{11}	S_{14}	I	S_{10}	S_9	S_{15}	S_7	S_6	S_3	S_2	S_1	S_4	S_8
S_6	S_6	S_9	S_{14}	S_{15}	S_{12}	S_{10}	I	S_{13}	S_{11}	S_1	S_5	S_8	S_4	S_7	S_2	S_3
S_7	S_7	S_{10}	S_{11}	S_{12}	S_{15}	S_9	S_{13}	I	S_{14}	S_5	S_1	S_2	S_3	S_6	S_8	S_4
S_8	S_8	S_{12}	S_{13}	S_{10}	S_9	S_{15}	S_{11}	S_{14}	I	S_4	S_3	S_6	S_1	S_2	S_7	S_5
S_9	S_9	S_6	S_3	S_2	S_8	S_7	S_1	S_5	S_4	I	S_{13}	S_{12}	S_{11}	S_{10}	S_{15}	S_{14}
S_{10}	S_{10}	S_7	S_4	S_8	S_2	S_6	S_5	S_1	S_3	S_{13}	I	S_{15}	S_{14}	S_9	S_{12}	S_{11}
S_{11}	S_{11}	S_4	S_7	S_5	S_1	S_3	S_8	S_2	S_6	S_{12}	S_{15}	I	S_9	S_{14}	S_{13}	S_{10}
S_{12}	S_{12}	S_8	S_5	S_7	S_6	S_2	S_4	S_3	S_1	S_{11}	S_{14}	S_9	I	S_5	S_{10}	S_{13}
S_{13}	S_{13}	S_5	S_8	S_4	S_3	S_1	S_7	S_6	S_2	S_{10}	S_9	S_{14}	S_5	I	S_{11}	S_{12}
S_{14}	S_{14}	S_3	S_6	S_1	S_5	S_4	S_2	S_8	S_7	S_{15}	S_{12}	S_{13}	S_{10}	S_{11}	I	S_9
S_{15}	S_{15}	S_2	S_1	S_6	S_7	S_8	S_3	S_4	S_5	S_{14}	S_{11}	S_{10}	S_{13}	S_{12}	S_9	I

Tabela 4.1: Grupo Abelian das simetrias do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão.

As simetrias em (4.22), juntamente com a composição de funções, denotada por $\circ$, forma um grupo abeliano onde a operação composição, $\circ$, age de acordo com a Tabela 4.1. A simetria I denota a identidade.

Da Tabela 4.1 deduzimos o seguinte

Proposição 4.6.3. *As simetrias do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão (4.4), com $\mu = 1/2$, forma um grupo Abelian de ordem dezesseis, i.e., um grupo isomorfo à $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Observe que a simetria S_1 é uma reflexão com respeito ao plano xz , seguida por uma reversão no tempo e por uma reflexão com respeito ao plano xy , ou pode ser vista como uma rotação de 180° em torno do eixo x seguida por uma reversão no tempo. A simetria S_2 é uma reflexão em torno do plano yz seguida por uma reversão no tempo. Estas simetrias podem ser exploradas de maneira similar como em [14], [34], e [43] para obter órbitas periódicas. Descreveremos na próxima proposição como algumas simetrias do sistema (4.4) podem ser usadas para encontrar órbitas periódicas deste sistema.

Observação 4.6.4. Analisaremos a seguir algumas relações sobre a função $E(t)$. Tais relações nos permitirão controlar a posição dos primários quando a partícula infinitesimal passa pelos subconjunto invariantes e, principalmente, para satisfazer a condição de comensurabilidade para órbitas periódicas, uma vez que nosso sistema é periódico em t . Pela Observação 2.2.3 vê-se que para $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par, devemos tomar $T = 4\hat{k}\pi\epsilon^3$, desde que estamos considerando um sistema $2\pi\epsilon^3$ periódico. Analogamente, para $E(T/2) = \hat{k}\pi$ ($\hat{k} \in 2\mathbb{Z}$), devemos ter $T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3$. Observe que, com esta escolha de T , a condição de comensurabilidade é satisfeita imediatamente, no sentido que $T/2\pi\epsilon^3$ é um número racional.

Observação 4.6.5. Dois subconjuntos importantes de $\mathbb{R}^6$, que usaremos fortemente, a fim de conseguir soluções periódicas para o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão e alguns subproblemas são

$$L_1 = (x, 0, 0, 0, p_y, p_z), \quad x, p_y, p_z \in \mathbb{R}, \quad (4.23)$$

$$L_2 = (0, y, z, p_x, 0, 0), \quad y, z, p_x \in \mathbb{R}.$$

Com um certo abuso de notação, sugerimos ao leitor olhar as simetrias descritas em (4.22) somente como função da posição e da velocidade, i.e., $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Assim, os subconjuntos L_1 e L_2 podem ser vistos como subconjuntos invariantes ou, mais precisamente, subconjuntos cujos pontos são fixados pelas simetrias S_1 e S_2 , respectivamente.

A proposição abaixo, devido a Birkhoff, facilita a construção de órbitas periódicas.

Proposição 4.6.6. *Seja $\varphi(t) = (x(t), y(t), z(t), p_x(t), p_y(t), p_z(t))$ uma solução do sistema (4.4) e $E(t)$ a função definida em (2.13). Então,*

1. *Assuma que $m_1 = m_2$ ou $\mu = 1/2$. Se $(y(0), z(0), p_x(0)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\varphi(0) \in L_1$ e $E(0) = 0$ e se $(y(T/2), z(T/2), p_x(T/2)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\varphi(T/2) \in L_1$, onde $(y(t), z(t), p_x(t)) \neq (0, 0, 0)$, $0 < t < T/2$, e $E(T/2) = k\pi$, onde k é um inteiro par, então $\varphi(t)$ é uma órbita periódica com período T . Chamaremos estas órbitas de órbitas periódicas S_1 -simétricas do problema restrito espacial elíptico de três corpos com colisão.*
2. *Para cada $\mu \in (0, 1/2]$ fixado. Se $(x(0), p_y(0), p_z(0)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\varphi(0) \in L_2$ e $E(0) = 0$ e se $(x(T/2), p_y(T/2), p_z(T/2)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\varphi(T/2) \in L_2$, onde $(x(t), p_y(t), p_z(t)) \neq (0, 0, 0)$, $0 < t < T/2$, e $E(T/2) = k\pi$, então $\varphi(t)$ é uma órbita periódica de período T . Chamaremos estas órbitas de órbitas periódicas S_2 -simétricas do problema restrito espacial elíptico de três corpos com colisão.*
3. *Assuma que $m_1 = m_2$ ou $\mu = 1/2$. Se $(x(0), p_y(0), p_z(0)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\varphi(0) \in L_2$ e $E(0) = 0$ e se $(y(T/4), z(T/4), p_x(T/4)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\varphi(T/4) \in L_1$, onde $(y(t), z(t), p_x(t)) \neq (0, 0, 0)$, $0 < t < T/4$, e $E(T/4) = k\pi$, então $\varphi(t)$ é uma órbita periódica de período T . Chamaremos estas órbitas de órbita periódica $S_1 - S_2$ -simétricas, ou simplesmente duplamente simétrica do problema restrito espacial elíptico de três corpos com colisão.*

Demonstração: As provas destes resultados são muito semelhantes, assim provaremos somente o item 1 e o item 3. A idéia principal é usar a simetria S_1 e seu subconjunto fixo invariante em $\mathbb{R}^6$, a saber L_1 , e logo conhecendo a metade da órbita conseguimos a solução completa. Assim, podemos pensar em $\varphi(t)$ como uma solução definida no intervalo $[0, T/2]$ e pelo argumento de simetria construiremos a outra metade, a saber:

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{se } t \in [0, T/2], \\ \hat{\varphi}(t) = S_1 \circ \varphi(T - t) & \text{se } t \in [T/2, T]. \end{cases} \quad (4.24)$$

Pela hipótese é verificado que $\bar{\varphi}(t)$ está bem definida, i.e., $\varphi(0) = \hat{\varphi}(0)$. Por outro lado, ela é uma curva fechada, pois $\varphi(T/2) = \hat{\varphi}(T)$. Agora, a conclusão segue do Lema 4.6.2, da Observação 4.6.4 e pela unicidade das soluções. Com respeito ao item 3 é suficiente definir

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{se } t \in [0, T/4], \\ (S_1 \circ \varphi)(T/2 - t) & \text{se } t \in [T/4, T/2], \\ (S_2 \circ S_1 \circ \varphi)(t - T/2) & \text{se } t \in [T/2, 3T/4], \\ (S_2 \circ \varphi)(T - t) & \text{se } t \in [3T/4, T]. \end{cases} \quad (4.25)$$

■

Para o sistema em coordenadas giratórias temos resultados análogos. De fato, as equações de movimento (4.13) são invariantes pelas seguintes simetrias:

$$\begin{aligned} \hat{S}_1 : (\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta; t) &\rightarrow (\xi, -\eta, -\zeta, -p_\xi, p_\eta, p_\zeta; -t) \\ \hat{S}_2 : (\xi, \eta, \zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta; t) &\rightarrow (-\xi, \eta, \zeta, p_\xi, -p_\eta, -p_\zeta; -t) \end{aligned}$$

isto é, se

$$\hat{\varphi}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t), p_\xi(t), p_\eta(t), p_\zeta(t))$$

é uma solução de (4.13), então

$$(-\xi(-t), \eta(-t), \zeta(-t), p_\xi(-t), -p_\eta(-t), -p_\zeta(-t))$$

e

$$(\xi(-t), -\eta(-t), -\zeta(-t), -p_\xi(-t), p_\eta(-t), p_\zeta(-t))$$

também são soluções de (4.13).

Nestas novas coordenadas, os subconjuntos L_1 e L_2 definidos anteriormente assumem a forma:

$$\hat{L}_1 = (\xi, 0, 0, 0, p_\eta, p_\zeta), \quad \xi, p_\eta, p_\zeta \in \mathbb{R},$$

e

$$\hat{L}_2 = (0, \eta, \zeta, p_\xi, 0, 0), \quad \eta, \zeta, p_\xi \in \mathbb{R}.$$

Não é difícil ver que também os pontos destes subconjuntos são fixados por $\hat{S}_1$ e $\hat{S}_2$, respectivamente. Em coordenadas giratórias, temos assim um resultado semelhante à Proposição 4.6.6.

Proposição 4.6.7. *Seja $\hat{\varphi}(t) = (\xi(t), \eta(t), \zeta(t), p_\xi(t), p_\eta(t), p_\zeta(t))$ uma solução do sistema (4.13) e $E(t)$ a função definida por (2.13). Então*

1. *Para $m_1 = m_2$, se $(\eta(0), \zeta(0), p_\xi(0)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_1$ e $E(0) = 0$ e se $(\eta(T/2), \zeta(T/2), p_\xi(T/2)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/2) \in \hat{L}_1$, onde $(\eta(t), \zeta(t), p_\xi(t)) \neq (0, 0, 0), 0 < t < T/2$ e $E(T/2) = k\pi$, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_1$ -simétricas do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão em coordenadas giratórias.*
2. *Para cada $\mu \in (0, 1/2]$, se $(\xi(0), p_\eta(0), p_\zeta(0)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_2$ e $E(0) = 0$ e se $(\xi(T/2), p_\eta(T/2), p_\zeta(T/2)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/2) \in \hat{L}_2$, onde $(\xi(t), p_\eta(t), p_\zeta(t)) \neq (0, 0, 0), 0 < t < T/2$ e $E(T/2) = k\pi$, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_2$ -simétricas do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão em coordenadas giratórias.*
3. *Para $m_1 = m_2$, se $(\xi(0), p_\eta(0), p_\zeta(0)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_2$ e $E(0) = 0$ e se $(\eta(T/4), \zeta(T/4), p_\xi(T/4)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/4) \in \hat{L}_1$, onde $(\eta(t), \zeta(t), p_\xi(t)) \neq (0, 0, 0), 0 < t < T/4$ e $E(T/4) = k\pi$, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas $S_1 - S_2$ -simétricas ou, simplesmente, duplamente simétrica do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão em coordenadas giratórias em coordenadas giratórias.*

Demonstração: A prova segue de maneira similar à Proposição 4.6.6. ■

4.7 O problema como uma perturbação do problema de Kepler

O sistema (4.4) pode ser escrito como uma perturbação do problema de Kepler, onde o parâmetro perturbador é ϵ , o qual foi definido em (2.11). Mas, uma vez que $E_\epsilon(t)$ (veja Observação 2.2.3 item 3) não está definido em $\epsilon = 0$, segue que não está também definida a função Hamiltoniana (4.5). Desta maneira, a análise é um tanto mais delicada porque as técnicas padrão, tais como, expansão em série Taylor, não podem ser aplicadas. Para obter uma expansão do sistema (4.4) em ϵ usaremos os polinômios de Legendre (veja mais detalhes [47] pp.102). Consideremos as seguintes expressões para as distâncias r_1 e r_2 , descritas em (4.3)

$$r_1 = \|\mathbf{q}\| \sqrt{1 - 2w \cos S + w^2}, \quad r_2 = \|\mathbf{q}\| \sqrt{1 + 2w \cos S + w^2},$$

onde $\cos S = \frac{z}{\|\mathbf{q}\|}$ e $w = \frac{z_1}{\|\mathbf{q}\|} = (1 - \mu) \frac{\rho}{\|\mathbf{q}\|}$. Assumimos que $\frac{\rho}{\|\mathbf{q}\|} < 1$, assim podemos expandir usando os polinômios Legendre $1/r_1$ e $1/r_2$ como uma série de potências na variável w (para mais detalhes acerca desta expansão veja [47]).

Desta maneira, obtemos:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(\cos S) (w)^j \right]$$

e

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(-\cos S) (w)^j \right]$$

onde $P_j(\cos S)$ é o j -ésimo polinômio de Legendre descrito por

$$P_j(\chi) = \frac{(2j)!}{2^j(j!)^2} \left(\chi^j - \frac{j(j-1)}{2(2j-1)} \chi^{j-2} + \frac{j(j-1)(j-2)(j-3)}{2 \cdot 4(2j-1)(2j-3)} \chi^{j-4} + \dots \right).$$

Em particular, segue que

$$\begin{aligned} P_0(\cos \theta) &= 1, & P_3(\cos \theta) &= -\frac{3}{2} \cos \theta + \frac{5}{2} \cos^3 \theta, \\ P_1(\cos \theta) &= \cos \theta, & P_4(\cos \theta) &= \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \theta + \frac{35}{8} \cos^4 \theta, \\ P_2(\cos \theta) &= -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta, & P_5(\cos \theta) &= \frac{63}{2} \cos^5 \theta - \frac{70}{8} \cos^3 \theta + \frac{15}{8} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ambas séries associadas à $1/r_1$ e à $1/r_2$ são convergentes para $|w| < 1$ (see [47]). Usando esta expansão, a função Hamiltoniana (4.5) torna-se

$$H^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^2 H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^4 H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^6 H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) \quad (4.27)$$

onde

$$H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}, \quad (4.28)$$

$$H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = -(1-\mu)(2\mu-1) \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)] \cos S}{\|\mathbf{q}\|^2}, \quad (4.29)$$

$$H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = -(1-\mu)^2 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{\|\mathbf{q}\|^3} \left(\frac{-1 + 3 \cos^2 S}{2} \right) \quad (4.30)$$

e

$$\begin{aligned} H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) &= -(2\mu-1)(1-\mu)^3 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^3}{\|\mathbf{q}\|^4} \left(\frac{-3 \cos S + 5 \cos^3 S}{2} \right) - \\ &\quad \epsilon^2 (1-\mu)^4 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16\|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(S) + \frac{35}{8} \cos^4(S) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Observe que $H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é o Hamiltoniano do problema de Kepler e que as funções Hamiltonianas $H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$, $H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ e $H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ são limitadas pois, por hipótese, $\frac{z_1}{\|\mathbf{q}\|} = (1-\mu) \frac{\rho}{\|\mathbf{q}\|} < 1$.

Lema 4.7.1. *As funções $\epsilon H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$, $\epsilon H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ e $\epsilon H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ podem ser definidas de maneira contínua em $\epsilon = 0$.*

Demonstração: As funções $H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$, $H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ e $H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ não estão definidas em $\epsilon = 0$ pois a função $E_\epsilon(t)$ não o está, mas são limitadas quando ϵ tende à zero por causa do termo $\cos E_\epsilon(t)$. Desta maneira, podemos definir $\epsilon H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$, $\epsilon H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ e $\epsilon H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ ou extendê-las para todo $\epsilon \geq 0$ da seguinte forma

$$\epsilon H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = \begin{cases} \epsilon H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) & \text{se } \epsilon \neq 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = 0 & \text{se } \epsilon = 0, \end{cases}$$

$$\epsilon H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = \begin{cases} \epsilon H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) & \text{se } \epsilon \neq 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = 0 & \text{se } \epsilon = 0, \end{cases}$$

e

$$\epsilon H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = \begin{cases} \epsilon H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) & \text{se } \epsilon \neq 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = 0 & \text{se } \epsilon = 0. \end{cases}$$

■

Observação 4.7.2. Pelo Lema 4.7.1, as funções $\epsilon^2 H_1^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$, $\epsilon^4 H_2^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ e $\epsilon^6 H_r^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)$ são contínuas com respeito a $\epsilon \geq 0$ e, é fácil ver que estas funções são contínuas com respeito a $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ para todo $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{p}$ e t .

Usando polinômios de Legendre, a função Hamiltoniana (4.12), i.e., o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão em coordenadas giratórias, pode ser escrita da seguinte forma

$$\hat{H}^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \epsilon^2 \hat{H}_1^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) + \epsilon^4 \hat{H}_2^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) + \epsilon^6 \hat{H}_r^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) \quad (4.32)$$

onde

$$\hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \xi p_\eta + \eta p_\xi - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|}, \quad (4.33)$$

$$\hat{H}_1^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = -(1-\mu)(2\mu-1) \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)] \cos \hat{S}}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^2}, \quad (4.34)$$

$$\hat{H}_2^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = -(1-\mu)^2 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \left(\frac{-1 + 3 \cos^2 \hat{S}}{2} \right), \quad (4.35)$$

e

$$\begin{aligned} \hat{H}_r^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = & -(2\mu-1)(1-\mu)^3 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^3}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \left(\frac{-3 \cos \hat{S} + 5 \cos^3 \hat{S}}{2} \right) - \\ & \epsilon^2 (1-\mu)^4 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16 \|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(\hat{S}) + \frac{35}{8} \cos^4(\hat{S}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde $\cos \hat{S} = \frac{\zeta}{\|\hat{\mathbf{q}}\|}$ e $\hat{w} = (1-\mu) \frac{z_1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} = \frac{\rho}{\|\hat{\mathbf{q}}\|}$. Observe que o termo $\xi p_\eta - \eta p_\xi$, o qual aparece no Hamiltoniano H_0 , é a terceira componente do vetor momento angular $\mathbf{G}$ da partícula.

As funções $\hat{H}_1^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon)$, $\hat{H}_2^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon)$ e $\hat{H}_r^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon)$ são limitadas porque, por hipótese, $z_1/\|\hat{\mathbf{q}}\| < 1$. Por razões semelhantes ao caso das coordenadas inerciais, as funções $\epsilon^2 \hat{H}_1^\mu$, $\epsilon^4 \hat{H}_2^\mu$ e $\epsilon^8 \hat{H}_r^\mu$ podem ser definidas de maneira contínua em $\epsilon = 0$.

4.8 O problema em variáveis de Poincaré-Delaunay

A fim de continuar órbitas periódicas do problema de Kepler para $\epsilon > 0$, estudaremos as equações de movimento (no sistema de coordenadas inercial e giratório) em variáveis convenientes. Para nosso objetivo, aqui consideraremos as variáveis de Poincaré-Delaunay, as quais são transformações simpléticas. Introduzimos as variáveis de Poincaré-Delaunay com a seguinte escolha (veja mais sobre estas variáveis em [5], [48]):

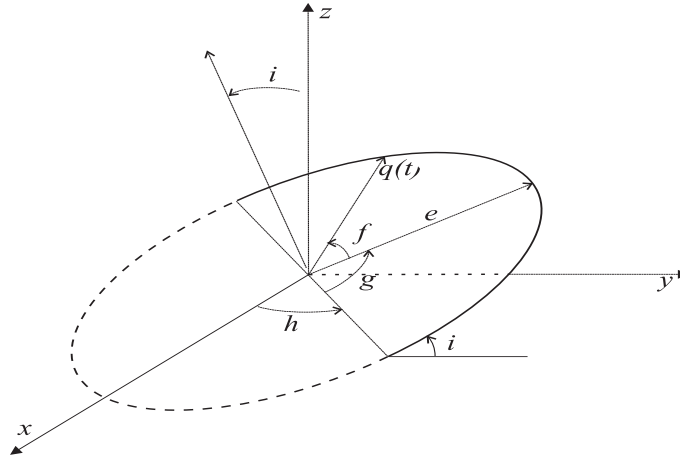


Figura 4.2: Os elementos orbitais e as variáveis de Poincaré-Delaunay.

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + g, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= -\sqrt{2(L-G)} \sin(g), & P_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos(g), \\ Q_3 &= h, & P_3 &= H. \end{aligned} \quad (4.37)$$

onde $L = \sqrt{a}$, $H = G \cos i$ (i.e., H é a terceira componente do momento angular G); a é o semi-eixo maior da órbita; G é o momento angular; i a inclinação do plano orbital com respeito ao plano de referência xy ; l é anomalia média, a qual coincide com a anomalia verdadeira f quando assume valores múltiplos de π ou quando a órbita é circular; g é o argumento do pericentro, medido a partir da linha do nodo ascendente e h é a longitude do nodo ascendente, medido a partir do eixo x se consideramos o sistema de coordenadas inercial ou medido a partir do eixo ξ se consideramos o sistema de coordenadas giratórias (por abuso de notação quando utilizarmos estas variáveis de Poincaré-Delaunay considerando o sistema de coordenadas giratórias dado em (4.11) pensaremos a variável Q_3 ainda por h , mas medido a partir do eixo ξ . A rigor teríamos que definir Q_3 por $\hat{h}$, onde $\hat{h} + t = h$, mas, por abuso de notação, consideraremos $\hat{h}$ como sendo um h medido a partir do eixo ξ . O restante das variáveis tem a definição mantida. Para maiores detalhes veja Apêndice 7.4.

Estas variáveis são válidas sobre órbitas circulares, as quais ocorrem quando $L = G$ e, note que $L = G$ corresponde à $Q_2 = P_2 = 0$ na escolha (4.37) das variáveis de Poincaré-Delaunay.

A função Hamiltoniana (4.27) (coordenadas inerciais) nas variáveis (4.37) torna-se

$$H^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon^2 H_1^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^4 H_2^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^6 H_r^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) \quad (4.38)$$

com $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$,

$$H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2P_1^2}, \quad (4.39)$$

e

$$H_1^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -(1-\mu)(2\mu-1) \frac{\cos S}{\|\mathbf{q}\|^2} [1 - \cos E_\epsilon(t)], \quad (4.40)$$

$$H_2^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -(1-\mu)^2 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{\|\mathbf{q}\|^3} \left(\frac{-1 + 3 \cos^2 S}{2} \right) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} H_r^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = & -(2\mu-1)(1-\mu)^3 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^3}{\|\mathbf{q}\|^4} \left(\frac{-3 \cos S + 5 \cos^3 S}{2} \right) \\ & - \epsilon^2 (1-\mu)^4 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16\|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(S) + \frac{35}{8} \cos^4(S) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde a expressão da $\|\mathbf{q}\|$ e $\cos^2 S$ são dados no seguinte lema.

Lema 4.8.1. *As expressões da $\|\mathbf{q}\|$ e $\cos^2 S$ nas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37) são*

$$\cos^2 S = \frac{(G^2 - P_3^2) \sin^2 \psi}{G^2}$$

e

$$\|\mathbf{q}\| = P_1^2 \left(1 - [e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right),$$

onde e é a excêntricidade da órbita e g é o argumento do pericentro, o qual nas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37) são dados por

$$e = \sqrt{\frac{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}{4P_1^2}}$$

e

$$\cos g = \frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, \quad \sin g = -\frac{Q_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}},$$

assim,

$$e \sin g = -\frac{1}{\sqrt{2P_1}} Q_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}, \quad e \cos g = \frac{1}{\sqrt{2P_1}} P_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}.$$

O momento angular G é dado por, $G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$ e ψ é o ângulo $\psi = g + f$, onde f é a anomalia verdadeira.

O ângulo ψ , nestas variáveis, tem a forma

$$\begin{aligned} \psi &= Q_1 + 2 \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\ &\left(e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1 - [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right). \end{aligned}$$

Demonstração: Aqui provaremos que $\cos^2 S = \frac{(G^2 - P_3^2) \sin^2 \psi}{G^2}$. O restante da prova pode ser encontrado no Apêndice C.

No começo da Seção 4.7, vimos que $\cos S = \frac{z}{\|\mathbf{q}\|}$. Por outro lado, vê-se que $z = \|\mathbf{q}\| \sin \psi \sin i$ (veja essa demonstração no Apêndice D), onde i é o ângulo de inclinação do plano orbital com respeito ao plano de referência, o qual consideramos como o plano xy . Assim,

$$\cos S = \sin \psi \sin i,$$

desta maneira ,

$$\cos^2 S = \sin^2 \psi \sin^2 i = \sin^2 \psi (1 - \cos^2 i) = \sin^2 \psi \left(1 - \frac{P_3^2}{G^2} \right),$$

desde $H = G \cos i$ e $H = P_3$. A expressão da G segue de (4.37). De fato, $Q_2^2 + P_2^2 = 2(L - G)$. Assim, $G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$.

■

Agora provaremos a afirmação $H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2P_1^2}$. Sabemos que

$$H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} = \mathcal{E}$$

é a função Hamiltoniana do problema de Kepler no espaço. Assim, aplicando a mudança simplética dada pelas coordenadas polar esféricas r, ϑ, φ

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

cujo momento conjugado é dado por

$$p_r = \dot{r} \quad p_\vartheta = r^2 \dot{\vartheta} \quad p_\varphi = r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}, \quad (4.43)$$

a função Hamiltoniana H_0 torna-se

$$H_0 = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} p_\varphi^2 \right) - \frac{1}{r} = h. \quad (4.44)$$

O vetor momento angular $\mathbf{G}$ é dado por

$$\mathbf{G} = (-r^2 \dot{\vartheta} \sin \varphi - r^2 \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi, \quad r^2 \dot{\vartheta} \cos \varphi - r^2 \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi, \quad r^2 \dot{\varphi} \sin^2 \vartheta),$$

assim, usando (4.43) segue que

$$\|\mathbf{G}\| = G = \sqrt{(r^2 \dot{\vartheta})^2 + (r^2 \sin \vartheta \dot{\varphi})^2} = \sqrt{p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}}.$$

Consequentemente, temos que (4.44) pode ser escrita da seguinte maneira

$$\frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{G^2}{r^2} \right) - \frac{1}{r} = \mathcal{E}.$$

Assim, $p_r^2 = 2\mathcal{E} + \frac{2}{r} - \frac{G^2}{r^2}$ e desde que $a = -\frac{1}{2\mathcal{E}}$ e $L = \sqrt{a}$ segue

$$H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{L^2} + \frac{2}{r} \right) - \frac{1}{r} = -\frac{1}{2L^2} = -\frac{1}{2P_1^2}.$$

Escrevendo a função Hamiltoniana (4.32) nas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37) temos

$$\hat{H}^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon^2 \hat{H}_1^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^4 \hat{H}_2^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^6 \hat{H}_r^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) \quad (4.45)$$

onde $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$,

$$\hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2P_1^2} - P_3, \quad (4.46)$$

e

$$\hat{H}_1^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -(1-\mu)(2\mu-1) \frac{\cos \hat{S}}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^2} [1 - \cos E_\epsilon(t)], \quad (4.47)$$

$$\hat{H}_2^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -(1-\mu)^2 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \left(\frac{-1 + 3 \cos^2 \hat{S}}{2} \right) \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_r^\mu(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = & - (2\mu-1)(1-\mu)^3 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^3}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \left(\frac{-3 \cos \hat{S} + 5 \cos^3 \hat{S}}{2} \right) \\ & - \epsilon^2 (1-\mu)^4 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16 \|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(\hat{S}) + \frac{35}{8} \cos^4(\hat{S}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (4.49)$$

onde as expressões de $\|\hat{\mathbf{q}}\|$ e $\cos^2 \hat{S}$ são descritas a seguir.

Lema 4.8.2. *As expressões de $\|\hat{\mathbf{q}}\|$ e $\cos^2 \hat{S}$ nas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37) são*

$$\cos^2 \hat{S} = \frac{(G^2 - P_3^2) \sin^2 \psi}{G^2}$$

e

$$\|\hat{\mathbf{q}}\| = P_1^2 \left(1 - [e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right),$$

onde e é a excentricidade da órbita e g é o argumento do pericentro, o qual nas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37) são dados por

$$e = \sqrt{\frac{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}{4P_1^2}}$$

e

$$\cos g = \frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, \quad \sin g = -\frac{Q_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}},$$

assim,

$$e \sin g = -\frac{1}{\sqrt{2P_1}} Q_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}, \quad e \cos g = \frac{1}{\sqrt{2P_1}} P_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}.$$

O momento angular G é dado por, $G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}$ e ψ é o ângulo $\psi = g + f$, onde f é a anomalia verdadeira. O ângulo ψ , nestas variáveis, tem a forma

$$\begin{aligned} \psi = & Q_1 + 2 \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\ & + \frac{1}{2} \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\ & \left(e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1 - [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right). \end{aligned}$$

Demonstração: A prova segue de maneira análoga a prova do Lema 4.8.1. ■

As variáveis de Poincaré-Delaunay fazem mais fácil a localização da partícula infinitesimal no espaço. Nas proposições abaixo daremos condições suficientes para que a partícula teste se encontre nos subconjuntos invariantes L_1 ou L_2 e nos subconjuntos invariantes $\hat{L}_1$ ou $\hat{L}_2$.

Proposição 4.8.3. *Seja $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ definido em (4.37). A restrição*

$$(1) \quad \mathcal{L}_1 : Q_1 = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0 \pmod{\pi},$$

nos dá pontos no subconjunto invariante L_1 ou $\hat{L}_1$.

$$(2) \quad \mathcal{L}_2 : Q_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad Q_3 = 0 \pmod{\pi}, \quad P_2 = 0,$$

nos dá pontos no subconjunto invariante L_2 ou $\hat{L}_2$.

Demonstração: Desde que $Q_1 = 0 \pmod{\pi}$, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0 \pmod{\pi}$, pela definição (6.40), temos que

$$l + g = k_1\pi, \quad k_1 \in \mathbb{Z},$$

$$g = k_2\pi, \quad k_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad L = G$$

e

$$h = k_3\pi, \quad k_3 \in \mathbb{Z}.$$

Uma vez que $h = k_3\pi$, a interseção do plano orbital com o plano de referência ocorre no eixo x . Se $l + g = k_1\pi$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ e $g = k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$ segue que $l = (k_1 - k_2)\pi$. Assim, como l é um múltiplo de π , segue, pela equação do centro,

$$f - l = (2e - \frac{1}{4}e^3) \sin l + \frac{5}{4}e^2 \sin 2l + \frac{13}{12}e^3 \sin 3l + \mathcal{O}(e^4), \quad (4.50)$$

(a qual é uma série de senos, veja mais detalhes em [41], p. 78) que $l \equiv f$, onde f é a anomalia verdadeira. Pela definição de g obtemos que o pericentro está localizado no eixo x , podendo estar no semi-eixo positivo ou no semi-eixo negativo, desde que k_1 seja um inteiro par ou ímpar, respectivamente. Como $f = (k_1 - k_2)\pi$ e f é um ângulo (anomalia verdadeira) medido a partir do pericentro, obtemos pontos que estão ou sobre o pericentro ou sobre o apocentro. Desta maneira, estes pontos sempre estarão localizados no eixo x . Observe que as partículas no pericentro ou no extremo oposto ao pericentro (apocentro) partem com velocidade ortogonal ao eixo que contém o pericentro. Desta maneira, a condição sobre as velocidades é satisfeita e assim obtemos pontos no subconjunto invariante L_1 . Se os outros casos ocorrem, i.e., $l + g = k_1\pi$ e $L = G$, segue, pelas definições de L e G , que estamos em uma órbita circular e assim todos os pontos têm velocidade ortogonal com respeito ao eixo que contém o "pericentro". Além disso, sobre órbitas circulares, temos que $l = f$. O ângulo g é indefinido (porque não há pericentro), entretanto o ângulo $k_1\pi$ nos dá a posição da partícula. Este ângulo é medido a partir da linha dos nodos (eixo x). Desta maneira, obtemos pontos que estão localizados sobre o eixo x e, uma vez que a condição sobre a velocidade é satisfeita naturalmente, temos que estes pontos estão no subconjunto invariante L_1 . A prova para o caso giratório ($\hat{L}_1$) segue de maneira análoga. Para provar o item (2) usamos argumentos semelhantes aos do item (1) estes dados aqui. ■

4.9 Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares

Nosso objetivo nessa seção é obter soluções periódicas para o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão como continuação de órbitas Keplerianas circulares. Usaremos as variáveis de Poincaré-Delaunay com as equações de movimento em coordenadas inerciais. Esta escolha nos proporcionou achar órbitas Keplerianas, a

serem continuadas, sobre o plano orbital xz , ou seja, cuja inclinação do plano orbital é de 90° . Adiante, veremos que usando as variáveis de Poincaré-Delaunay com as equações de movimento, agora em coordenadas giratórias, conseguiremos órbitas Keplerianas, a serem continuadas, sobre um plano orbital com inclinação qualquer. Estas soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares estão classificadas de acordo com sua simetria. Primeiramente, obtemos órbitas periódicas duplamente simétrica, ou seja, órbitas periódicas que possuem as simetrias S_1 e S_2 , depois as que possuem a simetria S_2 e finalmente as que possuem a simetria S_1 . Uma vez que as idéias para os três casos descritos aqui são semelhantes, faremos o caso das órbitas periódicas duplamente simétrica com detalhes e nos outros casos omitiremos certos detalhes.

Como a simetria S_1 é usada, restringiremos à $m_1 = m_2$ or $\mu = 1/2$. O sistema Hamiltoniano não autônomo, nesta situação, assume a forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -\frac{x}{2} \left[\frac{1}{r_1^3(t)} + \frac{1}{r_2^3(t)} \right], \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -\frac{y}{2} \left[\frac{1}{r_1^3(t)} + \frac{1}{r_2^3(t)} \right], \\ \dot{z} &= p_z, & \dot{p}_z &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(z-z_1)}{r_1^3(t)} + \frac{(z-z_2)}{r_2^3(t)} \right].\end{aligned}\tag{4.51}$$

cuja função Hamiltoniana, obtida a partir de (4.27), para $\mu = 1/2$ é

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^4 H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^8 H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon)\tag{4.52}$$

onde

$$H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|},$$

de (4.30) temos

$$H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) := H_2^{1/2}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{(-1 + 3 \cos^2 S)}{8} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2,\tag{4.53}$$

e finalmente, de (4.31), segue que

$$H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) := H_r^{1/2}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16\|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(S) + \frac{35}{8} \cos^4(S) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4).\tag{4.54}$$

A fim de obter órbitas periódicas duplamente simétricas, consideraremos as equações de movimento (4.51) nas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37). Assim, o sistema (4.51) assume a forma

$$\dot{\mathbf{Z}} = F(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^4 \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon),\tag{4.55}$$

onde $\mathbf{Z} = (Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3)$, com

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) &= (P_1^{-3}, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) &= \left(\frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \frac{\partial H_1}{\partial P_2}, \frac{\partial H_1}{\partial P_3}, -\frac{\partial H_1}{\partial Q_1}, -\frac{\partial H_1}{\partial Q_2}, -\frac{\partial H_1}{\partial Q_3} \right),\end{aligned}\tag{4.56}$$

onde, H_1 é dada em (4.53) e, como vimos no Lema 4.8.1,

$$\cos^2 S = \frac{(G^2 - P_3^2) \sin^2 \psi}{G^2}, \quad \text{e} \quad G = P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2},$$

e, finalmente

$$\mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial H_r}{\partial P_1}, \frac{\partial H_r}{\partial P_2}, \frac{\partial H_r}{\partial P_3}, -\frac{\partial H_r}{\partial Q_1}, -\frac{\partial H_r}{\partial Q_2}, -\frac{\partial H_r}{\partial Q_3} \right),$$

com H_r descrita em (4.54). Pensamos $\mathbf{q}$ e ψ como funções de $\mathbf{Z}$ e suas expressões são dadas no Lema abaixo.

Lema 4.9.1. *As expressões de $\|\mathbf{q}\|$ e ψ nas variáveis de Poincaré-Delaunay, obtidas em série de potências em torno de $Q_2 = 0, P_1 = s^{-1/3}, P_2 = 0$, são dadas por*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}\| &= s^{-2/3} + s^{-1/2}Q_2 \sin Q_1 - s^{-1/2}P_2 \cos Q_1 + 2s^{-1/3}(P_1 - s^{-1/3}) + s^{-1/3}Q_2^2 \cos^2 Q_1 + \\ &\quad \frac{3}{2}s^{-1/6}Q_2(P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + 2s^{-1/3}Q_2P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - s^{-1/3})^2 - \frac{3}{2}s^{-1/6}(P_1 - s^{-1/3})P_2 \cos Q_1 + \\ &\quad s^{-1/3}P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3),\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\psi &= Q_1 + 2P_2s^{1/6} \sin Q_1 + 2Q_2s^{1/6} \cos Q_1 - \\ &\quad \frac{5}{2}s^{1/3}Q_2^2 \cos Q_1 \sin Q_1 + \frac{5}{2}s^{1/3}P_2Q_2 \cos 2Q_1 - Q_2s^{1/2}(P_1 - s^{-1/3}) \cos Q_1 - \\ &\quad P_2s^{1/2}(P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + \frac{5}{2}P_2^2s^{1/3} \sin Q_1 \cos Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3),\end{aligned}$$

onde $X = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_2) = (Q_2, P_1 - s^{-1/3}, P_2)$.

Demonstração: Veja Apêndice C. ■

Observação 4.9.2. Verifica-se que as expressões de $\|\mathbf{q}\|$ e ψ (coordenadas giratórias) nas variáveis de Poincaré-Delaunay são as mesmas que nas coordenadas inercias.

Observação 4.9.3. Escolhemos escrever as expressões de $\|\mathbf{q}\|$ e ψ em série de potências em torno de $Q_2 = 0, P_1 = s^{-1/3}, P_2 = 0$, pois, mais adiante, trabalharemos em vizinhanças de órbitas periódicas Keplerianas $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$, cuja condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ possui $Q_2 = 0, P_1 = s^{-1/3}, P_2 = 0$. As expansões acima são convergentes numa vizinhança pequena de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$, pois todas as funções envolvidas são analíticas.

Por sua futura importância, no lema abaixo destacaremos as expressões das equações diferenciais relativas à Q_3 e P_3 em (4.55).

Lema 4.9.4. *As equações diferenciais com respeito à Q_3 e à P_3 em (4.55) são*

$$\begin{aligned}\dot{Q}_3 &= P_3 \left(\epsilon^4 \left[\frac{6 \sin^2 \psi [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8G^2 \|\mathbf{q}\|^3} \right] + \epsilon^8 \left[\frac{-30 \sin^2 \psi [1 - \cos E(t)]^4}{64 \|\mathbf{q}\|^5 G^2} + \frac{140 \sin^2 \psi [1 - \cos E(t)]^4}{128 G^2 \|\mathbf{q}\|^5} \left(\sin^2 \psi - \frac{P_3^2}{G^2} \sin^2 \psi \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^{12}) \right) \\ \dot{P}_3 &= 0.\end{aligned}$$

Demonstração: Pelo desenvolvimento usando polinômios de Legendre é fácil ver que os termos de ordem ϵ^4 em H_r são dados por potências cada vez maiores de $\|\mathbf{q}\|, 1 - \cos E_\epsilon(t)$ e pelos termos relativos aos polinômios de Legendre, P_j , onde $j \in 2\mathbb{N}$, isto é,

$$\begin{aligned}H_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) &= -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16 \|\mathbf{q}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(S) + \frac{35}{8} \cos^4(S) \right) + \epsilon^4 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^6}{64 \|\mathbf{q}\|^8} P_6(\cos S) \\ &+ \epsilon^8 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^8}{512 \|\mathbf{q}\|^9} P_8(\cos S) + \mathcal{O}(\epsilon^{12}),\end{aligned}$$

onde $P_j(\cos S), j \in 2\mathbb{N}$ são constituídos por um termo constante e por potências pares de $\cos S$. Sabemos que,

$$\dot{Q}_3(t) = \frac{\partial H_0}{\partial P_3} + \epsilon^4 \frac{\partial H_1}{\partial P_3} + \epsilon^8 \frac{\partial H_r}{\partial P_3},$$

onde

$$\frac{\partial H_0}{\partial P_3} = 0, \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial P_3} = \frac{6P_3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 \sin^2 \psi}{8G^2 \|\mathbf{q}\|},$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_r}{\partial P_3}(\mathbf{Z}, t, \epsilon) &= -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16\|\mathbf{q}\|^5} \left(-\frac{15}{4} \frac{\partial}{\partial P_3} (\cos^2(S)) + \frac{35}{8} \frac{\partial}{\partial P_3} (\cos^4(S)) \right) + \epsilon^4 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^6}{64\|\mathbf{q}\|^8} \frac{\partial}{\partial P_3} (P_6(\cos S)) \\ &+ \epsilon^8 \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^8}{512\|\mathbf{q}\|^9} \frac{\partial}{\partial P_3} (P_8(\cos S)) + \frac{\partial}{\partial P_3} (\mathcal{O}(\epsilon^{12})). \end{aligned}$$

Desde que $\cos^2 S = \frac{(G^2 - P_3^2) \sin^2 \psi}{G^2}$ and $P_j(\cos S), j \in 2\mathbb{N}$ são contínuos por um termo constante e de potências pares de $\cos S$, temos que

$$\frac{\partial H_r}{\partial P_3}(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16\|\mathbf{q}\|^5} \left(30 \frac{P_3}{4G^2} \sin^2 \psi - \frac{140}{8} \left(\frac{(G^2 - P_3^2)}{G^2} \sin^2 \psi \right) \frac{P_3}{G^2} \sin^2 \psi \right) + P_3 \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

Assim, substituindo estes termos em (4.57), segue que

$$\dot{Q}_3 = P_3 \left(\epsilon^4 \left[\frac{6 \sin^2 \psi [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8G^2 \|\mathbf{q}\|^3} \right] + \epsilon^8 \left[\frac{-30 \sin^2 \psi [1 - \cos E(t)]^4}{64\|\mathbf{q}\|^5 G^2} + \frac{140 \sin^2 \psi [1 - \cos E(t)]^4}{128G^2 \|\mathbf{q}\|^5} \left(\sin^2 \psi - \frac{P_3^2}{G^2} \sin^2 \psi \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^{12}) \right).$$

Com respeito à equação de $\dot{P}_3$, temos pelo Lema 4.8.1 que as expressões de $\|\mathbf{q}\|$ e $\cos^2 S$ não dependem de Q_3 . Logo, as funções H_1^μ , H_2^μ e H_r^μ , para todo $\mu \in (0, 1/2]$, em particular para $\mu = 1/2$ também não. Desta maneira, a equação diferencial relativa à P_3 , $\dot{P}_3$, é idênticamente nula, isto é, o fluxo do sistema Hamiltoniano gerado pela função Hamiltoniana (4.38) é invariante com respeito $P_3 = Q_3 = 0$. Assim, terminamos a prova deste Lema. ■

Notemos que o espaço da fase do sistema (4.55) é dado por

$$\Omega = \left\{ (\mathbf{Z}, t, \epsilon) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid P_1 \neq 0, P_1 \neq \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}, \mathbf{q} \neq \mathbf{0} \right\}.$$

4.9.1 Continuação de soluções periódicas duplamente simétricas

Aqui obteremos soluções periódicas $S_1 - S_2$ -simétricas ou simplesmente duplamente simétrica (por simplificação) para o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão como continuação de órbitas Keplerianas circulares duplamente simétrica.

Seja $\mathbf{z}_i = (Q_1^i, Q_2^i, Q_3^i, P_1^i, P_2^i, P_3^i)$ uma condição inicial descrita nas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37) e seja $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_i)$ uma solução associada ao sistema

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}), \quad (4.58)$$

assim, segue que

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_i) = \left(\frac{1}{(P_1^i)^3} t + Q_1^i, Q_2^i, Q_3^i, P_1^i, P_2^i, P_3^i \right) \quad (4.59)$$

é a solução do problema de Kepler (4.58) com condição inicial $\mathbf{z}_i$. A fim de continuar uma órbita Kepleriana circular de (4.58) para o sistema (4.55) (sistema perturbado) consideramos uma solução conveniente do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ em $\mathcal{L}_2$ quando $t = 0$. Assim, pela Proposição 4.8.3 item 2 e Observação 4.6.4, $\mathbf{z}_0^*$ deve ser da forma

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*) \text{ com } E(0) = 0,$$

onde m, j são inteiros que, sem perda da generalidade, tomamos 0 ou 1 e Q_2^*, P_1^*, P_3^* são constantes a serem determinadas. Portanto, em particular, para $\mathbf{z}_i = \mathbf{z}_0^*$ (4.59) assume a forma

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) \equiv (Q_1^{(0)}(t), Q_2^{(0)}(t), Q_3^{(0)}(t), P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t), P_3^{(0)}(t)) = ((P_1^*)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*). \quad (4.60)$$

Agora nós impomos que esta solução seja duplamente simétrica. Para isso, usando as Proposições 4.6.6, item 3 e 4.8.3 item (1) é suficiente resolver em $t = T/4$, o sistema de equações

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/4, z_0^*) &= (P_1^*)^{-3} \frac{T}{4} + (m + \frac{1}{2})\pi &= p\pi \\ Q_2^{(0)}(T/4, z_0^*) &= Q_2^* &= 0 \\ Q_3^{(0)}(T/4, z_0^*) &= j\pi &= i\pi \end{aligned}$$

onde p e i são inteiros. Observando que a segunda equação é satisfeita por $Q_2^* = 0$ (com esta escolha $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma solução circular do problema de Kepler (4.58)), a terceira equação implica $i = j$ e, pela primeira equação, obtemos $T/4 = (p - m - \frac{1}{2})\pi(P_1^*)^3$. Fazendo $(P_1^*)^{-3} = s$, onde s é uma constante real positiva e escolhendo um valor conveniente de $p = m + \tilde{m} + 1$, onde $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{T}{4} = \frac{(\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi}{s}, \tilde{m} \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}_+. \quad (4.61)$$

Observe que, a princípio, temos liberdade na escolha de P_3^* . Mas, por razões que serão esclarecidas adiante, escolhemos $P_3^* = 0$. Pela Observação 2.2.3 item 2 e Observação 4.6.4, necessitamos que $E(0) = 0$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um número inteiro par. Assim, devemos tomar

$$T = 4\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (4.62)$$

Combinando (4.61) e (4.62), segue que

$$\hat{k} = \frac{(\tilde{m} + \frac{1}{2})}{s}k,$$

onde $\epsilon^3 = \frac{1}{k}$. Como devemos ter $\hat{k}$ um inteiro par, decidimos escolher k um inteiro positivo e s tal que

$$\frac{(\tilde{m} + \frac{1}{2})}{s} \in 2\mathbb{N}, \quad \tilde{m} \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}_+. \quad (4.63)$$

Observe que, para obtermos a condição (4.63), é suficiente fazer $s = (\tilde{m} + 1/2)(2\tilde{s})^{-1}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Resumindo, obtivemos uma órbita periódica duplamente simétrica do problema de Kepler (4.58) de raio $s^{-2/3}$ localizada no plano xz , com período $T = 8\pi\tilde{s}$, $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Esta órbita é descrita por (4.60) e satisfaz

$$\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0^*) = \mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_2 \text{ e } \mathbf{Z}^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) \in \mathcal{L}_1.$$

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^6$ uma vizinhança compacta de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ sem singularidades e $\mathbf{z}_0^*$ tal que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ permanece limitada e afastada das singularidades (para isso é suficiente tomarmos P_1^* suficientemente grande). Desta maneira, o seguinte lema é possível

Lema 4.9.5. *As funções $F_0(\mathbf{Z})$, $\epsilon^4 F_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon)$ e $\epsilon^8 F_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon)$, juntamente com todas as suas derivadas com respeito à $\mathbf{Z}$, são contínuas na vizinhança $\mathcal{C}$.*

Demonstração: É fácil ver que a função $\mathbf{F}_0$ é contínua em $\mathcal{C}$. As funções $\epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ são definidas para todo $(\mathbf{Z}, t, \epsilon) \in \Omega$ e são contínuas em $\mathcal{C}$, pois são funções racionais em $\mathbf{Z}$ e os termos $\|\mathbf{q}\|$ e $\sin \psi$ são funções contínuas em $\mathcal{C}$ (veja Lema 4.9.1). Com respeito às variáveis ϵ para $\epsilon \neq 0$ e t , estas funções são claramente contínuas. Para ver isto, é suficiente observar que o termo $\cos E_\epsilon(t)$ é uma função contínua em t e em ϵ , para $\epsilon \neq 0$. Observe que para $\epsilon = 0$, pela Observação 4.7.2, definimos as funções $\epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ em $\epsilon = 0$ de tal maneira que são contínuas em $\epsilon = 0$. Assim, temos que $\mathbf{F}_0, \epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ são contínuas em $\mathcal{C}$. Com relação as derivadas dessas funções com respeito à $\mathbf{Z}$, desde que $\mathbf{F}_0, \epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ são funções racionais com respeito à $\mathbf{Z}$ e os termos $\|\mathbf{q}\|$ e $\sin \psi$ têm todas as derivadas contínuas (veja Lema 4.9.1), segue que existem todas as derivadas de $\mathbf{F}_0, \epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ com respeito à $\mathbf{Z}$ em $\mathcal{C}$ e estas derivadas são contínuas. ■

Pelo lema acima, dada a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ do sistema (4.55) e uma vizinhança compacta desta solução, $\mathcal{C}$, temos que $\mathbf{F}_0, \epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ junto com todas as derivadas com respeito à $\mathbf{Z}$ são limitados em $\mathcal{C}$. Em particular, desde que $\mathbf{F}_0$ é C^1 segue que $\mathbf{F}_0$ é Lipschitz em $\mathcal{C}$ (nós podemos restringir a vizinhança compacta se necessário). Desta maneira, podemos usar as estimativas obtidas nos Lemas 3.3.1 e 3.3.2, descritos no Capítulo 3.

Mantendo as notações anteriores, procederemos com o estudo do sistema perturbado (4.55) e, deste modo procuramos por condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = \left((m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, \left(\frac{\tilde{m} + 1/2}{2\tilde{s}} \right)^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3 \right)$$

tal que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (4.55), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma órbita periódica duplamente simétrica. Note que $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_0^* + (0, \Delta Q_2, 0, \Delta P_1, 0, \Delta P_3)$ e, pelas definições de Q_2, P_1 e P_3 vemos que esse acréscimo, entre vários casos, pode significar, por exemplo, um acréscimo na terceira componente do momento angular, H , e um acréscimo em L , ou seja, um acréscimo na posição.

É claro das hipóteses que $\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0 \in \mathcal{L}_2$ e a solução do problema de Kepler (4.58) com condição inicial $\mathbf{z}_0$ é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3),$$

onde $s = \tilde{m} + 1/2(2\tilde{s})^{-1}$. Pelo Lema 3.3.1 temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (4.55) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= j\pi + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta P_3 + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \end{aligned} \tag{4.64}$$

onde $\mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0) = (Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0), Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0), Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0), P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0), P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0), P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0))$ é dada por

$$\mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0) = \mathcal{Z}(t, \mathbf{z}_0) \int_0^t \mathcal{Z}^{-1} \mathbf{F}_1(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}, \epsilon) d\tau \tag{4.65}$$

e $\mathcal{Z}(t, \mathbf{z}_0)$ é a matriz

$$\mathcal{Z}(t, \mathbf{z}_0) = \frac{\partial \mathbf{Z}^{(0)}(\xi, t)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\mathbf{z}_0}.$$

Pelas Proposições 4.6.6, item 3 e 4.8.3 temos que as condições de periodicidade para obter uma solução periódica duplamente simétrica do problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão são

$$\mathbf{Z}(0, \mathbf{z}_0, \epsilon) \in \mathcal{L}_2, E(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) \in \mathcal{L}_1, E(T/4) = \hat{k}\pi, \quad \hat{k} \in 2\mathbb{N}.$$

Tomaremos T como na subseção anterior, i.e., $T/4 = 2\pi\tilde{s}, \tilde{s} \in \mathbb{N}$. Assim, a segunda restrição na condição de periodicidade é equivalente à

$$Q_1(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) = (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad Q_2(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) = 0, \quad Q_3(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) = j\pi. \tag{4.66}$$

Definimos $\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = (\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon))$ onde

$$\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_1(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_2(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon), \quad \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_3(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) - j\pi$$

e $\mathbf{X} = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$. Assim, as equações que devemos resolver, para $\epsilon \neq 0$, as quais são chamadas de equações de periodicidade, são

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}2\pi\tilde{s} - (\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) &= Q_3^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0. \end{aligned} \tag{4.67}$$

Primeiramente, provamos que $\phi(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$ e, então, desde que algumas condições de transversalidade sejam satisfeitas, o Teorema de Arenstorf pode ser aplicado para obtermos $\mathbf{X}$ tal que $\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = 0$ para valores pequenos de ϵ . Observe que a função $\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ não é diferenciável com respeito à ϵ devido a presença do termo $\sin(\alpha T/4\epsilon^3)$ nos termos de ordem ϵ^4 e em $Q_3^{(1)}(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ (veja prova do Lema 4.9.6 abaixo), onde α é um inteiro positivo. Assim, não podemos usar o Teorema da Função Implícita para resolvermos as equações (4.67), uma vez que a diferenciabilidade da função com respeito a todas as variáveis é requerida. Veremos, no lema abaixo, que a função $\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon)$ pode ser definida em $\epsilon = 0$ de tal maneira que seja contínua em ϵ para qualquer $\mathbf{X}_0$ fixado. Isso não garante sua continuidade com respeito ao conjunto completo de variáveis, mas, no entanto, esta última condição não é pedida como hipótese no Teorema de Arenstorf. Com relação as funções ϕ_1 e ϕ_2 também podemos defini-las em $\epsilon = 0$ de maneira tal que elas sejam contínuas em ϵ . Isto pode ser visto na Observação 4.9.7 abaixo.

Lema 4.9.6. *Seja $Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ dado por (4.65), i.e.,*

$$Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) d\tau,$$

então

$$Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = \frac{15\Delta P_3}{8G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Demonstração: Sabemos que

$$H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{(-1 + 3\cos^2 S)}{8} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \quad \cos S = \frac{z}{\|\mathbf{q}\|}, \quad H = G \cos i.$$

No Apêndice C, provamos que $z = \|\mathbf{q}\| \sin \psi \sin i$, onde i é o ângulo de inclinação do plano orbital, ψ é um ângulo que nos dá a posição de m_3 no plano orbital, i.e. $\psi = g + f$, onde f é a anomalia verdadeira, g é o argumento do pericentro. Sabemos que, sob órbitas circulares, o ângulo g não está definido, porém, mesmo neste caso, o ângulo ψ está bem definido, veja Apêndice 7.4. Pelo Lema 4.8.1 sabemos que $\cos^2 S = \sin^2 \psi (1 - \cos^2 i)$, e assim obtemos a seguinte expressão para H_1

$$H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^3} \left(-1 + 3 \sin^2 \psi \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \right),$$

como $\|\mathbf{q}\|$ e ψ não dependem de P_3 temos

$$\frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^3} \frac{6P_3 \sin^2 \psi}{G^2}.$$

Consequentemente

$$\frac{\partial H_1}{\partial P_3}(\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0), t, \epsilon) = \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^3} \frac{6 \sin^2 \psi \Delta P_3}{G^2},$$

desde que $G := G|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta Q_2)^2}{2}$ e pelo Lema 4.9.1

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &:= \|\mathbf{q}\| |_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = s^{-2/3} + s^{-1/2} \Delta Q_2 \sin Q_1^{(0)}(t) + 2s^{-1/3} \Delta P_1 + s^{-1/3} \Delta Q_2^2 \cos^2 Q_1^{(0)}(t) \\ &+ \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta Q_2 \Delta P_1 \sin Q_1^{(0)}(t) + (\Delta P_1)^2 + \mathcal{O}(\|X\|^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi &:= \psi |_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = Q_1^{(0)}(t) - 2 \cos Q_1^{(0)}(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) + 2 \left[-\cos Q_1^{(0)}(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left[\sin Q_1^{(0)}(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[-\cos Q_1^{(0)}(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(-\cos Q_1^{(0)}(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right) \left(\sin Q_1^{(0)}(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. \left[\sin Q_1^{(0)}(t) \left(\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) - \left(-\cos Q_1^{(0)}(t) \left(-\frac{\Delta Q_2}{s^{-1/6}} + \Delta Q_2 \frac{\Delta P_1}{2s^{-1/2}} \right) \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\|X\|^3). \right. \end{aligned}$$

Expandindo $[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 = [1 - \cos E(l)]^2$ em série de Fourier com respeito à l , obtemos

$$\begin{aligned} Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) &= \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{6 \sin^2 \psi \Delta P_3}{8 \|\mathbf{q}\|^3 G^2} \left(\frac{5}{2} - 2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \alpha l\right) d\tau \\ &= \frac{15 \Delta P_3}{8 G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + R(\mathbf{X}, \epsilon) \end{aligned}$$

onde $R(\mathbf{X}, \epsilon) = \frac{3 \Delta P_3}{2 G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \frac{\alpha \tau}{\epsilon^3}\right) d\tau$. Observe que $|R(\mathbf{X}, \epsilon)| \leq \epsilon^3 C \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{|a_\alpha|}{\alpha}\right)$ e esta série converge porque a_α é uma soma de funções regulares, assim

$$Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = \frac{15 \Delta P_3}{8 G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

■

Observação 4.9.7. Pelo Lema 3.3.1 as funções

$$\begin{aligned} \epsilon^4 [Q_1^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= \epsilon^4 g_1(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) \\ \epsilon^4 [Q_2^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= \epsilon^4 g_2(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) \\ \epsilon^4 [Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \epsilon^4 g_3(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) \end{aligned}$$

em (4.67) são uniformemente limitadas quando ϵ se aproxima de zero, assim podemos definí-las como sendo seu valor limite, o qual é zero. Desta maneira, definimos $\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon)$, $\phi_2(\mathbf{X}, \epsilon)$ e $\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon)$ em $\epsilon = 0$ por

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, 0) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} \frac{(\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi}{s} - (\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, 0) &= \Delta Q_2 \\ \phi_3(\mathbf{X}, 0) &= \frac{15 \Delta P_3}{8 G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau. \end{aligned}$$

Agora, claramente, $\phi(\mathbf{0}, 0) = 0$. Aqui vemos claramente a necessidade de se escolher $P_3^* = 0$, porque se $P_3^* \neq 0$ teríamos $\phi_3(\mathbf{X}, 0) = \frac{15(P_3^* + \Delta P_3)}{8 G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau$ e, assim, $\phi_3(\mathbf{0}, 0) \neq 0$, dificultando a aplicação do Teorema de Arenstorf.

A função $\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ satisfaz as seguintes propriedades

Lema 4.9.8. A função $\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ é diferenciável com respeito à $\mathbf{X}$ numa vizinhança de $\mathbf{X} = \mathbf{0}$, para ϵ numa vizinhança aberta da origem, e satisfaz as três seguintes propriedades:

1. $|(D_{\mathbf{X}}\phi)^{-1}(\mathbf{0}, 0)| \leq b$
2. $|D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0)| \leq c(\|\mathbf{X}\| + \epsilon^3)$
3. $\|\phi(\mathbf{0}, \epsilon)\| \leq d\epsilon^3$

onde b, c, d são constantes positivas.

Demonstração: Primeiramente, provaremos a diferenciabilidade de ϕ . Cada termo $\epsilon^4 g_j$ dentro das funções coordenadas ϕ_j , para $j = 1, 2, 3$ são diferenciáveis em $\epsilon = 0$ se nós tomarmos a derivada como sendo o operador nulo. Observe que as derivadas parciais $\epsilon^4 \frac{\partial g_j}{\partial \Delta P_i}$, $\epsilon^4 \frac{\partial g_j}{\partial \Delta Q_2}$, $j = 1, 2, 3$, $i = 1, 3$ existem e são contínuas para cada $\epsilon \neq 0$, porque as funções $\mathbf{F}_0$, $\epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ são diferenciáveis com respeito à $\mathbf{Z}$ e, além disso, todas suas derivadas com respeito à $\mathbf{Z}$ são contínuas em $\mathcal{C}$. Assim, pela teoria básica de Equações Diferenciais Ordinárias, a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$ tem as mesmas propriedades. Com $\epsilon = 0$, o Lema 3.3.2 permite que nós definamos estas derivadas parciais

de maneira que elas sejam contínuas. Assim, temos que a função $\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ é diferenciável, para cada ϵ , com respeito à $\mathbf{X}$ numa vizinhança.

Agora procederemos com a prova das propriedades 1, 2 e 3. É verificado que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -6 \left(s^{-1/3} + \Delta P_1 \right)^{-4} \pi \tilde{s} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ 1 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $s = \tilde{m} + 1/2(2\tilde{s})^{-1}$. Então, avaliando em $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e $\epsilon = 0$ segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \left(\frac{\tilde{m}+1/2}{2} \right)^{4/3} \pi \tilde{s}^{-1/3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(\mathbf{0}, 0) \end{pmatrix},$$

onde $a_{33}(\mathbf{0}, 0) = \frac{15}{8} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \neq 0$. Assim, $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = -6 \left(\frac{\tilde{m}+1/2}{2} \right)^{4/3} \pi \tilde{s}^{-1/3} a_{33}(\mathbf{0}, 0) \neq 0$ e consequentemente existe $(D_{\mathbf{X}}\phi)^{-1}(\mathbf{0}, 0)$ a qual é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6s^{4/3}\pi\tilde{s}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}(\mathbf{0}, 0)} \end{pmatrix},$$

e assim o item 1 é válido tomando uma constante positiva b . A fim de provar o item 2, pela Desigualdade Triangular, temos

$$|D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0)| \leq |D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, 0)| + |D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, 0) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0)|,$$

e como a matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, 0)$ é dada pelas derivadas parciais das funções $\epsilon^4 g_1$, $\epsilon^4 g_2$ e $\epsilon^4 g_3$, segue que a norma $|D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) - D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, 0)|$ é limitada por, digamos, $c_1 \epsilon^4$, onde c_1 é uma constante positiva. Para provar que a segunda norma na soma acima é limitada, observamos que as componentes de $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, 0)$ são duas vezes diferenciáveis com respeito à $\mathbf{X}$ e, aplicando a Desigualdade do Valor Médio, obtemos que a segunda norma é limitada, digamos, por $c_2 \|\mathbf{X}\|$, para $\mathbf{X}$ numa vizinhança compacta e onde c_2 é uma constante positiva. Assim, o item 2 segue tomando $c = \max\{c_1, c_2\}$. Para provar o item 3, observe que

$$\phi(\mathbf{0}, \epsilon) = \left(\epsilon^4 Q_1^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^8), \epsilon^4 Q_2^{(1)} + \mathcal{O}(\epsilon^8), \mathcal{O}(\epsilon^4) \right),$$

e usando Lema 3.3.1 vemos que existe uma constante positiva d tal que $\|\phi(\mathbf{0}, \epsilon)\| \leq d\epsilon^3$.

■

Provado o Lema 4.9.8, estamos em posição de aplicar o Teorema de Arenstorf (veja Teorema B na Seção 3.2) como foi aplicado no Capítulo 3, Lema 3.2.2, para assim resolvermos o sistema de equações (4.67).

Teorema 4.9.9. *Considere as equações de movimento (4.55) e os primários, com massa igual à 1/2, movendo-se em uma órbita elíptica com colisão, i.e., momento angular igual a zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = k^{-\frac{1}{3}}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem famílias enumeráveis de condições iniciais para o corpo infinitesimal tais que seu movimento é uma órbita periódica duplamente simétrica com período $8\pi\tilde{s}$ ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xz também com período $8\pi\tilde{s}$, com $\tilde{s} \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Primeiramente, é suficiente observar que sob as hipóteses do teorema nós estamos em posição de aplicar o Teorema de Arenstorf para a equação da periodicidade (4.67) com ϵ num intervalo suficientemente pequeno. Definindo a função $\mathbf{g}$ como em (3.5) e usando a idéia dada no Lema 3.2.2, existem famílias de condições iniciais (indexadas por $m, \tilde{m}, j, \tilde{s}$) a um parâmetro (ϵ) , $\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, j, \tilde{s}}(\epsilon)$ tais que $\phi(\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, j, \tilde{s}}(\epsilon), \epsilon) = 0$.

Depois disso, a fim de obter soluções periódicas do problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão (4.51), as condições em (4.67) devem ser satisfeitas simultaneamente com

$$E(T/4) = \hat{k}\pi, \tag{4.68}$$

onde $\hat{k}$ é inteiro par. Uma vez que

$$T/4 = \frac{(\tilde{m} + 1/2)\pi}{s},$$

pelas equações de periodicidade (4.67), e para ser satisfeito (4.68), devemos tomar

$$T/4 = \hat{k}\pi\epsilon^3,$$

temos que

$$\hat{k} = \frac{(\tilde{m} + 1/2)\pi}{s\epsilon^3}.$$

Logo, como $\hat{k}$ deve ser um inteiro par, tomamos $\epsilon^3 = 1/k$ e $s = \tilde{m} + 1/2(2\tilde{s})^{-1}$, onde k é um inteiro suficientemente grande e $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $\epsilon = k^{-1/3}$, onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, temos condições iniciais cuja órbita associada é $8\pi\tilde{s}$ periódica e duplamente simétrica. ■

Fazendo uma ilustração de uma das órbitas obtidas pelo Teorema 4.9.9, temos a seguinte figura

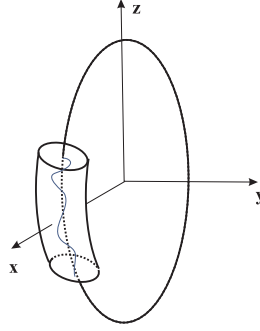


Figura 4.3: Em azul, a órbita continuada, a qual se encontra dentro da vizinhança $\mathcal{C}$.

Observação 4.9.10. 1) Este teorema gera uma escolha de soluções do sistema (4.67). Para $\epsilon = k^{-1/3}$, onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, temos a relação

$$\hat{k} = 2\tilde{s}k, \quad \tilde{s} \in \mathbb{N}.$$

2) Note que o plano orbital da órbita continuada está perto do plano xz , pois pelo Teorema de Arenstorf conseguimos uma vizinhança de ϵ tal que a função $\mathbf{X}(\epsilon) = (\Delta P_1(\epsilon), \Delta Q_2(\epsilon), \Delta P_3(\epsilon))$ satisfaz $\phi(\mathbf{X}(\epsilon), \epsilon) = 0$. Portanto, a equação da órbita continuada com respeito à P_3 é dada por

$$P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \Delta P_3(\epsilon) + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8)$$

a qual é pequena, dependendo de quão pequeno é ϵ e $\Delta P_3(\epsilon)$.

3) Uma vez que o período da órbita continuada é $T = 8\pi\tilde{s}$, a relação de comensurabilidade nos dá que

$$\frac{T}{T_p} = 4\tilde{s}k,$$

onde T_p denota o período dos primários ou o período do sistema perturbado. Desta maneira, temos que o período dos três corpos juntos é $T = 4\tilde{s}kT_p$, e assim, enquanto o corpo infinitesimal completa uma volta, os primários completam $4\tilde{s}k$ períodos.

Finalizamos esta seção com os seguintes resultados, os quais são consequência direta da Proposição 4.1.1, item 3 e do Teorema 4.9.9:

Corolário 4.9.11. Existem soluções periódicas duplamente simétrica para o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão (4.55), onde os primários movem-se numa órbita elíptica com colisão, com energia $\mathcal{E} = -1/2$. Estas soluções estão perto de uma órbita Kepleriana circular no plano xz , cujo período é suficientemente grande.

Demonstração: Seja $\psi(t)$ uma solução do sistema (4.55) dada pelo Teorema 4.9.9 com energia dos primários $\mathcal{E} = -1/2$. Pela Proposição 4.1.1, item 3, temos que $s(t) = \frac{1}{\epsilon^2} \psi(\epsilon^3 t)$ é uma solução do sistema (4.55), onde agora a energia dos primários é $\mathcal{E} = -1/2$. Note que este período é $8\pi\tilde{s}k$, o qual é grande se k for grande. ■

Outra consequência é:

Corolário 4.9.12. Existem órbitas periódicas duplamente simétricas para o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão (4.55), as quais cortam ortogonalmente qualquer plano e reta obtidos por rotação, em torno do eixo z , do plano yz e do eixo x , respectivamente. Os primários movem-se em uma órbita elíptica com colisão, com energia $\mathcal{E} = -1/2$. Estas órbitas periódicas estão próximas de uma órbita Kepleriana circular.

Demonstração: Este resultado segue imediatamente, uma vez que o nosso problema é invariante por rotações em torno do eixo z . ■

Usando Corolário 4.9.11 e novamente a Proposição 4.1.1 item 3, podemos provar a existência de soluções duplamente simétricas para qualquer valor do parâmetro ϵ . Portanto,

Teorema 4.9.13. *Existem soluções duplamente simétricas para o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão (4.55) próxima de uma órbita Kepleriana circular, onde os primários se movem em uma órbita elíptica com colisão para qualquer energia fixada $h < 0$.*

O caso com inclinação i arbitrária.

O Teorema 4.9.9 nos dá órbitas periódicas duplamente simétricas perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xz , i.e., a órbita do problema de Kepler está num plano orbital cuja inclinação i é de 90° . Desta maneira, as órbitas obtidas no Teorema 4.9.9, estão perto de uma órbita Kepleriana cujo plano orbital tem inclinação de 90° . No entanto, podemos obter órbitas periódicas duplamente simétricas como continuação de órbitas Keplerianas circulares com inclinação do plano orbital arbitrária. Para isto, trabalharemos com as equações de movimento em coordenadas giratórias e com as variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37), ou seja, consideraremos o sistema de equações de movimento gerado pela função Hamiltoniana (4.45) com $\mu = 1/2$,

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^4 \hat{\mathbf{F}}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{\mathbf{F}}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon), \quad (4.69)$$

onde $\mathbf{Z} = (Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3)$, com

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) &= (P_1^{-3}, 0, -1, 0, 0, 0), \\ \hat{\mathbf{F}}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) &= \left(\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial P_1}, \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial P_2}, \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial P_3}, -\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial Q_1}, -\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial Q_2}, -\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial Q_3} \right), \end{aligned} \quad (4.70)$$

e, finalmente

$$\hat{\mathbf{F}}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial P_1}, \frac{\partial \hat{H}_r}{\partial P_2}, \frac{\partial \hat{H}_r}{\partial P_3}, -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial Q_1}, -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial Q_2}, -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial Q_3} \right),$$

onde

$$\hat{H}_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \hat{H}_2^{1/2}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = -\frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{(-1 + 3 \cos^2 \hat{S})}{8} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \quad (4.71)$$

e por (4.49), segue que

$$\hat{H}_r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \hat{H}_r^{1/2}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2(\hat{S}) + \frac{35}{8} \cos^4(\hat{S}) \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \quad (4.72)$$

Devemos pensar em $\hat{\mathbf{q}}$ e ψ como funções de $\mathbf{Z}$.

A fim de continuar órbitas circulares do problema de Kepler para o sistema (4.69), seguiremos as mesmas idéias da seção anterior e, desta maneira, consideramos uma solução conveniente do problema de Kepler com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ em $\mathcal{L}_2$ assim,

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, (j + 1/2)\pi, P_1^*, 0, P_3^*) \text{ com } E(0) = 0,$$

onde m, j são inteiros que, sem perda de generalidade, faremos 0 ou 1 e Q_2^*, P_1^*, P_3^* são constantes a serem determinadas. Ainda queremos que a solução do problema de Kepler

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) = (P_1^{-3}, 0, -1, 0, 0, 0), \quad (4.73)$$

com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ seja duplamente simétrica. Assim, pela Proposições 4.6.7, item 3 e 4.8.3 item (1), é suficiente resolvermos, em $t = T/4$, a equação da periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/4, z_0^*) &= (P_1^*)^{-3} \frac{T}{4} + (m + \frac{1}{2})\pi &= (m + \tilde{m} + 1)\pi \\ Q_2^{(0)}(T/4, z_0^*) &= Q_2^* &= 0 \\ Q_3^{(0)}(T/4, z_0^*) &= -\frac{T}{4} + j\pi &= (j + \tilde{j})\pi \end{aligned} \quad (4.74)$$

onde $\tilde{m}$ e $\tilde{j}$ são inteiros. Da segunda equação temos $Q_2^* = 0$ e, assim obtemos uma órbita Kepleriana circular. Da terceira equação tiramos que

$$\frac{T}{4} = -\tilde{j}\pi, \quad (4.75)$$

onde $\tilde{j} \in \mathbb{Z}_-$. Substituindo este valor de $T/4$ na primeira equação encontramos

$$(P_1^*)^{-3} = -\frac{\tilde{m} + 1/2}{\tilde{j}}.$$

Pelas Observações 2.2.3 item 2 e 4.6.4, necessitamos que $E(0) = 0$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par, assim consequentemente fazemos

$$T = 4\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (4.76)$$

Combinando (4.75) e (4.76), segue que

$$\hat{k} = -2k\tilde{j},$$

onde $\epsilon^3 = 1/2k$.

Resumindo, obtemos uma órbita circular duplamente simétrica do problema de Kepler(4.73) de raio $(P_1^*)^2$, cuja inclinação do plano orbital i é arbitrária, com período $T = -4\tilde{j}\pi$, $\tilde{j} \in \mathbb{Z}_-$. De fato, a inclinação i é arbitrária, pois pela equação de periodicidade (4.74), vemos que P_3^* pode ser escolhido arbitrariamente. Logo, como pelas variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37), temos que $P_3 = H = G(1 - \cos i)$, segue que a inclinação i é arbitrária.

Mantendo a notação anterior, estudaremos o sistema perturbado e, desta maneira, procuramos condições iniciais numa vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = \left((m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, P_1^* + \Delta P_1, 0, P_3^* + \Delta P_3 \right)$$

tais que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ do sistema perturbado (4.69), seja uma órbita periódica duplamente simétrica. Pelas hipóteses, temos $\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0 \in \mathcal{L}_2$ e, pelo Lema 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ do sistema perturbado (4.69) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (P_1^* \Delta P_1)^{-3} t + (m + 1/2)\pi && + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta Q_2 && + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= -t + j\pi && + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= P_1^* + \Delta P_1 && + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 && + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= P_3^* + \Delta P_3 && + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Pelas Proposições 4.6.7, item 3 e 4.8.3 temos que as condições de periodicidade para obtermos soluções periódicas duplamente simétricas do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão são

$$\mathbf{Z}(0, \mathbf{z}_0, \epsilon) \in \mathcal{L}_2, E(0) = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) \in \mathcal{L}_1, E(T/4) = \hat{k}\pi, \quad \hat{k} \in 2\mathbb{N}.$$

Assim, a segunda restrição na condição da periodicidade é equivalente à

$$Q_1\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad Q_2\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = 0, \quad Q_3\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = (j + \tilde{j})\pi. \quad (4.78)$$

Definimos $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_3(\mathbf{X}, \mathbf{P}))$ onde

$$\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = Q_1\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_2\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right), \quad \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_3\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - (j + \tilde{j})\pi$$

e $\mathbf{X} = (T, \Delta Q_2, \Delta P_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta P_3)$. Assim, as equações que devemos resolver, para $\epsilon \neq 0$, as quais são chamadas geralmente equações de periodicidade, são

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (P_1^* + \Delta P_1)^{-3} \frac{T}{4} - (\tilde{m} + 1/2)\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) &= -\frac{T}{4} - \tilde{j}\pi + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Observe que $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{X}_0 = (T_0, 0, 0) = (-4\tilde{j}\pi, 0, 0)$. Como na seção anterior, para que o Teorema de Arenstorf seja aplicado é necessário que verifiquemos se a matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0})$ possui inversa. A matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{1}{(P_1^* + \Delta P_1)^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(P_1^* + \Delta P_1)^{-4} \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 1 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ -\frac{1}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix}.$$

Então, avaliando em $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 = (T_0, 0, 0) = (-4\tilde{j}\pi, 0, 0)$ e $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta P_3) = (0, 0)$ segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \frac{1}{(P_1^*)^3} & 0 & 3\tilde{j}\pi(P_1^*)^{-4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujos determinante é $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = -\frac{3}{4}\tilde{j}(P_1^*)^{-4}\pi \neq 0$, onde $P_1^* = -\frac{m+1/2}{\tilde{j}}$. Além disso, temos que um lema semelhante ao Lema 4.9.8 é válido aqui. Desta maneira, podemos aplicar o Teorema de Arenstorf de maneira semelhante ao caso anterior e, com isso, temos o seguinte teorema

Teorema 4.9.14. *Considere as equações de movimento (4.69) e os primários com massa igual a 1/2, movendo-se numa órbita elíptica com colisão, i.e., o momento angular igual a zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = 2k^{-\frac{1}{3}}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existe uma quantidade enumerável de famílias de condições iniciais para o corpo infinitesimal, cujas soluções são órbitas periódicas duplamente simétricas com período próximo de $-4\tilde{j}\pi$, ($\tilde{j} \in \mathbb{Z}_-$), perto de uma órbita Kepleriana circular, cujo plano orbital tem uma inclinação i arbitrária e período igual a $-4\tilde{j}\pi$.*

Uma vez que, neste caso, tomamos o tempo como variável independente, é necessário que façamos a seguinte observação

Observação 4.9.15. A fim de obter soluções periódicas do problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão (4.51), as condições em (4.79) devem ser satisfeitas simultaneamente com a condição de comensurabilidade $T/2\pi\epsilon^3 \in \mathbb{Q}$. Assim, desde que $T = T(\epsilon, \Delta P_3)$ e $\epsilon^3 = (2k)^{-1}$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ e $\Delta P_3 \in \mathbb{R}$ tais que (**note que a**

existência desse k e desse $\triangle P_3$ tal que a afirmação abaixo seja possível, se deve ao fato narrado na Observação 3.2.1)

$$\frac{T((2k)^{-1/3}, \triangle P_3)}{2\pi\epsilon^3} \in \mathbb{Q}.$$

Portanto, para estes $\epsilon = (2k)^{-1/3}$, onde k é um inteiro suficientemente grande, e $\triangle P_3 \in \mathbb{R}$ temos condições iniciais que dão origem a uma solução de (4.51), as quais são $T = T(\epsilon, \triangle P_3)$ -periódicas e duplamente simétricas.

4.9.2 Continuação de soluções periódicas S_2 -simétrica

Aqui provamos a existência de órbitas periódicas S_2 -simétrica de maneira semelhante ao caso de órbitas duplamente simétrica que vimos anteriormente, continuaremos usando a equação de movimento (4.55).

Consideramos uma solução conveniente do problema de Kepler (4.58) com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ em $\mathcal{L}_2$, quando $t = 0$, da seguinte forma

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*) \text{ com } E(0) = 0,$$

onde m, j são inteiros que, sem perda de generalidade, tomamos como 0 ou 1 e Q_2^*, P_1^*, P_3^* são constantes para serem determinadas. Assim, temos que a solução do problema de Kepler (4.58) com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ tem a forma

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) \equiv (Q_1^{(0)}(t), Q_2^{(0)}(t), Q_3^{(0)}(t), P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t), P_3^{(0)}(t)) = ((P_1^*)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*). \quad (4.80)$$

Agora impomos que esta solução seja S_2 -simétrica, assim pela Proposições 4.6.6, item 2 e 4.8.3 é suficiente resolvermos para $t = T/2$, o sistema

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/2, z_0^*) &= (P_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + (m + \frac{1}{2})\pi = (m + \tilde{m} + \frac{1}{2})\pi \\ Q_3^{(0)}(T/2, z_0^*) &= j\pi = i\pi \\ P_2^{(0)}(T/2, z_0^*) &= 0 = 0 \end{aligned}$$

onde $\tilde{m}$ e i são inteiros. Observe que a segunda equação é trivialmente satisfeita por $j = i$ e pela primeira equação obtemos

$$\frac{T}{2} = \frac{\tilde{m}\pi}{s}, \quad (4.81)$$

onde $(P_1^*)^{-3} = s$, onde s é uma real constante positiva. Aqui, novamente, a princípio, temos liberdade em escolher P_3^* e Q_2^* , porém pelas mesmas razões do caso duplamente simétrica temos que tomar $P_3^* = 0$ e, como estamos interessados em continuar órbitas circulares do problema de Kepler, tomaremos $Q_2^* = 0$. Pelas Observações 2.2.3 item 2 and 4.6.4, necessitamos que $E(0) = 0$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um número inteiro par. Assim, devemos tomar

$$T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (4.82)$$

Combinando (4.81) e (4.82), segue que

$$\hat{k} = \frac{\tilde{m}}{s}k,$$

onde $\epsilon^3 = 1/k$. Como devemos ter $\hat{k}$ um número inteiro par, decidimos escolher k um inteiro positivo e s tal que

$$\frac{\tilde{m}}{s} \in 2\mathbb{N}, \quad \tilde{m} \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{R}_+. \quad (4.83)$$

Note que, para obtermos a condição (4.83), é suficiente fazermos $s = \tilde{m}(2\tilde{s})^{-1}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Resumindo, obtemos uma órbita periódica S_2 -simétrica do problema de Kepler (4.58) de raio $s^{-2/3} = (\tilde{m}/2\tilde{s})^{-2/3}$, $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ localizada sobre o plano xz com período $T = 4\pi\tilde{s}$. Esta órbita é dada por (4.80) e satisfaz

$$\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0^*) = \mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_2 \text{ e } \mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) \in \mathcal{L}_2.$$

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ uma vizinhança compacta de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ sem singularidades e $\mathbf{z}_0^*$ tal que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ permanece limitada e afastada das singularidades. Portanto, desde que o Lema 4.9.5 é válido aqui, os Lemas 3.3.1 e 3.3.2 podem

ser aplicados neste caso também.

Mantendo as notações, estudaremos agora o sistema perturbado (4.55) e, desta maneira procuramos por condições iniciais $\mathbf{z}_0$ numa vizinhança $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = \left((m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, \left(\frac{\tilde{m}}{2s} \right)^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3 \right)$$

tais que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (4.55), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma solução periódica S_2 -simétrica. É claro das hipóteses que $\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0 \in \mathcal{L}_2$. Inicialmente, sabemos que a solução do problema de Kepler (4.58) com condição inicial $\mathbf{z}_0$ é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3),$$

onde $s = \tilde{m}(2\tilde{s})^{-1}$.

Assim, pelo Lema 3.3.1 temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (4.55) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= j\pi + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta P_3 + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{aligned} \tag{4.84}$$

Pelas Proposições 4.6.6, item 2 e 4.8.3 item (2) temos que as condições de periodicidade para obtermos soluções periódicas S_2 -simétricas do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão são

$$Q_1\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = (m + \tilde{m} + 1/2)\pi, \quad Q_3\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = j\pi, \quad P_2\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = 0. \tag{4.85}$$

Definindo $\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = (\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon))$ onde

$$\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_1\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - (m + \tilde{m} + 1/2)\pi, \quad \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_3\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - j\pi, \quad \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) = P_2\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right)$$

e $\mathbf{X} = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_3)$, temos que as condições de periodicidade acima podem ser reecritas como

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}2\pi\tilde{s} - \tilde{m}\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \\ \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) &= P_2^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \end{aligned} \tag{4.86}$$

onde $Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = \frac{15\Delta P_3}{8G^2} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ e $P_2^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right)$ é dada no lema abaixo.

Lema 4.9.16. *Seja $P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ dada por (4.65), i.e.,*

$$P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = - \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) d\tau,$$

então,

$$\begin{aligned} P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \frac{15}{16} \int_0^t \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \frac{G^2 - \Delta P_3^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^t \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \frac{15}{8} \int_0^t \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} d\tau \right] - \\ &\quad \frac{15}{8} \frac{\Delta Q_2 (\Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^t \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

onde $\|\mathbf{q}\|$, ψ , $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$, G e $\frac{\partial \psi}{\partial Q_2}$ denota as expressões dessas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$.

Demonstração: Temos que

$$H_1(t, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) = -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|} \left(-1 + 3 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin^2 \psi \right),$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) &= \frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial}{\partial Q_2} \|\mathbf{q}\| \left(-1 + 3 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin^2 \psi \right) - \\ &\quad \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^3} \left(6 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} + 3 \sin^2 \psi \frac{\partial}{\partial Q_2} \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.87)$$

onde

$$\frac{\partial}{\partial Q_2} \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) = -2 \frac{P_3^2 Q_2}{G^3},$$

e pelo Lema 4.9.1 obtemos

$$\frac{\partial}{\partial Q_2}(\|\mathbf{q}\|) = s^{-1/2} \sin Q_1 + 2s^{-1/3} Q_2 \cos^2 Q_1 + \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \sin Q_1 + 2s^{-1/3} P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + \frac{\partial}{\partial Q_2}(\mathcal{O}(\|X\|^3)),$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial Q_2} = 2s^{1/6} \cos Q_1 - 5s^{1/3} Q_2 \cos Q_1 \sin Q_1 + \frac{5}{2} s^{1/3} P_2 \cos 2Q_1 - s^{1/2} (P_1 - s^{-1/3}) \cos Q_1 + \frac{\partial}{\partial Q_2} \mathcal{O}(\|X\|^3).$$

Assim, usando argumentos semelhantes aos da prova do Lema 4.9.1, substituímos em (4.87) a expressão $[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2$ em série de Fourier, a qual é dada por

$$[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 = \frac{5}{2} - \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \alpha l,$$

e, desta maneira, obtemos

$$\begin{aligned} P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= -\int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) d\tau = \frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \frac{G^2 - \Delta P_3^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \right. \\ &\quad \left. \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} d\tau \right] - \frac{15}{8} \frac{\Delta Q_2 (\Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

onde $\|\mathbf{q}\|$, ψ , $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$, G e $\frac{\partial \psi}{\partial Q_2}$ denotam as expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$, as quais respectivamente são

$$\|\mathbf{q}\| := \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = s^{-2/3} + s^{-1/2} \Delta Q_2 \sin Q_1^{(0)}(t) + 2s^{-1/3} \Delta P_1 + s^{-1/3} \Delta Q_2^2 \cos^2 Q_1^{(0)}(t) +$$

$$\frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta Q_2 \Delta P_1 \sin Q_1^{(0)}(t) + (\Delta P_1)^2 + \mathcal{O}(\|X\|^3),$$

$$\psi := \psi_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = Q_1^{(0)}(t) + 2\Delta Q_2 s^{1/6} \cos Q_1^{(0)}(t) - \frac{5}{2} s^{1/3} \Delta Q_2^2 \cos Q_1^{(0)}(t) \sin Q_1^{(0)}(t) -$$

$$\Delta Q_2 s^{1/2} \Delta P_1 \cos Q_1^{(0)}(t) + \mathcal{O}(\|X\|^3),$$

$$\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} := \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \Big|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = s^{-1/2} \sin Q_1^{(0)}(t) + \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \sin Q_1^{(0)}(t) + 2s^{-1/3} \Delta Q_2 \cos^2 Q_1^{(0)}(t),$$

$$G := G_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta Q_2)^2}{2}$$

e finalmente

$$\frac{\partial \psi}{\partial Q_2} := \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} \Big|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = 2s^{1/6} \cos Q_1^{(0)}(t) - 5s^{1/3} \Delta Q_2 \cos Q_1^{(0)}(t) \sin Q_1^{(0)}(t) -$$

$$s^{1/2} (\Delta P_1) \cos Q_1^{(0)}(t) + \frac{\partial}{\partial Q_2} \mathcal{O}(\|X\|^3) \Big|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)}.$$

Portanto, assim como definimos $\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon)$ at $\epsilon = 0$ (veja Observação 4.9.7) de maneira tal que fosse contínua em $\epsilon = 0$, definiremos aqui $\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon)$ com a mesma propriedade. ■

Observação 4.9.17. Pelo Lema 3.3.1 as funções

$$\begin{aligned}\epsilon^4[Q_1^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= \epsilon^4 g_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) \\ \epsilon^4[Q_3^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= Q_3^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \epsilon^4 g_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) \\ \epsilon^4[P_2^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= P_2^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \epsilon^4 g_3(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon)\end{aligned}$$

são limitados uniformemente quando ϵ se aproxima de zero, assim podemos defini-las de maneira contínua em $\epsilon = 0$ por tomar seu valores limites quando ϵ tende a zero, o qual é zero. Assim, definimos $\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon)$, $\phi_2(\mathbf{X}, \epsilon)$ e $\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon)$ em $\epsilon = 0$ por

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, 0) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} 2\pi\tilde{s} - \tilde{m}\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, 0) &= \frac{15\Delta P_3}{8G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau \\ \phi_3(\mathbf{X}, 0) &= \frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \frac{G^2 - \Delta P_3^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} d\tau \right] - \\ &\quad \frac{15}{8} \frac{\Delta Q_2 (\Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau,\end{aligned}$$

onde $G := G|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta Q_2)^2}{2}$. Agora, claramente vemos que $\phi(\mathbf{0}, 0) = (0, 0, \phi_3(\mathbf{0}, 0)) = \mathbf{0}$, pois

$$\begin{aligned}\phi_3(\mathbf{0}, 0) &= \frac{15}{16} \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau - \frac{45}{16} \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau + \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \\ &= \frac{15}{16} s^{13/6} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau - \frac{45}{16} s^{13/6} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^3(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &\quad + \frac{30}{8} s^{13/6} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &= 0,\end{aligned}\tag{4.88}$$

com $\tilde{s} = \tilde{m}/(2s)$.

A matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -6 \left(s^{-1/3} + \Delta P_1 \right)^{-4} \pi\tilde{s} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $s = \tilde{m}/2\tilde{s}$. Então, avaliando na $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e $\epsilon = 0$ segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \left(\frac{\tilde{m}+1/2}{2} \right)^{4/3} \pi\tilde{s}^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(\mathbf{0}, 0) \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{0}, 0) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{0}, 0) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3}(\mathbf{0}, 0) \end{pmatrix},$$

onde $a_{33}(\mathbf{0}, 0) = \frac{15}{8} \int_0^{\frac{T}{4}} \left(\frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \neq 0$ e, portanto, existe a inversa de $D_{\mathbf{X}}\phi$ e vale um lema análogo ao Lema 4.9.8.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{0}, 0) &= \int_0^{2\pi\tilde{s}} \left[\frac{15}{16} \left(\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} - \frac{60}{16} \left(\left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \right)^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \right] d\tau \\
&- \frac{45}{16} \left[\int_0^{2\pi\tilde{s}} \left[\left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right) (2\|\mathbf{q}\| \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} \sin \psi \cos \psi - 4 \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2} \sin^2 \psi) + \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \right) \right] |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \right] \\
&+ \frac{15}{8} \left[\int_0^{2\pi\tilde{s}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^6} [(\cos^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} - \sin^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2}) \|\mathbf{q}\|^3 - 3 \sin \psi \cos \psi \|\mathbf{q}\|^2 \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta Q_2}] \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Delta Q_2^2} \right] |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \right] \\
&= \frac{15}{16} \left(\int_0^{2\pi\tilde{s}} (2s^{7/3} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) - 4s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi)) d\tau \right) \\
&- \frac{45}{16} \int_0^{2\pi\tilde{s}} (s^{17/6} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) [2s^{-1/2} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \\
&- 4s^{-1/2} \sin^3(s\tau + (m+1/2)\pi) + 4s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi)]) d\tau \\
&- \frac{75}{8} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\
&+ \frac{60}{8} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \cos^4(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\
&- \frac{60}{8} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\
&- \frac{90}{8} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\
&= \frac{15}{32} s^{4/3} \tilde{m} \pi \neq 0,
\end{aligned} \tag{4.89}$$

onde $\tilde{s} = \tilde{m}/(2s)$.

Assim, $\det D_{\mathbf{X}} \phi(\mathbf{0}, 0) = -6 \left(\frac{\tilde{m}+1/2}{2} \right)^{4/3} \pi \tilde{s}^{-1/3} a_{33}(\mathbf{0}, 0) \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{0}, 0) \neq 0$ e consequentemente existe $(D_{\mathbf{X}} \phi)^{-1}(\mathbf{0}, 0)$. ■

Uma vez que aqui também é válido um lema semelhante ao Lema 4.9.8, estamos em posição de aplicar o teorema de Arenstorf de maneira análoga ao caso das órbitas duplamente simétricas, para resolvermos o sistema de equações (4.86).

Teorema 4.9.18. *Considere as equações de movimento (4.55) e os primários, com massa igual a 1/2, movendo-se numa órbita elíptica com colisão, i.e., momento angular igual a zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = k^{-1/3}$ onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, então existe uma quantidade enumerável de famílias de condições iniciais para o corpo infinitesimal tais que seu movimento é uma órbita periódica S_2 -simétrica de período $4\pi\tilde{s}$, ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), próxima a uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xz de período também $4\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: Esta prova segue-se semelhante a demonstração do Teorema 4.9.9. ■

Observação 4.9.19. 1) Este teorema gera uma escolha de soluções do sistema (4.86). Para $\epsilon = k^{-1/3}$, onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, tem-se a relação

$$\hat{k} = \tilde{s}k, \quad \tilde{s} \in \mathbb{N}.$$

2) Note que de fato o plano orbital da órbita continuada está próximo ao plano xz , porque pelo Teorema de Arenstorf, para $\epsilon = k^{-1/3}$, a função $\mathbf{X}(\epsilon) = (\Delta Q_2(\epsilon), \Delta P_1(\epsilon), \Delta P_3(\epsilon))$ satisfaz $\phi(\mathbf{X}(\epsilon), \epsilon) = 0$. Desta maneira,

uma vez que a equação da órbita continuada com respeito à P_3 é dada por

$$P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \Delta P_3(\epsilon) + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8).$$

temos que o plano orbital da órbita continuada está tão próximo ao plano xz dependendo de quão pequeno sejam ϵ e $\Delta P_3(\epsilon)$.

3) Como o período da órbita continuada é $T = 4\pi\tilde{s}$, a relação de comensurabilidade nos dá

$$\frac{T}{T_p} = 2\tilde{s}k,$$

onde T_p denota o período dos primários ou o período do sistema perturbado. Assim, temos que o período dos três corpos juntos é $T = 2\tilde{s}kT_p$, e portanto, quando o corpo infinitesimal completa uma volta, os primários completam $2\tilde{s}k$ períodos.

Analogamente ao caso das órbitas duplamente simétrica, terminaremos esta seção com os seguintes resultados, os quais são consequências diretas da Proposição 4.1.1 item 3 e do Teorema 4.9.18:

Corolário 4.9.20. Existem soluções periódicas S_2 -simétricas para o problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão (4.55), onde os primários movem-se numa órbita elíptica de colisão com energia $\mathcal{E} = -1/2$ perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xz , cujo período é suficientemente grande.

Demonstração: Análoga à prova do Corolário 4.9.11. ■

Usando o Corolário 4.9.20 e outra vez a Proposição 4.1.1 item 3, provamos a existência de soluções periódicas S_2 -simétrica para alguns valores do parâmetro ϵ . Assim,

Teorema 4.9.21. *Existem soluções periódicas S_2 -simétricas para o problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão (4.55), onde os primários movem-se numa órbita elíptica com colisão, com uma energia fixada $h < 0$ perto de uma órbita Kepleriana circular.*

O caso inclinação i arbitrária.

Assim como no caso de órbitas duplamente simétrica, podemos conseguir órbitas periódicas S_2 -simétricas do problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão como continuação de órbitas Keplerianas circulares num plano orbital cuja inclinação é arbitrária. Usaremos para isso a equação de movimento dada em (4.69). Neste caso, a solução conveniente do problema de Kepler a ser continuada é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) = ((P_1^*)^{-3}t + (m + 1/2)\pi, 0, -t + j\pi, P_1^*, 0, P_3^*),$$

onde a condição inicial $\mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_2$ é

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, 0, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*) \text{ com } E(0) = 0,$$

com m, j inteiros que, sem perda de generalidade, faremos 0 ou 1. Da mesma forma como no caso anterior, resolvemos a equação de periodicidade para esta órbita

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{z}_0^*, \epsilon) &= (P_1^*)^{-3}T/2 + (m + 1/2)\pi &= (m + \tilde{m} + 1/2)\pi \\ Q_3(T/2, \mathbf{z}_0^*, \epsilon) &= -\frac{T}{2} + j\pi &= (j + \tilde{j})\pi \\ P_2(T/2, \mathbf{z}_0^*, \epsilon) &= 0 &= 0, \end{aligned}$$

e chegamos que

$$T/2 = -\tilde{j}\pi,$$

onde $\tilde{j} \in \mathbb{Z}_-$ e

$$(P_1^*)^{-3} = -\tilde{m}/\tilde{j},$$

com $\tilde{m} \in \mathbb{Z}_+$. Além disso, para que $E(T/2) = \tilde{k}\pi$, devemos tomar $T/2 = \tilde{k}\pi\epsilon^3$. Assim,

$$\tilde{k} = -\tilde{j}/\epsilon^3, \quad \text{com } \epsilon^3 = 1/2k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, a órbita Kepleriana $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita periódica circular S_2 -simétrica, cujo período é $-2\tilde{j}\pi$ de raio $(-\tilde{m}/\tilde{j})^{-2/3}$ num plano orbital de inclinação qualquer (P_3^* é arbitrário a princípio).

Mantendo a notação anterior, estudaremos o sistema perturbado e, desta maneira, procuramos condições iniciais numa vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = \left((m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, P_1^* + \Delta P_1, 0, P_3^* + \Delta P_3 \right)$$

tais que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ do sistema perturbado (4.69), é uma órbita periódica S_2 -simétrica. Pelas hipóteses temos $\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0 \in \mathcal{L}_2$ e, pelo Lema 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ do sistema perturbado (4.69) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (P_1^* + \Delta P_1)^{-3}t + (m + 1/2)\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= -t + j\pi + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= P_1^* + \Delta P_1 + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= P_3^* + \Delta P_3 + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{aligned} \tag{4.90}$$

Definimos $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_3(\mathbf{X}, \mathbf{P}))$ onde

$$\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = Q_1\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - (m + \tilde{m} + 1/2)\pi, \quad \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_3\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - (j + \tilde{j})\pi, \quad \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) = P_2\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right)$$

e $\mathbf{X} = (T, \Delta Q_2, \Delta P_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta P_3)$. Assim, as equações de periodicidade que devemos resolver, para $\epsilon \neq 0$, são

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (P_1^* + \Delta P_1)^{-3} \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= -\frac{T}{2} - \tilde{j}\pi + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) &= P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0. \end{aligned} \tag{4.91}$$

Note que a expressão de $P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é a mesma dada no Lema 4.9.16 uma vez que as expressões de $\|\hat{\mathbf{q}}\|, \cos \hat{S}, \psi$ nas variáveis de Poincaré-Delaunay ($Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3$) descritas em (4.37) são as mesmas que $\|\mathbf{q}\|, \cos S, \psi$ quando temos o sistema em coordenadas inerciais, veja Observação 4.9.2. Desta maneira,

$$\begin{aligned} \phi_3(\mathbf{X}, 0) &= \frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} d\tau - \frac{G^2 - (P_3^* + \Delta P_3)^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} d\tau - \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} d\tau \right] \\ &\quad - \frac{15}{8} \frac{\Delta Q_2 (P_3^* + \Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} d\tau, \end{aligned}$$

onde $G := G|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = (P_1^* + \Delta P_1) - \frac{(\Delta Q_2)^2}{2}$. Agora, claramente podemos ver que $\phi(\mathbf{X}_0, 0) = (0, 0, \phi_3(\mathbf{X}_0, 0)) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{X}_0 = (-2\tilde{j}\pi, 0, 0)$

$$\begin{aligned} \phi_3(\mathbf{X}_0, 0) &= \frac{15}{16} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left(\frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial Q_2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau - \frac{45}{16} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left(\frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial Q_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau + \\ &\quad \frac{15}{8} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial Q_2} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau \\ &= \frac{15}{16} s^{13/6} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin(s\tau + (m + 1/2)\pi) d\tau - \frac{45}{16} s^{13/6} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-2\tilde{j}\pi} \sin^3(s\tau + (m + 1/2)\pi) d\tau \\ &\quad + \frac{30}{8} s^{13/6} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin(s\tau + (m + 1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m + 1/2)\pi) d\tau \\ &= 0, \end{aligned} \tag{4.92}$$

com $s = (P_1^*)^{-3} = -\tilde{m}/\tilde{j}$.

Como na seção anterior, para que o Teorema de Arenstorf seja aplicado é necessário que verifiquemos se a matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0})$ possui inversa. A matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$, neste caso, é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{(P_1^* + \Delta P_1)^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(P_1^* + \Delta P_1)^{-4} \frac{T}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ -1/2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial T} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $P_1^* = (-\tilde{m}/\tilde{j})^{-1/3}$. Então, avaliando em $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 = (T_0, 0, 0) = (-2\tilde{j}\pi, 0, 0)$ e $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta Q_2) = (0, 0)$ segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{(P_1^*)^3} & 0 & 3\tilde{j}\pi(P_1^*)^{-4} \\ -1/2 & 0 & 0 \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial T}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) \end{pmatrix},$$

cujo determinante é $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = -\frac{3}{2}\tilde{j}(P_1^*)^{-4}\pi \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) \neq 0$, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(\mathbf{X}_0, 0) &= \int_0^{-\pi\tilde{j}} \left[\frac{15}{16} \left(\frac{\partial^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} - \frac{60}{16} \left(\left(\frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta Q_2} \right)^2 \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \right] d\tau \\ &\quad - \frac{45}{16} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \left[\int_0^{-\pi\tilde{j}} \left[\left(\frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta Q_2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \right) (2\|\hat{\mathbf{q}}\| \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} \sin \psi \cos \psi - 4 \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta Q_2} \sin^2 \psi) + \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \frac{\partial^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta Q_2^2} \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \right] \\ &\quad + \frac{15}{8} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \left[\int_0^{-\pi\tilde{j}} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^6} [(\cos^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2} - \sin^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial \Delta Q_2}) \|\hat{\mathbf{q}}\|^3 - 3 \sin \psi \cos \psi \|\hat{\mathbf{q}}\|^2 \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta Q_2}] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Delta Q_2^2} \right] \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \right] \\ &= \frac{15}{16} \left(\int_0^{-\pi\tilde{j}} (2s^{7/3} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) - 4s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi)) d\tau \right) \\ &\quad - \frac{45}{16} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\pi\tilde{j}} (s^{17/6} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) [2s^{-1/2} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \\ &\quad - 4s^{-1/2} \sin^3(s\tau + (m+1/2)\pi)] + 4s^{7/3} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi)) d\tau \\ &\quad - \frac{75}{8} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\pi\tilde{j}} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &\quad + \frac{60}{8} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\pi\tilde{j}} \cos^4(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &\quad - \frac{60}{8} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\pi\tilde{j}} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &\quad - \frac{90}{8} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\pi\tilde{j}} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &= \frac{49}{32} s^{4/3} \tilde{m}\pi \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} - \frac{17}{16} s^{4/3} \tilde{m}\pi \neq 0, \end{aligned} \tag{4.93}$$

desde que

$$\frac{49}{32} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \neq \frac{17}{16}. \tag{4.94}$$

Aqui, vale relembrar que $s = (P_1^*)^{-3} = -\frac{\tilde{m}}{\tilde{j}}$.

Além disso, neste caso também é válido um lema semelhante ao Lema 4.9.8 e, desta maneira, podemos aplicar o Teorema de Arenstorf de modo semelhante aos casos anteriores, e com isso temos o seguinte teorema

Teorema 4.9.22. *Considere as equações de movimento (4.69) e os primários com massa igual a 1/2, movendo-se numa órbita elíptica com colisão, i.e., com momento angular igual a zero e energia total negativa dada por*

$\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = 2k^{-\frac{1}{3}}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existe uma quantidade enumerável de famílias de condições iniciais para o corpo infinitesimal, cuja soluções são órbitas periódicas S_2 -simétricas de período próximo à $-2\tilde{j}\pi$, ($\tilde{j} \in \mathbb{Z}_-$), perto de uma órbita Kepleriana circular cujo plano orbital tem inclinação i tal que a condição em (4.94) seja satisfeita e período igual a $-2\tilde{j}\pi$.

Neste caso, temos uma observação semelhante a Observação 4.9.15.

4.9.3 Continuação de soluções periódicas S_1 -simétricas

A fim de continuar órbitas circulares S_1 -simétricas do problema de Kepler (4.58) ao sistema perturbado (4.55) consideraremos soluções convenientes do problema de Kepler (4.58) com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ em $\mathcal{L}_1$ quando $t = 0$. Assim, pela Proposição 4.8.3 item 1 e Observação 4.6.4, $\mathbf{z}_0^*$ deve ser da forma

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, 0, j\pi, P_1^*, P_2^*, P_3^*) \text{ com } E(0) = 0,$$

onde m, j são inteiros que, sem perda de generalidade, podem ser 0 ou 1 e P_1^*, P_2^*, P_3^* são constantes a serem determinadas. Portanto, uma solução do problema de Kepler com esta condição inicial tem a forma

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) \equiv (Q_1^{(0)}(t), Q_2^{(0)}(t), Q_3^{(0)}(t), P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t), P_3^{(0)}(t)) = ((P_1^*)^{-3}t + m\pi, 0, j\pi, P_1^*, P_2^*, P_3^*). \quad (4.95)$$

Para que esta solução seja S_1 -simétrica é suficiente resolver, em $t = T/2$, o sistema

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/2, z_0^*) &= (P_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi &= (m + \tilde{m})\pi \\ Q_2^{(0)}(T/2, z_0^*) &= 0 &= 0 \\ Q_3^{(0)}(T/2, z_0^*) &= j\pi &= i\pi \end{aligned}$$

onde $\tilde{m}$ e i são inteiros. Resolvendo este sistema e sabendo que devemos ter $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par, obtemos uma órbita periódica S_1 -simétrica para o problema de Kepler (4.58) de raio $s^{-2/3} = (\tilde{m}/2\tilde{s})^{-2/3}$, $\tilde{m} \in \mathbb{N}$, $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ localizada no plano xz com período $T = 4\pi\tilde{s}$, onde $\hat{k} = \tilde{m}/s$ k , com $\epsilon^3 = 1/k$ e $s = \tilde{m}/2\tilde{s}$. Observe que temos até agora liberdade para escolhermos os valores de P_2^* e P_3^* , assim uma vez que queremos uma órbita Kepleriana circular escolhemos $P_2^* = 0$ e seja $P_3^* = 0$. Esta órbita é descrita por (4.95), onde $P_1^* = (\tilde{m}/2\tilde{s})^{-1/3}$, $P_2^* = 0$ e $P_3^* = 0$ e satisfaz

$$\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0^*) = \mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_1 \text{ e } \mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) \in \mathcal{L}_1.$$

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^6$ uma vizinhança compacta de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ sem singularidades e $\mathbf{z}_0^*$ tal que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ permanece limitada e afastada das singularidades. Portanto, desde que o Lema 4.9.5 é válido aqui, os Lemas 3.3.1 e 3.3.2 podem ser aplicados neste caso também.

Seguindo argumentos semelhantes ao caso das órbitas duplamente simétricas, procederemos com o estudo do sistema perturbado e, desta maneira, procuraremos por condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = \left(m\pi, 0, j\pi, \left(\frac{\tilde{m}}{2\tilde{s}} \right)^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3 \right)$$

tal que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (4.55), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, é uma órbita periódica S_1 -simétrica. É claro das hipóteses que $\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0) = \mathbf{z}_0 \in \mathcal{L}_1$. Inicialmente, temos que a solução do problema de Kepler (4.58) com condição inicial $\mathbf{z}_0$ é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + m\pi, 0, j\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3),$$

onde $s = \tilde{m}/2\tilde{s}$.

Pelo Lema 3.3.1 temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (4.55) é dada por

$$\begin{aligned}
Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + m\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\
Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\
Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= j\pi + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\
P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\
P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta P_2 + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\
P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta P_3 + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8).
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Pelas Proposições 4.6.6, item 1 e 4.8.3 temos que as condições de periodicidade para obter soluções periódicas S_1 -simétricas do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão são

$$Q_1\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = (m + \tilde{m})\pi, \quad Q_2\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = 0, \quad Q_3\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = j\pi. \tag{4.97}$$

Definindo $\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = (\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon))$ onde

$$\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_1\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - (m + \tilde{m})\pi, \quad \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_2\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right), \quad \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_3\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) - j\pi$$

e $\mathbf{X} = (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3)$. Assim, as equações de periodicidade que devemos resolver, são

$$\begin{aligned}
\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}2\pi\tilde{s} - \tilde{m}\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\
\phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \\
\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) &= Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0,
\end{aligned} \tag{4.98}$$

onde $Q_3^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) = \frac{15\Delta P_3}{8G^2} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ e $Q_2^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right)$ é dada no próximo lema.

Lema 4.9.23. *Seja $Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ dada por (4.65), i.e.,*

$$Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) d\tau,$$

então

$$\begin{aligned}
Q_2^{(1)}\left(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon\right) &= -\frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau + \frac{G^2 - (\Delta P_3)^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial P_2} d\tau \right] + \\
&\quad \frac{15}{8} \frac{\Delta P_2 (\Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3),
\end{aligned}$$

onde $\|\mathbf{q}\|$, ψ , $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2}$, G e $\frac{\partial \psi}{\partial P_2}$ denotam expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$.

Demonstração: Sabemos que

$$H_1(t, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) = -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|} \left(-1 + 3 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin^2 \psi \right).$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_1}{\partial P_2}(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) &= \frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial}{\partial P_2} \|\mathbf{q}\| \left(-1 + 3 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin^2 \psi \right) - \\
&\quad \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^3} \left(6 \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \sin \psi \cos \psi \frac{\partial \psi}{\partial P_2} + 3 \sin^2 \psi \frac{\partial}{\partial P_2} \left(\frac{G^2 - P_3^2}{G^2} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.99}$$

onde pelo Lema 4.9.1 temos que

$$\frac{\partial}{\partial P_2} \|\mathbf{q}\| = -s^{-1/2} \cos Q_1 + 2s^{-1/3} P_2 \sin^2 Q_1 - \frac{3}{2} s^{-1/6} (P_1 - s^{-1/3}) \cos Q_1 + 2s^{-1/3} Q_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + \frac{\partial}{\partial P_2} (\mathcal{O}(\|\mathbf{X}\|^3)),$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial P_2} = 2s^{1/6} \sin Q_1 + \frac{5}{2} s^{1/3} Q_2 \cos 2Q_1 - s^{1/2} (P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + 5P_2 s^{1/3} \sin Q_1 \cos Q_1 + \frac{\partial}{\partial P_2} \mathcal{O}(\|\mathbf{X}\|^3).$$

Portanto, usando argumentos semelhantes aos da prova do Lema 4.9.1, tomamos (4.99) e as expressões de $[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2$ em série de Fourier, as quais são dadas por

$$[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 = \frac{5}{2} - 2 \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \alpha l,$$

e, desta maneira, obtemos

$$\begin{aligned} Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \int_0^t \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) d\tau = & -\frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau + \frac{G^2 - (\Delta P_3)^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \right. \\ & \left. \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial P_2} d\tau \right] + \frac{15}{8} \frac{\Delta P_2 (\Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3), \end{aligned}$$

onde $\|\mathbf{q}\|$, ψ , $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2}$, G e $\frac{\partial \psi}{\partial P_2}$ denotam as expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$, as quais respectivamente são

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &:= \|\mathbf{q}\|_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = -s^{-2/3} - s^{-1/2} \Delta P_2 \cos Q_1^{(0)}(t) + 2s^{-1/3} \Delta P_1 + (\Delta P_1)^2 - \\ &\quad \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \Delta P_2 \cos Q_1^{(0)}(t) + s^{-1/3} (\Delta P_2)^2 \sin^2 Q_1^{(0)}(t) + \mathcal{O}(\|\mathbf{X}\|^3), \\ \psi &:= \psi_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = Q_1^{(0)}(t) + 2\Delta P_2 s^{1/6} \sin Q_1^{(0)}(t) - \Delta P_2 \Delta P_1 s^{1/2} \sin Q_1^{(0)}(t) + \\ &\quad \frac{5}{2} (\Delta P_2)^2 s^{1/3} \sin Q_1^{(0)}(t) \cos Q_1^{(0)}(t) + \mathcal{O}(\|\mathbf{X}\|^3), \\ \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} &:= \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \Big|_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = -s^{-1/2} \cos Q_1^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0) - \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \cos Q_1^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0) + 2s^{-1/3} \Delta P_2 \sin^2 Q_1^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \\ G &:= G_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta P_2)^2}{2} \end{aligned}$$

e finalmente

$$\frac{\partial \psi}{\partial P_2} := \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \Big|_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = 2s^{1/6} \sin Q_1^{(0)}(t) - s^{1/2} \Delta P_1 \sin Q_1^{(0)}(t) + 5s^{1/3} \Delta P_2 \sin Q_1^{(0)}(t) \cos Q_1^{(0)}(t) + \frac{\partial}{\partial P_2} \mathcal{O}(\|\mathbf{X}\|^3).$$

■

Portanto, definimos também $\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon)$ em $\epsilon = 0$ (veja Observação 4.9.7) de tal modo que ele seja contínua em ϵ para qualquer $\mathbf{X}_0$. Podemos definir $\phi_2(\mathbf{X}, \epsilon)$ com a mesma propriedade.

Observação 4.9.24. Pelo Lema 3.3.1 as funções

$$\begin{aligned} \epsilon^4 [Q_1^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= \epsilon^4 g_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) \\ \epsilon^4 [Q_2^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= Q_2^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \epsilon^4 g_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) \\ \epsilon^4 [Q_3^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &:= Q_3^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \epsilon^4 g_3(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) \end{aligned}$$

são uniformemente limitadas quando ϵ se aproxima de zero. Desta maneira, podemos definí-las de forma que elas sejam contínuas em $\epsilon = 0$ tomando seu valor limite, o qual é zero. Assim, definimos $\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon)$, $\phi_2(\mathbf{X}, \epsilon)$ e $\phi_3(\mathbf{X}, \epsilon)$ em $\epsilon = 0$ por

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, 0) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} 2\pi \tilde{s} - \tilde{m}\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, 0) &= -\frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau + \frac{G^2 - \Delta P_3}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} d\tau - \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial P_2} d\tau \right] + \\ &\quad \frac{15}{8} \frac{\Delta P_2 (\Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau \\ \phi_3(\mathbf{X}, 0) &= \frac{15 \Delta P_3}{8 G^2} \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} d\tau, \end{aligned}$$

onde $G := G|_{\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta P_2)^2}{2}$. Claramente $\phi(\mathbf{0}, 0) = (0, \phi_2(\mathbf{0}, 0), 0) = \mathbf{0}$, pois

$$\begin{aligned} \phi_2(\mathbf{0}, 0) &= -\frac{15}{16} \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau + \frac{45}{16} \int_0^{T/2} \left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau - \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \\ &= \frac{15}{16} s^{13/6} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \cos(s\tau + m\pi) d\tau - \frac{45}{16} s^{13/6} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \cos(s\tau + m\pi) \sin^2(s\tau + m\pi) d\tau - \\ &\quad \frac{30}{8} s^{13/6} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^2(s\tau + m\pi) \cos(s\tau + m\pi) d\tau \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.100}$$

Assim, $\phi_2(\mathbf{0}, 0) = 0$.

Aqui, ainda é válido um lema semelhante ao Lema 4.9.8. A prova deste lema segue de modo semelhante aos casos duplamente e S_2 -simétrica. É verificado que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = \begin{pmatrix} -6 \left(s^{-1/3} + \Delta P_1 \right)^{-4} \pi \tilde{s} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_3^{(1)}}{\partial \Delta P_3}(\mathbf{X}, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $s = \tilde{m}/2\tilde{s}$. Então, avaliando em $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e $\epsilon = 0$ segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} -6 \left(\frac{\tilde{m}+1/2}{2} \right)^{4/3} \pi \tilde{s}^{-1/3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{0}, 0) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{0}, 0) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_3}(\mathbf{0}, 0) \\ 0 & 0 & a_{33}(\mathbf{0}, 0) \end{pmatrix},$$

onde $a_{33}(\mathbf{0}, 0) = \frac{15}{8} \int_0^{T/4} \left(\frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{0}, 0) &= -\frac{15}{16} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \left[\left(\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial (\Delta P_2)^2} \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} - 4 \left(\left(\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2} \right)^2 \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^5} \right) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \right] d\tau \\ &\quad + \frac{G^2 - (\Delta P_3)^2}{G^2} |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \left[\frac{45}{16} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \left[\frac{\partial^2 \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2^2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^4} + \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2} \left(\frac{2 \frac{\partial \psi}{\partial \Delta P_2} \|\mathbf{q}\|^4 \sin \psi \cos \psi - 4 \|\mathbf{q}\|^3 \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2} \sin^2 \psi}{\|\mathbf{q}\|^8} \right) \right] |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{8} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial \Delta P_2^2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\mathbf{q}\|^3} + \frac{\partial \psi}{\partial \Delta P_2} \left(\frac{\|\mathbf{q}\|^3 \frac{\partial \psi}{\partial \Delta P_2} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) - 3 \|\mathbf{q}\|^2 \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial \Delta P_2} \cos \psi \sin \psi}{\|\mathbf{q}\|^6} \right) \right] |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} d\tau \right] \\ &= \frac{60}{16} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \cos^2(s\tau + m\pi) d\tau - \frac{30}{16} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^2(s\tau + m\pi) d\tau + \\ &\quad \frac{90}{16} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^4(s\tau + m\pi) d\tau + \frac{180}{16} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} (\sin^2(s\tau + m\pi) \cos^2(s\tau + m\pi) + \\ &\quad \sin^2(s\tau + m\pi) \cos(s\tau + m\pi)) d\tau - \frac{75}{8} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^2(s\tau + m\pi) \cos^2(s\tau + m\pi) d\tau - \\ &\quad \frac{60}{8} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^2(s\tau + m\pi) (\cos^2(s\tau + m\pi) - \sin^2(s\tau + m\pi)) d\tau + \\ &\quad \frac{90}{8} s^{7/3} \int_0^{2\pi\tilde{s}} \sin^2(s\tau + m\pi) \cos^2(s\tau + m\pi) d\tau \\ &= \left(\frac{60}{32} - \frac{30}{32} + \frac{270}{128} + \frac{180}{128} - \frac{45}{64} + \frac{180}{64} \right) s^{4/3} \tilde{m} \pi = \frac{705}{128} s^{4/3} \tilde{m} \pi \neq 0. \end{aligned} \tag{4.101}$$

Portanto, $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = -6 \left(\frac{\tilde{m}+1/2}{2} \right)^{4/3} \pi \tilde{s}^{-1/3} a_{33}(\mathbf{0}, 0) \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{0}, 0) \neq 0$ e assim existe $(D_{\mathbf{X}}\phi)^{-1}(\mathbf{0}, 0)$. $\blacksquare$

É possível também neste caso provar um lema semelhante ao Lema 4.9.8 e, desta maneira, estamos agora em posição de aplicar o Teorema de Arenstorf da maneira como foi aplicado no Capítulo 3, para resolver o sistema de equações (4.98).

Teorema 4.9.25. *Considere as equações de movimento (4.55) e os primários, com massa igual a $1/2$, movendo-se em uma órbita elíptica de colisão, i.e., momento angular igual a zero e energia total negativa, dada por $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = k^{-\frac{1}{3}}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existe uma quantidade enumerável de famílias de condições iniciais para o corpo infinitesimal tais que seu movimento é uma solução periódica S_1 -simétrica de período $4\pi\tilde{s}$, ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xz cujo período é também $4\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: Segue de modo semelhantes ao caso das órbitas duplamente simétrica. ■

Para este caso, segue observação semelhante a Observação 4.9.19 e resultados semelhantes ao Corolário 4.9.20 e ao Teorema 4.9.21.

O caso inclinação i arbitrária.

Assim como no caso de órbitas duplamente e S_2 -simétricas, podemos conseguir órbitas periódicas S_1 -simétrica do problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão como continuação de órbitas Keplerianas circulares num plano orbital cuja inclinação é arbitrária. Usaremos para isso a equação de movimento dada em (4.69). Neste caso a solução conveniente do problema de Kepler a ser continuada é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) = ((P_1^*)^{-3}t + m\pi, 0, -t + j\pi, P_1^*, 0, P_3^*),$$

onde a condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ é

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, 0, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*) \text{ com } E(0) = 0,$$

com m, j inteiros que, sem perda de generalidade, faremos 0 ou 1. Da mesma forma que no caso anterior, resolvemos a equação de periodicidade para esta órbita e chegamos que

$$T/2 = -\tilde{j}\pi,$$

onde $\tilde{j} \in \mathbb{Z}_-$ e

$$(P_1^*)^{-3} = -\tilde{m}/\tilde{j},$$

com $\tilde{m} \in \mathbb{Z}_+$. Além disso, para que $E(T/2) = \tilde{k}\pi$, devemos tomar $T/2 = \tilde{k}\pi\epsilon^3$, assim,

$$\tilde{k} = -\frac{\tilde{j}}{\epsilon^3}, \text{ com } \epsilon^3 = 1/2k, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, a órbita Kepleriana $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita periódica circular S_1 -simétrica, cujo período é $-2\tilde{j}\pi$ de raio $(-\tilde{m}/\tilde{j})^{-2/3}$ num plano orbital de inclinação arbitrária.

Mantendo a notação anterior, estudaremos o sistema perturbado e, desta maneira, procuramos condições iniciais numa vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = (m\pi, 0, j\pi, P_1^* + \Delta P_1, \Delta P_2, P_3^* + \Delta P_3)$$

tais que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ do sistema perturbado (4.69), seja uma órbita periódica S_1 -simétrica. Seguindo as mesmas idéias anteriores chegamos nas equações de periodicidade

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (P_1^* + \Delta P_1)^{-3} \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \\ \phi_3(\mathbf{X}, \epsilon) &= -\frac{T}{2} - \tilde{j}\pi + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \end{aligned} \tag{4.102}$$

onde $\mathbf{X} = (T, \Delta P_1, \Delta P_2)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta P_3)$.

Note que a expressão de $Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ é a mesma dada no Lema 4.9.23, uma vez que as expressões de $\|\hat{\mathbf{q}}\|, \cos \hat{S}, \psi$

nas variáveis de Poincaré-Delaunay $(Q_1, Q_2, Q_3, P_1, P_2, P_3)$ descritas em (4.37) são as mesmas que $\|\mathbf{q}\|, \cos S, \psi$ quando temos o sistema em coordenadas inerciais, veja Observação 4.9.2, ou seja,

$$Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \int_0^t \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial P_2}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}(\tau, \mathbf{z}_0), \epsilon) d\tau = -\frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial P_2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} d\tau + \frac{G^2 - (P_3^* + \Delta P_3)^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial P_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} d\tau - \right. \\ \left. \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial P_2} d\tau \right] + \frac{15}{8} \frac{\Delta P_2 (P_3^* + \Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

onde $\|\hat{\mathbf{q}}\|, \psi, \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial P_2}, G$ e $\frac{\partial \psi}{\partial P_2}$ denotam as expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$, as quais são

$$\|\mathbf{q}\| := \|\mathbf{q}\|_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = -s^{-2/3} - s^{-1/2} \Delta P_2 \cos Q_1^{(0)}(t) + 2s^{-1/3} \Delta P_1 + (\Delta P_1)^2 - \\ \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \Delta P_2 \cos Q_1^{(0)}(t) + s^{-1/3} (\Delta P_2)^2 \sin^2 Q_1^{(0)}(t) + \mathcal{O}(\|X\|^3), \\ \psi := \psi_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = Q_1^{(0)}(t) + 2\Delta P_2 s^{1/6} \sin Q_1^{(0)}(t) - \Delta P_2 \Delta P_1 s^{1/2} \sin Q_1^{(0)}(t) + \\ \frac{5}{2} (\Delta P_2)^2 s^{1/3} \sin Q_1^{(0)}(t) \cos Q_1^{(0)}(t) + \mathcal{O}(\|X\|^3),$$

$$\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} := \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} \Big|_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = -s^{-1/2} \cos Q_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) - \frac{3}{2} s^{-1/6} \Delta P_1 \cos Q_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) + 2s^{-1/3} \Delta P_2 \sin^2 Q_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0),$$

$$G := G \Big|_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = (s^{-1/3} + \Delta P_1) - \frac{(\Delta P_2)^2}{2}$$

e, finalmente

$$\frac{\partial \psi}{\partial P_2} := \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \Big|_{|\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)} = 2s^{1/6} \sin Q_1^{(0)}(t) - s^{1/2} \Delta P_1 \sin Q_1^{(0)}(t) + 5s^{1/3} \Delta P_2 \sin Q_1^{(0)}(t) \cos Q_1^{(0)}(t) + \frac{\partial}{\partial P_2} \mathcal{O}(\|X\|^3).$$

■

Desta maneira,

$$\phi_2(\mathbf{X}, 0) = -\frac{15}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial P_2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} d\tau + \frac{G^2 - (P_3^* + \Delta P_3)^2}{G^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{T/2} \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial P_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} d\tau - \frac{15}{8} \int_0^{T/2} \frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial P_2} d\tau \right] + \\ \frac{15}{8} \frac{\Delta P_2 (P_3^* + \Delta P_3)^2}{G^3} \int_0^{T/2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} d\tau$$

Agora, claramente podemos ver que $\phi(\mathbf{X}_0, 0) = (0, \phi_2(\mathbf{X}_0, 0), 0) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{X}_0 = (-2\tilde{j}\pi, 0, 0)$. De fato,

$$\phi_2(\mathbf{X}_0, 0) = -\frac{15}{16} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left(\frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial P_2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau + \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \left[\frac{45}{16} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left(\frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial P_2} \frac{\sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau - \right. \\ \left. \frac{15}{8} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left(\frac{\sin \psi \cos \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{\partial \psi}{\partial P_2} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau \right] \\ = \frac{15}{16} s^{13/6} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \cos(s\tau + m\pi) d\tau - \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \left[\frac{45}{16} s^{13/6} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \cos(s\tau + m\pi) \sin^2(s\tau + m\pi) d\tau - \right. \\ \left. \frac{30}{8} s^{13/6} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin^2(s\tau + m\pi) \cos(s\tau + m\pi) d\tau \right] \\ = 0.$$

(4.103)

Como na seção anterior, para que o Teorema de Arenstorf seja aplicado é necessário, primeiramente, que verifiquemos se a matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0})$ possui inversa. A matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$, neste caso, é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{(P_1^* + \Delta P_1)^3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(P_1^* + \Delta P_1)^{-4} \frac{T}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial T} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ -1/2 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $P_1^* = (-\tilde{m}/\tilde{j})^{-1/3}$. Então, avaliando em $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 = (T_0, 0, 0) = (-2\tilde{j}\pi, 0, 0)$ e $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta P_3) = (0, 0)$ segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(P_1^*)^{-3} & 3\tilde{j}\pi(P_1^*)^{-4} & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial T}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = -\frac{3}{2}\tilde{j}(P_1^*)^{-4}\pi\frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) \neq 0$, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(\mathbf{X}_0, 0) &= -\frac{15}{16} \int_0^{-\tilde{j}\pi} [(\frac{\partial^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial (\Delta P_2)^2} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} - 4((\frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta P_2})^2 \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^5})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}] d\tau + \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \\ &\quad \left[\frac{45}{16} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left[\frac{\partial^2 \|\hat{\mathbf{q}}\| \sin^2 \psi}{\partial \Delta P_2^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|^4} + \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta P_2} \left(\frac{2 \frac{\partial \psi}{\partial \Delta P_2} \|\hat{\mathbf{q}}\|^4 \sin \psi \cos \psi - 4 \|\hat{\mathbf{q}}\|^3 \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta P_2} \sin^2 \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^8} \right) \right] |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau - \right. \\ &\quad \left. \frac{15}{8} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \left[\frac{\partial^2 \psi \sin \psi \cos \psi}{\partial \Delta P_2^2 \|\hat{\mathbf{q}}\|^3} + \frac{\partial \psi}{\partial \Delta P_2} \left(\frac{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3 \frac{\partial \psi}{\partial \Delta P_2} (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) - 3 \|\hat{\mathbf{q}}\|^2 \frac{\partial \|\hat{\mathbf{q}}\|}{\partial \Delta P_2} \cos \psi \sin \psi}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^6} \right) \right] |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} d\tau \right] \\ &= \frac{60}{16} s^{7/3} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \cos^2(st + m\pi) d\tau - \frac{30}{16} s^{7/3} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin^2(st + m\pi) d\tau + \\ &\quad \frac{90}{16} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin^4(st + m\pi) d\tau + \frac{180}{16} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} (\sin^2(st + m\pi) \cos^2(st + m\pi) + \\ &\quad \sin^2(st + m\pi) \cos(st + m\pi)) d\tau - \frac{75}{8} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin^2(st + m\pi) \cos^2(st + m\pi) d\tau - \\ &\quad \frac{60}{8} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin^2(st + m\pi) (\cos^2(st + m\pi) - \sin^2(st + m\pi)) d\tau + \\ &\quad \frac{90}{8} s^{7/3} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \int_0^{-\tilde{j}\pi} \sin^2(st + m\pi) \cos^2(st + m\pi) d\tau \\ &= \left(\frac{30}{32} + \frac{585}{128} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2} \right) s^{4/3} \tilde{m}\pi \neq 0, \end{aligned} \tag{4.104}$$

desde

$$\frac{30}{32} \neq -\frac{585}{128} \frac{(P_1^*)^2 - (P_3^*)^2}{(P_1^*)^2}. \tag{4.105}$$

Vale relembrar $s = P_1^{-3} = -\tilde{m}/\tilde{j}$.

Além disso, neste caso também é válido um lema semelhante ao Lema 4.9.8. Desta maneira, podemos aplicar o Teorema de Arenstorf de modo semelhante ao caso de órbitas duplamente simétricas e, com isso, temos o seguinte teorema

Teorema 4.9.26. *Considere as equações de movimento (4.69) e os primários com massa igual a 1/2, movendo-se numa órbita elíptica com colisão, i.e., com momento angular igual a zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = 2k^{-\frac{1}{3}}$, para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existe uma quantidade enumerável de famílias de condições iniciais para o corpo infinitesimal, cuja soluções são órbitas periódicas S_1 -simétricas de período próximo a $-2\tilde{j}\pi$, ($\tilde{j} \in \mathbb{Z}_-$), perto de uma órbita Kepleriana circular de período igual a $-2\tilde{j}\pi$ e cujo plano orbital tem uma inclinação i tal que (4.105) seja satisfeita.*

É válido aqui uma observação semelhante a Observação 4.9.15.

4.10 Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas

4.10.1 Continuação de soluções periódicas elípticas duplamente simétricas

A fim de continuar uma órbita Kepleriana elíptica duplamente simétrica do sistema não perturbado

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}), \quad (4.106)$$

onde $\mathbf{F}_0$ é descrita em (4.56) para o sistema (4.55) (sistema perturbado) devemos considerar uma solução elíptica conveniente do problema de Kepler (4.106) com condições iniciais $\mathbf{z}_0^*$ em $\mathcal{L}_2$ quando $t = 0$. Pela Proposição 4.8.3 item 2 e Observação 4.6.4, tomamos a condição inicial

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*) \text{ com } E(0) = 0,$$

onde m, j são inteiros que, sem perda de generalidade, podemos tomar 0 ou 1 e Q_2^*, P_1^*, P_3^* são constantes a serem determinadas. A solução do sistema não perturbado (4.106) com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ assume a forma

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) \equiv (Q_1^{(0)}(t), Q_2^{(0)}(t), Q_3^{(0)}(t), P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t), P_3^{(0)}(t)) = ((P_1^*)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, j\pi, P_1^*, 0, P_3^*). \quad (4.107)$$

Note que a constante Q_2^* não pode ser zero, pois se ambas as constantes Q_2^* e P_2^* forem nulas, teremos que a órbita $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita circular. Desta maneira, desde que queremos uma órbita elíptica do problema de Kepler, tomaremos $Q_2^* \neq 0$. Além disso, queremos que a solução (4.107) seja duplamente simétrica, portanto pelas Proposições 4.6.6, item 3 e 4.8.3 item (1) é suficiente resolver, em $t = T/4$, o sistema

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/4, z_0^*) &= (P_1^*)^{-3} \frac{T}{4} + (m + \frac{1}{2})\pi = p\pi \\ Q_2^{(0)}(T/4, z_0^*) &= Q_2^* = 0 \\ Q_3^{(0)}(T/4, z_0^*) &= j\pi = i\pi \end{aligned}$$

onde p e i são inteiros. Observe que a segunda equação somente é satisfeita por $Q_2^* = 0$, o que é impossível pois, por hipótese, $Q_2^* \neq 0$. Assim, concluímos que com esta escolha de variáveis nós não podemos continuar órbitas elípticas. Mesmo se considerarmos o problema em coordenadas giratórias e usarmos as variáveis de Poincaré-Delaunay (4.37) não teremos sucesso pois o Q_2^* , também neste caso, será igual a zero.

Existem outras opções para continuarmos tentando obter órbitas do problema perturbado como continuação de órbitas Keplerianas elípticas. Dentre as opções, podemos continuar usando as equações de movimento em coordenadas inerciais e uma outra escolha das variáveis de Poincaré-Delaunay ou mesmo as variáveis de Delaunay (as quais são a primeira escolha quando queremos obter órbitas elípticas devido a que seu domínio de definição ser de órbitas elípticas). Ou podemos trabalhar com as equações de movimento em coordenadas giratórias e então escolher as variáveis de Delaunay. Esta última escolha não nos permite nem sequer resolver as equações de periodicidade para a solução do problema de Kepler, ou seja, do problema não perturbado.

Após alguns cálculos, nos pareceu bom trabalhar com as equações de movimento (4.51) em coordenadas giratórias cuja função Hamiltoniana é dada por

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \epsilon^4 \hat{H}_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{H}_r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) \quad (4.108)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) &= \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \xi p_\eta + \eta p_\xi - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} = \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - H - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|}, H = G \cos i, \\ \hat{H}_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) &= -\frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{(-1 + 3 \cos^2 \hat{S})}{8} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \\ \hat{H}_r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) &= -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16 \|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \hat{S} + \frac{35}{8} \cos^4 \hat{S} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (4.109)$$

e com a seguinte escolha das variáveis de Poincaré-Delaunay

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + g + h, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= -\sqrt{2(L-G)} \sin(g+h), & P_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos(g+h), \\ Q_3 &= -\sqrt{2(G-H)} \sin h, & P_3 &= \sqrt{2(G-H)} \cos h. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Esta escolha das variáveis de Poincaré-Delaunay é descrita em [5], p. 285. Como ficará mais claro posteriormente, a principal diferença com o caso de órbitas continuadas a partir de órbitas Keplerianas circulares é que necessitamos introduzir o tempo como uma nova variável para eliminar a degenerescência do sistema de equações de periodicidade. Estes argumentos têm sido usados, por exemplo, por Schmidt em [43].

Na proposição abaixo, usando as variáveis de Poincaré-Delaunay (4.110), damos condições suficientes para que a partícula infinitesimal pertença a subconjuntos invariantes $\hat{L}_1$ and $\hat{L}_2$.

Proposição 4.10.1. *Seja $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$ variáveis de Poincaré-Delaunay definidas em (4.110). O subconjunto de $\mathbb{R}^3$:*

(1) $\bar{\mathcal{L}}_1$: $Q_1 = 0 \pmod{\pi}$, $Q_2 = 0, Q_3 = 0$ nos dá pontos no subconjunto invariante $\hat{L}_1$.

(2) $\bar{\mathcal{L}}_2$: $Q_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, $Q_3 = 0, P_2 = 0$ nos dá pontos no subconjunto invariante $\hat{L}_2$.

Demonstração: Provaremos o item (1), a prova do item (2) segue de modo análogo. Uma vez que $Q_1 = 0 \pmod{\pi}$, $Q_2 = 0, Q_3 = 0$, por (4.110) segue que

$$l + g + h = n_1\pi, \quad L = G \text{ ou } g + h = n_2\pi, \quad G = H \text{ ou } h = n_3\pi.$$

Aqui temos vários casos a analisar:

Caso 1)

$$l + g + h = n_1\pi, \quad L = G, \quad G = H.$$

Uma vez que $G = H$ e $H = G \cos i$, temos que $i = 0$. Assim, a partícula está localizada no plano $\xi\eta$. Deste modo, não existe nodo ascendente pois sua trajetória não cruza o plano $\xi\eta$ e, portanto, para este caso, h está indefinido. Uma vez que $L = G$ temos que a partícula está sobre uma órbita circular e, deste modo, o ângulo g também está indefinido (pois o ângulo g é o argumento do pericentro, mas sobre órbitas circulares não existe pericentro). No entanto, uma vez que a partícula está sobre uma órbita circular temos que $l = f$ e, assim, o ângulo $n_1\pi$ nos dá a localização da partícula na órbita (para mais detalhes veja Apêndice 7.4). Como o ângulo $n_1\pi$ é medido a partir do eixo ξ , concluímos que a partícula está sobre o eixo ξ . Desde que as condições sobre a velocidade são satisfeitas naturalmente (pois a órbita é circular), segue que esta partícula está no subconjunto $\hat{L}_1$.

Caso 2)

$$l + g + h = n_1\pi, \quad L = G, \quad h = n_3\pi.$$

A terceira condição nos dá que a interseção do plano orbital com o plano de referência, i.e., plano $\xi\eta$ ocorre no eixo ξ . Pela condição $L = G$ segue que a partícula está sobre uma órbita circular e, assim, $l = f$ e g está indefinida. Portanto, pela primeira condição temos que $f + g = (n_1 - n_3)\pi$. No entanto, o ângulo $(n_1 - n_3)\pi$, o qual é medido a partir do eixo ξ (linha dos nodos) nos dá a localização da partícula na órbita. Desta maneira, concluímos que a partícula está localizada sobre o eixo ξ . Analogamente ao caso anterior, segue que esta partícula está no subconjunto $\hat{L}_1$.

Case 3)

$$l + g + h = n_1\pi, \quad g + h = n_2\pi, \quad G = H.$$

Uma vez que $G = H$ e $H = G \cos i$, temos que $i = 0$. Assim, a partícula está localizada no plano $\xi\eta$. Desta maneira, não existe nodo ascendente e assim, h está indefinido. Das duas primeiras condições, segue que $l = (n_1 - n_2)\pi$. Portanto, pela equação do centro (4.50) temos que $l = f$. O ângulo $n_2\pi$ nos dá a localização do pericentro (veja Apêndice 7.4). Este ângulo é medido a partir do eixo ξ , assim concluímos que o pericentro está sobre o eixo ξ . Portanto, desde que $f = (n_1 - n_2)\pi$, a partícula está localizada no eixo ξ , sobre o pericentro ou apocentro. Desta maneira, temos pontos no subconjunto $\hat{L}_1$.

Case 4)

$$l + g + h = n_1\pi, \quad g + h = n_2\pi, \quad h = n_3\pi.$$

Das condições $h = n_3\pi$ segue que a linha dos nodos está no eixo ξ . E das duas primeiras condições temos que $g = (n_2 - n_3)\pi$ e $l = (n_1 - n_2)\pi$. Assim, o pericentro está localizado sobre o eixo ξ e a partícula está sobre o pericentro ou sobre o apocentro. Portanto, concluímos que a partícula está no subconjunto $\hat{L}_1$. ■

Com esta escolha das variáveis de Poincaré-Delaunay, a função Hamiltoniana (4.108), nestas variáveis, torna-se

$$\hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon^4 \hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon), \quad (4.111)$$

cuja equação de movimento associada denotaremos por

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^4 \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon), \quad (4.112)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= -\frac{1}{2P_1^2} - H = -\frac{1}{2P_1^2} - \left(P_1 - \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2} - \frac{Q_3^2 + P_3^2}{2} \right), \\ \hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) &= -\frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \frac{(-1 + 3\cos^2 \hat{S})}{8} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \\ \hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) &= -\frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{16\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \hat{S} + \frac{35}{8} \cos^4 \hat{S} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4), \end{aligned} \quad (4.113)$$

onde denotamos $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ por $\mathbf{q}$ e, analogamente, para $\cos \hat{S}$.

Seja $\mathbf{z}_0^*$ uma condição inicial tal que $\mathbf{z}_0^* \in \bar{\mathcal{L}}_2$ quando $t = 0$. Assim, pela Proposição 4.10.1 item 2 pela Observação 4.6.4 $\mathbf{z}_0^*$ é da forma

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + 1/2)\pi, Q_2^*, 0, P_1^*, 0, P_3^*),$$

onde Q_2^*, P_1^* e P_3^* são constantes e m é um inteiro. Da função Hamiltoniana não perturbada (4.113) segue que as equações de movimento do sistema não perturbado são

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= \frac{1}{P_1^3} - 1, & \dot{P}_1 &= 0, \\ \dot{Q}_2 &= P_2, & \dot{P}_2 &= -Q_2, \\ \dot{Q}_3 &= P_3, & \dot{P}_3 &= -Q_3. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Portanto, uma solução do problema de Kepler (4.114) com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) = (Q_1^{(0)}(t), Q_2^{(0)}(t), Q_3^{(0)}(t), P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t), P_3^{(0)}(t)), \quad (4.115)$$

onde

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t) &= \left(\frac{1}{P_1^{*3}} - 1 \right) t + (m + 1/2)\pi, & P_1^{(0)}(t) &= P_1^*, \\ Q_2^{(0)}(t) &= Q_2^* \cos t, & P_2^{(0)}(t) &= -Q_2^* \sin t, \\ Q_3^{(0)}(t) &= P_3^* \sin t, & P_3^{(0)}(t) &= P_3^* \cos t. \end{aligned}$$

Como queremos que a órbita $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ seja uma órbita elíptica devemos supor que $Q_2^* \neq 0$. Agora impomos que esta solução seja duplamente simétrica, portanto pelas Proposições 4.6.7, item 3 e 4.10.1 item 1 é suficiente resolver, em $t = T/4$, as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/4) &= \left(\frac{1}{P_1^{*3}} - 1 \right) \frac{T}{4} + (m + 1/2)\pi = (m + \tilde{m} + 1)\pi \\ Q_2^{(0)}(T/4) &= Q_2^* \cos \frac{T}{4} = 0 \\ Q_3^{(0)}(T/4) &= P_3^* \sin \frac{T}{4} = 0. \end{aligned}$$

Da primeira equação temos que

$$\frac{T}{4} = \frac{(\tilde{m} + 1/2)\pi}{s - 1}, \quad (4.116)$$

onde $s = P_1^{*-3}$ é uma constante real. Desde que $Q_2^* \neq 0$, resolvemos a segunda equação fazendo $T/4 = \pi/2 \pmod{\pi}$. Desta maneira, de (4.116) é suficiente supor que $1/(s - 1)$ é um inteiro ímpar, i.e.,

$$s = \frac{2\tilde{s} + 2}{2\tilde{s} + 1}, \quad \tilde{s} \in \mathbb{Z} \quad \text{tal que} \quad s \neq 0.$$

Por outro lado, pelas Observações 2.2.3 item 2 e 4.6.4, precisamos que $E(0) = 0$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par e portanto, devemos tomar

$$T = 4\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (4.117)$$

Combinando (4.116) com (4.117), onde $\hat{k}$ deve ser um inteiro par, segue que

$$\hat{k} = 4k \frac{\tilde{m} + 1/2}{s - 1},$$

onde $\epsilon^3 = 1/4k$, com k um inteiro. Logo, a terceira equação somente é satisfeita com $P_3^* = 0$. Resumindo, obtemos uma órbita elíptica duplamente simétrica do problema de Kepler (4.114) de raio $(2\tilde{s} + 2/2\tilde{s} + 1)^{-2/3}$ localizada no plano $\xi\eta$ (pois $Q_3^{(0)}(t) = 0 = P_3^{(0)}(t)$) com período $T = 4(2\tilde{s} + 1)(\tilde{m} + 1/2) = (2\tilde{s} + 1)(4\tilde{m} + 2)\pi$. Esta órbita é descrita por (4.115) com $P_3^* = 0, P_1^* = (2\tilde{s} + 2/2\tilde{s} + 1)^{-1/3}$ e satisfaz

$$\mathbf{Z}^{(0)}(0, \mathbf{z}_0^*) = \mathbf{z}_0^* \in \bar{\mathcal{L}}_2, \quad \mathbf{Z}^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) \in \bar{\mathcal{L}}_1.$$

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ uma vizinhança compacta de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ sem singularidades e $\mathbf{z}_0^*$ tal que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ permanece limitada e afastada das singularidades. Portanto, como o Lema 4.9.5 é válido aqui, os Lemas 3.3.1 e 3.3.2 podem ser aplicados neste caso também.

Mantendo as notações anteriores, tomamos uma condição inicial em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ da forma

$$\mathbf{z}_0 = ((m + 1/2)\pi, Q_2^* + \Delta Q_2, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, \Delta P_3),$$

onde $s = (2\tilde{s} + 2)/(2\tilde{s} + 1)$. Pelo Lema 3.3.1 temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ do sistema associado à função Hamiltoniana (4.111) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1)t + (m + 1/2)\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (Q_2^* + \Delta Q_2) \cos t + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta P_3 \sin t + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= -(Q_2^* + \Delta Q_2) \sin t + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta P_3 \cos t + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{aligned} \quad (4.118)$$

Pelas Proposições 4.6.7, item 3 e 4.10.1, item 1 temos que as condições de periodicidade para obter soluções periódicas duplamente simétricas do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão são

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \left(\frac{1}{(s^{-1/3} + \Delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{4} + (m + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^4) = (m + \tilde{m} + 1)\pi \\ Q_2(t) &= (Q_2^* + \Delta Q_2) \cos \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0 \\ Q_3(t) &= \Delta P_3 \sin \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0. \end{aligned} \quad (4.119)$$

Seja $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_3(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = (Q_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) - (m + \tilde{m} + 1)\pi, Q_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}), Q_3(\mathbf{X}, \mathbf{P}))$, onde $\mathbf{X} = (T, \Delta P_1, \Delta P_3)$ e $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta Q_2)$, desta maneira as equações de periodicidade (4.119) são equivalentes ao sistema

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= \left(\frac{1}{(s^{-1/3} + \Delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{4} - (\tilde{m} + 1/2)\pi + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0 \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (Q_2^* + \Delta Q_2) \cos \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0 \\ \phi_3(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= \Delta P_3 \sin \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0.\end{aligned}\tag{4.120}$$

Observe que, semelhantemente aos casos anteriores, podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ ao caso $\epsilon = 0$ definindo

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= \left(\frac{1}{(s^{-1/3} + \Delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{T}{4} - (\tilde{m} + 1/2)\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (Q_2^* + \Delta Q_2) \cos \frac{T}{4} \\ \phi_3(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= \Delta P_3 \sin \frac{T}{4}.\end{aligned}$$

e pela escolha de $T = T_0 = 4(2\tilde{s} + 1)(\tilde{m} + 1/2)\pi$ e $s = \frac{2\tilde{s} + 2}{2\tilde{s} + 1}$ segue que $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0})$, onde $\mathbf{X}_0 = (T_0, 0, 0)$. Verificamos que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{(s^{-1/3} + \Delta P_1)^3} - 1 \right) \frac{1}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-4} \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ -\frac{Q_2^* + \Delta Q_2}{\frac{\Delta P_3}{4}} \sin \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\Delta P_3}{4} \cos \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \sin \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix}.$$

Assim, segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{4} & -3s^{4/3} \frac{T_0}{4} & 0 \\ \mp \frac{Q_2^*}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

onde $s = (2\tilde{s} + 2)/(2\tilde{s} + 1)$ e $T_0 = 4(2\tilde{s} + 1)(\tilde{m} + 1/2)\pi$. Assim, $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) \neq 0$. Por outro lado, é verificado um resultado análogo ao Lema 4.9.8. Agora, estamos em posição de aplicar o Teorema de Arenstorf como ele é aplicado no capítulo 3, para resolver o sistema de equações (4.120).

Teorema 4.10.2. *Considere as equações de movimento (4.112) e os primários, com ambas as massas iguais a $1/2$, movendo-se em uma órbita elíptica de colisão, i.e., momento angular igual a zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (4k)^{-\frac{1}{3}}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existe um conjunto enumerável de famílias de condições iniciais para o corpo infinitesimal tal que seu movimento é uma solução periódica duplamente simétrica de período próximo à $4(2\tilde{s} + 1)(\tilde{m} + 1/2)\pi$, ($\tilde{s} \in \mathbb{Z}$), perto de uma órbita Kepleriana elíptica sobre o plano $\xi\eta$, de período $4(2\tilde{s} + 1)(\tilde{m} + 1/2)\pi$.*

Demonstração: A prova segue de modo semelhante aos outros casos. ■

Observação 4.10.3. 1) Este teorema gera uma escolha contínua de soluções periódicas do sistema (4.120). Para $\epsilon = (4k)^{-1/3}$, onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, temos a relação

$$\hat{k} = 4k(\tilde{m} + 1/2)(2\tilde{s} + 1).$$

2) Note que de fato o plano orbital da órbita continuada está perto do plano $\xi\eta$, pois pelo Teorema de Arenstorf nós conseguimos uma vizinhança de $\mathbf{P}$ tal que a função $\mathbf{X}(\mathbf{P}) = (T(\mathbf{P}), \Delta P_1(\mathbf{P}), \Delta P_3(\mathbf{P}))$ satisfaça $\phi(\mathbf{X}(\mathbf{P}), \mathbf{P}) = 0$. Portanto, a equação da órbita continuada com respeito à Q_3 é dada por

$$Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \Delta P_3(\mathbf{P}) \sin t + \epsilon^4 Q_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8)$$

e a equação da órbita continuada com respeito à P_3 é dada por

$$P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \Delta P_3(\mathbf{P}) \cos t + \epsilon^4 P_3^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8).$$

Portanto, o plano orbital da órbita do corpo infinitesimal está tão próximo do plano $\xi\eta$ dependendo de quão pequena for ϵ e $\Delta P_3(\mathbf{P})$.

3) A fim de obter soluções periódicas do problema restrito dos três corpos espacial elíptico com colisão (4.112), as condições em (4.120) devem ser satisfeitas simultaneamente com a condição de comensurabilidade $T/2\pi\epsilon^3 \in \mathbb{Q}$. Assim, desde que $T = T(\epsilon, \Delta Q_2)$ e $\epsilon^3 = (4k)^{-1}$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ e $\Delta Q_2 \in \mathbb{R}$ tais que (veja Observação 3.2.1)

$$\frac{T((4k)^{-1/3}, \Delta Q_2)}{2\pi\epsilon^3} \in \mathbb{Q}.$$

Portanto, para estes $\epsilon = (4k)^{-1/3}$, onde k é um inteiro suficientemente grande, e $\Delta Q_2 \in \mathbb{R}$ temos condições iniciais que dão origem a uma solução de (4.112) as quais são $T = T(\epsilon, \Delta Q_2)$ -periódicas e duplamente simétricas.

Aqui também é válido resultados semelhantes ao Corolário 4.9.11 e ao Teorema 6.7.9.

Capítulo 5

O problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão

5.1 Equação de movimento

Vimos no capítulo anterior que as equações de movimento do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão, é invariante por rotações em torno do eixo z . Em particular, qualquer plano que contém a linha dos primários (i.e., o eixo z) é invariante por rotações com respeito ao fluxo de (4.2). Estes são os casos planares. Sem perda de generalidade, nós iremos analisar neste capítulo o subconjunto invariante (4.4) dado por

$$y = 0, \quad p_y = 0.$$

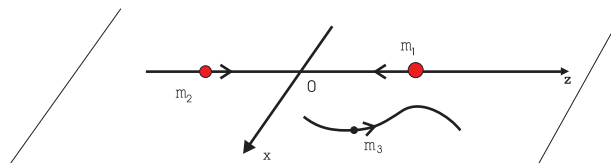


Figura 5.1: O problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão

Como antes, iremos assumir que os primários com massas $m_1 = \mu$ e $m_2 = 1 - \mu$, $\mu \in (0, 1/2]$ estão movendo-se ao longo do eixo z e que seu centro de massa está fixo na origem. Seja $\rho = z_1 - z_2$ a distância entre os primários e (x, z) as coordenadas da partícula teste no plano que contém os primários. Nestas coordenadas as equações de movimento da partícula infinitesimal são

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -x \left[\frac{\mu}{r_1^3(t)} + \frac{(1-\mu)}{r_2^3(t)} \right] \\ \ddot{z} &= - \left[\frac{\mu(z-z_1)}{r_1^3(t)} + \frac{(1-\mu)(z+z_1)}{r_2^3(t)} \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1^2(t) &= (z - z_1)^2 + x^2 = (z - (1 - \mu)\rho(t))^2 + x^2 \\ r_2^2(t) &= (z - z_2)^2 + x^2 = (z + \mu\rho(t))^2 + x^2. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Gostaríamos de enfatizar que os primários são parametrizados por ρ e satisfazem a equação diferencial (2.7) com relação de energia dada por (2.8), cuja dinâmica é um movimento elíptico com colisão $2\pi\epsilon^3$ período em t , onde ϵ é dado por (2.11).

Denotando $\dot{x} = p_x$, $\dot{z} = p_z$ do sistema acima obtemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -x \left[\frac{\mu}{r_1^3(t)} + \frac{1-\mu}{r_2^3(t)} \right], \\ \dot{z} &= p_z, & \dot{p}_z &= -z \left[\frac{\mu(z-z_1)}{r_1^3(t)} + \frac{(1-\mu)(z+z_1)}{r_2^3(t)} \right].\end{aligned}\quad (5.3)$$

Observe que o sistema (5.1) é um sistema Hamiltoniano não autônomo, $2\pi\epsilon^3$ periódico em t com dois graus e meio de liberdade, cuja função Hamiltoniana é dada por:

$$H^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \left[\frac{\mu}{r_1(t)} + \frac{1-\mu}{r_2(t)} \right], \quad (5.4)$$

onde $\mathbf{q} = (x, z)$ e $\mathbf{p} = (p_x, p_z)$ e está definida no espaço de fase

$$\Omega_{planar} = \{(x, z, p_x, p_z, t) \in \mathbb{R}^5 / (x, z) \neq (0, (1-\mu)\rho(t)), (x, z) \neq (0, -\mu\rho(t))\},$$

os pontos retirados de $\mathbb{R}^5$ correspondem a singularidades devido a colisão tripla: $x = 0$ e $t = 0 \pmod{2\pi\epsilon^3}$ e singularidades devido as colisões binárias: $(x, z) = (0, (1-\mu)\rho(t))$, $t \neq 0 \pmod{2\pi\epsilon^3}$ e $(x, z) = (0, -\mu\rho(t))$, $t \neq 0 \pmod{2\pi\epsilon^3}$.

Usaremos o problema planar em coordenadas giratórias, as quais são dadas pela relação

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \\ p_\xi \\ p_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \\ p_x \\ p_z \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Nas novas coordenadas a função Hamiltoniana (5.4) assume a forma

$$\hat{H}^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{p}}\|^2 - \xi p_\zeta + \zeta p_\xi - \left[\frac{\mu}{\hat{r}_1(t)} + \frac{1-\mu}{\hat{r}_2(t)} \right], \quad (5.6)$$

onde $\hat{\mathbf{q}} = (\xi, \zeta)$, $\hat{\mathbf{p}} = (p_\xi, p_\zeta)$ e

$$\begin{aligned}\hat{r}_1^2 &= \|\hat{\mathbf{q}}\|^2 - 2z z_1 + z_1^2, \\ \hat{r}_2^2 &= \|\hat{\mathbf{q}}\|^2 + 2z z_1 + z_1^2\end{aligned}$$

com $z = \xi \sin t + \zeta \cos t$. Da mesma maneira que no caso inercial, podemos expandir a função Hamiltoniana (5.6) usando polinômios de Legendre. De fato, consideremos a seguinte expressão para $\hat{r}_1$ e $\hat{r}_2$.

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 &= \|\hat{\mathbf{q}}\| \sqrt{1 - 2 \cos(\hat{S}) w + w^2}, \\ \hat{r}_2 &= \|\hat{\mathbf{q}}\| \sqrt{1 + 2 \cos(\hat{S}) w + w^2},\end{aligned}$$

onde $\cos \hat{S} = \frac{z}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} = \frac{\xi \sin t + \zeta \cos t}{\|\hat{\mathbf{q}}\|}$ e $w = \frac{z_1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} = (1-\mu) \frac{\rho(t)}{\|\hat{\mathbf{q}}\|}$. Observe que $\cos \hat{S}$ assume esta forma porque o sistema de equações (5.4) não é invariante por rotações em torno da origem. Além disso, temos que o sistema de equações associado a função Hamiltoniana (5.6) será periódico se tomarmos ϵ de maneira que $\frac{2\pi}{2\pi\epsilon^3} = \frac{p}{q}$, onde p e q são inteiros irredutíveis. Convém que trabalhemos com sistemas não-autônomos periódicos, assim imporemos que $\frac{1}{\epsilon^3} = \frac{p}{q}$, onde $q = 1$ e $p = 4k$ com k um inteiro positivo suficientemente grande. Note que, com esta escolha,

o período do sistema de equações associado a (5.6) será igual a 2π .

Então, desde que $(1 - \mu) \frac{\rho(t)}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} \leq 1$, podemos usar polinômios de Legendre para expandir as expressões $1/\hat{r}_1$ e $1/\hat{r}_2$ como série de potências em w . Assim, obtemos que

$$\frac{1}{\hat{r}_1} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(\cos \hat{S}) w^j \right]$$

e

$$\frac{1}{\hat{r}_2} = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(-\cos \hat{S}) w^j \right],$$

onde os polinômios P_j são descritos por (4.26). Portanto, a função Hamiltoniana (5.6) é descrita da seguinte maneira

$$\hat{H}^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \epsilon^2 \hat{H}_1^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) + \epsilon^4 \hat{H}_\mu^r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon), \quad (5.7)$$

onde

$$\hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} - \xi p_\zeta + \zeta p_\xi,$$

$$\hat{H}_1^\mu(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \frac{(1 - \cos E_\epsilon(t)) \cos \hat{S}}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^2} (1 - \mu)(2\mu - 1),$$

e

$$\begin{aligned} \hat{H}_\mu^r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = & -\frac{(1-\mu)^2(1-\cos E_\epsilon(t))^2}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \left(\frac{-1+3\cos^2 \hat{S}}{2} \right) + \epsilon^2 \frac{(2\mu-1)(1-\mu)^3(1-\cos E_\epsilon(t))^3}{\|\hat{\mathbf{q}}\|^4} \\ & \left(\frac{-3\cos \hat{S}+5\cos^3 \hat{S}}{2} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Note que como $\cos \hat{S} = \frac{\xi \sin t + \zeta \cos t}{\|\hat{\mathbf{q}}\|}$ e $\xi = \|\hat{\mathbf{q}}\| \cos \psi$, $\zeta = \|\hat{\mathbf{q}}\| \sin \psi$, com $\psi = g + f$ onde g é o argumento do pericentro medido a partir do eixo ξ e f é a anomalia verdadeira. Nós temos que $\cos \hat{S} = \cos \psi \sin t + \sin \psi \cos t$. Além disso, como o vetor momento angular é dado por $\mathbf{G} = (\dot{x}z - x\dot{z})\mathbf{j} = (\zeta p_\xi - \xi p_\zeta)\mathbf{j}$, nós temos que a função $\hat{H}_0$ pode ser escrita como

$$\hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} + G,$$

Podemos ainda escrever a função Hamiltoniana (5.4) como uma perturbação do problema de Kepler onde a massa μ é o parâmetro de perturbação, mas aqui, não usaremos esta abordagem. Neste caso, a função Hamiltoniana (5.4) é da forma

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mu) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \mu H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mu) + \mathcal{O}(\mu^2), \quad (5.8)$$

onde

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}, \\ H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \mu) &= -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|} - \frac{z\rho}{(z^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{((z - \rho)^2 + x^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

5.2 Simetrias

Algumas simetrias do caso espacial continuam valendo aqui. Com a mesma notação do caso espacial temos que as equações de movimento (5.3) são invariantes pelas simetrias:

$$\begin{aligned} S_1 : (x, z, p_x, p_z, t) &\rightarrow (x, -z, -p_x, p_z, -t) \\ S_2 : (x, z, p_x, p_z, t) &\rightarrow (-x, z, p_x, -p_z, -t) \\ S_3 : (x, z, p_x, p_z, t) &\rightarrow (x, z, -p_x, -p_z, -t) \\ S_4 : (x, z, p_x, p_z, t) &\rightarrow (-x, z, -p_x, p_z, t) \\ S_5 : (x, z, p_x, p_z, t) &\rightarrow (-x, -z, p_x, p_z, -t) \\ S_6 : (x, z, p_x, p_z, t) &\rightarrow (x, -z, p_x, -p_z, t) \\ S_7 : (x, z, p_x, p_z, t) &\rightarrow (-x, -z, p_x, p_z, -t) \end{aligned}$$

Observação 5.2.1. Observe que o seguinte subconjunto do espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ são fixados pelas simetrias S_1 e S_2 respectivamente:

$$L_1 = (x, 0, 0, p_x)$$

e

$$L_2 = (0, z, p_z, 0)$$

Nas coordenadas giratórias iremos chamar $\hat{S}_1$ e $\hat{S}_2$ as simetrias correspondentes a S_1 e S_2 , respectivamente, das coordenadas inerciais e, conseqüentemente, iremos denotar por $\hat{L}_1$ e $\hat{L}_2$ os subconjuntos invariantes em coordenadas giratórias correspondentes aos subconjuntos L_1 e L_2 das coordenadas inerciais, respectivamente. Obtemos então a seguinte proposição para o sistema em coordenadas giratórias associado a função Hamiltoniana (5.6).

Proposição 5.2.2. *Seja $\hat{\varphi}(t) = (\xi(t), \zeta(t), p_\xi(t), p_\zeta(t))$ uma solução do sistema associado a função Hamiltoniana (5.6) e $E(t)$ a função definida por (2.13). Então:*

1. *Se $(\zeta(0), p_\xi(0)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_1$ e $E(0) = 0$ e se $(\zeta(T/2), p_\xi(T/2)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/2) \in \hat{L}_1$, onde $(\zeta(t), p_\xi(t)) \neq (0, 0), t \leq T/2$ e $E(T/2) = k\pi$, onde k é um inteiro par, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução T -periódica. Estas soluções são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_1$ -simétricas do problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão.*
2. *Se $(\xi(0), p_\zeta(0)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_2$ e $E(0) = 0$ e se $(\xi(T/2), p_\zeta(T/2)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/2) \in \hat{L}_2$, onde $(\xi(t), p_\zeta(t)) \neq (0, 0), t \leq T/2$ e $E(T/2) = k\pi$, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução T -periódica. Estas soluções são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_2$ -simétricas do problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão.*
3. *Se $(\xi(0), p_\zeta(0)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_2$ e $E(0) = 0$ e se $(\zeta(T/4), p_\xi(T/4)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/4) \in \hat{L}_1$, onde $(\zeta(t), p_\xi(t)) \neq (0, 0), t \leq T/4$ e $E(T/4) = k\pi$, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução T -periódica. Estas soluções são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_1 - \hat{S}_2$ -simétricas ou simplesmente duplamente simétricas do problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão.*

Observação 5.2.3. 1) O item 1 (resp. item 2) diz que precisamos apenas construir a metade de uma órbita que atravessa o eixo ξ (resp. eixo ζ) ortogonalmente em dois pontos distintos para assim conseguirmos uma solução periódica simétrica com respeito ao eixo ξ (resp. eixo ζ). Veja a figura abaixo

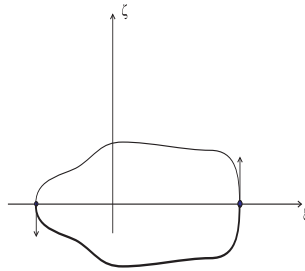


Figura 5.2: Ação da simetria $\hat{S}_1$

2) O item 3 diz que precisamos apenas construir um quarto de uma órbita que atravessa o eixo ξ e o eixo ζ ortogonalmente, assim nós conseguimos uma solução periódica simétrica com respeito aos eixos ξ e ζ .

No capítulo anterior usamos somente variáveis de Poincaré-Delaunay para obtermos órbitas periódicas simétricas para o problema perturbado. Aqui, as órbitas Keplerianas elípticas e suas órbitas continuadas serão obtidas usando as variáveis de Delaunay, a qual, como falamos, são a primeira escolha quando se quer continuar órbitas elípticas. Desta maneira, as introduzimos abaixo

$$\begin{aligned} \overline{Q}_1 &= l, & \overline{P}_1 &= L, \\ \overline{Q}_2 &= g, & \overline{P}_2 &= G, \end{aligned} \tag{5.9}$$

onde l, g, L e G são as definidas no capítulo anterior. Estas variáveis, as quais são chamadas de variáveis de Delaunay, são definidas sobre um domínio elíptico do problema de Kepler. O domínio elíptico é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^6$, o qual é preenchido com soluções elípticas do problema de Kepler. Estas variáveis não são válidas em vizinhanças de órbitas circulares do problema de Kepler, visto que em órbitas circulares temos $L = G$ e desta maneira, $\bar{P}_1 = \bar{P}_2$. As coordenadas de Poincaré-Delaunay e Delaunay tornam mais fácil determinar a localização da partícula infinitesimal no espaço. Na proposição abaixo, nós damos condições suficientes para que a partícula teste esteja contida em um dos subconjuntos invariantes $\hat{L}_1$ ou $\hat{L}_2$.

Proposição 5.2.4. *Seja $\mathbf{Q} = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$, $\mathbf{P} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ as variáveis de Delaunay definidas em (5.9). O subconjunto de $\mathbb{R}^4$:*

(i) $\hat{L}_1 : \bar{Q}_1 = 0 \pmod{\pi}, \quad \bar{Q}_2 = \pmod{\pi}$, *nos dão pontos sobre o subconjunto invariante L_1 ou $\hat{L}_1$.*

(ii) $\hat{L}_2 : \bar{Q}_1 = 0 \pmod{\pi}, \quad \bar{Q}_2 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, *nos dão pontos sobre o subconjunto invariante L_2 ou $\hat{L}_2$.*

5.3 Existência de soluções periódicas usando simetrias

Nesta seção, mostraremos a existência de soluções periódicas para o *problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão*, as quais são obtidas usando simetrias. Com as simetrias S_1 e S_2 dadas acima, podemos classificar as soluções continuadas em três tipos: soluções S_1 -simétrica, S_2 -simétrica e duplamente simétrica ($S_2 - S_1$ -simétrica). Veremos que as órbitas periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares podem ser obtidas a partir do caso espacial, desta maneira, para este caso, utilizaremos as equações de movimento que usamos no caso espacial quando continuamos órbitas Keplerianas circulares. Com relação as órbitas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas, trabalharemos com as equações de movimento descritas em coordenadas giratórias e com as variáveis de Delaunay, que, neste caso, os cálculos foram possíveis e viáveis. Desta maneira, considere a função Hamiltoniana (5.7), para $\mu = 1/2$,

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \epsilon^4 \hat{H}_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{H}_r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) \quad (5.10)$$

onde

$$\hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) = \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} - \xi p_\zeta + \zeta p_\xi,$$

$$\hat{H}_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = -\frac{(1 - \cos E_\epsilon(t))^2}{8\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} \left(\frac{-1 + 3 \cos^2 \hat{S}}{2} \right),$$

e

$$\hat{H}_r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \frac{(1 - \cos E_\epsilon(t))^4}{16\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \hat{S} + \frac{35}{8} \cos^4 \hat{S} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4).$$

E, escrevendo (5.10) nas variáveis de Delaunay, descritas em (5.9), obtemos

$$\hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon^4 \hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon), \quad (5.11)$$

onde $\mathbf{Q} = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$, $\mathbf{P} = (\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ e

$$\hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = -\frac{1}{2\bar{P}_1^2} + \bar{P}_2,$$

$$\hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \frac{1}{8\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 \left(\frac{-1 + 3 \cos^2 \hat{S}}{2} \right),$$

$$\hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -\frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} \left(\frac{3}{8} - \frac{15}{4} \cos^2 \hat{S} + \frac{35}{8} \cos^4 \hat{S} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

cujas equações de movimento são

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{F}(\mathbf{Z}) = \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^4 \hat{\mathbf{F}}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{\mathbf{F}}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon), \quad (5.12)$$

onde $\mathbf{Z} = (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2, \overline{P}_1, \overline{P}_2)$,

$$\hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) = (\overline{P}_1^{-3}, 1, 0, 0)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \overline{P}_1}, \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \overline{P}_2}, -\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \overline{Q}_1}, -\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \overline{Q}_2} \right)$$

e, finalmente

$$\hat{\mathbf{F}}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \overline{P}_1}, \frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \overline{P}_2}, -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \overline{Q}_1}, -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \overline{Q}_2} \right).$$

Note que o sistema (5.12) é não autônomo e 2π -periódico, desde que $\epsilon^3 = (4k)^{-1}$ com k um inteiro suficientemente grande. Nas expressões das funções $\hat{H}_1$, $\hat{H}_r$ acima, denotamos $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ por $\hat{\mathbf{q}}$, analogamente para $\cos \hat{S}$. Além disso,

Lema 5.3.1. *As expressões de $\|\hat{\mathbf{q}}\|$ e $\cos \hat{S}$ nas variáveis de Delaunay são*

$$\cos \hat{S} = \cos \psi \sin t + \sin \psi \cos t$$

e

$$\|\hat{\mathbf{q}}\| = \overline{P}_1^2 \left(1 - e \cos \overline{Q}_1 + [e \sin \overline{Q}_1]^2 \right),$$

onde

$$e = \frac{\sqrt{\overline{P}_1^2 - \overline{P}_2^2}}{\overline{P}_1},$$

$G = \overline{P}_2$ e ψ é o ângulo dado por $\psi = g + f$. O ângulo ψ nestas variáveis assume a forma

$$\begin{aligned} \psi &= \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 + 2 \left[\frac{\sqrt{\overline{P}_1^2 - \overline{P}_2^2}}{\overline{P}_1} \sin \overline{Q}_1 + \frac{\overline{P}_1^2 - \overline{P}_2^2}{\overline{P}_1^2} \cos \overline{Q}_1 \sin \overline{Q}_1 \right] + \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{\overline{P}_1^2 - \overline{P}_2^2}{\overline{P}_1^2} \cos \overline{Q}_1 \sin \overline{Q}_1 - \frac{(\overline{P}_1^2 - \overline{P}_2^2)^{3/2}}{\overline{P}_1^3} \sin^3 \overline{Q}_1 + \right. \\ &\left. \frac{(\overline{P}_1^2 - \overline{P}_2^2)^{3/2}}{\overline{P}_1^3} \sin \overline{Q}_1 \cos^2 \overline{Q}_1 - \frac{(\overline{P}_1^2 - \overline{P}_2^2)^2}{\overline{P}_1^4} \sin^3 \overline{Q}_1 \cos \overline{Q}_1 \right) \end{aligned}$$

Demonstração: A prova deste Lema é semelhante a prova do Lema 4.8.1. ■

E, mais precisamente, temos as seguintes expressões em série de potências

Lema 5.3.2. *A expressão de $\|\hat{\mathbf{q}}\|$ e ψ na variáveis de Delaunay (5.9), obtidas como série de potências em $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ perto de $\overline{P}_1 = s^{-1/3}, \overline{P}_2 = \overline{P}_2^*$, onde $s \in \mathbb{R}$ e $\overline{P}_2^*$ é uma constante real não nula diferente de $s^{-1/3}$ são dadas ,*

respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\|\hat{\mathbf{q}}\| &= s^{-2/3} + (s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin^2 \bar{Q}_1 - s^{-1/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \cos \bar{Q}_1 \\
&+ \left(2s^{-1/3} - \left(\frac{s^{-2/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} + \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \right) \cos \bar{Q}_1 + 2s^{-1/3} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_1 - s^{-1/3}) \\
&+ \left(\frac{s^{-1/3} \bar{P}_2^*}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \cos \bar{Q}_1 - 2\bar{P}_2^* \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_2 - \bar{P}_2^*) \\
&+ \left(\left(-\frac{3s^{-1/3}}{2\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} + \frac{s^{-1}}{2(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)^{3/2}} \right) \cos \bar{Q}_1 + 1 + \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_1 - s^{-1/3})^2 \\
&+ \left(-\frac{s^{-2/3} \bar{P}_2^*}{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)^{3/2}} + \frac{\bar{P}_2^*}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \right) \cos \bar{Q}_1 (\bar{P}_1 - s^{-1/3}) (\bar{P}_2 - \bar{P}_2^*) \\
&+ \left(\left(\frac{s^{-1/3}}{2\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} + \frac{s^{-1/3} (\bar{P}_2^*)^2}{2(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)^{3/2}} \right) \cos \bar{Q}_1 - \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_2 - \bar{P}_2^*)^2 + \mathcal{O}(\|X\|^3),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\psi &= \bar{Q}_2 + \bar{Q}_1 + \frac{2\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \sin \bar{Q}_1}{s^{-1/3}} + \frac{2(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1}{s^{-2/3}} \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \sin \bar{Q}_1}{s^{-1/3}} + \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1}{s^{-2/3}} \right) \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \cos \bar{Q}_1}{s^{-1/3}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin^2 \bar{Q}_1}{s^{-2/3}} \right) + \left[\frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{4(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-1}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \left(\frac{(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \cos \bar{Q}_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-1}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-1}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \cos \bar{Q}_1 - \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) \right] (\bar{P}_1 - s^{-1/3}) \\
&+ \left[-\frac{2(\bar{P}_2^*)^2 s^{1/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 - \frac{4(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \left(-\frac{(\bar{P}_2^*)^2 s^{1/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \cos \bar{Q}_1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \cos \bar{Q}_1 - \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) \right. \\
&\quad \left. \left(-\frac{(\bar{P}_2^*)^2 s^{1/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 - \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \right] (\bar{P}_2 - (\bar{P}_2)^*) + \mathcal{O}(\|\mathbf{X}\|^2),
\end{aligned}$$

onde $X = (\Delta P_1, \Delta P_2) = (\bar{P}_1 - s^{-1/3}, \bar{P}_2 - \bar{P}_2^*)$.

Demonstração: Veja Apêndice C. ■

Observação 5.3.3. Escolhemos escrever as expressões de $\|\hat{\mathbf{q}}\|$ e ψ em série de potências em torno de $\bar{P}_1 = s^{-1/3}$, $\bar{P}_2 = \bar{P}_2^*$, pois, mais adiante, nos casos de continuação de órbitas elípticas trabalharemos em vizinhanças de órbitas periódicas Keplerianas $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$, cuja condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ possui $\bar{P}_1 = s^{-1/3}$, $\bar{P}_2 = \bar{P}_2^*$. As expansões acima são convergentes numa vizinhança pequena de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$, pois todas as funções envolvidas são analíticas.

Um lema análogo ao Lema 4.9.5 pode ser obtido aqui para o sistema (5.12), e de modo semelhante ao sistema (4.55), temos que este sistema de equações satisfaz as hipóteses dos Lemas 3.3.1 e 3.3.2. Portanto, todas as estimativas destes lemas são válidas aqui.

5.3.1 Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares

Primeiramente, queremos observar que neste subproblema, i.e., *problema restrito planar elíptico dos três corpos com colisão* (plano xz somente), com $\mu = 1/2$, podemos obter do caso espacial teoremas similares aos Teoremas 4.9.9, 4.9.18 e 4.9.25.

Continuação de soluções periódicas duplamente simétricas

Temos a seguinte versão para o Teorema 4.9.9 para o caso planar (plano xz):

Teorema 5.3.4. *Considere as equações de movimento (4.55) e os primários, com massas iguais a 1/2, movendo-se em uma órbita elíptica com colisão, i.e., com momento angular igual a zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 - \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = k^{-\frac{1}{3}}$, para k um inteiro positivo suficientemente grande. Então, existe uma quantidade enumerável de famílias de condições iniciais para a partícula infinitesimal, tal que seu movimento é uma órbita periódica duplamente simétrica no plano xz de período $8\pi\tilde{s}$, ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), próxima a uma órbita Kepleriana circular neste mesmo plano, cujo período é também $8\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: Para provar este teorema é suficiente tomar condições iniciais convenientes. De fato, tomamos a seguinte condição inicial

$$\mathbf{z}_0^* = (Q_1^*, Q_2^*, Q_3^*, P_1^*, P_2^*, P_3^*) = ((m + \frac{1}{2})\pi, 0, j\pi, s^{-1/3}, 0, 0) \text{ com } E(0) = 0,$$

onde $s = (\tilde{m} + 1/2)/(2\tilde{s})$ e m, j são inteiros. Então, desde que $P_3^* = 0$, do Lema 4.9 obtém-se que o fluxo do sistema (4.55) é invariante com respeito às variáveis Q_3 e P_3 . Desta forma, segue dos mesmos argumentos do caso espacial, a existência de soluções circulares duplamente simétricas do problema de Kepler (4.58), as quais estão contidas no plano xz , e são dadas por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) \equiv (Q_1^{(0)}(t), Q_2^{(0)}(t), Q_3^{(0)}(t), P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t), P_3^{(0)}(t)) = (st + (m + \frac{1}{2})\pi, 0, j\pi, s^{-1/3}, 0, 0). \quad (5.13)$$

Seja

$$\mathbf{z}_0 = \left((m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, 0 \right).$$

Usando os argumentos acima, esta condição inicial $\mathbf{z}_0$, nos dá a seguinte solução do problema de Kepler (4.58)

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, 0),$$

onde $s = (\tilde{m} + 1/2)/(2\tilde{s})$, e assim segue que as soluções do sistema (4.55) com condição inicial $\mathbf{z}_0$ são,

$$\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)),$$

onde

$$\begin{aligned}
Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\
Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\
Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= j\pi, \\
P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\
P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 + \epsilon^4 = P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\
P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Note que de fato a equação com respeito a Q_3 é igual à $j\pi$ para todo t , e com respeito à P_3 é identicamente nula, basta observar as equações (4.9). Desde que a variável P_3 nos dá a inclinação do plano orbital e a variável Q_3 a longitude do nodo ascendente medido a partir do eixo x , concluímos que a solução continuada $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ está sobre o plano xz . Procedendo de maneira similar ao caso espacial, obtemos as equações de periodicidade

$$\begin{aligned}
\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}2\pi\tilde{s} - (\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\
\phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

onde $\mathbf{X} = (\Delta Q_2, \Delta P_1)$ e

$$\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_1(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_2(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) \text{ com } T/4 = 2\pi\tilde{s}, \quad \tilde{s}, \tilde{m} \in \mathbb{N}.$$

Claramente, nós vemos que $\phi(\mathbf{0}, 0) = 0$, onde $\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = (\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon))$. A matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-4}2\pi\tilde{s} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ 1 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix}.$$

Estas são as únicas diferenças com o caso espacial, assim o restante da prova segue como no caso espacial. ■

Para este caso são válidas as correspondentes versões do Corolário 4.9.11 e do Teorema 6.7.9.

Continuação de soluções periódicas S_2 -simétricas

Com respeito a continuação de órbitas S_2 -simétricas temos a seguinte versão do Teorema 4.9.18 para o caso planar

Teorema 5.3.5. *Considere as equações de movimento (4.55) e os primários com massas iguais a $1/2$, movendo-se em uma órbita elíptica com colisão, i.e., com momento angular igual a zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 - \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = k^{-\frac{1}{3}}$ onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, então existe uma quantidade enumerável de famílias de condições iniciais para a partícula infinitesimal tal que seu movimento é uma órbita periódica S_2 -simétrica de período $4\pi\tilde{s}$, ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), no plano xz , próxima a uma órbita Kepleriana circular no mesmo plano, cujo período é também $4\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: Para provar este teorema é suficiente mais uma vez tomar condições iniciais convenientes. Tomemos

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, 0, j\pi, s^{-1/3}, 0, 0) \text{ with } E(0) = 0,$$

onde $s = (\tilde{m})/(2\tilde{s})$, com $\tilde{s}, \tilde{m} \in \mathbb{N}$ e m, j inteiros. Desde que $P_3^* = 0$, do Lema 4.9 segue que o fluxo do sistema (4.55) é invariante com respeito às variáveis Q_3 e P_3 . Procedendo de modo análogo ao caso espacial, obtemos soluções circulares S_2 -simétricas do problema de Kepler (4.58), sobre o plano xz , dadas por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) \equiv (Q_1^{(0)}(t), Q_2^{(0)}(t), Q_3^{(0)}(t), P_1^{(0)}(t), P_2^{(0)}(t), P_3^{(0)}(t)) = (st + (m + \frac{1}{2})\pi, 0, j\pi, s^{-1/3}, 0, 0). \tag{5.16}$$

Seja

$$\mathbf{z}_0 = \left((m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, 0 \right).$$

Usando os argumentos acima, esta condição inicial $\mathbf{z}_0$, nos dá as seguintes soluções do problema de Kepler (4.58)

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, j\pi, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0, 0),$$

onde $s = \tilde{m}/2\tilde{s}$. Observe que as equações com respeito à Q_3 e P_3 são dadas por (4.9) e desta forma obtemos as seguintes soluções do sistema (4.55)

$$\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = (Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon), P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)),$$

onde

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta Q_2 + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ Q_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= j\pi, \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 + \epsilon^4 = P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ P_3(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &\equiv 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Desde que a variável P_3 nos dá a inclinação do plano orbital e a variável Q_3 é a longitude do nodo ascendente medido a partir do eixo x , concluímos que a solução continuada $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ está sobre o plano xz . Procedendo de maneira similar ao caso espacial, obtemos as equações de periodicidade

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}2\pi\tilde{s} - \tilde{m}\pi + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) &= P_2^{(1)}(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0, \end{aligned} \tag{5.18}$$

onde $\mathbf{X} = (\Delta Q_2, \Delta P_1)$ e

$$\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon) = Q_1(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon) = P_2(\frac{T}{2}, \mathbf{z}_0, \epsilon) \text{ com } T/2 = 2\pi\tilde{s}, \quad \tilde{s}, \tilde{m} \in \mathbb{N}.$$

Claramente, vemos que $\phi(\mathbf{0}, 0) = 0$, onde $\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = (\phi_1(\mathbf{X}, \epsilon), \phi_2(\mathbf{X}, \epsilon))$. A matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -6(s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-4}\pi\tilde{s} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix}.$$

Estas são as únicas diferenças com respeito ao caso espacial, desta forma o restante da prova segue como no caso espacial. ■

Continuação de soluções periódicas S_1 -simétricas

Com respeito à continuação de soluções S_1 -simétricas obtemos a seguinte versão do Teorema 4.9.25 para o caso planar

Teorema 5.3.6. *Considere as equações de movimento (4.55) e os primários com massas iguais a $1/2$, movendo-se em uma órbita elíptica com colisão, i.e., com momento angular zero e energia total negativa dada por $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = k^{-\frac{1}{3}}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem famílias enumeráveis de condições iniciais para a partícula infinitesimal tal que seu movimento é uma solução periódica S_1 -simétrica de período $4\pi\tilde{s}$, ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$) no plano xz , próxima a uma órbita Kepleriana circular no plano xz cujo período é também $4\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: A prova segue de forma semelhante aos casos anteriores. ■

5.3.2 Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas

Nesta seção provaremos a existência de soluções duplamente simétricas (ou seja com relação as duas simetrias $\hat{S}_1$ e $\hat{S}_2$), $\hat{S}_2$ -simétricas e $\hat{S}_1$ -simétricas como continuação de convenientes órbitas elípticas do problema de Kepler. Descreveremos as equações de movimento em coordenadas giratórias e nas variáveis de Delaunay. Se continuássemos usando a escolha anterior, i.e., as equações de movimento em coordenadas inerciais e nas variáveis de Poincaré-Delaunay (Q_1, Q_2, P_1, P_2) , definidas em (4.37), os cálculos ficariam muito complicados e seria inviável obter tais órbitas. Se usássemos coordenadas inerciais com as variáveis de Delaunay, os cálculos também tornam-se inviáveis. Segue destes argumentos nossa escolha.

Consideremos as equações de movimento dadas em (5.12), as quais podem ser vistas como uma perturbação do problema de Kepler

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}), \quad (5.19)$$

onde

$$\hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) = (\bar{P}_1^{-3}, 1, 0, 0).$$

Continuação de soluções periódicas duplamente simétricas

Seja $\mathbf{z}_0^*$ uma condição inicial tal que $\mathbf{z}_0^* \in \hat{\mathcal{L}}_2$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$, desta maneira tomemos $\mathbf{z}_0^*$ da seguinte forma

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, \bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*),$$

onde m e i são inteiros que, sem perda de generalidade, podem ser tomados como sendo 0 ou 1, e $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$ são constantes a serem determinadas. A solução do problema de Kepler (5.19) com esta condição inicial é dada por $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) = (\bar{Q}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*), \bar{Q}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*), \bar{P}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*), \bar{P}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*))$, onde

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= (\bar{P}_1^*)^{-3}t + m\pi, & \bar{P}_1^{(0)}(t) &= \bar{P}_1^*, \\ \bar{Q}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= t + (\frac{1}{2} + i)\pi, & \bar{P}_2^{(0)}(t) &= \bar{P}_2^*. \end{aligned}$$

Pela Proposição 5.2.2, item 3 e Proposição 5.2.4 item (i), estas órbitas elípticas serão órbitas duplamente simétricas do problema de Kepler(5.19), se pudermos resolver o seguinte conjunto de equações a duas incógnitas:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) &= (\bar{P}_1^*)^{-3} \frac{T}{4} + m\pi = (m + \tilde{m})\pi \\ \bar{Q}_2^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) &= T/4 + (\frac{1}{2} + i)\pi = (1 + i + j)\pi \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde $\tilde{m}, j$ são inteiros. A segunda equação é satisfeita tomando

$$\frac{T}{4} = (j + \frac{1}{2})\pi, \quad (5.21)$$

e substituindo (5.21) na primeira equação de (5.20), segue que

$$(\bar{P}_1^*)^{-3} = \frac{\tilde{m}}{j + 1/2}, \quad (5.22)$$

Observe que temos algumas restrições com relação à $\bar{P}_2^*$, isto é, $\bar{P}_2^* \neq \bar{P}_1^*$, porque a solução deve ser elíptica e não circular, e como $\bar{P}_2$ é o momento angular $\bar{P}_2^*$ precisa também ser não nula. Pela Observação 4.6.4, devemos ter também que $E(0) = 0$ e $E(T/4) = k\pi$, onde k é um inteiro par conveniente, desta forma precisamos tomar

$$T = 4k\pi\epsilon^3. \quad (5.23)$$

Da comparação entre as equações (5.21) e (5.23) tem-se que

$$\hat{k} = \frac{j+1/2}{\epsilon^3} = 4k(j+1/2),$$

pois escolhemos ϵ anteriormente tal que $\epsilon^3 = (4k)^{-1}$, com k um inteiro positivo suficientemente grande. Portanto, a condição $\hat{k}$ um inteiro par é satisfeita. Assim,

$$\mathbf{Z}^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) = \left((m + \tilde{m})\pi, (i + j + 1)\pi, \left(\frac{\tilde{m}}{j+1/2} \right)^{-1/3}, \bar{P}_2^* \right),$$

onde $\bar{P}_2^*$ é uma constante real diferente de $\bar{P}_1^* = (\tilde{m}/(j+1/2))^{-1/3}$ está contido, por construção, em $\hat{\mathcal{L}}_1$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k} = 2k(2j+1)$. Portanto, a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita periódica elíptica duplamente simétrica do problema de Kepler com período $T = 2(2j+1)\pi$, contida no plano xz .

Agora analisemos o sistema perturbado (5.12). Primeiramente, tomamos condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = \left(m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, \left(\frac{\tilde{m}}{j+1/2} \right)^{-1/3} + \Delta\bar{P}_1, \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2 \right) = \mathbf{z}_0^* + (0, 0, \Delta\bar{P}_1, \Delta\bar{P}_2),$$

tal que as soluções $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (5.12), para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma solução periódica duplamente simétrica obtida como continuação de uma órbita Kepleriana elíptica. Pelo Lema 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (5.12) é dada por

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3}t + m\pi & + \epsilon^4 \bar{Q}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \bar{Q}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= t + (i + \frac{1}{2})\pi & + \epsilon^4 \bar{Q}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \bar{P}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1 & + \epsilon^4 \bar{P}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \bar{P}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2 & + \epsilon^4 \bar{P}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde $\bar{P}_1^*$ é definida em (5.22). Definamos $\phi(\mathbf{X}, P) = (\phi_1(\mathbf{X}, P), \phi_2(\mathbf{X}, P)) = (\bar{Q}_1(\mathbf{X}, P) - (\tilde{m} + m)\pi, \bar{Q}_2(\mathbf{X}, P) - (i + j + 1)\pi) = (\bar{Q}_1(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (\tilde{m} + m)\pi, \bar{Q}_2(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (i + j + \frac{1}{2})\pi)$, onde $\mathbf{X} = (T, \Delta\bar{P}_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta\bar{P}_2)$. Pela Proposição 5.2.2, item 3 e Proposição 5.2.4 item (ii), para obter órbitas duplamente simétricas do sistema (5.12), é suficiente resolvermos as seguintes equações de periodicidade,

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{4} - \tilde{m}\pi & + \epsilon^4 [\bar{Q}_1^{(1)}(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= T/4 - (j + 1/2)\pi & + \epsilon^4 [\bar{Q}_2^{(1)}(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

É claro que podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ para o caso $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ definindo

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{4} + (\tilde{m} + \frac{1}{2}) \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= T/4 - (j + 1/2)\pi. \end{aligned}$$

Portanto, $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = 0$, onde $\mathbf{X}_0 = (2(2j+1)\pi, 0)$. Neste caso, a matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-4} \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{1}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $\bar{P}_1^* = (\tilde{m}/(j+1/2))^{-1/3}$. Então, segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{\tilde{m}}{j+1/2} \right)^{-3} & 6 \left(\frac{\tilde{m}}{j+1/2} \right)^{4/3} (2j+1) \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é não nulo pelas condições dadas. Portanto, segue que $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon)$ é inversível. Um resultado similar ao Lema 4.9.8 do capítulo anterior é válido aqui, desta maneira podemos aplicar o Teorema de Arenstorff para resolver o sistema de equações (5.25).

Teorema 5.3.7. *Considere as equações de movimento (5.12) para o problema restrito dos três corpos planar elíptico com colisão, onde os primários movem-se em uma órbita elíptica com colisão com energia $\mathcal{E} = 1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (4k)^{-1}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem condições iniciais para a partícula infinitesimal tal que seu movimento é uma solução periódica duplamente simétrica de período próxima a $2(2j+1)\pi$ ($j \in \mathbb{Z}$), próxima a uma órbita Kepleriana no plano xz cujo período é igual a $2(2j+1)\pi$.*

Demonstração: Primeiro observe que sobre as hipóteses do teorema nós podemos aplicar o Teorema de Arenstorf às equações de periodicidades (5.25) para ϵ em um intervalo suficientemente pequeno com $\mathbf{X} = (T, \Delta \bar{P}_1)$ e $P = (\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$, (veja a prova do Lema 3.2.2). Portanto, existem famílias $\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, j, i, \bar{P}_2^*}(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ (indexadas por $m, \tilde{m}, j, i, \bar{P}_2^*$) a dois parâmetros $(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ de condições iniciais tais que $\phi(\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, j, i, \bar{P}_2^*}(\epsilon, \Delta \bar{P}_2), \epsilon, \Delta \bar{P}_2) = 0$. Para obtermos soluções periódicas do problema (5.12), as condições em (5.25) precisam ser satisfeitas simultaneamente com a condição de comensurabilidade $T/2\pi \in \mathbb{Q}$, onde 2π é o período do sistema de equações de movimento (5.12). Desde que $T = T(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ e $\epsilon^3 = (4k)^{-1}$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ e $\Delta \bar{P}_2 \in \mathbb{R}$ tal que $T((4k)^{-1/3}, \Delta \bar{P}_2)/2\pi \in \mathbb{Q}$ (veja Observação 3.2.1). Portanto, para $\epsilon = (4k)^{-1/3}$, onde k é um inteiro positivo suficientemente grande e $\Delta \bar{P}_2 \in \mathbb{R}$ nós temos algumas condições iniciais que dão origem a soluções de (5.12) que são $T = T(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ periódicas e duplamente simétricas. ■

Observação 5.3.8. Considerações similares as da Observação 6.7.6 são válidas neste caso assim como resultados análogos aos do Corolário 6.7.7, e do Teorema 6.7.9.

Continuação de soluções periódicas $\hat{S}_2$ -simétricas

Provaremos a existência de soluções periódicas $\hat{S}_2$ -simétricas para o sistema perturbado (5.12) obtidas como continuação de certas órbitas Keplerianas elípticas. Novamente o primeiro argumento é obter soluções $\hat{S}_2$ -simétricas elípticas do problema de Kepler. Assim, consideremos soluções com condições iniciais $\mathbf{z}_0^* \in \hat{\mathcal{L}}_2$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$, com

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, \bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*),$$

onde m, i são inteiros que podemos tomar, sem perda de generalidade como sendo 0 ou 1 e $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$ são constantes a serem determinadas. Pela Proposição 5.2.2, item 2 e Proposição 5.2.4 item (ii), podemos obter órbitas elípticas $\hat{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler (5.19), se pudermos resolver as seguintes equações de periodicidade

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)}(T/2) &= (\bar{P}_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi = (m + \tilde{m})\pi \\ \bar{Q}_2^{(0)}(T/2) &= T/2 + (\frac{1}{2} + i)\pi = (i + j + \frac{1}{2})\pi \end{aligned} \quad (5.26)$$

onde $\tilde{m}, j$ são inteiros. A segunda equação é satisfeita por

$$\frac{T}{2} = j\pi, \quad (5.27)$$

Substituindo (5.27) na primeira equação de (5.26), segue que

$$(\bar{P}_1^*)^{-3} = \frac{\tilde{m}}{j}, \quad (5.28)$$

Pela Observação 4.6.4, precisamos ter $E(0) = 0$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par conveniente e assim precisamos tomar

$$T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (5.29)$$

Então, combinado (5.27) e (5.29), temos

$$\hat{k} = \frac{j}{\epsilon^3} = 4kj.$$

Portanto, $\hat{k}$ será um inteiro par e então, temos que

$$\mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) = \left((m + \tilde{m})\pi, (i + j + \frac{1}{2})\pi, \left(\frac{\tilde{m}}{j} \right)^{-1/3}, \bar{P}_2^* \right),$$

onde $\bar{P}_2^*$ é um número real positivo diferente de $\bar{P}_1^* = (\tilde{m}/j)^{-1/3}$, por construção, está contido em $\hat{\mathcal{L}}_2$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k} = 2kj$. Desta forma, a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita elíptica $\hat{S}_2$ -simétrica com período $T = 2j\pi$ contida no plano xz .

Para o sistema perturbado, iremos considerar condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$, da forma

$$\mathbf{z}_0 = (m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, (\tilde{m}/j)^{-1/3} + \Delta\bar{P}_1, \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2) = \mathbf{z}_0^* + (0, 0, \Delta\bar{P}_1, \Delta\bar{P}_2),$$

em que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$ de (5.12), para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma órbita $\hat{S}_2$ -simétrica obtida por continuação de uma órbita Kepleriana elíptica. Novamente, pelo Lema 3.3.1 temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (5.12) é dada por

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3}t + m\pi + \epsilon^4 \bar{Q}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \bar{Q}_2(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= t + (i + \frac{1}{2})\pi + \epsilon^4 \bar{Q}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \bar{P}_1(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= \bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1 + \epsilon^4 \bar{P}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \bar{P}_2(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2 + \epsilon^4 \bar{P}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \end{aligned} \quad (5.30)$$

onde $\bar{P}_1^*$ é dada em (5.28). Seja $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = (\bar{Q}_1(T/2, \Delta\bar{P}_1, \epsilon, \Delta\bar{P}_2) - (\tilde{m} + m)\pi, \bar{Q}_2(T/2, \Delta\bar{P}_1, \epsilon, \Delta\bar{P}_2) - (i + j + \frac{1}{2})\pi)$, onde $\mathbf{X} = (T, \Delta\bar{P}_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta\bar{P}_2)$. Pela Proposição 5.2.2, item 2 e Proposição 5.2.4 item (ii), para obter uma órbita $\hat{S}_2$ -simétrica do sistema (5.12), é suficiente resolver

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi + \epsilon^4 [\bar{Q}_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= T/2 - j\pi + \epsilon^4 [\bar{Q}_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] = 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Pelas mesmas razões dos casos anteriores (veja Observação 6.7.4) podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ ao caso $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ definindo

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= T/2 - j\pi. \end{aligned}$$

Portanto, é claro que $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = 0$, onde $\mathbf{X}_0 = (2j\pi, 0)$. Aqui, nós temos que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-4} \frac{T}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $\bar{P}_1^* = (\tilde{m}/j)^{-1/3}$. Então segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0) = 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\tilde{m}}{j} & 3\pi(\tilde{m})^{4/3} j^{-1/3} \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

cujo determinante é não nulo. É válido aqui um resultado semelhante ao Lema 4.9.8. Desta maneira, podemos aplicar o Teorema de Arenstorf para resolver o sistema de equações (5.31) usando os mesmos argumentos do Teorema 5.3.7.

Teorema 5.3.9. *Considere as equações de movimento (5.12) do problema restrito dos três corpos planar elíptico com colisão, onde os primários movem-se em uma órbita elíptica com colisão com energia $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (4k)^{-1/3}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem condições iniciais para a partícula infinitesimal tais que sua trajetória é uma órbita periódica $\hat{S}_2$ -simétrica de período próximo à $2j\pi$ ($j \in \mathbb{N}$), próxima a uma órbita Kepleriana elíptica contida no plano xz cujo período é igual a $2j\pi$.*

Observação 5.3.10. 1-Fatos similares aos da Observação 6.7.6 são válidos aqui, assim como resultados análogos aos do Corolário 6.7.7 e Teorema 6.7.9.

Continuação de soluções periódicas $\hat{S}_1$ -simétricas

Caracterizaremos as soluções do problema de Kepler (5.19) com condições iniciais $\mathbf{z}_0^* \in \hat{\mathcal{L}}_1$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$,

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, i\pi, \bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*),$$

onde m, i são inteiros que podemos tomar sem perda de generalidade como sendo 0 ou 1, e $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$ são constantes a serem determinadas. Estas soluções são da forma

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= (\bar{P}_1^*)^{-3}t + m\pi, & \bar{P}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= \bar{P}_1^*, \\ \bar{Q}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= t + i\pi, & \bar{P}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= \bar{P}_2^*.\end{aligned}$$

Pela Proposição 5.2.2, item 1 e Proposição 5.2.4 item (i), podemos obter uma órbita periódica S_1 -simétrica elíptica do problema de Kepler se pudermos resolver as equações abaixo, no tempo $t = T/2$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) &= (\bar{P}_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi = (m + \tilde{m})\pi, \\ \bar{Q}_2^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) &= T/2 + i\pi = (i + j)\pi,\end{aligned}\tag{5.33}$$

onde $\tilde{m}, j$ são inteiros. A segunda equação é satisfeita por

$$\frac{T}{2} = j\pi,\tag{5.34}$$

Substituindo (5.34) na primeira equação de (5.33), segue que

$$(\bar{P}_1^*)^{-3} = \frac{\tilde{m}}{j},\tag{5.35}$$

Observe que nós temos liberdade em escolher $\bar{P}_2^*$, porque temos somente as restrições $\bar{P}_2^* \neq \bar{P}_1^*$ e como $\bar{P}_2$ é o momento angular, consideramos $\bar{P}_2^* \neq 0$. Da Observação 4.6.4, queremos também que $E(0) = 0$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par suficientemente grande, e desta forma precisamos tomar

$$T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3.\tag{5.36}$$

Então, combinando (5.34) e (5.36), nós temos que

$$\hat{k} = \frac{j}{\epsilon^3} = 4kj.$$

Logo, temos que $\hat{k}$ é um inteiro par e então,

$$\mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) = \left((m + \tilde{m})\pi, (i + j)\pi, \left(\frac{\tilde{m}}{j} \right)^{-1/3}, \bar{P}_2^* \right),$$

onde $\bar{P}_2^*$ é um real positivo tal que $\bar{P}_2^* \neq \bar{P}_1^* = (\tilde{m}/j)^{-1/3}$. Note que, por construção, $\mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*)$ pertence à $\mathcal{L}_1$ e além disso $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k} = 2kj$. Portanto, a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita periódica $\hat{S}_1$ -simétrica elíptica com período $T = 2j\pi$, contida no plano xz .

Agora procedemos com o sistema perturbado. Consideremos condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$, do tipo

$$\mathbf{z}_0 = (m\pi, i\pi, (\tilde{m}/j)^{-1/3} + \Delta\bar{P}_1, \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2) = \mathbf{z}_0^* + (0, 0, \Delta\bar{P}_1, \Delta\bar{P}_2),$$

de forma que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (5.12), para $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma órbita periódica $\hat{S}_1$ -simétrica obtida como continuação de uma órbita Kepleriana elíptica.

Pelo Lema 3.3.1 temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (5.12) é dada por

$$\begin{aligned}\bar{Q}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3}t + m\pi & + \epsilon^4 \bar{Q}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{Q}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= t + i\pi & + \epsilon^4 \bar{Q}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{P}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1 & + \epsilon^4 \bar{P}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{P}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2 & + \epsilon^4 \bar{P}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8),\end{aligned}\tag{5.37}$$

onde $\bar{P}_1^*$ é como em (6.85). Definindo, $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = (\bar{Q}_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (\tilde{m} + m)\pi, \bar{Q}_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (i + j)\pi)$, onde $\mathbf{X} = (T, \Delta\bar{P}_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta\bar{P}_2)$, e pela Proposição 5.2.2, item 1 e Proposição 5.2.4 item (i), para obter órbitas $\hat{S}_1$ -simétricas do sistema (5.12), é suficiente resolver

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi & + \epsilon^4 [\bar{Q}_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0 \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= T/2 - j\pi & + \epsilon^4 [\bar{Q}_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0.\end{aligned}\tag{5.38}$$

Pelas mesmas razões dos casos anteriores (veja Observação 6.7.4) podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ para o caso $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ definindo

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= (s^{-1/3} + \Delta \bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} + \tilde{m}\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= \frac{T}{2} + j\pi.\end{aligned}$$

Portanto, é claro que $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = 0$, onde $\mathbf{X}_0 = (2j\pi, 0)$. Verificamos que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{P}_1^* + \Delta \bar{P}_1)^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(\bar{P}_1^* + \Delta \bar{P}_1)^{-4} \frac{T}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $\bar{P}_1^* = 0 (\tilde{m}/j)^{-1/3}$. Então, segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0) = 0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\tilde{m}}{j} & 3\pi \tilde{m}^{4/3} j^{-1/3} \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é não nulo. Facilmente provamos um resultado similar ao Lema 4.9.8. Portanto, podemos aplicar o Teorema de Arenstorf para resolver o sistema de equações (5.38) de uma maneira semelhante ao Teorema 5.3.7.

Teorema 5.3.11. *Considere as equações de movimento (5.12) do problema restrito dos três corpos planar elíptico com colisão, onde os primários movem-se em uma órbita elíptica com colisão com energia $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (4k)^{-1/3}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem condições iniciais para a partícula infinitesimal tais que sua trajetória é uma solução periódica $\hat{S}_1$ -simétrica de período $2j\pi$, $j \in \mathbb{N}$, próxima a uma órbita Kepleriana elíptica no plano xz cujo período é igual a $2j\pi$.*

Consequências similares as da Observação 6.7.6 são válidas para esta simetria e podemos adaptar o Corolário 6.7.7 e o Teorema 6.7.9 para este caso.

Capítulo 6

O problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão

Neste capítulo trataremos do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão onde a partícula infinitesimal se encontra num plano que corta ortogonalmente a reta que contém os primários (eixo z). Neste problema, devido as suas simetrias, conseguimos dar uma descrição bastante completa de sua dinâmica. Em particular, provamos que se o momento angular não for nulo o fluxo é completo; provamos a existência de uma grande variedade de famílias de órbitas periódicas simétricas e, usando o shift de Bernoulli, provamos a existência de uma dinâmica caótica próxima ao infinito.

6.1 Equações de movimento

Neste subproblema assumimos que os primários com massa m_1 e m_2 estão se movendo ao longo do eixo z e que seus centros de massa estão fixados na origem. Neste caso é necessário assumir que $m_1 = m_2 = 1/2$. Seja (x, y) as coordenadas da partícula teste no plano perpendicular ao movimento dos primários (os quais estão no eixo z). Nestas coordenadas, as equações de movimento da partícula infinitesimal são

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= V_x = -\frac{x}{(x^2+y^2+\frac{\rho^2(t)}{4})^{3/2}} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= V_y = -\frac{y}{(x^2+y^2+\frac{\rho^2(t)}{4})^{3/2}}\end{aligned}\tag{6.1}$$

desde que $z_1(t) = -z_2(t)$, onde V é o potencial associado, o qual é dado por

$$V = V(x, y; t) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{\rho^2(t)}{4}}}.\tag{6.2}$$

A função Hamiltoniana associada é

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V,\tag{6.3}$$

portanto o sistema (6.1) pode ser escrito do seguinte modo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= -\frac{x}{(x^2+y^2+\frac{\rho^2(t)}{4})^{3/2}} \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= -\frac{y}{(x^2+y^2+\frac{\rho^2(t)}{4})^{3/2}},\end{aligned}\tag{6.4}$$

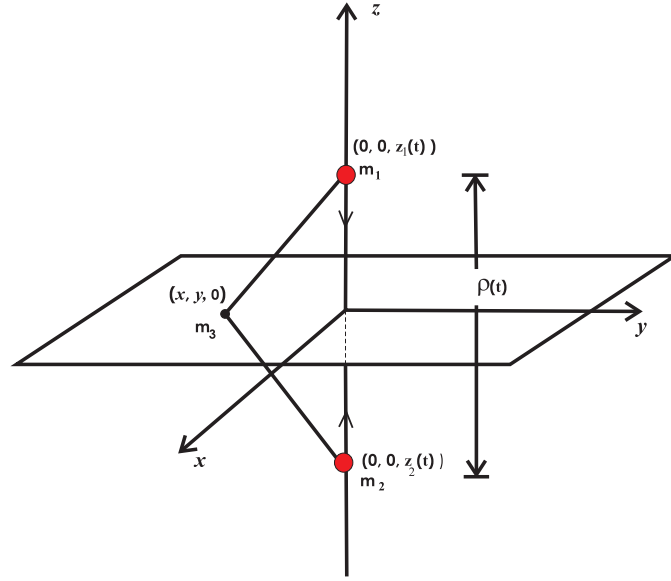


Figura 6.1: O problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.

onde $\rho(t) \equiv \rho(E(l(t))) := \rho(E(t)) = \epsilon^2 [1 - \cos(E)]$, como nós vimos no Capítulo 2. Portanto, neste caso, temos um sistema Hamiltoniano com dois graus e meio de liberdade, não autônomo e $2\pi\epsilon^3$ -periódico em t . A função Hamiltoniana é definida no espaço de fase

$$\Omega_{iso} = \{(x, y, p_x, p_y, t) \in \mathbb{R}^5 / (x, y, t) \neq (0, 0, 0 \pmod{2\pi\epsilon^3})\},$$

os pontos retirados de $\mathbb{R}^5$ correspondem a singularidades devido a colisão tripla : $x = y = 0$ e $t = 0 \pmod{2\pi\epsilon^3}$.

Proposição 6.1.1. *O momento angular c é constante ao longo das soluções do sistema (6.1).*

Demonstração: Sabemos que c é dado por $c = y\dot{x} - x\dot{y}$. Assim, segue que

$$\frac{dc}{dt} = y\ddot{x} - x\ddot{y},$$

e substituindo as expressões de $\ddot{x}$ e $\ddot{y}$ dadas por (6.1), obtemos $\frac{dc}{dt} = 0$. ■

Seja $\mathcal{R} = SO(2)$ o subgrupo de $SO(3)$ dada pela rotação ao redor do eixo z . Então, facilmente segue que

Proposição 6.1.2. *O potencial V definido por (6.2) é invariante sob o grupo $\mathcal{R}$.*

É fácil ver que os conjuntos $\{x = y, p_x = p_y\}$ são invariantes sob o fluxo definido pelo campo vetorial (6.4). Por outro lado, também é trivial que, nestes casos, o momento angular, c , é zero. Estes problemas foram estudados em [29], [1] e [2].

Uma vez que $z(t)$ depende do parâmetro ϵ , pois

$$\rho(t) = \epsilon^2 [1 - \cos E_\epsilon(t)] \quad (6.5)$$

onde $E_\epsilon(t)$ satisfaz (2.13), nós também podemos ver o potencial definido em (6.2) dependendo de (x, y, t, ϵ) , i.e.,

$$V(\mathbf{q}, t, \epsilon) = -\frac{1}{\sqrt{\|\mathbf{q}\|^2 + \epsilon^4/4 (1 - \cos(E_\epsilon(t)))^2}}, \quad (6.6)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y)$. Segue imediatamente da definição de E e V que vale aqui, uma proposição semelhante a Proposição 4.1.1.

6.2 Reduzindo a dimensão do espaço de fase

Nós sabemos que a dimensão do espaço de fase associado ao sistema (6.4) é 4, assumindo que o valor do momento angular está fixado em c para algum $c \neq 0$, podemos reduzir em duas unidades a dimensão do espaço de fase. De fato, é suficiente considerar coordenadas polares $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1$ sobre o espaço das configurações, no plano xy , tomando

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Portanto, as equações diferenciais para r e θ são

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} &= -\frac{r}{(r^2 + \frac{\rho^2(t)}{4})^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^2}{r^3}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{c}{r^2}, \end{aligned} \tag{6.7}$$

onde c é o momento angular da partícula teste com respeito à origem do plano. Note que, da segunda equação do sistema acima, temos

$$\theta(t) = \int_0^t \frac{c}{r^2(s)} ds + \theta_0 := F(t) + \theta_0. \tag{6.8}$$

O sistema (6.7) é um sistema Hamiltoniano não autônomo, cuja função Hamiltoniana é

$$H(t) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{\rho^2(t)}{4}}}, \tag{6.9}$$

onde p_r é o momento conjugado a r . Para futuras referências, nós escrevemos as equações de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= p_r, \\ \frac{dp_r}{dt} &= -\frac{r}{(r^2 + \frac{\rho^2(t)}{4})^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^2}{r^3}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Conhecendo uma solução de (6.10), $\theta(t)$ pode ser recuperado como na equação (6.8). Seja $\varphi(t) = (r(t), \dot{r}(t))$ uma solução de (6.10) do problema restrito dos três corpos isósceles elíptico reduzido com colisão para um fixado $c \neq 0$ com condições iniciais $r(0) = r_0, \dot{r}(0) = \dot{r}_0$. Para cada $\theta_0 \in \mathbb{S}^1$, a solução $\varphi(t)$ nos dá uma solução $\gamma_{\varphi, \theta_0, c}(t) = (r(t), \theta(t), \dot{r}(t), \dot{\theta}(t))$ do problema isósceles em questão (6.4), com momento angular c tendo condições iniciais $r(0) = r_0, \theta(0) = \theta_0 \pmod{2\pi}, \dot{r}(0) = \dot{r}_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$, onde

$$\dot{\theta}(t) = \frac{c}{r^2(t)} \quad \text{e} \quad \theta(t) = F(t) + \theta_0.$$

Observação 6.2.1. Observe que, quando $c = 0$, nosso sistema (6.10) é semelhante (como foi dito antes) ao sistema restrito 1-dimensional considerado em [1].

6.3 Propriedades do fluxo global

Nesta seção damos algumas propriedades do fluxo associado ao sistema (6.4). Cálculos diretos nos dão:

Lema 6.3.1. *A derivada da função Hamiltoniana H ao longo das soluções do sistema (6.10) é dada por*

$$\dot{H} = \frac{\rho(t)\dot{\rho}(t)}{4(r^2 + \frac{\rho(t)^2}{4})^{3/2}}.$$

Segue que

$$\dot{H}(r(t), p_r(t), t) = \begin{cases} < 0 & \text{se} \quad \dot{\rho}(t) < 0, \\ > 0 & \text{se} \quad \dot{\rho}(t) > 0. \end{cases}$$

Lema 6.3.2. Se $c \neq 0$, onde c é o momento angular da partícula teste e $\lim_{t \rightarrow t^*} r(t) = 0$, $t^* \in \mathbb{R}$, então $\lim_{t \rightarrow t^*} H(t) = +\infty$.

Demonstração: Usando a equação (6.9), obtemos

$$r^2(H(t) - \frac{p_r^2}{2}) = \frac{c^2}{2} - \frac{r^2}{(r^2 + \frac{\rho(t)^2}{4})^{\frac{1}{2}}}.$$

Vemos que o segundo termo do lado direito tende a zero quando $t \rightarrow t^*$. De fato, fazendo a substituição $r = \alpha \cos(\vartheta)$, $y = \alpha \sin(\vartheta)$, obtemos

$$\frac{r^2}{(r^2 + \frac{\rho(t)^2}{4})^{\frac{1}{2}}} = \alpha \cos^2 \vartheta$$

que tende a zero quando r tende a zero. Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow t^*} r^2(H(t) - \frac{p_r^2}{2}) = \frac{c^2}{2}. \quad (6.11)$$

Observe que para todo t , temos

$$r^2(H(t) - \frac{p_r^2}{2}) \leq r^2(H(t)).$$

Então

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \frac{r^2(H(t) - \frac{p_r^2}{2})}{r^2} \leq \lim_{t \rightarrow t^*} H(t).$$

Portanto, $\lim_{t \rightarrow t^*} H(t) = +\infty$. ■

Proposição 6.3.3. Se $c \neq 0$, não existe tempo $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \rightarrow t^*} r(t) = 0$.

Demonstração: Mostraremos, usando a contra-positiva, i. é., provaremos que se existir um $t^* \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t \rightarrow t^*} r(t) = 0$ isto implica que $c = 0$. Suponha que exista um t^* tal que $\lim_{t \rightarrow t^*} r(t) = 0$ e $c \neq 0$. Então, pelo Lema 6.3.2, temos $\lim_{t \rightarrow t^*} H(t) = \infty$. Desde que este limite é atingido em tempo finito devemos também ter que

$$\lim_{t \rightarrow t^*} \frac{dH(t)}{dt} = +\infty. \quad (6.12)$$

Pelo Lema 6.3.1 segue

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{\rho(t) \dot{\rho}(t)}{4(r^2 + \frac{\rho(t)^2}{4})^{\frac{3}{2}}},$$

e portanto, para satisfazer (6.12), devemos ter que $\lim_{t \rightarrow t^*} \rho(t) = 0$. Mas, neste caso, teremos que em uma vizinhança de t^* , $\dot{\rho} < 0$, a função é decrescente, o que contradiz (6.12). Desta maneira, segue que $c = 0$ e a prova está completa. ■

Proposição 6.3.4. Se $c \neq 0$ então $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) \neq 0$.

Demonstração: Vamos supor que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = 0$ e $c \neq 0$. Observe que

$$-\frac{r}{(r^2 + \frac{\rho(t)^2}{4})^{\frac{3}{2}}} + \frac{c^2}{r^3} \geq -\frac{1}{r^2} + \frac{c^2}{r^3}.$$

Desse modo, por (6.7) temos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} \geq \frac{1}{r^3}(-r + c^2).$$

Logo, $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{d^2 r}{dt^2} = +\infty$. Então, existe um tempo t_1 tal que $\frac{d^2 r}{dt^2} \geq k$ para todo $t \geq t_1$, onde $k \in \mathbb{R}^+$. Integrando ambos os lados, conseguimos $r \geq k/2t^2 + bt + d$, onde $b, d \in \mathbb{R}$ são constantes. Portanto, como $t \rightarrow \pm\infty$, $r \rightarrow \infty$ o que contradiz $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} r(t) = 0$. ■

Observação 6.3.5. Destas duas últimas proposições, concluímos que o sistema (6.1) não possui colisão tripla se o momento angular c é não nulo.

Na próxima proposição mostramos que qualquer solução do sistema (6.10) está definida para todo tempo, i.e., o fluxo é completo.

Proposição 6.3.6. Se $c \neq 0$, o intervalo maximal (w_-, w_+) das soluções de (6.10) é $(-\infty, +\infty)$.

Demonstração: Seja (w_-, w_+) o intervalo maximal de definição da solução $(r(t), p_r(t))$ de (6.10). Suponha, por absurdo, que w_+ é finito. Seja $\xi \equiv \sqrt{r^2 + p_r^2}$. Se $w_+ < \infty$ ou i) $\lim_{t \rightarrow w_+} r(t) = 0$ ou ii) $\lim_{t \rightarrow w_+} \xi = +\infty$ (veja por exemplo [46]). O caso i) é impossível em virtude das Proposições 6.3.3 e 6.3.4. No caso ii) é suficiente considerar que $\lim_{t \rightarrow w_+} r(t) = +\infty$. De fato, se $\lim_{t \rightarrow w_+} p_r(t) = \pm\infty$ e $\lim_{t \rightarrow w_+} r(t) = c^*$, onde $c^* \in \mathbb{R}$ nós temos, pelo sistema (6.10), $\lim_{t \rightarrow w_+} \dot{p}_r(t) = \text{constant}$ assim, $p_r(t)$ permanece limitada quando $t \rightarrow w_+$, e, desta maneira, temos uma contradição. Portanto, se $\lim_{t \rightarrow w_+} r(t) = +\infty$ por (6.10) temos que $\lim_{t \rightarrow w_+} \ddot{r}(t) = 0$. Assim, obtemos que $\dot{r}(t)$ permanece limitado quando $t \rightarrow w_+$ e então, temos que $r(t)$ permanece limitado quando $t \rightarrow w_+$. Isto é uma contradição. O resultado para w_- é provado de uma maneira análoga. ■

Observação 6.3.7. Temos provado que as soluções associadas ao *problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão* com momento angular $c \neq 0$ estão definidas para todo o tempo $t \in \mathbb{R}$ para toda solução elíptica com colisão dos primários m_1 e m_2 . Este resultado é bem conhecido no problema geral dos três corpos quando o momento angular total é diferente de zero (veja [44]).

6.4 Comportamento assintótico

Também usando resultados padrões do Método da Média, provamos a existência de órbitas periódicas e comparamos as soluções do sistema médio com as do sistema completo em coordenadas convenientes.

Para conseguirmos informações sobre o comportamento assintótico das soluções de (6.10), inicialmente observamos

$$r^2 \leq r^2 + \frac{\rho^2(t)}{4} \leq r^2 + a^2, \quad \text{onde} \quad a^2 = \epsilon^4, \quad \epsilon \text{ fixado} \quad (6.13)$$

desta desigualdade obtemos que

$$-\frac{1}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} \leq \ddot{r} \leq -\frac{r}{[r^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{c^2}{r^3}. \quad (6.14)$$

Lema 6.4.1. O fluxo do sistema mecânico

$$\ddot{\varsigma} = -\frac{\varsigma}{[\varsigma^2 + a^2]^{3/2}} + \frac{c^2}{\varsigma^3}, \quad \varsigma > 0 \quad (6.15)$$

possui soluções limitadas (periódicas) e ilimitadas (veja retrato de fase em Figura 6.2).

Proposição 6.4.2. O problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão possui soluções limitadas e ilimitadas.

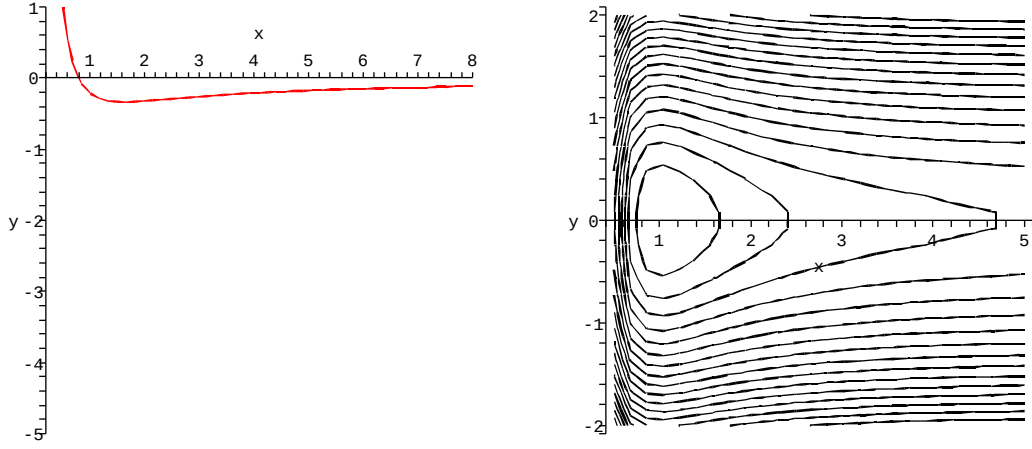


Figura 6.2: *Esquerda:* Função potencial associada ao problema (6.15) com $a = c = 1$. *Direita:* Retrato de fase do sistema (6.15) para os valores dos parâmetros $a = c = 1$.

Demonstração: Introduzimos a equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{u} = -\frac{1}{u^2} + \frac{c^2}{u^3}, \quad u > 0 \quad (6.16)$$

e usaremos a desigualdade diferencial (6.14) (considere o lado direito desta desigualdade com a notação de (6.15)) para conseguirmos importantes estimativas.

Considerando $r(0) = \zeta(0) = u(0) > 0$ e $\dot{r}(0) = \dot{\zeta}(0) = \dot{u}(0)$ e integrando uma vez em (6.14) segue que

$$\dot{u}(t) \leq \dot{r}(t) \leq \dot{\zeta}(t), \quad (6.17)$$

e, integrando esta desigualdade, obtemos

$$u(t) \leq r(t) \leq \zeta(t). \quad (6.18)$$

Portanto, do Lema 6.4.1 e sabendo que o sistema em (6.16) tem retrato de fase semelhante a Figura 6.2 segue a prova desta proposição. ■

Também é possível dar algumas estimativas sobre a energia. De fato,

$$\frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{c^2}{2r^2} \leq H \leq \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{c^2}{2r^2}. \quad (6.19)$$

Em particular, temos

Corolário 6.4.3. A energia do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão é limitada ao longo de qualquer solução.

Durante o restante desta seção, assumiremos que a órbita $r(t)$ do sistema (6.10) é uma solução de escape, i.e., $r(t) \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Da segunda equação em (6.10) segue que

$$\ddot{r}(t) = \dot{p}_r(t) = \frac{c^2}{r^3(t)} - \frac{r(t)}{[r^2(t) + \frac{\rho^2(t)}{4}]^{3/2}} = -\frac{1}{r^2(t)} \frac{1}{[1 + (\rho(t)/2r(t))^2]^{3/2}} + \frac{c^2}{r^3(t)} \sim -\frac{1}{r^2(t)} \quad (6.20)$$

quando $t \rightarrow \pm\infty$ desde que $z_1(t) = \rho(t)/2$ é limitada. Então, $\ddot{r}(t) \rightarrow 0^-$ quando $t \rightarrow \infty$, e assim $\dot{r}(t)$ é uma função decrescente e a concavidade de $r(t)$ é para baixo quando t está numa vizinhança do infinito. Portanto, existe o limite de $\dot{r}(t)$ quando $t \rightarrow \infty$. Por exemplo, analisaremos o caso $t = +\infty$. Portanto, nós temos três possibilidades:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{r}(t) = \begin{cases} +\infty, \\ p^* \in \mathbb{R}, \\ -\infty. \end{cases}$$

Uma vez que o fluxo de (6.10) é analítico e em uma vizinhança de $t = +\infty$, $\ddot{r}(t) < 0$ e $r(t) > 0$ segue que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{r}(t) = -\infty$, o que é impossível. Do Corolário 6.4.3 não podemos ter $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{r}(t) = +\infty$. Desta maneira, devemos ter

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{r}(t) = p^*.$$

Para caracterizar o comportamento assintótico da solução de (6.10) precisamos introduzir a seguinte definição

Definição 6.4.4. Uma solução $(r(t), \dot{r}(t))$ do sistema (6.10) é chamada parabólica, se ela está definida para todo tempo $t > 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t), \dot{r}(t)) = (+\infty, 0).$$

Uma solução será chamada hiperbólica se ela está definida para todo o tempo $t > 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (r(t), \dot{r}(t)) = (+\infty, p^*).$$

onde p^* é um valor positivo finito.

Em conclusão, provamos que

Proposição 6.4.5. Qualquer solução de escape de (6.10) com $c \neq 0$ é parabólica ou hiperbólica.

Por outro lado, do Lema 6.3.1, temos que

$$\dot{H}(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty.$$

E por (6.9) segue

Corolário 6.4.6. Ao longo de uma solução de escape de (6.10) com $c \neq 0$ temos

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\dot{r}(t)^2}{2} = \frac{(p^*)^2}{2}.$$

6.5 O problema isósceles em diferentes coordenadas

Nesta seção descreveremos o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão em diferentes coordenadas.

6.5.1 O problema isósceles em coordenadas giratórias

Considere o sistema de coordenadas giratórias $(\xi, \eta, p_\xi, p_\eta)$ relacionadas com as coordenadas inerciais da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ p_\xi \\ p_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ p_x \\ p_y \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

O sistema (6.1) nestas novas coordenadas torna-se

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} &= -\xi + 2p_\xi - \frac{\xi}{R^3} \\ \ddot{\eta} &= -\eta - 2p_\eta - \frac{\eta}{R^3}\end{aligned}\tag{6.22}$$

onde $R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \frac{\rho(t)^2}{4}$, cuja função Hamiltoniana é dada por

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \xi p_\eta + \eta p_\xi - \frac{1}{\sqrt{\|\hat{\mathbf{q}}\|^2 + \frac{\rho^2(t)}{4}}}\tag{6.23}$$

onde $\hat{\mathbf{q}} = (\xi, \eta)$ e $\hat{\mathbf{p}} = (p_\xi, p_\eta)$. Ainda podemos escrever o sistema (6.22) da seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta + p_\xi, & \dot{p}_\xi &= p_\eta - \frac{\xi}{R^3}, \\ \dot{\eta} &= -\xi + p_\eta, & \dot{p}_\eta &= -p_\xi - \frac{\eta}{R^3}.\end{aligned}\tag{6.24}$$

6.5.2 O espaço de fase estendido

Sabemos que o sistema Hamiltoniano associado a função (6.9) possui um e meio grau de liberdade, onde $p_r = \dot{r}$ é o momento conjugado da variável r . Introduziremos o tempo (módulo $2\pi\epsilon^3$) como uma nova variável posição s , i.e., $s = t$. Pode ser mostrado que seu momento conjugado, o qual é denotado por p_s , satisfaz $p_s = -H$. Então, a função Hamiltoniana (6.9) no espaço de fase estendido $(r, p_r, s, p_s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ torna-se

$$\underline{H} = \underline{H}(r, s, p_r, p_s) = \frac{p_r^2}{2} + \frac{c^2}{2r^2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{\rho^2(s)}{4}}} + p_s,\tag{6.25}$$

onde $E = E(s)$ é dado por (2.13). O fluxo do nosso problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão corresponde ao fluxo do campo vetorial dado por $\underline{H}$ sobre o nível de energia $\underline{H} = 0$.

As equações de movimento associadas a função Hamiltoniana $\underline{H}$ são

$$\begin{aligned}\dot{r} &= p_r & \dot{p}_r &= -\frac{r}{[r^2 + \frac{\rho^2(s)}{4}]^{3/2}} + \frac{c^2}{r^3} \\ \dot{s} &= 1 & \dot{p}_s &= -\frac{2z_1(s)\dot{z}_1(s)}{[r^2 + \frac{\rho^2(s)}{4}]^{3/2}}.\end{aligned}\tag{6.26}$$

Notemos que (6.26) não possui singularidades quando $c \neq 0$.

6.5.3 Introduzindo a anomalia excêntrica como um novo tempo

Para evitarmos resolver a equação de Kepler (2.13), em certas ocasiões é interessante escrevermos o problema isósceles com a anomalia excêntrica, E , como a variável tempo. Veremos a utilidade desta abordagem na próxima seção.

Fazendo um reescalamento no tempo,

$$dt = \epsilon^3 (1 - \cos E_\epsilon(t)) dE,\tag{6.27}$$

as equações de movimento (6.4) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dE} &= \epsilon^3(1 - \cos E)p_x \\ \frac{dy}{dE} &= \epsilon^3(1 - \cos E)p_y \\ \frac{dp_x}{dE} &= -\epsilon^3(1 - \cos E) \left[\frac{x}{\left(x^2 + y^2 + \epsilon^4 \frac{(1 - \cos E)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \frac{dp_y}{dE} &= -\epsilon^3(1 - \cos E) \left[\frac{y}{\left(x^2 + y^2 + \epsilon^4 \frac{(1 - \cos E)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right]. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Note que este sistema é 2π periódico em E . Por outro lado, introduzindo coordenadas polares

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

o sistema (6.28) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dE} &= \epsilon^3(1 - \cos E)p_r \\ \frac{dp_r}{dE} &= -\epsilon^3(1 - \cos E) \left[\frac{r}{\left(r^2 + \epsilon^4 \frac{(1 - \cos E)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c^2}{r^3} \right] \\ \frac{d\theta}{dE} &= \epsilon^3(1 - \cos E) \frac{c}{r^2}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Esquecendo a terceira equação em (6.29) obtemos o sistema Hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dE} &= \epsilon^3(1 - \cos E)p_r \\ \frac{dp_r}{dE} &= -\epsilon^3(1 - \cos E) \left[\frac{r}{\left(r^2 + \epsilon^4 \frac{(1 - \cos E)^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{c^2}{r^3} \right], \end{aligned} \quad (6.30)$$

cuja função Hamiltoniana associada é

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \mathcal{K}(r, p_r, E, \epsilon) = \epsilon^3(1 - \cos E) \left\{ \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^4 \frac{(1 - \cos E)^2}{4}}} + \frac{c^2}{2r^2} \right\} \\ &= \epsilon^3(1 - \cos E) \left\{ \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{c^2}{2r^2} + O(\epsilon^4) \right\} \\ &= \epsilon^3(1 - \cos E) \left\{ \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{c^2}{2r^2} \right\} + O(\epsilon^6) \\ &= \nu(1 - \cos E) \left\{ \frac{p_r^2}{2} - \frac{1}{r} + \frac{c^2}{2r^2} \right\} + O(\nu^2), \end{aligned} \quad (6.31)$$

com $\nu = \epsilon^3$ é 2π -periódica em E .

Finalizaremos esta seção com uma aplicação do Teorema da média ao sistema (6.30). Expandindo este sistema em série de potências em torno de $\epsilon^4 = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dE} &= \nu(1 - \cos E)p_r \\ \frac{dp_r}{dE} &= -\nu(1 - \cos E) \left[-\frac{1}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} \right] + O(\nu^2), \quad \text{com } \nu = \epsilon^3, \end{aligned} \quad (6.32)$$

cuja função média é dada por

$$\mathbf{f}_0(r, p_r) = \left(p_r, -\frac{1}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} \right). \quad (6.33)$$

Resumimos as consequências do método da média de acordo com o Apêndice B. Ou seja, aplicando diretamente o Teorema C, descrito no Apêndice B, ao sistema (6.32) cujo sistema médio é dado por

$$\frac{d\chi}{dE} = \epsilon \mathbf{f}_0(\chi), \quad \chi = (r, p_r), \quad (6.34)$$

obtemos que as soluções do sistema médio (6.34) (cujo espaço de fase é semelhante ao espaço de fase descrito na Figura 6.2) e as soluções do sistema (6.32) que começam próximas permanecem próximas por um longo tempo, dependendo somente de quão próximas elas se iniciam.

6.6 Simetrias

Facilmente verificamos que a equação de movimento (6.1) possui as seguinte simetrias:

$$\begin{aligned}
I &: (x, y, p_x, p_y, t) \rightarrow (x, y, p_x, p_y, t) \\
S_1 &: (x, y, p_x, p_y, t) \rightarrow (x, -y, -p_x, p_y, -t) \\
S_2 &: (x, y, p_x, p_y, t) \rightarrow (-x, y, p_x, -p_y, -t) \\
S_3 &: (x, y, p_x, p_y, t) \rightarrow (x, y, -p_x, -p_y, -t) \\
S_4 &: (x, y, p_x, p_y, t) \rightarrow (-x, -y, -p_x, -p_y, t) \\
S_5 &: (x, y, p_x, p_y, t) \rightarrow (-x, -y, p_x, p_y, -t) \\
S_6 &: (x, y, p_x, p_y, t) \rightarrow (x, -y, p_x, -p_y, t)
\end{aligned}$$

Observação 6.6.1. Observe que as simetrias S_2 e S_6 do caso espacial coincidem neste caso. Analogamente para as simetrias S_4 e S_5 .

Destacamos aqui que as simetrias na Tabela 6.1, junto com a composição de funções, denotada por $\circ$, formam um grupo abeliano cuja operação age de acordo com a Tabela 6.1. A simetria I denota a identidade.

$\circ$	I	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
I	I	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
S_1	S_1	I	S_7	S_6	S_5	S_4	S_3
S_2	S_2	S_5	I	S_5	S_6	S_3	S_4
S_3	S_3	S_6	S_5	I	S_5	S_2	S_1
S_4	S_4	S_5	S_6	S_5	I	S_1	S_2
S_5	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1	I	S_5
S_6	S_6	S_3	S_4	S_1	S_2	S_5	I

Tabela 6.1: Grupo Abelian das simetrias do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.

Da Tabela 6.1, deduzimos o seguinte

Proposição 6.6.2. *As simetrias do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão (6.4) formam um grupo abeliano elementar de ordem oito, i.e., um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Observe que a simetria S_6 e S_1 (tempo reverso) correspondem a uma reflexão com respeito ao eixo x e a simetria S_2 (tempo reverso) corresponde a uma reflexão com respeito ao eixo y .

Como no problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão, usaremos, mais adiante, as simetrias S_1 e S_2 para obtermos órbitas periódicas para este problema isósceles. Observe que o seguinte subconjunto do espaço $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ são invariantes pelas simetrias S_1 e S_2 , respectivamente:

$$L_1 = (x, 0, 0, p_y), x \in \mathbb{R}, p_y \in \mathbb{R}$$

e

$$L_2 = (0, y, p_x, 0), y \in \mathbb{R}, p_x \in \mathbb{R}.$$

Devido as simetrias, como vimos nos capítulos anteriores, podemos simplificar o problema de encontrar órbitas periódicas, pois algumas propriedades importantes da órbita simétrica, cuja prova é uma consequência imediata do Teorema de Existência e Unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, são expressas nas seguintes proposições:

Proposição 6.6.3. *Seja $\varphi(t) = (x(t), y(t), p_x(t), p_y(t))$ uma solução do sistema (6.4) e $E(t)$ a função definida por (2.13). Então,*

1. Se $(y(0), p_x(0)) = (0, 0)$, i.e., $\varphi(0) \in L_1$ e $E(0) = 0$ e se $(y(T/2), p_x(T/2)) = (0, 0)$, i.e., $\varphi(T/2) \in L_1$, onde $(y(t), p_x(t)) \neq (0, 0), 0 < t < T/2$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par, então $\varphi(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas S_1 -simétricas do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.
2. Se $(x(0), p_y(0)) = (0, 0)$, i.e., $\varphi(0) \in L_2$ e $E(0) = 0$ e se $(x(T/2), p_y(T/2)) = (0, 0)$, i.e., $\varphi(T/2) \in L_2$, onde $(x(t), p_y(t)) \neq (0, 0), 0 < t < T/2$ e $E(T/2) = k\pi$, então $\varphi(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas S_2 -simétrica do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.
3. Se $(x(0), p_y(0)) = (0, 0)$, i.e., $\varphi(0) \in L_2$ e $E(0) = 0$ e se $(y(T/4), p_x(T/4)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\varphi(T/4) \in L_1$, onde $(y(t), p_x(t)) \neq (0, 0), 0 < t < T/4$ e $E(T/4) = k\pi$, então $\varphi(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_1 - \hat{S}_2$ -simétrico ou simplesmente duplamente simétrica do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.

Em coordenadas giratórias, chamamos $\hat{S}_1$ e $\hat{S}_2$ as simetrias correspondentes as simetrias S_1 e S_2 nas coordenadas inerciais e, desta maneira, denotaremos por $\hat{L}_1$ e $\hat{L}_2$ os subconjuntos invariantes em coordenadas giratórias correspondentes aos subconjuntos invariantes L_1 and L_2 . Portanto, para o sistema em coordenadas giratórias (6.22) temos a seguinte proposição, a qual é semelhante a Proposição 6.6.3:

Proposição 6.6.4. *Seja $\hat{\varphi}(t) = (\xi(t), \eta(t), p_\xi(t), p_\eta(t))$ uma solução do sistema (6.22) e $E(t)$ a função definida por (2.13). Então,*

1. Se $(\eta(0), p_\xi(0)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_1$ e $E(0) = 0$ e se $(\eta(T/2), p_\xi(T/2)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/2) \in \hat{L}_1$, onde $(\eta(t), p_\xi(t)) \neq (0, 0), 0 < t < T/2$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_1$ -simétricas do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.
2. Se $(\xi(0), p_\eta(0)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_2$ e $E(0) = 0$ e se $(\xi(T/2), p_\eta(T/2)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/2) \in \hat{L}_2$, onde $(\xi(t), p_\eta(t)) \neq (0, 0), 0 < t < T/2$ e $E(T/2) = k\pi$, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas $\hat{S}_2$ -simétricas do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.
3. Se $(\xi(0), p_\eta(0)) = (0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(0) \in \hat{L}_2$ e $E(0) = 0$ e se $(\eta(T/4), p_\xi(T/4)) = (0, 0, 0)$, i.e., $\hat{\varphi}(T/4) \in \hat{L}_1$, onde $(\eta(t), p_\xi(t)) \neq (0, 0), 0 < t < T/4$ e $E(T/4) = k\pi$, então $\hat{\varphi}(t)$ é uma solução periódica de período T . Estas órbitas são chamadas órbitas periódicas duplamente simétrica do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão.

6.7 Continuação analítica de órbitas periódicas simétricas

Sem muitas dificuldades vemos que para este caso também é possível obter a equação de movimento deste problema particular do problema restrito espacial elíptico dos três corpos com colisão como uma perturbação do problema de Kepler, onde para isto suporemos que $\frac{\rho}{2\|\mathbf{q}\|} < 1$. Para isso expandiremos o sistema (6.4) em ϵ usando polinômios de Legendre. Desde que existe pequenas importantes diferenças entre este caso e o caso espacial, decidimos apresentar certos detalhes da expansão.

Consideremos a seguinte expressão para a distância

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + \rho^2(t)/4},$$

a qual aparece no potencial do problema isósceles V

$$R = \|\mathbf{q}\| \sqrt{1 + w^2},$$

onde $w = \frac{z_1}{\|\mathbf{q}\|} = \frac{\rho}{2\|\mathbf{q}\|}$. Assumimos que

$$\frac{\rho}{2\|\mathbf{q}\|} < 1, \quad (6.35)$$

assim, podemos expandir usando polinômios de Legendre $1/R$ como série de potências na variável w . Desta maneira, obtemos:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|} \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} P_j(0) (w)^j \right]$$

onde $P_j(u)$ é o j -ésimo polinômio de Legendre, os quais são dados em (4.26). Assim, a função Hamiltoniana (6.3) torna-se

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^4 H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^8 H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) \quad (6.36)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ e

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}, \\ H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) &= \frac{1}{8\|\mathbf{q}\|^3} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \\ H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) &= -\frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\mathbf{q}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned}$$

e assim, as equações de movimento (6.4) são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x, & \dot{p}_x &= - \left[\frac{\partial H_0}{\partial x}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^4 \frac{\partial H_1}{\partial x}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \frac{\partial H_r}{\partial x}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) \right], \\ \dot{y} &= p_y, & \dot{p}_y &= - \left[\frac{\partial H_0}{\partial y}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^4 \frac{\partial H_1}{\partial y}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \frac{\partial H_r}{\partial y}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Semelhantemente, a função Hamiltoniana em coordenadas giratórias (6.23) torna-se

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \epsilon^4 \hat{H}_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{H}_r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) \quad (6.38)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) &= \frac{\|\hat{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \xi p_\eta + \eta p_\xi - \frac{1}{\|\hat{\mathbf{q}}\|} \\ \hat{H}_1(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) &= \frac{1}{8\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \\ \hat{H}_r(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) &= -\frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned}$$

Portanto, as equações de movimento (6.24) tornam-se

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \eta + p_\xi, & \dot{p}_\xi &= - \left[\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \xi}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \epsilon^4 \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \xi}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \xi}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) \right], \\ \dot{\eta} &= -\xi + p_\eta, & \dot{p}_\eta &= - \left[\frac{\partial \hat{H}_0}{\partial \eta}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}) + \epsilon^4 \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \eta}(\eta \mathbf{q}, \eta \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \eta}(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}}, t, \epsilon) \right]. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Neste caso também é verdadeiro um resultado semelhante ao Lema 4.7.1 descrito no Capítulo 4.

6.7.1 Variáveis de Poincaré-Delaunay e variáveis de Delaunay.

A fim de continuarmos órbitas Keplerianas quando $\epsilon > 0$, precisamos estudar, como no Capítulo 4, as equações de movimento dadas pela função Hamiltoniana (6.115) em variáveis convenientes. Desta maneira, usaremos aqui as variáveis de Poincaré-Delaunay descritas em (4.37), omitindo as variáveis espaciais Q_3 e P_3 , ou seja

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + g, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= -\sqrt{2(L - G)} \sin g, & P_2 &= \sqrt{2(L - G)} \cos g, \end{aligned} \quad (6.40)$$

Estas variáveis são válidas sobre órbitas circulares, as quais ocorrem em $L = G$ e correspondem a $Q_2 = P_2 = 0$. Também usaremos as variáveis de Delaunay descritas em (5.9). A função Hamiltoniana (6.115) nas variáveis (6.40) torna-se

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon^4 H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^8 H_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) \quad (6.41)$$

onde $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ e

$$\begin{aligned} H_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= -\frac{1}{2P_1^2}, \\ H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) &= \frac{1}{8\|\mathbf{q}\|^3} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$H_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = -\frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\mathbf{q}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4), \quad (6.43)$$

onde $\mathbf{q}$ deve ser pensado em função das variáveis $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ e descritas no Lema 4.8.1. Também é verificado que o Hamiltoniano em coordenadas giratórias (6.38), nas variáveis Poincaré-Delaunay descritas por (6.40), torna-se

$$\hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon^4 \hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) \quad (6.44)$$

onde $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ e

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= -\frac{1}{2P_1^2} - P_1 + \frac{Q_2^2 + P_2^2}{2}, \\ \hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) &= \frac{1}{8\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \\ \hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) &= -\frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned}$$

onde denotamos $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ por $\hat{\mathbf{q}}$ e é descrita no Lema 4.8.2. Finalmente, escrevemos a função Hamiltoniana (6.38) nas variáveis descritas em (5.9) como

$$\hat{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \epsilon^4 \hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) \quad (6.45)$$

onde $\mathbf{Q} = (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2)$, $\mathbf{P} = (\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ e

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) &= -\frac{1}{2\overline{P}_1^2} - \overline{P}_2, \\ \hat{H}_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) &= \frac{1}{8\|\hat{\mathbf{q}}\|^3} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \\ \hat{H}_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) &= -\frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\hat{\mathbf{q}}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4). \end{aligned} \quad (6.46)$$

onde denotamos $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ por $\hat{\mathbf{q}}$.

Como falamos anteriormente, as variáveis de Poincaré-Delaunay tornam mais fácil a localização da partícula infinitesimal no espaço. Assim, nas proposições abaixo, damos condições suficientes para a partícula se encontrar nos subconjuntos invariantes L_1 e L_2 e nos subconjuntos invariantes $\hat{L}_1$ e $\hat{L}_2$.

Proposição 6.7.1. *Seja $\mathbf{Q} = (Q_1, Q_2)$, $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ definidas em (6.40). As coordenadas*

$$\mathcal{L}_1 : Q_1 = 0 \pmod{\pi}, \quad Q_2 = 0,$$

nos dão pontos no conjunto invariante L_1 e no subconjunto invariante $\hat{L}_1$.

(ii)

$$\mathcal{L}_2 : Q_1 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}, \quad P_2 = 0,$$

nos dão pontos no subconjunto invariante L_2 e no subconjunto invariante $\hat{L}_2$.

Proposição 6.7.2. *Seja $\mathbf{Q} = (\overline{Q}_1, \overline{Q}_2)$, $\mathbf{P} = (\overline{P}_1, \overline{P}_2)$ definida em (??). As coordenadas*

(i)

$$\mathcal{L}_1 : \overline{Q}_1 = 0 \pmod{\pi}, \quad \overline{Q}_2 = 0 \pmod{\pi},$$

nos dão pontos no conjunto invariante L_1 e no subconjunto invariante $\hat{L}_1$.

(ii)

$$\mathcal{L}_2 : \overline{Q}_1 = 0 \pmod{\pi}, \quad \overline{Q}_2 = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

nos dão pontos no subconjunto invariante L_2 e no subconjunto inavriante $\hat{L}_2$.

6.7.2 Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas circulares

No caso planar, descrito no Capítulo 5, obtemos soluções periódicas como continuação de órbitas Keplerianas circulares como um caso particular das correspondentes soluções periódicas do problema espacial, tratado no Capítulo 4. Para o caso isósceles, isto não será possível, pelo menos usando as mesmas variáveis, pois as órbitas circulares de Kepler encontradas no problema espacial pertencem ao plano xz . Aqui também classificaremos as órbitas continuadas segundo suas simetrias. Desta maneira, obteremos órbitas duplamente simétrica (simetrias S_1 e S_2), S_2 -simétricas e S_1 -simétricas.

Continuação de soluções periódicas duplamente simétricas

Neste caso, consideramos o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão nas coordenadas inerciais e então escrevemos o problema nas variáveis de Poincaré-Delaunay (6.40) (i.e., o sistema associado com função Hamiltoniana (6.41)). As equações de movimento (6.4) nas variáveis de Poincaré-Delaunay, dadas por (6.40), podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}(\mathbf{Z}) \quad (6.47)$$

onde $\mathbf{Z} = (Q_1, Q_2, P_1, P_2)$, $\mathbf{F}(\mathbf{Z}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^4 \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon)$.

$$\mathbf{F}_0(\mathbf{Z}) = (P_1^{-3}, 0, 0, 0) \quad (6.48)$$

$$\mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial H_1}{\partial P_1}, \frac{\partial H_1}{\partial P_2}, -\frac{\partial H_1}{\partial Q_1}, -\frac{\partial H_1}{\partial Q_2} \right)$$

com $H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon)$ dado por (6.42) e, finalmente,

$$\mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial H_r}{\partial P_1}, \frac{\partial H_r}{\partial P_2}, -\frac{\partial H_r}{\partial Q_1}, -\frac{\partial H_r}{\partial Q_2} \right),$$

com $H_r(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon)$ dado por (6.43). Observe que o sistema (6.47) é autônomo e $2\pi\epsilon^3$ -periódico em t , e está definido sobre o espaço de fase

$$\Omega = \{(\mathbf{Z}, t, \epsilon) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} / P_1 \neq 0, \mathbf{q} \neq \mathbf{0}\}.$$

Agora caracterizaremos órbitas duplamente simétricas do problema de Kepler (6.48), cujas equações de movimento são

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1 &= P_1^{-3}, & \dot{P}_1 &= 0, \\ \dot{Q}_2 &= 0, & \dot{P}_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.49)$$

As soluções deste sistema são dadas por

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t) &= P_{10}^{-3}t + Q_{10}, & P_1^{(0)}(t) &= P_{10}, \\ Q_2^{(0)}(t) &= Q_{20}, & P_2^{(0)}(t) &= P_{20}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

para condições iniciais $(Q_{10}, Q_{20}, P_{10}, P_{20})$ em $t = 0$. Agora, consideramos soluções do problema de Kepler (6.49) com condições iniciais $\mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_2$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$, com

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, P_1^*, 0),$$

onde m é um inteiro que escolhemos, sem perda de generalidade, 0 ou 1, e P_1^*, Q_2^* são constantes a serem determinadas. Estas soluções denotadas por $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ são da forma:

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= (P_1^*)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, & P_1^{(0)}(t) &= P_1^*, \\ Q_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= Q_2^*, & P_2^{(0)}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Pelas Proposições 6.6.3 item (3) e 6.7.1 item (i) obtemos órbitas duplamente simétricas para o problema de Kepler (6.49), se pudermos resolver as seguintes equações de periodicidade:

$$Q_1^{(0)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0^*) = (P_1^*)^{-3}\frac{T}{4} + (m + \frac{1}{2})\pi = (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad Q_2^{(0)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0^*) = Q_2^* = 0,$$

onde $\tilde{m}$ é um inteiro. A segunda equação é satisfeita por $Q_2^* = 0$ (note que, com esta escolha, obtemos uma órbita circular). E tomando $P_1^{-3} = s$, onde s é uma constante real positiva, temos da primeira equação que

$$T = 4 \frac{\tilde{m} + \frac{1}{2}}{s} \pi. \quad (6.51)$$

Pela Observação 4.6.4, queremos também que $E(0) = 0$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par conveniente e desta maneira, devemos tomar

$$T = 4\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (6.52)$$

Assim, combinando (6.51) e (6.52), temos $\hat{k} = (\tilde{m} + 1/2)ks^{-1}$, com $\epsilon^3 = 1/k$, $k, \tilde{m}$ inteiros positivos e s uma constante real positiva. Desde que $\hat{k}$ é um inteiro positivo par, verificaremos esta condição assumindo que, por exemplo, k é um inteiro positivo par e $(\tilde{m} + 1/2)s^{-1}$ é um inteiro positivo ou $(\tilde{m} + 1/2)s^{-1}$ é um inteiro positivo par. Para facilitar nossa aproximação nós escolhemos a segunda opção. Desta maneira, o valor de s será

$$s = \frac{\tilde{m} + 1/2}{2\tilde{s}},$$

onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Assim, temos que $\mathbf{Z}^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) = ((m + \tilde{m} + 1)\pi, 0, ((\tilde{m} + 1/2)/2\tilde{s})^{-1/3}, 0)$ o qual está em $\mathcal{L}_1$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k} = 2\tilde{s}k$. Portanto, a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita circular duplamente simétrica com raio $((\tilde{m} + 1/2)/2\tilde{s})^{-2/3}$ e período $T = 8\pi\tilde{s}$ sobre o plano xy .

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ uma vizinhança compacta de $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ sem singularidades e $\mathbf{z}_0^*$ tais que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ permanece limitada e afastada das singularidades (para isto é suficiente tomarmos P_1^* suficientemente grande). Deste modo, descrevemos o seguinte lema:

Lema 6.7.3. *As funções $\mathbf{F}_0(\mathbf{Z})$, $\epsilon^4 \mathbf{F}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon)$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon)$, dadas em (6.47), junto com todas as suas derivadas com respeito à $\mathbf{Z}$ são contínuas em $\mathcal{C}$.*

Demonstração: A prova segue análoga à demonstração do Lema 4.9.5. ■

Como uma consequência do lema acima temos que dada uma solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0^*)$ do sistema $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{F}_0(\mathbf{Z})$ e uma vizinhança compacta $\mathcal{C}$ desta solução, temos que $\mathbf{F}_0, \epsilon^4 \mathbf{F}_1$ e $\epsilon^8 \mathbf{F}_r$ junto com todas as suas derivadas com respeito a $\mathbf{Z}$ são limitadas em $\mathcal{C}$. Em particular, uma vez que $\mathbf{F}_0$ está em C^1 , segue que $\mathbf{F}_0$ é Lipschitz em $\mathcal{C}$ (nós podemos restringir a vizinhança compacta se necessário). Portanto, podemos usar as estimativas obtidas nos Lemas 3.3.1 e 3.3.2 descritos no Capítulo 3.

Agora, continuaremos com estudo do sistema perturbado. Procuramos por condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$, do tipo

$$\mathbf{z}_0 = ((m + \frac{1}{2})\pi, \Delta Q_2, s^{-1/3} + \Delta P_1, 0),$$

onde m pode ser 0 ou 1 e $s = (\tilde{m} + 1/2)/2\tilde{s}$ com $\tilde{m}, \tilde{s} \in \mathbb{N}$, de tal maneira que uma solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$ de (6.47), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma solução duplamente simétrica. Pelo Lema 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.47) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (((\tilde{m} + 1/2)/2\tilde{s})^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi & + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta Q_2 & + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 & + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 & + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.6.3 item (3) e Proposição 6.7.1 item (i), para obter uma solução duplamente simétrica do sistema (6.47), as duas equações abaixo

$$Q_1(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) = (m + \tilde{m} + 1)\pi, \quad Q_2(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) = 0, \quad (6.53)$$

devem ser satisfeitas. Definindo $\phi(\mathbf{X}, \mathcal{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathcal{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathcal{P})) = (Q_1(\mathbf{X}, \mathcal{P}) - (\tilde{m} + m + 1)\pi, Q_2(\mathbf{X}, \mathcal{P})) = (Q_1(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (\tilde{m} + m + 1)\pi, Q_2(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon))$, onde $\mathbf{X} = (\Delta Q_2, \Delta P_1)$, $\mathcal{P} = \epsilon$ e $T/4 = 2\pi\tilde{s}$, o sistema (6.53) é

equivalente a

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, \mathcal{P}) &= (s^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3} \frac{T}{4} - (\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi & + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) &= 0 \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathcal{P}) &= \triangle Q_2 & + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) &= 0,\end{aligned}\tag{6.54}$$

chamada equação de periodicidade.

Observação 6.7.4. Pelo Lema 3.3.1 as funções

$$\begin{aligned}\epsilon^4 [Q_1^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] \\ \epsilon^4 [Q_2^{(1)}(\frac{T}{4}, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)]\end{aligned}$$

são uniformemente limitadas quando ϵ se aproxima de zero, assim definimo-as continuamente em $\epsilon = 0$ tomando seu limite quando ϵ tende a zero, o qual é zero.

Pela observação anterior 6.7.4, podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathcal{P})$ ao caso $\mathcal{P} = \epsilon = 0$ definindo

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, 0) &= ((\tilde{m} + 1/2)/2\tilde{s})^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3} \frac{T}{4} - (\tilde{m} + \frac{1}{2})\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, 0) &= \triangle Q_2.\end{aligned}$$

Portanto, é claro que $\phi(\mathbf{0}, 0) = 0$ com $T/4 = 2\pi\tilde{s}$. Usando as notações anteriores, temos que a função ϕ possui as seguintes propriedades

É verificado que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathcal{P}) = \begin{pmatrix} 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3((\tilde{m} + 1/2)/2\tilde{s})^{-1/3} + \triangle P_1)^{-4} \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ 1 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $T/4 = 2\pi\tilde{s}$. Então, avaliando em $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ e $\epsilon = 0$, segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -6(\frac{\tilde{m}+1/2}{2})^{4/3} \pi \tilde{s}^{-1/3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = -6(\frac{\tilde{m}+1/2}{2})^{4/3} \pi \tilde{s}^{-1/3} \neq 0$ e assim, existe $(D_{\mathbf{X}}\phi)^{-1}(\mathbf{0}, 0)$. Além disso, segue um lema semelhante ao Lema 4.9.8 do Capítulo 4.

■

Teorema 6.7.5. *Considere as equações de movimento (6.47) para o problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão, onde os primários movem-se em uma órbita elíptica de colisão com energia $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = k^{-1/3}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem condições iniciais para a partícula infinitesimal tais que seu movimento é uma solução periódica duplamente simétrica de período $8\pi\tilde{s}$, ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xy cujo período é também igual a $8\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: Primeiramente, é suficiente observar que, sob as hipóteses do teorema e cálculos anteriores, estamos em posição de aplicar o Teorema de Arenstorf a equação de periodicidade (6.53) para ϵ em um intervalo suficientemente pequeno com a função auxiliar $g(\mathbf{X}, \mathcal{P}) = \mathbf{X} - [D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0)]^{-1} \phi(\mathbf{X}, \mathcal{P})$ (como na prova da Proposição 3.2.2). Portanto, existe famílias (indexadas por $m, \tilde{m}, \tilde{s}$) a um parâmetro (ϵ) de condições iniciais $\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, \tilde{s}}(\mathcal{P})$ tais que $\phi(\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, \tilde{s}}(\mathcal{P}), \mathcal{P}) = 0$. Agora, a fim de obtermos soluções periódicas do problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão (6.47) e, conseqüentemente, do sistema (6.4), as condições em (6.53) devem ser satisfeitas simultaneamente com $E = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par. Portanto, para cada $\epsilon = k^{-1/3}$, onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, nós temos condições iniciais cuja solução associada é $8\pi\tilde{s}$ periódica e duplamente simétrica.

■

Observação 6.7.6. 1) Para $\epsilon = k^{-1/3}$, onde k é um inteiro suficientemente grande, nós temos a relação $\hat{k} = 2\tilde{s}k$, $\tilde{s} \in \mathbb{N}$.

2) Uma vez que o período da órbita continuada é $T = 8\pi\tilde{s}$, a relação de comensurabilidade nos dá $T/T_p = 4\tilde{s}k$, onde T_p denota o período dos primários ou o período do sistema perturbado. Desta maneira, temos que o período comum do movimento dos três corpos juntos é $T = 4\tilde{s}kT_p$, e assim, enquanto o corpo infinitesimal completa uma volta, os primários completam $4\tilde{s}k$ períodos.

Nós finalizaremos esta seção com os seguintes importantes resultados, os quais são consequência direta da Proposição 4.1.1 item (3) e Teorema 6.7.5:

Corolário 6.7.7. Existem soluções periódicas duplamente simétrica para o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão (6.47) perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xy cujo período é suficientemente grande. Os primários movem-se em uma órbita de colisão elíptica com energia $\mathcal{E} = -1/2$.

Demonstração: Seja $\varphi(t)$ uma solução do sistema (6.47) dada pelo Teorema 6.7.5, com energia dos primários $\mathcal{E} = -1/2\epsilon^2$. Então, pela Proposição 4.1.1 item 3, temos que $s(t) = \frac{1}{\epsilon^2}\psi(\epsilon^3 t)$ é uma solução do sistema (6.47) onde agora a energia dos primários é $\mathcal{E} = -1/2$. Note que seu período é $8\pi\tilde{s}k$, o qual é tão grande quanto k for. ■

Outra consequência é:

Corolário 6.7.8. Existem soluções periódicas duplamente simétricas, as quais cortam ortogonalmente quaisquer duas retas perpendiculares na origem, do problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão (6.47) perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xy . Os primários movem-se em uma órbita de colisão elíptica com energia $\mathcal{E} = -1/2 - \epsilon^{-2}$.

Demonstração: Este resultado segue imediatamente, uma vez que o nosso problema é invariante por rotações em torno da origem. ■

Usando o Corolário 6.7.7 e novamente a Proposição 4.1.1 item (3), podemos provar a existência de soluções periódica duplamente simétrica para qualquer valor do parâmetro ϵ . Portanto,

Teorema 6.7.9. *Existem soluções duplamente simétrica para o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão (6.47), onde os primários movem-se em uma órbita de colisão elíptica para qualquer energia fixada $\mathcal{E} < 0$, perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xy .*

Continuação de soluções periódicas S_2 -simétricas

Aqui, provamos a existência de órbitas periódicas S_2 -simétricas, usando argumentos semelhantes aos das soluções periódicas duplamente simétricas. Continuaremos trabalhando com as equações de movimento (6.4). No entanto, é possível conseguir órbitas periódicas S_2 -simétricas usando o problema em coordenadas giratórias e variáveis de Poincaré-Delaunay.

Agora caracterizaremos as órbitas circulares S_2 simétricas do problema de Kepler (6.49) cujas soluções com condições iniciais $(Q_{10}, Q_{20}, P_{10}, P_{20})$ at $t = 0$ são descritas por (6.50). Consideremos uma solução do problema de Kepler (6.49) com condições iniciais $\mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_2$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$, com

$$\mathbf{z}_0^* = ((m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, P_1^*, 0),$$

onde m é um inteiro que, sem perda de generalidade, pode ser tomada como 0 ou 1, e Q_2^*, P_1^* são constantes a serem determinadas. Assim, temos que esta solução é escrita da seguinte maneira

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) = (P_1^*)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, Q_2^*, P_1^*, 0).$$

Desde que queremos que esta solução seja S_2 -simétrica, pelas Proposições 6.6.3, item (2) e 6.7.1, item (ii), é suficiente resolver, em $t = T/2$, o sistema

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/2, z_0^*) &= (P_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + (m + \frac{1}{2})\pi = (m + \frac{1}{2} + \tilde{m})\pi \\ P_2^{(0)}(T/2, z_0^*) &= 0 = 0 \end{aligned} \quad (6.55)$$

onde $\tilde{m}$ é um inteiro. Note que, pela equação de periodicidade (6.55), temos liberdade para escolher Q_2^* . No entanto, uma vez que queremos obter uma órbita circular do problema de Kepler, tomamos $Q_2^* = 0$. Pela primeira equação, obtemos

$$\frac{T}{2} = \frac{\tilde{m}\pi}{s}, \quad (6.56)$$

onde $(P_1^*)^{-3} = s$, com s uma constante real tal que $\tilde{m}/s$ é um inteiro positivo, i.e., $s = \tilde{m}/\tilde{s}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Pela Observação 4.6.4, devemos ter $E(0) = 0$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$ e por 2.2.3 item 2, vê-se que devemos tomar

$$T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3, \quad (6.57)$$

onde $\hat{k}$ é um inteiro positivo par. Pelas equações (6.56) e (6.57), segue que

$$\hat{k} = \frac{\tilde{s}}{\epsilon^3}, \quad (6.58)$$

Assim, como $\hat{k}$ é um inteiro par, escolhemos $\epsilon^3 = 1/2k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Portanto, segue que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita circular de raio $(\tilde{m}/\tilde{s})^{-2/3}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$, $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$ sobre o plano xy , cujo período é $T = 2\tilde{s}\pi$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$.

Agora, consideraremos o problema perturbado (6.4). Procuramos por condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = ((m + \frac{1}{2})\pi, \triangle Q_2, s^{-1/3} + \triangle P_1, 0),$$

onde $s = \tilde{m}/\tilde{s}$, de tal modo que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.4), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, é uma órbita periódica S_2 -simétrica. Sabemos que a solução do problema de Kepler (6.49) com condição inicial $\mathbf{z}_0$ é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) = ((s^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi, \triangle Q_2, s^{-1/3} + \triangle P_1, 0).$$

Novamente, pelo Lemma 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.4) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3}t + (m + \frac{1}{2})\pi && + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \triangle Q_2 && + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \triangle P_1 && + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 && + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{aligned}$$

Para obtermos órbitas periódicas S_2 -simétricas, pela Proposição 6.6.3, item (2), e Proposição 6.7.1, item (ii), é suficiente resolver, em $t = T/2$, onde tomamos $T/2 = \tilde{s}\pi$, com $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3} \frac{T}{2} + (m + \frac{1}{2})\pi && + \epsilon^4 [Q_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] = (m + \frac{1}{2} + \tilde{m})\pi, \\ P_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) && + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Seja $\phi(\mathbf{X}, \mathcal{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathcal{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathcal{P})) = (Q_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (m + \frac{1}{2} + \tilde{m})\pi, P_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon))$, onde $\mathbf{X} = (\triangle Q_2, \triangle P_1)$, $\mathcal{P} = \epsilon$. Portanto, as equações de periodicidade são

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathcal{P}) &= ((s^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3} - 1) \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi && + \epsilon^4 [Q_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathcal{P}) &= P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) && + \mathcal{O}(\epsilon^4) = 0. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Semelhantemente ao caso anterior, podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathcal{P})$ ao caso $\epsilon = 0$ definindo

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, 0) &= ((s^{-1/3} + \triangle P_1)^{-3} - 1) \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi, \\ \phi_2(\mathbf{X}, 0) &= P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, 0), \end{aligned}$$

onde $P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon, \mu)$ é dado no lema abaixo.

Lema 6.7.10. Seja $P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon, \mu)$ dada por

$$\mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \mu) = \mathcal{Z}(t, \mathbf{z}_0, \mu) \int_0^t \mathcal{Z}^{-1} \mathbf{F}_1^\mu(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}, \epsilon, \mu) d\tau, \quad (6.61)$$

onde $\mathcal{Z}(t, \mathbf{z}_0, \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}^{(0)}(\xi, t, \mu)}{\partial \xi} |_{\xi = \mathbf{z}_0}$ então

$$P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \frac{15}{16} \int_0^t \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

onde $\|\mathbf{q}\|$ e $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$ denotam as expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$.

Demonstração: Por (6.61) temos que

$$P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) = - \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial Q_2}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}, \epsilon) d\tau, \quad (6.62)$$

e como

$$H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^3},$$

assim, diferenciando H_1 com respeito à Q_2 e usando a igualdade $[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 = \frac{5}{2} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \frac{\alpha t}{\epsilon^3}$ e logo substituindo na expressão (6.62) obtemos

$$P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \frac{15}{16} \int_0^t \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

onde $\|\mathbf{q}\|$ e $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$ denotam as expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$. ■

Para $T = 2\tilde{s}\pi$ e $s = \tilde{m}/\tilde{s}$, segue que $\phi(\mathbf{0}, 0) = 0$. De fato, é fácil ver que $\phi_1(\mathbf{0}, 0) = 0$. Por outro lado, $\phi_2(\mathbf{0}, 0) = P_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \frac{15}{16} s^{13/6} \int_0^{\frac{\tilde{m}}{s}\pi} \sin(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau = 0$.

Aqui, vemos facilmente que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = \begin{pmatrix} 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-4}\pi\tilde{s} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

e assim,

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3s^{4/3}\pi\tilde{s} \\ \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} & \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \end{pmatrix}.$$

Calculando segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2^{(1)}}{\partial \Delta Q_2}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= \frac{15}{8} s^{7/3} \int_0^{\frac{\tilde{m}}{s}\pi} \cos^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &\quad - \frac{15}{4} s^{7/3} \int_0^{\frac{\tilde{m}}{s}\pi} \sin^2(s\tau + (m+1/2)\pi) d\tau \\ &= -\frac{15}{16} s^{4/3} \tilde{m}\pi. \end{aligned}$$

Portanto, $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = -\frac{45}{16} s^{8/3} \tilde{s} \tilde{m} \pi^2 \neq 0$. É um simples exercício verificar que um resultado análogo ao Lema 4.9.8 é válido neste caso. Logo, temos o seguinte teorema

Teorema 6.7.11. *Considere as equações de movimento (6.4) para o problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão, onde os primários movem-se em uma órbita elíptica de colisão, com energia $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (2k)^{-1}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem condições iniciais para o corpo infinitesimal tais que seu movimento é uma solução periódica S_2 simétrica de período $2\pi\tilde{s}$, ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), perto de uma órbita Kepleriana circular sobre o plano xy cujo período também igual a $2\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: A prova segue análoga a demonstração do Teorema 6.7.5. ■

Observação 6.7.12. 1) Para $\epsilon = (2k)^{-1/3}$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $s = \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}$, com $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$, $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ temos a relação $\hat{k} = 2k\tilde{s}$.

2) Uma vez que o período da órbita continuada é $T = 2\pi\tilde{s}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ e $\epsilon^3 = 1/2k$ a relação de comensurabilidade nos dá $T/T_p = 2k\tilde{s}$, onde T_p denota o período dos primários ou o período do sistema perturbado. Assim, temos que o período de movimento dos três corpos juntos é $T = 2k\tilde{s}T_p$, e desta maneira, enquanto o corpo infinitesimal completa uma volta, os primários tem completado $2k\tilde{s}$ períodos.

3) Resultados semelhantes aos Corolários 6.7.7, 6.7.8 e ao Teorema 6.7.9 são também verdadeiros neste caso.

Continuação de soluções periódicas S_1 -simétricas

Aqui provaremos a existência de órbitas periódicas S_1 -simétrica usando argumentos semelhantes aos argumentos do caso de soluções S_2 -simétricas. Continuaremos trabalhando com a equação de movimento (6.4). Aqui também é possível conseguir órbitas periódicas S_1 -simétricas usando o problema em coordenadas giratória e variáveis de Poincaré-Delaunay. Desta vez consideraremos uma solução do problema de Kepler (6.49) com condições iniciais $\mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_1$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$, com

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, 0, P_1^*, P_2^*),$$

onde m é um inteiro que, sem perda de generalidade, tomamos como 0 ou 1, e P_1^*, P_2^* são constantes a serem determinadas. Assim, temos que esta solução é escrita da seguinte maneira

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) = (P_1^*)^{-3}t + m\pi, 0, P_1^*, P_2^*).$$

Queremos que esta solução seja S_1 -simétrica, então pelas Proposições 6.6.3, item (1) and 6.7.1, item (i), é suficiente resolver, em $t = T/2$, o sistema

$$\begin{aligned} Q_1^{(0)}(T/2, z_0^*) &= (P_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi = (m\tilde{m})\pi, \\ Q_2^{(0)}(T/2, z_0^*) &= 0 = 0 \end{aligned} \quad (6.63)$$

onde $\tilde{m}$ é um inteiro. Note que, pela equação de periodicidade (6.63), temos liberdade para escolher P_2^* . No entanto, uma vez que queremos obter uma órbita circular do problema de Kepler tomamos $P_2^* = 0$. Pela primeira equação em (6.63) obtemos

$$\frac{T}{2} = \frac{\tilde{m}\pi}{s}, \quad (6.64)$$

onde $(P_1^*)^{-3} = s$, com s uma constante real tal que $\frac{\tilde{m}}{s}$ é um inteiro positivo, i.e., $s = \tilde{m}/\tilde{s}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Pela observação 4.6.4, devemos ter $E(0) = 0$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$ e por 2.2.3 item 2, devemos tomar

$$T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3, \quad (6.65)$$

onde $\hat{k}$ é um inteiro positivo par. Pelas equações (6.64) e (6.65), segue que

$$\hat{k} = \frac{\tilde{s}}{\epsilon^3}, \quad (6.66)$$

Assim, como $\hat{k}$ é um inteiro positivo par, escolhamos $\epsilon^3 = 1/2k$, com $k \in \mathbb{N}$ e $\tilde{s} \in \mathbb{N}$. Portanto, temos que $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita circular S_1 simétrica, de raio $(\frac{\tilde{m}}{\tilde{s}})^{-2/3}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$, $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$ no plano xy , cujo período é $T = 2\tilde{s}\pi$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$.

Agora, consideraremos o problema perturbado (6.4) e procuremos por condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = (m\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2),$$

onde $s = \tilde{m}/\tilde{s}$, de tal maneira que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.4), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, é uma órbita periódica S_1 -simétrica. Sabemos que a solução do problema de Kepler (6.49) com condição inicial $\mathbf{z}_0$ é dada por

$$\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0) = ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + m\pi, 0, s^{-1/3} + \Delta P_1, \Delta P_2).$$

Novamente, pelo Lema 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.4) é dada por

$$\begin{aligned} Q_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3}t + m\pi & + \epsilon^4 Q_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ Q_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= 0 & + \epsilon^4 Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= s^{-1/3} + \Delta P_1 & + \epsilon^4 P_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ P_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \Delta P_2 & + \epsilon^4 P_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8). \end{aligned}$$

Para obter órbitas periódicas S_1 simétricas, pela Proposição 6.6.3, item (1), e Proposição 6.7.1, item (i) é suficiente resolver, em $t = T/2$, onde tomamos $T/2 = \tilde{s}\pi$, com $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} Q_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi & + \epsilon^4 [Q_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= (m + \frac{1}{2} + \tilde{m})\pi \\ Q_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) & + \mathcal{O}(\epsilon^4) &= 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Seja $\phi(\mathbf{X}, \mathcal{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathcal{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathcal{P})) = (Q_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (m + \tilde{m})\pi, Q_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon))$, onde $\mathbf{X} = (\Delta P_1, \Delta P_2)$, $\mathcal{P} = \epsilon$. Portanto, as equações de periodicidade são dadas por

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathcal{P}) &= (s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi & + \epsilon^4 [Q_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0 \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathcal{P}) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) & + \mathcal{O}(\epsilon^4) &= 0. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Semelhantemente ao caso anterior, extendemos $\phi(\mathbf{X}, \mathcal{P})$ para o caso $\mathcal{P} = \epsilon = 0$ definindo

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, 0) &= ((s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-3} - 1) \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, 0) &= Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, 0), \end{aligned}$$

onde $Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon, \mu)$ é dada no seguinte lema

Lema 6.7.13. *Seja $Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon, \mu)$ dada por*

$$\mathbf{Z}^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \mu) = \mathcal{Z}(t, \mathbf{z}_0, \mu) \int_0^t \mathcal{Z}^{-1} \mathbf{F}_1^\mu(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}, \epsilon, \mu) d\tau, \quad (6.69)$$

com $\mathcal{Z}(t, \mathbf{z}_0, \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}^{(0)}(\xi, t, \mu)}{\partial \xi} |_{\xi = \mathbf{z}_0}$ então

$$Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = -\frac{15}{16} \int_0^t \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

onde $\|\mathbf{q}\|$ e $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial Q_2}$ denotam as expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$.

Demonstração: Por (6.69) temos que

$$Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) = \int_0^{T/2} \frac{\partial H_1}{\partial P_2}(\tau, \mathbf{Z}^{(0)}, \epsilon) d\tau, \quad (6.70)$$

e

$$H_1(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t, \epsilon) = \frac{[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2}{8\|\mathbf{q}\|^3}.$$

Assim, diferenciando H_1 com respeito à P_2 , usando a igualdade $[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 = \frac{5}{2} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \frac{\alpha t}{\epsilon^3}$ e substituindo na expressão (6.70) obtemos

$$Q_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) = -\frac{15}{16} \int_0^t \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^4} \frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2} d\tau + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

onde $\|\mathbf{q}\|$ e $\frac{\partial \|\mathbf{q}\|}{\partial P_2}$ denotam as expressões destas funções calculadas em $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0)$. ■

Para $T = 2\tilde{s}\pi$ e $s = \tilde{m}/\tilde{s}$, segue que $\phi(\mathbf{0}, 0) = 0$. De fato, é fácil ver que $\phi_1(\mathbf{0}, 0) = 0$ e, por outro lado $\phi_2(\mathbf{0}, 0) = Q_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \frac{15}{16} s^{13/6} \int_0^{\frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}\pi} \cos(s\tau + m\pi) d\tau = 0$.

Aqui, facilmente verificamos que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \epsilon) = \begin{pmatrix} -3(s^{-1/3} + \Delta P_1)^{-4} \pi \tilde{s} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

e assim,

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = \begin{pmatrix} -3s^{4/3} \pi \tilde{s} & 0 \\ \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_1}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} & \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \end{pmatrix}.$$

Calculando temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2^{(1)}}{\partial \Delta P_2}(T/2, \mathbf{z}_0, 0) |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} &= -\frac{15}{8} s^{7/3} \int_0^{\frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}\pi} \sin^2(s\tau + m\pi) d\tau \\ &+ \frac{15}{4} s^{7/3} \int_0^{\frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}\pi} \cos^2(s\tau + m\pi) d\tau \\ &= \frac{15}{16} s^{4/3} \tilde{m} \pi. \end{aligned}$$

Assim, $\det D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{0}, 0) = \frac{45}{16} s^{8/3} \tilde{s} \tilde{m} \pi^2 \neq 0$. Verificamos de forma análoga um resultado similar ao Lema 4.9.8 é válido neste caso. Desta maneira, temos o seguinte teorema:

Teorema 6.7.14. *Considere as equações de movimento (6.4) para o problema restrito dos três corpos planar elíptico com colisão, onde os primários movem-se em uma órbita de colisão elíptica com energia $\mathcal{E} = 1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (2k)^{-1}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existe condições iniciais para o corpo infinitesimal tais que seu movimento é uma solução periódica S_1 simétrica de período $2\pi\tilde{s}$ ($\tilde{s} \in \mathbb{N}$), perto de uma órbita circular Kepleriana sobre o plano xy cujo período é também igual a $2\pi\tilde{s}$.*

Demonstração: Segue de modo semelhante a prova do Teorema 6.7.11. ■

Observação 6.7.15. 1) Para $\epsilon = (2k)^{-1/3}$, onde $k \in \mathbb{N}$ e $s = \frac{\tilde{m}}{\tilde{s}}$, onde $\tilde{m} \in \mathbb{Z}$, $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ temos a relação $\hat{k} = 2k\tilde{s}$.

2) Uma vez que o período da órbita continuada é $T = 2\pi\tilde{s}$, onde $\tilde{s} \in \mathbb{N}$ e $\epsilon^3 = 1/2k$ a relação de comensurabilidade nos dá $T/T_p = 2k\tilde{s}$, onde T_p denota o período dos primários ou o período do sistema perturbado. Desta maneira, temos que o período de movimento dos três corpos juntos é $T = 2k\tilde{s}T_p$, e assim, enquanto o corpo infinitesimal completa uma volta, os primários têm completado $2k\tilde{s}$ voltas.

3) Resultados semelhantes aos Corolários 6.7.7, 6.7.8 e ao Teorema 6.7.9 são também verdadeiras neste caso.

6.7.3 Soluções periódicas obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas

Nesta seção provaremos a existência de soluções periódicas duplamente simétricas ($\hat{S}_1 - \hat{S}_2$ simétrica); soluções $\hat{S}_2$ -simétricas e soluções $\hat{S}_1$ -simétricas como continuação de órbitas elípticas convenientes do problema de Kepler por meio do Teorema de Arenstorf para valores apropriados do parâmetro ϵ . Para este caso, não usaremos as coordenadas que temos usado até então, i.e., equação de movimento (6.4) porque, por exemplo, no caso duplamente simétrica nós temos incompatibilidade nas equações de periodicidade e nos casos S_1 e S_2 -simétricas os cálculos tornam-se inviáveis. Os cálculos também são muito complicados quando escolhemos trabalhar com as equações de movimento nas coordenadas inerciais e variáveis de Delaunay. Desta maneira, usamos aqui as equações de movimento em coordenadas giratórias e variáveis de Delaunay.

Com a escolha feita, temos que as equações de movimento em coordenadas giratórias e variáveis de Delaunay são dadas por

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}) \quad (6.71)$$

onde $\mathbf{Z} = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{P}_1, \bar{P}_2)$, $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{Z}) = \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) + \epsilon^4 \hat{\mathbf{F}}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) + \epsilon^8 \hat{\mathbf{F}}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon)$.

$$\hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) = (\bar{P}_1^{-3}, -1, 0, 0)$$

Então, uma solução deste problema com condição inicial

$$\hat{\mathbf{F}}_1(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \bar{P}_1}, \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \bar{P}_2}, -\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \bar{Q}_1}, -\frac{\partial \hat{H}_1}{\partial \bar{Q}_2} \right), \quad \hat{\mathbf{F}}_r(\mathbf{Z}, t, \epsilon) = \left(\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \bar{P}_1}, \frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \bar{P}_2}, -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \bar{Q}_1}, -\frac{\partial \hat{H}_r}{\partial \bar{Q}_2} \right),$$

onde $\hat{H}_1$ e $\hat{H}_r$ são dadas por (6.42) e (6.43), respectivamente, e as expressões de $\|\hat{\mathbf{q}}\|$ e ψ em coordenadas de Delaunay é dada no Lema 5.3.1 ou, de maneira mais precisa, em série de potências, no Lema 5.3.2. Note que um resultado semelhante ao Lema 6.7.3 é válido aqui e, neste caso, podemos também usar as estimativas dos Lemas 3.3.1 e 3.3.2.

Continuação de soluções periódicas duplamente simétricas

Como no caso circular, inicialmente obtemos órbitas periódicas elípticas duplamente simétrica do problema de Kepler

$$\dot{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{F}}_0(\mathbf{Z}) = (\bar{P}_1^{-3}, -1, 0, 0). \quad (6.72)$$

Seja $\mathbf{z}_0^*$ uma condição inicial tal que $\mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_2$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$, com

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, \bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*),$$

onde m e i são inteiros que escolhemos, sem perda de generalidade, 0 ou 1, e $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$ são constantes a serem determinadas. Assim, uma solução do problema de Kepler (6.72) com condição inicial $\mathbf{z}_0^*$ é da forma:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= (\bar{P}_1^*)^{-3}t + m\pi, & \bar{P}_1^{(0)}(t) &= \bar{P}_1^*, \\ \bar{Q}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= -t + (\frac{1}{2} + i)\pi, & \bar{P}_2^{(0)}(t) &= \bar{P}_2^*. \end{aligned}$$

Pelas Proposições 6.6.4, item (3) e 6.7.2 item (i), estas órbitas elípticas serão órbitas duplamente simétricas do problema de Kepler (6.72), se resolvermos as seguintes equações de periodicidade:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) &= (\bar{P}_1^*)^{-3} \frac{T}{4} + m\pi = (m + \tilde{m})\pi \\ \bar{Q}_2^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) &= -T/4 + (\frac{1}{2} + i)\pi = (1 + i + j)\pi \end{aligned} \quad (6.73)$$

onde $\tilde{m}, j$ são inteiros. A segunda equação é satisfeita tomando

$$\frac{T}{4} = -(j + \frac{1}{2})\pi, \quad (6.74)$$

onde $j \in \mathbb{Z}_-$. E substituindo (6.74) na primeira equação de (6.73), segue que

$$(\bar{P}_1^*)^{-3} = -\frac{\tilde{m}}{j+1/2}, \quad (6.75)$$

onde $\tilde{m} \in \mathbb{Z}_+$. Observe que temos algumas restrições em $\bar{P}_2^*$. A saber, $\bar{P}_2^* \neq \bar{P}_1^*$ porque a órbita é elíptica mas não circular e como $\bar{P}_2$ é o momento angular $\bar{P}_2^*$ não deve ser nula. Pela observação 4.6.4, queremos também que $E(0) = 0$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro par e desta maneira devemos tomar

$$T = 4\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (6.76)$$

Uma comparação entre a equação (6.74) e (6.76) mostra que

$$\hat{k} = -2k(2j+1),$$

onde $\epsilon^3 = (4k)^{-1}$, k é um inteiro positivo e $j \in \mathbb{Z}_-$. Assim, temos

$$\mathbf{Z}^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*) = \left((m + \tilde{m})\pi, (i + j + 1)\pi, \left(-\frac{\tilde{m}}{j+1/2}\right)^{-1/3}, \bar{P}_2^* \right),$$

onde $\bar{P}_2^*$ é uma constante real positiva diferente de $\bar{P}_1^* = \left(-\frac{\tilde{m}}{j+1/2}\right)^{-1/3}$. Por construção, $\mathbf{Z}^{(0)}(T/4, \mathbf{z}_0^*)$ pertence a $\mathcal{L}_1$ e $E(T/4) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k} = -2k(2j+1)$. Portanto, a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita duplamente simétrica do problema de Kepler com período $T = -2(2j+1)\pi$ ($j \in \mathbb{Z}_-$) sobre o plano xy .

Agora, analisemos o sistema perturbado (6.71). Primeiramente, tomamos condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$ do tipo

$$\mathbf{z}_0 = (m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, \left(-\frac{\tilde{m}}{j+1/2}\right)^{-1/3} + \Delta\bar{P}_1, \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2),$$

de tal maneira que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.71), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno seja uma órbita duplamente simétrica obtida como continuação de uma órbita Kepleriana elíptica. Pelo Lema 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.71) é dada por

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3}t + m\pi && + \epsilon^4 \bar{Q}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{Q}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= -t + (i + \frac{1}{2})\pi && + \epsilon^4 \bar{Q}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{P}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1 && + \epsilon^4 \bar{P}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{P}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2 && + \epsilon^4 \bar{P}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \end{aligned}$$

onde $\bar{P}_1^*$ é dada em (6.75). Chamando $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = (\bar{Q}_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) - (\tilde{m} + m)\pi, \bar{Q}_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) - (i + j + 1)\pi) = (\bar{Q}_1(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (\tilde{m} + m)\pi, \bar{Q}_2(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (i + j + \frac{1}{2})\pi)$, onde $\mathbf{X} = (T, \Delta\bar{P}_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta\bar{P}_2)$. Pela Proposição 6.6.4, item (3) e Proposição 6.7.2 item (ii), para obtermos uma órbita duplamente simétrica do sistema (6.71), é suficiente resolver as equações de periodicidade,

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{4} - \tilde{m}\pi && + \epsilon^4 [\bar{Q}_1^{(1)}(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] = 0, \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= -T/4 - (j + 1/2)\pi && + \epsilon^4 [\bar{Q}_2^{(1)}(T/4, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] = 0. \end{aligned} \quad (6.77)$$

É claro que nós extendemos $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ ao caso $\epsilon = 0$ definindo

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{4} + (\tilde{m} + \frac{1}{2}) \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{0}) &= -T/4 - (j + 1/2)\pi. \end{aligned}$$

Portanto, $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = 0$ quando $\mathbf{X}_0 = (-2(2j+1)\pi, 0)$. Neste caso, a matriz $D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ é dada por

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-4} \frac{T}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ -\frac{1}{4} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $\bar{P}_1^* = (-\tilde{m}/(j+1/2))^{-1/3}$. Assim, segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left(-\frac{\tilde{m}}{j+1/2}\right)^{-3} & 6 \left(-\frac{\tilde{m}}{j+1/2}\right)^{4/3} (2j+1) \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é não nulo. Portanto, uma vez que podemos obter um resultado semelhante ao Lema 4.9.8, o Teorema de Arenstorf pode ser aplicado para resolver o sistema de equações (6.77).

Teorema 6.7.16. *Considere as equações de movimento (6.71) para o problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão, onde os primários se movem em uma órbita elíptica de colisão com energia $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (4k)^{-1}$ para k um inteiro suficientemente grande, então existem condições iniciais para o corpo infinitesimal tais que seu movimento é uma solução periódica duplamente simétricas de período próximo a $-2(2j+1)\pi$ ($j \in \mathbb{Z}_-$), perto de uma órbita Kepleriana elíptica sobre o plano xy cujo período é igual a $-2(2j+1)\pi$.*

Demonstração: Como no Teorema 6.7.5, primeiro observamos que, sob as hipóteses do teorema, podemos aplicar o Teorema de Arenstorf as equações de periodicidade (6.77) para ϵ em um intervalo suficientemente pequeno com $\mathbf{X} = (T, \Delta \bar{P}_1)$ e $\mathcal{P} = (\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$. Portanto, existem famílias $\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, j, i, \bar{P}_2^*}(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ (indexadas por $m, \tilde{m}, j, i, \bar{P}_2^*$) a dois parâmetros $(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ de condições iniciais tais que $\phi(\mathbf{X}_{m, \tilde{m}, j, i, \bar{P}_2^*}(\epsilon, \Delta \bar{P}_2), \epsilon, \Delta \bar{P}_2) = 0$. A fim de obtermos soluções periódicas do problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão (6.71), as condições em (6.77) devem ser satisfeitas simultaneamente com a condição de comensurabilidade $T/2\pi\epsilon^3 \in \mathbb{Q}$. Assim, uma vez que $T = T(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ e $\epsilon^3 = (4k)^{-1}$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ e $\Delta \bar{P}_2 \in \mathbb{R}$ tal que $T((4k)^{-1/3}, \Delta \bar{P}_2)/2\pi\epsilon^3 = 2kT((4k)^{-1/3}, \Delta \bar{P}_2)/\pi \in \mathbb{Q}$. Assim, para estes $\epsilon = (4k)^{-1/3}$, onde k é um inteiro positivo suficientemente grande, e $\Delta \bar{P}_2 \in \mathbb{R}$, temos algumas condições iniciais que dão origem a uma solução de (6.71), as quais são $T = T(\epsilon, \Delta \bar{P}_2)$ periódicas e duplamente simétrica. ■

Observação 6.7.17. Considerações análogas às observações 6.7.6 são válidas para este caso e resultados semelhantes ao Corolário 6.7.7, 6.7.8 e Teorema 6.7.9 são verdadeiros nesta situação.

Continuação de soluções periódicas $\hat{S}_2$ -simétricas

Nesta subseção provaremos a existência de soluções periódicas do sistema perturbado (6.71), obtidas como continuação de órbitas Keplerianas elípticas. Novamente, o primeiro passo é obter órbitas periódicas elípticas $\hat{S}_2$ -simétricas do problema de Kepler (6.72). Consideraremos soluções com condições iniciais $\mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_2$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$, com

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, \bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*),$$

onde m, i são inteiros que escolheremos, sem perda de generalidade, 0 ou 1 e $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$ são constantes a ser determinadas. Pela Proposição 6.6.4, item (2) e Proposição 6.7.2 item (ii), podemos obter uma órbita Kepleriana elíptica $\hat{S}_2$ -simétrica se conseguirmos resolver as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)}(T/2) &= (\bar{P}_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi = (m + \tilde{m})\pi \\ \bar{Q}_2^{(0)}(T/2) &= -T/2 + (\frac{1}{2} + i)\pi = (i + j + \frac{1}{2})\pi \end{aligned} \quad (6.78)$$

onde $\tilde{m}, j$ são inteiros. A segunda equação é satisfeita por

$$\frac{T}{2} = -j\pi, \quad (6.79)$$

onde $j \in \mathbb{Z}_-$. E, substituindo (6.79) na primeira equação de (6.78), segue que

$$(\bar{P}_1^*)^{-3} = -\frac{\tilde{m}}{j}, \quad (6.80)$$

onde $\tilde{m} \in \mathbb{Z}_+$. Pela observação 4.6.4, queremos também que $E(0) = 0$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um conveniente inteiro par e, desta maneira, devemos tomar

$$T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (6.81)$$

Assim, combinando (6.79) e (6.81) temos $\hat{k} = -2kj$, com $\epsilon^3 = (2k)^{-1}$, k é um inteiro positivo e $j \in \mathbb{Z}_-$. Portanto, temos

$$\mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) = \left((m + \tilde{m})\pi, (i + j + \frac{1}{2})\pi, \left(-\frac{\tilde{m}}{j} \right)^{-1/3}, \bar{P}_2^* \right),$$

onde $\bar{P}_2^*$ é uma constante real positiva diferente de $\bar{P}_1^* = (-\tilde{m}/j)^{-1/3}$. Logo, por construção, $\mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*)$ pertence a $\mathcal{L}_2$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k} = -2kj$. Desta maneira, a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita periódica elíptica $\hat{S}_2$ -simétrica com período $T = -2j\pi$ ($j \in \mathbb{Z}_-$) sobre o plano xy .

Para o sistema perturbado, procuramos por condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$, do tipo

$$\mathbf{z}_0 = (m\pi, (i + \frac{1}{2})\pi, (-\tilde{m}/j)^{-1/3} + \Delta\bar{P}_1, \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2),$$

de tal modo que uma solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0)$ de (6.71), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma órbita periódica $\hat{S}_2$ -simétrica obtida como continuação de uma órbita periódica Kepleriana elíptica $\hat{S}_2$ -simétrica. Pelo Lema 3.3.1 temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.71) é dada por

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3}t + m\pi & + \epsilon^4 \bar{Q}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{Q}_2(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= -t + (i + \frac{1}{2})\pi & + \epsilon^4 \bar{Q}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{P}_1(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= \bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1 & + \epsilon^4 \bar{P}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8) \\ \bar{P}_2(t, \epsilon, \mathbf{z}_0) &= \bar{P}_2^* + \Delta\bar{P}_2 & + \epsilon^4 \bar{P}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \end{aligned}$$

onde $\bar{P}_1^*$ é dado em (6.80). Seja $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = (\bar{Q}_1(T/2, \Delta\bar{P}_1, \epsilon, \Delta\bar{P}_2) - (\tilde{m} + m)\pi, \bar{Q}_2(T/2, \Delta\bar{P}_1, \epsilon, \Delta\bar{P}_2) - (i + j + \frac{1}{2})\pi)$, onde $\mathbf{X} = (T, \Delta\bar{P}_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta\bar{P}_2)$. Pela Proposição 6.6.4, item (2) e Proposição 6.7.2 item (ii), para obtermos uma órbita $\hat{S}_2$ -simétrica do sistema (6.71), é suficiente resolvermos

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi & + \epsilon^4 [\bar{Q}_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0 \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= -T/2 - j\pi & + \epsilon^4 [\bar{Q}_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Pelas mesmas razões dos casos anteriores (veja observação 6.7.4) podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ ao caso $\epsilon = 0$ definindo

$$\begin{aligned} \phi_1(\mathbf{X}, \Delta\bar{P}_2, 0) &= (\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, \Delta\bar{P}_2, 0) &= -T/2 - j\pi. \end{aligned}$$

Portanto, é claro que $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = 0$, onde $\mathbf{X}_0 = (-2j\pi, 0)$. Aqui, temos

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-4} \frac{T}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $\bar{P}_1^* = (-\tilde{m}/j)^{-1/3}$. Assim, segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\tilde{m}}{j} & 3\pi(-\tilde{m})^{4/3} j^{-1/3} \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é não nulo. Assim, podemos provar um resultado semelhante ao Lema 4.9.8. e segue o teorema abaixo

Teorema 6.7.18. *Considere as equações de movimento (6.71) para o problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão, onde os primários movem-se em uma órbita elíptica de colisão com energia $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (2k)^{-1/3}$ para k um inteiro suficientemente grande, então existem condições iniciais para o corpo infinitesimal tais que seu movimento é uma solução periódica $\hat{S}_2$ -simétrica de período próximo a $-2j\pi$ ($j \in \mathbb{Z}_-$), perto de uma órbita Kepleriana elíptica sobre o plano xy cujo período é igual a $-2j\pi$.*

Observação 6.7.19. Fatos semelhantes a observação 6.7.6 são válidos para este caso. Também temos análogos Corolários 6.7.7, 6.7.8 e o Teorema 6.7.9.

Continuação de soluções periódicas $\hat{S}_1$ -simétricas

Caracterizamos as soluções do problema de Kepler (6.72) com condições iniciais $\mathbf{z}_0^* \in \mathcal{L}_1$ quando $t = 0$ e $E(0) = 0$,

$$\mathbf{z}_0^* = (m\pi, i\pi, \bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*),$$

onde m, i são inteiros que escolhemos, sem perda de generalidade, 0 ou 1, e $\bar{P}_1^*, \bar{P}_2^*$ são constantes a serem determinadas. Estas soluções são da forma:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= (\bar{P}_1^*)^{-3}t + m\pi, & \bar{P}_1^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= \bar{P}_1^* \\ \bar{Q}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= -t + i\pi, & \bar{P}_2^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*) &= \bar{P}_2^*. \end{aligned}$$

Pela Proposição 6.6.4, item (1) e Proposição 6.7.2 item (i), obtemos uma órbita elíptica S_1 -simétrica para o problema de Kepler (6.72), se resolvermos as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\overline{Q}_1^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) &= (\overline{P}_1^*)^{-3} \frac{T}{2} + m\pi = (m + \tilde{m})\pi \\ \overline{Q}_2^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) &= -T/2 + i\pi = (i + j)\pi\end{aligned}\quad (6.83)$$

onde $\tilde{m}, j$ são inteiros. A segunda equação é satisfeita por

$$T/2 = -j\pi, \quad (6.84)$$

onde $j \in \mathbb{Z}_-$. Substituindo (6.84) na primeira equação de (6.83), segue que

$$(\overline{P}_1^*)^{-3} = -\frac{\tilde{m}}{j}, \quad (6.85)$$

onde $\tilde{m} \in \mathbb{Z}_+$. Observe que temos alguma liberdade em escolher $\overline{P}_2^*$, pois somente temos as restrições $\overline{P}_2^* \neq \overline{P}_1^*$ e como $\overline{P}_2$ é o momento angular, $\overline{P}_2^*$ deve ser não nulo. Pela observação 4.6.4, queremos também que $E(0) = 0$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k}$ é um inteiro conveniente par, e desta maneira devemos tomar

$$T = 2\hat{k}\pi\epsilon^3. \quad (6.86)$$

Assim, combinando (6.84) e (6.86) temos

$$\hat{k} = -2kj,$$

com $\epsilon^3 = (2k)^{-1}$, k uma constante inteira positiva e $j \in \mathbb{Z}_-$. Portanto, temos

$$\mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*) = \left((m + \tilde{m})\pi, (i + j)\pi, \left(-\frac{\tilde{m}}{j} \right)^{-1/3}, \overline{P}_2^* \right),$$

onde $\overline{P}_2^*$ é uma constante real positiva diferente de $\overline{P}_1^* = (-\tilde{m}/j)^{-1/3}$. Logo, por construção, $\mathbf{Z}^{(0)}(T/2, \mathbf{z}_0^*)$ pertence a $\mathcal{L}_1$ e $E(T/2) = \hat{k}\pi$, onde $\hat{k} = -2kj$. Portanto, a solução $\mathbf{Z}^{(0)}(t, \mathbf{z}_0^*)$ é uma órbita periódica elíptica $\hat{S}_1$ -simétrica com período $T = -2j\pi$ ($j \in \mathbb{Z}_-$) sobre o plano xy .

Agora, procedemos com o estudo do sistema perturbado. Procuraremos por condições iniciais em uma vizinhança de $\mathbf{z}_0^*$, do tipo

$$\mathbf{z}_0 = (m\pi, i\pi, (-\tilde{m}/j)^{-1/3} + \Delta\overline{P}_1, \overline{P}_2^* + \Delta\overline{P}_2),$$

de tal maneira que uma solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.71), com $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno, seja uma órbita periódica $\hat{S}_1$ -simétrica obtida como continuação de uma órbita periódica Kepleriana elíptica $\hat{S}_1$ -simétrica.

Pelo Lema 3.3.1, temos que a solução $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon)$ de (6.71) é dada por

$$\begin{aligned}\overline{Q}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= (\overline{P}_1^* + \Delta\overline{P}_1)^{-3}t + m\pi & + \epsilon^4 \overline{Q}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \overline{Q}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= -t + i\pi & + \epsilon^4 \overline{Q}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \overline{P}_1(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \overline{P}_1^* + \Delta\overline{P}_1 & + \epsilon^4 \overline{P}_1^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8), \\ \overline{P}_2(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) &= \overline{P}_2^* + \Delta\overline{P}_2 & + \epsilon^4 \overline{P}_2^{(1)}(t, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^8),\end{aligned}$$

onde $\overline{P}_1^*$ é dada em 6.85). Definindo, $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = (\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}), \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})) = (\overline{Q}_1(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (\tilde{m} + m)\pi, \overline{Q}_2(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) - (i + j)\pi)$, onde $\mathbf{X} = (T, \Delta\overline{P}_1)$, $\mathbf{P} = (\epsilon, \Delta\overline{P}_2)$, e pela Proposição 6.6.4, item (1) e Proposição 6.7.2 item (i), para obtermos uma órbita $\hat{S}_1$ -simétrica do sistema (6.71), é suficiente resolvermos,

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= (\overline{P}_1^* + \Delta\overline{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} - \tilde{m}\pi & + \epsilon^4 [\overline{Q}_1^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0 \\ \phi_2(\mathbf{X}, \mathbf{P}) &= -T/2 - j\pi & + \epsilon^4 [\overline{Q}_2^{(1)}(T/2, \mathbf{z}_0, \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^4)] &= 0.\end{aligned}\quad (6.87)$$

Podemos estender $\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P})$ ao caso $\epsilon = 0$ definindo

$$\begin{aligned}\phi_1(\mathbf{X}, 0, \Delta\overline{P}_2) &= (s^{-1/3} + \Delta\overline{P}_1)^{-3} \frac{T}{2} + \tilde{m}\pi \\ \phi_2(\mathbf{X}, 0, \Delta\overline{P}_2) &= \frac{T}{2} + j\pi.\end{aligned}$$

Portanto, é claro que $\phi(\mathbf{X}_0, \mathbf{0}) = 0$, onde $\mathbf{X}_0 = (-2j\pi, 0)$. É verificado que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-3} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & -3(\bar{P}_1^* + \Delta\bar{P}_1)^{-4}\frac{T}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^4) & 0 + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{pmatrix},$$

onde $\bar{P}_1^* = (-\tilde{m}/j)^{-1/3}$. Assim, segue que

$$D_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}_0, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\tilde{m}}{j} & -3\pi\tilde{m}^{4/3}j^{-1/3} \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo determinante é não nulo. Facilmente nós provamos um resultado semelhante como no Lema 4.9.8. E segue o seguinte teorema

Teorema 6.7.20. *Considere as equações de movimento (6.71) para o problema restrito dos três corpos isósceles elíptico com colisão, onde os primários se movem em uma órbita elíptica de colisão com energia $\mathcal{E} = -1/2 \epsilon^{-2}$. Se $\epsilon = (2k)^{-1/3}$ para k um inteiro positivo suficientemente grande, então existem condições iniciais para o corpo infinitesimal tal que seu movimento é uma solução periódica $\hat{S}_1$ -simétrica de período próximo a $-2j\pi$ ($j \in \mathbb{Z}_-$), perto de uma órbita periódica Kepleriana elíptica $\hat{S}_1$ -simétrica sobre o plano xy cujo período é igual a $-2j\pi$.*

Observação 6.7.21. Consequências semelhantes a Observação 6.7.6 são válidas para esta simetria e uma versão adaptada dos Corolários 6.7.7, 6.7.8 e do Teorema 6.7.9 são válidas aqui.

6.8 Soluções periódicas distantes dos primários

Nesta seção usamos argumentos semelhantes a [35] no capítulo 9 ou equivalentemente a seção E do capítulo VI em [33] (ambas aplicadas a um sistema Hamiltoniano autônomo) ou em [26] (aplicado a um sistema Hamiltoniano periódico), consideraremos a situação quando a partícula infinitesimal está distante dos primários. Pela Proposição 4.1.1 podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\epsilon = 1$. Então o sistema (6.4) se torna 2π -periódico.

Teorema 6.8.1. *Existem duas famílias a um parâmetro de soluções periódicas, com período próximo de 2π para o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão perto de uma circular Kepleriana. Além disso, estas órbitas tendem ao infinito.*

Demonstração: A prova está baseada em argumentos semelhantes usados em [33] p. 161 no problema restrito dos três corpos planar circular. Mas, precisamos dar os argumentos da prova em nosso caso pois são problemas de natureza diferente. Consideremos a situação quando o corpo infinitesimal está distante dos primários cujo caso é chamado *cometa*. Para considerar órbitas perto do infinito, escalamos as variáveis posição por μ^{-2} e variáveis momento por μ , onde μ é um parâmetro positivo.

Queremos analisar a continuação de soluções periódicas para este problema de $\mu = 0$ à $\mu > 0$ pequeno. Não podemos, aqui, provar a continuação das soluções periódicas em um sistema de coordenadas inercial, pois o sistema, nestas coordenadas, é muito degenerado. Por esta razão, consideremos um sistema de coordenadas giratórias (ξ, η) obtido através da transformação simplética (6.21). Desta maneira, temos que as equações de movimento nas novas variáveis são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= p_{\xi} + \eta & \dot{p}_{\xi} &= p_{\eta} - \frac{2\xi}{(\xi^2 + \eta^2 + \frac{\rho^2(t)}{4})^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{\eta} &= p_{\eta} - \xi & \dot{p}_{\eta} &= -p_{\xi} - \frac{2\eta}{(\xi^2 + \eta^2 + \frac{\rho^2(t)}{4})^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

e a nova função Hamiltoniana é

$$H(\xi, \eta, p_{\xi}, p_{\eta}, \tau, \epsilon) = \frac{p_{\xi}^2 + p_{\eta}^2}{2} + \eta p_{\xi} - \xi p_{\eta} - \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \frac{\rho^2(t)}{4}}}. \quad (6.88)$$

As "variáveis cometas" $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}_x, \bar{p}_y)$ são introduzidas por

$$\xi = \mu^{-2} \underline{x}, \quad \eta = \mu^{-2} \underline{y}, \quad p_\xi = \mu p_{\underline{x}}, \quad p_\eta = \mu p_{\underline{y}}.$$

Uma vez que esta mudança é μ -simplética, a função Hamiltoniana nas variáveis cometas é

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\underline{\mathbf{q}}, \underline{\mathbf{p}}, \tau, \epsilon, \mu) = -\underline{\mathbf{q}}^T K \underline{\mathbf{p}} + \mu^3 \left(\frac{\|\underline{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{\|\underline{\mathbf{q}}\|^2 + \mu^4 \frac{\rho^2(t)}{4}}} \right) \quad (6.89)$$

onde $\underline{\mathbf{q}} = (\underline{x}, \underline{y})$, $\underline{\mathbf{p}} = (p_{\underline{x}}, p_{\underline{y}})$. Uma vez que $\mathcal{H}$ é uma função analítica em μ , expandindo em série de Taylor ao redor de $\mu = 0$, temos

$$\mathcal{H} = -\underline{\mathbf{q}}^T K \underline{\mathbf{p}} + \mu^3 \left(\frac{\|\underline{\mathbf{p}}\|^2}{2} - \frac{1}{\|\underline{\mathbf{q}}\|} \right) + \mathcal{O}(\mu^7). \quad (6.90)$$

Observe que quando μ é muito pequeno, o corpo infinitesimal está perto do infinito e pelo Hamiltoniano (6.90) vemos que perto do infinito a força de Coriolis domina. Introduzindo coordenadas polares simpléticas (r, θ, R, Θ) dadas por

$$\begin{aligned} \underline{x} &= r \cos \theta, & \underline{y} &= r \sin \theta \\ p_{\underline{x}} &= R \cos \Theta - \frac{\Theta}{r} \sin \theta, & p_{\underline{y}} &= R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta. \end{aligned}$$

O Hamiltoniano (6.90) torna-se

$$\underline{\mathcal{H}} = \underline{\mathcal{H}}(r, \theta, R, \Theta, \tau, \epsilon, \mu) = -\Theta + \mu^3 \left(\frac{1}{2} \left[R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right] - \frac{1}{r} \right) + \mathcal{O}(\mu^7),$$

e assim, as equações de movimento são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu^3 R + \mathcal{O}(\mu^7) \\ \dot{R} &= \left(\frac{\mu^3 \Theta^2}{r^3} - \frac{\mu^3}{r^2} \right) + \mathcal{O}(\mu^7) \\ \dot{\theta} &= -1 + \frac{\mu^3 \Theta}{r^2} + \mathcal{O}(\mu^7) \\ \dot{\Theta} &= 0 + \mathcal{O}(\mu^7). \end{aligned} \quad (6.91)$$

O parâmetro μ é inversamente proporcional a raiz quadrada da distância do corpo infinitesimal em relação aos primários. Portanto, como $\mu \rightarrow 0$, esta distância tende ao infinito e a forma das equações diferenciais (6.91) degenera. Assim, não podemos usar métodos de perturbação, os quais estão baseados em resolver as equações diferenciais quando $\mu = 0$. Ao invés disso, precisamos obter soluções para μ em uma vizinhança de $\mu = 0$, e para isto aproximamos soluções para este sistema de equações diferenciais. Agora, consideremos as equações de primeira aproximação, ou seja, retiramos os termos de ordem μ^7

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu^3 R & \dot{R} &= \frac{\mu^3 \Theta^2}{r^3} - \frac{\mu^3}{r^2} \\ \dot{\theta} &= -1 + \frac{\mu^3 \Theta}{r^2} & \dot{\Theta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.92)$$

as quais são equações de movimento para o problema de Kepler. Omitindo estes termos, obtemos um sistema onde Θ é uma integral primeira, assim seja $\Theta = \pm \sqrt{2}c$, onde $c \in \mathbb{Z}$. A órbita circular $\varphi(t)$ dada por $r(t) = c^2, R = 0$ é uma solução periódica de (6.92) com período $\frac{2\pi c^3}{-c^3 \pm \mu^3 \sqrt{2}}$. Observe que Θ é também uma integral primeira para o problema completo (com os termos de ordem μ^7), assim podemos reduzir a dimensão do espaço de fase em uma unidade e, além disso, introduzir o mapa de Poincaré em uma superfície de nível do momento angular Θ , reduzindo assim o sistema em mais uma unidade. Desta maneira, quando linearizarmos o sistema (6.92) trabalharemos somente com as variáveis r e R . Linearizando as equações de r e R ao longo de $\varphi(t)$ temos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu^3 R \\ \dot{R} &= -\frac{4\mu^3}{c^6}. \end{aligned}$$

Este sistema tem soluções da forma $\exp(\pm \frac{2\mu^3}{c^3})$, e assim os multiplicadores não triviais da órbita circular de (6.92) são $\exp(\frac{\pm i 2\pi \mu^3}{(-c^3 \pm \mu^3 \sqrt{2})}) = 1 \mp \frac{2\pi}{c^3} i \mu^3 + \mathcal{O}(\mu^6)$.

Considere o mapa de Poincaré com respeito a órbita circular $\psi(t)$ em uma superfície de nível do momento angular Θ . Seja u uma coordenada nesta superfície, com $u = 0$, correspondente à órbita circular quando $\mu = 0$. O mapa de Poincaré tem um ponto fixo na origem salvo os termos de ordem μ^3 e é a identidade salvo os termos de ordem μ^2 , nos termos de ordem μ^3 existe um termo cujo Jacobiano tem autovalores $\mp \frac{2\pi}{c^3} i$. Isto é, o mapa de Poincaré é da forma $P(u) = u + \mu^3 p(u) + \mathcal{O}(\mu^6)$, onde $p(0) = 0$, $\partial p(0)/\partial u$ tem autovalores $\mp \frac{2\pi}{c^3} i$. Assim, $\partial p(0)/\partial u$ é não-singular. Aplicando o Teorema da Função Implícita à $G(u, \mu) = (P(u) - u)/\mu^3 = p(u) + \mathcal{O}(\mu^3)$. Uma vez que $G(0, 0) = 0$ e $\partial G(0, 0)/\partial u = \partial p(0)/\partial u$, existe uma função diferenciável $\underline{u}(\mu)$ tal que $G(\underline{u}(\mu), \mu) = 0$ para todo μ suficientemente pequeno. Portanto, as duas soluções podem ser continuadas da equação em (6.92) às equações completas, onde os termos $\mathcal{O}(\mu^7)$ são incluídos. Nestas variáveis, estas soluções têm período T próximo de 2π . Assim, concluímos a prova do teorema. ■

6.9 O fluxo perto do infinito

A fim de estudar e caracterizar as órbitas parabólicas, inicialmente traremos o infinito para a origem, para isto usaremos a transformação canônica introduzida por McGehee [31], isto é,

$$r = \frac{2}{u^2}, \quad \dot{r} = -v, \quad (6.93)$$

assim $u \rightarrow 0$ corresponde à $r \rightarrow +\infty$, e as equações (6.10) assumem a forma

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{4} u^3 v \\ \dot{v} &= \frac{1}{4} u^4 \left(\frac{1}{[1 + \frac{u^4 \rho^2(t)}{16}]^{3/2}} - \frac{c^2}{4} u^2 \right). \end{aligned} \quad (6.94)$$

A origem $(u, v) = (0, 0)$ é um ponto de equilíbrio degenerado do sistema (6.94) contido na reta $u = 0$, visto que a diferencial do mapa de Poincaré calculada em $(0, 0)$ é a matriz identidade.

Uma vez que a função $\rho(t) = \epsilon^2 [1 - \cos E_\epsilon(t)]$ é $2\pi\epsilon^3$ periódica em t temos que em $\{(u, v, t) \in \mathbb{R}^3 \mid u \geq 0\}$ a solução $(u, v, t) = (0, 0, t)$ do sistema

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{1}{4} u^3 v \\ \dot{v} &= \frac{1}{4} u^4 \left(\frac{1}{[1 + \frac{u^4 \rho^2(t)}{16}]^{3/2}} - \frac{c^2}{4} u^2 \right) \\ \dot{t} &= 1. \end{aligned} \quad (6.95)$$

é $2\pi\epsilon^3$ periódica em t . Desta maneira, a origem $(u, v) = (0, 0)$ torna-se uma órbita periódica no infinito de período $2\pi\epsilon^3$. Esta órbita periódica é degenerada e, uma vez que o sistema é não autônomo, não podemos remover a degenerescência reescalando o tempo pelo fator u^{-3} . Como a órbita periódica no infinito $(u, v, t) = (0, 0, t)$, $t \in [0, 2\pi\epsilon^3]$ é degenerada, para garantir a existência das variedades invariantes estável e instável a esta órbita periódica, não podemos aplicar diretamente o teorema de Hartman [22] ao sistema (6.95). Em [31], McGehee estudou a aplicação de Poincaré na vizinhança da órbita periódica no infinito $u = 0 = v$ para três casos particulares do problema restrito dos três corpos distinto do nosso caso, e garantiu a existência e unicidade de variedades analíticas invariantes. Aplicando os argumentos de McGehee ao nosso problema, concluímos que os conjuntos estável e instável associados à órbita periódica no infinito $(u, v, t) = (0, 0, t)$, $t \in [0, 2\pi\epsilon^3]$ são variedades analíticas.

Considere o sistema (6.95) expandido em série de potências em torno de $u = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \frac{1}{4}u^3(-v) \\
(-\dot{v}) &= -\left(\frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}u^6 - \frac{3}{32}u^8\rho^2(t) + \frac{15}{512}u^{12}\rho^4(t) + \mathcal{O}(u^{16})\right) \\
\dot{t} &= 1.
\end{aligned} \tag{6.96}$$

Usando o fluxo deste sistema temos a seguinte proposição

Proposição 6.9.1. *A aplicação de Poincaré $\mathcal{P}$ definida em uma vizinhança da órbita periódica $(u, v) = (0, 0)$ é dada pelo difeomorfismo*

$$\mathcal{P}(u, -v) = \left(u + \frac{\pi\epsilon^3}{2}u^3[v + r_1(u, v)], -v - \frac{\pi\epsilon^3}{2}u^3\left[u + \frac{c^2}{2}u^3 + 12\rho^2(t)u^5 + r_2(u, v)\right]\right), \tag{6.97}$$

onde r_1 e r_2 são funções reais analíticas de segunda ordem em u e v .

Demonstração: Veja Apêndice A. ■

Para toda vizinhança aberta U da origem em $\mathbb{R}^2$ definimos

$$A^+(\mathcal{P}, U) = \{\mathbf{a} \in U \mid \mathcal{P}^k(\mathbf{a}) \in U \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}^+, \text{ e } \mathcal{P}^k(\mathbf{a}) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow +\infty\}.$$

Claramente, as órbitas parabólicas para $t \rightarrow +\infty$ contidas em U são exatamente $A^+(\mathcal{P}, U)$. McGehee em [31] provou que existe um aberto $\mathcal{U}$ tal que $A^+(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ é uma curva analítica em $u > 0$. Usando $\mathcal{P}^{-1}$ definimos $A^-(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ o qual é o conjunto das órbitas parabólicas para $t \rightarrow -\infty$. Se convencionarmos a variedade invariante estável local $P^s = A^+(\mathcal{P}, \mathcal{U})$ por $u = F(-v, -t)$ então, uma vez que o sistema (6.95) é invariante pela simetria $(u, v, t) \rightarrow (u, -v, -t)$, a equação $u = F(v, t)$ é a equação da variedade invariante instável local $P^u = A^-(\mathcal{P}, \mathcal{U})$. Por sua analiticidade, podemos expressar esta variedade como uma série de potências

$$u = F(v, t) = \sum_{n \geq 0} a_n(t)v^n,$$

a qual pode ser calculada por comparação dos coeficientes dos termos. Na proposição abaixo expressamos os coeficientes $a_n(t)$ da variedade instável cujos cálculos são detalhados no Apêndice A.

Proposição 6.9.2. *Os pontos (u, v, t) da variedade invariante instável local $P^u = A^-(\mathcal{P}, U)$ da órbita periódica $u = v = 0$ no infinito satisfaz*

$$u = F(v, t) = v + a_3(t)v^3 + a_5(t)v^5 + a_6(t)v^6 + \dots \tag{6.98}$$

e os pontos da variedade invariante estável local $P^s = A^+(\mathcal{P}, U)$ verifica $u = F(-v, -t)$, onde F é $2\pi\epsilon^3$ periódica em t e analítica em $v \in (0, b)$ para alguma constante positiva b , onde

$$\begin{aligned}
a_3(t) &= \frac{c^2}{8}, & a_8(t) &= \frac{21}{256}c^4t - \frac{3}{2}a_5t + \frac{3}{32}\int_0^t \rho^2(\tau)d\tau, \\
a_5(t) &= \frac{42}{768}c^4 + \frac{30}{192}\epsilon^4, & a_9(t) &= \text{constante}, \\
a_6(t) &= 0, & a_{10}(t) &= -2a_7t + \frac{33}{512}c^6t + \frac{15}{512}c^2\epsilon^4t + \frac{33}{256}c^2\int_0^t \rho^2(\tau)d\tau, \\
a_7(t) &= \frac{1}{2}\left[\frac{33}{512}c^6 + \frac{180}{512}c^2\epsilon^4\right],
\end{aligned}$$

onde c é o momento angular e com $\int_0^t \rho^2(\tau)d\tau = \epsilon^4 \int_0^t [1 - \cos E_\epsilon(\tau)]^2 d\tau$.

Demonstração: Veja a prova em Apêndice A. ■

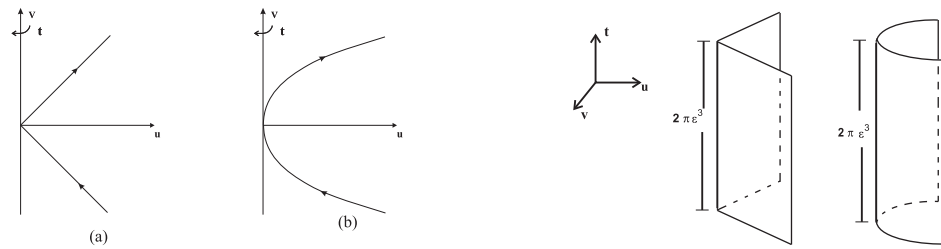


Figura 6.3: A figura (a) representa o comportamento das variedades invariantes perto do infinito, no plano (u, v) , para c muito pequeno e a figura (b) para c suficientemente grande e as figuras da direita representam as variedades vistas nas coordenadas (u, v, t) .

Assim, pela Proposição 6.9.2, as variedades invariantes, no plano (u, v) , tem o aspecto das figuras (a) ou (b) abaixo

Podemos ainda estudar o comportamento local do fluxo perto das variedades invariantes. Para isso, primeiramente, as variedades invariantes são trazidas para os eixos coordenados através da aplicação

$$\tilde{u} = \frac{1}{4}(u - F(-v, -t)) = \frac{1}{4}(u + v) + \dots$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{4}(u - F(v, t)) = \frac{1}{4}(u - v) + \dots$$

O restante da discussão o leitor encontrará em [36] a partir da página 155, onde é provado que o fluxo próximo as variedades invariantes se comportam como na figura 6.4 abaixo.

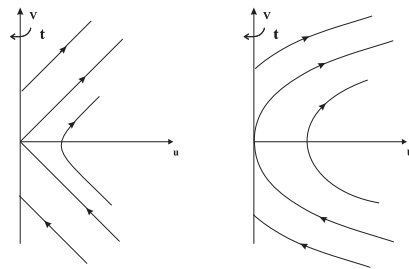


Figura 6.4: O fluxo em torno do infinito.

Finalizaremos esta seção discutindo sobre a diferenciabilidade do campo que define o sistema (6.95). Escrevemos o sistema (6.95) como segue

$$\dot{\chi} = \mathbf{F}(\chi, \epsilon) \quad (6.99)$$

onde $\chi = (u, v, t)$ e

$$\mathbf{F}(\chi, \epsilon) = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1(\chi, \epsilon) \\ \mathbf{F}_2(\chi, \epsilon) \\ \mathbf{F}_3(\chi, \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}u^3v \\ \frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}u^6 - \frac{3}{32}u^8\rho^2(t) + \frac{15}{512}u^{12}\rho^4(t) + \mathcal{O}(u^{16}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lema 6.9.3. *A função vetorial $\mathbf{F}(u, v, t, \epsilon)$ pode ser estendida de modo contínuo para $\epsilon = 0$. Além disso, esta função é analítica em u e v , C^1 com respeito a variáveis t e somente C^0 com respeito à ϵ .*

Demonstração: Note que como $\rho(t) = \epsilon^2[1 - \cos E_\epsilon(t)]$, temos que $\mathbf{F}_2(\chi, \epsilon)$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mathbf{F}_2(\chi, \epsilon) = \frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}u^6 + \epsilon^4 g_2(\chi, \epsilon)$$

onde

$$g_2(\chi, \epsilon) = \left(-\frac{3}{32}u^8[1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 + \epsilon^4 \frac{15}{512}u^{12}[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4 + \mathcal{O}(u^{16}) \right)$$

A função $g_2(\chi, \epsilon)$ é limitada, considerando u e v em uma vizinhança compacta da solução do sistema não perturbado ($\epsilon = 0$). Portanto, segue que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^4 g_2(\chi, \epsilon) = 0$$

e deste modo definimos

$$\mathbf{F}_2(\chi, 0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}u^6 - \epsilon^4 g_2(\chi, \epsilon) = \frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}u^6$$

Logo, a função vetorial $\mathbf{F}$ pode ser definida em $\epsilon = 0$

$$\mathbf{F}(\chi, 0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(\chi, \epsilon) = \left(\frac{u^3}{4}v, \frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}u^6, 1 \right)$$

Para estudar a diferenciabilidade da função $\mathbf{F}$ com respeito à ϵ , note que é suficiente calcularmos a derivada com respeito à ϵ da componente $\mathbf{F}_2$ desta função. A primeira derivada de $\mathbf{F}_2(\chi, \epsilon)$ com respeito à ϵ é dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \epsilon}(\chi, \epsilon) &= -\frac{6\rho(t)u^8}{32} \frac{\partial \rho(t)}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial \epsilon} \\ &= -\frac{6\rho(t)u^8}{32} \left(2\epsilon[1 - \cos E_\epsilon(t)] + \epsilon^2 \frac{\partial E_\epsilon(t)}{\partial \epsilon} \sin E_\epsilon(t) \right) + \frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial \epsilon} \end{aligned}$$

onde, pelo Lema 2.2.2 item 3 $\frac{\partial E}{\partial \epsilon} = -\frac{3[E - \sin E]}{\epsilon[1 - \cos E]}.$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \epsilon}(\chi, \epsilon) &= -\frac{12\epsilon^3 u^8}{32} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 + \frac{18u^8 \epsilon^3}{32} \sin E_\epsilon(t) [E_\epsilon(t) - \sin E_\epsilon(t)] + \frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial \epsilon} \\ &= -\frac{12\epsilon^3 u^8}{32} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2 + \frac{18u^8 t}{32} \sin E_\epsilon(t) + \frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial \epsilon}, \end{aligned}$$

pela equação de Kepler. Observe que não temos problemas com os termos $\frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial \epsilon}$ e nem com suas derivadas com respeito à ϵ , pois as potências de ϵ e de $[1 - \cos E_\epsilon(t)]$, nestes termos, estão crescendo e o termo $\frac{\partial E}{\partial \epsilon}$ apenas tem o fator ϵ e $[1 - \cos E_\epsilon(t)]$. Observe que $\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \epsilon}(\chi, \epsilon)$ não está definido em $\epsilon = 0$ e que nós também não podemos

estender $\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial \epsilon}(\chi, \epsilon)$ em $\epsilon = 0$ de modo contínuo, uma vez que o termo $\sin E_\epsilon(t)$ aparece multiplicado por uma constante e por $u^8 t$ apenas. Portanto, concluímos que a função vetorial $\mathbf{F}(\chi, \epsilon)$ é somente contínua com respeito à ϵ .

Agora mostraremos que $\mathbf{F}$ é analítica em u e v para cada ϵ e t , mas é apenas C^1 com respeito à t para cada ϵ, u e v . Com relação as variáveis u e v é fácil ver que não há problemas, i.e., que $\mathbf{F}$ é analítica, visto que é uma função polinomial com respeito às variáveis u e v . Assim, calculemos a derivada de $\mathbf{F}_2(\chi, \epsilon)$ com respeito à t . Esta derivada é dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial t}(\chi, \epsilon) &= -\frac{6\rho(t)u^8}{32} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial t} \\ &= -\frac{6u^8}{32} \epsilon \sin E_\epsilon(t) + \frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial t},\end{aligned}$$

onde $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon^2 \sin E_\epsilon(t) \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\sin E_\epsilon(t)}{\epsilon[1 - \cos E_\epsilon(t)]}$ pelo Lema 2.2.2 item 2. Observe que aqui também não temos problemas com relação aos termos $\frac{\partial \mathcal{O}(u^{12})}{\partial t}$ e nem com as suas derivadas com respeito à t , pois as potências de ϵ e de $[1 - \cos E_\epsilon(t)]$ são crescentes e o termo $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ apenas possui o fator ϵ e $[1 - \cos E(t)]$. Observe que na segunda derivada de $\mathbf{F}_2$ com relação à t aparecerá o termo

$$-\frac{\epsilon 6u^8}{32} \cos E_\epsilon(t) \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{6u^8}{32\epsilon^2[1 - \cos E_\epsilon(t)]} \cos E_\epsilon(t).$$

Desta maneira, vê-se que $\mathbf{F}(\chi, \epsilon)$ é somente C^1 com respeito à t . Portanto, a prova deste lema está concluída. ■

6.10 Topologia das variedades invariantes.

Nesta seção estudaremos a topologia das variedades instável e estável de órbitas parabólicas, as quais já denotamos, respectivamente, por P^u e P^s , assim como sua primeira interseção com o conjunto

$$\Xi = \{(r, p_r) \mid r \in \mathbb{R}_+, p_r = 0\}, \quad (6.100)$$

o qual é uma seção transversal local ao fluxo do sistema (6.10). De fato, pela definição de seção transversal a um fluxo, temos que o fluxo de (6.10) deixa de ser transversal a Ξ quando $\dot{p}_r = 0$. Neste caso, basta tomarmos uma solução de (6.10) com condição inicial $p_r = 0$ e $\dot{p}_r \neq 0$. Pode ser mostrado que a equação $\dot{p}_r = 0$ na seção Ξ (em coordenadas cartesianas) é uma curva fechada em torno da origem. Assim, a seção Ξ está dividida em duas componentes Ξ_+ e Ξ_- , onde

$$\Xi_+ = \{(r, p_r) \mid r \in \mathbb{N}, p_r = 0, \dot{p}_r > 0\} \text{ e } \Xi_- = \{(r, p_r) \mid r \in \mathbb{N}, p_r = 0, \dot{p}_r < 0\}. \quad (6.101)$$

A componente Ξ_+ está no interior da curva $\dot{p}_r = 0$ e a componente Ξ_- no exterior.

Em uma vizinhança de $(u, v) = (0, 0)$ (órbita periódica no infinito) as variedades invariantes estável e instável são obtidas identificando o plano $t = 0$ com o plano $t = 2\pi\epsilon^3$, veja as Figuras da direita em 6.3. Desta maneira, as variedades invariantes, nas coordenadas (u, v, t) , são topologicamente um cilindro. Além disso, o infinito $u = 0$ também é topologicamente um cilindro nestas coordenadas. De fato, consideremos o sistema de equações diferenciais (6.96) no infinito ($u = 0$)

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dt}{dt} = 1.$$

Assim, por ser $t \pmod{2\pi\epsilon^3}$ uma variável angular e $v \in \mathbb{R}$, a variedade do infinito é topologicamente o cilindro

$$\{(u, v, t) \mid u = 0, v \in \mathbb{R}, t \in [0, 2\pi\epsilon^3]\}$$

folheado pelas órbitas periódicas $v = \text{constante}$. Então, os conjuntos α e ω limite das órbitas hiperbólicas e parabólicas são órbitas periódicas. A prova que as variedades invariantes (estável e instável) são topologicamente um cilindro é consequência direta da Proposição 6.9.2 e do fato que a variável t é uma variável angular $\pmod{2\pi\epsilon^3}$. Portanto, temos provado que

Proposição 6.10.1. *O conjunto das órbitas parabólicas para tempos positivos (respectivamente negativos) é uma variedade analítica topologicamente equivalente a um cilindro numa vizinhança do infinito.*

Os resultados numéricos da próxima seção nos darão a evidência numérica da interseção transversal das variedades invariantes estável e instável. Essa transversalidade das variedades acontece sobre a seção transversal Ξ .

6.11 Transversalidade das variedades instável e estável

Até agora vimos que o problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão possui duas variedades de órbitas parabólicas denominadas estável e instável e denotadas respectivamente por P^s e P^u , as quais são topologicamente equivalentes a um cilindro. Nesta seção, mostraremos numericamente que estas variedades se interceptam transversalmente sobre a seção Ξ . Recorremos a uma prova numérica desta interseção transversal, pois, como vimos anteriormente, pelo Lema 6.9.3 não temos o grau de diferenciabilidade necessário para provarmos a interseção transversal das variedades usando as conhecidas técnicas analíticas, como por exemplo, o método de Melnikov. Existem alguns trabalhos em que a hipótese de diferenciabilidade é enfraquecida, como por exemplo [18], onde Delshams trabalha com sistemas Hamiltonianos que possuem parte perturbada de alta frequência ($H(x, \epsilon, t/\epsilon) = H_0(x) + \mu\epsilon^p H_1(x, t/\epsilon)$). No entanto, é exigido que a parte perturbada da função Hamiltoniana que define o sistema tenha média zero e, infelizmente, esse não é o nosso caso. Ainda tentamos contornar o problema da média zero, mas ainda não tivemos sucesso. Gelfreich, em [19], também exige que a parte perturbada da função Hamiltoniana tenha média zero. Portanto, para estudarmos a transversalidade das variedades parabólicas forçosamente recorreremos a técnicas numéricas.

Pelo que expomos acima fica claro que ϵ não é um bom parâmetro para diagnosticarmos caos no problema restrito isósceles dos três corpos com colisão e, pela Proposição 4.1.1, a qual é válida no caso isósceles também, podemos considerar, sem perda de generalidade, $\epsilon = 1$. Desta maneira, de agora por diante consideraremos $\epsilon = 1$.

O sistema (6.10) é equivalente ao sistema (6.30), então para evitarmos resolver a equação de Kepler em cada integração, integraremos numericamente as equações (6.30) tomando condições iniciais sobre a variedade instável, dada pela série (6.98), até seu primeiro cruzamento com a seção Ξ (note que pela equivalência entre os sistemas (6.10) e (6.30), a seção Ξ que é uma seção local transversal ao fluxo do sistema (6.10), desde que $\dot{p}_r \neq 0$, continua sendo uma seção local transversal ao fluxo do sistema (6.30), desde que $dp_r/dE \neq 0$). A variedade estável é obtida da instável por meio da simetria S_1 . A integração numérica foi feita usando o programa Mathematica, maiores detalhes sobre este cálculo veja Apêndice F. O resultado numérico das interseções das variedades é mostrado na Figura 6.5 em coordenadas cartesianas x, y , onde $x = r \cos(t/\epsilon^3)$ e $y = r \sin(t/\epsilon^3)$, onde $\epsilon = 1$.

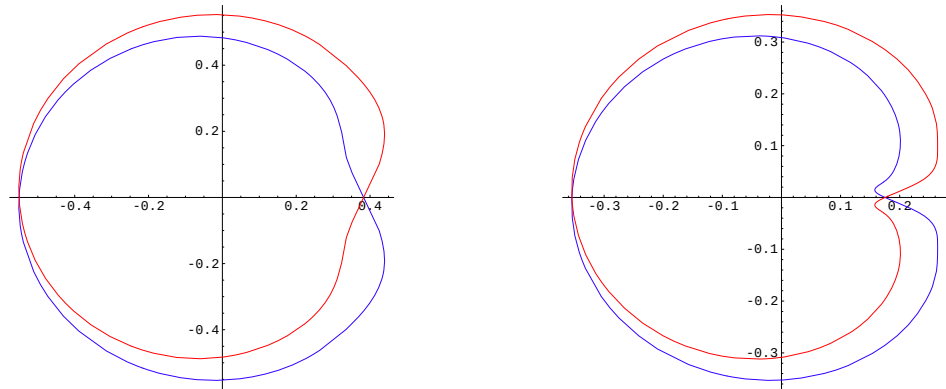


Figura 6.5: A interseção das variedades invariantes sobre a seção Ξ , na figura da esquerda usamos momento angular $c = 1$ e na figura da direita $c = 0.5$. A curva que aparece em azul correspondente a variedade instável.

Observação 6.11.1. Nos cálculos numéricos, estabelecemos a direção de corte com a seção Ξ de $p_r < 0$ à $p_r > 0$, assim quando p_r muda de sinal nós encontramos um instante de tempo t_0 tal que $p_r(t_0) = 0$ e $r(t_0)$ é um ponto

de mínimo.

Na Figura 6.5 vemos que as variedades invariantes se interceptam transversalmente em dois pontos no plano xy , uma interseção ocorre quando $t = 0 \bmod 2\pi$ e a outra ocorre quando $t = \pi \bmod 2\pi$. Resumindo os resultados desta seção temos

Teorema 6.11.2. (Numérico) *No problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão as curvas $\gamma_s = P^s \cap \Xi$, $\gamma_u = P^u \cap \Xi$ se interceptam transversalmente em dois pontos, um quando $t = 0 \bmod 2\pi$ e o outro quando $t = \pi \bmod 2\pi$. Assim, existem duas órbitas que nascem parabolicamente no infinito cruza uma vez a seção Ξ e morre parabolicamente no infinito. Estas órbitas cruzam a seção Ξ uma só vez e em pontos distintos, denotemos estes pontos por ζ'_1 e ζ'_2 .*

Observamos que as órbitas ζ_1 e ζ_2 que cortam a seção Ξ em ζ'_1 e em ζ'_2 são órbitas homoclínicas à órbita periódica no infinito $u = v = 0$.

6.12 A aplicação de Poincaré

Nesta seção descreveremos o mapa de Poincaré, que representaremos por f , associado ao sistema (6.10).

Definimos tal mapa de Poincaré da seguinte maneira: dado um ponto (r_0, t_0) , com $r_0 \neq 0$, sobre Ξ , ou seja, $r_0 = r_0(t_0)$, $p_r(t_0) = 0$ com $\dot{p}_r(t_0) > 0$ ou $\dot{p}_r(t_0) < 0$ e, portanto uma órbita $(r(t), p_r(t))$, seguimos esta órbita até o próximo ponto de interseção com a seção. Denotemos por t_1 o menor valor de t para o qual $p_r(t) = 0$ se este existir, caso contrário definimos $t_1 = \infty$.

Poderemos nos perguntar o que nos garante que sobre a seção existem condições iniciais cujas órbitas voltem a interceptar a seção? Esta pergunta é respondida no seguinte Lema:

Lema 6.12.1. *O interior D_0 da curva real analítica γ_s em Ξ é constituído de condições iniciais para as quais o mapa f está definido. Além disso, condições iniciais fora de D_0 nos dão órbitas que escapam.*

Demonstração: Segue semelhante a prova do Lema 1 em [36], p. 160. ■

Na Seção 6.11, vimos, numericamente, que as curvas γ_s e γ_u se interceptam transversalmente em pontos com valores de corte $t = 0 \bmod 2\pi$ e $t = \pi \bmod 2\pi$. Na Figura 6.6 representamos, de modo mais simples, a interseção das curvas γ_s e γ_u na seção Ξ

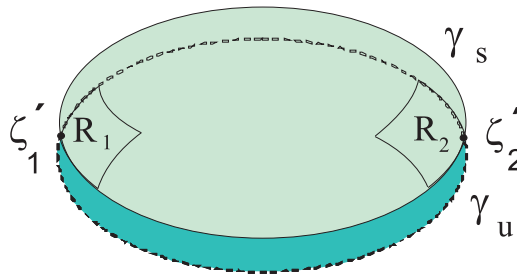


Figura 6.6: A interseção das curvas γ_s e γ_u na seção Ξ .

Denotemos por D_0 a região cuja fronteira é a curva γ_s e por D_1 a região cuja fronteira é a curva γ_u . Com relação a D_0 e a D_1 vale o seguinte lema:

Lema 6.12.2. *A aplicação f leva D_0 sobrejetivamente em um domínio D_1 , o qual é o domínio refletido $D_1 = \rho(D_0)$, com $\rho : (r, t) \rightarrow (r, -t)$. Além disso,*

$$f^{-1} = \rho^{-1} \circ f \circ \rho. \quad (6.102)$$

Demonstração: Segue de modo semelhante a prova do Lema 2 em [36], p. 161. ■

Consideraremos agora a aplicação inversa de Poincaré. Seja (r_0, t_0) um ponto sobre a seção, ou seja, $r_0 = r_0(t_0)$ tal que $p_r(t_0) = 0$ com $p_r'(t_0) > 0$ ou $p_r'(t_0) < 0$. Denotemos por $t_{-1} > -\infty$ o zero de $p_r(t)$ mais próximo de t_0 tal que $t_{-1} < t_0$, caso contrário $t_{-1} = -\infty$.

Pelo Lema 6.12.2, prova-se que a aplicação inversa de Poincaré, f^{-1} , está definida sobre o conjunto D_1 . Desta maneira, a interseção de D_0 e D_1 são condições iniciais cujas órbitas interceptam a seção Ξ em tempos passados e futuros. Assim, tomaremos os retângulos R_1 e R_2 na interseção $D_0 \cap D_1$, como mostrado na Figura 6.6, uma vez que usaremos as duas aplicações f e f^{-1} para obtermos faixas horizontais e verticais em R_1 e R_2 , as quais conheceremos mais adiante.

Finalizaremos esta seção com dois importantes lemas, os quais são bastante usados na construção da dinâmica simbólica em geral.

Lema 6.12.3. ([36], Lema 4 p.89) *Seja $\gamma = \{(r_0, t_0) \mid r_0 = r_0(\lambda), t_0 = t_0(\lambda) \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1\}$ um arco de classe C^1 contido em D_0 tal que γ tem um extremo correspondente a $\lambda = 0$ em γ_s o qual é transversal a esta curva. Então, a curva imagem $f(\gamma) = \{(r_1, t_1) \mid r_1 = r_1(\lambda), t_1 = t_1(\lambda) \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1\}$ se aproxima da curva γ_u girando em espiral, $t_1(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow 0$.*

Um lema semelhante a este é obtido para a imagem, por f^{-1} , de um correspondente arco, $\tilde{\gamma}$, contido em D_1 . Observe que, se na figura 6.6 tomarmos os arcos correspondentes aos lados do retângulo R_1 que têm seus extremos na curva γ_s e são transversais a esta curva, e aplicarmos o Lema 6.12.3 a estes arcos, teremos que a imagem de R_1 por f será como mostra a figura abaixo

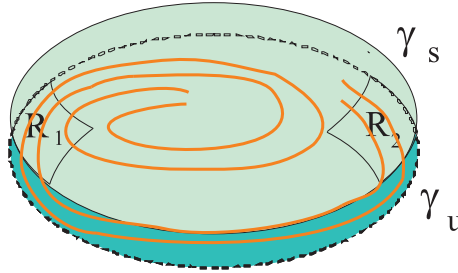


Figura 6.7: A imagem de R_1 por f .

Antes de enunciar o segundo lema, definiremos alguns conjuntos. Para $\delta > 0$, suficientemente pequeno, definimos $D_0(\delta)$ como o conjunto de pontos cuja distância a fronteira de D_0 , ∂D_0 , é menor do que δ . Desde que ∂D_0 é continuamente diferenciável, podemos associar a qualquer ponto $p \in D_0(\delta)$ um único ponto $q \in \partial D_0 = \gamma_s$ mais próximo de p , para um δ suficientemente pequeno.

Para cada $p \in D_0(\delta)$ tal que $q \in \partial D_0$ é o ponto mais próximo à p , seja (ξ, η) um sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ tal que o eixo η é paralelo ao vetor tangente a ∂D_0 em q . Em $D_0(\delta)$ definimos dois feixes de setores: o feixe $\Sigma_0(\delta^{1/3})$ que designa para todo $p \in D_0(\delta)$ o conjunto

$$\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| \leq \delta^{1/3}|\eta|\},$$

veja Figura 6.8. O segundo feixe $\Sigma'_0(\delta^{1/3})$ definimos como o feixe complementar de $\Sigma_0(\delta^{1/3})$. De maneira análoga, definimos $\Sigma_1(\delta^{1/3})$ e $\Sigma'_1(\delta^{1/3})$ como sendo os feixes de setores correspondentes a $D_1(\delta)$, obtidos, por exemplo, pela reflexão ρ de $\Sigma_0(\delta^{1/3})$ e $\Sigma'_0(\delta^{1/3})$, respectivamente.

Uma vez que o mapa de Poincaré descrito em Moser [36] leva faixas verticais em faixas horizontais e o nosso mapa de Poincaré f , como veremos na seção 6.13.2, faz o papel contrário, ou seja, leva faixas horizontais em faixas verticais temos, portanto, que a função f^{-1} , faz o mesmo papel (com relação as faixas) do mapa ϕ em Moser (veja [36], p. 91-95). Neste caso, nossos conjuntos $\Sigma'_1(\delta^{1/3})$ e $\Sigma_1(\delta^{1/3})$ são, respectivamente, os conjuntos $\Sigma'_0(\delta^{1/3})$ e $\Sigma_0(\delta^{1/3})$ descritos em Moser [36]. Analogamente, nossos conjuntos $\Sigma'_0(\delta^{1/3})$ e $\Sigma_0(\delta^{1/3})$ são, respectivamente, os conjuntos $\Sigma'_1(\delta^{1/3})$ e $\Sigma_1(\delta^{1/3})$ de Moser. Assim, para o nosso caso, temos a seguinte versão do Lema 5 de Moser:

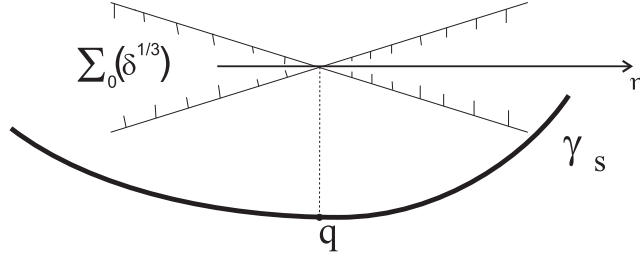


Figura 6.8: Os conjuntos Σ_0 e Σ'_0 no espaço tangente $T_p \Xi$, onde $p \in D_0(\delta)$.

Lema 6.12.4. (Lema 5 [36], p.91) *Existe uma constante β em $0 < \beta < 1$ tal que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno a aplicação f^{-1} leva $D_1(\delta)$ em $D_0(\delta^\beta)$ e a diferencial Df^{-1} leva o feixe de setores $\Sigma'_1 = \Sigma'_1(\delta^{1/3})$ em $\Sigma_0 = \Sigma_0(\delta^{\beta/3})$. Além disso, se $(\xi_p, \eta_p) \in \Sigma'_1$, $Df^{-1}(p)(\xi_p, \eta_p) = (\xi_{f^{-1}(p)}, \eta_{f^{-1}(p)})$ então,*

$$|\xi_{f^{-1}(p)}| \geq \delta^{-1/3} |\xi_p|. \quad (6.103)$$

Podemos resumir a força desse lema do seguinte modo: seja $\tilde{\gamma} = \{(r_1, t_1) \mid r_1 = r_1(\lambda), t_1 = t_1(\lambda) \text{ com } 0 \leq \lambda \leq 1\}$ um arco de classe C^1 contido em D_1 tal que um extremo correspondente a $\lambda = 0$, está em γ_u . O Lema 6.12.4 nos garante que a curva imagem $f^{-1}(\tilde{\gamma})$ se aproxima da curva γ_s com relação as suas direções tangentes. Desta maneira, temos que além da curva imagem $f^{-1}(\tilde{\gamma})$ se aproximar de γ_s espiralando, ela também se aproxima segundo suas direções tangentes. A mesma conclusão podemos obter para a imagem $f(\gamma)$, onde γ é descrita no Lema 6.12.3.

As demonstrações dos Lemas 4 e 5 de Moser, a saber, Lemas 6.12.3 e 6.12.4 são válidas também para o *problema restrito isósceles elíptico dos três corpos com colisão*, visto que em torno de $u = 0$ e $v = 0$ o fluxo deste problema restrito isósceles está tão próximo do fluxo do problema de Sitnikov quanto desejarmos. Isto se deve ao fato de que no nosso problema assim como no problema de Sitnikov quando a partícula infinitesimal chega parabolicamente no infinito, não distingue, em primeira aproximação, se os primários estão colisionando, como é o nosso caso, ou se estão dando voltas ao redor um do outro, como é o caso do problema de Sitnikov.

6.13 A dinâmica simbólica

6.13.1 O shift de Bernoulli como uma aplicação topológica

Dado o tempo $t = t_0$ tal que $p_r(t_0) = 0$, consideremos a sucessão de todos os t_n tais que $p_r(t_n) = 0$, ordenados de acordo com $t_n < t_{n+1}$. Desta maneira, temos as seguintes situações:

1. Existe t_n para todo $n \in \mathbb{Z}$.
2. Existe t_n para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $n > 0$, mas a a partir de um certo inteiro $k < 0$, t_k não existe. Então, neste caso, nós tomamos $t_k = \infty$.
3. Existe t_n para todo $n \in \mathbb{Z}$ com $n < 0$, mas a a partir de um certo inteiro $l > 0$, t_l não existe. Então, neste caso, nós tomamos $t_l = \infty$.
4. t_k não existe para um certo $k < 0$, e para um certo inteiro $l > 0$, t_l também não existe. Então, neste caso, nós tomamos $t_k = \infty$ e $t_l = \infty$.

Introduzimos os inteiros

$$a_n = \left[\frac{t_n - t_{n-1}}{2\pi} \right],$$

onde $[Z]$ denota o maior inteiro menor ou igual à Z .

Observação 6.13.1. Por definição $a_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ medem o número de colisões binárias entre m_1 e m_2 entre dois zeros consecutivos $p_r(t_{n-1})$ e $p_r(t_n)$ de $p_r(t)$, ou seja, entre duas passagens de m_3 por $p_r = 0$. Portanto, em geral a_n mede o número de colisões dos primários m_1 e m_2 entre duas distâncias mínimas consecutivas de m_3 ao centro de massa dos primários.

Desta maneira, se associa a cada órbita de m_3 uma sucessão de números naturais que eventualmente pode começar ou terminar com o símbolo ∞ e que será dos quatro tipos decritos abaixo:

1.

$$(\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots),$$

com $a_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esta sucessão de naturais corresponde a órbitas de m_3 que oscilam entre uma distância mínima e uma distância máxima da origem, ou seja, a órbita de m_3 oscila entre um $r_{\text{mínimo}}$ e um $r_{\text{máximo}}$ seja para tempos negativos ou positivos. Como consequência, estas órbitas nunca chegam a escapar para o infinito e nunca são capturadas pelo infinito.

2.

$$(\infty, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots),$$

com $k \leq 0$, e $a_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n > k$. Este caso corresponde a órbitas de m_3 que foram capturadas pelo infinito, ou seja, a partícula infinitesimal, m_3 , vem do infinito e permanece oscilando entre uma distância mínima e máxima da origem.

3.

$$(\dots, a_{l-2}, a_{l-1}, \infty),$$

com $l \geq 1$ e $a_n \in \mathbb{N}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n < l$. Estas sucessões correspondem a órbitas que oscilam indefinidamente entre uma distância mínima e máxima da origem e depois escapam para o infinito.

4.

$$(\infty, a_{k-1}, \dots, a_{l-1}, \infty),$$

com $k \leq 0$, $l \geq 1$ e $a_n \in \mathbb{N}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ tal que $k < n < l$. Este caso corresponde a órbitas que vem do infinito e oscilam por algum tempo entre $r_{\text{mínimo}}$ e $r_{\text{máximo}}$ e depois escapam para o infinito.

Observação 6.13.2. É claro que as órbitas definidas pela primeira sequencia correspondem, no sistema original, a soluções limitadas, assim desde que $c \neq 0$ estas soluções são periódicas ou quase-periódicas. Note que periódica não é necessariamente simétrica. Por outro lado, as órbitas associadas ao item 4 correspondem a tão chamadas soluções oscilatórias (i.e., o limite superior de $r(t)$ é infinito, enquanto o limite inferior de $r(t)$ é finito).

Seja A o conjunto $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, onde ∞ é um elemento arbitrário e B o conjunto $\{1, 2\}$. Denotemos por $\Sigma = S(A) \times S(B)$, o conjunto das duplamente sequências

$$\left(\begin{array}{c} \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots \\ \dots, i_{-1}, i_0, i_1, \dots \end{array} \right), \quad a_i \in A \text{ e } i_j \in \{1, 2\},$$

onde $a = (\dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots) \in S(A)$ é uma sucessão de elementos de A dos quatro tipos descritos acima e $\iota = (\dots, i_{-1}, i_0, i_1, \dots) \in S(B)$, é uma sucessão de elementos de B . As sucessões do conjunto $S(B)$ são apenas para registrar quando a órbita passou pelo retângulo R_1 ou quando passou pelo retângulo R_2 . Entenderemos melhor isso mais adiante. O espaço $S(B)$ é um espaço topológico munido com topologia cuja base de vizinhanças é dada pelos conjuntos

$$\mathcal{U}_j(\nu) = \{\nu^* \in S(B) \mid \nu_i^* = \nu_i, |i| \leq j\}, \quad \nu \in S(B).$$

Já o espaço $S(A)$ é um espaço topológico munido com uma topologia cuja base de vizinhanças é dada, para cada tipo de elemento a de A , por

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_j(a) &= \{a^* \in S(A) \mid a_i^* = a_i, |i| \leq j\}, \text{ onde } a \in S(A) \text{ é do tipo 1,} \\ \mathcal{U}_j(a) &= \{a^* \in S(A) \mid a_i^* = a_i, \text{ se } k < i \leq j, a_k^* \geq j\}, \text{ onde } a \in S(A) \text{ é do tipo 2,} \\ \mathcal{U}_j(a) &= \{a^* \in S(A) \mid a_i^* = a_i, \text{ se } -j \leq i < l, a_l^* \geq j\}, \text{ onde } a \in S(A) \text{ é do tipo 3,} \\ \mathcal{U}_j(a) &= \{a^* \in S(A) \mid a_i^* = a_i, \text{ se } k < i < j, a_k^*, a_l^* \geq j\}, \text{ onde } a \in S(A) \text{ é do tipo 4.} \end{aligned}$$

Com esta base de vizinhanças descrita acima, podemos afirmar que Σ é um espaço topológico, munido com a topologia produto cuja base de vizinhanças é dada pelo produto cartesiano das bases de vizinhanças de $S(A)$ e $S(B)$, respectivamente. Além disso, usando a técnica padrão das frações contínuas, temos a seguinte proposição

Proposição 6.13.3. *O espaço topológico Σ , munido com a topologia produto descrita acima, é compacto.*

Demonstração: Veja [2], p. 334. ■

Além disso, temos que Σ munido com a métrica d dada por

$$d(s, \hat{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \frac{|s_i - \hat{s}_i|}{1 + |s_i - \hat{s}_i|},$$

onde $s = \begin{pmatrix} \dots, a_{-1} \cdot a_0 a_1, \dots \\ \dots, i_{-1} \cdot i_0 i_1, \dots \end{pmatrix}$ e $\hat{s} = \begin{pmatrix} \dots, \hat{a}_{-1} \cdot \hat{a}_0 \hat{a}_1, \dots \\ \dots, \hat{i}_{-1} \cdot \hat{i}_0 \hat{i}_1, \dots \end{pmatrix}$ é um espaço métrico. Observe que, com esta métrica, duas sequências s e $\hat{s}$ estarão próximas, se elas coincidirem em seus blocos centrais.

Desta forma, podemos definir a aplicação contínua shift (para maiores detalhes veja [51], p.442) $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \Sigma &\rightarrow \Sigma \\ \begin{pmatrix} \dots, a_{-1} \cdot a_0 a_1, \dots \\ \dots, i_{-1} \cdot i_0 i_1, \dots \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} \dots, a_{-1} a_0 \cdot a_1, \dots \\ \dots, i_{-1} i_0 \cdot i_1, \dots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esta aplicação é conhecida como o *shift de Bernoulli* de Σ . O domínio de definição de σ é o conjunto

$$D(\sigma) = \left\{ s = \begin{pmatrix} a \\ l \end{pmatrix} \in \Sigma \mid a_0 \neq \infty \right\},$$

com imagem

$$Im(\sigma) = \left\{ s = \begin{pmatrix} a \\ l \end{pmatrix} \in \Sigma \mid a_1 \neq \infty \right\}.$$

Esta versão do shift de Bernoulli que descrevemos aqui está inspirada no trabalho de Delgado e Vidal [16]. Se F é uma aplicação contínua de um espaço topológico X nele mesmo, e G é outra aplicação contínua do espaço topológico Y nele mesmo, então dizemos que G é um subsistema de F se existe um homeomorfismo H de X em $H(X) \subset Y$ tal que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow H & & \downarrow H \\ Y & \xrightarrow{G} & Y \end{array}$$

Mostraremos adiante que a aplicação shift, σ , definida sobre o conjunto $D(\sigma) \subset \Sigma$, é um subsistema do mapa de Poincaré, f , definido na seção 6.12.

6.13.2 A ferradura de Smale

Nesta seção mostraremos que a aplicação de Poincaré, f , possui a geometria da ferradura de Smale. Vimos na seção 6.12 que, pelo Lema 6.12.3, a imagem por f , do retângulo R_1 intercepta o próprio retângulo R_1 e o retângulo R_2 em infinitas faixas disjuntas, as quais chamaremos faixas verticais. O mesmo raciocínio pode ser aplicado a função f^{-1} , assim quando tomarmos a imagem de R_1 por f^{-1} ela interceptará R_1 e R_2 infinitas vezes formando, desta forma, faixas, as quais chamaremos faixas horizontais. Aqui, escolhemos começar por definir as

faixas horizontais e, uma vez que $f^{-1}(R_{i_1}) \cap R_{i_0} \neq \emptyset$, para todo $i_0, i_1 \in \{1, 2\}$, denotaremos todas essas faixas horizontais da seguinte maneira:

$$f^{-1}(R_{i_1}) \cap R_{i_0} = \bigcup_{a_0=1}^{\infty} H_{i_0 i_1}^{a_0} \text{ onde } i_0, i_1 = 1, 2. \quad (6.104)$$

O índice i_0 , nas faixas horizontais, se refere a qual retângulo se encontra a faixa horizontal e o segundo índice i_1 se refere para qual retângulo vai. Já o índice a_0 se refere a ordem natural das faixas horizontais de fora para dentro nos retângulos R_1 ou R_2 (veja Figura 6.9). Estas faixas, como vemos na Figura 6.9, são tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(H_{i_0 i_1}^{a_n}) = 0$, onde $d(H_{i_0 i_1}^{a_n})$ denota o diâmetro da a_n -ésima faixa horizontal no retângulo R_{i_0} e temos que

$$H_{i_0 i_1}^{a_0} \subset H_{i_0} = R_{i_0}.$$

Repetindo o procedimento descrito em (6.104), obtemos

$$f^{-1}(f^{-1}(R_{i_2}) \cap R_{i_1}) \cap R_{i_0} = \bigcup_{a_0=1, a_1=1}^{\infty} f^{-1}(H_{i_1 i_2}^{a_1}) \cap H_{i_0}^{a_0} = \bigcup_{a_0=1, a_1=1}^{\infty} H_{i_0 i_1 i_2}^{a_0 a_1},$$

onde ordenamos como segue na Figura 6.10.

Além disso, temos as seguintes inclusões

$$H_{i_0 i_1 i_2}^{a_0 a_1} \subset H_{i_0 i_1}^{a_0}. \quad (6.105)$$

De fato, definindo $H_{i_0 i_1 i_2}^{a_0 a_1} = H_{i_0}^{a_0} \cap f^{-1}(H_{i_1 i_2}^{a_1})$, e uma vez que $H_{i_1 i_2}^{a_1} \subset H_{i_1}$, temos

$$H_{i_0 i_1 i_2}^{a_0 a_1} = H_{i_0}^{a_0} \cap f^{-1}(H_{i_1 i_2}^{a_1}) \subset H_{i_0}^{a_0} \cap f^{-1}(H_{i_1}) = H_{i_0 i_1}^{a_0}.$$

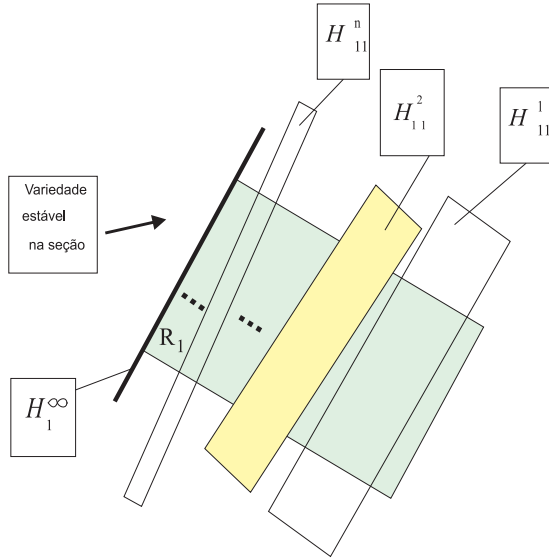


Figura 6.9: A interseção $f^{-1}(R_1) \cap R_1$, ordenadas de fora para dentro, em direção a variedade estável.

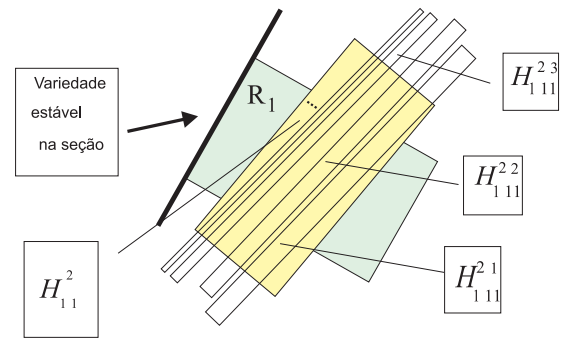


Figura 6.10: As imagens por f^{-1} das faixas horizontais $H_{i_1 i_2}^{a_1}$ em H_1^2 ordenadas de fora para dentro

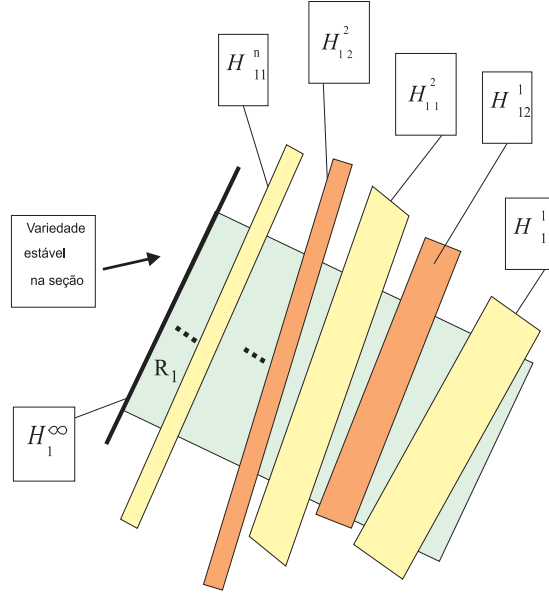


Figura 6.11: A interseção $f^{-1}(R_1)$ e de $f^{-1}(R_2)$ com R_1 ordenadas de fora para dentro, em direção a variedade estável.

Na terceira etapa de iteração obtemos

$$f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(R_{i_3}) \cap R_{i_2}) \cap R_{i_1}) \cap R_{i_0} = \bigcup_{a_0, a_1, a_2=1}^{\infty} f^{-1}(H_{i_1 i_2 i_3}^{a_1 a_2}) \cap H_{i_0}^{a_0} = H_{i_0 i_1 i_2 i_3}^{a_0 a_1 a_2}.$$

Continuando o procedimento teremos

$$H_{i_0 i_1}^{a_0} \supset H_{i_0 i_1 i_2}^{a_0 a_1} \supset \dots \supset H_{i_0 i_1 \dots i_{n-1} i_n}^{a_0 a_1 \dots a_{n-1}} \supset H_{i_0 i_1 \dots i_n i_{n+1}}^{a_0 a_1 \dots a_n} \supset \dots, \text{ onde } i_j = \{1, 2\}, a_j \in \mathbb{N}, \quad (6.106)$$

$$\text{e } d(H_{i_0 i_1 \dots i_n i_{n+1}}^{a_0 a_1 \dots a_n}) \leq \tilde{a}_h d(H_{i_0 i_1 \dots i_{n-1} i_n}^{a_0 a_1 \dots a_{n-1}}) \leq \dots \leq \tilde{a}_h^{n-1} d(H_{i_0 i_1 i_2}^{a_0 a_1}) \leq \tilde{a}_h^n d(H_{i_0 i_1}^{a_0}) \leq \tilde{a}_h^n, \quad \tilde{a}_h \in (0, 1) \text{ e } n = 0, 1, 2, \dots$$

Por uma construção semelhante, agora usando f , obtém-se bandas verticais $V_{i_{-1} \dots i_{-n}}^{a_{-1} \dots a_{-n+1}}$ tais que

$$V_{i_{-1} i_{-2}}^{a_{-1}} \supset V_{i_{-1} i_{-2} i_{-3}}^{a_{-1} a_{-2}} \supset \dots \supset V_{i_{-1} \dots i_{-n}}^{a_{-1} \dots a_{-n+1}} \supset V_{i_{-1} \dots i_{-n-1}}^{a_{-1} \dots a_{-n}} \supset \dots, \text{ onde } a_j \in \mathbb{N}, i_j = \{1, 2\},$$

e também temos

$$d(V_{i_{-1} \dots i_{-n} i_{-n-1}}^{a_{-1} \dots a_{-n}}) \leq \tilde{a}_v d(V_{i_{-1} \dots i_{-n}}^{a_{-1} \dots a_{-n+1}}) \leq \dots \leq \tilde{a}_v^{n-1} d(V_{i_{-1} i_{-2}}^{a_{-1}}) \leq \tilde{a}_v^{n-1}, \quad \tilde{a}_v \in (0, 1) \text{ e } n = 1, 2, \dots$$

Proposição 6.13.4. ([36], Lema 1 p.70) Seja $\mathcal{V}_1 \supset \mathcal{V}_2 \supset \dots$ (resp. $\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2 \supset \dots$) uma sucessão de bandas verticais (resp. bandas horizontais) tais que o diâmetro das bandas, denotado por $d(\mathcal{V}_k)$ (resp. $d(\mathcal{H}_k)$), tendem a zero quando k tende a infinito. Então, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}_k$ (resp. $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_k$) é uma curva vertical (resp. curva horizontal).

Proposição 6.13.5. ([36], Lema 2, p.70) Dada uma curva vertical e uma curva horizontal em R_1 ou R_2 , elas se interceptam exatamente em um ponto.

A seguir enunciaremos uma proposição que nos garante pensar as inclusões em (6.106) como o caminho percorrido por uma solução do sistema (6.10).

Proposição 6.13.6. *Cada faixa horizontal em R_1 está caracterizada pelo fato de ter condições iniciais tais que o número de colisões entre os primários é constante. Além disso, a diferença no número de colisões entre os primários quando a partícula passa por duas faixas horizontais sucessivas H_i^1 e H_{i+1}^1 é exatamente 1. Cada faixa horizontal em R_2 está caracterizada pelo fato de ter condições iniciais tais que o número de pericentros entre os primários é constante. Além disso, a diferença no número de pericentros entre os primários quando a partícula passa por duas faixas horizontais sucessivas H_i^1 e H_{i+1}^1 é exatamente 1.*

Demonstração: Primeiramente provemos a segunda afirmação. A prova para o retângulo R_2 é análoga a de R_1 . Desta maneira faremos somente a demonstração para o retângulo R_1 . Sabemos que as variedades instável e estável são dadas, respectivamente, pelos gráficos das funções $u = F(v, t)$ e $u = F(-v, -t)$, os quais podem ser vistos quando identificamos o plano $t = 0$ com o plano $t = 2\pi$ na Figura da direita em 6.3, ou podemos representar estas variedades em coordenadas cilíndricas $X = (1 + v) \cos t$, $Y = (1 + v) \sin t$ e $Z = v$. A órbita periódica no infinito corresponde a circunferência $X^2 + Y^2 = 1$, $Z = 0$. Nestas coordenadas temos o seguinte desenho das variedades

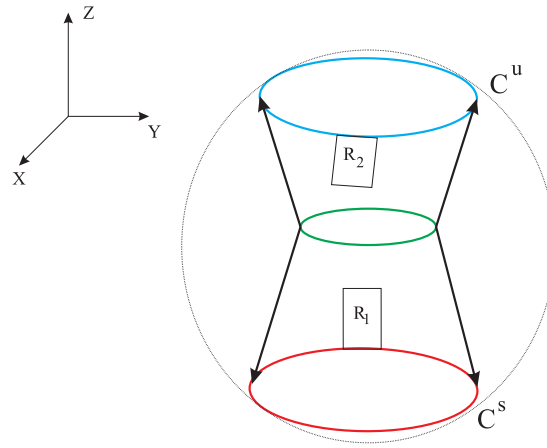


Figura 6.12: Variedades instável e estável numa vizinhança do infinito.

Se seguimos, por exemplo, o retângulo R_1 pelo fluxo para frente e o retângulo R_2 pelo fluxo para trás, eles continuam sendo retângulos quando interceptam a vizinhança do infinito, descrita na Figura 6.12. Continuamos movendo R_1 pelo fluxo para frente até interceptar R_2 nesta vizinhança do infinito. O Lema 6.12.3 nos garante que a imagem de R_1 interceptará R_2 espiralando em torno da circunferência C^u . Desta maneira, vemos que a interseção desta banda espiral com R_2 são bandas caracterizadas pelo tempo de percurso entre duas bandas sucessivas ser sempre 2π , uma vez que as bandas espiralam em torno da circunferência C^u . Portanto, como o período de movimento dos primários é 2π , temos que quando a partícula passa por duas faixas ou bandas sucessivas ocorreu uma colisão entre os primários.

Seja p uma condição inicial em alguma faixa horizontal $H_{i_k}^{a_k}$ na vizinhança do infinito. Seguimos esta solução, com condição inicial p , até chegar na seção Ξ . Suponha que neste intervalo de tempo (da vizinhança do infinito até chegar a seção) os primários tenham executado n colisões. Por continuidade das soluções de (6.95), concluímos que para toda condição inicial p que se tome nesta faixa horizontal, $H_{i_k}^{a_k}$ (pois podemos diminuir $H_{i_k}^{a_k}$ se necessário, ou seja, diminuir $D_0(\delta)$ e $D_1(\delta)$) quando seguimos a solução de (6.95), com esta condição inicial p , até a seção Ξ , neste intervalo de tempo, também ocorrerá n colisões entre os primários. ■

Observação 6.13.7. Observe que pela segunda parte da Proposição 6.13.6, relativa ao retângulo R_1 (respectivamente retângulo R_2), temos que não ocorre o caso em que a órbita sai da seção e retorna à ela em um tempo menor do que 2π , visto que para ela sair da vizinhança do infinito, obrigatoriamente, terá que realizar uma volta em torno do eixo Z .

Agora descreveremos as hipóteses para que uma dada aplicação $\mathcal{F}$ tenha o shift σ como subsistema. A geometria de uma função $\mathcal{F}$ que satisfaz as hipóteses (a) e (b), descritas abaixo, é essencialmente a geometria da ferradura de Smale.

Sejam $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ duas cópias do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Considere $\mathcal{F}$ um homeomorfismo de $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ em $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^2$ tal que

(a) Existe uma família de bandas verticais (resp. bandas horizontais) $\mathcal{V}_{ji}^a$, $a \in \mathbb{N}$, $j, i \in \{1, 2\}$ (resp. $\mathcal{H}_{ji}^a$, $a \in \mathbb{N}$, $j, i \in \{1, 2\}$) em $\mathcal{U}_j$, duas a duas disjuntas, e $\mathcal{F}(\mathcal{H}_{ji}^a) = \mathcal{V}_{ij}^a$ para todo $a \in \mathbb{N}$ e $j, i \in \{1, 2\}$. A aplicação $\mathcal{F}$ leva fronteiras verticais (resp. fronteiras horizontais) em fronteiras verticais (resp. fronteiras horizontais). Além disso, se as bandas $\mathcal{V}_{ji}^a$ e $\mathcal{H}_{ji}^a$ estão ordenadas no sentido como se mostra na Figura 6.9, o conjunto de bandas verticais disjuntas é completado ao ser acrescentado $\mathcal{V}_j^\infty = \{(x, y) \in \mathcal{U}_j \mid x = 1\}$, $j = 1, 2$. Requeremos que $\mathcal{V}_1^a \rightarrow \mathcal{V}_1^\infty$ e $\mathcal{V}_2^a \rightarrow \mathcal{V}_2^\infty$ quando $a \rightarrow \infty$. Os conjuntos limites $\mathcal{H}_1^\infty$ e $\mathcal{H}_2^\infty$ se definem de maneira semelhante.

(b) Seja $\mathcal{H} \subset \bigcup_{a=1}^{\infty} \mathcal{H}_{jk}^a$ uma banda horizontal em $\mathcal{U}_j$, disjunta de $\mathcal{H}_j^\infty$, onde $j, k = 1, 2$. Então, sempre que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{U}_j) \neq \emptyset$ teremos que $\hat{\mathcal{H}}_{ik}^a = \mathcal{H}_{ik}^a \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{H})$ é uma banda horizontal em $\mathcal{U}_i$ para todo $a \in \mathbb{N}$. Além disso, para algum $\tilde{a} \in (0, 1)$ temos $d(\hat{\mathcal{H}}_{ik}^a) \leq \tilde{a}d(\mathcal{H})$. Seja $\mathcal{V} \subset \bigcup_{a=1}^{\infty} \mathcal{V}_{ik}^a$ uma banda vertical em $\mathcal{U}_i$, $i, k = 1, 2$ disjunta de $\mathcal{U}_i^\infty$, onde $i = 1, 2$. Então, sempre que $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i) \cap \mathcal{U}_j \neq \emptyset$, teremos que $\hat{\mathcal{V}}_{jk}^a = \mathcal{V}_{jk}^a \cap \mathcal{F}(\mathcal{V})$, $j = 1, 2$ é uma banda vertical em $\mathcal{U}_j$ para todo $a \in \mathbb{N}$. Além disso, para todo $a \in \mathbb{N}$, temos também que $d(\hat{\mathcal{V}}_{jk}^a) \leq \tilde{a}d(\mathcal{V})$.

Teorema 6.13.8. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação que satisfaz as condições (a) e (b). Então, $\mathcal{F}$ tem o shift de Bernoulli, σ , como subsistema.*

Demonstração: Sabemos que $S(A)$ possui elementos dos quatro tipos descritos na subseção 6.13.1. Tomaremos elementos de $S(A)$ da forma 1 e 2. A prova com os outros elementos seguem de maneira semelhante.

Seja

$$\alpha = \begin{pmatrix} a \\ \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots, a_{-1}a_0a_1, \dots \\ \dots, i_{-1}i_0i_1, \dots \end{pmatrix}$$

um elemento de Σ com a sucessão superior $a = (\dots, a_{-1}a_0a_1, \dots)$ do tipo 1. Definimos recursivamente para $n \geq 1$,

$$\mathcal{V}_{i_{-1}\dots i_{-n}i_{-n-1}}^{a_{-1}a_{-2}\dots a_{-n}} = \mathcal{V}_{i_{-1}}^{a_{-1}} \cap \mathcal{F}(\mathcal{V}_{i_{-2}\dots i_{-n-1}}^{a_{-2}\dots a_{-n}}), \quad (6.107)$$

verificamos indutivamente, usando a condição (b), que estes são faixas verticais. Novamente usando o argumento indutivo e a definição 6.107, temos que estas faixas verticais são tais que

$$\mathcal{V}_{i_{-1} \dots i_{-n-1}}^{a_{-1} \dots a_{-n}} \subset \mathcal{V}_{i_{-1} \dots i_{-n}}^{a_{-1} \dots a_{-n+1}}.$$

Além disso, da condição (b), segue que o diâmetro

$$d(\mathcal{V}_{i_{-1} \dots i_{-n} i_{-n-1}}^{a_{-1} \dots a_{-n}}) \leq \tilde{a}_v d(\mathcal{V}_{i_{-2} \dots i_{-n-1}}^{a_{-2} \dots a_{-n}}) \leq \tilde{a}_v^2 d(\mathcal{V}_{i_{-3} \dots i_{-n-1}}^{a_{-3} \dots a_{-n}}) \leq \dots \leq \tilde{a}_v^{n-1} d(\mathcal{V}_{i_{-n} i_{-n-1}}^{a_{-n}}) \leq \tilde{a}_v^{n-1}, \tilde{a} \in (0, 1)$$

$d(\mathcal{V}_{i_{-1} \dots i_{-n} i_{-n-1}}^{a_{-1} \dots a_{-n}})$ tende à zero quando n tende à infinito. Da definição 6.107 ainda escrevemos

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{i_{-1} \dots i_{-n} i_{-n-1}}^{a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n}} &= \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^{-k+1}(p) \in \mathcal{V}_{i_{-k}}^{a_{-k}}, k = 1, \dots, n\} \\ &= \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^{k+1}(p) \in \mathcal{V}_{i_k}^{a_k}, k = -1, \dots, -n\}, \end{aligned}$$

Assim, pela Proposição 6.13.4, a interseção

$$\mathcal{V}(\alpha) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_{i_{-1} \dots i_{-n-1}}^{a_{-1} \dots a_{-n}} = \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^{k+1}(p) \in \mathcal{V}_{i_k}^{a_k}, k \leq -1\}$$

define uma curva vertical em $\mathcal{U}_1$ ou em $\mathcal{U}_2$, a qual corresponderá a metade esquerda da sequência $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ \iota \end{pmatrix}$. De modo semelhante, definimos indutivamente para $n \geq 0$

$$\mathcal{H}_{i_0 i_1 \dots i_{n+1}}^{a_0 a_1 \dots a_n} = \mathcal{H}_{i_0}^{a_0} \cap \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{H}_{i_1 \dots i_{n+1}}^{a_1 \dots a_n}),$$

a qual, pela condição (b), são faixas horizontais. Estas faixas horizontais são tais que

$$\mathcal{H}_{i_0 i_1 \dots i_{n+1}}^{a_0 a_1 \dots a_n} \subset \mathcal{H}_{i_0 i_1 \dots i_n}^{a_0 a_1 \dots a_{n-1}},$$

e seus diâmetros podem ser estimados por $\tilde{a}^n$. Portanto, uma vez que $\mathcal{F}(\mathcal{H}_{i_k}^{a_k}) = \mathcal{V}_{i_k}^{a_k}$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\alpha) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{i_0 i_1 \dots i_{n+1}}^{a_0 a_1 \dots a_n} = \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^k(p) \in \mathcal{H}_{i_k}^{a_k}, k \geq 0\} \\ &= \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^{k+1}(p) \in \mathcal{V}_{i_k}^{a_k}, k \geq 0\}, \end{aligned}$$

que, pela Proposição 6.13.4 é uma curva horizontal em $\mathcal{U}_1$ ou em $\mathcal{U}_2$. Esta curva horizontal corresponderá a metade direita da sequência $\alpha = \begin{pmatrix} a \\ \iota \end{pmatrix}$. Pela Proposição 6.13.5 a interseção

$$\mathcal{V}(\alpha) \cap \mathcal{H}(\alpha) = \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^{k+1}(p) \in \mathcal{V}_{i_k}^{a_k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (6.108)$$

define um ponto p_α em $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Desta maneira, associamos a sequência α descrita acima ao ponto p_α . Em geral, temos que a interseção

$$\mathcal{V}(s) \cap \mathcal{H}(s) \subset \mathcal{U}, \text{ onde } s \text{ percorre } \Sigma$$

é um conjunto invariante por $\mathcal{F}$, o qual denotaremos por Λ . Assim, definimos a aplicação

$$\tau : \Lambda \subset \mathcal{U} \rightarrow \Sigma$$

por fazer corresponder o ponto p à sequência $s = \begin{pmatrix} a \\ \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots a_{-1} \cdot a_0 a_1 \dots \\ \dots, i_{-1} \cdot i_0 i_1 \dots \end{pmatrix} \in \Sigma$, cuja sucessão à direita $\begin{pmatrix} a_0 a_1 \dots \\ i_0 i_1 \dots \end{pmatrix}$ corresponde a curva horizontal $\mathcal{H}(s)$ e a sucessão à esquerda $\begin{pmatrix} \dots a_{-2} a_{-1} \\ \dots, i_{-2} i_{-1} \end{pmatrix}$ corresponde a curva vertical $\mathcal{V}(s)$, e $\mathcal{H}(s) \cap \mathcal{V}(s) = p$.

Consideremos agora uma sucessão

$$\beta = \begin{pmatrix} a \\ \iota \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \infty, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots \\ i_{k-1} \dots, i_{-1} i_0 i_1, \dots \end{pmatrix} \in \Lambda \subset \Sigma, \text{ onde } k \leq 0 \quad (6.109)$$

onde a sucessão superior a é terminal tipo 2, isto é,

$$a = (\infty, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \dots), \text{ com } k \leq 0.$$

Neste caso, temos que a sucessão da direita $\begin{pmatrix} a_0 a_1 \dots \\ i_0 i_1 \dots \end{pmatrix}$ corresponde a uma curva horizontal dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\beta) &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_{i_0 i_1 \dots i_{n+1}}^{a_0 a_1 \dots a_n} = \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^k(p) \in \mathcal{H}_{i_k}^{a_k}, k \geq 0\} \\ &= \{p \in \mathcal{U} \mid \mathcal{F}^{k+1}(p) \in \mathcal{V}_{i_k}^{a_k}, k \geq 0\} \end{aligned} \quad (6.110)$$

e a sucessão da esquerda $\begin{pmatrix} \infty a_k \dots a_{-2} a_{-1} \\ i_{k-1} \dots i_{-2} i_{-1} \end{pmatrix}$, $k \leq -1$ corresponde a uma curva vertical

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\beta) &= \mathcal{V}_{i_{-1} i_{-2} \dots i_k i_{k-1}}^{a_{-1} a_{-2} \dots a_k \infty} = \mathcal{V}_{i_{-1}}^{a_{-1}} \cap \mathcal{F}(\mathcal{V}_{i_{-2} \dots i_{k-1}}^{a_{-2} \dots a_k \infty}) \\ &= \mathcal{V}_{i_{-1}}^{a_{-1}} \cap \mathcal{F}(\mathcal{V}_{i_{-2}}^{a_{-2}}) \cap \mathcal{F}^2(\mathcal{V}_{i_{-3} \dots i_k}^{a_{-3} \dots a_{k+1} \infty}) \\ &= \mathcal{V}_{i_{-1}}^{a_{-1}} \cap \mathcal{F}(\mathcal{V}_{i_{-2}}^{a_{-2}}) \cap \mathcal{F}^2(\mathcal{V}_{i_{-3}}^{a_{-3}}) \cap \dots \cap \mathcal{F}^{-k-1}(\mathcal{V}_{i_k}^{a_k}) \cap \mathcal{F}^{-k}(\mathcal{V}_{i_{k-1}}^{\infty}). \end{aligned} \quad (6.111)$$

Pela Proposição 6.13.5, temos que $\mathcal{H}(\beta) \cap \mathcal{V}(\beta)$ é um ponto, digamos $p_\beta \in \mathcal{U}$, e desta maneira podemos associar a sucessão (6.109) ao ponto p_β . Assim, para a sucessão β , todas as imagens de p_β por $\mathcal{F}^{-1}$ existem, mas somente existe as $|k|$ pré-imagens de p_β por $\mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{F}^k(p_\beta)$, $k \leq -1$, pertence a curva vertical com superíndice ∞ , a saber $\mathcal{V}_{i_{k-1}}^\infty$. Neste caso, uma órbita com condição inicial em p_β atravessa a seção Ξ , $|k|$ vezes antes de ser capturada parabolicamente pelo infinito.

Mostraremos agora que o diagrama abaixo comuta, ou seja, $\tau \circ \mathcal{F}(p) = \sigma \circ \tau(p)$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \Lambda \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

Seja $p \in \Lambda$ com $\tau(p) = \begin{pmatrix} \dots a_{-1} \cdot a_0, a_1, \dots \\ \dots, i_{-1} \cdot i_0, i_1, \dots \end{pmatrix}$, isto é, por (6.108) nós temos

$$\{\dots, \mathcal{F}^{-1}(p) \in \mathcal{V}_{i_{-2}}^{a_{-2}}, p \in \mathcal{V}_{i_{-1}}^{a_{-1}}, \mathcal{F}(p) \in \mathcal{V}_{i_0}^{a_0}, \mathcal{F}^2(p) \in \mathcal{V}_{i_1}^{a_1}, \dots\}.$$

Pela construção de Λ , p é o único ponto em $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ tal que $\mathcal{F}^{k+1}(p) \in \mathcal{V}_{i_k}^{a_k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e portanto temos $\mathcal{F}(p) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}^2(p)) \in \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{V}_{i_1}^{a_1}) = H_{i_1}^{a_1}$ assim,

$$\tau \circ \mathcal{F}(p) = \begin{pmatrix} \dots a_{-2} a_{-1} a_0 \cdot a_1 \dots \\ \dots, i_{-2} i_{-1} i_0 \cdot i_1, \dots \end{pmatrix}.$$

Mas, por definição da aplicação shift σ , nós temos

$$\sigma \circ \tau(p) = \begin{pmatrix} \dots, a_{-2} a_{-1} a_0 \cdot a_1, \dots \\ \dots, i_{-2} i_{-1} i_0 \cdot i_1, \dots \end{pmatrix}.$$

Desta maneira, temos que $\tau \circ \mathcal{F}(p) = \sigma \circ \tau(p)$.

Resta-nos mostrar que a aplicação τ é um homeomorfismo. Começemos pela continuidade. A continuidade de τ se obtém da seguinte forma: tomamos duas sucessões $s, \tilde{s}$ em Σ com um grande número de elementos coincidentes. Então os pontos correspondentes $p, \tilde{p}$, respectivamente, pertencem as mesmas faixas vertical e horizontal com diâmetros tão pequenos quanto quisermos, dependendo de quão perto estejam as sucessões associadas. A transformação τ é injetiva, pois as faixas da mesma classe com diferentes superíndice são disjuntas. Assim, uma vez que Σ é compacto, (veja Proposição 6.13.3) e $\tau : \Sigma \rightarrow \tau(\Sigma)$ é uma bijeção contínua, temos que τ é um homeomorfismo e, portanto, finalmente podemos afirmar que a aplicação shift σ é um subsistema da aplicação $\mathcal{F}$. ■

Observação 6.13.9. Prova-se de modo similar a [36], p.77 Teorema 3.2, que a condição (b) do Teorema acima é satisfeita quando se tem uma condição (c), a qual descrevemos abaixo (esta condição é usada sempre que o campo que define o sistema em questão for diferenciável). Assim, ao invés de trabalharmos com as hipóteses (a) e (b), podemos checar as hipóteses (a) e (c), as quais, em geral, são mais fáceis de serem verificadas.

(c) Existe um $\tilde{\mu} \in (0, 1)$ tal que o feixe de setores $\mathcal{S}^+$ definido nos pontos de coordenadas (x, y) situados nas bandas verticais por:

$$\mathcal{S}^+ = \{(\xi, \eta) \in T_{(x,y)}\mathcal{U} \mid |\eta| \leq \tilde{\mu}|\xi|\},$$

(onde $T_{(x,y)}\mathcal{U}$ é o espaço tangente a $\mathcal{U}$ no ponto (x, y)) satisfaz as seguintes condições:

- 1) $\mathcal{S}^+$ é invariante pela diferencial $D\mathcal{F}^{-1}$, isto é, $D\mathcal{F}_{(x,y)}^{-1}(\mathcal{S}_{(x,y)}^+) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}^{-1}(x,y)}^+$.
- 2) Se $(\xi_0, \eta_0) \in \mathcal{S}_{(x,y)}^+$ e $(\xi_1, \eta_1) = D\mathcal{F}_{(x,y)}^{-1}(\xi_0, \eta_0) \in T_{\mathcal{F}^{-1}(x,y)}\mathcal{S}^+$, então

$$|\xi_1| \geq \tilde{\mu}^{-1}|\xi_0|.$$

Semelhantemente, o feixe de setores $\mathcal{S}^-$ definido nos pontos de coordenadas (x, y) situados nas bandas horizontais por:

$$\mathcal{S}^- = \{(\xi, \eta) \in T_{(x,y)}\mathcal{U} \mid |\xi| \leq \tilde{\mu}|\eta|\},$$

satisfaz as seguintes condições:

- 1) $\mathcal{S}^-$ é invariante pela diferencial $D\mathcal{F}$, isto é, $D\mathcal{F}_{(x,y)}(\mathcal{S}_{(x,y)}^-) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{F}(x,y)}^-$.
- 2) Se $(\xi_1, \eta_1) \in \mathcal{S}_{(x,y)}^-$ e $(\xi_0, \eta_0) = D\mathcal{F}_{(x,y)}(\xi_1, \eta_1) \in T_{\mathcal{F}(x,y)}\mathcal{S}^-$, então

$$|\eta_0| \geq \tilde{\mu}^{-1}|\eta_1|.$$

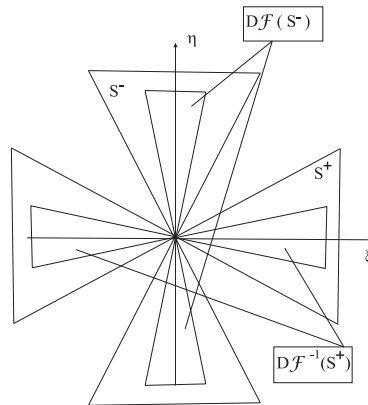


Figura 6.13: Os feixes de setores $\mathcal{S}^+$ e $\mathcal{S}^-$ com suas respectivas pré-imagem e imagem por $D\mathcal{F}$.

Proposição 6.13.10. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação que satisfaz as condições (a) e (c), esta última com $0 < \tilde{\mu} < 1/2$. Então, a condição (b) se verifica para $\tilde{a} = \tilde{\mu}(1 - \tilde{\mu})^{-1}$.*

Demonstração: A demonstração é a mesma do Teorema 3.2 em [36], p.77. ■

Proposição 6.13.11. *Seja $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfaz as condições (a) e (c). Então, $\mathcal{F}$ tem o shift de Bernoulli σ como subsistema.*

Demonstração: É consequência imediata do Teorema 6.13.8 e da Proposição 6.13.10 ■

Mostraremos que a nossa aplicação de Poincaré f , definida anteriormente, possui a geometria da ferradura de Smale e assim, tem o shift de Bernoulli como subsistema. Mas antes disso, para que a prova deste fato não fique tão enfadonha, enunciamos um lema auxiliar

Lema 6.13.12. *As seguintes relações são válidas*

$$f(H_{i_0 i_1}^{a_0}) = V_{i_1 i_0}^{a_0}, i_0, i_1 \in \{1, 2\}, a_0 \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: No final desta demonstração, usaremos as idéias descritas em Moser [36], pp. 98.

Sabemos que

$$H_{i_0 i_1}^{a_0} \subset f^{-1}(R_{i_1}) \cap R_{i_0}.$$

Então,

$$f(H_{i_0 i_1}^{a_0}) \subset R_{i_1} \cap f(R_{i_0}) = \bigcup_{a_0=1}^{\infty} V_{i_1 i_0}^{a_0}. \quad (6.112)$$

Analogamente, nós temos que

$$f(H_{i_1 i_0}^{a_0}) \subset \bigcup_{a_0=1}^{\infty} V_{i_0 i_1}^{a_0}. \quad (6.113)$$

Por outro lado, usando equação (6.102), $\rho(V_{i_1 i_0}^{a_0}) = H_{i_1 i_0}^{a_0}$, e a inclusão em (6.113), obtemos

$$f^{-1}(V_{i_1 i_0}^{a_0}) = (\rho \circ f \circ \rho)(V_{i_1 i_0}^{a_0}) = (\rho \circ f)(H_{i_1 i_0}^{a_0}) \subset \rho\left(\bigcup_{a_0=1}^{\infty} V_{i_0 i_1}^{a_0}\right) = \bigcup_{a_0=1}^{\infty} H_{i_0 i_1}^{a_0}. \quad (6.114)$$

Portanto, por (6.112) e (6.114), segue que

$$\bigcup_{a_0=1}^{\infty} f(H_{i_0 i_1}^{a_0}) = \bigcup_{a_0=1}^{\infty} V_{i_1 i_0}^{a_0}.$$

Uma vez que as faixas $H_{i_0 i_1}^{a_0}$ e $V_{i_1 i_0}^{a_0}$ são duas a duas disjuntas, cada uma das faixas $H_{i_0 i_1}^{a_0}$ são levadas por f de maneira sobrejetiva em uma faixa $V_{i_1 i_0}^{m_0}$. Mostraremos agora que $a_0 = m_0$.

Seja $\tilde{\gamma}$ a parte da diagonal de R_1 (resp. de R_2) que passa pelo ponto interseção das variedades sobre a seção Ξ , ou seja que passa pelo ponto ζ'_1 (resp. ζ'_2). Portanto, $\tilde{\gamma}$ tem um ponto em γ_s , e pelo Lema 6.12.3 sua imagem $f(\tilde{\gamma})$ se aproxima de γ_u espiralando. Então, $f(\tilde{\gamma}) \cap \tilde{\gamma} = \bigcup_{i=1}^{\infty} p_i$, onde a interseção dos pontos p_i são ordenadas sobre $\tilde{\gamma}$ de maneira tal que p_1 é o primeiro ponto de interseção com $\tilde{\gamma}$, o qual forma uma arco com o ponto final em D_0 . Pelo Lema 6.12.2, Equação (6.102) e $\rho(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$, segue que

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} p_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p_i.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} p_i\right) &= f(f(\tilde{\gamma}) \cap \tilde{\gamma}) = f(\rho f^{-1} \rho^{-1}(\tilde{\gamma}) \cap \tilde{\gamma}) \\
&= f(\rho f^{-1}(\tilde{\gamma}) \cap \tilde{\gamma}) = f(\rho(f^{-1}(\tilde{\gamma}) \cap \tilde{\gamma})) = f(f^{-1}(\tilde{\gamma}) \cap \tilde{\gamma}) \\
&= \tilde{\gamma} \cap f(\tilde{\gamma}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} p_i.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que $f(p_i) = p_i$. Os pontos p_i são associados a órbitas periódicas e, desde que p_i está em uma faixa horizontal $H_{i_0 i_1}^{a_0}$ e em uma faixa vertical $V_{i_1 i_0}^{m_0}$, devemos ter que $a_0 = m_0$, como queríamos demonstrar. ■

Agora estamos prontos para começar a prova do Teorema 6.13.13 descrito logo abaixo.

Teorema 6.13.13. *A aplicação $f : R \rightarrow R$, onde $R = R_1 \cup R_2$ definida na seção 6.12 tem o shift de Bernoulli, σ , como um subsistema.*

Demonstração: Para demonstrarmos este Teorema usaremos a Proposição 6.13.11. Desta maneira, é suficiente verificarmos se a aplicação de Poincaré f satisfaz as condições (a) e (c) descritas anteriormente.

Seja $\delta > 0$, suficientemente pequeno. Definimos

$$D_0(\delta) = \{\zeta \in D_0 \mid d(\zeta, \gamma_s) < \delta\}$$

e a região simétrica

$$D_1(\delta) = \rho(D_0(\delta)) = \{\zeta \in D_1 \mid d(\zeta, \gamma_u) < \delta\}.$$

Seja $R = R_1 \cup R_2$ em $D_0(\delta) \cap D_1(\delta)$ tal que $\zeta'_1 \in R_1$ e $\zeta'_2 \in R_2$, onde ζ'_1 e ζ'_2 são os pontos de interseção das curvas γ_s e γ_u na seção Ξ . Veja a Figura 6.6.

Para δ suficientemente pequeno as fronteiras de R_1 e R_2 consistem de quatro arcos de classe C^1 , respectivamente denotados por C_k^i , onde $k = 1, 2, 3, 4$, $i \in \{1, 2\}$ e os ordenados de maneira que os arcos C_3^i estejam sobre γ_s e C_2^i sobre γ_u , com $i = 1, 2$. Os retângulos R_1 e R_2 desempenharão o papel de $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$, respectivamente, do Teorema 6.13.8. Consideremos o mapa de Poincaré f definido anteriormente, o qual fará o papel de $\mathcal{F}$ do Teorema 6.13.8. Como consequência do Teorema 6.11.2 os arcos C_2^i e C_4^i , $i = 1, 2$ são transversais a γ_s . Logo, $f(R_i)$ é uma faixa que espirala γ_u , conforme Lema 6.12.3, cortando R_j , onde $j = 1, 2$, infinitas vezes de tal forma que o diâmetro das faixas se torna menor quando se aproxima da curva γ_u . Assim, $f(R_i) \cap R_j$ é a união disjunta de um número infinito de faixas verticais (pode ocorrer a exclusão de algum número finito de faixas). Denotemos então estas faixas verticais em R_j por V_{ji}^a , $a \in \mathbb{N}$ e as ordenemos a partir da mais distante de γ_u . Assim, $V_j^\infty = \lim_{a \rightarrow \infty} V_{ji}^a \in \gamma_u$, com $j, i \in \{1, 2\}$.

Um estudo semelhante pode ser feito para $f^{-1}(R_j)$. Então, $f^{-1}(R_j)$ é uma faixa que corta R_i infinitas vezes espiralando em direção a γ_s de tal forma que o diâmetro das faixas se torna menor a medida que as faixas se aproximam de γ_s . A interseção desta faixa com R_i forma um número infinito de faixas horizontais H_{ij}^a , $a \in \mathbb{N}$, $j, i \in \{1, 2\}$, ordenadas a partir da mais distante da curva γ_s , de maneira que seus diâmetros tendem a zero quando a tende ao infinito. Definimos $H_i^\infty = \lim_{a \rightarrow \infty} H_{ij}^a \in \gamma_s$. Observe que $\rho(H_1^a) = V_1^a$ e $\rho(H_2^a) = V_2^a$. Concluimos a verificação da condição (a) com o Lema 6.13.12.

A condição (c) segue de maneira semelhante a prova em Moser p. 95, fazendo as devidas correspondências:

Seja $\Sigma_0(\delta^{1/3}) = S^+$ e $p \in f(R_{i_1}) \cap R_{i_0}$. Então, uma vez que $R \subset D_0(\delta) \cap D_1(\delta)$ e usando a condição (6.102) e o Lema 6.12.4, temos que

$$\bigcup_{a_0=1}^{\infty} V_{i_0 i_1}^{a_0} = f(R_{i_1}) \cap R_{i_0} \subset f(D_0(\delta)) = (\rho \circ f^{-1} \circ \rho^{-1})(D_0(\delta)) \subset D_1(\delta^{\beta/3}),$$

e assim, $\Sigma_1'(\delta^{\beta/3})$ é levado, por df^{-1} , em $\Sigma_0(\delta^{1/3})$. Uma vez que, em $R = R_1 \cup R_2$, $\Sigma_0(\delta^{1/3}) \subset \Sigma_1'(\delta^{\beta/3})$, temos que $df^{-1}(\Sigma_0(\delta^{1/3})) \subset df^{-1}(\Sigma_1'(\delta^{\beta/3})) \subset \Sigma_0(\delta^{1/3})$. Assim, temos que Df^{-1} , quando restrito à $f(R_{i_1}) \cap R_{i_0}$, leva vetores de $\Sigma_0(\delta^{1/3})$ em $\Sigma_0(\delta^{1/3})$, ou seja

$$Df^{-1}(\Sigma_0(\delta^{1/3})) \subset \Sigma_0(\delta^{1/3}).$$

Portanto, $D_p f^{-1}(S^+) \subset S^+$ e como pelo Lema 6.12.4 temos $|\xi_1| \geq \delta^{-1/3}|\xi_0|$, onde $Df^{-1}(\xi_0, \eta_0) = (\xi_1, \eta_1)$ onde os vetores (ξ_0, η_0) e (ξ_1, η_1) são vetores no plano (ξ, η) . Analogamente, $S^- = \Sigma_1(\delta^{1/3})$ obtida de S^+ pela reflexão ρ , restrita à $f^{-1}(R_{i_0}) \cap R_{i_1}$ é levada nela mesma por df .

A afirmação contida na condição (a) que f leva fronteiras veticais em fronteiras verticais e fronteiras horizontais em fronteiras horizontais segue também do Lema 6.12.4. ■

Desta maneira, pelo Teorema 6.13.13 e pela Proposição 6.13.6 podemos afirmar

Teorema 6.13.14. *Existe um inteiro $\hat{b} > 0$ tal que qualquer sequência $\{r_n\}$, onde $r_n = \begin{pmatrix} b_n \\ i_n \end{pmatrix}$ com $\{b_n\}$ uma sucessão de um dos quatros tipos descritos na Seção 6.13.1, tal que $b_n \geq \hat{b}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ para o qual b_n está definido, está associada a uma órbita de m_3 .*

Demonstração: Os conjuntos H_j^k descrevem posições iniciais daquelas órbitas para as quais o tempo de retorno a seção Ξ é da forma

$$t_1 - t_0 = 2\pi(k + \hat{b} + \vartheta),$$

onde k diz respeito a quantas voltas a partícula m_3 deu em torno do eixo Z na vizinhança do infinito (pela Observação 6.13.7, k é no mínimo igual a 1) e o número $\hat{b} + \vartheta$, onde $\vartheta \in [0, 1)$ e $\hat{b}$ é uma constante positiva inteira, diz respeito ao tempo de percurso compreendido desde a saída de m_3 da seção transversal até a entrada na vizinhança do infinito somado com o tempo de percurso compreendido da saída da vizinhança do infinito até retornar a seção transversal.

Seja $\{a_n\}$ uma sucessão de inteiros construída a partir das sucessões de inteiros $\{b_n\}$ da seguinte maneira $a_n = b_n - \hat{b}$. A sequência $\{s_n\}$, onde $s_n = \begin{pmatrix} a_n \\ i_n \end{pmatrix}$ está no domínio de σ . Assim, pelo Teorema 6.13.13, podemos associar esta sequência de forma única a um ponto $p \in R = R_1 \cup R_2$ e temos que $f^{k+1}(p) \in V_{i_k}^{a_k}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (veja demonstração do Teorema 6.13.8). Portanto, tem-se que a sequência $\{s_n\}$ corresponde a uma órbita de m_3 para a qual a parte inteira $[(t_n - t_{n-1})/2\pi]$ do tempo de retorno a seção é descrita pela sequência $\{b_n\}$. ■

6.13.3 Conclusão

Consideremos o estudo do problema restrito isósceles dos três corpos com colisão, onde os primários movem-se numa órbita de colisão elíptica de período 2π e energia fixa $h = -1/2$ ou $\epsilon = 1$. Usando argumentos analíticos, nós provamos que assumindo que o momento angular da partícula infinitesimal é não nulo: não existe colisão tripla; o fluxo associado ao sistema é completo; a energia da massa infinitesimal, a qual não é conservada ao longo do movimento, é limitada; existem soluções limitadas e ilimitadas. Com a ajuda da dinâmica simbólica construída aqui, nós descrevemos uma grande variedade de movimentos para a partícula infinitesimal. A aplicação σ , é um subsistema do mapa de Poincaré f e, portanto, como nós sabemos da teoria geral sobre dinâmica simbólica, uma vez que σ tem uma quantidade enumerável de órbitas periódicas, uma quantidade não enumerável de órbitas não periódicas e uma órbita densa, assim também terá o mapa de Poincaré f . Além disso, nós descrevemos a existência de órbitas de escape, por meio das sequências terminais do tipo 2, 3 e 4 apresentadas na Seção ???. As órbitas periódicas descritas aqui são de "longo período". As órbitas têm que ir embora da vizinhança do infinito antes de voltar a cruzar a seção e isso faz com que sejam forçadas a dar, pelo menos, uma volta ao redor do eixo Z assim, tem que acontecer, ao menos, uma colisão ou um pericentro entre os primários. Desta maneira, aqui descrevemos órbitas periódicas de "longo período" em relação ao período dos primários.

É importante observar aqui que os argumentos usados por Moser [36], a fim de provar a dinâmica caótica no problema de Sitnikov, onde os primários movem-se, cada um deles, em uma órbita elíptica mas não de colisão, foram extremamente importantes em nosso caso, contudo ambos os problemas são de naturezas diferentes.

Na parte inicial deste capítulo provamos a existência de uma grande variedade de órbitas periódicas simétricas, mas neste caso foi essencial introduzir um parâmetro perturbador $\epsilon = \sqrt{-(2h)^{-1}}$ onde h é a energia dos primários. Foi provado que a função Hamiltoniana, H , associada não é C^1 em ϵ , assim alguns argumentos analíticos não puderam ser aplicados, por exemplo, série de Taylor, Teorema da Função Implícita. Mas, usando os polinômios de Legendre, nós pudemos expandir H de maneira tal que

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \epsilon^4 H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) + \epsilon^8 H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) \quad (6.115)$$

onde $\mathbf{q} = (x, y)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ e

$$H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{q}\|}, \quad H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = \frac{1}{8\|\mathbf{q}\|^3} [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2, \quad H_r(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t, \epsilon) = -\frac{3[1 - \cos E_\epsilon(t)]^4}{128\|\mathbf{q}\|^5} + \mathcal{O}(\epsilon^4),$$

onde agora $\rho(t) = \epsilon^2[1 - \cos E_\epsilon(t)]$ e a equação de Kepler é $\epsilon^{-3}t = E - \sin E$. Claramente H_0 representa o Hamiltoniano do problema de Kepler em coordenadas inerciais. A fim de provar a transversalidade das variedades invariantes nós tentamos usar, primeiramente, o método de Melnikov da seguinte maneira. Primeiramente, notamos que o caso onde a energia dos primários é igual a $-\infty$ é um sistema autônomo. De fato, este caso pode ser descrito como o caso onde os primários estão unidos na origem. Este sistema colado na origem atrairá a partícula infinitesimal como se fosse o centro de força. De fato, neste caso, o movimento da partícula teste será puramente Kepleriano. A segunda observação é que a transformação de McGehee, aplicada ao problema de Kepler quando escrito em coordenadas polares, transforma o problema de Kepler em um oscilador quártico (oscilador de Duffing). Este oscilador quártico admite um oito homoclínico representando as soluções parabólicas do problema de Kepler (soluções elípticas estão no interior do oito e soluções hiperbólicas estão fora). Infelizmente, nós não pudemos usar diretamente o Teorema padrão de Melnikov a fim de garantir a transversalidade das variedades invariantes, de acordo com [20], por causa da diferenciabilidade em ϵ . Assim, tentamos usar resultados obtidos por Delshams e outros (veja [17] e [18]) quando o campo vetorial ou a função Hamiltoniana H depende de t/ϵ na variável tempo, mas também neste caso não tivemos sucesso pois a função média não é zero. No momento estamos tentando estender os resultados de Delshams e outros com o intuito de aplicar aquele resultado ao nosso modelo.

Capítulo 7

Apêndice

7.1 Apêndice A- Cálculo das variedades invariantes e do mapa de Poincaré

7.1.1 Cálculo das variedades invariantes

A variedade invariante instável da órbita periódica $(u, v, t) = (0, 0, t)$ do sistema de equações

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{u^3 v}{4} \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{u^4}{4} \left[1 + \frac{\rho^2(t) u^4}{4} \right]^{-3/2} - \frac{c^2 u^6}{8} \\ \frac{dt}{dt} &= 1,\end{aligned}\tag{7.1}$$

onde $\rho(t) = \epsilon^2[1 - \cos E_\epsilon(t)]$, é uma curva analítica em v e $2\pi\epsilon^3$ -periódica em t dada por

$$u = F(v, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) v^n.\tag{7.2}$$

Diferenciando (7.2) com respeito à t segue que

$$\dot{u} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial F}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t},$$

substituindo $\frac{du}{dt}$ e $\frac{dv}{dt}$ dada pelo sistema (7.1) obtém-se

$$\frac{u^3 v}{4} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) n v^{n-1} \right) \left(\frac{u^4}{4} \left[1 + \frac{\rho^2(t) u^4}{4} \right]^{-3/2} - \frac{c^2 u^6}{8} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t) v^n.$$

Usando série de Taylor ao redor de $u = 0$ obtemos

$$\left[1 + \frac{\rho^2(t) u^4}{4} \right]^{-3/2} = 1 - \frac{3}{8} u^4 \rho^2(t) + \frac{15}{128} u^8 \rho^4(t) - \mathcal{O}(u^{12}).$$

Assim,

$$\frac{u^3 v}{4} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) n v^{n-1} \right) \left(\frac{u^4}{4} - \frac{3}{32} u^8 \rho^2(t) + \mathcal{O}(u^{12}) - \frac{c^2 u^6}{8} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t) v^n.$$

Uma vez que $u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n$, segue que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^3 \frac{v}{4} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)nv^{n-1}\right) \left[\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^4 - \frac{3}{32}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^8 \rho^2(t) + \mathcal{O}(u^{12}) - \frac{c^2}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^6\right] + \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t)v^n.$$

E, portanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_n(t)v^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^3 \frac{v}{4} \\ &- \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)nv^{n-1}\right) \left[\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^4 - \frac{3}{32}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^8 \rho^2(t) + \mathcal{O}(u^{12}) - \frac{c^2}{8}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t)v^n\right)^6\right]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Agora, comparando os coeficientes com a mesma potência em v na equação (7.3), temos uma sucessão infinita de equações diferenciais

$$\dot{a}_n(t) = f_n(t), \quad (7.4)$$

cuja solução obtemos por recorrência.

De (6.97) temos que $a_0(t) = 0$ e $a_1(t) = 1$, calculando as expressões $f_n(t)$ usando algum programa computacional, como por exemplo, Maple, segue que $\dot{a}_2(t) = 0 = \dot{a}_3(t)$ e portanto $a_2(t)$ e $a_3(t)$ são funções constantes. De (7.4) temos que para $n = 4$,

$$\dot{a}_4(t) = \frac{a_1^3}{4} - \frac{a_1^5}{4} = 1 - 1 = 0.$$

Portanto, $a_4(t)$ é uma constante. Para, $n = 5$ segue que

$$\dot{a}_5(t) = \frac{3a_1^2 a_2}{4} - \frac{3a_1^4 a_2}{2} = -\frac{3}{4}a_2.$$

Uma vez que $a_2(t)$ é uma função constante e $\dot{a}_5(t)$ é uma função periódica, se tem que $a_2 = 0$ e assim, $a_5(t)$ é uma função constante.

Para $n = 6$, $\dot{a}_6(t) = -a_3 + \frac{c^2}{8}$, analogamente ao caso $n = 5$, desde que a_3 e c são constantes e $\dot{a}_6$ é uma função periódica, temos que $-a_3 + \frac{c^2}{8} = 0$ e assim, $a_3(t) = \frac{c^2}{8}$, $a_6(t)$ é uma função constante.

De (7.4) $\dot{a}_7(t) = -\frac{5a_4}{4}$. Analogamente aos casos anteriores segue que $a_4 = 0$ e $a_7(t)$ é uma função constante. Para o caso $n = 8$ temos

$$\dot{a}_8(t) = \frac{21}{256}c^4 - \frac{3}{2}a_5 + \frac{3}{32}\rho^2(t).$$

Observe que como $\dot{a}_n(t)$ são funções periódicas, nós podemos calcular seus coeficientes de Fourier. Desta maneira, denotaremos o coeficiente constante de Fourier por

$$\dot{a}_n^0 = \frac{1}{2\pi\epsilon^3} \int_0^{2\pi\epsilon^3} \dot{a}_n(t)dt.$$

Assim, para $n = 8$ temos

$$\begin{aligned} \dot{a}_8^0(t) &= \frac{1}{2\pi\epsilon^3} \int_0^{2\pi\epsilon^3} \left(\frac{21}{256}c^4 - \frac{3}{2}a_5 + \frac{3}{32}\rho^2(t)\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{21}{256}c^4 - \frac{3}{2}a_5 + \frac{3}{32}\rho^2(E)\right)(1 - \cos E)dE \\ &= \frac{21}{256}c^4 - \frac{3}{2}a_5(t) + \frac{3\epsilon^4}{64\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos E)^3 dE \\ &= \frac{21}{256}c^4 - \frac{3}{2}a_5(t) + \frac{15\epsilon^4}{64}. \end{aligned}$$

Uma vez que $\dot{a}_8(t)$ é uma função periódica, segue que $\dot{a}_8^0 = 0$ e assim, $a_5(t) = \frac{42}{768}c^4 + \frac{30}{192}\epsilon^4$ portanto,

$$a_8(t) = \frac{21}{256}c^4t - \frac{3}{2} \left[\frac{42}{768}c^4 + \frac{30}{192}\epsilon^4 \right] t + \frac{3}{32} \int_0^t \rho^2(t) dt.$$

De (7.4) para $n = 9$ temos $\dot{a}_9(t) = -\frac{7}{6}a_6$ logo, segue que $a_6 = 0$ e $a_9(t)$ é uma função constante. Para $n = 10$, temos $\dot{a}_{10}(t) = -a_7 + \frac{33}{512}c^6 + \frac{15c^2\epsilon^4}{512} + \frac{33}{256}c^2\rho^2(t)$. Calculando o coeficiente constante de Fourier de $\dot{a}_{10}(t)$ obtém-se que

$$\dot{a}_{10}^0 = -2a_7 + \frac{33}{512}c^6 + \frac{180}{512}c^2\epsilon^4.$$

Portanto, uma vez que $\dot{a}_{10}(t)$ é uma função periódica, temos $\dot{a}_{10}^0 = 0$ e assim, $a_7 = \frac{1}{2} \left[\frac{33}{512}c^6 + \frac{180}{512}c^2\epsilon^4 \right]$.

7.1.2 Cálculo do mapa de Poincaré mediante equações variacionais

Seja

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (7.5)$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias, onde $f(t, x)$ é de classe C^r e $x \in \mathcal{U}$ com $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Seja $\varphi(t, x) = \varphi_t(x)$ a solução de (7.5) com condição inicial $\varphi(0, x) = \varphi_0(x) = x$, i.e., $\dot{\varphi}_t(x) = f(\varphi_t(x))$. Como sabemos, desde que f seja de classe C^r , temos que $\varphi_t(x)$ é de classe C^r e desta maneira nós podemos obter as equações variacionais diferenciando a relação $\dot{\varphi}_t(x) = f(\varphi_t(x))$ com respeito à variável x e mudarmos a ordem de diferenciação. Assim, a primeira equação variacional é dada por

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} = Df(\varphi_t(x)) \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x},$$

com condições iniciais $\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \big|_{t=0} = I$, onde Df é a matriz Jacobiana e I é a matriz identidade do $\mathbb{R}^n$.

As equações de segunda, terceira, n -ésima ordem se obtém da mesma forma. Ainda apresentaremos aqui as equações variacionais de segunda e terceira ordem.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2} = D^2 f(\varphi_t(x)) \left(\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \right)^2 + Df(\varphi_t(x)) \frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2},$$

com $\frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2} \big|_{t=0} = 0$ e

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^3 \varphi_t(x)}{\partial x^3} = D^3 f(\varphi_t(x)) \left(\frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \right)^3 + D^2 f(\varphi_t(x)) \left(\frac{\partial^2 \varphi_t(x)}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi_t(x)}{\partial x} \right) + Df(\varphi_t(x)) \frac{\partial^3 \varphi_t(x)}{\partial x^3},$$

com $\frac{\partial^3 \varphi_t(x)}{\partial x^3} \big|_{t=0} = 0$. Para conhecermos as derivadas do fluxo $\varphi_t(x)$ com respeito as condições iniciais α de uma órbita periódica utilizaremos as equações variacionais. De fato, estudaremos o fluxo em torno de uma órbita periódica através da aplicação de Poincaré definida em uma seção transversal a esta órbita.

Seja Ξ uma seção transversal a órbita periódica, definida pela condição inicial $\alpha_0 \in \Xi$ e seja $\sigma = \sigma(\alpha)$ o tempo que esta órbita gasta para que regressar pela primeira vez a Ξ . Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\sigma(\alpha)$ está definida para toda $\alpha \in \Xi$, pois podemos tomar Ξ tão pequeno quanto for necessário e pelo teorema de dependência contínua com relação as condições iniciais segue a afirmação. Se iniciarmos com a condição inicial $\alpha_1 \in \Xi$, definimos a aplicação de Poincaré $\mathcal{P} : \Xi \rightarrow \Xi$ da seguinte maneira

$$\mathcal{P}(\alpha_1) = \alpha_2 = \alpha(\sigma(\alpha_1), \alpha_1),$$

com $\alpha_2 \in \Xi$. Assim, escreveremos a aplicação de Poincaré na forma

$$\mathcal{P}(\alpha) = \varphi(\sigma(\alpha), \alpha).$$

Calculando a primeira derivada do mapa de Poincaré com respeito as condições iniciais obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha},$$

onde $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ é obtida pela primeira equação variacional. Para a segunda derivada, obtemos a expressão

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma \partial \alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \alpha^2},$$

onde $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma \partial \alpha}$ e $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}$ são dadas pelas primeira e segunda equações variacionais respectivamente. Por um procedimento semelhante podemos calcular as outras derivadas do mapa de Poincaré com respeito as condições iniciais e desta maneira, podemos usar o desenvolvimento de Taylor de $\mathcal{P}$ em torno de um ponto fixo $\alpha_0 \in \Xi$ para obter a seguinte expressão para o mapa de Poincaré

$$\mathcal{P}(\alpha) = \alpha_0 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \right) (\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=\alpha_0} \right) (\alpha - \alpha_0)^2 + \mathcal{O}((\alpha - \alpha_0)^3).$$

Agora aplicaremos este método para calcular a aplicação de Poincaré $\mathcal{P}$ em torno da órbita $2\pi\epsilon^3$ -periódica $(u, v, t) = (0, 0, t)$ do sistema diferencial (6.96). Mais concretamente, $\mathcal{P} : \{(u, -v, t) \mid t = 0\} \rightarrow \{(u, -v, t) \mid t = 2\pi\epsilon^3\}$ e $\mathcal{P}(0, 0, 0) = \mathcal{P}(0, 0, 2\pi\epsilon^3)$. Consideremos o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{4}u^3(V) \\ \frac{dV}{dt} &= - \left[\frac{u^4}{4} - \frac{c^2}{8}u^6 - \frac{3}{32}u^8\rho^2(t) + \frac{15}{512}u^{12}\rho^4(t) + \mathcal{O}(u^{16}) \right] \\ \frac{dt}{dt} &= 1, \end{aligned} \tag{7.6}$$

onde $V = -v$. Logo o campo vetorial sobre Ξ é dado por

$$f(u, V, t) = \begin{pmatrix} -\frac{u^4}{4} + \frac{c^2}{8}u^6 + \frac{3}{32}u^8\rho^2(t) - \frac{15}{512}u^{12}\rho^4(t) + \mathcal{O}(u^{16}) \\ -\frac{u^3V}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos as componentes do fluxo φ de $\dot{x} = f(x)$ como sendo $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, onde $x = (u, V, t)$. De (7.6) vemos que $\varphi_3(t, \alpha) = t$, portanto $\sigma(\alpha) = 2\pi\epsilon^3$. Assim desde que $\sigma(\alpha)$ é constante temos $\frac{\partial^n \mathcal{P}}{\partial \alpha^n} = \frac{\partial^n \varphi(\sigma(\alpha), \alpha)}{\partial \alpha^n}$. Desta maneira, no nosso caso a aplicação de Poincaré será dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(u, V) &= \alpha_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))u + \frac{\partial \varphi}{\partial V}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))V \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))u^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial V}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))uV + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial V^2}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))V^2 \right) \\ &+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^3}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))u^3 + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial V}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))u^2V + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial u \partial V^2}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))uV^2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial V^3}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))V^3 \right) \\ &+ \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^4}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))u^4 + 4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^3 \partial V}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))u^3V + 6 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^2 \partial V^2}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))u^2V^2 + 4 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial u \partial V^3}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))uV^3 \right. \\ &\left. + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial V^4}(\alpha_0, \sigma(\alpha_0))V^4 \right) + \mathcal{O}((\alpha - \alpha_0)^5). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Tomamos a condição inicial $\alpha_0 = (0, 0)$ o qual é um ponto da solução periódica $(0, 0, t)$ e portanto é um ponto fixo de $\mathcal{P}$. Além disso, como a órbita é $2\pi\epsilon^3$ -periódica se tem que $\sigma(\alpha_0) = 2\pi\epsilon^3$.

Uma vez que $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \mid_{t=0} = I$, temos que $\frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(t, \alpha_0) = 1$ e $\frac{\partial \varphi_2}{\partial V}(t, \alpha_0) = 1$.

De acordo com o que expomos anteriormente, sabemos que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0)$ é solução de

$$\dot{Y} = Df(\varphi(t, \alpha_0))Y + B(t),$$

onde $B(t) = D^2 f(\varphi(t, \alpha_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, \alpha_0)^2 \equiv 0$, pois $D^2 f(\varphi(t, \alpha_0)) \equiv 0$. Como $Df(\varphi(t, \alpha_0)) \equiv 0$, temos que

$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0) \mid_{t=0} \equiv 0$. Em particular, segue que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(\sigma(\alpha_0), \alpha_0) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(2\pi\epsilon^3, \alpha_0) \equiv 0$.

Continuando, temos que $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}(t, \alpha_0)$ é solução de

$$\dot{Y} = Df(\varphi(t, \alpha_0))Y + B(t),$$

onde $B(t) = D^3 f(\varphi(t, \alpha_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0)^3 + 0^2 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0) \right) \equiv 0$, pois $D^3 f(\varphi(t, \alpha_0))$, $D^2 f(\varphi(t, \alpha_0))$ são matrizes identicamente nulas. Como $Df(\varphi(t, \alpha_0))$ também é uma matriz identicamente nula temos que $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}(t, \alpha_0) = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}(t, \alpha_0) |_{t=0} \equiv 0$. Assim, $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}(2\pi\epsilon^3, \alpha_0) \equiv 0$.

No quarto passo, vemos que $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4}(t, \alpha_0)$ é solução da equação

$$\dot{Y} = Df(\varphi(t, \alpha_0))Y + B(t),$$

onde $B(t) = D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0)^4$, pois todos os outros termos se anulam. Desde que $Df(\varphi(t, \alpha_0))$ é a matriz identicamente nula, para encontrarmos $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4}(t, \alpha_0)$ basta integrarmos a equação

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4}(t, \alpha_0) = D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0)^4.$$

Na matriz $D^4 f(\varphi(t, \alpha))$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^4} &= 0, & \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^3 \partial V} &= -\frac{3}{2}, & \frac{\partial^4 f_1}{\partial u^2 \partial V^2} &= 0, \\ \frac{\partial^4 f_1}{\partial u \partial V^3} &= 0, & \frac{\partial^4 f_1}{\partial V^4} &= 0, & \frac{\partial^4 f_1}{\partial V^3 \partial u} &= 0, \\ \frac{\partial^4 f_1}{\partial V^2 \partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^4 f_1}{\partial V \partial u^3} &= -\frac{3}{2}, & & \\ \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^4} &= -6 + \frac{360}{8} c^2 u^2 + \frac{5040}{32} u^4 \rho^2(t) + \mathcal{O}(u^8), & \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^3 \partial V} &= 0, & \frac{\partial^4 f_2}{\partial u^2 \partial V^2} &= 0, \\ \frac{\partial^4 f_2}{\partial u \partial V^3} &= 0, & \frac{\partial^4 f_2}{\partial V^4} &= 0, & \frac{\partial^4 f_2}{\partial V^3 \partial u} &= 0, \end{aligned}$$

Assim, $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4}(\sigma(\alpha_0), \alpha_0)$ se reduz apenas a

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \alpha^4}(\sigma(\alpha_0), \alpha_0) = \left(0, \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial u^4}(\sigma(\alpha_0), \alpha_0) \right) u^4 + 4 \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^3 \partial V}(\sigma(\alpha_0), \alpha_0), 0 \right) u^3 V = (-12\pi\epsilon^3 u^3 V, -12\pi\epsilon^3 u^4).$$

No quinto passo, $\frac{\partial^5 \varphi}{\partial \alpha^5}(t, \alpha_0)$ é solução da equação

$$\dot{Y} = Df(\varphi(t, \alpha_0))Y + B(t),$$

onde $B(t) = D^5 f(\varphi(t, \alpha_0)) \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0)^5 + 10D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right)^3, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0) \right) +$ outros termos.

Como veremos abaixo a matriz $D^5 f(\varphi(t, \alpha_0))$ é a matriz nula e, uma vez que todos os outros termos de $B(t)$ se anulam com exceção de $D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right)^3, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0) \right)$, temos que $\frac{\partial^5 \varphi}{\partial \alpha^5}(t, \alpha_0)$ é dada pela integral da equação

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial \alpha^5}(t, \alpha_0) = 10D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0)^3, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0) \right).$$

Na matriz $D^5 f(\varphi(t, \alpha_0))$ temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^5 f_1}{\partial u^5} &= 0, & \frac{\partial^5 f_1}{\partial u^4 \partial V} &= 0, & \frac{\partial^5 f_1}{\partial u^3 \partial V^2} &= 0, \\ \frac{\partial^5 f_1}{\partial u \partial V^4} &= 0, & \frac{\partial^5 f_1}{\partial V^5} &= 0, & \frac{\partial^5 f_1}{\partial V^4 \partial u} &= 0, \\ \frac{\partial^5 f_1}{\partial V^3 \partial u^2} &= 0, & \frac{\partial^5 f_1}{\partial V \partial u^4} &= 0, \\ \frac{\partial^5 f_2}{\partial u^5} &= \frac{720}{8} c^2 u + 630 u^3 \rho(t)^2 + \mathcal{O}(u^7), & \frac{\partial^5 f_2}{\partial u^4 \partial V} &= 0, & \frac{\partial^5 f_2}{\partial u^3 \partial V^2} &= 0, \\ \frac{\partial^5 f_2}{\partial u \partial V^4} &= 0, & \frac{\partial^5 f_2}{\partial V^5} &= 0, & \frac{\partial^5 f_2}{\partial V^4 \partial u} &= 0.\end{aligned}$$

No sexto passo, temos que $\frac{\partial^6 \varphi}{\partial \alpha^6}(t, \alpha)$ é dada pela integral da equação

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial^6 \varphi}{\partial \alpha^6}(t, \alpha_0) &= D^6 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right)^6 + 10 D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right)^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right) \\ &+ 6 D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right) \right) \\ &+ 4 D^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right)^3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3}(t, \alpha_0) + 0^4 f(\varphi(t, \alpha_0)) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(t, \alpha_0) \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}(t, \alpha_0) \right)^2.\end{aligned}$$

Na matriz $D^6 f(\varphi(t, \alpha))$ só o termo $\frac{\partial^6 f_2}{\partial u^6} = \frac{720}{8} c^2 + 1890 u^2 \rho(t)^2 + \mathcal{O}(u^6)$ é não nulo. Assim, $D^6 f(\varphi(t, \alpha_0))$ só possui a componente $\frac{\partial^6 f_2}{\partial u^6}(t, \alpha_0) = \frac{720}{8} c^2$, a qual é não nula.

Continuando, no sétimo passo, como explicado nos casos anteriores, $\frac{\partial^7 \varphi}{\partial \alpha^7}(t, \alpha)$ é solução da equação

$$\dot{Y} = Df(\varphi(t, \alpha_0))Y + B(t),$$

onde $Df(\varphi(t, \alpha_0)) \equiv 0$ e $B(t)$ possui termos não nulos correspondentes a $D^4 f(\varphi(t, \alpha_0))$ e $D^6 f(\varphi(t, \alpha_0))$. A matriz $D^7 f(\varphi(t, \alpha))$ só possui o termo $\frac{\partial^7 f_2}{\partial u^7} = 3780 u \rho(t)^2 + \mathcal{O}(u^5)$ não nulo. Assim, $D^7 f(\varphi(t, \alpha_0)) \equiv 0$.

No oitavo passo, $\frac{\partial^8 \varphi}{\partial \alpha^8}(t, \alpha)$ é solução da equação

$$\dot{Y} = Df(\varphi(t, \alpha_0))Y + B(t),$$

onde $Df(\varphi(t, \alpha_0)) \equiv 0$ e $B(t)$ possui termos não nulos correspondentes a $D^4 f(\varphi(t, \alpha_0))$, $D^6 f(\varphi(t, \alpha_0))$ e $D^8 f(\varphi(t, \alpha_0))$. A matriz $D^8 f(\varphi(t, \alpha))$ só possui o termo $\frac{\partial^8 f_2}{\partial u^8} = 3780 \rho(t)^2 + \mathcal{O}(u^4)$ não nulo. Assim, $D^8 f(\varphi(t, \alpha_0))$ só possui a componente $\frac{\partial^8 f_2}{\partial u^8}(t, \alpha_0) = 3780 \rho(t)^2$. Desta maneira teremos,

$$\frac{\partial^8 \varphi}{\partial \alpha^8}(\sigma(\alpha_0), \alpha_0) = \frac{\partial^8 \varphi}{\partial \alpha^8}(2\pi\epsilon^3, \alpha_0) = (0, 3780 \int_0^{2\pi\epsilon^3} \rho(\tau)^2 d\tau) u^8.$$

Substituindo $\rho^2(t) = \epsilon^4 [1 - \cos E_\epsilon(t)]^2$ por sua série de Fourier, a qual é dada por $\epsilon^4 \left[\frac{5}{2} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \frac{\alpha t}{\epsilon^3} \right]$, temos que

$$\frac{\partial^8 \varphi}{\partial \alpha^8}(\sigma(\alpha_0), \alpha_0) = \left(0, 3780 \epsilon^4 \int_0^{2\pi\epsilon^3} \left[\frac{5}{2} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_\alpha \cos \frac{\alpha t}{\epsilon^3} \right] d\tau \right) u^8 = (0, 3780 \epsilon^7 5\pi) u^8 = (0, 18900 \pi \epsilon^7) u^8.$$

Portanto, usando (7.7) temos que

$$\mathcal{P}(u, -v) = \left(u + \frac{\pi \epsilon^3}{2} u^3 [v + r_1(u, v)], -v - \frac{\pi \epsilon^3}{2} u^3 [u + c^2/2 u^3 + 9450 \epsilon^4 u^5 + r_2(u, v)] \right),$$

onde r_1 e r_2 são funções analíticas reais em u, v e ϵ de segunda ordem em u e v .

7.2 Apêndice B: Teorema da média

Neste apêndice relembramos alguns resultados importantes concernentes ao método da média. Este método determina sob que condições poderíamos conseguir uma mudança de variável dependente do tempo a qual tenha o efeito de reduzir a equação diferencial não autônoma a uma autônoma. O problema básico no método da média é determinar em que sentido o comportamento das soluções do sistema autônomo (sistema médio) aproxima o comportamento das soluções do sistema mais complicado, sistema não autônomo (sistema completo).

Seja as equações da seguinte maneira

$$\dot{\mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \epsilon^2 \mathbf{g}(\mathbf{x}, t, \epsilon), \quad (7.8)$$

onde

$$\mathbf{f} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{g} : U \times \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

($U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto aberto) são C^r ($r \geq 1$) sob seus respectivos domínios de definição. Assumiremos, adicionalmente, que $\mathbf{f}$ e $\mathbf{g}$ são T -periódicas em t . A equação média associada é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in U, \quad (7.9)$$

onde

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) dt. \quad (7.10)$$

Agora enunciaremos o Teorema da média segundo Wiggins em [51].

Teorema C. *Existe uma mudança de coordenadas de classe C^r , $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \epsilon \omega(\mathbf{x}, t)$ sob a qual (7.8) torna-se*

$$\dot{\mathbf{y}} = \epsilon \mathbf{f}_0(\mathbf{y}) + \epsilon^2 \mathbf{f}_1(\mathbf{y}, t, \epsilon), \quad (7.11)$$

onde $\mathbf{f}_1$ é de período T em t . Além disso,

1. Se $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são soluções de (7.8) e (7.9), respectivamente, com $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, e $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| = O(\epsilon)$, então $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| = O(\epsilon)$ em um tempo $O(1/\epsilon)$ dado $\mathbf{y}(t) \in U$ em uma escala de tempo $O(1/\epsilon)$.
2. Se $\mathbf{p}_0$ é um ponto fixo hiperbólico de (7.9), então existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$, (7.8) possui uma órbita periódica isolada $\gamma_\epsilon(t) = \mathbf{p}_0 + O(\epsilon)$ do mesmo tipo de estabilidade que $\mathbf{p}_0$.

A próxima versão, a qual nos dá a existência de soluções periódicas através da equação média, foi transcrita de Hale [21]. Seja $\mathbf{f} : U \times \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ conjunto aberto) contínua, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \epsilon)$ é T -periódica em t para cada ϵ fixado e possui as primeiras derivadas contínuas com respeito a $\mathbf{x}$.

Seja o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \epsilon) \quad (7.12)$$

e considere o sistema médio

$$\dot{\mathbf{x}} = \epsilon \mathbf{f}_0(\mathbf{x}), \quad (7.13)$$

onde

$$\mathbf{f}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, 0) dt. \quad (7.14)$$

Teorema D. *Suponha $\mathbf{f}$ satisfaça as condições acima e exista um $\mathbf{x}_0 \in U$ tal que $\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e $\det J\mathbf{f}_0(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Então, existem um $\epsilon_0 > 0$ e uma função $\mathbf{x}^*(t, \epsilon)$ contínua para $(t, \epsilon) \in \mathbb{R} \times [0, \epsilon_0]$, $\mathbf{x}^*(t, 0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t+T, \epsilon) = \mathbf{x}(t, \epsilon)$ e $\mathbf{x}^*(t, \epsilon)$ satisfaça (7.12). Esta solução $\mathbf{x}^*(\cdot, \epsilon)$ é única em uma vizinhança de $\mathbf{x}_0$.*

A prova deste teorema pode ser encontrada em [21].

7.3 Apêndice C: A vizinhança de soluções circulares e de soluções elípticas do problema de Kepler

Os cálculos abaixo servem tanto para os casos isósceles e planar quanto para o caso espacial. Isso deve-se ao fato das variáveis Q_3 e P_3 não aparecerem no cálculo das expressões de $\|q\|$ and ψ para o caso espacial. De fato, Considere a seguinte escolha das variáveis de Poincaré-Delaunay

$$\begin{aligned} Q_1 &= l + g, & P_1 &= L, \\ Q_2 &= -\sqrt{2(L-G)} \sin g, & P_2 &= \sqrt{2(L-G)} \cos g, \\ Q_3 &= h, & P_3 &= H = G \cos i. \end{aligned} \quad (7.15)$$

e as variáveis de Delaunay

$$\begin{aligned} \bar{Q}_1 &= l, & \bar{P}_1 &= L, \\ \bar{Q}_2 &= g, & \bar{P}_2 &= G, \\ \bar{Q}_3 &= h, & \bar{P}_3 &= H. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Uma vez que usaremos os elementos orbitais clássicos, primeiramente relembremos algumas fórmulas que serão necessárias aqui. Seja E anomalia excêntrica, então temos a seguinte relação

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{4}} \tan \frac{f}{2}. \quad (7.17)$$

A anomalia média l está relacionada à anomalia excêntrica E através da equação de Kepler

$$l = E - e \sin E. \quad (7.18)$$

A distância à origem e o ângulo ψ são dados por

$$\|q\| = a(1 - e \cos E), \quad (7.19)$$

$$\psi = f + g, \quad (7.20)$$

onde f é a anomalia verdadeira. Note que ψ está bem definido sobre órbitas circulares mesmo que f e g não estejam definidos. Nem os elementos orbitais clássicos nem as variáveis de Delaunay estão definidos sobre órbitas circulares, no entanto $e \sin f$ e $e \cos f$ estão bem definidos, o mesmo pode ser dito sobre $e \sin l$, $e \cos l$, $e \sin E$, $e \cos E$. Evitaremos o uso direto das variáveis angulares l, f, E , e ao invés disso, pares tais como $(e \sin E, e \cos E)$ serão usados. Observe que para cada par $(e \sin l, e \cos l)$, $(e \sin f, e \cos f)$ e $(e \sin E, e \cos E)$ ambas variáveis podem ser expandidas como série de potências nas variáveis de qualquer outro par. As diferenças $f - E$, $E - l$ e $f - l$ podem ser expandidas do mesmo modo. Apresentaremos a seguir algumas destas expansões, e uma referência padrão para o assunto é [7]. Da equação de Kepler (2.13) as seguintes expansões podem ser derivadas

$$e \cos E = e \cos l - (e \sin l)^2 + \mathcal{O}_3(e \sin l, e \cos l) \quad (7.21)$$

$$e \sin E = e \sin l + e \sin(l) e \cos(l) + \mathcal{O}_3(e \sin l, e \cos l).$$

A diferença $f - E$ pode ser expandida de (7.17) como

$$f - E = e \sin E + \frac{1}{2} e \sin(E) e \cos(E) + \mathcal{O}(e \sin E, e \cos E), \quad (7.22)$$

e a diferença $E - l$ é dada por (7.18). Uma vez que $Q_1 = l + g$, temos também

$$\begin{aligned} e \cos l &= \cos(Q_1) e \cos g + \sin(Q_1) e \sin g, \\ e \sin l &= \sin(Q_1) e \cos g - \cos(Q_1) e \sin g. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Observe que as expressões dadas em (7.23) dependem fortemente das variáveis escolhidas. Neste caso, escolhemos as variáveis dadas em (7.15). Mas, com respeito às variáveis dadas em (7.16) temos

$$\begin{aligned} e \cos l &= e \cos \bar{Q}_1, \\ e \sin l &= e \sin \bar{Q}_1. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Da definição de Q_2 e P_2 dadas em (7.15) e das relações $G = \sqrt{a(1-e^2)}$, $L = \sqrt{a}$ segue que

$$e = \frac{1}{L} \sqrt{(L-G)(L+G)} = \sqrt{\frac{(Q_2^2 + P_2^2)(4P_1 - (Q_2^2 + P_2^2))}{4P_1^2}},$$

$$\begin{aligned} \sin g &= -\frac{Q_2^2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, & e \sin g &= -\frac{1}{\sqrt{2P_1}} Q_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}, \\ \cos g &= \frac{P_2}{\sqrt{Q_2^2 + P_2^2}}, & e \cos g &= \frac{1}{\sqrt{2P_1}} P_2 \sqrt{2P_1 - \frac{1}{2}(Q_2^2 + P_2^2)}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Agora com respeito às variáveis dadas em (7.16) temos

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{L} \sqrt{(L-G)(L+G)} = \sqrt{1 - \frac{\bar{P}_2^2}{\bar{P}_1^2}}, \\ e \sin g &= \sqrt{1 - \frac{\bar{P}_2^2}{\bar{P}_1^2}} \sin \bar{Q}_2, \\ e \cos g &= \sqrt{1 - \frac{\bar{P}_2^2}{\bar{P}_1^2}} \cos \bar{Q}_2. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Substituindo (7.25), (7.23) e a primeira equação de (7.21) em (7.19) obtemos a expressão de $\|\mathbf{q}\|$ nas variáveis de Poincaré- Delaunay a qual é dada por

$$\|\mathbf{q}\| = P_1^2 \left(1 - [e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right),$$

onde $e \cos g$ e $e \sin g$ são dadas por (7.25). Para obter uma melhor aproximação, podemos expandir o lado direito de (7.25) como série de potências em Q_2, P_1, P_2 perto da condição inicial escolhida da órbita do sistema não perturbado. Em nosso caso, escolhemos $Q_2 = 0, P_1 = s^{-1/3}, P_2 = 0$ (caso circular). Levando em conta (7.23), conseguimos $e \sin l, e \cos l$ como série de potências nas variáveis mencionadas e coeficientes trigonométricos em Q_1 e de (7.21) eventualmente encontramos $e \sin E, e \cos E$, novamente como série do mesmo tipo. Finalmente, de (7.19) conseguimos a expressão para $\|\mathbf{q}\|$, a qual é dada por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\| &= s^{-2/3} + s^{-1/2} Q_2 \sin Q_1 - s^{-1/2} P_2 \cos Q_1 + 2s^{-1/3} (P_1 - s^{-1/3}) + s^{-1/3} Q_2^2 \cos^2 Q_1 \\ &\quad + \frac{3}{2} s^{-1/6} Q_2 (P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + 2s^{-1/3} Q_2 P_2 \sin Q_1 \cos Q_1 + (P_1 - s^{-1/3})^2 - \frac{3}{2} s^{-1/6} (P_1 - s^{-1/3}) P_2 \cos Q_1 \\ &\quad + s^{-1/3} P_2^2 \sin^2 Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3), \end{aligned}$$

onde $X = (\Delta Q_2, \Delta P_1, \Delta P_2) = (Q_2, P_1 - s^{-1/3}, P_2)$.

Analogamente, obtemos a expressão para $\|\hat{\mathbf{q}}\|$, nas variáveis de Delaunay descritas em (7.16), a qual é

$$\|\hat{\mathbf{q}}\| = \bar{P}_1^2 \left(1 - e \cos \bar{Q}_1 + [e \sin \bar{Q}_1]^2 \right),$$

onde a expressão para e é dada pela primeira equação de (7.26). E, usando série de potências em torno de $\bar{P}_1 = s^{-1/3} \bar{P}_2 = \bar{P}_2^* = \bar{P}_3 = 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|\hat{\mathbf{q}}\| &= s^{-2/3} + (s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin^2 \bar{Q}_1 - s^{-1/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \cos \bar{Q}_1 \\
&+ \left(2s^{-1/3} - \left(\frac{s^{-2/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} + \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \right) \cos \bar{Q}_1 + 2s^{-1/3} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_1 - s^{-1/3}) \\
&+ \left(\frac{s^{-1/3} \bar{P}_2^*}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \cos \bar{Q}_1 - 2\bar{P}_2^* \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_2 - \bar{P}_2^*) \\
&+ \left(\left(-\frac{3s^{-1/3}}{2\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} + \frac{s^{-1}}{2(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)^{3/2}} \right) \cos \bar{Q}_1 + 1 + \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_1 - s^{-1/3})^2 \\
&+ \left(-\frac{s^{-2/3} \bar{P}_2^*}{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)^{3/2}} + \frac{\bar{P}_2^*}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \right) \cos \bar{Q}_1 (\bar{P}_1 - s^{-1/3}) (\bar{P}_2 - \bar{P}_2^*) \\
&+ \left(\left(\frac{s^{-1/3}}{2\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} + \frac{s^{-1/3} (\bar{P}_2^*)^2}{2(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)^{3/2}} \right) \cos \bar{Q}_1 - \sin^2 \bar{Q}_1 \right) (\bar{P}_2 - \bar{P}_2^*)^2 + \mathcal{O}(\|X\|^3),
\end{aligned}$$

onde $X = (\triangle \bar{P}_1, \triangle \bar{P}_2, \triangle \bar{P}_3) = (\bar{P}_1 - s^{-1/3}, \bar{P}_2 - \bar{P}_2^*, \bar{P}_3)$.

O cálculo para ψ nas variáveis de Poincaré-Delaunay é feito da seguinte forma: ψ nestas variáveis pode ser escrito como

$$\psi = Q_1 + f - E + E - l.$$

Assim, usando as expressões dadas em (7.22) e (7.18) para $f - E$ e $E - l$, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
\psi &= Q_1 + 2 \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left([e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1] + [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1][e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1] \right) \\
&\left(e \cos g \cos Q_1 + e \sin g \sin Q_1 - [e \cos g \sin Q_1 - e \sin g \cos Q_1]^2 \right),
\end{aligned}$$

onde as expressões para $e \cos g$ e $e \sin g$ nas variáveis de Delaunay estão em (7.26). Expandindo esta expressão em série de potências, como no caso de $\|\mathbf{q}\|$, obtemos a expressão de ψ nas variáveis de Poincaré-Delaunay numa vizinhança de uma órbita do sistema não perturbado

$$\begin{aligned}
\psi &= Q_1 + 2P_2 s^{1/6} \sin Q_1 + 2Q_2 s^{1/6} \cos Q_1 \\
&- \frac{5}{2} s^{1/3} Q_2^2 \cos Q_1 \sin Q_1 + \frac{5}{2} s^{1/3} P_2 Q_2 \cos 2Q_1 - Q_2 s^{1/2} (P_1 - s^{-1/3}) \cos Q_1 \\
&- P_2 s^{1/2} (P_1 - s^{-1/3}) \sin Q_1 + \frac{5}{2} P_2^2 s^{1/3} \sin Q_1 \cos Q_1 + \mathcal{O}(\|X\|^3),
\end{aligned}$$

onde $X = (\triangle Q_2, \triangle P_1, \triangle P_2) = (Q_2, P_1 - s^{-1/3}, P_2)$.

Com respeito ao ângulo $\psi = g + f$ em variáveis de Delaunay, note que podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$\psi = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + f - E + E - l. \quad (7.27)$$

Substituindo (7.22) e (7.18) em (7.27) obtemos

$$\begin{aligned}
\psi &= \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + 2 \left[\frac{\sqrt{\bar{P}_1^2 - \bar{P}_2^2}}{\bar{P}_1} \sin \bar{Q}_1 + \frac{\bar{P}_1^2 - \bar{P}_2^2}{\bar{P}_1^2} \cos \bar{Q}_1 \sin \bar{Q}_1 \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left[\frac{\bar{P}_1^2 - \bar{P}_2^2}{\bar{P}_1^2} \cos \bar{Q}_1 \sin \bar{Q}_1 - \frac{(\bar{P}_1^2 - \bar{P}_2^2)^{3/2}}{\bar{P}_1^3} \sin^3 \bar{Q}_1 \right. \\
&\left. + \frac{(\bar{P}_1^2 - \bar{P}_2^2)^{3/2}}{\bar{P}_1^3} \sin \bar{Q}_1 \cos^2 \bar{Q}_1 - \frac{(\bar{P}_1^2 - \bar{P}_2^2)^2}{\bar{P}_1^4} \sin^3 \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right].
\end{aligned}$$

Em série de potências em torno de $\bar{P}_1 = s^{-1/3}$, $\bar{P}_2 = \bar{P}_2^*$ e $\bar{P}_3 = 0$, ψ assume a forma

$$\begin{aligned}
\psi &= \bar{Q}_2 + \bar{Q}_1 + \frac{2\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \sin \bar{Q}_1}{s^{-1/3}} + \frac{2(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1}{s^{-2/3}} \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \sin \bar{Q}_1}{s^{-1/3}} + \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1}{s^{-2/3}} \right) \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2} \cos \bar{Q}_1}{s^{-1/3}} \right. \\
&\left. - \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2) \sin^2 \bar{Q}_1}{s^{-2/3}} \right) + \left[\frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{4(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-1}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \left(\frac{(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \cos \bar{Q}_1 \right. \\
&\left. - \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-1}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3} \sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-1}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \\
&\left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \cos \bar{Q}_1 - \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) \Big] (\bar{P}_1 - s^{-1/3}) \\
&+ \left[-\frac{2(\bar{P}_2^*)^2 s^{1/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 - \frac{4(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \sin \bar{Q}_1 + \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \left(-\frac{(\bar{P}_2^*)^2 s^{1/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \cos \bar{Q}_1 \right. \\
&\left. + \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}}{s^{-1/3}} \cos \bar{Q}_1 - \frac{(s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2)}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \right) \\
&\left(-\frac{(\bar{P}_2^*)^2 s^{1/3}}{\sqrt{s^{-2/3} - (\bar{P}_2^*)^2}} \sin \bar{Q}_1 - \frac{2(\bar{P}_2^*)^2}{s^{-2/3}} \sin^2 \bar{Q}_1 \cos \bar{Q}_1 \right) \Big] (\bar{P}_2 - (\bar{P}_2)^*) + \mathcal{O}(\|\mathbf{X}\|^2),
\end{aligned}$$

onde $X = (\Delta P_1, \Delta P_2, \Delta P_3) = (\bar{P}_1 - s^{-1/3}, \bar{P}_2 - \bar{P}_2^*, \bar{P}_3)$.

Observe que mesmo quando $\mathbf{q}$ for considerada no espaço, i.e., em $\mathbb{R}^3$ as variáveis Q_3 and P_3 não entram neste cálculo, desta maneira temos as mesmas expressões para $\|\mathbf{q}\|$ e ψ no caso espacial.

7.4 Apêndice D: Elementos orbitais clássicos

Este apêndice é um pequeno resumo de uma seção do livro [4] e, somente para facilitar a leitura, decidimos inseri-lo na tese.

Cinco quantidades independentes chamadas "elementos orbitais" são suficientes para descrever completamente o tamanho, forma e orientação de uma órbita. Um sexto elemento é exigido para definir a posição do satélite ou

partícula ao longo da órbita em um particular tempo. O conjunto clássico dos seis elementos orbitais são definidos com a ajuda da Figura 7.4 como segue:

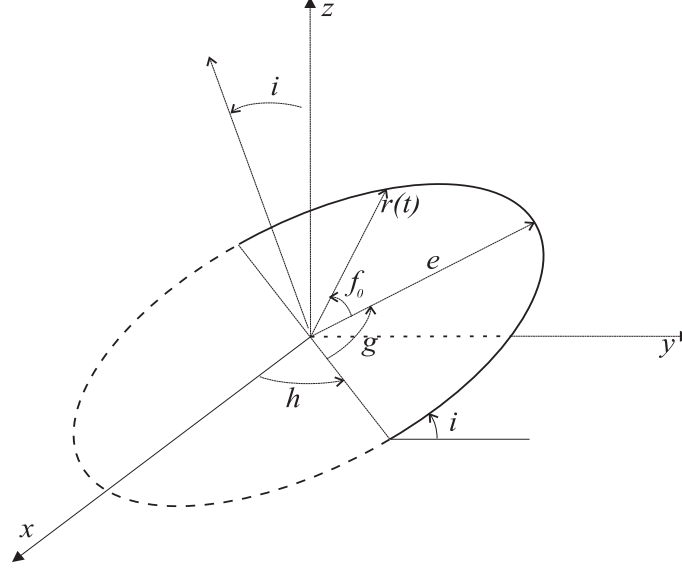


Figura 7.1: Elementos Orbitais

- 1) a , semieixo maior- uma constante definindo o tamanho do semieixo maior da órbita cônica.
- 2) e , excêntricidade- uma constante definindo a forma da órbita cônica.
- 3) i , inclinação- o ângulo de inclinação do plano orbital com respeito ao plano de referência xy .
- 4) h , longitude do nodo ascendente- o ângulo, no plano de referência, entre o eixo x e o ponto onde o satélite atravessa o plano de referência em uma direção boreal (nodo ascendente) medida em sentido contrário aos ponteiros do relógio quando visto do lado norte do plano de referência.
- 5) g , argumento do pericentro- o ângulo, no plano orbital, entre o nodo ascendente e o ponto pericentro, medido na direção do movimento do satélite.

- 6) τ , tempo de passagem pelo pericentro- o tempo quando o satélite passa pelo pericentro.

Frequentemente, o parâmetro da cônica, $p = a(1 - e^2)$, é substituído por a na lista acima.

Ao invés do argumento do pericentro, o seguinte é algumas vezes usado:

Π , longitude do pericentro- o ângulo medido a a partir do eixo x até o pericentro, sendo do eixo x até a linha do nodo ascendente (se ele existir) e então no plano orbital até o pericentro. Se ambos h e g estão definidos então

$$\Pi = h + g.$$

Se não existir pericentro (órbita circular), então ambos g e Π não estão definidos.

Seja f_0 , anomalia verdadeira em um dado instante de tempo t_0 (at epoch) - o ângulo, no plano da órbita do satélite, entre o pericentro e a posição do satélite em um tempo particular, t_0 .

ψ_0 , argumento de latitude (at epoch)- o ângulo, na plano da órbita, entre o nodo ascendente (se ele existir) e o raio vetor ao satélite no tempo t_0 . Se g e f_0 são ambos definidos então

$$\psi_0 = g + f_0.$$

Se não existe nodo ascendente (órbita equatorial), então ambos g e ψ_0 não estão definidos.

γ_0 , longitude verdadeira (at epoch)- o ângulo entre o semi-eixo positivo x e o raio vetor ao satélite em t_0 , q_0 , medido a partir do eixo x até a linha do nodo ascendente (se ele existir) e então no plano orbital até o raio vetor.

Se h, g e f_0 são todos definidos, então

$$\gamma_0 = h + g + f_0 = \Pi + f_0 = h + \psi_0. \quad (7.28)$$

Se não existe nodo ascendente (órbita equatorial), então $\gamma_0 = \Pi + f_0$. Se não existe pericentro (órbita circular), então $\gamma_0 = h + \psi_0$. Se a órbita é ambos circular e equatorial, γ_0 , é simplesmente o ângulo verdadeiro do semi-eixo

positivo x ao raio vetor do satélite, ambos dos quais estão sempre definidos.

7.4.1 Encontrando os elementos orbitais

Nesta subseção daremos um roteiro de como encontrar os elementos orbitais. No entanto, primeiramente é necessário gastarmos um tempo com notações e definições.

Seja $\mathbf{r}$ e $\mathbf{v}$ o vetor posição e velocidade, respectivamente, de um satélite relativo ao sistema de referência geocêntrica equatorial (a origem do sistema no centro da terra e plano de referência o plano do equador) em um tempo particular, t_0 . Descreveremos três vetores fundamentais- $\mathbf{G}$, $\mathbf{N}$ and $\mathbf{e}$.

O vetor momento angular, $\mathbf{G}$ é dado por $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$, i. e.,

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_i & r_j & r_k \\ v_i & v_j & v_k \end{vmatrix} = G_i \mathbf{i} + G_j \mathbf{j} + G_k \mathbf{k}.$$

Uma vez que a terceira componente de $\mathbf{G}$ é frequentemente usada, denotaremos esta terceira componente G_k por H .

O vetor nodo, $\mathbf{N}$, é definido como $\mathbf{N} \equiv \mathbf{k} \times \mathbf{G}$, i. e.,

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ G_i & G_j & G_k \end{vmatrix} = N_i \mathbf{i} + N_j \mathbf{j} + N_k \mathbf{k}.$$

Da definição do produto vetorial, $\mathbf{N}$, deve ser perpendicular a ambos $\mathbf{k}$ e $\mathbf{G}$. Para ser perpendicular à $\mathbf{k}$, $\mathbf{N}$ teria que pertencer ao plano equatorial. Para ser perpendicular a $\mathbf{G}$, $\mathbf{N}$ teria que pertencer ao plano orbital. Portanto, $\mathbf{N}$ deve pertencer a ambos o plano equatorial e o plano orbital, ou seja, na interseção deles dois o qual é a "linha dos nodos." Especificamente, $\mathbf{N}$ é um vetor que aponta o longo da linha dos nodos na direção do nodo ascendente. O módulo de $\mathbf{N}$ é de nenhuma consequência para nós, estamos somente interessados em sua direção.

O vetor $\mathbf{e}$ é obtido de

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\kappa} \left[\left(v^2 - \frac{\kappa}{r} \right) \mathbf{r} - (\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v} \right]. \quad (7.29)$$

Agora, podemos dá um roteiro do método para encontrar os elementos orbitais:

1) $p = G^2/\kappa$.

2) $e = \|\mathbf{e}\|$.

3) A inclinação i é dada por

$$\cos i = \frac{H}{G}, \quad (7.30)$$

onde H é a terceira componente do vetor momento angular $\mathbf{G}$.

4) Desde que h é o ângulo entre $\mathbf{i}$ e $\mathbf{N}$,

$$\cos h = \frac{n_i}{n}. \quad (7.31)$$

Se $n_j > 0$ então h é menor do que 180° .

5) Como g é o ângulo entre $\mathbf{N}$ e $\mathbf{e}$,

$$\cos g = \frac{\mathbf{N}\mathbf{e}}{ne}. \quad (7.32)$$

Se $e_k > 0$ então g é menor do que 180° .

6) Uma vez que f_0 é o ângulo entre $\mathbf{e}$ e $\mathbf{r}$,

$$\cos f_0 = \frac{\mathbf{e}\mathbf{r}}{er}. \quad (7.33)$$

Se $\mathbf{r}\mathbf{v} > 0$ então f_0 é menor do que 180° .

7) Desde que ψ_0 é o ângulo entre $\mathbf{N}$ e $\mathbf{r}$,

$$\cos \psi_0 = \frac{\mathbf{N}\mathbf{r}}{nr}. \quad (7.34)$$

Se $r_k > 0$ então ψ_0 é menor do que 180° .

8)

$$\gamma_0 = h + g + f_0 = h + \psi_0.$$

7.5 Apêndice E: Uma decomposição do vetor $\mathbf{q}$.

Seja $\mathbf{q}$ o vetor posição de uma partícula no espaço, descrita na figura abaixo. Os ângulos $\psi = g + f$, i , and h , também descritos na figura, são alguns dos elementos orbitais que tanto falamos e descrevemos ao longo do texto.

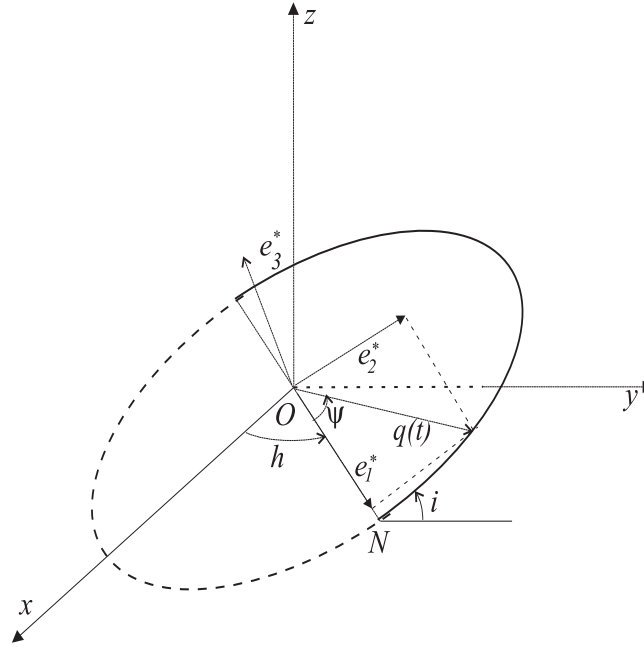


Figura 7.2: Decomposição do vetor $\mathbf{q}$.

Apresentaremos o vetor posição $\mathbf{q}$ segundo as coordenadas do sistema ortonormal de referência padrão do $\mathbb{R}^3$, o qual denotaremos por $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Considere um novo sistema ortonormal de referência de $\mathbb{R}^3$ $\{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$, obtido fazendo uma rotação em torno do eixo z num ângulo h , seguido de uma rotação num ângulo i em torno da linha dos nodos ON . A matriz que representa a primeira operação é dada por

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos h & \sin h & 0 \\ -\sin h & \cos h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

e a matriz que define a segunda operação é

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Seja $\mathcal{C}_1 = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ a base ortonormal obtida da base canônica $\mathcal{C}_2 = \{e_1, e_2, e_3\}$ por meio da transformação A_1 , e considere $\mathcal{C}_3 = \{e_1^*, e_2^*, e_3^*\}$ uma base ortonormal obtida da base $\mathcal{C}_1$ via a transformação A_2 . Desta maneira segue

que

$$\begin{aligned} e_1^* &= \cos h e_1 + \sin h e_2 \\ e_2^* &= -\sin h \cos i e_1 + \cos h \cos i e_2 + \sin i e_3 \\ e_3^* &= \sin h \sin i e_1 - \cos h \sin i e_2 + \cos i e_3. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Sabemos que o vetor $\mathbf{q}$ é dado por

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| (e_1^* \cos \psi + e_2^* \sin \psi). \quad (7.36)$$

Assim, substituindo as expressões em (7.35) em (7.36) obtemos

$$\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\| [(\cos \psi \cos h - \sin \psi \sin h \cos i) e_1 + (\sin h \cos \psi + \sin \psi \cos h \cos i) e_2 + \sin \psi \sin i e_3] \quad (7.37)$$

Desta maneira, desde que

$$\mathbf{q} = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

segue que as coordenadas do vetor $\mathbf{q}$ segundo o sistema de referência canônico de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{C}_2$, é dado por

$$\begin{aligned} x &= \|\mathbf{q}\| (\cos \psi \cos h - \sin \psi \sin h \cos i) \\ y &= \|\mathbf{q}\| (\sin h \cos \psi + \sin \psi \cos h \cos i) \\ z &= \|\mathbf{q}\| \sin \psi \sin i. \end{aligned} \quad (7.38)$$

7.6 Apêndice F: Cálculo numérico da interseção transversal das variedades.

Consideramos as condições iniciais sobre a variedade instável dada pela série $u = F(v, t)$, descrita em (6.98). Tomando k pontos variando E de 0 a 2π com um tamanho de passo igual a $2\pi/k$ obtemos os pontos E_i , $i = 0, 1, \dots, k$. Para cada E_i se calcula, através da equação de Kepler, o tempo correspondente $t_i = t(E_i)$, também calculamos $u_i = u(v_i, E_i)$, onde $v_0 = 0.25$. Temos então uma lista de valores iniciais (t_0, E_0, u_0, v_0) que nos dão condições iniciais $(E_0, r_0 = 2/u_0^2, p_{r_0} = -v_0)$ para o sistema (6.30). Este sistema será integrado até que cruzemos a seção $p_r = 0$ (esse cruzamento será identificado pelo programa quando p_r mudar de sinal). Guardamos os valores de cruzamento $(E_i^*, r_i^*, p_{r_i}^* = 0)$ para cada i , e com os quais obtemos (t_i^*, r_i^*) . Passamos para coordenadas cartesianas $x_i^* = r_i^* \cos(t_i^*)$, $y_i^* = r_i^* \sin(t_i^*)$. Usamos um "spline cúbico" para interpolar os pontos obtidos, desta maneira melhoramos o tempo de cálculo, uma vez que não precisamos calcular tantos pontos assim. O programa principal, nós o descrevemos a seguir

Cálculo das variedades parabólicas no problema restrito isósceles

```

<< GraphicsSpline (* livreria dos splines *)
SetDirectory["C:\Meus documentos\Lucia\Tese\tesechaos"]
(*deve ser trocado, este comando diz onde deve ser guardadas as figuras*)
C:\Arquivos de programas\Wolfram Research\Mathematica\5.2
(*c = momento angular; ε = movimento medio,
δv = aproximação da variedade instável,
npts = número de condições iniciais sobre a variedade instável*)
c = 1;
ε = 1;
δv = .25;
npts = 100;
(*F, anomalia excêntrica*)
(* equação de Kepler *)
tfn[F_] = ε³(F - Sin[F]);
(* coeficientes de aproximação da variedade instável *)
a3 = c²/8;
a5 =  $\frac{7c^4}{128} + \frac{5ε^4}{32}$ ;
a6 = 0;
a7 =  $\frac{1}{2} \left( \frac{33}{512}c^6 + \frac{180}{512}c^2ε^4 \right)$ ;
a8[F_] :=  $\frac{21}{256}c^4\text{tfn}[F] - \frac{3}{2}a5\text{tfn}[F] +$ 
 $\frac{3}{32} \left( -\frac{1}{12}ε^7(-30F + 45\text{Sin}[F] - 9\text{Sin}[2F] + \text{Sin}[3F]) \right)$ ;
u[v_, F_] = v + a3v³ + a5v⁵ + a7v⁷ + a8[F]v⁸;
(*campo vetorial usando a anomalia excêntrica F como variável independente,
inclue a equação para dt/dF*)
vf[{F_, t_, r_, pr_}] =
{ε³(1 - Cos[F]), prε³(1 - Cos[F]),
 $\left( -\frac{r}{(r^2 + (\epsilon^4/4)(1 - \text{Cos}[F])^2)^{3/2}} + \frac{\epsilon^2}{r^3} \right) \epsilon^3(1 - \text{Cos}[F])$ };
ode = Thread[{t'[F], r'[F], pr'[F]} == vf[{F, t[F], r[F], pr[F]}]];
(*ao chamar initialize[δv] regressa uma
lista de condições iniciais da forma {F, t, r, pr}*)
initialize[vr_] := Block[{initTable = {}, t, U, r, pr, dF},
dF = 2π/npts;
For[i = 0, i ≤ npts, i++,
t = tfn[idF]/N;

```



```

U = u[vr, idF]//N;
r = 2/U2;
pr = -vr;
initTable = Join[initTable, {{idF, t, r, pr}}];
];
initTable (* *)
];
init = initialize[δv];
(* se toma t e r da lista de condições iniciais,
t se considera como um ângulo e r como um raio *)
PolarInitvalues = Take[#, {2, 3}]&/@init;

(*Passamos para coordenadas cartesianas os valores t e r considerados
como polares*)
CartesianInitvalues =
({Part[#, 2]Cos [Part[#, 1]/ε3] , Part[#, 2]Sin [Part[#, 1]/ε3]}) &/@
PolarInitvalues;
npts = Length[init];
(*aqui vem o ciclo principal que expliquei acima, no começo do apêndice,
como estou seguindo a variedade para frente,
então estou calculando a variedade instável. Note que o "Event" é
pr[F], assim estamos parando o cálculo quando pr = 0;
esta é a seção transversal*)
pvalues = {};
For[i = 1, i ≤ npts, i++,
Fi = Part[init[[i]], 1];
pointi = Part[init[[i]], {2, 3, 4}];
cutvalue = Reap[
odeinit = Join[ode, Thread[{t[Fi], r[Fi], pr[Fi]} == pointi]];
sol = NDSolve[odeinit, {t[F], r[F], pr[F]}, {F, Fi, Fi + 1000},
MaxSteps → 100000,
Method → {EventLocator, "Event" → pr[F], "Direction" → 1,
"EventAction" :→
Sow[{t[F], r[F]}] }];
];
cutdata =
First[cutvalue[[2, 1]]];
pvalues = Join[pvalues, {cutdata}];
]
(* se toma os valores de corte t[F],
r[F] como ângulo – raio e se passa a coordenadas cartesianas*)
CartesianPvalues =
({Part[#, 2]Cos [Part[#, 1]/ε3] , Part[#, 2]Sin [Part[#, 1]/ε3]}) &/@pvalues;
(*a variedade estável não se calcula, pois usamos a simetria*)
CartesianPvaluesSim = ({Part[#, 1], -Part[#, 2]})&/@CartesianPvalues;

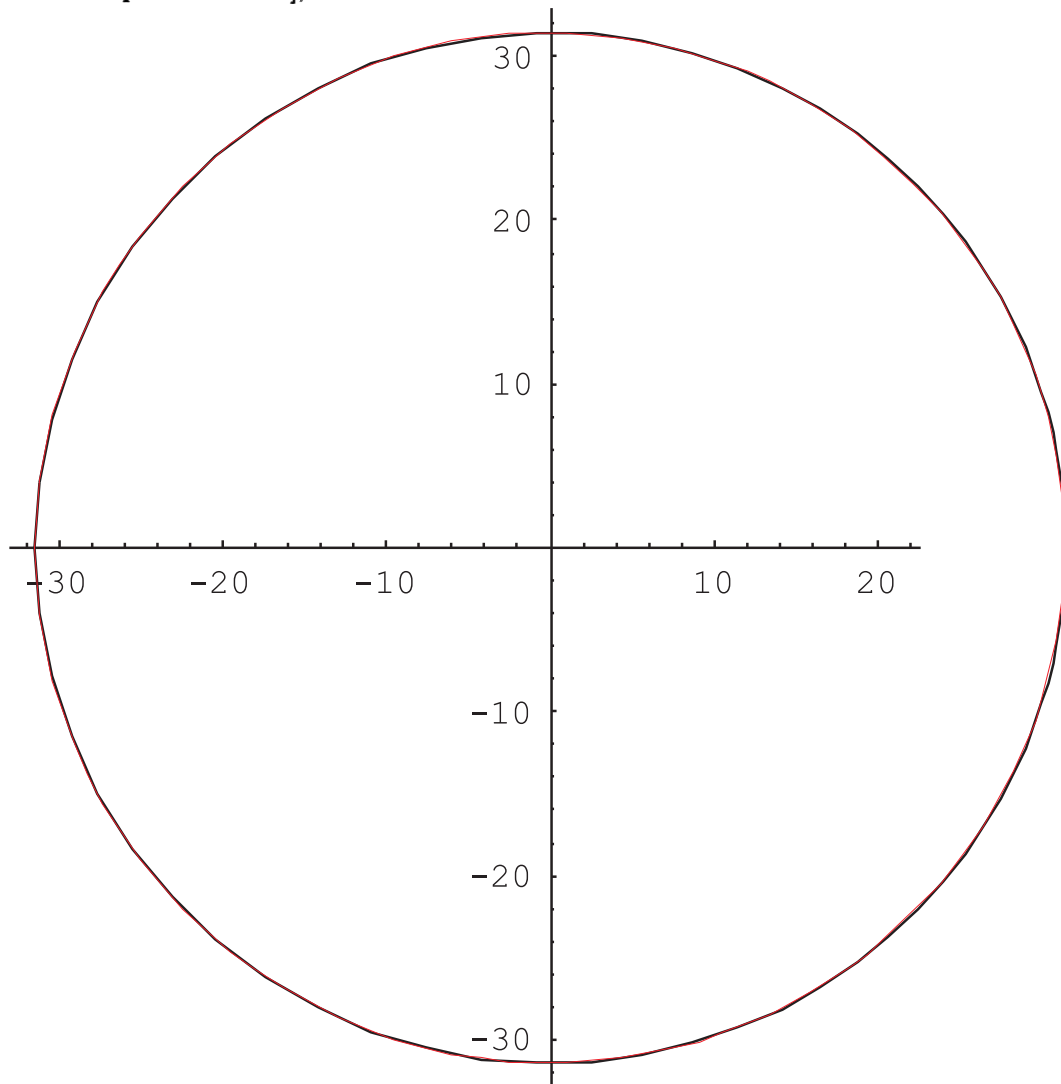
```

Spline fits

(* "círculo" de condições iniciais interpolado com splines *)

G0 =

```
Show[Graphics[{GrayLevel[0], Line[CartesianInitvalues], Hue[0],
Spline[CartesianInitvalues, Cubic]}], Axes → True, PlotRange → All,
AspectRatio → 1];
```



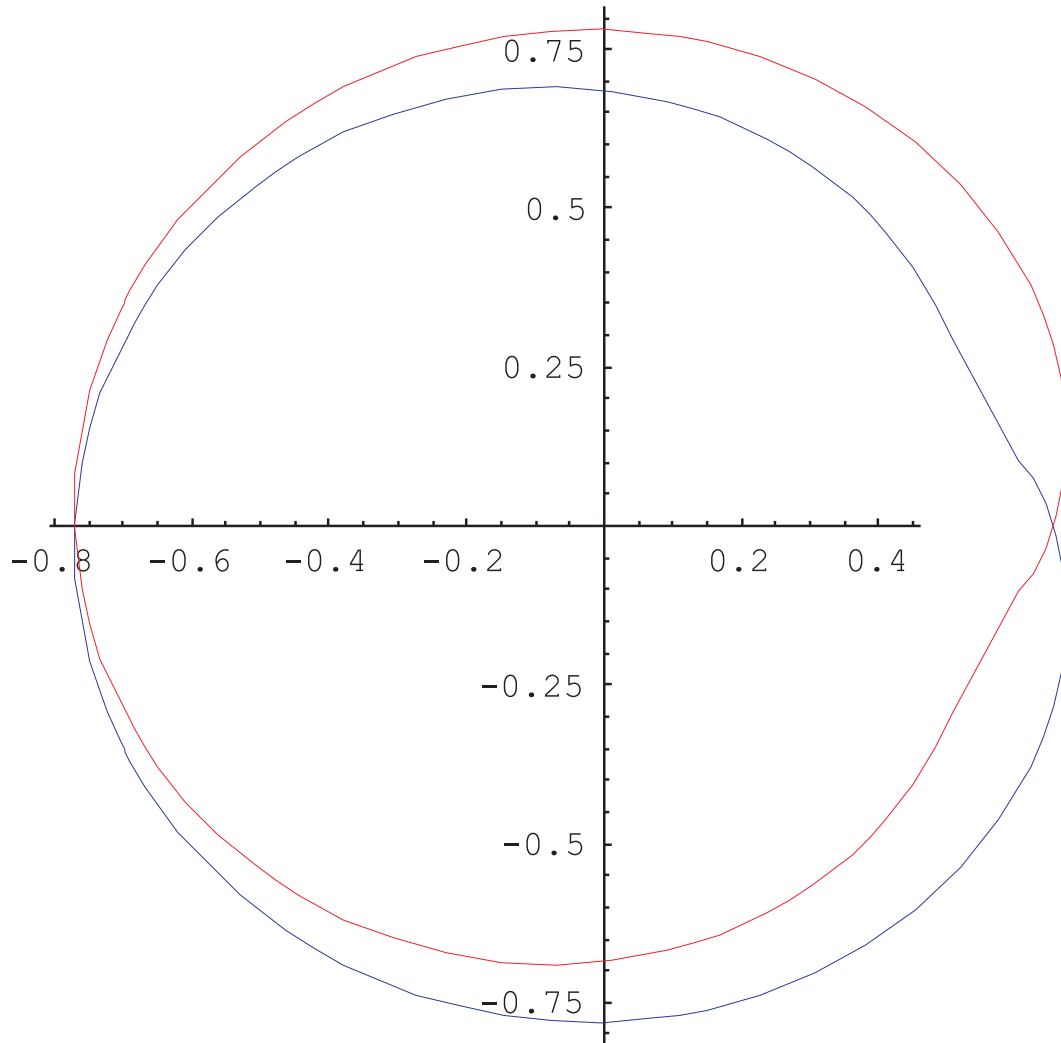
(*G1 : variedadeinstável, G2 : estável*)

G1 = Show[Graphics[{Hue[.7], Spline[CartesianPvalues, Cubic]}],

PlotRange → All, Axes → True, DisplayFunction → Identity];

G2 = Show[Graphics[{Hue[0], Spline[CartesianPvaluesSim, Cubic]}],

```
PlotRange → All, Axes → True, DisplayFunction → Identity];
g = Show[G1, G2, AspectRatio → 1, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



```
(* Este comando guarda as figuras no formato EPS *)
Display["Fig8.eps", g, "EPS"];
(*Display["Fig7bis.eps", g, "EPS"]; *)
(*Detalhe*)
g1 = Show[G1, G2, AspectRatio → 1,
PlotRange → {.0005{1, 1} + .0009{-1, 1}, .00009{-1, 1}},
DisplayFunction → $DisplayFunction];
Show[g]
-Graphics-
```

Bibliografia

- [1] Alvarez, M., Llibre J., (1998), *Restricted Three-Body Problems and the Non-Regularization of the Elliptic Collision Restricted Isosceles Three-Body Problem*, Extracta mathematicae, **13**, 1, 73-94.
- [2] Alvarez, M., Llibre, J., (2001), *Heteroclinic orbits and Bernoulli shift for the elliptic collision restricted three-body problem*, Arch. Rational Mech. Anal., **156**, 4, 317-357.
- [3] Arenstorf, R. (1966), *A new method of perturbation theory and its application to the satellite problem of celestial mechanics*, J. Reine Angew. Math., **221**, 113-145.
- [4] Bate, R., Mueller, D., White, J., first published (1971), *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover Publications, Inc., New York, ISBN 0-486-60061-0.
- [5] Boccaletti D., Pucacco G., *Theory of orbits* vol 1 Springer, 1996.
- [6] Broucke, R. (1971), *Periodic orbits in the rectilinear restricted three-body problem*, J. Mécanique, **10**, 449-465.
- [7] Brouwer, D., Clemence, G.M. (1961), *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York.
- [8] Castilho, C. and Vidal, C. (2006), *Regularization of restricted 3-body problems*, Qualitative theory of dynamical systems, **7**, 1.
- [9] Chavela, E.P., Lacomba, E.A : 1993, 'Motions close to escapes in the rhomboidal 4-body problem', *Celest. Mech. Dyn. Astr.* **57** (3), 411-437.
- [10] Corbera M., Llibre J., (2001), *Periodic orbits of a collinear restricted three body problem*.
- [11] Cors and Llibre, (1995), *The global flow of the hyperbolic restricted three-body problem*. Arch. Rational Mech. Anal., **131**, 335-358.
- [12] Cors, J. and Llibre, J., (1996), *Qualitative study of the parabolic collision restricted three-body problem*. Contemporary Mathematics, **198**, 1-19.
- [13] Cors, J. and Llibre, J., (1996), *Qualitative study of the hyperbolic collision restricted three-body problem*. Nonlinearity, **9**, 1299-1316.
- [14] Cors J., Pinyol C., Soler J., (2001), *Periodic solutions in the spatial elliptic restricted three-body problem*, Physica D, **154**, 195-206.
- [15] Cors J., Pinyol C., Soler J., (2005), *Analytic continuation in the case of non-regular dependency on a small parameter with an application to celestial mechanics*, Physica D, **219**, 1- 19.
- [16] Delgado, J., Vidal, C., (1999) *The tetrahedral 4-body problem*, Journal of Dynamics and Differential Equations **11**, n0. 4 735-780.
- [17] Delshams, A. Seara, M. T., *An asymptotic expression for the splitting of separatrices of the rapidly forced pendulum*, Commun.Math.Phys. **150**, 433-463 (1992) Springer-Verlag.
- [18] Delshams A., Seara M. T., (1997) *Splitting of separatrices in Hamiltonian systems with one and a half degrees of freedom*, J. Mathematic Physics Electronic , **3**. separatrices in for at <http://www-ma1.upc.es> in the Preprints pages.
- [19] Gelfreich, V. G., (1997), *Melnikov method and exponentially small splitting of separatrices*, Physics D **101** p.227- 248.
- [20] Guckenheimer, J. Holmes, P., (1983), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector fields*, Springer-Verlag.

- [21] Hale, J. (1980), *Ordinary differential equations*. R. Krieger Publishing Co., Inc.: Malabar, Florida.
- [22] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*. J. Wiley and Sons, Inc, 1964.
- [23] Kaplan, S., Lacomba, E., Llibre, J. (2005), *Symbolic dynamics of the elliptic rectilinear restricted 3-body problem*. Pre-print.
- [24] Lacomba, E. and Llibre, J. (2000), *On the dynamics and topology of the elliptic rectilinear restricted 3-body problem*, Celest. Mech., **77**, 1, 1-15.
- [25] Llibre, J., Perez-Chavela, E., *Transversal Homoclinic Orbits in the Collinear Restricted Three Body Problem*, J. Nonlinear Sci., pp. 1-10, 2005.
- [26] Llibre, J., Pasca, D., (2006) *Periodic Orbits of the Planar Collision Restricted 3-Body Problem*, Pre-print.
- [27] MacMilan, W., (1913), *An integrable case in the restricted three-body problem*, Astron. J., **27**, 11.
- [28] Marshall, F., (1972), *Application of the restricted hyperbolic three-body problem to a Star-Sun-Comet system*, Celest. Mech. Dyn. Astron., **6**, 22-26.
- [29] Martínez, J. and Orellana, R., (1997), *Orbit's structure in the isosceles rectilinear restricted three-body problem*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **67**, n0. 4, p.275-291.
- [30] Martínez, R. and Simó, C. (1988). Qualitative study of the planar isosceles. *Cel. Mech.* **41**, 179-251.
- [31] McGehee, R. (1973). A stable manifold theorem for degenerate fixed points with applications to Celestial Mechanics. J. Diff. Eq. **14**, 70-88.
- [32] McGehee, R., (1974), *Triple collision in the collinear three-body problem*, Inven. Math., **27**, 191-227.
- [33] Meyer, K.R. and Hall, G.R., *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer-Verlag (1992).
- [34] Meyer K., Howison Clarissa R., (2000), *Doubly-Symmetric Periodic Solutions in the Spatial Restricted Three-Body Problem*, J. Diff. Eqs., **163**, 174-197.
- [35] Meyer K., (1999), *Periodic solution of the N-Body Problem*, Lectures Notes in Math., **1719**, Springer-Verlag, Berlin.
- [36] Moser, J., (1973), *Stable and random motions in dynamical systems*. Annals Mathematics Studies, **77**, Princeton University Press.
- [37] Murison, A. M., *Series solutions of Kepler's Equation*, (1998), <http://aa.usno.navy.mil/murison/>.
- [38] Ollé, M., Pacha, J. R.: *The 3D elliptic restricted three-body problem: periodic orbits which bifurcate from limiting restricted problems complex instability*, Astronomy and Astrophysics, June (1999).
- [39] Poincaré, H.: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Dover Publ., (1957).
- [40] Puel, F. (1979): *Numerical study of the rectilinear isosceles restricted problem*, Celest. Mech. **20**, 2, 105-123.
- [41] Roy, A. E., *Orbital motion*, Institute of Physics Publishing, London, four edition 2005.
- [42] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGrawHill International Student Edition, 1976.
- [43] Schmidt D., (1972), *Families of Periodic orbits in the Restricted Problem of Three bodies connecting families of direct and retrograde orbits*, SIAM J. Appl. Math., **22**, 1, 27-36.
- [44] Siegel, C.L. and Moser, J.K., *3*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [45] Sitnikov, K., (1969), *The existence of oscillatory motions in the three-body problem*. Dokl. Akad., USSR, **2**, 3003-306.
- [46] Sotomayor, J., Lições de equações diferenciais ordinárias, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [47] Stiefel, E. L., Scheifele, G., *Linear and Regular Celestial Mechanics*. Springer-Verlag 1971.
- [48] Szebehely, V., (1967) *Theory of Orbits*, New York, Academic Press.
- [49] Vidal C., Cors, J. and Castilho, C., *The global flow of the isosceles restricted three-body problem with non-negative energy* **Preprint**.
- [50] Wang, Q., (1986), Qualitative study of n-body problem: Untized momentum transformation and its application restricted isosceles three-body problem with positive energy, *Space Dynamics and Celestial Mechanics*, K. B. Bhanthnagar, ed., pp. 61-69.
- [51] Wiggins, S.: (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag.
- [52] Wintner, A., (1941), *The Analytical Foundations Celestial of Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New York, 1941.