Universidade Federal de Pernambuco

Centro de Ciência Exatas e da Natureza

Programa de Pós-graduação em Matemática

Bruno Luis de Andrade Santos

Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução

Recife, Outubro de 2010.

Bruno Luis de Andrade Santos

Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução

Tese submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do grau de **Doutor em Matemática**

Orientador: Prof. Claudio Cuevas

Recife, Outubro de 2010.

Santos, Bruno Luis de Andrade
Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução / Bruno Luis de Andrade - Recife: O Autor, 2010.
116 folhas : il., fig.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Análise matemática. 2. Equações diferenciais. 3. Análise funcional. I. Título.

515 CDD (22. ed.) MEI2010 – 0179

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

Cláudio Rodrigo Cuevas Henríquez, UFPE

Orientador

____

João Marcos Bezerra do Ó, UFPE

____

Alexandre Nolasco de Carvalho, USP

____

Ma To Fu, USP

____

Hernán Roberto Henríquez Miranda, USACH

UMA TEORIA DE PERIODICIDADE PARA CERTAS EQUAÇÕES DE EVOLUÇÃO

Por

Bruno Luis de Andrade Santos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária - Tels. (081) 2126.8415 - Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Outubro – 2010

À minha família.

Agradecimentos

Aos meus pais, Edson e Desivânia, meus irmãos, Júlio e Daniel, a minha namorada Bruna e a Klezia pelo carinho, por confiarem em mim e por me ajudarem a realizar meus objetivos.

Aos amigos Zaqueu, Luis, Marcelo, Marcelo Maiden, Alejandro, André Leite, Tiago Duque, Ives Lima e Antônio Macarrão por muitos motivos.

Aos integrantes do grupo Equações Funcionais da UFPE, em especial ao professor Marcos Rabelo e a Giovana Siracusa.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

De forma mais do que especial, ao professor Claudio Cuevas a quem sou muito grato pelos diversos ensinamentos, pelo incentivo inicial nos meus estudos e com quem tive o privilégio de conviver.

Muito obrigado por tudo!

Universidade Federal de Pernambuco

22 de Outubro de 2010

B. L. A. S.

O valor das coisas não está no tempo em que elas duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis.

— Fernando Pessoa

Resumo da Tese apresentada à UFPE como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Matemática

Uma teoria de periodicidade para certas equações de evolução

Bruno Luis de Andrade Santos

Outubro/2010

Orientador: Prof. Claudio Cuevas
Área de Concentração: Análise
Palavras-chaves: Periodicidade, Equações de evolução, Equações diferenciais fracionárias, Equações integro-diferenciais
Número de páginas: 116

Neste trabalho estudamos diversos tipos de periodicidade para equações de evolução. As técnicas utilizadas são uma combinação de Análise Funcional e Topologia. Para exibir a aplicabilidade de nossos resultados vários exemplos são apresentados. A saber, mostramos aplicações em equações diferenciais parciais, equações diferenciais fracionárias e equações integrais com retardo infinito.

Abstract of Thesis presented to UFPE as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Mathematics

A periodicity theory for some evolution equations

Bruno Luis de Andrade Santos

October/2010

Supervisor: Prof. Claudio Cuevas
Area of Concentration: Analysis
Keywords: Periodicity, Evolution equations, Fractional differential equations, Integro-differential equations
Number of pages: 116

This work deals with various kinds of periodicity for evolution equations. The techniques used are a combination of Functional Analysis and Topology. To show the applicability of our results several examples are presented. Namely, we show applications in partial differential equations, fractional differential equations and integral equations with infinite delay.

Lista de Figuras

SUMÁRIO

Introdução

Para criar uma filosofia sã é preciso renunciar à metafísica e tornar-se apenas um bom matemático

— Bertrand Russel

No início do século 20, a teoria de periodicidade ganhou um novo impulso através da introdução do conceito de funções numéricas *quase periódicas* pelo matemático H. Bohr e da generalização natural para espaços métricos devida a S. Bochner. Naturalmente houve um grande interesse em quase periodicidade, não só do ponto de vista estrutural de tais funções como também no sentido de aplicações à Física, Biologia e Economia. Em geral, modelos de situações do mundo real são dados matematicamente através de equações diferenciais. Tal fato justifica o grande número de pesquisa matemática sobre o comportamento quase periódico das soluções de equações diferenciais.

Ao longo dos anos diversas generalizações de quase periodicidade foram apresentadas. A saber, na década de 40 M. Fréchet introduziu o conceito de funções *assintoticamente quase periódicas*. Em 1961 S. Bochner apresentou a classe de funções *quase automórficas*. Segundo Bochner, esse tipo de funções apareceram naturalmente em seus trabalhos sobre geometria diferencial como escalares e tensores sobre variedades com grupo de automorfismo discreto. Posteriormente, no final da década de 60, A. M. Fink introduziu o conceito de funções *compactas quase automórficas*. No inicio dos anos 80 G. N'Guérékata apresentou as funções *assintoticamente quase automórficas*. Essa última classe de funções é construída de forma similar àquelas apresentadas por Fréchet. Na última década do século 20, C. Y. Zhang exibiu o conceito de funções *pseudo quase periódicas*. Nos últimos 10 anos mais duas generalizações das funções quase periódicas foram apresentadas; são elas, as funções *pseudo quase automórficas*, apresentadas pelos matemáticos T. J. Xiao, J. Liang e J. Zhang, e as funções *pseudo quase periódicas com peso* introduzidas por T. Diagana.

O seguinte diagrama[1] ilustra nossos comentários:

$$\begin{tikzcd}
 & P_\omega(X) \arrow[r] \arrow[d] & AP(X) \arrow[r] \arrow[d] & AA_c(X) \arrow[r] \arrow[d] & AA(X) \arrow[d] \\
SAP_\omega(X) & AP_\omega(X) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & AAP(X) \arrow[r] \arrow[d] & AAA_c(X) \arrow[r] \arrow[d] & AAA(X) \arrow[d] \\
 & PP_\omega(X) \arrow[r] & PAP(X) \arrow[r] \arrow[d] & PAA_c(X) \arrow[r] & PAA(X) \\
 & & PAP(X,\rho) & &
\end{tikzcd}$$

O propósito desta tese é estudar o comportamento qualitativo das soluções de equações de evolução. Em verdade, estamos exclusivamente interessados em propriedades de periodicidade de equações diferenciais definidas sobres espaços vetoriais abstratos de dimensão infinita. Por se tratar de espaços de dimensão infinita, as técnicas utilizadas provém da Análise Funcional juntamente com métodos topológicos, como por exemplo, a teoria de ponto fixo. Ressaltamos que esta última é uma ferramenta muito eficiente no tratamento de problemas não lineares.

O estudo de comportamento periódico para equações diferenciais possui grande importância e tem sido objeto de pesquisa de muitos cientistas. De fato, grande parte desse interesse deve-se à imensa aplicabilidade de tais temas.

Esta tese está dividida em três capítulos. O primeiro deles, intitulado "Preliminares", possui o objetivo de tornar o texto o mais auto contido possível. Nele algumas definições e propriedades dos elementos envolvidos neste trabalho são relembrados. Por exemplo, fazemos uma revisão das generalizações de funções periódicas. Revisamos também alguns elementos de Análise Funcional, tais como operadores de Hille-Yosida, espaços de extrapolação e operadores setoriais. Na última seção deste capítulo enunciamos os teoremas de ponto fixo que sustentam nossos resultados de existência de soluções.

No segundo capítulo, nomeado "Periodicidade e ergodicidade para equações de evolução", exibimos condições suficientes para existência de soluções S-assintoticamente periódicas para

[1] Caso o leitor não esteja familiarizado com algum dos símbolos do diagrama sugerimos a leitura da Subseção 1.1.

equações semilineares de primeira ordem da forma

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0,$$

$$u(0) = u_0 \in X_0$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo negativo e cujo domínio $D(A)$ está contido num espaço de Banach X, $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ é uma função dada e $X_0 = \overline{D(A)}$. Em nossos resultados não fazemos considerações a cerca da densidade do domínio do operador A. Vale ressaltar que se X_0 é um subespaço próprio de X a teoria clássica de semigrupos não pode ser imediatamente utilizada para abordar esse problema. Os resultados desta subseção estão contidos no artigo [16].

Ainda nesse mesmo capítulo tratamos da quase periodicidade assintótica para equações integro-diferenciais fracionarias. De fato, estabelecemos condições para existência de soluções assintoticamente quase periódicas para a equação

$$u'(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} Au(s)ds + f(t, u(t)), \quad t \geq 0,$$

$$u(0) = u_0 \in X,$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear de tipo setorial densamente definido sobre um espaço de Banach complexo X e $f : [0, \infty) \times X \to X$ é uma função dada. Os resultados desta subseção estão contidos no artigo [3].

Na última subseção deste capítulo abordamos o problema de existência de soluções pseudo quase periódicas com peso para a equação semilinear fracionária

$$D_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + D_t^{\alpha-1} f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear densamente definido de tipo setorial sobre um espaço de Banach complexo X e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função dada. A derivada fracionária será no sentido de Riemann-Liouville. Os resultados desta subseção estão contidos no artigo [2].

No Capítulo 3, chamado "Automorficidade e ergodicidade para equações de evolução", asseguramos existência de soluções compactas quase automórficas, quase automórficas, pseudo compactas quase automórficas e pseudo quase automórficas para a equação semilinear

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo negativo e cujo domínio $D(A)$ está contido num espaço de Banach X, $f : [0,\infty) \times X_0 \to X$ é uma função dada e $X_0 = \overline{D(A)}$. Assim como no Capítulo 2 não faremos hipóteses sobre a densidade de $D(A)$. Os resultados desta subseção estão contidos nos artigos [17, 18, 19, 20].

Estudamos também existência de soluções assintoticamente compactas quase automórficas e assintoticamente quase automórficas para a equação

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0,$$

$$u(0) = u_0 \in X_0$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo negativo e cujo domínio $D(A)$ está contido num espaço de Banach X, $f : [0,\infty) \times X_0 \to X$ é uma função dada e $X_0 = \overline{D(A)}$. Os resultados desta subseção estão contidos nos artigos [21, 22].

Finalmente, na última seção do Capítulo 3, abordamos o problema da existência de soluções pseudo compactas quase automórficas para a equações

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\big[Au(s) + f(s, u(s))\big]ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

e existência de soluções assintoticamente compactas quase automórficas da equação integral linear não homogênea

$$u(t) = \int_{0}^{t} a(t-s)\big[Au(s) + f(s, u(s))\big]ds, \quad t \geq 0,$$

onde, em ambas, $a \in L^1([0,\infty))$, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Banach complexo X e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função dada. Os resultados desta seção estão contidos no artigo [4].

Capítulo I

Preliminares

Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie. Sans la philosophie on ne pénètre point au fond des mathématiques. Sans les deux on ne pénètre au fond de rien.

— Leibniz

Apresentamos nesta seção alguns dos pré-requisitos para leitura deste trabalho. Pretendemos com isso tornar o texto o mais auto suficiente possível. Porém, por motivo de brevidade não faremos detalhes das demonstrações dos resultados aqui apresentados.

1.1 Funções periódicas e suas generalizações

O propósito desta subseção é relembrar as definições e enunciar algumas das propriedades básicas da teoria de periodicidade que serão essenciais no decorrer deste trabalho. Supomos do leitor o conhecimento de funções periódicas e também alguns conceitos e resultado básicos de análise funcional.

Nesta subseção $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ sempre serão espaços de Banach[1]. Representaremos por $C(\mathbb{R}; X)$ o conjunto de todas funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ com valores em X. Seja $C_b(\mathbb{R}; X) \subset C(\mathbb{R}; X)$ o espaço de Banach de todas as funções contínuas e limitadas munido da norma do supremo. De forma análoga, $C([0, \infty); X)$ é o conjunto das funções contínuas $f : [0, \infty) \to X$ e $C_b([0, \infty); X) \subset C([0, \infty); X)$ é o espaço de Banach das funções contínuas e limitadas.

[1]Com o intuito de de tornar o texto límpido não usaremos nenhum tipo de símbolo para diferenciar as normas de X e Y. Alertamos apenas que o leitor deve estar atento para que não haja confusão.

Definição 1.1 Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to X$ é chamada *quase periódica* se para todo $\epsilon > 0$ existe um $l(\epsilon) > 0$ tal que todo intervalo de comprimento $l(\epsilon)$ contém um número τ com a propriedade de que

$$\|f(t+\tau) - f(t)\| \leq \epsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. O conjunto de todas funções quase periódicas será denotado por $AP(X)$.

Naturalmente funções quase periódicas são generalizações de funções periódicas contínuas. Além disso, essa generalização não é trivial no sentido que o conjunto das funções periódicas está propriamente contido em $AP(X)$. Um exemplo de uma função quase periódica que não é periódica é dado por (ver Figura 1.1)

$$f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t), \tag{1.1}$$

$t \in \mathbb{R}$. Em geral, se $a, b \in \mathbb{R}$ são não nulos, então a função $g(t) = ae^{it} + be^{i\sqrt{2}t}$ é quase periódica mas, não é periódica. De fato, se g fosse periódica chegaríamos ao absurdo de $\sqrt{2}$ ser um número racional.

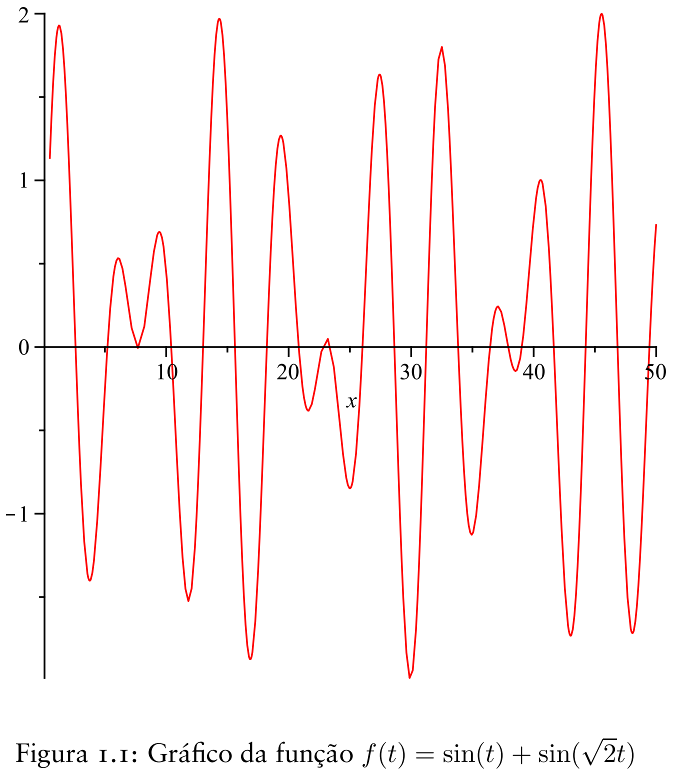

Figura 1.1: Gráfico da função $f(t) = \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)$

Observamos que funções quase periódicas são uniformemente contínuas (ver [153]). Outro fato importante é que o conjunto $AP(X)$ com as operações usuais de soma de funções e multiplicação por um número real, constitui um espaço vetorial. Ademais, munindo tal espaço com norma do supremo, a qual como de costume será representada por $\|\cdot\|_\infty$, obtemos um espaço de Banach. As principais propriedades de funções quase periódicas que utilizaremos neste trabalho são dadas a seguir. Para uma demonstração citamos por exemplo os livros [89] e [183]

Proposição 1.1 As seguintes afirmações são válidas:

(i) $\lambda f + g \in AP(X)$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e todas $f, g \in AP(X)$;

(ii) Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset AP(X)$ converge uniformemente para f, então $f \in AP(X)$;

(iii) O conjunto imagem $R_f = \{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto; portanto f é limitada;

(iv) A função $t \to u(t)f(t)$ é quase periódica, sempre que $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{R} \to X$ o são.

No seguinte resultado apresentamos uma caracterização de funções quase periódicas devida a Bochner (ver [153]).

Proposição 1.2 Uma função $f \in C(\mathbb{R}; X)$ é quase periódica se, e somente se, para toda sequência de números reais $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe uma subsequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{f(t+s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente.

Definição 1.2 Uma função $f \in C(\mathbb{R}; X)$ é chamada *quase automórfica* se para toda sequência de números reais $\{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe uma subsequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{s'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que a função

$$g(t) := \lim_{n\to\infty} f(t+s_n) \tag{1.2}$$

está bem definida para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} g(t-s_n). \tag{1.3}$$

Representaremos por $AA(X)$ o conjunto de todas funções $f : \mathbb{R} \to X$ quase automórficas.

Quando as convergências em (1.2) e (1.3) são uniformes sobre qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ dizemos que a função $f \in C(\mathbb{R}; X)$ é *compacta quase automórfica.* O conjunto de tais funções será denotado por $AA_c(X)$. Assim como as quase periódicas, funções compactas quase automórficas são uniformemente contínuas.

Observação 1.1 Resultados análogos aos da Proposição 1.1 são válidos para funções quase automórficas e funções compactas quase automórficas. Isto é, munindo $AA(X)$ e $AA_c(X)$

com a norma do supremo estes se tornam espaços de Banach e o conjunto $R_f = \{f(t) : t \in \mathbb{R}\}$ é relativamente compacto, sempre que $f \in AA(X)$.

Observação 1.2 Segue-se da Proposição 1.2 que funções compactas quase automórficas generalizam as funções quase periódicas. Além disso, pela definição de funções quase automórficas é claro que $AA_c(X) \subset AA(X)$. Um exemplo típico de função quase automórfica que não é compacta quase automórfica é dado por

$$g(t) = \sin\left(\frac{1}{2 + \sin(t) + \sin(\sqrt{2}t)}\right). \tag{1.4}$$

De fato, observe que g não é uniformemente contínua (ver Figura 1.1).

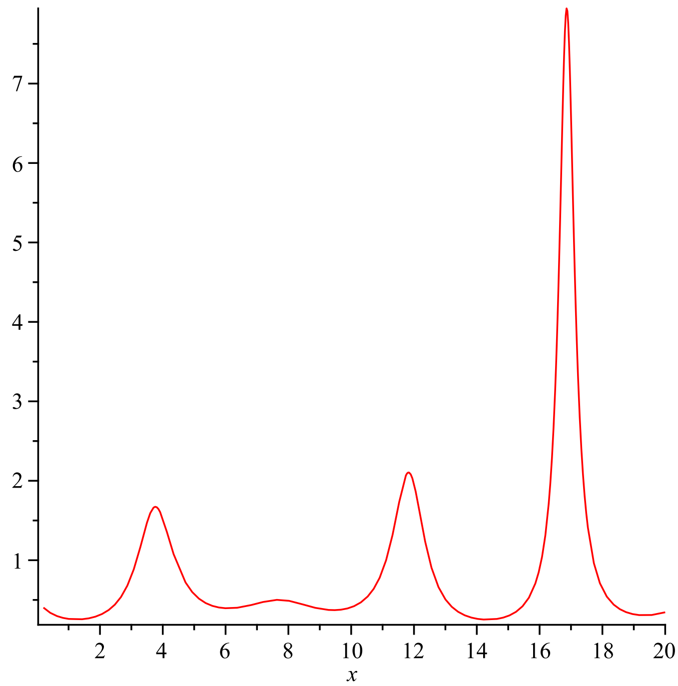

Figura 1.2: Gráfico da função $g(t) = \sin\left(\frac{1}{2+\sin(t)+\sin(\sqrt{2}t)}\right)$

Portanto, se representarmos por $P_\omega(X)$ o conjunto das funções ω-periódicas contínuas, $\omega > 0$, então as seguintes inclusões são válidas

$$P_\omega(X) \subset AP(X) \subset AA_c(X) \subset AA(X) \subset C_b(\mathbb{R}; X). \tag{1.5}$$

A partir destes espaços de Banach construiremos outros que serão fundamentais em nosso trabalho. Inicialmente trataremos da teoria assintótica. Para isso, seja $C_0([0,\infty); X)$ o conjunto de todas funções $h : [0,\infty) \to X$ tais que $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$. É um fato bem conhecido que $C_0([0,\infty);X)$ equipado com a norma do supremo é um espaço de Banach. O espaço das funções *assintoticamente ω-periódicas* é o espaço de Banach dado pela soma

$$AP_\omega(X) := P_\omega(X) \oplus C_0([0,\infty);X).$$

Definimos o espaço de Banach das funções *assintoticamente quase periódicas* por

$$AAP(X) := AP(X) \oplus C_0([0,\infty);X).$$

De forma análoga, o espaço de Banach das funções *assintoticamente compactas quase automórficas* é dado por

$$AAA_c(X) := AA_c(X) \oplus C_0([0,\infty);X).$$

Finalmente, o espaço das funções *assintoticamente quase automórficas* é o espaço de Banach

$$AAA(X) := AA(X) \oplus C_0([0,\infty);X).$$

Segue-se das inclusões (1.5) que

$$AP_\omega(X) \subset AAP(X) \subset AAA_c(X) \subset AAA(X) \subset C_b(\mathbb{R};X). \tag{1.6}$$

Observação 1.3 Em [107] os autores mostram uma condição suficiente para que uma função $f \in C_b([0,\infty);X)$ seja assintoticamente ω-periódica. De fato, se existe uma sequência de números naturais $\{n_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com $n_1 = 1$ e $n_j \to \infty$ quando $j \to \infty$, tal que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \left(n_{j+1} - n_j\right) < \infty$$

e

$$\lim_{t\to\infty} \left(f(t + n_j\omega) - f(t)\right) = 0$$

uniformemente para $j \in \mathbb{N}$. Então $f \in AP_\omega(X)$. Considere o subespaço de $C_b([0,\infty);X)$ dado por

$$S_\omega(X) := \{f \in C_b([0,\infty);X) : \lim_{t\to\infty} \left(f(t+n\omega) - f(t)\right) = 0 \text{ uniformemente para } n \in \mathbb{N}\}.$$

Não é difícil ver que $S_\omega(X)$ é fechado. No Capítulo 2 estudaremos regularidade das soluções de equações de evolução em $S_\omega(X)$.

Considere agora o conjunto $P_0(X) \subset C_b(\mathbb{R};X)$ das funções $\Phi : \mathbb{R} \to X$ tais que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} \|\Phi(t)\| dt = 0.$$

Observamos que $(P_0(X), \|\cdot\|_\infty)$[2] é um espaço de Banach. Definimos o espaço de Banach das funções *pseudo ω-periódicas* por

$$PP_\omega(X) := P_\omega(X) \oplus P_0(X).$$

O espaço das funções *pseudo quase periódicas* é o espaço de Banach dado por

$$PAP(X) := AP(X) \oplus P_0(X).$$

O espaço de Banach das funções *pseudo compactas quase automórficas* é o espaço dado pela soma

$$PAA_c(X) := AA_c(X) \oplus P_0(X).$$

Finalmente, espaço de Banach das funções *pseudo quase automórficas* é o espaço dado por

$$PAA(X) := AA(X) \oplus P_0(X).$$

Levando em consideração que $C_0([0,\infty); X)$ está estritamente contido em $P_0(X)$ e as inclusões (1.5) e (1.6) obtemos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
P_\omega(X) \arrow[r] \arrow[d] & AP(X) \arrow[r] \arrow[d] & AA_c(X) \arrow[r] \arrow[d] & AA(X) \arrow[d] \\
AP_\omega(X) \arrow[r] \arrow[d] & AAP(X) \arrow[r] \arrow[d] & AAA_c(X) \arrow[r] \arrow[d] & AAA(X) \arrow[d] \\
PP_\omega(X) \arrow[r] & PAP(X) \arrow[r] & PAA_c(X) \arrow[r] & PAA(X)
\end{tikzcd}$$

Apresentaremos mais duas classes de funções abordadas neste trabalho. A saber as funções S-assintoticamente periódicas e as pseudo quase periódicas com peso.

Começaremos com uma generalização do conjunto $P_0(X)$. Seja $\mathbb{U}$ o conjunto de todas as funções $\rho : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ que satisfazem as seguintes condições:

(i) ρ é contínua por partes;

(ii) $\rho \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

De agora em diante, se $\rho \in \mathbb{U}$ e $r > 0$ fixaremos a notação

$$m(r,\rho) := \int_{-r}^{r} \rho(t)dt.$$

[2] É comum chamar $P_0(X)$ de *espaço ergódico*. Isso é devido ao fato de que funções em $P_0(X)$ são funções ergódicas no sentido de Birkhoff.

Estamos particularmente interessados em funções $\rho \in \mathbb{U}$ tais que $\lim_{r\to\infty} m(r,\rho) = \infty$. Chamaremos uma tal ρ de função peso. Um exemplo simples de uma função peso é dada pela função constante $\rho(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Considere os conjuntos

$$\mathbb{U}_\infty := \{\rho \in \mathbb{U} : \lim_{r\to\infty} m(r,\rho) = \infty \text{ e } \liminf_{x\to\infty} \rho(x) > 0\}$$

e

$$\mathbb{U}_B := \{\rho \in \mathbb{U}_\infty : \rho \text{ é limitada}\}.$$

Seja $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. Definimos o espaço *ergódico com peso* como sendo o conjunto

$$P_0(X,\rho) = \left\{\Phi \in C_b(\mathbb{R};X) : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{m(r,\rho)} \int_{-r}^{r} \|\Phi(t)\|\rho(t)dt = 0\right\}.$$

Observação 1.4 Em [63] o autor mostra que $P_0(X,\rho)$ é um subespaço fechado de $C_b(\mathbb{R};X)$, isto é, $(P_0(X,\rho), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach. Obviamente, quando $\rho(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, recuperamos o espaço $P_0(X)$ definido anteriormente. Em geral, se $\rho \in \mathbb{U}_B$ então $P_0(X,\rho) = P_0(X)$. Uma demonstração deste fato pode ser encontrada, por exemplo, nos artigos [8, 62, 64].

A seguinte caracterização do conjunto $P_0(X,\rho)$ será de grande utilidade.

Proposição 1.3 ([2]) Suponha que o peso $\rho : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ é contínuo e $\phi \in C_b(\mathbb{R};X)$. Então $\phi \in P_0(X,\rho)$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{m(r,\rho)} \int_{M_{r,\epsilon}(\phi)} \rho(t)dt = 0,$$

onde $M_{r,\epsilon}(\phi) = \{t \in [-r,r] : \|\phi(t)\| \geq \epsilon\}$.

Corolário 1.1 ([124]) Seja $\phi \in C_b(\mathbb{R};X)$. Então $\phi \in P_0(X)$ se, e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} \operatorname{mes}(M_{r,\epsilon}(\phi)) = 0,$$

onde $\operatorname{mes}(\cdot)$ denota a medida de Lebesgue.

Definição 1.3 Seja $\rho \in \mathbb{U}_\infty$. O espaço das funções *pseudo quase periódicas com peso* é o espaço de Banach dado por

$$PAP(X,\rho) := AP(X) \oplus P_0(X,\rho).$$

Segue-se da Observação 1.4 que funções pseudo quase periódicas com peso são mais gerais do que funções pseudo quase periódicas.

Observação 1.5 Seja $\mathbb{V}_\infty$ o conjunto de todas funções pesos $\rho : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ que são contínuas e tais que

$$\limsup_{s \to \infty} \left[\frac{\rho(s+\tau)}{\rho(s)} \right] < +\infty$$

e

$$\limsup_{r \to \infty} \left[\frac{m(r+\tau, \rho)}{m(r, \rho)} \right] < +\infty,$$

para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Em [63] o autor mostra que se $\rho \in \mathbb{V}_\infty$, então o espaço $PAP(X, \rho)$ é invariante por translações. Um exemplo desses pesos para os quais $PAP(X, \rho)$ é invariante por translações é dado por $\rho_N(s) = (1 + s^2)^N$, $N \in \mathbb{N}$.

Relembramos agora o conceito e algumas propriedades das funções S-assintoticamente periódicas.

Definição 1.4 Uma função $f \in C_b([0, \infty); X)$ é chamada S-assintoticamente periódica se existe um $\omega > 0$ tal que

$$\lim_{t \to \infty} \big(f(t + \omega) - f(t) \big) = 0.$$

Neste caso, dizemos que ω é um período assintótico de f. Representaremos por $SAP_\omega(X)$ o conjunto das funções S-assintoticamente ω-periódicas.

Em [107] os autores mostraram que $SAP_\omega(X)$ equipado com a norma do supremo é um espaço de Banach.

Observação 1.6 É importante salientar que $AP_\omega(X) \subset SAP_\omega(X)$ estritamente. De fato, um exemplo de função S-assintoticamente ω-periódica que não é assintoticamente ω-periódica é dado da seguinte forma (ver Exemplo 3.1 de [107]). Seja X o espaço de Banach

$$c_0 := \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\}$$

com a norma $\|\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Considere a função $f : [0, \infty) \to X$ definida por

$$f(t) = \left\{ \frac{2nt}{t^2 + n^2} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Para todo $\omega > 0$ e todo $t \geq 1$ temos a estimativa

$$\|f(t + \omega) - f(t)\| \leq \frac{\omega}{t}.$$

Logo, $f \in SAP_\omega(X)$ para todo $\omega > 0$. Não obstante, se $f = g + h \in AP_\omega(X)$ teríamos obrigatoriamente g identicamente nula e portanto $f = h$, o que é um absurdo uma vez que $\|f(n)\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considerando essas duas novas classes de funções obtemos o seguinte diagrama atualizado

$$\begin{tikzcd}
 & P_\omega(X) \arrow[r] \arrow[d] & AP(X) \arrow[r] \arrow[d] & AA_c(X) \arrow[r] \arrow[d] & AA(X) \arrow[d] \\
SAP_\omega(X) & AP_\omega(X) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & AAP(X) \arrow[r] \arrow[d] & AAA_c(X) \arrow[r] \arrow[d] & AAA(X) \arrow[d] \\
 & PP_\omega(X) \arrow[r] & PAP(X) \arrow[r] \arrow[d] & PAA_c(X) \arrow[r] & PAA(X) \\
 & & PAP(X,\rho) & &
\end{tikzcd}$$

Neste trabalho manipularemos funções definidas sobre produtos cartesianos onde um dos fatores é o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números reais não negativos, de modo que precisamos ter uma noção das generalizações de periodicidade consideradas anteriormente para tais funções. Representaremos por $C(\mathbb{R} \times Y; X)$, respectivamente $C([0,\infty) \times Y; X)$, o conjunto das funções continuas $f : \mathbb{R} \times Y \to X$, respectivamente $f : [0,\infty) \times Y \to X$.

Definição 1.5 Uma função $f \in C(\mathbb{R} \times Y; X)$ é chamada

(1) *quase periódica* se $f(\cdot, x) : \mathbb{R} \to X$ é quase periódica uniformemente para todo x em subconjuntos compactos de Y.

(2) *compacta quase automórfica* se $f(\cdot, x) : \mathbb{R} \to X$ é compacta quase automórfica uniformemente para todo x em subconjuntos limitados de Y.

(3) *quase automórfica* se $f(\cdot, x) : \mathbb{R} \to X$ é quase automórfica uniformemente para todo x em subconjuntos limitados de Y.

O conjunto de tais funções será representado por $AP(Y; X)$, $AA_c(Y; X)$ e $AA(Y; X)$, respectivamente.

Seja $C_0([0,\infty) \times Y; X) \subset C([0,\infty) \times Y; X)$ o conjunto de todas funções contínuas $h : [0,\infty) \times Y \to X$ tais que $\lim_{t\to\infty} f(t,x) = 0$ uniformemente para x em subconjuntos compactos de Y.

Definição 1.6 Uma função $f \in C([0,\infty) \times Y; X)$ é chamada

(1) *assintoticamente quase periódica* se existem funções $g \in AP(Y; X)$ e $h \in C_0([0,\infty) \times Y; X)$ tais que $f(t,y) = g(t,y) + h(t,y)$ para todos $t \geq 0$ e $y \in Y$.

(2) *assintoticamente compacta quase automórfica* se existem funções $g \in AA_c(Y;X)$ e $h \in C_0([0,\infty) \times Y;X)$ tais que $f(t,y) = g(t,y) + h(t,y)$ para todos $t \geq 0$ e $y \in Y$.

(3) *assintoticamente quase automórfica* se existem funções $g \in AA(Y;X)$ e $h \in C_0([0,\infty) \times Y;X)$ tais que $f(t,y) = g(t,y) + h(t,y)$ para todos $t \geq 0$ e $y \in Y$.

Analogamente, o conjunto de tais funções será representado por $AAP(Y;X)$, $AAA_c(Y;X)$ e $AAA(Y;X)$, respectivamente.

Seja $P_0(Y;X;\rho)$ o conjunto das funções $\Phi \in C(\mathbb{R} \times Y;X)$ tais que $\Phi(\cdot,y)$ é limitado para cada $y \in Y$ e

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{m(r,\rho)} \int_{-r}^{r} \|\Phi(t,y)\|\rho(t)dt = 0, \tag{1.7}$$

uniformemente em subconjuntos limitados de Y. Quando $\rho(t) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e (1.7) é válido para todo y em subconjuntos limitados de Y representaremos este conjunto por $P_0(Y;X)$.

Definição 1.7 Uma função $f \in C(\mathbb{R} \times Y;X)$ é chamada

(1) *pseudo quase periódica* se existem funções $g \in AP(Y;X)$ e $\Phi \in P_0(Y;X)$ tais que $f(t,y) = g(t,y) + \Phi(t,y)$ para todos $t \geq 0$ e $y \in Y$.

(2) *pseudo quase periódica com peso* se existem funções $g \in AP(Y;X)$ e $\Phi \in P_0(Y;X;\rho)$ tais que $f(t,y) = g(t,y) + \Phi(t,y)$ para todos $t \geq 0$ e $y \in Y$.

(3) *pseudo compacta quase automórfica* se existem funções $g \in AA_c(Y;X)$ e $\Phi \in P_0(Y;X)$ tais que $f(t,y) = g(t,y) + \Phi(t,y)$ para todos $t \geq 0$ e $y \in Y$.

(4) *pseudo quase automórfica* se existem funções $g \in AA(Y;X)$ e $\Phi \in P_0(Y;X)$ tais que $f(t,y) = g(t,y) + \Phi(t,y)$ para todos $t \geq 0$ e $y \in Y$.

O conjunto de tais funções será representado por $PAP(Y;X)$, $PAP(Y;X;\rho)$, $PAA_c(Y;X)$ e $PAA(Y;X)$, respectivamente.

Definição 1.8 Uma função contínua $f : [0,\infty) \times Y \to X$ é chamada uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados se para todo subconjunto limitado K de Y, o conjunto $\{f(t,y) : \ t \geq 0, \ y \in K\}$ é limitado e $\lim_{t\to\infty} \big(f(t+\omega,y) - f(t,y)\big) = 0$, uniformemente para $y \in K$.

Definição 1.9 Uma função $f : \mathbb{R} \times Y \to X$, respectivamente $f : [0,\infty) \times Y \to X$, é chamada uniformemente contínua sobre conjuntos limitados se para todo $\epsilon > 0$ e todo subconjunto limitado $K \subset Y$ existe $\delta_{\epsilon,K} > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \epsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, respectivamente $t \geq 0$, e todos $x, y \in K$ tais que $\|x - y\| \leq \delta_{\epsilon,K}$.

Finalmente, recordaremos a noção de função assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados.

Definição 1.10 Uma função contínua $f : [0,\infty) \times Y \to X$ é chamada assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados se para todo $\epsilon > 0$ e todo subconjunto limitado K de Y, existe $L_{\epsilon,\, K} \geq 0$ e $\delta_{\epsilon,\, K} > 0$ tais que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq \epsilon$ para todo $t \geq L_{\epsilon,\, K}$ e todos $x, y \in K$ com $\|x - y\| \leq \delta_{\epsilon,\, K}$.

Os próximos resultados são de fundamental importância em nosso trabalho.

Lema 1.1 ([89]) Sejam $f \in AP(Y;X)$ e $u \in AP(Y)$. Então $f(\cdot, u(\cdot)) \in AP(X)$.

Lema 1.2 ([68]) Seja $f \in AA_c(Y;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u \in AA_c(Y)$ então $f(\cdot, u(\cdot)) \in AA_c(X)$.

Lema 1.3 ([125]) Seja $f \in AA(Y;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u \in AA(Y)$ então $f(\cdot, u(\cdot)) \in AA(X)$.

Lema 1.4 Seja $f \in AAP(Y;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u \in AAP(Y)$ então $f(\cdot, u(\cdot)) \in AAP(X)$.

Demonstração: Seja $f = g + h$, com $g \in AP(Y;X)$ e $h \in C_0(Y;X)$. Seja $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in AP(Y)$ e $u_2 \in C_0([0,\infty);Y)$, observamos que

$$f(t,u(t)) = g(t,u_1(t)) + f(t,u(t)) - g(t,u_1(t)) = g(t,u_1(t)) + g(t,u(t)) - g(t,u_1(t)) + h(t,u(t)).$$

Pelo Lema 1.1 segue-se que $g(\cdot, u_1(\cdot)) \in AP(X)$. Uma vez que u é uma função limitada e $h \in C_0([0,\infty) \times Y;X)$ obtemos que

$$\lim_{t\to\infty} \|h(t,u(t))\| = 0.$$

Resta então mostrar que

$$g(\cdot, u(\cdot)) - g(\cdot, u_1(\cdot)) \in C_0([0,\infty);X).$$

Ora, existe um conjunto limitado $K \subset X$ tal que $u(t), u_1(t) \in K$, para todo $t \geq 0$. Ademais, para qualquer $\delta > 0$ fixado existe $T > 0$ tal que $\|u(t) - u_1(t)\| = \|u_2(t)\| \leq \delta$, para todo $|t| > T$. Então, dado $\epsilon > 0$ temos que $\|g(t,u(t)) - g(t,u_1(t))\| \leq \epsilon$, para $t > T$. ∎

Lema 1.5 ([68]) Seja $f \in AAA_c(Y;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u \in AAA_c(Y)$ então $f(\cdot, u(\cdot)) \in AAA_c(X)$.

Lema 1.6 ([124, 125]) Seja $f \in AAA(Y;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u \in AAA(Y)$ então $f(\cdot, u(\cdot)) \in AAA(X)$.

O seguinte lema de composição de funções pseudo quase periódicas com peso generaliza o Teorema 3.7 de [62].

Lema 1.7 ([2]) Suponha que o peso $\rho : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ é contínuo e seja $f \in PAP(Y, X, \rho)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados tal que o conjunto $\{f(t,y) : t \in \mathbb{R}$ e $y \in K\}$ é limitado para todo subconjunto limitado $K \subset Y$. Se $u \in PAP(Y, \rho)$, então $f(\cdot, u(\cdot)) \in PAP(X, \rho)$.

O próximo resultado é portanto uma consequência do lema anterior.

Lema 1.8 Seja $f \in PAP(Y, X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que o conjunto $\{f(t,y) : t \in \mathbb{R}$ and $y \in K\}$ é limitado para todo subconjunto limitado $K \subset Y$. Se $u \in PAP(Y)$, então $f(\cdot, u(\cdot)) \in PAP(X)$.

Lema 1.9 Seja $f \in PAA_c(Y;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u \in PAA_c(Y)$ então $f(\cdot, u(\cdot)) \in PAA_c(X)$.

Demonstração: Como $f \in PAA_c(Y;X)$ e $u \in PAA_c(Y)$, temos por definição que $f = g + \Phi$ e $u = u_1 + u_2$, onde $g \in AA_c(Y;X)$, $\Phi \in P_0(Y;X)$, $u_1 \in AA_c(Y)$ e $u_2 \in P_0(Y)$. Uma vez que f é limitada, $f(\cdot, u(\cdot)) \in C_b(\mathbb{R};X)$. Decompomos f da seguinte forma

$$f(\cdot, u(\cdot)) = g(\cdot, u_1(\cdot)) + f(\cdot, u(\cdot)) - f(\cdot, u_1(\cdot)) + \Phi(\cdot, u_1(\cdot)).$$

Pelo Lema 1.2 obtemos que $g(\cdot, u_1(\cdot)) \in AA_c(X)$. Portanto, resta mostrar que $f(\cdot, u(\cdot)) - f(\cdot, u_1(\cdot))$ e $\Phi(\cdot, u_1(\cdot))$ pertencem a $P_0(X)$. Um argumento idêntico ao usado no Teorema 2.4 de [125] garante essa última afirmação. ∎

Lema 1.10 ([107]) Seja $f : [0, \infty) \times Y \to X$ uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados e assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Se $u : [0, \infty) \to Y$ é uma função S-assintoticamente ω-periódica, então a função $f(\cdot, u(\cdot)) \in SAP_\omega(X)$.

Lema 1.11 ([107]) Seja $f : [0, \infty) \times Y \to X$ uma função assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que para todo subconjunto limitado $K \subset Y$, o conjunto $\{f(t,y) : \; t \geq 0, \; y \in K\}$ é limitado e $\lim_{t\to\infty} \|f(t+n\omega, y) - f(t,y)\| = 0$, uniformemente para $y \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $u \in S_\omega(Y)$, então $f(\cdot, u(\cdot)) \in S_\omega(X)$.

1.2 Elementos de Análise Funcional

1.2.1 *Operadores de Hille-Yosida e espaços de extrapolação*

Sejam $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|)$ espaços de Banach. Representaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ o espaço de todos operadores lineares limitados definidos em X com valores em Y equipado com a topologia uniforme de operadores. Abreviaremos $\mathcal{L}(X)$ sempre que $X = Y$.

Recordaremos algumas propriedades básicas dos operadores de Hille-Yosida as quais são ferramentas básicas em nosso trabalho.

Definição 1.11 Sejam X um espaço de Banach e A um operador linear com domínio $D(A) \subset X$. Dizemos que $(A, D(A))$ é um *operador de Hille-Yosida* sobre X se existem constantes $\nu \in \mathbb{R}$ e $C \geq 1$ tais que $(\nu, \infty) \subset \rho(A)$ e $\sup\{(\lambda-\nu)^n \|(\lambda - A)^{-n}\| : n \in \mathbb{N}, \; \lambda > \nu\} \leq C$.

Quando não houver perigo de ambiguidade diremos que A é um operador de Hille-Yosida. Chamaremos de *tipo* de A o par (C, μ) onde μ é o ínfimo das constantes ν. Se μ pode ser escolhido menor do que zero, então A é chamado de tipo negativo.

As condições da Definição 1.11 são as condições do Teorema de Hille-Yosida com exceção da densidade do domínio de A. Observamos que a redução das condições de Hille-Yosida são ilusórias quando X é reflexivo. De fato, temos o seguinte resultado devido a Kato [114].

Proposição 1.4 Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear sobre um espaço de Banach reflexivo X tal que existem constantes $\mu, C > 0$ verificando as condições

$$\lambda > \mu \Rightarrow (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{C}{\lambda - \mu}.$$

Então $\overline{D(A)} = X$.

Seja $(A, D(A))$ um operador de Hille-Yosida, de tipo (C, μ), sobre X e seja $X_0 = \overline{D(A)}$; considere $D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in X_0\}$ e seja $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \to X_0$ o operador definido por $A_0 x = Ax$. O seguinte resultado pode ser encontrado em [79].

Lema 1.12 O operador A_0 é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(T_0(t))_{t\geq 0}$ sobre X_0 com $\|T_0(t)\| \leq Ce^{\mu t}$, para todo $t \geq 0$. Além disso, $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ e $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$, para $\lambda \in \rho(A)$.

A partir de agora, $(A, D(A))$ é um operador de Hille-Yosida de tipo negativo sobre X. Segue-se portanto que $0 \in \rho(A)$, donde $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Observamos que a expressão $\|x\|_{-1} = \|A_0^{-1}x\|$ define uma norma em X_0. O completamento de $(X_0, \|\cdot\|_{-1})$, denotado por X_{-1}, é chamado *o espaço de extrapolação* de X_0 associado a A_0. O espaço X é um espaço intermediário entre X_0 e X_{-1} e

$$X_0 \hookrightarrow X \hookrightarrow X_{-1}.$$

Uma vez que $A_0^{-1}T_0(t) = T_0(t)A_0^{-1}$, temos que

$$\|T_0(t)x\|_{-1} \leq \|T_0(t)\|_{\mathcal{L}(X_0)}\|x\|_{-1}$$

o que implica que $T_0(t)$ possui uma única extensão linear limitada $T_{-1}(t)$ para X_{-1}. A família de operadores $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo sobre X_{-1}, a qual será chamada de *semigrupo extrapolado* de $(T_0(t))_{t\geq 0}$. Na sequência, $(A_{-1}, D(A_{-1}))$ é o gerador infinitesimal de $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$.

Lema 1.13 ([149]) Sob as condições anteriores, as seguinte propriedades são verificadas:

(i) $D(A_{-1}) = X_0$ e $\|T_{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(X_{-1})} = \|T_0(t)\|_{\mathcal{L}(X_0)}$ para todo $t \geq 0$.

(ii) O operador $A_{-1} : X_0 \to X_{-1}$ é a extensão contínua de

$$A_0 : D(A_0) \subset (X_0, \|\cdot\|) \to (X_{-1}, \|\cdot\|_{-1}).$$

(iii) Se $\lambda \in \rho(A_0)$, então $(\lambda - A_{-1})^{-1}$ existe e $(\lambda - A_{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(X_{-1})$. Em particular, $\lambda \in \rho(A_{-1})$ e $R(\lambda, A_{-1})|_{X_0} = R(\lambda, A_0)$.

(iv) O espaço $X_0 = \overline{D(A)}$ é denso em $(X_{-1}, \|\cdot\|_{-1})$. Portanto, o espaço de extrapolação X_{-1} é também o completamento de $(X, \|\cdot\|_{-1})$ e $X \hookrightarrow X_{-1}$. Ademais, A_{-1} é uma extensão de A para X_{-1}. Em particular, se $\lambda \in \rho(A)$, então $R(\lambda, A_{-1})|_X = R(\lambda, A)$ e $R(\lambda, A_{-1})X = D(A)$.

Lema 1.14 ([138, 149]) Seja $f \in L^1_{loc}([0,\infty); X)$. Então as seguintes propriedades são válidas

(i) $T_{-1} * f(t) = \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s)ds \in X_0$, para todo $t \geq 0$.

(ii) $\|T_{-1} * f(t)\| \leq Ce^{\mu t}\int_0^t e^{-\mu s}\|f(s)\|ds$, onde $C > 0$ é independente de t e f.

(iii) A função $t \to \big(T_{-1} * f\big)(t)$ é contínua.

(iv) $x(t) = T_{-1}(t)x_0 + \big(T_{-1} * f\big)(t)$ é a única solução branda limitada em X_0 da equação

$$x'(t) = Ax(t) + f(t),\, t \geq 0;$$

$$x(0) = x_0.$$

Observação 1.7 Um resultado análogo ao do Lema 1.14 é válido considerando $f \in C_b(\mathbb{R}; X)$ (ver [15]).

1.2.2 Famílias resolventes integrais

A noção de família resolvente integral será uma ferramenta essencial em nossa abordagem de equações integrais no Capítulo 3. Portanto, relembramos a seguir seu conceito e algumas de suas propriedades.

Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$. Relembramos que a transformada de Laplace de f é dada por

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt, \quad Re\lambda > \omega,$$

onde a integral é absolutamente convergente para $Re\lambda > \omega$.

Definição 1.12 Seja A um operador linear fechado com domínio $D(A) \subseteq X$. Dizemos que A é o *gerador de uma família resolvente integral* se existem $\omega \geq 0$ e uma função fortemente contínua $S : [0, \infty) \to \mathcal{L}(X)$ tal que $\{1/\hat{a}(\lambda) \,:\, Re\lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ e

$$\left(\frac{1}{\hat{a}(\lambda)}I - A\right)^{-1} x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)xdt, \quad Re\lambda > \omega, \quad x \in X.$$

Nesse caso, $S(t)$ é chamada a *família resolvente integral* gerada por A.

Observação 1.8 Devido a unicidade da transformada de Laplace, uma família resolvente integral com $a(t) \equiv 1$ corresponde a um C_0-semigrupo enquanto que uma família resolvente integral com $a(t) = t$ corresponde a uma família seno (ver [24, Section 3.15]).

Podemos estabelecer algumas relações entre a família resolvente integral e seu gerador (ver [106, Proposition 2.2]).

Proposição 1.5 Seja $S(t)$ uma família resolvente integral sobre X com gerador A. As seguintes propriedades são válidas:

(a) $S(t)D(A) \subseteq D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$ para todos $x \in D(A)$ e $t \geq 0$.

(b) Sejam $x \in D(A)$ e $t \geq 0$. Então

$$S(t)x = a(t)x + \int_0^t a(t-s)AS(s)xds.$$

(c) Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$. Então

$$\int_0^t a(t-s)S(s)xds \in D(A)$$

e

$$S(t)x = a(t)x + A\int_0^t a(t-s)S(s)xds.$$

Em particular, $S(0) = a(0)I$.

1.2.3 Operadores setoriais e operadores solução

Definição 1.13 Um operador linear fechado $A : D(A) \subset X \to X$ é chamado *setorial* de tipo μ se existem $0 < \theta < \pi/2$, $M > 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que seu resolvente existe fora do setor

$$\mu + S_\theta := \{\mu + \eta : \eta \in \mathbb{C}, |arg(-\eta)| < \theta\}$$

e

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|\lambda - \mu|}, \ \lambda \notin \mu + S_\theta.$$

Existe uma grande quantidade de trabalhos tratando de operadores setoriais. Para uma referência recente incluindo vários exemplos e propriedades citamos [98].

Recordamos a seguinte definição (cf [54, 55]).

Definição 1.14 Seja $A : D(A) \subset X \to X$ um operador setorial definido sobre um espaço de Banach X. Chamaremos A de *gerador de um operador solução* se existe $\mu \in \mathbb{R}$ e uma função fortemente contínua $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(X)$ tal que $\{\lambda^\alpha : Re\lambda > \mu\} \subset \rho(A)$ e

$$\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}S_\alpha(t)xdt, \ Re\lambda > \mu, \ x \in X.$$

Nesse caso, $S_\alpha(t)$ é chamado *operador solução* gerado por A.

Observação 1.9 Se A é setorial de tipo μ com $0 \leq \theta < \pi(1 - \alpha/2)$, então A é o gerador de um operador solução dado por

$$S_\alpha(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\lambda t}\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}d\lambda,$$

onde γ é um caminho apropriado fora do setor $\mu + S_\theta$. Recentemente, Cuesta [44, Theorem 1] provou que se A é um operador setorial de tipo $\mu < 0$ para algum $M > 0$ e $0 \leq \theta < \pi(1-\alpha/2)$ então existe $C > 0$ tal que

$$\|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{CM}{1+|\mu|t^\alpha}, \quad t \geq 0. \tag{1.8}$$

Observe que $S_\alpha(t)$ é de fato integrável.

O conceito de operador solução está intimamente relacionado ao conceito de família resolvente (ver Prüss [167, Capítulo I]). Para o caso escalar, onde existe uma vasta bibliografia, citamos a monografia de Gripenberg e colaboradores [97]. Devido a unicidade da transformada de Laplace, no caso $\alpha = 1$ a família $S_\alpha(t)$ corresponde a um C_0-semigrupo, enquanto que no caso $\alpha = 2$ corresponde ao conceito de família coseno (ver Arendt e colaboradores [24] e Fattorini [88]). Observamos que operadores solução, bem como famílias resolventes, são uma caso particular de famílias (a,k)-regularizadas introduzidas em Lizama [130]. De acordo com [130] um operador solução $S_\alpha(t)$ corresponde a uma família $(1, \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)})$-regularizada. O seguinte resultado é uma consequência da Proposição 3.1 e do Lema 2.2 em [130].

Proposição 1.6 Seja $S_\alpha(t)$ um operador solução sobre X com gerador A. Então, temos que

(a) $S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ e $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$ para todos $x \in D(A)$, $t \geq 0$;

(b) Sejam $x \in D(A)$ e $t \geq 0$. Então

$$S_\alpha(t)x = x + \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} AS_\alpha(s)ds;$$

(c) Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$. Então

$$\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S_\alpha(s)xds \in D(A)$$

e

$$S_\alpha(t)x = x + A\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} S_\alpha(s)xds.$$

Uma caracterização dos geradores de operadores solução, análoga ao Teorema de Hille-Yosida para C_0-semigrupos, pode ser diretamente deduzida de [130, Teorema 3.4].

1.3 Alguns teoremas de ponto fixo

Nesta seção relembramos os teoremas da teoria de ponto fixo que utilizamos neste trabalho. Começaremos relembrando a definição de ponto fixo.

Definição 1.15 Sejam X um espaço topológico e $f : X \to X$ uma função contínua. Um *ponto fixo* para f é um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = x$.

Dados um espaço topológico X e uma função contínua $f : X \to X$ a existência de um ponto fixo para f pode ser devida apenas a natureza do espaço X. Por exemplo, se $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, então segue-se do teorema do valor intermediário que toda função contínua $f : X \to X$ possui ao menos um ponto fixo. Entretanto, neste trabalho estamos essencialmente interessados em resultados que forneçam hipóteses sobre uma função contínua $f : X \to X$ de modo que ela possua um ponto fixo. No decorrer desta subseção apresentamos alguns de tais resultados.

Definição 1.16 Sejam (X,d) e (Y,ρ) espaços métricos. Uma função $f : X \to Y$ para a qual existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\rho(f(x), f(z)) \leq Ld(x,z),$$

para todos $x, z \in X$ é chamada *Lipschitziana*. A constante L é chamada constante de Lipschitz de f.

Observação 1.10 Observe que naturalmente uma função Lipschitziana é contínua. Quando $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ é Lipschitziana e a constante de Lipschitz $L < 1$ dizemos que f é uma *contração*.

Observação 1.11 Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Estaremos particularmente interessados na situação onde $f : I \times X \to Y$ é uma função contínua que satisfaz a condição

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$, $t \in I$, onde $I = \mathbb{R}$ ou $I = [0,\infty)$, e $L : I \to [0,\infty)$ é uma função dada. Nesta situação diremos também que f é uma função Lipschitziana.

A seguir enunciaremos o Principio da Contração de Banach. Esse resultado é um dos mais simples e aplicados teoremas de ponto fixo.

Teorema 1.1 (Principio da Contração de Banach) Seja (X,d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma contração. Então f possui um único ponto fixo.

Uma variação deste resultado é teorema a seguir, o qual nos permitirá considerar condições um pouco mais gerais em nossos resultados nos capítulos 2 e 3.

Teorema 1.2 (Principio dos iterados) Seja (X, d) um espaço métrico completo e $f : X \to X$ uma função contínua. Se para algum $n \in \mathbb{N}$ o iterado f^n é uma contração, então f possui um único ponto fixo.

Esses dois resultados são de grande utilidade nas aplicações e exemplos de nossos resultados nos capítulos 2 e 3. Porém, por tratarem apenas de contrações eles não cobrem situações mais gerais e de grande interesse. Nesse sentido o resultado seguinte é muito útil.

Teorema 1.3 (Alternativa de Leray-Schauder) Seja D um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X tal que $0 \in D$. Seja $G : D \to D$ uma função completamente contínua. Então, G possui um ponto fixo em D ou o conjunto

$$\{z \in D : z = \lambda G(z),\ 0 < \lambda < 1\}$$

é ilimitado.

A Alternativa de Leray-Schauder é uma consequência imediata e de grande importância do teorema de ponto fixo conhecido na literatura como Alternativa Não linear de Schauder. Para uma abordagem mais detalhada deste assunto nos referimos ao livro [95].

Para finalizar esta subseção faremos algumas considerações sobre subconjuntos compactos de um espaço de Banach especial. Tais comentários serão de fundamental importância quando precisarmos utilizar o Teorema 1.3. Seja X um espaço de Banach. Seja $h : \mathbb{R} \to [1, \infty)$ uma função contínua tal que $\lim_{|t|\to\infty} h(t) = \infty$. Considere o espaço

$$C_h(X) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}, X) : \lim_{|t|\to\infty} \frac{u(t)}{h(t)} = 0 \right\}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_h = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{\|u(t)\|}{h(t)}.$$

Pode-se mostrar que $(C_h(X), \|\cdot\|_h)$ é um espaço de Banach. O próximo resultado estabelece condições para que um subconjunto de $C_h(X)$ seja relativamente compacto.

Lema 1.15 ([106]) Um subconjunto $K \subseteq C_h(X)$ é relativamente compacto se verifica as seguintes condições:

(c-1) O conjunto $K(t) = \{u(t) : u \in K\}$ é relativamente compacto em X para cada $t \in \mathbb{R}$.

(c-2) O conjunto K é equicontínuo.

(c-3) Para cada $\epsilon > 0$ existe $L > 0$ tal que $\|u(t)\| \leq \epsilon h(t)$ para todo $u \in K$ e todo $|t| > L$.

Seja agora $h^* : [0,\infty) \to [1,\infty)$ uma função contínua tal que $h^*(t) \to \infty$ as $t \to \infty$. Considere o espaço

$$C_{h^*}(X) = \left\{ u \in C([0,\infty),X) : \lim_{t\to\infty} \frac{u(t)}{h^*(t)} = 0 \right\}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{h^*} = \sup_{t\geq 0} \frac{\|u(t)\|}{h^*(t)}.$$

De forma análoga, pode-se mostrar que $C_{h^*}(X)$ munido da norma $\|\cdot\|_{h^*}$ é um espaço de Banach. A cerca da compacidade dos subconjuntos de $C_{h^*}(X)$ o seguinte resultado é de grande valia.

Lema 1.16 ([48]) Um subconjunto $K \subseteq C_{h^*}(X)$ é relativamente compacto se verifica as seguintes condições:

(c*-1) O conjunto $K_b = \{u|_{[0,b]} : u \in K\}$ é relativamente compacto em $C([0,b];X)$ para todo $b \geq 0$.

(c*-2) $\lim_{t\to\infty} \frac{\|u(t)\|}{h^*(t)} = 0$ uniformemente para todo $u \in K$.

Capítulo II

Periodicidade e ergodicidade para equações de evolução

Reductio ad absurdum is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess gambit: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game.

— G. H. Hardy

2.1 Introdução

Neste capítulo estudamos existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para equações diferenciais semilineares de primeira ordem cuja parte linear é dada por um operador de Hille-Yosida. Abordamos também o problema de existência de soluções assintoticamente quase periódicas e pseudo quase periódicas com peso para equações integro-diferenciais fracionárias e equações semilineares fracionárias, respectivamente.

2.2 Equações semilineares de primeira ordem

2.2.1 Soluções Brandas S-assintoticamente ω-periódicas

Nesta subseção estamos interessados em estudar periodicidade assintótica das soluções brandas da equação semilinear de primeira ordem descrita sob a forma

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$u(0) = u_0 \in X_0 \tag{2.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo (C, μ) com $C \geq 1$, $\mu < 0$ e cujo domínio $D(A)$ está contido num espaço de Banach X. Não faremos suposições a respeito da densidade de $D(A)$, contudo, o caso não denso desperta maior interesse uma vez que nesta situação a teoria clássica de semigrupos não pode ser imediatamente aplicada. Relembramos que existe uma grande quantidade de equações diferenciais semilineares cuja parte linear é dada por um operador de domínio não denso. Tais situações ocorrem por exemplo fazendo-se restrições sobre o espaço onde a equação é considerada (por exemplo, funções periódicas contínuas, funções Hölder contínuas) ou mediante condições de contorno (por exemplo, o conjunto das funções contínuas com valor nulo na fronteira não é denso no espaço das funções contínuas). As principais referências sobre este assunto são os artigos de pesquisa R. Nagel e E. Sinestrari [149, 150], G. Da Prato e P. Grisvard [163] e G. Da Prato e E. Sinestrari [164]. Consideramos também o caso de condição não local, isto é, quando a condição inicial é da forma $u(0) + g(u) = u_0$, com $g : X \to X$ uma função dada.

Recordamos que uma solução branda da equação (2.1)-(2.2) é uma função contínua $u : [0, \infty) \to X$ que satisfaz a equação integral

$$u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s, u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Teorema 2.1 Seja $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ uma função contínua tal que $f(\cdot, 0)$ é integrável sobre $[0, \infty)$. Suponha que existe uma função integrável $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t)\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e para $t \geq 0$. Então a equação (2.1)-(2.2) possui uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica para todo $\omega > 0$.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{F} : SAP_\omega(X_0) \to SAP_\omega(X_0)$ por

$$\mathcal{F}u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s, u(s))ds \;=:\; T_{-1}(t)u_0 + v(t), \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Vamos mostrar que $\mathcal{F}$ está bem definido. Inicialmente observe que $\|T_{-1}(t)u_0\| \leq Ce^{\mu t}\|u_0\|$. Logo, $\lim_{t\to\infty} T_{-1}(t)u_0 = 0$ e portanto a função $t \to T_{-1}(t)u_0$ pertence a $SAP_\omega(X_0)$. Resta então mostrar que $v \in SAP_\omega(X_0)$. A continuidade e limitação de v é consequência do Lema 1.14. De fato, uma vez que para todo $s \geq 0$ a estimativa

$$\begin{aligned} \|f(s, u(s))\| &\leq \|f(s, u(s)) - f(s, 0)\| + \|f(s, 0)\| \\ &\leq L(s)\|u(s)\| + \|f(s, 0)\| \end{aligned}$$

é válida, podemos concluir que a função $s \to f(s,u(s))$ é integrável sobre $[0,\infty)$. Agora, dado $\epsilon > 0$ fixemos $a > 0$ tal que

$$\int_a^\infty \|f(s,u(s))\| ds \leq \frac{\epsilon}{3C}.$$

Pela continuidade da função $f(\cdot,u(\cdot))$ segue-se que o conjunto

$$K = \{f(s,u(s)) : 0 \leq s \leq a\} \subset X$$

é compacto. Portanto, existe $T = T(\epsilon, K) > 0$ tal que

$$\|\big(T_{-1}(t+\omega) - T_{-1}(t)\big) f(s,u(s))\| \leq \frac{\epsilon}{3a},$$

para todos $t > T$ e $s \in [0,a]$. Observe que, para $t > a$, podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t+\omega) - v(t) &= \int_0^a \big(T_{-1}(t+\omega-s) - T_{-1}(t-s)\big) f(s,u(s)) ds \\ &+ \int_a^{t+\omega} T_{-1}(t+\omega-s) f(s,u(s)) ds - \int_a^t T_{-1}(t-s) f(s,u(s)) ds. \end{aligned}$$

Portanto, para $t > T + a$ temos

$$\begin{aligned} \|v(t+\omega) - v(t)\| &\leq \int_0^a \|\big(T_{-1}(t+\omega-s) - T_{-1}(t-s)\big) f(s,u(s))\| ds \\ &+ \int_a^{t+\omega} \|T_{-1}(t+\omega-s) f(s,u(s))\| ds + \int_a^t \|T_{-1}(t-s) f(s,u(s))\| ds \\ &\leq \int_0^a \frac{\epsilon}{3a} ds + C \int_a^{t+\omega} \|f(s,u(s))\| ds + C \int_a^t \|f(s,u(s))\| ds \\ &\leq \int_0^a \frac{\epsilon}{3a} ds + 2C \int_a^\infty \|f(s,u(s))\| ds \leq \epsilon, \end{aligned}$$

o que garante que $v \in SAP_\omega(X_0)$. Portanto $\mathcal{F} : SAP_\omega(X_0) \to SAP_\omega(X_0)$ está bem definido. Ademais, para $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X_0)$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}u_1(t) - \mathcal{F}u_2(t)\| &\leq C \int_0^t e^{\mu(t-s)} L(s) ds \|u - v\|_\infty \\ &\leq C \int_0^t L(s) ds \|u - v\|_\infty \\ &\leq C \|L\|_1 \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{F}^2u_1)(t)-(\mathcal{F}^2u_2)(t)\| &\le C^2\left(\int_0^t L(s)\left(\int_0^s L(\tau)d\tau\right)ds\right)\|u_1-u_2\|_\infty\\ &\le \frac{C^2}{2}\left(\int_0^t L(\tau)d\tau\right)^2\|u_1-u_2\|_\infty\\ &\le \frac{(C\|L\|_1)^2}{2}\|u_1-u_2\|_\infty.\end{aligned}$$

De forma geral, para $n\in\mathbb{N}$, temos que

$$\|(\mathcal{F}^nu_1)(t)-(\mathcal{F}^nu_2)(t)\|\le\frac{(C\|L\|_1)^n}{n!}\|u_1-u_2\|_\infty.$$

Uma vez que $\frac{(C\|L\|_1)^n}{n!}<1$ para n suficientemente grande, segue-se do teorema do ponto fixo para iterados (Teorema 1.2) que $\mathcal{F}$ possui um único ponto fixo $u\in SAP_\omega(X_0)$ e consequentemente existe uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica para a equação (2.1)-(2.2). ∎

O Teorema anterior não cobre o caso onde a função $f:[0,\infty)\times X_0\to X$ é L-Lipschitz, isto é, quando existe uma constante $L>0$ tal que f satisfaz a condição

$$\|f(t,x)-f(t,y)\|\le L\|x-y\|$$

para todos $x,y\in X_0$ e $t\ge 0$. Para essa situação o próximo resultado será de grande importância uma vez que ele garante a regularidade da convolução do semigrupo extrapolado com funções S-assintoticamente ω-periódicas.

Lema 2.1 Seja $u\in SAP_\omega(X)$. Então a função $\tilde{v}:[0,\infty)\to X_0$ definida por

$$\tilde{v}(t):=(T_{-1}*u)(t)=\int_0^t T_{-1}(t-s)u(s)ds$$

é S-assintoticamente ω-periódica.

Demonstração: Como $u\in SAP_\omega(X_0)$ segue-se do Lema 1.14 que $\tilde{v}\in C_b([0,\infty);X_0)$. Ademais, dado $\epsilon>0$, podemos escolher $L>0$ tal que $\|u(t+\omega)-u(t)\|\le\epsilon$ para todo $t\ge L$ e

$C\int_L^\infty e^{\mu s}ds \leq \epsilon$. Portanto, para $t \geq 2L$ obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v}(t+\omega)-\tilde{v}(t)\| &\leq \int_0^\omega \|T_{-1}(t+\omega-s)\|\|u(s)\|ds + \int_0^L \|T_{-1}(t-s)\|\|u(s+\omega)-u(s)\|ds \\
&+ \int_L^t \|T_{-1}(t-s)\|\|u(s+\omega)-u(s)\|ds \\
&\leq C\|u\|_\infty \int_t^{t+\omega} e^{\mu s}ds + 2C\|u\|_\infty \int_L^t e^{\mu s}ds \\
&+ C\epsilon \int_0^\infty e^{\mu s}ds \leq \epsilon\left(3\|u\|_\infty + \frac{C}{-\mu}\right).
\end{aligned}$$

Logo, segue-se que $\tilde{v} \in SAP_\omega(X_0)$. ∎

Teorema 2.2 Seja $f : [0,\infty)\times X_0 \to X$ uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados. Suponha que existe uma função $L \in C_b([0,\infty);[0,\infty))$ tal que

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|,$$

para todos $x,y \in X_0$ e $t \geq 0$. Seja $\beta(t) = \int_0^t e^{\mu(t-s)}L(s)ds$. Se existe uma constante $r > 0$ tal que $C\beta(t) \leq r < 1$ para todo $t \geq 0$ então a equação (2.1)-(2.2) possui uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica para todo $\omega > 0$.

Demonstração: Defina $\mathcal{F} : SAP_\omega(X_0) \to SAP_\omega(X_0)$ pela expressão (2.3). Ora, a função $T_{-1}(\cdot)u_0 \in SAP_\omega(X_0)$. Além disso, se $u \in SAP_\omega(X_0)$ então pelo Lema 1.10 segue-se que $f(\cdot,u(\cdot)) \in SAP_\omega(X)$. O Lema 2.1 assegura que

$$\int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds \in SAP_\omega(X_0).$$

Portanto, $\mathcal{F}$ está bem definido. Em contrapartida, se $u_1,u_2 \in SAP_\omega(X_0)$ então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u_1(t)-\mathcal{F}u_2(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u_1(s))-f(s,u_2(s))\big)\|ds \\
&\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u_1(s))-f(s,u_2(s))\|ds \\
&\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}L(s)\|u_1(s)-u_2(s)\|ds \\
&\leq C\beta(t)\|u_1-u_2\|_\infty \leq r\|u_1-u_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{F}$ é uma contração e consequentemente, pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica para a equação (2.1)-(2.2). ■

O próximo resultado é uma consequência imediata do Teorema 2.2.

Corolário 2.1 Seja $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ uma função uniformemente S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados. Suponha que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \geq 0$. Se $\frac{CL}{-\mu} < 1$ então a equação (2.1)-(2.2) possui uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.

Exemplo 2.1 Sejam $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\nu \in \mathbb{R}$. Considere

$$\begin{aligned} G(t,x,u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu}{(2n+1)!} \int_0^x a(t)(x-\tau)^{2n+1} u(t,\tau)d\tau \\ &- \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu}{(2n+1)!} \int_0^\pi a(t)(\pi-\tau)^{2n+1} u(t,\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Estamos essencialmente interessados em estudar existência de soluções S-assintoticamente ω-periódicas para a seguinte equação diferencial parcial com condições de fronteira

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) - u(t,x) + G(t,x,u), \; t \geq 0, \; x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \; t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \; x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $u_0 \in C([0,\pi];\mathbb{R})$, $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$. Para tratar o problema (2.4) da forma abstrata (2.1)-(2.2) considere $X = C([0,\pi];\mathbb{R})$ e seja A o operador definido sobre o subespaço

$$D(A) = \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(\pi) = 0\},$$

pela regra $Au = u'' - u$. Em [164] os autores mostram que A é um operador de Hille-Yosida de tipo $(C, -1)$, com $C > 0$ e domínio não denso

$$\overline{D(A)} = \{u \in X : u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Como de costume, fazendo $u(t)(s) = u(t,s)$ e considerando a função

$$\begin{aligned} f(t,\phi)(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu}{(2n+1)!} \int_0^s a(t)(s-\tau)^{2n+1} \phi(\tau)d\tau \\ &- \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu}{(2n+1)!} \int_0^\pi a(t)(\pi-\tau)^{2n+1} \phi(\tau)d\tau \end{aligned}$$

podemos reescrever a equação (2.4) na forma abstrata (2.1)-(2.2). Uma consequência imediata do Corolário 2.1 é que se $a \in SAP_\omega(\mathbb{R})$ e vale a estimativa $C \sup_{t\in[0,\infty)} |a(t)||\nu| < 1$ então (2.4) possui uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.

Observação 2.1 Considere o espaço

$$S_\omega(X) = \{u \in C_b([0,\infty); X) : \lim_{t\to\infty} \big(u(t+n\omega) - u(t)\big) = 0, \text{ uniformemente para } n \in \mathbb{N}\}.$$

Pode-se mostrar que $S_\omega(X)$ é um subespaço fechado de $C_b([0,\infty); X)$. Dado $u \in S_\omega(X)$ seja $\tilde{v} : [0,\infty) \to X$ a função definida no Lema 2.1. Com uma simples adaptação na demostração do Lema 2.1 podemos mostrar que $\tilde{v} \in S_\omega(X_0)$.

Corolário 2.2 Seja $f : [0,\infty) \times X_0 \to X$ uma função contínua que satisfaz a condição de Lipschitz do Corolário 2.1. Suponha que para todo subconjunto limitado K de X_0, o conjunto $\{f(t,x) : t \geq 0, x \in K\}$ é limitado e $\lim_{t\to\infty} \big(f(t+n\omega,x) - f(t,x)\big) = 0$, uniformemente para $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $\frac{CL}{-\mu} < 1$, então a equação (2.1)-(2.2) possui uma única solução branda em $S_\omega(X_0)$.

Demonstração: Definimos o operador $\mathcal{F}$ sobre o espaço $S_\omega(X_0)$ por (2.3). Seja $u \in S_\omega(X_0)$, mostraremos que $\mathcal{F}u \in S_\omega(X_0)$. Inicialmente observamos que $T_{-1}(t)x_0 \to 0$ quando $t \to \infty$, então a função $T_{-1}(\cdot)x_0 \in S_\omega(X_0)$. Resta mostrar que a função $t \to \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds$ pertence a $S_\omega(X_0)$. Pode-se mostrar que $\lim_{t\to\infty} f(t+n\omega, u(t+n\omega)) - f(t,u(t)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$. Pela Observação 2.1 segue-se que a função $t \to \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds$ pertence a $S_\omega(X_0)$. Finalmente, observe que $\mathcal{F}$ é uma $\frac{CL}{-\mu}$-contração. Portanto, segue do teorema do ponto fixo de Banach que existe uma única solução branda em $S_\omega(X_0)$ para a equação (2.1)-(2.2). ∎

Observação 2.2 Considere o problema (2.4). Uma aplicação do Corolário 2.2 é que se $\lim_{t\to\infty}(a(t+n\omega) - a(t)) = 0$, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$ e $C \sup_{t\in[0,\infty)} |a(t)||\nu| < 1$, então (2.4) possui uma solução branda assintoticamente ω-periódica.

Consideraremos agora o problema de Cauchy com condição não local

$$u'(t) = Au(t) + f(t,u(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

$$u(0) + g(u) = u_0, \tag{2.6}$$

onde A e f são como antes e $g : C_b([0,\infty; X_0) \to X_0$ é uma função dada. Recentemente alguns trabalhos propõem que condições do tipo (2.6) possuem melhor efeito nas aplicação físicas do que condições iniciais da forma $u(0) = u_0$. Para uma abordagem mais precisa sobre este tema citamos os trabalhos [14, 33, 77, 129, 144, 152]. Esta é a principal motivação para o próximo resultado.

Proposição 2.1 Seja f uma função que satisfaz as hipóteses do Corolário 2.1. Suponha que $g : C_b([0,\infty); X_0) \to X_0$ satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|g(u_1) - g(u_2)\| \leq L_g \|u_1 - u_2\|,$$

para todos $u_1, u_2 \in C_b([0,\infty); X_0)$, onde $L_g > 0$ é uma constante. Se $C\left(L_g + \frac{L}{-\mu}\right) < 1$ então o problema (2.5)-(2.6) possui uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica.

Demonstração: De fato, defina o operador $\tilde{\mathfrak{F}} : SAP_\omega(X_0) \to SAP_\omega(X_0)$ por

$$\tilde{\mathfrak{F}}u(t) = T_{-1}(t)\big(u(0) + g(u)\big) + \int_0^t T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds, \quad \forall\, t \geq 0.$$

Não é difícil ver que para cada $u \in SAP_\omega(X_0)$ a função $t \to T_{-1}(t)\big(u(0) + g(u)\big)$ pertence a $SAP_\omega(X_0)$. Um argumento similar ao da demonstração do Teorema 2.2 garante que

$$\int_0^t T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds$$

é uma função S-assintoticamente ω-periódica, de modo que $\tilde{\mathfrak{F}}$ está bem definido. Finalmente, se $u_1, u_2 \in SAP_\omega(X_0)$ então

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathfrak{F}}u_1(t) - \tilde{\mathfrak{F}}u_2(t)\| &\leq \|T_{-1}(t)\big(g(u_1) - g(u_2)\big)\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\big)\| ds \\
&\leq C L_g \|u_1 - u_2\|_\infty + C \int_0^t e^{\mu(t-s)} \|f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))\| ds \\
&\leq C\left(L_g \|u_1 - u_2\|_\infty + \int_0^t e^{\mu(t-s)} L \|u_1(s) - u_2(s)\| ds\right) \\
&\leq C\left(L_g + \frac{L}{-\mu}\right) \|u_1 - u_2\|_\infty
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{\mathfrak{F}}$ é uma contração donde segue-se, pelo teorema do ponto fixo de Banach, que existe uma única solução branda S-assintoticamente ω-periódica do problema (2.5)-(2.6). ∎

Estudaremos agora existência de soluções brandas S-assintoticamente ω-periódicas para o problema (2.1)-(2.2) quando a função f não é do tipo Lipschitz. Nesse sentido o próximo teorema é o principal resultado desta seção. A notação utilizada é compatível com a Subseção 1.3.

Teorema 2.3 Seja $f : [0,\infty) \times X_0 \to X$ uma função S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados de X_0 e assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X_0. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$ e $t \geq 0$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $\nu \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\nu h^*(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_{h^*}(X_0)$, com $\|v - u\|_{h^*} \leq \delta$, tem-se que

$$C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon,$$

para todo $t \in [0,\infty)$;

(c) Para todos $b \in [0,\infty)$ e $r > 0$, o conjunto

$$\{f(s,h^*(s)x) : 0 \leq s \leq b,\ x \in X_0, \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X;

(d) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(\nu) := \left\| \|T_{-1}(\cdot)u_0\| + C\int_0^{\cdot} e^{\mu(\cdot-s)}\Omega(\nu h^*(s))ds \right\|_{h^*}.$$

Então o problema (2.1)-(2.2) possui uma solução branda S-assintoticamente ω-periódica.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{F}$ sobre o espaço de Banach $C_{h^*}(X_0)$ pela expressão (2.3). Se $u \in C_{h^*}(X_0)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u(t)\| &\leq \|T_{-1}(t)u_0\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)f(s,u(s))\|ds \\
&\leq C\|u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u\|_{h^*}h^*(s))ds.
\end{aligned}$$

Segue-se da condição (a) que $\mathcal{F} : C_{h^*}(X_0) \to C_{h^*}(X_0)$ está bem definido. Afirmamos que $\mathcal{F}$ é contínuo. De fato, dado $\epsilon > 0$, considere $\delta > 0$ assegurado pela condição (b). Se $u, v \in C_{h^*}(X_0)$ são tais que $\|u - v\|_{h^*} \leq \delta$, então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

O objetivo agora será mostrar que $\mathcal{F}$ é completamente contínuo. Para isso usaremos o Lema 1.15. Seja $B_r(C_{h^*}(X_0))$ a bola com centro em 0 e raio r no espaço $C_{h^*}(X_0)$. Considere

$V = \mathcal{F}(B_r(C_{h^*}(X_0)))$ e $v = \mathcal{F}(u)$ para $u \in B_r(C_{h^*}(X_0))$. Inicialmente vamos mostrar que $V_b(t)$ é um subconjunto relativamente compacto de X_0 para cada $t \in [0, b]$. Ora, para todo $t \in [0, b]$

$$v(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(s)f(t-s, u(t-s))ds \in T_{-1}(t)u_0 + t\overline{co(K)},$$

onde $co(K)$ representa o fecho convexo do conjunto

$$K = \{T_{-1}(s)f(\xi, h^*(\xi)x) : \ 0 \le s \le t, \ 0 \le \xi \le t, \ \|x\| \le r\}.$$

Logo,

$$V_b(t) \subseteq T_{-1}(t)u_0 + t\overline{co(K)}.$$

Usando o fato de que $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo e a condição (c), segue-se que K é relativamente compacto e portanto $V_b(t)$ também o é. O próximo passo é mostrar que V_b é equicontínuo. Para todo $t \ge 0$ podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= \big(T_{-1}(t+s) - T_{-1}(t)\big)u_0 + \int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi, u(\xi))d\xi \\ &+ \int_0^t \big(T_{-1}(\xi+s) - T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi, u(t-\xi))d\xi. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que

$$\Big\|\int_t^{t+s} T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi, u(\xi))d\xi\Big\| \le C\int_t^{t+s} e^{\mu(t+s-\xi)}\Omega(rh^*(\xi))d\xi \le \epsilon/3,$$

para $s \le \delta_1$. Além disso, como o conjunto $\{f(t-\xi, u(t-\xi)) : 0 \le \xi \le t, u \in B_r(C_{h^*}(X_0))\}$ é relativamente compacto e $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínua, podemos escolher $\delta_2 > 0$ e $\delta_3 > 0$ tais que

$$\|\big(T_{-1}(t+s) - T_{-1}(t)\big)u_0\| \le \epsilon/3, \quad \forall\, s \le \delta_2$$

e

$$\|\big(T_{-1}(\xi+s) - T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi, u(t-\xi))\| \le \frac{\epsilon}{3(t+1)}, \quad \forall\, s \le \delta_3.$$

Combinando estas estimativas podemos garantir que $\|v(t+s) - v(t)\| \le \varepsilon$ para $s \le \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ independente de $u \in B_r(C_{h^*}(X_0))$.

Finalmente, segue da condição (a) que

$$\frac{\|v(t)\|}{h^*(t)} \le \frac{C\|u_0\|}{h^*(t)} + \frac{C}{h^*(t)}\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(rh^*(s))ds \to 0, \, t \to \infty,$$

e essa convergência é independente de $u \in B_r(C_{h^*}(X_0))$. Portanto, pelo Lema 1.16 obtemos que V é relativamente compacto.

Suponha que $u^\lambda(\cdot)$ é uma solução da equação $u^\lambda(\cdot) = \lambda\mathcal{F}(u^\lambda(\cdot))$ para algum $\lambda \in (0,1)$. Como

$$\begin{aligned}
\|u^\lambda(t)\| &= \lambda\left\|T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u^\lambda(s))ds\right\| \\
&\leq \|T_{-1}(t)u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u^\lambda\|_{h^*}h^*(s))ds \\
&\leq \beta(\|u^\lambda\|_{h^*})h^*(t),
\end{aligned}$$

temos que $\frac{\|u^\lambda\|_{h^*}}{\beta(\|u^\lambda\|_{h^*})} \leq 1$. Pela condição (c) segue-se que o conjunto

$$\{u^\lambda : u^\lambda = \lambda\mathcal{F}(u^\lambda), \lambda \in (0,1)\}$$

é limitado. Pelos Lemas 1.10 e 2.1 segue-se que $\mathcal{F}(SAP_\omega(X_0)) \subset SAP_\omega(X_0)$ e consequentemente podemos considerar $\mathcal{F} : \overline{SAP_\omega(X_0)} \to \overline{SAP_\omega(X_0)}$[1]. Pela Alternativa de Leray-Schauder, Teorema 1.3, segue-se que $\mathcal{F}$ possui um ponto fixo $u \in \overline{SAP_\omega(X_0)}$. Considere uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset SAP_\omega(X_0)$ tal que $u_n \to u$ em $C_{h^*}(X_0)$. Dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de $\delta > 0$ tal que se $\|v - u\|_{h^*} \leq \delta$ então

$$C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0;$$

Ademais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|u_n - u\|_{h^*} \leq \delta$. Logo, para todos $t \geq 0$ e $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u_n(t) - \mathcal{F}u(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\big)\|ds \\
&\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\sup_{t\geq 0}\|\mathcal{F}u_n(t) - \mathcal{F}u(t)\| \leq \epsilon,$$

isto é, $\mathcal{F}u_n \to \mathcal{F}u$ uniformemente. Portanto $u \in SAP_\omega(X_0)$ e a demonstração está finalizada.
■

Exemplo 2.2 Sejam λ uma constante positiva e $0 < \beta < 1$. Considere

$$F(t,x,u) = \left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\int_0^x\int_0^s e^{-\lambda t}(s-\tau)^{2n+1}u(t,\tau)d\tau ds\right.$$

[1]Note que o fecho do conjunto $SAP_\omega(X_0)$ está sendo considerado com relação a $C_{h^*}(X_0)$.

$$- \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\pi} e^{-\lambda t} (\pi - \tau)^{2n+1} u(t,\tau) d\tau \Bigg|^{\beta} \sin x.$$

Como consequência do teorema anterior vamos mostras que existe solução branda S-assintoticamente ω-periódica para a seguinte equação diferencial parcial com condições de fronteira

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) - u(t,x) + F(t,x,u), \ t \geq 0, \ x \in [0,\pi], \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \ t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in [0,\pi], \end{cases} \tag{2.7}$$

onde $u_0 \in C([0,\pi];\mathbb{R})$, $u_0(0) = u_0(\pi) = 0$. Para tratar o problema (2.7) na forma abstrata (2.1)-(2.2) considere $X = C([0,\pi];\mathbb{R})$ e seja A o operador definido sobre o subespaço

$$D(A) = \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

pela regra $Au = u'' - u$. Em [164] os autores mostram que A é um operador de Hille-Yosida de tipo $(C,-1)$, com $C > 0$, com domínio não denso

$$\overline{D(A)} = \{u \in X : u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Como de costume, fazendo $u(t)(s) = u(t,s)$ e definindo a função

$$f(t,\phi)(\xi) = \Bigg| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\xi} \int_0^{s} e^{-\lambda t} (s-\tau)^{2n+1} \phi(\tau) d\tau ds$$

$$- \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^{-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{(2n)!} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \int_0^{\pi} e^{-\lambda t} (\pi - \tau)^{2n+1} \phi(\tau) d\tau \Bigg|^{\beta} \sin \xi.$$

podemos reescrever a equação (2.7) na forma abstrata (2.1)-(2.2). Pelo Teorema 2.3 podemos garantir que o problema (2.7) possui uma solução branda S-assintoticamente ω-periódica. De fato, daremos uma breve ideia da demonstração deste fato. As estimativas

$$\|f(t,\phi)\|_{\infty} \leq \pi^{\beta} \|\phi\|^{\beta}, \quad \phi \in X_0, \quad t \geq 0,$$

e

$$\|f(t+\omega,\phi) - f(t,\phi)\|_{\infty} \leq \left(\frac{1}{e^{\lambda(t+\omega)}} + \frac{1}{e^{\lambda t}} \right) \pi^{\beta} \|\phi\|^{\beta}, \quad \phi \in X_0, \quad t \geq 0,$$

garantem que $f : [0,\infty) \times X_0 \to X$ é uma função S-assintoticamente ω-periódica sobre conjuntos limitados. Por outro lado, como

$$\|f(t,\phi_1) - f(t,\phi_2)\|_{\infty} \leq \frac{\pi^{\beta}}{e^{\lambda t}} \|\phi_1 - \phi_2\|^{\beta}, \quad t \geq 0, \quad \phi_1, \phi_2 \in X_0,$$

segue-se que f é assintoticamente uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Uma vez que $f(t,0)=0$, obtemos que

$$\|f(t,\phi)\|_\infty \leq \frac{\pi^\beta}{e^{\lambda t}}\,\|\phi\|^\beta \leq \pi^\beta\,\|\phi\|^\beta, \quad \phi \in X_0, \quad t \geq 0.$$

Portanto, podemos tomar $\Omega(\xi)=\pi^\beta\xi^\beta$. Considerando $h^*(t)=e^{\lambda t}$, $u,v\in C_{h^*}(X_0)$, podemos inferir que

$$\frac{1}{h^*(t)}\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\nu h^*(s))ds \leq \frac{\nu^\beta}{-\mu}\cdot\frac{1}{e^{\lambda(1-\beta)t}} \to 0, \quad t\to\infty, \quad 0<\beta<1,$$

e

$$\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,v(s))-f(s,u(s))\|_\infty ds \leq \frac{\pi^\beta}{-\mu}\|v-u\|_h^\beta, \quad t\geq 0.$$

Portanto, as condições (a) e (b) do Teorema 2.3 são satisfeitas. Um cálculo direto mostra que $\liminf_{\xi\to\infty}\frac{\xi}{\beta(\xi)}>1$. Finalmente, como $\|f(s,e^{\lambda s}\phi)\|_\infty \leq \pi^\beta r^\beta$ e

$$|f(s,e^{\lambda s}\phi)(\xi)-f(s,e^{\lambda s}\phi)(\xi')| \leq r^\beta\pi^\beta|\xi-\xi'|+r^\beta|\xi-\xi'|^\beta,$$

segue-se do Teorema de Arzelá-Ascoli que o conjunto

$$\{f(s,e^{\lambda s}\phi):0\leq s\leq b, \phi\in X_0, \|\phi\|\leq r\}$$

é relativamente compacto. Logo, todas hipóteses do Teorema 2.3 são satisfeitas e então o problema (2.7) possui ao menos uma solução branda S-assintoticamente ω-periódica.

2.3 Equações diferenciais fracionárias

2.3.1 Soluções brandas assintoticamente quase periódicas

Nesta seção estudaremos existência de soluções assintoticamente quase periódicas para a equação fracionária semilinear

$$u'(t)=\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}Au(s)ds+f(t,u(t)), \quad t\geq 0, \tag{2.8}$$

$$u(0)=u_0\in X, \tag{2.9}$$

onde $1<\alpha<2$, $A:D(A)\subset X\to X$ é um operador linear de tipo setorial densamente definido sobre um espaço de Banach complexo X e $f:[0,\infty)\times X\to X$ é uma função dada. Equações fracionárias tem despertado o interesse em várias áreas da ciência devido a sua grande quantidade de aplicações. Em particular, muitos trabalhos estudando as propriedades das soluções da equação (2.8)-(2.9) tem surgido recentemente em vários contextos, por exemplo, sobre regularidade maximal a excelente monografia de J. Prüss [167], com respeito ao comportamento assintótico o artigo de E. Cuesta [44] e referente a periodicidade os artigos [17, 54, 55].

Começamos relembrando a definição de solução branda para a equação (2.8)-(2.9).

Definição 2.1 ([54]) Seja A o gerador de um operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Uma função contínua $u:[0,\infty)\to X$ satisfazendo

$$u(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds, \quad \forall\, t\geq 0, \tag{2.10}$$

é chamada *solução branda* da equação (2.8)-(2.9).

Os seguintes lemas serão fundamentais nesta subseção.

Lema 2.2 Suponha que A é setorial de tipo $\mu<0$. Se $g\in AP(X)$ e Λg é dado por

$$(\Lambda g)(t) = \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)g(s)ds, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.11}$$

então $\Lambda g\in AP(X)$.

Demonstração: Dado $\epsilon>0$, existe $l(\epsilon)>0$ tal que todo intervalo de comprimento $l(\epsilon)$ contém um número τ tal que $\|g(t+\tau)-g(t)\|\leq\epsilon$ para cada $t\in\mathbb{R}$. Segue-se portanto que

$$\begin{aligned}
\|\Lambda g(t+\tau)-\Lambda g(t)\| &\leq \int_0^\infty \|S_\alpha(s)\|\|g(t-s+\tau)-g(t-s)\|ds\\
&\leq \left(CM\int_0^\infty \frac{1}{1+|\mu|s^\alpha}ds\right)\epsilon\\
&= \frac{CM|\mu|^{-1/\alpha}\epsilon\pi}{\alpha\sin(\pi/2)}
\end{aligned}$$

donde $\Lambda g\in AP(X)$. ∎

Lema 2.3 Suponha que A é setorial de tipo $\mu<0$. Seja $f\in AAP(X)$; se $\Lambda^* f$ é a função dada por

$$(\Lambda^* f)(t) = \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s)ds, \quad t\geq 0. \tag{2.12}$$

Então $\Lambda^* f\in AAP(X)$.

Demonstração: Seja $f=g+\Phi$, onde $g\in AP(X)$ e $\Phi\in C_0([0,\infty),X)$. Temos que $\Lambda^* f(t) = G^*(t)+H^*(t)$, onde

$$G^*(t) := \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)g(s)ds, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.13}$$

e

$$H^*(t) := \int_0^t S_\alpha(t-s)\Phi(s)ds - \int_{-\infty}^0 S_\alpha(t-s)g(s)ds. \tag{2.14}$$

Segue do lema anterior que $G^* \in AP(X)$. Resta então mostrar que $H^* \in C_0([0,\infty), X)$. Uma vez que $\Phi \in C_0([0,\infty), X)$, para cada $\epsilon > 0$ existe uma constante $T > 0$ tal que $\|\Phi(s)\| \leq \epsilon$ para todo $s \geq T$. Então, para $t \geq 2T$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|H^*(t)\| &\leq CM\|\Phi\|_\infty \int_0^{t/2} \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}ds + \epsilon CM \int_{t/2}^t \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}ds \\
&+ CM\|g\|_\infty \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}ds \\
&\leq CM(\|\Phi\|_\infty + \|g\|_\infty)\int_T^\infty \frac{1}{1+|\mu|s^\alpha}ds + \frac{CM|\mu|^{-1/\alpha}\epsilon\pi}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{t\to\infty} H^*(t) = 0$, isto é, $H^* \in C_0([0,\infty), X)$. ■

Teorema 2.4 Suponha que A é setorial de tipo $\mu < 0$. Seja $f \in AAP(X;X)$ e suponha que existe uma função integrável limitada $L_f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L_f(t)\|x-y\|, \qquad \forall\, x,y \in X, \forall\, t \geq 0. \tag{2.15}$$

Então o problema (2.8)-(2.9) possui uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{F}_\alpha$ sobre o espaço $AAP(X)$ pela regra

$$(\mathcal{F}_\alpha u)(t) = S_\alpha(t)u_0 + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,u(s))ds := S_\alpha(t)u_0 + v_\alpha(t). \tag{2.16}$$

Mostraremos inicialmente que $\mathcal{F}_\alpha u \in AAP(X)$. De fato, a estimativa (1.8) implica que $S_\alpha(\cdot)u_0 \in AAP(X)$. Além disso, o Lema 1.4 assegura que a função $s \to f(s,u(s))$ é assintoticamente quase periódica. Pelo Lema 2.3, segue-se que $v_\alpha \in AAP(X)$ e portanto o operador

$$\mathcal{F}_\alpha : AAP(X) \to AAP(X)$$

está bem definido. Sejam $u, v \in AAP(X)$ e defina $C_\alpha := \sup_{t\geq 0} \|S_\alpha(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_\alpha u_1(t) - \mathcal{F}_\alpha u_2(t)\| &\leq C_\alpha \int_0^t L(s)ds\|u-v\|_\infty \\
&\leq C_\alpha \|L\|_1 \|u-v\|_\infty,
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{F}_\alpha^2 u_1)(t) - (\mathcal{F}_\alpha^2 u_2)(t)\| &\leq C_\alpha^2 \left(\int_0^t L(s) \left(\int_0^s L(\tau) d\tau \right) ds \right) \|u_1 - u_2\|_\infty \\ &\leq \frac{C_\alpha^2}{2} \left(\int_0^t L(\tau) d\tau \right)^2 \|u_1 - u_2\|_\infty \\ &\leq \frac{(C_\alpha \|L\|_1)^2}{2} \|u_1 - u_2\|_\infty.\end{aligned}$$

De forma geral, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathcal{F}_\alpha^n u - \mathcal{F}_\alpha^n v\|_\infty \leq \frac{(C_\alpha \|L_f\|_1)^n}{n!} \|u - v\|_\infty.$$

Uma vez que $\frac{(C_\alpha ||L||_1)^n}{n!} < 1$ segue-se do principio dos iterados que $\mathcal{F}_\alpha$ possui um único ponto fixo em $AAP(X)$. ∎

Uma consequência imediata deste teorema é dada a seguir.

PROPOSIÇÃO 2.2 Suponha que A é setorial de tipo $\mu < 0$. Seja $f \in AAP(X; X)$ uma função que satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \geq 0$. Se $CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi L < \alpha \sin \pi/\alpha$, onde C e M são as constantes dadas em (1.8), então o problema (2.8)-(2.9) possui uma única solução branda assintoticamente quase periódica.

EXEMPLO 2.3 Seja $a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função assintoticamente quase periódica. Estudaremos existência e unicidade de soluções brandas assintoticamente quase periódicas para a equação diferencial fracionária

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, \xi) = J_t^{\alpha-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \nu \right) u(t, \xi) + a(t) f(u(t, \xi)), \quad t \geq 0, \quad \xi \in [0, \pi], \tag{2.17}$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.18}$$

$$u(0, \xi) = u_0(\xi), \quad \xi \in [0, \pi], \tag{2.19}$$

onde $u_0 \in L^2[0, \pi]$, f é uma função dada e

$$J_t^{\alpha-1} g(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} g(s) ds.$$

Suponha que existe uma constante $L_f > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f|x - y|$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Se

$$\|a\|_\infty \leq \frac{\alpha \sin(\pi/\alpha)}{CM|\nu|^{-1/\alpha}\pi L_f},$$

então o problema (2.17)-(2.19) possui uma única solução branda assintoticamente quase periódica. De fato, Se escolhermos $X = L^2[0,\pi]$ e A o operador definido sobre o subespaço

$$D(A) = \{u \in L^2[0,\pi] : u'' \in L^2[0,\pi], u(0) = u(\pi) = 0\}$$

pela regra $Au = u'' - \nu u$, podemos reescrever o problema (2.17)-(2.19) na forma abstrata (2.8). Ademais, as hipóteses sobre a e f asseguram que as condições da Proposição 2.2 são verificas.

Fazendo $A = -\rho^\alpha I$ com $\rho > 0$ e $X = \mathbb{C}$ na equação (2.8), temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3 Seja $f \in AAP(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ uma função que satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in \mathbb{C}$ e $t \geq 0$. Então a equação (2.8)-(2.9) possui uma única solução assintoticamente quase periódica, sempre que $L < \frac{\alpha \sin \pi/\alpha}{\rho\pi}$.

Teorema 2.5 Suponha que A é setorial de tipo $\mu < 0$. Seja $f \in AAP(X; X)$ e suponha que existe uma função contínua e não decrescente $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que para cada número positivo R, e $x, y \in X$, $\|x\| \leq R$, $\|y\| \leq R$, temos

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(R)\|x - y\|, \ \forall t \geq 0,$$

onde $L(0) = 0$ e $f(t,0) = 0$ para $t \geq 0$, então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada u_0 com $\|u_0\| \leq \epsilon$, existe uma única solução branda assintoticamente quase periódica para a equação (2.8)-(2.9).

Demonstração: Sejam $R > 0$ e $0 < \lambda < 1$ tais que $CM(\lambda + |\mu|^{-1/\alpha}\pi L(R)/\alpha \sin(\pi/\alpha)) < 1$. Mostraremos que o teorema é válido para $\epsilon = \lambda R$. De fato, consideremos u_0 tal que $\|u_0\| \leq \epsilon$. Considere o espaço

$$\mathcal{D}_{u_0} = \{u \in AAP(X) : u(0) = u_0, \|u\|_\infty \leq R\}$$

equipado com a métrica $d(u,v) = \|u - v\|_\infty$. Definimos o operador $\mathcal{F}_\alpha$ sobre $\mathcal{D}_{u_0}$ por (2.16). Para todo $u \in \mathcal{D}_{u_0}$ temos que

$$\|\mathcal{F}_\alpha u(t)\| \leq CM(\lambda + |\mu|^{-1/\alpha}\pi L(R)/\alpha \sin(\pi/\alpha))R \leq R,$$

isto é,

$$\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{D}_{u_0}) \subset \mathcal{D}_{u_0}.$$

Por outro lado, para $u_1, u_2 \in \mathcal{D}_{u_0}$ obtemos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\alpha u_1(t) - \mathcal{F}_\alpha u_2(t)\| &\leq CM\int_0^t \frac{L(R)\|u_1(s)-u_2(s)\|}{1+|\mu|(t-s)^\alpha}ds \\ &\leq \frac{CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi L(R)}{\alpha\sin(\pi/\alpha)}\|u_1-u_2\|_\infty \\ &\leq (1-CM\lambda)\|u_1-u_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Como $1 - CM\lambda < 1$, segue-se que $\mathcal{F}_\alpha$ é uma $(1-CM\lambda)$-contração. ■

Exemplo 2.4 Consideremos a equação diferencial fracionária

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\xi) = J_t^{\alpha-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\nu\right)u(t,\xi) + a(t)\left(\int_0^\xi u(t,\tau)d\tau\right)^2, \quad t\geq 0, \quad \xi\in[0,\pi], \tag{2.20}$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \geq 0, \tag{2.21}$$

$$u(0,\xi) = u_0(\xi), \quad \xi\in[0,\pi]. \tag{2.22}$$

Como consequência do Teorema 2.5, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.4 Suponha que $a(\cdot)$ é uma função assintoticamente quase periódica. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que para cada u_0 com $\|u_0\|_{L^2} \leq \epsilon$, existe uma única solução branda assintoticamente quase periódica para o problema (2.20)-(2.22).

Demonstração: De fato, a equação (2.20) pode ser expressa como uma equação abstrata da forma (2.8), onde

$$f(t,\phi)(\xi) = a(t)\left(\int_0^\xi \phi(\tau)d\tau\right)^2,$$

$t \geq 0$ e $\phi \in L^2[0,\pi]$. Observe que

$$\|f(t,\phi_1) - f(t,\phi_2)\|_{L^2} \leq \|a\|_\infty \pi^{3/2}(\|\phi_1\|_{L^2} + \|\phi_2\|_{L^2})\|\phi_1-\phi_2\|_{L^2},$$

para todos $t \geq 0$ e $\phi_1, \phi_2 \in L^2[0,\pi]$. Portanto, a perturbação é localmente Lipschitz. O resultado segue então do Teorema 2.5, uma vez que f é assintoticamente quase periódica. ■

Para finalizar esta subseção estudaremos existência de solução branda assintoticamente quase periódica para a equação (2.8)-(2.9) quando f não é do tipo Lipschitz. A demostração deste resultado segue as ideias da demostração do Teorema 2.3.

Teorema 2.6 Suponha que A é setorial de tipo $\mu < 0$. Seja $f \in AAP(X;X)$ uma função que satisfaz as seguintes condições:

(H*1) Existe uma função contínua não decrescente $W : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq W(\|x\|)$ para todos $t \geq 0$ e $x \in X$.

(H*2) $f(t,x)$ é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados.

(H*3) Para cada $\nu \geq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h^*(t)} \int_0^t \frac{W(\nu h^*(s))}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} ds = 0,$$

onde h^* verifica as condições do Lema 1.16. Seja

$$\beta^*(\nu) := \sup_{t\geq 0} \frac{1}{h^*(t)} \left(\|S_\alpha(t)u_0\| + CM \int_0^t \frac{W(\nu h^*(s))}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} ds \right),$$

onde C e M são as constantes dadas em (1.8).

(H*4) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_{h^*}(X)$, $\|u-v\|_{h^*} \leq \delta$ tem-se

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t \frac{\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} ds \leq \epsilon.$$

(H*5) Para todos $0 \leq a \leq b$, e $r > 0$, o conjunto

$$\{f(s, h^*(s)x) : a \leq s \leq b, x \in X, \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

(H*6) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta^*(\xi)} > 1$.

Então a equação (2.8)-(2.9) possui uma solução branda assintoticamente quase periódica.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{F}_\alpha$ sobre $C_{h^*}(X)$ por (2.16). Mostraremos que $\mathcal{F}_\alpha$ possui um ponto fixo em $AAP(X)$. Inicialmente observe que $\mathcal{F}_\alpha$ está bem definido. De fato, para $u \in C_{h^*}(X)$, temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_\alpha u(t)\| &\leq \|S_\alpha(t)u_0\| + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)f(s,u(s))\| ds \\ &\leq CM\|u_0\| + CM \int_0^t \frac{W(\|u\|_{h^*} h^*(s))}{1+|\mu|(t-s)^\alpha} ds \end{aligned}$$

Segue de (H*3) que $\mathcal{F}_\alpha : C_{h^*}(X) \to C_{h^*}(X)$. Segue da condição (H*4) que $\mathcal{F}_\alpha$ é uma função contínua.

Mostraremos agora que $\mathcal{F}_\alpha$ completamente contínuo. Sejam $V = \mathcal{F}_\alpha(B_r(C_{h^*}(X)))$ e $v = \mathcal{F}_\alpha(u)$ para $u \in B_r(C_{h^*}(X))$. Afirmamos que $V_b(t)$ é um subconjunto relativamente compacto de X para cada $t \in [0,b]$. De fato, pela condição (H*5) temos que

$$K = \{S_\alpha(s) f(\xi, h(\xi)x) : 0 \leq s \leq t, 0 \leq \xi \leq t, \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto. Além disso, $V_b(t) \subset S_\alpha(t)u_0 + t\overline{c(K)}$, donde segue nossa afirmação. Pela decomposição

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= (S_\alpha(t+s) - S_\alpha(t))u_0 + \int_t^{t+s} S_\alpha(t+s-\xi)f(\xi, u(\xi))d\xi \\ &+ \int_0^t (S_\alpha(\xi+s) - S_\alpha(\xi))f(t-\xi, u(t-\xi))d\xi, \end{aligned}$$

segue-se que V_b é equicontínuo. Além disso, pode-se mostrar que $\lim_{t\to\infty} \frac{\|v(t)\|}{h^*(t)} = 0$ uniformemente para $u \in B_r(C_{h^*}(X))$. Pelo Lema 1.16, temos então que V é um subconjunto relativamente compacto de $C_{h^*}(X)$.

Note que $\{u^\lambda : u^\lambda = \lambda \mathcal{F}_\alpha(u^\lambda), \lambda \in (0,1)\}$ é um conjunto limitado. De fato, isto segue da condição (H*6) e da estimativa

$$\|u^\lambda\|_{h^*} \leq \beta^*(\|u^\lambda\|_{h^*}).$$

Segue-se dos Lemas 1.4 e 2.3, que $AAP(X)$ é invariante por $\mathcal{F}_\alpha$. De forma similar a demostração do Teorema 2.3 segue-se que existe uma solução branda assintoticamente quase periódica para a equação (2.8)-(2.9). ∎

2.3.2 Soluções brandas pseudo quase periódicas com peso

Esta subseção é dedicada ao estudo de soluções pseudo quase periódicas com peso para a seguinte equação semilinear fracionária

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + D_t^{\alpha-1} f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.23}$$

onde $1 < \alpha < 2$, $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear densamente definido de tipo setorial sobre um espaço de Banach complexo X e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função dada. A derivada fracionária será no sentido de Riemann-Liouville. Para propriedades do cálculo fracionário e suas aplicações em diversos campos da ciência sugerimos ao leitor os textos de R. Gorenflo e F. Mainard [93, 94] e suas referências.

Antes de enunciarmos nossos resultados, recordaremos a definição de solução branda para a equação (2.23).

Definição 2.2 ([18]) Suponha que A gera uma operador solução integrável $S_\alpha(t)$. Uma função contínua $u : \mathbb{R} \to X$ satisfazendo a equação integral

$$u(t) = \int_{-\infty}^t S_\alpha(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{2.24}$$

é chamada de *solução branda* para a equação(2.23).

O próximo lema é fundamental para nossos propósitos.

LEMA 2.4 Seja $\rho \in \mathbb{V}_\infty$. Suponha que A é setorial de tipo $\omega < 0$. Se $f : \mathbb{R} \to X$ é uma função ρ-pseudo quase periódica e Λf é a função dada por

$$\Lambda f(t) := \int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s) f(s) ds.$$

Então $\Lambda f \in PAP(X, \rho)$.

Demonstração: Observe inicialmente que por (1.8) a seguinte estimativa é válida

$$\begin{aligned}
\|\Lambda f(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S_\alpha(t-s) f(s)\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \frac{CM}{1+|\omega|(t-s)^\alpha} \|f(s)\| ds \\
&= \frac{CM|\omega|^{-1/\alpha}\pi\|f\|_\infty}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Lambda f\|_\infty \leq \frac{CM|\omega|^{-1/\alpha}\pi\|f\|_\infty}{\alpha \sin(\pi/\alpha)}.$$

Temos então que $\Lambda f \in C_b(\mathbb{R}, X)$. Por outro lado, podemos escrever $f = g + \phi$, onde $g \in AP(X)$ e $\phi \in PAP_0(X, \rho)$. Pelo Lema 2.2, $\Lambda g \in AP(X)$. Resta então mostrar que $\Lambda \phi \in PAP_0(X, \rho)$. Para $T > 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m(T,\rho)} \int_{-T}^{T} \left\| \int_0^\infty S_\alpha(s)\phi(t-s) ds \right\| \rho(t) dt \quad &\leq \quad \frac{1}{m(T,\rho)} \int_{-T}^{T} \int_0^\infty \|S_\alpha(s)\| \|\phi(t-s)\| \rho(t) ds dt \\
\leq CM \int_0^\infty \frac{1}{1+|\omega|s^\alpha} &\left(\frac{1}{m(T,\rho)} \int_{-T}^{T} \|\phi(t-s)\| \rho(t) dt \right) ds \\
= CM \int_0^\infty &\frac{\Phi_T(s)}{1+|\omega|s^\alpha} ds,
\end{aligned}$$

onde $\Phi_T(s) = \frac{1}{m(T,\rho)} \int_{-T}^{T} \|\phi(t-s)\| \rho(t) dt$. Como $\rho \in \mathbb{V}_\infty$ segue-se que $PAP(X, \rho)$ é invariante por translações, donde obtemos que $t \to \phi(t-s)$ pertence a $PAP(X, \rho)$ para cada $s \in \mathbb{R}$ e então $\Phi_T(s) \to 0$ quando $T \to \infty$. Uma vez que Φ_T é limitada ($\|\Phi_T\| \leq \|\phi\|_\infty$) e $\frac{1}{1+|\omega|s^\alpha}$ é integrável em $[0, \infty)$, segue-se do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^\infty \frac{\Phi_T(s)}{1+|\omega|s^\alpha} ds = 0.$$

■

Nosso primeiro resultado é baseado no Principio da Contração de Banach (ver Teorema 1.1).

Teorema 2.7 Seja $\rho \in \mathbb{V}_\infty$. Suponha que A é setorial se tipo $\omega < 0$. Seja $f \in PAP(X, X, \rho)$ satisfazendo a condição de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $CM|\omega|^{-1/\alpha}\pi L < \alpha \sin(\pi/\alpha)$, onde C e M são as constantes dadas em (1.8). Então a equação (2.23) possui uma única solução branda pseudo quase periódica com peso.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{F}_\alpha : PAP(X, \rho) \to PAP(X, \rho)$ por

$$(\mathcal{F}_\alpha u)(t) := \int_{-\infty}^{t} S_\alpha(t-s) f(s, u(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.25}$$

Observe que $\mathcal{F}_\alpha$ está bem definido. De fato, dado $u \in PAP(X, \rho)$, segue-se do Lema 1.7 que a função $s \to f(s, u(s))$ é pseudo quase periódica com peso. Por outro lado, pelo Lema 2.4, obtemos que $\mathcal{F}_\alpha u \in PAP(X, \rho)$ e portanto $\mathcal{F}_\alpha$ está bem definida. É suficiente então mostrar que o operador $\mathcal{F}_\alpha$ possui um único ponto fixo em $PAP(X, \rho)$. Para isso, sejam $u_1, u_2 \in PAP(X, \rho)$, temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}_\alpha u_1 - \mathcal{F}_\alpha u_2\|_\infty &\leq L \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_0^\infty \|S_\alpha(\tau)\| \|u_1(t-\tau) - u_2(t-\tau)\| d\tau \\
&\leq LCM \left(\int_0^\infty \frac{1}{1 + |\omega| s^\alpha} ds \right) \|u_1 - u_2\|_\infty \\
&\leq \frac{CML|\omega|^{-1/\alpha}\pi}{\alpha \sin(\pi/\alpha)} \|u_1 - u_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{F}_\alpha$ é uma contração. Segue-se então do teorema do ponto fixo de Banach que $\mathcal{F}_\alpha$ possui uma única solução branda pseudo quase periódica com peso. ■

O próximo resultado é consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 2.5 Suponha que A é setorial de tipo $\omega < 0$. Seja $f \in PAP(X, X)$ satisfazendo a condição de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $CM|\omega|^{-1/\alpha}\pi L < \alpha \sin(\pi/\alpha)$, então a equação (2.23) possui uma única solução branda pseudo quase periódica.

EXEMPLO 2.5 Estudaremos existência e unicidade de soluções brandas pseudo quase periódicas com peso para a equação diferencial fracionária dada por

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x)+\mu u(t,x)+\partial_t^{\alpha-1}(\beta u(t,x)(\cos(t)+cos(\sqrt{2}t))+\beta e^{-|t|}\sin(u(t,x))), \quad (2.26)$$

onde $\mu < 0$, $t \in \mathbb{R}$ e $x \in [0,\pi]$, com condições de fronteira

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.27)$$

Seja $X = L^2[0,\pi]$ e o operador A definido sobre X por $Au = u'' + \mu u$, $(\mu < 0)$ com domínio

$$D(A) = \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(\pi) = 0\}.$$

Um fato conhecido é que $\Delta u = u''$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico sobre $L^2[0,\pi]$. Portanto, A é setorial de tipo $\mu < 0$. A equação (2.26) pode ser reformulada na forma abstrata não homogênea (2.23), onde $u(t) = u(t,\cdot)$. Considere a não linearidade

$$f(t,\phi)(s) = \beta(\cos(t) + \cos(\sqrt{2}t)) + \beta e^{-|t|}\sin(\phi(s))\phi(s),$$

para todos $\phi \in X$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in [0,\pi]$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Segue-se do Exemplo 2.6 de [62], que $f \in PAP(X,X,\rho)$ com $\rho(t) = 1 + t^2$. Suponha que

$$|\beta| < \frac{\alpha\sin(\pi/\alpha)}{3CM|\mu|^{-1/\alpha}\pi}.$$

Então pelo Teorema 2.7, a equação (2.26) possui uma única solução branda pseudo quase periódica com peso.

Estudaremos agora existência de solução branda pseudo quase periódica com peso para a equação (2.23) quando a função f não é Lischitziana. Nesse sentido será de grande utilidade o Lema 1.7. Para estabelecer nossos resultados consideraremos funções f que satisfazem a seguinte condição de limitação.

(B*) Existe uma função contínua não decrescente $W : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $\|f(t,x)\| \leq W(\|x\|)$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.

O seguinte resultado de existência é baseado na alternativa de Leray-Schauder (Teorema 1.3).

TEOREMA 2.8 Seja $\rho \in \mathbb{V}_\infty$. Suponha que A é setorial de tipo $\omega < 0$. Seja $f \in PAP(X,X,\rho)$ satisfazendo a condição (B*) e as seguintes condições:

(a) $f(t,x)$ é uniformemente contínua sobre conjuntos limitados $K \subset X$ uniformemente em $t \in \mathbb{R}$.

(b) Para cada $r \geq 0$,

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} \frac{W(rh(s))}{1+|\mu|(t-s)^{\alpha}} ds = 0,$$

onde h é a função dada no Lema 1.15.

Seja

$$\beta(r) := CM \left\| \int_{-\infty}^{\cdot} \frac{W(rh(s))}{1+|\mu|(\cdot - s)^{\alpha}} ds \right\|_{h},$$

onde C e M são as constantes dadas em (1.8).

(c) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $u, v \in C_h(X)$, $\|u - v\|_h \leq \delta$ implica que

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\|}{1+|\mu|(t-s)^{\alpha}} ds \leq \epsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

(d) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$.

(e) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, e $r > 0$, o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b, x \in X, \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

Então a equação (2.23) possui uma solução branda pseudo quase periódica com peso.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{F}_\alpha$ sobre $C_h(X)$ como em (2.25). Mostraremos que $\mathcal{F}_\alpha$ possui um ponto fixo em $PAP(X, \rho)$. A prova será dividida em vários passos.

(i) Para $u \in C_h(X)$, temos que

$$\frac{\|\mathcal{F}_\alpha u(t)\|}{h(t)} \leq \frac{CM}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} \frac{W(\|u\|_h h(s))}{1+|\mu|(t-s)^{\alpha}} ds.$$

Segue então da condição (b) que $\mathcal{F}_\alpha$ está bem definido. Pela condição (c) temos que a aplicação $\mathcal{F}_\alpha$ é contínua.

(ii) Mostraremos que $\mathcal{F}_\alpha$ é completamente contínua. Seja $B_r(C_h(X))$ a bola fechada de centro em 0 e raio r contida em $C_h(X)$. Sejam $V = \mathcal{F}_\alpha(B_r(C_h(X)))$ e $v = \mathcal{F}_\alpha(u)$ para $u \in B_r(C_h(X))$. Provaremos inicialmente que $V(t)$ é um subconjunto relativamente compacto de X para cada $t \in \mathbb{R}$. Segue da condição (b) que para $\epsilon > 0$, podemos escolher $a \geq 0$ tal que

$$CM \int_{a}^{\infty} \frac{W(rh(t-s))}{1+|\mu|s^{\alpha}} ds \leq \epsilon.$$

Ora, segue da decomposição

$$v(t) = \int_{0}^{a} S_\alpha(s) f(t-s, u(t-s)) ds + \int_{a}^{\infty} S_\alpha(s) f(t-s, u(t-s)) ds$$

que

$$v(t) \in \overline{ac_0(K)} + B_\epsilon(X),$$

onde $c_0(K)$ representa o fecho convexo de

$$K = \{S_\alpha(s)f(\xi, h(\xi)x) : 0 \leq s \leq a, t - a \leq \xi \leq t, \|x\| \leq r\}.$$

Como $S_\alpha(\cdot)$ é fortemente contínua segue-se da condição (e) que K é um conjunto relativamente compacto. Portanto $V(t) \subset \overline{ac_0(K)} + B_\epsilon(X)$, é relativamente compacto.

Mostraremos que V é equicontínuo. De fato, podemos decompor

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= \int_0^s S_\alpha(\xi)f(t+s-\xi, u(t+s-\xi))d\xi \\ &+ \int_0^a (S_\alpha(\xi+s) - S_\alpha(\xi))f(t-\xi, u(t-\xi))d\xi \\ &+ \int_a^\infty (S_\alpha(\xi+s) - S_\alpha(\xi))f(t-\xi, u(t-\xi))d\xi. \end{aligned}$$

Para cada $\epsilon > 0$, podemos escolher $a > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que

$$\| \int_0^s S_\alpha(\xi)f(t+s-\xi, u(t+s-\xi))d\xi + \int_a^\infty (S_\alpha(\xi+s) - S_\alpha(\xi))f(t-\xi, u(t-\xi))d\xi\|$$
$$\leq CM \left(\int_0^s \frac{W(rh(t+s-\xi))}{1+|\mu|\xi^\alpha} d\xi + 2\int_a^\infty \frac{W(rh(t-\xi))}{1+|\mu|\xi^\alpha} d\xi \right) \leq \epsilon/2,$$

para $s \leq \delta_1$. Além disso, uma vez que

$$\{f(t-\xi, u(t-\xi)) : 0 \leq \xi \leq a, u \in B_r(C_h(X))\}$$

é um conjunto relativamente compacto e $S_\alpha(\cdot)$ é fortemente contínua podemos escolher $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|(S_\alpha(\xi+s) - S_\alpha(s))f(t-\xi, u(t-\xi))\| < \epsilon/2a$$

para $s \leq \delta_2$. Combinando estas estimativas temos que $\|v(t+s) - v(t)\| \leq \epsilon$ para s suficientemente pequeno e independente de $u \in B_r(C_h(X))$.

Finalmente, pela condição (b), temos que $\frac{v(t)}{h(t)} \to 0$, $|t| \to \infty$ e essa convergência independe de $u \in B_r(C_h(X))$. Portanto, pelo Lema 1.15, V é um conjunto relativamente compacto em $C_h(X)$.

(iii) Se $u^\lambda(\cdot)$ é solução da equação $u^\lambda = \lambda\mathcal{F}_\alpha(u^\lambda)$ para algum $0 < \lambda < 1$, pela estimativa

$$\frac{\|u^\lambda\|_h}{\beta(\|u^\lambda\|_h)} \leq 1$$

e a condição (d), concluímos que o conjunto

$$\tilde{K} := \{u^\lambda : u^\lambda = \lambda \mathcal{F}_\alpha(u^\lambda), \lambda \in (0,1)\}$$

é limitado.

(iv) Segue da condição (a) e do Lema 1.7, que a função $t \to f(t, u(t))$ pertence a $PAP(X, \rho)$, sempre que $u \in PAP(X, \rho)$. Portanto, usando o Lema 2.4, temos que $\mathcal{F}_\alpha(PAP(X, \rho)) \subset PAP(X, \rho)$ e consequentemente podemos considerar $\mathcal{F}_\alpha : \overline{PAP(X, \rho)} \to \overline{PAP(X, \rho)}$. Usando as propriedades (i)-(ii), segue-se que esta aplicação é completamente contínua. Aplicando a alternativa de Leray-Schauder, Teorema 1.3, temos que $\mathcal{F}_\alpha$ possui um ponto fixo em $u \in \overline{PAP(X, \rho)}$. Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $PAP(X, \rho)$ que converge para u. Temos que $(\mathcal{F}_\alpha u_n)_n$ converge para $\mathcal{F}_\alpha u = u$ uniformemente em $\mathbb{R}$. Portanto $u \in PAP(X, \rho)$ e existe uma solução branda pseudo quase periódica com peso para a equação (2.23). ∎

Capítulo III

Automorficidade e ergodicidade para equações de evolução

A Matemática é a honra do espírito humano.

— Leibniz

3.1 Introdução

Este capítulo é dedicado ao estudo de existência de soluções compactas quase automórficas, quase automórficas, assintoticamente compactas quase automórficas, assintoticamente quase automórficas, pseudo compactas quase automórficas e pseudo quase automórficas para equações semilineares de primeira ordem cuja parte linear é dada por um operador de Hille-Yosida. Estudamos também existência de soluções pseudo compactas quase automórficas e assintoticamente compactas quase automórficas para equações integrais com retardo infinito.

3.2 Equações semilineares de primeira ordem

Sejam $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear definido sobre um espaço de Banach X e $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$, onde $X_0 = \overline{D(A)}$, uma função contínua. O escopo desta seção é estabelecer condições suficientes sobre o operador A e a função f de modo a garantir existência e unicidade de soluções quase automórficas para a equação semilinear de primeira ordem

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Nesta seção A será um operador de Hille-Yosida de tipo (C, μ) com $C \geq 1$ e $\mu < 0$.

Relembramos que uma solução branda para a equação (3.1) é uma função $u \in C(\mathbb{R}; X)$ que satisfaz a fórmula de variação de parâmetros

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s, u(s))ds.$$

3.2.1 Soluções brandas quase automórficas e compactas quase automórficas

O proposito desta subseção é estudar condições suficientes para que a equação semilinear de primeira ordem (3.1) possua solução branda quase automórfica ou compacta quase automórfica. Em algumas situações seremos capazes de assegurar não só existência como também a unicidade de tais soluções contudo, o preço a se pagar para tal feito é trabalhar apenas com perturbações do tipo Lipschitz. Com o intuito de complementar a teoria, estabelecemos alguns resultados para perturbações mais gerais do que as Lipschitzinas. Ressaltamos que neste último caso, por natureza das ferramentas utilizadas, conseguimos garantir apenas a existência de soluções brandas.

Lema 3.1 Se $f : \mathbb{R} \to X$ é uma função quase automórfica e $\mathcal{F}f$ é dado por

$$(\mathcal{F}f)(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds, \; t \in \mathbb{R},$$

Então $\mathcal{F}f \in AA(X_0)$.

Demonstração: Seja $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Existem uma subsequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $g : \mathbb{R} \to X$ tais que $f(t+s_n)$ converge para $g(t)$ e $g(t-s_n)$ converge para $f(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Uma vez que

$$(\mathcal{F}f)(t+s_n) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s+s_n)ds, \; t \in \mathbb{R}, \, n \in \mathbb{N}.$$

Segue-se do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que $\mathcal{F}f(t+s_n)$ converge para $z(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)g(s)ds$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Analogamente, pode-se mostrar que $z(t-s_n)$ converge para $\mathcal{F}f(t)$, para cada $t \in \mathbb{R}$. ∎

Teorema 3.1 Seja $f \in AA(X_0, X)$. Suponha que existe uma função contínua e limitada $L : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e para $t \in \mathbb{R}$. Se $C\|L\|_\infty < -\mu$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda quase automórfica.

Demonstração: Inicialmente observe que se $u \in AA(X_0)$ segue-se do Lema 1.3 que a função $t \to f(t, u(t))$ pertence a $AA(X)$. Logo, o Lema 3.1 assegura que o operador $\mathcal{F} : AA(X_0) \to AA(X_0)$ dado pela regra

$$\mathcal{F}u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s, u(s)) ds \tag{3.2}$$

está bem definido. Ademais, se $u, v \in AA(X_0)$ segue-se que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\| ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} Ce^{\mu(t-s)} L(t) \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq C\|L\|_\infty \left(\int_0^\infty e^{\mu s} ds \right) \|u - v\|_\infty \\
&\leq \frac{C\|L\|_\infty}{-\mu} \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Então,

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_\infty \leq \frac{C\|L\|_\infty}{-\mu} \|u - v\|_\infty$$

donde segue-se que $\mathcal{F}$ é uma contração e portanto o resultado é consequência do teorema do ponto fixo de Banach. ∎

Corolário 3.1 Seja $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$ uma função quase automórfica em $t \in \mathbb{R}$ para cada $x \in X_0$. Suponha que existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e para $t \in \mathbb{R}$. Se $CL < -\mu$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda quase automórfica.

Fazendo pequenas mudanças na demonstração do Lema 3.1 obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.2 Se $f : \mathbb{R} \to X$ é uma função compacta quase automórfica e $\mathcal{F}f$ é dado por

$$(\mathcal{F}f)(t) := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s) ds, \; t \in \mathbb{R},$$

Então $\mathcal{F}f \in AA_c(X_0)$.

Teorema 3.2 Seja $f \in AA_c(X_0; X)$ e suponha que existe uma função contínua limitada e integrável $L : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Então a equação (3.1) possui uma única solução branda compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ o operador definido em (3.2). Pelos Lemas 1.2 e 3.2 segue-se que $\mathcal{F} : AA_c(X_0) \to AA_c(X_0)$ é um operador bem definido. Além disso, para $u, v \in AA_c(X_0)$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\|\|f(s,u(s)) - f(s,v(s)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} Ce^{\mu(t-s)}L(s)ds\|u-v\|_\infty \\
&\leq C\int_{-\infty}^{t} L(s)ds\|u-v\|_\infty \\
&\leq C\|L\|_{L^1}\|u-v\|_\infty;
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\mathcal{F}^2u\right)(t) - \left(\mathcal{F}^2v\right)(t)\right\| &\leq C^2\left(\int_{-\infty}^{t} L(s)\left(\int_{-\infty}^{s} L(r)dr\right)ds\right)\|u-v\|_\infty \\
&\leq \frac{C^2}{2}\left(\int_{-\infty}^{t} L(r)dr\right)^2\|u-v\|_\infty \\
&\leq \frac{\left(C\|L\|_{L^1}\right)^2}{2}\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Procedendo com este argumento obtemos em geral que

$$\|\left(\mathcal{F}^n u\right)(t) - \left(\mathcal{F}^n v\right)(t)\| \leq \frac{\left(C\|L\|_{L^1}\right)^n}{n!}\|u-v\|_\infty.$$

Mas, para n suficientemente grande $\frac{\left(C\|L\|_{L^1}\right)^n}{n!} < 1$. Logo, pelo teorema do ponto fixo para iterados segue-se que existe um único $u \in AA_c(X_0)$ tal que $\mathcal{F}u = u$. ∎

Observação 3.1 Naturalmente, um resultado análogo ao do teorema anterior é válido para assegurar existência de solução quase automórfica para a equação (3.1).

Quando a não linearidade $f : \mathbb{R} \times X_0 \to X$ satisfaz uma condição clássica do tipo Lipschitz, isto é, quando existe uma constante $L > 0$ tal que $\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$ para todos $x, y \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$, o teorema acima não assegura existência de solução branda compacta quase automórfica para a equação (3.1). Nesse sentido o próximo resultado é de grande utilidade.

Teorema 3.3 Seja $f \in AA_c(X_0; X)$ e suponha que existe uma função continua e limitada $L : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Seja $\|L\|_M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} L(s)ds$. Se $\frac{C\|L\|_M}{1-e^{-\mu}} < 1$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F} : AA_c(X_0) \to AA_c(X_0)$ o operador definido na demonstração do Teorema 3.2. Para quaisquer $u, v \in AA_c(X_0)$ segue-se que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} Ce^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \\
&\leq C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}L(s)\|u(s) - v(s)\|ds \\
&= C\sum_{m=0}^{\infty}\int_{t-m-1}^{t-m} e^{\mu(t-s)}L(s)ds\|u - v\|_\infty \\
&\leq \frac{C\|L\|_M}{1 - e^{-\mu}}\|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}$ é uma $\frac{C\|L\|_M}{1-e^{-\mu}}$-contração. O teorema do ponto fixo de Banach garante portanto a existência de uma única solução branda compacta quase automórfica para a equação (3.1). ∎

Proposição 3.1 Seja $f \in AA_c(X_0; X)$ e suponha que existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $CL < -\mu$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda compacta quase automórfica.

Demonstração: Considere o operador $\mathcal{F} : AA_c(X_0) \to AA_c(X_0)$ como na demonstração do Teorema 3.2. De forma semelhante à demonstração do Teorema 3.1 podemos mostrar que $\mathcal{F}$ é uma $\left(\frac{CL}{-\mu}\right)$-contração. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Banach, $\mathcal{F}$ possui um único ponto fixo em $AA_c(X_0)$. ∎

Exemplo 3.1 Sejam $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas e limitadas. Neste exemplo estudaremos existência e unicidade de soluções brandas quase automórficas e compactas quase automórficas para a equação do calor

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x) - u(t,x) + a(t)F(u(t,x)),\ t \in \mathbb{R},\ x \in [0,\pi], \tag{3.3}$$

com condições de fronteira

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0,\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Seja $X = C([0,\pi];\mathbb{R})$ e considere o operador A com domínio

$$D(A) = \{u \in X : u'' \in X, u(0) = u(\pi) = 0\} \subset X$$

definido por $Au = u'' - u$. Em [164] os autores mostraram que A é um operador de Hille-Yosida de tipo $(C,-1)$ cujo domínio não é denso em X. Como de costume, para estudar este problema na forma abstrata (3.1) escrevemos $u(t)(s) = u(t,s)$ e consideramos

$$f(t,\phi)(s) = a(t)F(\phi(s)),$$

para todos $\phi \in X_0 = \overline{D(A)}$, $t \in \mathbb{R}$ e $s \in [0,\pi]$. Segue-se portanto que o problema (3.3)-(3.4) pode ser visto na forma abstrata (3.1).

Proposição 3.2 Suponha que existe uma constante positiva L tal que

$$|F(x) - F(y)| \leq L|x-y|,$$

para todos $x,y \in \mathbb{R}$. Além disso, suponha que $C\sup_{t\in\mathbb{R}}|a(t)|L < 1$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) Se $a \in AA(\mathbb{R})$, o problema (3.3)-(3.4) possui uma única solução branda quase automórfica;

(ii) se $a \in AA_c(\mathbb{R})$, o problema (3.3)-(3.4) possui uma única solução branda compacta quase automórfica.

Demonstração: De fato, segue-se que se $\phi, \psi \in X_0$ então

$$\|f(t,\phi) - f(t,\psi)\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |a(t)| L \|\phi - \psi\|.$$

Logo, por esta estimativa $\mathcal{F}$ é uma contração. Finalmente, para (i) basta observar que se $a \in AA(\mathbb{R})$ então $f \in AA(X_0; X)$ e portanto o resultado segue-se do Corolário 3.1. Analogamente, para (ii) $f \in AA(X_0; X)$. Basta então aplicar a Proposição 3.1. ∎

No próximo resultado consideraremos condições sobre a não linearidade da equação (3.1) mais gerais do que as condições de Lipschitz. Como ferramenta para garantir a existência de solução branda em tal situação utilizaremos a Alternativa de Leray-Schauder (Teorema 1.3).

Teorema 3.4 Seja $f \in AA(X_0; X)$ uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X_0. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $r \geq 0$, $\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)} \Omega(rh(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u, v \in C_h(X_0)$ e $\|u - v\|_h \leq \delta$ então

$$C \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)} \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\| ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

(c) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(r) := C \left\| \int_{-\infty}^{\cdot} e^{\mu(\cdot - s)} \Omega(rh(s)) ds \right\|_h, \quad \forall\, r \geq 0;$$

(d) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, and $r > 0$ o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0,\ \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

Então a equação (3.1) possui uma solução branda quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F} : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$ o operador definido por

$$\mathcal{F}u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s) f(s,u(s)) ds.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}u(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)f(s,u(s))\|ds \leq C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s))\|ds \\ &\leq C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u(s)\|)ds = C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\Omega\left(\frac{h(s)\|u(s)\|}{h(s)}\right)ds \\ &\leq C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u\|_h h(s))ds.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|\mathcal{F}u(t)\|}{h(t)} \leq \frac{C}{h(t)}\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u\|_h h(s))ds.$$

Pela condição (a) segue-se que $\mathcal{F}$ está bem definido. Além disso, se $u, v \in C_h(X_0)$ então

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\ &\leq C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds.\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| \leq \epsilon$$

para todos $u, v \in C_h(X_0)$ tais que $\|u - v\|_h \leq \delta$. Como consequência, para tais u e v

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_h \leq \epsilon$$

donde segue-se que $\mathcal{F}$ é contínuo. O objetivo agora é mostrar que $\mathcal{F}$ é completamente contínuo. Para isso, sejam $B_r\big(C_h(X_0)\big)$ a bola de raio $r > 0$ centrada em $0 \in C_h(X_0)$, $V = \mathcal{F}\left(B_r\big(C_h(X_0)\big)\right)$ e $v = \mathcal{F}u \in V$. No que se segue utilizaremos o Lema 1.15 para mostrar que o conjunto V é relativamente compacto. Afirmamos inicialmente que o conjunto $V(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{R}$. De fato, seja $v(t) \in V(t)$. Pela condição (a) segue-se que a função $s \to e^{\mu s}\Omega(rh(t-s))$ é integrável sobre $[0, \infty)$. Logo, dado $\epsilon > 0$ pode-se escolher um $a \geq 0$ de modo que $C\int_a^{\infty} e^{\mu s}\Omega(rh(t-s))ds \leq \epsilon$. Portanto,

$$\left\|\int_a^{\infty} T_{-1}(s)f(t-s,u(t-s))ds\right\| \leq C\int_a^{\infty} e^{\mu s}\Omega(rh(t-s))ds \leq \epsilon.$$

Escrevendo

$$v(t) = \int_0^a T_{-1}(s)f(t-s,u(t-s))ds + \int_a^{\infty} T_{-1}(s)f(t-s,u(t-s))ds$$

obtemos então que

$$v(t) \in \overline{aco(\{T_{-1}(s)f(\xi, h(\xi)x) : 0 \le s \le a, t-s \le \xi \le t, \|x\| \le r\})} + B_\epsilon(X_0)$$

onde $co(K)$ representa o fecho convexo do conjunto K e $B_\epsilon(X_0)$ é a bola de raio ϵ e centro em $0 \in X_0$. Usando o fato de que $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo e a condição (d) podemos garantir que o conjunto $K = \{T_{-1}(s)f(\xi, h(\xi)x) : 0 \le s \le a, t-s \le \xi \le t, \|x\| \le r\}$ é relativamente compacto o que implica que $\overline{co(K)}$ também o é. Como $v(t) \in V(t)$ é arbitrário segue-se que $V(t) \subset \overline{co(K)} + B_\epsilon(X_0)$, donde concluímos a afirmação. Agora vamos mostrar que V é equicontínuo. Ora, dado $a > 0$ a seguinte decomposição é válida

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= \int_0^s T_{-1}(\xi) f(t+s-\xi, u(t+s-\xi)) d\xi \\ &+ \int_0^a \big(T_{-1}(\xi+s) - T_{-1}(\xi)\big) f(t-\xi, u(t-\xi)) d\xi \\ &+ \int_a^\infty \big(T_{-1}(\xi+s) - T_{-1}(\xi)\big) f(t-\xi, u(t-\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ pode-se escolher $a > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que se $s \le \delta_1$ então

$$\begin{gathered} \left\| \int_0^s T_{-1}(\xi) f(t+s-\xi, u(t+s-\xi)) d\xi + \int_a^\infty \big(T_{-1}(\xi+s) - T_{-1}(\xi)\big) f(t-\xi, u(t-\xi)) d\xi \right\| \\ \le C \int_0^s e^{\mu\xi} \Omega(rh(t+s-\xi)) d\xi + C \int_a^\infty e^{\mu(\xi+s)} \Omega(rh(t-\xi)) d\xi \\ + C \int_a^\infty e^{\mu\xi} \Omega(rh(t-\xi)) d\xi \le \frac{\epsilon}{2}. \end{gathered}$$

Além disso, como o conjunto $\{f(t-\xi, u(t-\xi)) : 0 \le \xi \le a, u \in B_r(C_h(X_0))\}$ é relativamente compacto e $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo, segue-se que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|\big(T_{-1}(\xi+s) - T_{-1}(\xi)\big) f(t-\xi, u(t-\xi))\| \le \frac{\epsilon}{2a}$$

para $s \le \delta_2$. Segue-se portanto que para $s \le \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$\|v(t+s) - v(t)\| \le \epsilon$$

independente de $u \in B_r(C_h(X_0))$, isto é, o conjunto V é equicontínuo. Finalmente, para todo $v(t) \in V(t)$ vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{v(t)}{h(t)} &\le \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^t \|T_{-1}(t-s) f(s, u(s))\| ds \\ &\le \frac{C}{h(t)} \int_{-\infty}^t e^{\mu(t-s)} \Omega(rh(s)) ds. \end{aligned}$$

Pela condição (a) concluímos que $\lim_{|t|\to\infty} \frac{v(t)}{h(t)} = 0$ e essa convergência independe de $u \in B_r(C_h(X_0))$. Logo, como consequência do Lema 1.15, o conjunto V é relativamente compacto em $C_h(X_0)$ donde segue-se que $\mathcal{F} : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$ é completamente contínuo.

Suponha que $u^\lambda(\cdot)$ é uma solução da equação $u^\lambda(\cdot) = \lambda\mathcal{F}(u^\lambda(\cdot))$ para algum $\lambda \in (0,1)$. Como

$$
\begin{aligned}
\|u^\lambda(t)\| &= \lambda\left\|\int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s,u^\lambda(s))ds\right\| \\
&\leq C\int_{-\infty}^{t} e^{-\mu(t-s)}\Omega(\|u^\lambda\|_h h(s))ds \\
&\leq \beta(\|u^\lambda\|_h)h(t)
\end{aligned}
$$

temos que $\frac{\|u^\lambda\|_h}{\beta(\|u^\lambda\|_h)} \leq 1$. Pela condição (c) segue-se que o conjunto

$$\{u^\lambda : u^\lambda = \lambda\mathcal{F}(u^\lambda), \lambda \in (0,1)\}$$

é limitado. Pelos Lemas 1.3 e 3.1 segue-se que $AA(X_0)$ é invariante por $\mathcal{F}$ e consequentemente podemos considerar $\mathcal{F} : \overline{AA(X_0)} \to \overline{AA(X_0)}$[1]. Pela Alternativa de Leray-Schauder, Teorema 1.3, segue-se que $\mathcal{F}$ possui um ponto fixo $u \in \overline{AA(X_0)}$. Considere uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset AA(X_0)$ tal que $u_n \to u$ em $C_h(X_0)$. Dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de $\delta > 0$ tal que se $\|v-u\|_h \leq \delta$ então

$$C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

Ademais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|u_n - u\|_h \leq \delta$. Logo, para todos $t \in \mathbb{R}$ e $n \geq n_0$ temos

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u_n(t) - \mathcal{F}u(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\big)\|ds \\
&\leq C\int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon,
\end{aligned}
$$

implicando que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{F}u_n(t) - \mathcal{F}u(t)\| \leq \epsilon,$$

isto é, $\mathcal{F}u_n \to \mathcal{F}u$ uniformemente. Portanto $u \in AA(X_0)$ e a demonstração está finalizada. ■

[1] Note que o fecho do conjunto $AA(X_0)$ está sendo considerado com relação a norma $\|\cdot\|_h$ em $C_h(X_0)$.

Sob hipóteses semelhantes as do Teorema 3.4 podemos garantir existência de soluções brandas compactas quase automórficas para a equação (3.1). O seguinte resultado é uma consequência da demonstração do teorema anterior.

Teorema 3.5 Seja $f \in AA_c(X_0, X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $r \geq 0$, $\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)} \Omega(rh(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u, v \in C_h(X_0)$ e $\|u - v\|_h \leq \delta$ então

$$C \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

(c) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(r) := C \left\| \int_{-\infty}^{\cdot} e^{\mu(\cdot-s)} \Omega(rh(s))ds \right\|_h, \quad \forall\, r \geq 0;$$

(d) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, and $r > 0$ o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0,\ \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

Então a equação (3.1) possui uma solução branda compacta quase automórfica.

Demonstração: De fato, defina o operador $\mathcal{F} : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$ por (3.2). A luz da demonstração do Teorema 3.4 segue-se que $\mathcal{F}$ está bem definido e possui possui um único ponto fixo $u \in C_h(X_0)$. Em contrapartida, os Lemas 1.2 e 3.2 garantem que $\mathcal{F}(AA_c(X_0)) \subset AA_c(X_0)$. Novamente, como na demonstração do teorema anterior segue-se que $u \in AA_c(X_0)$ e portanto a equação (3.1) possui ao menos uma solução branda compacta quase automórfica. ∎

3.2.2 *Soluções brandas pseudo quase automórficas e pseudo compactas quase automórficas*

Nesta subseção estamos interessados na existência e unicidade de soluções brandas para a equação semilinear (3.1) mais gerais do que as quase automórficas ou compactas quase automórficas. De fato, buscaremos condições suficientes para assegurar que existam soluções pseudo quase automórficas e pseudo compactas quase automórficas para a equação (3.1). As demonstrações desta subseção são demasiadas semelhantes àquelas feitas na subseção anterior. Por este motivo e com o intuito de que o texto não se torne enfadonho faremos apenas um esboço das demonstrações.

Lema 3.3 Sejam $f \in PAA(X)$ e $\mathfrak{F}f$ a função definida por

$$\mathfrak{F}f := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds.$$

Então $\mathfrak{F}f \in PAA(X_0)$.

Teorema 3.6 Seja $f \in PAA(X_0; X)$ e suponha que existe uma função contínua e limitada $L : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e para $t \in \mathbb{R}$. Se $C\|L\|_\infty < -\mu$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda pseudo quase automórfica.

Demonstração: De fato, defina o operador $\mathfrak{F} : PAA(X_0) \to PAA(X_0)$ como em (3.2). Segue-se dos Lemas ?? e 3.1 que $\mathfrak{F}$ está bem definido. Se $u, v \in PAA(X_0)$ pode-se mostrar de forma semelhante ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.1 que

$$\|\mathfrak{F}u - \mathfrak{F}v\|_\infty \leq \frac{C\|L\|_\infty}{-\mu}\|u-v\|_\infty.$$

Portanto, $\mathfrak{F}$ é uma contração e o resultado é consequência do teorema do ponto fixo de Banach. ∎

Corolário 3.2 Seja $f \in PAA(X_0; X)$ e suponha que existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e para $t \in \mathbb{R}$. Se $CL < -\mu$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda pseudo quase automórfica.

Lema 3.4 Sejam $f \in PAA_c(X)$ e $\mathfrak{F}f$ a função definida por

$$\mathfrak{F}f := \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t-s)f(s)ds.$$

Então $\mathfrak{F}f \in PAA_c(X_0)$.

Teorema 3.7 Seja $f \in PAA_c(X_0; X)$ e suponha que existe uma função contínua, limitada e integrável $L : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Então a equação (3.1) possui uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ o operador definido em (3.2). Pelos lemas 1.9 e 3.4 segue-se que $\mathcal{F} : PAA_c(X_0) \to PAA_c(X_0)$ está bem definido. Além disso, para $u, v \in PAA_c(X_0)$ tem-se que para $n \in \mathbb{N}$

$$\|(\mathcal{F}^n u)(t) - (\mathcal{F}^n v)(t)\| \leq \frac{(C\|L\|_{L^1})^n}{n!}\|u - v\|_\infty.$$

Mas, $\frac{(C\|L\|_{L^1})^n}{n!} < 1$ para n suficientemente grande. Logo, pelo teorema do ponto fixo para iterados segue-se que existe um único $u \in PAA_c(X_0)$ tal que $\mathcal{F}u = u$ e portanto existe uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica para a equação (3.1). ∎

Observe que o resultado anterior não cobre o caso em que a não linearidade f satisfaz uma condição de Lipschitz com constante $L > 0$. Para essa situação temos o seguinte resultado.

Teorema 3.8 Seja $f \in PAA_c(X_0; X)$ e suponha que existe uma função continua e limitada $L : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Seja $\|L\|_M = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} L(s)ds$. Se $\frac{C\|L\|_M}{1-e^{-\mu}} < 1$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F} : PAA_c(X_0) \to PAA_c(X_0)$ o operador definido na demonstração do Teorema 3.2. Para quaisquer $u, v \in PAA_c(X_0)$ segue-se que

$$\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| \leq \frac{C\|L\|_M}{1 - e^{-\mu}}\|u - v\|_\infty.$$

Portanto, $\mathcal{F}$ é uma $\frac{C\|L\|_M}{1-e^{-\mu}}$-contração. Pelo teorema do ponto fixo de Banach segue-se que existe uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica. ∎

Corolário 3.3 Seja $f \in PAA_c(X_0; X)$e suponha que existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $CL < -\mu$ então a equação (3.1) possui uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica.

Nos próximos resultados utilizaremos a Alternativa de Leray-Schauder (Teorema 1.3) para garantir existência de soluções brandas para a equação semilinear (3.1).

TEOREMA 3.9 Seja $f \in PAA(X_0; X)$ uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\|f(t, x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $r \geq 0$, $\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\Omega(rh(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u, v \in C_h(X_0)$ e $\|u - v\|_h \leq \delta$ então

$$C \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)}\|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

(c) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(r) := C \left\| \int_{-\infty}^{\cdot} e^{\mu(\cdot-s)}\Omega(rh(s))ds \right\|_h, \quad \forall\, r \geq 0;$$

(d) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, and $r > 0$ o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0,\ \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

Então a equação (3.1) possui uma solução branda pseudo quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F} : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$ o operador definido por

$$\mathcal{F}u(t) = \int_{-\infty}^{t} T_{-1}(t - s)f(s, u(s))ds.$$

Pela condição (a) segue-se que $\mathcal{F}$ está bem definido. A condição (b) assegura que $\mathcal{F}$ é contínuo. De forma análoga à demonstração do Teorema 3.4 segue-se que $\mathcal{F}$ é completamente contínuo. Pela condição (c) segue-se que o conjunto

$$\{u^\lambda : u^\lambda = \lambda\mathcal{F}(u^\lambda), \lambda \in (0, 1)\}$$

é limitado. Pelos Lemas ?? e 3.3 segue-se que $\mathcal{F}(PAA(X_0)) \subset PAA(X_0)$ e consequentemente podemos considerar $\mathcal{F} : \overline{PAA(X_0)} \to \overline{PAA(X_0)}$. Pela Alternativa de Leray-Schauder, Teorema 1.3, segue-se que $\mathcal{F}$ possui um ponto fixo $u \in \overline{PAA(X_0)}$. Considere uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset PAA(X_0)$ tal que $u_n \to u$ em $C_h(X_0)$. Então $\mathcal{F}u_n \to \mathcal{F}u$ uniformemente e portanto $u \in PAA(X_0)$. Logo existe uma solução branda pseudo quase automórfica para a equação (3.1). ■

Teorema 3.10 Seja $f \in PAA_c(X_0; X)$ uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$ e $t \in \mathbb{R}$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $r \geq 0$, $\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)} \Omega(rh(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u, v \in C_h(X_0)$ e $\|u - v\|_h \leq \delta$ então

$$C \int_{-\infty}^{t} e^{\mu(t-s)} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\| ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

(c) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(r) := C \left\| \int_{-\infty}^{\cdot} e^{\mu(\cdot-s)} \Omega(rh(s))ds \right\|_h, \qquad \forall\, r \geq 0;$$

(d) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, and $r > 0$ o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0,\ \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

Então a equação (3.1) possui uma solução branda pseudo compacta quase automórfica.

Demonstração: De fato, defina o operador $\mathcal{F} : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$ por 3.2. A luz da demonstração do Teorema 3.10 segue-se que $\mathcal{F}$ está bem definido e possui possui um único ponto fixo $u \in C_h(X_0)$. Em contrapartida, os Lema 1.9 e 3.4 garantem que $\mathcal{F}(PAA_c(X_0)) \subset PAA_c(X_0)$. Novamente, como na demonstração do teorema anterior segue-se que $u \in PAA_c(X_0)$ e portanto a equação 3.1 possui ao menos uma solução branda compacta quase automórfica. ■

3.2.3 *Soluções brandas assintoticamente quase automórficas e assintoticamente compactas quase automórficas*

Nesta subseção estamos interessados em estudar o comportamento assintótico das soluções brandas da equação semilinear de primeira ordem descrita sob a forma

$$u'(t) = Au(t) + f(t, u(t)), \quad t \geq 0, \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0, \tag{3.6}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear ilimitado de Hille-Yosida de tipo (C, μ) com $C \geq 1$, $\mu < 0$ e cujo domínio $D(A)$ está contido num espaço de Banach X. Novamente não faremos suposições a respeito da densidade de $D(A)$. Recordamos que uma solução branda da equação (3.5)-(3.6) é uma função contínua $u : [0,\infty) \to X_0$ que satisfaz a equação integral

$$u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Lema 3.5 Sejam $f \in AAA(X)$ e $\mathcal{F}f$ a função definida por

$$\mathcal{F}f := T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s)ds.$$

Então $\mathcal{F}f \in AAA(X_0)$.

Teorema 3.11 Seja $f : [0,\infty) \times X_0 \to X$ uma função assintoticamente quase automórfica em $t \geq 0$ para cada $x \in X_0$. Suponha que existe uma função contínua e limitada $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e para $t \geq 0$. Se $C\|L\|_\infty < -\mu$ então a equação (3.5)-(3.6) possui uma única solução branda assintoticamente quase automórfica.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{F} : AAA(X_0) \to AAA(X_0)$ pela regra

$$\mathcal{F}u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds \tag{3.7}$$

Ora, como

$$\lim_{t\to\infty} \|T_{-1}(t)u_0\| \leq \lim_{t\to\infty} Ce^{\mu t}\|u_0\| = 0, \tag{3.8}$$

segue-se dos lemas 1.6 e 3.5 que $\mathcal{F}$ está bem definido. Ademais, se $u, v \in AAA(X_0)$ segue-se que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_0^t Ce^{\mu(t-s)}L(t)\|u(s)-v(s)\|ds \\
&\leq C\|L\|_\infty \left(\int_0^\infty e^{\mu s}ds\right)\|u-v\|_\infty \\
&\leq \frac{C\|L\|_\infty}{-\mu}\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Então,

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_\infty \leq \frac{C\|L\|_\infty}{-\mu}\|u-v\|_\infty$$

donde segue-se que $\mathcal{F}$ é uma contração. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Banach segue-se que existe uma única solução branda assintoticamente quase automórfica para a equação (3.5)-(3.6). ∎

Corolário 3.4 Seja $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ uma função assintoticamente quase automórfica em $t \geq 0$ para cada $x \in X_0$. Suponha que existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e para $t \in [0, \infty)$. Se $CL < -\mu$ então a equação (3.5)-(3.6) possui uma única solução branda assintoticamente quase automórfica.

Lema 3.6 Sejam $f \in AAA_c(X)$ e $\mathcal{F}f$ a função definida por

$$\mathcal{F}f := T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s)ds.$$

Então $\mathcal{F}f \in AAA_c(X_0)$.

Teorema 3.12 Seja $f \in AAA_c(X_0; X)$ e suponha que existe uma função contínua e integrável $L : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \geq 0$. Então a equação (3.5)-(3.6) possui uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ o operador definido em (3.7). Por (3.8) e pelos lemas 1.5 e 3.6 segue-se que $\mathcal{F}(AAA_c(X_0)) \subset AAA_c(X_0)$. Isto é, $\mathcal{F} : AAA_c(X_0) \to AAA_c(X_0)$ é um operador bem definido. Além disso, para $u, v \in AAA_c(X_0)$ tem-se que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\|\|f(s,u(s)) - f(s,v(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t Ce^{\mu(t-s)}L(s)ds\|u - v\|_\infty \\
&\leq C\int_0^t L(s)ds\|u - v\|_\infty \\
&\leq C\|L\|_{L^1}\|u - v\|_\infty;
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\mathcal{F}^2u\right)(t)-\left(\mathcal{F}^2v\right)(t)\right\| &\leq C^2\left(\int_0^t L(s)\left(\int_0^s L(r)dr\right)ds\right)\|u-v\|_\infty\\ &\leq \frac{C^2}{2}\left(\int_0^t L(r)dr\right)^2\|u-v\|_\infty\\ &\leq \frac{\left(C\|L\|_{L^1}\right)^2}{2}\|u-v\|_\infty.\end{aligned}$$

Procedendo com este argumento obtemos em geral que

$$\|\left(\mathcal{F}^n u\right)(t)-\left(\mathcal{F}^n v\right)(t)\| \leq \frac{\left(C\|L\|_{L^1}\right)^n}{n!}\|u-v\|_\infty.$$

Mas, para n suficientemente grande $\frac{\left(C\|L\|_{L^1}\right)^n}{n!}<1$. Logo, pelo teorema do ponto fixo para iterados segue-se que existe um único $u \in AAA_c(X_0)$ tal que $\mathcal{F}u=u$. ■

OBSERVAÇÃO 3.2 Naturalmente, um resultado análogo ao do teorema anterior é válido para assegurar existência de solução assintoticamente quase automórfica para a equação 3.5.

TEOREMA 3.13 Seja $f \in AAA_c(X_0;X)$ e suponha que existe uma função continua e limitada $L:[0,\infty)\to[0,\infty)$ tal que

$$\|f(t,x)-f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|,$$

para todos $x,y \in X_0$ e $t \geq 0$. Se $C\|L\|_\infty < -\mu$ então a equação (3.5)-(3.6) possui uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F}: AAA_c(X_0)\to AAA_c(X_0)$ o operador definido na demonstração do Teorema 3.2. Para quaisquer $u,v \in AAA_c(X_0)$ segue-se que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}u(t)-\mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s))-f(s,v(s))\big)\|ds\\ &\leq \int_0^t Ce^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s))-f(s,v(s))\|ds\\ &\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}L(s)\|u(s)-v(s)\|ds\\ &\leq \frac{C\|L\|_\infty}{-\mu}\|u-v\|_\infty.\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{F}$ é uma $\frac{C\|L\|_M}{-\mu}$-contração e o resultado é consequência do teorema do ponto fixo de Banach. ∎

COROLÁRIO 3.5 Seja $f \in AAA_c(X_0; X)$e suponha que existe uma constante $L \geq 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x - y\|$$

para todos $x, y \in X_0$ e $t \in [0, \infty)$. Se $CL < -\mu$ então a equação (3.5)-(3.6) possui uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Demonstração: Considere o operador $\mathcal{F} : AAA_c(X_0) \to AAA_c(X_0)$ como na demonstração do Teorema 3.12. De forma semelhante à demonstração do Teorema 3.11 podemos mostrar que $\mathcal{F}$ é uma $\left(\frac{CL}{-\mu}\right)$-contração. Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Banach, $\mathcal{F}$ possui um único ponto fixo em $AAA_c(X_0)$. ∎

Passaremos agora ao estudo do comportamento assintótico das soluções da equação (3.5)-(3.6) quando a não linearidade é uma função mais geral do que as do tipo Lipschitz.

TEOREMA 3.14 Seja $f \in AAA(X_0; X)$ uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$ e $t \geq 0$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $\nu \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h^*(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\nu h^*(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_{h^*}(X_0)$, com $\|v - u\|_{h^*} \leq \delta$, tem-se que

$$C \int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\|ds \leq \epsilon,$$

para todo $t \in [0, \infty)$;

(c) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(\nu) := \left\| \|T_{-1}(\cdot)u_0\| + C \int_0^{\cdot} e^{\mu(\cdot - s)}\Omega(\nu h^*(s))ds \right\|_{h^*}.$$

(d) Para todos $a, b \in [0, \infty)$, $a \leq b$, e $r > 0$, o conjunto

$$\{f(s, h^*(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0, \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X;

Então a equação (3.5)-(3.6) possui uma solução branda assintoticamente quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{F} : C_{h^*}(X_0) \to C_{h^*}(X_0)$ o operador definido por

$$\mathcal{F}u(t) = T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u(s))ds.$$

Observe que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}u(t)\| &\leq \|T_{-1}(t)u_0\| + \int_0^t \|T_{-1}(t-s)f(s,u(s))\|ds \leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s))\|ds \\ &\leq \|T_{-1}(t)\|\|u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u(s)\|)ds \\ &\leq C\|u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u\|_{h^*}h^*(s))ds.\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|\mathcal{F}u(t)\|}{h^*(t)} \leq \frac{C\|u_0\|}{h^*(t)} + \frac{C}{h^*(t)}\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u\|_{h^*}h^*(s))ds.$$

Pela condição (a) segue-se que $\mathcal{F}$ está bem definido. Além disso, se $u, v \in C_{h^*}(X_0)$ então

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\ &\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds.\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{F}u(t) - \mathcal{F}v(t)\| \leq \epsilon$$

para todos $u, v \in C_{h^*}(X_0)$ tais que $\|u - v\|_{h^*} \leq \delta$. Como consequência, para tais u e v

$$\|\mathcal{F}u - \mathcal{F}v\|_{h^*} \leq \epsilon$$

donde segue-se que $\mathcal{F}$ é contínuo. O objetivo agora é mostrar que $\mathcal{F}$ é completamente contínuo. Para isso, sejam $B_r\big(C_{h^*}(X_0)\big)$ a bola de raio $r > 0$ centrada em $0 \in C_{h^*}(X_0)$, $V = \mathcal{F}\big(B_r\big(C_{h^*}(X_0)\big)\big)$ e $v = \mathcal{F}u \in V$. No que se segue utilizaremos o Lema 1.16 para mostrar que V é relativamente compacto. Afirmamos inicialmente que o conjunto $V(t)$ é relativamente compacto para cada $t \geq 0$. De fato, seja $v(t) \in V(t)$. Pela condição (a) segue-se que a função $t \to e^{-\mu s}\Omega(rh^*(t-s))$ é integrável sobre $[0,\infty)$. Logo, dado $\epsilon > 0$ pode-se escolher um $a \geq 0$ de modo que $C\int_a^\infty e^{\mu s}\Omega(rh^*(t-s))ds \leq \epsilon$. Portanto,

$$\left\|\int_a^\infty T_{-1}(s)f(t-s,u(t-s))ds\right\| \leq C\int_a^\infty e^{\mu s}\Omega(rh^*(t-s))ds \leq \epsilon.$$

Escrevendo

$$v(t)=T_{-1}(t)u_0+\int_0^a T_{-1}(s)f(t-s,u(t-s))ds+\int_a^\infty T_{-1}(s)f(t-s,u(t-s))ds$$

obtemos então que

$$v(t)\in T_{-1}(t)u_0+\overline{aco(\{T_{-1}(s)f(\xi,h^*(\xi)x):0\leq s\leq a,t-s\leq\xi\leq t,\|x\|\leq r\})}+B_\epsilon(X_0)$$

onde $co(K)$ representa o fecho convexo do conjunto K e $B_\epsilon(X_0)$ é a bola de raio ϵ e centro em $0\in X_0$. Usando o fato de que $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínuo e a condição (d) podemos garantir que o conjunto $K=\{T_{-1}(s)f(\xi,h^*(\xi)x):0\leq s\leq a,t-s\leq\xi\leq t,\|x\|\leq r\}$ é relativamente compacto o que implica que $\overline{co(K)}$ também o é. Como $v(t)\in V(t)$ é arbitrário segue-se que $V(t)\subset\{T_{-1}(t)u_0\}+\overline{co(K)}+B_\epsilon(X_0)$, donde concluímos a afirmação. Agora vamos mostrar que V é equicontínuo. Ora, a seguinte decomposição é válida

$$\begin{aligned}v(t+s)-v(t) &= \big(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t)\big)u_0+\int_t^{t+s}T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi\\ &+ \int_0^t\big(T_{-1}(\xi+s)-T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi,u(t-\xi))d\xi.\end{aligned}$$

Dado $\epsilon>0$, podemos escolher $\delta_1>0$ tal que

$$\|\int_t^{t+s}T_{-1}(t+s-\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi\|\leq C\int_t^{t+s}e^{\mu(t+s-\xi)}\Omega(rh(\xi))d\xi\leq\epsilon/3,$$

para $s\leq\delta_1$. Além disso, como o conjunto $\{f(t-\xi,u(t-\xi)):0\leq\xi\leq t,u\in B_r(C_h(X_0))\}$ é relativamente compacto e $T_{-1}(\cdot)$ é fortemente contínua, podemos escolher $\delta_2>0$ e $\delta_3>0$ tais que

$$\|\big(T_{-1}(t+s)-T_{-1}(t)\big)u_0\|\leq\epsilon/3,\quad\forall\, s\leq\delta_2$$

e

$$\|\big(T_{-1}(\xi+s)-T_{-1}(\xi)\big)f(t-\xi,u(t-\xi))\|\leq\frac{\epsilon}{3(t+1)},\quad\forall\, s\leq\delta_3.$$

Combinando estas estimativas podemos garantir que $\|v(t+s)-v(t)\|\leq\varepsilon$, para $s\leq\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ e independente de $u\in B_r(C_h(X_0))$. Finalmente, para todo $v(t)\in V(t)$ vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\frac{v(t)}{h^*(t)} &\leq \frac{\|T_{-1}(t)u_0\|}{h^*(t)}+\frac{1}{h^*(t)}\int_0^t\|T_{-1}(t-s)f(s,u(s))\|ds\\ &\leq \frac{C\|u_0\|}{h^*(t)}+\frac{C}{h^*(t)}\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(rh^*(s))ds.\end{aligned}$$

Pela condição (a) concluímos que $\lim_{|t|\to\infty} \frac{v(t)}{h^*(t)} = 0$ e essa convergência independe de $u \in B_r(C_{h^*}(X_0))$. Logo, como consequência do Lema 1.16, o conjunto V é relativamente compacto em $C_{h^*}(X_0)$ donde segue-se que $\mathcal{F} : C_{h^*}(X_0) \to C_{h^*}(X_0)$ é completamente contínuo.

Suponha que $u^\lambda(\cdot)$ é uma solução da equação $u^\lambda(\cdot) = \lambda\mathcal{F}(u^\lambda(\cdot))$ para algum $\lambda \in (0,1)$. Como

$$\begin{aligned}
\|u^\lambda(t)\| &= \lambda \left\| T_{-1}(t)u_0 + \int_0^t T_{-1}(t-s)f(s,u^\lambda(s))ds \right\| \\
&\leq \left\| \|T_{-1}(t)u_0\| + C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\Omega(\|u^\lambda\|_{h^*}h^*(s))ds \right\| \\
&\leq \beta(\|u^\lambda\|_{h^*})h^*(t)
\end{aligned}$$

temos que $\frac{\|u^\lambda\|_{h^*}}{\beta(\|u^\lambda\|_{h^*})} \leq 1$. Pela condição (c) segue-se que o conjunto

$$\{u^\lambda : u^\lambda = \lambda\mathcal{F}(u^\lambda), \lambda \in (0,1)\}$$

é limitado. Pelos lemas 1.6 e 3.5 segue-se que $\mathcal{F}(AAA(X_0)) \subset AAA(X_0)$ e consequentemente podemos considerar $\mathcal{F} : \overline{AAA(X_0)} \to \overline{AAA(X_0)}$[2]. Pela Alternativa de Leray-Schauder, Teorema 1.3, segue-se que $\mathcal{F}$ possui um ponto fixo $u \in \overline{AAA(X_0)}$. Considere uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset AAA(X_0)$ tal que $u_n \to u$ em $C_{h^*}(X_0)$. Dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de $\delta > 0$ tal que se $\|v-u\|_{h^*} \leq \delta$ então

$$C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0;$$

Ademais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|u_n - u\|_{h^*} \leq \delta$. Logo, para todos $t \geq 0$ e $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}u_n(t) - \mathcal{F}u(t)\| &\leq \int_0^t \|T_{-1}(t-s)\big(f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\big)\|ds \\
&\leq C\int_0^t e^{\mu(t-s)}\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\sup_{t\geq 0}\|\mathcal{F}u_n(t) - \mathcal{F}u(t)\| \leq \epsilon,$$

isto é, $\mathcal{F}u_n \to \mathcal{F}u$ uniformemente. Portanto $u \in AAA(X_0)$ e a demonstração está finalizada.■

O seguinte resultado é um corolário da demonstração do teorema anterior.

[2] Como no Teorema 3.4 , note que o fecho do conjunto $AAA(X_0)$ está sendo considerado com relação a $C_{h^*}(X_0)$.

Teorema 3.15 Seja $f \in AAA_c(X_0; X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ tal que $\|f(t, x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X_0$ e $t \geq 0$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $\nu \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h^*(t)} \int_0^t e^{\mu(t-s)} \Omega(\nu h^*(s)) ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todos $u, v \in C_{h^*}(X_0)$, com $\|v - u\|_{h^*} \leq \delta$, tem-se que
$$C \int_0^t e^{\mu(t-s)} \|f(s, v(s)) - f(s, u(s))\| ds \leq \epsilon,$$
para todo $t \in [0, \infty)$;

(c) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde
$$\beta(\nu) := \left\| \|T_{-1}(\cdot)u_0\| + C \int_0^{\cdot} e^{\mu(\cdot - s)} \Omega(\nu h^*(s)) ds \right\|_{h^*}.$$

(d) Para todos $a, b \in [0, \infty)$, $a \leq b$, e $r > 0$, o conjunto
$$\{f(s, h^*(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X_0, \|x\| \leq r\}$$
é relativamente compacto em X;

Então a equação (3.5)-(3.6) possui uma solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Demonstração: De fato, defina o operador $\mathcal{F} : C_h(X_0) \to C_h(X_0)$ por 3.2. Como $f : [0, \infty) \times X_0 \to X$ satisfaz as condições dos lema 1.5 e 3.6 segue-se que $\mathcal{F}(AAA_c(X_0)) \subset AAA_c(X_0)$. A luz da demonstração do Teorema 3.14 segue-se que $\mathcal{F}$ está bem definido e $\mathcal{F}$ possui um único ponto fixo $u \in \overline{AAA_c(X_0)}$. Novamente, como na demonstração do teorema anterior segue-se que $u \in AAA_c(X_0)$ e portanto a equação (3.5)-(3.6) possui ao menos uma solução branda assintoticamente compacta quase automórfica. ∎

3.3 Equações integrais com retardo infinito

3.3.1 *Soluções brandas pseudo compactas quase automórficas*

Nesta subseção estabeleceremos condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções pseudo compactas quase automórficas da seguinte equação integral linear não homogênea
$$u(t) = \int_{-\infty}^t a(t-s)\big[Au(s) + f(s, u(s))\big] ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.9}$$

onde $a \in L^1_{loc}([0,\infty))$, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ sobre um espaço de Banach complexo X e $f : \mathbb{R} \times X \to X$ é uma função dada. Utilizaremos a seguinte condição de integrabilidade

(**INT**) Existe $\phi \in L^1([0,\infty))$ tal que $\|S(t)\| \leq \phi(t)$ para todo $t \in [0,\infty)$.

Para uma grande discussão sobre a condição (**INT**) e aplicações da equação (3.9) na Física Matemática sugerimos ao leitor a monografia de J. Prüss [167].

Nos próximos dois resultados consideramos a versão linear da equação (3.9), isto é, consideramos $f : \mathbb{R} \to X$, e asseguramos existência de solução pseudo compacta quase automórfica.

Teorema 3.16 Seja $a \in L^1([0,\infty))$. Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ satisfazendo a condição (**INT**). Se $f : \mathbb{R} \to D(A)$ é uma função pseudo compacta quase automórfica, então a única solução contínua e limitada da equação (3.9) é pseudo compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $u(t)$ a função dada por

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $f : \mathbb{R} \to D(A)$, segue-se da Proposição 1.2 de [167] que $u : \mathbb{R} \to D(A)$. O Lema 3.7 assegura que $u \in PAA_c(D(A))$. Pelo item (b) da Proposição 2.2 em [106] e pelo teorema de Fubini obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} a(t-s)Au(s)ds &= \int_{-\infty}^{t} a(t-s)A\int_{-\infty}^{s} S(s-\tau)f(\tau)d\tau ds \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} a(t-s)AS(s-\tau)f(\tau)d\tau ds \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_{\tau}^{t} a(t-s)AS(s-\tau)f(\tau)dsd\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t}\int_{0}^{t-\tau} a(t-\tau-p)AS(p)dpf(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} (S(t-\tau)f(\tau) - a(t-\tau)f(\tau))d\tau \\
&= u(t) - \int_{-\infty}^{t} a(t-\tau)f(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

o que assegura que $u(\cdot)$ é solução da equação (3.9). ∎

Como consequência obtemos a seguinte versão escalar.

Corolário 3.6 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função pseudo compacta quase automórfica, $a \in L^1([0, \infty))$, e considere $\rho > 0$ um número real. Se a solução $S_\rho(t)$ da equação escalar

$$S_\rho(t) = a(t) - \rho \int_0^t a(t-s) S_\rho(s) ds, \tag{3.10}$$

satisfaz $|S_\rho(t)| \le \phi_\rho(t)$, com $\phi_\rho \in L^1([0, \infty))$, então a equação

$$u(t) = \int_{-\infty}^t a(t-s)[-\rho u(s) + f(s)] ds, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

possui uma única solução pseudo compacta quase automórfica.

Observação 3.3 Se $a \in L^1(\mathbb{R}_+)$ é positiva, não crescente e log-convexa então existe $S_\rho \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}_+)$ tal que

$$S_\rho(t) = a(t) - \rho \int_0^t a(t-s) S_\rho(s) ds$$

e $|S_\rho(t)| \le \phi_\rho(t)$, com $\phi_\rho \in L^1([0, \infty))$. Para maiores detalhes sobre esta observação nos referimos a monografia [167].

Observação 3.4 O Teorema 3.16 e seu corolário são generalizações naturais do Teorema 3.2 e do Corolário 3.4 em [106], respectivamente.

Exemplo 3.2 Considere a função $a(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t}$, onde $\beta > 1$ e $1 < \alpha < 2$. Seja $E_{\alpha,\alpha}$ a função generalizada de Mittag-Leffler (ver por exemplo [94]), a qual é definida por

$$E_{\alpha,\beta}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \ z \in \mathbb{C}.$$

Então pode-se mostrar que

$$S_\rho(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\rho t) e^{-\beta t}$$

é a solução da equação (3.10). Usando a forma explicita de $S_\rho(t) e^{\beta t}$, a qual pode ser encontrada no Corolário 3.7 de [25], segue-se que existe $\phi_\rho \in L^1([0, \infty))$ tal que $|S_\rho(t)| \le \phi_\rho(t)$. Portanto, para toda função g pseudo compacta quase automórfica, podemos concluir que a equação integral fracionária

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-s)} (-\rho u(s) + g(s))\, ds, \ t \in \mathbb{R},$$

possui uma única solução pseudo compacta quase automórfica.

A partir de agora nos concentraremos no estudo da equação integral semilinear (3.9). Relembramos a seguinte definição.

Definição 3.1 Seja A o gerador de uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Uma solução branda sobre $\mathbb{R}$ para a equação (3.9) é um função contínua $u : \mathbb{R} \to X$ que satisfaz a equação integral

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s, u(s))ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

Nos nossos resultados o lema a seguir será de fundamental importância.

Lema 3.7 Seja A o gerador de uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição de integrabilidade (**INT**). Se $f \in PAA_c(X)$ e $w : \mathbb{R} \to X$ é dada por

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s)ds.$$

Então $w \in PAA_c(X)$.

Demonstração: Seja $f = g + \xi$ a decomposição de f, onde $g \in AA_c(X)$ e $\xi \in P_0(X)$. Então podemos escrever

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s)ds + \int_{-\infty}^{t} S(t-s)\xi(s)ds := G(t) + \Xi(t).$$

Pelo Lema 1.2 segue-se que $G \in AA_c(X)$. Resta então mostrar que $\Xi \in P_0(X)$. Para $T > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\|\int_{0}^{\infty} S(s)\xi(t-s)ds\right\| dt &\leq \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\int_{0}^{\infty} \|S(s)\|\|\xi(t-s)\|dsdt \\
&\leq \int_{0}^{\infty} \phi(s)\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\xi(t-s)\|dt\right)ds = \int_{0}^{\infty}\Psi_T(s)ds,
\end{aligned}$$

onde $\Psi_T(s) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\xi(t-s)\|dt$, $s \geq 0$. Como $\Psi_T(s) \to 0$ quando $T \to \infty$. Segue-se do teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\Xi(t)\|dt \to 0$$

quando $T \to \infty$. ■

Teorema 3.17 Seja A o gerador de uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição de integrabilidade (**INT**). Seja $f \in PAA_c(X; X)$ e suponha que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{R}$. Se $L < \|\phi\|_1^{-1}$ então existe uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica para a equação (3.9).

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{G} : PAA_c(X) \to PAA_c(X)$ por

$$(\mathcal{G}u)(t) := \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.13}$$

Pelos lemas 1.9 e 3.7 segue-se que $\mathcal{G}$ está bem definido. Por outro lado, para $u, v \in PAA_c(X)$ temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| &\leq \left\| \int_{-\infty}^{t} S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)ds \right\| \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\| \|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\| ds \\
&\leq L \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\| \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq L \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s) \|u(s) - v(s)\| ds \\
&\leq L \int_{0}^{\infty} \phi(\tau) d\tau \|u - v\|_\infty \\
&\leq L \|\phi\|_1 \|u - v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\mathcal{G}u - \mathcal{G}v\|_\infty \leq L\|\phi\|_1 \|u - v\|_\infty.$$

Logo, $\mathcal{G}$ é uma contração donde segue-se que existe uma única solução branda $u \in PAA_c(X)$ da equação (3.9). ∎

Uma consequência imediata do Teorema 3.17 e da Observação 3.3 é apresentada no próximo resultado.

Corolário 3.7 Seja $\rho > 0$ um número real. Suponha que $a \in L^1([0,\infty))$ é uma função positiva, não crescente e log-convexa e seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função pseudo compacta quase automórfica que satisfaz a condição de Lipschitz

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x - y|,$$

para todos $t, x, y \in \mathbb{R}$ com $L < \|S_\rho\|_1^{-1}$, onde S_ρ é a solução da equação (3.10). Então a equação semilinear

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)[-\rho u(s) + f(s, u(s))]ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

possui uma única solução pseudo compacta quase automórfica.

Exemplo 3.3 Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função pseudo compacta quase automórfica, $\nu \in \mathbb{R}$ e $\beta \geq 1$. Examinaremos a existência e unicidade de soluções pseudo compactas quase automórficas para a equação integral

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{t} \frac{(t-s)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \big[u_{xx}(s,x) + \nu g(s) u(s,x)\big] ds, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in [0,1], \tag{3.14}$$

$$u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pretendemos obter uma formulação abstrata deste problema na forma de uma equação integral do tipo (3.9). Para isso seja $X = L^2[0,1]$ e considere o operador $A : D(A) \subset X \to X$ definido por $Aw(x) = w_{xx}(x)$, onde

$$D(A) = \{w \in X : w_{xx} \in X, w(0) = w(1) = 0\}.$$

Um fato conhecido é que A gera um semigrupo analítico e que $0 \in \rho(A)$. Seja $a(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$, $t > 0$. Então a satisfaz todas condições do Corolário 10.1 da Monografia [167], logo A gera uma família resolvente integral com a propriedade **(INT)**. Defina $f(s,u) = \nu g(s) u$, $u \in X$; então, para todos $u, v \in \mathbb{R}$ temos

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \leq |\nu||g(t)|\|u - v\| \leq |\nu|\|g\|_\infty \|u - v\|.$$

Se $|\nu|$ é pequeno o suficiente então a equação (3.14) possui uma única solução pseudo compacta quase automórfica.

Teorema 3.18 Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ para a qual existe uma função decrescente $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ com $\phi_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \phi(m) < +\infty$. Se $f \in PAA_c(X;X)$ satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, onde $L \in C_b(\mathbb{R})$ é tal que

$$\|L\|_M := \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} L(s) ds < +\infty.$$

Então existe uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica para a equação (3.9) sempre que $\|L\|_M\phi_0 < 1$.

Demonstração: Inicialmente observe que como ϕ é uma função decrescente e $\sum_{m=0}^{\infty}\phi(m) < \infty$ segue-se que $\phi \in L^1([0,\infty))$ e portanto $S(t)$ é integrável. Seja $\mathcal{G}$ o operador definido em (3.13). De forma semelhante a demonstração do Teorema 3.16 segue-se que $\mathcal{G}$ está bem definido. Em contrapartida, se $u, v \in PAA_c(X)$, então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\|\|\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)L(s)\|u(s)-v(s)\|ds \\
&\leq \left(\sum_{m=0}^{\infty}\int_{t-(m+1)}^{t-m}\phi(t-s)L(s)ds\right)\|u-v\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{m=0}^{\infty}\phi(m)\int_{t-(m+1)}^{t-m}L(s)ds\right)\|u-v\|_\infty \\
&\leq \|L\|_M\phi_0\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, F é uma $\|L\|_M\phi_0$-contração donde existe uma única solução pseudo compacta quase automórfica para a equação (3.9). ■

Relembramos que uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é chamada uniformemente limitada se existe uma constante $M > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq M$ para todo $t \geq 0$.

Teorema 3.19 Suponha que A gera uma família resolvente integral uniformemente limitada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**). Seja $f \in PAA_c(X;X)$. Se existe uma função $L \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in \mathbb{R}$. Então existe uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica para a equação (3.9).

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{G} : PAA_c(X) \to PAA_c(X)$ como em (3.13). Sejam

$u, v \in PAA_c(X)$. Temos que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\|\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} ML(s)ds\|u-v\|_\infty \\
&\leq M\int_{-\infty}^{t} L(s)ds\|u-v\|_\infty \\
&\leq M\|L\|_{L^1}\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Em geral temos a estimativa

$$\|\mathcal{G}^n u - \mathcal{G}^n v\|_\infty \leq \frac{(M||L||_1)^n}{n!}\|u-v\|_\infty.$$

Como $\frac{(M||L||_1)^n}{n!} < 1$ para n suficientemente grande segue-se pelo teorema do ponto fixo para iterados que existe uma única solução pseudo compacta quase automórfica para a equação (3.9). ∎

No próximo resultado consideramos o caso onde a não linearidade da equação (3.9) é uma função localmente Lipschitz.

Teorema 3.20 Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**). Seja $f \in PAA_c(X;X)$ e suponha que existe uma função não decrescente $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que para cada número $r > 0$ e para todos $x, y \in X$ tais que $\|x\| \leq r$ e $\|y\| \leq r$ vale a estimativa

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(r)\|x-y\|, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Se existe $R > 0$ tal que

$$\|\phi\|_1 \left(L(R) + \frac{\|f(\cdot,0)\|_\infty}{R}\right) < 1$$

então a equação (3.9) possui uma única solução branda pseudo compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{G}$ o operador definido em (3.13). Por hipótese existe $R > 0$ tal que $RL(R)\|\phi\|_1 + \|\phi\|_1\|f(\cdot,0)\|_\infty \leq R$. Considere a bola fechada

$$B_R = \{u \in PAA_c(X) : \|u\|_\infty \leq R\} \subset PAA_c(X).$$

Ora, se $u \in B_R$ então para todo $t \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t)\| &= \left\|\int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s,u(s))ds\right\| \leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)f(s,u(s))\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\|\|f(s,u(s))-f(s,0)\|ds + \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\|\|f(s,0)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)L(R)\|u(s)\|ds + \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)ds\|f(\cdot,0)\|_{\infty} \\
&\leq RL(R)\|\phi\|_1 + \|\phi\|_1\|f(\cdot,0)\|_{\infty} \leq R.
\end{aligned}
$$

Isto mostra que $\|\mathcal{G}u\|_{\infty} \leq R$ e portanto $\mathcal{G} : B_R \to B_R$ está bem definida. Finalmente, vamos mostrar que $\mathcal{G}$ possui um único ponto fixo em B_R. De fato, se $u, v \in B_R$ então

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\|\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)L(R)\|u(s)-v(s)\|ds \\
&\leq L(R)\|\phi\|_1\|u-v\|_{\infty}.
\end{aligned}
$$

Logo, $\mathcal{G}$ é uma $L(R)\|\phi\|_1$-contração sobre B_R. Pelo teorema do ponto fixo de Banach, existe uma única solução pseudo compcta quase automórfica para a equação (3.9). ■

Para finalizar esta subseção trataremos do problema de perturbações que não são do tipo Lipschitz.

Teorema 3.21 Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**) e seja $f \in PAA_c(X;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X uniformemente para $t \in \mathbb{R}$. Suponha ainda que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$. Se as seguintes condições são satisfeitas

(a) Para cada $r \geq 0$, $\lim_{|t|\to\infty} \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\Omega(rh(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u, v \in C_h(X)$ e $\|u - v\|_h \leq \delta$ então

$$\int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

(c) $\liminf_{\xi \to \infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(r) := \left\| \int_{\infty}^{\cdot} \phi(\cdot - s)\Omega(rh(s))ds \right\|_h, \quad \forall\, r \geq 0;$$

(d) Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, and $r > 0$ o conjunto

$$\{f(s, h(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X,\ \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

Então a equação (3.9) possui uma solução branda pseudo compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{G} : C_h(X) \to C_h(X)$ o operador definido por

$$\mathcal{G}u(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)f(s,u(s))ds.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)f(s,u(s))\|ds \leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\|f(s,u(s))\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\Omega(\|u(s)\|)ds = \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\Omega\left(\frac{h(s)\|u(s)\|}{h(s)}\right)ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\Omega(\|u\|_h h(s))ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|\mathcal{G}u(t)\|}{h(t)} \leq \frac{1}{h(t)} \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\Omega(\|u\|_h h(s))ds.$$

Pela condição (a) segue-se que $\mathcal{G}$ está bem definido. Além disso, se $u, v \in C_h(X_0)$ então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| \leq \epsilon$$

para todos $u, v \in C_h(X_0)$ tais que $\|u - v\|_h \leq \delta$. Como consequência, para tais u e v

$$\|\mathcal{G}u - \mathcal{G}v\|_h \leq \epsilon$$

donde segue-se que $\mathcal{G}$ é contínuo. O objetivo agora é mostrar que $\mathcal{G}$ é completamente contínuo. Para isso, sejam $B_r\big(C_h(X)\big)$ a bola de raio $r > 0$ centrada em $0 \in C_h(X)$, $V = \mathcal{G}\left(B_r\big(C_h(X)\big)\right)$ e $v = \mathcal{G}u \in V$. No que se segue utilizaremos o Lema 1.15 para mostrar que V é relativamente compacto. Afirmamos inicialmente que o conjunto $V(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in \mathbb{R}$. De fato, seja $v(t) \in V(t)$. Pela condição (a) segue-se que a função $s \to \phi(s)\Omega(rh(t - s))$ é integrável sobre $[0, \infty)$. Logo, dado $\epsilon > 0$ pode-se escolher um $a \geq 0$ de modo que $\int_a^\infty \phi(s)\Omega(rh(t - s))ds \leq \epsilon$. Portanto,

$$\left\|\int_a^\infty S(s)f(t - s, u(t - s))ds\right\| \leq \int_a^\infty \phi(s)\Omega(rh(t - s))ds \leq \epsilon.$$

Escrevendo

$$v(t) = \int_0^a S(s)f(t - s, u(t - s))ds + \int_a^\infty S(s)f(t - s, u(t - s))ds$$

obtemos que

$$v(t) \in a\overline{co(\{S(s)f(\xi, h(\xi)x) : 0 \leq s \leq a, t - s \leq \xi \leq t, \|x\| \leq r\})} + B_\epsilon(X)$$

onde $co(K)$ representa o fecho convexo do conjunto K e $B_\epsilon(X)$ é a bola de raio ϵ e centro em $0 \in X$. Usando o fato de que $S(\cdot)$ é fortemente contínuo e a condição (d) podemos garantir que o conjunto $K = \{S(s)f(\xi, h(\xi)x) : 0 \leq s \leq a, t - s \leq \xi \leq t, \|x\| \leq r\}$ é relativamente compacto o que implica que $\overline{co(K)}$ também o é. Como $v(t) \in V(t)$ é arbitrário segue-se que $V(t) \subset \overline{co(K)} + B_\epsilon(X)$, donde concluímos a afirmação. Agora vamos mostrar que V é equicontínuo. Ora, dado $a > 0$ a seguinte decomposição é válida

$$\begin{aligned} v(t + s) - v(t) &= \int_0^s S(\xi)f(t + s - \xi, u(t + s - \xi))d\xi \\ &+ \int_0^a \big(S(\xi + s) - S(\xi)\big)f(t - \xi, u(t - \xi))d\xi \\ &+ \int_a^\infty \big(S(\xi + s) - S(\xi)\big)f(t - \xi, u(t - \xi))d\xi. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ pode-se escolher $a > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que se $s \leq \delta_1$ então

$$\left\|\int_0^s S(\xi)f(t + s - \xi, u(t + s - \xi))d\xi + \int_a^\infty \big(S(\xi + s) - S(\xi)\big)f(t - \xi, u(t - \xi))d\xi\right\|$$

$$\leq \int_0^s \phi(\xi)\Omega(rh(t+s-\xi))d\xi + \int_a^\infty \phi(\xi+s)\Omega(rh(t-\xi))d\xi$$
$$+ \int_a^\infty \phi(\xi)\Omega(rh(t-\xi))d\xi \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Além disso, como o conjunto $\{f(t-\xi, u(t-\xi)) : 0 \leq \xi \leq a, u \in B_r(C_h(X))\}$ é relativamente compacto e $S(\cdot)$ é fortemente contínuo, segue-se que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\|\big(S(\xi+s) - S(\xi)\big)f(t-\xi, u(t-\xi))\| \leq \frac{\epsilon}{2a}$$

para $s \leq \delta_2$. Segue-se portanto que para $s \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$\|v(t+s) - v(t)\| \leq \epsilon$$

independente de $u \in B_r(C_h(X))$, isto é, V é equicontínuo. Finalmente, para todo $v(t) \in V(t)$ vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\frac{v(t)}{h(t)} &\leq \frac{1}{h(t)}\int_{-\infty}^t \|S(t-s)f(s,u(s))\|ds \\ &\leq \frac{1}{h(t)}\int_{-\infty}^t \phi(t-s)\Omega(rh(s))ds.\end{aligned}$$

Pela condição (a) concluímos que $\lim_{|t|\to\infty} \frac{v(t)}{h(t)} = 0$ e essa convergência independe de $u \in B_r(C_h(X))$. Logo, como consequência do Lema 1.15, o conjunto V é relativamente compacto em $C_h(X)$ donde segue-se que $\mathcal{G} : C_h(X) \to C_h(X)$ é completamente contínuo.

Suponha que $u^\lambda(\cdot)$ é uma solução da equação $u^\lambda(\cdot) = \lambda\mathcal{G}(u^\lambda(\cdot))$ para algum $\lambda \in (0,1)$. Como

$$\begin{aligned}\|u^\lambda(t)\| &= \lambda\left\|\int_{-\infty}^t S(t-s)f(s,u^\lambda(s))ds\right\| \\ &\leq \int_{-\infty}^t \phi(t-s)\Omega(\|u^\lambda\|_h h(s))ds \\ &\leq \beta(\|u^\lambda\|_h)h(t)\end{aligned}$$

temos que $\frac{\|u^\lambda\|_h}{\beta(\|u^\lambda\|_h)} \leq 1$. Pela condição (c) segue-se que o conjunto

$$\{u^\lambda : u^\lambda = \lambda\mathcal{G}(u^\lambda), \lambda \in (0,1)\}$$

é limitado. Pelos lemas 1.9 e 3.7 segue-se que $\mathcal{G}(PAA_c(X)) \subset PAA_c(X)$ e consequentemente podemos considerar $\mathcal{G} : \overline{PAA_c(X)} \to \overline{PAA_c(X)}$[3]. Pela Alternativa de Leray-Schauder, Teorema 1.3, segue-se que $\mathcal{G}$ possui um ponto fixo $u \in \overline{PAA_c(X)}$. Considere uma sequência

[3] Note que o fecho do conjunto $PAA_c(X)$ está sendo considerado com relação a $C_h(X)$.

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset PAA_c(X)$ tal que $u_n \to u$ em $C_h(X)$. Dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de $\delta > 0$ tal que se $\|v - u\|_h \leq \delta$ então

$$\int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in \mathbb{R};$$

Ademais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|u_n - u\|_h \leq \delta$. Logo, para todos $t \in \mathbb{R}$ e $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u_n(t) - \mathcal{G}u(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{t} \|S(t-s)\big(f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{t} \phi(t-s)\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon,
\end{aligned}$$

implicando que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|\mathcal{G}u_n(t) - \mathcal{G}u(t)\| \leq \epsilon,$$

isto é, $\mathcal{G}u_n \to \mathcal{G}u$ uniformemente. Portanto $u \in PAA_c(X)$ e a demonstração está finalizada. ■

3.3.2 Soluções brandas assintoticamente compactas quase automórficas

Para finalizar esta seção estudaremos existência e unicidade de soluções assintoticamente compactas quase automórficas da equação integral linear não homogênea

$$u(t) = \int_0^t a(t-s)\big[Au(s) + f(s,u(s))\big]ds, \quad t \geq 0, \tag{3.15}$$

onde $a \in L^1([0,\infty))$, $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador de uma família resolvente integral sobre um espaço de Banach complexo X e $f : [0,\infty) \times X \to X$ é uma função que satisfaz condições convenientes.

Começamos relembrando a definição de solução branda para a equação (3.15).

Definição 3.2 Seja A o gerador de uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Uma função contínua $u : [0,\infty) \to X$ que satisfaz a equação integral

$$u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \ \ \forall\, t \geq 0,$$

é chamada solução branda para a equação (3.15).

Lema 3.8 Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**). Se $f \in AAA_c(X)$ e $\tilde{w} : [0,\infty) \to X$ é dada por

$$\tilde{w}(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Então $\tilde{w} \in AAA_c(X)$.

Demonstração: Se $f = g + \nu$, onde $g \in AA_c(X)$ e $\nu \in C_0([0,\infty), X)$. Então

$$\tilde{w}(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s)ds - \int_{-\infty}^{0} S(t-s)g(s)ds + \int_{0}^{t} S(t-s)\nu(s)ds := G(t) + H(t),$$

onde

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} S(t-s)g(s)ds$$

e

$$H(t) = -\int_{-\infty}^{0} S(t-s)g(s)ds + \int_{0}^{t} S(t-s)\nu(s)ds.$$

Em [106] os autores mostram que $G \in AA_c(X)$. Mostraremos então que $H \in C_0([0,\infty), X)$. Dado $\epsilon > 0$ existe uma constante $L > 0$ tal que $\int_L^\infty \phi(s)ds \leq \epsilon$ and $\|\nu(s)\| \leq \epsilon$ para todo $s \geq L$. Então, para todo $t \geq 2L$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|H(t)\| &\leq \int_{-\infty}^{0} \|S(t-s)\|\|g(s)\|ds + \int_{0}^{t} \|S(t-s)\|\|\nu(s)\|ds \\
&\leq \int_{-\infty}^{0} \phi(t-s)\|g(s)\|ds + \int_{t/2}^{t} \phi(t-s)\|\nu(s)\|ds + \int_{0}^{t/2} \phi(t-s)\|\nu(s)\|ds \\
&\leq \|g\|_\infty \int_{t}^{\infty} \phi(s)ds + \epsilon \int_{0}^{t/2} \phi(s)ds + \|\nu\|_\infty \int_{t/2}^{\infty} \phi(s)ds \\
&\leq (\|g\|_\infty + \|\phi\|_1 + \|\nu\|_\infty)\,\epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{t\to\infty} H(t) = 0$, isto é, $H \in C_0([0,\infty), X)$. ∎

Teorema 3.22 Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**). Seja $f \in AAA_c(X;X)$ e suponha que existe uma função contínua e limitada $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x-y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in [0,\infty)$. Se $\|L\|_\infty < \|\phi\|_1^{-1}$. Então a equação (3.15) possui uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Demonstração: Considere o operador $\mathcal{G} : AAA_c(X) \to AAA_c(X)$ dado pela regra

$$\mathcal{G}u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \quad \forall\, t \geq 0. \tag{3.16}$$

Segue-se dos Lemas 1.5 e 3.8 que $\mathcal{G}$ está bem definido. Além disso, se $u, v \in AAA_c(X)$ então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| &\leq \int_0^t \|S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_0^t \|S(t-s)\|\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \\
&\leq \int_0^t \phi(t-s)L(s)\|u(s) - v(s)\|ds \\
&\leq \int_0^t \phi(t-s)ds\|L\|_\infty\|u-v\|_\infty \\
&\leq \|\phi\|_1\|L\|_\infty\|u-v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathcal{G}u - \mathcal{G}v\|_\infty \leq \|\phi\|_1\|L\|_\infty\|u-v\|_\infty.$$

Segue-se portanto que $\mathcal{G}$ é uma $\|\phi\|_1\|L\|_\infty$-contração e resulta do teorema do ponto fixo de Banach que existe uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica para a equação (3.15). ■

O próximo resultado é uma consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 3.8 Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**). Seja $f \in AAA_c(X;X)$ e suponha que existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \in [0,\infty)$. Se $L < \|\phi\|_1^{-1}$. Então a equação (3.15) possui uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Observação 3.5 Recordamos que uma função $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ é completamente monotônica se $(-1)^n f^{(n)}(s) \geq 0$, para todos $s \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Esse tipo de função é natural em áreas como probabilidade, análise numérica e elasticidade. Suponha que na equação (3.15) o núcleo a é uma função completamente monotônica e que $a(\infty) = \lim_{t\to\infty} a(t) > 0$. Além disso, suponha que o operador A é o gerador de um C_0-semigrupo analítico limitado tal que $0 \in \rho(A)$. Se a não linearidade $f : [0,\infty) \times X \to X$ é uma função assintoticamente compacta quase automórfica que satisfaz a condição de Lipschitz

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L\|x-y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \geq 0$, com $L > 0$ suficientemente pequeno. Então a equação (3.15) possui uma única solução assintoticamente compacta quase automórfica. De fato, pelo Corolário 10.1 da monografia [167] segue-se que as hipóteses sobre o núcleo a e o operador A são suficientes para garantir que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**).

Teorema 3.23 Suponha que A gera uma família resolvente integral uniformemente limitada $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**). Seja $f : [0,\infty)\times X \to X$ uma função assintoticamente compacta quase automórfica. Suponha que existe uma função $L \in C_b([0,\infty)) \cap L^1([0,\infty))$ tal que

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leq L(t)\|x - y\|,$$

para todos $x, y \in X$ e $t \geq 0$. Então a equação (3.15) possui uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Demonstração: Defina o operador $\mathcal{G} : AAA_c(X) \to AAA_c(X)$ por

$$\mathcal{G}u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds, \quad t \geq 0.$$

Os lemas 1.5 e 3.8 garantem que $\mathcal{G}$ está bem definido. Seja $w(t) := e^{-k\int_0^t L(s)ds}$, onde k é uma constante fixa tal que $k > \sup_{t\geq 0}\|S(t)\|$. Defina em $AAA_c(X)$ a seguinte norma $|||\psi||| := \sup_{t\geq 0}\{w(t)\|\psi(t)\|\}$. As hipóteses sobre L garantem que a norma $|||\cdot|||$ é equivalente a norma $\|\cdot\|_\infty$. É suficiente então mostrar que $\mathcal{G}$ é uma contração no espaço de Banach $(AAA_c, |||\cdot|||)$. Para isso, sejam $u, v \in AAA_c(X)$. Temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
w(t)\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}w(t)\| &\leq w(t)\int_0^t \|S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq M\int_0^t w(t)\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \\
&\leq M\int_0^t w(t)L(s)\|u(s) - v(s)\|ds \\
&\leq M\int_0^t w(t)w(s)^{-1}L(s)v(s)\|u(s) - v(s)\|ds \\
&\leq M|||u - v|||\int_0^t w(t)w(s)^{-1}L(s)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{M}{k}|||u-v||| \int_0^t k e^{k\int_t^s L(\tau)d\tau} L(s)ds \\
&= \frac{M}{k}|||u-v||| \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{k\int_t^s L(\tau)d\tau}\right) ds \\
&= \frac{M}{k}[1-e^{-k\int_0^t L(\tau)d\tau}]|||u-v||| \\
&\leq \frac{M}{k}|||u-v|||.
\end{aligned}
$$

Como $M/k < 1$, segue-se que $\mathcal{G}$ é uma contração e portanto existe uma única solução branda assintoticamente compacta quase automórfica para a equação (3.15). ∎

Para finalizar esta subseção trataremos do caso de perturbações não lipschitizianas para a equação (3.15). Observe que a notação empregada na demonstração do próximo resultado é aquela introduzida na Subseção pontofixo.

TEOREMA 3.24 Suponha que A gera uma família resolvente integral $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ que satisfaz a condição (**INT**). Seja $f \in AAA_c(X;X)$ uma função uniformemente contínua sobre conjuntos limitados de X uniformemente para $t \geq 0$. Suponha que existe uma função contínua não decrescente $\Omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)$ para todos $x \in X$ e $t \geq 0$. Se as seguintes condições são válidas

(a) Para cada $r \geq 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{h^*(t)} \int_0^t \phi(t-s)\Omega(rh^*(s))ds = 0$;

(b) Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $u, v \in C_{h^*}(X)$ e $\|u-v\|_{h^*} \leq \delta$ então

$$\int_0^t \phi(t-s)\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \geq 0;$$

(c) $\liminf_{\xi\to\infty} \frac{\xi}{\beta(\xi)} > 1$, onde

$$\beta(r) := \left\| \int_0^{\cdot} \phi(\cdot - s)\Omega(rh^*(s))ds \right\|_{h^*}, \quad \forall\, r \geq 0;$$

(d) Para todos $a, b \in [0,\infty)$, $a \leq b$, e $r > 0$ o conjunto

$$\{f(s, h^*(s)x) : a \leq s \leq b,\ x \in X,\ \|x\| \leq r\}$$

é relativamente compacto em X.

Então a equação (3.15) possui uma solução branda assintoticamente compacta quase automórfica.

Demonstração: Seja $\mathcal{G} : C_{h^*}(X) \to C_{h^*}(X)$ o operador definido por

$$\mathcal{G}u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s,u(s))ds.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t)\| &\leq \int_0^t \|S(t-s)f(s,u(s))\|ds \leq \int_0^t \phi(t-s)\|f(s,u(s))\|ds \\
&\leq \int_0^t \phi(t-s)\Omega(\|u(s)\|)ds = \int_0^t \phi(t-s)\Omega\left(\frac{h^*(s)\|u(s)\|}{h^*(s)}\right)ds \\
&\leq \int_0^t \phi(t-s)\Omega(\|u\|_{h^*}h^*(s))ds.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|\mathcal{G}u(t)\|}{h^*(t)} \leq \frac{1}{h^*(t)}\int_0^t \phi(t-s)\Omega(\|u\|_{h^*}h^*(s))ds.$$

Pela condição (a) segue-se que $\mathcal{G}$ está bem definido. Além disso, se $u,v \in C_{h^*}(X_0)$ então

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| &\leq \int_0^t \|S(t-s)\big(f(s,u(s)) - f(s,v(s))\big)\|ds \\
&\leq \int_0^t \phi(t-s)\|f(s,u(s)) - f(s,v(s))\|ds \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de um $\delta > 0$ tal que

$$\|\mathcal{G}u(t) - \mathcal{G}v(t)\| \leq \epsilon$$

para todos $u,v \in C_{h^*}(X_0)$ tais que $\|u-v\|_{h^*} \leq \delta$. Como consequência, para tais u e v

$$\|\mathcal{G}u - \mathcal{G}v\|_{h^*} \leq \epsilon$$

donde segue-se que $\mathcal{G}$ é contínuo. O objetivo agora é mostrar que $\mathcal{G}$ é completamente contínuo. Para isso, sejam $B_r\big(C_{h^*}(X)\big)$ a bola de raio $r > 0$ centrada em $0 \in C_{h^*}(X)$, $V = \mathcal{G}\left(B_r\big(C_{h^*}(X)\big)\right)$ e $v = \mathcal{G}u \in V$. No que se segue utilizaremos o Lema 1.16 para mostrar que V é relativamente compacto. Afirmamos inicialmente que o conjunto $V(t)$ é relativamente compacto para cada $t \in [0,\infty)$. De fato, seja $v(t) \in V(t)$. Pela condição (a) segue-se que a função $s \to \phi(s)\Omega(rh^*(t-s))$ é integrável sobre $[0,\infty)$. Logo, dado $\epsilon > 0$ pode-se escolher um $a \geq 0$ de modo que $\int_a^\infty \phi(s)\Omega(rh^*(t-s))ds \leq \epsilon$. Portanto,

$$\left\|\int_a^\infty S(s)f(t-s,u(t-s))ds\right\| \leq \int_a^\infty \phi(s)\Omega(rh^*(t-s))ds \leq \epsilon.$$

Escrevendo

$$v(t) = \int_0^a S(s)f(t-s, u(t-s))ds + \int_a^\infty S(s)f(t-s, u(t-s))ds$$

obtemos então que

$$v(t) \in \overline{aco(\{S(s)f(\xi, h^*(\xi)x) : 0 \le s \le a, t-s \le \xi \le t, \|x\| \le r\})} + B_\epsilon(X)$$

onde $co(K)$ representa o fecho convexo do conjunto K e $B_\epsilon(X)$ é a bola de raio ϵ e centro em $0 \in X$. Usando o fato de que $S(\cdot)$ é fortemente contínuo e a condição (d) podemos garantir que o conjunto $K = \{S(s)f(\xi, h^*(\xi)x) : 0 \le s \le a, t-s \le \xi \le t, \|x\| \le r\}$ é relativamente compacto o que implica que $\overline{co(K)}$ também o é. Como $v(t) \in V(t)$ é arbitrário segue-se que $V(t) \subset \overline{co(K)} + B_\epsilon(X)$, donde concluímos a afirmação. O próximo passo é mostrar que V_b é equicontínuo. Para todo $t \ge 0$ podemos escrever

$$\begin{aligned} v(t+s) - v(t) &= \int_t^{t+s} S(t+s-\xi)f(\xi, u(\xi))d\xi \\ &+ \int_0^t \big(S(\xi+s) - S(\xi)\big)f(t-\xi, u(t-\xi))d\xi. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher $\delta_1 > 0$ tal que

$$\|\int_t^{t+s} S(t+s-\xi)f(\xi, u(\xi))d\xi\| \le C\int_t^{t+s} \phi(t+s-\xi)\Omega(rh(\xi))d\xi \le \epsilon/2,$$

para $s \le \delta_1$. Além disso, como o conjunto $\{f(t-\xi, u(t-\xi)) : 0 \le \xi \le t, u \in B_r(C_h(X_0))\}$ é relativamente compacto e $S(\cdot)$ é fortemente contínua, podemos escolher $\delta_2 > 0$ tai que

$$\|\big(S(\xi+s) - S(\xi)\big)f(t-\xi, u(t-\xi))\| \le \frac{\epsilon}{2(t+1)}, \quad \forall\, s \le \delta_2.$$

Combinando estas estimativas podemos garantir que $\|v(t+s) - v(t)\| \le \varepsilon$ para $s \le \min\{\delta_1, \delta_2\}$ independente de $u \in B_r(C_h(X_0))$. Finalmente, para todo $v(t) \in V(t)$ vale a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} \frac{v(t)}{h^*(t)} &\le \frac{1}{h^*(t)}\int_0^t \|S(t-s)f(s, u(s))\|ds \\ &\le \frac{1}{h^*(t)}\int_0^t \phi(t-s)\Omega(rh^*(s))ds. \end{aligned}$$

Pela condição (a) concluímos que $\lim_{|t|\to\infty} \frac{v(t)}{h^*(t)} = 0$ e essa convergência independe de $u \in B_r(C_{h^*}(X))$. Logo, como consequência do Lema 1.16, o conjunto V é relativamente compacto em $C_{h^*}(X)$ donde segue-se que $\mathcal{G} : C_{h^*}(X) \to C_{h^*}(X)$ é completamente contínuo.

Suponha que $u^\lambda(\cdot)$ é uma solução da equação $u^\lambda(\cdot) = \lambda\mathcal{G}(u^\lambda(\cdot))$ para algum $\lambda \in (0,1)$. Como

$$\begin{aligned}\|u^\lambda(t)\| &= \lambda\left\|\int_0^t S(t-s)f(s,u^\lambda(s))ds\right\| \\ &\leq \int_0^t \phi(t-s)\Omega(\|u^\lambda\|_{h^*}h^*(s))ds \\ &\leq \beta(\|u^\lambda\|_{h^*})h^*(t)\end{aligned}$$

temos que $\frac{\|u^\lambda\|_{h^*}}{\beta(\|u^\lambda\|_{h^*})} \leq 1$. Pela condição (c) segue-se que o conjunto

$$\{u^\lambda : u^\lambda = \lambda\mathcal{G}(u^\lambda), \lambda \in (0,1)\}$$

é limitado. Pelos Lemas 1.5 e 3.8 segue-se que $\mathcal{G}(AAA_c(X)) \subset AAA_c(X)$ e consequentemente podemos considerar $\mathcal{G} : \overline{AAA_c(X)} \to \overline{AAA_c(X)}$[4]. Pela Alternativa de Leray-Schauder, Teorema 1.3, segue-se que $\mathcal{G}$ possui um ponto fixo $u \in \overline{AAA_c(X)}$. Considere uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset AAA_c(X)$ tal que $u_n \to u$ em $C_{h^*}(X)$. Dado $\epsilon > 0$ a condição (b) assegura a existência de $\delta > 0$ tal que se $\|v-u\|_{h^*} \leq \delta$ então

$$\int_0^t \phi(t-s)\|f(s,v(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon, \quad \forall\, t \in [0,\infty);$$

Ademais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$ então $\|u_n - u\|_{h^*} \leq \delta$. Logo, para todos $t \in [0,\infty)$ e $n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}u_n(t) - \mathcal{G}u(t)\| &\leq \int_0^t \|S(t-s)\big(f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\big)\|ds \\ &\leq \int_0^t \phi(t-s)\|f(s,u_n(s)) - f(s,u(s))\|ds \leq \epsilon,\end{aligned}$$

implicando que

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|\mathcal{G}u_n(t) - \mathcal{G}u(t)\| \leq \epsilon,$$

isto é, $\mathcal{G}u_n \to \mathcal{G}u$ uniformemente. Portanto $u \in AAA_c(X)$ e a demonstração está finalizada. ∎

[4] Note que o fecho do conjunto $AAA_c(X)$ está sendo considerado com relação a $C_{h^*}(X)$.

Bibliografia

[1] M. Adimy, A. Elazzouzi, K. Ezzimbi, *Bohr-Neugebuer type theorem for some partial neutral functional differential equations*, Nonlinear Anal. **66** (5) (2007), 1145-1160.

[2] R. P. Agarwal, B. de Andrade, C. Cuevas, *Weighted pseudo-almost periodic solutions of a class of semilinear fractional differential equations*, Nonlinear Analysis. RWA, vol. 11, p. 3532-3554, 2010.

[3] R. P. Agarwal, B. de Andrade, C. Cuevas, *On type of periodicity and ergodicity to a class of fractional order differential equations*, Advances in Difference Equations, 2010, Article ID 179750, p.1-25, 2010.

[4] R. P. Agarwal, B. de Andrade, C. Cuevas, *On type of periodicity and ergodicity to a class of integral equations with infinite delay*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, vol. 11 (2), pp. 309-335.

[5] R. P. Agarwal, M. Belmekki, M. Benchohra, *A survey on semilinear differential equations and inclusions involving Riemann-Liouville fractional derivative*, Adv. Difference Equ., Vol. **2009**, Article ID 981728, 47 pages, doi:10.1155/2009/981728.

[6] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, *A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions*, Acta Appl. Math. (109) (3) (2010), 973-1033.

[7] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, *Boundary value problems for fractional differential equations* in Georgian Mathematical Journal, to appear.

[8] R. P. Agarwal, T. Diagana, E. Hernández, *Weighted pseudo almost periodic solutions to some partial neutral functional differential equations.* J. Nonlinear Convex Anal. **8** (3) (2007), 397–415.

[9] R.P. Agarwal, V. Lakshmikantham, J.J. Nieto, *On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty*, Nonlinear Anal. 72 (6) (2010), 2859-2862.

[10] B. Ahmad, J.J. Nieto, *Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integrodifferential equations with integral boundary conditions*, Boundary Value Problems 2009 (2009), Article ID 708576, 11 pages.

[11] V. V. Ahn, R. Mcvinish, *Fractional differential equations driven by Levy noise*, J. Appl. Stoch. Anal., (**16**) (2) (2003), 97-119.

[12] E. Ait Dads, O. Arino, *Exponential dichotomy and existence of pseudo almost periodic solutions of some differential equations*, Nonlinear Anal. **27** (**4**) (1996), 361-386.

[13] E. Ait Dads, K. Ezzinbi, O. Arino, *Pseudo-almost periodic solutions for some differential equations in a Banach space*, Nonlinear Anal. **28** (**7**) (1997), 1141-1155.

[14] S. Aizicovici, M. McKibben, *Existence results for a class of abstract nonlocal Cauchy problems*, Nonlinear Anal. TMA, **39** (2000), 649-668.

[15] B. Amir, L. Maniar, *Composition of pseudo-almost periodic functions and Cauchy problem with operator of non dense domain*, Ann. Math. Blaise Pascal, **6** (1) (1999), 1-11.

[16] B. de Andrade, C. Cuevas, *S-asymptotically ω-periodic and asymptotically ω-periodic solutions to semilinear Cauchy problems with non dense domain*, Nonlinear Anal., **72** (2010), 3190-3208.

[17] B. de Andrade, C. Cuevas, *Almost automorphic and pseudo almost automorphic solutions to semilinear evolution equations with non dense domain*, Journal of Inequalities and Applications, (2009), Article ID 298207, 8 pages, doi 10.1155/2009/298207.

[18] B. de Andrade, C. Cuevas, *Compact almost automorphic solutions to semilinear Cauchy problems with non dense domain*, Appl. Math. and Comp., **215** (8), 2009, 2843-2849.

[19] B. de Andrade, *A note on almost automorphicity and pseudo almost automorphicity for semilinear differential equations with non-dense domain,* pre-print.

[20] B. de Andrade, *Automorphicity and ergodicity for abstract differential equations,* pre-print.

[21] B. de Andrade, *Asymptotically almost automorphic solutions for semilinear differential equations with non-dense domain,* pre-print.

[22] B. de Andrade, *Asymptotically compact almost automorphic solutions for abstract differential equations,* pre-print.

[23] J. Appell, *Measure of noncompactness, condensing operators and fixed points: an application-oriented survey*, Fixed Point Theory, **6** (2) (2005), 157-229.

[24] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, F. Neubrander, Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems, Monographs in Mathematics 96. Birkhäuser, Basel, 2001.

[25] D. Araya, C. Lizama. *Almost automorphic mild solutions to fractional differential equations,* Nonlinear Anal., **69** (11) (2008), 3692-3705.

[26] J. Banás, D. O'Regan, *On existence and local attractivity of solutions of a quadratic Volterra integral equation of fractional order*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 573-582.

[27] J. Banás, T. Zajac, *Solvability of a functional integral equation of fractional order in the class of functions having limits at infinite*, Nonlinear Analysis 71 (11) (2009), 5491-5500.

[28] M. Belmekki, J.J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, *Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation*, Boundary Value Problems, 2009 (2009), Article ID 324561, 18 pages.

[29] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas, A. Ouahab, *Existence results for fractional order functional differential equations with infinite delay*, J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 1340-1350.

[30] M. Benchohra, J. Henderson, S. K. Ntouyas, A. Ouahab, *Existence results for fractional functional differential inclusions with infinite delay and applications to control theory*, Fract. Calc. Appl. Anal. **11** (2008), 35-56.

[31] D. A. Benson, The fractional advection-dispersion equation, Ph. D. Thesis, University of Nevada, Reno, NV, 1998.

[32] J. Blot; D. Pennequin; G.M. N'Guérékata, Existence and uniqueness of pseudo almost automorphic solutions to some classes of partiual evolution equations, Cubo **10** (2008),no. 3, 161-170.

[33] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl., **162** (1991), 494-505.

[34] S. Bochner, *A new approach to almost periodicity*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **48** (1962), 2039-2043.

[35] S. Bochner, *Continuous mapping of almost automorphic and almost periodic functions*, Proc. nat. Acad. Sci. USA, **52** (1964), 907-910.

[36] D. Bugajewski; T. Diagana, Almost automorphic of the convolution operator and applications to differential and functional equations, *Nonlinear Stud.* **13** (2) (2006), 129–140.

[37] D. Bugajewski, G. M. N'Guérékata, *On the topological structure of almost automorphic and asymptotically almost automorphic solutions of differential and integral equations in abstract spaces*, Nonlinear Anal. **59(8)** (2004), 1333-1345.

[38] A. Caicedo, C. Cuevas, *S-asymptotically ω-periodic solutions of abstract partial neutral integro-differential equations,*, Functional Differential Equations, 17 (1-2) 2010, 387-405.

[39] J. Chen, F. Liu, I. Turner, V. Anh, *The fundamental and numerical solutions of the Riez space-fractional reaction-dispersion equation*, ANZIAM **50** (2008), 45-57.

[40] Ph. Clément. *On abstract Volterra equations with completely positive kernels in infinite dimensional systems,* Springer, Lecture Notes in Mathematics **1076** (1984), 32-40.

[41] Ph. Clément, G. Da Prato, *Existence and regularity results for an integral equation with infinite delay in a Banach space*, Integral Equations Operator Theory, **11** (1988), 480-500.

[42] W. A. Coppel, Dichotomies in Stability Theory, Lectures Notes in Mathematics **629**, Springer-Verlag, 1978.

[43] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, second ed., Chelsea, New York, 1989.

[44] E. Cuesta, *Asymptotic behavior of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations*. Discrete Contin. Dyn. Syst. (Supplement) (2007), 277-285.

[45] E. Cuesta, Ch. Lubich, C. Palancia, *Convolution quadrature time discretization of fractional diffusion-wave equations*, Math. Comput., **75** (2006), 673-696.

[46] E. Cuesta, C. Palencia, *A numerical method an integro-differential equation with memory in Banach spaces: Qualitative properties*, SIAM, J. Numer. Anal., **41** (2003), 1232-1241.

[47] C. Cuevas, E. Hernández, *Pseudo-almost periodic solutions for abstract partial functional differential equations*. Applied Mathematics Letters, **22** (2009), 534-538.

[48] C. Cuevas, H. Henríquez, *Solutions of second order abstract retarded functional differential equations on the line*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, a aparecer.

[49] C. Cuevas, C. Lizama, *Almost automorphic solutions to a class of semilinear fractional differential equations*, Applied Mathematics Letters **21** (2008), 1315-1319.

[50] C. Cuevas, C. Lizama, *Almost automorphic solutions to integral equations on the line*, Semigroup Forum, **79** (2009), 461-472.

[51] C. Cuevas, C. Lizama, *S-asymptotically ω-periodic solutions for semilinear Volterra equations*, Mathematical Methods in Applied Sciences, Vol. 33, 2010, 1628-1636.

[52] C. Cuevas; M. Pinto, *Existence and uniqueness of pseudo-almost periodic solutions of semilinear Cauchy problems with non dense domain*. Nonlinear Anal. **45** (1) (2001), 73–83.

[53] C. Cuevas, M. Rabelo, H. Soto, *Pseudo-almost automorphic solutions to a class of semilinear fractional differential equations*, Communications on Applied Nonlinear Analysis, 17 (1), 2010, 33-48.

[54] C. Cuevas, J.C. de Souza, *S-Asymptotically ω-periodic solutions of semilinear fractional integro-differential equations*, Applied Mathematics Letters **22** (2009), 865-870.

[55] C. Cuevas, J.C. de Souza, *Existence of S-asymptotically ω-periodic solutions for fractional order functional Integro-Differential Equations with infinite delay*, Nonlinear Anal. 72 (3-4), 2010, 1683-1689.

[56] J. M. Cushing, *Forced asymptotically periodic solutions of predator-prey systems with or without hereditary effects*, SIAM J. Appl. Math., **30** (4) (1976), 665-674.

[57] Y. L. Daletzkii, M. G. Krein, Stability of solutions of differential equations in Banach spaces, AMS, Providence, RI, (1978).

[58] K. Deng, *Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equations with nonlocal initial conditions*, J. Math. Anal. Appl., **179** (1993), 630-637.

[59] T. Diagana, Existence of p-almost automorphic mild solutions to some abstract differential equations. *Int. J. Evol. Equ.* **1** (2005), no. 1, 57–67.

[60] T. Diagana, *Existence of solutions to some classes of partial fractional differential equations*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 11, 5296-5300.

[61] T. Diagana, *Pseudo almost periodic solutions to some differential equations*, Nonlinear Anal. **60** (**7**) (2005), 1277-1286.

[62] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic solutions to some differential equations*, Nonlinear Anal. **68** (**8**) (2008), 2250-2260.

[63] T. Diagana, *Existence of weighted pseudo almost periodic solutions to some classes of hyperbolic evolution equations*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), 18-28.

[64] T. Diagana, *Weighted pseudo almost periodic functions and applications*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser I **343** (**10**) (2006), 643-646.

[65] T. Diagana, *Existence of pseudo almost periodic solutions to some classes of partial hyperbolic evolution equation*, EJQTDE (**3**) (2007), 1-12.

[66] T. Diagana, Pseudo Almost Periodic Functions in Banach Spaces, Nova Science Publishers, Inc. New-York, 2007.

[67] T. Diagana, E. Hernández, *Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions to some abstract partial neutral functional-differential equations and applications*, J. Math. Anal. Appl. **327** (**2**) (2007), 776-791.

[68] T. Diagana, E. Hernández, J. P. C. dos Santos, *Existence of asymptotically almost automorphic solutions to some abstract partial neutral integro-differential equations*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 248-257.

[69] T. Diagana, H.R. Henríquez, E.M. Hernández. *Almost automorphic mild solutions to some partial neutral functional differential equations and applications,* Nonlinear Anal., **69** (5-6) (2008), 1485-1493.

[70] T. Diagana, G. M. N'Guérékata, N.V.Minh, *Almost automorphic solutions of evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (11) (2004), 3289-3298.

[71] T. Diagana, G.M. N'Guérékata, Almost automorphic solutions to semilinear evolution equations, *Funct. Differ. Equ.* **132** (2004), 3289–3298.

[72] T. Diagana, C. M. Mahop, G. M. N'Guérékata, *Pseudo almost periodic solutions to some semilinear differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, **43** (**1-2**) (2006), 89-96.

[73] T. Diagana, C. M. Mahop, G. M. N'Guérékata, B. Toni, *Existence and uniqueness of pseudo almost periodic solutions to some classes of semilinear differential equations and applications,* Nonlinear Anal. **64** (**11**) (2006), 2442-2453.

[74] T. Diagana, C. M. Mahop, *Pseudo almost periodic solutions to a neutral delay integral equation*, Cubo **9** (**1**) (2007), 47-55.

[75] K. Diethelm, N. J. Ford, *Analysis of fractional equations*, J. Math. Anal. Appl., **265** (**2**) (2002), 229-248.

[76] K. Diethelm, A. D. Freed, On the solution of nonlinear fractional order equations used in the modeling of viscoplasticity. In: Scientific Computing in Chemical Engineering II-Computational Fluid Dynamics, Reaction Engineering and Molecular Properties, (Eds. F. Keil, W. Mackens, H. Voss, J. Werther), Springer-Verlag, Heidelberg, (1999), 217-224.

[77] H.S. Ding, T.J. Xiao, J. Liang, *Asymptotically almost automorphic solutions for some integrodifferential equations with nonlocal initial conditions,* J. Math. Anal. Appl. **338** (2008), 141-151.

[78] S. D. Eidelman, A. N. Kochubei, *Cauchy problem for fractional diffusion equations*, J. of Differential Equations **199** (2004), 211-255.

[79] K. J. Engel, R. Nagel, One-parameter semigroup for linear evolution equations, in: Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2001, p. 195.

[80] M. M. El-Borai, *Some probability densities and fundamental solutions of fractional evolutions equations*, Chaos, Solitons and Fractals, **14** (2002), 433-440.

[81] M. M. El-Borai, *Semigroups and some nonlinear fractional differential equations*, Appl. Math. and Computations, **149** (2004), 823-831.

[82] M. M. El-Borai, *The fundamental solutions for fractional evolution equations of parabolic type*, J. Appl. Math. and Stoch. Anal. **3** (2004), 197-211.

[83] A. M. A. El-Sayed, *Fractional order evolution equations*, Journal of Fractional Calculus, **7** (1995), 89-100.

[84] A. M. A. El-Sayed, *Fractional-order diffusion-wave equation*, International Journal of Theoretical Physics, **35** (**2**) (1996), 311-322.

[85] A. M. A. El-Sayed, *Nonlinear functional-differential equations of arbitrary orders*, Nonlinear Anal., **33** (**2**) (1998), 181-186.

[86] A. El-Sayed, A. Ibrahin, *Multivalued fractional differential equations*, Appl. Math. Comput. **68** (1995), 15-25.

[87] K. Ezzinbi, J. H. Liu, *Nondensely defined evolution equations with nonlocal conditions*, Math. Comput. Model. **36** (2002), 1027-1038.

[88] O. Fattorini, Second Order Differential Equations in Banach Spaces, in: North-Holland Math. Studies, vol. **108**, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1985.

[89] A. M. Fink, Almost Periodic Differential Equations, Lectures Notes in Mathematics **377**, Springer-Verlag.

[90] L. Gaul, P. Klein, S. Kempfle, *Damping discription involving fractional operators*, Mechanical Systems and Signal Processing, **5** (**2**), (1991), 81-88.

[91] G. A. Goldstein, Semigroup of operators and applications, Oxford Evolution Press, 1985.

[92] J.A. Goldstein, G.M.N'Guérékata, *Almost automorphic solutions of semilinear evolution equations,* Proc. Amer. Math. Soc. **133**(8) (2005), 2401–2408.

[93] R. Gorenflo, F. Mainardi, *Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order*, A. Carpinteri and F. Mainardi (Editors): Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Springer Verlag, Vienna and New York 1997, 223-276.

[94] R. Gorenflo, F. Mainardi, *On Mittag-Leffler-type functions in functional evolution processes*, J. Comput. Appl. Math., **118** (2000), 283-299.

[95] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[96] R. C. Grimmer, *Asymptotically almost periodic solutions of differential equations*, SIAM J. Appl. Math. **17** (1969), 109-115.

[97] G. Gripenberg, S. O. Londen, O. Staffans, Volterra Integral and Functional Equations, in: Encyclopedia of Mathematics and Applications, vol. **34**, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1990.

[98] M. Haase, The Functional Calculus for Sectorial Operators. Operator Theory: Advances and Applications, 169, Birkhauser-Verlag, Basel, 2006.

[99] J. K. Hale, *Partial neutral functional-differential equations*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **39** (4) (1994), 339-344.

[100] J. K. Hale, S. M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional-Differential Equations, Applied Mathematical Sciences, **99**, Springer-Verlag, New York, (1993).

[101] G. Haiyin, W. Ke, W. Fengying, D. Xiaohua, *Massera-type theorem and asymptotically periodic logistic equations*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, **7** (2006), 1268-1283.

[102] J. Henderson, A. Ouahab, *Fractional functional differential inclusions with finite delay*, Nonlinear Anal. 70 (2009), 2091-2105.

[103] E. Hernández, H. R. Henríquez, *Existence of periodic solutions of partial neutral functional-differential equations with unbounded delay*, J. Math. Anal. Appl. **221** (2) (1998), 499-522.

[104] E. Hernández, H. R. Henríquez, *Existence results for partial neutral functional equations with unbounded delay*, J. Math. Anal. Appl. **221** (2) (1998), 452-475.

[105] H. Henríquez, *Approximation of abstract functional differential equations with unbounded delay*, Indian J. Pure Appl. Math., **27** (4) (1996), 357-386.

[106] H. Henríquez, C. Lizama, *Compact Almost Automorphic Solutions to Integral equations with infinite delay.* Nonlinear Anal., **71** (12), 2009, 6029-6037.

[107] H.R. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications*, J. Math. Anal. Appl. **343** (2) (2008), 1119-1130.

[108] H. Henríquez, M. Pierri, P. Táboas, *Existence of S-asymptotically ω-periodic for abstract neutral equations*, Bull. Austral. Math. Soc., 78 (2008), 365-382.

[109] H. Hilfer, Applications of Fractional Calculus in Physics. World Scientific Publ. Co. Singapure, 2000.

[110] B. I. Henry, S. L. Wearne, *Existence of turing instabilities in a two-species fractional reaction-diffusion system*, SIAM J. Appl. Math. **62** (2002), 870-887.

[111] T. Hu, Y. Wang, *Numerical detection of the lowest "Efficient Dimensions "for chaotic fractional differential system*, The Open Mathematics Journal, **1** (2008), 11-18.

[112] Y. Hino, S. Murakami, T. Naito, *Functional-Differential Equations with Infinite Delay* , Lecture Notes in Mathematics. **1473** (2002), Springer-Berlin.

[113] Y. Hino, S. Murakami. *Almost automorphic solutions for abstract functional differential equations,* J. Math. Anal. Appl. 286 (2003) 741–752.

[114] T. Kato, *Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semigroup*. Proc. Japan Ac. **35** (1959), 467-468.

[115] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies **204**, Elsevier Science B. V., Amsterdam (2006).

[116] V. Kiryakova, Generalized Fractional Calculus and Applications, **301**, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Longman Scientific Technical, Harlow, UK, John Wiley, New york, NY, USA, (1994).

[117] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.

[118] V. Lakshmikanthan, L. Wen, B. Zhang, Theory of Differential Equations with Unbounded Delay, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[119] V. Lakshmikantham, A. Vatsala, *Basic theory of fractional differential equations*, Nonlinear Anal. **69** (**8**) (2008), 2677-2682.

[120] V. Lakshmikantham, A. Vatsala, *Theory of fractional differential inequalities and applications*, Comm. Appl. Anal. 11 (2007), 3-4, 395-402.

[121] V. Lakshmikantham, J. V. Devi, *Theory of fractional differential equations in Banach spaces*, Eur. J. Pure Appl. Math. **1** (2008), 38-45.

[122] H. Li, F. Huang, J. Li, *Composition of pseudo almost periodic functions and semilinear differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **255** (2001), 436-446.

[123] Z.C. Liang, *Asymptotically periodic solutions of a class of second order nonlinear differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (4) (1987), 693- 699.

[124] J. Liang, T. J. Xiao, J. Zhang, *Pseudo almost automorphic mild solutions to nonlinear differential equations and applications*, Nonlinear Anal. **70** (11) (2009), 4079-4085.

[125] J. Liang, J. Zhang, T. J. Xiao, *Composition of pseudo almost automorphic and asymptotically almost automorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **340** (2008), 1493-1499.

[126] J. Liang, G. M. N'Guérékata, T. J. Xiao, J. Zhang, *Some properties of pseudo almost automorphic functions and applications to abstract differential equations*, Nonlinear Anal. **70** (7) (2009), 2731-2735.

[127] W. Lin, *Global existence and chaos control of fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **332** (2007), 709-726.

[128] J. L. Lions, J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **19** (1964), 5-68.

[129] H. Liu, J. C. Chang, *Existence for a class of partial differential equations with nonlocal conditions*, Nonlinear Anal. (in press).

[130] C. Lizama, *On approximation and representation of k-regularized resolvent families*, Integral Equations Operator Theory, **41** (**2**) (2001), 223-229.

[131] C. Lizama, G. M. N'Guérékata, *Bounded mild solution for semilinear integro-differential equations in Banach spaces*, Integral Equations and Operator Theory, 68 (2) (2010), 207-227.

[132] C. Lizama, V. Poblete. *On multiplicative perturbation of integral resolvent families,* J. Math. Anal. Appl., **327** (2) (2007), 1335-1359.

[133] C. Lizama, H. Prado, *Rates of approximation and ergodic limits of regularized operator families*, J. Approx. Theory, **122** (**1**) (2003), 42-61.

[134] C. Lizama, J. Sanchez, *On perturbation of k-regularized resolvent families*, Taiwanese J. Math. **7** (**2**) (2003), 217-227.

[135] C. Lizama, V. Vergara, *Uniform stability of resolvent families*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (1), (2004), 175-181.

[136] A. Lunardi, Analytic Semigroup and Optimal Regularity in Parabolic Problems, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Vol **16**, Birkhäuser-Verlag, Besel, 1995.

[137] F. Mainardi, *Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanic*, in Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, A. Carpinteri and F. Mainardi, Eds., Springer, Vienna, Australia, (1997), 291-348.

[138] L. Maniar, *Equations différentielles à retard par la méthode d'extrapolation*, Portugaliae Mathematica, **54** (1) (1997), 101-113.

[139] L. Maniar, *Extrapolation Theory and Some Applications*, Cubo **2** (2000), 287-295.

[140] R. H. Martin, Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces, Robert E. Krieger Publ. Co., Florida, 1987.

[141] J. L. Massera, J. J. Schäffer, Linear differential equations and functions spaces, Academic Press, New York (1966).

[142] J. L. Massera, J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis I*, Ann. of Math. **67** (1958), 517-573.

[143] K. S. Miller, B. Ross, An introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York, (1993).

[144] G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, *Existence of the mild solutions for some fractional differential equations with nonlocal conditions*, Semigroup Forum, 79 (2) (2009), 315-322.

[145] G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, *Mild solutions for semilinear fractional differential equations*, Electron. J. Diff. Eqns. **2009** (**21**) (2009), 1-9.

[146] G. M. Mophou, G. M. N'Guérékata, *On integral solutions of some nonlocal fractional differential equations with nondense domain*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 4668-4675.

[147] G. M. Mophou, O. Nakoulima, G. M. N'Guérékata, *Existence results for some fractional differential equations with nonlocal conditions*, Nonlinear Stud. 17 (2010) (1), 15-21.

[148] R. Nagel, *Sobolev spaces and Semigroups*, Semesterbericht Funktionalanalysis Tübinger, (Sommersemester 1983), 1-19.

[149] R. Nagel, E. Sinestrari, *Inhomogeneous Volterra integrodifferential equations for Hille-Yosida operators*, in "Functional Analysis"(ed. K. D. Bierstedt, A. Pietsch, W. M. Ruess and D. Vogt), Lectures Notes Pure Appl. Math. **150**, Marcel Dekker (1994), 51-70.

[150] R. Nagel, E. Sinestrari, *Extrapolation spaces and minimal regularity for evolution equations*, J. Evol. Equ. **6** (2006), 287-303.

[151] G. M. N'Guérékata, Almost automorphic and almost periodic functions in abstract spaces, Kluwer Acad. Plenum, New York-Boston-Moscow-London, 2001.

[152] G.M. N'Guérékata, *Cauchy problem for some fractional abstract differential equation with nonlocal conditions*, Nonlinear Anal. **70** (**5**) (2009), 1873-1876.

[153] G.M. N'Guérékata, Topics in Almost Automorphy, Springer-Verlag, New York, 2005.

[154] G.M. N'Guérékata, *Quelques remarques sur les fonctions asymptotiquement presque automorphes*, Ann. Sci. Math. Quebec. **7** (**2**) (1983), 185-191.

[155] S. Nicola, M. Pierri, *A note on S-asymptotically ω-periodic functions*, Nonlinear Anal. RWA, **10**, 2009, 2937-2938.

[156] J.W. Nunziato. *On heat conduction in materials with memory*, Quart. Appl. Math. **29** (1971), 187-204.

[157] A. Ouahab, *Some results for fractional boundary value problems of differential inclusions*, Nonlinear Anal. 69 (2008), 3877-3896

[158] A. Oustalup, Systéms Asservis D'ordre Fractionaire, Éditions Masson, 1983.

[159] A. Oustalup, La Dérivation non Entière: Théorie, Synthèse, Applications, Série Automatique, Éditions Hermès, 1995.

[160] A. Pazy, Semigroup of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1983.

[161] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, San Diego, Academic Press, 1999.

[162] I. Podlubny, I. Petras, B. M. Vinagre, P. O'Leary, L. Dorcak, *Analogue realizations of fractional-order controllers. Fractional order, calculus and its applications*, Nonlinear Dynam. 29 (2002), 281-296.

[163] G. Da Prato; P. Grisvard, *On extrapolation spaces*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. **72** (8) (1982), no. 6, 330–332.

[164] G. Da Prato; E. Sinestrari, *Differential operators with non dense domain*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **14** (4) (1989), no. 2, 285-344.

[165] G. Da Prato, P. Grisvard, *Equations d'évolution abstraites nonlinéaires de type parabolique*, Ann. Mat. Pura Appl. (**4**) **120** (1979), 329-396.

[166] G. Da Prato, A. Lunardi, *Periodic solutions for linear integrodifferential equations with infinite delay in Banach spaces*, Lectures Notes in Math. **1223** (1985), 49-60.

[167] J. Prüss, Evolutionary Integral Equations and Applications, Monographs Math., **87**, Birkhäuser Verlag, 1993.

[168] A. Rhandi, *Extrapolation methods to solve non-autonomous retarded partial differential equations*, Studia Mathematica **126** (3), 1997, 219-233.

[169] B. Ross, Ed., Proceedings of the International Conference on Fractional Calculus and Its Applications, University of New Haven, West Haven, Conn. June 1974, Springer-Verlag, New York, 1975.

[170] B. Rzepka, *On attractivity and asymptotic stability of solutions of a quadratic Volterra integral equation of fractional order*, Topol. Meth. Nonlin. Anal. **32** (2008), 573-102.

[171] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, (1993).

[172] J. P. C. dos Santos, C. Cuevas, *Asymptotically almost automorphic solutions of abstract fractional integro-differential neutral equations*, Applied Mathematics Letters, 23 (2010), 960-965.

[173] R. Schnaubelt, *Asymptotic behavior of Parabolic Nonautonomous Evolution Equations*, Lectures Notes in Math. **1855**, Springer-Verlag, Berlin, (2004), 401-472.

[174] R. Schumer, D. A. Benson, *Eulerian derivative of the fractional advection-dispersion equation*, J. Contaminant **48** (2001), 69-88.

[175] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;\mathcal{B})$, Ann. Mat. Pure Appl., CXLVI (1987), 65-96.

[176] S. Shaw, J. Chen, *Asymptotic behavior of* (a,k)*-regularized families at zero*, Taiwanese J. Math. **10** (**2**) (2006), 531-542.

[177] W.R. Utz, P.Waltman, *Asymptotic almost periodicity of solutions of a system of differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 597- 601.

[178] F. Wei, K. Wang, *Global stability and asymptotically periodic solutions for nonautonomous cooperative Lotka-Volterra diffusion system*, Applied Math. and Computation, **182** (2006), 161-165.

[179] F. Wei, K. Wang, *Asymptoticaly periodic solutions of N-species cooperation system with time delay*, Nonlinear Analysis: Real World and Applications, **7** (2006), 591-596.

[180] J. Wu, H. Xia, *Rotating waves in neutral partial functional-differential equations*, J. Dynam. Diff. Eqns. **11** (2) (1999), 209-238.

[181] T.J. Xiao, J. Liang, J. Zhang, *Pseudo almost automorphic mild solutions to nonautonomous differential equations and applications*. Nonlinear Anal. (2008), doi 10.1016/j.na.2008.08.018.

[182] T. J. Xiao, J. Liang, J. Zhang, *Pseudo almost automorphic functions to semilinear differential equations in Banach space*, Semigroup Forum, **76** (2008), 518-524.

[183] S. Zaidman, Almost Periodic Functions in Abstract Spaces, Research Notes in Mathematics, Pitman, London, 1985.

[184] S. Zaidman. *Almost automorphic solutions of some abstract evolution equations II,* Instit. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **111** (2) (1977) 260–272.

[185] C. Zhang, Pseudo almost periodic functions and their applications, Thesis, The University of Western Ontario, 1992.

[186] C. Zhang, *Pseudo almost periodic solutions of some differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **151** (1994), 62-76.

[187] C. Zhang, *Integration of vector-valued pseudo almost periodic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 167-174.

[188] C. Zhang, Almost Periodic Type and Ergodicity, Kluwer Academic Publishers and Science Press, 2003.

[189] C. Zhang, *Integration of vector-valued pseudo almost periodic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **121** (1994), 167-174.

[190] Z.-H. Zhao, Y.-K. Chang, J.J. Nieto, *Almost automorphic and pseudo-almost automorphic mild solutions to an abstract differential equation in Banach spaces*, Nonlinear Anal. 72 (2010), (3-4), 1886-1894.

Sobre o Autor

O autor nasceu em Aracaju, Sergipe, no dia 31 de março de 1983. Realizou seus estudos de graduação em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe e mestrado em Matemática na Universidade Federal de Pernambuco. É membro do corpo editorial da revista Cubo (Temuco) e revisor de periódicos para Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH, Nonlinear Analysis, Advances in Difference Equations e Mathematical Modelling and Analysis. Sua produção científica é na área de Equações Diferenciais (ordinárias, parciais, fracionárias e funcionais), Equações Integro-diferenciais e Equações Integrais, com ênfase em teoria de periodicidade e suas generalizações.

Endereço: Rua Sebastião de Alencastro Salazar, 59

Várzea,

Recife – PE, Brasil

C.E.P.: 50741–370

e-mail: `bruno00luis@gmail.com`

Esta tese foi diagramada usando LaTeX 2_ε[5] pela Terminus[6].

[5] LaTeX 2_ε é uma extensão do LaTeX. LaTeX é uma coleção de macros criadas por Leslie Lamport para o sistema TeX, que foi desenvolvido por Donald E. Knuth. TeX é uma marca registrada da Sociedade Americana de Matemática ($\mathcal{AMS}$). O estilo usado na formatação desta tese foi escrito por Dinesh Das, Universidade do Texas. Modificado em 2001 por Renato José de Sobral Cintra, Universidade Federal de Pernambuco, e em 2005 por André Leite Wanderley.

[6] Sociedade com fins lucrativos formada pelos membros permanentes: André Leite, Bruno de Andrade, Luís Henrique de Santana, Peron Rios; e membros associados: Haroldo Vital, Diogo de Carvalho e Zaqueu Ramos.