UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Thiago Alves de Medeiros

PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO ENVOLVENDO A TEORIA DOS GRAFOS E APLICATIVOS DE CARONA.

Recife
2024

Thiago Alves de Medeiros

PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO ENVOLVENDO A TEORIA DOS GRAFOS E APLICATIVOS DE CARONA.

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática - CCEN da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Área de habilitação: Matemática / Licenciatura

Orientador: Professor Doutor Eudes Naziazeno Galvão.

Recife

2024

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Medeiros, Thiago Alves de .
Proposta de abordagem para o ensino médio envolvendo a teoria dos grafos e aplicativos de carona / Thiago Alves de Medeiros. - Recife, 2024.
48 p. : il., tab.

Orientador(a): Eudes Naziazeno Galvão
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Matemática - Licenciatura, 2024.
Inclui referências, apêndices.

1. Teoria dos Grafos. 2. Algoritmo de Dijkstra. 3. Ensino Médio. 4. Matemática Aplicada. 5. Educação Inovadora. I. Galvão, Eudes Naziazeno . (Orientação). II. Título.

510 CDD (22.ed.)

Thiago Alves de Medeiros

PROPOSTA DE ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO ENVOLVENDO A TEORIA DOS GRAFOS E APLICATIVOS DE CARONA.

Trabalho de conclusão de curso de graduação apresentado ao Departamento de Matemática - CCEN da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Aprovado em: 25 de outubro de 2024.

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Cleide Soares Martins
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Manoel José Machado Soares Lemos
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Me. Paulo Roberto Câmara de Sousa
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso apresenta uma abordagem inovadora para o ensino da matemática no Ensino Médio, utilizando a Teoria dos Grafos e o Algoritmo de Dijkstra para compreender problemas reais, como a escolha do caminho mais curto em aplicativos de carona, Waze, Google mapas, Apple mapas, dentre outros aplicativos semelhantes. O objetivo é tornar a matemática mais próxima do cotidiano dos alunos, mostrando como conceitos abstratos podem ser aplicados em situações práticas e relevantes.

A partir da Teoria dos Grafos, os alunos podem modelar problemas como rotas de trânsito ou logística, enquanto o Algoritmo de Dijkstra lhes permite encontrar soluções eficientes para esses desafios. A proposta pedagógica sugerida inclui atividades interativas com mapas e grafos, estimulando os estudantes a participarem ativamente do processo de aprendizagem e a enxergarem a matemática como uma ferramenta prática e útil.

A dissertação conclui que essa metodologia não apenas facilita a compreensão de conceitos matemáticos, mas também promove um ensino mais dinâmico e envolvente, incentivando os alunos a aplicarem o que aprendem para solucionar problemas reais de forma criativa e eficaz.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Algoritmo de Dijkstra, Ensino Médio, Matemática Aplicada, Educação Inovadora.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Uma das barreiras enfrentadas pelos estudantes do Ensino Médio é a quebra da conectividade entre a matemática e o cotidiano. Segundo Souza [20], os primeiros contatos com a matemática devem ser factuais e relacionados ao dia a dia do aluno, tornando o aprendizado envolvente. No entanto, quando chegam ao Ensino Médio, os estudantes muitas vezes percebem a matemática como uma disciplina abstrata e distante, sem propósito prático claro.

Dessa forma, este trabalho visa reintroduzir essa conexão, utilizando a Teoria dos Grafos para compreender problemas cotidianos como o cálculo de rotas otimizadas em aplicativos de carona, tema que é altamente relevante no contexto atual de urbanização e desenvolvimento tecnológico. Por meio da aplicação do algoritmo de Dijkstra, pretende-se oferecer aos alunos uma oportunidade de explorar a matemática de forma aplicada, demonstrando como a abstração teórica pode ser usada para resolver desafios reais, como a escolha do caminho mais curto entre dois pontos em um mapa.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: primeiro, discute-se a Teoria dos Grafos e suas aplicações práticas. Em seguida, apresenta-se o algoritmo de Dijkstra em detalhe, aplicando-o a problemas cotidianos. Finalmente, propõe-se uma abordagem pedagógica para o ensino do algoritmo no contexto do Ensino Médio.

1.1 JUSTIFICATIVA

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), é essencial que os alunos desenvolvam competências que lhes permitam interpretar e solucionar problemas do cotidiano por meio de ferramentas matemáticas. A Teoria dos Grafos é uma dessas ferramentas, oferecendo um modo eficiente de modelar e resolver problemas relacionados à otimização de recursos, como a minimização de distâncias e custos.

Assim, a necessidade de um ensino de matemática mais contextualizado está cada vez mais presente no debate educacional. Para Olgin [13]:

> “Para o Ensino Médio, considera-se que, para escolha de temas, é importante selecionar os que possibilitam aos estudantes perceberem a sua importância e seu impacto na Matemática e na sociedade, conforme as indicações do autor. Considerando que uma finalidade da Educação Básica é preparar o estudante para a vida em sociedade, para o trabalho, para o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos, etc.”

Também segundo Doll Jr. [8], deve-se escolher os conteúdos a serem tratados no Ensino Médio a partir da análise de quatro aspectos, a saber: riqueza, recursão, relação e rigor. Em relação a riqueza, o autor trabalha a possibilidade de profundez do assunto, vislumbrando interpretações diversas para ele e procurando transformar os agentes da educação, tanto professores quanto alunos.

Já na questão de recursão, para esse autor, o currículo deve prezar por uma comunicação intermitente entre os conteúdos que neles existem, podendo sempre haver um ciclo em que um conteúdo leve a outro. Dessa maneira, o aluno sempre poderá analisar e refletir sobre os conteúdos de maneiras diversas ao longo da jornada escolar.

Quando Doll Jr. [8] fala a respeito do critério de relações, ele trata a respeito das possibilidades de o currículo se conectar, tanto com questões pedagógicas quanto com questões culturais dos alunos e da sociedade.

Em relação ao rigor, ele entende que se deve abordar todas as possibilidades de interpretação e buscar, com perseverança, a determinação dos caminhos realizáveis para um processo de transformação, tanto do professor quanto do aluno

Assim, neste trabalho, pretende-se mostrar também que o ensino da Teoria dos Grafos no Ensino Médio pode satisfazer tais critérios e oferecer aos estudantes uma abordagem inovadora, que promova o engajamento, o pensamento crítico e a aplicação prática dos conceitos matemáticos, alinhando-se aos objetivos educacionais atuais e contribuindo para uma formação mais completa e interdisciplinar dos alunos.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Demonstrar como a Teoria dos Grafos e, especificamente, o algoritmo de Dijkstra podem ser utilizados como ferramentas pedagógicas no Ensino Médio para resolver problemas práticos de otimização de rotas.

1.2.2 Objetivos específicos

Aplicar a Teoria dos Grafos em situações cotidianas, exemplificando seu uso na otimização de rotas simulando uma situação análoga a um aplicativo de carona.

Integrar o algoritmo de Dijkstra ao currículo do Ensino Médio, enfatizando sua relevância prática e estimulando o pensamento crítico.

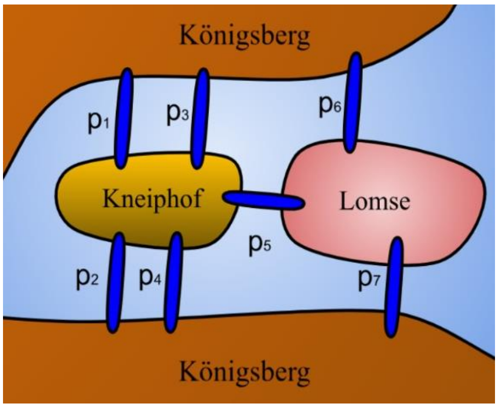
Esclarecer que a matemática não se resume apenas a contas e equações algébricas como é, algumas vezes, pensado por alunos do Ensino Médio.

2 TEORIA DOS GRAFOS

2.1 BREVE APANHADO HISTÓRICO

A Teoria dos Grafos tem origem na busca da solução de um problema que, dentre todos os que são trabalhados nesta área, ainda é o mais conhecido, que é o *problema das pontes de Königsberg*. Ele consiste no questionamento feito por Euler se era possível ou não, dentro da referida cidade, fazer um passeio por toda ela, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte que existia nesta cidade uma única vez. Nesta cidade havia um rio que a cortava, o rio Pregel. Neste rio havia duas ilhas, Kneiphof e Lomse, que eram ligadas à cidade por quatro pontes e duas pontes, respectivamente, além de uma ponte que as ligava, como mostra a figura a seguir.

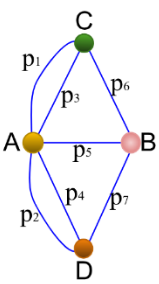
Figura 1 - Representação ilustrativa da cidade de Königsberg



Fonte: Autoria própria

Este problema pode ser modelado utilizando um conjunto de vértices e arestas e podemos desenhá-lo da seguinte forma:

Figura 2 - Grafo modelando o problema das pontes de Königsberg

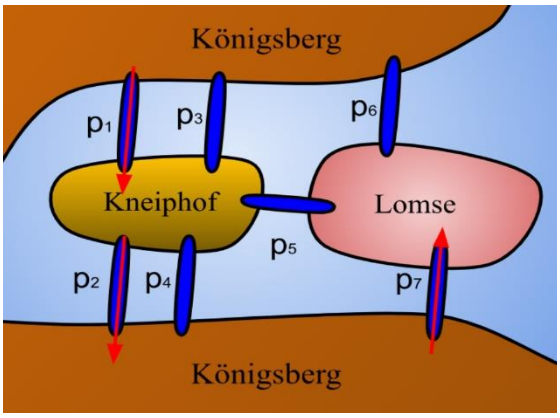


Fonte: Autoria Própria

Assim, perceba que basta estudar o grafo porque ele contém todas as informações necessárias para resolver o problema das pontes sem a necessidade de mapear geograficamente a cidade, pois ele está representando as ilhas com os vértices A e B (amarelo e rosa, respectivamente) e as partes norte e sul da cidade estão correspondidas pelos vértices C e D (em verde e marrom), respectivamente. Além disso, as pontes são representadas pelas arestas do grafo (em azul).

Desta maneira, perceba que as pontes que conectam a parte norte do continente e a ponte de Kneiphof (p_1 e p_3), são representadas também pelas mesmas arestas no grafo. De igual modo, todas as outras arestas estão conectadas de acordo com sua respectiva ponte. Portanto, um caminho possível para sair da parte norte da cidade e chegar na ilha de Lomse, seria utilizando a ponte p_1, para chegar em Kneiphof, depois utilizando a ponte p_2 para chegar à parte sul da ilha e, por fim, utilizar a ponte p_7 para chegar à ilha de Lomse.

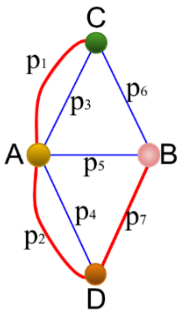
Figura 3 - Possível caminho



Fonte: Autoria própria

O grafo associado a esse caminho (em vermelho) seria:

Figura 4 - Grafo do Possível caminho



Fonte: Autoria própria

Assim, o estudo dos vértices e arestas é suficiente para determinar se é possível ou não atravessar todas as pontes uma única vez, como propôs Euler. Deste modo, por vezes, podemos reduzir problemas extremamente complexos a algum grafo e estudá-lo de maneira mais agradável.

2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS

2.2.1 Grafos e Subgrafos

2.2.1.1 Grafos

Utilizando como pressuposto o fundamento estabelecido por Diestel em [7], o autor define grafo como o par $G = (V, A)$, em que é satisfeita a relação que os elementos $a \epsilon A$ são, também, elementos do conjunto formado por pares dos elementos $v \in V$, ou seja, podemos escrever $A \subseteq [V]^2$. Assim sendo, os vértices são os elementos $v \in V$ e as arestas são os elementos $a \in A$.

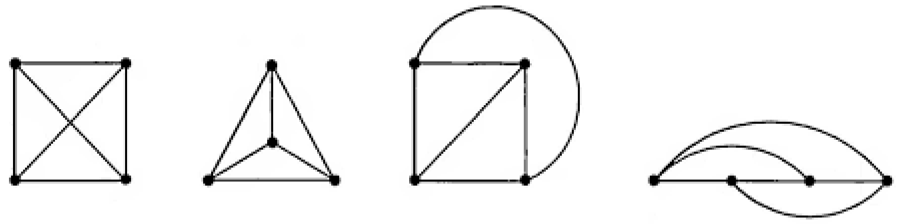
Por exemplo, na figura 2, podemos chamar os pontos A, B, C e D de vértices do grafo. Além disso, nota-se que as arestas são: $p_1(A, C)$, $p_2(A, D)$, $p_3(A, C)$, $p_4(A, D)$, $p_5(A, B)$, $p_6(B, C)$, $p_7(B, D)$. Note que temos dois pares de arestas que possuem o mesmo par de vértices, $p_1(A, C)$, $p_3(A, C)$ e $p_2(A, D)$, $p_4(A, D)$. Sempre que isso ocorre, diz-se que estas arestas estão em paralelo. Da mesma maneira, um grafo pode possuir uma aresta em que o par de vértices que a define sejam ambos o mesmo vértice. Quando isso acontece, diz-se que esta aresta é um laço.

Já Bondy e Murty, em [4], definem grafo como uma tripla ordenada $G = (V(G), A(G), \psi_g)$, onde os elementos desta tripla são o conjunto de vértices do grafo G, o conjunto de arestas do grafo G e a função de incidência deste grafo, respectivamente. A função de incidência relaciona um par não ordenado de vértices a cada aresta do grafo G. Por exemplo, na figura 2, $\psi_g(p_1) = AC$. Se um vértice está presente na relação de incidência de uma aresta, logo este vértice é incidente a tal aresta. Em outras palavras, diz-se que um vértice é incidente a uma aresta se a aresta o conecta a outro vértice no grafo. Diestel [7] define a incidência de maneira semelhante. para ele, um vértice é dito ser incidente a uma aresta se o vértice é um dos extremos dessa aresta.

Segundo os autores, podemos definir alguns tipos de grafos de acordo com suas características:

Grafo simples: Segundo Bondy e Murty [4], grafos simples são aqueles que não possuem laços ou arestas em paralelo. Já Diestel [7], define esse tipo de grafo apenas como grafo, nomeando os que possuem tais tipos de aresta como Hipergrafos. Neste trabalho, adotaremos a definição de Bondy e Murty.

Figura 5 - Exemplos de grafos simples

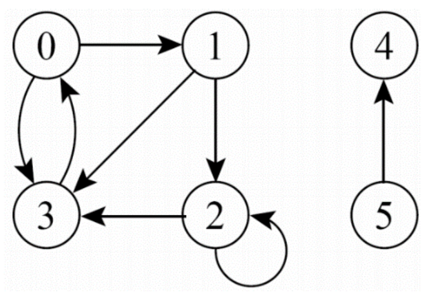


Fonte: Rangel (2002)

Grafo direcionado (dígrafo): Para Bondy e Murty [4], em um grafo direcionado $D = (V(D), A(D))$, o conjunto de arestas $A(D)$ é um conjunto de pares ordenados de vértices, ou seja: $A(D) \subseteq \{(u, v) \mid u, v \in V(D)\}$, esses vértices u, v não são necessariamente distintos.

Neste caso, a aresta (u, v) indica que há uma conexão direcionada do vértice u para o vértice v.

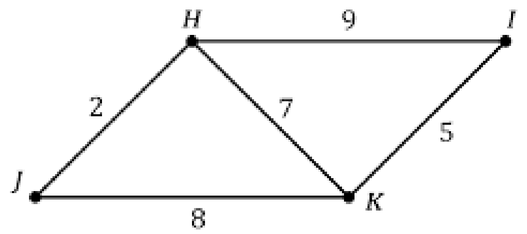
Figura 6 - Exemplos de grafos direcionados



Fonte: H3Dema, 2016

Grafo ponderado: Falando sobre grafo ponderado, Bondy e Murty [2] associa cada aresta $e \in E(G)$ (ou $(u, v) \in A(G)$, no caso de dígrafos) a um número real $w(e)$, que é chamado de peso. Este peso pode representar uma medida como distância, custo ou capacidade. Note que todo grafo pode ser considerado como ponderado, basta considerar $w(e) = 1$ para todo $e \in E$.

Figura 7 - Exemplo de grafo ponderado



Fonte: Evulpo, 2024

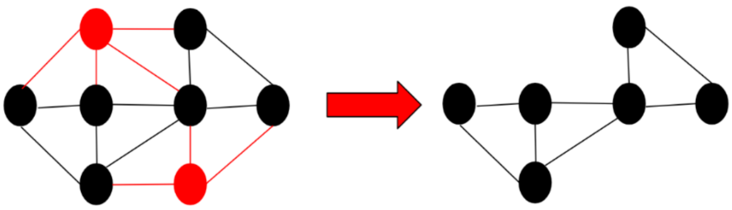
Diestel [7] também define a ordem de um grafo G como sendo o número de vértices neste grafo e escreve-se $|G|$. Se $|G|$ for um número natural, G é um grafo finito, caso contrário, é infinito.

No exemplo prático de um aplicativo de carona, um grafo ponderado pode ser modelado pelas ruas de uma cidade (arestas) e seus cruzamentos ou pontos de referência (vértices), onde o peso das arestas representa a distância ou o tempo necessário para percorrer cada rua, além de circunstâncias que envolvem o tráfego nesta localidade. Ao usar um grafo ponderado, podemos calcular qual caminho é o mais eficiente, em termos de distância ou tempo, para ir de um ponto A até um ponto B.

2.2.1.2 Subgrafos:

De acordo com Diestel [7], um subgrafo H de um grafo $G = (V(G), A(G))$ é um grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são subconjuntos dos conjuntos de vértices e arestas de G, respectivamente. Ou seja, $H = (V(H), E(H))$ é um subgrafo de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. Além disso, para uma aresta $a_i \in A(H) \subseteq A(G)$, os vértices terminais desta aresta devem estar presentes em $V(H)$, ou seja, seja $a_i = (v_i, v_j) \in A(H)$, então $v_i, v_j \in V(H)$.

Figura 8 - Subgrafo



Fonte: Autoria própria

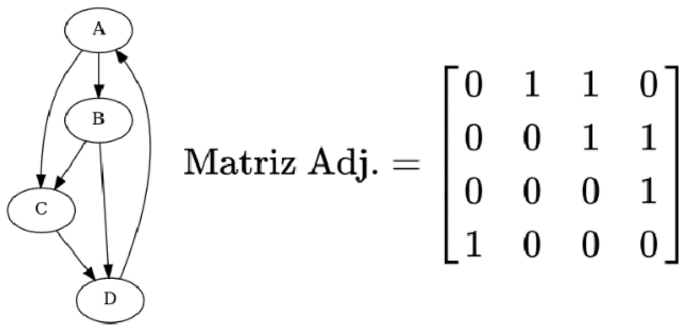
2.2.2 Incidência e Adjacência

2.2.2.1 Incidência

A incidência é a relação entre os vértices e as arestas que os conectam. Um vértice v é dito ser incidente a uma aresta e se v é um dos extremos de e, ou segundo Diestel [7], se $v \in e$. Em outras palavras, se a aresta e conecta os vértices u e v, então u e v são incidentes a e e e é incidente a u e v. O autor também define como o conjunto de todas as arestas $e \in E(G)$ que são incidentes a v como $E(v)$.

Uma ferramenta importante para representar essa relação é a matriz de incidência, que Bondy Murty [4] trabalha em seu livro. Se G é um grafo com n vértices e m arestas, a matriz de incidência de G é uma matriz $n \times m$ onde a entrada a_{ij} é igual ao número de vezes que o vértice v_i é incidente à aresta e_j.

Figura 9 - Matriz de Adjacência



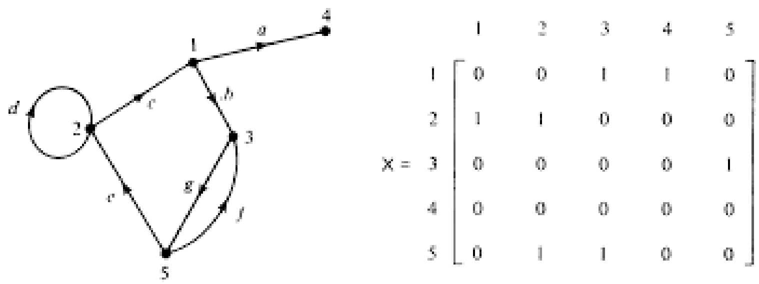
Fonte: Hermuche, 2019

2.2.2.2 Adjacência

Para Diestel [7], dois vértices u e v em um grafo G são ditos adjacentes se existe uma aresta $e \in E(G)$ que conecta u e v. A adjacência é uma das relações mais fundamentais em um grafo, definindo quando dois vértices são vizinhos diretos.

A matriz de adjacência é retratada por Bondy e Murty [4] como uma forma comum de representar a adjacência em grafos. Se G tem n vértices, a matriz de adjacência de G é uma matriz $n \times n$ onde cada entrada a_{ij} pode ser definida como o número de arestas que são incidentes aos vértices v_i e v_j simultaneamente.

Figura 10 - Matriz de incidência



Fonte: Oliveira e Rangel, 2018

2.2.3 Graus dos Vértices

O grau de um vértice em um grafo, segundo Diestel [7], é o número de arestas incidentes a ele. Formalmente, o grau de um vértice v é denotado por $d_G(v)$ e é igual ao número de arestas que têm v como um dos extremos no grafo G. Vale ressaltar que em um laço, o vértice v é, ao mesmo tempo, as duas extremidades da aresta, sendo assim, em laço deve ser considerado como duas arestas para a contagem do grau do vértice. Além disso, no caso de dígrafos, também podemos definir o grau de entrada e de saída, que se referem, respectivamente, ao número de arestas que entram e saem de um vértice. Também se define o grau total de um grafo $G = (V, E)$ como a soma de todos os graus dos vértices deste grafo.

Aqui, podemos enunciar o primeiro teorema:

Teorema 1: *A soma dos graus de todos os vértices de um grafo $G = (V, E)$ é igual ao dobro do número de arestas.*

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2e$$

Prova: Como o grau de um vértice v_i é o número de arestas que são incidentes a ele, isso significa que uma aresta $e \in E(G)$ aumentará o grau total de um grafo em 2, visto que esta aresta é incidente a dois vértices. Além disso, se esta aresta for um laço, o grau do vértice também é aumentado em dois.

Como cada aresta é contada duas vezes na soma dos graus, temos que a soma total é exatamente duas vezes o número total de arestas. Assim, podemos escrever: $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2e$.
□

2.2.4 Caminhos, Ciclos e Conectividade

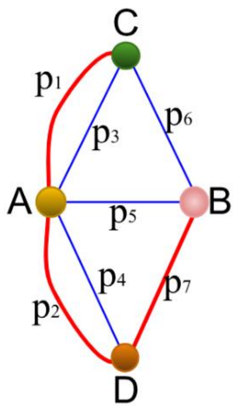
2.2.4.1 Caminhos

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um caminho em G é uma sequência finita de vértices, não necessariamente distintos, $P = v_0, v_1, \ldots, v_k$, onde $v_i \in V$ para $0 \leq i \leq k$ e $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ para $1 \leq i \leq k$. Cada par consecutivo de vértices v_{i-1} e v_i está conectado por uma aresta. Ademais, define-se $w(P)$, o comprimento do caminho P, como o somatório dos pesos de cada aresta do caminho, ou seja:

$$w(P) = \sum_{i=1}^{k} w(\{v_{i-1}, v_i\})$$

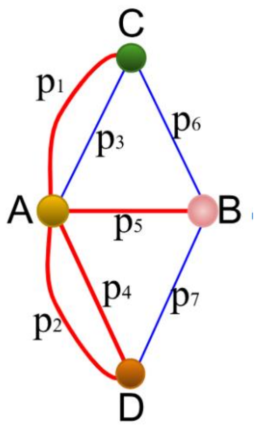
Se todos os vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$ são distintos, o caminho é chamado de caminho simples

Figura 11 - Caminho simples



Fonte: Autoria própria

Figura 12 - Caminho não-simples



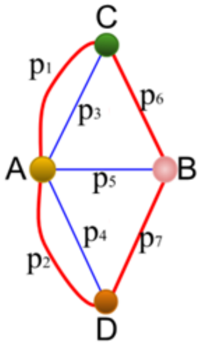
Fonte: Autoria própria

Nas figura 11, o grafo possui um caminho $P_1 = C, A, D, B$ simples. Já a figura 12 possui grafo possui um caminho $P_2 = C, A, D, A, B$ que não é simples.

2.2.4.2 Ciclos

Um ciclo em um grafo $G = (V, E)$ é um caminho $C = v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $v_0 = v_k$ (ou seja, o caminho começa e termina no mesmo vértice) e, também, as arestas $\{v_{i-1}, v_i\}$ são distintas para $1 \leq i \leq k$.

Figura 13 - Ciclo



Fonte: Autoria própria

A figura acima possui o ciclo $W = C, A, D, B, C$.

O comprimento do ciclo é o número de arestas que compõem o ciclo, e o peso total do ciclo é dado pela soma dos pesos das arestas que formam o ciclo:

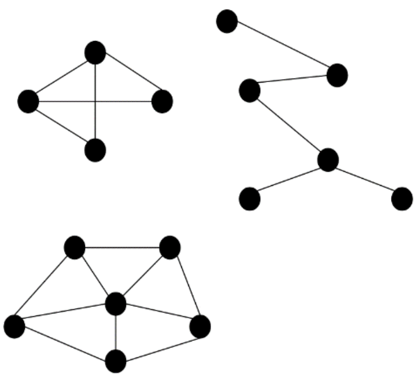
$w(C) = \sum_{i=1}^{k} w(\{v_{i-1}, v_i\})$ com $v_0 = v_k$.

2.2.4.3 Conectividade e grafos conexos

Dois vértices u, $v \in V(G)$ são ditos conexos se existe um caminho que os contenha. Caso contrário, dizemos que eles estão em componentes conexas distintas de G. Dado um vértice u de G, considere $V(C)$ o conjunto de todos os vértices de v tal que existe um caminho ligando u a v. O grafo $G(C)$ é dito ser a componente conexa de G que contém u. Se sobrou algum outro vértice, repita o processo até ter decomposto o grafo em componentes conexas de G.

Um grafo G é dito conexo se existir apenas uma componente conexa em G.

Figura 14 - Componentes conexas em um grafo



Fonte: Autoria própria

O Grafo acima possui três componentes conexas.

2.2.5 Caminhos e Ciclos Eulerianos e Hamiltonianos

2.2.5.1 Caminhos e Ciclos Eulerianos

Lembrando do problema resolvido por Euler das pontes de *Königsberg*, ele provou que não era possível o desafio proposto. Desta maneira, define-se um caminho $P = v_0, v_1, \dots, v_k$ de G como euleriano se, e somente se, atravessa cada aresta de G exatamente uma única vez. Além disto, define-se, também, um ciclo $C = v_0, v_1, \dots, v_k, v_0$ de G como euleriano se, e somente se, atravessa cada aresta de G exatamente uma única vez. Um grafo G é dito euleriano se possuir um ciclo euleriano.

Teorema 2: *Um grafo conexo com pelo menos dois vértices é euleriano se e somente se, todos os vértices do grafo tenham grau par.*

Prova: Para isso, temos que dividir a prova em duas etapas:

Etapa 1: Se $G = (V, E)$ é um grafo Euleriano, então todos os vértices têm grau par.

Etapa 2: Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo e todos os seus vértices têm grau par, então G é euleriano.

Etapa 1: Seja $G = (V, E)$ um grafo Euleriano, logo possui um ciclo Euleriano.

Como G é euleriano, todos os vértices precisam de, pelo menos, uma aresta de saída e outra de entrada. Seja um vértice v_i tal que $v_i \in V(G)$. Suponha $d_G(v_i) = 2n + 1$ (ou seja, possuir grau ímpar), então ele possuirá n arestas de entrada e $n + 1$ arestas de saída ou n arestas de saída e $n + 1$ arestas de entrada. Sendo assim, ao traçar um caminho pelo grafo, ou não conseguiremos sair deste vértice ou não conseguiremos voltar para ele, logo não conseguiremos concluir o ciclo euleriano.

Essa contradição mostra que todos os vértices em um grafo euleriano devem ter grau par. Portanto, a primeira parte da prova está concluída.

Etapa 2: Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo em que todos os seus vértices possuem grau par.

Escolha um vértice $v_i \in V(G)$ arbitrário como ponto de partida.

Como todos os vértices têm grau par, sempre que você entrar em um vértice, há uma aresta não percorrida para sair. Isso garante que você pode completar um ciclo inicial e retornar a v_i.

Construa um ciclo a partir de v_i seguindo arestas ainda não percorridas, até retornar ao vértice v_i.

Se todas as arestas foram percorridas, então esse ciclo é um ciclo euleriano, e a prova está completa.

Se ainda há arestas não percorridas, isso significa que o ciclo inicial não percorreu todas as arestas de G. Então escolha um vértice v do ciclo inicial que ainda possua arestas não percorridas. Inicie um novo ciclo a partir de v usando apenas as arestas não percorridas e que retorne a v. Como v pertence ao ciclo inicial, é possível conectar esse novo ciclo ao ciclo inicial, formando um ciclo maior. Repita o processo até que todas as arestas tenham sido percorridas. No final, você terá percorrido todas as arestas exatamente uma vez, formando um ciclo euleriano que visita todos os vértices e retorna ao ponto de partida.

Assim, conseguimos provar que se $G = (V, E)$ é um grafo conexo e todos os seus vértices têm grau par, então G é euleriano. □

Corolário 1: *Um grafo conexo tem um caminho euleriano se, e somente se, ele tem, exatamente, dois vértices de grau ímpar.*

Prova: Para isso, temos que dividir a prova em duas etapas:

Etapa 1: Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo e possui um caminho euleriano, então G possui exatamente dois vértices de grau ímpar

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Suponha que P seja um caminho euleriano em G, que começa no vértice u e termina no vértice v. Para cada vértice intermediário $w \neq u, v$ no caminho P, sempre que P entra em w, ele também deve sair, garantindo que o grau de w é par. Assim, todos os vértices intermediários em P têm grau par.

Como u é o vértice inicial, haverá um momento em que o caminho passará por ele pela última vez e não retornará mais. Como u é o vértice inicial, sempre que o caminho sai de u o seu grau se torna ímpar. Assim sendo, u deve ter grau ímpar, caso contrário, o caminho terminaria no próprio u.

Da mesma maneira, como v é o vértice final, haverá um momento em que o caminho passará por ele pela última vez e não sairá. Como v é um vértice que não é o inicial, sempre que o caminho entra em u o seu grau se torna ímpar. Assim sendo, u deve ter grau ímpar, caso contrário, o caminho não terminaria em u.

Como todos os vértices intermediários têm grau par e apenas os vértices u e v possuem grau ímpar, concluímos que em G existem exatamente dois vértices de grau ímpar.

Etapa 2: Se $G = (V, E)$ é um grafo conexo e possui exatamente dois vértices de grau ímpar, então G possui um caminho euleriano.

Sejam u e v os dois vértices de grau ímpar. Conecte estes dois pontos por uma nova aresta e. Agora, todo vértice possui grau par, logo existe um ciclo euleriano. Ao remover a aresta e, obtemos um caminho P em G que começa em u e termina em v. Esse caminho P é um caminho euleriano em G porque percorre todas as arestas de G exatamente uma vez. □

2.2.5.2 Caminhos e ciclos Hamiltonianos

Define-se caminho hamiltoniano em um grafo G como um caminho que passe por todas os vértices do grafo G exatamente uma única vez. Já um ciclo hamiltoniano em um grafo G define-se como um ciclo que passe por todas os vértices do grafo G exatamente uma única vez e retorne ao vértice inicial.

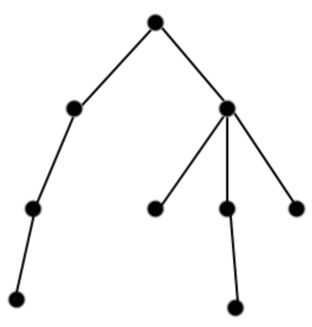
Segundo Bondy e Murty [4], esses ciclos são em homenagem a Hamilton que, em uma carta a seu amigo Graves, descreve um quebra-cabeça matemático. Segundo Santos [17], esse era o "Icosian Game", um jogo que utiliza um grafo dodecaédrico, no qual cada vértice representa uma cidade. O objetivo era que um viajante percorresse todas as 20 cidades, visitando cada uma apenas uma vez.

Ainda segundo Bondy e Murty [4], um dos principais problemas que ainda precisam ser resolvidos da Teoria dos Grafos é encontrar boas condições para que um grafo seja hamiltoniano, diferente dos grafos eulerianos.

2.2.6 Árvores

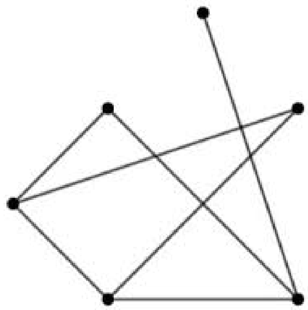
Uma árvore é definida por Bondy e Murty [4] como um grafo conexo acíclico. Um grafo acíclico é definido como um grafo que não contém ciclos. Mais formalmente, um grafo $T = (V, E)$ é chamado de árvore se T é conexo e acíclico.

Figura 15 – Exemplo de árvore



Fonte: Siaudzionis, 2024

Figura 16 - Exemplo de não-árvore



Fonte: Santana e Santana, 2023

Teorema 3: *Se $T = (V, E)$ é uma árvore, dois vértices quaisquer estão ligados por um único caminho.*

Prova: Por definição, sabemos que uma árvore T é um caminho sem ciclos. Suponha, por absurdo, que exista ao menos dois caminhos distintos em T que unam v_i *e* v_j, vértices quaisquer desta árvore.

Seja v_k o primeiro vértice onde os dois caminhos se separam. Como os dois caminhos possuem v_j, então existe ao menos um v_n entre v_i *e* v_j onde os dois caminhos voltam a se encontrar (na melhor das hipóteses, $v_n = v_j$).

Porém isso é um absurdo, pois acabamos de encontrar um ciclo nesta árvore. □

Além deste teorema, convidamos os professores e alunos mais empenhados a encontrar, no apêndice deste trabalho, um teorema o qual exibe diferentes definições do que é uma árvore, onde demonstramos que uma árvore também pode ser identificada como um grafo T que é minimalmente conexo, i.e. T é conexo mas $T - e$ é desconexo para qualquer aresta $e \in T$, e que, também, T é maximalmente acíclico, i.e. T não contém ciclos, mas $T + v_i v_j$ contém, para quaisquer dois vértices v_i, v_j não adjacentes em T.

3 O PROBLEMA DO CAMINHO MAIS CURTO

No mundo complexo e interconectado em que vivemos, a eficiência é fundamental para otimizar recursos, economizar tempo e reduzir custos. Um dos problemas mais universais que surgem em diversos aspectos da vida diária é o Problema do Caminho Mais Curto: encontrar a rota mais eficiente entre dois pontos. Esse problema não é apenas um conceito matemático abstrato, mas tem aplicações concretas que impactam diretamente nosso dia a dia, nossas indústrias e até a economia global.

Considere um cenário simples: planejar o trajeto para o trabalho pela manhã. Pode parecer uma questão trivial, mas ao perguntar "Qual é o caminho mais rápido para chegar ao trabalho?", estamos lidando diretamente com o problema do caminho mais curto. A complexidade aumenta quando se consideram condições de trânsito em tempo real, vias fechadas ou a necessidade de fazer várias paradas ao longo do percurso. Ser capaz de determinar a rota mais eficiente pode resultar em economia de tempo, redução de estresse e menor consumo de combustível, benefícios que são importantes para qualquer pessoa que enfrenta o trânsito nas áreas urbanas.

Vislumbrando exemplificar o problema do caminho mais curto, algumas situações foram criadas com várias especificidades. Dentre elas, podemos citar o Problema do Carteiro Chinês e o Problema do Caixeiro Viajante, que exemplificam algumas questões reais.

3.1 PROBLEMA DO CARTEIRO CHINÊS

Imagine um carteiro que precisa percorrer todas as ruas de um bairro para entregar correspondências, e ele quer fazer isso no menor tempo possível, sem precisar passar por uma rua mais de uma vez, a não ser que seja absolutamente necessário. Este é o Problema do Carteiro Chinês: encontrar o menor circuito que percorre todas as arestas de um grafo (representando ruas) pelo menos uma vez. Note que há similaridade deste problema com o encontrado por Euler na cidade de *Königsberg.* Na prática, a solução para este problema ajuda a otimizar rotas de serviços de entrega, coleta de lixo, ou qualquer situação em que seja necessário cobrir todas as conexões de uma rede.

3.2 PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE

Outra variante é o Problema do Caixeiro Viajante, que se refere ao desafio de encontrar o caminho mais curto que passa por um conjunto de cidades (vértices) exatamente uma vez e retorna à cidade de origem. Este problema é de grande importância em logística e planejamento de rotas, onde o objetivo é minimizar custos e tempo ao planejar viagens, entregas ou inspeções em várias localidades. Segundo Gê [10], a complexidade desse problema cresce exponencialmente com o aumento do número de cidades, fazendo com que novas estratégias para a resolução deste problema sejam elaboradas.

Esses problemas ilustram a aplicação prática e a complexidade do problema do caminho mais curto em diferentes contextos do mundo real. O desenvolvimento de algoritmos eficientes, como o algoritmo de Dijkstra para rotas com menor custo e as técnicas para abordar o Problema do Caixeiro Viajante e o Problema do Carteiro Chinês, facilitam a maneira como enfrentamos esses desafios.

4 O ALGORITMO DE DIJKSTRA

Segundo Barros [3], como resultado dos esforços para solucionar o problema do caminho mais curto, o holandês Edsger Dijkstra, em 1959, propôs um algoritmo, funcional para grafos ponderados com pesos não negativos, para encontrar não somente o caminho mais curto entre dois vértices em um grafo, mas o caminho mais curto entre um vértice e todos os outros vértices do referido grafo.

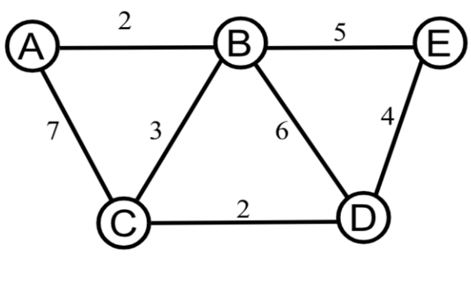
Este algoritmo funciona de maneira bastante intuitiva. Imagine que você está em um ponto inicial em um grafo e deseja encontrar o caminho mais curto para todos os outros pontos. Você deve passar por todos os outros vértices sempre procurando o caminho menos custoso para visitar primeiro, fazendo assim com que poupe esforços para não recalcular a rota completa todas as vezes.

Para isso, após definir o vértice inicial, utilizaremos uma tabela que terão as seguintes informações: Os vértices do grafo, o custo para chegar a um determinado vértice, o vértice predecessor, e a situação do vértice (visitado ou não visitado).

O vértice inicial deve possuir custo 0, visto que não há esforço empenhado para movimentação no grafo. Os demais vértices, enquanto não forem analisados, possuem seu custo definindo como ∞ e substituiremos sempre que encontrarmos um caminho cujo peso seja menor. Além disso, a situação do vértice inicia como “não visitado” e só passa a ser “visitado” caso já tenhamos analisado todas as possibilidades de caminho deste vértice.

Veja abaixo como podemos utilizar o algoritmo em um grafo ponderado:

Figura 17 - Exemplo de grafo ponderado



Fonte: Autoria Própria

Primeiro, escolhemos o vértice que queremos encontrar a árvore de menores caminhos. Vamos iniciar pelo vértice A.

Tabela 1 - Tabela inicial do Algoritmo de Dijkstra

Vértice	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Custo	0	∞	∞	∞	∞
Predecessor	-	-	-	-	-
Situação	Visitado	Não visitado	Não visitado	Não visitado	Não visitado

Fonte: Autoria Própria

Agora, devemos analisar os caminhos diretos que existem entre o vértice A e seus vizinhos. Dessa maneira, $w(AB) = 2 < \infty$ e $w(AC) = 7 < \infty$, portanto devemos substituir os valores na tabela e alterar o predecessor destes vértices.

Tabela 2 - Segundo passo do Algoritmo de Dijkstra

Vértice	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Custo	0	2	7	∞	∞
Predecessor	-	A	A	-	-
Situação	Visitado	Não visitado	Não visitado	Não visitado	Não visitado

Fonte: Autoria Própria

Em continuidade, devemos analisar agora o vértice de menor custo analisado até então. Desta maneira, devemos percorrer em direção ao vértice B e mudar sua situação para “visitado”.

O vértice B possui 3 vizinhos ainda não visitados, como saímos do vértice A e estamos utilizando o vértice B como passagem, devemos calcular o custo do caminho de A até os vértices como a soma dos custos de cada aresta. Então vamos atualizar estas novas informações. Temos:

$w(BC) = 3 < 7 \Rightarrow$ devemos analisar o caminho $P = A, B, C$.

$w(A, B, C) = w(AB) + w(BD) = 2 + 3 = 5$, logo o caminho mais curto para C é passando por B.

$w(BD) = 6 < \infty \Rightarrow \ w(A, B, D) = w(AB) + w(BD) = 2 + 6 = 8$.

$w(BE) = 5 < \infty \Rightarrow \ w(A, B, E) = w(AB) + w(BE) = 2 + 5 = 7$.

Atualizando a tabela temos:

Tabela 3 - Terceiro passo do Algoritmo de Dijkstra do Grafo da figura 3

Vértice	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Custo	0	2	5	8	7
Predecessor	-	A	B	B	B
Situação	Visitado	Visitado	Não visitado	Não visitado	Não visitado

Fonte: Autoria Própria

Seguindo o Algoritmo, vamos analisar o próximo vértice de menor custo ainda não visitado, que é o vértice C, mudando sua situação para "visitado". O vértice C possui apenas 1 vizinhos com situação "não visitado", vamos analisar o caminho de A até este vértice através de C.

$w(CD) = 2 < 8 \Rightarrow$ devemos analisar o caminho $P = A, B, C$, D.

$w(A, B, C, D) = w(A, B, C) + w(CD) = 5 + 2 = 7,$

Como $7 < 8$, atualizamos o custo e o predecessor de D na tabela.

Tabela 4 - Quarto passo do Algoritmo de Dijkstra do Grafo da figura 3

Vértice	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Custo	0	2	5	7	7
Predecessor	-	A	B	C	B
Situação	Visitado	Visitado	Visitado	Não visitado	Não visitado

Fonte: Autoria Própria

Como possuímos agora dois vértices não visitados que possuem o mesmo custo, podemos escolher arbitrariamente entre eles. Decidimos escolher analisar o vértice D, alterando sua situação. Dessa maneira, resta apenas um vértice com situação "não visitado".

$w(DE) = 4 < 7 \Rightarrow$ devemos analisar o caminho $P = A, B, C, D, E$.

$w(A, B, C, D, E) = w(A, B, C, D) + w(DE) = 7 + 4 = 11,$ como $w(A, B, C, D, E) > w(A, B, E)$, então mantemos o valor anterior para o custo do caminho.

Tabela 5 - Quinto passo do Algoritmo de Dijkstra do Grafo da figura 3

Vértice	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Custo	0	2	5	7	7
Predecessor	-	A	B	C	B
Situação	Visitado	Visitado	Visitado	Visitado	Não visitado

Fonte: Autoria Própria

Agora vamos visitar o último vértice restante, porém como não há mais vértices a serem analisados, apenas mudamos a situação de E e finalizamos a tabela.

Tabela 6 - Sexto passo do Algoritmo de Dijkstra do Grafo da figura 3

Vértice	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Custo	0	2	5	7	7
Predecessor	-	A	B	C	B
Situação	Visitado	Visitado	Visitado	Visitado	Visitado

Fonte: Autoria Própria

Assim, ao lermos a tabela, sabemos o custo total para chegar a determinado vértice partindo do vértice inicial, neste caso, o vértice A. Além disso, também sabemos o caminho que foi traçado até chegar a este vértice, através de seu predecessor e, também, como sabemos o predecessor de todos os vértices, basta fazer o caminho inverso para descobrir todo o caminho percorrido para chegar ao vértice desejado.

Pode-se formalizar o algoritmo de Dijkstra da seguinte maneira: Dado um grafo ponderado $G = (V, E)$ com função de peso $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, e um vértice inicial $s \in V$, o algoritmo de Dijkstra encontra o menor caminho de s para todos os outros vértices de G.

Para iniciar, define-se $\delta(s, v)$ como a menor distância entre os vértices s e v. Também, para cada vértice, defina $v \in V$, $d(v) = \infty$ (distância inicial) e $d(s) = 0$. Além disso, deve-se criar dois conjuntos de apoio para o algoritmo, um conjunto não vazio $Q = V$ de vértices ainda não visitados e um conjunto vazio S para armazenar os vértices cujas menores distâncias já foram determinadas.

Dessa maneira, o processo iterativo deve funcionar enquanto $Q \neq \emptyset$ (Q ainda não está vazio). Para iniciar, selecione um vértice $u \in Q$ tal que $d(u)$ seja mínimo. Após isso, remova u de Q e adicione u ao conjunto S. Para cada vértice $v \in V$ adjacente a u, se $d(v) > d(u) + w(u, v)$, então $d(v) = d(u) + w(u, v)$.

Desta maneira, a distância $d(v)$ armazenada para cada vértice v será a menor distância do vértice s até v. Porém, é preciso garantir matematicamente que esta correção na distância valerá para todas as iterações, ou seja, que $d(v) = \delta(s, v)$. É possível provar isso por indução da seguinte maneira:

No início do algoritmo, apenas o vértice s está em S, e $d(s) = 0$. Para todos os outros vértices, $d(v) = \infty$, o que indica que ainda não foram visitados.

Suponha que, após k iterações, para todo $v \in S$, $d(v)$ é a menor distância do vértice s ao vértice v, então $\delta(s, v) = d(v) = d(u) + w(u, v)$. Agora é preciso provar que para um vértice u, o próximo vértice selecionado, $d(u) = \delta(s, u)$ também é válido.

Vamos supor, para obter uma contradição, que $d(u) > \delta(s,u)$. Isso significa que existe um caminho mais curto P de s a u com $\delta(s,u)$ como comprimento total. Se P não passa por nenhum vértice de S antes de chegar a u, isso contradiz a definição de $d(u)$ como a menor distância entre s e u entre todos os vértices em Q, pois todos os menores caminhos entre s e todos os vértices anteriores a u já foram calculados e estes vértices estão em S.

Agora, suponha, também por contradição, que P passa por um vértice $v \in S$ antes de chegar a u. Seja $P = (s, \dots, v, u)$. Como $v \in S$ e pela hipótese de indução $d(v) = \delta(s,v)$, temos que $\delta(s,u) = \delta(s,v) + w(v,u)$. Pela maneira como o algoritmo de Dijkstra armazena as informações, quando o vértice v foi visitado, o valor de $d(u)$ foi atualizado como $d(u) \leq d(v) + w(v,u) = \delta(s,v) + w(v,u) = \delta(\mathrm{s,u})$.

Mas isso contradiz a suposição de que $d(u) > \delta(s,u)$. Portanto, tem-se que é verdadeira a afirmação $d(u) = \delta(s,u)$. Dessa maneira, pode-se aplicar o algoritmo de Dijkstra com segurança matemática.

Além de ser uma ferramenta teórica importante, o algoritmo de Dijkstra tem aplicações práticas no mundo moderno, especialmente em sistemas de navegação e planejamento de rotas. Por exemplo, ao traçar o caminho mais curto entre duas localizações em um aplicativo de carona, o algoritmo pode ser usado para determinar a rota mais rápida, levando em consideração fatores como trânsito, bloqueios de vias e desvios necessários.

5 APLICAÇÃO DO ALGORITMO DE DIJKSTRA EM PROBLEMAS COTIDIANOS SOBRE CAMINHOS OTIMIZADOS

O algoritmo de Dijkstra é amplamente utilizado em diversos campos que exigem a otimização de rotas e caminhos mínimos. Sua aplicação abrange desde o planejamento de evacuações até a logística de transporte de mercadorias. A seguir, são destacados exemplos de suas aplicações práticas, com base em estudos acadêmicos recentes.

5.1 OTIMIZAÇÃO DE ROTAS EM SISTEMA DE DELIVERY

Em 2023 Cavalcante (ver [6]) mostra como o algoritmo de Dijkstra foi aplicado para otimizar rotas de sistemas de entrega delivery na cidade de Russas, Ceará. Utilizando o conceito de grafos, o estudo buscou aprimorar a eficiência das rotas de entrega, levando em consideração fatores como condições viárias, presença de semáforos e iluminação das vias. O grafo foi gerado a partir de cruzamentos e ruas do centro comercial da cidade, e, com base em entrevistas realizadas com entregadores locais, foram atribuídos pesos adicionais às arestas, considerando elementos como semáforos sequenciais, ruas mal iluminadas e vias em más condições.

O uso do algoritmo de Dijkstra com essas ponderações adicionais permitiu que o sistema evitasse rotas problemáticas e gerasse rotas mais eficientes, resultando em uma melhoria significativa no tempo de entrega e aumento na segurança dos entregadores. Ao adaptar o algoritmo para considerar variáveis locais, o estudo demonstrou como o algoritmo de Dijkstra pode ser aplicado para resolver problemas práticos em pequenas cidades, oferecendo uma solução robusta e adaptada ao contexto específico de Russas.

5.2 SEGURANÇA E PLANEJAMENTO DE EVACUAÇÃO

Outra aplicação crucial do algoritmo de Dijkstra é em cenários de emergência. Silva (ver [19]) utilizou o algoritmo para otimizar rotas de evacuação em uma refinaria hipotética, simulando cenários de nuvem tóxica. O estudo demonstrou que o uso do algoritmo pode minimizar o tempo de evacuação e o risco individual durante o trajeto, oferecendo uma solução eficaz para o planejamento de emergências em áreas de alto risco. Essa abordagem é especialmente importante na indústria petroquímica, onde o planejamento adequado de evacuação pode salvar vidas (SILVA, 2017).

Além destes problemas já bem documentados e analisados, também pode-se citar exemplos de situações vivenciadas pelos estudantes rotineiramente.

5.3 PLANEJAMENTO DE ROTAS ESCOLARES

Um dos problemas mais comuns que os estudantes enfrentam é a escolha do melhor trajeto para ir à escola ou a outros locais importantes, como casas de amigos, clubes ou locais de estudo. Imagine que um estudante utiliza o transporte público ou mesmo uma bicicleta para se deslocar até a escola e deseja encontrar o caminho mais rápido ou mais curto. Nesse contexto, as ruas e avenidas da cidade podem ser modeladas como um grafo, onde os pontos de interesse, como a escola e outros destinos, correspondem aos vértices, e as ruas que conectam esses pontos são as arestas ponderadas pelas distâncias ou pelo tempo de deslocamento.

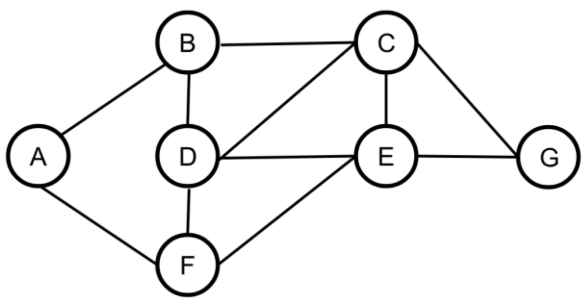
Por exemplo, o estudante mora no ponto A, e a escola está no ponto E. Outras possíveis paradas no caminho, como a casa de um colega (ponto B) ou a praça (ponto C), também são vértices no grafo. As arestas entre esses vértices podem ser representadas pelas ruas que conectam esses locais, e o peso dessas arestas pode ser o tempo estimado de viagem em minutos. Utilizando o algoritmo de Dijkstra, o estudante pode calcular o caminho mais curto de sua casa (A) até a escola (E), considerando as diferentes opções de trajeto. O algoritmo pode ajudar a evitar congestionamentos ou escolher rotas com menos tempo de viagem.

5.4 ESCOLHA DE ROTAS EM APLICATIVOS DE CARONA

Outra aplicação direta do algoritmo de Dijkstra no cotidiano dos estudantes é o uso de aplicativos de carona, como Uber ou 99, que são amplamente utilizados para deslocamento. Esses aplicativos utilizam algoritmos semelhantes e mais robustos para calcular a rota mais eficiente entre o ponto de partida e o destino, considerando fatores como trânsito, bloqueios de ruas e a distância.

Imagine que o grafo abaixo é uma representação de uma localidade onde o estudante vive e ele está em sua casa solicitando uma carona através de um desses aplicativos.

Figura 18 - simulação de vizinhança



Fonte: Autoria própria

Assim, se um estudante solicita uma carona de sua casa até um evento esportivo no ponto G, então durante o trajeto, o motorista pode precisar passar por outros pontos de interesse como um shopping (ponto F) ou uma estação de metrô (ponto D). O algoritmo de Dijkstra pode ser utilizado para determinar o caminho mais eficiente, levando em consideração o trânsito ou a necessidade de passar por esses pontos.

6 POR QUE ENSINAR TEORIA DOS GRAFOS NO ENSINO MÉDIO?

De maneira simples, entende-se que a matemática na escola (principalmente no Ensino Médio), por diversas vezes, se distancia da vida do aluno. Um dos principais motivos para o investimento em tempo e trabalho da teoria de grafos para o Ensino Médio é tentar retornar a disciplina para um local de relevância no cotidiano prático do estudante. Também em virtude disso, Baldino [1] acredita que é necessário buscar metodologias diferentes das tradicionalmente utilizadas em sala de aula para o processo de aprendizagem da matemática.

Segundo Pavanello [14], dois dos principais motivos para que a matemática seja ensinada na escola é que, primeiro, ela desenvolve o raciocínio e, segundo que ela está presente no cotidiano. Tendo isso em vista, um dos grandes questionamentos dos alunos de Ensino Médio em relação à matemática que é ensinada nesta fase educacional é sobre a utilização em suas vidas práticas dos conhecimentos desenvolvidos em sala de aula. Há um sentimento de distanciamento entre a matemática e a "vida real" na percepção dos estudantes, tal percepção os leva a um estado de desmotivação em aprender matemática.

Com isso em mente, se vê que os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) traçam como objetivo do Ensino Médio no Brasil a combinação entre as áreas do conhecimento e a prática deles no dia a dia, fazendo com que o que se aprende na escola tenha significado e valor para o discente também fora do ambiente acadêmico, o levando a integrar seus desenvolvimentos cognitivos com as necessidades de sua sociedade, buscando o aprendizado contínuo em todas as esferas de sua vida.

No contexto educacional brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) estabelece diretrizes básicas com relação à educação completa do aluno de modo a promover a formação de habilidades interdisciplinares. Olhando para tais contextos, surge a necessidade de incluir o conceito de Teoria dos Grafos no currículo do Ensino Médio, não apenas por seu valor teórico inerente, mas porque forneceria aos alunos do Ensino Médio ferramentas eficazes para lidar com problemas da vida real. A justificativa e a postura apreciativa em relação à inclusão deste tema no planejamento curricular têm muito a ver com o exercício prático de resolver o problema do caminho mais curto por meio das aplicações do algoritmo de Dijkstra, que está em linha com os objetivos da BNCC.

A BNCC destaca a importância de desenvolver nos estudantes competências gerais, como o raciocínio lógico, a capacidade de resolver problemas complexos e a aplicação de conceitos matemáticos em situações cotidianas. Em suas primeira e quarta competências específicas de matemática, respectivamente, a BNCC cita:

> “Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.” (BNCC, 2018, pág. 523)
>
> “Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.” (BNCC, 2018, pág. 523)

A Teoria dos Grafos dá aos alunos a base necessária para modelar e solucionar uma ampla variedade de problemas que eles podem encontrar no cotidiano. Esses problemas podem se estender desde a otimização de rotas e o planejamento de redes de comunicação até a análise de redes sociais, evidenciando a amplitude e a relevância atual do tema.

Quando estes conceitos são abordados sob a perspectiva prática do algoritmo de Dijkstra, oferecem aos alunos a oportunidade de explorar a matemática de forma aplicada, demonstrando como a abstração teórica pode ser utilizada para enfrentar desafios reais. Isso reforça a capacidade dos estudantes de perceber a matemática não apenas como uma disciplina acadêmica, mas como uma linguagem universal para a resolução de problemas.

6.1 O ALGORITMO DE DIJKSTRA NO PROCESSO DE APRENDIZAGEM NO ENSINO MÉDIO

Como dito anteriormente, em [6] vê-se a necessidade de encontrar novas formas para ensinar matemática no Ensino Médio, por isso o ensino da teoria de grafos, aliada ao algoritmo de Dijkstra pode ser uma ferramenta essencial para esse objetivo.

O ensino do algoritmo de Dijkstra é especialmente importante quando nos deparamos com o problema do caminho mais curto, uma questão que está presente em diversas áreas do conhecimento e da vida moderna. Esse algoritmo, que permite encontrar o caminho mais eficiente entre dois pontos em um grafo, é uma ferramenta poderosa para abordar algumas adversidades do cotidiano, como o planejamento de rotas urbanas. Para isto, o algoritmo de Dijkstra pode ser usado para demonstrar aos alunos como sistemas de navegação (como GPS) determinam o caminho mais rápido entre dois locais, considerando fatores como tempo de viagem e distância, para isso, utilizando estas condições como os pesos das arestas em um grafo ponderado.

Além desse, outro exemplo importante é a otimização de rotas, seja de ônibus, de entregas de mercadorias ou serviços de emergência. Já no campo das telecomunicações, o algoritmo de Dijkstra foi utilizado por Barreto [2] para o planejamento e recomposição das redes de telecomunicações, com o objetivo de garantir a sobrevivência da rede frente a falhas e aumento de demanda. Estas aplicações mostram como os conceitos da Teoria dos Grafos se tornam ferramentas práticas na infraestrutura social e digital que sustenta o nosso mundo.

7 PROPOSTA DE ABORDAGEM PEDAGÓGICA PARA O ENSINO DO ALGORITMO DE DIJKSTRA DO ENSINO MÉDIO

7.1 PUBLICO ALVO

Este trabalho tem como intuito maior trazer o conhecimento da Teoria dos Grafos para alunos do Ensino Médio, preferencialmente do terceiro ano, que já possuem um conhecimento básico de matemática discreta e conceitos fundamentais de álgebra e geometria, porém pode ser adaptado para o ensino em outras turmas.

7.2 MATERIAIS NECESSÁRIOS

Com o intuito de ser um aprendizado mais interativo e dinâmico, tornando o aluno o ator principal do processo de aprendizagem, indica-se a utilização de mapas impressos da vizinhança da escola, pinos ou adesivos para marcar pontos de referência e esquinas, imagens (impressas ou digitais) de grafos, régua e barbante para medir o peso das arestas, lápis e papel para desenhar os grafos, computadores com acesso a ferramentas de visualização gráfica, como o GeoGebra, opcionalmente.

7.3 ETAPAS DA PROPOSTA

7.3.1 Apresentação do problema do caminho mais curto

Primeiramente, divida a turma em grupos, de acordo com a necessidade da turma (aconselha-se grupos com não muitos integrantes, para que a experiência seja vivenciada de maneira integral por todos) e apresente aos alunos o mapa impresso das regiões circunvizinhas à escola, pedindo para que eles marquem com os pinos ou adesivos as esquinas e principais pontos de referência. Peça para que eles também meçam as medidas de distância entre os pontos marcados. Se houver curvas no trajeto, os alunos devem encontrar uma maneira de conseguir medir (seja por meio de aproximações poligonais, utilizando o barbante ou outro meio).

Logo após, pergunte a eles qual seria o caminho mais curto entre dois pontos quaisquer e como eles poderiam garantir que este é, realmente, o caminho mais curto. Aproveite para enunciar a importância de encontrar o caminho mais curto (ou menos custoso) em diversas áreas da vida cotidiana.

Após um período de discussão a respeito do tema, apresente que há uma ferramenta matemática capaz de garantir a existência de um caminho mais curto e, também, de encontrá-lo, não somente entre estes dois pontos, mas entre o ponto inicial e qualquer outro ponto desejado do mapa.

7.3.2 Introdução Teórica

Após os alunos entenderem o problema, deve-se, primeiramente, introduzir os conceitos teóricos da Teoria dos Grafos, definindo para os alunos os conceitos de vértices e arestas com exemplos do cotidiano, apresentando, após, os diversos tipos de grafos e suas definições. Atentar para os grafos ponderados e como eles podem se assemelhar aos mapas que estão impressos. Além disso, recomenda-se mostrar algumas situações da vida real que podem e já foram associadas a um grafo, como o problema das pontes de Königsberg, dentre outros.

Por fim, anuncie a ferramenta que pode auxiliar a solucionar o problema proposto: O Algoritmo de Dijkstra. Neste momento, deve-se enunciar o Algoritmo de Dijkstra e fazer uma explicação sobre o funcionamento do algoritmo e de sua aplicação para resolver o problema do caminho mais curto.

7.3.3 Aplicação Prática

7.3.3.1 Construção do Grafo:

Após a discussão teórica sobre grafos e sobre o Algoritmo de Dijkstra, os alunos devem modelar e representar o mapa e suas marcações como um grafo, com os vértices sendo as esquinas e pontos de referência e as arestas sendo as ruas que os conectam. Os pesos das arestas serão as distancias medidas nos mapas (um modelo simplificado).

7.3.3.2 Aplicação do Algoritmo:

Cada grupo deve se colocar como um motorista de aplicativo de caronas e buscar o melhor caminho possível (o menos custoso) para sair da escola e ir a um determinado ponto (escolhido pelo professor), pois recebeu um pedido de carona. Para isso, pergunte como o Algoritmo de Dijkstra poderia os ajudar e os oriente a utilizar o algoritmo para encontrar o menor caminho até este ponto.

7.3.4 Discussão dos Resultados

Com base nas ideias de Pavanello [14] sobre a avaliação em matemática, que deve refletir a maneira pedagógica na forma como a matemática é aplicada em sala de aula, e visar o desenvolvimento crítico do aluno. Segundo Pavanello [14], os alunos não apenas devem saber executar o procedimento, mas, principalmente, devem construir o conhecimento de maneira que demonstrem uma compreensão do raciocínio matemático e de como ele se relaciona com sua vida, sendo capaz de, a partir daí, fazer abstrações que culminem na matemática como a conhecemos geralmente.

Considerando tal perspectiva, após a confecção dos grafos e aplicação do algoritmo, os grupos apresentam seus grafos e os caminhos mais curtos encontrados e discutem eventuais diferenças nos resultados. A partir daí, elabore algumas situações:

1) Partindo da escola, quais seriam os menores caminhos para todos os pontos do mapa?
2) Em uma rua (necessária para o menor caminho entre a escola e o ponto escolhido) um buraco se formou e ela precisou ser interditada para a manutenção da prefeitura. A partir de agora, qual será o "novo" caminho mais curto para sair da escola e chegar ao ponto escolhido?
3) No pedido de carona, havia uma parada solicitada para um determinado ponto (fora do caminho mais curto), determine o menor caminho possível para chegar ao ponto terminal da carona, passando pelo ponto de parada.
4) Pergunte o que aconteceria se houvesse vários caminhos com o mesmo peso. Como o algoritmo de Dijkstra lidaria com isso? Leve os alunos a discutirem a necessidade de critérios adicionais para desempate, como preferir rotas com menos paradas.
5) Proponha a criação de um "atalho" no mapa, como uma nova estrada ou via mais rápida, e pergunte se ele realmente oferece uma vantagem significativa no cálculo do caminho mais curto. Os alunos podem discutir como a inclusão de novas rotas afeta o grafo original.
6) Discuta com os alunos se haveria diferença no cálculo do caminho mais curto se todos os pesos fossem retirados das arestas. A partir daí, como calcularíamos o novo caminho? Peça para que eles encontrem, se for necessário, um novo caminho mais curto.

Após essas perguntas, a depender de como a sala estaria desenvolvendo o raciocínio algorítmico, o professor poderia aprofundar a respeito dos temas com outras perguntas envolvendo grafos direcionais, por exemplo:

1) Explore como a aplicação do algoritmo muda se as ruas forem unidirecionais ou bidirecionais. Peça aos alunos para adaptar seus grafos conforme essas condições.
2) Em algumas cidades, ruas que antes eram de mão dupla podem se tornar de mão única. Peça aos alunos para modificar o grafo original, transformando algumas arestas bidirecionais em unidirecionais, e verificar como isso altera o caminho mais curto. Pergunte se, em certos casos, a mudança de direção pode causar uma grande diferença no tempo ou distância percorridos.
3) Algumas vias podem ter restrições, como proibição de caminhões ou ônibus. Transforme essas vias em arestas direcionadas ou bloqueadas para certos tipos de veículos, e peça aos alunos para calcular o caminho mais curto para diferentes tipos de transporte, considerando essas restrições.
4) Introduza a ideia de um grafo que muda ao longo do tempo. Por exemplo, em um determinado horário, uma via unidirecional pode voltar a ser bidirecional. Proponha uma simulação em que o caminho mais curto é recalculado várias vezes ao longo do dia, refletindo essas mudanças que podem ocorrer nas cidades e precisa ser calculado pelos aplicativos de carona. O objetivo seria avaliar como a direção de ruas influenciaria trajetos em diferentes momentos.

8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Esta dissertação demonstrou como a Teoria dos Grafos e, em particular, o Algoritmo de Dijkstra podem ser poderosas ferramentas pedagógicas no Ensino Médio, conectando a matemática a situações práticas e cotidianas. Ao abordar o problema do caminho mais curto e utilizar aplicativos de carona como exemplo, foi possível criar uma ponte entre a abstração matemática e problemas do mundo real, mostrando aos alunos como a matemática pode ser aplicada de maneira tangível e útil.

O ensino da matemática no Brasil ainda enfrenta o desafio de tornar-se mais atrativo e relevante para os estudantes, que muitas vezes percebem a disciplina como distante de suas vidas diárias. Ao integrar conceitos da Teoria dos Grafos no currículo do Ensino Médio, atendendo às diretrizes da BNCC, os educadores podem promover o desenvolvimento de competências cruciais, como o raciocínio lógico, a resolução de problemas complexos e o pensamento crítico. Além disso, o uso do Algoritmo de Dijkstra possibilita que os alunos vejam a matemática como uma ferramenta ativa na solução de problemas do cotidiano, como o planejamento de rotas, a logística de transporte e até a navegação por aplicativos de carona.

A proposta pedagógica desenvolvida nesta dissertação destaca a importância de metodologias interativas e práticas, nas quais os alunos desempenham um papel ativo no processo de aprendizagem. Ao modelar situações reais como grafos e aplicar o Algoritmo de Dijkstra para resolver problemas, os estudantes não apenas compreendem os conceitos teóricos, mas também experimentam a matemática de uma forma concreta e envolvente.

Em termos de perspectivas futuras, este trabalho sugere a expansão do uso da Teoria dos Grafos para outras áreas do Ensino Médio, ampliando o escopo de aplicações práticas e interdisciplinaridade com outras disciplinas, como geografia e física.

Assim, conclui-se que a aplicação de uma abordagem prática e significativa, como a proposta nesta dissertação, não apenas melhora a aprendizagem da matemática, mas também motiva os alunos a explorarem novos conceitos e a utilizarem o conhecimento adquirido em suas vidas. A matemática, ao ser apresentada como uma ferramenta para solucionar problemas reais, pode ser ressignificada e ganhar novo valor no contexto educacional moderno.

REFERÊNCIAS

[1] BALDINO, R. R. Ensino da Matemática ou Educação Matemática? **Temas & Debates. Matemática, ensino e educação: concepções fundamentais**, p. 51–60, 1991. Disponível em: https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/td/article/view/2607. Acesso em: 29 set. 2024.

[2] BARRETO, Maurício; SANTOS, José V. Canto dos; VILLAMIL, Marta B. **Sistema computacional baseado em algoritmo genético para planejamento e recomposição de redes de telecomunicações**. In: *Anais do SBPO 2011 – Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*. Disponível em: http://www.din.uem.br/~ademir/sbpo/sbpo2011/pdf/87918.pdf. Acesso em: 12 out. 2024.

[3] BARROS, Edson; ALMEIDA, Lucas. **Algoritmo de dijkstra: apoio didático e multidisciplinar na implementação, simulação e utilização computacional**. *Proceedings of the ICECE 2007*. Disponível em: http://meusite.mackenzie.com.br/edsonbarros/publicacoes/ICECE2007_212.pdf. Acesso em: 12 out. 2024.

[4] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory With Applications**. 5ª. ed. New York: American Elsevier, 1976.

[5] BRASIL. [Constituição (1988)]. Constituição da República Federativa do Brasil. Brasília, DF: Senado Federal, 2016. 496 p. Disponível em: https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/518231/CF88_Livro_EC91_2016.pdf. Acesso em: 03 outubro 2024.

[6] CAVALCANTE, Milene Casemiro. **Aplicação de Grafos e Ponderação Baseada em Múltiplos Fatores nas Rotas de Sistemas Delivery na Cidade de Russas**. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Ciência da Computação) – Universidade Federal do Ceará, Campus de Russas, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/75579/1/2023_tcc_mccavalcante.pdf. Acesso em: 01 out. 2024.

[7] DIESTEL, R. **Graph Theory**. 5ª. ed. Heidelberg: Springer Berlin, 2017.

[8] DOLL JR, W. E. **Currículo: uma perspectiva pós-moderna**. Trad. Maria Adriana Veríssimo Veronese. Porto alegre: Artes Médicas, 1997.

[9] EVULPO. **Modelos de grafos: Árvores e algoritmo de Krustal**. *Evulpo*, 2024. Disponível em: https://evulpo.com/pt/pt/dashboard/lesson/pt-macs-sec-04math-models-01graph-models-06trees. Acesso em: 12 out. 2024.

[10] GÊ, Maria Clara de Oliveira; MENEZES, Matheus da Silva; FERREIRA, Vanessa Elionara Souza. **Simulated Annealing aplicado ao problema do caixeiro viajante:**

um estudo de caso. *Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência e Tecnologia)* – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, 2018. Disponível em: https://repositorio.ufersa.edu.br/server/api/core/bitstreams/27e55fe8-a999-44fc-9665-1ae38a99bad6/content. Acesso em: 12 out. 2024.

[11] H3DEMA. **Componentes conectados em grafos**. *H3Dema Blogspot*, 10 out. 2016. Disponível em: https://h3dema.blogspot.com/2016/10/componentes-conectados-em-grafos.html. Acesso em: 12 out. 2024.

[12] HERMUCHE, Anwar. **Teoria dos grafos: introdução, definições, matriz e lista de adjacência**. *Medium*, 15 ago. 2019. Disponível em: https://medium.com/@anwarhermuche/teoria-dos-grafos-introdu%C3%A7%C3%A3o-defini%C3%A7%C3%B5es-matriz-e-lista-de-adjac%C3%AAncia-2252d4800a44. Acesso em: 12 out. 2024.

[13] OLGIN, Clarissa de Assis; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Critérios para seleção de temas de interesse para o Currículo de Matemática do Ensino Médio.** Perspectivas da Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, v. 8, n. 17, 2015. Disponível em: http://seer.ufms.br/index.php/pedmatr. Acesso em: 29 set. 2024

[14] PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. **Avaliação em Matemática: algumas considerações**. Estudos em Avaliação Educacional, São Paulo, v. 17, n. 33, p. 29–42, 2006. DOI: 10.18222/eae173320062125. Disponível em: https://publicacoes.fcc.org.br/eae/article/view/2125. Acesso em: 28 set. 2024.

[15] RANGEL, Socorro; OLIVEIRA, Valeriano A. de; ARAUJO, Silvio A. **Elementos de Teoria dos Grafos: Notas de Aula**. São José do Rio Preto: IBILCE/UNESP, 2018. p. 173. Disponível em: https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/MatematicaAplicada/docentes/socorro/grafos---notas-de-aula_set2018.pdf. Acesso em: 12 out. 2024.

[16] SANTANA, Heides Lima de; SANTANA, Thiago Pereira. **O número cromático de um grafo e suas aplicações no ensino médio**. Revista de Educação, Ciências e Matemática, Petrolina-PE, v. 13, n. 32, dez. 2023. Disponível em: https://www.periodicos.univasf.edu.br/index.php/revasf/article/view/2433. Acesso em: 13 out. 2024.

[17] SANTOS, Marcelo de Souza. **Ciclos Hamiltonianos em Grafos.** Orientador: Carlos Hoppen. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/150239/001007078.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 16 set. 2024.

[18] SIAUDZIONIS, Lucca. **Teoria dos Grafos - Parte 1**. NOIC, 2023. Disponível em: https://noic.com.br/materiais-informatica/curso/graphs-01/. Acesso em: 13 out. 2024.

[19] SILVA, Gisele Tatiane de Lima e. **Aplicação do Algoritmo de Dijkstra na Otimização Multiobjetivo de Rotas de Evacuação em Cenários de Nuvem Tóxica**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/25589/1/DISSERTA%c3%87%c3%83O%20Gisele%20Tatiane%20de%20Lima%20e%20Silva.pdf. Acesso em: 01 out. 2024.

[20] SOUZA, I.F. **O ensino da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Eventos Pedagógicos, Sinop, v. 10, n. 2 (27. ed.), p. 816-825, ago./dez. 2019. Disponível em: https://periodicos.unemat.br/index.php/reps/article/view/10243. Acesso em: 29 set. 2024.

APÊNDICE A –

Seja $T = (V, E)$ um grafo, onde $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots. v_k\}$ é o conjunto de vértices do grafo e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, \dots. e_k\}$.

Podemos Definir árvore como um grafo conexo que não possui ciclos.

Teorema 4: *As seguintes afirmativas são equivalentes para um grafo T:*

(i) *T é uma árvore;*

(ii) *Quaisquer dois vértices em T são unidos por um único caminho em T;*

(iii) *T é minimalmente conexo, i.e., T é conexo, mas $T - e$ é desconexo para qualquer aresta e $\in T$;*

(iv) *T é maximalmente acíclico, i.e., T não contém ciclos, mas $T + v_i v_j$ contém, para quaisquer dois vértices v_i, v_j não adjacentes em T.*

Vamos provar a equivalência de cada uma delas:

$(i) \to (ii)$:

Por definição, sabemos que uma árvore T é um caminho sem ciclos.

Suponha, por absurdo, que exista ao menos dois caminhos distintos em T que unam v_i *e* v_j.

Seja v_k o primeiro vértice onde os dois caminhos se separam.

Como os dois caminhos possuem v_j, então existe ao menos um v_n onde os dois caminhos voltam a se encontrar (na melhor das hipóteses, $v_n = v_j$).

Porém isso é um absurdo, pois acabamos de encontrar um ciclo nesta árvore.

$(ii) \to (iii)$:

Seja T um grafo em que quaisquer dois vértices são unidos por um único caminho P, assim T é conexo.

Sejam v_j, v_n vértices vizinhos e e a aresta que os une.

Considerando $T - e$, não há mais conexão entre v_j e v_n.

Logo, qualquer aresta e retirada de T o torna desconexo.

$(iii) \to (iv)$:

Seja T um grafo minimalmente conexo.

Lema 1: *Se uma aresta $e \in E(G)$ está em um ciclo, então $G - e$ tem o mesmo número de componentes conexas de G.*

Vamos supor que uma aresta e está em um ciclo no grafo G, mas o grafo $G - e$ não tem o mesmo número de componentes conexas que G.

Vamos considerar que $G - e$ tem mais componentes conexas do que G.

Isso implicaria que a remoção da aresta e de G teria dividido uma componente conexa em duas ou mais.

Todo caminho que precisasse de e poderia ser traçado por um caminho que faz uma volta no circuito, evitando e.

Isso também contradiz a suposição inicial de que $G - e$ tem mais componentes conexas do que G.

Assim, podemos concluir que se uma aresta está em um ciclo, então $G - e$ tem o mesmo número de componentes conexas que G. □

Pelo Lema 1, como T é minimalmente conexo, logo T não pode possuir ciclos.

Sejam $v_j,\ v_n$ vértices quaisquer desse grafo.

Como T é minimalmente conexo, logo existe caminho que une v_j e v_n.

Vamos adicionar uma nova aresta ao grafo para unir os dois vértices.

Agora temos dois caminhos completamente distintos que unem os dois vértices ao grafo.

Isso é um ciclo, logo, o grafo é maximalmente acíclico.

$(iv) \rightarrow (i)$:

Seja T um grafo maximalmente acíclico, ou seja, T não contém ciclos, mas qualquer adição de uma aresta entre dois vértices não adjacentes criará um ciclo.

Queremos mostrar que T é uma árvore, ou seja, um grafo conexo sem ciclos.

Para provar que T é conexo, podemos usar a redução ao absurdo.

Suponha que T não seja conexo.

Isso significaria que existem dois vértices $v_i,\ v_j$ em T que não estão conectados por um caminho.

No entanto, como T é maximalmente acíclico, adicionar uma aresta entre v_i e v_j resultaria em um ciclo. Isso significa que v_i e v_j já seriam ligados em T.

Portanto, T deve ser conexo.

Agora, suponha que T contenha um ciclo.

Isso implicaria que T não seria maximalmente acíclico, pois teria um ciclo.

Logo, se T é maximalmente acíclico, então é uma árvore.

Como $(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (iv) \rightarrow (i)$, então provamos que todas as afirmações são equivalentes. □