



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TEORIA DE CIRCUITOS PARA A ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGA

por

Helder Silvério Borba

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo (Orientador-UFPE)

Prof. Maurício Domingues Coutinho Filho (DF – UFPE)

Prof. Peter A. B. Schulz (IF - UNICAMP)

Recife - PE, Brasil
Agosto - 2005



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física - CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Helder Silvério Borba

TEORIA DE CIRCUITOS PARA A ESTATÍSTICA DE CONTAGEM DE CARGA

A Banca Examinadora composta pelos Professores Antônio Murilo Santos Macêdo (Presidente e Orientador), Maurício Coutinho Domingues Filho, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Peter Alexander Bleinroth Schulz, do Insituto de Física da UNICAMP, consideram o candidato:

() Aprovado com Distinção

(X) Aprovado

() Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos oito dias do mês de agosto de 2005.

Prof. Antônio Murilo Santos Macêdo
Presidente e Orientador

Prof. Peter Alexander Bleinroth Schultz

Prof. Maurício Coutinho Domingues Filho

Resumo

Nesta dissertação, estudamos a estatística de contagem de carga de alguns sistemas de interesse, com ênfase em pontos quânticos conectados a barreiras de transparências arbitrárias. Demonstramos que no limite semiclássico em que o número de canais de transmissão é muito grande, $N \gg 1$, o cálculo da função geratriz da estatística de contagem de tais sistemas pode ser realizado através de uma extensão da teoria de circuitos de Nazarov [Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 134 (1994)], realizada por Macêdo em [A. M. S. Macêdo, *Phys. Rev. B* **66**, 033306 (2002)]. No caso de temperatura nula, os resultados obtidos via teoria de circuitos são interpretados através de processos estocásticos clássicos. Para junções de tunelamento, tal interpretação é possível partindo da abordagem pioneira de de Jong [M. J. de Jong, *Phys. Rev. B* **54**, 8144 (1996)], enquanto que para cavidades caóticas acopladas a contatos ideais ou a barreiras arbitrárias simétricas pode-se usar o formalismo de integrais de trajetória de Büttiker *et al.* [S. Pilgram, A. N. Jordan, E. V. Sukhorukov e M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **90** 206801 (2003)] . Os resultados para temperatura finita são interpretados do ponto de vista de uma abordagem semiclássica conhecida na literatura como “cascade approach” [K. E. Nagaev, P. Samuelsson e S. Pilgram, *Phys. Rev. B* **66** 195318 (2002)].

Abstract

In this thesis, we study the charge counting statistics of some systems of interest, with an emphasis in quantum dots coupled to barriers of arbitrary transparencies. We show that in the semiclassical limit — where the number of open transmission channels is very large, $N \gg 1$ — the generating function of the counting statistics can be calculated from an extended version of Nazarov’s circuit theory [Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 134 (1994)], presented by Macêdo in [A. M. S. Macêdo, *Phys. Rev. B* **66**, 033306 (2002)]. In the zero temperature limit, the results obtained using circuit theory are interpreted as classical stochastic processes. In the case of tunnel junctions, this can be accomplished by de Jong’s pioneering approach [M. J. de Jong, *Phys. Rev. B* **54**, 8144 (1996)], whereas in the case of chaotic cavities coupled to ideal contacts or to arbitrary symmetric barriers one should use Büttiker’s stochastic path integral formulation [S. Pilgram, A. N. Jordan, E. V. Sukhorukov, and M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **90** 206801 (2003)]. The finite temperature results are interpreted in the context of a semiclassical method known as the cascade approach [K. E. Nagaev, P. Samuelsson, and S. Pilgram, *Phys. Rev. B* **66** 195318 (2002)].

Conteúdo

1	Introdução à Física Mesoscópica	1
1.1	Fenômenos Mesoscópicos	4
1.1.1	Localização Fraca	5
1.1.2	Flutuações Universais da Condutância	6
1.1.3	Quantização da Condutância	8
1.2	O Formalismo de Landauer-Büttiker	10
1.2.1	O Gás Bidimensional de Elétrons (2-DEG)	10
1.2.2	Modos Transversais de Propagação	11
1.2.3	A Fórmula de Landauer: Dedução Elementar	13
1.3	A Matriz de Espalhamento S	15
1.3.1	Simetrias	16
1.3.2	A Fórmula de Landauer: Uma Outra Dedução	20
1.3.3	Potência do Ruído	24
1.4	Pontos Quânticos	30
1.5	A Teoria de Matrizes Aleatórias	32
1.5.1	Teoria de Matrizes Aleatórias de Pontos Quânticos	33
2	A Estatística de Contagem de Carga	38

2.1	A Estatística de Contagem	40
2.1.1	Estatística de Contagem de Fótons <i>versus</i> Estatística de Contagem de Elétrons	41
2.2	Form. Matem. da Estatística de Cont. de Carga	43
2.2.1	Momentos e Cumulantes de uma Distribuição de Probabilidade	44
2.2.2	Momentos e Cumulantes da Estatística de Contagem de Carga	47
2.3	A Fórmula de Levitov-Lesovik	48
2.4	Medição da Estatística de Contagem	49
3	Teoria de Circuitos e Estatística de Contagem de Carga a Temperatura Nula	53
3.1	Versão Estendida da Teoria de Circuitos	56
3.2	Conectores Especiais	59
3.3	Cálculo da Dens.Média de Autovalores de Trans.	61
3.4	A Densidade Média de Níveis e a Pseudocorrente $K(x)$	62
3.5	Conexão com a Estatística de Contagem de Carga	64
3.5.1	Extensão da Teoria de Circuitos para o Caso Interagente . . .	65
3.5.2	Conexão com a Estatística de Contagem de Carga	68
3.6	Estatística de Contagem de Casos de Interesse	70
3.6.1	Junção de Tunelamento Única	71
3.6.2	Ponto Quântico Conectado a Dois Contatos Ideais	72
3.6.3	Ponto Quântico Conectado a Duas Barreiras Simétricas	76
3.6.4	Ponto Quântico Conectado a Duas Junções de Tunelamento .	79
3.6.5	Ponto Quântico Conectado a Duas Barreiras de Transparências Arbitrárias	81
3.7	Interpretação Estocástica dos Resultados	89

3.7.1	Junções de Tunelamento	89
3.7.2	Cavidade com Barreiras Simétricas	95
3.8	Formação de Modos de Fabry-Perot	101
4	Teoria de Circuitos e Estatística de Contagem de Carga a Temper-	
	atura Finita	107
4.1	Versão de Nazarov da Teoria de Circuitos	108
4.1.1	Teoria das Funções de Green de Keldysh	108
4.1.2	Teoria de Circuitos	111
4.1.3	Aplicações Simples da Teoria de Circuitos de Nazarov	114
4.2	Teoria de Circuitos Escalar a Temperatura Finita	120
4.2.1	Conexão com a Estatística de Contagem de Carga	123
4.3	Estatística de Contagem de Casos de Interesse	125
4.3.1	Ponto Quântico Conectado a Duas Junções de Tunelamento	126
4.3.2	Ponto Quântico Conectado a Dois Contatos Ideais	128
4.3.3	Ponto Quântico Conectado a Duas Barreiras Simétricas	129
4.4	Interpretação Semiclássica	130
4.5	Cálculo dos Cumulantes	141
5	Conclusões e Perspectivas	146
	Apêndices	149
A	Teoria de Processos Estocásticos Markovianos	149
A.1	Casos Especiais da Equação de Kramers-Moyal	150
A.1.1	Equação de Fokker-Planck	150
A.1.2	Equação Mestra para Processos de um Passo	150

A.2 Solução por Integrais de Caminho	155
B Algumas Funções Características Importantes	158
B.1 Processo Poissoniano	158
B.2 Processo Binomial	159
B.3 Processo Poissoniano Bidirecional	160
B.4 Distribuição Trinomial Bidirecional	161
Referências Bibliográficas	162

Lista de Figuras

1.1	Diferentes regimes de transporte em sistemas mesoscópicos.	5
1.2	Gráficos da magnetocondutância, $\delta G \equiv G(\mathbf{B}) - G(0)$, para: (a) uma cavidade com formato de estádio;(b) uma cavidade com formato circular. As medidas foram feitas a 50 mK.	6
1.3	Flutuações da condutância de um fio de ouro com 310 nm de comprimento e 25 nm de largura, a 10 mK. Note que a amplitude das oscilações é da ordem de e^2/h . Retirado da referência [9].	7
1.4	Quantização da condutância observada em contatos pontuais a campo magnético nulo e a temperatura de 0,6 K. Retirado da referência [12]	9
1.5	Micrografia de varredura eletrônica de um fio longo de 75 nm de largura, fabricado na interface de uma heteroestrutura de GaAs/AlGaAs.	11
1.6	Condutor mesoscópico conectado a L guias.	12
1.7	Condutor mesoscópico conectado a dois reservatórios de elétrons através de guias ideais.	14
1.8	Pontos quânticos com formato de um estádio (esquerda) e de um círculo (direita). Adaptado de Marcus <i>et al.</i> , PRL, 69 506.	31

1.9	O bilhar quadrado (à esquerda) é dito regular, ao passo que o bilhar de Sinai (à direita) é chamado caótico. Figuras retiradas da referência [28].	31
2.1	Parte superior: reservatório de férmions conectado a um guia de comprimento L . Cada estado de 1-partícula tem número de ocupação máximo igual a 1. Parte inferior: reservatório de bósons conectado a um guia de comprimento L . Neste caso, tem-se um número ilimitado de partículas em um mesmo estado quântico. Adaptado da referência [38].	42
3.1	Circuito com três conectores e dois elementos difusivos.	57
3.2	Circuito intermediário.	57
3.3	Circuito equivalente ao da figura (3.1).	58
3.4	Conservação da pseudocorrente $K(x)$ em um circuito arbitrário. . . .	64
3.5	Ponto quântico ligado a dois guias através de contatos pontuais. . . .	72
3.6	Ponto quântico conectado a dois guias através de contatos ideais. . . .	76
3.7	Duas barreiras de transparências arbitrárias.	81
3.8	f_1 , f_2 e f_c são as funções de distribuição dos elétrons nos reservatórios 1 e 2 e na cavidade, respectivamente. Além disso, Γ_1 e Γ_2 são as transparências das barreiras.	96
3.9	Diagrama representando os regimes de transporte como uma função das probabilidades de transição. A fase estendida ocorre entre as linhas cheias. Retirada da referência [49].	104
4.1	O contorno de Keldysh, C_K . $H_1(t)$ e $H_2(t)$ são os diferentes hamiltonianos introduzidos para as duas partes do contorno.	109

4.2	Circuito que representa um ponto quântico conectado a duas barreiras arbitrárias.	112
4.3	Circuito representando uma junção de tunelamento única.	114

Lista de Tabelas

1.1	Classificação de Dyson das classes de simetria segundo o parâmetro β . U é matriz dos autovetores de $\mathcal{H}$, que deixa $P(\mathcal{H})$ invariante sob $\mathcal{H} \rightarrow U\mathcal{H}U^{-1}$	35
3.1	Relações fase-corrente para os diferentes conectores.	60

Capítulo 1

Introdução à Física Mesoscópica

Ao longo da década de 1980, experimentos realizados em condutores metálicos e, posteriormente, em heteroestruturas semicondutoras inauguraram um novo regime físico conhecido por Física Mesoscópica. Comum a todos esses experimentos, está o fato de a *coerência de fase quântica* ser fundamental para sua explicação. Dentre eles, merecem destaque o efeito de localização fraca em metais[1] e as flutuações universais da condutância[2], sendo esta última, apesar de sua explicação relativamente simples, uma das pedras angulares no estabelecimento da Física Mesoscópica no final do século XX.

É importante destacar desde o início que a Física Mesoscópica não está associada a uma escala de comprimento bem definida; fenômenos como os citados acima são observados em sistemas com dimensões variando de poucos nanômetros a centenas de micrômetros. O físico americano A. D. Stone deixa isso muito claro na referência [3]:

“None of the phenomena discussed in this volume occur in micron-size conductors at room temperature; conversely mesoscopic phenomena such as conduc-

tance fluctuations have been observed in conductors of size up to 100 microns at milliKelvin temperatures in samples of high purity and small k_F . Hence the term *mesoscopic* was introduced to denote a physical regime for transport and not a specified size scale.”¹

Assim, a ocorrência de fenômenos mesoscópicos depende, dentre outros fatores, da temperatura T , do comprimento de onda de Fermi λ_F (relacionado a k_F por $k_F = 2\pi/\lambda_F$) e do grau de desordem da amostra.

Antes de abordar os diversos efeitos mesoscópicos e os modelos matemáticos capazes de descrevê-los, convém discutir os regimes possíveis para o transporte eletrônico através de metais e semicondutores. Tal discussão é feita em termos das escalas de comprimento típicas da amostra, o que não contradiz em absoluto a discussão anterior, posto que estas dependem de T , k_F e do grau de desordem do sistema. Os comprimentos importantes são:

- Comprimento de onda de Fermi, λ_F : É o menor comprimento envolvido, estando relacionado ao nível de Fermi através de $\lambda_F = h/\sqrt{2m\varepsilon_F}$. Tipicamente, varia de alguns angstroms em metais a centenas de angstroms em heteroestruturas semicondutoras.
- Livre caminho médio elástico, ℓ_e : Em um cristal perfeito, o elétron se move através da rede cristalina sem sofrer colisões. Quando desvios desta situação ideal são considerados, ocorrem colisões que, em geral, causam a relaxação do momento linear do elétron. O livre caminho médio elástico é a distância média

¹Tradução livre: Nenhum dos fenômenos discutidos neste volume ocorre em condutores micrométricos a temperatura ambiente; por outro lado, fenômenos mesoscópicos tais como flutuações da condutância foram observados em condutores com dimensões de até 100 microns a temperaturas de miliKelvins em amostras de alta pureza e k_F pequeno. Daí o termo *mesoscópico* ter sido introduzido para denotar um regime físico de transporte e não uma escala de comprimento específica.

que o elétron viaja na amostra até sofrer uma colisão elástica. ℓ_e é, assim, uma medida da desordem do sistema e se relaciona com o tempo de espalhamento elástico τ_e por $\ell_e = v_F \tau_e$. Este comprimento varia de alguns angstroms em ligas amorfas a uma dezena de microns em heteroestruturas semicondutoras.

- Comprimento de localização eletrônica, ξ : Também se relaciona à desordem do sistema. ξ mede a extensão espacial das funções de onda eletrônicas: para condutores, estas funções se estendem sobre toda a amostra, ao passo que para isolantes elas decaem exponencialmente a partir do chamado centro de localização. A desordem influi, assim, no caráter condutor ou isolante do sistema.
- Comprimento de coerência de fase, L_ϕ : É o comprimento ao longo do qual a fase das funções de onda não relaxa. Associa-se a este comprimento o tempo de relaxação de fase τ_ϕ . L_ϕ cresce com a diminuição da temperatura T e é a escala mais importante para a Física Mesoscópica, em que os novos fenômenos que originaram a área acontecem.

Em geral, essas dimensões são tais que $\lambda_F < \ell_e < \xi < L_\phi$. Neste caso, existem três regimes de transporte distintos:

- Quando a dimensão L da amostra é menor que o livre caminho médio elástico ℓ_e , diz-se que o sistema está no regime *balístico*, pois o elétron viaja tipicamente sem sofrer colisões. No regime balístico, vale $L_\phi = v_F \tau_\phi$.
 - Para $\ell_e < L < \xi$, o sistema está no regime *difusivo*, pois o elétron sofre diversas colisões elásticas. Aqui, vale $L_\phi = \sqrt{D\tau_\phi}$, onde D é a constante de difusão.
 - Para $\xi < L < L_\phi$, o sistema encontra-se no regime *localizado*. Neste regime,
-

a amostra comporta-se como um isolante, pois as funções de onda eletrônicas estão localizadas.

Para $L > L_\phi$, o condutor é dito macroscópico, tendo suas propriedades de transporte bem descritas pela teoria de Landau-Boltzmann. (Para maiores detalhes sobre os regimes de transporte mesoscópicos, ver a referência [4].) Estes regimes são mostrados na figura (1.1), adaptada da referência [5].

1.1 Fenômenos Mesoscópicos

Em metais normais, cujas propriedades de transporte são descritas pela teoria cinética de Boltzmann, os efeitos de interferência devido às múltiplas colisões dos elétrons com as impurezas são irrelevantes. Dessa maneira, ao ir do ponto A ao ponto B, as contribuições quânticas à probabilidade de transição $\mathcal{P}_{A \rightarrow B}$ se cancelam após o cálculo da média de ensemble:

$$\mathcal{P}_{A \rightarrow B} = |W_1 + W_2 + \dots|^2 = \sum_i |W_i|^2, \quad (1.1)$$

onde W_i é a amplitude de probabilidade associada a uma trajetória entre A e B.

Em uma descrição quântica, contudo, as interferências quânticas entre as diferentes trajetórias ligando A e B não podem ser desprezadas e a equação (1.1) tem de ser corrigida:

$$\mathcal{P}_{A \rightarrow B} = |W_1 + W_2 + \dots|^2 = \sum_i |W_i|^2 + \sum_{i \neq j} W_j^* W_i, \quad (1.2)$$

onde $\sum_{i \neq j} W_j^* W_i$ representa as interferências discutidas acima. Pode-se mostrar que a maioria dos termos neste último somatório é nula, à exceção daqueles correspon-

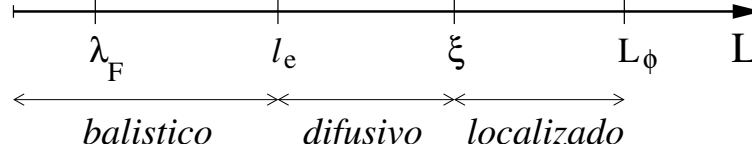


Figura 1.1: Diferentes regimes de transporte em sistemas mesoscópicos.

dendo a trajetórias que retornam sobre si mesmas. Logo, a probabilidade de retorno do elétron é alterada em relação a seu valor clássico devido à interferência entre os pares “trajetória-trajetória revertida no tempo”, fenômeno que recebe o nome de *retroespalhamento coerente*.

1.1.1 Localização Fraca

O retroespalhamento coerente é responsável, então, por uma correção do valor da condutância do sistema em relação ao valor clássico. Dependendo de se a interferência é construtiva ou destrutiva, tem-se a condutância quântica menor ou maior que a condutância clássica². A este fenômeno dá-se o nome de *localização fraca*.

Contudo, da eletrodinâmica clássica[6], sabe-se que a aplicação de um campo magnético, $\mathbf{B}$, quebra a simetria de reversão temporal do sistema, simetria esta fundamental para a coerência entre as trajetórias mencionadas. Assim, à medida que a magnitude de $\mathbf{B}$ aumenta, a condutância do sistema se aproxima de seu valor clássico. Este fato é ilustrado na figura (1.2), retirada da referência [7].

²Do ponto de vista microscópico, isto se relaciona à interação spin-órbita: sistemas que a possuem apresentam interferência destrutiva, enquanto aqueles sem esta interação apresentam interferência construtiva.

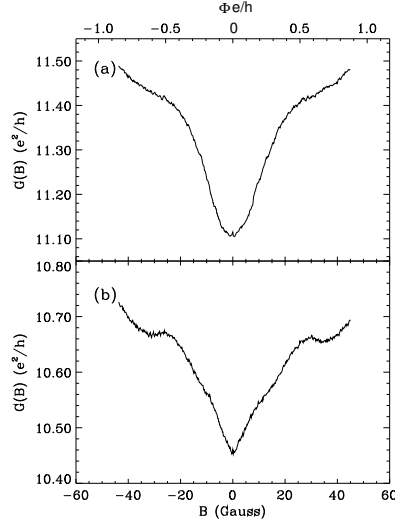


Figura 1.2: Gráficos da magnetocondutância, $\delta G \equiv G(\mathbf{B}) - G(0)$, para: (a) uma cavidade com formato de estádio; (b) uma cavidade com formato circular. As medidas foram feitas a 50 mK.

1.1.2 Flutuações Universais da Condutância

Um outro efeito causado pela interferência quântica é o das *flutuações universais da condutância*. Estas flutuações são observadas quando as relações de fase entre os diferentes caminhos são aleatoriamente alteradas. Isto pode ser feito, conforme discutido na referência [8], variando o campo magnético aplicado na amostra ou alterando sua densidade eletrônica. A figura (1.3) mostra flutuações na condutância de um fio de ouro em função do campo magnético.

Estas flutuações não são ruído dependente do tempo, como sugere o aspecto aleatório mostrado na figura (1.3), mas sim um padrão completamente reprodutível em uma mesma amostra. Assim, as flutuações universais da condutância recebem o epíteto de *impressão digital da amostra*. Neste ponto, cabe salientar a

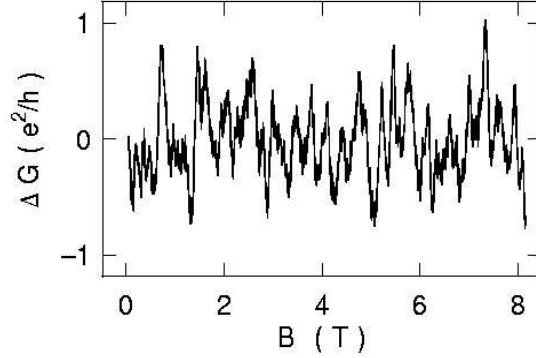


Figura 1.3: Flutuações da condutância de um fio de ouro com 310 nm de comprimento e 25 nm de largura, a 10 mK. Note que a amplitude das oscilações é da ordem de e^2/h . Retirado da referência [9].

importância da configuração de impurezas no condutor como definidora das interferências quânticas ligadas às flutuações. Se esta configuração for alterada — pelo aquecimento da amostra, por exemplo — o padrão observado será diferente. Entretanto, o caráter universal das flutuações é preservado. Este caráter universal foi descoberto por Altshuler[10] e por Lee e Stone[11], residindo no fato de a amplitude das flutuações ser sempre da ordem de (e^2/h) , independentemente da amostra e do valor médio de sua condutância.

As flutuações da condutância são atenuadas com o aumento da temperatura do sistema. Seguindo a argumentação dada na referência [8], seja um condutor de comprimento L a uma temperatura T tal que $L \gg L_\phi$. Nesta situação, a amostra pode ser vista como $N = L/L_\phi$ resistores em série, cada um deles com condutância adimensional $g_0 = G/G_0$ e $\text{var}(g_0) = \langle (g_0 - \langle g_0 \rangle)^2 \rangle = \langle (\delta g_0)^2 \rangle \sim 1$, onde $G_0 = 2e^2/h$. A flutuação na resistência de um desses resistores é dada por:

$$\text{var}(g_0^{-1}) = \frac{\text{var}(g_0)}{g_0^4} \sim \frac{1}{g_0^4}. \quad (1.3)$$

A soma em série desses N resistores leva a uma resistência total igual a $g^{-1} = N/g_0$ e a flutuações nesta resistência dadas por $\text{var}(g^{-1}) = N\text{var}(g_0^{-1}) = N/g_0^4$. Assim, a variância da condutância da amostra fica:

$$\text{var}(g) = g^4 \text{var}(g^{-1}) = \left(\frac{g_0^4}{N^4}\right) \left(\frac{N}{g_0^4}\right) \sim \frac{1}{N^3}. \quad (1.4)$$

Logo, quão maior a temperatura, maior o valor de N e menos perceptíveis as flutuações na condutância. O mesmo argumento pode ser usado para explicar o fato de tais flutuações serem imperceptíveis em condutores macroscópicos³.

1.1.3 Quantização da Condutância

A *quantização da condutância* de sistemas mesoscópicos foi observada pela primeira vez pelos grupos de van Wees[12] e de Wharam[13], em 1988, de forma independente. Usando uma montagem tipo *split-gate*, que consiste em dois eletrodos negativamente carregados, esses grupos criaram uma constrição com largura D comparável ao comprimento de onda de Fermi λ_F da amostra. (Esse tipo de constrição é conhecido como contato pontual.) Com a diminuição de D — que é possível através da variação do potencial dos eletrodos — a condutância diminui, guardando espaçamentos de $2e^2/h$ entre seus valores consecutivos. Ver figura (1.4).

De forma simplificada, pode-se considerar a constrição como um guia eletrônico com um número $N = \text{Int}[2D/\lambda_F]$ de modos transversais, onde $\text{Int}[x]$ é o maior inteiro menor que x . Aplicando uma diferença de potencial V sobre o guia e assumindo que a corrente elétrica I se distribui igualmente sobre cada um dos modos

³A princípio, não há distinção entre um condutor de dimensões nanométricas a temperaturas elevadas e um condutor macroscópico ordinário; ambos têm $L \gg L_\phi$.

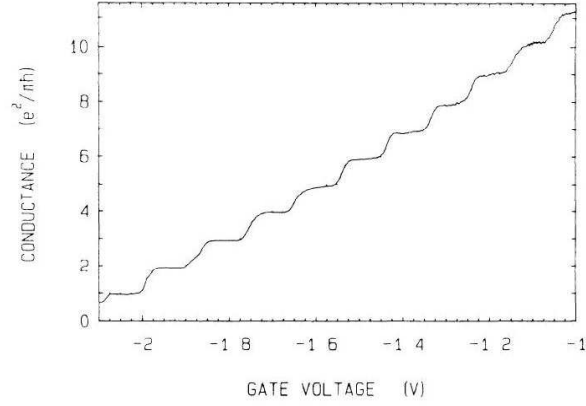


Figura 1.4: Quantização da condutância observada em contatos pontuais a campo magnético nulo e a temperatura de $0,6\text{ K}$. Retirado da referência [12]

transversais, a corrente no modo j fica:

$$I_j = en_j v_j = e \frac{eV}{\hbar v_j} v_j = \frac{e^2 V}{h} ; j = 1, 2, \dots, N, \quad (1.5)$$

onde usamos o fato de que a densidade unidimensional de estados do j -ésimo modo é $\rho_j = 1/\hbar v_j$, sendo v_j a velocidade de grupo correspondente. De (1.5), segue que a condutância é dada por:

$$G = \frac{1}{V} \sum_{j=1}^N I_j = N G_0, \quad (1.6)$$

onde $G_0 \equiv e^2/h$ é o quantum de condutância.

Como destacado na referência [8], mesmo estando o condutor no regime balístico, tem-se resistência não-nula. Esta propriedade é conhecida como *resistência de contato* e não é exclusiva de condutores mesoscópicos⁴. Contudo, em metais, λ_F é da ordem da separação interatômica, o que torna N muito grande e a resistência de contato G^{-1} muito pequena.

⁴Para um relato da medição de resistência de contato em metais, consultar a referência [14].

A partir deste ponto, adota-se um caráter mais técnico, necessário à compreensão quantitativa dos fenômenos mesoscópicos. Nesse espírito, serão apresentados o formalismo de Landauer-Büttiker para o transporte em sistemas mesoscópicos, a teoria de matrizes aleatórias (TMA) e a fórmula de Mahaux-Weidenmüller utilizadas no estudo dos chamados pontos quânticos e a teoria DMPK para fios quânticos desordenados. O capítulo termina com uma análise do núcleo de Poisson.

1.2 O Formalismo de Landauer-Büttiker

Landauer, um dos fundadores da Física Mesoscópica, relacionou a condutância G e outros observáveis de transporte de um condutor desordenado à probabilidade de um elétron ser transmitido através dele. Nesta abordagem, a corrente I atravessando o dispositivo é proporcional à probabilidade de transmissão T [15, 16]. A formulação original de Landauer — que tratava apenas de dispositivos de dois terminais — foi generalizada por Büttiker [17] para dispositivos com um número arbitrário de terminais sob a ação de um campo magnético. Este é o famoso formalismo de Landauer-Büttiker, muito utilizado na Física Mesoscópica.

1.2.1 O Gás Bidimensional de Elétrons (2-DEG)

Os sistemas mesoscópicos mais usados hoje em dia são formados na interface de heteroestruturas semicondutoras de GaAs/AlGaAs, crescidas pela técnica de epitaxia. Como bem discutido na referência [8], nas proximidades dessa interface forma-se um gás de elétrons bidimensional. (Em inglês, *2-dimensional Electron Gas*, donde vem a sigla 2-DEG.) A fabricação do dispositivo faz uso das modernas técnicas de litografia, que já permitem a criação de estruturas com dimensões muito menores

que o livre caminho médio no material. Ver figura (1.5), retirada da referência [18].

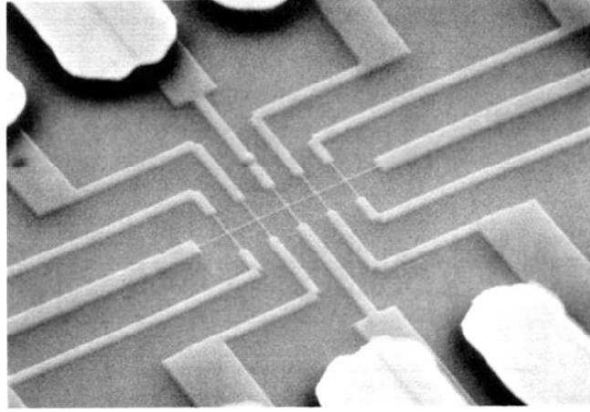


Figura 1.5: Micrografia de varredura eletrônica de um fio longo de 75 nm de largura, fabricado na interface de uma heteroestrutura de GaAs/AlGaAs.

1.2.2 Modos Transversais de Propagação

Nesta subseção serão discutidos os *modos transversais de propagação*, também conhecidos como *canais*, que aparecerão repetidamente no restante deste texto.

Seja o dispositivo mesoscópico geral mostrado na figura (1.6), em que uma cavidade bidimensional conecta-se a reservatórios de elétrons através de L guias. Seguindo a notação da referência [4], o l -ésimo guia tem largura D_l e um sistema de coordenadas (x_l, y_l) tal que nas paredes $y_l = 0, D_l$.

A função de onda de um elétron no l -ésimo guia pode ser obtida da seguinte equação de massa efetiva:

$$\left[E_s + \frac{(i\hbar\nabla + e\mathbf{A})^2}{2m^*} + U(x_l, y_l) \right] \psi(x_l, y_l) = E\psi(x_l, y_l), \quad (1.7)$$

onde $\mathbf{A}$ é o potencial vetor referente ao campo magnético perpendicular ao guia,

$U(x_l, y_l)$ é o potencial devido às impurezas e m^* é a massa efetiva do elétron no meio. Note-se que o potencial devido à rede cristalina não aparece explicitamente na equação (1.7), uma vez que seu efeito está incluído através de m^* . Assumindo que o guia é ideal ($U(x_l, y_l) \equiv 0$ em seu interior: não há desordem!) e que o campo magnético perpendicular é nulo, a equação (1.7) pode ser reescrita como:

$$\left[E_s + \frac{-\hbar^2 \nabla^2}{2m^*} \right] \psi(x_l, y_l) = E \psi(x_l, y_l), \quad (1.8)$$

cuja solução geral é da forma:

$$\psi(x_l, y_l) \propto e^{\pm i k_{l,n} x_l} \text{sen}(K_{l,n} y_l). \quad (1.9)$$

Aqui, $k_{l,n}$ é o número de onda longitudinal e $K_{l,n}$ é o número de onda transversal.

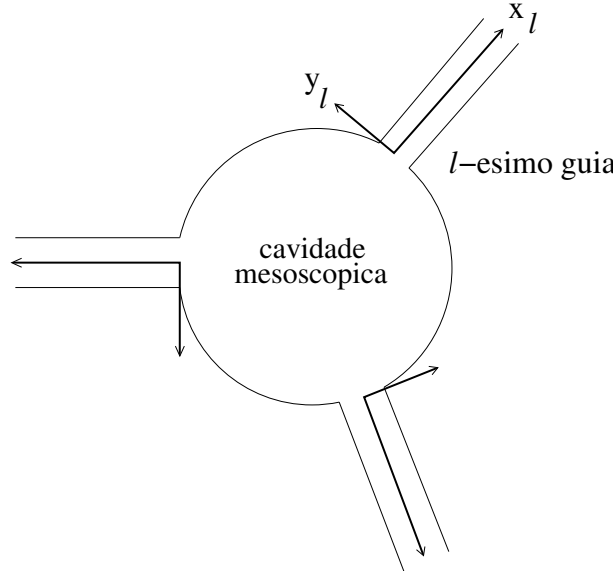


Figura 1.6: Condutor mesoscópico conectado a L guias.

Impondo que a função de onda se anula nas paredes do guia, vem:

$$K_{l,n} = \frac{n\pi}{D_l}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.10)$$

ou seja, $K_{l,n}$ é quantizado e a cada valor de n está associado um modo transversal (canal).

Assumindo que apenas os elétrons em um pequeno intervalo de energia em torno da energia de Fermi ε_F participam da condução, vale a seguinte relação:

$$k_{l,n}^2 + K_{l,n}^2 = k_F^2 \Rightarrow k_{l,n} = \sqrt{k_F^2 - K_{l,n}^2}. \quad (1.11)$$

Assim, quando $K_{l,n} > k_F$, $k_{l,n}$ é imaginário e $e^{\pm i k_{l,n} x_l}$ tende a zero quando $x_l \rightarrow \infty$; tem-se, então, os chamados *canais fechados*. Quando $k_F > K_{l,n}$, $k_{l,n}$ é real e $e^{\pm i k_{l,n} x_l}$ representa oscilações em x_l ; tem-se, neste caso, os chamados *canais abertos*.

1.2.3 A Fórmula de Landauer: Dedução Elementar

Seja a amostra mesoscópica mostrada na figura (1.7), conectada a dois reservatórios de elétrons de potenciais químicos μ_1 e μ_2 através dos guias 1 e 2. Os guias são considerados condutores balísticos, com N canais cada.

Assume-se, ainda, que os elétrons podem passar dos guias aos reservatórios sem reflexão, ou seja, que os reservatórios são sumidouros perfeitos. Dessa maneira, a corrente relacionada a estados propagando-se para a direita no guia 1 é gerada por elétrons provenientes do reservatório à esquerda, o que lhes confere potencial químico μ_1 . A temperatura nula, a corrente I_1^+ é dada por:

$$I_1^+ = N \left(\frac{e^2 V}{h} \right) = N \left(\frac{e^2}{h} \right) \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{e} \right) = \left(\frac{e}{h} \right) N (\mu_1 - \mu_2), \quad (1.12)$$

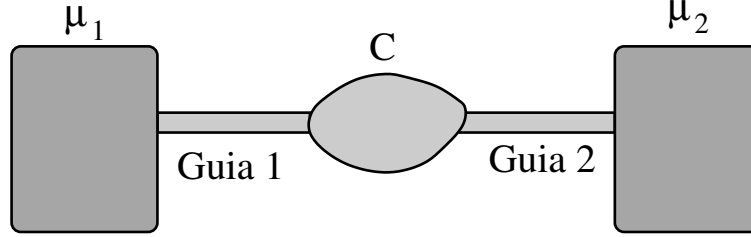


Figura 1.7: Condutor mesoscópico conectado a dois reservatórios de elétrons através de guias ideais.

analogamente ao que foi feito nas equações (1.5) e (1.6). Conforme discutido na referência [8], tem-se que a diferença de potencial é dada por $V = (\mu_1 - \mu_2)/e$. Inserindo o fator 2 relacionado ao spin do elétron, (1.12) fica:

$$I_1^+ = \left(\frac{2e}{h} \right) N(\mu_1 - \mu_2). \quad (1.13)$$

Sendo T a probabilidade média de transmissão, a corrente relacionada a estados propagando-se para a esquerda no guia 1 é simplesmente:

$$I_1^- = (1 - T)I_1^+ = \left(\frac{2e}{h} \right) N(1 - T)(\mu_1 - \mu_2), \quad (1.14)$$

de modo que a corrente atravessando a amostra vale:

$$I_{total} = I_1^+ - I_1^- = \left(\frac{2e}{h} \right) NT(\mu_1 - \mu_2). \quad (1.15)$$

A condutância G é então:

$$G = \frac{I_{total}}{V} = \frac{I_{total}}{(\mu_1 - \mu_2)/e} \Rightarrow G = \left(\frac{2e^2}{h} \right) NT, \quad (1.16)$$

que é uma versão simplificada da fórmula de Landauer. Uma dedução mais rigorosa

requer o uso da matriz de espalhamento S , apresentada na subseção 1.3.2.

1.3 A Matriz de Espalhamento S

A ferramenta matemática mais adequada ao estudo rigoroso do problema de condução eletrônica em amostras mesoscópicas é a matriz de espalhamento S . Para um condutor ligado a reservatórios de elétrons através de L guias ideais, a matriz S é definida como:

$$\mathbf{b} = S\mathbf{a}, \quad (1.17)$$

em que os vetores-coluna $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ têm como elementos, respectivamente, as amplitudes das ondas incidentes e espalhadas no condutor através dos L guias mostrados na figura (1.6):

$$\mathbf{a} = (a_1^1, \dots, a_{N_1}^1, a_1^2, \dots, a_{N_2}^2, \dots, a_1^L, \dots, a_{N_L}^L)^T, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{b} = (b_1^1, \dots, b_{N_1}^1, b_1^2, \dots, b_{N_2}^2, \dots, b_1^L, \dots, b_{N_L}^L)^T. \quad (1.19)$$

Nessas equações, a_i^j representa a amplitude da onda incidente na cavidade através do modo i do guia j ; b_i^j representa o mesmo para a onda espalhada. Além disso, o sobrescrito T indica a operação de transposição matricial.

A matriz S é quadrada e tem ordem $N_{total} = \sum_{l=1}^L N_l$, sendo N_l o número de canais abertos no l -ésimo guia. Sendo S_{mn}^{ij} o elemento de S conectando o modo n do guia j ao modo m do guia i , a probabilidade de transmissão associada é obtida tomando o quadrado do módulo dessa amplitude:

$$T_{mn}^{ij} \equiv |S_{mn}^{ij}|^2. \quad (1.20)$$

Para $i = j$, $|S_{mn}^{ii}|^2$ dá o coeficiente de reflexão:

$$R_{mn}^{ii} \equiv |S_{mn}^{ii}|^2. \quad (1.21)$$

Em termos de blocos descrevendo as reflexões em um mesmo guia e as transmissões entre guias diferentes, S fica:

$$S = \begin{pmatrix} r_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1L} \\ t_{21} & r_{22} & \cdots & t_{2L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{L1} & t_{L2} & \cdots & r_{LL} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Em (1.22), os blocos r_{ll} são matrizes $N_l \times N_l$ que descrevem reflexões do l -ésimo guia nele mesmo, ao passo que os blocos t_{lm} são matrizes $N_l \times N_m$ associadas à transmissão dos N_m modos do m -ésimo guia nos N_l modos do l -ésimo.

Nesta dissertação, estudaremos apenas o caso $L = 2$, correspondente a dispositivos de dois terminais.

1.3.1 Simetrias

As diferentes simetrias presentes no problema de espalhamento em questão impõem vínculos à matriz S . Esses vínculos são estudados a seguir.

Conservação da Corrente

A densidade de corrente $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ associada à função de onda $\psi(\mathbf{r})$ é definida como[19]:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) \equiv \frac{\hbar}{m} \Im(\psi^* \nabla \psi). \quad (1.23)$$

Assim, a corrente entrando na cavidade é dada por:

$$I_{\text{entrando}} \propto \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{j=1}^L |a_i^j|^2. \quad (1.24)$$

Por sua vez, a corrente saindo da cavidade fica:

$$I_{\text{saindo}} \propto \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{j=1}^L |b_i^j|^2. \quad (1.25)$$

A conservação da corrente leva, então, a:

$$\sum_{i=1}^{N_j} \sum_{j=1}^L |a_i^j|^2 = \sum_{i=1}^{N_j} \sum_{j=1}^L |b_i^j|^2, \quad (1.26)$$

que em linguagem matricial fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} &= \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} = (\mathbf{S}\mathbf{a})^\dagger (\mathbf{S}\mathbf{a}) \\ &= \mathbf{a}^\dagger (\mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

De (1.27), vem:

$$\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} (\mathbf{1} - \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S}) \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \mathbf{S}^\dagger \mathbf{S} = \mathbf{1} = \mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger. \quad (1.28)$$

Logo, a conservação da corrente impõe que a matriz de espalhamento S seja unitária:

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^\dagger. \quad (1.29)$$

Reversão Temporal para Partículas sem Spin

A função de onda para partículas sem spin é calculada da equação de Schrödinger:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V\right) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (1.30)$$

Dado que $\psi(\mathbf{r}, t)$ é solução desta equação, mostra-se facilmente que $\psi^*(\mathbf{r}, -t)$ também o é, bastando tomar o complexo conjugado de (1.30):

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V\right) \psi^*(\mathbf{r}, t) = -i\hbar \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.31)$$

ou ainda:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V\right) \psi^*(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial(-t)}. \quad (1.32)$$

Fazendo $t \rightarrow -t$, resulta:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V\right) \psi^*(\mathbf{r}, -t) = i\hbar \frac{\partial \psi^*(\mathbf{r}, -t)}{\partial t}. \quad (1.33)$$

(Assume-se aqui que o potencial V é uma função real da posição, o que já estava implícito no item anterior.)

A reversão temporal inverte o sentido das ondas planas nos guias, de modo que a matriz de espalhamento, neste caso, é definida implicitamente por:

$$\mathbf{a}^* = S_{revertida} \mathbf{b}^* = S \mathbf{b}^*, \quad (1.34)$$

onde $S_{revertida} = S$, pois o sistema é, por hipótese, invariante sob reversão temporal. De (1.34), vem:

$$\mathbf{a}^* = S(S\mathbf{a})^* = SS^* \mathbf{a}^* \quad (1.35)$$

$$\Rightarrow SS^* = \mathbf{1} = S^*S. \quad (1.36)$$

Das equações (1.36) e (1.28), resulta:

$$S^* = S^\dagger \Rightarrow (S^*)^* = (S^\dagger)^* \\ S = S^T, \quad (1.37)$$

ou seja, a invariância sob reversão temporal para partículas sem spin juntamente com a conservação da corrente levam à condição de que S seja simétrica.

Reversão Temporal para Partículas de Spin-1/2

Este caso é o mais complicado dos três e a derivação minuciosa do vínculo que esta simetria impõe sobre a matriz S foge ao escopo desta dissertação.

Conforme demonstrado na referência [4], a invariância sob reversão temporal para partículas de spin-1/2 implica que S obedece a:

$$SKS^* = \mathbf{1}, \quad (1.38)$$

onde K é a matriz anti-simétrica de ordem $2N_{total} \times 2N_{total}$ (o fator 2 deve-se ao spin) dada por:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & \phi & \\ & & \ddots & & \\ & \phi & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

1.3.2 A Fórmula de Landauer: Uma Outra Dedução

Seja uma amostra mesoscópica conectada a dois reservatórios de elétrons através de guias ideais, os quais têm N canais abertos cada, como mostrado na figura (1.7). Ao contrário do que foi feito na subseção 1.2.3, o papel crucial desempenhado pela temperatura exige que as funções de distribuição dos reservatórios, anteriormente tomadas como funções degrau, sejam substituídas por funções de Fermi-Dirac. Assim, $f_a(E) = [1 + e^{(E-\mu_a)/k_B T}]^{-1}$ é a função de distribuição no reservatório a , sendo μ_a o potencial químico correspondente. A fim de deduzir as expressões para a corrente média, $\langle I \rangle$, e para a potência do ruído, $P(\omega)$, é conveniente usar o formalismo de 2ª quantização[22]. Assim, seguindo os passos das referências [23, 24, 25, 26] e levando em conta o fator de degenerescência relacionado ao spin do elétron desde o início, o operador corrente no guia 1 é dado por:

$$\hat{I}_1(x, t) = \frac{\hbar e}{2im} \int dy \left[\hat{\Psi}_1^\dagger(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial x} \hat{\Psi}_1(\mathbf{r}, t) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\Psi}_1^\dagger(\mathbf{r}, t) \right) \hat{\Psi}_1(\mathbf{r}, t) \right], \quad (1.40)$$

onde os operadores de campo $\hat{\Psi}_1$ e $\hat{\Psi}_1^\dagger$ são definidos como:

$$\hat{\Psi}_1(\mathbf{r}, t) = \int dE e^{-iEt/\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n^1(y)}{(2\pi\hbar v_{1n}(E))^{1/2}} \left[\hat{a}_{1n} e^{ik_{1,n}x} + \hat{b}_{1n} e^{-ik_{1,n}x} \right], \quad (1.41)$$

$$\hat{\Psi}_1^\dagger(\mathbf{r}, t) = \int dE e^{Et/\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{(\chi_n^1(y))^*}{(2\pi\hbar v_{1n}(E))^{1/2}} \left[\hat{a}_{1n}^\dagger e^{-ik_{1,n}x} + \hat{b}_{1n}^\dagger e^{ik_{1,n}x} \right]. \quad (1.42)$$

Nas equações (1.40)-(1.42), $\chi_n^1(y)$ é a parte transversal da função de onda dentro do guia, $k_{1,n}$ é o vetor de onda e v_{1n} é a velocidade de propagação associados ao n -ésimo modo transversal.

Além disso, aparecem em (1.41) e (1.42) os operadores $\hat{a}_{1n}^\dagger(E)$ e $\hat{a}_{1n}(E)$, que criam e aniquilam elétrons com energia total E no canal n de estados incidentes na amostra via guia 1. Da mesma maneira, $\hat{b}_{1n}^\dagger$ e $\hat{b}_{1n}$ descrevem elétrons em estados espalhados. Estes operadores de criação e aniquilação obedecem às seguintes relações de anticomutação:

$$\{\hat{a}_{1r}(E), \hat{a}_{1s}^\dagger(E')\} = \delta_{rs}\delta(E - E'), \quad (1.43)$$

$$\{\hat{a}_{1r}(E), \hat{a}_{1s}(E')\} = \{\hat{a}_{1r}^\dagger(E), \hat{a}_{1s}^\dagger(E')\} = 0. \quad (1.44)$$

Definem-se operadores análogos para os elétrons no guia 2, $\hat{a}_{2n}^\dagger(E)$, $\hat{a}_{2n}(E)$, $\hat{b}_{2n}^\dagger$, e $\hat{b}_{2n}$, que obedecem a relações de anticomutação semelhantes a (1.43) e (1.44). Os operadores $\hat{a}$ e $\hat{b}$ relacionam-se pela matriz de transmissão, S :

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_{11} \\ \vdots \\ \hat{b}_{1N} \\ \hat{b}_{21} \\ \vdots \\ \hat{b}_{2N} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} \\ \vdots \\ \hat{a}_{1N} \\ \hat{a}_{21} \\ \vdots \\ \hat{a}_{2N} \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

A substituição de (1.41) e (1.42) em (1.40) leva a uma expressão para $\hat{I}_1$ que, além de muito complicada, depende explicitamente da coordenada x . Entretanto, levando em conta que o transporte ocorre apenas em uma pequena janela da ordem de $k_B T$ em torno da energia de Fermi ε_F , pode-se tomar as energias E e E' muito próximas uma da outra. Nesta situação, as velocidades v_{1n} , que variam muito lentamente com a energia, podem ser consideradas constantes. Dessa forma, a equação

para $\hat{I}_1$ fica:

$$\hat{I}_1(t) = \frac{2e}{h} \sum_n \int dE dE' e^{i(E-E')t/\hbar} \left[\hat{a}_{1n}^\dagger(E) \hat{a}_{1n}(E') - \hat{b}_{1n}^\dagger(E) \hat{b}_{1n}(E') \right]. \quad (1.46)$$

Usando (1.45), essa equação pode ser reescrita como:

$$\hat{I}_1(t) = \frac{2e}{h} \sum_{\alpha\beta} \sum_{mn} \int dE dE' e^{i(E-E')t/\hbar} \hat{a}_{\alpha m}^\dagger(E) A_{\alpha\beta}^{mn}(1; E, E') \hat{a}_{\beta n}(E'), \quad (1.47)$$

onde os índices α e β indexam os reservatórios, assumindo os valores 1 e 2. A matriz $A_{\alpha\beta}^{mn}(1; E, E')$ é definida como:

$$A_{mn}^{\alpha\beta}(1; E, E') = \delta_{mn} \delta_{\alpha 1} \delta_{\beta 1} - \sum_k (S_{mk}^{1\alpha}(E))^\dagger S_{kn}^{1\beta}(E'), \quad (1.48)$$

sendo $S_{mn}^{\alpha\beta}$ o elemento de S que relaciona o canal n do guia β ao canal m do guia α .

Para o cálculo da corrente média, admite-se que os elétrons nos guias têm a mesma distribuição dos reservatórios. Assim, a média do produto de um operador de criação por um de aniquilação para elétrons nos guias — por hipótese, em equilíbrio térmico — pode ser escrita em termos das funções de distribuição nos reservatórios:

$$\langle \hat{a}_{\alpha m}^\dagger(E) \hat{a}_{\beta n}(E') \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{mn} \delta(E - E') f_a(\varepsilon), \quad (1.49)$$

sendo f_a a função de Fermi-Dirac para o reservatório a . Das equações (1.47) e (1.49), a média de (1.40) fica:

$$\langle I_1 \rangle = \frac{2e}{h} \int_0^\infty dE [f_1(E) - f_2(E)] \text{Tr}[t(E)t^\dagger(E)]. \quad (1.50)$$

Na base em que $t^\dagger t$ é diagonal fica claro que o traço de $t^\dagger t$ é a soma de seus auto-

valores, aqui representados por τ_n :

$$\langle I_1 \rangle = \frac{2e}{h} \int_0^\infty dE [f_1(E) - f_2(E)] \sum_n \tau_n(E). \quad (1.51)$$

Da unitariedade de S , segue que a matriz hermiteana $t^\dagger t$ tem autovalores reais, τ_n , entre 0 e 1, denominados *autovalores de transmissão*. A matriz de espalhamento S relaciona-se com esses autovalores τ_n através de uma expressão conhecida como decomposição polar:

$$S = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\mathcal{T}} & \sqrt{\mathcal{T}} \\ \sqrt{\mathcal{T}} & \sqrt{1-\mathcal{T}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & 0 \\ 0 & V' \end{pmatrix}, \quad (1.52)$$

em que U, V, U' e V' são matrizes unitárias $N \times N$ e $\mathcal{T} = \text{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ é uma matriz diagonal $N \times N$ com os autovalores de transmissão na diagonal principal.

No regime de resposta linear, tem-se:

$$\begin{aligned} f_1(E) - f_2(E) &= f(E - \mu_1) - f(E - \mu_2) = \int_{\mu_2}^{\mu_1} dE' \frac{\partial}{\partial E'} f(E - E') \\ &\approx eV \left(-\frac{\partial}{\partial E} f(E - \varepsilon_F) \right), \end{aligned} \quad (1.53)$$

onde $\mu_1 - \mu_2 = eV$ [8]. Nestas condições, a condutância, $G \equiv \lim_{V \rightarrow 0} \langle I \rangle / V$, fica

$$G = \frac{2e^2}{h} \int_0^\infty dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \sum_n \tau_n(E). \quad (1.54)$$

que para temperatura nula leva à fórmula de Landauer, apresentada em (1.16) de

forma simplificada:

$$f(\varepsilon - \varepsilon_F) = \Theta(\varepsilon_F - \varepsilon) \Rightarrow G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^N \tau_n(\varepsilon_F).$$

É conveniente falar, às vezes, em condutância adimensional:

$$g = \frac{G}{G_0} ; G_0 \equiv 2e^2/h. \quad (1.55)$$

Assim, a fórmula de Landauer para $T = 0$ fica:

$$g = \sum_{n=1}^N \tau_n.$$

1.3.3 Potência do Ruído

As flutuações da corrente elétrica em torno de seu valor médio são chamadas, de maneira geral, de *ruído*. Há dois tipos principais de ruído elétrico, a saber, o ruído térmico, relacionado às flutuações térmicas dos números de ocupação dos reservatórios, e o ruído de disparo, que se origina da discreteza da carga elétrica. A temperatura nula, apenas o ruído de disparo está presente, ao passo que o ruído térmico domina para temperaturas altas.

Conforme discutido na referência [21], a distribuição do ruído sobre as diferentes

freqüências angulares ω pode ser estudada quantitativamente através de sua densidade espectral, $P(\omega)$, mais comumente chamada de *potência do ruído*. A potência do ruído é a transformada de Fourier na freqüência ω da função de correlação da

corrente:

$$P(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \langle \Delta I(t_0) \Delta I(t_0 + t) \rangle dt, \quad (1.56)$$

onde $\langle \dots \rangle$ indica a média de ensemble ou, equivalentemente, a média no instante inicial t_0 e $\Delta \hat{I}(t) \equiv \hat{I}(t) - \langle I \rangle$ representa as flutuações da corrente elétrica no instante t .

A potência do ruído pode ser calculada através da substituição da equação (1.40) em (1.56), seguida pelo cálculo da média. Será necessário, então, encontrar a média de um produto de quatro operadores de campo, o que pode ser feito através do teorema de Wick[22]:

$$\begin{aligned} & \langle \hat{a}_{\alpha k}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\beta l}(E_2) \hat{a}_{\gamma m}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\delta n}(E_4) \rangle - \langle \hat{a}_{\alpha k}^\dagger(E_1) \hat{a}_{\beta l}(E_2) \rangle \langle \hat{a}_{\gamma m}^\dagger(E_3) \hat{a}_{\delta n}(E_4) \rangle \\ &= \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta_{kn} \delta_{ml} \delta(E_1 - E_4) \delta(E_2 - E_3) f_\alpha (1 - f_\beta), \end{aligned} \quad (1.57)$$

onde $\alpha, \beta = 1, 2$. De (1.47) e (1.57), segue que a potência do ruído de disparo, definida em (1.56), fica:

$$\begin{aligned} P(\omega) &= 4 \frac{e^2}{h} \sum_{\gamma \delta=1,2} \sum_{m n} \int dE A_{mn}^{\gamma\delta}(\alpha; E, E + \hbar\omega) A_{nm}^{\delta\gamma}(\beta; E + \hbar\omega, E) \\ &\times \{ f_\gamma(E) [1 - f_\delta(E + \hbar\omega)] + [1 - f_\gamma(E)] f_\delta(E + \hbar\omega) \}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

onde foi a integral no tempo foi eliminada usando a seguinte identidade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\hbar\omega + E_1 - E_2)t/\hbar} = 2\pi\hbar \delta(\hbar\omega + E_1 - E_2).$$

Usando a unitariedade de S , mostra-se que o limite de baixas frequências de (1.58)

é dado por:

$$P = 4 \frac{e^2}{h} \sum_{\gamma \delta} \sum_{mn} \int_0^\infty dE A_{mn}^{\gamma\delta}(\alpha; E, E) A_{nm}^{\delta\gamma}(\beta; E, E) \times \{f_\gamma(E) [1 - f_\delta(E)] + [1 - f_\gamma(E)] f_\delta(E)\}. \quad (1.59)$$

Efetuada os somatórios, obtém-se:

$$P = 4 \frac{e^2}{h} \int_0^\infty dE \{ [f_1(1 - f_2) + f_2(1 - f_1)] \text{Tr}[t t^\dagger (\mathbf{1} - t t^\dagger)] + [f_1(1 - f_1) + f_2(1 - f_2)] \text{Tr}[t t^\dagger t t^\dagger] \}, \quad (1.60)$$

Convém, agora, calcular alguns casos limites desta equação. No que segue, assume-se que eV e $k_B T$ são suficientemente pequenos de modo que a dependência da matriz de transmissão com a energia possa ser desprezada: $t(E) = t(\varepsilon_F)$.

Ruído Térmico

Neste caso, como o sistema está em equilíbrio térmico a temperatura T , as funções de distribuição dos reservatórios são iguais. Desse modo, tem-se:

$$P = 8 \frac{e^2}{h} \int_0^\infty dE f(1 - f) \text{Tr}(t t^\dagger). \quad (1.61)$$

Usando a relação $f(1 - f) = -k_B T \partial f / \partial \varepsilon$, obtém-se:

$$P = 8 k_B T \frac{e^2}{h} \int_0^\infty dE \left(-\frac{\partial f}{\partial E} \right) \text{Tr}[t(E) t^\dagger(E)]. \quad (1.62)$$

Comparando (1.54) e (1.62), chega-se a:

$$P = 4k_B T G, \quad (1.63)$$

que é o resultado do teorema de Nyquist[21], relacionando a potência do ruído de equilíbrio à condutância. Verifica-se, assim, que o ruído térmico não fornece nenhuma informação que não possa ser acessada através de medições da corrente média.

Ruído de Disparo

A fim de isolar a contribuição do ruído de disparo ao ruído total, é necessário tomar $T = 0$, ocasião em que o ruído térmico se anula. Nestas condições, as funções de distribuição dos reservatórios são funções degrau e a equação (1.60) pode ser reescrita como:

$$P = 4eV \frac{e^2}{h} \text{Tr}[tt^\dagger(\mathbf{1} - tt^\dagger)] = \frac{4e^3 V}{h} \sum_{n=1}^N \tau_n(1 - \tau_n). \quad (1.64)$$

Em termos do ruído adimensional, $p = P/P_0$; $P_0 \equiv 4e^3 V/h$, vem:

$$p = \sum_{n=1}^N \tau_n(1 - \tau_n). \quad (1.65)$$

Convém notar que a potência do ruído de disparo não é proporcional à condutância, mas à soma dos produtos das probabilidades de transmissão e de reflexão dos canais. Além disso, $V = 0$ implica $P = 0$, o que demonstra seu caráter de não-equilíbrio.

Embora uma discussão mais detalhada das propriedades do ruído de disparo

em condutores mesoscópicos esteja reservada ao início do capítulo 2, vale a pena abordar um de seus aspectos mais interessantes: a supressão do ruído de disparo abaixo do valor poissoniano. Em diversos sistemas, como junções p-n, diodos de barreira Schottky, entre outros, os elétrons são transmitidos de maneira aleatória e independente, de acordo com um processo de Poisson. A potência do ruído de disparo associada é:

$$P_{Poisson} = 2e \langle I \rangle, \quad (1.66)$$

válida para frequências baixas. (Para frequências altas, a potência do ruído se anula.)

A equação (1.64), por outro lado, implica que os canais com probabilidades de transmissão $\tau_n = 1$ não contribuem com a potência do ruído de disparo. Isto é fácil de entender: a $T = 0$, um feixe incidente de elétrons tem ruído nulo. Se a transmissão é perfeita, o feixe transmitido também terá ruído nulo. Contudo, à medida que τ_n diminui, o feixe transmitido desvia da corrente promediada no tempo, o que dá origem a ruído. O ruído de disparo relacionado a todos os canais, no entanto, é menor do que o ruído de um processo poissoniano. Esta supressão do ruído de disparo em relação a $P_{Poisson}$ é causada pela correlação temporal dos elétrons descrita pela estatística de Fermi-Dirac. No limite de baixa transparência em todos os canais de transmissão, (1.64) reduz-se a (1.66):

$$P = \frac{4e^3 V}{h} \sum_n \tau_n = 2e \langle I \rangle, \quad (1.67)$$

que é o ruído de um processo poissoniano em que os elétrons estão descorrelacionados.

O ruído de disparo é uma fonte importante de informações que não estão

presentes no valor médio da corrente. Este poder de diagnóstico do ruído de disparo é discutido em detalhes no capítulo 2 desta dissertação.

***Crossover* do ruído de disparo para o ruído térmico**

Ainda na aproximação $t(\varepsilon) = t(\varepsilon_F)$, a expressão do ruído na situação em que tanto V quanto T são não-nulos foi calculada, por exemplo, na referência [24]:

$$P = 4 \frac{e^2}{h} \sum_{n=1}^N [2k_B T \tau_n^2 + \tau_n(1 - \tau_n) eV \coth(eV/2k_B T)] . \quad (1.68)$$

Desse modo, a potência do ruído total não é uma simples superposição das contribuições térmica e de disparo. Pelo contrário, P é uma função complicada da temperatura T e da voltagem V .

Apesar disso complexidade, pode-se tomar alguns limites da equação (1.68).

- No limite de baixas temperaturas, em que $k_B T \ll eV$, (1.68) fica:

$$\coth\left(\frac{eV}{2k_B T}\right) \approx 1$$

$$\Rightarrow P \approx 4 \frac{e^2}{h} \sum_{n=1}^N [2k_B T \tau_n^2 + \tau_n(1 - \tau_n) eV] = \frac{4e^3 V}{h} \sum_{n=1}^N \tau_n(1 - \tau_n), \quad (1.69)$$

que é idêntica à equação (1.64).

- No limite oposto, $k_B T \gg eV$, tem-se:

$$\coth\left(\frac{eV}{2k_B T}\right) \approx \frac{2k_B T}{eV}$$

$$\Rightarrow P \approx 4 \frac{e^2}{h} \sum_{n=1}^N \left[2k_B T \tau_n^2 + \tau_n(1 - \tau_n) eV \left(\frac{2k_B T}{eV} \right) \right] = 4k_B T G, \quad (1.70)$$

como esperado.

- No limite de baixa transparência em todos os canais, tem-se a expressão do ruído poissoniano:

$$P = \frac{4e^3 V}{h} \sum_n \tau_n = 2e \langle I \rangle, \quad (1.71)$$

como esperado.

- Uma vez que $\coth x > 1/x$; $\forall x$, a potência do ruído total é sempre maior do que a potência do ruído térmico. Isto não é verdade, no entanto, quando a matriz de transmissão, t , depende fortemente da energia.

1.4 Pontos Quânticos

Um dos dispositivos mais usados no estudo dos fenômenos mesoscópicos é o chamado *ponto quântico*, que consiste em uma região condutora espacialmente confinada em que ocorre o transporte coerente de elétrons ($L \ll L_\phi$). As técnicas de litografia modernas permitem a construção de pontos quânticos com dimensões menores do que ℓ_e , o livre caminho médio elástico. Neste caso, tem-se um ponto quântico balístico. No gás de elétrons bidimensional que tem sido considerado nesta dissertação, podem ser criados diversos tipos de pontos quânticos, com formatos e dimensões bastante diferentes, como aqueles mostrados na figura (1.8).

Mas por que esses dispositivos despertam tanto interesse? A resposta a esta questão relaciona-se ao conceito de caos, mais especificamente, ao conceito de caos quântico. Grosso modo, um sistema quântico é dito caótico quando a dinâmica

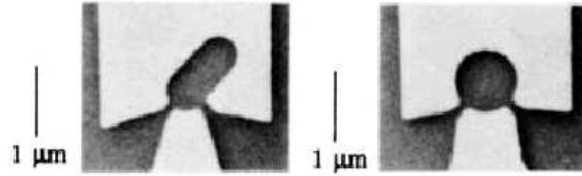


Figura 1.8: Pontos quânticos com formato de um estádio (esquerda) e de um círculo (direita). Adaptado de Marcus *et al.*, PRL, **69** 506.

clássica associada é caótica. O bilhar de Sinai[27] (ver figura (1.9)), por exemplo, apresenta divergência exponencial entre trajetórias clássicas geradas por condições iniciais muito próximas. Assim, o limite quântico do bilhar de Sinai apresenta caos quântico. Em particular, um ponto quântico balístico com o formato de um bilhar de Sinai é dito caótico.

Uma outra forma de introduzir caos em um condutor quântico é através de desordem. Dessa maneira, também se chama de ponto quântico caótico aquele que apresenta um pequeno grau de desordem. Subentende-se, aqui, que o condutor está no regime difusivo, visto que os sucessivos espalhamentos pelas impurezas são importantes.

O interesse despertado pelos pontos quânticos caóticos origina-se do fato de

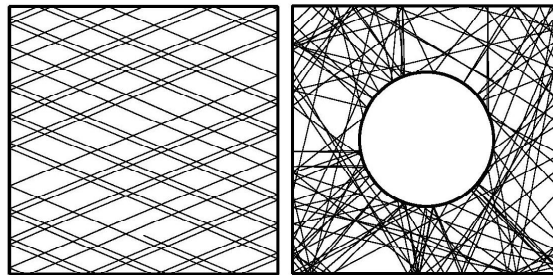


Figura 1.9: O bilhar quadrado (à esquerda) é dito regular, ao passo que o bilhar de Sinai (à direita) é chamado caótico. Figuras retiradas da referência [28].

suas propriedades físicas — tais como distribuição de níveis de energia, no caso de pontos fechados, e distribuição de autovalores de transmissão, no caso de pontos conectados a guias (abertos) — serem universais, dependendo apenas da existência de certas simetrias, como invariância sob reversão temporal e rotação de spin.

Conforme detalhado na seção seguinte, a ferramenta matemática mais adequada ao estudo das propriedades de transporte de pontos quânticos caóticos é a **Teoria de Matrizes Aleatórias** (TMA).

1.5 A Teoria de Matrizes Aleatórias

A teoria de matrizes aleatórias foi introduzida na física por Wigner[29], na década de 1950, com o intuito de explicar o espectro de ressonâncias do espalhamento de núcleons lentos por núcleos pesados. No início da década seguinte, Dyson deu forma final à teoria[30], desde então conhecida como teoria de Wigner-Dyson.

Sabe-se que um sistema quântico tem seus níveis de energia dados pelo operador hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$, o qual pode ser representado como uma matriz hermiteana $\mathcal{H}$ cujos autovalores são os níveis de energia do sistema. No caso do espalhamento de núcleons por núcleos pesados, contudo, a complexidade do problema torna essa estratégia inviável. Isto motivou Wigner a substituir a matriz hamiltoniana $\mathcal{H}$ por um ensemble de matrizes hermiteanas aleatórias obedecendo às simetrias do sistema. Os elementos dessas matrizes são números aleatórios independentes distribuídos segundo uma gaussiana. Embora uma análise nível-a-nível não seja mais possível, o método de Wigner permite descrever um espectro típico, valendo-se para isso de funções estatísticas como a distribuição de espaçamentos entre vizinhos e a função de correlação de dois pontos.

Após o êxito inicial da TMA na compreensão de fenômenos nucleares, ela foi

aplicada nas mais diversas áreas da física, desde a Óptica até a Física da Matéria Condensada. Na Física Mesoscópica, ela é bastante utilizada para estudar as propriedades de transporte em sistemas desordenados[31]. A TMA aparece, ainda, em domínios tão díspares quanto o estudo dos zeros da função Zeta de Riemann e a distribuição temporal de ônibus urbanos.⁵

1.5.1 Teoria de Matrizes Aleatórias de Pontos Quânticos

A única condição para que pontos quânticos caóticos possam ser descritos pela teoria de matrizes aleatórias de Wigner-Dyson é a de que o tempo de permanência do elétron na cavidade seja maior que o tempo ergódico τ_e , que é o tempo necessário à exploração completa do espaço de fase do sistema. Enquanto esta exigência é atendida para pontos quânticos fechados, o mesmo só ocorre com pontos quânticos abertos se eles estiverem conectados aos guias através de contatos pontuais. Uma vez satisfeita esta condição, o comportamento do sistema é universal, independentemente da forma do ponto quântico ou de sua configuração de impurezas.

Ponto Quântico Fechado

Um ponto quântico fechado é descrito por seus níveis de energia e autofunções, exatamente como um átomo. Entretanto, como já discutido, a complexidade do sistema leva a uma descrição estatística de suas propriedades. Seguindo a prescrição de Wigner e Dyson, a matriz hamiltoniana $\mathcal{H}$ é substituída por um ensemble de

⁵Os físicos tchecos M. Krbalek e P. Sebr demonstraram que os ônibus da cidade mexicana de Cuernavaca, que não seguem horários definidos, movem-se como partículas subatômicas que interagem aleatoriamente, sendo passíveis de uma descrição usando matrizes aleatórias. Apesar de este não ser um sistema quântico, as flutuações nos intervalos de tempo entre ônibus subsequentes mostram as mesmas propriedades que os níveis de energia no espectro de ressonâncias nucleares, por exemplo. Para mais detalhes, consultar *J. Phys. A* **33** L229 (2000).

matrizes hermiteanas $N \times N$ distribuídas de acordo com:

$$P(\mathcal{H}) = C_N \exp[-\beta \operatorname{Tr} V(\mathcal{H})], \quad (1.72)$$

onde C_N é uma constante de normalização. Quando $V(\mathcal{H}) \propto \mathcal{H}^2$, tem-se um ensemble Gaussiano. O índice β aparecendo em (1.72) é chamado *índice de simetria*, estando relacionado à presença de certas simetrias fundamentais, tais como reversão temporal e rotação de spin.

Os valores possíveis de β são 1, 2 e 4, correspondendo ao número de graus de liberdade dos elementos da matriz $\mathcal{H}$: para $\beta = 1$, os elementos $\mathcal{H}_{nm}$ são números reais e este valor do índice de simetria descreve sistemas com simetria de reversão temporal (SRT) e simetria de rotação de spin (SRS); o caso $\beta = 4$ corresponde a matrizes aleatórias $\mathcal{H}$ cujos elementos são quatérnions reais⁶, descrevendo sistemas com simetria de reversão temporal em que a simetria de reversão de spin é quebrada pela presença de interação spin-órbita; por fim, o índice $\beta = 2$ descreve sistemas em que a simetria de reversão temporal é quebrada pela presença de um campo magnético, sendo os elementos de $\mathcal{H}$ números complexos. Correspondentemente, a matriz U dos autovetores de $\mathcal{H}$ pode ser ortogonal ($\beta = 1$), unitária ($\beta = 2$) ou simplética ($\beta = 4$). Esta classificação é resumida na tabela (1.1), tirada da referência [31].

A partir de (1.72), é possível calcular as funções de correlação entre os níveis que descrevem o espectro, como os já citados densidade de autovalores e função de correlação de dois pontos. Vale destacar que no limite em que $N \rightarrow \infty$, essas correlações espectrais independem de $V(\mathcal{H})$, resultado conhecido como *universalidade*

⁶Um quatérnion q é a combinação linear da matriz identidade $\mathbf{1}$ e das matrizes de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: $q = q_0\mathbf{1} + iq_1\sigma_1 + iq_2\sigma_2 + iq_3\sigma_3$. Quando os números q_i são reais, diz-se que q é um quatérnion real.

β	SRT	SRS	Elementos de $\mathcal{H}$	U
1	Sim	Sim	Reais	Ortogonal
2	Não	Irrelevante	Complexos	Unitária
4	Sim	Não	Quatérnions reais	Simplética

Tabela 1.1: Classificação de Dyson das classes de simetria segundo o parâmetro β . U é matriz dos autovetores de $\mathcal{H}$, que deixa $P(\mathcal{H})$ invariante sob $\mathcal{H} \rightarrow U\mathcal{H}U^{-1}$.

das correlações espectrais.

Pontos Quânticos Abertos

Um ponto quântico aberto é caracterizado por seus autovalores de transmissão τ_n , os quais são obtidos através da diagonalização da matriz $tt^\dagger$. A matriz de transmissão t , por sua vez, é um dos blocos que constituem a matriz de espalhamento S :

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}.$$

(Ver equação (1.22).) Assim, no caso de pontos quânticos abertos, busca-se uma teoria de matrizes aleatórias para a matriz S .

Há duas maneiras de se obter a TMA para a matriz de espalhamento de um ponto quântico aberto:

- **Abordagem Hamiltoniana:** Nesta abordagem, parte-se da TMA da matriz hamiltoniana $\mathcal{H}$, $N_c \times N_c$, da cavidade fechada, sem os guias. Obtém-se, em seguida, a matriz de espalhamento do ponto quântico aberto através de uma relação conhecida como *fórmula de Mahaux-Weidenmüller*[32]:

$$S(E) = \mathbf{1} - 2\pi i W^\dagger (E - \mathcal{H} + i\pi W W^\dagger)^{-1} W, \quad (1.73)$$

onde W é uma matriz descrevendo o acoplamento com os guias. Como o limite $N_c \rightarrow \infty$ é tomado, a estatística da matriz S é universal, não dependendo do hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$.

- **Abordagem Informacional:** Pode-se obter a TMA da matriz de espalhamento, S , sem fazer referência ao hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}$. Para tanto, define-se um ensemble de matrizes S , a partir do qual são calculadas as propriedades de um ensemble de sistemas. Sendo $P(S)$ a densidade de probabilidade de encontrar a matriz S no elemento de volume $d\mu(S)$ do espaço das matrizes S , tem-se a seguinte condição de normalização:

$$\int d\mu(S) P(S) = 1. \quad (1.74)$$

Associando a entropia informacional $\mathcal{S}$ à densidade de probabilidade $P(S)$:

$$\mathcal{S} \equiv - \int d\mu(S) P(S) \ln P(S), \quad (1.75)$$

é possível encontrar, através do *princípio de máxima entropia*, a distribuição mais aleatória que obedece ao vínculo (1.74). O resultado obtido é:

$$P(S) = \text{constante}. \quad (1.76)$$

A equação (1.76) descreve o ensemble circular de Dyson, que é apropriado para descrever pontos quânticos caóticos acoplados a guias através de contatos pontuais ideais.

Na presença de outros vínculos, a distribuição $P(S)$ não é mais dada por uma

constante. Por exemplo, introduzindo o vínculo[33]:

$$\int d\mu(S) S^p P(S) = \bar{S}^p, \quad (1.77)$$

onde $p = 1, 2, \dots$ e maximizando a entropia informacional $\mathcal{S}$ associada a $P(S)$ impondo (1.74) e (1.77), obtém-se:

$$P(S) \propto |\text{Det}(\mathbf{1} - \bar{S}^\dagger S)|^{-\beta(N_1+N_2-1+2/\beta)}, \quad (1.78)$$

onde N_1, N_2 são os números de canais abertos no guias 1 e 2, respectivamente, e $\bar{S}$ é uma matriz subunitária fixa⁷. A equação (1.78) é a expressão do *núcleo de Poisson*, que é apropriado à descrição de pontos quânticos caóticos que se conectam aos guias através de barreiras de transparências arbitrárias.

⁷ $\bar{S}$ é dita subunitária porque os autovalores de $\bar{S}\bar{S}^\dagger$ são menores do que ou iguais a 1.

Capítulo 2

A Estatística de Contagem de Carga

No capítulo anterior, as flutuações da corrente elétrica em torno de seu valor médio, comumente designadas por ruído, foram introduzidas à luz do formalismo de Landauer-Büttiker. Naquele capítulo, distinguiu-se entre o ruído térmico e o ruído de disparo e, a fim de estudá-los quantitativamente, a potência do ruído, $P(\omega)$, foi definida.

O ruído térmico manifesta-se, por exemplo, em um condutor em equilíbrio térmico submetido a uma voltagem fixa $V = 0$. Neste caso, as flutuações da corrente, $\Delta\hat{I}(t)$, informam apenas — através do teorema da flutuação-dissipação[21] — a temperatura do condutor. Uma outra característica do ruído de Nyquist-Johnson, como também é conhecido o ruído térmico, é o fato de a potência do ruído ser independente de ω :

$$P(\omega) = P = 4k_B T G.$$

Em analogia com a luz branca, em que todas as componentes de frequência estão igualmente representadas, o ruído térmico é dito ruído branco.

Considerando um sistema semelhante ao anterior, desta feita a temperatura $T = 0$ e voltagem não-nula, a discreteza da carga elétrica é a única fonte de ruído presente. Ao contrário do ruído térmico, o ruído de disparo é bastante informativo, sendo usado como uma ferramenta de diagnóstico em diversas situações, como na determinação da carga dos portadores em processos de transporte e na detecção da abertura de novos canais de transmissão[34].

Tratou-se, até aqui, da importância da condutância e da potência do ruído para o estudo das propriedades de transporte de carga em sistemas mesoscópicos. Outras quantidades, chamadas de cumulantes, serão definidas e estudadas neste capítulo. Será mostrado, ainda, que esses cumulantes podem ser obtidos a partir da chamada função geratriz, $\chi(\lambda)$, que define a *estatística de contagem de carga*. Nesse contexto, a corrente promediada no tempo e a potência do ruído são os dois primeiros cumulantes da estatística de contagem de carga.

Observação Histórica

Foi Albert Einstein[35] quem demonstrou que as flutuações da radiação eletromagnética estão intimamente ligadas à dualidade partícula-onda. Em particular, ele mostrou que quando a energia é transmitida por partículas clássicas, a amplitude das flutuações escala com a raiz quadrada da energia média, ao passo que ondas clássicas levam a uma dependência linear com a energia média. Levando em conta a natureza dual da luz, essas duas contribuições devem coexistir, podendo-se ter, todavia, a predominância de uma delas para uma determinada faixa de frequência. Por exemplo, para frequências ópticas ($f \approx 10^{14} Hz$), a dependência das flutuações com a raiz quadrada da energia média demonstra que o comportamento corpuscular domina. Este poder de diagnóstico do ruído fotônico popularizou-se na década de

1960, quando ele foi utilizado para distinguir a radiação proveniente de um laser daquela de um corpo negro. Desde então, tal procedimento tornou-se rotina na Óptica Quântica[36].

Como o elétron também possui essa natureza dual, já era esperado que sua discreteza levasse a um tipo específico de ruído. Como vimos no capítulo anterior, esse ruído chama-se ruído de disparo e foi descrito pela primeira vez por Walter Schottky[37], em 1918, no contexto de experimentos em tubos de raios catódicos.

Uma introdução bastante interessante e acessível a este assunto pode ser encontrada na referência [34].

2.1 A Estatística de Contagem

Na mecânica quântica, uma medição instantânea é descrita pela redução do pacote de ondas descrevendo o sistema de interesse. Esta redução envolve a projeção deste pacote em um auto-estado do observável medido, o qual é representado por um operador hermiteano. Um outro tipo de medição é a estendida no tempo, que ocorre em fotodetectores, por exemplo. Neste caso, pode-se perguntar quantos fótons atingem o detector em um intervalo de tempo fixo τ . Repetindo o experimento várias vezes, chega-se à *distribuição de contagem* $P(n)$, que é a probabilidade de que n fótons atinjam o detector no intervalo τ . A distribuição de contagem para elétrons é definida de maneira análoga. O objetivo da estatística de contagem é calcular $P(n)$.

2.1.1 Estatística de Contagem de Fótons *versus* Estatística de Contagem de Elétrons

A teoria da detecção de fótons é um problema de mecânica estatística de muitos corpos, uma vez que os fótons emitidos por uma fonte e absorvidos por um detector estão correlacionados no tempo. Esta correlação é descrita pela estatística de Bose-Einstein, aplicável a bósons. Como sabido, partículas obedecendo a esta estatística tendem a se agrupar em um mesmo estado quântico de 1-partícula.

Da mesma forma, os elétrons emitidos por uma fonte — o cátodo de um tubo de raios catódicos, por exemplo — estão correlacionados segundo a estatística quântica de Fermi-Dirac, aplicável a férmions. Ao contrário do que ocorre com a estatística de Bose-Einstein, a de Fermi-Dirac limita a 1 o número de ocupação de um estado quântico de 1-partícula, resultado conhecido como princípio da exclusão de Pauli.

A fim de ilustrar essa diferença, considere-se, seguindo o capítulo 1 da referência [38], a estatística de contagem para uma fonte de partículas isolada em equilíbrio térmico. No esquema mostrado na figura (2.1), um fio bidimensional está conectado a um reservatório de partículas à temperatura T . O confinamento transversal das partículas leva à quantização dos níveis de energia associados ao movimento nesta direção, mas, por simplicidade, assume-se que existe um único modo transversal. Este modo transversal único tem velocidade de grupo $v = \partial E / \partial(\hbar k)$, onde E é a energia total da partícula e k é o número de onda descrevendo os modos longitudinais. Sendo L o comprimento do fio, estes modos longitudinais estão espaçados por $\Delta k = 2\pi/L$. Assumindo que apenas partículas com energia total no intervalo entre E e $E + \delta E$, com $\delta E \ll E$, participam da condução, tem-se $N = \delta E / (v\hbar\Delta k) = L\delta E / \hbar v$ estados de 1-partícula no guia.

Como todas as partículas têm a mesma velocidade v , o tempo de transmissão pode ser reescrito como $\tau = L/v$, que implica $N = \tau \delta E/h$. A distribuição de contagem $P(n)$ pode, então, ser obtida calculando-se a probabilidade de o guia ter seus N modos longitudinais ocupados por n partículas. A partir deste ponto, deve-se tratar fótons e elétrons separadamente, pois suas diferentes descrições estatísticas levam a resultados distintos para $P(n)$. No equilíbrio térmico com um reservatório à temperatura T — situação descrita por um *ensemble* canônico — um estado de n partículas cada uma com energia E tem peso $\exp(-nE/k_B T)$. Para obter $P(n)$, basta multiplicar esse fator exponencial pelo número de modos distintos em que os N modos do guia podem ser preenchidos por n partículas. Para fótons, o número

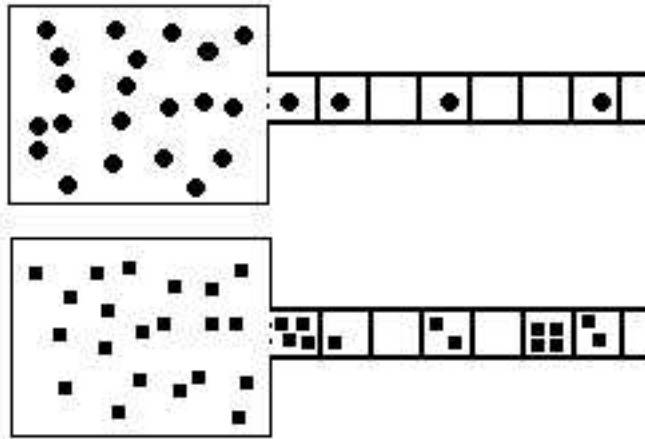


Figura 2.1: Parte superior: reservatório de férmions conectado a um guia de comprimento L . Cada estado de 1-partícula tem número de ocupação máximo igual a 1. Parte inferior: reservatório de bósons conectado a um guia de comprimento L . Neste caso, tem-se um número ilimitado de partículas em um mesmo estado quântico. Adaptado da referência [38].

de possibilidades é $\binom{N+n-1}{n}$. Assim, $P_{fótons}$ é dado por:

$$P_{fótons}(n) = \binom{N+n-1}{n} e^{-nE/k_B T}, \quad (2.1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Analogamente, para elétrons, tem-se:

$$P_{elétrons}(n) = \binom{N}{n} e^{-nE/k_B T}. \quad (2.2)$$

Além da estatística descrevendo o processo, a detecção de elétrons difere da detecção de fótons no que se refere à conservação do número de partículas: fótons são absorvidos em fotodetectores, ao passo que a conservação da carga impede que isto aconteça com elétrons. Assim, sempre que um fóton é detectado, sua energia $\hbar\omega$ é tirada do campo de radiação, tornando fotodetectores insensíveis às flutuações de ponto zero do campo. Por outro lado, a medição de corrente elétrica acontece sem alterar a energia do sistema, o que faz das flutuações de ponto zero uma componente importante de todas medições elétricas.

Nesta dissertação, estudaremos a estatística de contagem de carga de condutores mesoscópicos difusivos.

2.2 Formulação Matemática da Estatística de Contagem de Carga

Ao invés de lidar com $P(n)$, a probabilidade de n elétrons serem transmitidos através de uma amostra mesoscópica durante o tempo de observação τ , é mais conveniente trabalhar com $P_\tau(Q)$, a probabilidade de uma carga Q medida em unidades da carga elétrica fundamental, e , ser transmitida no intervalo de tempo τ . Introduz-se, ainda,

a *função geratriz* $\chi(\lambda)$, também conhecida por *função característica*, definida como:

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\lambda} P_n = \chi(\lambda + 2\pi), \quad (2.3)$$

onde $-\pi \leq \lambda < \pi$ e os P_n são probabilidades de contagem de elétrons. A função $\chi(\lambda)$ é, assim, 2π -periódica no *campo de contagem* λ , cuja relação com o dispositivo de medição de carga será explicitada na seção seguinte. De (2.3), segue que as probabilidades P_n se relacionam com a função geratriz $\chi(\lambda)$ via transformada de Fourier:

$$P_n = \int_{-\pi}^{\pi} \chi(\lambda) e^{-in\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi}. \quad (2.4)$$

Da condição de normalização das probabilidades de contagem de elétrons, resulta ainda:

$$\chi(0) = 1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n. \quad (2.5)$$

Por completeza, convém listar a equação abaixo:

$$P_n = \langle \delta(Q(\tau) - n) \rangle, \quad (2.6)$$

onde a média é calculada sobre o estado quântico do sistema.

2.2.1 Momentos e Cumulantes de uma Distribuição de Probabilidade

Esta subseção é baseada no capítulo 4 da referência [39]. Seja X uma variável estocástica¹ discreta definida em um espaço amostral S . O espaço S pode ser trans-

¹Colocado simplesmente, uma *variável estocástica* é aquela cujo valor depende do resultado de um experimento. No caso da contagem de carga, esta variável é a carga elétrica transmitida no

formado em um espaço de probabilidades quando se associa uma probabilidade p_i a cada valor x_i que X pode assumir. O conjunto $\{p_i\}$ é a *distribuição de probabilidade* de S e satisfaz as condições $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Define-se, ainda, uma *função densidade de probabilidade* $P_X(x)$:

$$P_X(x) = \sum_{i=1}^N p_i \delta(x - x_i). \quad (2.7)$$

Uma vez determinado $P_X(x)$, tem-se todas as informações possíveis sobre X . Contudo, isto nem sempre é uma tarefa simples e os *momentos* de X dão uma boa idéia da forma de $P_X(x)$. O n -ésimo momento de X é definido como:

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n P_X(x) dx. \quad (2.8)$$

Como destacado na referência [39], o primeiro momento $\langle x \rangle$ é o valor médio da variável estocástica X . O segundo momento $\langle x^2 \rangle$, por sua vez, é uma quantidade equivalente ao momento de inércia da mecânica clássica, descrevendo o “espalhamento” da distribuição em torno da média de X . Por fim, o terceiro momento é uma medida da helicidade de $P_X(x)$, isto é, $\langle x^3 \rangle$ fornece informações sobre a simetria/assimetria da distribuição em torno da origem.

É conveniente definir a *função característica* correspondente à variável estocástica X :

$$f_X(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P_X(x) dx = \sum_{i=1}^N e^{ix_i k} p_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!}. \quad (2.9)$$

intervalo de tempo τ .

$P_X(x)$ e $\langle x^n \rangle$ podem ser obtidos de $f_X(k)$ através das seguintes relações:

$$P_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f_X(k) \frac{dk}{2\pi}, \quad (2.10)$$

$$\langle x^n \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (-i)^n \frac{\partial^n f_X(k)}{\partial k^n}. \quad (2.11)$$

Finalmente, os *cumulantes* de X (também conhecidos por *momentos irreduzíveis*) são definidos implicitamente pela expansão abaixo:

$$f_X(k) = \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} C_n(X) \right), \quad (2.12)$$

onde $C_n(X)$ é o n -ésimo cumulante da distribuição². Invertendo (2.12), obtém-se:

$$C_n(X) = \lim_{k \rightarrow 0} (-i)^n \frac{\partial^n \ln f_X(k)}{\partial k^n}. \quad (2.13)$$

Relações entre os $\langle x^n \rangle$ e os $C_n(X)$ são obtidas através da expansão de (2.12) em uma série de potências de k ; igualando os coeficientes de mesma potência em k desta expansão e de (2.9), resulta:

$$C_1(X) = \langle x \rangle, \quad (2.14)$$

$$C_2(X) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2, \quad (2.15)$$

$$C_3(X) = \langle x^3 \rangle - 3\langle x \rangle \langle x^2 \rangle + 2\langle x \rangle^3, \quad (2.16)$$

$$C_4(X) = \langle x^4 \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 - 4\langle x \rangle \langle x^3 \rangle + 12\langle x \rangle^2 \langle x^2 \rangle - 6\langle x \rangle^4. \quad (2.17)$$

Para obter relações envolvendo termos de ordem superior, basta prosseguir com a expansão em (2.12).

²É comum encontrar a notação $\langle\langle X^n \rangle\rangle$ no lugar de $C_n(X)$.

No apêndice B, são apresentadas as distribuições de probabilidade mais freqüentes, assim como as funções geratrizes correspondentes; as expressões para alguns cumulantes também são obtidas.

2.2.2 Momentos e Cumulantes da Estatística de Contagem de Carga

Ao retomar-se a estatística de contagem de carga, as seguintes associações são imediatas:

$$\left\{ \begin{array}{ll} X & \longrightarrow Q(\tau); \\ p_i & \longrightarrow P_n; \\ P_X(x) & \longrightarrow P_\tau(Q); \\ f_X(k) & \longrightarrow \chi(\lambda). \end{array} \right.$$

Os momentos de $P_\tau(Q)$ são, de acordo com estas associações e com a equação (2.11), dados por:

$$\langle n^m \rangle = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-i)^m \frac{\partial^m \chi(\lambda)}{\partial \lambda^m}. \quad (2.18)$$

Já os cumulantes são definidos como:

$$\Phi(\lambda) = -\ln \chi(\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} Q_k, \quad (2.19)$$

$$Q_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} (-i)^k \frac{\partial^k \Phi(\lambda)}{\partial \lambda^k}. \quad (2.20)$$

$\Phi(\lambda)$ é chamada *função característica dos cumulantes*. Tendo em vista as associações supracitadas e a equação (2.20), é fácil perceber que (2.20) é, de fato, uma forma particular de (2.13).

As relações entre os momentos e os cumulantes de Q seguem de (2.14)–(2.17):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \langle Q \rangle, \\ Q_2 &= \langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2, \\ Q_3 &= \langle Q^3 \rangle - 3 \langle Q \rangle \langle Q^2 \rangle + 2 \langle Q \rangle^3, \\ Q_4 &= \langle Q^4 \rangle - 3 \langle Q^2 \rangle^2 - 4 \langle Q \rangle \langle Q^3 \rangle + 12 \langle Q \rangle^2 \langle Q^2 \rangle - 6 \langle Q \rangle^4. \end{aligned}$$

2.3 A Fórmula de Levitov-Lesovik

Na referência [40], Levitov e Lesovik deduziram a seguinte expressão para a função característica de um condutor multicanal arbitrário a temperatura nula:

$$\chi(\lambda) = \prod_{n=1}^N [1 + \tau_n (e^{i\lambda} - 1)]^M, \quad (2.21)$$

onde $M = eVt_0/h$ é o número de tentativas de transmissão no tempo de observação t_0 , V é a tensão aplicada e N é o número de canais abertos. Esta expressão é conhecida na literatura como *fórmula de Levitov-Lesovik*. De (2.20) e (2.21), segue que os cumulantes (adimensionais) da estatística de contagem de carga são dados por[41]:

$$Q_\ell = \sum_{n=1}^N D_\tau^{\ell-1} \Big|_{\tau=\tau_n} \tau; \quad D_\tau \equiv \tau(1-\tau) \frac{d}{d\tau}. \quad (2.22)$$

Os quatro primeiros cumulantes são:

$$Q_1 = \sum_n \tau_n = g, \quad (2.23)$$

$$Q_2 = \sum_n \tau_n(1 - \tau_n) = p, \quad (2.24)$$

$$Q_3 = \sum_n \tau_n(1 - \tau_n)(1 - 2\tau_n) = \sum_n (\tau_n - 3\tau_n^2 + 2\tau_n^3), \quad (2.25)$$

$$Q_4 = \sum_n \tau_n(1 - \tau_n)(1 - 6\tau_n + 6\tau_n^2) = \sum_n (\tau_n - 7\tau_n^2 + 12\tau_n^3 - 6\tau_n^4). \quad (2.26)$$

Como esperado, Q_1 é idêntico à expressão para a condutância adimensional, já obtida em (1.55), e Q_2 é a expressão para a componente de frequência nula da potência do ruído de disparo, calculada em (1.65).

2.4 Medição da Estatística de Contagem

Em uma descrição quântica de qualquer processo de medição, é necessário incluir o sistema de detecção explicitamente no hamiltoniano do sistema. No caso da medição de uma corrente elétrica, um modelo de galvanômetro bastante utilizado foi proposto por Levitov, Lee e Lesovik na referência [42], que consiste de um spin-1/2, localizado na interface entre a amostra e os guias de onda, que se acopla ao campo magnético gerado pela corrente. Para uma discussão detalhada deste esquema de medição, consultar a referência [43].

Do ponto de vista semiclássico, sabe-se que um momento magnético na presença de um campo magnético estático e uniforme $\mathbf{B}$ precessiona em torno deste com velocidade angular $\omega = eB/m_e c$, onde m_e é a massa do elétron e c é a velocidade da

luz no vácuo. Se este campo é gerado por uma corrente elétrica, tem-se $\omega \sim B$ e, por sua vez, $B \sim I$. Em outras palavras, o momento magnético funciona como um galvanômetro analógico cujo ângulo de precessão, $\theta(t) = \int_0^t \omega(t') dt'$, é proporcional à carga transmitida, $Q(t) = \int_0^t I(t') dt'$.

No problema inteiramente quântico, o acoplamento spin-corrente pode ser descrito pela inclusão de um potencial vetor fictício relacionado ao spin no hamiltoniano eletrônico:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda \Phi_0}{4\pi} \sigma_z \nabla \theta(f(\mathbf{r}) - f_0), \quad (2.27)$$

onde σ_z é uma matriz de Pauli, $\Phi_0 = hc/e$ e $\theta(x) = 1$, se $x > 0$, e $\theta(x) = 0$, se $x < 0$. Vale notar que (2.27) descreve uma interação elétron-spin localizada na superfície $\mathcal{S}$ definida por $f(\mathbf{r}) = f_0$. O hamiltoniano de interação é obtido de (2.27) através de $\hat{\mathcal{H}}_{int} = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{int} &= -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{r} = -\frac{\lambda \Phi_0 \sigma_z}{4\pi c} \int \mathbf{j} \cdot \nabla \theta(f(\mathbf{r}) - f_0) d\mathbf{r} \\ &= -\frac{\lambda \Phi_0 \sigma_z}{4\pi c} \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\lambda \hbar}{2e} \sigma_z I_S, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $I_S = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$. O próximo passo é calcular a dinâmica do spin na presença da corrente flutuante, encontrar sua distribuição de ângulos de precessão e interpretá-la como uma distribuição de carga transmitida.

A fim de calcular a evolução temporal do sistema spin-corrente, admite-se que a interação seja ligada durante o intervalo de tempo $0 < \tau < t$. Em $\tau = 0$, a matriz-densidade do sistema é

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_e(0) \otimes \hat{\rho}_s(0), \quad (2.29)$$

onde $\hat{\rho}_e$ é a matriz-densidade dos elétrons e $\hat{\rho}_s$ é a matriz-densidade descrevendo o spin. No instante t , a matriz-densidade é dada por

$$\hat{\rho}(t) = e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \hat{\rho}(0) e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} = e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} (\hat{\rho}_e(0) \otimes \hat{\rho}_s(0)) e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}, \quad (2.30)$$

sendo $\hat{\mathcal{H}}$ o hamiltoniano total do sistema. Desta equação segue a expressão para $\hat{\rho}_s(t)$, a matriz-densidade associada ao spin logo após este ser desconectado do sistema:

$$\hat{\rho}_s(t) = \text{Tr}_e \hat{\rho}(t) = \text{Tr}_e (e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \hat{\rho}_e(0) \otimes \hat{\rho}_s(0) e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}). \quad (2.31)$$

Aqui, Tr_e designa o traço parcial, calculado sobre os estados eletrônicos.

Antes de prosseguir, deve-se notar que $\hat{\mathcal{H}}$ é diagonal no espaço de spin, uma vez que (2.28) é diagonal em $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, base de autovetores de σ_z :

$$\langle \uparrow | \hat{\mathcal{H}} | \uparrow \rangle = \mathcal{H}_\lambda; \langle \downarrow | \hat{\mathcal{H}} | \downarrow \rangle = \mathcal{H}_{-\lambda}; \langle \uparrow | \hat{\mathcal{H}} | \downarrow \rangle = 0 = \langle \downarrow | \hat{\mathcal{H}} | \uparrow \rangle, \quad (2.32)$$

onde $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}(\mathbf{p}_\lambda, \mathbf{r})$, $\mathbf{p}_\lambda \equiv \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}$. Observando que:

$$e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} = e^{i\mathcal{H}_\lambda t/\hbar} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + e^{i\mathcal{H}_{-\lambda} t/\hbar} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|,$$

$$\hat{\rho}_s(0) = \rho_{\uparrow\uparrow} |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \rho_{\uparrow\downarrow} |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \rho_{\downarrow\uparrow} |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + \rho_{\downarrow\downarrow} |\downarrow\rangle\langle\downarrow|,$$

a equação (2.31), após algumas manipulações matriciais, fica:

$$\hat{\rho}_s(t) = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & \chi(\lambda)\rho_{\uparrow\downarrow} \\ \chi(-\lambda)\rho_{\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

onde $\chi(\lambda) = \langle e^{-i\mathcal{H}_\lambda t/\hbar} e^{i\mathcal{H}_{-\lambda} t/\hbar} \rangle_e$ e $\langle \dots \rangle_e$ indica a média sobre o estado quântico

inicial dos elétrons.

Sabe-se, por outro lado, que a rotação da matriz-densidade $\hat{\rho}_s$ por um ângulo θ em torno do eixo $\hat{z}$ é dada por:

$$\mathcal{R}_\theta(\hat{\rho}_s) = e^{-i\theta\sigma_z/2}\hat{\rho}_s e^{i\theta\sigma_z/2}, \quad (2.34)$$

que em forma matricial fica:

$$\mathcal{R}_\theta(\hat{\rho}_s) = \begin{pmatrix} \rho_{\uparrow\uparrow} & e^{-i\theta}\rho_{\uparrow\downarrow} \\ e^{i\theta}\rho_{\downarrow\uparrow} & \rho_{\downarrow\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Substituindo (2.3) em (2.33), resulta:

$$\hat{\rho}_s(t) = \sum_n P_n \mathcal{R}_{\theta=n\lambda}(\hat{\rho}_s). \quad (2.36)$$

Assim, P_n pode ser interpretado como a probabilidade de que um ângulo de precessão $\theta = n\lambda$ seja observado, correspondendo à passagem de n cargas pela interface.

Isto completa o segundo capítulo desta dissertação, em que os fundamentos da estatística de contagem de carga foram apresentados.

Capítulo 3

Teoria de Circuitos e Estatística de Contagem de Carga a Temperatura Nula

Este capítulo trata de um conjunto de situações de grande interesse prático, em que um ou mais condutores difusivos de formatos arbitrários ligam-se a dois guias ideais através de uma gama de conectores diferentes, como pontos de contato quânticos e junções de tunelamento. Esses guias ideais, por sua vez, estão ligados a reservatórios de elétrons via contatos sem reflexão.

Como de praxe nesta dissertação, o formalismo de Landauer-Büttiker — em que as propriedades de transporte eletrônico são calculadas a partir dos autovalores de transmissão do sistema — é empregado. Nesse espírito, os observáveis de transporte podem ser obtidos através da fórmula de Levitov-Lesovik, equação (2.22) do capítulo 2:

$$Q_\ell = \sum_{n=1}^N D_\tau^{\ell-1} \Big|_{\tau=\tau_n} \tau ; \quad D_\tau \equiv \tau (1 - \tau) \frac{d}{d\tau},$$

donde segue que:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sum_n \tau_n = g, \\ Q_2 &= \sum_n \tau_n (1 - \tau_n) = p \end{aligned}$$

e assim por diante. Em termos da *densidade média de autovalores de transmissão*, definida como:

$$\rho(\tau) = \sum_{n=1}^N \langle \delta(\tau - \tau_n) \rangle, \quad (3.1)$$

onde τ_n é o n -ésimo autovalor de transmissão do sistema, a condutância, g , e a potência do ruído de disparo, p , podem ser reescritos como:

$$g = \int_0^1 d\tau \tau \rho(\tau), \quad (3.2)$$

$$p = \int_0^1 d\tau \tau (1 - \tau) \rho(\tau). \quad (3.3)$$

Assim, o problema de encontrar os cumulantes da distribuição de carga consiste em calcular $\rho(\tau)$.

Entretanto, o cálculo de $\rho(\tau)$ na maior parte dos casos de interesse é bastante difícil. Beenakker *et al.*[31, 44] realizaram progressos consideráveis em sistemas com geometria quasi-unidimensional, isto é, fios cujas dimensões transversais encontram-se entre o comprimento de onda de Fermi, λ_F , e o livre caminho médio, ℓ_e . Para esses sistemas, $\rho(\tau)$ pode ser calculado usando a equação DMPK[45, 46], que é uma equação de escala válida para um número arbitrário finito, N , de canais propagantes.

A fim de resolver o problema para condutores com geometrias arbitrárias no limite semiclássico, Nazarov[47] propôs um método de elemento finito conhecido

como *teoria de circuitos*. Esse método consiste em substituir o sistema original por um grafo cujas arestas são conectores e cujos vértices são nós ou terminais, analogamente à teoria de circuitos clássica de Kirchhoff. Na teoria de Nazarov, define-se um *pseudopotencial* complexo, Φ , que tem valores fixos nos terminais e valores desconhecidos nos nós. Define-se, ainda, a *corrente espectral*, $I(\Delta\Phi)$:

$$I(\Delta\Phi) \equiv \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{\tau_n \text{sen}(\Delta\Phi)}{1 - \tau_n \text{sen}^2(\Delta\Phi/2)} \right\rangle = \text{sen}(\Delta\Phi) F(\Delta\Phi), \quad (3.4)$$

onde:

$$F(\Delta\Phi) = \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau)}{1 - \tau \text{sen}^2(\Delta\Phi/2)}. \quad (3.5)$$

Se $\Delta\Phi_{ij}$ é a queda do pseudopotencial ao longo do conector (i, j) , $I(\Delta\Phi_{ij})$ é a corrente espectral que o atravessa. A partição inicial do sistema deve ser tal que as relações fase-corrente sejam conhecidas para cada elemento do circuito. Uma lei de conservação da corrente espectral nos nós — demonstrada na referência [47] — fornece um número suficiente de equações para a determinação dos pseudopotenciais. Determina-se, assim, a corrente espectral total que atravessa o circuito e, a partir desta, calcula-se a densidade média de autovalores de transmissão, $\rho(\tau)$.

Na primeira seção deste capítulo, apresenta-se uma extensão da teoria de circuitos de Nazarov, realizada por Macêdo na referência [48]. Em seguida, na seção 3.5, os efeitos de interações fracas entre os elétrons são incluídos na teoria como ferramenta usada para estabelecer a conexão entre a estatística de contagem de carga e a teoria de circuitos. Depois disso, como um dos resultados da dissertação, discutem-se alguns circuitos de grande interesse prático e teórico, em que são obtidas as funções geratrizes de suas estatísticas de contagem de carga. Enfatiza-se, neste ponto, uma interpretação estocástica para os resultados obtidos. Por fim, é discutida

a formação de modos de Fabry-Perot entre os conectores, associados à aparição de uma singularidade do tipo inverso de raiz quadrada em $\rho(\tau)$.

3.1 Versão Estendida da Teoria de Circuitos

Considere-se uma rede de dois terminais com M obstáculos. O pseudopotencial assume os valores $\Phi_1 = 0$ e $\Phi_2 = \phi$ nos terminais, sendo θ_i seu valor no i -ésimo nó. A formulação de Macêdo baseia-se no modelo sigma não-linear supersimétrico para o cálculo de $\rho(\tau)$ em cada conector e no seguinte teorema, apresentado nas referências [48] e [49].

Teorema Seja $I_0(\phi)$ a corrente espectral através de uma rede auxiliar obtida do circuito original negligenciando a queda de potencial ao longo dos elementos difusivos. Então a corrente espectral original satisfaz:

$$I(\phi, R) = I_0(\phi - RI(\phi, R)), \quad (3.6)$$

onde R é a resistência total adimensional da parte difusiva do circuito. ■

A fim de entender o significado desse teorema, vale a pena discutir em detalhes o caso $M = 3$. A discussão deste e dos casos $M = 1, 2$ é feita detalhadamente na referência [50].

Caso M=3

Considere-se o caso $M = 3$, mostrado na figura (3.1). Impondo a conservação da corrente espectral a este circuito, obtém-se:

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = \frac{\theta_2 - \theta_1}{R_1} = I_2(\theta_3 - \theta_2) = \frac{\theta_4 - \theta_3}{R_2} = I_3(\phi - \theta_4). \quad (3.7)$$

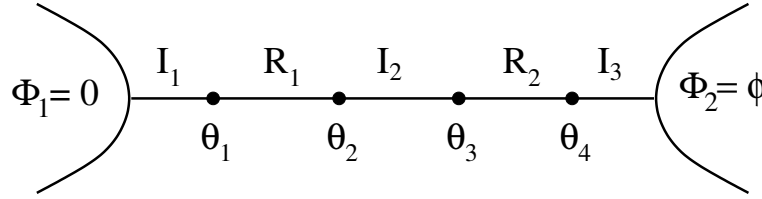


Figura 3.1: Circuito com três conectores e dois elementos difusivos.

Definindo $\theta = \theta_1 + \theta_3 - \theta_2$, pode-se ser reescrever (3.7) como:

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = I_2(\theta - \theta_1) = \frac{\theta_3 - \theta}{R_1} = \frac{\theta_4 - \theta_3}{R_2} = I_3(\phi - \theta_4), \quad (3.8)$$

a qual descreve adequadamente a conservação da corrente espectral no circuito da figura (3.2).

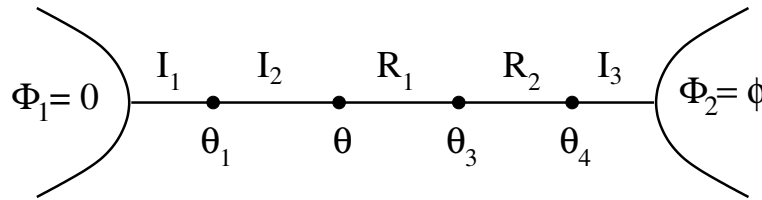


Figura 3.2: Circuito intermediário.

Agora que os dois elementos difusivos estão em contato direto, eles podem ser considerados um único elemento difusivo de resistência total $R = R_1 + R_2$. Dessa

maneira, a conservação da corrente leva a:

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = I_2(\theta - \theta_1) = \frac{\theta_4 - \theta}{R} = I_3(\phi - \theta_4). \quad (3.9)$$

A variável θ_4 é dada por:

$$\theta_4 = \theta + RI_1(\theta_1), \quad (3.10)$$

o que permite reescrever (3.9) como:

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = I_2(\theta - \theta_1) = I_3(\phi - \theta - RI_1(\theta_1)) = \frac{\theta_4 - \theta}{R}. \quad (3.11)$$

Definindo $\theta' = \phi - RI_1(\theta_1)$, chega-se a:

$$I(\phi) = I_1(\theta_1) = I_2(\theta - \theta_1) = I_3(\theta' - \theta) = \frac{\phi - \theta'}{R}, \quad (3.12)$$

que corresponde ao circuito mostrado na figura (3.3).

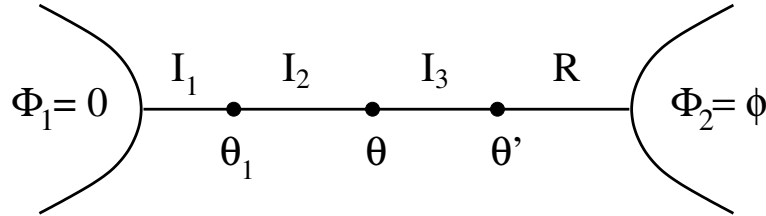


Figura 3.3: Circuito equivalente ao da figura (3.1).

A conservação da corrente no circuito sem os elementos difusivos é então:

$$I_0(\theta') = I_1(\theta_1) = I_2(\theta - \theta_1) = I_3(\theta' - \theta). \quad (3.13)$$

Logo:

$$I(\phi) = I_0(\theta') = \frac{\phi - \theta'}{R}, \quad (3.14)$$

donde:

$$\theta' = \phi - RI(\phi). \quad (3.15)$$

Inserindo (3.15) na primeira igualdade de (3.13), obtém-se:

$$I(\phi) = I_0(\phi - RI(\phi)), \quad (3.16)$$

que é o resultado do teorema enunciado anteriormente.

A prova para um número qualquer de conectores pode ser obtida por indução matemática. O teorema (3.6) implica que dado um circuito constituído por M obstáculos intercalados por $(M - 1)$ condutores difusivos, pode-se, no limite semiclássico, substituí-lo por um circuito equivalente em que os conectores estão concentrados em uma das extremidades do circuito. Esta construção permite que o limite $R \rightarrow 0$ seja tomado e o sistema se transforme em um ponto quântico com dinâmica caótica. A eliminação das partes difusivas leva a um circuito auxiliar para o qual também vale uma lei de conservação da corrente espectral.

3.2 Conectores Especiais

Nazarov determinou, nas referências [47] e [51], as relações de fase-corrente em dois casos bastante importantes, a saber o ponto de contato quântico e a junção de tunelamento.

- **Ponto de Contato Quântico:** Os autovalores de transmissão são tais que $T_n = 1$, para $n = 1, \dots, N$, e $T_n = 0$, caso contrário. A relação fase-corrente é

dada por:

$$F(\phi) = \frac{N}{\cos^2(\phi/2)}; \quad I(\phi) = 2N \tan(\phi/2). \quad (3.17)$$

- **Junção de Tunelamento:** Os autovalores de transmissão são tais que $T_n \ll 1$; $\forall n$. Neste caso, $I(\phi)$ vale:

$$F(\phi) \approx \sum_{n=1}^N T_n \quad ; \quad I(\phi) = \text{sen}\phi \sum_{n=1}^N T_n. \quad (3.18)$$

Macêdo[48, 49] determinou, usando o modelo σ não-linear supersimétrico, a relação fase-corrente para um conector arbitrário, com um conjunto de autovalores de transmissão $\{T_1, T_2, \dots, T_N\}$. A relação fase-corrente é então:

$$I(\phi) = \sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}\phi T_n}{1 - T_n \text{sen}^2(\phi/2)}. \quad (3.19)$$

Nos limites apropriados, (3.19) reduz-se a (3.17) e (3.18). Essas informações são resumidas na tabela (3.1). A inclusão de barreiras de transparência arbitrária é uma das vantagens da versão estendida da teoria de circuitos em relação à de Nazarov.

Conector	Conjunto de Autovalores de Transmissão	$I(\phi)$
Pto. de Contato Quântico	$T_n = 1$, $n = 1, \dots, N$; $T_n = 0$, $n > N$	$2N \tan(\phi/2)$
Junção de Tunelamento	$T_n \ll 1$; $\forall n$	$\text{sen}\phi \sum_{n=1}^N T_n$
Barreira arbitrária	$\{T_1, \dots, T_N\}$	$\sum_{n=1}^N \frac{\text{sen}\phi T_n}{1 - T_n \text{sen}^2(\phi/2)}$

Tabela 3.1: Relações fase-corrente para os diferentes conectores.

3.3 Cálculo da Densidade Média de Autovalores de Transmissão

A fim de usar a teoria de circuitos para calcular os observáveis de transporte, é necessário relacionar a corrente espectral, $I(\phi)$, com a densidade média de autovalores de transmissão, $\rho(\tau)$.

É conveniente definir a função $h(z)$:

$$h(z) \equiv \int_0^1 d\tau' \frac{\tau' \rho(\tau')}{1 - z\tau'}, \quad (3.20)$$

que se relaciona com $F(\phi)$ por:

$$F(\phi) = h[\text{sen}^2(\phi/2)]. \quad (3.21)$$

Fazendo $z = (\tau \pm i\eta)^{-1}$, com $\eta \rightarrow 0^+$, obtém-se:

$$h\left(\frac{1}{\tau \pm i\eta}\right) = \int_0^1 d\tau' \frac{\tau'(\tau \pm i\eta)\rho(\tau')}{\tau - \tau' \pm i\eta}. \quad (3.22)$$

Usando a identidade:

$$\frac{1}{\tau - \tau' \pm i0^+} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\tau - \tau'}\right) \mp i\pi\delta(\tau - \tau'), \quad (3.23)$$

onde $\mathcal{P}$ indica o valor principal de Cauchy, resulta que:

$$h\left(\frac{1}{\tau - i0^+}\right) - h\left(\frac{1}{\tau + i0^+}\right) = \int_0^1 d\tau' \tau' \rho(\tau') [2\pi i\delta(\tau - \tau')]. \quad (3.24)$$

Logo, a densidade média de autovalores de transmissão pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}\rho(\tau) &= \frac{1}{2\pi i\tau^2} \left[h\left(\frac{1}{\tau - i0^+}\right) - h\left(\frac{1}{\tau + i0^+}\right) \right] \\ \rho(\tau) &= -\frac{1}{\pi\tau^2} \Im \left\{ h\left(z = \frac{1}{\tau + i0^+}\right) \right\}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

3.4 A Densidade Média de Níveis e a Pseudocorrente $K(x)$

Efetuada a mudança de variáveis $\tau = \text{sech}^2(x/2)$; $d\tau\rho(\tau) = dx\nu(x)$, $0 \leq x < \infty$, (3.5) fica:

$$\begin{aligned}F(\phi) &= \int_0^\infty dx \frac{\nu(x)}{\cosh^2(x/2) - \sin^2(\phi/2)} \\ &= 2 \int_0^\infty dx \frac{\nu(x)}{\cosh x + \cos \phi},\end{aligned}\quad (3.26)$$

onde $\nu(x) \equiv \sum_{n=1}^N \langle \delta(x - \alpha_n) \rangle$, com $\tau_n = \text{sech}^2(\alpha_n/2)$, é a densidade média de níveis. Através de um procedimento análogo ao que levou à equação (3.25), obtém-se:

$$\nu(x) = \frac{\sinh x}{4\pi i} [F(ix + \pi + 0^+) - F(ix - \pi - 0^+)]. \quad (3.27)$$

A fim de relacionar $\nu(x)$ e $\rho(\tau)$, basta notar que:

$$\begin{aligned}\tau = \frac{1}{\cosh^2 x} &\implies \cosh x = \frac{1}{\sqrt{\tau}} ; \sinh x = \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}}, \\ \frac{dx}{d\tau} &= \frac{1}{2} \frac{\tau^{-3/2}\tau^{1/2}}{\sqrt{1-\tau}} = \frac{1}{2\tau\sqrt{1-\tau}}.\end{aligned}$$

Como $\rho(\tau)d\tau = \nu(x)dx$, segue que:

$$\rho(\tau) = \frac{\nu(x)}{2\tau\sqrt{1-\tau}} \Big|_{x=\cosh^{-1}(1/\sqrt{\tau})}. \quad (3.28)$$

A Pseudocorrente $K(x)$

É conveniente, às vezes, trabalhar com a pseudocorrente $K(x)$ [52]:

$$K(x) = \frac{\sinh 2x}{2} \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{1}{\cosh^2 2x + \sinh^2 2\alpha_n} \right\rangle \equiv \frac{i}{2} I(-2ix). \quad (3.29)$$

Após algumas manipulações, $K(x)$ fica:

$$\begin{aligned} K(x) &= \sinh 2x \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{1}{\cosh 2x + \cosh 2\alpha_n} \right\rangle \\ &= \sinh 2x \int_0^\infty dx' \frac{\nu(x')}{\cosh 2x + \cosh 2x'}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Notando que:

$$\frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh 2y} = \int_0^\infty dk \frac{\sinh kx \cos ky}{\sinh(k\pi/2)}, \quad (3.31)$$

pode-se inverter (3.30) e escrever:

$$\nu(x) = \frac{2}{\pi} \Im [K(x + i\pi/2 - i0^+)]. \quad (3.32)$$

Vale salientar que $K(x)$ satisfaz a uma lei de conservação semelhante àquela obedecida por $I(\phi)$. No circuito mostrado na figura (3.4), esta lei pode ser escrita

como:

$$K(x) = K_{01}(x - y_1) = K_{12}(y_1 - y_2) = \dots = K_{M-1,M}(y_{M-1} - y_M) = K_{M,M+1}(y_M). \quad (3.33)$$

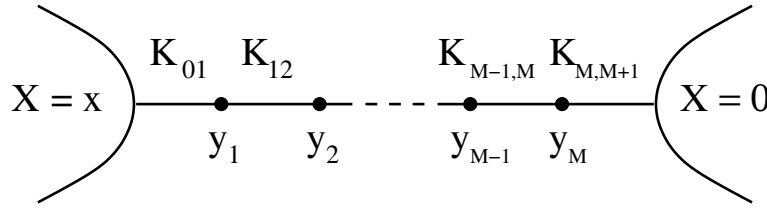


Figura 3.4: Conservação da pseudocorrente $K(x)$ em um circuito arbitrário.

Das equações (3.19) e (3.29), segue que a relação fase-corrente para uma barreira de transparência arbitrária é dada por:

$$K(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh \alpha_n}. \quad (3.34)$$

Em termos da variável x , definida implicitamente por $\tau = \text{sech}^2(x/2)$, a fórmula de Levitov fica:

$$Q_\ell = \sum_{n=1}^N D_x^{\ell-1} \Big|_{x=x_n} \text{sech}^2 x ; \quad D_x \equiv -\frac{1}{2} \tanh x \frac{d}{dx}. \quad (3.35)$$

3.5 Conexão com a Estatística de Contagem de Carga

A conexão entre a teoria de circuitos e a estatística de contagem de carga é facilmente estabelecida no contexto em que uma interação fraca entre os elétrons está presente.

Esta interação pode ser introduzida através da seguinte equação de fluxo, deduzida por Kindermann e Nazarov na referência [54]:

$$\frac{d\tau_n(E)}{d \ln E} = 2z\tau_n(1 - \tau_n) = E \frac{d\tau_n(E)}{dE}. \quad (3.36)$$

Essa equação é obtida através de um procedimento de Grupo de Renormalização que tem como consequência a dependência dos autovalores de transmissão com a energia, $\tau_n(E)$. Partindo de (3.36), pode-se estender a teoria de circuitos que foi desenvolvida até então ao caso interagente, como feito na subseção 3.5.1. Na subseção 3.5.2, estabelece-se, enfim, a conexão desejada.

3.5.1 Extensão da Teoria de Circuitos para o Caso Interagente

Densidade Média de Autovalores de Transmissão

Seja a variável ξ , definida como:

$$\xi = \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{2z} ; \quad d\xi = \frac{2z}{\Lambda} \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^{2z-1} dE, \quad (3.37)$$

onde Λ é um *cut-off* relacionado à energia de Thouless do condutor, que é uma medida do inverso do tempo de permanência. Obtém-se:

$$E \frac{d}{dE} = 2z\xi \frac{d}{d\xi}. \quad (3.38)$$

Inserindo (3.37) e (3.38) em (3.36), obtém-se:

$$\xi \frac{d\tau_n(\xi)}{d\xi} = \tau_n(\xi) [1 - \tau_n(\xi)]. \quad (3.39)$$

Integrando a equação (3.39), resulta:

$$\int_{\tau_n(E)}^{\tau_n} \frac{d\tau'_n}{\tau'_n(1-\tau'_n)} = \int_{\xi}^1 \frac{d\xi'}{\xi'} \implies \frac{\tau_n(E)}{\tau_n(E)-1} = \xi \frac{\tau_n}{\tau_n-1}$$

$$\tau_n(E) = \frac{\xi \tau_n}{1 + (\xi - 1)\tau_n} ; \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3.40)$$

onde τ_n é o autovalor de transmissão independente da energia obtido quando $E = \Lambda \Leftrightarrow \xi = 1$, o qual corresponde ao caso não-interagente.

A densidade média de autovalores de transmissão é definida como:

$$\rho_E(\tau) \equiv \sum_{n=1}^N \langle \delta(\tau - \tau_n(E)) \rangle. \quad (3.41)$$

Mostra-se facilmente que $\rho_E(\tau)$ e $\rho(\tau)$ relacionam-se por:

$$\rho_E(\tau) = \frac{\xi}{[\xi + (1 - \xi)\tau]^2} \rho \left[\frac{\tau}{\xi + (1 - \xi)\tau} \right]. \quad (3.42)$$

Dessa forma, a densidade média de autovalores de transmissão do caso interagente, $\rho_E(\tau)$, pode ser obtida a partir da densidade do caso não-interagente, $\rho(\tau)$.

Densidade Média de Níveis

Fazendo a mudança de variáveis $\tau_n = \text{sech}^2 \alpha_n$, mostra-se que:

$$E \frac{d\alpha_n(E)}{dE} = -z \tanh \alpha_n(E). \quad (3.43)$$

Sendo $\varepsilon \equiv \left(\frac{E}{\Lambda}\right)^z$, (3.43) fica:

$$\varepsilon \frac{d\alpha_n(E)}{d\varepsilon} = -\tanh \alpha_n(E), \quad (3.44)$$

que ao ser integrada dá

$$\sinh \alpha_n(E) = k \sinh \alpha_n, \quad (3.45)$$

donde:

$$\cosh \alpha_n(E) = \sqrt{\sinh^2 \alpha_n(E) + 1} = \sqrt{k^2 \sinh^2 \alpha_n + 1}, \quad (3.46)$$

sendo $k \equiv 1/\varepsilon = \left(\frac{\Lambda}{E}\right)^z$. Com anteriormente, α_n corresponde ao caso não-interagente.

A densidade média de níveis é definida como:

$$\nu_E(x) \equiv \sum_{n=1}^N \langle \delta(x - \alpha_n(E)) \rangle. \quad (3.47)$$

Analogamente à equação (3.42), mostra-se que:

$$\nu_E(x) = \frac{\cosh x}{\sqrt{k^2 + \sinh^2 x}} \nu[\sinh^{-1}(k^{-1} \sinh x)]. \quad (3.48)$$

A densidade média de níveis no caso interagente, $\nu_E(x)$, pode, dessa forma, ser obtida da densidade no caso não-interagente, $\nu(x)$.

Corrente Espectral

A corrente espectral no caso interagente, $K_E(x)$, é obtida através da substituição de α_n por $\alpha_n(E)$ na equação (3.29):

$$K_E(x) \equiv \frac{1}{2} \sinh(2x) \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{1}{\cosh^2 x + \sinh^2(\alpha_n(E))} \right\rangle. \quad (3.49)$$

De (3.45) e (3.49), segue que:

$$K_E(x) = \sum_{n=1}^N \left\langle \frac{\sinh 2x}{1 - k^2 + \cosh 2x + k^2 \cosh 2\alpha_n} \right\rangle, \quad (3.50)$$

onde α_n diz respeito ao caso não-interagente. Por fim, com o auxílio de (3.47), (3.49) pode ser reescrita como:

$$K_E(x) = \sinh(2x) \int_0^\infty dx' \frac{\nu_E(x')}{\cosh 2x + \cosh 2x'}. \quad (3.51)$$

3.5.2 Conexão com a Estatística de Contagem de Carga

Como visto na seção 2.3, a função característica para a transmissão através de um conector arbitrário é dada pela equação (2.21):

$$\chi(\lambda) = \prod_{n=1}^N [1 + \tau_n(e^{i\lambda} - 1)]^M,$$

onde $M = eVt_0/h \gg 1$, V é a tensão aplicada e N é o número de canais abertos. A função característica dos cumulantes é então:

$$\Phi(\lambda) = -M \sum_{n=1}^N \ln [1 + \tau_n(e^{i\lambda} - 1)]. \quad (3.52)$$

A função $S(\lambda)$ é, por definição, a média de (3.52):

$$S(\lambda) \equiv \langle \Phi(\lambda) \rangle = -M \int_0^1 d\tau \rho(\tau) \ln[1 + \tau(e^{i\lambda} - 1)]. \quad (3.53)$$

Visto que, por (2.20), $Q_\ell = (-i)^\ell \frac{\partial^\ell \Phi(\lambda)}{\partial \lambda^\ell} \Big|_{\lambda=0}$, define-se q_ℓ como:

$$q_\ell \equiv \langle Q_\ell \rangle = (-i)^\ell \frac{\partial^\ell S(\lambda)}{\partial \lambda^\ell} \Big|_{\lambda=0}. \quad (3.54)$$

Define-se a função:

$$q(\lambda) \equiv i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda}, \quad (3.55)$$

que pode ser escrita como:

$$q(\lambda) = M e^{i\lambda} \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau)}{1 + \tau(e^{i\lambda} - 1)}. \quad (3.56)$$

Seja a função $g(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon = e^{-\mu/2}) = \frac{1}{M} q(\lambda = i\mu), \quad (3.57)$$

ou equivalentemente:

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{M} q(\lambda)|_{e^{i\lambda}=\varepsilon^2}, \quad (3.58)$$

onde $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Por fim, de (3.56), segue que:

$$g(\varepsilon) = \varepsilon^2 \int_0^1 d\tau \frac{\tau \rho(\tau)}{1 - \tau(1 - \varepsilon^2)}. \quad (3.59)$$

Fazendo a transformação $\tau \rightarrow \frac{\tau}{\varepsilon^2 + (1-\varepsilon^2)\tau}$, a equação (3.59) fica:

$$g(\varepsilon) = \int_0^1 d\tau \tau \rho_\varepsilon(\tau), \quad (3.60)$$

onde a equação (3.42) foi usada. Esse resultado mostra que $g(\varepsilon)$ definida em (3.57) é exatamente a condutância adimensional do sistema no caso interagente, o que estabelece a conexão entre a teoria de circuitos e a estatística de contagem de carga. Em termos da função $F(\phi)$ da teoria de circuitos, definida em (3.4), juntamente com (3.59), obtém-se:

$$g(\varepsilon) = \varepsilon^2 F(\phi)|_{\cos(\phi/2)=\varepsilon}. \quad (3.61)$$

É útil, ainda, relacionar as funções $F(\phi)$ e $K(x)$, usando as equações (3.5) e (3.29):

$$K(x) \equiv \frac{i}{2}I(-2ix) = \frac{1}{2}\sinh(2x)F(-2ix), \quad (3.62)$$

donde:

$$F(\phi) = \frac{2}{\sinh(2x)} K(x) \Big|_{x=i\phi/2}. \quad (3.63)$$

Logo, o cálculo de $S(\lambda) = \langle \Phi(\lambda) \rangle$ resume-se à integração da seguinte equação:

$$Mg(\varepsilon = e^{i\lambda/2}) = i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda}. \quad (3.64)$$

Como $\Phi(0) = 0$, deve-se impor a condição inicial $S(0) = 0$ à essa equação.

Na seção seguinte, aplica-se a teoria desenvolvida neste capítulo a situações de grande interesse prático e teórico. Alguns dos resultados já haviam sido obtidos por Belzig através da versão de Nazarov da teoria de circuitos, na referência [58]. Outros, contudo, não podem ser alcançados no contexto da teoria de Nazarov, sendo necessário usar a versão estendida apresentada nesta dissertação para obtê-los.

3.6 Estatística de Contagem de Alguns Casos de Interesse

Nesta seção, as funções geratrizes das estatísticas de contagem de alguns casos de interesse são obtidas. Para tanto, é necessário primeiro aplicar a teoria de circuitos a esses sistemas a fim de calcular quantidades que permitem fazer a conexão com a estatística de contagem.

3.6.1 Junção de Tunelamento Única

Na ausência de interação, tem-se:

$$\rho(\tau) = N \delta(\tau - T). \quad (3.65)$$

Usando a equação (3.42), obtém-se:

$$\rho_\varepsilon(\tau) = N \delta(\tau - T(\varepsilon)) ; \quad T(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 T}{1 + (\varepsilon^2 - 1)T}. \quad (3.66)$$

De (3.60) e (3.66), segue que:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \int_0^1 d\tau \tau \rho_\varepsilon(\tau) \\ &= \frac{N \varepsilon^2 T}{1 + (\varepsilon^2 - 1)T}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Como o conector em questão é uma junção de tunelamento, pode-se fazer $T \ll 1$:

$$g(\varepsilon) = NT\varepsilon^2. \quad (3.68)$$

Inserindo (3.68) em (3.64), vem:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda} &= M g(\varepsilon)|_{\varepsilon=e^{i\lambda/2}} ; \quad M \equiv \frac{eVt_0}{h} \gg 1 \\ i \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= MNTe^{i\lambda} \implies dS = -iMNTe^{i\lambda}d\lambda, \end{aligned}$$

que integrada leva a:

$$S(\lambda) = MNT(1 - e^{i\lambda}). \quad (3.69)$$

A função geratriz $\chi(\lambda)$ pode ser obtida da seguinte equação:

$$S(\lambda) = \langle \Phi(\lambda) \rangle = - \langle \ln \chi(\lambda) \rangle \approx - \ln \langle \chi(\lambda) \rangle. \quad (3.70)$$

Assim:

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = \exp [MNT(e^{i\lambda} - 1)], \quad (3.71)$$

que corresponde a um processo de Poisson, como mostrado no apêndice B:

$$P_n(t_0) = e^{-MNT} \frac{(MNT)^n}{n!}. \quad (3.72)$$

Esta equação será interpretada semiclassicamente na seção 3.7.

3.6.2 Ponto Quântico Conectado a Dois Contatos Ideais

Neste caso, representa-se o ponto quântico com dois contatos ideais pelo diagrama abaixo:

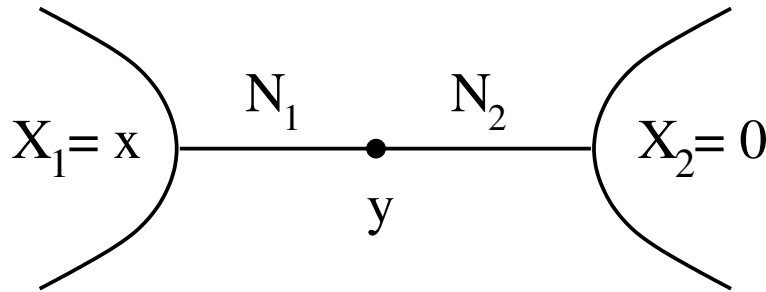


Figura 3.5: Ponto quântico ligado a dois guias através de contatos pontuais.

A pseudocorrente $K_j(x)$ para o j -ésimo contato ideal é dada por:

$$K_j(x) = \frac{i}{2} I_j(-2ix) = iN_j \tanh(-ix) = N_j \tanh x, \quad (3.73)$$

que segue das equações (3.17) e (3.29).

Da conservação de $K(x)$ no único nó do diagrama, resulta:

$$K(x) = N_1 \tanh(x - y) = N_2 \tanh y. \quad (3.74)$$

Da identidade

$$\tanh(x - y) = \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}$$

e definindo $a \equiv \frac{N_2}{N_1}$, $\eta = \tanh x$ e $\xi = \tanh y$, a equação (3.74) fica:

$$\frac{\eta - \xi}{1 - \eta \xi} = a \xi \implies \frac{a \xi - a \eta \xi^2 - \eta + \xi}{1 - \eta \xi} = 0. \quad (3.75)$$

Assumindo $\eta \xi \neq 1$, tem-se:

$$\xi_{\pm} = \left(\frac{a + 1}{2a\eta} \right) \left(1 \pm \sqrt{\Delta} \right) ; \Delta \equiv 1 - \frac{4a\eta^2}{(a + 1)^2}. \quad (3.76)$$

Definindo a constante $\eta_0^2 \equiv \frac{4a}{(a+1)^2} < 1$ e substituindo (3.76) em (3.74), resulta:

$$K_{\pm}(x) = N_2 \xi_{\pm} = \frac{N_1 + N_2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \tanh^2 x \tanh^2 x_0} \right] \coth x ; \eta_0 = \tanh x_0. \quad (3.77)$$

Da identidade

$$\frac{\pi}{4} \frac{1 - \sqrt{1 - \tanh^2 x \tanh^2 x_0}}{\sinh^2 x} = \int_0^{x_0} dy \frac{\tanh y \sqrt{\frac{\tanh^2 x_0}{\tanh^2 y} - 1}}{\cosh 2x + \cosh 2y},$$

pode-se escolher a raiz física da equação (3.75) como sendo ξ_- :

$$K(x) = K_-(x) = \frac{N_1 + N_2}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \tanh^2 x \tanh^2 x_0} \right] \coth x. \quad (3.78)$$

Comparando (3.30) e (3.78), encontra-se que a densidade média de níveis é dada por:

$$\nu(x) = \nu_-(x) = \frac{N_1 + N_2}{\pi} \sqrt{\tanh^2 x_0 - \tanh^2 x} ; 0 < x < x_0. \quad (3.79)$$

Note que a raiz com significado físico foi escolhida tomando $\nu(x)$ positivamente definida. Por fim, das equações (3.25) e (3.79), obtém-se:

$$\rho(\tau) = \frac{N_1 + N_2}{2\pi\tau} \sqrt{\frac{\tau - \tau_0}{1 - \tau}}, \quad (3.80)$$

onde $\tau_0 \equiv \left(\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}\right)^2$, com $\tau_0 \leq \tau \leq 1$. Vale notar que $\rho(\tau)$ aqui encontrado apresenta uma singularidade do tipo inverso de raiz quadrada em $\tau = 1$. O significado físico dessa singularidade será discutido na seção 3.8.

Da equação (3.63), obtém-se:

$$F(\phi) = \left(\frac{N_1 + N_2}{2}\right) \frac{1}{\sin^2(\phi/2)} \left[\sqrt{1 + \frac{4N_1N_2}{(N_1 + N_2)^2} \tan^2(\phi/2)} - 1 \right]. \quad (3.81)$$

Inserindo (3.81) em (3.61), obtém-se:

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2(N_1 + N_2)}{2(1 - \varepsilon^2)} \left[\sqrt{1 + \frac{4N_1N_2(1 - \varepsilon^2)}{\varepsilon^2(N_1 + N_2)^2}} - 1 \right]. \quad (3.82)$$

Fazendo $N_2 = aN_1$ e $N_1 = N$, $g(\varepsilon)$ pode ser reescrito como:

$$g(\varepsilon) = \frac{N\varepsilon}{2(1 - \varepsilon^2)} [\sqrt{\varepsilon^2(a - 1)^2 + 4a} - \varepsilon(a + 1)]. \quad (3.83)$$

Substituindo (3.83) em (3.64) e realizando a integração, resulta:

$$S(\lambda) = k - \frac{iMN}{2} \left[|a-1| \int \frac{d\lambda \sqrt{e^{i\lambda} + b}}{e^{-i\lambda/2} - e^{i\lambda/2}} - (a+1) \int \frac{e^{i\lambda} d\lambda}{1 - e^{i\lambda}} \right], \quad (3.84)$$

onde $b \equiv 4a/(a-1)^2$. A constante de integração k pode ser determinada a partir de $S(0) = 0$. A equação (3.84) é um pouco complicada, sendo conveniente tratar apenas o caso em que os contatos são simétricos, $a = 1$. Neste caso, (3.84) fica:

$$S(\lambda) = -2MN \ln [(e^{i\lambda} + 1)/2]. \quad (3.85)$$

Como na subseção anterior, pode-se fazer a seguinte aproximação a fim de obter a função geratriz $\chi(\lambda)$:

$$S(\lambda) = \langle \Phi(\lambda) \rangle = -\langle \ln \chi(\lambda) \rangle \approx -\ln \langle \chi(\lambda) \rangle. \quad (3.86)$$

Dessa maneira, tem-se:

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = \left(\frac{e^{i\lambda/2} + 1}{2} \right)^{2MN}. \quad (3.87)$$

Vale notar que:

$$\langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle = \left(\frac{1 - e^{i\lambda/2}}{2} \right)^{2MN} \neq \langle \chi(\lambda) \rangle, \quad (3.88)$$

diferentemente do exigido pela equação (2.3). O fato de $\langle \chi(\lambda) \rangle$ não apresentar a periodicidade em 2π esperada para $\chi(\lambda)$ (ver equação (2.3)) deve-se ao processo de promediação.

Na subseção 3.7.2, é apresentada uma interpretação baseada em processos estocásticos clássicos para os resultados obtidos nesta subseção, inclusive para o expoente $1/2$ em $\langle \chi(\lambda) \rangle$.

3.6.3 Ponto Quântico Conectado a Duas Barreiras Simétricas

O circuito equivalente, neste caso, é mostrado na figura (3.6). De maneira análoga ao que foi feito na subseção anterior, mostra-se que:

$$K_i(x) = N_i \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh 2\alpha} ; T \equiv \operatorname{sech}^2(\alpha/2). \quad (3.89)$$

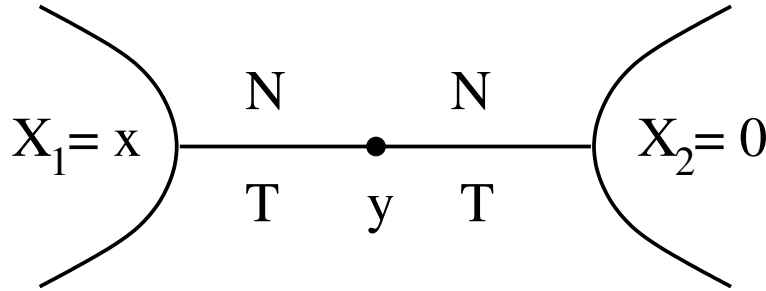


Figura 3.6: Ponto quântico conectado a dois guias através de contatos ideais.

Uma vez que

$$\frac{2\sinh 2x}{\cosh 2x + \cosh 2\alpha} = \tanh(x + \alpha) + \tanh(x - \alpha),$$

(3.89) pode ser reescrita como:

$$K_i(x) = \frac{N_i}{2} [\tanh(x + \alpha) + \tanh(x - \alpha)]. \quad (3.90)$$

Aplicando a conservação da corrente espectral, resulta:

$$K(x) = K_1(x - y) = K_2(y) \quad (3.91)$$

$$\tanh(x - y + \alpha) + \tanh(x - y - \alpha) = \tanh(y + \alpha) + \tanh(y - \alpha). \quad (3.92)$$

Usando a identidade

$$\tanh(a \pm b) = \frac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b} \quad (3.93)$$

e definindo $\xi \equiv \tanh y$, $\eta \equiv \tanh x$ e $\zeta \equiv \tanh \alpha$, (3.92) fica:

$$(\eta \xi^2 - 2\xi + \eta) [\zeta^2 \xi^2 + (1 - \zeta^2)\eta \xi - 1] = 0. \quad (3.94)$$

Escolhendo a raiz com significado físico como no caso anterior, obtém-se:

$$\xi = \frac{1}{\eta} \left(1 - \sqrt{1 - \eta^2} \right) = \coth x - \operatorname{cosech} x. \quad (3.95)$$

Substituindo (3.95) em (3.91), resulta:

$$K(x) = \frac{N(\zeta^2 - 1)\sinh x (\cosh x - 1)}{\zeta^2 (\cosh x - 1)^2 - \sinh^2 x}. \quad (3.96)$$

Mas $1 - \zeta^2 = T$, o que permite reescrever (3.96) como:

$$K(x) = \frac{NT \sinh x}{2 - T + T \cosh x}. \quad (3.97)$$

Usando a equação (3.32), obtém-se que a densidade média de níveis é:

$$\nu(x) = \frac{2N}{\pi} \frac{T(2 - T) \cosh x}{4(1 - T) + T^2 \cosh^2 x}. \quad (3.98)$$

Inserindo (3.98) em (3.28), vem:

$$\begin{aligned}\rho(\tau) &= \frac{\nu(x)}{2\tau\sqrt{1-\tau}} \Big|_{x=\cosh^{-1}(1/\sqrt{\tau})} = \frac{2N}{2\pi\tau\sqrt{1-\tau}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{1-\zeta^4}{4\zeta^2 + (1-\zeta^2)^2/\tau} \\ \rho(\tau) &= \frac{N}{\pi\sqrt{\tau(1-\tau)}} \frac{(1-\zeta^4)}{(\zeta^2-1)^2 + 4\zeta^2\tau} ; 0 \leq \tau \leq 1.\end{aligned}\quad (3.99)$$

Note-se que (3.99) também apresenta singularidade do tipo inverso de raiz quadrada em $\tau = 1$.

Usando (3.63), mostra-se facilmente que:

$$F(\phi) = \frac{N}{\cos(\phi/2)} \frac{T[1 - \cos(\phi/2)]}{\sin^2(\phi/2) + (1-T)[\cos(\phi/2) - 1]^2}, \quad (3.100)$$

sendo $g(\varepsilon)$ calculado de (3.61) e (3.100):

$$g(\varepsilon) = \frac{NT\varepsilon(1-\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2) + (1-T)(\varepsilon-1)^2}. \quad (3.101)$$

De (3.64), segue que:

$$S(\lambda) = -2MN \ln \left[\frac{T}{2}(e^{i\lambda/2} - 1) + 1 \right], \quad (3.102)$$

sendo, como de praxe, $M = eVt_0/h \gg 1$. Assumindo a validade da equação (3.70), resulta:

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = \left[\frac{T}{2}(e^{i\lambda/2} - 1) + 1 \right]^{2MN}. \quad (3.103)$$

Como no caso de dois contatos ideais, tem-se $\langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle \neq \langle \chi(\lambda) \rangle$.

A equação (3.103) é reobtida na subseção 3.7.2 no contexto de uma interpretação estocástica.

3.6.4 Ponto Quântico Conectado a Duas Junções de Tunelamento

A relação fase-corrente para a i -ésima junção de tunelamento é dada por:

$$K_i(x) = \frac{1}{2} N_i T_i \sinh 2x, \quad (3.104)$$

onde $T_i = \text{sech}^2(\alpha_i/2) \ll 1$.

Fazendo $N_1 = N = N_2$ e definindo $r \equiv 2x$, $s \equiv 2y$ e $\gamma \equiv T_2/T_1$, a conservação da corrente espectral leva a:

$$\sinh(r - s) = \gamma \sinh s, \quad (3.105)$$

donde se obtém a solução:

$$\sinh s = \frac{\sinh r}{\sqrt{1 + 2\gamma \cosh r + \gamma^2}}. \quad (3.106)$$

Substituindo (3.106) na equação de conservação da pseudocorrente, (3.91), resulta:

$$K(x) = \frac{NT_1T_2 \sinh 2x}{2 \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cosh 2x}}. \quad (3.107)$$

Inserindo (3.107) em (3.28), encontra-se a densidade média de níveis, $\nu(x)$:

$$\nu(x) = \frac{2NT_1T_2}{\pi(T_1 + T_2)} \frac{\sinh x}{\sqrt{\tanh^2 x - \tanh^2 x_0}}, \quad (3.108)$$

onde $\tanh x_0 = \frac{|T_1 - T_2|}{T_1 + T_2}$, $x > x_0$. Enfim, de (3.25) e (3.108) segue que:

$$\rho(\tau) = \frac{NT_1T_2}{\pi(T_1 + T_2)} \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau_0 - \tau}}, \quad (3.109)$$

sendo $\tau_0 = 1 - \tanh^2 x_0 = 4T_1T_2/(T_1 + T_2)^2$, $0 < \tau < \tau_0$. Como nos dois casos anteriores, (3.109) apresenta uma singularidade do tipo inverso de raiz quadrada em $\tau = 1$, desde que $T_1 = T = T_2$.

De (3.107) e (3.63), segue que:

$$F(\phi) = \frac{NT_1T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cos \phi}}. \quad (3.110)$$

Aplicando (3.61) a essa equação, resulta:

$$g(\varepsilon) = \frac{N\varepsilon^2T_1T_2}{\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + 4T_1T_2\varepsilon^2}}. \quad (3.111)$$

Finalmente, inserindo (3.111) em (3.64) com a condição inicial $S(0) = 0$, obtém-se:

$$S(\lambda) = \frac{-MN}{2} [\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + 4T_1T_2e^{i\lambda}} - (T_1 + T_2)]. \quad (3.112)$$

Convém, agora, analisar os casos $T_1 = T = T_2$ e $T_1 \ll T_2$ separadamente.

Caso $T_1 = T = T_2$

Neste caso, tem-se:

$$S(\lambda) = -MNT(e^{i\lambda/2} - 1), \quad (3.113)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = e^{MNT(e^{i\lambda/2} - 1)}. \quad (3.114)$$

Mais uma vez, $\langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle \neq \langle \chi(\lambda) \rangle$.

Caso $T_1 \ll T_2$

$$S(\lambda) = -MNT_1(e^{i\lambda} - 1), \quad (3.115)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = e^{MNT_1(e^{i\lambda} - 1)} = \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle. \quad (3.116)$$

Isto corresponde a um processo poissoniano em que a carga transmitida é e :

$$P_n(t_0) = e^{-MNT_1} \frac{(MNT_1)^n}{n!}. \quad (3.117)$$

Os resultados desta seção são reobtidos na subseção 3.7 no contexto de uma interpretação semiclassical apresentada por de Jong na referência [55].

3.6.5 Ponto Quântico Conectado a Duas Barreiras de Transparências Arbitrárias

O sistema é representado pelo seguinte circuito:

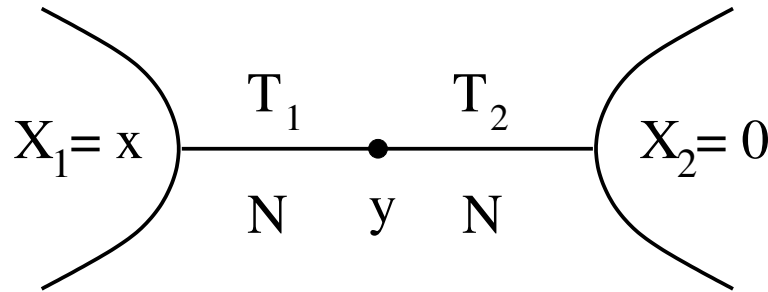


Figura 3.7: Duas barreiras de transparências arbitrárias.

Por se tratar essencialmente da repetição dos cálculos feitos anteriormente, os de-

talhes serão omitidos nesta subseção. Dessa maneira, mostra-se que $g(\varepsilon)$ é dado por:

$$g(\varepsilon) = NT_2 \frac{\varepsilon}{k} \frac{\xi}{1 + (1 - T_2)\xi^2}, \quad (3.118)$$

onde $\xi = \tan(\theta/2)$, $\eta = \cotan(\phi/2) = \varepsilon/k$; $k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$. ξ é solução da seguinte equação quártica:

$$\begin{aligned} & T_1(1 - T_2)\varepsilon k \xi^4 + [T_1(2 - 3T_2)\varepsilon^2 + T_2 - T_1 + T_1T_2]\xi^3 + 3T_1T_2\varepsilon k \xi^2 \\ & + [T_1(2 + T_2)\varepsilon^2 + T_2 - T_1 - T_1T_2]\xi - T_1\varepsilon k = 0. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Antes de tratar do caso mais geral, convém analisar o caso em uma das barreiras é substituída por um contato ideal, o que equivale a tomar um dos T 's igual a 1.

Ponto Quântico Conectado a um Contato Ideal e a uma Barreira de Transparência Arbitrária

Fazendo $T_1 = 1$ (contato ideal) e $T_2 = T$ na equação (3.119), vem:

$$(k\xi + \varepsilon)[\varepsilon(1 - T)\xi^3 + (2T - 1)k\xi^2 + \varepsilon(1 + T)\xi - k] = 0. \quad (3.120)$$

A raiz com significado físico vem do segundo fator, o qual pode ser reescrito como:

$$\xi^3 + a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3 = 0, \quad (3.121)$$

onde:

$$a_1 = \frac{(2T - 1)k}{\varepsilon(1 - T)}; \quad a_2 = \frac{1 + T}{1 - T}; \quad a_3 = \frac{-k}{\varepsilon(1 - T)}.$$

A equação (3.121), através da substituição $\xi \rightarrow y - a_1/3$, pode ser reescrita como:

$$y^3 + p y + q = 0 , \quad (3.122)$$

com $p = \frac{1}{3}(3a_2 - a_1^2)$ e $q = \frac{1}{27}(2a_1^3 - 9a_1a_2 + 27a_3)$. Define-se, ainda:

$$\Delta \equiv \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{T(2-T)^3\varepsilon^2 + (1-2T)^3}{27\varepsilon^4(1-T)^4}, \quad (3.123)$$

que pode ser convenientemente reescrita como:

$$\Delta = \frac{\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2}{27\varepsilon^4(1-T)^4/T(2-T)^3} ; \quad \varepsilon_0 \equiv \frac{(2T-1)^{3/2}}{\sqrt{T}(2-T)^{3/2}}. \quad (3.124)$$

Sendo:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} ; \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad (3.125)$$

as raízes de (3.122) são:

$$y = A + B ; \quad -\frac{(A+B)}{2} + \frac{(A-B)}{2}\sqrt{-3} ; \quad -\frac{(A+B)}{2} - \frac{(A-B)}{2}\sqrt{-3}. \quad (3.126)$$

A escolha da solução com significado físico se dá em termo do parâmetro T , como mostrado a seguir.

- Caso $T < 1/2$

Para $T < 1/2$, tem-se:

$$T < 1/2 \implies \varepsilon_0 < 0 \implies \Delta > 0.$$

Neste caso, há uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas. A raiz com

significado físico é a raiz real, dada por:

$$\xi = A + B - \frac{a_1}{3}, \quad (3.127)$$

que inserida em (3.118) dá a seguinte expansão em série de potências para $g(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon) = \frac{NT}{1-2T}\varepsilon^2 - \frac{NT^2(6T^2-8T+3)}{(1-2T)^4}\varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6). \quad (3.128)$$

$S(\lambda)$ é, então, dada por:

$$S(\lambda) \approx \frac{MNT}{1-2T}(1 - e^{i\lambda}) + \frac{MNT^2(6T^2-8T+3)}{2(1-2T)^4}(e^{2i\lambda} - 1) + \dots \quad (3.129)$$

Levando em conta apenas o primeiro termo, a função $\langle \chi(\lambda) \rangle$ fica:

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = e^{-\frac{MNT}{1-2T}} \exp \left[\left(\frac{MNT}{1-2T} \right) e^{i\lambda} \right] = \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle. \quad (3.130)$$

- Caso $T = 1/2$

Para $T = 1/2$, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \implies \Delta = \frac{1}{\varepsilon^2} \geq 1.$$

Como no caso anterior, tem-se apenas uma raiz real, que inserida em (3.118) leva a seguinte expansão em série de potências para $g(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon) = \frac{N}{2^{1/3}}\varepsilon^{4/3} - \frac{N}{2}\varepsilon^2 - \frac{N}{2^{5/3}}\varepsilon^{8/3} + \frac{5N}{2^{1/3}6}\varepsilon^{10/3} + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (3.131)$$

Considerando apenas o primeiro termo de (3.131), $S(\lambda)$ fica:

$$S(\lambda) = \frac{3MN}{2^{4/3}}(1 - e^{2i\lambda/3}), \quad (3.132)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = e^{-\mu} \exp(\mu e^{2i\lambda/3}) \neq \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle ; \mu \equiv \frac{3MN}{2^{4/3}} \quad (3.133)$$

O expoente $2/3$ que aparece em (3.133), ao contrário do $1/2$ encontrado na equação (3.103), tem uma difícil interpretação em termos de processos estocásticos clássicos. O aparecimento desse expoente é discutido à luz da formação de modos de Fabry-Perot entre as barreiras, conforme discutido na referência [49] e na seção 3.8 desta dissertação.

- Caso $T > 1/2$

Para $T > 1/2$, vem:

$$T > 1/2 \implies \varepsilon_0 > 0 \implies \Delta < 0 \text{ para } \varepsilon < \varepsilon_0$$

de modo que existem três raízes reais. Escolhendo a raiz com significado físico, obtém-se:

$$g(\varepsilon) \approx N\sqrt{2T-1}\varepsilon ; \varepsilon \ll \varepsilon_0. \quad (3.134)$$

As funções $S(\lambda)$ e $\chi(\lambda)$ são dadas por:

$$S(\lambda) = 2MN\sqrt{2T-1}(1 - e^{i\lambda/2}), \quad (3.135)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = e^{-\mu} \exp[\mu e^{i\lambda/2}] \neq \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle ; \mu \equiv 2MN\sqrt{2T-1}. \quad (3.136)$$

Caso Geral: T_1 e T_2 arbitrários

Para analisar o caso geral, é conveniente definir as seguintes variáveis:

$$\zeta \equiv \frac{T-2}{T_1}(1+T_1) ; \zeta_0 \equiv \frac{1+T_1}{1-T_1}. \quad (3.137)$$

Essas equações podem ser invertidas para dar:

$$T_1 = \frac{\zeta_0 - 1}{\zeta_0 + 1} ; T_2 = \frac{\zeta(\zeta_0 - 1)}{2\zeta_0}. \quad (3.138)$$

Como no item anterior, analisa-se a estatística de contagem de carga do caso geral em diferentes intervalos de interesse.

- $0 < \zeta < 1$

Neste caso, mostra-se que:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \frac{NT_1T_2}{T_1 - T_2 - T_1T_2} \varepsilon^2 \\ &- \frac{NT_2T_1^2(2T_2^2 + T_2^3 - 2T_1T_2 - 4T_1T_2^2 - 2T_1T_2^3 + 2T_1^2 + 2T_1^2T_2^2 + T_1^2T_2^3)}{(T_1 - T_2 - T_1T_2)^4} \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Tomando apenas o primeiro termo da expansão acima, obtém-se:

$$S(\lambda) = \mu(1 - e^{i\lambda}), \quad (3.140)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = e^{-\mu} \exp[\mu e^{i\lambda}] = \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle ; \mu \equiv \frac{MNT_1T_2}{T_1 - T_2 - T_1T_2}. \quad (3.141)$$

- $\zeta = 1$

Para $\zeta = 1$, tem-se a seguinte expansão em série de potências para $g(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon) \approx N \left(\frac{T_1^2}{2} \right)^{1/3} \varepsilon^{4/3}, \quad (3.142)$$

donde segue que:

$$S(\lambda) = \frac{3MN}{2} \left(\frac{T_1^2}{2} \right)^{1/3} (1 - e^{2i\lambda/3}), \quad (3.143)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = \exp \left[\frac{3MN}{2} \left(\frac{T_1^2}{2} \right)^{1/3} (e^{2i\lambda/3} - 1) \right]. \quad (3.144)$$

- $1 < \zeta < \zeta_0$

Para ζ entre 1 e ζ_0 , tem-se a seguinte expansão em série de potências para $g(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon) \approx N \frac{\sqrt{(T_1 T_2)^2 - (T_1 - T_2)^2}}{T_1 + T_2 - T_1 T_2} \varepsilon. \quad (3.145)$$

As funções $S(\lambda)$ e $\langle \chi(\lambda) \rangle$ ficam, então:

$$S(\lambda) = 2MN \frac{\sqrt{(T_1 T_2)^2 - (T_1 - T_2)^2}}{T_1 + T_2 - T_1 T_2} (1 - e^{i\lambda/2}), \quad (3.146)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = \exp \left[(2MN) \frac{\sqrt{(T_1 T_2)^2 - (T_1 - T_2)^2}}{T_1 + T_2 - T_1 T_2} (e^{i\lambda/2} - 1) \right] \neq \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle. \quad (3.147)$$

- $\zeta = \zeta_0$

Neste caso, mostra-se que:

$$g(\varepsilon) \approx N \left(\frac{T_2^2}{2} \right)^{1/3} \varepsilon^{4/3}, \quad (3.148)$$

donde segue que:

$$S(\lambda) = \frac{3MN}{2} \left(\frac{T_2^2}{2} \right)^{1/3} (1 - e^{2i\lambda/3}), \quad (3.149)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = \exp \left[\frac{3MN}{2} \left(\frac{T_2^2}{2} \right)^{1/3} (e^{2i\lambda/3} - 1) \right] \neq \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle. \quad (3.150)$$

• $\zeta > \zeta_0$

Por fim, para o caso em que $\zeta > \zeta_0$ tem-se a seguinte expansão em série de potências para $g(\varepsilon)$:

$$g(\varepsilon) = \frac{NT_1T_2}{T_2 - T_1 - T_1T_2} \varepsilon^2 - \frac{NT_2T_1^2(2T_2^2 + T_2^3 - 2T_1T_2 - 4T_1T_2^2 - 2T_1T_2^3 + 2T_1^2 + 2T_1^2T_2^2 + T_1^2T_2^3)}{(T_1 - T_2 - T_1T_2)^4} \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^6). \quad (3.151)$$

As funções $S(\lambda)$ e $\langle \chi(\lambda) \rangle$ são dadas por:

$$S(\lambda) = \mu(1 - e^{i\lambda}), \quad (3.152)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = e^{-\mu} \exp [\mu e^{i\lambda}] = \langle \chi(\lambda + 2\pi) \rangle ; \mu \equiv \frac{MNT_1T_2}{T_2 - T_1 - T_1T_2}. \quad (3.153)$$

Na seção 3.8, mostra-se que o aparecimento do expoente 2/3 nas equações (3.144) e (3.150) está relacionado a um processo de mistura estatística de processos de um e dois passos.

3.7 Interpretação Estocástica dos Resultados

Os resultados obtidos para a estatística de contagem de carga via teoria de circuitos podem ser interpretados à luz de processos estocásticos clássicos. Como mostrado por de Jong na referência [55], no caso específico de junções de tunelamento, o transporte eletrônico pode ser descrito por taxas de transição clássicas. No caso de barreiras simétricas, a interpretação estocástica é possível através do formalismo de integrais de trajetória de Büttiker *et al.*, apresentada na referência [56].

3.7.1 Junções de Tunelamento

Junção de Tunelamento Única

Seja uma junção de tunelamento simples com um único canal aberto e coeficiente de transmissão $\gamma \ll 1$. $P_n(t)$, a probabilidade de que *exatamente* n elétrons sejam transmitidos no tempo de observação t , é um processo de Poisson e portanto obedece à seguinte equação mestra (ver apêndice A):

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\gamma P_0(t), \quad (3.154)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -\gamma(P_n(t) - P_{n-1}(t)); \quad n \geq 1, \quad (3.155)$$

sujeita à condição inicial $P_n(0) = \delta_{n,0}$. A solução de (3.154) é imediata:

$$P_0(t) = \exp(-\gamma t). \quad (3.156)$$

Seja $\psi(t)$ a densidade de probabilidade por unidade de tempo de que um

elétron seja transmitido ao final de um tempo t :

$$\psi(t) \equiv -\frac{dP_0}{dt} = \gamma e^{-\gamma t} = \gamma P_0(t). \quad (3.157)$$

Se $G_n(t)$ denota a probabilidade de que *pelo menos* n elétrons sejam transmitidos durante t , pode-se escrever:

$$P_n(t) \equiv G_n(t) - G_{n+1}(t). \quad (3.158)$$

$G_n(t)$, por sua vez, pode ser calculado de acordo com:

$$\begin{aligned} G_n(t) &= \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \psi(t_1) \\ &\times \psi(t_2 - t_1) \cdots \psi(t_n - t_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.159)$$

Calculando a transformada de Laplace dessa equação, obtém-se:

$$\tilde{G}_n(s) = \frac{1}{s} \left[\tilde{\psi}(s) \right]^n = \frac{1}{s} \frac{\gamma^n}{(s + \gamma)^n}, \quad (3.160)$$

onde se usou que:

$$\tilde{\psi}(s) = \int_0^\infty dt e^{-st} \psi(t) = \frac{\gamma}{s + \gamma}. \quad (3.161)$$

Em termos das transformadas de Laplace, (3.158) pode ser reescrita como:

$$\tilde{P}_n(s) = \tilde{G}_n(s) - \tilde{G}_{n+1}(s), \quad (3.162)$$

que, juntamente com (3.161), leva a:

$$\tilde{P}_n(s) = \frac{1}{s} \left[\frac{\gamma^n}{(s + \gamma)^n} - \frac{\gamma^{n+1}}{(s + \gamma)^{n+1}} \right] = \frac{1}{s} \left[1 - \frac{\gamma}{(s + \gamma)} \right] \frac{\gamma^n}{(s + \gamma)^n} \quad (3.163)$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_n(s) = \frac{\gamma^n}{(s + \gamma)^{n+1}}. \quad (3.164)$$

Calculando a transformada inversa, obtém-se:

$$P_n(t) = \frac{(\gamma t)^n}{n!} e^{-\gamma t}, \quad (3.165)$$

que é uma distribuição de Poisson, correspondente a processos de transmissão de elétrons descorrelacionados. A função característica correspondente é dada por:

$$\chi(\lambda) = \exp[\gamma t(e^{i\lambda} - 1)]. \quad (3.166)$$

A equação (3.166) pode ser facilmente generalizada para o caso de uma junção com um número arbitrário de canais, bastando assumir que a transmissão através de cada um deles é independente. A função característica fica então:

$$\chi(\lambda) = \exp[2N\gamma t(e^{i\lambda} - 1)], \quad (3.167)$$

já obtida em (3.71).

Duas Junções de Tunelamento

Seja γ_i , $i = 1, 2$, a taxa de tunelamento através da i -ésima barreira. Considerando junções com um único canal aberto, o princípio de Pauli restringe a 0 ou 1 o número

de elétrons entre as junções. Dessa forma, em $t = 0$, duas condições iniciais são possíveis: não há nenhum elétron na cavidade, com probabilidade $\gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$, ou tem-se um elétron entre as junções, com probabilidade $\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Assim, pode-se escrever:

$$P_n(t) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} P_n^{(0)}(t) + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} P_n^{(1)}(t), \quad (3.168)$$

onde $P_n^{(j)}(t)$ começa com j elétrons na junção em $t = 0$. As transformadas de Laplace, $\tilde{G}_n^{(j)}(s)$, das probabilidades de que n ou mais elétrons sejam transmitidos durante o tempo t são dadas pela convolução de eventos de transmissão independentes:

$$\tilde{G}_n^{(0)}(s) = \frac{1}{s} \left(\tilde{\psi}_1(s) \tilde{\psi}_2(s) \right)^n = \frac{1}{s} \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^n}{(s + \gamma_1)^n (s + \gamma_2)^n}, \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_n^{(1)}(s) &= \frac{1}{s} \tilde{\psi}_2(s) \left(\tilde{\psi}_1(s) \tilde{\psi}_2(s) \right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{s} \frac{\gamma_1^{n-1}}{(s + \gamma_1)^{n-1}} \frac{\gamma_2^n}{(s + \gamma_2)^n}; \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.170)$$

$$\tilde{G}_0^{(1)}(s) = \frac{1}{s}. \quad (3.171)$$

sendo $\tilde{\psi}_j(s) = \frac{\gamma_j}{s + \gamma_j}$, $j = 1, 2$. Lembrando que $\tilde{P}_n^{(j)}(s) = \tilde{G}_n^{(j)}(s) - \tilde{G}_{n+1}^{(j)}(s)$, vem:

$$\tilde{P}_n^{(0)}(s) = \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^n (s + \gamma_1 + \gamma_2)}{(s + \gamma_1)^{n+1} (s + \gamma_2)^{n+1}}; \quad n \geq 0. \quad (3.172)$$

$$\tilde{P}_n^{(1)}(s) = \frac{\gamma_1^{n-1} \gamma_2^n (s + \gamma_1 + \gamma_2)}{(s + \gamma_1)^n (s + \gamma_2)^{n+1}}; \quad n \geq 1; \quad \tilde{P}_0^{(1)}(s) = \frac{1}{s + \gamma_2} \quad (3.173)$$

Por fim, a transformada de Fourier de (3.168) fica:

$$\tilde{P}_0(s) = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{s + \gamma_1 + \gamma_2}{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2)} + \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{1}{s + \gamma_2}, \quad (3.174)$$

$$\tilde{P}_n(s) = \frac{(\gamma_1 \gamma_2)^n (s + \gamma_1 + \gamma_2)^2}{(\gamma_1 + \gamma_2)(s + \gamma_1)^{n+1}(s + \gamma_2)^{n+1}}; \quad n \geq 1. \quad (3.175)$$

A função de distribuição $P_n(t)$ pode ser obtida via transformada de Laplace das equações (3.174) e (3.175). Embora isto seja complicado para γ_1 e γ_2 quaisquer, pode ser facilmente realizado no caso de junções simétricas, $\gamma_1 = \gamma = \gamma_2$:

$$P_0(t) = \left(1 + \frac{1}{2}\gamma t\right) e^{-\gamma t}, \quad (3.176)$$

$$P_n(t) = \left[\frac{(\gamma t)^{2n-1}}{2(2n-1)!} + \frac{(\gamma t)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(\gamma t)^{2n+1}}{2(2n+1)!} \right] e^{-\gamma t}; \quad n \geq 1, \quad (3.177)$$

como demonstrado na referência [55].

Para γ_1 e γ_2 arbitrários, é mais fácil calcular a função característica diretamente das equações (3.174) e (3.175). Para tanto, vale notar que:

$$\chi(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) e^{in\lambda}, \quad (3.178)$$

donde:

$$\tilde{\chi}(\lambda, s) = \int_0^{\infty} dt e^{-st} \chi(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(s) e^{in\lambda}. \quad (3.179)$$

Inserindo (3.174) e (3.175) em (3.179), resulta:

$$\tilde{\chi}(\lambda, s) = \frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} \left[\frac{(s + \gamma_1 + \gamma_2)^2}{(s + \gamma_1)(s + \gamma_2) - e^{i\lambda}\gamma_1\gamma_2} - 1 \right]. \quad (3.180)$$

Calculando a transformada inversa de (3.180), obtém-se

$$\begin{aligned} \chi(\lambda, t) = & \exp \left[-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)t \right] \left\{ \cosh \left[\frac{1}{2}\beta(\lambda)t \right] + \left(\frac{\beta(\lambda)}{\gamma_1 + \gamma_2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\gamma_1\gamma_2(e^{i\lambda} - 1)}{\beta(\lambda)(\gamma_1 + \gamma_2)} \right) \sinh \left[\frac{1}{2}\beta(\lambda)t \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.181)$$

onde:

$$\beta(\lambda) = \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + 4\gamma_1\gamma_2(e^{i\lambda} - 1)} \quad (3.182)$$

No limite de tempos longos, $t \gg 1$, (3.181) fica:

$$\chi(\lambda, t) \approx \frac{1}{2} \exp \left[\frac{1}{2}(\beta(\lambda) - \gamma_1 - \gamma_2)t \right] \left\{ 1 + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2 e^{i\lambda}}{(\gamma_1 + \gamma_2)\beta(\lambda)} \right\}. \quad (3.183)$$

Como feito anteriormente, (3.181) pode ser generalizada para junções com um número arbitrário de canais, N , bastando para isso assumir a independência desses:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda, t) = & \exp [-N(\gamma_1 + \gamma_2)t] \left\{ \cosh \left[\frac{1}{2}\beta(\lambda)t \right] + \left(\frac{\beta(\lambda)}{\gamma_1 + \gamma_2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2\gamma_1\gamma_2(e^{i\lambda} - 1)}{\beta(\lambda)(\gamma_1 + \gamma_2)} \right) \sinh \left[\frac{1}{2}\beta(\lambda)t \right] \right\}^{2N}. \end{aligned} \quad (3.184)$$

Já tomando o limite de tempos longos, $t \gg 1$, obtém-se que a função $S(\lambda)$ é dada por:

$$S(\lambda) = -\ln \chi(\lambda) \approx \frac{Nt}{2} [(\gamma_1 + \gamma_2) - \sqrt{(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + 4\gamma_1\gamma_2(e^{i\lambda} - 1)}]. \quad (3.185)$$

Escolhendo $\gamma_j = \frac{eVT_j}{h}$, a equação (3.183) pode ser reescrita como:

$$S(\lambda, t) = \frac{-MN}{2} [\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + 4T_1T_2e^{i\lambda}} - (T_1 + T_2)], \quad (3.186)$$

onde $M = eVt_0/h$. Esta equação coincide com a equação (3.112).

3.7.2 Cavidade com Barreiras Simétricas

Dando continuidade às abordagens semiclássicas para a interpretação da estatística de contagem de carga, apresenta-se agora o formalismo de integrais de trajetória estocásticas de Büttiker[56]. Na notação do apêndice A, foi mostrado nessa referência que:

$$P(Q, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \chi(\lambda, t) e^{-i\lambda Q}, \quad (3.187)$$

onde:

$$\chi(\lambda, t) = \int \mathcal{D}Q_c \int \mathcal{D}\lambda_c \exp \left[\int_0^t d\tau \left(i\lambda_c \dot{Q}_c + K(\lambda, \lambda_c, Q_c) \right) \right] \quad (3.188)$$

e

$$K(\lambda, \lambda_c, Q_c) = K_1 \left(\lambda_c - \frac{1}{2}\lambda, f_c \right) + K_2 \left(\lambda_c + \frac{1}{2}\lambda, f_c \right). \quad (3.189)$$

Os K_j , $j = 1, 2$, que aparecem na equação acima são funções características de processos elementares do tipo considerado por Levitov-Lesovik:

$$\begin{aligned} K_j(\lambda, f_c) &= \frac{N_j}{h} \int d\varepsilon \ln [1 + (e^{i\lambda} - 1)\Gamma_j f_c(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon)) \\ &+ (e^{-i\lambda} - 1)\Gamma_j f_j(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon))]. \end{aligned} \quad (3.190)$$

Fisicamente, isto corresponde a um processo trinomial bidirecional, em que elétrons

são transmitidos para a direita com probabilidade $p_1 = \Gamma_j f_c(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon))$, buracos são transmitidos para a direita com probabilidade $p_2 = \Gamma_j f_j(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon))$ e com probabilidade $p_3 = 1 - p_1 - p_2$ de que nenhuma carga seja transmitida[57]. (Ver apêndice B).

Os índices 1,2 e c que aparecem nas equações (3.187)-(3.190), bem como no que segue, referem-se a quantidades nos guias 1 e 2 e na cavidade(c). (Ver figura (3.8).)

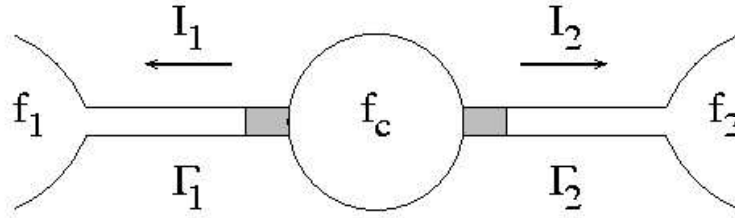


Figura 3.8: f_1 , f_2 e f_c são as funções de distribuição dos elétrons nos reservatórios 1 e 2 e na cavidade, respectivamente. Além disso, Γ_1 e Γ_2 são as transparências das barreiras.

As correntes médias, mostradas na figura (3.8), são dadas por:

$$\langle I_j \rangle = \frac{eG_j}{h} \int d\varepsilon (\langle f_c(\varepsilon) \rangle - f_j(\varepsilon)) ; G_j = N_j \Gamma_j. \quad (3.191)$$

Assumindo que $\mu_1 > \mu_2$ de tal forma que a $T = 0$ o intervalo de transporte relevante seja $\mu_2 < \varepsilon < \mu_1$, com $f_1(\varepsilon) = 1$, $f_2(\varepsilon) = 0$ e $\langle f_c(\varepsilon) \rangle = \langle f_c \rangle = \text{constante}$. Sendo $\mu_1 - \mu_2 = eV$, onde V é a voltagem aplicada, segue que:

$$\langle I_1 \rangle = \frac{e^2 V}{h} G_1 (\langle f_c \rangle - 1), \quad (3.192)$$

$$\langle I_2 \rangle = \frac{e^2 V}{h} G_2 \langle f_c \rangle. \quad (3.193)$$

A conservação da carga implica que:

$$\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle = 0, \quad (3.194)$$

donde segue que:

$$\begin{aligned} G_1(\langle f_c \rangle - 1) + G_2\langle f_c \rangle &= 0 \\ \therefore \langle f_c \rangle &= \frac{G_1}{G_1 + G_2}. \end{aligned} \quad (3.195)$$

A corrente que atravessa o sistema é, assim:

$$\langle I \rangle = \langle I_2 \rangle = -\langle I_1 \rangle, \quad (3.196)$$

$$\langle I \rangle = \frac{e^2 V}{h} \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}. \quad (3.197)$$

De (3.197), obtém-se que a condutância adimensional é dada por:

$$g = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \implies g^{-1} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}. \quad (3.198)$$

A *grande separação das escalas de tempo* envolvidas no processo é o ponto fundamental na abordagem presente. A discreteza da carga elétrica faz com que I_1 e I_2 flutuem muito rapidamente na escala de tempo de $\tau_0 \sim \hbar/eV$. Estas flutuações, por sua vez, causam a variação lenta da função de distribuição na cavidade, f_c , na escala do tempo de permanência (em inglês, *dwel time*), τ_d , que é definido como:

$$\tau_d = \frac{2\pi\hbar n_F}{G_1 + G_2}, \quad (3.199)$$

sendo $n_F = \frac{1}{\Delta}$ a densidade de estados na cavidade no nível de Fermi e Δ o espaçamento médio entre níveis. As flutuações em f_c afetam as correntes I_1 e I_2 , o que gera correlações entre elas. Para tempos $\tau_0 \ll \Delta t \ll \tau_d$, f_c pode ser considerada constante no tempo.

A conservação da carga é dada por:

$$I_1 + I_2 = -\frac{dQ_c}{dt}, \quad (3.200)$$

onde:

$$Q_c \equiv e \int d\varepsilon n(\varepsilon) f_c(\varepsilon) = e^2 n_F V f_c \quad (3.201)$$

é a carga na cavidade. A dinâmica de Q_c é descrita na equação (3.188). A temperatura nula, pode-se escrever (3.190) como:

$$\begin{aligned} K_1(\lambda, f) &= \frac{eV N_1}{h} \ln [1 + (e^{-i\lambda} - 1)\Gamma_1(1 - f_c)], \\ K_2(\lambda, f) &= \frac{eV N_2}{h} \ln [1 + (e^{i\lambda} - 1)\Gamma_2 f_c]. \end{aligned} \quad (3.202)$$

Assumindo que o número de estados na cavidade satisfaz $N_c = n_F eV \gg 1$ (limite semiclássico), é possível calcular a equação (3.188) usando o *método do ponto de sela*. Definindo o momento canônico $P_c \equiv i\lambda_c$ e o hamiltoniano $H(P_c, Q_c; \lambda) \equiv -K(\lambda, \lambda_c, Q_c) |_{\lambda_c = -iP_c}$, segue que a lagrangeana é dada por:

$$\mathcal{L}(Q_c, \dot{Q}_c; \lambda) \equiv P_c \dot{Q}_c - H(P_c, Q_c; \lambda). \quad (3.203)$$

Dessa equação, pode-se definir a ação $S([Q_c]; \lambda)$:

$$S([Q_c]; \lambda) = - \int_0^t d\tau \mathcal{L}(Q_c, \dot{Q}_c; \lambda). \quad (3.204)$$

A equação de ponto de sela é obtida da condição de extremo $\delta S = 0$, que leva à equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_c} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_c} \quad (3.205)$$

Alternativamente, pode-se usar as equações canônicas:

$$\dot{Q}_c = \frac{\partial H}{\partial P_c}; \quad \dot{P}_c = -\frac{\partial H}{\partial Q_c}. \quad (3.206)$$

Para escalas de tempo tais que $t \gg \tau_d$, a dinâmica torna-se estacionária, isto é, $\dot{Q}_c = 0 = \dot{P}_c$. Assim:

$$\frac{\partial H}{\partial P_c} = 0 = \frac{\partial H}{\partial Q_c}. \quad (3.207)$$

Em termos das variáveis originais, K , λ e f_c , (3.207) fica:

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_c} = 0 = \frac{\partial K}{\partial f_c}, \quad (3.208)$$

onde:

$$\begin{aligned} K(\lambda, \lambda_c, f_c) &= \frac{eV}{h} \left\{ N_1 \ln [1 + (e^{-i(\lambda_c - \lambda/2)} - 1)\Gamma_1(1 - f_c)] \right. \\ &\quad \left. + N_2 \ln [1 + (e^{i(\lambda_c + \lambda/2)} - 1)\Gamma_2 f_c] \right\}, \end{aligned} \quad (3.209)$$

implicando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \lambda_c} &= \frac{eV}{h} \left\{ N_1 \frac{-i\Gamma_1(1 - f_c)}{1 + (e^{-i(\lambda_c - \lambda/2)} - 1)\Gamma_1(1 - f_c)} \right. \\ &\quad \left. + N_2 \frac{i\Gamma_2 f_c}{1 + (e^{i(\lambda_c + \lambda/2)} - 1)\Gamma_2 f_c} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.210)$$

$$\therefore \frac{G_1(1 - f_c)}{1 + (e^{-i(\lambda_c - \lambda/2)} - 1)\Gamma_1(1 - f_c)} = \frac{G_2 f_c}{1 + (e^{i(\lambda_c + \lambda/2)} - 1)\Gamma_2 f_c}. \quad (3.211)$$

Além disso, (3.209) leva a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial f_c} = & \frac{eV}{h} \left\{ -\frac{G_1(e^{-i(\lambda_c-\lambda/2)} - 1)}{1 + (e^{-i(\lambda_c-\lambda/2)} - 1)\Gamma_1(1 - f_c)} \right. \\ & \left. + \frac{G_2(e^{i(\lambda_c+\lambda/2)} - 1)}{1 + (e^{i(\lambda_c+\lambda/2)} - 1)\Gamma_2 f_c} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.212)$$

$$\therefore \frac{G_1(e^{-i(\lambda_c-\lambda/2)} - 1)}{1 + (e^{-i(\lambda_c-\lambda/2)} - 1)\Gamma_1(1 - f_c)} = \frac{G_2(e^{i(\lambda_c+\lambda/2)} - 1)}{1 + (e^{i(\lambda_c+\lambda/2)} - 1)\Gamma_2 f_c}. \quad (3.213)$$

As estatísticas de contagem de carga de uma cavidade acoplada a dois contatos ideais, obtida em (3.87), e de uma cavidade acoplada a barreiras simétricas de transparências arbitrárias, (3.103), são casos particulares da função $\chi(\lambda)$ da equação (3.188).

Cavidade Acoplada a Contatos Ideais: $\Gamma_1 = 1 = \Gamma_2$; $G_1 = N = G_2$

A solução é $\lambda_c = 0$ e $f_c = 1/2$, de maneira que:

$$S([Q_c]; \lambda) \approx -tK(\lambda, \lambda_c = 0, f_c = 1/2) \quad (3.214)$$

ou ainda:

$$S([Q_c]; \lambda) \approx -\frac{2NeVt}{h} \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\lambda/2} \right). \quad (3.215)$$

Das equações (3.188) e (3.215), obtém-se:

$$\chi(\lambda, t) = e^{-S([Q_c]; \lambda)} \approx \left(\frac{e^{i\lambda/2} + 1}{2} \right)^{2MN}; \quad M = \frac{eVt}{h}, \quad (3.216)$$

que está em perfeito acordo com o resultado obtido via teoria de circuitos, (3.87).

Cavidade Acoplada a Barreiras Simétricas: $\Gamma_1 = \Gamma = \Gamma_2$; $G_1 = N\Gamma = G_2$

Como no caso anterior, a solução é $\lambda_c = 0$ e $f_c = 1/2$. Logo:

$$S([Q_c]; \lambda) \approx -2MN \ln \left(1 - \frac{\Gamma}{2} + \frac{\Gamma}{2} e^{i\lambda/2} \right), \quad (3.217)$$

que leva a:

$$\chi(\lambda, t) = \left[\frac{\Gamma}{2} (e^{i\lambda/2} - 1) + 1 \right]^{2MN}, \quad (3.218)$$

em concordância com o resultado obtido através da teoria de circuitos, (3.103).

3.8 Formação de Modos de Fabry-Perot

Nesta seção final, será apresentada uma breve discussão sobre a formação de modos de Fabry-Perot entre as barreiras conectadas à cavidade caótica que tem sido estudada. Como destacado na referência [49], o aparecimento desses modos está ligado à singularidade do tipo inverso de raiz quadrada que aparece em $\rho(\tau)$ para $\tau = 1$. Nesse contexto, discute-se ainda uma transição quântica contínua associada ao surgimento desses modos. Por fim, interpreta-se o aparecimento do expoente $2/3$ na função característica das equações (3.133) e (3.144), por exemplo.

A formação de modos de Fabry-Perot entre as barreiras constitui um fenômeno puramente ondulatório, que pode ser facilmente compreendido no caso de duas junções de tunelamento em série, com $\Gamma_1, \Gamma_2 \ll 1$. Como destacado nas referências [8] e [25], os autovalores de transmissão através desse sistema são dados por:

$$\tau_n = \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{2 - \Gamma_1 - \Gamma_2 - 2\sqrt{1 - \Gamma_1 - \Gamma_2} \cos \phi_n}, \quad (3.219)$$

sendo ϕ_n a fase acumulada na viagem de ida e volta entre as barreiras. Tendo em vista o caráter caótico da dinâmica no interior da cavidade, é razoável assumir que os valores possíveis de ϕ_n se distribuem uniformemente entre 0 e 2π , o que leva à seguinte expressão para a densidade média de autovalores de transmissão:

$$\rho(\tau) = \frac{NT_1T_2}{\pi(T_1 + T_2)} \frac{1}{\tau^{3/2}\sqrt{\tau_0 - \tau}}, \quad (\text{comparar com a equação (3.109)})$$

onde $\tau_0 = 4\Gamma_1\Gamma_2/(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2$. Para $\Gamma_1 = \Gamma_2 \Leftrightarrow \tau_0 = 1$, indicando o aparecimento de modos de Fabry-Perot para $\tau = 1$.

Vale notar que sob a transformação $\tau = \text{sech}^2 x$ a singularidade em $\tau = 1$ é regularizada, ou seja, $\nu(x)$ é finito em $x = 0$ se $\rho(\tau)$ apresenta uma singularidade em $\tau = 1$. No caso de uma cavidade ligada a duas junções de tunelamento, tem-se:

$$\nu(0) = \begin{cases} NT/\pi & ; \quad T_1 = T = T_2, \\ 0 & ; \quad T_1 \neq T_2, \end{cases} \quad (3.220)$$

estando a singularidade ausente no caso em que $T_1 \neq T_2$, como evidenciado em (3.109). Visto que $\nu(0)$ é finito apenas quando surgem modos de Fabry-Perot, pode-se interpretá-lo como uma densidade desses modos na cavidade.

O sistema mais simples em que ocorre a transição quântica supracitada é o de uma cavidade caótica acoplada a um contato ideal e a uma barreira de transparência T . Neste caso, tem-se:

$$\nu(0) = \begin{cases} (2N/\pi)\sqrt{2T-1} & ; \quad 0.5 < T < 1, \\ 0 & ; \quad 0 < T \leq 0.5. \end{cases} \quad (3.221)$$

$\nu(0)$ assume, assim, o papel similar ao de um *parâmetro de ordem* em uma transição

de fase de segunda ordem.

No caso de barreiras de transparências arbitrárias, $\nu(0)$ é dado por:

$$\nu(0) = \frac{2N}{\pi} \begin{cases} \frac{\sqrt{\zeta_0(\zeta-1)(\zeta_0-\zeta)}}{\zeta+\zeta_0} & ; \quad 1 < \zeta < \zeta_0, \\ 0 & ; \quad \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.222)$$

onde ζ e ζ_0 são os mesmos parâmetros definidos na equação (3.137). As equações $\zeta = 1$ e $\zeta = \zeta_0$ representam **linhas de transição** na figura (3.9), retirada da referência [49]. Pontos entre as linhas definidas por essas equações tem $\nu(0)$ finito, demonstrando a existência de modos de Fabry-Perot na cavidade. Esta é a chamada **fase estendida** ou ainda *fase Fabry-Perot* ($1 < \zeta < \zeta_0$). Pontos externos a essa região, por outro lado, têm $\nu(0) = 0$ e representam estados em que não há modos ressonantes de Fabry-Perot na cavidade. São as chamadas **fases localizadas** ($0 < \zeta < 1$ e $\zeta > \zeta_0$).

Antes de tratar dos regimes de transporte, convém definir a função resolvente $G(z)$:

$$G(z) \equiv \int_0^\infty dx \frac{\nu(x)}{z - \sinh^2 x}, \quad (3.223)$$

que pode ser expressa em termos da pseudocorrente $K(x)$ como:

$$G(z) = \frac{-K(\cosh^{-1}(\sqrt{-z}))}{\sqrt{z(1+z)}}. \quad (3.224)$$

Há cinco regimes de transporte diferentes neste caso geral, os quais podem

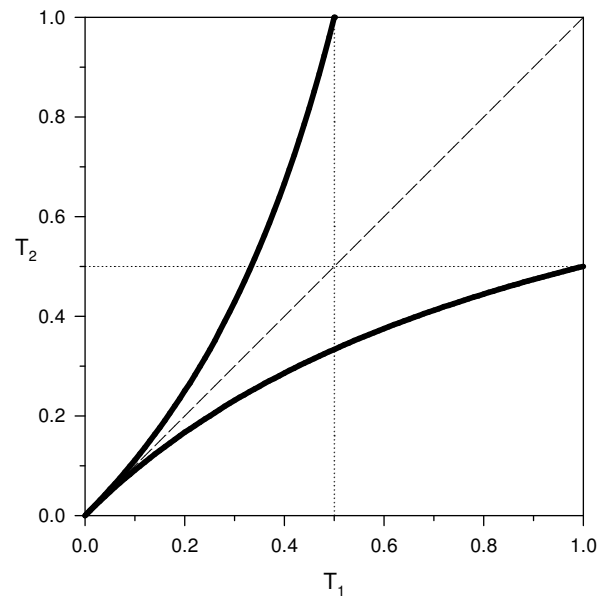


Figura 3.9: Diagrama representando os regimes de transporte como uma função das probabilidades de transição. A fase estendida ocorre entre as linhas cheias. Retirada da referência [49].

ser descritos pelo comportamento da densidade $\nu(x)$:

$$\nu(x) \begin{cases} \sim \nu(0) & ; \quad x \rightarrow 0 \text{ (fase estendida)} \\ \sim x^{1/3} & ; \quad x \rightarrow 0 \text{ (linhas de transição)} \\ = 0 & ; \quad x < x_0 \text{ (fases localizadas)} \end{cases}$$

Sendo $t \equiv \zeta - \zeta_c$, onde ζ_c denota a posição de uma linha de transição ($\zeta_c = 1$ ou $\zeta_c = \zeta_0$), pode-se introduzir os *expoentes críticos* β , δ e γ , através das seguintes relações: (i) $G(0) \sim |t|^{-\gamma}$ (fases localizadas); (ii) $\nu(x) \sim x^{1/\delta}$ (linhas de transição); (iii) $\nu(0) \sim |t|^\beta$ (fase estendida). Encontra-se $\beta = 1/2$, $\delta = 3$ e $\gamma = 1$, de modo que esses expoentes obedecem à “relação de escala de Widom”, $\gamma = \beta(\delta - 1)$, coincidindo com a teoria de campo médio clássica de transições de fase de segunda ordem.

Interpretação do Expoente Anômalo de $g(\varepsilon)$: Barreiras Arbitrárias

Como discutido na referência [60], o comportamento da condutância do caso interagente no limite de baixas energias é dado por uma lei de potência, $g(\varepsilon) \approx A\varepsilon^\alpha$, onde tanto o coeficiente A quanto o expoente α dependem de em que regime o sistema se encontra. Uma interpretação física simples para o valor numérico do expoente α pode ser obtida definindo o número médio de passos para que ocorra a transferência completa de carga como $\bar{n} = 2/\alpha$. Para junções de tunelamento, por exemplo, tem-se $\bar{n} = 1$, descrevendo o fato de que o elétron atravessa o ponto em um único salto. Para uma cavidade ligada a barreiras simétricas, tem-se $\bar{n} = 2$, implicando um processo de dois passos, cujo mecanismo dominante é o tunelamento ressonante elástico através dos modos de Fabry-Perot formados entre as barreiras. No caso geral, tem-se: (i) Fases Localizadas: $\alpha_{loc} = 2$; (ii) Linhas de Transição: $\alpha_c = 4/3$; (iii) Fase Fabry-Perot: $\alpha_{FP} = 1$.

De acordo com a classificação proposta na referência [54], nas fases localizadas, $\alpha_{loc} = 2$ implica $\bar{n}_{loc} = 1$ e a cavidade comporta-se como uma barreira única. Na fase Fabry-Perot, o expoente $\alpha_{FP} = 1$ implica $\bar{n}_{FP} = 2$, sugerindo que o elétron atravessa as barreiras em dois passos ressonantes. Nas linhas de transição, tem-se $\alpha_c = 4/3$, de modo que $\bar{n}_c = 3/2 = (\bar{n}_{loc} + \bar{n}_{FP})/2$. Fisicamente, isto significa que o processo é uma mistura estatística balanceada de processos de um passo e de dois passos. Isto explica também o aparecimento do expoente $2/3$ na função $\langle\chi(\lambda)\rangle$.

Capítulo 4

Teoria de Circuitos e Estatística de Contagem de Carga a Temperatura Finita

Neste capítulo final, os efeitos de temperatura finita são considerados para o cálculo da estatística de contagem de carga de sistemas semelhantes aos do capítulo anterior, ou seja, condutores metálicos acoplados a guias ideais através de conectores especiais, no limite semiclássico em que o número de canais é muito grande, $N \gg 1$.

Na primeira seção, é apresentada a versão de Nazarov da teoria de circuitos, que, conforme será visto, tem o inconveniente de envolver grandezas matriciais em sua formulação. Como mostrado na seção 4.2, essa estrutura matricial não é necessária, podendo ser, sem perda de conteúdo, substituída por uma versão escalar desenvolvida por Macêdo e Souza na referência [60]. Em seguida, calculam-se as funções geratrizes de alguns circuitos de interesse e, na seção 4.4, apresenta-se a chamada “abordagem cascata” — um método semiclássico poderoso que possibilita

calcular os cumulantes da estatística de contagem de carga. Por fim, discute-se um método alternativo para o cálculo dos cumulantes da corrente.

4.1 Versão de Nazarov da Teoria de Circuitos

Esta seção tem como objetivo apresentar a teoria de circuitos de Nazarov. Uma base teórica importante para compreensão dessa teoria é a teoria das funções de Green de Keldysh, cujos principais aspectos são abordados na subseção 4.1.1. É apenas na subseção 4.1.2 que se trata especificamente dessa teoria de circuitos, válida — como já destacado no início do capítulo 3 — para estudar sistemas mesoscópicos no limite semiclássico. Segue-se, nesta seção, uma revisão recente de Belzig, feita na referência [58]. Os exemplos resolvidos adiante são retirados, em parte, dessa referência.

4.1.1 Teoria das Funções de Green de Keldysh

Conforme discutido na seção 2.4, é necessário fornecer uma descrição quântica completa do processo de medição de carga, isto é, uma descrição que inclua o dispositivo de medição explicitamente no hamiltoniano do problema. Nazarov *et al.* demonstraram na referência [61] que a função geratriz pode ser escrita como:

$$e^{-\Phi(\lambda)} = \langle \mathcal{T} e^{-i\frac{\lambda}{2e} \int_0^{t_0} dt I(t)} \tilde{\mathcal{T}} e^{-i\frac{\lambda}{2e} \int_0^{t_0} dt I(t)} \rangle, \quad (4.1)$$

onde $\mathcal{T}$ indica o ordenamento temporal, enquanto $\tilde{\mathcal{T}}$ representa o antiordenamento temporal. Além disso, $\hat{I}(t)$ é o operador corrente através de uma seção reta dada.

O valor esperado indicado na equação (4.1) deve ser calculado usando o contorno de Keldysh, mostrado na figura abaixo, retirada da referência [58]:

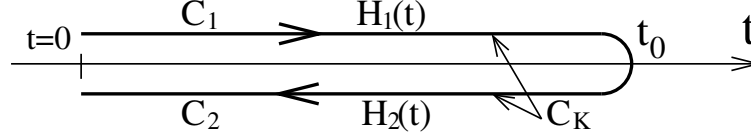


Figura 4.1: O contorno de Keldysh, C_K . $H_1(t)$ e $H_2(t)$ são os diferentes hamiltonianos introduzidos para as duas partes do contorno.

Seja $A(t)$ um observável qualquer, expresso no quadro de Heisenberg:

$$A(t) = U^\dagger(t, t') A(t') U(t, t'), \quad (4.2)$$

em que $U(t, t') = \mathcal{T} \exp(-i \int_{t'}^t d\tau H(\tau))$ é o operador de evolução temporal ordenado no tempo e $U^\dagger(t, t') = \tilde{\mathcal{T}} \exp(-i \int_t^{t'} d\tau H(\tau))$, o operador de evolução temporal antiordenado no tempo. São introduzidas duas variáveis de tempo, (t_1, t_2) , associadas às partes superior e inferior do contorno, (C_1, C_2) . Além disso, estabelece-se um ordenamento ao longo do contorno C_K , que é efetuado através do operador $\mathcal{T}_K$.

Define-se a função de Green ordenada no contorno, $\hat{G}_{C_K}(t, t')$:

$$\hat{G}_{C_K}(t, t') = -i \langle \mathcal{T}_K \Psi(t) \Psi^\dagger(t') \rangle, \quad (4.3)$$

que é comumente mapeada em um espaço matricial, chamado de *espaço de Keldysh*. Para tanto, as variáveis t_1 e t_2 são consideradas formalmente independentes:

$$\check{G}(t, t') \equiv \begin{pmatrix} \hat{G}_{11}(t, t') & \hat{G}_{12}(t, t') \\ -\hat{G}_{21}(t, t') & -\hat{G}_{22}(t, t') \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Em termos dos hamiltonianos $H_1(t)$ e $H_2(t)$, (4.4) pode ser reescrita como:

$$-i \begin{pmatrix} \langle \mathcal{T} \Psi_{H_1}(t) \Psi_{H_1}^\dagger(t') \rangle & \langle \Psi_{H_1}^\dagger(t') \Psi_{H_2}(t) \rangle \\ -\langle \Psi_{H_2}(t) \Psi_{H_1}^\dagger(t') \rangle & \langle \tilde{\mathcal{T}} \Psi_{H_2}(t) \Psi_{H_2}^\dagger(t') \rangle \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Geralmente, faz-se $H_1 = H_2$ e, após algumas manipulações, chega-se à seguinte expressão para a função de Green de Keldysh:

$$\bar{G}(t, t') = \begin{pmatrix} \check{G}^r(t, t') & \check{G}^K(t, t') \\ 0 & \check{G}^a(t, t') \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde:

$$\check{G}^{r(a)}(t, t') = \mp i \Theta(\pm(t - t')) \langle \{ \Psi(t), \Psi^\dagger(t') \} \rangle, \quad (4.7)$$

$$\check{G}^K = -i \langle [\Psi(t), \Psi^\dagger(t')] \rangle. \quad (4.8)$$

A fim de relacionar a estatística de contagem de carga às quantidades que aparecem na teoria de campos, é necessário estudar a resposta do sistema à seguinte perturbação dependente do tempo:

$$\mathcal{H}_c(t) = \frac{\lambda}{2e} I_c(t) = \mp \frac{\lambda}{2e} \int d^3x \Psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{j}_c(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t), \quad (4.9)$$

em que o sinal $+$ corresponde à porção inferior do contorno de Keldysh, ao passo que o sinal $-$ à parte superior. $\hat{j}_c(\mathbf{x})$ é o operador da corrente que atravessa a seção c do condutor.

O sistema não-perturbado é descrito pelo hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}} = \int d\mathbf{r} \Psi^\dagger(\mathbf{r}) \hat{h}_0(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r})$, em que $\hat{h}_0(t)$ é o hamiltoniano de 1-partícula do sistema. A evolução temporal do

sistema sujeito à perturbação dada em (4.9) é descrita pela seguinte equação:

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \hat{h}_0(\mathbf{x}) + \frac{\lambda}{2e} \bar{\tau}_3 \hat{j}_c(\mathbf{x}) \right] \check{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t'; \lambda) = \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.10)$$

onde $\bar{\tau}_3$ é a representação no espaço de Keldysh da matriz de Pauli σ_3 . A conexão entre o formalismo de funções de Green de Keldysh desenvolvido até aqui e a estatística de contagem de carga é possível através de uma expansão diagramática em λ :

$$\frac{\partial \Phi(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{it_0}{e} I(\lambda), \quad (4.11)$$

onde t_0 é o tempo da medição da corrente. A corrente de contagem, $I(\lambda)$, pode ser escrita como:

$$I(\lambda) = \int d^3x \operatorname{Tr} \left[\bar{\tau}_3 \hat{j}_c(\mathbf{x}) \check{G}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t; \lambda) \right] \Big|_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'}. \quad (4.12)$$

As expressões obtidas até então são bastante gerais, podendo ser aplicadas para calcular $\Phi(\lambda)$ em um sistema arbitrário, embora seja muito difícil calcular a função de Green para o caso geral.

A aplicação desse formalismo ao transporte em sistemas mesoscópicos é particularmente simples, desde que o sistema seja dividido em duas partes: a primeira consistindo de dois terminais, em que são impostas as condições de contorno, e a segunda parte consistindo do condutor em si. No limite semiclássico, em particular, esta abordagem da estatística de contagem via funções de Green de Keldysh leva à teoria de circuitos de Nazarov, que é apresentada na próxima subseção.

4.1.2 Teoria de Circuitos

Finalmente, após apresentar as bases da teoria das funções de Green de Keldysh, chega-se à formulação de Nazarov da teoria de circuitos [47, 51], cuja idéia princi-

pal, como já destacado na introdução do capítulo 3, é representar um dispositivo mesoscópico por elementos discretos.

Como na teoria de circuitos clássica, apresentada por Kirchhoff em 1845, tem-se na teoria de circuitos de Nazarov três tipos de elementos, a saber, terminais, nós e conectores. O circuito assim formado liga-se a reservatórios externos através dos terminais, que podem ser constituídos por metais normais ou supercondutores. É nos terminais que são especificadas as condições de contorno do problema, como voltagens, correntes ou tensões aplicadas. Os conectores são objetos que ligam dois reservatórios, dois nós, ou um reservatório e um nó.

Considera-se uma representação em termos de um circuito de um ponto quântico com duas barreiras de transparências arbitrárias, Γ_1 e Γ_2 , como mostrado na figura abaixo.

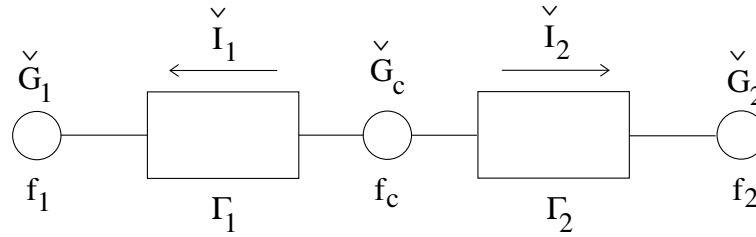


Figura 4.2: Circuito que representa um ponto quântico conectado a duas barreiras arbitrárias.

f_1 e f_2 são as funções de distribuição de equilíbrio dos reservatórios, ao passo que f_c é uma distribuição de não-equilíbrio, isotrópica nos espaços de momentum e posição e constante no tempo.

As funções de Green de equilíbrio nos dois reservatórios são dadas por:

$$\check{G}_j(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 - 2f_j(\varepsilon) & -2f_j(\varepsilon) \\ -2(1 - f_j(\varepsilon)) & 2f_j(\varepsilon) - 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

com $\check{G}_j^2(\varepsilon) = \check{\mathbf{1}}$, que podem ser obtidas a partir de um modelo de elétrons não-interagentes. A presença do campo de contagem, λ , modifica $\check{G}_1(\varepsilon)$ de acordo com:

$$\check{G}_1(\varepsilon, \lambda) = e^{i\lambda\check{\sigma}_3/2}\check{G}_1(\varepsilon)e^{-i\lambda\check{\sigma}_3/2}, \quad (4.14)$$

onde $\check{\sigma}_3$ é uma matriz de Pauli.

Cada conector é descrito por uma corrente matricial, dada por:

$$\check{I}_j = \frac{N\Gamma_j[\check{G}_j, \check{G}_c]}{4 + \Gamma_j(\{\check{G}_j, \check{G}_c\} - 2)}, \quad (4.15)$$

sendo $\check{G}_c$ a função de Green no nó, que pode ser determinada a partir da lei de conservação da corrente:

$$\check{I}_1 + \check{I}_2 = 0. \quad (4.16)$$

A determinação de $\check{G}_c(\varepsilon, \lambda)$ permite calcular a função geratriz $S(\lambda) \equiv \langle \Phi(\lambda) \rangle$, através da seguinte relação:

$$q(\lambda) = i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{t_0}{2h} \int d\varepsilon \text{Tr} (\check{\sigma}_3 \check{I}_1(\varepsilon, \lambda)). \quad (4.17)$$

Regras da Teoria de Circuitos de Nazarov

As propriedades de transporte de um circuito complexo, constituído por diferentes conectores e um número arbitrário de terminais, podem ser calculadas observando as seguintes “leis” de circuito:

1. As funções de Green dos terminais são conhecidas, ao passo que elas são desconhecidas nos nós. Contudo, tem-se $\check{G}_j^2 = \check{\mathbf{1}}$ para as funções de Green em cada nó j .

2. A corrente matricial total em um determinado nó é conservada, o que fornece um número suficiente de equações para calcular as funções de Green desconhecidas nos nós.

4.1.3 Aplicações Simples da Teoria de Circuitos de Nazarov

Como ilustração do poder da teoria de circuitos de Nazarov, serão determinadas a estatística de contagem de carga de alguns circuitos de dois terminais simples, a saber, a junção de tunelamento única, a cavidade caótica conectada a duas junções de tunelamento, a cavidade conectada a dois contatos ideais e a cavidade acoplada a duas barreiras simétricas.

Junção de Tunelamento Única

Neste caso, o sistema é representado pelo seguinte circuito:

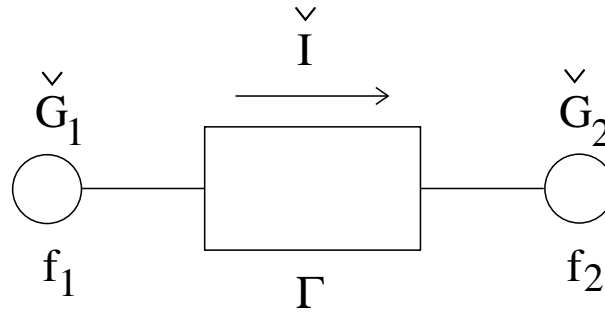


Figura 4.3: Circuito representando uma junção de tunelamento única.

Fazendo $\Gamma \ll 1$ na equação (4.15), obtém-se:

$$\check{I}(\varepsilon, \lambda) = \frac{N\Gamma}{4} [\check{G}_1(\varepsilon, \lambda), \check{G}_2], \quad (4.18)$$

que substituída em (4.17) leva a:

$$q(\lambda) = \frac{Nt_0\Gamma}{8h} \int d\varepsilon \operatorname{Tr} (\check{\sigma}_3 [\check{G}_1(\varepsilon, \lambda), \check{G}_2]). \quad (4.19)$$

Definindo os operadores de projeção $\check{P}_+$ e $\check{P}_-$:

$$\check{P}_+ \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \check{P}_- \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

de modo que:

$$e^{i\lambda\check{\sigma}_3/2} = e^{i\lambda/2}\check{P}_+ + e^{-i\lambda/2}\check{P}_-. \quad (4.21)$$

Das equações (4.20) e (4.21) e sendo $\check{\sigma}_3 = \check{P}_+ - \check{P}_-$, resulta:

$$[\check{\sigma}_3, \check{G}_1(\lambda)] = 2(e^{i\lambda}\check{P}_+\check{G}_1\check{P}_- - e^{-i\lambda}\check{P}_-\check{G}_1\check{P}_+), \quad (4.22)$$

que inserida em (4.19) implica:

$$q(\lambda) = t_0(e^{i\lambda}N_{1\rightarrow 2} - e^{-i\lambda}N_{2\rightarrow 1}), \quad (4.23)$$

$$N_{i\rightarrow j} = \frac{N\Gamma}{4h} \int d\varepsilon \operatorname{Tr}(\check{P}_+\check{G}_i(\varepsilon)\check{P}_-\check{G}_j(\varepsilon)), \quad (4.24)$$

sendo $N_{i\rightarrow j}$ uma taxa de transição. Inserindo (4.13) em (4.24), segue que:

$$\operatorname{Tr}(\check{P}_+\check{G}_i\check{P}_-\check{G}_j) = 4f_i(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon)). \quad (4.25)$$

Usando esse resultado, obtém-se:

$$N_{i\rightarrow j} = \frac{N\Gamma}{h} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon f_i(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon)). \quad (4.26)$$

De (4.17), (4.23) e (4.26), resulta:

$$S(\lambda) = -t_0[N_{1\rightarrow 2}(e^{i\lambda} - 1) + N_{2\rightarrow 1}(e^{-i\lambda} - 1)] = -\ln \langle \chi(\lambda) \rangle, \quad (4.27)$$

$$\langle \chi(\lambda) \rangle = \exp[\mu(e^{i\lambda} - 1)] \exp[\nu(e^{-i\lambda} - 1)]. \quad (4.28)$$

Isto corresponde a um processo poissoniano bidirecional, onde:

$$\mu \equiv t_0 N_{1\rightarrow 2} ; \nu \equiv t_0 N_{2\rightarrow 1}, \quad (4.29)$$

como mostrado no apêndice B. Vê-se que o efeito de temperatura corresponde a transformar o processo poissoniano unidirecional da equação (3.72), obtida para $T = 0$, em um processo poissoniano bidirecional. Isto se deve ao efeito de ativação térmica, que possibilita que elétrons oriundos do reservatório 2 desloque-se no sentido contrário ao da corrente.

Junção de Tunelamento Dupla

Como no caso anterior, tem-se:

$$\check{I}_j(\varepsilon, \lambda) = \frac{N\Gamma_j}{4} [\check{G}_j(\varepsilon, \lambda), \check{G}_c], \quad j = 1, 2. \quad (4.30)$$

Da conservação da corrente, segue:

$$\check{I}_1 + \check{I}_2 = 0 = \frac{N}{4} (\Gamma_1[\check{G}_1, \check{G}_c] + \Gamma_2[\check{G}_2, \check{G}_c]). \quad (4.31)$$

Definindo:

$$\check{K}_\lambda \equiv \{\check{G}_1(\lambda), \check{G}_2\} = \check{G}_1(\lambda)\check{G}_2 + \check{G}_2\check{G}_1(\lambda), \quad (4.32)$$

obtém-se:

$$\check{K}_\lambda = (4J_\lambda + 2)\check{\mathbf{1}}, \quad (4.33)$$

onde:

$$J_\lambda(\varepsilon) = (e^{i\lambda} - 1)f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) + (e^{-i\lambda} - 1)f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon)). \quad (4.34)$$

A fim de encontrar $\check{G}_c$ que resolve a equação (4.31), tenta-se o seguinte *ansatz*:

$$\check{G}_c = A(\Gamma_1\check{G}_1 + \Gamma_2\check{G}_2), \quad (4.35)$$

onde A é uma constante que pode ser determinada a partir da condição $\check{G}_c^2 = \check{\mathbf{1}}$.

Obtém-se:

$$A = ((\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + 4\Gamma_1\Gamma_2J_\lambda)^{-1/2}. \quad (4.36)$$

Logo:

$$\check{I}_1(\lambda) = \frac{N\Gamma_1}{4}[\check{G}_1(\lambda), \check{G}_c] = \frac{NA\Gamma_1\Gamma_2}{4}[\check{G}_1(\lambda), \check{G}_2]. \quad (4.37)$$

De (4.17) e (4.37), obtém-se:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} \int d\varepsilon \frac{N\Gamma_1\Gamma_2J'_\lambda(\varepsilon)}{\sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + 4\Gamma_1\Gamma_2J_\lambda(\varepsilon)}}, \quad (4.38)$$

donde:

$$S(\lambda) = -\frac{Nt_0}{2h} \int d\varepsilon \sqrt{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2 + 4\Gamma_1\Gamma_2J_\lambda(\varepsilon)}. \quad (4.39)$$

Cavidade Caótica Ligada a Dois Contatos Ideais

Fazendo $\Gamma_1 = \Gamma = \Gamma_2$ em (4.15), resulta:

$$\check{I}_j = N \frac{[\check{G}_j, \check{G}_c]}{2 + \{\check{G}_j, \check{G}_c\}}, \quad (4.40)$$

com $j = 1, 2$. A conservação da corrente leva a:

$$0 = \frac{[\check{G}_1, \check{G}_c]}{2 + \{\check{G}_1, \check{G}_c\}} + \frac{[\check{G}_2, \check{G}_c]}{2 + \{\check{G}_2, \check{G}_c\}}. \quad (4.41)$$

Para resolver essa equação, tenta-se o seguinte *ansatz*:

$$\check{G}_c = A(\check{G}_1 + \check{G}_2), \quad (4.42)$$

donde segue que:

$$\check{I}_1 = \frac{AN}{2} \frac{[\check{G}_1, \check{G}_2]}{1 + 2A(1 + J_\lambda)} = -\check{I}_2, \quad (4.43)$$

com:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{1 + J_\lambda}}. \quad (4.44)$$

De (4.17) e (4.43), obtém-se:

$$q(\lambda) = -\frac{iNt_0}{h} \int d\varepsilon \frac{J'_\lambda(\varepsilon)}{\sqrt{1 + J_\lambda(\varepsilon)}(1 + \sqrt{1 + J_\lambda(\varepsilon)})}, \quad (4.45)$$

$$S(\lambda) = -\frac{2Nt_0}{h} \int d\varepsilon \ln[1 + \sqrt{1 + J_\lambda(\varepsilon)}]. \quad (4.46)$$

A temperatura nula, a equação (4.46) reduz-se a:

$$S(\lambda) = -2MN \ln [(e^{i\lambda} + 1)/2], \quad (4.47)$$

onde $M = eVt_0/h$ é o número de tentativas de transmissão no tempo t_0 . Este resultado é idêntico àquele da equação (3.85), obtido através da teoria de circuitos estendida.

Cavidade Caótica Acoplada a Barreiras Simétricas

Fazendo $\Gamma_1 = \Gamma = \Gamma_2$ em (4.15), vem:

$$\check{I}_j = \frac{N\Gamma[\check{G}_j, \check{G}_c]}{4 + \Gamma(\{\check{G}_j, \check{G}_c\} - 2)}, \quad ; \quad j = 1, 2. \quad (4.48)$$

Da conservação da corrente, segue que:

$$\check{I}_1 + \check{I}_2 = 0 = \frac{[\check{G}_1, \check{G}_c]}{2(2 - \Gamma) + \Gamma\{\check{G}_1, \check{G}_c\}} + \frac{[\check{G}_2, \check{G}_c]}{2(2 - \Gamma) + \Gamma\{\check{G}_2, \check{G}_c\}}. \quad (4.49)$$

Usando o *ansatz*:

$$\check{G}_c = \frac{\check{G}_1 + \check{G}_2}{2\sqrt{1 + J_\lambda}}, \quad (4.50)$$

obtém-se:

$$\check{I}_1 = \frac{N\Gamma}{4\sqrt{1 + J_\lambda}} \frac{[\check{G}_1, \check{G}_2]}{2 - \Gamma + \Gamma\sqrt{1 + J_\lambda}} = -\check{I}_2. \quad (4.51)$$

Por fim, das equações (4.17) e (4.51), resulta:

$$q(\lambda) = \frac{-iNt_0\Gamma}{h} \int d\varepsilon \frac{J'_\lambda(\varepsilon)}{\sqrt{1 + J_\lambda(\varepsilon)}(2 - \Gamma + \Gamma\sqrt{1 + J_\lambda(\varepsilon)})} \quad (4.52)$$

$$S(\lambda) = -\frac{2Nt_0}{h} \int d\varepsilon \ln(2 - \Gamma + \Gamma\sqrt{1 + J_\lambda(\varepsilon)}). \quad (4.53)$$

A temperatura nula, $S(\lambda)$ fica:

$$S(\lambda) = -2MN \ln \left[\frac{\Gamma}{2}(e^{i\lambda/2} - 1) + 1 \right] ; \quad M = \frac{eVt_0}{h}, \quad (4.54)$$

como obtido em (3.102).

A apresentação da teoria de circuitos de Nazarov neste ponto da dissertação tem por objetivo contrastá-la com a surpreendente simplificação alcançada por sua contrapartida escalar, discutida nas próximas seções.

4.2 Teoria de Circuitos Escalar a Temperatura Finita

Esta seção segue a derivação apresentada na referência [60]. A teoria de circuitos escalar a temperatura finita é obtida considerando um sistema de elétrons interagentes. Em linguagem de 2ª quantização, o hamiltoniano que descreve a dinâmica no interior de um ponto quântico isolado é dado por:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} d\mathbf{r} \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \left(\frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) + \int_{\Omega} d\mathbf{r} \int_{\Omega} d\mathbf{r}' u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi^{\dagger}(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}), \quad (4.55)$$

onde Ω representa o espaço de configurações do ponto, $\psi(\mathbf{r})$ é o operador de campo eletrônico, $U(\mathbf{r})$ é o potencial de uma partícula e $u(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é o potencial de muitos corpos geral.

No formalismo de Keldysh, a dinâmica no interior do ponto é descrita por três funções de Green de tempo real de 1-partícula:

$$g^r(x, x') = -i\Theta(t - t') \langle \{ \psi(x), \psi^{\dagger}(x') \} \rangle, \quad (4.56)$$

$$g^a(x, x') = i\Theta(t' - t) \langle \{ \psi(x), \psi^{\dagger}(x') \} \rangle, \quad (4.57)$$

$$g^K(x, x') = -i \langle [\psi(x), \psi^{\dagger}(x')] \rangle, \quad (4.58)$$

onde $x = (\mathbf{r}, t/\hbar)$. Como mostrado em (4.6), é comum representar essas três funções de Green matricialmente:

$$\bar{g} = \begin{pmatrix} g^r & g^K \\ 0 & g^a \end{pmatrix} \quad (4.59)$$

A função de Green $\bar{g}$ descreve, assim, a dinâmica do ponto quântico interagente isolado.

Considere-se, agora, a dinâmica no interior de um ponto quântico aberto, que conecta-se a reservatórios de elétrons através de guias ideais. Em uma das interfaces guia-ponto, existe um dispositivo de contagem de carga com um campo de contagem associado λ , como o descrito no capítulo 2. A fim de eliminar os guias, pode-se usar a técnica de projeção (ou função memória), que, na ausência do campo de contagem, leva à seguinte equação de Dyson:

$$\bar{G} = \bar{g} + \bar{g}\bar{\Sigma}\bar{G} = \bar{g} + \bar{G}\bar{\Sigma}\bar{g}, \quad (4.60)$$

sendo $\bar{\Sigma}(x, x')$ a função de autoenergia, que retém a informação sobre os guias. A presença do dispositivo de contagem de carga deve, como na seção 2.4, ser levada em conta de maneira explícita no problema. Isto é possível através da seguinte transformação de calibre:

$$\bar{A}^\lambda(x, x') = e^{i\bar{a}_\lambda(x)} \bar{A}(x, x') e^{-i\bar{a}_\lambda(x)}, \quad (4.61)$$

onde:

$$\bar{a}_\lambda(x) = \frac{1}{2}\bar{\sigma}\lambda(t)\Theta(F(\mathbf{r})). \quad (4.62)$$

Na equação (4.62), $F(\mathbf{r}) = 0$ especifica a interface guia-ponto em que está localizado

o detector. Além disso,

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

é uma das matrizes de Pauli. Considerando que a contagem é feita entre os instantes 0 e t_0 , pode-se escrever o campo de contagem, $\lambda(t)$, como:

$$\lambda(t) = \Theta(t)\Theta(t_0 - t)\lambda + \delta\lambda(t), \quad (4.64)$$

onde $\delta\lambda(t)$ vai de zero a $-\lambda$ fora do intervalo de contagem. Assume-se ainda, como fica evidente da equação (4.64), que $\lambda(t)$ assume um valor constante, λ , durante a medição. Neste novo calibre, a função de Green transformada obedece à seguinte equação:

$$\bar{G}^\lambda = \bar{g} + \bar{g}\bar{\Sigma}^\lambda\bar{G}^\lambda = \bar{g} + \bar{G}^\lambda\bar{\Sigma}^\lambda\bar{g}, \quad (4.65)$$

em que $\bar{\Sigma}^\lambda$ é a autoenergia transformada.

Como demonstrado por Macêdo na referência [63], a função característica dos cumulantes para o ponto quântico interagente acoplado aos guias é dada por:

$$\Phi(\lambda) = \text{Tr} \ln[1 + \bar{G}^\lambda(\bar{\Sigma}^\lambda - \bar{\Sigma})]. \quad (4.66)$$

Após discussão apresentada na referência [60], chega-se ao seguinte resultado:

$$\Phi(\lambda) = -\frac{t_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \text{Tr} \ln[1 + J_\lambda(E)A(E)], \quad (4.67)$$

sendo a função escalar $J_\lambda(E)$ definida como:

$$J_\lambda(E) = (e^{i\lambda} - 1)f_1(E)(1 - f_2(E)) + (e^{-i\lambda} - 1)f_2(E)(1 - f_1(E)) \quad (4.68)$$

e a matriz $A(E)$ dada por:

$$A(E) = \Gamma_1 G^r(E) \Gamma_2 G^a(E). \quad (4.69)$$

Para o caso não-interagente, pode-se usar o modelo de Mahaux-Weidenmüller para descrever a dinâmica do elétron na cavidade:

$$\Gamma_i = 2\pi W_i W_i^\dagger, \quad (4.70)$$

$$G^{r,a}(E) = [E - H \pm \frac{i}{2}(\Gamma_1 + \Gamma_2)]^{-1}, \quad (4.71)$$

$$t(E) = -2\pi i W_1^\dagger G^r(E) W_2. \quad (4.72)$$

Substituindo (4.70)-(4.72) em (4.67), obtém-se:

$$\Phi(\lambda) = -\frac{t_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \operatorname{Tr} \ln[\mathbf{1} + J_\lambda(E) t(E) t^\dagger(E)]. \quad (4.73)$$

4.2.1 Conexão com a Estatística de Contagem de Carga

A fim de usar a teoria de circuitos para calcular a estatística de contagem de carga para o caso de temperatura finita, deve-se definir a seguinte função:

$$q(\lambda) = i \frac{\partial S(\lambda)}{\partial \lambda} ; S(\lambda) \equiv \langle \Phi(\lambda) \rangle. \quad (4.74)$$

Inserindo (4.73) em (4.74), fica:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \left\langle \operatorname{Tr} \frac{J'_\lambda(E) t(E) t^\dagger(E)}{\mathbf{1} + J_\lambda(E) t(E) t^\dagger(E)} \right\rangle. \quad (4.75)$$

Em termos da função $h(z)$, definida como:

$$h(z) \equiv \left\langle \text{Tr} \left(\frac{t(E)t^\dagger(E)}{1 - zt(E)t^\dagger(E)} \right) \right\rangle, \quad (4.76)$$

a equação (4.75) pode ser reescrita como:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE J_\lambda(E) h[J_\lambda(E)]. \quad (4.77)$$

A condutância do caso interagente é dada pela fórmula de Landauer renormalizada:

$$g(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N \tau_n(\varepsilon) = \varepsilon^2 \left\langle \text{Tr} \frac{t(E)t^\dagger(E)}{1 - (1 - \varepsilon^2)t(E)t^\dagger(E)} \right\rangle. \quad (4.78)$$

De (4.76) e (4.78), segue que $g(\varepsilon)$ pode ser escrito como:

$$g(\varepsilon) = \varepsilon^2 h(z)|_{z=1-\varepsilon^2}. \quad (4.79)$$

Da equação (3.63), subseção 3.5.2, $h(z)$ e $K(x)$ — a pseudocorrente do sistema não-interagente a temperatura nula — relacionam-se por:

$$h(z) = \frac{2}{\sinh(2x)} K(x)|_{\cosh x = \sqrt{1-z}},$$

donde se obtém:

$$g(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} K(x) \Big|_{\cosh x = \varepsilon}. \quad (4.80)$$

Note-se, ainda, que:

$$\frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon = \sqrt{1+J_\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{J_\lambda(1+J_\lambda)}} K(x) \Big|_{\cosh x = \sqrt{1+J_\lambda}}. \quad (4.81)$$

Finalmente, chega-se à seguinte equação para a conexão entre a estatística de contagem de carga a temperatura finita e a teoria de circuitos a temperatura nula:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{J'_\lambda(E)}{\sqrt{J_\lambda(E)(1+J_\lambda(E))}} K(x) \Big|_{\cosh x = \sqrt{1+J_\lambda(E)}}. \quad (4.82)$$

A simplicidade dessa equação escalar deve ser contrastada com as equações correspondentes da teoria de Nazarov, que são matriciais. Na seção seguinte, a equação (4.82) é usada para calcular as funções de distribuição de alguns circuitos interessantes.

4.3 Estatística de Contagem de Alguns Casos de Interesse

Antes de resolver os exemplos propostos, convém listar algumas fórmulas úteis, envolvendo os cumulantes de $S(\lambda)$. Sendo $q_j \equiv \langle Q_j \rangle$, onde Q_j é o j -ésimo cumulante de $\Phi(\lambda)$, tem-se:

$$q_j = (-i)^j \frac{\partial^j S(\lambda)}{\partial \lambda^j} \Big|_{\lambda=0}. \quad (4.83)$$

De (4.74) e (4.83), vem:

$$q_1 = q(0), \quad (4.84)$$

$$q_2 = -i q'(0), \quad (4.85)$$

$$q_3 = -q'''(0) \quad (4.86)$$

e assim por diante. Os cumulantes da “corrente” são dados por:

$$\langle \tilde{I} \rangle = \frac{h}{t_0} q_1 ; \langle I \rangle = \frac{G_0}{e} \langle \tilde{I} \rangle ; G_0 = \frac{2e^2}{h}, \quad (4.87)$$

$$\langle \langle \tilde{I}^2 \rangle \rangle = \langle \tilde{I}^2 \rangle - \langle \tilde{I} \rangle^2 = \frac{h}{t_0} q_2 ; \langle I^2 \rangle = I_0 \frac{G_0}{e} \langle \langle \tilde{I}^2 \rangle \rangle ; I_0 = \frac{2e}{t_0}, \quad (4.88)$$

$$\langle \langle \tilde{I}^3 \rangle \rangle = \langle \tilde{I}^3 \rangle - 3 \langle \tilde{I} \rangle \langle \tilde{I}^2 \rangle + 2 \langle \tilde{I} \rangle^3 = \frac{h}{t_0} q_3 ; \langle I^3 \rangle = I_0^2 \frac{G_0}{e} \langle \langle \tilde{I}^3 \rangle \rangle. \quad (4.89)$$

As corrente I (sem o til) são as correntes físicas.

4.3.1 Ponto Quântico Conectado a Duas Junções de Tunelamento

Conforme demonstrado em (3.107), a pseudocorrente $K(x)$, neste caso, é dada por:

$$K(x) = \frac{NT_1T_2 \sinh 2x}{2 \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2 \cosh 2x}},$$

onde T_i é a transparência da i -ésima barreira. Inserindo essa equação em (4.82), obtém-se:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{NT_1T_2 J'_\lambda(E)}{\sqrt{(T_1 + T_2)^2 + 4T_1T_2 J_\lambda(E)}}, \quad (4.90)$$

donde segue, após integração, que:

$$S(\lambda) = -\frac{Nt_0}{2h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \sqrt{(T_1 + T_2)^2 + 4T_1T_2 J_\lambda(E)}. \quad (4.91)$$

Este resultado coincide com o obtido usando a teoria de circuitos de Nazarov, equação (4.39).

A fim de calcular os cumulantes, basta calcular as derivadas de $q(\lambda)$ em $\lambda = 0$.

Para q_1 , tem-se:

$$q_1 = q(0) = \frac{Nt_0}{h} \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \int dE (f_1(E) - f_2(E)), \quad (4.92)$$

donde segue que:

$$\langle \tilde{I} \rangle = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int dE (f_1(E) - f_2(E)), \quad (4.93)$$

em que se usou $G_i = NT_i$. Para q_2 , tem-se:

$$\begin{aligned} q_2 = -iq'(0) &= \frac{t_0 N T_1 T_2}{h} \int dE \left[\frac{f_1(E)(1 - f_2(E)) + f_2(E)(1 - f_1(E))}{T_1 + T_2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2T_1 T_2 (f_1(E) - f_2(E))^2}{(T_1 + T_2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Tem-se, para $\langle \langle \tilde{I}^2 \rangle \rangle$, a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \langle \langle \tilde{I}^2 \rangle \rangle &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int dE [f_1(E)(1 - f_2(E)) + f_2(E)(1 - f_1(E))] \\ &\quad - \frac{2G_1^2 G_2^2}{(G_1 + G_2)^3} \int dE [f_1(E) - f_2(E)]^2. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Por fim, vale notar que no limite $T = 0$, (4.91) fica:

$$S(\lambda) = \frac{-MN}{2} [\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + 4T_1 T_2 e^{i\lambda}} - (T_1 + T_2)], \quad (4.96)$$

já obtido em (3.112).

4.3.2 Ponto Quântico Conectado a Dois Contatos Ideais

Neste caso, como demonstrado no capítulo anterior, $K(x)$ é dado por:

$$K(x) = \frac{N_1 + N_2}{\pi} \left[1 - \sqrt{1 + \tanh^2 x \tanh^2 x_0} \right] \coth x, \quad (4.97)$$

onde $\tanh x_0 = \eta_0$; $\eta_0^2 = \frac{4a}{(a+1)^2}$. Tomando $N_1 = N = N_2$ e substituindo essa equação em (4.82), resulta:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} \int dE \frac{NJ'_\lambda(E)}{\sqrt{1 + J_\lambda(E)}(1 + \sqrt{1 + J_\lambda(E)})}, \quad (4.98)$$

que pode ser integrada em λ para dar:

$$S(\lambda) = -\frac{2Nt_0}{h} \int_{-\infty}^{\infty} dE \ln(1 + \sqrt{1 + J_\lambda(E)}). \quad (4.99)$$

Este resultado coincide com aquele obtido usando a teoria de circuitos de Nazarov, equação (4.46).

Como na subseção anterior, os cumulantes podem ser calculados diretamente de $q(\lambda)$:

$$q_1 = \frac{Nt_0}{2h} \int dE (f_1(E) - f_2(E)), \quad (4.100)$$

$$q_2 = \frac{Nt_0}{h} \int dE \left[\frac{f_1(E)(1 - f_2(E)) + f_2(E)(1 - f_1(E))}{2} - \left(\frac{3}{8} \right) (f_1(E) - f_2(E))^2 \right]. \quad (4.101)$$

De (4.100) e (4.101), vem:

$$\langle \tilde{I} \rangle = \frac{N}{2} \int dE (f_1(E) - f_2(E)), \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \langle \langle \tilde{I}^2 \rangle \rangle &= \frac{N}{2} \int dE [f_1(E)(1 - f_2(E)) + f_2(E)(1 - f_1(E))] \\ &\quad - \frac{3N}{8} \int dE [f_1(E) - f_2(E)]. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Por fim, verifica-se que no limite de temperatura nula (4.99) fica:

$$S(\lambda) = -2MN \ln [(e^{i\lambda} + 1)/2], \quad (4.104)$$

que é o resultado já obtido em (3.77).

4.3.3 Ponto Quântico Conectado a Duas Barreiras Simétricas

Conforme já calculado em (3.97):

$$K(x) = \frac{NT \sinh x}{2 - T + T \cosh x}, \quad (4.105)$$

que substituída em (4.82) leva a:

$$q(\lambda) = -\frac{it_0}{h} \int dE \frac{NT J'_\lambda(E)}{\sqrt{1 + J_\lambda(E)}(2 - T + T \sqrt{1 + J_\lambda(E)})}. \quad (4.106)$$

Note-se que este resultado coincide com o obtido usando a teoria de Nazarov, equação (4.52).

Para os dois primeiros cumulantes da distribuição, tem-se:

$$q_1 = \frac{Nt_0T}{2h} \int dE (f_1(E) - f_2(E)), \quad (4.107)$$

$$q_2 = \frac{Nt_0T}{2h} \left\{ \int dE [f_1(E)(1 - f_2(E)) + f_2(E)(1 - f_1(E))] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T}{2}\right) \int dE [f_1(E) - f_2(E)]^2 \right\}. \quad (4.108)$$

Além disso, obtém-se:

$$\langle \tilde{I} \rangle = \frac{NT}{2} \int dE (f_1(E) - f_2(E)), \quad (4.109)$$

$$\langle \langle \tilde{I}^2 \rangle \rangle = \frac{NT}{2} \left\{ \int dE [f_1(E)(1 - f_2(E)) + f_2(E)(1 - f_1(E))] \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{T}{2}\right) \int dE [f_1(E) - f_2(E)]^2 \right\}. \quad (4.110)$$

4.4 Interpretação Semiclássica

Como no caso de temperatura nula, espera-se que exista uma interpretação semiclássica para os resultados obtidos a temperatura finita. Uma das primeiras abordagens propostas neste sentido foi a de correlação mínima, de Beenakker *et al.* [64]. A abordagem de correlação mínima é um método semiclássico que se propõe a calcular todos os cumulantes da estatística de contagem de carga de cavidades caóticas no regime semiclássico. Este método — baseado na hipótese de que as flutuações da função de distribuição dos elétrons na cavidade e as flutuações da corrente que a atravessa estão relacionadas apenas através da condição de conservação do número de partículas — funciona bem até o segundo cumulante, mas chega a resultados incorretos a partir do terceiro.

Além das correlações impostas pela já citada conservação do número de elétrons, devem ser consideradas ainda as correções devidas aos cumulantes de ordens inferiores sobre os de ordens superiores, chamadas, por isso, de correções em cascata (do inglês, *cascade*). O “cascade approach” trata-se, então, de um método semiclássico poderoso que permite calcular os cumulantes da estatística de contagem de carga[65].

Conforme bem discutido na referência [66], o mecanismo de formação dessa cascata é o seguinte: as flutuações da função de distribuição na cavidade, que ocorrem na escala de tempo de permanência τ_d (ver equação (3.199)), são muito lentas na escala do tempo de correlação das flutuações da corrente. Dessa forma, as flutuações em f_c não afetam os cumulantes da corrente diretamente, mas há um efeito residual, que aparece exatamente nas correções dos cumulantes superiores devido à influência dos de ordem menor. Na referência [65], considera-se o limite $T = 0$ e mostra-se que o terceiro e o quarto cumulantes coincidem com o cálculo via teoria de circuitos de Nazarov. Aqui, demonstra-se que o terceiro cumulante da corrente a temperatura finita coincide com o resultado obtido através da teoria de circuitos estendida. Embora o cálculo não seja realizado aqui, espera-se que o quarto cumulante a T finita do “cascade approach” concorde com o obtido usando uma abordagem quanto-mecânica.

O sistema tratado é o mesmo da figura (3.8), em que uma cavidade caótica é acoplada a dois reservatórios de elétrons através de contatos de transparências Γ_i , $i = 1, 2$. Assume-se que os elétrons têm suas fases aleatorizadas ao entrarem na cavidade, de modo que a função de distribuição na cavidade dependa apenas da energia. Dessa forma, a cavidade é considerada como um sistema essencialmente

semiclássico, com função de distribuição média dada por:

$$f_c(\varepsilon) = \frac{G_1}{G_1 + G_2} f_1(\varepsilon) + \frac{G_2}{G_1 + G_2} f_2(\varepsilon). \quad (4.111)$$

Os reservatórios são fontes independentes de ruído descritos pelas funções características de Levitov-Lesovik (eq. 2.21):

$$\begin{aligned} \chi_j(\lambda, t) = & \exp \left\{ \frac{tN_j}{h} \int d\varepsilon \ln [1 + (e^{i\lambda} - 1)\Gamma_j f_c(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon)) \right. \\ & \left. + (e^{-i\lambda} - 1)\Gamma_j f_j(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon))] \right\} ; j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Os cumulantes da estatística de contagem dos elétrons transmitidos através do contato j são definidos pela expansão:

$$\Phi_j(\lambda, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!} Q_k^{(j)}(t) = - \ln \chi_j(\lambda, t), \quad (4.113)$$

de modo que:

$$Q_k^{(j)}(t) = - \frac{\partial^k}{\partial (i\lambda)^k} \Phi_j(\lambda, t)|_{\lambda=0}, \quad (4.114)$$

onde Q_k indica o cumulante de ordem k . O primeiro cumulante fica, então:

$$Q_1^{(j)}(t) = i \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi_j(\lambda, t)|_{\lambda=0} = \frac{tN_j\Gamma_j}{h} \int d\varepsilon (f_c(\varepsilon) - f_j(\varepsilon)). \quad (4.115)$$

A corrente de ruído média é definida como:

$$\langle \tilde{I}_j \rangle = \frac{Q_1^{(j)}(t)}{t/h} = G_j \int d\varepsilon (f_c(\varepsilon) - f_j(\varepsilon)) ; G_j \equiv N_j \Gamma_j \quad (4.116)$$

que pode ser reescrita como:

$$\langle \tilde{I}_j \rangle = \int d\varepsilon \langle \tilde{I}_j \rangle_\varepsilon, \quad (4.117)$$

$$\langle \tilde{I}_j \rangle_\varepsilon = G_j (f_c(\varepsilon) - f_j(\varepsilon)). \quad (4.118)$$

O segundo cumulante é dado por:

$$Q_2^{(j)}(t) = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Phi_j(\lambda, t)|_{\lambda=0} = \frac{t}{h} \langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle = \frac{t}{h} \left(\langle \tilde{I}_j^2 \rangle - \langle \tilde{I}_j \rangle^2 \right), \quad (4.119)$$

onde:

$$\langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle = \int d\varepsilon \langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle_\varepsilon \quad (4.120)$$

e

$$\langle \langle \tilde{I}_j^2 \rangle \rangle_\varepsilon = G_j [f_j(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon)) + f_c(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon)) - \Gamma_j(f_j(\varepsilon) - f_c(\varepsilon))^2]. \quad (4.121)$$

A conservação de carga implica flutuações de baixas frequências da função de distribuição na cavidade, f_c , de modo que as flutuações de corrente são dadas por:

$$\delta I_j = \tilde{I}_j + G_j \Delta f_c, \quad (4.122)$$

com $\Delta f_c = \int d\varepsilon \delta f_c(\varepsilon)$. A conservação da corrente leva a:

$$\delta I_1 + \delta I_2 = 0. \quad (4.123)$$

Inserindo (4.122) em (4.123), obtém-se

$$\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + (G_1 + G_2) \Delta f_c = 0, \quad (4.124)$$

donde:

$$\Delta f_c = -\frac{\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2}{G_1 + G_2}. \quad (4.125)$$

Substituindo (4.125) em (4.122), resulta:

$$\delta I_1 = \tilde{I}_1 - \frac{G_1}{G_1 + G_2}(\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2) = \frac{G_2 \tilde{I}_1 - G_1 \tilde{I}_2}{G_1 + G_2}, \quad (4.126)$$

$$\delta I_2 = \frac{G_1 \tilde{I}_2 - G_2 \tilde{I}_1}{G_1 + G_2}. \quad (4.127)$$

As equações (4.126) e (4.127) levam a:

$$\langle \delta I_1 \rangle = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_1 \rangle - \frac{G_1}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_2 \rangle \quad (4.128)$$

$$\langle \delta I_2 \rangle = \frac{G_1}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_2 \rangle - \frac{G_2}{G_1 + G_2} \langle \tilde{I}_1 \rangle \quad (4.129)$$

Inserindo (4.116) nas equações (4.129), vem:

$$\langle \delta I_1 \rangle = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int d\varepsilon (f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)) \quad (4.130)$$

$$\langle \delta I_2 \rangle = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int d\varepsilon (f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)) = -\langle \delta I_1 \rangle. \quad (4.131)$$

que são expressões similares à fórmula de Landauer, onde $G_1 G_2 / (G_1 + G_2)$ é justamente a condutância adimensional do sistema:

$$g = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}. \quad (4.132)$$

Sendo $G_1 = N\Gamma_1$ e $G_2 = N\Gamma_2$, obtém-se:

$$g = N \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (4.133)$$

De (4.129), pode-se mostrar que:

$$\langle (\delta I_1)^2 \rangle = \frac{1}{(G_1 + G_2)^2} \left(G_2^2 \langle \tilde{I}_1^2 \rangle + G_1^2 \langle \tilde{I}_2^2 \rangle - 2G_1 G_2 \langle \tilde{I}_1 \rangle \langle \tilde{I}_2 \rangle \right), \quad (4.134)$$

$$\langle (\delta I_2)^2 \rangle = \frac{1}{(G_1 + G_2)^2} \left(G_2^2 \langle \tilde{I}_1^2 \rangle + G_1^2 \langle \tilde{I}_2^2 \rangle - 2G_1 G_2 \langle \tilde{I}_1 \rangle \langle \tilde{I}_2 \rangle \right), \quad (4.135)$$

em que foi empregada a independência de $\tilde{I}_j$, $j = 1, 2$, como fontes de ruído:

$$\langle \tilde{I}_1 \tilde{I}_2 \rangle = \langle \tilde{I}_1 \rangle \langle \tilde{I}_2 \rangle. \quad (4.136)$$

Assim, o **segundo cumulante**, definido como:

$$\langle \langle (\delta I_1)^2 \rangle \rangle \equiv \langle (\delta I_1)^2 \rangle - \langle \delta I_1 \rangle^2, \quad (4.137)$$

fica:

$$\langle \langle (\delta I_1)^2 \rangle \rangle = \frac{G_2^2 \langle \tilde{I}_1^2 \rangle + G_1^2 \langle \tilde{I}_2^2 \rangle}{(G_1 + G_2)^2}. \quad (4.138)$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$\langle \langle (\delta I_1)^2 \rangle \rangle = \int d\varepsilon \langle \langle (\delta I_1)^2 \rangle \rangle_\varepsilon, \quad (4.139)$$

onde:

$$\langle \langle (\delta I_1)^2 \rangle \rangle_\varepsilon = \left(\frac{G_2}{G_1 + G_2} \right)^2 \langle \langle \tilde{I}_1^2 \rangle \rangle_\varepsilon + \left(\frac{G_1}{G_1 + G_2} \right)^2 \langle \langle \tilde{I}_2^2 \rangle \rangle_\varepsilon, \quad (4.140)$$

sendo $\langle\langle\tilde{I}_1^2\rangle\rangle_\varepsilon$ e $\langle\langle\tilde{I}_2^2\rangle\rangle_\varepsilon$ dados, por sua vez, por:

$$\langle\langle\tilde{I}_1^2\rangle\rangle_\varepsilon = G_1[f_1(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon)) + f_c(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon)) - \Gamma_1(f_1(\varepsilon) - f_c(\varepsilon))^2], \quad (4.141)$$

$$\langle\langle\tilde{I}_2^2\rangle\rangle_\varepsilon = G_2[f_2(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon)) + f_c(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) - \Gamma_2(f_2(\varepsilon) - f_c(\varepsilon))^2]. \quad (4.142)$$

Inserindo (4.111) em (4.141) e (4.142), pode-se mostrar que:

$$\begin{aligned} \langle\langle\tilde{I}_1^2\rangle\rangle_\varepsilon &= \frac{2G_1^2}{G_1 + G_2} f_1(1 - f_1) + \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} [f_1(1 - f_2) + f_2(1 - f_1)] \\ &\quad - \frac{G_1 \Gamma_1 G_2^2}{(G_1 + G_2)^2} (f_1 - f_2)^2, \end{aligned} \quad (4.143)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle\tilde{I}_2^2\rangle\rangle_\varepsilon &= \frac{2G_2^2}{G_1 + G_2} f_2(1 - f_2) + \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} [f_1(1 - f_2) + f_2(1 - f_1)] \\ &\quad - \frac{G_2 \Gamma_2 G_1^2}{(G_1 + G_2)^2} (f_1 - f_2)^2. \end{aligned} \quad (4.144)$$

Assim, $\langle\langle(\delta\tilde{I}_1)^2\rangle\rangle_\varepsilon$ é dado por:

$$\begin{aligned} \langle\langle(\delta\tilde{I}_1)^2\rangle\rangle_\varepsilon &= \frac{2G_1^2 G_2^2}{(G_1 + G_2)^3} [f_1(1 - f_1) + f_2(1 - f_2)] \\ &\quad + \frac{G_1 G_2 (G_1^2 + G_2^2)}{(G_1 + G_2)^3} [f_1(1 - f_2) + f_2(1 - f_1)] \\ &\quad - \frac{G_1 G_2 (\Gamma_1 G_2^3 + \Gamma_2 G_1^3)}{(G_1 + G_2)^4} (f_1 - f_2)^2. \end{aligned} \quad (4.145)$$

Substituindo (4.145) em (4.139), resulta:

$$\begin{aligned} \langle\langle(\delta\tilde{I}_1)^2\rangle\rangle &= \frac{2G_1^2G_2^2}{(G_1+G_2)^3} \int d\varepsilon [f_1(1-f_1) + f_2(1-f_2)] \\ &+ \frac{G_1G_2(G_1^2+G_2^2)}{(G_1+G_2)^3} \int d\varepsilon [f_1(1-f_2) + f_2(1-f_1)] \\ &- \frac{G_1G_2(\Gamma_1G_2^2+\Gamma_2G_1^3)}{(G_1+G_2)^4} \int d\varepsilon (f_1-f_2)^2. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Após alguma álgebra, (4.146) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \langle\langle(\delta\tilde{I}_1)^2\rangle\rangle &= \frac{G_1G_2}{G_1+G_2} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon)(1-f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1-f_1(\varepsilon))] \\ &- \frac{G_1G_2[G_1^2(2G_2+\Gamma_2G_1)+G-2^2(2G_1+\Gamma_1G_2)]}{(G_1+G_2)^4} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)]^2. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Convém considerar, agora, casos particulares desta equação.

- Junções de Tunelamento: $\Gamma_2G_1 \ll 2G_2$, $\Gamma_1G_2 \ll 2G_1$

Neste caso, a equação (4.147) reduz-se a:

$$\begin{aligned} \langle\langle(\delta\tilde{I}_1)^2\rangle\rangle &= \frac{N}{2} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon)(1-f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1-f_1(\varepsilon))] \\ &- \frac{3N}{8} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)]^2, \end{aligned} \quad (4.148)$$

em perfeito acordo com a equação (4.95), obtido via teoria de circuitos.

- Contatos Ideais: $G_1 = N = G_2$, pois $\Gamma_1 = \Gamma = \Gamma_2$

Neste caso, tem-se:

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle (\delta \tilde{I}_1)^2 \right\rangle \right\rangle &= \frac{N}{2} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon))] \\ &- \frac{3N}{8} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]^2, \end{aligned} \quad (4.149)$$

em acordo com a equação (4.103).

- Barreiras Simétricas de Transparências Arbitrárias: $G_1 = N\Gamma = G_2$

Por fim, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left\langle \left\langle (\delta \tilde{I}_1)^2 \right\rangle \right\rangle &= \frac{NT}{2} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon))] \\ &- \frac{NT(2 + T)}{8} \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]^2, \end{aligned} \quad (4.150)$$

em perfeita concordância com o resultado obtido em (4.110).

Para obter o **terceiro cumulante**, toma-se $k = 3$ em (4.114):

$$Q_3^j(t) = -i \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} \Phi_j(\lambda, t) \Big|_{\lambda=0} = \frac{t}{h} \left\langle \left\langle \tilde{I}_j^3 \right\rangle \right\rangle, \quad (4.151)$$

onde:

$$\left\langle \left\langle \tilde{I}_j^3 \right\rangle \right\rangle \equiv \left\langle \tilde{I}_j^3 \right\rangle - 3 \left\langle \tilde{I}_j \right\rangle \left\langle \tilde{I}_j^2 \right\rangle + 2 \left\langle \tilde{I}_j \right\rangle^3. \quad (4.152)$$

A equação (4.152) pode ser reescrita como:

$$\left\langle \left\langle \tilde{I}_j^3 \right\rangle \right\rangle = \int d\varepsilon \left\langle \left\langle \tilde{I}_j^3 \right\rangle \right\rangle_\varepsilon, \quad (4.153)$$

sendo $\langle\langle\tilde{I}_j^3\rangle\rangle_\varepsilon$ dado por:

$$\begin{aligned} \langle\langle\tilde{I}_j^3\rangle\rangle_\varepsilon &= G_j(f_c(\varepsilon) - f_j(\varepsilon)) \{1 - 3\Gamma_j[f_c(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon)) + f_j(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon))] \\ &+ 2\Gamma_j^2(f_c(\varepsilon) - f_j(\varepsilon))^2\}. \end{aligned} \quad (4.154)$$

O valor de correlação mínima, que se relaciona com a conservação da corrente, é dado por:

$$\langle\langle(\delta I_1)^3\rangle\rangle_{cm} = \frac{G_2^3 \langle\langle\tilde{I}_1^3\rangle\rangle - G_1^3 \langle\langle\tilde{I}_2^3\rangle\rangle}{(G_1 + G_2)^3}, \quad (4.155)$$

que, como já enfatizado no início dessa seção, não é capaz de descrever todas as correlações quânticas residuais. Como demonstrado na referência [65], existe uma correção em cascata relacionada às flutuações de $f_c(\varepsilon)$:

$$\langle\langle(\delta I_1)^3\rangle\rangle_{cascata} = 3 \int \frac{\delta \langle\langle(\delta I_1)^2\rangle\rangle}{\delta f_c(\varepsilon)} \langle\delta f_c(\varepsilon) \delta I_1\rangle, \quad (4.156)$$

onde o δ em (4.156) indica derivação funcional. O terceiro cumulante total é, assim, dado por:

$$\langle\langle(\delta I_1)^3\rangle\rangle = \langle\langle(\delta I_1)^3\rangle\rangle_{cm} + \langle\langle(\delta I_1)^3\rangle\rangle_{cascata}. \quad (4.157)$$

Da equação (4.140), obtém-se:

$$\frac{\delta \langle\langle(\delta I_1)^2\rangle\rangle_\varepsilon}{\delta f_c(\varepsilon)} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \{G_1[1 - 2f_2(\varepsilon) + 2\Gamma_2(f_2(\varepsilon) - f_c(\varepsilon))] \quad (4.158)$$

$$+ G_2[1 - 2f_1(\varepsilon) + 2\Gamma_1(f_1(\varepsilon) - f_c(\varepsilon))]\}. \quad (4.159)$$

Das equações (4.125):

$$\delta f_c(\varepsilon) = -\frac{1}{G_1 + G_2}[(\tilde{I}_1)_\varepsilon + (\tilde{I}_2)_\varepsilon] \quad (4.160)$$

e (4.126):

$$(\delta I_1)_\varepsilon = \frac{G_2}{G_1 + G_2}(\tilde{I}_1)_\varepsilon - \frac{G_1}{G_1 + G_2}(\tilde{I}_2)_\varepsilon, \quad (4.161)$$

juntamente com a definição:

$$\langle\langle\delta f_c(\varepsilon)\delta I_1\rangle\rangle_\varepsilon = \langle\delta f_c(\varepsilon)(\delta I_1)_\varepsilon\rangle - \langle\delta f_c(\varepsilon)\rangle\langle(\delta I_1)_\varepsilon\rangle, \quad (4.162)$$

obtém-se:

$$\langle\langle\delta f_c(\varepsilon)\delta I_1\rangle\rangle_\varepsilon = \frac{G_1}{G_1 + G_2}\langle\langle\tilde{I}_2^2\rangle\rangle_\varepsilon - \frac{G_2}{G_1 + G_2}\langle\langle\tilde{I}_1^2\rangle\rangle_\varepsilon. \quad (4.163)$$

$\langle\langle\tilde{I}_j^2\rangle\rangle_\varepsilon$ aparecendo e nessa equação é dado por:

$$\langle\langle\tilde{I}_j^2\rangle\rangle_\varepsilon = G_j[f_j(\varepsilon)(1 - f_c(\varepsilon)) + f_c(\varepsilon)(1 - f_j(\varepsilon)) - \Gamma_j(f_j(\varepsilon) - f_c(\varepsilon))^2]. \quad (4.164)$$

Isto tudo pode ser rearranjado usando o Maple para obter:

$$\begin{aligned} \langle\langle(\delta I_1)^3\rangle\rangle &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \int d\varepsilon [f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)] + \\ &- \frac{3G_1 G_2}{(G_1 + G_2)^4} [G_1^2(2G_2 + \Gamma_2 G_1) + G_2^2(2G_1 + \Gamma_1 G_2)] \\ &\times \int d\varepsilon \{(f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon))[f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon))]\} \\ &+ \frac{2G_1 G_2}{(G_1 + G_2)^7} [\Gamma_2^2 G_1^6 + \Gamma_1^2 G_2^6 + 2\Gamma_2(3 - \Gamma_2)G_2 G_1^5 + 2\Gamma_1(3 - \Gamma_1)G_1 G_2^5 \\ &+ 3(2 + \Gamma_2)G_2^2 G_1^4 + 3(2 + \Gamma_1)G_1^2 G_2^4 + 3(4 - \Gamma_1 - \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \Gamma_2)G_1^3 G_2^3] \\ &\times \int d\varepsilon [f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)]^3. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Para o caso particular em que as barreiras têm o mesmo número de canais, $G_1 = N\Gamma_1$

e $G_2 = N\Gamma_2$, resulta:

$$\begin{aligned}
\langle\langle(\delta I_1)^3\rangle\rangle &= \frac{N\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \int d\varepsilon [f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)] \\
&- \frac{3N\Gamma_1^2\Gamma_2^2}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^4} [\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2(\Gamma_1 + \Gamma_2)] \\
&\times \int d\varepsilon \{(f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon))[f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon))]\} \\
&+ \frac{2N\Gamma_1^3\Gamma_2^3}{(\Gamma_1 + \Gamma_2)^7} [\Gamma_1^4 + \Gamma_2^4 + 6\Gamma_1^2\Gamma_2^2 - 2\Gamma_1\Gamma_2(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2) + 6(\Gamma_1^3 + \Gamma_2^3) + 6(\Gamma_1 + \Gamma_2)^2] \\
&\times \int d\varepsilon [f_2(\varepsilon) - f_1(\varepsilon)]^3,
\end{aligned} \tag{4.166}$$

que concorda com o resultado obtido em (4.173).

4.5 Cálculo dos Cumulantes

Em determinadas situações, o cálculo da função $S(\lambda) = \langle\Phi(\lambda)\rangle$ é bastante complicado. Entretanto, mesmo nesses casos é possível calcular os cumulantes da estatística de contagem de carga. A partir da equação (4.73) é possível expressar os cumulantes da corrente como:

$$\langle \tilde{I} \rangle = \sum_n \langle \tau_n \rangle \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)], \quad (4.167)$$

$$\begin{aligned} \langle \langle \tilde{I}^2 \rangle \rangle &= \sum_n \langle \tau_n \rangle \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon))] \\ &\quad - \sum_n \langle \tau_n^2 \rangle \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]^2, \end{aligned} \quad (4.168)$$

$$\begin{aligned} \langle \langle \tilde{I}^3 \rangle \rangle &= \sum_n \langle \tau_n \rangle \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)] \\ &\quad - 3 \sum_n \langle \tau_n^2 \rangle \int d\varepsilon \{ (f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)) [f_1(\varepsilon)(1 - f_2(\varepsilon)) + f_2(\varepsilon)(1 - f_1(\varepsilon))] \} \\ &\quad + 2 \sum_n \langle \tau_n^3 \rangle \int d\varepsilon [f_1(\varepsilon) - f_2(\varepsilon)]^3, \end{aligned} \quad (4.169)$$

onde τ_n são os autovalores de $tt^\dagger$. Além disso, $g_k \equiv \sum_n \langle \tau_n^k \rangle$ relaciona-se com a pseudocorrente $K(x)$ através da expressão:

$$g_{k+1} = \frac{(-1)^k 2^{k+1}}{k!} \frac{d^k}{d(\cos 2x)^k} \frac{K(x)}{\sinh 2x} \Big|_{x=0}; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.170)$$

Para barreiras com mesmo número de canais de transmissão, N , e transparências arbitrárias, T_1 e T_2 , mostra-se usando a teoria de circuitos que:

$$g_1 = N \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \quad (4.171)$$

$$g_2 = N \frac{T_1^2 T_2^2}{(T_1 + T_2)^4} [T_1^2 + T_2^2 + 2(T_1 + T_2)], \quad (4.172)$$

$$g_3 = N \frac{T_1^3 T_2^3}{(T_1 + T_2)^7} [T_1^4 + T_2^4 + 6T_1^2 T_2^2 - 2T_1 T_2 (T_1^2 + T_2^2) + 6(T_1^3 + T_2^3) + 6(T_1 + T_2)^2]. \quad (4.173)$$

Tomando $f_1(\varepsilon) = [e^{\beta(\varepsilon - eV)} + 1]^{-1}$ e $f_2(\varepsilon) = [e^{\beta\varepsilon} + 1]^{-1}$, as integrais aparecendo nas equações (4.167)-(4.169) podem ser calculadas usando o Maple para dar:

$$\langle I \rangle = g_1 G_0 V = GV ; G \equiv G_0 g_1, \quad (4.174)$$

$$\langle I^2 \rangle = I_0 G_0 V (g_1 - g_2) \coth\left(\frac{\beta eV}{2}\right) + 2I_0 G_0 g_2 \left(\frac{k_B T}{e}\right). \quad (4.175)$$

Convém, agora, analisar alguns limites da equação (4.175). No limite de baixas temperaturas, $eV \gg k_B T$, tem-se:

$$\coth(\beta eV/2) \approx 1$$

$$\therefore \langle I^2 \rangle = I_0 G_0 V (g_1 - g_2) = \frac{4e^3 V}{ht_0} (g_1 - g_2), \quad (4.176)$$

que é proporcional ao ruído de disparo obtido em (1.65), bastando substituir $g_1 = \sum_n \langle \tau_n \rangle$ e $g_2 = \sum_n \langle \tau_n^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} g_1 - g_2 &= \sum_n \langle \tau_n (1 - \tau_n) \rangle \\ \therefore \langle I^2 \rangle &= \frac{4e^3 V}{ht_0} \sum_n \langle \tau_n (1 - \tau_n) \rangle. \end{aligned} \quad (4.177)$$

Para temperaturas altas, $k_B T \gg eV$, tem-se $\coth\left(\frac{eV}{2k_B T}\right) \approx \frac{2k_B T}{eV} + \frac{1}{3} \left(\frac{eV}{2k_B T}\right) + \dots$:

$$\langle \langle I^2 \rangle \rangle \approx \frac{4k_B T}{eV} I_0 G_0 V g_1 = \frac{4k_B T}{t_0} G, \quad (4.178)$$

que é proporcional ao ruído térmico obtido em (1.63).

Por fim, considera-se o terceiro cumulante, $\langle \langle I^3 \rangle \rangle$. Repetindo o procedimento

anterior, obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle\langle I^3 \rangle\rangle &= I_0^2 G_0 g_1 V - \frac{3I_0^2 G_0}{e} g_2 \left[eV \coth^2 \left(\frac{\beta eV}{2} \right) - 2k_B T \coth \left(\frac{\beta eV}{2} \right) \right] \\ &+ \frac{2I_0^2 G_0}{e} g_3 \left[eV \coth^2 \left(\frac{\beta eV}{2} \right) + \frac{eV}{2} \operatorname{cosech}^2 \left(\frac{\beta eV}{2} \right) \right. \\ &\left. - 3k_B T \coth \left(\frac{\beta eV}{2} \right) \right] ; \beta \equiv \frac{1}{k_B T}. \end{aligned} \quad (4.179)$$

No limite de temperaturas baixas, onde $eV \gg k_B T$, vale a aproximação $\coth \left(\frac{\beta eV}{2} \right) \approx 1$ e $\operatorname{cosech}^2 \left(\frac{\beta eV}{2} \right) \approx 0$ e assim:

$$\langle\langle I^3 \rangle\rangle \approx I_0^2 G_0 (g_1 - 3g_2 + 2g_3) V = \frac{8e^3 V}{ht_0^2} (g_1 - 3g_2 + 2g_3) \quad (4.180)$$

e, para temperaturas altas, onde $eV \ll k_B T$, tem-se $\coth \left(\frac{\beta eV}{2} \right) \approx \frac{2k_B T}{eV} + \frac{eV}{6k_B T}$ e $\operatorname{cosech}^2 \left(\frac{\beta eV}{2} \right) \approx \frac{2k_B T}{eV} - \frac{eV}{12k_B T}$:

$$\langle\langle I^3 \rangle\rangle \approx I_0^2 G_0 (g_1 - g_2) V = \frac{8e^3 V}{ht_0^2} (g_1 - g_2). \quad (4.181)$$

Assim, o terceiro cumulante aproxima-se de uma constante à medida que a temperatura aumenta, podendo ser usado para medir a carga efetiva dos portadores da corrente elétrica. Na verdade, esta é uma propriedade de todos os cumulantes de ordem ímpar, como destacado na referência [67].

Por fim, no equilíbrio, as funções de distribuição são dadas por $f_1 = f = f_2$; $f = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} + 1}$, donde:

$$f(1 - f) = -k_B T \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \quad (4.182)$$

que substituído em (4.167)-(4.169) leva a:

$$\langle I \rangle = 0, \quad (4.183)$$

$$\langle\langle I^2 \rangle\rangle = \frac{4k_B T}{t_0} G, \quad (4.184)$$

$$\langle\langle I^3 \rangle\rangle = 0. \quad (4.185)$$

A equação (4.184) é claramente a expressão do teorema da flutuação-dissipação no sistema, ao passo que $\langle I \rangle = 0 = \langle\langle I^3 \rangle\rangle$ é decorrente do seguinte: como as funções de correlação ímpares da corrente dependem de seu valor absoluto e também de sua direção, elas mudam de sinal sob reversão temporal. Sendo o sistema invariante sob reversão temporal, segue que todas as funções de correlação de ordem ímpar são nulas no equilíbrio térmico.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Nesta dissertação, aplicamos uma versão estendida da teoria de circuitos de Nazarov ao estudo da estatística de contagem de carga de pontos quânticos conectados a barreiras de transparências arbitrárias. Até recentemente, este estudo havia se restringido a alguns casos particulares, como o de pontos conectados a contatos ideais, uma vez que a utilização da teoria de Nazarov no caso geral não havia sido justificada. Estudamos nos capítulos 3 e 4 os limites de temperatura nula e de temperatura finita, respectivamente, reobtendo resultados originalmente derivados usando a versão de Nazarov da teoria de circuitos e obtendo alguns resultados novos.

No capítulo 3 apresentamos o formalismo de temperatura nula, baseado no modelo sigma não-linear supersimétrico. Este modelo permite calcular as relações fase-corrente para os diferentes tipos de conectores a partir de uma teoria microscópica. Os resultados obtidos neste capítulo são interpretados através de processos estocásticos clássicos. No caso de junções de tunelamento, esta interpretação é possível se considerarmos que o elétron possui taxas clássicas de transição. Entretanto, no caso de barreiras simétricas de transparência arbitrária, é necessário

usar um método baseado em integrais de trajetória estocásticas. A estatística de contagem, neste caso, é dada pela aproximação de ponto de sela dessa integral de trajetória, cujas flutuações são suprimidas no regime semiclássico.

Ainda a temperatura nula, discutimos o surgimento do expoente $2/3$ na função característica dos cumulantes, $S(\lambda)$. Esse expoente ocorre exatamente sobre as linhas de transição de um diagrama de fases recentemente descoberto. Esta transição — que está associada à formação de modos de Fabry-Perot entre as barreiras — pode ser explicada como resultado de um processo que é a mistura estatística equilibrada de processos de um e de dois passos.

No capítulo 4, em que foram tratados os efeitos de temperatura finita, apresentamos, em linhas gerais, a teoria de circuitos de Nazarov. Esta teoria tem natureza matricial, sendo a resolução de problemas simples uma tarefa por vezes complexa. Isto deve ser contrastado com sua contrapartida escalar, que é muito mais simples e tem função geratriz calculada diretamente da pseudocorrente, $K(x)$, a temperatura nula. Em seguida, usamos a versão escalar para calcular a estatística de contagem de algumas situações de interesse físico. Discutimos, ainda, uma interpretação semiclássica bastante útil, o *cascade approach*, que permite calcular os cumulantes da estatística de contagem de carga sem a necessidade de conhecer sua função geratriz. Nesse método, o efeito residual das flutuações da função de distribuição dos elétrons na cavidade é levado em conta através das correções dos cumulantes de ordens inferiores sobre os de ordens superiores, conhecidas como correções em cascata. Encerrando a dissertação, introduzimos um método de cálculo dos cumulantes da estatística de contagem que prescinde do conhecimento da função geratriz, com o qual encontramos os cumulantes da corrente de um ponto quântico conectado a barreiras de transparências arbitrárias.

Uma perspectiva imediata de nosso trabalho é o cálculo do quarto cumulante da corrente a temperatura finita, o que pode ser feito no contexto das correções em cascata ou no da teoria de circuitos. Prováveis desenvolvimentos futuros incluem a extensão da teoria de circuitos para sistemas em que os reservatórios podem estar em outros estados da matéria condensada, como ferromagnetos, por exemplo. (Isto já foi feito para supercondutores, em particular.) Além disso, a aplicação do formalismo para sistemas multiterminais é desejável.

Apêndice A

Teoria de Processos Estocásticos

Markovianos

Seja $P(Q, t)$ a distribuição de probabilidade de um processo markoviano arbitrário. Em termos de $P(Q, t + \delta t \mid Q_0)$, que é uma densidade de probabilidade condicional, $P(Q, t)$ pode ser escrita como:

$$P(Q, t + \delta t) = \int dQ_0 P(Q, t + \delta t \mid Q_0) P_0(Q_0), \quad (\text{A.1})$$

onde $P(Q, t + \delta t \mid Q_0)$ obedece à equação de Chapman-Kolmogorov:

$$P(Q, t + \delta t \mid Q_0) = \int dQ_1 P(Q, t + \delta t \mid Q_1) P(Q_1, t \mid Q_0), \quad (\text{A.2})$$

Fazendo $t = N\delta t$, a equação (A.2) fica:

$$\begin{aligned} P(Q, t \mid Q_0) &= \int dQ_{N-1} \int dQ_{N-2} \dots \int dQ_1 P(Q, \delta t \mid Q_{N-1}) \\ &\times P(Q_{N-1}, \delta t \mid Q_{N-2}) \dots P(Q, \delta t \mid Q_0), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

que substituída na equação (A.1) leva a:

$$\begin{aligned} P(Q, t) &= \int dQ_{N-1} \int dQ_{N-2} \dots \int dQ_0 P(Q, \delta t \mid Q_{N-1}) \\ &\times P(Q_{N-1}, \delta t \mid Q_{N-2}) \dots P(Q, \delta t \mid Q_0) P_0(Q_0). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

No limite em que $N \rightarrow \infty$ e $\delta t \rightarrow 0$, obtém-se a equação de Kramers-Moyal:

$$\frac{\partial P(Q, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial Q} \right)^k D^{(k)}(Q, t) P(Q, t), \quad (\text{A.5})$$

onde $D^{(k)}(Q, t)$ são coeficientes arbitrários.

A.1 Casos Especiais da Equação de Kramers-Moyal

A.1.1 Equação de Fokker-Planck

A equação de Fokker-Planck é obtida da equação (A.5) fazendo $D^{(k \geq 3)}(Q, t) = 0$, de modo que:

$$\frac{\partial P(Q, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial Q} D^{(1)}(Q, t) + \frac{\partial^2}{\partial Q^2} D^{(2)}(Q, t) \right] P(Q, t). \quad (\text{A.6})$$

A.1.2 Equação Mestra para Processos de um Passo

A equação mestra para processos de um passo pode ser obtida da equação (A.5) tomando:

$$D^{(k)}(Q, t) = \frac{q^k}{k!} [\gamma(Q, t) + (-1)^k \xi(Q, t)], \quad (\text{A.7})$$

donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\left(-q \frac{\partial}{\partial Q} \right)^k \gamma(Q, t) P(Q, t) + \left(q \frac{\partial}{\partial Q} \right)^k \xi(Q, t) P(Q, t) \right] \\ \therefore \frac{\partial P}{\partial t} &= \left(e^{-q \frac{\partial}{\partial Q}} - 1 \right) \gamma(Q, t) P(Q, t) + \left(e^{q \frac{\partial}{\partial Q}} - 1 \right) \xi(Q, t) P(Q, t). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Usando a identidade:

$$e^{\pm q \frac{\partial}{\partial Q}} f(Q) = f(Q \pm q), \quad (\text{A.9})$$

obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \gamma(Q - q, t) P(Q - q, t) + \xi(Q + q, t) P(Q + q, t) \\ &- [\gamma(Q, t) + \xi(Q, t)] P(Q, t). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Se Q assumir apenas valores discretos, $Q = nq$, pode-se escrever:

$$\begin{cases} \gamma_n(t) &\equiv \gamma(Q = nq, t) \\ P_n(t) &\equiv P(Q = nq, t) \\ \xi_n(t) &\equiv \xi(Q = nq, t) \end{cases}, \quad (\text{A.11})$$

que inseridas na equação (A.10) levam a:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \gamma_{n-1}(t) P_{n-1}(t) + \xi_{n+1}(t) P_{n+1}(t) - [\gamma_n(t) + \xi_n(t)] P_n(t). \quad (\text{A.12})$$

A equação (A.12) pode ser colocada na forma mais familiar da equação mestra, bastando definir a matriz de transição $W_{nn'}(t)$:

$$W_{nn'}(t) \equiv \xi_{n'}(t) \delta_{n, n'-1} + \gamma_{n'}(t) \delta_{n, n'+1} - \delta_{nn'} [\xi_n(t) + \gamma_n(t)]. \quad (\text{A.13})$$

Usando as equações (A.12) e (A.13), chega-se a:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_{n'} W_{nn'}(t) P_{n'}(t). \quad (\text{A.14})$$

Decompondo $W_{nn'}(t)$ em termos das taxas de transição $\mathcal{W}_{nn'}(t)$:

$$W_{nn'}(t) = \mathcal{W}_{nn'}(t) - \delta_{nn'} \sum_{n''} \mathcal{W}_{n''n}(t), \quad (\text{A.15})$$

a equação (A.14) fica:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_{n'} (\mathcal{W}_{nn'}(t) P_{n'}(t) - \mathcal{W}_{n'n}(t) P_n(t)), \quad (\text{A.16})$$

que é a forma usual da equação mestra.

Em processos estocásticos de um único passo, é comum definir a função geratriz, $\chi(\lambda, t)$:

$$\chi(\lambda, t) = \sum_n e^{i\lambda n} P_n(t). \quad (\text{A.17})$$

A distribuição de probabilidade $P_n(t)$ pode ser obtida via transformada de Fourier inversa:

$$P_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \chi(\lambda, t) e^{-i\lambda n}. \quad (\text{A.18})$$

Vale a pena considerar alguns casos particulares da equação (A.16).

Processo de Poisson Unidirecional

Neste caso, deve-se tomar:

$$\xi_n(t) = 0; \gamma_n(t) = \gamma. \quad (\text{A.19})$$

Inserindo (A.19) em (A.16), vem:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \gamma [P_{n-1}(t) - P_n(t)] ; P_n(0) = \delta_{n,0}; n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.20})$$

A solução para $n = 0$ é imediata:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\gamma P_0(t) \implies P_0(t) = e^{-\gamma t}; P_0(0) = 1 \quad (\text{A.21})$$

Usando (A.17) e (A.20), encontra-se a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial \chi(\lambda, t)}{\partial t} = \gamma (e^{i\lambda} - 1) \chi(\lambda, t); \chi(\lambda, 0) = 1, \quad (\text{A.22})$$

com solução:

$$\chi(\lambda, t) = \exp [(e^{i\lambda} - 1)\gamma t]. \quad (\text{A.23})$$

Da equação (A.18), calcula-se que $P_n(t)$ é dado por:

$$P_n(t) = \frac{(\gamma t)^n}{n!} e^{-\gamma t}; n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.24})$$

Caminhada Aleatória

Este processo corresponde a um processo de Poisson bidirecional simétrico. Neste caso, escolhe-se:

$$\xi_n(t) = \gamma = \gamma_n(t), \quad (\text{A.25})$$

que substituído na equação (A.16) leva a:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \gamma [P_{n+1}(t) + P_{n-1}(t) - 2P_n(t)]; P_n(0) = \delta_{n,0}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.26})$$

Como no caso anterior, chega-se facilmente à seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial \chi(\lambda, t)}{\partial t} = \gamma(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda} - 2)\chi(\lambda, t); \chi(\lambda, 0) = 1. \quad (\text{A.27})$$

Integrando essa equação, obtém-se:

$$\chi(\lambda, t) = \exp [(e^{i\lambda} + e^{-i\lambda} - 2)\gamma t]. \quad (\text{A.28})$$

Das equações (A.18) e (A.28), vem:

$$P_n(t) = e^{-2\gamma t} I_n(2\gamma t). \quad (\text{A.29})$$

onde $I_n(x)$ é a função de Bessel modificada.

É conveniente, agora, passar ao limite do contínuo. Fazendo $x = na$ e considerando a função característica:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k, t) &= \langle e^{ikx} \rangle_t = \langle e^{ikna} \rangle_t = \sum_n e^{ikna} P_n(t), \\ \tilde{P}(k, t) &= e^{-2at} \sum_n I_n(2at) e^{ikna} = \chi(ka, t), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

que fica:

$$\tilde{P}(k, t) = \exp [(e^{ika} + e^{-ika} - 2) \gamma t]. \quad (\text{A.31})$$

No limite em que $a \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow \infty$, com $D \equiv a^2 \gamma$ mantido fixo, vem:

$$\tilde{P}(k, t) = e^{-k^2 D t}. \quad (\text{A.32})$$

Assumindo a existência de uma densidade de probabilidade $P(x, t)$ para uma

variável aleatória contínua x , tem-se:

$$\begin{cases} \tilde{P}(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} P(x, t), \\ P(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} \tilde{P}(k, t). \end{cases} \quad (\text{A.33})$$

A substituição da equação (A.32) na última equação de (A.33) leva a:

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{-ikx} e^{-k^2 Dt} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}, \quad (\text{A.34})$$

que é a solução do processo de Wiener:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (\text{A.35})$$

com condição inicial $P(x, 0) = \delta(x)$.

A.2 Solução por Integrais de Caminho

Seja o processo de Wiener da equação (A.35), cuja solução pode ser escrita como:

$$P(x, t) = \int dx_0 P(x, t | x_0) P_0(x_0). \quad (\text{A.36})$$

A densidade de probabilidade condicional satisfaz a equação de difusão:

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t | x_0) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t | x_0), \quad (\text{A.37})$$

com condição inicial $P(x, 0 | x_0) = \delta(x - x_0)$. A solução da equação (A.37) é:

$$P(x, t | x_0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{4Dt}\right). \quad (\text{A.38})$$

Usando a equação de Chapman-Kolmogorov, podemos escrever a equação (A.36) como:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \int dx_{N-1} \int dx_{N-2} \dots \int dx_0 P(x, \delta t \mid x_{N-1}) \\ &\times P(x_{N-1}, \delta t \mid x_{N-2}) \dots P(x_1, \delta t \mid x_0) P_0(x_0). \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

Usando (A.38), chega-se a:

$$P(x, t) = \int \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D \delta \tau}} \exp \left(- \sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4D \delta \tau} \right) P_0(x_0). \quad (\text{A.40})$$

Como δt é muito pequeno, pode-se fazer:

$$x_{i+1} - x_i \simeq \dot{x}(t_i) \delta \tau, \quad (\text{A.41})$$

de forma que:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4D \delta \tau} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{4D} \int_0^t d\tau [\dot{x}(\tau)]^2. \quad (\text{A.42})$$

Define-se, ainda:

$$\mathcal{D}x(\tau) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dx_i}{\sqrt{4\pi D \delta \tau}}, \quad (\text{A.43})$$

que pode ser usado para reescrever a solução de (A.35) como:

$$P(x, t) = \int dx_0 P(x, t \mid x_0) P_0(x_0), \quad (\text{A.44})$$

onde:

$$P(x, t \mid x_0) = \int \mathcal{D}x(\tau) \exp \left[- \frac{1}{4D} \int_0^t d\tau [\dot{x}(\tau)]^2 \right]. \quad (\text{A.45})$$

Vale lembrar que devem ser impostas as condições de contorno $x(0) = x_0$ e $x(t) = x$. Para mais detalhes sobre os assuntos tratados neste apêndice, consultar a referência [68].

Apêndice B

Algumas Funções Características Importantes

B.1 Processo Poissoniano

Um processo poissoniano é descrito pela distribuição de probabilidade abaixo:

$$P_n = \frac{\mu^n e^{-\mu}}{n!}, \quad (\text{B.1})$$

onde $n = 0, 1, 2, \dots$. Da equação (2.3), a função característica associada é dada por:

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} (\mu e^{i\lambda})^n}{n!} = e^{-\mu} \exp [\mu e^{i\lambda}], \quad (\text{B.2})$$

que pode ser reescrita como:

$$\chi(\lambda) = \exp[\mu(e^{i\lambda} - 1)]. \quad (\text{B.3})$$

De (2.20) segue que a função característica dos cumulantes fica:

$$\Phi(\lambda) = -\ln \chi(\lambda) = -\mu(e^{i\lambda} - 1). \quad (\text{B.4})$$

Usando a expansão em série de potências de $e^{i\lambda}$, isto pode ser expresso como:

$$\Phi(\lambda) = -\mu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(i\lambda)^k}{k!}, \quad (\text{B.5})$$

donde:

$$Q_k = \mu; \quad \forall k, \quad (\text{B.6})$$

sendo Q_k o cumulante de ordem k da distribuição, calculado usando a equação (2.20).

B.2 Processo Binomial

No caso de um processo binomial, tem-se:

$$P_n = \binom{M}{n} p^n q^{M-n}; \quad p + q = 1. \quad (\text{B.7})$$

Aplicando a equação (2.3) à última expressão, resulta:

$$\chi(\lambda) = \sum_{n=0}^M \binom{M}{n} (e^{i\lambda} p)^n q^{M-n} = (e^{i\lambda} p + q)^M. \quad (\text{B.8})$$

De (2.20) e de (B.8), vem:

$$\Phi(\lambda) = -\ln \chi(\lambda) = -M \ln (e^{i\lambda} p + q) = -M \ln (e^{i\lambda} p + 1 - p), \quad (\text{B.9})$$

donde seguem os cumulantes da distribuição binomial:

$$Q_1 = Mp, \quad (\text{B.10})$$

$$Q_2 = Mp(1-p), \quad (\text{B.11})$$

$$Q_3 = Mp(1-p)(1-2p). \quad (\text{B.12})$$

Os demais cumulantes são calculados de maneira análoga.

B.3 Processo Poissoniano Bidirecional

O processo poissoniano bidirecional é obtido da equação (A.12) fazendo $\gamma_n(t) = \gamma$ e $\xi_n(t) = \xi$, de modo que a função de distribuição satisfaz:

$$\dot{P}_n = \xi P_{n+1} + \gamma P_{n-1} - (\xi + \gamma)P_n ; P_n(0) = 1. \quad (\text{B.13})$$

A função característica associada é:

$$\chi(\lambda) = e^{-\mu-\nu} \exp(\mu e^{i\lambda}) \exp(\nu e^{-i\lambda}), \quad (\text{B.14})$$

onde $\mu = \xi t$ e $\nu = \gamma t$. A função característica dos cumulantes é então:

$$\Phi(\lambda) = -\mu(e^{i\lambda} - 1) - \nu(e^{-i\lambda} - 1), \quad (\text{B.15})$$

donde são obtidos os cumulantes da distribuição:

$$Q_{2l+1} = \mu - \nu, \quad (\text{B.16})$$

$$Q_{2l} = \mu + \nu. \quad (\text{B.17})$$

B.4 Distribuição Trinomial Bidirecional

Neste último exemplo, a função característica é:

$$\chi(\lambda) = [1 + p_1(e^{i\lambda} - 1) + p_2(e^{-i\lambda} - 1)]^M. \quad (\text{B.18})$$

A função característica dos cumulantes fica:

$$\Phi(\lambda) = -M \ln [1 + p_1(e^{i\lambda} - 1) + p_2(e^{-i\lambda} - 1)]. \quad (\text{B.19})$$

Sendo $a \equiv p_1 - p_2$ e $b \equiv p_1 + p_2$, os três primeiros cumulantes da distribuição são:

$$Q_1 = Ma, \quad (\text{B.20})$$

$$Q_2 = M(b - a^2), \quad (\text{B.21})$$

$$Q_3 = Ma(1 - 3b + 2a^2). \quad (\text{B.22})$$

Bibliografia

- [1] B. L. Altshuler, D. E. Khmelnitskii, A. I. Larkin, and P. A. Lee, Magnetoresistance and Hall effect in a disordered two-dimensional electron gas, *Phys. Rev. B* **22**, 5142 (1980).
- [2] C. P. Umbach, S. Washburn, R. B. Laibowitz, and R. A. Webb, Magnetoresistance of small, quasi-one-dimensional, normal-metal rings and lines, *Phys. Rev. B* **30**, 4048 (1984).
- [3] A. D. Stone, Transport Theory of Mesoscopic Systems: Application to Ballistic Transport, em *Mesoscopic Quantum Physics*, editado por E. Akkermans, G. Montambaux, J. -L. Pichard e J. Zinn-Justin, Les Houches, Elsevier Science (1995).
- [4] Ailton Fernandes de Araújo Junior, *Propriedades Universais de Transporte em Pontos Quânticos com Simetria Quiral*, dissertação de mestrado orientada pelo Prof. Antonio Murilo Santos Macêdo, agosto de 2002.
- [5] Hélène Bouchiat, Experimental Signatures of Quantum Coherent Transport, em *Mesoscopic Quantum Physics*, editado por E. Akkermans, G. Montambaux, J. -L. Pichard e J. Zinn-Justin, Les Houches, Elsevier Science (1995).

-
- [6] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 3rd edition, 1998). Ver página 270.
- [7] A. M. Chang, H. U. Baranger, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Weak Localization in Chaotic versus Nonchaotic Cavities: A Striking Difference in the Line Shape, *Phys. Rev. Lett.* **73** 2111 (1994).
- [8] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, 1995)
- [9] S. Washburn and R. A. Webb, *Adv. Phys.* **35** 375 (1986).
- [10] B. L. Altshuler, Fluctuations in the Extrinsic Conductivity of Disordered Conductors, *JETP Lett.* **41** 648 (1985).
- [11] P. A. Lee, and A. D. Stone, Universal Conductance Fluctuations in Metals, *Phys. Rev. Lett.* **55** 1622 (1985).
- [12] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, and C. T. Foxon, Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas, *Phys. Rev. Lett.* **60** 848 (1988).
- [13] D. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Ritchie, and G. A. C. Jones, One-dimensional transport and the quantisation of the ballistic resistance, *J. Phys. C* **21** L209 (1988).
- [14] Yu. V. Sharvin, and N. I. Bogatina, *Sov. Phys. JETP* **29** 419 (1969).
-

-
- [15] R. Landauer, Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction, *IBM J. Res. Develop.* **1** 223 (1957).
- [16] R. Landauer, Electrical Resistance of Disordered One-Dimensional Lattices, *Phil. Mag.* **21** 863 (1970).
- [17] M. Büttiker, Four-Terminal Phase Coherent Conductance, *Phys. Rev. Lett.* **57** (14):1761(1986).
- [18] M. L. Roukes, A. Scherer, S. J. Allen, H. G. Craighead, R. M. Ruthen, E. D. Beebe, and J. P. Harbison, Quenching of the Hall Effect in a One-Dimensional Wire, *Phys. Rev. Lett.* **59** 3011 (1987).
- [19] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Physics* (Addison Wesley Longman, Revised Edition, 1994).
- [20] David K. Ferry and Stephen M. Goodnick, *Transport in Nanostructures* (Cambridge University Press, 1997).
- [21] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics* (McGraw-Hill International Editions, 1985).
- [22] Alexander L. Fetter and John Dirk Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover Publications, New York, 2003).
- [23] M. Büttiker, Scattering Theory of Thermal and Excess Noise in Open Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **65** 2901 (1990).
- [24] M. Büttiker, , *Phys. Rev. B* **46** 12485 (1992).
-

-
- [25] M. J. M. de Jong, and C. W. J. Beenakker, Shot Noise in Mesoscopic Systems, em *Mesoscopic Electron Transport*, editado por L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven e G. Schoen, NATO ASI Series Vol. 345 (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997). Também disponível em cond-mat/9611140.
- [26] Ya. M. Blanter and M. Büttiker, Shot Noise in Mesoscopic Conductors, *Phys. Rep.* **336**, 1 (2000).
- [27] Y. G. Sinai, Dynamical Systems with Elastic Reflections, *Russian Mathematical Surveys* **25** 137 (1970).
- [28] A. Tajic, *Study of a Stroboscopic Model of a Quantum Dot*, tese de doutorado, maio de 2005. Disponível na Web em <http://www.ilorentz.org/beenakker/>
- [29] E. P. Wigner, em *Proc. Canadian Mathematical Congress* (Univ. of Toronto Press, Toronto, 1957).
- [30] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3** 140 (1962); **3** 157 (1962); **3** 166 (1962). Série de artigos intitulada *Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems*.
- [31] C. W. J. Beenakker, Random Matrix Theory of Quantum Transport, *Rev. Mod. Phys.* **69** (3):731 (1997).
- [32] H. A. Weidenmüller, Scattering Theory and Conductance Fluctuations in Mesoscopic Systems, *Physica A* **167** 28 (1990).
- [33] H. U. Baranger and P. A. Mello, Short Paths and Information Theory in Quantum Chaotic Scattering: Transport through Quantum Dots, *Europhys. Lett.* **33** 465 (1996).
-

-
- [34] Carlo Beenakker and Christian Schönenberger, Quantum Shot Noise, *Physics Today*, May 2003, p.37.
- [35] A. Einstein, *Phys. Zeitschr.* **10**, 185 (1909); A. Einstein, *Phys. Zeitschr.* **10**, 817 (1909). Uma tradução do primeiro artigo para o português foi recentemente publicada em *Revista Brasileira de Ensino de Física* **27** 69 (2005).
- [36] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [37] Walter Schottky, *Ann. Phys.* (Leipzig) **57** 541 (1918).
- [38] Markus Kindermann, *Electron Counting Statistics in Nanostructures*, tese de doutorado, setembro de 2003. Disponível na Web em <http://www.ilorentz.org/beenakker/>
- [39] L. E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics* (Wiley-Interscience, 2nd edition, 1990).
- [40] L. S. Levitov and G. B. Lesovik, Charge distribution in quantum shot noise, *JETP Lett.* **58** 230 (1993).
- [41] Hyunwoo Lee, L. S. Levitov, and A. Yu. Yakovets, Universal statistics of transport in disordered conductors, *Phys. Rev. B* **51** 4079 (1995).
- [42] Leonid S. Levitov, Hyunwoo Lee, Gordey B. Lesovik, Electron counting statistics and coherent states of electric current. *J. Math. Phys.* **37** (10):4845 (1996).
- [43] L. S. Levitov, The Statistical Theory of Mesoscopic Noise, em *Quantum Noise*, editado por Yu. V. Nazarov e Ya. M. Blanter, NATO Science Series II Vol. 97 (Kluwer, Dordrecht, 2003). Também disponível em cond-mat/0210284.
-

-
- [44] C. W. J. Beenakker, B. Rejaei, and J. A. Melsen, Scaling theory of conduction through a normal-superconductor microbridge, *Phys. Rev. Lett.*, **72** 2470 (1994).
- [45] O. N. Dorokhov, *Sov. Phys. JETP* **58** 606 (1983).
- [46] P. A. Mello, P. Pereyra, and N. Kumar, Macroscopic Approach to the Theory of Multichannel Disordered Conductors, *Ann. Phys.* **181** 290 (1988).
- [47] Yu. V. Nazarov, Limits of Universality in Disordered Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 134 (1994).
- [48] A. M. S. Macêdo, Scaling theory of phase-coherent metallic conductors, *Phys. Rev. B* **66**, 033306 (2002).
- [49] A. M. S. Macêdo and Andre M. C. Souza, Formation of Fabry-Perot resonances in double-barrier chaotic billiards, *Phys. Rev. E* **71**, 066218 (2005).
- [50] Sérgio Wladimir da Silva Apolinário, *Teoria Quântica de Circuitos para a Transição Balístico-Difusivo*, dissertação de mestrado orientada pelo Prof. Antonio Murilo Santos Macêdo, março de 2004.
- [51] Yu. V. Nazarov, Generalized Ohm's Law, disponível em cond-mat/9410011.
- [52] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker, Exact results for the level density and two-point correlation function of the transmission-matrix eigenvalues in quasi-one-dimensional conductors, *Phys. Rev. B* **49** 4695 (1994).
- [53] Yu. V. Nazarov, em *Quantum Dynamics of Submicron Structures*, editado por H. Cerdeira, B. Kramer e G. Schoen (Kluwer, Dordrecht, 1995).
-

-
- [54] M. Kindermann and Yu. V. Nazarov, Interaction effects on counting statistics and the transmission distribution, *Phys. Rev. Lett.* **91** 136802 (2003). Também disponível em cond-mat/0304078.
- [55] M. J. M. de Jong, Distribution of transmitted charge through a double-barrier junction, *Phys. Rev. B* **54** 8144 (1996).
- [56] S. Pilgram, A. N. Jordan, E. V. Sukhorukov, and M. Büttiker, Stochastic Path Integral Formulation of Full Counting Statistics, *Phys. Rev. Lett.* **90** 206801 (2003).
- [57] B. A. Muzykantiskii and D. E. Khmelnitskii, Quantum shot noise in a normal-metal–superconductor point contact, *Phys. Rev. B*, **50** 3982 (1994).
- [58] W. Belzig, Full Counting Statistics of Superconductor-Normal-Metal Heterostructures, em *Quantum Noise*, editado por Yu. V. Nazarov e Ya. M. Blanter, NATO Science Series II Vol. 97 (Kluwer, Dordrecht, 2003). Também disponível em cond-mat/0210125.
- [59] N. Argaman, Random scattering matrices and the circuit theory of Andreev conductances, *Europhys. Lett.* **38**, 231 (1997).
- [60] A. M. S. Macêdo and André M. C. Souza, Universal Fano Factor and Anomalous $I - V$ Characteristics in Weakly Interacting Quantum Dots, aceito para publicação em *Phys. Rev. B*.
- [61] Yu. V. Nazarov, *Ann. Phys. (Leipzig)* **8** SI-193 (1999); W. Belzig and Yu. V. Nazarov, *Phys. Rev. Lett.* **87** 067006 (2001).
- [62] Yu. V. Nazarov, *Superlattices Microst.* **25** 1221 (1999).
-

-
- [63] A. M. S. Macêdo, Transport theory of interacting mesoscopic systems: A memory-function approach to charge-counting statistics, *Phys. Rev. B* **69** 155309 (2004).
- [64] Ya. M. Blanter, H. Schomerus, and C. W. J. Beenakker, Effect of dephasing on charge-counting statistics in chaotic cavities, *Physica E* **11** 1 (2001).
- [65] K. E. Nagaev, P. Samuelsson, and S. Pilgram, Cascade approach to current fluctuations in a chaotic cavity, *Phys. Rev. B* **66** 195318 (2002).
- [66] Anderson Luiz da Rocha e Barbosa, *Análise Diagramática para Cavidades Caóticas de Barreira Dupla: Equivalência com Teoria Quântica de Circuitos*, dissertação de mestrado orientada pelo Prof. Antonio Murilo Santos Macêdo, abril de 2005.
- [67] D. B. Gutman, Yuval Gefen, and A. D. Mirlin, High cumulants of current fluctuations out of equilibrium, cond-mat/0210076.
- [68] Hannes Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications* (Springer Series in Synergetics, 2nd Edition, 1996).