



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA
CURSO DE DOUTORADO

CAIO SÉRGIO OLIVEIRA XAVIER

**ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO:
diferentes representações**

RECIFE
2025

CAIO SÉRGIO OLIVEIRA XAVIER

**ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO:
diferentes representações**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof.^a Dr^a. Gilda Lisbôa Guimarães

Coorientador: Prof. Dr. André Fellipe Queiroz Araújo

RECIFE

2025

Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Xavier, Caio Sérgio Oliveira.

Ensino de Probabilidade no Ensino Médio: diferentes representações / Caio Sérgio Oliveira Xavier. - Recife, 2025.
366f.: il.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2025.

Orientação: Gilda Lisbôa Guimarães.

Coorientação: André Fellipe Queiroz Araújo.

1. Letramento probabilístico; 2. Professor do Ensino Médio;
3. Múltiplas representações; 4. Educação estatística. I.
Guimarães, Gilda Lisbôa. II. Araújo, André Fellipe Queiroz. III.
Título.

UFPE-Biblioteca Central

CAIO SÉRGIO OLIVEIRA XAVIER

ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: diferentes representações

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco-UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovado em: 25.11.2025

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Gilda Lisbôa Guimarães
(Orientadora) Universidade Federal de
Pernambuco - UFPE

Prof^a. Dr^a. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof. Dr. Fabiano dos Santos Souza (Examinador Externo)
Universidade Federal Fluminense - UFF

Prof. Dr. Cassio Cristiano Giordano (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio Grande/RS - FURG

Prof. Dr. Diêgo Bezerra de Melo Maciel (Examinador Externo)
Universidade Católica de Pernambuco - UNICAP

AGRADECIMENTOS

Após tantas lutas e privações, eis que realizo um dos meus sonhos, 19 anos depois. Dito isso, não poderia deixar de agradecer àqueles que vivenciaram ao meu lado esse período tão especial em minha vida.

A Deus, pela saúde, paz, força e resiliência. Suas palavras e ensinamentos me estimularam a superar as adversidades durante essa trajetória. Sou grato por, mesmo sendo pecador e falho, Ele nunca ter desistido de mim.

Aos meus pais, Genálio e Sueli, todo o amor do mundo. Obrigado por tudo!!! Sempre serei grato a vocês por todo amor, cuidado, carinho e atenção comigo. Estamos distantes fisicamente, mas sempre perto emocionalmente. Amo vocês!! Que eu consiga retribuir tudo em dobro para vocês.

Lemerton Matos, obrigado pela cumplicidade, pelo companheirismo e pela paciência. Ainda bem que você conhece como é se debruçar nessa jornada rumo ao título de “Doutor”.

Aos meus amigos e familiares, por todo o carinho e atenção comigo. Nos momentos difíceis, estavam ali solidários com a minha causa, não deixando eu desistir do meu objetivo. Em especial, agradeço aos “Primeiros e eternos”, aos “Amigos do vale”, pessoas especiais que levarei comigo para sempre.

À orientadora, Dr^a. Gilda Guimarães, o que dizer de você? São tantas coisas, que eu poderia escrever umas dez páginas. Gratidão!!! Obrigado por me acolher e acreditar em meu potencial e na proposta da pesquisa. Ressalto também sua paciência e orientação, que foram fundamentais para o desenvolvimento desta tese. Ao coorientador, Dr. André Fellipe, obrigado por aceitar colaborar com esta investigação, dando contribuições pertinentes. A vocês dois, MUITO OBRIGADO!!!!

Também não poderia deixar de agradecer à Jaqueline Lixandrão e aos Cássio Giordano, Fabiano de Souza e Diego Maciel, por aceitarem participar da minha banca e pelas importantes contribuições e sugestões, além do olhar atencioso para esta tese, desde a qualificação.

À Universidade Federal de Pernambuco, pela oportunidade de fazer um curso de pós-graduação, pela infraestrutura disponível e pelos docentes que colaboraram para a minha formação.

A todo o EDUMATEC, de professores a funcionários, um Programa que me acolheu tão bem e do qual tenho a honra de fazer parte. Um agradecimento especial

a Clara, por toda a atenção e proatividade em sanar nossas dúvidas e nos ajudar com as demandas.

Aos meus colegas de turma, tanto da “oficial” como da minha turma das disciplinas, com os quais tive momentos de alegrias, angústias e dedicação durante o curso. Após quase dez anos, retornar ao espaço acadêmico como estudante e ser acolhido por vocês não tem preço. Não poderia deixar de salientar o “prédio azul”, e agradecer em especial ao meu amigo Kaiomarcos, pelas reuniões no Meet e por escutar as dezenas de áudios com dúvidas. Obrigado a todos!!!

Agradeço também às unidades escolares que, gentilmente, me possibilitaram desenvolver dois estudos. Aos colegas de profissão, Alex, Bianca, Daniele, Joaquim e “Teka”, por disponibilizarem suas aulas e colaborarem com esta tese. Obrigado mais uma vez!!

Não posso esquecer as parcerias, contribuições e sessões de estudo com os membros do Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental (GREF). O olhar de vocês foi primordial para a realização desta pesquisa.

Agradeço à Secretaria de Educação dos estados da Bahia e de Pernambuco, por conceder a licença para esta realização profissional e pessoal. Também agradeço a EREF Marechal Antônio Alves Filho e ao Colégio Estadual Rotary Clube, por toda a compreensão.

Assim, encerro este capítulo tão marcante e significativo da minha vida com uma única palavra que resume tudo: GRATIDÃO!

“É preciso força pra sonhar e perceber a estrada vai além do que se vê”...
(Los Hermanos, álbum Ventura, 2003)

RESUMO

Há carência de estudos na área de Educação Estatística sobre como ensinar Probabilidade a partir de diferentes representações (gráficos, diagramas, tabelas, fórmulas, língua natural escrita), principalmente de estudos que focalizem como professores do Ensino Médio podem utilizar as diversas representações em sala de aula, propondo processos que privilegiam a intercambialidade entre uma representação e outra. Assim, o objetivo desta pesquisa consistiu em investigar o que vem sendo proposto para o ensino de Probabilidade para estudantes do Ensino Médio, e o que podem aprender, a partir de intervenção de ensino que considere a perspectiva do Letramento Probabilístico, valorizando diferentes representações. Para tal, desenvolvemos 4 (quatro) estudos articulados com os objetivos específicos: 1) Analisar, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005), o que é proposto para o conceito de Probabilidade nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Pernambuco e Currículo da Bahia); 2) Avaliar as representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD/2021, relacionadas a Probabilidade; 3) Investigar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à compreensão do conceito de Probabilidade a partir de diferentes representações; e 4) Analisar uma sequência de ensino envolvendo Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações, para estudantes do Ensino Médio de Pernambuco e Bahia. A partir das análises dos documentos curriculares, observamos que eles apresentam situações que envolvem incerteza, risco e aleatoriedade (Elementos do conhecimento) e são mencionadas as competências de investigar, argumentar e tomar decisões (Elementos disposicionais). Propõem a utilização de situações da vida cotidiana ponderando os riscos probabilísticos, a reflexão sobre espaço amostral de situações aleatórias (discretos ou não, equiprováveis ou não) e a elaboração e resolução por meio de cálculos probabilísticos. Nos currículos analisados, porém, a Probabilidade está proposta para ser abordada apenas no 3º ano do Ensino Médio, nos currículos da Bahia e de Pernambuco, o que ressaltamos como ponto lacunar. A análise de 823 atividades identificadas nos livros didáticos evidencia a predominância de questões que solicitam a resolução de cálculos e pouco incentivo à elaboração de situações probabilísticas. Há uma concentração de atividades pautadas em dados fictícios, com predomínio do significado clássico, principalmente atreladas a jogos de azar, e o enunciado, na maior parte das atividades, é apresentado em língua natural escrita, com solicitação de resposta na representação numérica. As crenças e atitudes dos estudantes, assim como a tomada de decisão diante dos dados, são raramente solicitadas. Considerando o que os estudantes já sabem, observamos que, independentemente do ano escolar (1º ou 3º), os estudantes apresentaram um desempenho fraco. Eles demonstram ter pouco domínio da linguagem probabilística e apresentaram dificuldades em compreender as situações, realizar os cálculos e tomar decisões em situações reais. Diante disso, foi vivenciada uma sequência de ensino na perspectiva do Letramento Probabilístico. Foi ressaltado o uso de múltiplas representações e a importância dos Elementos disposicionais. No processo interventivo, o professor atuou como mediador do conhecimento, incitando os estudantes a analisarem e interpretarem dados reais probabilísticos com diferentes significados e em diferentes representações, a argumentarem com base em suas crenças e, posteriormente, confrontarem essas crenças com os dados reais. Didaticamente, os estudantes resolviam as atividades em duplas e, em seguida, cada atividade era socializada, analisada e sistematizada pela turma. Dessa maneira,

defendemos que, para o professor propor o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, é necessário que ele ultrapasse a barreira da apresentação de atividades desconexas da realidade e com enfoque puramente técnico. A pesquisa aqui empreendida evidenciou a possibilidade e viabilidade de um processo formativo que articule os elementos de conhecimento e os disposicionais, com destaque para as diferentes representações.

Palavras-chave: letramento probabilístico; professor do ensino médio; múltiplas representações; educação estatística.

ABSTRACT

There is a lack of studies in the field of Statistical Education on how to teach Probability using different representations (graphs, diagrams, tables, formulas, written natural language), especially studies that focus on how high school teachers can use these different representations in the classroom, proposing processes that prioritize interchangeability between one representation and another. Thus, the objective of this research was to investigate what has been proposed for teaching Probability to high school students and what they can learn from teaching interventions that consider the perspective of Probabilistic Literacy, valuing different representations. To this end, we developed four (4) studies articulated with the following specific objectives: 1) to analyze, from the perspective of Gal's Probabilistic Literacy (2005), what is proposed for the concept of Probability in official documents (the National Common Curricular Base, the Pernambuco Curriculum, and the Bahia Curriculum); 2) evaluate the representations used in the activities proposed in the High School Mathematics textbooks approved by the PNLD/2021, related to Probability; 3) investigate students' prior knowledge regarding the understanding of the concept of Probability based on different representations; and 4) analyze a teaching sequence involving Probabilistic Literacy, highlighting the use of multiple representations, for high school students in Pernambuco and Bahia. Based on the analysis of the curricular documents, we observed that they present situations involving uncertainty, risk, and randomness (Elements of Knowledge) and mention the competencies of investigating, arguing, and making decisions (dispositional Elements). They propose the use of everyday situations to consider probabilistic risks, reflect on the sample space of random situations (discrete or not, equiprobable or not), and the elaboration and resolution through probabilistic calculations. In the curricula analyzed, however, probability is proposed to be addressed only in the third year of high school, in the Bahia and Pernambuco curricula, which we highlight as a significant gap. The analysis of 823 activities identified in the textbooks highlights the predominance of questions requiring calculations and little encouragement for developing probabilistic situations. There is a concentration of activities based on fictitious data, with a predominance of the classical meaning, mainly linked to games of chance. In most activities, the statements are presented in written natural language, requiring responses in numerical representation. Students' beliefs and attitudes, as well as decision-making when faced with data, are rarely requested. Considering what students already know, we observed that, regardless of their grade (first or third), students performed poorly. They demonstrated little command of probabilistic language and had difficulty understanding situations, performing calculations, and making decisions in real situations. Therefore, a teaching sequence was implemented from the perspective of Probabilistic Literacy. The use of multiple representations and the importance of Dispositional Elements were emphasized. In the intervention process, the teacher acted as a knowledge mediator, encouraging students to analyze and interpret real probabilistic data with different meanings and in different representations, to argue based on their beliefs, and then to compare these beliefs with real data. Didactically, students completed the activities in pairs, and each activity was then shared, analyzed, and systematized by the class. Thus, we argue that, for teachers to propose the development of Probabilistic Literacy, they must overcome the barrier of presenting activities disconnected from reality and with a purely technical focus. The research undertaken here demonstrated the possibility and feasibility of a training process that articulates the elements of knowledge and dispositional elements, with an emphasis on the different

representations.

Keywords: probabilistic literacy; high school teacher; multiple representations; statistical education.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Exemplo de termo probabilístico	47
Figura 2.2 - Exemplo de representação numérica	47
Figura 2.3 - Exemplo de representação tabular.....	48
Figura 2.4 - Exemplo de representação simbólica no livro didático	49
Figura 2.5 - Exemplo de representação simbólica.....	49
Figura 3.1 - Distinção de quatro processos semióticos de graus crescentes de integração de representações.....	68
Figura 6.1 - Exemplo de questão pautada na resolução	140
Figura 6.2 - Exemplo de questão pautada na resolução livre.....	140
Figura 6.3 - Exemplo de questão pautada na elaboração livre	141
Figura 6.4 - Exemplo de questão pautada na elaboração com pré-requisito	141
Figura 6.5 - Exemplo de questão com Elementos disposicionais	142
Figura 6.6 - Questão com ausência de dados numéricos	144
Figura 6.7 - Questão com a elaboração dos dados numéricos por parte dos estudantes	144
Figura 6.8 - Questão com dados autênticos	144
Figura 6.9 - Questão com dados fictícios.....	145
Figura 6.10 - Exemplo de questão com “Contexto livre”	147
Figura 6.11 - Exemplo de questão com “Contexto determinado”	147
Figura 6.12 - Exemplo de questão “Sem contexto”	148
Figura 6.13 - Exemplo de questão no contexto “Ambiental”	149
Figura 6.14 - Exemplo de questão no contexto “Tecnológico”.....	149
Figura 6.15 - Exemplo de questão no contexto “Social”	150
Figura 6.16 - Exemplo de questão no contexto “Saúde”	150
Figura 6.17 - Exemplo de questão no contexto “Financeiro”	151
Figura 6.18 - Exemplo de questão no contexto “Política pública”	151
Figura 6.19 - Exemplo de questão no contexto “Jogos de Azar”	152
Figura 6.20 - Exemplo de questão com “Múltiplos contextos”	152
Figura 6.21 - Exemplo de questão com interpretação de uma “Pesquisa Estatística”	154
Figura 6.22 - Exemplo de questão com elaboração de uma situação a partir de uma “Pesquisa Estatística”	155

Figura 6.23 - Exemplo de questão com “Elaboração do estudante”	156
Figura 6.24 - Exemplo de questão com significado Intuitivo.....	156
Figura 6.25 - Exemplo de questão com significado Clássico	157
Figura 6.26 - Exemplo de questão com significado Frequentista.....	157
Figura 6.27 - Exemplo de questão com Significado Subjetivo	158
Figura 6.28 - Exemplo de questão com significado Axiomático	159
Figura 6.29 - Exemplo de questão com situação “Não se aplica”	159
Figura 6.30 - Representação numérica da questão.....	161
Figura 6.31 - Representação numérica do estudante.....	161
Figura 6.32 - Representação diagrama da questão	162
Figura 6.33 - Representação diagrama do estudante	162
Figura 6.34 - Representação tabular da questão.....	163
Figura 6.35 - Representação tabular do estudante	163
Figura 6.36 - Representação gráfica da questão.....	164
Figura 6.37 - Representação figural da questão.....	164
Figura 6.38 - Representação da questão na Língua natural escrita.....	164
Figura 6.39 - Representação do estudante na Língua natural oral	164
Figura 6.40 - Exemplo de representação da questão com “Múltiplas representações”	165
Figura 6.41 - Situação com múltiplas representações na representação do estudante	166
Figura 6.42 - Representação da questão no critério “Elaboração do estudante”	167
Figura 6.43 - Exemplo de questão com a ausência de Elementos disposicionais..	171
Figura 6.44 - Exemplo de questão com “Postura crítica”.....	171
Figura 6.45 - Exemplo de questão com o Elemento disposicional “Crenças”	172
Figura 6.46 - Exemplo de questão com com o Elemento disposicional “Sentimento em relação ao risco”	172
Figura 6.47 - Exemplo de questão com critério “Elaboração do estudante”	173
Figura 6.48 - Exemplo de questão de resolução nos livros dos Projetos Integradores	176
Figura 6.49 - Exemplo de questão de elaboração nos livros dos Projetos Integradores	177
Figura 6.50 - Exemplo de questão com ausência de dados numéricos nos livros de Projetos Integradores	178

Figura 6.51 - Exemplo de questão com os dados numéricos a critério do estudante, nos livros de Projetos Integradores.....	178
Figura 6.52 - Exemplo de questão com dados autênticos/reais, nos livros de Projetos Integradores	179
Figura 6.53 - Exemplo de situação com dados fictícios nos livros de Projetos Integradores	179
Figura 6.54 - Exemplo de questão com “Contexto livre” nos livros de Projetos Integradores	181
Figura 6.55 - Exemplo de questão com “Contexto determinado” nos livros de Projetos Integradores	181
Figura 6.56 - Exemplo de questão no contexto “Ambiental”, nos livros de Projetos Integradores	182
Figura 6.57 - Exemplo de questão no contexto “Saúde”, nos livros de Projetos Integradores	183
Figura 6.58 - Exemplo de questão no contexto “Jogos de azar”, nos livros de Projetos Integradores	184
Figura 6.59 - Exemplo de questão de interpretação de uma “Pesquisa Estatística”, nos livros de Projetos Integradores.....	185
Figura 6.60 - Exemplo de questão com elaboração de pesquisa no contexto “Pesquisa Estatística”, nos livros de Projetos Integradores	185
Figura 6.61 - Exemplo de questão Intuitiva nos livros de Projetos Integradores	186
Figura 6.62 - Exemplo de questão com significado Clássico nos livros de Projetos Integradores	187
Figura 6.63 - Exemplo de questão com significado Frequentista nos livros de Projetos Integradores	188
Figura 6.64 - Exemplo de questão Subjetiva nos livros de Projetos Integradores ..	189
Figura 6.65 - Exemplo de representação da questão nos livros de Projetos Integradores	190
Figura 6.66 - Exemplos de representação numérica e tabular do estudante, nos livros de Projetos Integradores	191
Figura 6.67 - Exemplos de representação gráfica e Língua natural oral do estudante, nos livros de Projetos Integradores.....	191
Figura 6.68 - Exemplo de representação solicitada para o estudante na Língua natural escrita, nos livros de Projetos Integradores.....	192

Figura 6.69 - Exemplo de enunciado elaborado pelo estudante	192
Figura 6.70 – Exemplo de “Múltiplas representações”	193
Figura 6.71 - Exemplo de questão com ausência de Elementos disposicionais nos livros de Projetos Integradores	195
Figura 6.72 - Exemplos de questão com os Elementos disposicionais “Postura crítica” e “Crenças e atitudes” nos livros de Projetos Integradores	195
Figura 6.73 - Exemplo de questão com o Elemento disposicional “ <i>Sentimento em relação ao risco</i> ”, nos livros de Projetos Integradores	196
Figura 7.1 - Diferentes representações da Questão 1	203
Figura 7.2 - Exemplo de resposta na categoria “Em branco/ não sabe” do item 1a	204
Figura 7.3 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a	205
Figura 7.4 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a	205
Figura 7.5 - Exemplo de resposta com justificativa incoerente (item 1a)	205
Figura 7.6 - Exemplo de resposta que considera a soma das faces (item1a)	205
Figura 7.7 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item1a	206
Figura 7.8 - Exemplo de resposta adequada comparando a probabilidade dos eventos, analisando a Língua natural escrita - item1a	207
Figura 7.9 - Exemplo de resposta adequada comparando a probabilidade dos eventos, analisando a representação tabular - item1a.....	207
Figura 7.10 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b	208
Figura 7.11 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b.....	208
Figura 7.12 - Exemplo de resposta com a exposição dos pares ordenados no item 1b.....	209
Figura 7.13 - Exemplo de resposta informando o total de pares ordenado no item1b	209
Figura 7.14 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 1b	209
Figura 7.15 - Exemplo de resposta adequada com representação fracionária no item 1b.....	210
Figura 7.16 - Exemplo de resposta adequada com representação percentual no item 1b.....	210
Figura 7.17 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 1b.....	210

Figura 7.18 - Diferentes representações da Questão 2.....	211
Figura 7.19 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a	212
Figura 7.20 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a	212
Figura 7.21 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a	213
Figura 7.22- Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a	213
Figura 7.23 - Exemplo de resposta com a soma das práticas (item 2a)	213
Figura 7.24 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 2a.....	213
Figura 7.25 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 2a.....	214
Figura 7.26 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 2a.....	214
Figura 7.27 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 2a.....	214
Figura 7.28 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2b	216
Figura 7.29 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2b	216
Figura 7.30 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 2b	216
Figura 7.31- Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 2b	217
Figura 7.32 - Exemplos de respostas adequadas no item 2b	217
Figura 7.33 - Diferentes representações da Questão 3.....	218
Figura 7.34 - Exemplos de justificativa “Financeira” no item 3a	220
Figura 7.35 - Exemplos de justificativa “Especificações Técnicas” no item 3a	220
Figura 7.36 - Exemplos de justificativa “Já possui” no item 3a.....	221
Figura 7.37 - Exemplos de justificativa “Questão pessoal” no item 3a.....	221
Figura 7.38 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e com percentual” no item 3b	222
Figura 7.39 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e sem percentual” no item 3b	222
Figura 7.40 - Exemplo de resposta com justificativa “Financeira” e com percentual no item 3b.....	223
Figura 7.41 - Exemplo de resposta com justificativa “Financeira” e sem percentual no item 3b.....	223
Figura 7.42 - Exemplo de resposta com justificativa “Social” e percentual no item 3b	224

Figura 7.43 - Exemplo de resposta com justificativa “Social” e sem percentual no item 3b.....	224
Figura 7.44 - Exemplo de resposta com justificativa “Técnica” e percentual no item 3b.....	224
Figura 7.45 - Exemplo de resposta com justificativa “Técnica” e sem percentual no item 3b.....	224
Figura 7.46 - Exemplo de resposta com justificativa “Pessoal” e percentual no item 3b.....	225
Figura 7.47 - Exemplo de resposta com justificativa “Pessoal” e sem percentual no item 3b.....	225
Figura 7.48 - Exemplo de resposta “sem justificativa” com especulação numérica - item 3c.....	226
Figura 7.49 - Exemplo de resposta “sem justificativa” na Língua natural escrita - item 3c.....	226
Figura 7.50 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de celulares das marcas favoráveis.....	227
Figura 7.51 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de marcas.....	227
Figura 7.52 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 3c	228
Figura 7.53 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 3c.....	228
Figura 7.54 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 3c.....	229
Figura 7.55 - Exemplo de resposta adequada na língua natural escrita no item 3c	229
Figura 7.56 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 3c.....	229
Figura 7.57 - Exemplo de resposta “Sim, sem justificativa” no item 3d.....	230
Figura 7.58 - Exemplo de resposta “Não, sem justificativa” no item 3d	230
Figura 7.59 - Exemplo de resposta ”Sim” e justificativa “Financeira” no item 3d	231
Figura 7.60 - Exemplo de resposta “Não” e justificativa “Financeira” no item 3d....	231
Figura 7.61 - Exemplo de resposta “Sim” e justificativa “Social” no item 3d	231
Figura 7.62 - Exemplo de resposta “Não” e justificativa “Social” no item 3d	231
Figura 7.63 - Exemplo de resposta “Sim” com justificativa “Técnica” no item 3d...	232
Figura 7.64 - Exemplo de resposta “Não” com justificativa “Técnica” no item 3d ..	232
Figura 7.65 - Exemplo de resposta “Sim” com justificativa “Pessoal” no item 3d ..	232
Figura 7.66 - Exemplo de resposta “Não” com justificativa “Pessoal” no item 3d ...	232

Figura 7.67 - Diferentes representações da Questão 4	233
Figura 7.68 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4a	234
Figura 7.69 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4a	234
Figura 7.70 - Exemplo de resposta que considera a quantidade de temperatura..	234
Figura 7.71 - Exemplo de resposta que justifica em função do cálculo errado - Item 4a.....	235
Figura 7.72 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 4a....	235
Figura 7.73 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 4a....	235
Figura 7.74 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 4a.....	235
Figura 7.75 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4b	236
Figura 7.76 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4b	236
Figura 7.77 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4b	236
Figura 7.78 - Exemplos de respostas com justificativa errada no item 4b	237
Figura 7.79 - Exemplos de respostas adequadas no item 4b	237
Figura 7.80 - Múltiplas representações da Questão 5	238
Figura 7.81 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 5a	239
Figura 7.82 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 5a	239
Figura 7.83 - Exemplo de resposta “Considera apenas os elementos do Nordeste” no item 5a.....	240
Figura 7.84 - Exemplo de resposta “Considera apenas os elementos do Brasil” no item 5a.....	240
Figura 7.85 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 5a.....	240
Figura 7.86 - Exemplo de resposta adequada na forma decimal no item 5a	240
Figura 7.87 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 5a....	241
Figura 7.88 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 5a.....	241
Figura 7.89 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 5a.....	241
Figura 7.90 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 5b	242
Figura 7.91 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 5b	242
Figura 7.92 - Exemplos de respostas adequadas no item 5b	243

Figura 8.1 - Questão 1 do pré-teste na representação na Língua natural escrita ...	249
Figura 8.2 - Questão 1 do pré-teste na representação tabular.....	249
Figura 8.3 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a do pré-teste.....	251
Figura 8.4 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a do pré-teste.....	251
Figura 8.5 - Exemplo de resposta com justificativa incoerente (item 1a) do pré-teste	251
Figura 8.6 - Exemplo de resposta que considera a soma das faces (item 1a) do pré-teste	251
Figura 8.7 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 1a do pré-teste	252
Figura 8.8 - Exemplo de resposta adequada comparando na Língua natural escrita – item 1a do pré-teste	252
Figura 8.9 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações - item 1a do pré-teste	252
Figura 8.10 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b do pré-teste	253
Figura 8.11 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b do pré-teste	253
Figura 8.12 - Exemplo de resposta com a exposição dos pares ordenados no item 1b do pré-teste	254
Figura 8.13 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 1b do pré-teste	254
Figura 8.14 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 1b do pré-teste	254
Figura 8.15 - Exemplo de resposta adequada com representação fracionária no item 1b do pré-teste	255
Figura 8.16 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 1b do pré-teste	255
Figura 8.17 - Enunciado da Questão 2 do pré-teste na representação tabular	255
Figura 8.18 - Enunciado da Questão 2 do pré-teste na Língua natural escrita.....	256
Figura 8.19 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a do pré-teste.....	256
Figura 8.20 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a do pré-teste.....	256
Figura 8.21 - Exemplo de resposta “ <i>Considera a quantidade de casos favoráveis</i> ” no item 2a do pré-teste	257
Figura 8.22 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 2a do pré-teste	257

Figura 8.23 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 2a do pré-teste	258
Figura 8.24 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 2a do pré-teste	258
Figura 8.25 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 2b do pré-teste	259
Figura 8.26 - Exemplos de respostas adequadas no item 2b do pré-teste	259
Figura 8.27 - Enunciado da Questão 3 do pré-teste na representação tabular	260
Figura 8.28 - Enunciado da Questão 3 do pré-teste na representação gráfica.....	261
Figura 8.29 - Exemplo de justificativa “Financeira” no item 3a do pré-teste.....	262
Figura 8.30- Exemplo de justificativa “Social” no item 3a do pré-teste.....	262
Figura 8.31 - Exemplo de justificativa “Especificações Técnicas” no item 3a do pré-teste	263
Figura 8.32 - Exemplo de justificativa “Questão pessoal” no item 3a do pré-teste .	263
Figura 8.33 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e com percentual” no item 3b do pré-teste	264
Figura 8.34 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e sem percentual” no item 3b do pré-teste	264
Figura 8.35 - Exemplo de resposta com justificativa e percentual no item 3b do pré-teste	264
Figura 8.36 - Exemplo de resposta com justificativa e percentual no item 3b do pré-teste	264
Figura 8.37 - Exemplo de resposta “sem justificativa” com especulação numérica - item 3c do pré-teste.....	265
Figura 8.38 - Exemplo de resposta “sem justificativa” na Língua natural escrita - item 3c do pré-teste	266
Figura 8.39 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de celulares das marcas favoráveis.....	266
Figura 8.40 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de marcas.....	267
Figura 8.41 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 3c do pré-teste	267
Figura 8.42 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 3c do pré-teste	268

Figura 8.43 - Enunciado da Questão 4 do pré-teste na representação gráfica.....	269
Figura 8.44 - Enunciado da Questão 4 do pré-teste na Língua natural escrita.....	270
Figura 8.45 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 4a do pré-teste	270
Figura 8.46 - Exemplo de resposta da categoria “Considera a quantidade de temperatura” no item 4a do pré-teste.....	271
Figura 8.47 - Exemplo de resposta da categoria “Justifica em função do cálculo errado” no item 4a do pré-teste.....	271
Figura 8.48 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 4a do pré-teste	272
Figura 8.49 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 4a do pré-teste	272
Figura 8.50 - Exemplo de resposta com justificativa errada no item 4b do pré-teste	273
Figura 8.51 - Exemplos de respostas adequadas no item 4b do pré-teste	273
Figura 8.52 - Enunciado da Questão 5 do pré-teste, com múltiplas representações	274
Figura 8.53 - Exemplo de resposta “Considera apenas os elementos do Nordeste ou Brasil” no item 5a do pré-teste	275
Figura 8.54 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado, no item 5a do pré-teste	276
Figura 8.55 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 5a do pré-teste	276
Figura 8.56 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 5a do pré-teste	276
Figura 8.57 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 5b do pré-teste	277
Figura 8.58 - Exemplos de respostas adequadas no item 5b do pré-teste	278
Figura 8.59 – Atividade 1 Impressa - Tipo A e B	290
Figura 8.60 - Exemplo de resposta com justificativa “idade” na atividade impressa 1a	293
Figura 8.61 - Exemplo de resposta com justificativa “renda familiar” na atividade impressa 1 ^a	293
Figura 8.62 - Exemplo de resposta com a escolha “mulheres” na atividade impressa 1b.....	294

Figura 8.63 - Exemplo de resposta com justificativa “Jovens” na atividade impressa 1c	295
Figura 8.64 - Exemplo de resposta com justificativa “Idosos” na atividade impressa 1c	295
Figura 8.65 - Exemplo de resposta com justificativa “favorável” à proibição dos jogos na atividade impressa 1d	296
Figura 8.66 - Exemplo de resposta com justificativa “contrária” à proibição dos jogos na atividade impressa 1d	296
Figura 8.67 – Atividade 1 (slide) – item a – duas versões	298
Figura 8.68 – Atividade 1 (slide) – item b – duas versões	301
Figura 8.69 – Atividade 1 (slide) – item d – duas versões	304
Figura 8.70 – Slide do quarto momento do primeiro dia de intervenção	307
Figura 8.71 – Cálculo das combinações possíveis no jogo da Mega-Sena	310
Figura 8.72 – Slide do primeiro momento do segundo dia de intervenção	313
Figura 8.73 – Slide com dados autênticos	317
Figura 8.74 – Primeira atividade do 2º dia de intervenção	319
Figura 8.75 – Primeira atividade impressa do segundo dia de intervenção	324
Figura 8.76 – Exemplo de resposta adequada no item 1a	325
Figura 8.77 – Exemplo de resposta inadequada no item 1a	326
Figura 8.78 – Exemplo de resposta adequada ao item 1b	327
Figura 8.79 – Exemplo de resposta inadequada ao item 1b	327
Figura 8.80 – Exemplo de resposta inadequada no item 1c	328
Figura 8.81 – Exemplo de resposta inadequada no item 1c	328
Figura 8.82 – Terceira atividade do 2º dia de intervenção	329
Figura 8.83 – Segunda atividade impressa do segundo dia de intervenção	332
Figura 8.84 – Exemplo de resposta adequada na segunda atividade impressa	333
Figura 8.85 – Exemplo de resposta inadequada na segunda atividade impressa ..	333
Figura 8.86 – Última atividade (slide).....	336
Figura 8.87 – Última atividade impressa	340
Figura 8.88 – Exemplo de resposta adequada ao item a da terceira atividade impressa	341
Figura 8.89 – Exemplo de resposta inadequada ao item a da terceira atividade impressa	341
Figura 8.90 – Exemplo de resposta adequada ao item b da terceira atividade	

impressa	342
Figura 8.91 – Exemplo de resposta inadequada ao item b da terceira atividade	
impressa	343
Figura 8.92 – Exemplo de resposta adequada ao item c da terceira atividade	
impressa	344
Figura 8.93 – Exemplo de resposta inadequada ao item c da terceira atividade	
impressa	344

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 - Tipos de situações segundo Gal (2005)	41
Quadro 2.2 - Modelo de Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005).....	42
Quadro 2.3 - Exemplo de eventos.....	45
Quadro 2.4 - Tipos de contextos propostos por Gal (2005).....	51
Quadro 2.5 - Áreas para as questões críticas propostas por Gal (2005)	51
Quadro 2.6 - Relação entre significados e as representações	59
Quadro 4.1 - Organização das questões da atividade diagnóstica	78
Quadro 5.1 - Competências Gerais da Educação Básica	125
Quadro 5.2 - Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio	127
Quadro 5.3 - Habilidades Específicas de Probabilidade na BNCC	131
Quadro 5.4 - Habilidades Específicas de Probabilidade para o Ensino Médio	133
Quadro 6.1 - Categorias adotadas para análise dos livros didáticos	138
Quadro 8.1 - Diálogo inicial no 1º dia de intervenção, nas turmas A e B	280
Quadro 8.2 – Primeira atividade do 1º dia	282
Quadro 8.3 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1a da atividade do slide nas turmas A e B	299
Quadro 8.4 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1b da atividade do slide, nas turmas A e B	302
Quadro 8.5 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1c da atividade do slide nas turmas A e B	303
Quadro 8.6 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1d da atividade do slide nas turmas A e B	305
Quadro 8.7 – Diálogo durante o 4º momento da intervenção nas turmas A e B	306
Quadro 8.8 – Diálogo durante o 4º momento da intervenção nas turmas A e B	308
Quadro 8.9 – Diálogo sobre a Mega-Sena - Turmas A e B.....	309
Quadro 8.10 – Diálogo inicial do 2º dia de intervenção nas Turmas A e B	314
Quadro 8.11 – Diálogo da 1ª atividade da intervenção nas Turmas A e B	319
Quadro 8.12 – Diálogo durante a 1ª atividade da intervenção nas Turmas A e B...321	321
Quadro 8.13 – Diálogo inicial durante a 3º atividade nas turmas A e B	330
Quadro 8.14 – Diálogo da última atividade da intervenção nas turmas A e B.....336	336

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 - Proposta da questão nos livros de Conhecimento Específico	142
Tabela 6.2 - Proposta da elaboração de contexto nos livros de Conhecimento Específico	148
Tabela 6.3 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à categoria “Contexto presente no enunciado da questão”	153
Tabela 6.4 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à categoria “Pesquisa Estatística”	155
Tabela 6.5 - Análise dos livros de Conhecimento com relação à categoria “Significados”	159
Tabela 6.6 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à subcategoria “Representação da questão”	168
Tabela 6.7 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação a subcategoria “Representação solicitada para o estudante”	169
Tabela 6.8 - Proposta da questão nos livros de Projetos Integradores	177
Tabela 6.9 - Tipos de Contexto nos livros de Projetos Integradores.....	184
Tabela 6.10 - Análise dos livros de Projetos Integradores com relação à categoria “Significados”.....	189
Tabela 6.11 - Subcategoria “ <i>Representação solicitada para o estudante</i> ” nos livros de Projetos Integradores	194
Tabela 7.1 - Média de acertos dos participantes	202
Tabela 7.2 - Média de acertos dos participantes por tipo de teste	202
Tabela 7.3 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 1a)	204
Tabela 7.4 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 1b)	208
Tabela 7.5 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 2a)	212
Tabela 7.6 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 2b)	215
Tabela 7.7 - Percentual de respostas considerando ano e teste (Questão 3a).....	219
Tabela 7.8 - Percentual de respostas considerando ano e teste (Questão 3b).....	222
Tabela 7.9 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 3c)	

.....	225
Tabela 7.10 - Percentual de resposta considerando ano e teste (Questão 3d).....	230
Tabela 7.11 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 4a)	
.....	234
Tabela 7.12 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 4b)	
.....	236
Tabela 7.13 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 5a)	
.....	239
Tabela 7.14 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 5b)	
.....	241
Tabela 8.1 - Média de acertos dos participantes no pré-teste	248
Tabela 8.2 - Percentual por tipo de resposta e teste (Questão 1a)	250
Tabela 8.3 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 1b)	253
Tabela 8.4 - Percentual por tipo de resposta por teste (Questão 2a) do pré-teste ..	256
Tabela 8.5 - Percentual por tipo de resposta por teste (Questão 2b) do pré-teste ..	258
Tabela 8.6 - Percentual de respostas considerando o tipo de teste (Questão 3a) do pré-teste	262
Tabela 8.7 - Percentual de respostas por teste (Questão 3b) do pré-teste	263
Tabela 8.8 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 3c) do pré-teste	265
Tabela 8.9 - Percentual de resposta considerando ano e teste (Questão 3d) do pré-teste	268
Tabela 8.10 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 4a) do pré-teste	270
Tabela 8.11 - Percentual por tipo de resposta por teste (Questão 4b) do pré-teste	272
Tabela 8.12 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 5a) do pré-teste	275
Tabela 8.13 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 5b) do pré-teste	277
Tabela 8.14 - Percentual de respostas dos estudantes ao item 1b	286
Tabela 8.15 - Percentual de respostas dos estudantes ao item 1c	288
Tabela 8.16 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1d	288
Tabela 8.17 - Percentual de respostas no item 1a na atividade impressa.....	291

Tabela 8.18 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1b na atividade impressa	293
Tabela 8.19 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1c da atividade impressa	294
Tabela 8.20 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1d na atividade impressa	296
Tabela 8.21 - Percentual de respostas dos estudantes ao item d	317
Tabela 8.22 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 1b)	326
Tabela 8.23 - Percentual de respostas dos estudantes sobre práticas recicláveis ..	334
Tabela 8.24 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 3a)	341
Tabela 8.25 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 3b)	342
Tabela 8.26 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 3c).....	343

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 2.1 - Exemplo de representação gráfica	49
Gráfico 6.1 - Tipo de dados propostos nos livros de Conhecimento Específico	145
Gráfico 6.2 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à categoria “Disponicionais”	173
Gráfico 6.3 - Tipo de dados propostos nos livros de Projetos Integradores.....	180
Gráfico 6.4 - Análise dos livros de Projetos Integradores com relação à categoria “Elementos dispositionais”	196

LISTA DE SIGLAS

ABDI	Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial
ABRELPE	Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais
ANOVA	Análise de Variância
BETS	Apostas Esportivas Online
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNI	Confederação Nacional da Indústria
COVID – 19	Doença por Coronavírus-19
EM	Ensino Médio
GEFIPMat	Grupo de Estudo Sobre a Formação e Identidade do Professor que Ensina Matemática
GREF	Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICS	Instituto Clima e Sociedade
INMET	Instituto Nacional de Meteorologia
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
ODS	Objetivos de Desenvolvimento Sustentável
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
ONU	Organização das Nações Unidas
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
SPSS	Statistical Package for the Social Sciences
STEAM	Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics
SUS	Sistema Único de Saúde
UESC	Universidade Estadual de Santa Cruz
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	31
1.1 DIMENSÃO PESSOAL: QUEM SOU EU?	31
1.2 DIMENSÃO SOCIAL: DIVERSAS REPRESENTAÇÕES DE PROBABILIDADE NO COTIDIANO	33
1.3 DIMENSÃO PEDAGÓGICA.....	34
2 BASE TEÓRICA	39
2.1 O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO.....	39
2.2 SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE E SUAS RELAÇÕES COM AS REPRESENTAÇÕES	53
3 REVISÃO DA LITERATURA	60
3.1 DESAFIOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA.....	60
3.2 O PAPEL DAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE	64
3.3 LIVRO DIDÁTICO E REPRESENTAÇÃO.....	70
4 MÉTODO.....	74
4.1 OBJETIVOS	74
4.2 METODOLOGIA.....	74
5 RESULTADOS: ANÁLISE DOS CURRÍCULOS	124
5.1 COMO É PROPOSTO O ENSINO DE PROBABILIDADE NA BNCC?	124
6 RESULTADOS: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS	138
6.1 LIVROS DE CONHECIMENTO: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA.....	139
6.2 LIVROS DOS PROJETOS INTEGRADORES “MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS”	175
6.3 LIVROS DE PROJETO DE VIDA	197
6.4 REFLEXÕES GERAIS	199
7 RESULTADOS: O QUE SABEM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO SOBRE PROBABILIDADE	201
7.1 REFLEXÕES GERAIS	243
8 RESULTADOS: INTERVENÇÃO DE ENSINO	247
8.1 ANÁLISE DO PRÉ-TESTE	247
8.2 ANÁLISE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO	279
8.3 ANÁLISE DO 1º DIA DE INTERVENÇÃO DE ENSINO	280
8.4 ANÁLISE DO 2º DIA DE INTERVENÇÃO DE ENSINO	312

8.5 REFLEXÕES SOBRE AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS DESENVOLVIDAS	344
CONCLUSÕES	348
REFERÊNCIAS.....	356

1 INTRODUÇÃO

As ações vividas pelo professor no ambiente escolar podem proporcionar inquietações e situações reflexivas que estimulam a busca de novos conhecimentos e novas práticas que colaborem significativamente para a sua prática docente. Nesse contexto, serão apresentadas a seguir as dimensões que motivaram a tessitura desta tese, propiciando a correlação entre as dimensões pessoal, social e pedagógica atreladas ao campo da Educação Matemática, acerca do ensino de Probabilidade, por meio do Letramento Probabilístico, para estudantes do Ensino Médio.

Dessa forma, seção a seguir apresentará inicialmente a dimensão pessoal que colaborou para a proposta desta pesquisa. Por esse motivo, exclusivamente ela está organizada na primeira pessoa do singular. As outras dimensões que compõem esta introdução e os demais capítulos do trabalho estão organizados na primeira pessoa do plural, por tratar-se de uma reflexão coletiva e colaborativa.

1.1 DIMENSÃO PESSOAL: QUEM SOU EU?

Eu, Caio Sérgio Oliveira Xavier, sou Licenciado em Matemática (2012), Especialista em Ensino de Ciências e Matemática (2015) e Mestre em Educação Matemática (2015), todas essas formações pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), que fica localizada na região Sul da Bahia, entre as cidades de Itabuna e Ilhéus. Desde que iniciei a graduação, no ano de 2006, projetava que futuramente iria fazer um doutorado e obter o tão sonhado título de “Doutor”.

Ao terminar o mestrado, dúvidas, inseguranças e medos permeavam os meus pensamentos. Quais os passos que eu deveria tomar: fazer a seleção para o doutorado ou ingressar na carreira docente? Lembro-me de uma das últimas aulas do mestrado: ao conversar com uma professora sobre minhas angústias, ela sugeriu que eu fosse vivenciar a profissão, lecionar e, posteriormente, sem pressa, cursaria o doutorado.

Assim, ao concluir o mestrado em agosto de 2015 e sem ter decidido qual trajetória tomar, optei por fazer a seleção para o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, para

ingresso no ano de 2016 e, concomitantemente, fazer a seleção para professor substituto da Universidade do Estado da Bahia – Campus VII, que fica localizada na cidade de Senhor do Bonfim.

Fui aprovado na seleção para professor substituto, função na qual atuei, de maneira exclusiva, durante todo o ano de 2016. No ano seguinte, mais precisamente em março de 2017, fui convocado para assumir uma vaga efetiva de professor de Matemática da rede estadual de Pernambuco. Permaneci em ambos os cargos até o mês de janeiro de 2019, quando também fui convocado pela rede estadual da Bahia.

Em ambas as redes de educação, minha carga horária é majoritariamente no Ensino Médio. No ano de 2022, fui convidado a integrar o Grupo de Estudo Sobre a Formação e Identidade do Professor que Ensina Matemática – (GEFIPMat), que propiciou a interação entre professores da Educação Básica, professores do Ensino Superior e estudantes de graduação em discussões sobre o Letramento Probabilístico. As reflexões advindas das reuniões do grupo, associadas às minhas aspirações anteriores e experiências vivenciadas em sala de aula, estimularam-me a prestar, mais uma vez, a seleção para doutorado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE, para ingresso no ano de 2023, seleção para a qual tive êxito.

Esses fatores motivaram meu interesse em investigar sobre o Letramento Probabilístico com estudantes do Ensino Médio. A escolha dessa temática deu-se ao considerar a minha experiência como professor efetivo da rede estadual de Pernambuco e da Bahia que desenvolveu uma atividade em parceria com os colegas do grupo de estudo e a aplicou em suas turmas do Ensino Médio. Essa experiência estimulou reflexões que motivaram o estudo desse campo da Educação Matemática.

Até este ponto do trabalho, venho apresentando, em primeira pessoa do singular, as motivações pessoais que incitaram o desenvolvimento desta tese. As etapas subsequentes serão redigidas na primeira pessoa do plural, visto que este estudo é resultado das reflexões advindas da cooperação com a minha orientadora (Professora Dr^a Gilda Guimarães), com o coorientador (Professor Dr. André Araújo) e com o Grupo de Estudos em Educação Estatística no Ensino Fundamental (GREF).

O GREF, criado no ano de 2008, está situado na Universidade Federal de Pernambuco, é vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica e conta com a participação de mestrandos e doutorandos do referido Programa. As pesquisas do GREF versam sobre diferentes temas que estão

associados ao processo de ensino e aprendizagem da Estatística e Probabilidade, em todos os níveis de ensino. Dentre esses temas, optamos por nos apoiar no Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005), considerando a análise de documentos oficiais e livros didáticos e a análise da utilização de diferentes representações para o ensino de Probabilidade.

Após pontuarmos os elementos da dimensão pessoal, na sequência serão explicitados os elementos da dimensão social que motivaram as opções que nos propusemos a investigar.

1.2 DIMENSÃO SOCIAL: DIVERSAS REPRESENTAÇÕES DE PROBABILIDADE NO COTIDIANO

Os conceitos relativos à Probabilidade permitem, mesmo que de forma implícita, analisarmos eventos aleatórios e incertos. Smaniotto, Ody, Ballejo, Herzog e Viali (2019) afirmam que a vida das pessoas é guiada a novos caminhos por meio de eventos aleatórios, mesclando a previsão e interpretação de situações de incerteza. Quanto a isso, Oliveira (2014) e Eugênio, Monteiro e Carvalho (2021) ressaltam que podemos analisar diversas situações do cotidiano pautados nesse conceito.

Para Lopes, Teodoro e Rezende (2010), inicialmente, as noções probabilísticas eram utilizadas apenas com a finalidade de prever as chances de vitória em jogos de azar e/ou cartas. Todavia, atualmente, a Probabilidade está aplicada a distintas áreas da atividade humana. Dessa forma, ao avaliarmos os riscos de uma compra, ao assistir à previsão do tempo durante o jornal, ao escolher um trajeto para a escola/o trabalho com menor chance de engarrafamento, estamos imersos em situações que envolvem um grau de aleatoriedade e imprecisão, nas quais fazemos uso de elementos probabilísticos que auxiliam na tomada de decisão.

Essas decisões também refletem as crenças e os sentimentos das pessoas em relação ao risco. Quanto a isso, Santos (2020) ressalta, por exemplo, que em um jogo de loteria todos os números têm a mesma chance de serem sorteados, contudo, as pessoas, ao fazerem suas escolhas, tendem a não escolher números consecutivos, levando em conta a crença de que é pouco provável sair esses números.

Nesse viés, Gal (2005) e Batanero (2005) assinalam que a Probabilidade tem um papel fundamental na compreensão de fenômenos aleatórios, ou seja, de natureza não determinística, cujos resultados não são conhecidos de antemão, mas podem ser calculados.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018) propõe que todos os seres humanos necessitam ter habilidades para analisar, coletar, interpretar e representar dados de diversos contextos, possibilitando que eles emitam opiniões e tomem decisões adequadas.

Dentre outros fatores, essa compreensão da Probabilidade em situações cotidianas perpassa a capacidade de visualizar, analisar e interpretar as maneiras possíveis de comunicar o acaso. Sendo assim, precisamos compreender as diferentes representações probabilísticas de eventos aleatórios, como, por exemplo, analisar um gráfico referente à disputa eleitoral; analisar uma tabela com previsão do tempo; utilizar um diagrama de árvore para decidir qual pacote de internet é mais viável à nossa realidade; e entender termos linguísticos usados para comunicar o acaso em propagandas.

Nesse contexto, essas representações podem auxiliar na análise e comparação de fenômenos aleatórios; na tomada de decisões coerentes pautadas em dados probabilísticos; na comunicação de informações de maneira clara, estabelecendo relações. Isso implica diretamente no desenvolvimento do pensamento crítico. Essas reflexões vão ao encontro do que é proposto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – LDB (Brasil, 1996), ao definir, no Artigo 35, que o Ensino Médio, como última etapa da Educação Básica, deve propiciar ao estudante o seu aprimoramento como pessoa, abrangendo a sua formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.

Ademais, Mendonça e Lopes (2010) defendem que o Ensino Médio no Brasil tem a meta de formar cidadãos autônomos, capazes de compreender os processos produtivos. Espera-se, ainda, que, ao concluírem esse ciclo de ensino, os estudantes estejam preparados para atuar na sociedade.

1.3 DIMENSÃO PEDAGÓGICA

Dentre os diversos ramos da Matemática, a Probabilidade é o único que investiga eventos não determinísticos e incertos do nosso cotidiano, o que reforça a sua importância no processo de ensino e aprendizagem e a necessidade de

realização de pesquisas sobre o tema. Quanto a isso, Gal (2005) apresenta como justificativa para a sua presença no ambiente escolar o fato de eventos incertos fazerem parte de nossas vidas de múltiplas maneiras. Além disso, considerando a organização curricular da Educação Básica brasileira, destacamos a relevância desses conceitos para a formação dos estudantes, dada a sua presença em todas as etapas do ensino, com a organização veiculada pela BNCC, documento normativo em vigência no país.

Por outro lado, podemos dizer que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática está associado diretamente à transição entre diferentes representações, independentemente da área. Quanto a isso, Amado (2022) ressalta que o uso de múltiplas representações é primordial para a compreensão de conceitos matemáticos, logo, os professores precisam fazer uso das diversas maneiras de apresentar um conceito para colaborar com a aprendizagem dos estudantes.

No ensino da Probabilidade, podemos identificar a presença da representação gráfica, da diagramal, da tabular, da numérica e da língua natural escrita como elementos primordiais para os estudantes compreenderem esse conceito. Mutara (2015) pontua que o ensino e a aprendizagem da Probabilidade são desafiadores, por isso sugere o uso de diferentes representações para mediar a aprendizagem. Do mesmo modo, Anastasiadou e Chadjipantelis (2008) descrevem as representações como uma forma de possibilitar aos estudantes interpretarem situações e compreenderem relações relevantes incorporadas em problemas probabilísticos.

Dessa forma, nesta tese, buscamos articular estes dois elementos – Probabilidade e múltiplas representações –, para identificar como o uso dessas formas de apresentação de dados pode estar atrelado ao posicionamento crítico, reflexivo e argumentativo dos estudantes. Nesse contexto, alguns pesquisadores, como Canaveze (2013), Oliveira (2014), Mutara (2015), Caberlim (2015), Custódio (2017), Vásquez e Alsina (2017), Moraes (2017), Figueiredo (2019), Oliveira, Santos e Calejon (2020), Post e Prediger (2022), Zorzos e Avgerinos (2023), Franco Seguí e Alsina (2024), dentre outros, desenvolveram estudos sobre as possíveis dificuldades da utilização de diversas representações e as implicações dessa utilização no ensino de Probabilidade.

Para além disso, acreditamos na importância de o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade ser pautado nos variados tipos de significados e de representações, de forma a estimular os estudantes a conseguirem interpretar,

analisar e posicionar-se frente a situações aleatórias, tomando decisões coerentes. Sendo assim, tomamos como base teórica a noção de Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005), pautado em avaliar, interpretar e fornecer julgamentos de dados probabilísticos considerando os variados tipos e contextos de Probabilidade, articulados às suas crenças e sentimentos.

Considerando a perspectiva do Letramento Probabilístico, associada aos estudos que versam sobre a utilização de múltiplas representações para o ensino e aprendizagem de Probabilidade, esta tese traz como pergunta diretriz: *Qual a importância da compreensão das diferentes representações para a aprendizagem de Probabilidade de estudantes do Ensino Médio?* Para responder a essa questão, instituímos como objetivo geral: *Investigar o que vem sendo proposto no ensino de Probabilidade para estudantes do Ensino Médio, e o que podem aprender, a partir de intervenção de ensino que considere a perspectiva do Letramento Probabilístico, valorizando diferentes representações.*

Para atingir esse objetivo geral, estabelecemos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005), o que é proposto para o conceito de Probabilidade nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Pernambuco e Currículo da Bahia);
- Avaliar as representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD/2021, relacionadas a Probabilidade;
- Investigar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à compreensão do conceito de Probabilidade a partir de diferentes representações;
- Analisar uma sequência de ensino envolvendo Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações, para estudantes do Ensino Médio de Pernambuco e Bahia.

Dessa forma, buscando a articulação entre a questão de pesquisa, os objetivos propostos, a base teórica e a revisão de literatura, organizamos metodologicamente quatro estudos. No primeiro estudo, analisamos, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005), os documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, documento curricular de Pernambuco, documento curricular da Bahia), nos

quais analisamos as habilidades e os objetos de conhecimento concernentes ao conceito de Probabilidade.

No segundo estudo, analisamos as representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD/2021, relacionadas ao tema Probabilidade. Para isso, consideramos todas as coleções dos livros de conhecimento da unidade temática Probabilidade e Estatística, dos livros de Projetos Integradores e dos livros dos Projetos de Vida.

No terceiro estudo, investigamos quais eram os conhecimentos prévios de estudantes do 1º e 3º anos do Ensino Médio de unidades escolares da Bahia e de Pernambuco, em relação à compreensão das diferentes representações do conceito de Probabilidade. Para essa investigação, desenvolvemos uma atividade diagnóstica organizada em dois testes (Teste A e Teste B), os quais apresentavam a mesma questão, porém com diferente representação dos dados.

No quarto estudo, desenvolvemos um processo formativo com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, abordando diferentes representações para a aprendizagem de Probabilidade. Para isso, desenvolvemos uma sequência de ensino que envolia Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações e dos elementos disposicionais, com estudantes de duas turmas de unidades escolares públicas dos estados de Pernambuco e da Bahia. Essa proposta foi organizada em dois momentos: pré-teste e intervenção. No pré-teste, utilizamos a mesma atividade proposta no terceiro estudo. A intervenção foi sistematizada em dois encontros presenciais com cada turma, com duração de três aulas seguidas, de 50 minutos. No primeiro encontro, discutimos o contexto dos jogos de azar, mais precisamente, das apostas esportivas online; e no segundo encontro, o contexto ambiental, especificamente, a sustentabilidade ambiental.

Sendo assim, além dessas considerações introdutórias, estruturamos esta tese em oito capítulos. No segundo capítulo, apresentamos a base teórica deste estudo, especificamente o Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005), bem como relacionamos os significados de Probabilidade e suas representações.

O terceiro capítulo, referente à revisão da literatura, está sistematizado em três seções que discutem, respectivamente: a) os desafios colocados pelo ensino e aprendizagem da Probabilidade no Ensino Básico; b) o papel das diferentes

representações para a aprendizagem desse conceito; e, por fim, c) os estudos que desenvolveram a análise de livros didáticos de Probabilidade.

O quarto capítulo apresenta os métodos adotados para o desenvolvimento da pesquisa, explicitando os participantes, os instrumentos e os procedimentos adotados em cada estudo, bem como os critérios utilizados para a análise.

O capítulo 5 apresenta os resultados de Probabilidade nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Pernambuco e Currículo da Bahia). O capítulo 6 apresenta os resultados referentes às análises das representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. O capítulo 7 apresenta os resultados sobre os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à compreensão do conceito de Probabilidade a partir de diferentes representações.

A partir desses resultados, apresentamos no capítulo 8 a descrição e análise da sequência didática desenvolvida com turmas de 3º ano do Ensino Médio.

Finalmente, apresentamos as conclusões e as referências.

2 BASE TEÓRICA

Iniciamos este capítulo apresentando a perspectiva do Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005), incluindo os diferentes significados de Probabilidade e, em seguida, apresentamos estudos relacionados às diferentes representações.

2.1 O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

Atualmente, fazemos parte de uma sociedade na qual temos acesso a informações em *outdoors*, jornais, internet, anúncios, revistas, entre outros meios de comunicação, o que requer habilidades associadas à leitura, interpretação e escrita em diversos contextos, interligadas à ideia do letramento. Dessa maneira, podemos compreender que um cidadão é “letrado” se possuir a habilidade de analisar dados e emitir um posicionamento, a partir de uma análise crítica e reflexiva das informações, que podem estar associadas a contextos sociais, econômicos, políticos, dentre outros.

A origem do termo “letramento” surgiu na década de 1980, associada à área das linguagens e da educação, com uma alusão ao termo latino “*litera*”, que significa “letra”, e ao termo inglês “*literacy*”. Nesse sentido, Soares (2005) defende que letramento é o resultado de práticas avançadas e complexas relacionadas à leitura e à escrita, com consequências econômicas, políticas e sociais. Sendo assim, fazemos uso de diversos letramentos em nossas ações diárias, ao fazermos a interpretação e assimilação de elementos para a tomada de decisão.

Trazendo a ideia de letramento para a área da Matemática, temos a concepção do Letramento Matemático, que corresponde à apreensão e utilização dos conceitos matemáticos para a resolução de situações do cotidiano. Nesse aspecto, o “*Programme for International Student Assessment-PISA*¹ / 2012” esclarece que o letramento matemático

é a capacidade de um indivíduo de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Inclui o raciocínio matemático e o uso de conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e prever fenômenos. Ajuda os indivíduos a reconhecerem o papel que a matemática desempenha no

¹ O PISA é um Programa gerido pela OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), com o intuito de avaliar a aprendizagem e o desempenho de estudantes de 15-16 anos, de 80 países vinculados a essa organização.

mundo e tomar decisões e julgamentos bem fundamentados necessários a cidadãos construtivos, empenhados e reflexivos. (OCDE/PISA, 2012, p. 24-25, tradução nossa)

Sendo assim, ressalta-se a relevância de compreender se os estudantes, ao final da Educação Básica, têm a habilidade de aplicar os conceitos matemáticos para resolver situações expressivas da sua realidade, tendo como uma das capacidades fundamentais a utilização e interpretação de múltiplas representações (gráficos, tabelas, diagramas, imagens, equações, fórmulas e materiais concretos), ao deparar-se com situações do cotidiano. Nesse aspecto, concordamos com a importância do uso de variadas representações para o letramento matemático e especificamente buscamos a relação do letramento com o processo de ensino e aprendizagem de conceitos probabilísticos.

Nessa mesma perspectiva, o pesquisador israelense Iddo Gal (2005) utiliza a expressão “Letramento Probabilístico”. Um adulto é “letrado” probabilisticamente quando tem habilidades que o permitem analisar, discutir, posicionar-se criticamente com base nas informações probabilísticas presentes no seu dia a dia. O autor faz menção ao Letramento Probabilístico de pessoas adultas, porém ressaltamos que essas concepções precisam ser iniciadas/discutidas em toda a fase escolar. Nesta pesquisa, estamos interessados na última etapa da Educação Básica, o Ensino Médio.

Gal (2005) ressalta a importância do ensino e aprendizagem de Probabilidade na escola, uma vez que fenômenos aleatórios permeiam nossas vidas de várias maneiras. Segundo o autor,

noções sobre probabilidade, incerteza e risco aparecem em várias mensagens que os adultos encontram, como ao receber previsões de riscos médicos, financeiros ou ambientais da mídia, profissionais de marketing, autoridades públicas, médicos, conselheiros ou organizações de pesquisa. (Gal, 2005, p. 44, tradução nossa)

Esse autor articula conceitos da Probabilidade com a possibilidade de analisar eventos casuais e fenômenos aleatórios e incertos do cotidiano, propondo, assim, a concepção do Letramento Probabilístico, considerando que fatores inerentes ao sujeito, como o seu conhecimento de mundo, suas concepções pessoais, sua interpretação quanto à probabilidade e sua aptidão de entender e analisar situações influenciam seus pensamentos e ações.

Para o autor, existem três tipos de situações de numeramento² passíveis de estimular análises, interpretações e a tomada de decisões referentes a dados probabilísticos imersos em contextos cotidianos (Quadro 2.1).

Quadro 2.1 - Tipos de situações segundo Gal (2005)

Situações computacionais ou generativas	Situações interpretativas	Situações de tomada de decisão
<p>Para a sua resolução, exigem a manipulação ou cálculo.</p> <p>Exemplo: Calcular as estimativas de obter sucesso em um jogo de azar.</p>	<p>Não requerem a manipulação numérica, e sim uma opinião ou posicionamento.</p> <p>Exemplo: Argumentos utilizados ao analisar os dados de uma pesquisa apresentados em uma notícia.</p>	<p>Trazem uma subjetividade das ações e exigem que as pessoas determinem seu julgamento sobre tendências futuras, preferências, dentre outros.</p> <p>Exemplo: Escolher a marca de um determinado aparelho eletrônico.</p>

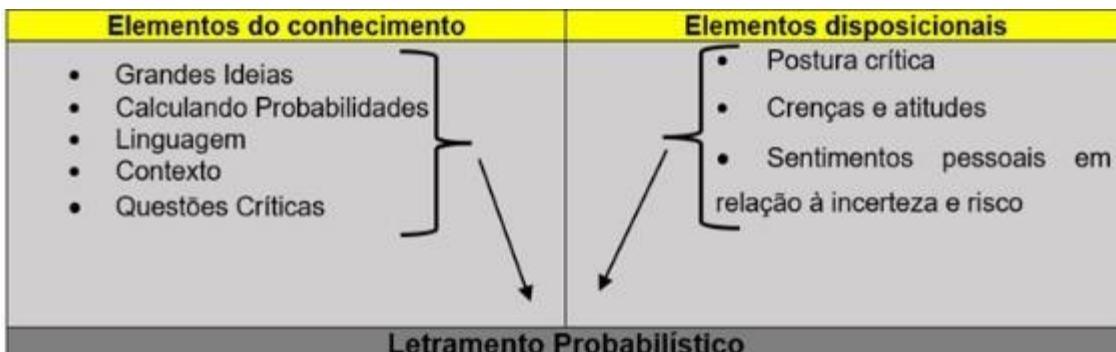
Fonte: Adaptado de Gal (2005)

Gal (2005) sinaliza a relevância dessas situações para discutir o Letramento Probabilístico. A compreensão e o comportamento frente a essas situações requerem conceitos de Probabilidade para além do conhecimento de cálculos. Ser letrado probabilisticamente requer argumentar a partir dos dados, emitindo julgamentos e opiniões para tomar decisões coerentes e justas.

O modelo de Letramento Probabilístico envolve os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais, que devem ser compreendidos de forma articulada (Quadro 2.2).

² A capacidade de uma pessoa compreender e interpretar dados numéricos e matemáticos presentes no seu cotidiano é denominado por Gal (2005) como “numeramento”.

Quadro 2.2 - Modelo de Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005)



Fonte: Adaptado de Gal (2005)

Os elementos estão listados separadamente para facilitar a apresentação. Todavia, Gal (2005) ressalta a necessidade da interação entre todos os elementos durante o comportamento ou a aprendizagem real. Isso significa que o foco instrucional apenas em um ou dois dos elementos não será suficiente para desenvolver um comportamento do Letramento Probabilístico.

Os **Elementos do Conhecimento** envolvem cinco componentes cognitivos: *grandes ideias, calculando probabilidades, linguagem, contexto e questões críticas*. O primeiro componente – grandes ideias – corresponde, para Gal (2005), a noções fundamentais para a apreensão do conceito de Probabilidade como variabilidade, aleatoriedade, independência, incerteza/previsibilidade. Alguns aspectos dessas grandes ideias podem ser representados por símbolos matemáticos ou termos estatísticos, mas sua essência não pode ser totalmente captada por notações técnicas, sendo compreendida apenas intuitivamente.

A *variabilidade* é pertinente porque notadamente os eventos e fenômenos aleatórios apresentam variações em seus comportamentos e resultados, ou seja, se não houver variabilidade, não existe Probabilidade. A variabilidade está associada à Probabilidade frequentista, definindo a frequência com que um determinado evento ocorre, dada a sua incerteza. Nesse contexto, quanto maior for o grau de variabilidade do evento, mais difícil será prever o seu resultado. Por exemplo, ao desenvolver uma pesquisa sobre o uso de aparelhos tecnológicos numa determinada cidade, o fato de utilizarmos uma amostra representativa da população para fazer uma estimativa da proporção sobre determinado evento trata-se de uma situação de Probabilidade frequentista. Todavia, a depender da região em que essa pesquisa for realizada, bem como do gênero, da idade e do perfil socioeconômico dos participantes, a proporção

desses resultados pode ser diferente em cada amostra, apresentando, assim, uma variabilidade.

Quanto à *aleatoriedade*, são apresentadas duas vertentes pautadas em Bennett (1998) e Beltrami (1999), respectivamente. A primeira faz menção à possibilidade de não determinar um padrão para os resultados de um fenômeno. Por exemplo, ao propor um sorteio em uma turma com estudantes numerados de 1 a 40, não é possível afirmar uma ordem numérica para o sorteio, visto que todos os números têm a mesma chance de ser escolhidos, não havendo um padrão que determine o resultado do sorteio. A segunda vertente faz menção a eventos naturais que ocorrem sem uma causa determinística. Por exemplo, a Síndrome de Down é uma condição humana gerada a partir de uma mutação genética que ocorre de forma aleatória durante a formação dos cromossomos. Desse modo, não há uma razão particular que defina quando ou por que essa mutação ocorrerá.

A *independência* diz respeito a eventos que não têm relação entre si, logo, um evento não pode ser conjecturado a partir de outro. Nesse contexto, matematicamente: dois eventos (A e B) são independentes se e somente se $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Exemplificando, se considerarmos o lançamento de dois dados e observarmos duas situações: situação A - o primeiro dado sair um número ímpar, $A = \{1, 3, 5\}$; situação B - o segundo dado sair o número 6, $B = \{6\}$, ambos são independentes, pois os resultados de A não interferem no resultado de B. Portanto, dado o espaço amostral $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, tem-se:

$$P(A) = \frac{3}{6} \text{ e } P(B) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}$$

Em todos esses casos, previsões podem ser feitas, mas fatores inesperados podem alterar as previsões anteriores (ambientais – mudanças no sistema atmosférico; financeiras – mudanças no panorama econômico do país; saúde – fatores psicológicos), trazendo incerteza e impossibilitando afirmações exatas.

O segundo elemento do conhecimento é denominado “*calculando probabilidades*” e corresponde às formas de estimar a probabilidade de um evento. De acordo com Gal (2005), carecemos

estar familiarizados com as formas de encontrar a probabilidade de eventos, a fim de entender declarações probabilísticas feitas por outros, ou para gerar estimativas sobre a probabilidade de eventos e comunicar-se com outras pessoas sobre eles (p. 54).

Batanero (2005) sinaliza para a existência de cinco significados que fundamentam as situações de Probabilidade no cotidiano e para o seu ensino: *Intuitivo, Clássico, Frequentista, Subjetivo e Axiomático*.

O *significado Intuitivo* não requer do sujeito o cálculo da probabilidade para aferir a chance de determinada ação acontecer. Esse significado é influenciado pela experiência pessoal, por percepções individuais e pelo contexto específico. Nesse sentido, essa perspectiva reconhece que a probabilidade não é uma entidade fixa e objetiva, mas sim uma medida que varia de acordo com as experiências do cotidiano e as crenças de cada pessoa.

Como exemplo, podemos mencionar uma pessoa, que faz uso do transporte público, ter a noção do provável aumento do tempo, na hora do *rush*, para chegar a sua casa. Essa percepção não está fundamentada em cálculos probabilísticos, e sim nas experiências vivenciadas cotidianamente no trânsito, em horários de maior fluxo de transportes.

O *significado Clássico* foi proposto por Pierre Laplace e pondera que todos os possíveis resultados de uma situação têm a mesma oportunidade de acontecer, ou seja, têm um viés equiprovável. Exemplificando, podemos citar o caso do “lançamento de moedas”, em que as chances são de 50% para sair a face “cara” e 50% para sair a face “coroa”. Essa mensuração pode ser feita utilizando-se a razão entre os resultados favoráveis (1 opção) e o número total de resultados possíveis do evento (cara ou coroa = 2 opções).

O *significado Frequentista* busca, por meio de experimentos, fazer estimativas dos resultados de maneira a aproximar-se do valor real de a probabilidade do evento ocorrer. Assim, pauta-se na repetição da situação por várias vezes, dadas as mesmas condições e especificidades, permitindo inferir os resultados daquele experimento sem associá-los com as percepções do observador. Por exemplo, ao analisar a probabilidade de em um determinado bairro da cidade do Recife, no período de dois meses, ocorrer falta de energia elétrica, precisamos coletar esses dados por meio da observação e, posteriormente, calcular a frequência relativa desse evento. Quanto

maior for o período de observação, maior será a probabilidade de ter uma numeração próxima da realidade.

O *significado Subjetivo* é dividido em duas fases: *a priori* e *a posteriori*. Um indivíduo sabe a chance de ocorrência de um evento, a partir da regra de Bayes, a qual determina uma probabilidade a partir das consequências observadas, mas no decorrer do tempo ou de um experimento, ele aprende uma outra informação, o que o faz retificar ou não o valor inicial e gerar a probabilidade *a posteriori*. Dessa forma, a probabilidade subjetiva permite a determinação numérica das chances de um evento ocorrer a partir de dois aspectos: saberes experenciais e inserção de novos dados/informações durante a análise do evento. Por exemplo, uma pessoa acredita que um determinado candidato a governador será eleito em 2026, com base em suas próprias concepções ou informações limitadas. No entanto, ao ter acesso às pesquisas que simulam diversos cenários políticos, essa pessoa pode ajustar sua estimativa e mudar sua percepção, atualizando a probabilidade com base em novas informações.

Segundo Batanero (2005), esse significado, diferentemente do Frequentista, não requer a repetição do evento nas mesmas condições para a probabilidade ter sentido. Esse fator aumenta a possibilidade de aplicar os conceitos de Probabilidade em variadas áreas, tais como na medicina e na economia.

O significado *Axiomático* está associado à teoria das probabilidades proposta pelo matemático Kolmogorov (1933), trazendo um aspecto formal e englobando o rigor matemático das propriedades da Probabilidade. Por exemplo, as propriedades inerentes a evento complementar, evento certo/impossível, eventos mutuamente exclusivos. Para isso, consideramos um espaço amostral Ω equiprovável, finito e não vazio, e sendo A e B eventos de Ω , temos:

Quadro 2.3 - Exemplo de eventos

Propriedades	Eventos
$P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(\Omega)} = \frac{0}{n(\Omega)} = 0$	Evento impossível
$P(1) = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$	Evento certo
$P(A) + P(\bar{A}) = 1$	Evento complementar
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $Se A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A) + P(B)$	Eventos mutuamente exclusivos

Fonte: Livro didático aprovado no PNLD 2021

Sendo assim, podemos exemplificar essa concepção citando uma empresa que faz a venda de diversos materiais por meio de aplicativos online e que busca analisar o grau de receptividade de seus clientes em relação a suas compras. Logo, estimando que tenham sido vendidos 8000 produtos (espaço amostral) e tenham sido devolvidos 300 pedidos (evento analisado), temos que a probabilidade será dada por:

$$P(A): \frac{300}{8000} = 0.035$$

Esse resultado significa que a taxa de receptividade pelos compradores é expressiva, dada a sua proximidade em relação ao número 0. Ou seja, quanto mais próximos de zero os resultados forem, melhor para a empresa, que não precisará efetuar a devolução do dinheiro ou do produto aos compradores.

Quanto a essas visões probabilísticas, Gal (2005) defende que nós, seres humanos, devemos ter a consciência de que existem maneiras distintas de se obter estimativas probabilísticas e que elas podem ser originárias da conexão de variadas fontes. Em concordância com esse autor, acreditamos que, para isso acontecer, é preciso a inserção e discussão dessas estimativas no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica.

O terceiro elemento do conhecimento, “*linguagem*”, é crucial para o desenvolvimento desta tese, dada a nossa proposta de pesquisa. Justificamos essa escolha partindo da reflexão feita por Gal (2005), ao afirmar que a linguagem equivale às *maneiras* e aos *termos* adotados para comunicar o acaso, e que ela não vem recebendo a devida atenção na literatura educacional. O autor ressalta que os termos são empregados para expressar as várias maneiras de representar e de fazer referência à probabilidade de eventos reais.

Batanero (2005) afirma que, ao buscarmos resolver problemas, precisamos de símbolos, palavras, gráficos, tabelas e expressões algébricas para representar dados e soluções, bem como operações e conceitos utilizados. Todas essas expressões servem como sistemas de representação, ou seja, funcionam para substituir ou colocar-se no lugar do objeto representado e cumprem um papel instrumental na atividade matemática. Da mesma forma Vásquez e Alsina (2017) argumentam que os elementos linguísticos (expressões orais e escritas, símbolos e representações³)

³ Ponderando as reflexões de Gal (2005) e de Vásquez e Alsina (2017), adotamos o uso da nomenclatura “representações” para mencionar os elementos linguísticos da Probabilidade.

surgem durante o processo de ensino e aprendizagem, permitindo expressar qualitativamente a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. Nesse contexto, as autoras sistematizaram cinco tipos de representações: *verbal, numérica, tabular, gráfica e simbólica*.

A representação verbal (língua natural escrita) está associada à diversidade de termos e expressões usados para analisar e comunicar situações probabilísticas, a exemplo de palavras como “*certa, possível, impossível, provável, improvável, chance, azar, acaso, aleatório*”, que são comuns quando mencionamos os conceitos de Probabilidade. Por exemplo, ao analisarmos o enunciado da reportagem da Figura 2.1, podemos identificar a presença de termos probabilísticos.

Figura 2.1 - Exemplo de termo probabilístico

Você já deve ter ouvido falar que não é possível engravidar durante a menstruação, mas isso não é totalmente verdade. Embora seja improvável que você engravidie perto da ou durante a menstruação, ainda existe uma chance pequena de concepção nesse período do mês. Continue a leitura para aprender sobre as chances de engravidar e como o ciclo menstrual afeta a janela de fertilidade.

Fonte: CLEARBLUE. As chances de engravidar durante a menstruação. 2024. Disponível em: <https://br.clearblue.com/estou-gravida/engravidar-na-menstruacao#:~:text=As%20chances%20de%20engravidar%20durante,dias%20antes%20da%20pr%C3%B3xima%20menstrua%C3%A7%C3%A3o>. Acesso em: 16 de maio de 2024. Grifo nosso.

A representação numérica possibilita expressar quantitativamente a possibilidade de um evento acontecer, assim como as diferentes formas de apresentar dados probabilísticos (fracionária, decimal ou percentual). A maneira utilizada dependerá do contexto ou da aplicação específica (Figura 2.2).

Figura 2.2 - Exemplo de representação numérica

The screenshot shows a news article from CNN Brasil's 'Economia' section. The headline reads: "Probabilidade de corte de 0,25 ponto percentual nos juros não é maior que 0,75, diz Campos Neto". Below the headline, there is a brief summary: "Segundo o presidente do BC, uma de suas falas gerou um ruído lá sobre um tema de qual era o balanço de riscos sobre a taxa Selic do país". At the bottom of the article, it says "Da Reuters" and "18/10/2023 às 18:38 | Atualizado 18/10/2023 às 18:41". To the right of the text, there is a small portrait of a man.

Fonte: CNN BRASIL. Cortes da taxa de Juros. 2023. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/economia/financas/probabilidade-de-corte-de-025-ponto-percentual-nos-juros-nao-e-maior-que-075-diz-campos-neto>. Acesso em: 13 de maio de 2025.

Na representação tabular, os dados são sistematizados em linhas e colunas. Nas tabelas simples, cada linha apresenta os dados de maneira numérica ou qualitativa, e a coluna traz as propriedades específicas dos dados. Já as tabelas de dupla entrada permitem correlacionar as variáveis de forma bidimensional (horizontal e vertical). De forma geral, esse tipo de representação é amplamente utilizado em diversas áreas, como ciência de dados, estatística, banco de dados e relatórios de negócios, para a apresentação de frequências relativas e na estimativa de probabilidades (Figura 2.3).

Figura 2.3 - Exemplo de representação tabular

Time	Pts	J	V	E	D	GP	GC	SG	Probab. de título	Probab. de Libertadores	Probab. de Sul-Americana	Probab. de rebaixamento
Flamengo	75	36	22	9	5	74	24	50	98.0%	100.00%	0.00%	0.00%
Palmeiras	70	36	21	7	8	60	32	28	1.4%	100.00%	0.00%	0.00%
Cruzeiro	69	36	19	12	5	53	26	27	0.00%	100.00%	0.00%	0.00%
Mirassol	63	36	17	12	7	58	36	22	0.00%	100.00%	0.00%	0.00%
Botafogo	59	36	16	11	9	52	34	18	0.00%	83.9%	16.1%	0.00%
Fluminense	58	36	17	7	12	46	38	8	0.00%	71.2%	28.8%	0.00%
Bahia	57	36	16	9	11	48	44	4	0.00%	45.0%	55.0%	0.00%
São Paulo	48	36	13	9	14	40	46	-6	0.00%	0.00%	99.6%	0.00%
Corinthians	46	36	12	10	14	40	44	-4	0.00%	0.00%	94.3%	quase 0 %
Grêmio	46	36	12	10	14	42	48	-6	0.00%	0.00%	87.2%	quase 0 %
Vasco	45	36	13	6	17	55	53	2	0.00%	0.00%	69.0%	0.02%
Red Bull Bragantino	45	36	13	6	17	40	54	-14	0.00%	0.00%	69.7%	0.1%
Atlético MG	45	36	11	12	13	38	41	-3	0.00%	0.00%	58.3%	0.02%
Ceará	43	36	11	10	15	33	36	-3	0.00%	0.00%	4.6%	12.4%
Vitória	42	36	10	12	14	34	48	-14	0.00%	0.00%	9.4%	25.7%
Santos	41	36	10	11	15	39	50	-11	0.00%	0.00%	2.7%	45.2%
Internacional	41	36	10	11	15	41	53	-12	0.00%	0.00%	5.2%	35.9%
Fortaleza	40	36	10	10	16	39	53	-14	0.00%	0.00%	0.09%	80.6%
Juventude	34	36	9	7	20	34	65	-31	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%
Sport	17	36	2	11	23	28	69	-41	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%

Fonte: CHANCE DE GOL. Br25. 2025. Disponível em: <https://www.chancedegol.com.br/br25.htm>. Acesso em: 02 de dezembro de 2025.

A representação gráfica consiste em forma de apresentar dados associados a conceitos probabilísticos por meio de gráficos, o que torna as informações mais acessíveis e compreensíveis. Existem várias formas de representação gráfica, como, por exemplo, gráfico de barra, linha, coluna, setores, diagrama de árvore, diagrama de Venn, cada uma adequada a diferentes tipos de dados e objetivos de comunicação. O Gráfico 2.1 apresenta os resultados referentes à expectativa de vida dos brasileiros entre os anos de 1900 e 2021.

Gráfico 2.1 - Exemplo de representação gráfica



Fonte: DATTANI , S.; RODÉS-GUIRAO, L.; RITCHIE, H.; ORTIZ-OSPINAS, E.; ROSER, M. 2023. Disponível em <https://ourworldindata.org/life-expectancy>. Acesso em: 04 de setembro de 2024.

Por fim, a representação simbólica está atrelada ao uso de símbolos matemáticos que podem ser utilizados para comunicar a ocorrência de um evento (Figura 2.4).

Figura 2.4 - Exemplo de representação simbólica no livro didático

3ª propriedade

Se E é um evento do espaço amostral Ω então $0 \leq P(E) \leq 1$.

Fonte: Livro didático aprovado no PNLD 2021

Dessa maneira, quando o evento é “impossível” de ocorrer, é representado pelo número 0; e quando o evento é dito como “certo”, é representado pelo número 1, ou seja, a probabilidade de um caso ocorrer sempre estará no limiar do intervalo $[0,1]$. Ponderando esse fato, podemos fazer a análise da situação apresentada na Figura 2.5.

Figura 2.5 - Exemplo de representação simbólica

Incêndio, tornado ou tubarão?

O que você acha mais difícil acontecer: morrer em um incêndio, em um tornado ou em um ataque de tubarão? O professor Stephen A. Nelson da Universidade Tulane, estimou que a chance de morrer em um incêndio é 1 em 250, o que nos fornece uma probabilidade de 0,400%; já a chance de morrer em um tornado é de 1 em 60.000, equivalente a, aproximadamente, 0,167%; porém, se você costuma fazer mergulhos, a chance de morrer em um ataque de tubarão é de 1 em 8.000.000, ou seja, 0,000013%.

Fonte: ANHEMBI MORUMBI: ENSINO SUPERIOR DE EXCELÊNCIA EM SÃO PAULO. Especialista explica 15 fatos improváveis, porém mais fáceis de acontecer do que ganhar na Mega da Virada. 2024. Disponível em: <https://portal.anhembi.br/noticias/especialista-explica-15-fatos-improvaveis-porem-mais-faceis-de-acontecer-do-que-ganhar-na-mega-da-virada>. Acesso em: 17 de maio de 2024.

Ao analisarmos as três situações apresentadas no exemplo acima, podemos dizer que, dentre elas, é quase impossível uma pessoa falecer por ser atacada por um tubarão no contexto apresentado pelo professor, já que a probabilidade é mais próxima de zero (0,000013%). Vale salientar que, em outro contexto, tal como na cidade do Recife-PE – onde já foram registrados diversos casos de ataques de tubarão e não há a iminência de tornados –, esses resultados podem ser diferentes, e a probabilidade de alguém falecer por um ataque de tubarão poderá ser maior.

Segundo Coutinho, Silva e Almouloud (2011), as atividades desenvolvidas em relação à área da Estatística (na qual a probabilidade está inserida) exigem a necessidade da variabilidade de representações, tais como tabelas, gráficos e diagramas, o que implica a transição entre essas representações, para a construção de conceitos. Quanto ao uso de representações no ensino, Gal (2005) afirma que “*uma expectativa básica é que os alunos compreendam a intercambialidade de diferentes representações e se sintam à vontade para se movimentar entre elas*” (Gal, 2005, p. 56).

Nessa mesma compreensão, acreditamos que a mobilização e a integração entre as diferentes representações colaboram para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico dos estudantes, ao permitir que eles compreendam informações em diferentes contextos e formas, analisem a confiabilidade dos dados, posicionem-se criticamente e tomem decisões respaldadas.

O elemento “contexto” é importante para compreendermos que situações envolvendo incerteza estão imersas em diversos ambientes. Segundo Gal (2019), o contexto precisa ser autêntico, ou seja, um contexto que ocorra naturalmente no mundo exterior real, não sendo inventado ou fictício, um contexto que descreva algum fenômeno no mundo que pode ser descrito estatisticamente e que invoque uma genuína “necessidade de saber” e seja de interesse dos envolvidos. “A combinação dessas duas condições visa maximizar o senso de relevância do contexto para as vidas atuais ou futuras e melhorar a motivação e interesse” (Gal, 2019, p.5).

Os contextos autênticos foram sistematizados em dez áreas-chave (Quadro 2.4).

Quadro 2.4 - Tipos de contextos propostos por Gal (2005)

CONTEXTOS	
1	Ambientais e Físicas (por exemplo, previsões climáticas, probabilidade de temporais)
2	Tecnológicas (por exemplo, garantia da qualidade de equipamentos e da fabricação)
3	Sociais e Psicológicas (por exemplo, passeio com amigos, encontros de serviço, esportes)
4	Saúde/Risco (por exemplo, questões genéticas, doenças epidêmicas, riscos relacionados ao alcoolismo)
5	Criminais (por exemplo, análise de padrões criminais, correspondência de impressões digitais ou DNA)
6	Financeiras (por exemplo, seguradoras, análise de crédito, projetos de investimento)
7	Pesquisa Estatística (por exemplo, amostragem, testes estatísticos, inferências estatísticas)
8	Política Pública (por exemplo, imunização, programas sociais)
9	Jogos de Azar (por exemplo, baralhos, dados, loterias)
10	Decisões Pessoais (por exemplo, uso de cinto de segurança, escolha de plano de saúde; lazer e viagem)

Fonte: Adaptado de Gal (2005)

O quinto e último Elemento do conhecimento é nomeado como “*questões críticas*” e equivale às perguntas que devem ser feitas quando alguém se depara com uma afirmação probabilística. Essas perguntas estimulam o pensamento crítico do sujeito e mostram que ele não apenas “aceita” os dados apresentados. Quanto a isso, Gal (2005) traz algumas áreas proeminentes para propor os questionamentos (Quadro 2.5).

Quadro 2.5 - Áreas para as questões críticas propostas por Gal (2005)

Contexto	Fonte	Processo	Significado da mensagem	Interpretação reflexiva
Essa questão envolve aleatoriedade ?	Quais as fontes utilizadas para coletar essas informações?	Como os resultados foram analisados?	O que indica a declaração probabilística?	Como devemos interpretar a declaração dada?

Fonte: Adaptado de Gal (2005)

Para avaliarmos essas áreas e observarmos a fidedignidade dos dados, é preciso ter noção dos elementos anteriores, ou seja, conhecer as noções e visões básicas da probabilidade (“*grandes ideias*” e “*calculando probabilidades*”), assim como conhecer e analisar as diversas representações e os diversos contextos (“*linguagem*” e “*contexto*”).

Os **Elementos Disposicionais** envolvem a presença de uma postura crítica, as crenças e atitudes. Estão atrelados a questões subjetivas de cada sujeito, ou seja, suas concepções de mundo e suas experiências. Para Araújo (2024), esses componentes evidenciam o caráter afetivo e emocional da Estatística, pois todos nós adotamos uma determinada postura ao nos depararmos com situações envolvendo conhecimentos estatísticos.

Gal (2005) destaca a subjetividade, assim como a complexidade das crenças e atitudes de cada sujeito em relação à aleatoriedade de eventos. Vale ressaltar que, apesar de o autor descrever a importância dos elementos disposicionais no texto base para a apresentação da teoria, ele não discute os elementos disposicionais. Todavia, nos apoiamos nas suas reflexões feitas em 2002, quanto ao Letramento Estatístico.

Os Elementos disposicionais estão sistematizados em três componentes. O primeiro, “*postura crítica*” corresponde à leitura, interpretação, análise e ao posicionamento/questionamento do sujeito frente a situações incertas que possam trazer dados tendenciosos, incoerentes ou inacabados, quer seja de forma intencional, quer não seja. As questões feitas tendem a ser pertinentes, quando há ciência do contexto e dos conceitos abordados. Além disso, pressupõe que a postura argumentativa seja ponderada em resultados e/ou relatórios de pesquisas de campo.

As “*crenças e atitudes*” estão pautadas na atitude crítica das pessoas e em sua propensão a arriscar-se, ao analisar atos probabilísticos. Nesse sentido, crenças são ideias e opiniões sobre um domínio (a exemplo de uma instituição, um objeto) ou sobre nós mesmos, levam tempo para se desenvolver e são influenciadas por fatores culturais e sociais que podem influir nas análises que fazemos. De acordo com Gal (2002), atitudes correspondem a sentimentos assentes e enérgicos relativos à Probabilidade. Esses sentimentos podem ser positivos ou negativos e estão atrelados a fatores internos (opinião) e externos (relações com o outro), sendo construídos pelo sujeito diante de suas vivências.

Os “sentimentos pessoais em relação à incerteza e ao risco” dizem respeito às dificuldades encontradas pelos sujeitos ao terem que tomar uma decisão diante de situações incertas, que podem levar a possíveis riscos que deem prejuízos.

Por todos esses aspectos, corroboramos a importância da articulação entre os Elementos do conhecimento e os elementos disposicionais, os quais, juntos, coadunam para que um sujeito seja letrado probabilisticamente, conseguindo aprimorar habilidades para refletir sobre situações do seu cotidiano, analisá-las, e assim conseguir tomar decisões coerentes e significativas.

Na seção a seguir, objetivamos promover a articulação entre os distintos significados de Probabilidade (Elemento do conhecimento – calculando probabilidades) e as múltiplas representações (Elemento do conhecimento – linguagem).

2.2 SIGNIFICADOS DE PROBABILIDADE E SUAS RELAÇÕES COM AS REPRESENTAÇÕES

Segundo Batanero, Serrano e Álvarez-Arroyo (2023), resolver situações reais e profissionais que estão atreladas a problemas não determinísticos requer dos sujeitos um raciocínio que emerge de fatores matemáticos e pessoais. Dentre os componentes que integram esse raciocínio, está o entendimento da Probabilidade por meio dos seus diferentes significados, para lidar com situações incertas e aleatórias que foram apoiadas ao longo da história (Batanero, 2005; Batanero e Borovcnik, 2016). Desse modo, de acordo com Batanero (2005), os principais significados presentes no contexto da Matemática escolar são: Intuitivo, Clássico, Frequentista, Subjetivo e Axiomático.

Batanero e Díaz (2012) afirmam que, durante o processo de ensino da Probabilidade, é crucial incorporar progressivamente os diversos significados desse conceito, iniciando pela compreensão intuitiva sobre o acaso e a probabilidade, bem como pela perspectiva subjetiva como um grau de crença. Guimarães e Carvalho (2021) também ressaltam que a escola e os professores precisam proporcionar aos estudantes a ampliação do conceito de Probabilidade, perpassando pela compreensão dos diferentes significados.

Assim como Álvarez-Arroyo, Batanero e Gea (2024), acreditamos ser fundamental desenvolver o processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade empregando diferentes maneiras de visualizar e representar os dados probabilísticos,

os quais podem colaborar para os estudantes resolverem as situações-problema colocadas e, por conseguinte, tomar decisões.

Tomamos como base as relações propostas por Batanero (2006), ao apresentar os elementos que caracterizam os diferentes significados de Probabilidade. Além disso, a autora propõe uma articulação com o elemento “linguagem⁴” inerente a situações imbricadas, apresentando as formas que podem implicar a compreensão dos conceitos de Probabilidade e, consequentemente, de Letramento Probabilístico.

A primeira relação associa o significado *Intuitivo* ao uso da *língua materna ou língua natural*. Nessas situações, a linguagem traz um caráter qualitativo para posicionar-se quanto às ações, associadas às crenças e atitudes do sujeito em relação a determinados eventos, como, por exemplo, ao analisar a situação “Qual a chance do Brasil ganhar a Copa do Mundo?”. Nesse viés, Vásquez (2018) afirma que a linguagem probabilística está associada à probabilidade intuitiva, e a caracteriza como a primeira etapa para o desenvolvimento progressivo da alfabetização probabilística.

Como forma de exemplificar os termos correspondentes a esse significado, Eugênio (2019) cita o uso de expressões como “é certo que vai acontecer”, “provavelmente”, “possivelmente”, “é impossível acontecer”, “existe a chance”, “acho pouco provável” atreladas a intuir sobre elementos probabilísticos que permitem ter um posicionamento frente a fenômenos aleatórios.

Quanto a isso, Vásquez e Alsina (2017) sinalizam para a importância da construção da linguagem probabilística desde os Anos Iniciais, para suplantar concepções equivocadas sobre chance e probabilidade e possibilitar o desenvolvimento dos estudantes. O professor, ao fazer uso de noções intuitivas, pode auxiliar os estudantes a terem uma melhor compreensão e a usarem a probabilidade como um instrumento para analisar a possibilidade de diferentes episódios imersos nesse mundo cheio de incertezas (Batanero, Chernoff, Engel, Lee e Sánchez, 2016).

Dessa forma, salientamos a importância da compreensão e utilização de termos referentes à probabilidade para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico. A compreensão de termos probabilísticos serve como alicerce para a constituição da noção e do pensamento probabilístico, ao trazer inicialmente as ideias

⁴ Nesta tese adotamos o termo “representações”.

atreladas ao significado intuitivo, para posteriormente propiciar o cálculo de situações não determinísticas (Vásquez, 2019; Sánchez, Vásquez e Vásquez, 2023).

O significado Clássico está associado à investigação de situações equiprováveis, cujo espaço amostral é limitado (finito). Essa concepção está diretamente atrelada à representação numérica. De acordo com Batanero (2006), essa representação é utilizada para a listagem dos eventos, assim como o uso de fórmulas. Seja A um evento, a probabilidade de esse evento ocorrer $P(A)$ será fornecida pela razão entre o número de elementos do evento (casos favoráveis) e o número de elementos do espaço amostral (casos possíveis). Algebricamente, temos:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}},$$

e os resultados são apresentados na forma decimal, fracionária ou percentual.

Em particular, Canaveze (2013) pontua que essa concepção permite o tratamento de artefatos proporcionais (moeda, dados, cartas e extração de bolas) que, para ter a probabilidade calculada, requerem a transição da representação numérica do conjunto dos números naturais para os números racionais e, posteriormente, podem ser apresentados de forma percentual. Acerca desse mesmo aspecto, Almeida (2018) defende que o ensino de Probabilidade está associado, prioritariamente, à interpretação clássica, que estimula os estudantes a utilizarem apenas a representação numérica para calcular a probabilidade de um evento, e os influencia, assim, a não estabelecerem uma habilidade para experimentar o caráter aleatório desse conceito.

Podemos pontuar a utilização exclusiva da representação numérica como um fator lacunar no ensino de Probabilidade, visto que, ao aplicar a fórmula que define a probabilidade e efetuar a divisão por meio da razão, o estudante pode pensar que esse conceito também é determinista (característica das outras áreas da Matemática), e não compreender a aleatoriedade como atributo fundamental desse campo da Matemática.

Almeida e Farias (2019) afirmam que o determinismo está presente em tarefas de probabilidade ao longo dos séculos, e apontam um predomínio do significado clássico. Nesse viés, Eugênio, Monteiro e Carvalho (2022) também sinalizam que as práticas docentes muitas vezes estão atreladas à definição clássica, e não estimulam a criticidade dos estudantes.

Todavia, quando nos deparamos com situações que estimulam a experimentação das possibilidades de um evento ocorrer nas mesmas condições, estamos vivenciando um caso de *Probabilidade Frequentista*. Nesse entendimento, Borovcnik (2017) traz a ideia da repetição de experimentos considerando as mesmas condições, ou seja, essa abordagem baseia-se na frequência relativa de um evento acontecer, a partir da análise de um grande número de experimentos repetidos.

Segundo Batanero (2006), os resultados dessas experiências e, consequentemente, suas probabilidades são sistematizadas por meio de *tabelas* e *gráficos*. Vásquez e Alsina (2017) também reforçam que essas representações estão intimamente associadas à *Probabilidade Frequentista*, sendo a *representação tabular* usada para sistematizar as estimativas de cada ação e apresentar suas frequências relativas. Já a *representação gráfica* apresenta estimativas de probabilidades por meio de pictogramas, diagramas de barras e diagramas de árvore.

Moraes (2017), ao aplicar uma sequência didática com estudantes, propôs, como uma das etapas, que eles repetissem um experimento trinta vezes e sistematizassem os resultados em tabelas. Segundo o autor, essa experiência frequentista auxiliou os participantes a entenderem a aleatoriedade associada ao conceito de chance, partindo do uso das frequências para completar a tabela proposta. Para Vásquez e Alsina (2019), ao serem realizadas repetições de um experimento, os seus possíveis resultados devem ser sistematizados utilizando-se a representação gráfica ou tabular, que fornece elementos para se interpretar os dados, calcular e representar a frequência dos experimentos. A representação e o cálculo dessas frequências podem ser feitas no ambiente papel e lápis ou no ambiente computacional (uso de software ou simuladores).

Em relação à representação gráfica como recurso para o estudo da Probabilidade, Custódio (2017) ressalta que o uso dessa forma permite a correlação com a análise combinatória e a estatística, colaborando para o letramento, dada a interpretação e leitura de informações.

Portanto, o uso dessas representações colabora para a visualização dos dados (devido à quantidade de repetições), auxilia na compreensão da distribuição da frequência dos resultados, permite que os estudantes entendam o significado frequentista e consequentemente colabora para a compreensão dos conceitos de Probabilidade, podendo estimular o Letramento Probabilístico, considerando o elemento “linguagem”.

Logo, um processo de ensino em que se utilizam esses dois enfoques possibilita aos estudantes, segundo Batanero (2005), uma oportunidade para desenvolverem a intuição e ideias possíveis do conhecimento probabilístico. Reforçamos que essa área tem muitos significados diferentes, os quais devem ser articulados com frequência, para não limitar a compreensão a apenas uma perspectiva.

A visão Subjetiva da Probabilidade (a partir das fases a priori e a posteriori) expressa o grau de possibilidade de um evento ocorrer, baseado em observações e experiências pessoais. Quando novas informações são incorporadas a essas experiências, elas permitem retificar ou não o valor inicial (a priori), gerando a probabilidade a posteriori. Nessa perspectiva, os experimentos não precisam ser repetidos em condições idênticas para que haja sentido probabilístico. Em relação a esse ponto, Batanero (2005) ressalta que não há necessidade da repetição dos experimentos para se atribuir significado à probabilidade, e associa esse tipo de interpretação à tomada de decisão em contextos como a saúde e a economia.

Santos (2020) afirma que o sujeito pondera suas experiências e conhecimentos sobre o contexto para determinar a probabilidade de um evento ocorrer, ou seja, parte de suas crenças, intuições e concepções (individuais ou coletivas) para atribuir medidas subjetivas de chance a eventos futuros.

Além desse tipo de situação, podemos, em alguns contextos, utilizar a probabilidade subjetiva associada ao conceito de probabilidade condicional (como na inferência bayesiana), partindo da chance de um evento ocorrer sabendo que outro evento já aconteceu, o que é sistematizado matematicamente da seguinte maneira: Sejam A e B dois eventos com o mesmo espaço amostral, a probabilidade de A ocorrer, P(A), dado que o evento B já ocorreu, P(B), é fornecida algebricamente por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Quanto às questões de probabilidade condicional, Figueiredo (2019) propõe que os estudantes sejam estimulados a construir *tabelas de dupla entrada e diagramas de árvore*, pois essas representações facilitam a aprendizagem desse conceito. Batanero e Díaz (2007) nos chamam a atenção para o fato de que essa interpretação da probabilidade recebe menor atenção no ensino secundário. Além disso, poucos estudos relacionam essa concepção com a aprendizagem dos estudantes. Ademais, Batanero e Borovcnik (2016) reforçam a ideia de que, nesse

significado, não há a necessidade de repetir a mesma situação para a probabilidade ter sentido, o que possibilita que ela seja adotada para discutir questões econômicas e políticas.

Ponderando essas questões e fazendo uso da *representação tabular* e do *diagrama de árvore*, Moreira (2015) propôs introduzir o conceito de Probabilidade subjetiva no Ensino Médio e sugeriu atividades interdisciplinares que podem ser adaptadas e adotadas pelos professores em sala de aula. As atividades foram aplicadas em turmas do 2º ano do Ensino Médio e as informações sobre elas foram coletadas. Após a aplicação dessas atividades, a autora acredita que elas colaboraram para os estudantes adquirirem os conhecimentos probabilísticos e também contribuíram para estimular a interpretação de dados, a comunicação, a argumentação e a tomada de decisão.

Considerando também o mesmo nível de ensino, Silva (2023) utilizou diagrama de árvore, tabelas e diagrama de Venn para averiguar os conhecimentos de estudantes sobre probabilidade subjetiva. Como resultado, concluiu que há carência de estudos sobre esse tema, assim como ele é pouco explorado no livro didático, dado o predomínio da visão clássica. Mesmo assim, o autor percebeu que os estudantes compreendem satisfatoriamente as questões relativas ao significado subjetivo de Probabilidade.

Por fim, a *Probabilidade Axiomática* está associada à quantificação da incerteza em experimentos com situações abstratas (Batanero, 2005, 2006; Vásquez e Alsina, 2019), ou seja, é baseada no uso de axiomas. Desse modo, essa Probabilidade pauta-se no uso de uma estrutura formal (axiomas e princípios fundamentais) e pondera que a probabilidade de qualquer evento não será um número negativo. Pondera também que a probabilidade de um acontecimento ser impossível é 0, e quando o evento é certo será 1. Além disso, a chance de um evento A ocorrer será dada no intervalo entre [0, 1], logo, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Em relação à representação, Batanero (2005, 2006) ressalta que essa concepção está associada ao uso de *símbolos conjuntivos*. Compreendemos que essa terminologia está interligada à simbologia adotada na Teoria dos Conjuntos. Para ilustrar, podemos mencionar: \emptyset - conjunto vazio; \leq - menor que; \geq - maior que; U - união; \cap - intersecção. Vásquez e Alsina (2019) destacam que, nesse significado, a probabilidade é vista como uma medida, faz uso de termos ligados à Teoria dos Conjuntos e o cálculo ocorre ao aplicar os axiomas da probabilidade. Diante disso,

temos que a representação numérica e a simbólica permeiam as situações axiomáticas, o que significa uma representação que expressa informações por meio de números, símbolos, letras e caracteres especiais.

De acordo com Santos (2020), as diferentes narrativas dos significados de Probabilidade evidenciam os distintos contextos e conceitos a que estão associados, trazendo, assim, aspectos particulares a cada um desses significados. Dessa forma, buscamos sistematizar, a partir dos estudos supracitados, as representações inerentes a cada significado, correlacionando-as (Quadro 2.6).

Quadro 2.6 - Relação entre significados e as representações

Significado da Probabilidade	Representações inerentes
Intuitivo	Língua natural - escrita
Clássico	Língua materna, representação numérica (decimal, fracionária ou percentual)
Frequentista	Língua materna, representação tabular (tabela simples ou tabela de dupla entrada) e representação gráfica (pictograma, gráfico de barras e diagrama de árvore)
Subjetivo	Língua materna, representação tabular (tabela de dupla entrada) e representação gráfica (diagrama de árvore e diagrama de Venn)
Axiomático	Língua materna, representação numérica (decimal, fracionária ou percentual) e representação simbólica

Fonte: Dados da pesquisa

Cabe destacar que todos os significados fazem uso de termos e expressões verbais vinculados à linguagem probabilística (Batanero, 2005, 2006; Vásquez e Alsina, 2019). Todavia, se olharmos pelo viés do Letramento Probabilístico e dos significados, a relevância da língua materna é maior nos significados intuitivo e clássico, pois, considerando a perspectiva do Letramento Probabilístico, as expressões estão associadas aos elementos disposicionais (crenças e atitudes), dada a subjetividade do sujeito.

Em relação aos significados, podemos concluir que, apesar de estarem presentes nas concepções clássica, frequentista e axiomática, o enfoque maior desses está em enumerar e determinar as possibilidades de o evento ocorrer.

3 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo, buscando discutir os desafios colocados pelo ensino e aprendizagem da Probabilidade no Ensino Básico, apresentamos algumas pesquisas que foram desenvolvidas. Na sequência, trazemos estudos que objetivam compreender o papel das diferentes representações para a aprendizagem do conceito de Probabilidade. Por fim, apresentamos pesquisas que investigaram as atividades relativas a esse tema, propostas em livros didáticos de Matemática.

3.1 DESAFIOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Considerando as propostas curriculares adotadas para o ensino de Matemática, identificamos na BNCC (Brasil, 2018) a inserção de conceitos da área de Probabilidade ao longo de todo o percurso da Educação Básica, evidenciando a importância dessa área para a formação dos estudantes.

Entretanto, analisando as habilidades da BNCC para o Ensino Médio, quanto às unidades temáticas “Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística”, por exemplo, identificamos uma disparidade na quantidade de habilidades, sendo 21 (vinte e uma) para “Números e Álgebra”, 12 (doze) para “Geometria e Medidas” e 10 (dez) para “Probabilidade e Estatística”, das quais 5 (cinco) são para Probabilidade e 5 (cinco) para Estatística. Dessa forma, apesar de a BNCC ser um documento normativo e não ter caráter curricular, sua organização acaba influenciando os currículos escolares e o espaço destinado para cada área da Matemática.

Outro desafio apontado é a dificuldade dos professores para compreenderem a importância do tema, assim como a falta de domínio teórico-metodológico sobre os conceitos probabilísticos (Lopes, 2010; Batanero, Contreras, Díaz e Sánchez, 2015; Pietropaulo, Silva e Campos, 2015; Eugênio, 2019).

Uma das justificativas para a lacuna teórico-metodológica pode ser o fato de os professores da Educação Básica não terem acesso a uma formação inicial ou continuada centrada nesses conceitos. Batanero et al. (2015) reconhecem haver preocupação com a prática docente em relação ao ensino de probabilidade, e

sugerem melhorias na formação probabilística desses profissionais. Já Vásquez e Cabrera (2022) referem-se à necessidade de averiguar a noção dos professores referente ao ensino de Estatística e Probabilidade, em diferentes níveis de ensino, dada a importância de o professor saber o momento de ensinar, o nível de ensino e o conteúdo a ser ensinado aos estudantes.

Nessa mesma direção, Samá e Silva (2020) argumentam que as dificuldades na prática docente podem estar atreladas ao fato de o ensino de Probabilidade e Estatística ter sido inserido e sistematizado na Educação Básica brasileira apenas nas últimas décadas, se comparado com as outras áreas da Matemática, o que interfere na sua organização e priorização curricular.

Essas dificuldades também foram evidenciadas por Álvarez-Arroyo, Batanero e Gea (2024), quando aplicaram um questionário de Probabilidade a futuros professores de Matemática do Ensino Médio, com questões atreladas ao contexto autêntico de saúde (taxa de acidentes na Espanha). Ao analisarem as respostas, identificaram dificuldades no raciocínio probabilístico dos participantes, os quais cometiam erros conceituais, procedimentais e apresentavam lacunas para interpretar e posicionar-se criticamente frente aos dados apresentados.

Franco Seguí e Alsina (2024), ao analisarem os conhecimentos necessários aos professores para ensinar Probabilidade, ressaltam, dentre outros, que os professores precisam fazer uso de diferentes contextos e de tipos de Probabilidade e conhecer as diferentes maneiras de representar o conceito de Probabilidade, seja na forma numérica, gráfica ou verbal. Contudo, pontuam dificuldades desses profissionais para interpretar esses recursos gráficos.

Para Soares, Carvalho, Pereira, Silva, Oliveira, Silva e Martins (2022), a identificação dos limitadores do processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade permite um planejamento na busca por métodos de ensino que auxiliem a formação dos estudantes.

Outro ponto desafiador está na restrição do processo de ensino de Probabilidade ao enfoque clássico, que é pautado na aplicação de fórmulas e propõe a resolução de situações desconectadas da realidade, sem estimular o posicionamento e a argumentação crítica e reflexiva dos estudantes, como argumentam Canaveze (2013), Bittar e Abe (2013), Coutinho e Figueiredo (2020), Borovcnik (2021), Silva (2023) e Vasconcelos e Rocha (2023). Esses autores também

propõem a interlocução entre o conceito de Probabilidade e seus diversos significados.

Para Barbosa e Melo (2021), o ensino vem sendo apresentado em contextos que diferem da realidade dos estudantes, sem nenhum significado para eles. O ensino de Probabilidade deve ser pautado em diversos contextos reais, por meio de experiências aleatórias e observação de fenômenos.

Diante desse ensino limitado, é de se esperar que os estudantes apresentem dificuldades em compreender a função e os conceitos relativos à Probabilidade. Vários estudos vêm evidenciando essa situação.

De acordo com Gal (2005), para termos o domínio da Probabilidade, precisamos ter familiaridade com diversos conceitos, como aleatoriedade, independência, incerteza, probabilidade e risco. Entretanto, diversas pesquisas mostram distintas adversidades por parte dos estudantes.

Fernandes e Junior (2016) relacionam as dificuldades dos estudantes em relação à Estatística e Probabilidade com o formato estruturado para o ensino, pautado na mecanização dos conceitos e na aplicação de técnicas. Eles reiteram a necessidade de o ensino de Probabilidade não ficar limitado ao contexto escolar, sendo relacionado ao cotidiano dos estudantes, dada a sua importância social.

Raposo, Nascimento, Costa e Gea (2017) realizaram uma pesquisa com estudantes portugueses do Ensino Médio, cujo objetivo foi o de identificar suas dificuldades em relação à aprendizagem de Probabilidade. Para isso, aplicaram um questionário com onze questões de múltipla escolha. Ao analisarem os resultados, observaram que havia má interpretação do problema e dos cálculos necessários para a resolução; dificuldade para compreender se o experimento aleatório tinha ou não reposição; e dificuldade para considerar probabilidades conjuntas como sendo probabilidades condicionais.

Memnun, Ozbilin, Dinc (2019) propuseram uma atividade a 142 estudantes do Ensino Médio da Turquia, sobre os conceitos de Probabilidade. Para isso, solicitaram que eles respondessem a 10 problemas relacionados ao seu cotidiano, os quais exigiam alguma tomada de decisão. Ao analisarem os dados coletados, concluíram que foram altos os percentuais de estudantes que apresentaram respostas incorretas ou não conseguiram responder a alguns dos problemas, pois não conseguiam compreender a situação proposta e não consideravam todas as condições exigidas

para a resolução, cometendo erros procedimentais do cálculo nas representações numéricas na forma fracionária, percentual e decimal.

Alvarado Martinez, Tapia Muñoz, Retamal Pérez e Tauber (2021) analisaram o desempenho de 331 estudantes chilenos do Ensino Fundamental (12-13 anos) em questões que versavam sobre a Probabilidade intuitiva e clássica. Observaram que a noção intuitiva dos estudantes estava centrada em situações que envolviam jogos de azar, visto que nas situações reais, não foram percebidas noções elementares de Probabilidade. Quanto à Probabilidade clássica, os estudantes tiveram dificuldade ao depararem-se com situação de Probabilidade composta e condicional, principalmente na situação em que os dados probabilísticos foram expostos numa tabela de dupla entrada.

Fernandes e Braga (2023) buscaram investigar o conhecimento de Probabilidade de 203 estudantes brasileiros do 3º ano do Ensino Médio de escolas em torno da cidade de Brasília. Essa investigação ocorreu após ter sido ministrado o referido conceito aos participantes. Os estudantes demonstraram grandes dificuldades, em relação tanto à análise intuitiva de eventos como na identificação de eventos igualmente prováveis ou não. Esses resultados confirmam que o ensino pelo qual passaram não foi suficiente para corrigir as suas ideias intuitivas erradas.

Acresce-se a isso que Santos (2010; 2020) afirma que equívocos nos termos da linguagem probabilística interferem na interpretação e compreensão de enunciados e conceitos, podendo ocasionar dificuldades no processo de ensino e aprendizagem da Probabilidade.

Assim, é fundamental um processo educativo que articule os tipos de Probabilidade, possibilitando aos estudantes correlacionarem esses conhecimentos em suas ações práticas e posicionarem-se criticamente frente a dados, tomando decisões. Para tal, é preciso também uma maior atenção para a formação inicial e continuada de professores.

Ponderando esses desafios no processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade na Educação Básica, precisamos pensar em práticas que superem essas dificuldades. Uma das formas ressaltadas por Mutara (2015) para essa superação é a importância de empregar diferentes representações para mediar a aprendizagem.

Olhando esse aspecto, Figueiredo (2019) propõe uma atividade a futuros professores de Matemática, abordando o conceito de Probabilidade condicional por

meio de diferentes representações (linguagem natural, simbólica, diagrama de árvore e tabela de contingência). Analisando os resultados, evidencia-se inicialmente a dificuldade dos participantes, por não estarem tão familiarizados com as representações e, consequentemente, terem dificuldade para a intercambialidade entre elas. Entretanto, ao longo dos encontros, foi observado que a articulação entre as representações suscitou a discussão entre os pares e facilitou a sua aprendizagem.

Essa perspectiva possibilita reflexões importantes quanto ao conceito de Probabilidade. O fato de os futuros professores terem dificuldades em interpretar dados probabilísticos quando apresentados em outras representações pode estar atrelado à sua formação na Educação Básica, pautada apenas na utilização da representação numérica para a resolução das situações. Essas práticas vivenciadas como discentes podem reverberar e manifestarem-se também em suas práticas docentes. Logo, avocamos a atenção justamente para o desenvolvimento de um processo educativo na escola que suscite a utilização de diferentes representações para visualização do conceito de Probabilidade, o que se coaduna com a proposta deste estudo.

3.2 O PAPEL DAS DIFERENTES REPRESENTAÇÕES PARA A APRENDIZAGEM DE PROBABILIDADE

O processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de Probabilidade é permeado por diversos modos de informar situações envolvendo o acaso e a incerteza, desde o uso de expressões que estão associadas ao cotidiano, até a comunicação de dados por meio de gráficos, tabelas, diagramas, dentre outras. Segundo Carrera, Pino-Fan, Alvarado e Lugo-Armenta (2021), estamos imersos em um mundo globalizado, no qual são fornecidas cotidianamente informações por meio de dados apresentados em tabelas, gráficos e figuras, o que requer da população a interpretação dessas informações ao seu redor, reforçando a necessidade de incorporar a Estatística e Probabilidade na Educação Básica, visando à formação crítica dos estudantes.

Considerando essas situações atuais e associando-as também ao acesso à tecnologia, Burrill e Pfannkuch (2024) defendem que, dentre as tendências emergentes para as pesquisas em Educação Estatística, estão as diferentes formas

de visualizar e representar dados, dada a variedade de formatos para essa apresentação.

Há mais de duas décadas, estudos realizados vêm evidenciando a importância de o trabalho na escola abordar diferentes representações para a compreensão da Probabilidade.

Batanero (2005) afirma que, ao nos depararmos com situações-problema, fazemos uso de objetos ostensivos, como gráficos, termos e símbolos para a representação dos dados e das possíveis soluções. O autor ressalta que todos esses recursos são vistos como um sistema de representação que nos permite substituir o objeto representado, o que reforça o papel crucial da linguagem na atividade Matemática.

Em sua investigação, Corder e Zahner (2007) e Zahner e Corder (2010) mencionam que, para a resolução de tarefas que envolvem Probabilidade, fazemos uso de representações internas e externas. As representações internas são inerentes ao sujeito, ao pensamento do sujeito (imagens mentais). Já as representações externas – associadas a tabelas, gráficos, imagens e diagramas de árvores – colaboram para a resolução dessas situações. Segundo os autores, a visualização pode ser importante para o raciocínio probabilístico. A maioria do tempo gasto para a resolução do problema de Probabilidade está associada ao tempo para a representação dos dados, o que permite aos autores afirmarem que as representações são decisivas para essas resoluções.

Para Anastasiadou e Chadjipantelis (2008), é preciso que os estudantes sejam estimulados a mobilizarem múltiplas representações, uma vez que elas possibilitam aos educandos interpretarem casos e compreenderem semelhanças entre os problemas probabilísticos.

Canaveze (2013) observou que há uma maior utilização da língua materna e da representação numérica por parte dos estudantes, e que representações tabulares e diagramas de árvore não foram muito escolhidos na resolução das atividades. Assim, propõe a utilização de diferentes representações associadas à mobilização da representação simbólica, tabular e numérica, as quais colaboraram para o pensamento dos estudantes quanto à Probabilidade, visto que não estimula apenas a utilização de fórmulas existentes para a resolução das situações propostas.

Oliveira (2014) desenvolveu um processo de formação com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, no qual apresentou atividades que discutiam o conceito de

Probabilidade a partir da utilização do ambiente papel e lápis e com o software R. Essas atividades propunham conversões entre as representações (representação tabular, numérica, diagrama, gráfica e língua natural escrita). A intercambialidade entre as representações auxiliou os estudantes a construírem o conceito de Probabilidade.

Binder, Krauss e Bruckmaier (2015) desenvolveram uma pesquisa com estudantes alemães na faixa etária entre 16-18 anos⁵, sobre o possível efeito da utilização das representações tabular e do diagrama de árvore para a apreensão do conceito de Probabilidade condicional. Analisando os resultados, identificaram que os estudantes tiveram uma maior compreensão das situações que apresentavam os dados por meio da representação tabular, seguida das situações com o diagrama de árvore. Dessa forma, concluíram que o uso de representações pode auxiliar os estudantes a compreenderem o conceito de Probabilidade condicional.

Nessa mesma direção, Santos e Dias (2021) ressaltam a importância da representação de dados probabilísticos por meio de diagramas. Também Amado (2022) enfatiza a representação em diagramas – e não somente tabular –, acreditando que esse tipo de representação pode colaborar para a melhor compreensão da Probabilidade condicional. Assim, é primordial que os professores discutam situações que exijam esses dois tipos de representação, para que os estudantes se sintam familiarizados com as duas maneiras de representar.

Mutara (2015) investigou vinte e dois estudantes do 10º ano de uma escola da África do Sul⁶, com a intenção de identificar quais os equívocos cometidos por eles ao resolver tarefas de Probabilidade com diferentes representações. Para coletar os dados, foi utilizada uma atividade com a presença de diagrama de árvore, tabela de dupla-entrada, listagens de resultados (representação numérica) e diagrama de Venn. Além disso, foi realizada uma entrevista com os participantes. A autora observou uma predileção pelo uso do diagrama de árvore como recurso, todavia foram detectadas dificuldades na construção das representações, falta de familiaridade e equívocos no uso de termos probabilísticos, assim como opção imprópria de tipos de representações. Com isso, a pesquisa sugere a inserção de múltiplas representações na prática docente, acreditando na colaboração conceitual de Probabilidade, de forma inicial sendo ministradas representações construídas parcialmente e, posteriormente,

⁵ No Brasil, seria o equivalente ao Ensino Médio.

⁶ No Brasil, seria o equivalente ao 9º ano do Ensino Fundamental.

estimulando os estudantes a construírem as suas próprias representações de Probabilidade.

Agus, Peró-Cebollero, Penna e Guàrdia-Olmos (2015) realizaram um estudo com estudantes mais velhos, ou seja, graduandos do 1º ano de Psicologia da Itália e da Espanha, quanto à resolução de problemas de Probabilidade que relacionavam diferentes representações associadas ao tempo das resoluções. Os autores concluíram que os problemas no formato gráfico-pictórico colaboraram para um melhor desempenho dos estudantes que responderam às questões sob pressão de tempo. Já para os estudantes que responderam sem o fator tempo, não houve uma diferença significativa nos desempenhos entre os dois formatos.

Custódio (2017) analisou as atividades propostas no material de apoio aos professores do estado de São Paulo e observou que a organização não estimula o letramento, pois as atividades eram expostas na língua natural escrita e requeriam a intercambialidade apenas para a representação numérica, limitando o estudante a compreender e interpretar dados probabilísticos em outras formas de representação, o que certamente reverberará nas ações do professor.

Vásquez e Alsina (2017) e Moraes (2017) argumentam que esses elementos (expressões orais e escritas, símbolos e representações) surgem durante o processo de ensino e aprendizagem, permitindo expressar qualitativamente a probabilidade de ocorrência de um determinado evento. A compreensão dos conceitos de Probabilidade e um possível desenvolvimento do Letramento Probabilístico requerem do estudante a articulação e transição entre as diferentes representações numérica, tabular, gráfica, simbólica e língua materna.

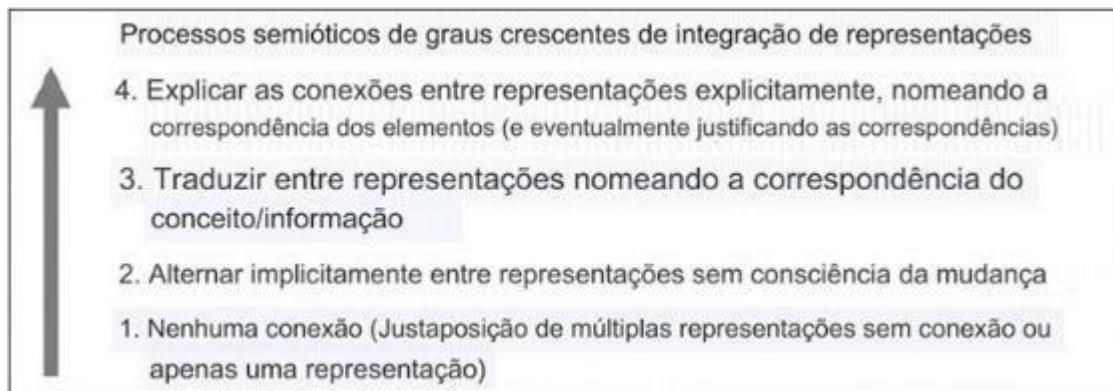
Ody e Viali (2016) perceberam dificuldades dos estudantes para a interpretação de informações exibidas pelas diferentes linguagens e dificuldades em argumentar, fazer avaliações críticas e tomar decisões. Essas habilidades e competências são basilares para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico e confirmam a relevância desta investigação.

Já Silva, Alves e Noronha (2018) desenvolveram uma sequência didática de probabilidade com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, com questões críticas associadas ao contexto real e perceberam os erros cometidos na intercambialidade entre as representações. Da mesma forma, Oliveira (2018) e Oliveira, Santos e Calejon (2020) acreditam que a assimilação desses conceitos e, consequentemente, sua aprendizagem, ocorre com a transição entre as representações. Eles usam como

exemplo a passagem da representação em língua natural para o registro algébrico ou do figural para o algébrico e numérico. Logo, acreditam que a língua natural, a representação numérica, o diagrama e a representação figural são basilares para o conhecimento probabilístico, e salientam a intercambialidade como um ponto relevante na atuação docente.

Outros pontos lacunares são ressaltados por Post e Prediger (2022), quando afirmam que a utilização de múltiplas representações, por si só, não é suficiente para a aprendizagem dos estudantes. Argumentam que há uma ínfima quantidade de material de apoio que colabore com o professor para propor um processo de ensino com toda a turma pautado no uso de múltiplas representações. Ressaltam também que a utilização de variadas representações, sem a explicitação das conexões entre elas, não colabora para um aprofundamento conceitual. Nesse contexto, as autoras acreditam que o processo de integração entre as representações ocorre em quatro etapas (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Distinção de quatro processos semióticos de graus crescentes de integração de representações



Fonte: Post e Prediger (2022), tradução nossa.

Dessa forma, na primeira etapa, utiliza-se apenas uma representação ou múltiplas representações sem conexão entre elas, por exemplo, quando o estudante utiliza a linguagem materna para responder à questão “Qual o risco de uma pessoa não fumante ter um câncer de pulmão?”. A segunda traz de maneira implícita a relação entre as representações, tal como a determinação de “Qual a probabilidade de lançar uma moeda e sair a face cara” implica a transição da língua natural escrita para a representação numérica. A terceira etapa traz um nível maior de consciência e conexão, a exemplo de quando informações probabilísticas estão sistematizadas em

gráficos e solicitamos um resultado numérico. Para isso, o estudante necessitará interpretar as informações para realizar o cálculo. Por fim, quando consegue explicar especificamente as conexões entre as representações, justificando a correspondência entre os elementos, temos a quarta etapa. Um exemplo dessa etapa se verifica quando, ao apresentar dados probabilísticos numa tabela, solicitamos do estudante a construção de um gráfico e suas conclusões quanto aos dados.

Levando em consideração esses aspectos, Post e Prediger (2022) investigaram práticas de ensino com o olhar para a Probabilidade condicional e o uso das diversas representações. Analisando as práticas dos professores, observaram a falta de transição e conexão entre as representações.

Para Zorzos e Avgerinos (2023), esse campo da Matemática está associado à utilização de muitas representações visuais (tabelas, gráficos e diagramas), visto que os conceitos a ele atrelados consistem em uma variedade de diagramas e gráficos. Em seu estudo, ao aplicarem duas atividades iguais (uma com o uso de imagens e outra sem essa representação), observaram melhor desempenho na atividade com a presença da representação. Dessa forma, ressaltam a necessidade da ampliação de pesquisas sobre o uso de representações visuais para o ensino de Probabilidade, por acreditarem que esse mecanismo é importante para a compreensão do conhecimento probabilístico.

Em estudo bem atual, Costa e Nóbrega (2024) refletem teoricamente sobre a utilização de diferentes representações para o ensino de Probabilidade e afirmam que as diferentes formas de representar esse conceito (linguagem natural, álgebra e gráficos...) podem estimular a compreensão dos estudantes e auxiliar na visibilidade de fenômenos do cotidiano. Nesse aspecto, ressaltam o papel fundamental do professor, que deve fazer uso das variadas formas de representação, assim como sugerir diferentes possibilidades de interpretação e análise.

Nesse sentido, a variedade de perspectivas associadas ao processo de ensino e aprendizagem de Probabilidade que discutem ou fazem menção ao uso de distintas representações evidenciam a importância dessas representações para a apreensão do referido conceito, quando estabelecida uma conexão entre elas. Essas reflexões reforçam a relevância de nosso estudo e enfatizam aspectos interessantes a serem observados no processo de elaboração da atividade diagnóstica e da sequência de ensino.

Dessa maneira, ressaltamos a relevância e o caráter inovador deste estudo, por acreditarmos que a elaboração de uma sequência de ensino pautada nos Elementos do conhecimento e disposicionais descritos por Gal (2005), e que mobilize múltiplas representações pode colaborar para o efetivo ensino de Probabilidade no Ensino Médio, na perspectiva do Letramento Probabilístico.

Outro ponto fulcral a ser observado são as representações identificadas nos livros didáticos. Logo, podemos nos questionar: *O que os estudos dizem sobre livros didáticos que apresentam atividades sobre Probabilidade? Os livros exploram diferentes representações? Qual a análise dos pesquisadores quanto à relação entre esses tópicos?* Diante dessas indagações, apresentamos a seguir o que dizem as investigações quanto aos livros didáticos.

3.3 LIVRO DIDÁTICO E REPRESENTAÇÃO

Dada a relevância de conceitos probabilísticos para a sociedade, ao relacionar-se com situações de incerteza e aleatoriedade, eles foram inseridos em documentos oficiais que norteiam a Educação Básica no país e, consequentemente, nos livros didáticos brasileiros, como um dos recursos didáticos que dão subsídios para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Amaral, Mazzi, Andrade e Perovano (2022) descrevem os livros didáticos como os materiais mais utilizados em sala de aula, podendo ser uma fonte de informação/conteúdo ou um guia de curso. Também enfatizam a disponibilidade de livros nas escolas públicas brasileiras e a importância da realização de estudos que visem aumentar a compreensão desses recursos e propor melhorias nos mesmos.

Portanto, é basilar investigar os conceitos associados à Probabilidade presentes nos livros didáticos adotados para a Educação Básica. Desse modo, pesquisadores (Canaveze, 2013; Coutinho, 2013 e 2019; Carvalho, Silva e Paraíba, 2016; Rodrigues, 2018; Assis, 2018; dentre outros) investigaram as propostas presentes nos livros didáticos para o ensino de Probabilidade, anteriores à promulgação da BNCC. As pesquisas mostram a predominância da definição clássica da Probabilidade, com contextualizações artificiais e inadequadas, pautadas na equiprobabilidade, com foco na representação numérica e solicitações de conversão da língua materna para a representação numérica (fracionária). Viali e Oliveira (2010)

ressaltam que a maioria das questões está pautada no contexto de jogos de azar, desconsiderando outros contextos importantes, o que também foi observado por Ortiz, Albanese e Serrano (2016) em livros espanhóis.

Nessa mesma vertente, Díaz (2017), em sua tese, realizou a análise de livros didáticos espanhóis do Ensino Médio adotados para o ensino de Estatística e Probabilidade. Dentre os diversos resultados, concluiu que as atividades desse conceito estão pautadas em situações clássicas de Probabilidade, em contextos fictícios que exigiam predominantemente o uso do algoritmo. O uso da representação tabular e de diagramas de árvore foi observado nas situações atreladas à Probabilidade condicional.

Verbisck (2019), analisando as propostas para o ensino de Probabilidade e considerando todos os níveis de escolaridade da Educação Básica (Ensino Fundamental - Anos Iniciais e Finais; Ensino Médio), observou que nos Anos Iniciais o foco está em propor atividades que versam sobre o significado intuitivo de Probabilidade, atrelado à língua natural escrita e ao uso de representações figurais. A introdução da noção de Probabilidade ocorre a partir dos livros do 5º ano, que trazem a representação numérica, mais especificamente fração e/ou porcentagem. Nos Anos Finais do Ensino Fundamental, inicialmente os estudantes são apresentados a esse conceito como forma de comparação, com estímulos à escrita na forma numérica (fração). A partir do 7º ano, as informações começam também a ser dispostas em tabelas, gráficos e diagramas de árvores. Nos dois anos seguintes, são detectadas situações que estimulam a análise dos dados nas representações supracitadas, com maior presença nos livros do 9º ano. No Ensino Médio, observa-se uma predominância da utilização da representação numérica. A pesquisa levou à conclusão de que há um predomínio do significado clássico para o ensino de Probabilidade, com maior enfoque na representação numérica e sem a articulação com os outros significados.

Essa organização é limitante para o estudante criar suas estratégias de resolução e, consequentemente, para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, visto que não há o estímulo à análise crítica dos resultados.

Em 2018, a BNCC (Brasil, 2018) desenhou a nova base curricular e os livros didáticos precisaram se adequar a ela. Silveira (2021), analisando as coleções elaboradas após a divulgação da BNCC, observa que elas atendem às diretrizes estabelecidas.

Carrera *et al.* (2021), ao analisarem os tipos de representação nos livros didáticos chilenos propostos para o Ensino Médio (secundário), observaram que os enunciados estão sempre dispostos na língua natural, e pontuaram como um aspecto preocupante a falta de diversidade e da transição entre as representações.

Lima e Borba (2022), a partir da análise de livros didáticos de Matemática destinados aos Anos Finais do Ensino Fundamental de escolas brasileiras e avaliados pelo PNLD 2017, concluíram que as representações presentes nas questões têm a predominância apenas do enunciado apresentado na forma da língua natural escrita, com um percentual ínfimo da representação gráfica e tabular. Já as representações solicitadas aos estudantes não especificavam a representação a ser utilizada por eles.

Rico e Ruiz-Hidalgo (2022), ao analisarem atividades de Probabilidade em livros didáticos espanhóis do Ensino Médio, observaram vários tipos de erros, tais como ausência de diferenciação entre variáveis quantitativas e qualitativas, entre variáveis discretas e contínuas e entre aleatoriedade e determinismo, além de vocabulário inadequado, limitando uma reflexão sobre a representatividade das amostras.

Chi (2022) analisou livros didáticos do Ensino Médio da Alemanha e do Vietnã, com foco no conceito de Probabilidade e Estatística. Nos livros alemães, observou uma variedade de representações, tais como tabelas, pictogramas, diferentes tipos de gráficos, diagramas, e observou também que há discussões sobre as características de cada tipo de gráfico e sobre a eficácia de cada tipo. Já os livros vietnamitas trazem apenas tabelas e gráficos.

Batanero, Elgueda-Ibarra e Vera (2024) analisaram livros didáticos espanhóis e perceberam a superioridade de situações clássicas pautadas no contexto dos jogos de azar e com informações apresentadas na língua natural escrita.

Silva e Guimarães (2024), analisando os livros de conhecimento de todas as coleções para o Ensino Médio aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e Material Didático - PNLD 2021, observaram uma grande concentração de atividades de Probabilidade com o significado clássico, em todas as coleções. Apesar de a BNCC estimular o aprofundamento dos estudos da Probabilidade no Ensino Médio, com ênfase no significado frequentista, a investigação mostrou um percentual pequeno desse significado nos livros.

Considerando que o livro didático pode oferecer ao professor uma orientação de como os conceitos podem ser abordados em sala de aula, e aos estudantes

atividades que envolvem a compreensão da Probabilidade, é fundamental analisarmos as representações associadas ao ensino nos currículos e nos livros didáticos, para compreendermos o que vem sendo proposto. A partir desses dados, podemos analisar o que os estudantes já sabem e o que podem aprender a partir de propostas didáticas que considerem as diferentes representações.

4 MÉTODO

4.1 OBJETIVOS

Nosso estudo tem como objetivo geral investigar o que vem sendo proposto para o ensino de Probabilidade para estudantes do Ensino Médio, e o que podem aprender, a partir de intervenção de ensino que considere a perspectiva do Letramento Probabilístico, valorizando diferentes representações.

Com vistas a alcançar esse objetivo geral, definimos os seguintes objetivos específicos:

1. Analisar, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005), o que é proposto para o conceito de Probabilidade nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Pernambuco e Currículo da Bahia);
2. Avaliar as representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD/2021, relacionadas a Probabilidade;
3. Investigar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à compreensão do conceito de Probabilidade a partir de diferentes representações;
4. Analisar uma sequência de ensino envolvendo Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações, para estudantes do Ensino Médio de Pernambuco e Bahia.

4.2 METODOLOGIA

Metodologia do Estudo 1

O Estudo 1 tem como objetivo analisar, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005), o que é proposto para o conceito de Probabilidade nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Pernambuco e Currículo da Bahia). Este é um estudo que utiliza o método de análise documental, o qual analisa materiais ou documentos que ainda não receberam um tratamento analítico,

possibilitando compreender e interpretar seus significados e aplicações referentes a uma temática específica (Gil, 2008).

Investigamos, inicialmente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento norteador da Educação Básica em vigência no Brasil, identificando e analisando as competências e habilidades propostas para o Ensino Médio, concernentes ao tema Probabilidade, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005). Posteriormente, foram analisadas e comparadas as competências e habilidades concernentes ao tema Probabilidade propostas para o Ensino Médio nos documentos curriculares dos estados da Bahia e de Pernambuco. Essa análise buscou compreender como está sendo proposto o ensino desse conceito no Ensino Médio, com enfoque nas situações, contextos e representações.

As análises consistiram na leitura criteriosa, página por página, dos documentos, extraíndo deles as recomendações para o ensino de Probabilidade. Essas recomendações foram coletadas, sistematizadas e cuidadosamente analisadas.

Metodologia do Estudo 2

O Estudo 2 buscou avaliar as representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD/2021, relacionadas a Probabilidade. Segundo Lüdke e André (1986), esse tipo de estudo tem caráter documental e “pode se constituir numa técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja completando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema” (p. 38).

Para a análise empreendida no Estudo 2, foi acessado o Guia Digital do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) 2021 referente ao Ensino Médio. Iniciamos analisando as 10 (dez) coleções de livros específicos do componente curricular Matemática aprovadas por esse PNLD, em específico, os da unidade temática “Probabilidade e Estatística”.

Na sequência, analisamos os 10 (dez) livros dos Projetos Integradores, os quais buscam trazer situações pedagógicas que integram diversos componentes curriculares no processo de ensino e aprendizagem. Finalmente, analisamos os 10 (dez) livros de Projeto de Vida, os quais buscam propor atividades relacionadas a aspectos pessoal, social e profissional dos estudantes.

As atividades encontradas nos livros de Conhecimento Específico e de Projetos Integradores foram classificadas de acordo com os critérios apresentados a seguir e sistematizadas por meio do software *Statistical Package for Social Science for Windows* (SPSS).

1. Proposta da questão: Consiste em analisar se o enunciado da questão solicita a *resolução* de uma questão ou a *elaboração* de uma situação que envolve Probabilidade.
2. Dados: Refere-se ao tipo de dados apresentado na questão: a) *Ausentes*, quando apresentam as informações por meio da língua natural escrita, sem o uso da representação numérica ou outro tipo de representação (gráficos, tabelas, diagramas) para a sua resolução; b) *Elaborados pelo estudante*, quando ele cria a situação; c) *Dados autênticos/reais*, quando os dados se referem a uma situação com informações reais e significativas para os estudantes; d) *Dados fictícios*, quando são fabricados ou simulados a partir de situações imaginárias.
3. Contexto: Esta categoria está atrelada à natureza das informações presentes nos enunciados das questões e foi adaptada dos contextos elaborados por Gal (2005). Dividimos esta categoria em duas subcategorias: a) elaborado pelo estudante: livre ou pré-determinado pelo livro; b) apresentado pelo livro: ambiental; tecnológico; social; saúde; financeiro; política pública; jogos de azar; múltiplos contextos ou sem contexto.
4. Pesquisa Estatística: refere-se ao tipo de habilidade solicitada diante dos dados: a) *interpretação*, quando a atividade solicita a análise dos dados e uma resposta sobre a Probabilidade de uma determinada situação; b) *elaboração*, quando solicita que o estudante elabore uma questão a partir de dados apresentados.
5. Significados: a) *Elaboração do estudante*: *Intuitivo*; *Clássico*; *Frequentista*; *Subjetivo*; *Axiomático*; b) *Não se aplica*, quando não remete a nenhum tipo de Probabilidade específico.
6. Representação da questão: *Numérica* (fracionário, percentual ou decimal); *Diagrama* (Venn ou de árvore); *Tabular* (tabela simples ou dupla entrada); *Gráfica* (barra, coluna, setores, dentre outros); *Figural* (figuras); *Língua Natural*

escrita; Múltiplas Representações (dados sistematizados por meio de duas ou mais representações).

7. Representação solicitada ao estudante: *Numérica* (fracionário, percentual ou decimal); *Diagrama* (Venn ou de árvore); *Tabular* (tabela simples ou dupla entrada); *Gráfica* (barra, coluna, setores, dentre outros); *Figural* (figuras); *Língua Natural escrita*; *Múltiplas Representações* (dados sistematizados por meio de duas ou mais representações); descrição da probabilidade por meio de expressões que podem ser explicitadas na forma escrita ou oral.
8. Disponicionais: a) *Ausentes* (não estimulam a reflexão de eventos que envolvem incerteza e aleatoriedade); b) *Postura crítica* (promovem uma postura crítica dos estudantes); c) *Crenças e atitudes* (consideram as experiências pessoais, profissionais e culturais de cada sujeito, trazendo um caráter particular para a sua análise); d) *Sentimento ao risco* (exploram um sentimento aos riscos nos variados contextos); e) *Elaboração do estudante* (solicitam que o estudante elabore).

Metodologia do Estudo 3

O terceiro estudo buscou investigar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à compreensão do conceito de Probabilidade a partir de diferentes representações. Configurou-se como um estudo diagnóstico que, de acordo com Prodanov e Freitas (2013), tem o intuito de interrogar, de maneira direta e por meio de um questionário, um grupo de pessoas (amostra), para identificar seu comportamento frente a um determinado objeto de investigação. Esse tipo de estudo realiza uma análise quantitativa dos dados coletados e formula as conclusões necessárias, que possam abranger toda a população investigada.

Especificamente, o estudo aqui empreendido se propôs a compreender a noção que têm os estudantes do Ensino Médio em relação às diferentes representações do conceito de Probabilidade, a fim de identificar as possíveis dificuldades e acertos dos estudantes do segmento investigado.

Participaram do estudo 119 estudantes do 1º ano e 141 do 3º ano do Ensino Médio, de cinco escolas da rede estadual da Bahia (Juazeiro) e de Pernambuco (Petrolina). A relevância de pesquisar em ambos os estados está em considerar realidades diferentes, incluindo diferentes currículos, professores e estudantes.

Salientamos que, apesar de a pesquisa ocorrer concomitantemente nesses dois estados, não houve a intenção de comparar os resultados entre esses entes federativos.

Instrumento

As questões envolveram diferentes contextos e tipos de Probabilidade e foram organizadas em dois testes (Teste A e Teste B), os quais apresentavam a mesma questão, mas diferiam na forma de representação das informações (Quadro 4.1).

Quadro 4.1 - Organização das questões da atividade diagnóstica

Questão	Significado	Contexto	Dados	Representação da questão
1	Clássico	Jogos de azar	Fictícios	Teste A: Língua Natural Escrita
				Teste B: Tabular
2	Frequentista	Saúde	Autênticos	Teste A: Gráfica
				Teste B: Língua Natura Escrita
3	Intuitivo (a) Subjetiva (b, c e d)	Tecnológicos	Autênticos	Teste A: Tabular
				Teste B: Gráfica
4	Clássico	Ambiental	Autênticos	Teste A: Gráfica
				Teste B: Língua Natural Escrita
5	Frequentista	Social	Autênticos	Teste A e Teste B: Múltiplas representações

Fonte: Elaboração própria

Questão 1

Teste A - Língua natural escrita

Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores. Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12). Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2),
 (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4),
 (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

- a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
- b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

Teste B - Representação tabular

Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores. Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os

números (2, 4, 6, 8, 10, 12). Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:

1º dado	1	2	3	4	5	6
2º dado	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
- b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

Habilidades e respostas esperadas da Questão 1

Habilidade - item (a): Comparar a probabilidade de eventos (soma das faces dos dados), considerando as combinações de lançamentos de dois dados apresentadas na representação numérica (Teste A) ou na representação tabular (Teste B).

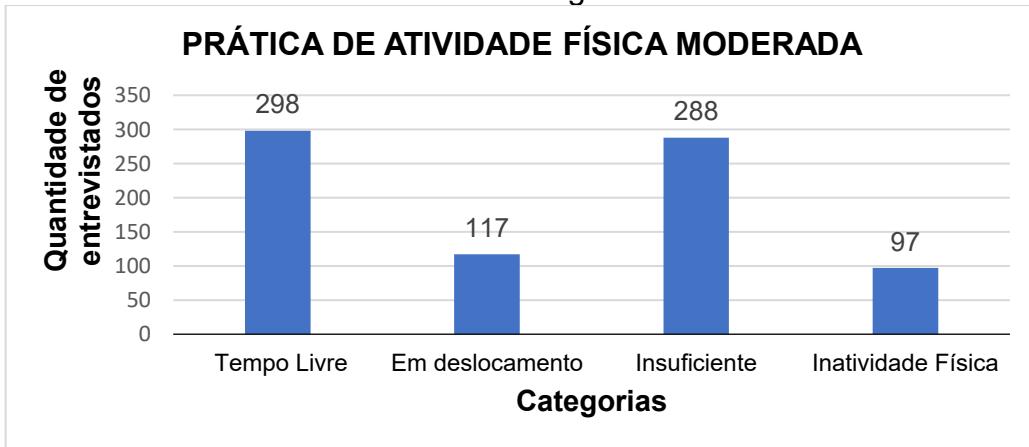
Resposta - item (a): Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer o jogo. (Calcular a probabilidade de uma soma específica - número 8).

Resposta - item (b): Considerando o total do espaço amostral dos lançamentos de dois dados (36 possibilidades) e os pares ordenados que resultam na soma 8 (3,5), (5,3), (4,4), (2,6) e (6,2), temos que a probabilidade da soma das faces dos dados resultar no número 8 será de $\frac{5}{36}$.

Questão 2

Teste A - Representação gráfica

Em 2023, foi realizada pelo Ministério da Saúde uma pesquisa com moradores de todas as capitais do país para saber sobre a quantidade de tempo destinado para a prática de atividades físicas moderada por semana (mínimo de 150 minutos). Na cidade de Salvador os resultados foram os seguintes:



Fonte: Ministério da Saúde, 2023

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Teste B - Língua natural escrita

Em 2023, foi realizada pelo Ministério da Saúde uma pesquisa com moradores de todas as capitais do país para saber sobre a quantidade de tempo destinado para a prática de atividades físicas moderada por semana (mínimo de 150 minutos). Na cidade de Salvador, os resultados foram os seguintes: 298 pessoas praticam atividades físicas moderada no tempo livre; 117 praticam atividades físicas moderadas em deslocamento; 288 possuem prática insuficiente de atividade física moderada; e 97 pessoas tem inatividade física.

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Habilidades e respostas esperadas da Questão 2

Habilidade - item (a): Interpretar e analisar os dados apresentados na representação Gráfica (Teste A) ou na representação na língua natural escrita (Teste B), para determinar a probabilidade de escolher um adulto que pratique atividade física moderada.

Respostas - item (a): Nessa resolução, os estudantes precisam fazer a soma de probabilidades, somando os dados das pessoas que praticaram atividade física moderada no tempo livre com o total de pessoas que praticaram atividade física moderada em deslocamento:

Forma 1 (soma das amostras favoráveis): $298 + 117 = 415$, logo, considerando o espaço amostral de 800 entrevistados, temos $\frac{415}{800}$. Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{415}{800}$ e suas simplificações; Percentual: 51,8%; ou Numérica: 0,518.

Forma 2 (soma total das probabilidades): Ponderando a amostra dos adultos que praticam atividade física moderada, temos os seguintes casos:

tempo livre (298 pessoas), então $P = \frac{298}{800}$; em deslocamento (117 pessoas), então $P = \frac{117}{800}$. Logo, a probabilidade pode ser explicitada por: $\frac{298}{800} + \frac{117}{800} = \frac{415}{800}$

Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{415}{800}$ e suas simplificações; Percentual: 51,8%; ou Numérica: 0,518.

Forma 3 (soma por parte das probabilidades): Sendo $\frac{298}{800} = 0,372$ e $\frac{117}{800} = 0,146$. Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes

representações: Fracionária: $\frac{415}{800}$ e suas simplificações; Percentual: $37,2 + 14,6 = 51,8\%$; ou Numérica: $0,372 + 0,146 = 0,518$.

Habilidade - item (b): Argumentar e posicionar-se criticamente sobre a relação entre a amostra que participou da pesquisa e a população da cidade de Salvador, a partir dos dados probabilísticos.

Resposta - item (b): Essa situação está associada à probabilidade Frequentista ao trazer uma estimativa sobre a prática de atividade física moderada na cidade de Salvador. Com base nessa amostra, o resultado **não** reflete exatamente o estado geral de toda a população de Salvador, visto que diversos fatores podem alterá-lo, tais como: perfil socioeconômico, idade, gênero, localização, dentre outros. Além disso, a amostra não é significativa para essa generalização.

Questão 3

Teste A - Representação tabular

- a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone? Justifique a sua resposta
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
- b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
- c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023?

Tabela: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023

Smartphone	Unidades (milhões)
iphone 14 Pro Max	34
iphone 15 Pro Max	33
iphone 14	29
iphone 14 Pro	29
iphone 13	23
Galaxy A14 4G	21
iphone 15 Pro	21
Galaxy A54 4G	20
Galaxy A14 5G	19
iphone 15	17

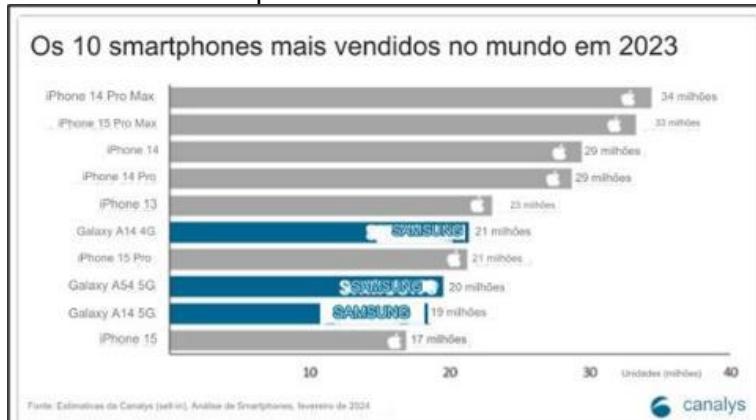
Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em:
<https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

- d) Inicialmente você determinou a probabilidade do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido do mundo em 2023. Agora, com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Teste B - Representação gráfica

- a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone? Justifique a sua resposta
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
- b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
- c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta no gráfico abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023?

Gráfico - Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023



Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em:
<https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338>. Acesso em: 22 de julho de 2024.
Tradução nossa.

- d) Inicialmente você determinou a probabilidade do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido do mundo em 2023. Agora, com base na probabilidade calculada a partir do gráfico acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Habilidades e respostas esperadas da Questão 3

Habilidade - item (a): Classificar, de maneira qualitativa, fazendo uso de termos intuitivos da Probabilidade, a partir de suas crenças pessoais, por meio da língua natural escrita.

Habilidade - item (b): Esse item está baseado na noção de Probabilidade subjetiva, logo, esperamos que os estudantes apresentem uma representação numérica (percentual), fundamentada em suas experiências pessoais e no conhecimento que possuem de mundo.

Resposta - itens (a e b): Nessas alternativas não há uma única resposta adequada, uma vez que as respostas serão específicas de cada estudante. Todavia, podemos analisar a profundidade do argumento utilizado.

Habilidade - item (c): Interpretar, analisar e agrupar os dados apresentados na representação Tabular (Teste A) ou na representação Gráfica (Teste B), para calcular a probabilidade de ter ocorrido o evento (Samsung Galaxy ser o mais vendido em 2023), com base em dados reais.

Respostas - item (c): Nesse item, os estudantes precisam somar os dados (ou a probabilidade dos dados) referentes à marca de celular citada na referida questão. Sendo assim, as resoluções podem ser sistematizadas da seguinte forma:

Forma 1 (soma das amostras favoráveis): $21 + 20 + 19 = 60$, logo, considerando o espaço amostral de 246 (milhões) de celulares vendidos em 2023, temos $\frac{60}{246}$. Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{60}{246}$ e suas simplificações; Percentual: 24,3%; ou Numérica: 0,243.

Forma 2 (soma total das probabilidades): Ponderando a amostra do smartphone, temos os seguintes casos:

Galaxy A14 4G (21 milhões), então $P = \frac{21}{246}$,

Galaxy A54 4G (20 milhões), então $P = \frac{20}{246}$ e

Galaxy A14 5G (19 milhões), então $P = \frac{19}{246}$

Logo, a probabilidade pode ser explicitada por:

$$\frac{21}{246} + \frac{20}{246} + \frac{19}{246} = \frac{60}{246}$$

Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{60}{246}$ e suas simplificações; Percentual: 24,3%; ou Numérica: 0,243.

Forma 3 (soma por parte das probabilidades): Sendo $\frac{298}{800} = 0,372$ e $\frac{117}{800} = 0,146$. Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Percentual: $37,2 + 14,6 = 51,8\%$ ou Numérica: $0,372 + 0,146 = 0,518$.

Habilidade - item (d): Comparar os dados dos itens (b e c) e refletir criticamente, argumentando sobre a sua percepção antes e depois de ter acesso a uma nova informação, a partir do cálculo da Probabilidade.

Resposta - item (d): Nessa alternativa não há uma única resposta adequada, visto que, por trata-se de uma situação de Probabilidade subjetiva, as respostas serão específicas de cada estudante. Todavia, podemos analisar a profundidade do argumento utilizado.

Questão 4

Teste A- Representação gráfica

O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), emitiu um alerta sobre o perigo potencial de vendaval no vale do São Francisco no início do mês de agosto, informando as velocidades das rajadas de vento em km/h para os próximos dias, a partir de 02 de agosto, conforme segue:



Fonte: Climatempo. Disponível em: <https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-ba>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Essas velocidades podem ser distribuídas nos seguintes intervalos:

[40 - 44 km/h] [45 - 49 km/h] [50 - 54 km/h] [55 - 59 km/h]

Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

- Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?
- Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Teste B - Língua natural escrita

O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), emitiu um alerta sobre o perigo potencial de vendaval no vale do São Francisco no início do mês de agosto, informando as velocidades das rajadas de vento em km/h para os próximos dias, a partir de 02 de agosto, conforme segue:

57 km/h: 02/09	54 km/h: 03/09	55 km/h: 04/09	53 km/h: 05/09	48 km/h: 06/09
45 km/h: 07/09	49 km/h: 08/09	51 km/h: 09/09	47 km/h: 10/09	42 km/h: 11/09
54 km/h: 12/09	54 km/h: 13/09	52 km/h: 14/09	56 km/h: 15/09	54 km/h: 16/09

Fonte: Climatempo. Disponível em: <https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-ba>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Essas velocidades podem ser distribuídas nos seguintes intervalos:

[40 - 44 km/h] [45 - 49 km/h] [50 - 54 km/h] [55 - 59 km/h]

Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

- Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

- b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Habilidades e respostas esperadas da Questão 4

Habilidades - item (a): Interpretar e analisar os dados apresentados na representação Gráfica (Teste A) ou na representação em Língua natural escrita (Teste B), para determinar a probabilidade de a velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h.

Respostas - item (a): Considerando o total do espaço amostral da velocidade do vento (15 velocidades) e os resultados que atendem ao evento investigado (42, 45, 47, 48, 49), temos que a probabilidade de a velocidade ser menor que 50 km/h poderá ser determinada da seguinte forma.

Forma 1 (soma das amostras favoráveis): Considerando as velocidades menores que 50 km/h (42, 45, 47, 48, 49) e o espaço amostral dessa situação, temos $\frac{5}{15}$. Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{5}{15}$ ou $\frac{1}{3}$; Percentual: 33%; ou Numérica: 0,33.

Forma 2 (soma total das probabilidades): Ponderando os intervalos de velocidades e suas respectivas probabilidades em relação à velocidade menor que 50 km/h, temos os seguintes casos:

[40 - 44 km/h]: 42 km/h (1º dia), então $P = \frac{1}{15}$ e [45 - 49 km/h]: 48 km/h (5º dia), 45 km/h (6º dia), 49 km/h (7º dia), 47 km/h (9º dia), então $P = \frac{4}{15}$.

Logo, a probabilidade pode ser explicitada por:

$$\frac{1}{15} + \frac{4}{15} = \frac{5}{15}$$

Dessa maneira, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{5}{15}$ ou $\frac{1}{3}$; Percentual: 33%; ou Numérica: 0,33.

Forma 3 (soma por parte das probabilidades): Sendo $\frac{1}{15} = 0,066$ e $\frac{4}{15} = 0,266$. Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Percentual: $0,066 + 0,266 = 0,332$ ou Numérica: $0,066 + 0,266 = 0,332$.

Habilidade - item (b): Argumentar e posicionar-se criticamente sobre o grau de incerteza e aleatoriedade inerente à velocidade da rajada de vento.

Resposta - item (b): Essa situação está associada aos conceitos de Probabilidade condicional (por considerar os últimos cinco dias) e traz o grau de incerteza e aleatoriedade, que são inerentes ao conceito de probabilidade. Dito isso, mesmo tomando como base a velocidade dos ventos nos últimos cinco dias, não podemos afirmar com absoluta certeza que nos dias seguintes as velocidades serão maiores que 50 km/h, visto que alterações nas condições climáticas podem ocorrer e alterar esses resultados.

Questão 5

Teste A e Teste B: Representação Tabular e Gráfica

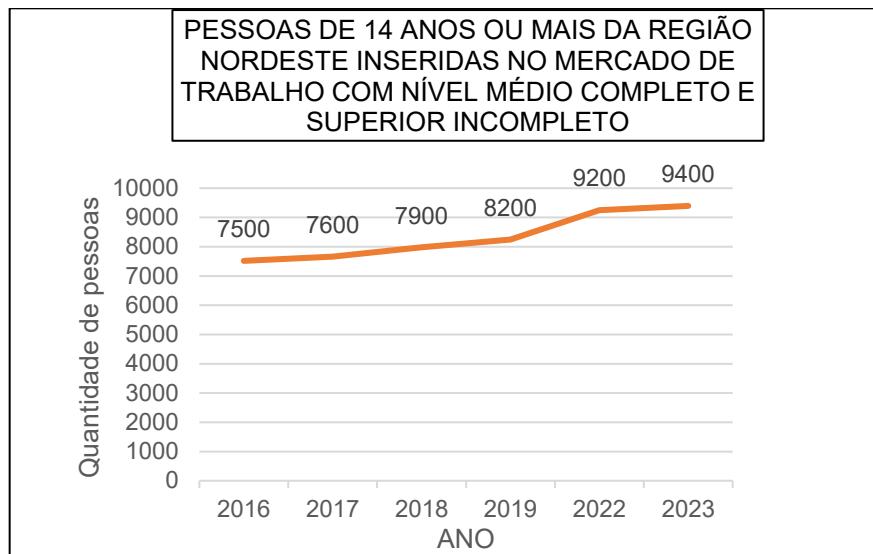
O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) obteve os resultados referentes ao total de pessoas inseridas no mercado de trabalho que terminaram o Ensino Médio e possuem o Ensino Superior Incompleto entre os anos de 2016 a 2023. A Tabela 1 mostra o número aproximado de pessoas em todo o país e o Gráfico 1 mostra o número aproximado de pessoas em relação a Região Nordeste.

Tabela 1 - Quantidade de pessoas no Brasil inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023

Ano	Quantidade de pessoas (mil pessoas)
2016	35
2017	36
2018	37
2019	38
2022	42
2023	43

Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Gráfico 1 - Quantidade de pessoas da Região Nordeste inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023



Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Com base nesses dados:

- a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?
- b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Habilidades e respostas esperadas da Questão 5

Habilidade - item (a): Interpretar, analisar e comparar os dados apresentados na representação Tabular e na representação Gráfica para calcular a probabilidade do evento.

Resposta - item (a): Considerando o total do espaço amostral de pessoas que possuíam em 2018 o Ensino Médio completo e o Ensino Superior incompleto (37 mil) e o total de pessoas residentes na Região Nordeste (7900), temos que a probabilidade será de $\frac{7900}{37000}$.

Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{7900}{37000}$ e suas simplificações; Percentual: 21,3%; ou Numérica: 0,213.

Habilidade - item (b): Refletir e posicionar-se criticamente sobre a relação entre a variabilidade dos dados relativos ao grau de escolaridade (Ensino Médio completo e Superior incompleto) a nível Brasil e Nordeste e como essas transformações podem interferir na probabilidade da seleção de pessoas de uma região.

Respostas - item (b): Com base nos resultados apresentados na representação Tabular e Gráfica, esses resultados permitem dizer que o aumento no número total de pessoas com Ensino Médio completo e Superior incompleto, entre 2016 e 2023, tanto no Brasil quanto na Região Nordeste, pode sim afetar a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste ao longo desse intervalo de tempo.

Para analisar as respostas dos estudantes, consideramos os seguintes critérios de correção adaptados a cada item da atividade diagnóstica:

- Na Questão 3, os itens a, b e d – por terem um caráter subjetivo e serem atrelados aos elementos disposicionais propostos por Gal (2005), pois trazem as experiências, opiniões e crenças dos estudantes em relação ao contexto tecnológico – foram analisados somente qualitativamente;
- As demais questões, independentemente da representação utilizada, foram também analisadas quantitativamente. Atribuímos pontuação 0 (zero) quando a resposta não atendia à resposta esperada; e pontuação 1 (um) quando o estudante apresentava uma resposta coerente com as habilidades e as respostas esperadas. Essas questões, juntas,

totalizaram 9 (nove) pontos que podem ser alcançados pelos estudantes.

Metodologia do Estudo 4

O quarto estudo buscou analisar uma sequência de ensino envolvendo Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações, para estudantes do Ensino Médio de Pernambuco e Bahia. Nesse estudo, optamos por realizar a intervenção apenas com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, considerando que se trata da etapa de conclusão da Educação Básica e por ser o ano escolar em que estão associadas as habilidades e os objetos de conhecimento concernentes à Probabilidade, nos currículos desses estados.

Nesse viés, propusemos a elaboração de uma intervenção participativa, pautada nas reflexões dos resultados dos três estudos anteriores (análise documental, análise dos livros didáticos e análise da atividade diagnóstica). Para isso, buscamos compreender se a metodologia adotada na intervenção de ensino, pautada na investigação de situações em contextos autênticos, que fazem parte da realidade dos estudantes, partia de dados reais. Além disso, articulamos a utilização de múltiplas representações para a apresentação de dados probabilísticos, bem como a intercambialidade entre elas, considerando que elas propiciam a compreensão dos estudantes em relação aos conceitos de Probabilidade e o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Ponderando essas intenções, a intervenção de ensino foi sistematizada em duas etapas: pré-teste e intervenção. Na primeira etapa (pré-teste), investigamos os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao conceito de Probabilidade. Para isso, optamos por fazer uso do mesmo instrumento diagnóstico adotado no Estudo 3, por tratar-se de participantes diferentes, porém, com um pequeno ajuste na Questão 4, retirando os intervalos das rajadas de vento. Sendo assim, o pré-teste foi composto por cinco questões que, juntas, corresponderam a 12 itens e totalizaram 9 (nove) pontos, visto que nos itens “a, b e d” da Questão 3, devido à sua natureza subjetiva, relacionada aos aspectos individuais que envolvem as percepções e convicções dos estudantes, a análise foi realizada exclusivamente de forma qualitativa.

A segunda etapa – a intervenção – ocorreu em dois momentos, durante o mês de agosto de 2025, considerando, em cada período, três aulas de 50 minutos,

totalizando seis aulas em cada turma. Participaram desse estudo 42 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de duas escolas, sendo uma turma da rede estadual da Bahia (Juazeiro) e outra da rede estadual de Pernambuco (Petrolina).

Em ambas as turmas, os estudantes precisavam responder questões projetadas no PowerPoint. Os dados foram apresentados em duas representações, além da apresentação de atividades impressas realizadas em duplas. As atividades impressas foram organizadas em duas versões (Versão A e Versão B), as quais apresentavam o mesmo enunciado, porém com representações diferentes. Ambas as atividades foram propostas para toda a turma, com momentos de reflexões coletivas que não estavam centradas apenas na aplicação de fórmulas, mas na análise de situações autênticas conectadas com a realidade e que estimulassem o posicionamento e a argumentação crítica e reflexiva dos estudantes.

Vale salientar que todos os momentos da sequência, seja em duplas ou coletivas, foram sistematizados e mediados pelo professor-pesquisador. Além disso, as respostas fornecidas pelos estudantes nas atividades propostas (PowerPoint e impressa) foram coletadas. Também houve a coleta dos registros gravados, os quais colaboraram para a análise dessa intervenção.

Apresentamos, a seguir, as atividades propostas no pré-teste e desenvolvidas na intervenção de ensino. Como as questões do pré-teste foram as mesmas aplicadas na atividade diagnóstica, apresentaremos neste espaço as habilidades concernentes a cada uma delas. As respostas esperadas já estão apresentadas na descrição do Estudo 3, na seção anterior.

Instrumento pré-teste

Questão 1

Teste A - Língua natural escrita

Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores. Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12). Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2),
 (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4),
 (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

- a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
- b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

Teste B - Representação tabular

Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores. Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12). Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:

1º dado 2º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
- b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

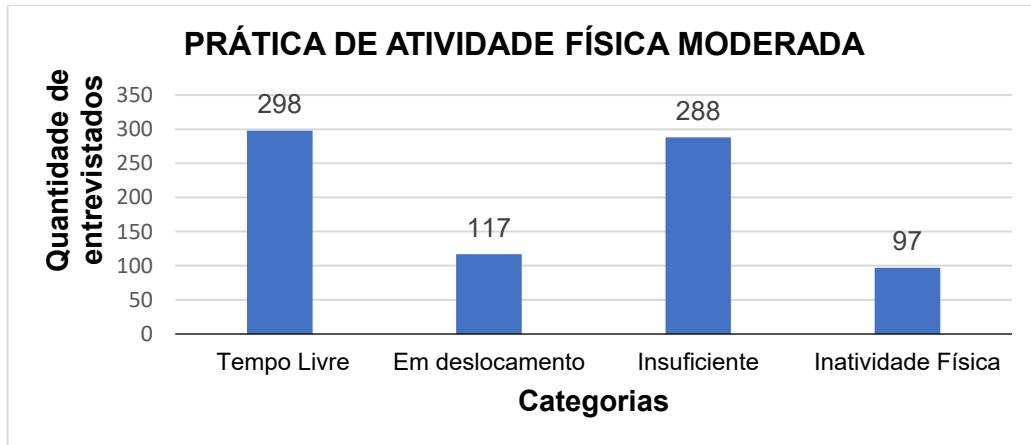
Habilidades esperadas da Questão 1 do pré-teste

Habilidades: a) Comparar a probabilidade de eventos (soma das faces dos dados), considerando as combinações de lançamentos de dois dados.
b) Determinar a probabilidade de sair a soma 8, ao fazer o lançamento de dois dados.

Questão 2

Teste A - Representação gráfica

Em 2023, foi realizada pelo Ministério da Saúde uma pesquisa com moradores de todas as capitais do país para saber sobre a quantidade de tempo destinado para a prática de atividades físicas moderada por semana (mínimo de 150 minutos). Na cidade de Salvador os resultados foram os seguintes:



Fonte: Ministério da Saúde, 2023

- Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?
- Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Teste B - Língua natural escrita

Em 2023, foi realizada pelo Ministério da Saúde uma pesquisa com moradores de todas as capitais do país para saber sobre a quantidade de tempo destinado para a prática de atividades físicas moderada por semana (mínimo de 150 minutos). Na cidade de Salvador os resultados foram os seguintes: 298 pessoas praticam atividade física moderada no tempo livre; 117 praticam atividades físicas moderadas em deslocamento; 288 possuem prática insuficiente de atividade física moderada e 97 pessoas tem inatividade física.

- Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?
- Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Habilidades esperadas da Questão 2 do pré-teste

Habilidade: a) Interpretar e analisar os dados para determinar a probabilidade de escolher um adulto que pratique atividade física moderada. b) Argumentar e posicionar-se criticamente sobre a relação entre a amostra que participou da pesquisa e a população da cidade de Salvador, a partir dos dados probabilísticos.

Questão 3

Teste A - Representação tabular

- a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone? Justifique a sua resposta
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
- b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
- c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023?

Tabela: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023

Smartphone	Unidades (milhões)
iphone 14 Pro Max	34
iphone 15 Pro Max	33
iphone 14	29
iphone 14 Pro	29
iphone 13	23
Galaxy A14 4G	21
iphone 15 Pro	21
Galaxy A54 4G	20
Galaxy A14 5G	19
iphone 15	17

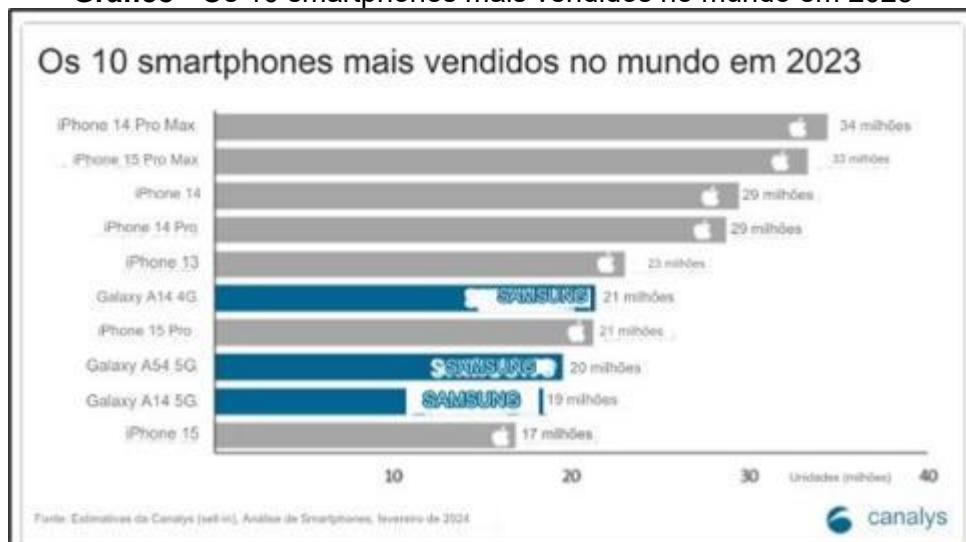
Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em:
<https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

- d) Inicialmente você determinou a probabilidade do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido do mundo em 2023. Agora, com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Teste B - Representação gráfica

- a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone? Justifique a sua resposta
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
- b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
- c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta no gráfico abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023?

Gráfico - Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023



Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em:
<https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338>. Acesso em: 22 de julho de 2024.
 Tradução nossa.

- d) Inicialmente você determinou a probabilidade do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido do mundo em 2023. Agora, com base na probabilidade calculada a partir do gráfico acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Habilidades esperadas da Questão 3 do pré-teste

Habilidade: a) Classificar, de maneira qualitativa, fazendo uso de termos intuitivos da Probabilidade a partir de suas crenças pessoais, por meio da língua natural escrita. b) Apresentar uma representação numérica (percentual), fundamentada em suas experiências pessoais e no conhecimento de mundo. c) Interpretar, analisar e agrupar os dados para calcular a probabilidade de ter ocorrido o evento (Samsung Galaxy ser o mais vendido em 2023), com base em dados reais. d) Comparar os dados dos itens (b e c) e refletir criticamente, argumentando sobre a sua percepção antes e depois de ter acesso a uma nova informação, a partir do cálculo da Probabilidade.

Questão 4

Teste A - Representação gráfica

O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), emitiu um alerta sobre o perigo potencial de vendaval no vale do São Francisco no início do mês de agosto, informando as velocidades das rajadas de vento em km/h para os próximos dias, a partir de 02 de agosto, conforme segue:



Fonte: Climatempo. Disponível em: <https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-ba>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

- Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?
- Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Teste B - Língua natural escrita

O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), emitiu um alerta sobre o perigo potencial de vendaval no vale do São Francisco no início do mês de agosto, informando as velocidades das rajadas de vento em km/h para os próximos dias, a partir de 02 de agosto, conforme segue:

57 km/h: 02/09	54 km/h: 03/09	55 km/h: 04/09	53 km/h: 05/09	48 km/h: 06/09
45 km/h: 07/09	49 km/h: 08/09	51 km/h: 09/09	47 km/h: 10/09	42 km/h: 11/09
54 km/h: 12/09	54 km/h: 13/09	52 km/h: 14/09	56 km/h: 15/09	54 km/h: 16/09

Fonte: Climatempo. Disponível em: <https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-ba>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

- Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?
- Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades

maiores que 50 km/h? Justifique.

Habilidades esperadas da Questão 4 do pré-teste

Habilidade: a) Interpretar e analisar os dados para determinar a probabilidade de a velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h. b) Argumentar e posicionarse criticamente sobre o grau de incerteza e aleatoriedade inerentes à velocidade da rajada de vento.

Questão 5

Teste A e Teste B: Representação Tabular e Gráfica

O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) obteve os resultados referentes ao total de pessoas inseridas no mercado de trabalho que terminaram o Ensino Médio e possuem o Ensino Superior Incompleto entre os anos de 2016 a 2023. A Tabela 1 mostra o número aproximado de pessoas em todo o país e o Gráfico 1 mostra o número aproximado de pessoas em relação a Região Nordeste.

Tabela 1 - Quantidade de pessoas no Brasil inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023

Ano	Quantidade de pessoas (mil pessoas)
2016	35
2017	36
2018	37
2019	38
2022	42
2023	43

Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em:
<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Gráfico 1 - Quantidade de pessoas da Região Nordeste inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023



Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em:
<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Com base nesses dados:

- a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?
- b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Habilidades esperadas da Questão 5 do pré-teste

Habilidade: a) Interpretar, analisar e comparar os dados para calcular a probabilidade do evento. b) Refletir e posicionar-se criticamente sobre a relação entre a variabilidade dos dados relativos ao grau de escolaridade (Ensino Médio completo e Superior incompleto) a nível Brasil e Nordeste, e como essas transformações podem interferir na probabilidade da seleção de pessoas de uma região.

1ª Intervenção de Ensino

O primeiro momento da intervenção tinha como objetivo propiciar a aprendizagem de conceitos probabilísticos, a partir de diferentes representações, utilizando dados autênticos associados ao contexto autêntico das apostas esportivas online (*Bets*), partindo das crenças dos estudantes até uma tomada de decisão a partir dos dados. Para isso, utilizamos situações com o significado Intuitivo, Clássico e Frequentista, e as representações na língua natural, tabular e gráfica.

Sendo assim, inicialmente, desenvolvemos uma introdução informando a temática a ser discutida, as plataformas online que oferecem apostas esportivas, e apresentando os dados referentes à pesquisa desenvolvida pela *BigDataCorp* e pelo DataSenado. Após a apresentação desses dados, com o uso do PowerPoint, foi proposta uma atividade inicial, que ocorreu com toda a turma ao mesmo tempo e de forma oral, baseada em quatro questões. Essa atividade objetivou compreender os conhecimentos prévios dos estudantes e realizar um levantamento de suas hipóteses, bem como identificar suas opiniões pessoais e suas crenças sobre esse contexto.

Atividade 1

O *BigDataCorp*, uma empresa privada que faz pesquisas de mercado para ajudar a impulsionar diferentes negócios, em 2024 realizou uma pesquisa e previu que em 2025 teremos a criação de 1.300 empresas de jogos de azar. Uma pesquisa de outro grupo, o DataSenado, concluiu que mais de 22 milhões de pessoas apostaram nas *Bets* no mês de setembro de 2024.

- a) Alguém aqui já ganhou nesses jogos de *Bets*? Pode contar como foi?

- b) Para vocês, qual a probabilidade de se ter lucro por meio das apostas esportivas online (*Bets*)?

Tabela 1- Probabilidade de se ter lucro com *Bets*

Probabilidade	Frequência de estudantes
Impossível	
Pouco provável	
Provável	
Muito provável	
Certo	

Fonte: Estudantes do 3º ano de uma escola pública em agosto de 2025

- c) Na sua opinião, qual a probabilidade de alguém ganhar dinheiro com apostas em *Bets*?

Tabela 2- Probabilidade de ganhar dinheiro com *Bets*

Probabilidade	Frequência de estudantes
0%	
Até 10%	
Entre 11% e 30%	
Entre 31% e 50%	
50% ou mais	

Fonte: Estudantes do 3º ano de uma escola pública em agosto de 2025

- d) Qual dessas frases vocês acreditam que representa melhor o que acontece com quem aposta com frequência?

Tabela 3 - Probabilidade de ganhar dinheiro com *Bets*

Probabilidade	Frequência de estudantes
Quem insiste uma hora ganha	
Sempre perde no fim das contas	
Depende da sorte	
Depende do conhecimento do jogo	

Fonte: Estudantes do 3º ano de uma escola pública em agosto de 2025

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 1 – dia 1

Habilidades: a) Conhecimento do contexto e levantamento dos conhecimentos prévios. b) Sentimentos pessoais em relação ao risco. c) Sentimentos pessoais em relação ao risco. d) Crenças e atitudes.

Resposta - itens (a, b, c e d): Nessas alternativas não há uma única resposta adequada, uma vez que as respostas serão específicas de cada estudante. Todavia, podemos analisar a profundidade do argumento utilizado.

As Tabelas 1, 2 e 3 foram preenchidas em sala de aula, a partir das opiniões e crenças dos estudantes. Com essas respostas, conseguimos estabelecer um panorama sobre os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a esse contexto e sua compreensão em relação à aleatoriedade e ao risco (Elemento do conhecimento - Grandes ideias). Além disso, estimulamos o uso de termos probabilísticos e a quantificação de suas percepções, que foram sistematizadas pelo professor-pesquisador.

Após essas reflexões, os estudantes foram convidados a organizarem-se em duplas para responder a uma atividade impressa. Nessa atividade, metade da turma respondeu à versão A e a outra metade, à versão B, para que os dados fossem coletados a partir de diferentes representações. A atividade, composta por quatro itens, tinha como foco a análise e interpretação de dados reais da amostra pesquisada, considerando o perfil da amostra sobre as *Bets*.

Atividade 2 (impressa) - Versão A

O Datafolha realizou uma pesquisa com o objetivo de coletar a opinião dos brasileiros (com idade superior a 18 anos) sobre as apostas esportivas online. As entrevistas ocorreram entre os dias 05 e 06/11/2024 com abrangência nacional, incluindo Regiões Metropolitanas e Cidades do Interior de diferentes portes, em todas as Regiões do Brasil, em 113 municípios. A amostra total foi de 1.935 entrevistas.

Quadro 1 - Perfil da amostra



Fonte: Datafolha, 2024

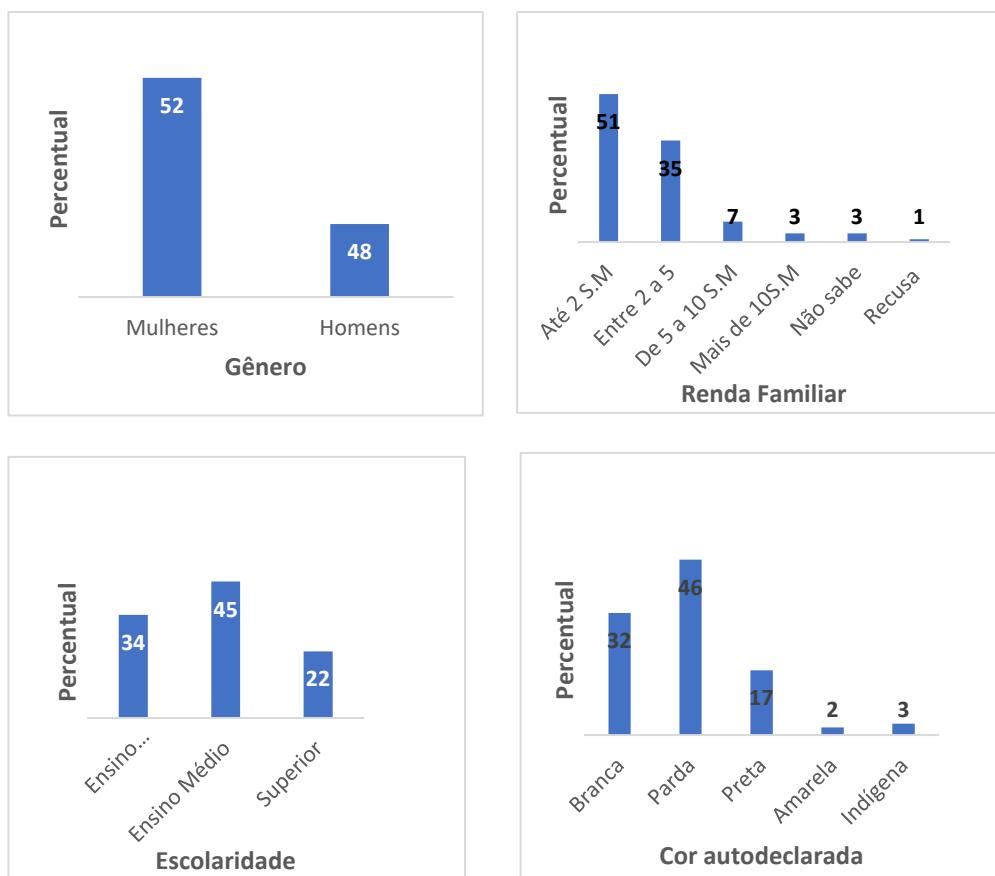
- Qual dessas variáveis vocês acham que é mais importante?

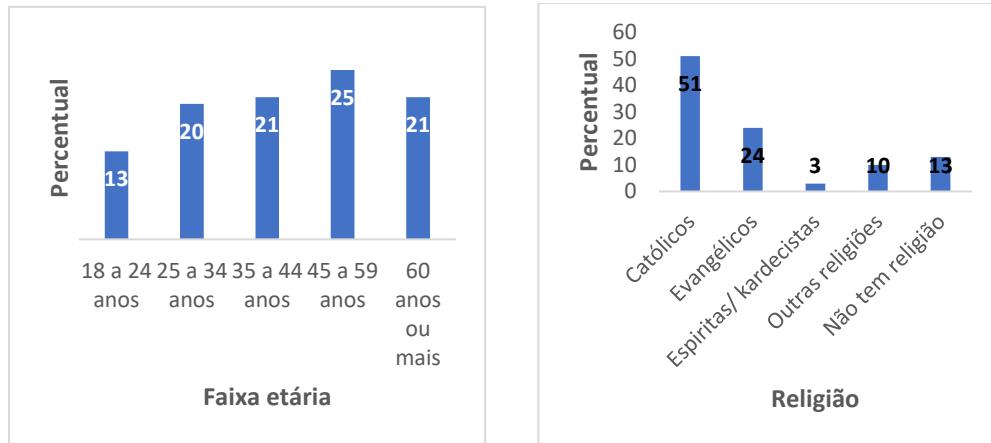
- b) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, homens ou mulheres? Por quê?
- c) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, pessoas mais idosas ou jovens? Por quê?
- d) Você é contrário a proibição das apostas esportivas online no Brasil?

Atividade 2 (impressa) - Versão B

O Datafolha realizou uma pesquisa com o objetivo de coletar a opinião dos brasileiros (com idade superior a 18 anos) sobre as apostas esportivas online. As entrevistas ocorreram entre os dias 05 e 06/11/2024 com abrangência nacional, incluindo Regiões Metropolitanas e Cidades do Interior de diferentes portes, em todas as Regiões do Brasil, em 113 municípios. A amostra total foi de 1.935 entrevistas.

Gráfico 1 - Perfil da amostra





Fonte: Datafolha, 2024

- a) Qual dessas variáveis vocês acham que é mais importante?
- b) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, homens ou mulheres? Por quê?
- c) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, pessoas mais idosas ou jovens? Por quê?
- d) Você é contrário a proibição das apostas esportivas online no Brasil?

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 2 – dia 1 – versões A e B

Habilidade: a) Levantamento de hipóteses. b) Crenças pessoais. c) Crenças pessoais. d) Sentimentos pessoais em relação ao risco associado as apostas esportivas.

Resposta - itens (a, b, c e d): Nessas alternativas não há uma única resposta adequada, uma vez que as respostas serão específicas de cada estudante. Todavia, podemos analisar a profundidade do argumento utilizado.

Essa atividade está associada diretamente aos elementos disposicionais. Estimula a discussão sobre as possíveis avaliações do grupo entrevistado em relação às *Bets*, com a apresentação, ao final, do seu julgamento. Após os estudantes responderem aos itens, o professor solicitou que as duplas apresentassem suas respostas e provocou uma reflexão sobre as diferentes respostas, incentivando a argumentação oral.

Em seguida, a partir da apresentação dos dados por meio de slides, iniciamos, explicitamente, o cálculo de probabilidade baseado em dados reais, ponderando a análise dos resultados do percentual de opinião das pessoas da amostra, sobre a proibição das apostas esportivas online.

Considerando as reflexões de Post e Prediger (2022), que reforçam a necessidade da utilização de variadas representações, com a explicitação das conexões entre elas, apresentamos esses dados por representações na língua

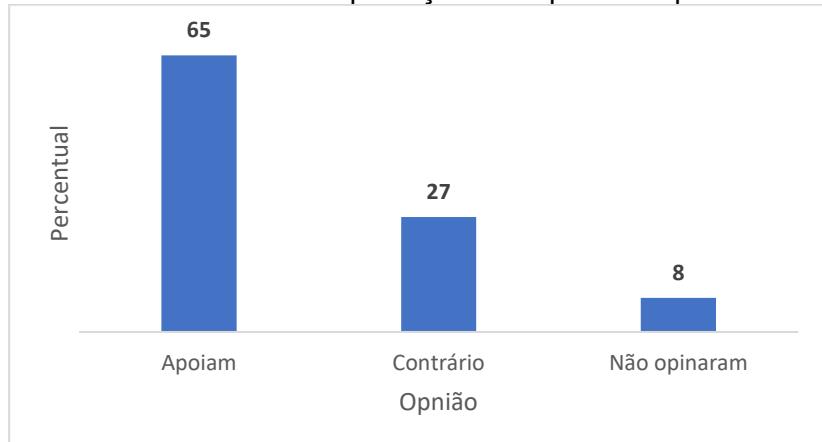
natural, tabular e gráfica. Essa articulação colabora para que o estudante visualize os dados de diferentes formas, auxilia na comparação entre as variáveis e contribui para o desenvolvimento da postura crítica.

Atividade 3

1) As representações a seguir, apresentam o percentual da amostra a favor (ou não) da proibição das *bets* no Brasil.

65% dos brasileiros apoiam a proibição.
 27% são contrários à proibição.
 8% não opinaram.

Gráfico 1- Percentual sobre proibição das apostas esportivas online



Fonte: Datafolha, 2024.

Com base nesses dados:

a) O que esses resultados indicam sobre a opinião da amostra em relação **a** prática das apostas esportivas?

2) Considerando apresentam o percentual da resposta a favor (ou não) da proibição das *bets* no Brasil em relação ao gênero:

Tabela 4 – Percentual de pessoas favoráveis à proibição por gênero

Gênero	%
Mulheres	68
Homens	61



Fonte: Datafolha, 2024.

- O que os dados evidenciam sobre a relação entre gênero e opinião sobre a prática das apostas esportivas?
- A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de que ela seja uma mulher contrária à proibição das apostas esportivas?

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 3 – dia 1

Habilidades: a) Análise e interpretação crítica dos dados quantitativos – contexto e linguagem. b) Postura crítica. c) Cálculo da probabilidade.

Resposta - itens (a, b): Nessas alternativas não há uma única resposta adequada, uma vez que as respostas serão específicas de cada estudante. Todavia, podemos analisar a profundidade do argumento utilizado.

Resposta - item (c): Nesse item, os estudantes irão analisar os dados da tabela ou do gráfico e apresentar a resposta percentual de 32%, equivalente a 620, aproximadamente. Os estudantes também podem exibir os resultados nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{620}{1935}$ e suas simplificações; Percentual: 32%; ou Numérica: 0,32.

Essas análises e a realização do cálculo de probabilidade, inicialmente, foram executadas pelos estudantes em uma folha e, posteriormente, pelo professor-pesquisador no quadro. Essa atividade colaborou para o aluno compreender como determinar a probabilidade de eventos reais. Além disso, possibilitou aos estudantes argumentarem e expressarem suas análises a partir do cálculo probabilístico.

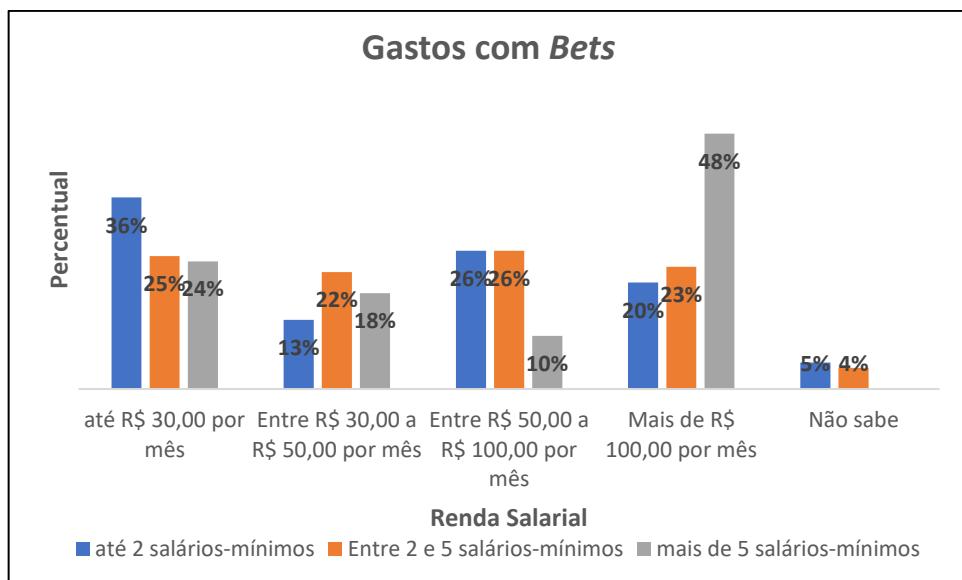
Na Atividade 4, os estudantes analisaram os dados referentes à idade dos jogadores que já fizeram apostas online e também observaram a relação entre o valor investido nas *Bets* e a renda mensal. Foram questionados sobre suas opiniões e crenças, e estimulados a refletirem coletivamente com a turma, confrontando seus argumentos com dados autênticos.

As representações a seguir apresentam os gastos mensais com as *Bets* por renda familiar dos participantes da pesquisa.

Atividade 4

Tabela 6 – Gastos mensais com as *Bets* por renda familiar

Gastos com <i>Bets</i>	até 2 salários-mínimos	Entre 2 e 5 salários-mínimos	mais de 5 salários-mínimos
até R\$ 30,00 por mês	36%	25%	24%
Entre R\$ 30,00 a R\$ 50,00 por mês	13%	22%	18%
Entre R\$ 50,00 a R\$ 100,00 por mês	26%	26%	10%
Mais de R\$ 100,00 por mês	20%	23%	48%
Não sabe	5%	4%	---



Fonte: Datafolha, 2024.

- a) É possível indicar uma relação entre o valor gasto em apostas e a renda familiar mensal?

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 4 – dia 1

Habilidades: interpretação de gráfico e postura crítica.

Resposta – item (a): Nesse item, os estudantes irão analisar os dados apresentados na tabela ou no gráfico e estabelecer uma relação entre o valor gasto em apostas e a renda familiar mensal.

Assim como na atividade anterior, a princípio, os estudantes se debruçaram em analisar as tabelas e os gráficos, determinando a probabilidade da situação dada em uma folha e, posteriormente, pelo professor-pesquisador no quadro. Essa atividade colaborou para os estudantes compreenderem como determinar a probabilidade de

eventos reais. Além disso, essas questões permitem ampliar o olhar deles sobre o perfil dos apostadores das *Bets*, expandindo o conhecimento do contexto. Apresentar esses dados em tabelas e gráficos teve o intuito de auxiliar os estudantes a compreenderem o conceito de Probabilidade e, ao mesmo tempo, desenvolver uma leitura crítica da desigualdade social expressa nos dados.

Com o término dessa atividade, implementamos uma conversa sobre outro tipo de jogo de azar, a Mega-Sena, que é um jogo historicamente popular entre os brasileiros. Optamos por inserir a discussão sobre esse jogo porque se trata de um jogo autorizado pelos entes governamentais e tem ampla divulgação nas mídias audiovisuais. Destacamos a sua origem, sua forma de distribuir os valores arrecadados quando há ou não ganhador e explicitamos o espaço amostral referente a esse jogo. Partindo disso, perguntamos oralmente aos estudantes:

- a) *Qual é a probabilidade de você ganhar na Mega-Sena jogando apenas seis números?*
- b) *Quantas combinações são possíveis? Vocês acham que são poucas ou muitas combinações possíveis?*

A primeira pergunta, associada aos elementos disposicionais, tinha o objetivo de estimular os estudantes a apresentarem de forma intuitiva a sua crença e seus sentimentos em relação à probabilidade de ganhos. Já a segunda, relacionada aos Elementos do conhecimento, suscitou os conhecimentos prévios quanto ao espaço amostral possível no jogo da Mega-Sena, ao solicitar que os estudantes estimassem a quantidade de combinações possíveis selecionando 6 números dentre os 60 disponíveis. Após eles responderem, o professor fez a sistematização das informações dos estudantes, anotando no quadro suas respostas.

Posteriormente, o professor explicitou aos estudantes que a ordem dos números sorteados não importa. Logo, o total de números escolhidos deve ser agrupado seis a seis, para montar as possibilidades de ganhar. Para compreender como saber o total de agrupamentos possíveis, os estudantes foram apresentados ao conceito e à fórmula de combinação, como forma de auxiliar o raciocínio matemático quanto à probabilidade real do jogo. A inclusão dessa fórmula ocorreu por meio do detalhamento de todos os termos da fórmula e da explicação do porquê das operações.

Professor: Para compreender essa situação precisamos compreender o conceito de combinação. Vocês lembram? Qual a fórmula?

$$C(n, p) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- O que é C? (quantidade total de combinações)
- O que é n? (número total de elementos do conjunto)
- O que é p? (número de elementos do subconjunto que pretendemos formar). Logo, nessa situação da Mega-Sena, qual seria o número total de elementos do conjunto? 60. Qual seria, no mínimo, o número de elementos do subconjunto que pretendemos formar? 6.

Por isso, precisamos analisar a combinação entre 60 e 6, ou seja,

$$C(60, 6)$$

Então temos disponíveis 60 números para se escolher subgrupos de 6. O que significa “!” em matemática? (Fatorial. É o produto de todos os números inteiros positivos menores ou iguais ao número).

- Quanto é n!? $60! = (60 \times 59 \times 58 \times 57 \times \dots \times 1)$
- Quanto é p!? $6! = (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$
- Por que temos que dividir por p!? (Considerando que a contagem inclui todas as ordens possíveis, haverá casos de mesmo subgrupo, porém, com a ordem diferente. Ex: (12 – 37 – 60 – 34 – 01) ou (34 – 37 – 60 – 12 – 01). A ordem é diferente, porém os elementos são os mesmos. Sendo assim, para manter os subgrupos únicos, dividimos pelo número de elementos do subconjunto que pretendemos formar.)
- Por que é preciso multiplicar por $n - p$!? (é a forma de organizar os outros números que não serão usados nos subgrupos.)

Partindo dessas informações, o professor, em parceria com os estudantes, realizou o cálculo para determinar o total de combinações possíveis entre 60 e 6. Sendo assim,

$$C(60, 6) = \frac{60!}{6!(60-6)!} = C(60, 6) = \frac{60!}{6! \times 54!} = 50.063.860$$

Logo, existem 50.063.860 combinações possíveis de escolher 6 números dos 60 disponíveis. Essa sistematização colaborou para a compreensão dos conceitos de espaço amostral, além de possibilitar a comparação entre as estimativas iniciais dos estudantes apresentadas nas alternativas a e b.

Uma vez determinado o total de combinações possíveis ao jogar na Mega-Sena, os estudantes foram formalmente apresentados à razão para calcular a

probabilidade clássica, definida como a relação entre o número de casos favoráveis e o conjunto de resultados possíveis. Nesse cenário, determinamos a probabilidade de acertar exatamente os 6 números sorteados, considerando que essa quantidade de números permite apenas uma combinação favorável.

$$\text{Probabilidade} = \frac{1}{50.063.860} = 0,000002\% \text{ (cerca de 1 em 50 milhões)}$$

Nesse cenário, detalhamos aos estudantes que a probabilidade de acertar as seis dezenas da Mega-Sena, jogando seis números, é de apenas uma em mais de 50 milhões, destacando a reduzida chance de sucesso nesse tipo de jogo.

Para terminar esse primeiro dia de intervenção, os estudantes tiveram acesso a três perguntas disponibilizadas por meio de slides, que os instigaram a refletir sobre suas crenças e sentimento em relação às apostas.

Atividade 5

- a) Sabendo disso, por que você acha que tantas pessoas continuam apostando?
- b) Qual é a importância de entender probabilidade antes de participar desses jogos?
- c) Na Mega-Sena, se o ganhador não for retirar o prêmio após 90 dias da data do sorteio, os valores são repassados para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior. E nas Bets?

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 5 – dia 1

Habilidades: a) Crenças pessoais / sentimento de risco em relação às apostas. b) Refletir sobre a importância do conhecimento probabilístico para tomada de decisões justas e coerentes. c) Postura crítica.

Resposta - itens (a, b e c): Nessas alternativas não há uma única resposta adequada, uma vez que as respostas serão específicas de cada estudante. Todavia, podemos analisar a profundidade do argumento utilizado.

Na primeira alternativa, os estudantes refletiram sobre as possíveis causas de as pessoas jogarem na Mega-Sena, mesmo com poucas chances de ganhar. Na segunda, buscamos identificar se, para os participantes dessa intervenção, a Probabilidade pode colaborar para a tomada de decisões coerentes e justas. A terceira alternativa relaciona os aspectos financeiro, social e legal das apostas na Mega-Sena e nas apostas online. Todas as alternativas estão diretamente associadas aos elementos disposicionais do Letramento Probabilístico (Gal, 2005), suscitando a postura crítica dos estudantes, articulada às suas crenças e sentimentos em relação ao risco.

De forma geral, nesse primeiro dia de intervenção, apresentamos fenômenos do cotidiano dos estudantes (jogos de azar), questionando-os sobre suas opiniões e crenças, estimulando reflexões coletivas com a turma, confrontando seus argumentos no sentido de verificar a validade dos mesmos para a situação, propiciando um ambiente de discussões com base em dados probabilísticos. A continuidade dessa intervenção ocorreu no segundo dia, no qual nos concentrarmos nos mecanismos para calcular a partir da análise dos dados apresentados com representações gráficas e tabulares.

2^a Intervenção de Ensino

O segundo momento da intervenção, sistematizada em três aulas, tinha como objetivo propiciar a aprendizagem de conceitos probabilísticos a partir de diferentes representações, utilizando dados reais associados ao contexto das questões ambientais, mais especificamente, da sustentabilidade ambiental, práticas de conservação ambiental e saneamento ambiental. Para isso, utilizamos os significados Intuitivo, Clássico e Subjetivo e as representações na língua natural (oral e escrita), tabular, diagrama e gráfica.

Sendo assim, inicialmente, desenvolvemos uma introdução, informando a temática a ser discutida e associando-a aos Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS).



Fonte: ONU - Brasil
Site: <https://brasil.un.org/pt-br/sdgs>.

Partindo disso, perguntamos oralmente aos estudantes:

- a) *O que os objetivos 2, 6, 7, 11, 12, 13, 14 e 15 têm em comum?*

Esse questionamento teve a intenção de estimular os estudantes a associarem os objetivos às discussões sobre o meio ambiente. Posteriormente, foi proposta a discussão dos dados referentes à pesquisa desenvolvida pela Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe), em 2022, sobre o índice de reciclagem no Brasil. Após a apresentação desses dados, com o uso do PowerPoint, foi proposta uma atividade inicial, baseada em três questões, as quais visavam compreender os conhecimentos precedentes dos estudantes, identificando também suas crenças e opiniões sobre sustentabilidade ambiental.

Atividade 1

A pesquisa desenvolvida pela Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe) em 2022, afirma que o Índice de reciclagem no Brasil é de apenas 4%. Além disso, o Observatório do Clima afirma que, em 2022, os resíduos sólidos urbanos são responsáveis pelo lançamento de 91,3 milhões de toneladas de CO₂ na atmosfera.

- a) Você já ouviu falar no termo sustentabilidade ambiental?
- b) Você já desenvolveu alguma prática sustentável?
- c) Para vocês, em percentual, qual a probabilidade dos brasileiros se preocuparem com a sustentabilidade e realizarem práticas sustentáveis?
- d) Você acha que os brasileiros se preocupam com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil?

NÍVEL DE PREOCUPAÇÃO	FREQUÊNCIA DA TURMA
Muito	
Se preocupam	
Mais ou menos	
Pouco	
Não se preocupam	

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 1 – dia 2

Habilidades: a) Contexto. b) Contexto. c) Sentimentos pessoais em relação ao risco. d) Crenças e atitudes.

Resposta - itens (a, b, c e d): Nessas alternativas não há uma única resposta adequada, uma vez que as respostas serão específicas de cada estudante. Todavia, podemos analisar a profundidade do argumento utilizado.

Essas questões foram discutidas oralmente com toda a turma, a partir das opiniões e crenças dos estudantes. Com as respostas, conseguimos estabelecer uma visão comum sobre o conhecimento prévio deles e seus sentimentos pessoais em relação a esse contexto. Além disso, estimulamos a relação entre o uso de termos probabilísticos e sua percepção numérica.

Após essas reflexões, os estudantes foram convidados a analisar os dados de uma situação clássica atrelada à preocupação com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil. A atividade, composta por dois itens, tinha como foco a interpretação de dados reais da amostra, apresentados em duas representações, e o cálculo de probabilidade simples, considerando as respostas fornecidas pelos participantes de uma pesquisa desenvolvida pelo grupo *Nexus*.

A apresentação dos dados em duas representações (língua natural escrita e a gráfica) se coaduna com a nossa proposta de tese e com pesquisas anteriores, acreditando que a apresentação das informações em duas representações ou mais aliada à intercambialidade entre elas favorecem o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Atividade 2

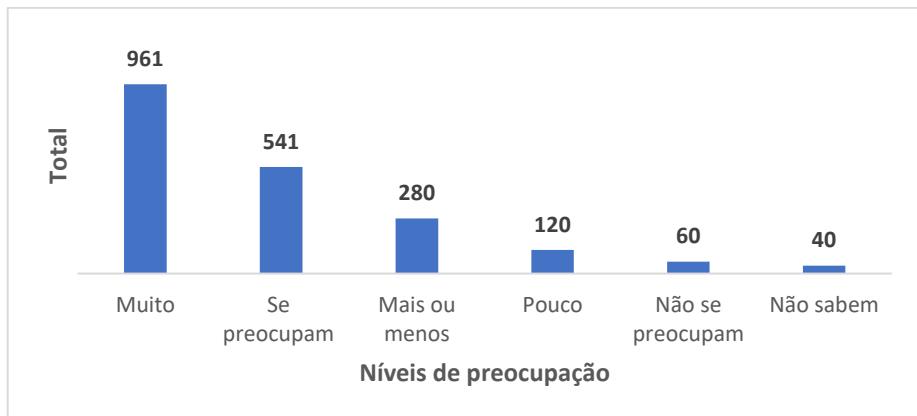
A pedido da Confederação Nacional da Indústria (CNI), o grupo *Nexus* uma empresa privada brasileira que atua no segmento de pesquisas de opinião, estudos de mercado e análises estratégicas de dados, desenvolveu em 2024, uma pesquisa em que os participantes foram questionados sobre a sua preocupação com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil. Os resultados foram os seguintes: 961 se preocupam muito; 541 se preocupam; 280 se preocupam mais ou menos; 120 se preocupam pouco; 60 não se preocupam; 40 não souberam responder.

a) Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso entre os entrevistados, se preocupar muito com a sustentabilidade ambiental?
(Habilidade: Calculando probabilidades)

Posteriormente, questionamos: “E se eu apresentasse os dados assim, facilita? Por quê?” – e apresentamos os mesmos dados com a representação gráfica.

Representação gráfica dos dados:

Gráfico 1 - Nível de preocupação com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil



Fonte: Nexus, 2024.

Após a apresentação desses dados nas duas representações, discutimos as diferentes estratégias de resolução e as diferentes respostas para a questão “a”, utilizando a atividade reproduzida em slide. Ao final, sistematizamos a discussão com outro item para ser respondido pelos estudantes:

- b) Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso entre os entrevistados, demonstrar preocupação média (se preocupa) ou baixa (se preocupa pouco) com a sustentabilidade? (**Habilidade:** Calculando probabilidades - soma de probabilidades).

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 2 – dia 2

Habilidades: a) Calculando probabilidades. b) Calculando probabilidades - soma de probabilidades. c) Postura crítica.

Resposta - item (a): Os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{961}{2002}$ e suas simplificações; Percentual: 48%; ou Numérica: 0,48.

Resposta - item (b): Nessa resolução, os estudantes precisam fazer a soma de probabilidades, somando os dados das pessoas que se preocupam com a sustentabilidade com o total de pessoas que se preocupam pouco.

Forma 1 (soma das amostras favoráveis): $541 + 120 = 661$, logo, considerando o espaço amostral de 2002 entrevistados, temos $\frac{661}{2002}$. Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{661}{2002}$ e suas simplificações; Percentual: 33%; ou Numérica: 0,33.

Forma 2: (soma total das probabilidades): Ponderando a amostra dos entrevistados em relação a preocupação com a sustentabilidade, temos os seguintes casos:

Se preocupam (541 pessoas) então $P = \frac{541}{2002}$, se preocupam pouco (120 pessoas)

então $P = \frac{120}{2002}$. Logo, a probabilidade pode ser explicitada por:

$$\frac{541}{2002} + \frac{120}{2002} = \frac{661}{2002}$$

Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{661}{2002}$ e suas simplificações; Percentual: 33% ou numérica: 0,33.

Forma 3 (soma por parte das probabilidades): Sendo $\frac{541}{2002} = 0,27$ e $\frac{120}{2002} = 0,05$. Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Percentual: $27 + 5 = 33\%$ ou numérica: $0,27 + 0,05 = 0,33$.

Depois dessas considerações, foi proposta a análise particular do item b, em que buscamos compreender a probabilidade de se escolher uma pessoa da amostra, dado o seu nível de preocupação com a sustentabilidade. Para isso, consideramos os percentuais de quem tem preocupação normal e de quem tem pouca preocupação. Esse item permitiu explicitar para os estudantes a soma da probabilidade de situações exclusivas.

Na sequência, os estudantes foram organizados em duplas, para realizar uma tarefa escrita. Nessa tarefa, a classe foi dividida em duas subturmas, cada uma ficando com uma versão da tarefa: a versão A (representação tabular) e a versão B (representação gráfica). Isso permitiu que as informações fossem analisadas a partir de diferentes representações. A tarefa, que consistia de três itens, focava na análise e interpretação de dados reais da amostra estudada, levando em conta o perfil da amostra sobre as práticas de conversação ambiental a partir da formulação de hipóteses por eles.

Atividade 3 (impressa) - Versão A

Uma pesquisa desenvolvida pelo grupo Nexus coletou a opinião dos brasileiros com idade superior a 18 anos sobre a sustentabilidade. As entrevistas ocorreram entre os dias 18 e 24 de setembro de 2024 com pessoas de todas as regiões do país. A amostra total foi de 2002 entrevistas. Quando questionados sobre suas práticas de conservação ambiental, os resultados foram os seguintes:

Tabela 1 - Frequência de respostas sobre práticas de conservação ambiental

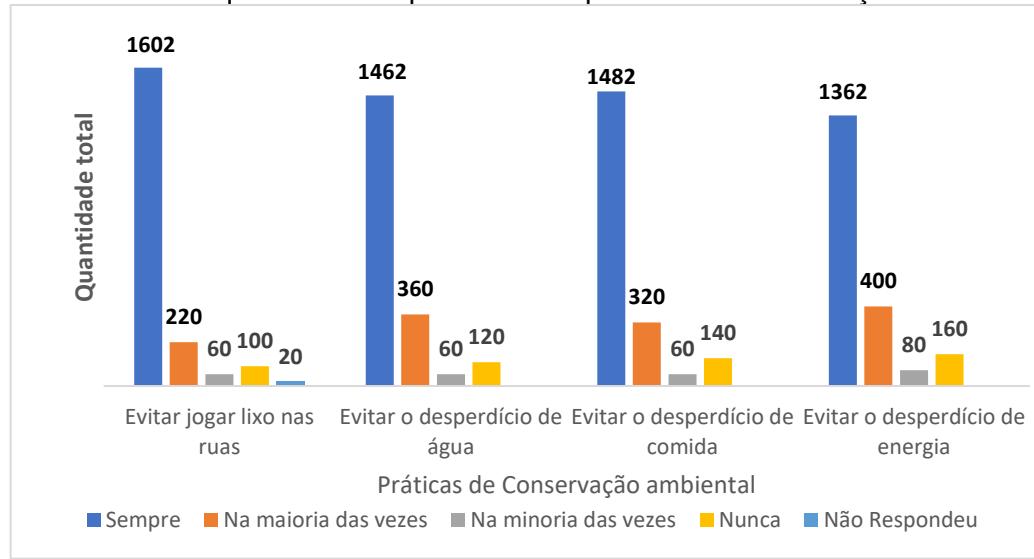
Atitudes	Sempre	Na maioria das vezes	Na minoria das vezes	Nunca	Não Respondeu
Evitar jogar lixo nas ruas	1602	220	60	100	20
Evitar o desperdício de água	1462	360	60	120	--
Evitar o desperdício de comida	1482	320	60	140	--
Evitar o desperdício de energia	1362	400	80	160	--

Fonte: Grupo Nexus, 2024.

- a) O que esses resultados indicam sobre as práticas de conservação ambiental da amostra?
- b) A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de ela evitar, na maioria das vezes, o desperdício de comida?
- c) Qual a probabilidade de uma pessoa dessa amostra ter um padrão de consumo consciente de energia, afirmando que sempre economiza energia elétrica ou na maior parte das vezes?

Atividade 3 (impressa) – Versão B

Uma pesquisa desenvolvida pelo grupo Nexus coletou a opinião dos brasileiros com idade superior a 18 anos sobre a sustentabilidade. As entrevistas ocorreram entre os dias 18 e 24 de setembro de 2024 com pessoas de todas as regiões do país. A amostra total foi de 2002 entrevistas. Quando questionados sobre suas práticas de conservação ambiental, os resultados foram o seguinte:

Gráfico 1 - Frequência de respostas sobre práticas de conservação ambiental

Fonte: Grupo Nexus, 2024.

- a) O que esses resultados indicam sobre as práticas de conservação ambiental da amostra?
- b) A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de ela evitar, na maioria das vezes, o desperdício de comida?
- c) Qual a probabilidade de uma pessoa dessa amostra ter um padrão de consumo consciente de energia, afirmando que sempre economiza energia elétrica ou na maior parte das vezes?

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 3 (impressa) – dia 2 – versões A e B

Habilidades: a) Análise e interpretação crítica dos dados quantitativos - contexto e linguagem. b) Cálculo da probabilidade. c) Cálculo da probabilidade - soma das amostras favoráveis ou soma das probabilidades.

Resposta - item (a): Nessa alternativa, não há uma resposta esperada, visto que os estudantes irão argumentar e posicionar-se criticamente sobre a relação entre a amostra que participou da pesquisa e as práticas de conservação ambiental.

Resposta - item (b): Os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{320}{2002}$ e suas simplificações; Percentual: 15,9%; ou Numérica: 0,159.

Resposta - item (c): **Forma 1 (soma das amostras favoráveis):** $1362 + 400 = 1762$, logo, considerando o espaço amostral de 2002 entrevistados, temos $\frac{1762}{2002}$. Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{1762}{2002}$ e suas simplificações; Percentual: 88%; ou Numérica: 0,88.

Forma 2: (soma total das probabilidades): Ponderando a amostra dos entrevistados em relação ao desperdício de energia, temos os seguintes casos:
Evitam o desperdício de energia sempre (1362 pessoas), então $P = \frac{1362}{2002}$. Evitam o desperdício de energia na maioria das vezes (400 pessoas), então $P = \frac{400}{2002}$. Logo, a probabilidade pode ser explicitada por:

$$\frac{1362}{2002} + \frac{400}{2002} = \frac{1762}{2002}$$

Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{1762}{2002}$ e suas simplificações; Percentual: 88%; ou Numérica: 0,88.

Forma 3 (soma por parte das probabilidades): Sendo $\frac{1362}{2002} = 0,68$ e $\frac{400}{2002} = 0,20$. Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Percentual: $68 + 20 = 88\%$ ou Numérica: $0,68 + 0,20 = 0,88$.

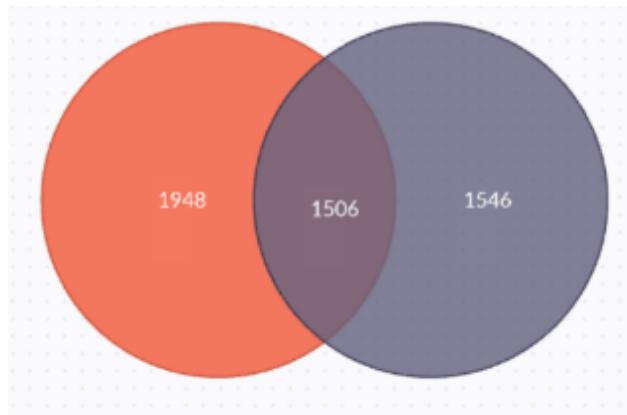
Após essa atividade, abordamos a possibilidade de, em diversas situações, poder estar em diferentes grupos ao mesmo tempo, evidenciando a necessidade de os estudantes compreenderem o conceito de interseção de eventos. Para isso, foi analisada uma situação em que se utilizavam dados de uma pesquisa recente sobre a percepção das pessoas em relação às mudanças climáticas no cotidiano.

Atividade 4

Uma pesquisa encomendada pelo Instituto Clima e Sociedade (ICS) e realizada pelo instituto de pesquisa Datafolha, em 2024, realizou uma entrevista com 2008 pessoas, questionando-os se eles percebiam as mudanças climáticas no dia a dia e a quem atribuiam:

- 1948 pessoas afirmaram perceber mudanças climáticas no dia a dia;
- 1546 afirmaram que essas mudanças estão associadas a ações humanas.

Considerando que 1506 pessoas afirmaram que percebem as mudanças e também as atribuem a causas humanas, esse seria um exemplo de interseção de probabilidade, que pode ser representado por meio do diagrama de Venn, da seguinte forma:



Na sequência, questionamos aos estudantes: *Vocês acham que é mais fácil entender esses dados olhando na língua natural escrita ou no diagrama de Venn?*

Posteriormente, os estudantes foram interrogados:

- a) Qual é a probabilidade de escolhermos aleatoriamente uma pessoa que tenha percebido as mudanças climáticas no dia a dia ou afirma que essas mudanças são causadas por ações humanas?

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 4 – dia 2

Habilidade: a) Calculando probabilidades.

Resposta: Forma 1 (soma das amostras favoráveis): $1948 + 1546 - 1506 = 1988$.

Logo, considerando o espaço amostral de 2008 entrevistados, temos $\frac{1988}{2008}$. Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{1988}{2008}$ e suas simplificações; Percentual: 99%; ou Numérica: 0,99.

Forma 2: (soma total das probabilidades): Ponderando a amostra dos entrevistados, temos os seguintes casos:

Número de pessoas que percebem as mudanças climáticas no dia a dia: 1948.

$$\text{Então } P = \frac{1948}{2008}.$$

Número de pessoas que afirmam que essas mudanças são causadas por ações humanas: 1546. Então $P = \frac{1546}{2008}$.

Número de pessoas que responderam as duas coisas: 1506. Então $P = \frac{1506}{2008}$ Logo, a probabilidade pode ser explicitada por:

$$\frac{1948}{2008} + \frac{1546}{2008} - \frac{1506}{2008} = \frac{3494}{2008} - \frac{1506}{2008} = \frac{1988}{2008}$$

Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{1988}{2008}$ e suas simplificações; Percentual: 99%; ou Numérica: 0,99.

Forma 3 (soma por parte das probabilidades): Sendo $\frac{1948}{2008} = 0,97$; $\frac{1546}{2008} = 0,77$ e $\frac{1506}{2008} = 0,75$, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Percentual: $97 + 77 - 75 = 99\%$ ou Numérica: $0,97 + 0,77 - 0,75 = 0,99$.

Com essa atividade, desafiamos os estudantes a resolverem essa situação. Essa atividade foi adotada como uma ideia para a introdução da união de eventos, quando há interseção. Além disso, detalhamos o significado de cada termo, explicitamos as possíveis formas de resolver essa atividade e, por fim, estimulamos a postura crítica, ao questioná-los sobre possíveis conclusões desses dados.

Professor: Como podemos resolver essa situação? Como podemos ver a quantidade de pessoas que estão em pelo menos um desses grupos?

Nesse tipo de situação, vamos utilizar a ideia de união de eventos. A fórmula da união é assim:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

O que significa cada parte?

- $P(A)$ = probabilidade de ocorrer o evento A. Nesse exemplo, seria a probabilidade de escolhermos uma pessoa que tenha afirmado ter percebido as mudanças climáticas no dia a dia.
- $P(B)$ = probabilidade de ocorrer o evento B. Nesse exemplo, seria a probabilidade de escolhermos uma pessoa que tenha afirmado que essas mudanças são causadas por ações humanas.
- $P(A \cap B)$ = probabilidade de ocorrerem A e B ao mesmo tempo. Ou seja, as pessoas que responderam as duas coisas (interseção).
- $P(A \cup B)$ = probabilidade de ocorrer pelo menos uma das duas situações (união).

Sendo assim, temos três maneiras de responder a situação dada.

Posteriormente, solicitamos, mais uma vez, que os estudantes se agrupassem em duplas para realizar uma tarefa escrita. Nessa tarefa, a classe foi dividida em duas subturmas, cada uma ficando com uma versão: a versão A (língua natural escrita) e a versão B (diagrama de Venn). A tarefa, composta por um item, focava na análise e interpretação de dados referentes a práticas ambientais de indústrias brasileiras.

Atividade 5 - impressa – Versão A

Em 2023, uma pesquisa feita em parceria da Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial (ABDI) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) pesquisou sobre a implementação de pelo menos uma iniciativa ou prática ambientais em empresas de médio e grande porte (500 ou mais funcionários). Das 8.758 empresas industriais que realizaram uma implementação.

- 8199 indústrias adotam práticas ambientais relacionadas a resíduos sólidos;
- 7898 indústrias adotam práticas relacionadas à reciclagem e reuso.
- 7444 indústrias adotam ambas as práticas.

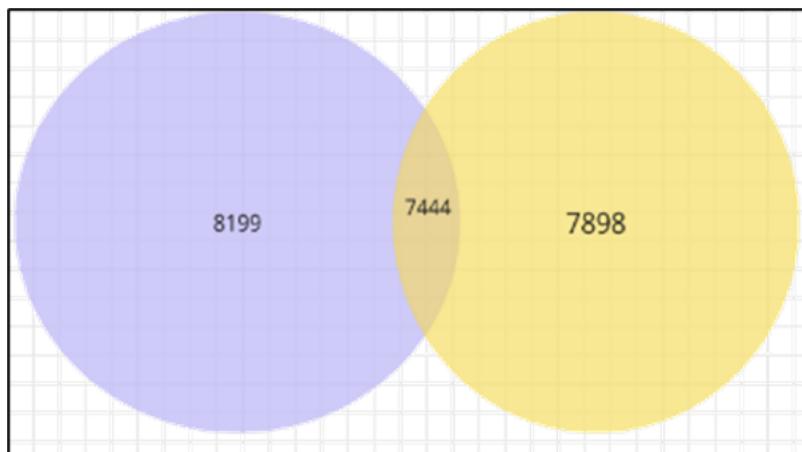
Considerando esses dados, qual é a probabilidade de escolhermos ao acaso uma dessas empresas grandes e ela adotar pelo menos uma dessas práticas ambientais? (**Habilidade:** Calculando probabilidades)

Atividade 5 - impressa – Versão B

Em 2023, uma pesquisa feita em parceria da Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial (ABDI) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) pesquisou sobre a implementação de pelo menos uma iniciativa ou prática ambientais

em empresas de médio e grande porte (500 ou mais funcionários). Das 8.758 empresas industriais que realizaram uma implementação.

- 8199 indústrias adotam práticas ambientais relacionadas a resíduos sólidos;
- 7898 indústrias adotam práticas relacionadas à reciclagem e reuso
- 7444 indústrias adotam ambas as práticas.



Considerando esses dados, qual é a probabilidade de escolhermos ao acaso uma dessas empresas grandes e ela adotar pelo menos uma dessas práticas ambientais? (Habilidade: Calculando probabilidades)

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 5 (impressa) – dia 2 – versões A e B

Habilidade: a) Calculando probabilidades.

Respostas:

Forma 1 (soma das amostras favoráveis): $8199 + 7898 - 7444 = 8653$, logo, considerando o espaço amostral de 2008 entrevistados, temos $\frac{8653}{8758}$. Assim, os estudantes podem apresentar a resposta nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{8653}{8758}$ e suas simplificações; Percentual: 98%; ou Numérica: 0,98.

Forma 2: (soma total das probabilidades): Ponderando a amostra dos entrevistados, temos os seguintes casos:

Número de indústrias com práticas ambientais relacionadas a resíduos sólidos: 8199, então $P = \frac{8199}{8758}$.

Número de indústrias com práticas ambientais relacionadas a reciclagem e reuso: 7898, então $P = \frac{7898}{8758}$.

Número de indústrias que responderam os dois tipos de práticas: 7444, então $P = \frac{7444}{8758}$. Logo, a probabilidade pode ser explicitada por:

$$\frac{8199}{8758} + \frac{7898}{8758} - \frac{7444}{8758} = \frac{16097}{8758} - \frac{7444}{8758} = \frac{8653}{8758}$$

Dessa maneira, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Fracionária: $\frac{8653}{8758}$ e suas simplificações; Percentual: 98%; ou Numérica: 0,98.

Forma 3 (soma por parte das probabilidades): Sendo $\frac{19}{2008} = 0,97$; $\frac{1546}{2008} = 0,77$ e $\frac{1506}{2008} = 0,75$, os estudantes podem exibir os resultados nas seguintes representações: Percentual: $97 + 77 - 75 = 99\%$ ou Numérica: $0,97 + 0,77 - 0,75 = 0,99$.

Por fim, abordamos o conceito de Probabilidade condicional, ao analisar algumas ações de homens e mulheres em relação à prática de separar os materiais recicláveis. Para isso, perguntamos, oralmente, aos estudantes:

- a) Você costuma separar materiais recicláveis em sua casa?
- b) Para você, como está o Brasil nesse sentido? Quem recicla mais, homens ou mulheres?
- c) Você diria que separou o lixo para reciclagem nos últimos seis meses: sempre, na maioria das vezes, na minoria das vezes ou nunca?

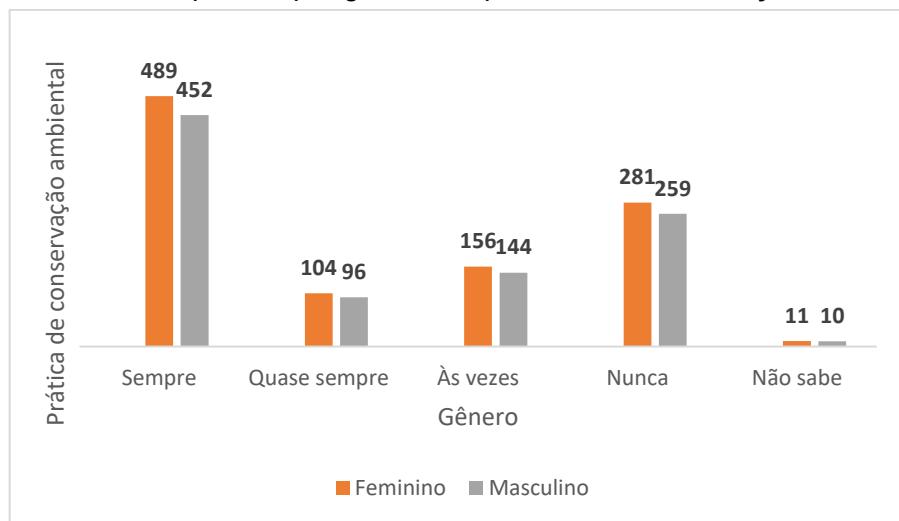
Os três itens estão associados aos Elementos disposicionais, com o objetivo de estimular os estudantes a apresentarem suas ações nesse contexto, assim como sua crença em relação à separação de materiais recicláveis pelos brasileiros. Logo, para compreender como está esse contexto numa determinada amostra, utilizamos os dados coletados pelo grupo Nexus, na pesquisa feita em setembro de 2024, com a seguinte pergunta: *Você diria que separou o lixo para reciclagem nos últimos seis meses: sempre, na maioria das vezes, na minoria das vezes ou nunca?* Propusemos uma interpretação dos resultados por gênero, apresentados na representação tabular e gráfica.

Tabela 1 – Frequência por gênero de práticas de conservação ambiental

Gênero \ Material para reciclagem	Sempre	Quase sempre	Às vezes	Nunca	Não sabe
Feminino	489	104	156	281	11
Masculino	452	96	144	259	10

Fonte: Grupo Nexus, 2024.

Gráfico 1 – Frequência por gênero de práticas de conservação ambiental



Fonte: Grupo Nexus, 2024.

Analisando esses dados:

- Você considera essa informação confiável? (**Hab.** Questões críticas)
- Como vocês interpretam esses dados? (**Hab.** Postura crítica)
- Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela marcou a opção “nunca”, qual a probabilidade de que essa pessoa seja do sexo feminino?

Professor: O que torna essa situação diferente das que já respondemos?

Nesse exemplo, vamos ter que olhar inicialmente o caso particular, apenas as pessoas que responderam ‘nunca’. Ou seja, isso implica que nosso espaço amostral não será mais o total de entrevistados, e sim, somente aqueles que responderam ‘nunca’.

Logo,

total nunca: 281 (feminino) + 259 (masculino) = 540

Dessa forma, estamos voltando o nosso olhar para um grupo específico dentro da amostra total. Isso é o que define a Probabilidade condicional.

Partindo disso, agora vamos observar o número de casos favoráveis de pessoas que são do sexo feminino e disseram “nunca”.

Total: 281

Sendo assim, para calcular a probabilidade, identificaremos o número de pessoas que responderam “nunca” como sendo o espaço amostral. Já o número de pessoas que são do sexo feminino e que disseram “nunca” é o número de casos favoráveis.

Logo,

$$P(A) = \frac{281}{540} = 0,52 = 52\%$$

Portanto, dizemos que a Probabilidade condicional está associada à probabilidade de um evento ocorrer, considerando que já tenha ocorrido um evento anterior. Em outras palavras, é a probabilidade de A acontecer, sabendo que B já aconteceu.

Vamos fazer outro exemplo com esses dados...

d) Suponha que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que essa pessoa é do sexo masculino, qual a probabilidade de que essa pessoa “Sempre” separa materiais para reciclagem ser sorteada?

Nesse exemplo, vamos ter que olhar inicialmente o caso “apenas as pessoas do sexo masculino”. Ou seja, isso implica que nosso espaço amostral não será mais o total de entrevistados, e sim, somente os homens.

Logo,

total de homens: 452 (sempre) + 96 (quase sempre) + 144 (às vezes) + 259 (nunca) + 10 (não sabe) = 961

Dessa forma, estamos voltando o nosso olhar apenas para o grupo dos homens que responderam a entrevista, sendo essa a primeira condição. Partindo disso, agora vamos observar o número de casos favoráveis de pessoas que são do sexo masculino e disseram que “sempre” separam material de reciclagem.

Total: 489

Sendo assim, para calcular a probabilidade, identificamos o número total de homens como sendo o espaço amostral. Já o número de homens que disseram “sempre” é o número de casos favoráveis.

Logo,

$$P(A) = \frac{489}{961} = 0,50 = 50\%$$

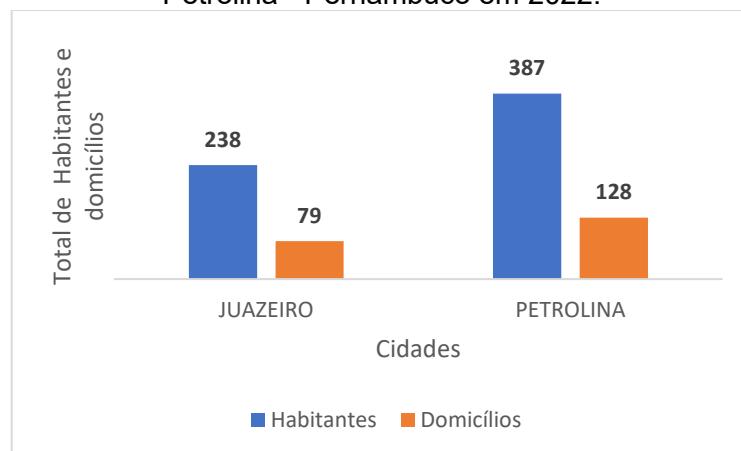
Para finalizar o segundo dia de intervenção, optamos por elaborar uma atividade de Probabilidade condicional diferente das atividades anteriores: organizada em dois testes (Teste A e Teste B), diferenciando a forma de representação das informações. Propusemos a análise de múltiplas representações, para os alunos trabalharem com dados regionais de Juazeiro/Bahia e Petrolina/ Pernambuco.

Atividade 6 - Impressa – múltiplas representações

O Instituto Água e Saneamento reúne dados provenientes das principais fontes oficiais sobre saneamento, como o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

(IBGE); Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento (SNIS) e Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA) que dispõem as características dos municípios brasileiros. Em 2022, o instituto divulgou resultados em relação ao número de habitantes sem acesso aos serviços de abastecimento de água, esgotamento sanitário e coleta de lixo das cidades brasileiras, dentre elas, Juazeiro - Bahia e Petrolina - Pernambuco. O gráfico 1 destaca o número aproximado de habitantes e domicílios dessas cidades (mil) e a tabela 1 mostra o número aproximado de pessoas sem acesso aos serviços de abastecimento de água, esgotamento sanitário e coleta de lixo.

Gráfico 1 - Quantidade de habitantes (mil) e de domicílios (mil) em Juazeiro - Bahia e Petrolina - Pernambuco em 2022.



Fonte: Instituto Água e Saneamento. Disponível em:
<https://www.aguaesaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/pe/petrolina>
<https://www.aguaesaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/ba/juazeiro>.
Acesso em: 22 de julho de 2025.

Tabela 1 - Quantidade de habitantes (mil) e de domicílios (mil) em Juazeiro - Bahia e Petrolina - Pernambuco em 2022.

Indicadores Cidade	População sem acesso a serviço público de água	População sem acesso a serviço público de Esgoto	População sem acesso a serviço público de coleta de lixo
JUAZEIRO – BA	25	37	15
PETROLINA – PE	--	84	44

Fonte: Instituto Água e Saneamento. Disponível em:
<https://www.aguaesaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/pe/petrolina>
<https://www.aguaesaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/ba/juazeiro>.
Acesso em: 22 de julho de 2025.

Com base nesses dados:

- a) Em qual das duas cidades a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter acesso à coleta de lixo é maior, considerando o total de habitantes de cada uma? (**Hab.:** Calculando probabilidades – Probabilidade simples)
- b) Entre os moradores de Petrolina/PE, qual é a probabilidade de um morador viver sem ter acesso ao serviço público de esgoto? (**Hab.:** Calculando probabilidades – Probabilidade condicional)
- c) Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela mora em Juazeiro/BA, qual a probabilidade de que essa pessoa não tenha acesso a serviço público de água?

Habilidades e respostas esperadas da Atividade 6 (impressa) – dia 2– Múltiplas representações

Habilidades: a) calculando probabilidades.

Resposta - item (a): Nesse item, os estudantes precisam calcular e comparar a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter acesso à coleta de lixo nas duas cidades. Logo, a probabilidade de escolher uma pessoa em Juazeiro será $P = \frac{15}{238} = 0,0063$ ou 6,3%. Já em Petrolina, a probabilidade será de: $P = \frac{44}{387} = 0,11$ ou 11%. Assim, a probabilidade maior de escolher uma pessoa que não tenha acesso à coleta de lixo será em Petrolina.

Resposta - item (b): Nesse item, vamos ter que olhar inicialmente o caso particular: apenas os moradores da cidade de Petrolina. Isso implica que nosso espaço amostral será apenas os moradores dessa cidade. Logo, o total de moradores de Petrolina: 387

Agora vamos observar o número de pessoas de Petrolina que residem em domicílio que não tem acesso ao serviço público de esgoto. Total de pessoas em Petrolina que residem em domicílio que não tem acesso ao serviço público de esgoto: 84
Sendo assim, para calcular a probabilidade temos:

$$P = \frac{84}{387} = 0,217 \text{ ou } 21,7\%$$

Resposta - item (c): Nesse item, vamos ter que olhar inicialmente o caso particular: apenas os moradores da cidade de Juazeiro. Isso implica que nosso espaço amostral será apenas os moradores dessa cidade. Logo, o total de moradores de Juazeiro: 238

Agora vamos observar o número de pessoas de Juazeiro que não tem acesso a serviço público de água. Total de pessoas em Juazeiro que não tem acesso a serviço público de água: 25

Sendo assim, para calcular a probabilidade temos:

$$P = \frac{25}{238} = 0,119 \text{ ou } 11,9\%$$

Para analisar as respostas das atividades impressas dos estudantes, consideramos os critérios de correção adaptados a cada resposta esperada. Além disso, ponderamos os elementos disposicionais propostos por Gal (2005), dadas as experiências, opiniões e crenças dos estudantes.

5 RESULTADOS: ANÁLISE DOS CURRÍCULOS

Neste capítulo, buscamos atender ao objetivo específico 1: Analisar, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005), o que é proposto para o conceito de Probabilidade nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Pernambuco e Currículo da Bahia).

5.1 COMO É PROPOSTO O ENSINO DE PROBABILIDADE NA BNCC?

A Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), enquanto documento norteador dos currículos em vigência no país, estabelece competências, habilidades e objetos de conhecimento que são considerados fundamentais para o desenvolvimento dos estudantes durante todo o percurso na Educação Básica, em todas as áreas de ensino. Esse documento pode ser utilizado pelos estados e municípios da Federação Brasileira para organizarem metodologicamente o currículo da Educação Básica.

Nesse contexto, a BNCC explicita que, ao longo da Educação Básica, existem aprendizagens consideradas fundamentais e que garantem o desenvolvimento dos estudantes. Sistematiza dez competências gerais, articuladas à Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que reúnem elementos importantes para desenvolver atitudes, habilidades e o conhecimento dos estudantes. Dentre essas, apresentamos, no Quadro 5.1, as competências nas quais identificamos Elementos do conhecimento e Elementos disposicionais, propostos no Letramento Probabilístico de Gal (2005).

Quadro 5.1 - Competências Gerais da Educação Básica

Competências	Descrição	Elementos do Letramento Probabilístico
Competência 2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.	Elemento do conhecimento: Questões críticas Elemento disposicional: Postura crítica
Competência 4	Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.	Elemento do conhecimento: Linguagem Elemento disposicional: Crenças e atitudes
Competência 6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.	Elementos disposicionais: Crenças e atitudes; Postura crítica
Competência 7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.	Elementos do conhecimento: Linguagem Elementos disposicionais Postura crítica; Crenças e atitudes
Competência 10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.	Elemento disposicional: Postura crítica

Fonte: Adaptado de Brasil, 2018, p.9

Assim, identificamos, na BNCC, elementos que objetivam desenvolver nos estudantes sua análise crítica e sua capacidade investigativa e reflexiva, atreladas ao exercício da cidadania, refinando justamente a sua consciência crítica, estimulando o desenvolvimento da argumentação e dando suporte para uma tomada de decisão mais consciente.

Ressaltamos a Competência 4 por mencionar a utilização de diferentes linguagens, o que reforça a importância de o estudante compreender as informações probabilísticas em representações distintas. Essa competência está associada diretamente à proposta deste estudo, visto que acreditamos que o uso de diferentes

representações pode colaborar na compreensão de informações probabilísticas e, consequentemente, no letramento dos estudantes.

Também observamos a relevância das Competências 7 e 10, que fazem menção à importância do poder argumentativo pautado em dados e informações verídicas, para o estudante posicionar-se criticamente em questões do seu convívio social e, assim, tomar decisões éticas e democráticas. Portanto, a BNCC sinaliza que argumentar, comunicar e representar são essenciais para estabelecer elementos importantes ao desenvolvimento do Letramento Matemático (Brasil, 2018, p. 266). Para isso ocorrer, o documento alerta que

[...] novos conhecimentos específicos devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos (Brasil, 2018, p. 528-529).

Concentremo-nos agora em analisar as competências específicas de Matemática do Ensino Médio:

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (Brasil, 2018, p. 470).

Dessa forma, são apresentadas cinco competências a serem obtidas nessa etapa com o ensino de Matemática. Essas competências específicas estão organizadas no Quadro 5.2.

Quadro 5.2 - Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio

Competências	Descrição	Elementos do Letramento Probabilístico
Competência 1	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, [...] de modo a contribuir para uma formação geral.	Elementos do conhecimento: Contexto, Questões críticas
Competência 2	Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, [...] mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	Elemento do conhecimento: Linguagem Elemento disposicional: Postura crítica
Competência 3	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, [...] de modo a construir argumentação consistente.	Elementos do conhecimento: Contexto; Calculando probabilidades, Linguagem, Questões críticas Elementos disposicionais: Crenças e atitudes, Postura crítica
Competência 4	Compreender e utilizar [...] diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	Elementos do conhecimento: Linguagem, Calculando probabilidades
Competência 5	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades [...], como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas	Elementos disposicionais: Postura crítica, Crenças e atitudes.

Fonte: Adaptado de Brasil, 2018, p. 531

Analisando essas competências, conseguimos identificar Elementos do conhecimento e disposicionais que convergem para o Letramento Probabilístico. A Competência 1 faz menção à utilização de diferentes métodos matemáticos para analisar e interpretar informações de contextos sociais, tecnológicos, das ciências humanas e da natureza. Sendo assim, recomenda associar conceitos matemáticos a outras áreas de conhecimento (científico ou não), de forma que o estudante faça uso desses conhecimentos para analisar dados em variados meios de comunicação (livros, revistas, sites, jornais, televisão), emitir opiniões e posicionar-se em variadas ações com fundamentos. Para Gal (2005), a compreensão de situações de incerteza em diferentes contextos é fundamental para o letramento, ao trazer contextos autênticos associados à realidade dos estudantes.

A Competência 2 estimula os estudantes a participarem de ações individuais ou coletivas e a tomarem decisões em situações do mundo contemporâneo, fazendo

uso de noções, mecanismos e linguagens específicas da Matemática, correlacionando o Elemento do conhecimento “Linguagem” com o Elemento disposicional “Postura crítica”, para terem a possibilidade de refletir sobre questões em contextos culturais, sociais e políticos. A Competência 3 pauta-se na construção da argumentação coerente, respaldada na análise, interpretação e veracidade dos resultados (Questões críticas), além da possibilidade de estabelecer modelos e resolver problemas envolvendo situações com dados matemáticos, dentre eles dados probabilísticos (Calculando probabilidades e Linguagem), em contextos distintos.

Trazemos um olhar especial para a Competência 4, dada a nossa perspectiva de pesquisa. Salientamos a relevância de os estudantes, ao final do Ensino Médio, conhecerem e compreenderem um objeto matemático por suas diferentes representações. Além disso, é relevante que saibam analisar, construir e realizar a intercambialidade entre elas, para solucionar problemas e comunicar seus resultados.

Quanto à utilização de representação, a BNCC preconiza a sua relevância para compreender conceitos, ideias e eventos, mencionando que a relação com os objetos matemáticos ocorre por intermédio das representações. Além disso, reforça a importância de o estudante saber interpretar e mobilizar as representações numérica, tabular, gráfica, algébrica, simbólica e verbal para a sua postura argumentativa, na defesa de que essas representações colaboraram para o aprimoramento do seu raciocínio.

Outro ponto significativo está na orientação de que, no ensino, se faça uso de softwares e aplicativos para explorar diversas representações e, sempre que for possível, se estimule o uso de múltiplas representações, visto que essa junção pode colaborar para a compreensão de um objeto matemático. Nos termos da BNCC, lemos:

Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática” (Brasil, 2018, p. 529).

Diante disso, ressaltamos que a utilização de diferentes representações e a intercambialidade entre elas pode colaborar para o desenvolvimento do Letramento

Probabilístico dos estudantes, que coopera para a tomada de decisões e para o posicionamento crítico-reflexivo.

Por fim, a Competência 5 traz o caráter científico da Matemática, no sentido de estimular a investigação e a formulação de esclarecimentos e argumentos, assim como estabelecer a utilização dos conceitos matemáticos para a observação de padrões. Essas ações podem ser realizadas com o uso de recursos tecnológicos ou não, de forma a estabelecer argumentos a partir de variadas situações. Podemos relacionar essa competência específica às Competências gerais 2 e 7, que recomendam estimular a investigação, a análise crítica e o poder de argumentação a partir da análise das informações apresentadas, ponderando a veracidade das fontes consultadas. Esses fatores são relevantes quando pensamos no Letramento Probabilístico.

Dessa forma, observa-se que as competências Gerais da Educação Básica e as Competências Específicas de Matemática para o Ensino Médio presentes na BNCC trazem elementos críticos que vão ao encontro da perspectiva do Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005), estimulando uma variedade de contextos reais, diferentes linguagens (representações), a análise da veracidade dos dados (Questões críticas), assim como a postura crítica e a tomada de decisão (Elementos disposicionais) a partir de dados.

Em relação à Probabilidade, foco deste estudo, observa-se que a BNCC recomenda que ela deve ser trabalhada em todas as etapas da Educação Básica (1º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio). Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o intuito é estimular a compreensão de fenômenos aleatórios de forma mais intuitiva; nos Anos Finais do Ensino Fundamental, é proposta a ampliação e o aprofundamento dos conceitos, iniciando a manipulação numérica de experimentos casuais e, por fim, no Ensino Médio, propõe-se a interpretação de situações de risco probabilístico, a interpretação e descrição de diferentes espaços amostrais e o cálculo da união e interseção de eventos aleatórios (Quadro 5.3).

Nesse contexto, a BNCC (Brasil, 2018) preconiza que todos os cidadãos precisam ter habilidades de representar, interpretar, analisar e discutir dados e informações. Além disso, sinaliza para a necessidade de refletir, argumentar, ter autonomia e tomar decisões adequadas baseadas em fatos. No Ensino Médio, as habilidades são sistematizadas com as competências específicas de Matemática e o

documento não sinaliza em qual período/ano escolar elas precisam ser inseridas, ficando a cargo da Secretaria de Educação de cada estado fazer essa escolha.

A BNCC apresenta as habilidades e os objetos do conhecimento inerentes às etapas da Educação Básica. Para o Ensino Fundamental, essas estão organizadas por ano escolar. Já para o Ensino Médio, as habilidades e os objetos de conhecimento são apresentados por meio das competências específicas para cada área, deixando aos estados a missão de organizar o currículo. Dessa maneira, os conceitos inerentes à Probabilidade podem ser abordados em qualquer ano do Ensino Médio (1º ao 3º).

Nesse sentido, para compreender o que é proposto para o ensino de Probabilidade nessa etapa escolar (Objetos do conhecimento, Competências e Habilidades) e identificar os tipos de Probabilidade presentes nesse documento, analisamos as habilidades concernentes à Probabilidade na BNCC e as relacionamos com as concepções de Probabilidade propostas por Batanero (2005), no Quadro 5.3.

Quadro 5.3 - Habilidades Específicas de Probabilidade na BNCC

Objetos de Conhecimento	Competências	Habilidades
Risco Probabilístico	Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).
Eventos Aleatórios, Espaço amostral	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.
Eventos Aleatórios sucessivos	Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
Diferentes espaços amostrais, discretos ou não, equiprováveis ou não	Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
Eventos aleatórios ou não	Analizar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.	(EM13CNT205) Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.

Fonte: BNCC (Brasil, 2018)

Essa última habilidade (EM13CNT205) foi localizada na área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que faz menção à investigação de fenômenos naturais com base em noções de Probabilidade. Apenas a habilidade “EM13MAT106” faz alusão a situações reais no contexto de saúde para discutir sobre riscos probabilísticos. Acreditamos que esse é um ponto importante, pois os professores, em sala de aula, devem abordar questões ambientais, financeiras, sociais e tecnológicas, levando os estudantes a compreenderem a realidade.

Das quatro habilidades de Probabilidade presentes na área de Matemática, três delas – EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511 – estão atreladas ao cálculo de Probabilidade. Esse predomínio do cálculo pode estimular apenas o uso da representação numérica e reforçar o caráter determinístico da Matemática. Situações probabilísticas envolvem um raciocínio não determinístico.

A habilidade EM13MAT511, de modo tímido, faz menção à utilização de situações não equiprováveis, o que é positivo. Porém, chama a nossa atenção que nenhuma dessas habilidades está associada à competência específica 4, que se refere à variabilidade de representações para o ensino de Matemática.

Nesse sentido, concordamos com Anastasiadou e Chadjipantelis (2008); Canaveze (2013); Oliveira (2014); Binder, Krauss e Bruckmaier (2015); Oliveira (2018); Oliveira, Santos e Calejon (2020); Zorzos e Avgerinos (2023), que, apesar da variedade de perspectivas de suas investigações, compartilham a mesma percepção de que a utilização de diferentes representações colabora para a compreensão dos conceitos probabilísticos.

Sendo a BNCC um documento norteador para a elaboração dos livros didáticos, assim como para a prática dos professores, fica explícita a ausência de habilidades que estimulem os elementos disposicionais (postura crítica, crenças), suscitando a comparação de dados probabilísticos com as experiências pessoais para a tomada de decisão coerente e justa. Também ressaltamos a ausência de habilidades voltada à utilização de diferentes representações para o ensino de Probabilidade pode influenciar no processo de ensino e aprendizagem, com enfoque apenas na representação numérica. Reafirmamos a necessidade de se utilizar múltiplas representações e propor a intercambialidade entre elas para o ensino de Probabilidade.

Após as reflexões advindas da análise da BNCC, buscamos analisar como os estados da Bahia e de Pernambuco propõem o ensino de Probabilidade para o Ensino

Médio. Justificamos a escolha por esses estados pelo fato de a intervenção realizada nesta pesquisa ter sido desenvolvida em ambos. A disposição geográfica muito próxima entre as cidades de Juazeiro/BA e Petrolina/PE nos permitiu realizar esta pesquisa em contextos variados, o que trouxe um olhar mais abrangente para a nossa proposta.

Considerando as mudanças curriculares que emergiram com a promulgação da BNCC, os estados da Bahia e de Pernambuco fizeram alterações em seus currículos para o Ensino Médio, na Bahia em 2022 e em Pernambuco em 2021.

Nesse contexto, a organização curricular da Bahia seguiu fielmente a estrutura das unidades temáticas propostas pela BNCC (*Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística*). O estado de Pernambuco propôs a junção das unidades “Números e Álgebra” e “Geometria e Grandezas e Medidas”, sistematizando os conceitos matemáticos em três unidades temáticas, a saber: *Números e Álgebra; Geometria e Medidas; Probabilidade e Estatística*.

Buscamos comparar as habilidades concernentes ao conceito de Probabilidade na BNCC e nos currículos da Bahia e de Pernambuco. Destacamos os trechos em vermelho em que os estados da Bahia e/ou Pernambuco realizaram acréscimos nas habilidades. Essa comparação está sistematizada no Quadro 5.4, a seguir.

Quadro 5.4 - Habilidades Específicas de Probabilidade para o Ensino Médio

BNCC	Bahia	Pernambuco
(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).	(EM13MAT106) Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, etc.).	(EM13MAT106PE12) Identificar e interpretar situações do cotidiano, envolvendo riscos probabilísticos em que é necessário fazer escolhas como, por exemplo, usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro, como nos demais campos de conhecimento.
(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	(EM13MAT311) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.	(EM13MAT311PE27) Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades para resolver e elaborar situações-problema que envolvam o cálculo da probabilidade.
(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de	(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que	(EM13MAT312PE28) Resolver e elaborar situações-problema que envolvam o cálculo de

probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.	probabilidade (simples, da união, da interseção, condicional) de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.	(EM13MAT511PE51) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.
(EM13CNT205) Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.	(EM13CNT205) Interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências.	(EM13CNT205BIO09PE) Exercitar o raciocínio lógico, interpretando dados estatísticos, formas de representações (gráficos, tabelas, infográficos, heredogramas, símbolos...) e a reflexão ética sobre temas relacionados à Genética para ampliar o conhecimento científico acerca da hereditariedade, confrontando os resultados, os avanços e os limites da Ciência.

Fonte: (Brasil, 2018); (Pernambuco, 2021) e (Bahia, 2022)

Observa-se que ambos os currículos estaduais trazem orientações praticamente na íntegra das mesmas habilidades propostas na BNCC. O estado de Pernambuco alterou a nomenclatura das habilidades e realizou alguns acréscimos nelas. Dessa maneira, apesar de os estados terem a autonomia para criar ou adaptar seus currículos de acordo com a Base, optaram por reproduzi-la, quase sem alterações, deixando assim de considerar especificidades de cada estado.

Ainda observando o Quadro 5.4, identificamos o predomínio de situações com significado Clássico no que tange às habilidades concernentes à Probabilidade, favorecendo, bem como na BNCC, a supremacia do cálculo para a resolução de situações.

Em relação ao elemento probabilístico “Linguagem”, identificamos que está presente nas descrições curriculares de Matemática, da seguinte forma:

[...] representações, sendo o estudante capaz de representar e interpretar o objeto matemático nas diversas formas que possibilitem uma maior compreensão sobre o objeto estudado, fazendo conexões entre as relações existentes, obtidas por meio de todo o simbolismo, gráficos, diagramas e figuras, de modo que as ideias matemáticas possam ser compreendidas e ocorra a comunicação. (Bahia, 2022, p. 182).

A linguagem matemática, utilizada em diferentes componentes curriculares, permite ao aluno perceber sua universalidade e também distinguir especificidades desses usos. (Pernambuco, 2021, p. 186)

Entretanto, como podemos verificar no Quadro 5.4, nenhuma das habilidades faz referência ao uso de variadas representações, permitindo-nos afirmar que, embora ambos os currículos proponham a utilização de diversas representações para o Ensino de Matemática visando à construção do raciocínio matemático, não há menção disso para o ensino de Probabilidade. Sendo assim, caberá ao professor ter o domínio dessas representações, ter a noção da importância da compreensão de dados probabilísticos apresentados de maneiras distintas, para organizar essa abordagem e acrescentá-la ao processo de ensino.

Centrando o foco no elemento “Contexto”, o currículo pernambucano menciona a utilização de diversos contextos para o ensino de Matemática, orientando no sentido de que os estudantes, ao final do Ensino Médio, consigam generalizar conceitos e noções, aplicando-os a situações dos mais variados contextos. O currículo baiano, por sua vez, na descrição curricular, não faz referência, em nenhum momento, à importância dos contextos para o ensino de Matemática. Consideramos que a ausência do contexto traz lacunas significativas para o ensino de Matemática, ao pensarmos na aplicabilidade dos conceitos em temas associados à realidade do estudante.

Analizando a organização curricular do Ensino Médio dos currículos dos dois estados, identificamos que a Probabilidade é apenas citada e no 3º ano, considerando os seguintes objetos de conhecimento:

Bahia (2022, p.191)

- *Definição de probabilidade*
- *Probabilidade em um espaço amostral finito*
- *Espaços amostrais equiprováveis*
- *Probabilidades de eventos, eventos independentes e condicionais*
- *Experimento aleatório*
- *Eventos complementares e opostos*

Pernambuco (2021, p. 201)

- *Riscos Probabilísticos*
- *Probabilidade: espaço amostral e contagem*
- *Probabilidade: cálculos simples, da união, da interseção, condicional*
- *Probabilidade: espaços amostrais discretos ou não; eventos equiprováveis ou não*

Pautados no Letramento Probabilístico, ressaltamos que o fato de restringir o estudo da Probabilidade ao último ano do Ensino Médio é um ponto lacunar, visto que, em todos os anos do Ensino Fundamental, esse conceito está inserido, proporcionando uma graduação dos conhecimentos a esse campo da Matemática. Todavia, um “salto” de dois anos pode impossibilitar que o estudante consiga relacionar os conhecimentos com outras áreas de conhecimento, como a Biologia e a Geografia, por exemplo, para estimar a realização de fenômenos naturais.

Logo, essa restrição ao 3º ano do Ensino Médio traz um impacto para a formação do Letramento probabilístico por tratar-se de um processo contínuo e evolutivo. Consideramos esse período escasso para estimular a compreensão e articulação dos Elementos do conhecimento e disposicionais articulando a resolução numérica a uma reflexão crítica e tomada de decisão. Quanto a isso, a literatura aponta como crucial o desenvolvimento de estudo e reflexões atreladas a Probabilidade durante toda a Educação básica. Acreditamos que os documentos analisados (Brasil, 2018; Bahia, 2022; e Pernambuco, 2021) apresentam pontos lacunares que podem interferir diretamente na compreensão dos estudantes em relação aos conceitos de Probabilidade e na associação desses conceitos com a sua realidade.

Por isso, ressaltamos que um processo de ensino dos conceitos probabilísticos requer a utilização das variadas visões de Probabilidade, incluindo os significados Intuitivo e Subjetivo. Além disso, é preciso considerar a compreensão de dados probabilísticos reais, imersos em variados contextos, equiprováveis ou não, estimulando o pensamento crítico. Os estudantes devem ser levados a verificar a confiabilidade das fontes, a compreender as informações quando apresentadas em representações distintas, a argumentar sobre sua análise e a tomar decisões ponderando as questões subjetivas (crenças e atitudes; sentimento em relação ao risco).

Sendo assim, acreditamos que os três documentos analisados também deveriam propor habilidades concernentes à Probabilidade em todas as etapas do Ensino Médio e associadas aos variados contextos autênticos de forma explícita, tais como contextos de saúde, políticas públicas e financeiras, que fazem parte da realidade dos estudantes. Além disso, deveriam propor mais habilidades atreladas à Probabilidade subjetiva, por fazer parte, majoritariamente, das ações corriqueiras que versam sobre esse conceito. Por fim, sugerimos que seja anexada a utilização de múltiplas representações para a apresentação de dados probabilísticos, assim como a proposição da intercambialidade entre elas.

6 RESULTADOS: ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, buscamos responder ao objetivo específico 2: Avaliar as representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD/2021, relacionadas a Probabilidade.

Para isso, foram consideradas três categorias de livros: (1) os livros didáticos por área de conhecimento para cada componente curricular, no caso o de Matemática e suas Tecnologias; (2) os livros de *Projetos Integradores*, os quais trazem situações pedagógicas que integram diversos componentes curriculares no processo de ensino e aprendizagem; e (3) os livros de *Projeto de Vida*, que propõem o planejamento dos estudantes para a sua vida.

Analisamos, inicialmente, todos os volumes da área de conhecimento de Matemática e suas Tecnologias das 10 (dez) coleções aprovadas no PNLD 2021 – Objeto 2. Posteriormente, analisamos as obras dos Projetos Integradores, 14 livros do PNLD 2021 – Objeto 1. Por fim, analisamos as obras referentes ao Projeto de Vida, 24 livros.

Na análise, primeiramente buscamos identificar, página por página, se o enunciado das atividades era referente ao conceito de Probabilidade. Cada uma das atividades foi categorizada a partir de diferentes variáveis (Quadro 6.1) e registrada no software *Statistical Package for Social Science for Windows* (SPSS).

Quadro 6.1 - Categorias adotadas para análise dos livros didáticos

Categorias	Critérios	
1. Proposta da questão	Resolução; Elaboração	
2. Dados numéricos	Ausentes; Elaborados pelo estudante; Dados autênticos; Dados fictícios	
3. Contexto	Contexto elaborado pelo estudante	Contexto livre; Contexto determinado
	Contexto presente no enunciado da questão	Sem contexto; Ambiental; Tecnológico; Social; Saúde; Financeiro; Política Pública; Jogos de azar; Múltiplos contextos
4. Pesquisa Estatística	Interpretação de uma pesquisa; Elaboração de uma situação/pesquisa	
5. Significados	Elaboração do estudante; Intuitivo; Clássico; Frequentista; Subjetivo; Axiomático; Não se aplica	

6. Representações	Representação da questão	Numérica; Diagrama; Tabular; Gráfica; Figural; Língua natural escrita; Múltiplas Representações
	Representação solicitada para o estudante	Numérica; Diagrama; Tabular; Gráfica; Figural; Língua natural (escrita ou oral); Múltiplas Representações; Critério do estudante
7. Dispositionais	Ausente; Postura crítica; Crenças e atitudes; Sentimento ao risco; Elaboração do estudante	

Fonte: O Autor.

Essas categorias estão atreladas aos Elementos do conhecimento e aos Elementos dispositionais propostos por Gal (2005), e forneceram subsídios para compreendermos as atividades propostas para o ensino de Probabilidade no Ensino Médio.

6.1 LIVROS DE CONHECIMENTO: PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Foram investigadas todas as coleções aprovadas no PNLD/2021 para a unidade temática “Probabilidade e Estatística”. Dessa forma, nos debruçamos sobre os capítulos concernentes à Probabilidade nas dez obras⁷, com o intuito de identificar e analisar os enunciados das atividades a serem respondidas pelos estudantes.

Todos esses livros apresentam capítulos específicos sobre Probabilidade. Em 2 (duas) das 10 (dez) coleções, há capítulos que relacionam os conceitos de Probabilidade e Estatística, e 5 (cinco) apresentam seções estabelecendo essa relação.

Nas obras, os capítulos são organizados por seções, que apresentam, inicialmente, a explanação do conteúdo e, posteriormente, são apresentadas questões resolvidas que abordam os conceitos da seção e, por fim, são propostas questões abordando esses conceitos. Foram identificadas 758 questões sobre conceitos probabilísticos.

De acordo com o Quadro 6.1, a primeira categoria que analisamos foi relativa à “Proposta da questão”, a qual podia envolver uma resolução ou a elaboração de uma questão pelo estudante.

Resolução: O estudante é responsável por resolver um problema / uma situação específica e apresentar uma resposta ao final, seja ela numérica ou não. Essas

⁷ Os livros serão descritos com as dez primeiras letras do alfabeto (A a J), para manter o anonimato.

soluções podem estar limitadas a um conjunto de alternativas específicas no livro (Figura 6.1), cabendo ao estudante assinalar a alternativa correta. Já as atividades de resolução livre (Figura 6.2) são atividades que permitem aos estudantes expressarem-se de forma pessoal.

Figura 6.1 - Exemplo de questão pautada na resolução

- 16.** Existe um conjunto de todas as sequências de 16 barras finas ou grossas que podem ser representadas. Escolhendo-se ao acaso uma dessas sequências, a probabilidade de ela configurar um código do sistema descrito é: *Alternativa d.*
- a) $\frac{5}{2^{15}}$ b) $\frac{25}{2^{14}}$ c) $\frac{125}{2^{13}}$ d) $\frac{625}{2^{12}}$

Fonte: Livro B, p. 103.

Figura 6.2 - Exemplo de questão pautada na resolução livre

18. Leia a tira abaixo.

A senha

DESCOBRI SUA SENHA, CACO. JÁ ERA!

SÓ PRECISO ACHAR AS BOLINHAS PRETAS NO TECLADO.

Silva, Willian Raphael. A senha. Humor com Ciência. Disponível em: <<https://www.humorcomciencia.com/blog/119-o-que-e-senha/>>. Acesso em: 11 nov. 2019.

Suponha que a senha do personagem Caco seja composta de 5 algarismos que podem se repetir.

a) Quantas são as possibilidades de senhas com essa característica? 10^5 possibilidades.

b) Qual é a probabilidade de alguém, ao acaso, acertar essa senha na primeira tentativa? $\frac{1}{10^5}$ ou 0,001%.

c) Se o personagem Caco escolhesse cada um dos algarismos de sua senha ao acaso, qual seria a probabilidade de essa senha ser formada por um número com todos os algarismos iguais? $\frac{1}{10^5}$ ou 0,01%

Fonte: Livro B, p. 103.

Na Figura 6.1, a questão propõe a conversão de códigos de barras em algarismos e solicita a probabilidade de configurar um código a partir do sistema descrito. Na Figura 6.2, a questão explora a probabilidade por meio da representação numérica, solicitando ao estudante que acerte uma senha de cinco dígitos que pode ter a repetição de números.

Elaboração: O estudante precisa criar uma situação que envolva Probabilidade. Essas situações podem não estabelecer restrições para a criação (Figura 6.3) ou são solicitadas considerando um determinado contexto ou representação (Figura 6.4).

Figura 6.3 - Exemplo de questão pautada na elaboração livre

 3 Junte-se a dois colegas e escolham três conceitos entre os que foram listados na atividade anterior. Depois, conversem entre si sobre as aprendizagens adquiridas e sobre os conhecimentos relacionados a esses conceitos. Ao final, pensem em uma maneira de compartilhar essas informações com os colegas da turma e realizem uma produção com essa finalidade. Vocês podem utilizar diferentes linguagens e ferramentas, como: a escrita de um texto em uma rede social ou blogue, a elaboração de um cartaz ou de uma apresentação visual (*slides*), a produção de um vídeo ou *podcast* (programa de áudio veiculado na internet) etc. [Resposta pessoal](#).

Fonte: Livro F, p.142.

Figura 6.4 - Exemplo de questão pautada na elaboração com pré-requisito

-  15. Elabore e escreva um problema envolvendo o cálculo de probabilidade e a construção de uma árvore de possibilidades. Em seguida, junte-se a um colega e troquem os problemas para que um resolva o do outro. Juntos, verifiquem se as respostas estão corretas. [Resposta pessoal](#).

Fonte: Livro F, p.111.

As Figuras 6.3 e 6.4 são exemplos das escassas questões que estimulam a criação de uma situação-problema pelo estudante. A Figura 6.3 foi proposta no final do capítulo concernente à Probabilidade e solicita aos estudantes, a partir dos conceitos abordados durante o capítulo, escolherem três conceitos e pensarem numa maneira de compartilhar sua compreensão acerca desses conceitos com os colegas de classe, podendo fazer uso de diferentes instrumentos e linguagens.

A Figura 6.4 remete à elaboração de uma situação que envolva o cálculo de Probabilidade, atrelada à construção de uma árvore de possibilidades, propiciando também a interação com os colegas de classe. Todavia, ao final dessa proposta, o estudante precisa resolver a situação criada pelo colega, informar a solução e verificar, em conjunto, se as soluções estão exatas.

Nesse contexto, ambas as questões incentivam habilidades de comunicação, expressão e capacidade criativa, atendendo assim à habilidade EM13MAT312 da BNCC, que consiste em “*Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade*”.

A Tabela 6.1 traz os resultados das propostas das atividades nas 10 (dez) coleções dos livros de Conhecimento Específico.

Tabela 6.1 - Proposta da questão nos livros de Conhecimento Específico

Proposta da questão - Livros Específicos		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Resolução	715	94,3
Elaboração	43	5,7
TOTAL	758	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados apresentados na Tabela 6.1, podemos observar a grande predominância de questões que solicitam dos estudantes apenas a resolução. Nessa estrutura, os enunciados estimulam a utilização de uma técnica de cálculo apresentada anteriormente.

Acreditamos que essa organização pode dificultar que os estudantes compreendam a aleatoriedade e incerteza inerentes a essa área da Matemática, visto que as atividades solicitam a conclusão de um resultado específico, estimulando a interpretação da Probabilidade a partir de um aspecto determinista. Além disso, esse tipo de questão não estimula a criticidade, assim como não propicia a emissão de opinião e a tomada de decisões coerentes, restringindo-se aos Elementos do conhecimento (Calculando probabilidades, Linguagem e Contexto).

Poucas questões exploram Elementos dispositionais, como o exemplo apresentado na Figura 6.5.

Figura 6.5 - Exemplo de questão com Elementos dispositionais

CONECTANDO IDEIAS

1 Segundo o texto, o Brasil é considerado um país de alto desenvolvimento humano, apesar dos elevados índices de desigualdade registrados. Essa desigualdade pode ser percebida, entre outros aspectos, ao analisar o acesso à universidade por pessoas de diferentes etnias. De acordo com o Censo da Educação Superior, realizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), em 2018, 3,4 milhões de estudantes ingressaram em cursos de Educação Superior.

a) De acordo com a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua (Pnad Contínua), do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), a proporção de jovens de 18 a 24 anos no Ensino Superior que se declararam pretos ou pardos foi 55,6% em 2018. Com base nesse dado, estime quantos estudantes, da mesma faixa etária e que se declararam pretos ou pardos, ingressaram na universidade no ano mencionado.

b) Analise o resultado do item a e explique se são muitas ou poucas as chances de um estudante do Ensino Superior, em 2018, ter se declarado preto ou pardo. Justifique sua resposta.

Fonte: Livro A, p. 63.

A Figura 6.5 apresenta uma das raras questões de resolução que estimulam o posicionamento crítico dos estudantes, a partir de um fenômeno autêntico (a desigualdade no Brasil). Dessa forma, a primeira alternativa solicita do estudante o acesso ao banco de dados do IBGE, para estimar a quantidade de ingressantes no

Ensino Superior, no ano de 2018, que se declararam pretos ou pardos. Com esses resultados, a segunda alternativa questiona sobre a chance de uma pessoa autodeclarar-se como sendo dessas etnias, estimulando o posicionamento crítico dos estudantes, por meio de suas justificativas.

De maneira geral, percebemos que as situações apresentadas nas seções dos livros didáticos não estimulam a argumentação nem a criatividade dos estudantes, afetando assim o desenvolvimento do seu Letramento Probabilístico.

A segunda categoria de análise – Dados numéricos – foi subcategorizada em “Ausentes”, ou seja, não há; “Elaborados pelo estudante”; “Dados autênticos/reais”; e “Dados Fictícios”.

Ausentes: Atividades de cunho qualitativo, de caráter classificatório e descriptivo, que não exigem o uso da representação numérica da Probabilidade para a sua resolução (Figura 6.6).

Elaborados pelo estudante: Consiste em situações em que o estudante é o responsável por elaborar dados ou não, assim como por fazer uso ou não de dados numéricos (Figura 6.7).

Dados autênticos/reais: São atividades que propõem a análise e investigação de situações que trazem dados reais, fornecidos por instituições de pesquisa, como por exemplo o INMET ou IBGE (Figura 6.8).

Dados fictícios: Consiste em dados fabricados ou simulados a partir de situações imaginárias que podem ou não ocorrer na vida real (Figura 6.9).

Figura 6.6 - Questão com ausência de dados numéricos

1. Leia as sentenças embaralhadas. Todas dizem respeito ao trabalho em canteiros de obras. Duas delas são "perigos". Identifique-as e escreva no caderno. Depois, reconheça os riscos associados a cada um desses perigos.

- Brincadeiras enquanto executa tarefas
- Atos de improbidade
- Acidente de trabalho
- Mau procedimento ou desrespeito aos colegas de trabalho
- Ser demitido
- Não satisfazer as competências exigidas
- Ausência de equipamentos de proteção individual
- Distração durante as atividades do trabalho

Fonte: Livro C, p. 94.

Figura 6.7 - Questão com a elaboração dos dados numéricos por parte dos estudantes

- 4 Dê um exemplo de evento:
- impossível;
 - possível;
 - pouco provável;
 - muito provável;
 - certo.

Fonte: Livro A, p. 43.

Na Figura 6.6, a questão solicita a análise de situações possíveis de acontecer em um canteiro de obras, e para respondê-la não há necessidade de fazer uso de dados numéricos. A Figura 6.7 requer que o estudante cite um exemplo para cada evento: certo, possível, impossível, muito provável e pouco provável. Nesse contexto, o leitor tem a opção de escolher ou não se os exemplos que irá criar vão fornecer dados numéricos, tal como: “É pouco provável que ocorram pancadas de chuva em Juazeiro/BA hoje!” ou “A probabilidade de chover em Recife é de 80%. Logo, é muito provável que ocorram pancadas de chuvas”.

Figura 6.8 - Questão com dados autênticos

7. Atualmente existem diversos métodos contraceptivos, isto é, métodos que evitam a gravidez indesejada. Cada método, além da probabilidade de sucesso, tem prós e contras que precisam ser analisados para uma escolha adequada às necessidades de cada pessoa. Veja os prós e contras de três métodos contraceptivos a seguir.

Método	Taxa de sucesso	Prós	Contras
Pílulas anticoncepcionais	91%	Tornam os períodos menstruais mais regulados, diminuem a acne e cólicas menstruais.	Não protegem contra Infecções Sexualmente Transmissíveis (ISTs), é preciso ter muita disciplina para tomar no mesmo horário todos os dias e podem gerar efeitos colaterais, como náuseas e ganho de massa.
Preservativo masculino	82%	Oferece proteção contra ISTs.	É necessário colocar imediatamente antes da relação sexual, precisa ser trocado a cada relação sexual e existe o risco de furar ou se romper.
Preservativo feminino	79%	Oferece proteção contra ISTs e pode ser inserido algum tempo antes da relação sexual.	Pode se mover ou ser desconfortável durante a relação sexual. Precisa ser trocado a cada relação sexual.

Fonte de consulta: YOUNG WOMENS HEALTH. Prós e contras de diferentes métodos contraceptivos. Disponível em: <https://youngwomenshealth.org/2015/05/19/pros-e-contras-de-diferentes-metodos-contraceptivos/>. Acesso em: 10 jul. 2020.

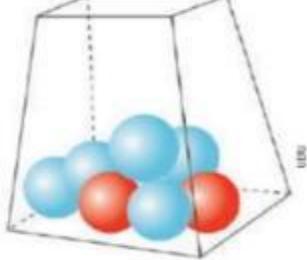
Acesse o site <https://youngwomenshealth.org/2015/05/19/pros-e-contras-de-diferentes-metodos-contraceptivos/> (acesso em 10 jul. 2020) e leia os prós e contras de outros métodos contraceptivos. Reúna-se a um colega e responda aos itens no caderno.

- Existe um método contraceptivo que seja 100% seguro? Não, todos os métodos têm uma probabilidade de falha.
- Quais critérios uma pessoa deve levar em consideração ao escolher um método contraceptivo adequado?
Resposta esperada: frequência de relações sexuais, número de parceiros, efeitos colaterais, custo dos métodos, etc.

Fonte: Livro H, p. 63.

Figura 6.9 - Questão com dados fictícios

24. (UERJ) Em uma urna há sete bolinhas, sendo duas delas vermelhas e cinco azuis. Quatro do total de bolinhas serão sorteadas ao acaso.



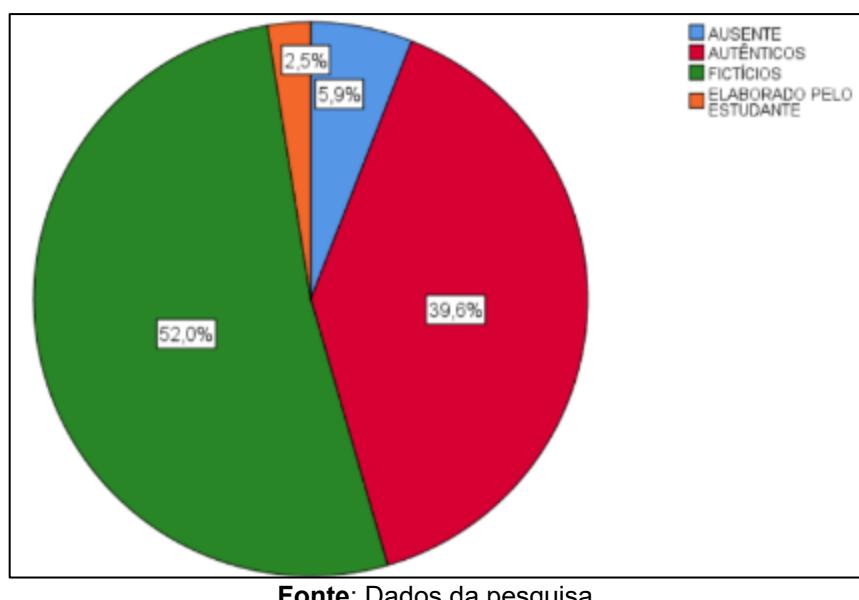
Calcule a probabilidade de pelo menos uma das bolinhas sorteadas ser vermelha. $\frac{6}{7}$

Fonte: Livro G, p. 121.

A situação apresentada na Figura 6.8 faz uso de dados autênticos, apresentando dados reais, com a respectiva fonte. É uma questão adequada à faixa etária do Ensino Médio, estimulando a reflexão dos estudantes e possível tomada de decisão em relação a qual método contraceptivo escolher, a partir dos dados probabilísticos. Está estreitamente articulada à habilidade EM13MAT106 da BNCC, que faz referência à identificação de situações cotidianas nas quais seja necessário fazer opções considerando os riscos probabilísticos.

Já a Figura 6.9 enquadra-se no contexto dos jogos de azar em uma situação fictícia, e estimula apenas a utilização da representação numérica.

Os tipos de dados estão apresentados no Gráfico 6.1.

Gráfico 6.1 - Tipo de dados propostos nos livros de Conhecimento Específico

Como pode ser observado, 2,5% dos enunciados não apresentam dados numéricos. É solicitado que os estudantes elaborem dados para uma questão em 5,9% das atividades. Assim, 91,6% das atividades apresentam dados numéricos. Dessas, 52% estão associadas ao uso de dados fictícios, fazendo menção a situações imaginárias que podem ocorrer no cotidiano, em variados contextos. Questões com dados reais representam percentual de 39,6%, que, mesmo sendo menor, evidencia as diferentes situações probabilísticas na vida cotidiana.

Ressaltamos a relevância de os livros didáticos apresentarem um maior número de atividades com dados reais para a explanação de conceitos probabilísticos, por acreditarmos que esses dados estimulam a criticidade dos estudantes e possibilitam que eles confrontem suas crenças e seus anseios com a incerteza e o risco. Portanto, esses dados, associados ao processo de ensino do professor e às reflexões inerentes a cada sujeito, podem colaborar para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

A terceira categoria – Contexto – refere-se ao cenário / à natureza das informações presentes nos enunciados das questões, envolvendo a incerteza e a aleatoriedade pertinentes à Probabilidade. Essa categoria foi dividida em duas subcategorias, sendo a primeira, “*Contexto elaborado pelo estudante*”, voltada para as questões que estimulam o estudante a elaborar uma situação probabilística, fazendo uso ou não de contextos preestabelecidos. Para analisar essa subcategoria, adotamos os seguintes critérios:

Contexto livre: A questão propõe a elaboração de um evento, possibilitando ao estudante a liberdade de escolher o contexto (Figura 6.10).

Contexto determinado: A questão propõe a elaboração de um evento em um determinado contexto ou com dados específicos (Figura 6.11).

A Figura 6.10 traz uma proposta de questão para ser realizada em duplas, estimula a criação de uma situação aleatória e, posteriormente, a troca com o colega para determinar o seu espaço amostral. Por tratar-se de uma resposta pessoal e de caráter livre, cada sujeito tem a liberdade de definir o contexto desse experimento.

Figura 6.10 - Exemplo de questão com “Contexto livre”

6. Produção textual Descreva uma situação que envolva um experimento aleatório. Em seguida, troque com um colega e determine o espaço amostral para a situação proposta por ele. Depois, desfaça a troca e verifique se o espaço amostral determinado por ele está correto. [Resposta pessoal](#).

Fonte: Livro B, p. 95.

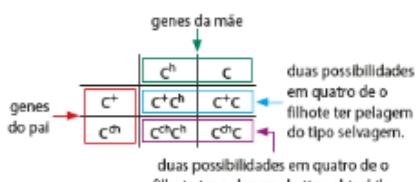
A Figura 6.11 traz uma questão que sugere ao estudante elaborar uma atividade pautada nas combinações genéticas e, na sequência, trocar com o colega, para a resolução. Apesar de ser uma questão pessoal, o contexto “saúde” foi determinado previamente.

Figura 6.11 - Exemplo de questão com “Contexto determinado”

7. Os experimentos de Mendel, que vimos na abertura do Capítulo, foram importantes para entender como ocorre a transmissão de características determinadas geneticamente. Podemos prever, por exemplo, como serão os pelos de uma ninhada de coelhos apenas conhecendo os pais. Os genes que determinam a pelagem dos coelhos são chamados de c^s , c^h , c^l e c . A combinação de dois desses quatro genes indica a cor dos pelos, sendo que cada gene vem de um dos pais. Assim, temos:

Se o coelho tem as combinações de genes	O pelo dele será do tipo
$c^s c^s$ ou $c^s c^h$ ou $c^s c^l$ ou $c^s c$	Selvagem ou aguti
$c^h c^h$ ou $c^h c^l$ ou $c^h c$	Chinchila
$c^l c^h$ ou $c^l c^l$	Himalaio
$c^l c$	Albino

Sabendo disso, podemos fazer uma previsão do cruzamento para determinar as possibilidades de tipo de pelagem em cada filhote e a probabilidade de cada tipo. Por exemplo, vamos fazer essa análise para um filhote que ainda nascerá, sabendo que seu pai tem pelagem selvagem $c^s c^h$ e sua mãe tem pelagem himalaio $c^l c$. Desse modo, o espaço amostral para esse caso é $U = \{(c^s c^h), (c^s c), (c^l c^h), (c^l c)\}$.



Agora, elabore uma atividade com essas informações e troque com um colega. Resolva a dele e corrija a que foi feita por você.
Elaboração do estudante.

Fonte: Livro G, p. 115.

A Tabela 6.2 apresenta os resultados dos contextos a serem elaborados pelo estudante nas 10 (dez) coleções de livros de Conhecimento Específico.

Tabela 6.2 - Proposta da elaboração de contexto nos livros de Conhecimento Específico

Elaboração de contexto - Livros de Conhecimento Específico		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Contexto livre	28	65,1
Contexto determinado	15	34,9
TOTAL	43	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando os dados exibidos na Tabela 6.2, observamos uma maior quantidade de questões (65,1%) que desafiam os estudantes a criarem os contextos livremente, enquanto 34,9% delas já trazem um contexto previamente determinado. Nessa organização, podemos dizer que o fato de ter o livre-arbítrio para determinar o contexto permite ao sujeito articular as situações autênticas do seu convívio diário, aproximando assim o conceito de Probabilidade da sua realidade. Esse fator é determinante para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

A segunda subcategoria, “*Contexto presente no enunciado da questão*”, foi adaptada das áreas-chave propostas por Gal (2005). As adaptações buscaram estabelecer categorias excludentes entre si. Assim, para analisar essa subcategoria, adotamos os seguintes critérios: “Sem contexto”; “Ambiental”; “Tecnológico”; “Social”; “Saúde”; “Financeiro”; “Política pública”; “Jogos de azar”; “Múltiplos contextos”.

Sem contexto: São situações que não fazem a aplicação de nenhum contexto específico ou propõem a aplicação direta da teoria. A Figura 6.12 apresenta uma questão de cunho teórico que solicita que o estudante complete lacunas com elementos teóricos da Probabilidade.

Figura 6.12 - Exemplo de questão “Sem contexto”

<p>1. O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de _____, do qual qualquer subconjunto é chamado de _____, alternativa c</p> <p>a) amostra; evento b) espaço; amostra c) espaço amostral; evento d) evento; fenômeno aleatório</p>

Fonte: Livro I, p. 145.

Ambiental: Está associada a fenômenos da natureza, tais como questões climáticas (previsão do tempo, mudanças climáticas), educação ambiental, recursos naturais, planejamento rural e urbano, dentre outros. A Figura 6.13 aborda a probabilidade de chuva numa determinada região.

Figura 6.13 - Exemplo de questão no contexto “Ambiental”

5. (Enem) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região. Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva? [Alternativa c.](#)

a) 0,075
 b) 0,150
 c) 0,325
 d) 0,600
 e) 0,800

Fonte: Livro E, p. 120.

Tecnológico: São situações atreladas à fabricação, implementação, teste de qualidade de produtos nos mais variados contextos. A Figura 6.14 está associada à probabilidade de uma fábrica produzir peças com defeito.

Figura 6.14 - Exemplo de questão no contexto “Tecnológico”

49. Em uma linha de produção de certa fábrica, a probabilidade de se obter uma peça com defeito é igual a 30%. Ao vistoriar uma amostra de 50 peças, qual é a probabilidade de se obter metade delas com defeito?
 aproximadamente 0,00144 ou 0,144%

Fonte: Livro F, p. 129.

Social: Trata-se de atividades que envolvem relações pessoais e interpessoais, como encontros entre amigos, passeios com familiares, prática de esportes. A Figura 6.15 apresenta uma situação social que consiste em atividades a serem desenvolvidas nos momentos de lazer.

Figura 6.15 - Exemplo de questão no contexto “Social”

47. Nos momentos de lazer, algumas pessoas se dedicam a atividades relaxantes, como passeios e assistir a filmes. Esses afazeres quebram a rotina do dia, aliviam as tensões e aumentam a disposição para encarar algumas tarefas. Veja no quadro os resultados de uma pesquisa acerca das atividades dos moradores de um condomínio em momentos de lazer.

Veja a resposta na Resolução dos problemas e exercícios na Assessoria pedagógica.

Atividade			
	Música (A)	Cinema (B)	Esportes (C)
Homens (H)	20	30	60
Mulheres (M)	40	30	10

Descreva o significado de cada probabilidade.

a) $P(H | C)$ d) $P(\bar{M} | \bar{B})$
 b) $P(M | C)$ e) $P(A | M)$
 c) $P(\bar{H} | A)$ f) $P(\bar{A} | H)$

Fonte: Livro D, p. 75.

Saúde: Questões que discutem sobre fatores e/ou problemas relacionados à saúde e ao bem-estar das pessoas ou animais. Logo, casos associados a questões genéticas, doenças epidêmicas, fatores genéticos, riscos relacionados à não utilização de métodos contraceptivos são exemplos de situações desse contexto. A Figura 6.16 está associada ao conceito de genética, ao discutir características inerentes ao cruzamento de duas cobaias e a probabilidade de fatores dominantes, no caso a cor, que podem acontecer nos filhotes.

Figura 6.16 - Exemplo de questão no contexto “Saúde”

42. Em cobaias de um experimento, o pelo preto é dominante sobre o branco. Os pais de uma ninhada de 5 filhotes são heterozigotos pretos, de modo que, para cada filhote, a probabilidade de ser preto é $\frac{3}{4}$ e a de ser branco é $\frac{1}{4}$.



Determine a probabilidade de os filhotes serem:

a) 3 brancos e 2 pretos; a) $\frac{45}{512}$ c) $\frac{405}{1.024}$
 b) 2 brancos e 3 pretos; b) $\frac{135}{512}$ d) $\frac{243}{1.024}$
 c) 1 branco e 4 pretos;
 d) todos pretos.

Fonte: Livro I, p. 141.

Financeiro: Situações nesse contexto tratam dos riscos e investimentos financeiros, auxiliando na tomada de decisão. A Figura 6.17 situa-se sobre um caso fictício de

declarações suspeitas de imposto de renda e a probabilidade de elas passarem por uma análise minuciosa.

Figura 6.17 - Exemplo de questão no contexto “Financeiro”

8. (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de Imposto de Renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.
- Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual é a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta? $\frac{2}{100}$
 - Se uma declaração é fraudulenta, qual é a probabilidade de ela ter sido suspeita? $\frac{52,6}{100}$ aproximadamente

Fonte: Livro E, p. 120.

Política pública: São questões que envolvem dados probabilísticos e problemas que precisam ser organizados e resolvidos pelo governo federal, estadual ou municipal, reverberando em toda a sociedade, como imunização, transporte, saúde, programas sociais, dentre outros. A Figura 6.18 discute uma questão relevante para o nosso país, a adesão à coleta seletiva de lixo.

Figura 6.18 - Exemplo de questão no contexto “Política pública”

Segundo relatório de 2018 da Cempre (Compromisso Empresarial de Reciclagem), apenas 17% da população brasileira é atendida por sistema de coleta seletiva, sendo que 83% dessa cobertura encontra-se em cidades da região Sul e Sudeste, apesar de essas regiões representarem pouco mais de 50% da população brasileira.

Fonte de pesquisa: <<http://cempre.org.br/ciclossoft/id/9>>. Acesso em 24 jul. 2020.

- Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.
- Em 2018, segundo dados do Cempre, aproximadamente 83% dos municípios brasileiros não possuíam coleta seletiva. Ao sortear um município brasileiro aleatoriamente, qual a probabilidade de que ele tenha coleta seletiva? $\frac{17}{100}$ ou 17%
 - Em alguns locais públicos são colocadas lixeiras coloridas a fim de separar o lixo a ser reciclado (vidro, plástico, metal e papel) e o orgânico. As cores atribuídas para cada tipo de material estão representadas a seguir. $\frac{7}{20}$ ou 35%
Uma pessoa desinformada, ao passar por uma dessas lixeiras, joga aleatoriamente uma embalagem de papel e uma lata metálica em lixeiras diferentes. Qual é a probabilidade de ela ter jogado pelo menos um dos materiais na lixeira correta?

Fonte: Livro J, p. 89.

Jogos de azar: Questões dessa categoria discutem as chances relativas aos diferentes resultados de um jogo, seja ele um jogo de cartas, dados, sorteios, loterias.

O exemplo da Figura 6.19 discute a probabilidade de dois jogadores vencerem um jogo relacionado ao lançamento de dados.

Figura 6.19 - Exemplo de questão no contexto “Jogos de Azar”

- 40.** Dois jogadores, Kleber e Arnaldo, lançam um dado, cada um uma única vez. Vence o jogo quem tirar o maior número. Sabendo que Kleber tirou 4, qual é a probabilidade de:
- Kleber vencer? $\frac{1}{2}$
 - haver empate? $\frac{1}{6}$
 - Arnaldo vencer? $\frac{1}{3}$

Fonte: Livro G, p. 135.

Múltiplos contextos: São questões que contam com a presença de mais de um dos contextos apresentados anteriormente. A Figura 6.20 apresenta uma situação interessante ao estimular que o estudante determine o espaço amostral ao realizar um sorteio de duas pessoas (contexto - jogos de azar/sorteio), dada a organização familiar de uma família com três filhos, ponderando o sexo e ordem de nascimento (contexto - Social) e selecionando ficha com nomes de homens e mulheres, registrando a sequência (contexto - jogos de azar/sorteio).

Figura 6.20 - Exemplo de questão com “Múltiplos contextos”

18. Defina o espaço amostral para cada um dos seguintes experimentos aleatórios.

- De um grupo de cinco pessoas {A, B, C, D, E}, sorteiam-se primeiramente uma e, depois, outra pessoa.



Há diferentes perfis de jovens e de juventudes.

- Investigam-se famílias com três crianças, anotando a configuração de acordo com o sexo e a ordem do nascimento.
- Um fichário com dez nomes contém três nomes de mulheres. Seleciona-se ficha após ficha, até a última, e anota-se a sequência das fichas selecionadas.
- Para cada um desses espaços amostrais, crie um evento E. Descreva-o e calcule $n(E)$.

Fonte: Livro C, p. 84.

Considerando essas categorias para os tipos de contextos, apresentamos os dados coletados na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à categoria “Contexto presente no enunciado da questão”

Tipo de contexto do enunciado da questão		
Categorias	Frequência	Porcentagem
Sem contexto	9	1,2
Ambiental	29	4,0
Tecnológico	38	5,3
Social	160	22,4
Saúde	73	10,2
Financeiro	12	1,7
Política pública	7	1,0
Jogos de azar	383	53,6
Múltiplos contextos	4	0,6
TOTAL	715	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Interpretando esses dados, verificamos que 53,6% das questões estão atreladas aos jogos de azar. Dessa forma, nossa pesquisa revela que os livros didáticos continuam priorizando esse contexto, em consonância com as pesquisas de Viali e Oliveira (2010), Custódio (2017), Assis (2018) e Verbisck (2019), os quais, ao analisarem livros didáticos anteriores ao PNLD 2021, também observaram a priorização de atividades com foco em jogos de azar.

Vale salientar a presença de dados probabilísticos em outros contextos. Foram encontradas atividades com contexto social (22,4%), saúde (10,2%), tecnológico (5,3%) e ambiental (4,0%). Também notamos que algumas questões deixam a cargo do estudante escolher o critério, por tratar-se de uma proposta de atividade que estimula a criação de situações. Contexto financeiro (1,7%) e política pública (1,0%), pertinentes para o posicionamento crítico na sociedade e que podem interferir nas pretensões futuras dos estudantes, são pouco explorados.

Dessa maneira, ressaltamos que os livros didáticos poderiam valorizar muito mais os diferentes contextos cotidianos que envolvem a Probabilidade e diminuir as atividades que envolvem jogos de azar. Os jogos de azar são contextos que permitem cálculos matemáticos, mas expressam pouco a variabilidade que pode interferir na

Probabilidade. Além disso, não devem ser estimulados, sendo alguns dos jogos, inclusive, proibidos pela legislação brasileira.

A quarta categoria, “*Pesquisa Estatística*”, está associada a questões que estimulam a coleta, análise ou interpretação de dados para fazer previsões ou generalizar resultados de uma população investigada. Para isso, baseamo-nos nas seguintes categorias: interpretação e elaboração de uma situação/pesquisa.

Interpretação da pesquisa: As questões dessa subcategoria solicitam ao estudante analisar os dados apresentados e responder sobre a probabilidade de uma determinada situação acontecer (Figura 6.21). No exemplo a seguir, o estudante precisa interpretar os resultados de uma pesquisa feita com praticantes de natação da cidade de São Paulo, sobre lesões sofridas por eles.

Figura 6.21 - Exemplo de questão com interpretação de uma “Pesquisa Estatística”

8 (Unifesp) O quadro mostra o resultado de uma pesquisa realizada com 200 nadadores de competição da cidade de São Paulo, visando apontar o percentual desses nadadores que já tiveram lesões (dores) em certas articulações do corpo, decorrentes da prática de natação, nos últimos três anos.

Articulação	Percentual de nadadores
Ombro	80%
Coluna	50%
Joelho	25%
Pescoço	20%

Com base no quadro, determine:

- quantos nadadores do grupo pesquisado tiveram lesões (dores) no joelho ou no pescoço, considerando que 5% dos nadadores tiveram lesões nas duas articulações, joelho e pescoço.
- qual é a probabilidade de um nadador do grupo pesquisado, escolhido ao acaso, não ter tido lesões (dores) no ombro ou na coluna, considerando as manifestações de dores como eventos independentes.

Fonte: Livro A, p. 141.

Elaboração de uma situação/pesquisa: Essa subcategoria estimula o estudante a elaborar uma situação pautada nos resultados de uma pesquisa estatística apresentada. O enunciado apresentado na Figura 6.22 promove a elaboração e resolução de uma questão considerando os resultados de uma pesquisa feita pelos estudantes em jornais e revistas, com o contexto livre.

Figura 6.22 - Exemplo de questão com elaboração de uma situação a partir de uma “Pesquisa Estatística”

3. Junte-se a um colega para fazer esta atividade.
- Pesquisem uma informação publicada em jornal ou revista que contenha dados em gráficos estatísticos.
 - Usando essas informações, elaborem uma situação relacionada ao cálculo de probabilidade.
 - Resolvam a situação e apresentem-na a outra dupla de estudantes para que resolvam. Depois confrontem os resultados obtidos. *Resposta pessoal.*

Fonte: Livro E, p. 122.

A Tabela 6.4 apresenta os resultados das propostas das atividades que envolvem pesquisa estatística nas 10 (dez) coleções dos livros de Conhecimento Específico.

Tabela 6.4 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à categoria “Pesquisa Estatística”

Proposta da questão de Pesquisa Estatística - Livros Específicos		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Resolução	78	96,3
Elaboração de situação	3	3,7
TOTAL	81	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados apresentados na Tabela 6.4, podemos observar a grande predominância de questões que solicitam dos estudantes apenas a interpretação de pesquisas estatísticas (96,3%). Nessa estrutura, os enunciados estimulam a utilização de uma técnica de cálculo apresentada anteriormente. Esses resultados trazem uma lacuna para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, visto que não estimulam os estudantes a desenvolverem investigações de situações em contextos autênticos da sua realidade, não possibilitam vivenciar os conceitos teóricos na prática, nem permitem ao estudante analisar um banco de dados e refletir sobre eles.

Na quinta categoria, “Significados”, classificamos as questões segundo as formas de determinar a probabilidade de um evento acontecer. Para isso, baseamo-nos nas concepções propostas por Batanero (2005), organizadas como: Intuitiva, Clássica, Frequentista, Subjetiva e Axiomática. Acrescentamos, ainda, em nossas

análises, atividades nas quais o próprio estudante é o responsável pela elaboração da questão.

Elaboração do estudante: As atividades dessa categoria requerem a elaboração de problemas por parte dos estudantes. A questão da Figura 6.23, por exemplo, propõe aos estudantes reunirem-se em duplas, criar um problema envolvendo Probabilidade, apresentando o espaço amostral e, em seguida, trocar com outras duplas para a resolução.

Figura 6.23 - Exemplo de questão com “Elaboração do estudante”

11. Produção textual Reúna-se com um colega e escrevam uma situação envolvendo um experimento aleatório e identificando o seu espaço amostral. Em seguida, elaborem um problema que envolva o cálculo da probabilidade de um evento que possa ocorrer na situação que vocês escreveram. Depois, troquem com uma dupla e resolvam o problema proposto por eles. Por fim, desfaçam a troca e verifiquem se a resolução feita pelos colegas está correta. [Resposta pessoal](#).

Sempre que trabalhar em grupo e também nos momentos recreativos, evite brincadeiras e comentários que possam ser considerados *bullying*. Valorize a diversidade, seja solidário e interaja com todos.

Fonte: Livro B, p. 102.

Intuitivo: Dadas as suas experiências de vida, suas intuições e crenças, o estudante pode estimar a probabilidade de um evento sem a necessidade de formalizar por meio do cálculo. Por exemplo, a atividade da Figura 6.24 estimula a criação de frases pautadas no uso de termos probabilísticos “certo”, “muito provável”, “pouco provável”, nas quais usarão suas observações anteriores.

Figura 6.24 - Exemplo de questão com significado Intuitivo

5 Elabore uma frase que comece por:

- “É muito provável que amanhã...”
- “É certo que amanhã...”
- “É pouco provável que amanhã...”

Fonte: Livro A, p. 43.

Clássico: Está fundamentada no conceito de situações equiprováveis (todos os resultados possíveis são igualmente prováveis). Além disso, trata-se de situações com resultados possíveis e finitos, que só podem ocorrer um por vez. Assim, podemos determinar esses resultados por meio da divisão entre os resultados favoráveis e o espaço amostral do evento. Exemplificando, podemos observar a Figura 6.25, que faz

menção à retirada de uma bola vermelha e uma bola branca de uma caixa, sendo os resultados favoráveis (bolas vermelhas = 4 e bolas brancas = 6) e o número total de resultados = 10 bolas.

Figura 6.25 - Exemplo de questão com significado Clássico

- 19.** Em uma caixa há bolas iguais, exceto pela cor, de modo que 6 bolas são brancas e 4 bolas são vermelhas. Qual é a probabilidade de, ao acaso, ser retirada:
- uma bola vermelha? 40%
 - uma bola branca? 60%

Fonte: Livro H, p. 72.

Frequentista: Essa concepção está associada à probabilidade de um evento acontecer a partir de estimativas feitas, dada a repetição de um evento nas mesmas condições num determinado número de vezes. A Figura 6.26 mostra um exemplo de situação frequentista com o lançamento de uma moeda oitenta vezes.

Figura 6.26 - Exemplo de questão com significado Frequentista

- Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.  NÃO ESCREVA NO LIVRO
- Crie um programa para determinar a chance de cair "coroa" em um lançamento de 80 moedas. *Elaboração do estudante.*
 - Crie um programa que calcule a chance de, ao sortearmos 50 números entre 1 e 100, ele ser múltiplo de 2 ou múltiplo de 3. *Elaboração do estudante.*

Fonte: Livro G, p. 149.

Subjetivo: Nesse tipo de Probabilidade, inicialmente uma pessoa conjectura numericamente a chance de um evento ocorrer, baseada nos seus conhecimentos, intuições e experiências de vida. À medida que novas informações se tornam disponíveis durante o evento e são apreendidas pelo sujeito, posteriormente, essa estimativa inicial pode ser alterada ou não. Logo, esse tipo de Probabilidade ocorre em duas fases: *a priori* e *a posteriori*.

Segundo Silva (2023), quando nos deparamos com algoritmos probabilísticos, esse tipo de Probabilidade pode ser compreendido como uma Probabilidade condicional, considerando as informações *a priori* dentro do próprio evento. A questão reproduzida na Figura 6.27 refere-se a dados de uma pesquisa sobre o estilo musical preferido de homens e mulheres entre 18 e 25 anos. Nesse caso, é exposto o espaço

amostral da pesquisa e, por exemplo, para determinar a Probabilidade condicional de sortear uma mulher (M), dado que essa pessoa goste de sertanejo (S), será necessário, inicialmente, fazer um recorte desse espaço amostral para observar a probabilidade de se escolher uma pessoa que goste de sertanejo, independentemente do gênero, e na sequência, observar a probabilidade de ser uma mulher que goste de sertanejo.

Figura 6.27 - Exemplo de questão com Significado Subjetivo

20. Observe no quadro abaixo o resultado de uma pesquisa com homens e mulheres de uma região, entre 18 e 25 anos de idade, a respeito do estilo musical favorito deles.

	Sertanejo (S)	Rock (R)	Eletrônica (E)
Homens (H)	68	40	26
Mulheres (M)	50	12	11

Pretende-se convidar por sorteio um dos participantes da pesquisa para uma entrevista sobre preferências musicais em um programa de auditório. Calcule a probabilidade de escolha desse participante em cada situação abaixo.

a) $P(H|E)$ c) $P(H|R)$ $\frac{10}{15}$ ou aproximadamente 70,02%
b) $P(M|S)$ $\frac{25}{39}$ ou aproximadamente 42,31%.
20. e) $\frac{28}{37}$ ou aproximadamente 70,27%.

Fonte: Livro B, p. 110.

Axiomático: Essa visão está pautada em axiomas que fundamentam a probabilidade. O exemplo da Figura 6.28 está atrelado à concepção axiomática de Probabilidade, pois, para a sua resolução, o estudante precisa considerar as probabilidades presentes no intervalo fechado entre os números $[0, 1]$, dada a probabilidade de 36% dos homens e 40% das mulheres viverem até 80 anos de idade. Logo, 64% dos homens e 60% das mulheres não terão a mesma oportunidade. Essa atividade é interessante, por explorar uma concepção que não está presente de forma explícita na BNCC, porém, ao estar presente no livro didático, poderá tornar-se de conhecimento dos estudantes.

Figura 6.28 - Exemplo de questão com significado Axiomático

- 45** Em certo país, uma pesquisa realizada por médicos geriatras indicou que 36% de todos os homens e 40% de todas as mulheres viverão até 80 anos de idade.
- Qual é a probabilidade de que os quatro avós de uma pessoa cheguem aos 80 anos de idade?
 - Qual é a probabilidade de que exatamente três dos quatro avós de uma pessoa vivam até os 80 anos de idade?
 - Qual é a probabilidade de que um casal de avós, do mesmo ramo familiar, chegue até os 80 anos de idade?
 - Qual é a probabilidade de que nenhum dos avós viva até os 80 anos de idade?
 - Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos avós viva até os 80 anos de idade?
 - Por que as respostas do item a até o e não totalizam 1,00?

Fonte: Livro A, p. 55.

Não se aplica: São situações que não remetem a nenhum tipo de Probabilidade específico, ou seja, abordam a Probabilidade de forma geral. A Figura 6.29 mostra um exemplo que está atrelado aos conceitos de espaço amostral e evento, comuns às concepções de Probabilidade.

Figura 6.29 - Exemplo de questão com situação “Não se aplica”

1. O conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de [redigido], do qual qualquer subconjunto é chamado de [redigido]. **alternativa c**
- amostra; evento
 - espaço; amostra
 - espaço amostral; evento
 - evento; fenômeno aleatório

Fonte: Livro I p. 145.

Partindo dessas categorias, ao analisarmos as 10 (dez) coleções dos livros concernentes à unidade temática “Probabilidade e Estatística”, obtivemos os seguintes resultados (Tabela 6.5):

Tabela 6.5 - Análise dos livros de Conhecimento com relação à categoria “Significados”

Significados – Livros de Conhecimento		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Elaboração pelo estudante	17	2,2
Intuitivo	25	3,3
Clássico	589	77,7
Frequentista	79	10,4
Subjetivo	14	1,8
Axiomático	16	2,1
Não se aplica	18	2,5
TOTAL	758	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando as situações probabilísticas presentes nos livros didáticos, observamos a predominância de situações Clássicas (77,7%). Contudo, avaliamos como ponto positivo a inserção e o aumento, mesmo que timidamente, de situações Frequentistas (10,4%), Intuitivas (3,3%), Subjetivas (1,8%) e Axiomáticas (2,1%). Essa disparidade quanto aos outros tipos de significados pode estar associada diretamente à quantidade de habilidades referentes a esse objeto de conhecimento presentes na BNCC para o ensino de Probabilidade. Analisando essas habilidades, podemos dizer que quatro delas (EM13MAT310, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511) estão associadas à situação Clássica.

Gal (2005) sinaliza que a preferência nos livros didáticos pelo significado Clássico pode ser em função de esse significado ser um ponto basilar para a aprendizagem de tópicos mais avançados (comportamento de sistemas químicos ou físicos, por exemplo), além de a probabilidade ser estimada de maneira simples e direta, ao estabelecer a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de possibilidades.

Ponderando os resultados, observamos que os livros didáticos continuam com a maior presença de situações com significado Clássico, resultado que está em sintonia com as análises feitas por Coutinho (2013), Canaveze (2013), Rodrigues e Martins (2016), Assis (2018), Custódio (2017), Almeida e Farias (2018), Coutinho (2019), Verbisck (2019), Silva (2023) e Silva e Guimarães (2024), as quais evidenciam a maior presença do significado Clássico nos livros didáticos.

Tal condição reitera que, mesmo com as mudanças ocorridas na organização dos livros didáticos de Matemática, inseridos no guia do PNLD 2021 (sistematizados por unidades temáticas), ainda há maior concentração de situações clássicas. Assim, a organização conceitual e metodológica permanece a mesma, em relação às edições anteriores do PNLD.

A partir desses resultados e por concordar com Gal (2005), quando defende que há situações cotidianas que não podem ser analisadas apenas pela visão clássica da Probabilidade, reiteramos a necessidade de, nos livros didáticos, haver um maior número de atividades que dialoguem com todos os tipos de situações/visões da Probabilidade, reforçando a importância de o estudante conseguir identificar, compreender e interpretar situações probabilísticas que envolvam as situações supracitadas.

Com relação à quinta categoria, “Representações”, buscamos identificar as formas utilizadas para expressar/apresentar os dados probabilísticos nos livros didáticos. Optamos por dividi-la em duas subcategorias, a saber: *Representação da questão* (representações expostas no enunciado da questão – Figura 6.30); *Representação solicitada para o estudante* (representações solicitadas ao estudante para a sua resolução ou elaboração da atividade – Figura 6.31). Ambas as subcategorias foram analisadas pelos critérios: Numérica, Diagrama, Tabular, Gráfica, Figural, Língua natural escrita; Múltiplas representações.

Representação numérica: Trata-se das diferentes maneiras de escrever os dados probabilísticos numericamente, especificamente com as representações percentuais, decimais ou fracionárias, como mostram as figuras Figura 6.30 e Figura 6.31.

Figura 6.30 - Representação numérica da questão

Figura 6.31 - Representação numérica do estudante

28. (UFJF-MG) Respondendo a um chamado de um centro de hemodiálise, 140 pessoas se apresentaram imediatamente. Um levantamento do tipo sanguíneo dessas pessoas indicou que 27 tinham o tipo sanguíneo O, 56 o tipo A, 29 o tipo AB, e o restante, o tipo B. Veja comentários nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica. A probabilidade de que uma pessoa deste grupo, selecionada ao acaso, tenha o tipo sanguíneo B é: e

a) 32% b) 28% c) 16% d) 25% e) 20%

Fonte: Livro D, p. 65.

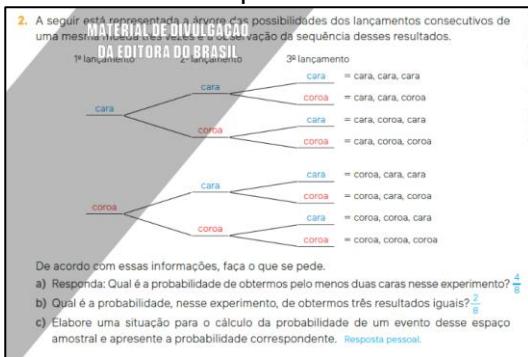
Fonte: Livro A, p. 50.

A Figura 6.30 traz a representação fracionária no enunciado da questão, apresentando a resolução de Luís e Ellen para dois eventos. Essa resolução deve ser analisada pelos estudantes para verificar as semelhanças e diferenças entre as duas.

Já a Figura 6.31 requer a representação numérica (percentual) por parte do estudante, para apresentar a probabilidade de selecionar uma pessoa de um centro de hemodiálise e essa pessoa ter o tipo sanguíneo B.

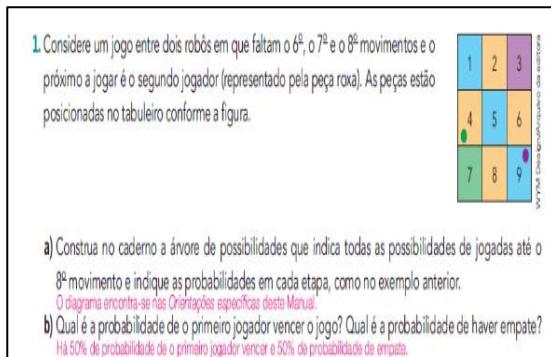
Representação diagrama: São representações visuais que permitem comunicar e apresentar eventos e dados probabilísticos por meio de diagramas (de Venn ou de árvore).

Figura 6.32 - Representação diagrama da questão



Fonte: Livro E, p. 101.

Figura 6.33 - Representação diagrama do estudante



Fonte: Livro H, p. 87.

A Figura 6.32 traz, por meio de uma árvore de possibilidades, o espaço amostral do lançamento consecutivo de uma moeda. Assim, os estudantes devem analisar essa representação e determinar a probabilidade desse experimento.

Considerando um jogo de tabuleiro, a questão apresentada na Figura 6.33 solicita dos estudantes a construção de uma árvore de possibilidades que exponha todas as jogadas possíveis de serem feitas e, posteriormente, a determinação da probabilidade de quem irá ganhar o jogo.

Representação tabular: Esse tipo de representação sistematiza os dados do espaço amostral ou as probabilidades de um evento acontecer em uma tabela. As Figuras 6.34 e 6.35 apresentam alguns exemplos dessa representação.

Figura 6.34 - Representação tabular da questão

Gênero Idade (ano)	Masculino	Feminino
35 i- 45	10	2
45 i- 55	13	5
55 i- 65	24	3
65 i- 75	17	0
75 i- 85	6	1

Fonte dos dados: IBASUL. Senado Federal. *Senadores em Exercício*. Brasília, DF, [2010]. Disponível em: www2.senado.leg.br/web/senadores/term-exercicio/-/er/pessoas. Acesso em: 6 set. 2020.

Escolhendo-se ao acaso um dos senadores em exercício em 2019, qual é a probabilidade de se ter:

- mulher?
- homem e ter 65 anos de idade ou mais?
- mujer ou ter menos de 55 anos?

Fonte: Livro F, p. 115.

A Figura 6.34 traz os dados reais relativos à faixa etária e ao sexo dos senadores do Brasil em 2019. Esses resultados foram apresentados numa tabela simples e a atividade questiona sobre a probabilidade de se escolher, ao acaso, algumas pessoas em particular, como escolher um homem com 65 anos ou mais. Logo, a resolução dessa atividade requer a transição da representação tabular para a representação numérica.

O exemplo da representação Tabular do estudante (Figura 6.35) apresenta uma situação Frequentista de Probabilidade (lançamento de um dado 1000 vezes) e solicita a construção de uma tabela com frequência relativa; também indaga sobre a sua relação com a probabilidade de sair uma determinada face do dado. Essa questão é interessante por estimular o estudante a usar a representação Tabular na primeira alternativa. Já a segunda alternativa requer a análise da tabela de frequência e o uso da língua natural escrita para apresentar suas conclusões.

Representação gráfica: Nesse tipo de representação, os eventos ou variáveis aleatórias são exibidos graficamente, nas variadas formas (barra, coluna, setores, dentre outros). O gráfico de barras apresentado na Figura 6.36 apresenta o número de clientes que fizeram compras numa determinada loja, nos três primeiros meses de 2012, e vão concorrer a dois produtos. Dessa forma, a atividade questiona sobre a probabilidade de serem sorteadas duas pessoas que fizeram suas compras em fevereiro.

Figura 6.35 - Representação tabular do estudante

Ver resolução no Guia do professor.

43. Um dado foi lançado 1.000 vezes com o resultado mostrado na tabela abaixo.

- Construa uma tabela de frequências.
- Analise se, com essa quantidade de lançamentos, podemos considerar a frequência relativa como a probabilidade de sair determinada face no lançamento desse dado. Elabore uma conclusão.

Face	Número de vezes
1	150
2	175
3	163
4	166
5	174
6	172

Fonte: Livro I, p. 142.

Representação figural: No estudo dos conceitos de Probabilidade, a representação figural (Figura 6.37) consiste na forma de visualizar eventos e suas probabilidades por meio de figuras. Essa atividade está no contexto Tecnológico, relacionando seis tomadas de energia e os pinos projetados para elas. Sendo assim, interroga sobre a probabilidade de sortear um pino e uma pomada que tenham o encaixe perfeito.

Figura 6.36 - Representação gráfica da questão



Fonte: Livro C, p. 89.

Figura 6.37 - Representação figural da questão



Fonte: Livro G, p. 121.

Representação (Língua natural): Nessa representação, o foco não está na utilização da representação numérica da probabilidade, e sim na descrição da probabilidade de eventos por meio de expressões que podem ser explicitadas na forma escrita ou na forma oral (exclusiva para a representação do estudante).

Figura 6.38 - Representação da questão na Língua natural escrita

6 Elabore uma frase que termine com: "... isso sempre ocorre por acaso".

Fonte: Livro A, p. 43.

Figura 6.39 - Representação do estudante na Língua natural oral

B Você já teve acesso a dados como esses em outras fontes de informação? Essas fontes eram confiáveis? converse com os colegas e o professor. Resposta pessoal.

Fonte: Livro J, p. 147.

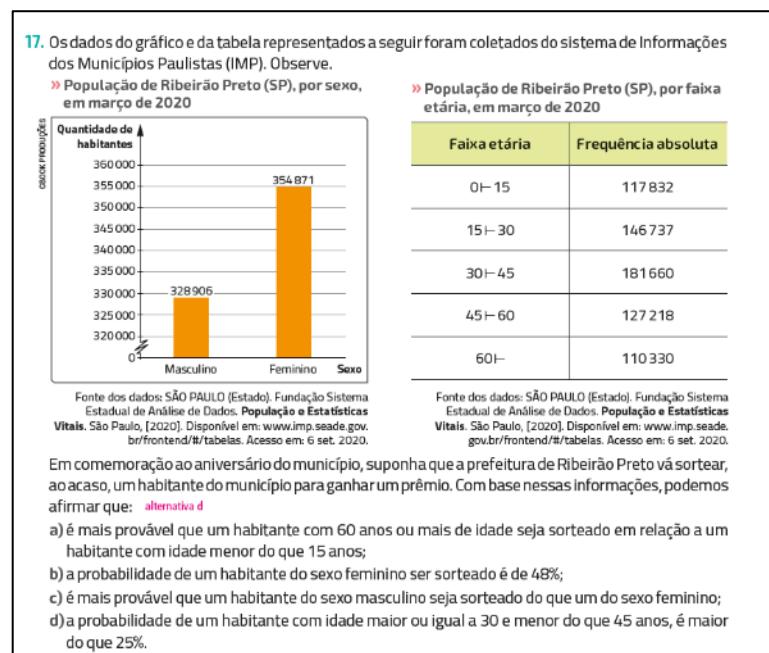
A representação na Língua natural escrita está imersa na atividade apresentada na Figura 6.38, que solicita a elaboração de uma frase que explice a aleatoriedade

da situação, tendo que terminar com “isso sempre ocorre por acaso”. Nesse caso, tanto a representação da questão como a representação do estudante estão pautadas na Língua natural escrita.

A representação do estudante na Língua natural oral está representada na Figura 6.39, associada ao Elemento do conhecimento “Questões críticas”, ao estimular como resposta para esse questionamento uma conversa entre os colegas de classe e o professor acerca do acesso a dados sobre o uso de métodos contraceptivos e a fidedignidade desses dados.

Múltiplas representações: Nessa categoria, as atividades propostas ou as resoluções das mesmas requerem a mobilização e/ou interpretação de duas ou mais representações (Numérica, Língua natural, Diagrama, Gráfica, Tabular ou Figural). Por exemplo, a atividade da Figura 6.40 discorre sobre o sexo e a faixa etária da população de uma cidade do interior do estado de São Paulo. Os dados relativos ao sexo são apresentados por meio de um gráfico de barras, enquanto os dados da faixa etária são apresentados por meio de uma tabela simples.

Figura 6.40 - Exemplo de representação da questão com “Múltiplas representações”



Fonte: Livro F, p. 112.

A questão acima é relevante ao trazer dados reais referentes à categoria “Pesquisa Estatística” e utilizar as representações gráfica (gráfico de barras) e tabular

(tabela simples) que precisarão ser analisadas para o estudante apontar uma alternativa correta. Isso estimula a transição entre as representações gráfica, tabular, numérica e escrita para inferir sobre o perfil de um habitante do município que pode ser sorteado para ganhar um prêmio. Entretanto, em relação aos Elementos disposicionais, sentimos falta de estímulos ao posicionamento crítico e à tomada de decisão dos estudantes.

Apresentamos a seguir (Figura 6.41) uma questão que destacamos em relação ao estímulo do uso de múltiplas representações por parte dos estudantes para a sua resolução.

Figura 6.41 - Situação com múltiplas representações na representação do estudante

Para explorar

Junte-se a 3 colegas para esta atividade. Vocês precisarão de um cartão do Jogo similar ao do Hiper Milhão que é praticado no Brasil e de uma calculadora. Faça o que se pede a seguir.

1. Pesquise os valores das apostas para a escolha de 6 dezenas, 7 dezenas, 8 dezenas... até 15 dezenas. *A resposta depende dos valores atuais cobrados.*
2. Elabore uma tabela com o número de dezenas e o valor que é pago para cada tipo de aposta. *A resposta depende dos valores atuais cobrados.*
3. Calcule, para cada uma dessas possibilidades de escolhas de dezenas, as probabilidades de se ganhar.
4. Investigue o motivo dos valores cobrados em cada tipo de aposta e apresente as conclusões. *Orientações no Manual do Professor.*

Fonte: Livro E, p. 101.

Essa questão traz vários fatores a serem destacados. Podemos sinalizar inicialmente o fato de propor o agrupamento de três estudantes para a sua realização, no contexto de Jogos de azar. Além disso, propõe uma intercambialidade entre as representações numérica (número de dezenas e o valor pago) e tabular (elaboração de uma tabela com essas informações), o que requer a conexão entre os dados para o estudante alcançar a resposta solicitada. Pontuamos também que o estudante precisará fazer uma pesquisa sobre os valores cobrados para pagamento das apostas (buscando dados reais). Ademais, a atividade estimula a criticidade dos estudantes, ao solicitar a análise dos valores e a explanação de suas conclusões.

Dessa forma, a atividade analisada favorece o desenvolvimento do Letramento Probabilístico dos estudantes, ao promover a integração entre os Elementos do conhecimento (cálculo de probabilidade, elaboração da tabela) e os Elementos disposicionais (crenças e atitudes; postura crítica e sentimento em relação ao risco)

que, apesar de não estarem explícitos na atividade, podem ser abordados pelo professor em sala de aula. O professor pode perguntar, por exemplo: “Qual o seu posicionamento em relação aos jogos de azar? Você acredita que quanto mais dezenas escolher, maior a chance de ganhar? Como você analisa o risco desses jogos?”, dentre outros questionamentos.

Elaboração do estudante: Essa categoria é exclusiva para a representação do estudante, visto que as atividades que solicitam a elaboração de uma situação deixam a cargo do estudante escolher qual representação será utilizada.

Figura 6.42 - Representação da questão no critério “Elaboração do estudante”

Exemplo

A tabela apresenta o resultado de uma pesquisa sobre a preferência dos estudantes de uma determinada escola quanto a aulas presenciais ou on-line.

Vamos calcular a probabilidade de, ao sortear um indivíduo ao acaso, escolhermos:

- Um estudante do 1º ano.
- Um estudante da tarde que prefere aulas presenciais.

TURMA	PERÍODO	OPINIÃO SOBRE AULAS PRESENCIAIS OU ON-LINE		
		Prefere presencial	Prefere on-line	Sem opinião
1º ano	manhã	2	8	4
	tarde	6	9	8
2º ano	manhã	4	8	2
	tarde	12	10	1

A probabilidade de ser estudante do 1º ano é: $P = \frac{37}{74} = 0,50$; e a probabilidade de ser um estudante da manhã é $P = \frac{28}{74} \approx 0,378$.

20. Elabore uma questão com base nos dados dessa tabela.

Fonte: Livro C, p. 137.

Essa questão está associada a uma pesquisa fictícia feita com estudantes de uma escola, sobre as suas preferências quanto às aulas online ou presenciais. Assim, os dados foram apresentados em uma tabela simples e, na sequência (Figura 6.42), foi proposto que os estudantes elaborassem uma questão com base nesses dados. Logo, a representação a ser utilizada (gráfico de barra, gráfico de setores, representação numérica) ficará a cargo do estudante.

Ponderando esses critérios, exibimos na Tabela 6.6 os dados atinentes à percentagem das atividades relacionadas à primeira subcategoria “Representação da questão” presente nas coleções dos livros de conhecimento específico do PNLD 2021.

Tabela 6.6 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à subcategoria “Representação da questão”

Representação da questão – Livros de Conhecimento Específico		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Numérica	19	2,5
Diagrama	5	0,7
Tabular	58	7,7
Gráfica	16	2,1
Figural	53	7,0
Língua natural – escrita	580	76,4
Múltiplas representações	27	3,6
TOTAL	758	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando as representações nos enunciados, constatamos a predominância da representação na Língua natural escrita, na contramão do escasso número de atividades que apresentam os dados probabilísticos por meio de diagramas, fator que avaliamos como lacunar. De forma geral, esse tipo de questão tem a mesma estrutura organizacional, apresentando os enunciados na Língua natural escrita e associada a números expostos na forma fracionária, percentual ou decimal. São questões que estimulam o estudante a realizar uma transição para a representação numérica.

Esses resultados acedem às análises realizadas por Canaveze (2013) e Custódio (2017), que analisaram edições de livros anteriores à promulgação da BNCC e já apontavam a limitação das representações que vinham sendo utilizadas por livros didáticos, identificando que, preponderantemente, as atividades do conceito de Probabilidade estão associadas à passagem da representação escrita para a representação numérica.

Voltando a atenção para as outras representações, temos pouco uso da representação tabular (7,7%), gráfica (2,1%) e diagrama (0,7%). Esses dados contrariam os critérios do parecer do PNLD, no domínio da Matemática e suas Tecnologias, que sublinha a importância da utilização de variadas representações e incentiva o estudante a ter a liberdade de escolher as representações mais práticas para cada situação e poder realizar a transição entre elas.

Observando a subcategoria “Representação solicitada para o estudante” (Tabela 6.7), temos:

Tabela 6.7 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação a subcategoria “Representação solicitada para o estudante”

Representação solicitada para o estudante – Livros de Conhecimento Específico		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Numérica	588	77,5
Diagrama	3	0,4
Tabular	7	0,9
Língua natural – oral	2	0,3
Língua natural – escrita	106	14,0
Múltiplas representações	27	3,6
Critério do estudante	25	3,3
TOTAL	758	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Dentre os critérios estabelecidos para classificar essa subcategoria, identificamos que as questões estão concentradas na representação numérica e escrita, com maior enfoque para a primeira. Esse resultado vai ao encontro das discussões feitas na categoria “Situações”, já que os livros didáticos estão pautados na visão Clássica da Probabilidade e, por conseguinte, essa visão está associada diretamente à representação numérica e reverbera na relação entre a situação Clássica (589 questões) e na representação numérica (588 questões).

Outro aspecto que exige maior atenção está no fato de apenas 1,6% das questões solicitarem o uso da representação visual do diagrama, tabular ou oral. Pontuamos esse aspecto como ponto limitante, e concordamos com Moraes (2017) quando defende que a restrição no uso de representações compromete o desenvolvimento do letramento e que atividades que usam diferentes representações colaboram para a produção do conhecimento de Probabilidade.

Nesse viés, articulando os resultados das duas subcategorias, sinalizamos a organização dos livros didáticos como um possível empecilho para o Letramento Probabilístico, dada a porcentagem de atividades que estimulam o estudante apenas a apresentar os resultados de forma numérica (fracionária, percentual e decimal) e não o incitam a fazer conexões entre as representações.

Além disso, o foco incisivo na intercambialidade da representação escrita para a numérica não contempla os termos e métodos de comunicar o acaso e a incerteza relativa à Probabilidade, tornando-se, portanto, uma barreira para o Letramento Probabilístico, pois não permite um contato significativo do estudante com outras

representações, não estimula as transições entre as mesmas, assim como não condiz expressamente com as representações com as quais nos deparamos cotidianamente.

Nas coleções analisadas, há um número pequeno (27 questões ou 3,6%) de questões que utilizam múltiplas representações referentes ao conceito de Probabilidade. Em geral, essas questões são acompanhadas de informação estatística e ligadas à categoria “Pesquisa estatística”, indicando a intercambialidade entre representações tabulares, gráficas e numéricas.

Quanto a isso, Gal (2005) descreve como uma expectativa basilar que consigamos fazer a movimentação e a transição entre as representações. Nesse ponto de vista, ressaltamos a importância da utilização de múltiplas representações para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, ao estimular o estudante a compreender e interpretar dados probabilísticos em representações diferentes, podendo colaborar no desenvolvimento de habilidades inerentes ao elemento “*Linguagem*” sugerido por Gal (2005), dada a intercambialidade entre as representações.

Na sexta e última categoria, “Disposicionais”, focamos nos Elementos disposicionais de Gal (2005). Nessa categoria, buscamos perceber se as atividades dos livros didáticos estimulam o posicionamento crítico do estudante, ao deparar-se com as informações probabilísticas, e também se elas possibilitam ao estudante explanar suas crenças, concepções e tomar decisões sobre fatores políticos, culturais, sociais, dentre outros. De tal modo, tomamos como base os critérios: ausente, postura crítica, crenças e atitudes, sentimento ao risco e elaboração do estudante.

Ausentes: São situações que não estimulam a reflexão nem o posicionamento dos estudantes frente às situações que envolvem incerteza e aleatoriedade. Logo, predispõem os estudantes apenas à resolução para assinalar uma alternativa ou a apresentação de resultados numéricos. Exemplificamos esse critério com a atividade da Figura 6.43, que faz menção ao tamanho dos calçados de funcionários de um colégio e à probabilidade de se escolher, por acaso, uma mulher que utilize um calçado número 38. Essa atividade requer determinar a probabilidade desse evento e, posteriormente, assinalar a alternativa correta.

Figura 6.43 - Exemplo de questão com a ausência de Elementos disposicionais

10. (Enem) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é: alternativa d

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{5}$ e) $\frac{5}{14}$
 b) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{5}{7}$

ILUSTRAÇÃO: ADRIANO SICCO

Fonte: Livro I, p. 143.

Postura crítica: Consideramos que uma atividade incita a postura crítica dos estudantes quando ela não está restrita apenas ao cálculo e à exposição do resultado da probabilidade de um evento, mas exige que o estudante apresente sua opinião, justifique suas respostas, utilizando seu poder argumentativo. A Figura 6.44 traz uma questão interessante, ao propor que os estudantes se organizem em trios, para analisar os dados apresentados em um infográfico e fazer uma análise crítica dos métodos contraceptivos, considerando a probabilidade desses métodos para evitar gravidez.

Figura 6.44 - Exemplo de questão com “Postura crítica”

1. Retomem o infográfico e analisem os métodos contraceptivos apresentados observando estatisticamente a probabilidade de ser seguro no sentido de evitar uma gravidez.

Fonte: Livro E, p. 127.

Crenças e atitudes: As atividades relacionadas a esse critério consideram as experiências pessoais, profissionais e culturais de cada sujeito, trazendo um caráter particular para a sua análise. Dessa forma, as crenças estão diretamente associadas às decisões a serem tomadas, à avaliação dos riscos em situações que envolvem aleatoriedade, influenciando na análise de informações probabilísticas. Como

exemplo, apresentamos a Figura 6.45, que traz na primeira questão uma situação que permeia as crenças quanto à segurança de dois meios de transporte (ônibus e avião).

Figura 6.45 - Exemplo de questão com o Elemento disposicional “Crenças”

1. Em sua opinião, o que é mais provável: um acidente de ônibus ou um acidente de avião? [Resposta pessoal](#).
2. Se você tem olhos castanhos, qual é a probabilidade de ter um filho também com olhos castanhos? [Orientações no Manual do Professor](#).

Fonte: Livro E, p. 87.

Sentimento ao risco: Nesse critério, as atividades relacionam-se com os sentimentos das pessoas em relação ao risco nos variados contextos. Dessa maneira, traz as dificuldades inerentes a uma decisão, assim como os riscos relacionados a elas, considerando os fatores psicológicos, sociais e culturais. Por exemplo, a atividade da Figura 6.46 propõe uma situação fictícia que estimula a análise de uma situação em que o risco de não ser aprovado em um curso online de idiomas é de 80%. Logo, cada estudante poderá tomar uma decisão diferente a partir desse risco de reprovação (continuar o curso do mesmo modo ou com maior dedicação; desistir do curso e começar outra atividade).

Figura 6.46 - Exemplo de questão com o Elemento disposicional “Sentimento em relação ao risco”

Exemplo

Você identificou que há uma probabilidade de 80% de não ser aprovado no seu curso on-line de idiomas, que é sem custo de mensalidade.

Você está com essa probabilidade levando em conta as notas baixas que tirou nas últimas avaliações e o pouco tempo de dedicação para estudos futuros.

Se isso acontecer, custará um tempo de sua rotina semanal de 3 horas – o curso exige presença virtual de 1,5 hora em dois dias da semana.

Assim, o valor de risco da sua reprovação no curso de idiomas é:

$$30 \text{ (probabilidade do evento)} \times 180 \text{ min (custo do evento)} = 144 \text{ min (valor do risco)}$$

Se o risco não for revertido ou amenizado, significa que há a possibilidade de aplicar 144 min da sua rotina semanal em uma atividade pouco aproveitável.

ESPELHOS

Suponha que esse curso de idiomas seja anual e que você ficou o 1º semestre. Com base nesse estudo de risco, que decisão você julgaria ser a melhor? Justifique.

- Aplicar-se totalmente aos estudos e reverter esse risco.
- Insistir no curso do mesmo modo e aceitando esse risco.
- Desistir do curso e fazer outra atividade em que você possa ser mais produtivo.

Comente e ouça os comentários dos colegas.

Fonte: Livro C, p. 90.

Elaboração do estudante: Como há nos livros didáticos questões que solicitam ao estudante a elaboração de uma situação, isso o deixa responsável por determinar um

evento que possa (ou não) estimular o posicionamento crítico. A situação descrita na Figura 6.47, relacionada ao contexto “Saúde”, discute a relação entre o uso de medicamentos e o gênero (homem ou mulher). Em seguida, os estudantes são convidados, partindo dessas informações, a criar uma situação-problema, que poderá ou não trazer Elementos disposicionais.

Figura 6.47 - Exemplo de questão com critério “Elaboração do estudante”

39. Leia as informações apresentadas a seguir.

Para pesquisar a eficácia de alguns medicamentos no tratamento de certa doença, foi realizado um teste em alguns voluntários acometidos por ela, conforme indicado na tabela.

» Quantidade de pessoas que se submeteram ao tratamento de certa doença, por tipo de medicamento e sexo

Medicamento \ Sexo	Masculino	Feminino
A	59	43
B	36	55
C	49	38
D	36	84

Fonte: Equipe de testes de um laboratório de farmacologia.

Com base nas informações apresentadas, elabore uma situação-problema relacionada ao cálculo de probabilidade condicional. Troque essa situação-problema com um colega para que ele a resolva, enquanto você resolve a que ele elaborou. Ao final, confirmem juntos as resoluções. *Resposta pessoal.*

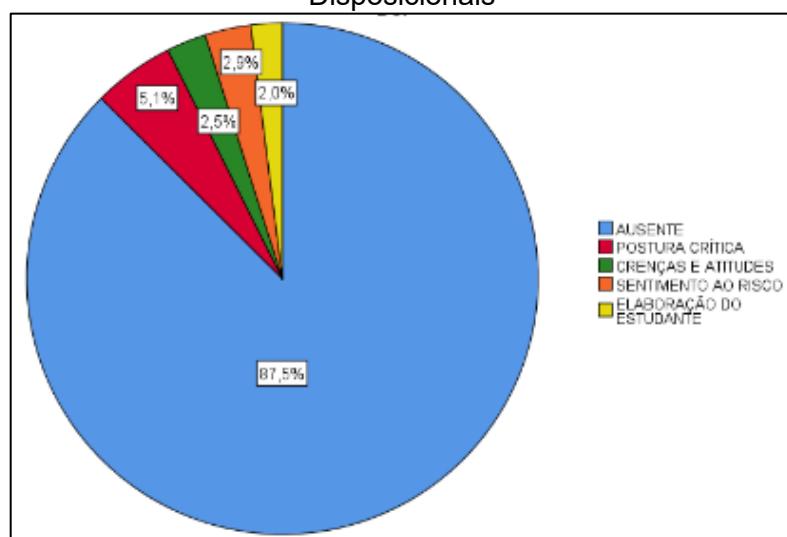
7,1%; rodada 3: $\frac{1}{10}$, 0,1 ou 10%

Unidade 3 • Probabilidade 121

Fonte: Livro F, p. 121.

Ponderando esses critérios, temos os seguintes resultados, sistematizados no Gráfico 6.2.

Gráfico 6.2 - Análise dos livros de Conhecimento Específico com relação à categoria “Disposicionais”



Podemos observar que os capítulos destinados ao conceito de Probabilidade nos livros didáticos de Conhecimento específico, mais precisamente nos 758 enunciados analisados, não estimulam o estudante a analisar criticamente nem a posicionar-se quanto aos dados probabilísticos apresentados, pois 87,5% não suscitam questionamentos críticos. Consequentemente, há a predominância apenas da habilidade de resolução de cálculo, a partir dos dados apresentados.

Além disso, ressaltamos o pequeno número de atividades que proporcionam essas discussões críticas, pois encontramos apenas 5,1% de atividades relacionadas à Postura crítica, 2,5% relacionadas a Crenças e atitudes dos estudantes e 2,9% que versam sobre o sentimento em relação ao risco.

Diante disso, ressaltamos que essa ausência de questionamentos que proporcionem o posicionamento crítico e reflexivo nas obras analisadas afeta diretamente o desenvolvimento do Letramento Probabilístico. Esse tipo de questão é essencial para estimular o poder argumentativo e reflexivo, e a carência dele pode colaborar para os estudantes absorverem informações sem questionar sua veracidade e sem saber o porquê daquela análise nem as implicações dos resultados. Uma formação “passiva” dos sujeitos no ambiente escolar pode resultar futuramente em cidadãos com dificuldades de analisar e de posicionar-se frente a situações complexas e, consequentemente, de decidir de maneira coerente e justa.

Dessa maneira, acreditamos que mudanças nos livros didáticos de Conhecimento Específico, da unidade temática “Probabilidade e Estatística” nas edições posteriores ao PNLD 2021 deveriam ocorrer, no sentido de abordar variados contextos, representações, visões da probabilidade e trabalhar com dados reais. Outrossim, que sejam propostas mais atividades que sugerem debates e rodas de conversa para explanação de opiniões e ideias, incentivando a autonomia e argumentação, compatibilizando, assim, com as proposições do Letramento Probabilístico.

6.2 LIVROS DOS PROJETOS INTEGRADORES “MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS”

Os Projetos Integradores consistem em componentes curriculares pautados no processo de ensino e aprendizagem de maneira interdisciplinar, integrado por meio de projetos contextualizados e práticos, que desenvolvem competências e habilidades de forma integrada.

Na área de Matemática e suas Tecnologias, esses projetos são desenvolvidos com base em quatro temas geradores, a saber: (1) *STEAM – Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics* (temas relacionados a Ciência, Tecnologia, Engenharia, Arte e Matemática, para resolver problemas do cotidiano); (2) *Protagonismo juvenil* (o estudante é o centro do processo de ensino e aprendizagem e deve ter a participação ativa em situações sociais e pessoais); (3) *Midiaeducação* (está associada ao desenvolvimento de habilidades digitais e midiáticas, entendendo como funciona e produzindo mídias de maneira criativa e reflexiva); e, por fim, (4) *Mediação de conflitos* (trata-se de o estudante encontrar caminhos para resolver e mediar conflitos individuais e com o próximo).

Com relação aos livros dos Projetos Integradores, esses foram inseridos pela primeira vez no ciclo do PNLD 2021 e são destinados a serem utilizados nos três anos do Ensino Médio, contemplando as competências gerais da Educação Básica e as competências específicas da área de “Matemática e suas Tecnologias”.

No referido PNLD, foram aprovadas 14 (quatorze) coleções⁸ didáticas passíveis de serem escolhidas pelas unidades escolares de todo o país. De forma geral, esses livros foram sistematizados em seis projetos associados aos temas norteadores, sendo cada projeto realizado por etapas.

Sendo assim, realizamos a análise de todas as etapas dos projetos, utilizando as mesmas categorias adotadas para os livros do Conhecimento Específico, considerando os Elementos do conhecimento e disposicionais propostos por Gal (2005), na intenção de perceber e analisar as possíveis ações a serem realizadas pelos estudantes envolvendo o conceito de Probabilidade.

⁸ Os livros serão descritos considerando a letra I de “Integradores” e a sua numeração indo de I₁ até I₁₄, para manter o anonimato.

Dentre as 14 (quatorze) obras analisadas, em apenas 9 (nove) identificamos questões que tratam de conceitos probabilísticos. Assim, foram identificados apenas 65 enunciados envolvendo probabilidade. Essa constatação é um aspecto relevante a ser pensado, por ser um número pequeno, diante da sua importância para a compreensão de fenômenos reais.

Na categoria “*Proposta da questão*”, analisamos novamente se o intuito do enunciado consistia na apresentação de uma resposta por parte do estudante (Figura 6.48) ou estimulava a elaboração de uma situação (Figura 6.49).

Figura 6.48 - Exemplo de questão de resolução nos livros dos Projetos Integradores

Vocês vão agora fazer uma análise de algumas situações envolvendo o lançamento de dado(s). Utilizem esses cálculos com outros números e imaginem as possíveis situações. Essas informações serão utilizadas para determinar o uso de um ou dois dados no jogo, além do número de casas do tabuleiro, como será visto a seguir.

- ① Qual é a probabilidade de sortear o número 5 (ou outro, de 1 a 6) em um dado de seis faces?
- ② No lançamento de um dado de seis faces, qual é a probabilidade de sair um número maior que 4?
- ③ No lançamento de dois dados de seis faces, qual é a probabilidade de sair a soma igual a 10?

Fonte: Livro I₅, p. 104.

A questão apresentada na Figura 6.48, apesar de estar nos livros dos Projetos Integradores, tem características idênticas às atividades propostas nos livros de conhecimento. Essa situação aborda o contexto dos Jogos de azar, com dados fictícios, ao propor a análise do lançamento de um dado de seis faces e esperar que o estudante, nas três questões seguintes, utilize uma representação numérica (decimal, fracionária ou percentual) para respondê-las.

A Figura 6.49 apresenta uma das raras questões que incentivam os estudantes a desenvolverem uma situação relacionada ao tema Mediação de conflitos, a qual sugere que o estudante tenha um diálogo com os colegas da classe, compreendendo seus argumentos para tomar uma decisão coerente, além de propor o uso de múltiplas representações para a exposição. Essa proposta é interessante, por estimular o estudante a posicionar-se, expondo seus argumentos para tomar decisão, propor uma discussão coletiva em sala de aula, incitando as habilidades de comunicação e capacidade criativa. Também mobiliza a competência específica 03 de Matemática presente na BNCC, que versa sobre “*Utilizar estratégias, conceitos, definições e*

procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos [...], de modo a construir argumentação consistente". Portanto, essa situação possibilita a correlação entre os Elementos do conhecimento e os disposicionais, propostos por Gal (2005).

Figura 6.49 - Exemplo de questão de elaboração nos livros dos Projetos Integradores



VAMOS REFLETIR!

A organização de dados em uma relação de conflitos, por meio de uma matriz ou de uma árvore de decisão, ajudaria a tomada de decisões ou a mediação? Selecione, com a ajuda de um colega, uma situação de conflito para um jovem da atualidade. Pratiquem a escuta ativa, com um de vocês apresentando argumentos com alternativas de tomada de decisão e o outro sistematizando os argumentos por meio das formas de representação estudadas (tabelas; matrizes; árvores de decisão), avaliando suas potencialidades e limitações. Em sala de aula apresentem e discutam, coletivamente, sobre suas descobertas.

Fonte: Livro I₁, p.125, grifo nosso.

A Tabela 6.8 traz os resultados das atividades nas coleções analisadas.

Tabela 6.8 - Proposta da questão nos livros de Projetos Integradores

Proposta da questão - Livros de Projetos Integradores		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Resolução	61	93,8
Elaboração	4	6,2
TOTAL	65	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os resultados expostos na Tabela 6.8, observamos que, apesar de esses livros trazerem uma organização metodológica diferente dos livros de conhecimento, as questões também primam majoritariamente pela resolução de situações associadas à probabilidade, com um foco determinista, não dialogando com o intuito dos Projetos Integradores. Todavia, observamos a ausência de questões que exijam apenas marcar uma alternativa, diferenciando essas obras dos livros de conhecimento específico.

Nesse contexto, ressaltamos a necessidade de maior inserção de situações, como a apresentada na Figura 6.49, que propiciem a arguição e a criticidade dos estudantes, cooperando no desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Na categoria “*Dados*”, verificamos se havia dados numéricos, se a atividade solicitava que os estudantes criassem (*Elaboração do estudante*), se abordava dados coletados de eventos reais (*Dados autênticos/reais*) ou dados criados/simulados (*Dados fictícios*).

A Figura 6.50 apresenta três questões no contexto dos Jogos de azar que estimulam o estudante a analisar as regras de um jogo, questionando sobre a equiprobabilidade dos resultados. Dessa forma, para a sua resolução, o estudante precisará mobilizar os Elementos dispositionais “Postura crítica” e “Crenças e atitudes” para posicionar-se, e não há explicitamente a necessidade de fazer uso de dados numéricos, justificando assim a ausência desses dados.

Figura 6.50 - Exemplo de questão com ausência de dados numéricos nos livros de Projetos Integradores

- 3. Se as regras do jogo fossem mudadas de modo que o segundo jogador vencesse quando o maior valor sorteado fosse 1 ou 3, o jogo seria vantajoso para qual jogador?
- 4. Que modificação deveria ser feita nas regras do jogo para que ele seja justo?
- 5. Como você se sente, como jogador, quando tem certeza de que o jogo do qual está participando é justo? No caso de não ser justo, que atitudes seriam mais sensatas para serem adotadas pelos participantes?

Disponível em: m3.ime.unicamp.br/media/software/1237/introducao.html (adaptado).
Acesso em: 16 dez. 2019.

Fonte: Livro I₁, p.123.

A atividade da Figura 6.51 propõe a realização de uma pesquisa em grupo sobre a origem dos estudos de Probabilidade e a criação de um jogo, estabelecendo sua metodologia e regras. Durante esse processo, são propostas algumas questões reflexivas quanto ao protótipo, pautadas nas crenças e atitudes dos estudantes.

Figura 6.51 - Exemplo de questão com os dados numéricos a critério do estudante, nos livros de Projetos Integradores

ATIVIDADE 5

Recursos didáticos

- Material de papelaria e de sucata
- Computadores, tablets ou notebooks com acesso à internet
- Dados, baralho, moedas etc.

Desenvolvimento

Para esta atividade, reúna-se com três colegas para pesquisar a origem dos estudos sobre probabilidade. Com base nas informações coletadas, elaborem um jogo que envolva probabilidade, determinem e escrevam suas regras, o número de jogadores, como se joga e criem um modelo para jogar em sala de aula.

Avaliação

Com seu colegas de grupo, reflita sobre o desempenho de vocês durante as atividades desta etapa, especialmente sobre estas questões: Surgiram conflitos durante os jogos? Como vocês os resolveram? Você pararam para pensar se os argumentos da discussão eram válidos ou baseados apenas na vontade de ganhar? Como vocês se sentiram ao ganhar/perder os jogos? Há atitudes que precisam ser melhoradas? Quais? Como vocês pretendem melhorá-las? Avalie seu desempenho durante esta etapa, você considera mudar algumas atitudes? Quais?

Fonte: Livro I₇, p.111.

A situação da Figura 6.52 está associada ao tema gerador “Mediação de conflitos” e à habilidade EM13MAT312 da BNCC, que propõe a elaboração e resolução de problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. Propõe o lançamento de discos com diâmetros diferentes. Dessa forma, articula os dados coletados com as indagações que podem ser feitas pelo professor, podendo contribuir para a compreensão da Probabilidade frequentista (analisando os lançamentos realizados), fazer uso de variadas representações (Numérica, Tabular, Língua natural oral), além de estimular a criticidade dos estudantes.

Figura 6.52 - Exemplo de questão com dados autênticos/reais, nos livros de Projetos Integradores

Exemplos de jogadas:

Posição favorável ao jogador	Posição favorável à escola

Primeiro, você e seus colegas devem tentar descobrir, experimentando, qual é o melhor diâmetro do disco para que o jogo seja favorável à escola. Portanto, cada grupo deve lançar cada um dos discos 10 vezes, de forma que ele repouse sobre a folha quadriculada. Os resultados das vinte jogadas devem ser anotados na tabela. A porcentagem deve ser calculada em relação ao total de arremessos.

Quando todos concluírem a atividade, reúnam-se em uma grande conversa para que cada grupo divulgue os resultados obtidos. Escolham um coordenador para reunir os dados no quadro da sala.

Observem se as conclusões dos grupos foram diferentes e justifiquem o porquê.

A partir dos dados, cada grupo volta a reunir para encontrar uma estratégia matemática que explique os resultados obtidos. Por exemplo, se todos os grupos aumentarem o número de lançamentos, os resultados tenderão a se aproximar? As estratégias devem ser anotadas para ser compartilhadas com o resto da turma.

Fonte: Livro I₇, p. 111.

A situação apresentada na Figura 6.53 faz uso de um experimento fictício, no contexto dos Jogos de azar, ao propor lançar duas vezes um dado viciado e observar os resultados da face superior para determinar a probabilidade de dois eventos.

Figura 6.53 - Exemplo de situação com dados fictícios nos livros de Projetos Integradores

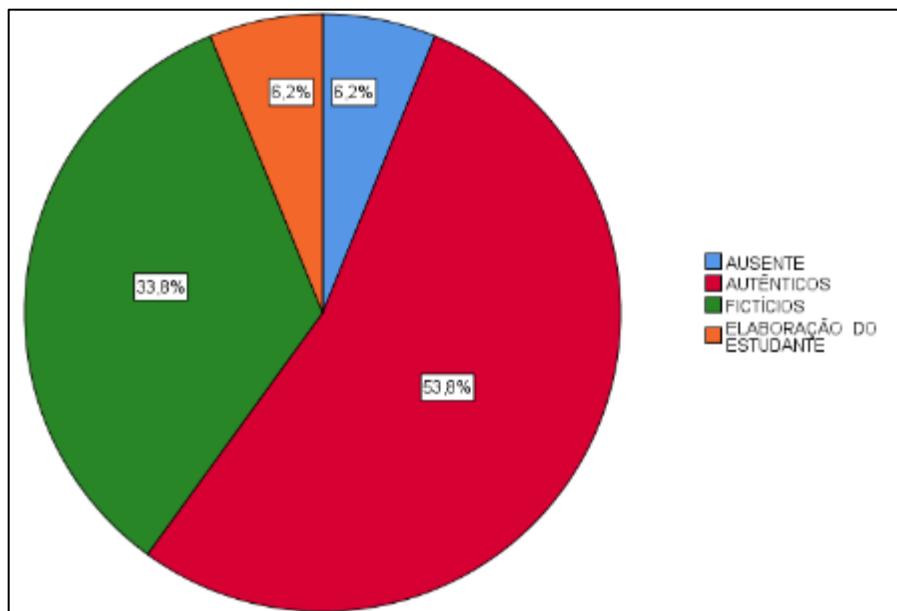
Determine Ω do experimento: lançar um mesmo dado viciado duas vezes seguidas e observar o resultado da face superior. Depois, indique $n(\Omega)$. Registre no campo do navegador.

- Determine o evento E_1 , “faces com números iguais nos dois lançamentos”.
- Determine o evento E_2 , “a soma dos dois resultados é nove”.

Fonte: Livro I₁₄, p. 157.

Ponderando esses aspectos, sistematizamos os resultados referentes a essa categoria no Gráfico 6.3.

Gráfico 6.3 - Tipo de dados propostos nos livros de Projetos Integradores



Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando o Gráfico 6.3, nos deparamos com um fator relevante e motivador. Dentre as 65 questões que abordam conceitos de Probabilidade nos livros de Projetos Integradores, 35 delas (53,8%) fazem uso de dados numéricos autênticos, 22 (33,8%) apresentam dados fictícios, 4 (6,2%) não apresentam dados numéricos e 4 (6,2%) deixam o estudante responsável por elaborar os dados. Esse resultado exemplifica a diferença entre a proposta dos livros de conhecimento e a dos livros dos Projetos Integradores. Enquanto o primeiro tipo de livro tem maior enfoque em situações com dados fictícios, os livros de Projetos Integradores de Matemática fazem mais uso de dados reais.

A presença de um maior número de situações com dados autênticos/reais é positiva, ao possibilitar aos estudantes visualizarem a aplicação prática desses conceitos em situações reais, podendo envolver variados contextos e integrar outras áreas de conhecimento. Com base nisso, reiteramos a relevância de os livros didáticos trazerem atividades com dados reais de Probabilidade, proporcionando uma interação entre os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais (crenças e atitude crítica). Assim, a interação entre esses elementos pode contribuir para o Letramento Probabilístico dos estudantes.

Na categoria “*Contexto*”, averiguamos os contextos intrínsecos a cada enunciado das atividades relativas à Probabilidade, subcategorizados como nos livros de Conhecimento Específico. Na primeira subcategoria “*Contexto elaborado pelo estudante*” analisamos as 4 (quatro) atividades que se referem ao tipo de contexto elaborado pelo estudante: livre ou determinado.

Contexto livre: Esse tipo de questão permite ao estudante elaborar um evento, assim como o livre-arbítrio para escolher o contexto. A Figura 6.54 traz a única questão com contexto livre identificada nos livros de Projetos Integradores. Ela estimula a criação, em duplas, de uma situação de conflito para os jovens da atualidade e propõe que os estudantes escutem os argumentos dos colegas de classe para a tomada de decisão.

Figura 6.54 - Exemplo de questão com “Contexto livre” nos livros de Projetos Integradores

VAMOS REFLETIR!

A organização de dados em uma relação de conflitos, por meio de uma matriz ou de uma árvore de decisão, ajudaria a tomada de decisões ou a mediação? Selecione, com a ajuda de um colega, uma situação de conflito para um jovem da atualidade. Praticuem a escuta ativa, com um de vocês apresentando argumentos com alternativas de tomada de decisão e o outro sistematizando os argumentos por meio das formas de representação estudadas (tabelas; matrizes; árvores de decisão), avaliando suas potencialidades e limitações. Em sala de aula apresentem e discutam, coletivamente, sobre suas descobertas.

Orientações na página 268.

Fonte: Livro I₁, p. 125, grifo nosso.

Contexto determinado: A questão propõe a criação de um fenômeno, a partir de um contexto determinado ou dados específicos. A Figura 6.55 apresenta uma das 3 (três) questões identificadas nas obras. Ela sugere a um grupo com quatro estudantes realizarem uma pesquisa sobre a origem do conceito de Probabilidade e, na sequência, elaborarem um jogo que envolva esse conceito. A atividade está associada, assim, ao contexto “Jogos de azar”.

Figura 6.55 - Exemplo de questão com “Contexto determinado” nos livros de Projetos Integradores

Desenvolvimento

Para esta atividade, reúna-se com três colegas para pesquisar a origem dos estudos sobre probabilidade. Com base nas informações coletadas, elaborem um jogo que envolva probabilidade, determinem e escrevam suas regras, o número de jogadores, como se joga e criem um modelo para jogar em sala de aula.

Fonte: Livro I₇, p. 111.

A segunda subcategoria “*Contexto presente no enunciado da questão*” consiste em analisar os contextos que estão inseridos nas questões de Probabilidade cuja resolução é solicitada ao estudante. Para a análise dessa subcategoria, utilizamos a mesma categorização da análise dos livros de Conhecimento: Sem contexto; Ambiental; Tecnológico; Social; Saúde; Financeiro; Política pública; Jogos de azar; Múltiplos contextos.

Atividades no contexto ambiental e físico discutem e analisam eventos incertos relacionados ao meio ambiente e aos fenômenos físicos (Figura 6.56).

Figura 6.56 - Exemplo de questão no contexto “Ambiental”, nos livros de Projetos Integradores

ATIVIDADES

- Na planilha da página anterior, há uma série de itens ou fatores, nem todos com a mesma importância para o plantio do arroz. Vamos entender essa planilha. Para isso, em grupo, sigam as orientações a seguir.
 - Elaborem um diagrama de pizza para representar os custos da produção de arroz.
 - Qual fator ou fatores têm maior participação/peso no custo do arroz?
 - Com os dados da tabela, calculem a produtividade do arroz por hectare de terra.
 - Quais fatores da planilha estão sujeitos a incertezas? Façam uma lista e, em seguida, crie um cenário superotimista e outro superpessimista. Qual seria o lucro do produtor em cada cenário?
 - Façam uma estimativa de risco para a plantação de arroz. Crie uma lista ordenando os itens de maior peso no custo. Para cada um deles, imaginem um cenário em que o item ocorre. Então, para esse cenário, estimem a probabilidade de ele ocorrer das seguintes formas: remota, improvável, ocasional, provável e frequente. Atribuam um valor associado à probabilidade relativa (ver página 127). Insiram as informações numa tabela como a do exemplo abaixo e faça uma representação de risco. Pode ser na forma de uma tabela (como a do exemplo a seguir), um mapa ou de outra forma.

PROBABILIDADE RELATIVA	REMOTA	IMPROVÁVEL	OCASIONAL	PROVÁVEL	FREQUENTE	TOTAL (%)
fertilizante	1	3	5	7	9	16,99%

Fonte: Livro I₁₂, p. 134.

A atividade da Figura 6.56 discorre sobre a produção agrícola de arroz e os riscos climáticos inerentes ao cultivo desse produto. Ressaltamos como um ponto interessante da atividade o fato de propor a relação entre variadas representações, visto que o estudante precisará realizar a construção de um gráfico de pizza na primeira alternativa, utilizar a língua natural escrita e a representação numérica, e por fim, construir uma tabela relacionando a Probabilidade relativa com termos usados para informar situações probabilísticas (provável e improvável). Além disso, ao promover essa reflexão em grupo, a questão colabora com o posicionamento e a reflexão crítica dos estudantes.

Situações de Probabilidade que versam sobre o contexto de saúde relacionam os conceitos probabilísticos com a análise de situações biológicas e de saúde humana, assim como os riscos envolvidos nas situações. A atividade da Figura 6.57 discute os riscos de uma mulher engravidar no primeiro ano de uso de variados métodos contraceptivos e compara os resultados percentuais entre as mulheres que

usam o método corretamente (uso ideal) e as que engravidam utilizando aquele método. Essa atividade pode ser adotada pelo professor, por exemplo, como mote para discutir questões de saúde atreladas à educação sexual.

Figura 6.57 - Exemplo de questão no contexto “Saúde”, nos livros de Projetos Integradores

MULHERES QUE ENGRAVIDAM NO PRIMEIRO ANO DE USO (%)		
	Uso típico	Uso ideal
Nenhum	85	85
Coito interrompido	27	4
Diaphragma	16	6
Preservativo feminino	21	5
Preservativo masculino	15	2
Anticoncepcional oral	8	0,3
DIU de cobre	0,8	0,6
Laqueadura	0,5	0,5
Vasectomia	0,1	0,1

Informações obtidas em: STRAUSS, Jerome F.; BARBIERI, Robert, Yen and Jaffe's Reproductive Endocrinology: Physiology, Pathophysiology, and Clinical Management. 7th ed. Philadelphia, PA: Elsevier Inc., 2014.

 Não escreva no livro.

 Observando apenas o uso ideal, o anticoncepcional oral é um método eficaz para prevenir a gravidez? Observando apenas o uso ideal, sim; por 0,3% de probabilidade de engravidar ser ainda menor do que a probabilidade apresentada pela laqueadura, de 0,5%.

Fonte: Livro I₁₀, p. 199.

As questões no contexto dos Jogos de azar fazem menção a dados reais ou fictícios associados às chances relativas à aleatoriedade do jogo. Por exemplo, a atividade da Figura 6.58 está relacionada à habilidade EM13MAT311, que orienta um ensino que possibilite ao estudante identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios. A questão estimula os estudantes a compreenderem como o fator sorte (no sorteio de cartas de baralho ou lançamento de dados, por exemplo) interfere nos resultados, dada a incerteza e a aleatoriedade que são inerentes ao contexto apresentado. Apesar de questões como essa estarem pautadas nos Jogos de azar, algumas delas trazem elementos que estimulam o trabalho em grupo para confeccionar os jogos, coletar os dados, fazer os cálculos probabilísticos das situações e refletir individualmente/coletivamente com os colegas de classe.

Figura 6.58 - Exemplo de questão no contexto “Jogos de azar”, nos livros de Projetos Integradores

PORTFÓLIO

Retome os protótipos de jogo que você construiu nas etapas anteriores. Algum jogo tem o fator sorte? Considerando o que você estudou de jogos de azar, gostaria de incluir o fator sorte em alguns jogos? Se sim, descreva como será essa inclusão (lançamento de dados, sorteio de cartas ou outros) e faça alguns testes para verificar se o fator sorte funciona ou não. Nos testes, você pode utilizar elementos de sorte diferentes em uma mesma jogada e observar qual trará os melhores resultados pensando nos objetivos do jogo. Você também deve fazer os testes com públicos diferentes, assim obterá informações mais globais.

Se você decidir manter o fator sorte no jogo, registre qual será a influência dele durante a partida.

40

(C0, V1); (C0, V2); (C0, V3); (C0, V4); (C1, V0); (C1, V1); (C1, V2); (C1, V3); (C1, V4); (C2, V0); (C2, V1); (C2, V2); (C2, V3); (C2, V4); (C3, V0); (C3, V1); (C3, V2); (C3, V3); (C3, V4); (C4, V0); (C4, V1); (C4, V2); (C4, V3); (C4, V4).

Fonte: Livro I₁₁, p. 40.

Nesse viés, apresentamos a seguir os contextos dos enunciados de atividades que envolvem Probabilidade (Tabela 6.9), nas obras de Projetos Integradores.

Tabela 6.9 - Tipos de Contexto nos livros de Projetos Integradores

Contexto presente no enunciado da questão – Livros de Projetos Integradores		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Ambiental	12	19,7
Saúde	3	4,9
Jogos de azar	46	75,4
TOTAL	61	100

Fonte: Dados da pesquisa.

Observando os dados da Tabela 6.9, constatamos a presença de apenas 03 (três) contextos nas questões relacionadas à Probabilidade, sendo 75,4% atreladas aos jogos de azar. Dessa forma, assim como constatamos nos livros de conhecimento, mantém-se também nos livros de Projetos Integradores o predomínio de atividades que focalizam os jogos de azar. O contexto ambiental (19,7%) e de saúde (4,9%), apesar de importantes para a sociedade, são explorados em poucas atividades. Esses resultados nos permitem afirmar que os livros didáticos de Projetos Integradores apresentam pontos lacunares em relação ao contexto, não contribuindo efetivamente para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, já que propõem principalmente situações de jogos de azar, as quais não estimulam um posicionamento crítico frente a dados probabilísticos, além de não trazerem contextos autênticos que promovam aos estudantes a compreensão da realidade.

A quarta categoria, “Pesquisa Estatística”, consiste nas questões que incentivam a coleta e interpretação dos dados, possibilitando a realização de previsões ou generalizações. Para a análise, recategorizamos essa categoria em duas subcategorias: interpretação ou elaboração da pesquisa.

Interpretação da pesquisa: Nessa subcategoria, as questões solicitam que os estudantes analisem as informações apresentadas pela pesquisa e respondam sobre a chance de ocorrer determinada situação. O enunciado apresentado na Figura 6.59 solicita a interpretação sobre a quantidade de agrotóxicos comercializados no intervalo de oito anos (2007 a 2014).

Figura 6.59 - Exemplo de questão de interpretação de uma “Pesquisa Estatística”, nos livros de Projetos Integradores

Com base nos dados obtidos na pesquisa da atividade anterior, discuta com os colegas de turma se a linha de tendência obtida no **item c** da **atividade 8** se manteria ascendente com a inclusão desses novos dados. *Resposta de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.*

Fonte: Livro A, p. 141.

Elaboração de uma situação/pesquisa: Nessa subcategoria, os estudantes são incitados a elaborar uma proposta de pesquisa que envolva a utilização de métodos estatísticos para coletar, estudar e analisar dados. Como exemplo, a questão da Figura 6.60 sugere que os estudantes pesquisem sobre os dados relativos à quantidade de agrotóxicos comercializados no Brasil desde 2015 e façam uma comparação com as estimativas feitas pelos próprios estudantes anteriormente. Nesse caso, a probabilidade pode ser usada para representar numericamente a incerteza associada às conjecturas.

Figura 6.60 - Exemplo de questão com elaboração de pesquisa no contexto “Pesquisa Estatística”, nos livros de Projetos Integradores

Pesquise dados recentes sobre a quantidade de agrotóxicos comercializados e compare com as estimativas que fez na atividade anterior. As estimativas se aproximaram dos dados reais?

Fonte: Livro I₁₀, p. 51.

Só foram encontradas 6 (seis) atividades referentes à Pesquisa Estatística nas coleções dos livros de Projetos Integradores, sendo 3 (três) para resolução e 3 (três)

para elaboração pelo estudante. Todas essas questões estão na mesma obra (I_{10}) e se associam ao contexto ambiental.

Essa pequena quantidade de questões dessa categoria se configura como uma lacuna no desenvolvimento do Letramento Probabilístico, por não incentivar os estudantes a desenvolverem investigações em contextos autênticos da sua realidade. Sendo assim, não lhes permite associar os conceitos teóricos com a prática, nem analisar uma base de dados e refletir sobre ela.

Na categoria “Significados”, as questões foram organizadas em: Intuitivo, Clássico, Frequentista, Subjetivo e Axiomático.

A questão apresentada na Figura 6.61 leva o estudante a ser responsável por determinar o tipo de Probabilidade do caso que por ele será criado. Partindo do jogo “pedra, papel e tesoura”, são propostos questionamentos que partem da intuição de cada sujeito e, consequentemente, de suas crenças e sentimentos quanto às suas possibilidades de vencer, sem necessariamente ter utilizado a representação numérica. Intuitivamente, nesse evento, ganhar, perder ou empatar dependerá, exclusivamente, da estratégia adotada por cada jogador, seja ela jogar aleatoriamente ou tentar identificar o padrão seguido pelo adversário nas jogadas anteriores.

Figura 6.61 - Exemplo de questão Intuitiva nos livros de Projetos Integradores

no outro. Ainda que, eventualmente, eu seja um papel, ele uma tesoura e ela uma pedra! Pare para pensar:

1. As circunstâncias da vida em algumas fases demonstram que estamos em estado de mudança constante - chamamos isso de amadurecimento. Você concorda?
2. Como você se sentiu quando ganhou uma rodada no jogo?
3. E como se sentiu quando empatau?
4. E quando perdeu?
5. Esses sentimentos nos acompanham nas situações que são conflituosas para nós e precisamos aprender a lidar com eles. Pense sobre isso e represente cada situação com um desenho, frase ou palavra.

Fonte: Livro I_1 , p. 120.

A Figura 6.62 apresenta uma situação com significado “Clássico”. Essa questão está pautada no contexto dos jogos de azar e refere-se a uma situação de um baralho padrão, que tem 52 cartas, divididas em quatro naipes, fazendo com que cada naipe tenha 13 cartas. Sendo assim, trata-se de um evento equiprovável, com espaço amostral bem definido e todas as cartas com a mesma chance de ser sorteada. Logo, esse tipo de questão está pautado na visão clássica de Probabilidade.

Figura 6.62 - Exemplo de questão com significado Clássico nos livros de Projetos Integradores

Após a finalização do jogo, responda às seguintes questões:

a) Quantos pontos (independentemente do time) podem ser marcados para cada uma das cartas comando que constam da tabela abaixo?

Carta comando	Pontos
Valete de qualquer naipe	1
Dama de copas	2
Carta numérica com múltiplo de 3	3
Figura (valete, dama ou rei) de qualquer naipe	4
Ás de paus	5
Carta numérica de qualquer naipe	6
Carta de espadas	7
Carta vermelha	8
Rei de ouros	9
Dama vermelha	10

b) Como foram entregues 26 cartas para cada time, podemos dizer que eles têm a mesma chance de ganhar? Justifique.

c) Se você receber um baralho completo de 52 cartas, determine a probabilidade de, aleatoriamente, retirar desse baralho:

Fonte: Livro I₇, p. 109.

A Figura 6.63 apresenta uma questão que contempla a concepção Frequentista de Probabilidade. Ela propõe que os estudantes se reúnem em duplas e expressem inicialmente a sua hipótese sobre quem será o vencedor. Após essa ação, ambos os jogadores deverão lançar o dado vinte vezes, anotar na tabela o número da face do dado voltada para cima, realizar a soma dos resultados e, por fim, verificar qual jogador marcará ponto na rodada.

Essa questão está associada à habilidade EM13MAT511, ao propor a análise de um evento não equiprovável (soma dos resultados da face dos dados), além de permitir a construção do espaço amostral, verificar as implicações no cálculo de probabilidades e analisar as chances de cada jogador. Nesse viés, o professor pode instigar a observação e a relação entre a Probabilidade Frequentista (considerando a frequência da repetição dos lançamentos) e a Probabilidade Clássica (ponderando os resultados possíveis), levando os estudantes a perceberem a proximidade dos resultados nas duas visões, convergindo para a familiarização com as várias maneiras de determinar a probabilidade de eventos.

Figura 6.63 - Exemplo de questão com significado Frequentista nos livros de Projetos Integradores

- Lancem os dois dados, simultaneamente. O primeiro jogador vence se a soma das duas faces for par e o segundo, se a soma for ímpar. Antes de iniciar o jogo, cada estudante da dupla deverá registrar a sua hipótese sobre qual jogador tem mais chance de vencer.
- Após o registro, cada dupla deverá lançar os dois dados **20 vezes** e anotar os resultados em um quadro como o seguinte.

Partida nº	Resultado do dado		Soma dos resultados	Jogador que marcou ponto	
	Dado 1	Dado 2		Jogador 1	Jogador 2
1					
2					
3					
...					
19					
20					

FICHA 1 – FREQUÊNCIA DE CADA SOMA					
Soma 2	Soma 3	Soma 4	...	Soma 11	Soma 12

FICHA 2 – FREQUÊNCIA DE VITÓRIA POR JOGADOR	
Jogador 1	Jogador 2

Fonte: Livro I₄, p. 120, grifo nosso.

A visão Subjetiva da Probabilidade está exemplificada na Figura 6.64. A questão apresenta temática pertinente à faixa etária dos estudantes do Ensino Médio, apresentando o censo do IBGE-2022. Contudo, a ideia de risco associada à probabilidade de um jovem negro ser assassinado irá variar, a depender da classe social dos estudantes, da região em que residem, o que traz um caráter subjetivo para o fator “risco”.

Ressaltamos a importância de discussões como a proposta nessa atividade, que relaciona variados contextos (Social, Políticas públicas), faz uso de dados reais e possibilita aos estudantes posicionarem-se reflexiva e criticamente quanto às questões que se apresentam em nossa sociedade. Nesse aspecto, o desenvolvimento do Letramento Probabilístico poderá auxiliar os estudantes a explanarem suas ideias e a tomarem decisões coerentes quanto a essa temática.

Figura 6.64 - Exemplo de questão Subjetiva nos livros de Projetos Integradores

HORA DA CONVERSA

» Com base na ideia de risco associada à probabilidade de ocorrência de um evento, discuta com seus colegas o significado de "correr mais risco" na frase:

"Jovens negras correm mais risco de serem assassinadas que as jovens brancas na mesma faixa etária."

Sugestão: procurem elaborar suas hipóteses e sustentar seus argumentos utilizando dados sociais e populacionais, notícias ou filmes de que vocês se lembram. Considerem utilizar também outras discussões das quais vocês já participaram. Em seguida, reflitam sobre como associar a noção de probabilidade a esses elementos. As informações do texto a seguir podem auxiliar na discussão.

Fonte: Livro I₉, p.107.

Assim como nos livros de conhecimento da unidade temática “Probabilidade e Estatística”, nos livros dos Projetos Integradores de Matemática e suas Tecnologias também há o predomínio da visão Clássica da Probabilidade, como mostra a Tabela 6.10. Contudo, podemos visualizar uma proximidade entre o significado Clássico (47,7%) e Frequentista (41,5%).

Concordamos com Moraes (2017) e Coutinho (2019), quando defendem que é necessária a articulação entre a visão Frequentista e a Clássica para o aumento do Letramento Probabilístico. Logo, avaliamos essa frequência próxima de atividades como um ponto positivo das obras de Projetos Integradores.

Tabela 6.10 - Análise dos livros de Projetos Integradores com relação à categoria “Significados”

Significados – Livros Projetos Integradores		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Critério do estudante	1	1,5
Intuitivo	1	1,5
Clássico	31	47,7
Frequentista	27	41,6
Subjetivo	5	7,7
TOTAL	65	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Todavia, identificamos como um ponto a ser repensado a ínfima quantidade de questões que trazem o viés Subjetivo da Probabilidade, articulando os Elementos do conhecimento e os disposicionais. Reiteramos que essa interação é primordial para

compreendermos, questionarmos e, se for o caso, refutarmos informações probabilísticas em nosso cotidiano.

Na quinta categoria, “*Representações*”, identificamos dois subtipos de representações: aquelas inerentes à proposta da atividade (Representação da questão); e aquelas mobilizadas pelos estudantes para criar, elaborar ou resolver as questões (Representação solicitada para o estudante).

Figura 6.65 - Exemplo de representação da questão nos livros de Projetos Integradores

- Considerando o tempo que vai durar a resolução de cada conflito (uma rodada) e os números que podem ser obtidos na jogada de um ou dois dados (por meio do cálculo das probabilidades), definam o número de casas que vão compor o tabuleiro.
- Conversem e reflitam se é necessário estipular o tempo limite de resolução de cada conflito.

Fonte: Livro I₅ p. 105.

A Figura 6.65 apresenta uma atividade que consiste no estabelecimento de regras pertinentes ao jogo elaborado pelos estudantes, que precisam definir o número de casas que constará no jogo, assim como a pontuação máxima que poderá ser obtida, dadas as probabilidades inerentes a cada número no lançamento de um ou dois dados. Caso os estudantes optem por um dado, será uma situação equiprovável e todos os participantes terão a mesma chance. Porém, se utilizarem dois dados e considerarem a soma maior que determinado número, as chances de vencer serão diferentes.

Com relação à subcategoria “*Representação da questão*”, identificamos que todas as questões dos livros de Projetos Integradores (65) que versam sobre o conceito de Probabilidade estão associadas à representação na Língua natural escrita. Acreditamos que isso pode ser um empecilho para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, pela ausência de outras representações (Gráfica, Tabular e Diagrama) que estimulem o estudante a analisar os dados. Além disso, muitas informações probabilísticas expressas no cotidiano fazem uso dessas representações, porém não foram exploradas nesses livros.

Trazendo o foco para as “*Representações solicitada para o estudante*” (Tabela 6.11), observamos uma maior variedade de representações, se compararmos com as representações da questão.

Figura 6.66 - Exemplos de representação numérica e tabular do estudante, nos livros de Projetos Integradores

c) Em uma urna há 9 bolas idênticas na forma e no material da qual são feitas. Diferem apenas em cores: 5 azuis e 4 brancas. Foram retiradas, uma a uma, duas bolas da urna, uma após a outra, sem reposição. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas azuis?

Fonte: Livro I₁₄, p.165.

Após a finalização do jogo, responda às seguintes questões:

a) Quantos pontos (independente mente do time) podem ser marcados para cada uma das cartas comando que constam da tabela abaixo?

Carta comando	Pontos
Valete de qualquer naipe	[]
Dama de copas	[]
Carta numérica com múltiplo de 3	[]
Figura (valete, dama ou rei) de qualquer naipe	[]
Ás de paus	[]
Carta numérica de qualquer naipe	[]
Carta de espadas	[]
Carta vermelha	[]
Rei de ouros	[]
Dama vermelha	[]

b) Como foram entregues 26 cartas para cada time, podemos dizer que eles têm a mesma chance de ganhar? Justifique.

c) Se você receber um baralho completo de 52 cartas, determine a probabilidade de, aleatoriamente, retirar desse baralho:

Fonte: Livro I₇, p. 109.

Apesar de utilizar representações diferentes, ambas as questões são equiprováveis e estão atreladas ao sorteio de objetos. A proposta da questão do livro I₁₄ propõe que o estudante utilize a representação numérica para determinar a probabilidade de serem retiradas duas bolas azuis de uma urna. Assim, o estudante poderá apropriar-se da representação fracionária, percentual ou decimal para responder a essa questão. Já a questão proposta no livro I₇ requer o preenchimento da tabela (representação tabular), ponderando os pontos de um jogo que envolve a soma da pontuação ao serem sorteadas dez cartas de baralho.

Figura 6.67 - Exemplos de representação gráfica e Língua natural oral do estudante, nos livros de Projetos Integradores

Com base nas considerações da questão 4, trace uma reta no gráfico que você elaborou na questão 3 que ajuste melhor os pontos marcados.

Fonte: Livro I₁₂, p. 161.

e) conversem com outra dupla e comparem todos os resultados desta atividade.

Fonte: Livro I₄, p. 121.

A questão do livro I₁₂ está associada ao contexto Ambiental e estimula a utilização da representação gráfica para apresentar a variabilidade de temperatura dos últimos 30 anos da região em que o estudante reside. Já o exemplo do livro I₄ estimula a utilização da representação na Língua natural oral, bem como a reflexão entre as duplas com relação ao lançamento de dois dados 20 vezes. Essa situação é interessante por propor a interação entre os estudantes e estimular a comparação entre os resultados das Probabilidades Clássica e Frequentista. Essa comparação é fundamental para a compreensão do conceito de Probabilidade, como ressaltam Coutinho e Figueiredo (2020), Silva (2023) e Vasconcelos e Rocha (2023).

Figura 6.68 - Exemplo de representação solicitada para o estudante na Língua natural escrita, nos livros de Projetos Integradores

Um anúncio foi publicado em uma rede social frequentada por jovens do Ensino Médio.

PROJETO EMPREENDA

Procuram-se jovens estudantes de Ensino Médio.
Equipe a ser formada com 4 participantes.
Interessados, deixem comentário abaixo.

- O que é mais provável: que essa equipe seja composta por dois casais ou por três estudantes de um sexo e um de outro?

Fonte: Livro I₁₄, p.165.

A questão apresentada na Figura 6.68, por meio de uma situação fictícia, no contexto Social, questiona o que é mais provável de acontecer em relação à possível formação de uma equipe composta por quatro pessoas. Para a sua resolução, espera-se que o estudante, fazendo uso de suas crenças e concepções, utilize a representação Língua natural escrita para explanar sua resposta.

Figura 6.69 - Exemplo de enunciado elaborado pelo estudante

Desenvolvimento

Para esta atividade, reúna-se com três colegas para pesquisar a origem dos estudos sobre probabilidade. Com base nas informações coletadas, elaborem um jogo que envolva probabilidade, determinem e escrevam suas regras, o número de jogadores, como se joga e criem um modelo para jogar em sala de aula.

● Avaliação

Com seu colegas de grupo, reflita sobre o desempenho de vocês durante as atividades desta etapa, especialmente sobre estas questões: Surgiram conflitos durante os jogos? Como vocês os resolveram? Vocês pararam para pensar se os argumentos da discussão eram válidos ou baseados apenas na vontade de ganhar? Como vocês se sentiram ao ganhar/perder os jogos? Há atitudes que precisam ser melhoradas? Quais? Como vocês pretendem melhorá-las? Avalie seu desempenho durante esta etapa, você considera mudar algumas atitudes? Quais?

Fonte: Livro I₇, p. 111.

Nessa questão, como os próprios estudantes serão os responsáveis por elaborar um jogo que envolve Probabilidade, a representação fica a seu critério. Sendo assim, pode haver o uso da representação na Língua natural escrita, tabular, gráfica, diagrama ou numérica, assim como o uso de múltiplas representações.

Figura 6.70 – Exemplo de “Múltiplas representações”

RESULTADOS DO JOGO DO MÁXIMO

PARTIDA 1	NUMEROS SORTEADOS	GANHADOR	PARTIDA 2	NUMEROS SORTEADOS	GANHADOR
1 ^a RODADA	-----	-----	1 ^a RODADA	-----	-----
2 ^a RODADA	-----	-----	2 ^a RODADA	-----	-----
3 ^a RODADA	-----	-----	3 ^a RODADA	-----	-----
4 ^a RODADA	-----	-----	4 ^a RODADA	-----	-----
5 ^a RODADA	-----	-----	5 ^a RODADA	-----	-----
6 ^a RODADA	-----	-----	6 ^a RODADA	-----	-----
7 ^a RODADA	-----	-----	7 ^a RODADA	-----	-----
8 ^a RODADA	-----	-----	8 ^a RODADA	-----	-----
9 ^a RODADA	-----	-----	9 ^a RODADA	-----	-----
10 ^a RODADA	-----	-----	10 ^a RODADA	-----	-----

Após ser encerrado o jogo, discutam e respondam às seguintes questões:

1. Como foi feita a escolha para decidir quem seria o primeiro e o segundo jogador?
2. Qual foi o valor máximo que foi sorteado mais vezes?
3. Quantas vezes o número 1 foi o maior valor obtido no sorteio dos dados?
4. Em que razão a face do dado com o número 1 foi o valor máximo?
5. Quantas vezes o número 6 foi o maior valor obtido no sorteio dos dados?
6. Em que razão a face com o número 6 foi o valor máximo?
7. Qual jogador venceu mais vezes?

Fonte: Livro I, p. 122/123, grifo nosso.

Essa questão (Figura 6.70) envolve a participação de dois estudantes, está associada ao contexto de jogos de azar e requer a mobilização de múltiplas representações para a sua resolução. Inicialmente, requer a utilização da representação tabular para sistematizar os resultados de cada jogada. Na sequência, observando os resultados da tabela, os estudantes devem fazer uso da representação numérica para determinar a probabilidade de cada jogador vencer. Ademais, também requer a mobilização dos Elementos disposicionais “postura crítica” e “crenças e atitudes”, para a análise da justiça nas regras do jogo.

A Tabela 6.11 explicita os resultados referentes à subcategoria “Representação solicitada para o estudante”.

Tabela 6.11 - Subcategoria “Representação solicitada para o estudante” nos livros de Projetos Integradores

Representação solicitada para o Estudante – Livros Projetos Integradores		
Critérios	Frequência	Porcentagem
Numérica	36	55,5
Tabular	3	4,6
Gráfica	2	3,1
Oral	1	1,5
Escrita	14	21,5
Elaboração do estudante	1	1,5
Múltiplas representações	8	12,3
TOTAL	65	100,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar da variedade das representações, observamos, assim como nos livros de conhecimento específico, um predomínio da representação numérica, o que podemos associar à quantidade de situações clássicas presentes nas obras analisadas. Além disso, apesar da quantidade de situações que envolvem a Probabilidade Frequentista (27), esse fator não converge para as proposições feitas na literatura específica que associa essa visão da Probabilidade às representações tabular e gráfica, já que apenas 08 (oito) enunciados exigem dos estudantes a elaboração dessas representações.

Dessa maneira, podemos inferir que essa estruturação das representações pode ser um possível obstáculo ao Letramento Probabilístico, por centrar-se no aspecto numérico (frações, porcentagens e decimais) e não incentivar o estudante a estabelecer relações com as outras formas. Nesse sentido, reafirmamos nossa compreensão de que a intercambialidade entre as representações é primordial no desenvolvimento desse tipo de letramento.

Ponderando esses aspectos, ressaltamos a necessidade de os livros didáticos contemplarem atividades que permitam a interação entre variadas representações (tabular, numérica, Língua natural escrita e oral), entre tipos de Probabilidade (Frequentista e Clássica) e que sejam articuladas a Elementos disposicionais (Crenças e atitudes; Postura crítica), com vistas a estimularem o posicionamento do estudante a partir de variadas situações, significados e contextos.

Por fim, focalizamos os Elementos disposicionais propostos por Gal (2005), com o intuito de verificar se as questões relativas à Probabilidade nos livros dos Projetos Integradores exercitam a criticidade dos estudantes, suas crenças e opiniões.

A questão da Figura 6.71 foi analisada como ausente de Elementos disposicionais porque não requer que o estudante emita alguma opinião ou questione a imprevisibilidade da situação. Solicita apenas que ele determine a probabilidade de serem obtidas duas caras e duas coroas no lançamento de duas moedas, restringindo a resposta à representação numérica.

Figura 6.71 - Exemplo de questão com ausência de Elementos disposicionais nos livros de Projetos Integradores

b) Uma moeda não viciada é lançada quatro vezes seguidas. Qual é a probabilidade de que sejam obtidas duas caras e duas coroas?

Fonte: Livro I₁₄, p. 165.

Figura 6.72 - Exemplos de questão com os Elementos disposicionais “Postura crítica” e “Crenças e atitudes” nos livros de Projetos Integradores

4. Que modificação deveria ser feita nas regras do jogo para que ele seja justo?

Fonte: Livro I₁, p. 123.

Como você ajudaria um jovem casal, ambos de 35 anos e que já têm dois filhos, a escolher o método contraceptivo mais indicado para o estilo de vida deles, baseando-se apenas no índice de Pearl? Pense nos tipos de perguntas necessárias a fazer e utilize os dados do quadro apresentado nesta página. [Leia sugestões de encaminhamento para o trabalho com a atividade 8 nas Orientações para o professor do Manual](#)

Fonte: Livro I₁₀, p. 199.

Esses exemplos trazem Elementos disposicionais que estimulam a criticidade dos estudantes. A situação do livro I₁ está no contexto “Jogos de azar” e é associada ao elemento “Postura crítica”, ao incitar os estudantes a analisarem as regras de um jogo e propor modificações para tornar o jogo justo. Já o exemplo do livro I₁₀ traz o contexto “Saúde” e relaciona-se ao Elemento disposicional “Crenças e atitudes”, sugerindo que sejam elaboradas hipóteses (que serão individuais) quanto à desconexão entre os métodos contraceptivos e a porcentagem de mulheres que engravidaram.

Figura 6.73 - Exemplo de questão com o Elemento disposicional “Sentimento em relação ao risco”, nos livros de Projetos Integradores

ATIVIDADE

1. O professor ajudará na organização desta atividade. Será feita uma roda de conversa com quatro ou cinco grandes “mesas”, cada uma dedicada a um dos temas abaixo. Na primeira rodada, você e os colegas se distribuirão nessas mesas e discutirão o assunto predefinido. A ideia é conversar e traçar um cenário dos fatores necessários para determinar o risco da situação estudada. O grupo terá 15 minutos e um de seus membros deve anotar todas as ideias sugeridas, como se fosse uma ata da mesa. Depois disso, vocês deverão trocar de grupo, permanecendo apenas o relator de cada grupo. O procedimento se repete até que todos os alunos passem por todas as mesas e deixem suas contribuições.

Finalmente, cada relator apresenta, em cinco minutos, o resumo das ideias finais da mesa:

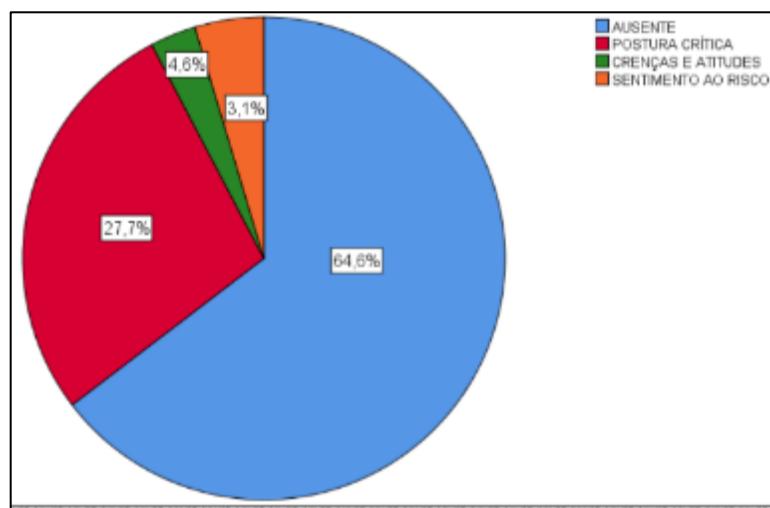
- risco de danos numa casa durante um vendaval;
- risco de danos numa cidade durante um temporal;
- risco de um acidente durante uma partida de futebol ou outro esporte;
- risco de danos numa lavoura de milho ou outro plantio durante uma chuva de granizo (ou geada, ou seca) prolongada.

Fonte: Livro I₁₂, p.126.

A questão relaciona-se com os sentimentos dos estudantes em relação ao risco em quatro situações, três no contexto Ambiental e uma no contexto Social. Propõe uma roda de conversa entre os colegas de classe para discutirem os fatores relacionados a essas situações. Além dessa interação entre os grupos, sugere a troca de informações entre os colegas.

Apresentamos, no Gráfico 6.4, a seguir, os resultados referentes à categoria “Elementos disposicionais”.

Gráfico 6.4 - Análise dos livros de Projetos Integradores com relação à categoria “Elementos disposicionais”



Fonte: Dados da pesquisa.

Apesar de os livros de Projetos Integradores estarem associados a temas norteadores que versam sobre pontos econômicos, sociais, políticos, foram

identificadas somente 18 questões (27,7%) relacionadas à Postura crítica, 02 (3,1%) relacionadas a Crenças e atitudes dos estudantes e 03 (4,6%) a sentimento em relação ao risco. Desse modo, podemos afirmar que, mesmo com uma configuração diferente, 42 (64,6%) das atividades com foco no conceito de Probabilidade não estimulam a exposição de aspectos subjetivos de cada sujeito. Com base nesses resultados, destacamos que a falta de questões que estimulem a reflexão crítica prejudica diretamente o Letramento Probabilístico, pois essa ausência revela que a obra não propõe a investigação e a análise de informações, nem as suas implicações.

A análise empreendida neste estudo, de todas as categorias, nos levou à conclusão de que há mudanças significativas nas atividades de Probabilidade nos livros de Projetos Integradores, se comparados aos livros de conhecimento específico. Nos primeiros, é muito mais frequente o uso de dados reais, há um acréscimo do percentual de situações frequentistas e há mais atividades que incitam a troca de informações entre os colegas de classe por meio de reflexões individuais e coletivas. Todavia, também nas obras de Projetos Integradores, há pontos ainda a serem repensados, tais como a quantidade de experimentos aleatórios no contexto dos jogos e a carência de atividades que incentivem o poder argumentativo dos estudantes, visando a torná-los aptos às propostas do Letramento Probabilístico.

6.3 LIVROS DE PROJETO DE VIDA

Os livros de Projeto de Vida foram incluídos no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) no ano de 2021, com a finalidade de atrelá-los à Base Nacional Comum Curricular, que sinaliza como uma das finalidades do Ensino Médio auxiliar os estudantes na construção do seu projeto de vida. Igualmente, os currículos tiveram que sofrer mudanças motivadas por novos direcionamentos do Novo Ensino Médio, que introduziu o Projeto de Vida em sua matriz curricular.

O intuito dessa nova disciplina é o de auxiliar os estudantes a pensar sobre seus anseios profissionais e pessoais e planejar estratégias para alcançá-los, considerando aspectos que colaborem para seu desenvolvimento socioemocional (focando também no autoconhecimento), sua preparação para o mercado de trabalho, o estabelecimento de metas flexíveis e a compreensão de seu papel na sociedade em que vive.

Dessa forma, os livros de Projeto de Vida proporcionam uma interação de reflexões pessoais, conteúdos teóricos, atividades práticas, estudos de caso que resultarão na construção de portfólios, elaboração de projetos, apresentações teatrais, debates, rodas de conversas, dentre outras produções. Por isso, interessamo-nos em analisar essas obras didáticas, para identificar a possível presença de temáticas que estivessem associadas ao conceito de Probabilidade e que colaborassem para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Com esse objetivo, analisamos os 24 livros destinados a Projeto de Vida aprovados no PNLD. Entretanto, não encontramos nessas obras nenhuma atividade que estabelecesse relação com o conceito de Probabilidade. Avaliamos essa ausência como ponto lacunar, visto que esse componente busca auxiliar os estudantes a desenvolverem objetivos e estratégias para o seu futuro pessoal e profissional, assim como tende a estimular reflexões referentes à “tomada de decisões”, o que se coaduna com a proposição do Letramento Probabilístico proposto por Gal (2005).

É certo que os conceitos de Probabilidade podem auxiliar os estudantes a aprimorar suas habilidades críticas e a tomar decisões estratégicas, pautadas em dados probabilísticos, ponderando as chances de ter sucesso ou fracasso em suas escolhas a partir de simulações e estimativas. Por exemplo, um estudante do último ano do Ensino Médio precisa fazer escolhas que irão reverberar por toda a sua vida, tais como: “Qual curso superior devo escolher? Quais são as minhas chances de finalizar esse curso? Após essa formação, será que terei sucesso no mercado de trabalho? Devo enveredar para o Ensino Superior ou devo me tornar um empreendedor?”. Essas e outras questões podem ser analisadas a partir de conceitos probabilísticos, que também podem se correlacionar com os Elementos disposicionais (crenças, concepções e sentimento em relação ao risco) de cada um.

Reiteramos, portanto, a importância da Probabilidade na construção do “projeto de vida” dos jovens, por lhes permitir analisar os riscos, as ações e as tomadas de decisões pautados em dados probabilísticos para além de suas crenças e atitudes frente a diversas situações. Essa inserção pode ocorrer por meio de situações integradoras que estimulem a reflexão quanto à incerteza, aos riscos e aos possíveis desafios sociais, financeiros e pessoais das suas escolhas. Logo, acreditamos que a inserção, nos materiais didáticos, de situações que envolvam a Probabilidade com enfoque no Letramento Probabilístico pode fornecer habilidades que auxiliem os

jovens estudantes em decisões relevantes e em conjecturas menos arriscadas acerca do futuro.

6.4 REFLEXÕES GERAIS

Articulando os resultados das análises das 10 (dez) coleções de livros de conhecimento referentes à unidade temática “Estatística e Probabilidade” e das 14 (quatorze) coleções dos livros de Projetos Integradores aprovadas no PNLD 2021, chegamos à conclusão de que a maioria dos enunciados estimula a resolução das questões por parte dos estudantes, sendo pouco o incentivo à elaboração de situações probabilísticas por eles.

Nos livros de conhecimento, as atividades apresentam, em sua maioria, dados fictícios, enquanto nos livros de Projetos Integradores, dada a sua proposta de criação de temas e elaboração de projetos, elas se pautam em dados reais.

Ademais, ressaltamos a presença dos contextos estabelecidos por Gal (2005) em ambas as categorias de livros, porém com a predominância de atividades atreladas a “Jogos de azar”. Assim, de maneira geral, os livros não estimulam o estudante a se comunicar, discutir e tomar decisões a partir de informações probabilísticas.

Observamos que ambas as categorias de livros analisadas estão pautadas majoritariamente em situações clássicas, indo ao encontro das habilidades propostas na Base Nacional Comum Curricular. Vale ressaltar que os livros de Projetos Integradores também propõem a articulação entre as visões clássica e frequentista, principalmente com o lançamento de dados.

Quanto às representações, concluímos que a prática do conceito de Probabilidade tem maior concentração da representação escrita no enunciado das questões. Já as resoluções a serem realizadas pelos estudantes estão pautadas na representação numérica (decimal, percentual ou fracionária), com grande disparidade para as outras representações. Analisando a intercambialidade entre as representações, temos uma massiva presença da transição entre a representação na língua natural escrita e a representação numérica, o que descrevemos como um caráter limitador das atividades, dada a pouca presença da transição entre as outras representações. Também ressaltamos a ínfima quantidade de representação tabular e gráfica no que tange ao conceito de Probabilidade.

Os Elementos disposicionais aparecem mais efetivamente nas questões dos livros de Projetos Integradores. Contudo, ainda se trata de um percentual pequeno, se compararmos com as quantidades de situações que são ausentes desses elementos, ou seja, atividades que simplesmente exigem dos estudantes a resposta por meio de uma representação numérica ou na língua natural escrita. Essas restrições, assim como a falta de situações que estimulem a tomada de decisão, podem comprometer o Letramento Probabilístico dos estudantes.

Nesse viés, considerando os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais, destacamos como ponto crucial para uma nova proposta de organização do conceito de Probabilidade nos livros didáticos que os mesmos devem proporcionar situações que abordem dados autênticos a partir de contextos atuais, para além de situações envolvendo jogos de azar; explicitar os diferentes significados de Probabilidade; apresentar os dados probabilísticos a partir de diferentes representações, assim como, estimular a intercambialidade entre elas, para além da representação numérica; suscitar do estudante a interpretação, análise e argumento dos estudantes, ponderando o confronto com os elementos disposicionais dos estudantes (postura crítica, crenças e sentimentos em relação ao risco) para a tomada de decisão.

Diante disso, destacamos a importância de promovermos um processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em específico aqui do conceito de Probabilidade, tanto no livro didático como na sala de aula, que privilegie a adoção de dados reais, variados contextos, distintas formas de representar um dado probabilístico, bem como suscite o posicionamento crítico. Com essa organização, podemos proporcionar aos estudantes elementos para analisar, interpretar e discutir informações em seu contexto diário e, consequentemente, promover seu Letramento Probabilístico.

7 RESULTADOS: O QUE SABEM ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO SOBRE PROBABILIDADE

Neste capítulo, apresentamos os resultados e as análises referentes ao Objetivo Específico 3: “Investigar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à compreensão do conceito de Probabilidade a partir de diferentes representações”.

Considerando a perspectiva do Letramento Probabilístico (Gal, 2005; 2019) e a importância das diferentes representações para o desenvolvimento desse letramento (Oliveira, Santos e Calejon, 2020; Post e Prediger, 2022; entre outros), a análise dos documentos curriculares (Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Médio e Currículos dos estados da Bahia e de Pernambuco) (Capítulo 5) e a análise dos livros didáticos (Capítulo 6), elaboramos um teste diagnóstico com 05 (cinco) questões.

As questões envolveram diferentes contextos (Jogos de azar, Saúde, Tecnologia, Meio ambiente e Social) e significados da Probabilidade (Clássica, Frequentista, Intuitiva e Subjetiva). Elas foram organizadas em dois testes (Teste A e Teste B), os quais apresentavam as mesmas questões, mas diferiam na forma de representação das informações (Língua natural escrita, Tabular e Gráfica). Além disso, em todos os itens havia situações que exigiam dos estudantes a sua percepção teórica/interpretativa da Probabilidade nos eventos analisados, bem como a percepção procedural do cálculo de probabilidade.

Para analisar as respostas dos estudantes, atribuímos pontuação 0 (zero) quando a resposta estava inadequada e 1 (um) quando o estudante apresentava uma resposta coerente. Dessa forma, a pontuação máxima era de 9 (nove) pontos. Os itens “a, b e d” da Questão 3, por terem um caráter subjetivo, atrelado aos Elementos disposicionais, considerando as experiências, opiniões e crenças dos estudantes em relação ao contexto tecnológico, foram analisados somente qualitativamente.

Uma vez que a compreensão de Probabilidade perpassa todo o Ensino Básico, optamos por investigar o desempenho de estudantes do 1º e do 3º ano do Ensino Médio de escolas públicas das cidades de Juazeiro-BA e Petrolina-PE.

A atividade diagnóstica foi proposta para 260 estudantes, sendo 119 do 1º ano e 141 do 3º ano do Ensino Médio de cinco escolas, durante os meses de outubro e novembro de 2024. A escolha dessas escolas ocorreu por conveniência, considerando

a facilidade de acesso à Direção, aos professores de Matemática e aos estudantes dessas unidades.

Para a realização dos testes, foram destinadas duas aulas de 50 minutos, totalizando o tempo máximo de 100 minutos. Foi solicitado que cada estudante, individualmente, respondesse a um teste com cinco questões. Para tal, foram considerados os elementos do Letramento Probabilístico, o que os estudantes compreendiam ou podiam compreender, apresentados na revisão da literatura.

Iniciamos realizando a análise quantitativa do desempenho dos estudantes por ano de escolaridade (Tabela 7.1).

Tabela 7.1 - Média de acertos dos participantes

Ano de escolaridade	Média de Acertos	Desvio Padrão	N
1º ano (Ensino Médio)	2,30	1,83	119
3º ano (Ensino Médio)	2,55	2,22	141
Total	2,43	2,05	260

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que o desempenho, independente do ano escolar, foi muito fraco, uma vez que a pontuação máxima era de 9 (nove) pontos. Além disso, não se observam diferenças entre os anos escolares. Esses resultados são preocupantes, uma vez que se espera que, ao final dessa etapa escolar, os estudantes consigam analisar situações aleatórias do cotidiano e resolvê-las de forma coerente e justa. Dentre as possíveis razões dessas lacunas, podemos destacar os empecilhos vivenciados pelos estudantes para o processo de ensino e aprendizagem em Matemática durante o período da pandemia de Coronavírus (Covid-19) no Brasil (março de 2020 a abril de 2022).

Em seguida, considerando que diferentes representações podem interferir no desempenho dos estudantes, analisamos o desempenho em função do ano e do teste (Tabela 7.2).

Tabela 7.2 - Média de acertos dos participantes por tipo de teste

Ano	Teste	Média de Acertos	Desvio Padrão	N
1º ano	A	2,28	1,73	60
1º ano	B	2,32	1,95	59
3º ano	A	2,57	2,26	69
3º ano	B	2,53	2,19	72

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas médias foram analisadas a partir de uma Análise de Variância – ANOVA, considerando o desempenho total nos testes por ano de escolaridade (1º e 3º) e não foi encontrada diferença significativa $F(1, 259) = 0.901, p \geq .393$. Também não foi encontrada diferença significativa $F(1, 259) = 0.000 p \geq .998$ para o tipo de teste, que considerava diferentes representações.

Como evidenciado, não encontramos diferenças significativas nem entre os anos de escolaridade nem entre as diferentes representações. Buscando compreender que tipos de respostas os estudantes apresentaram, a partir de agora faremos uma análise qualitativa, considerando ano e tipo de teste para cada uma das questões propostas. A Questão 1 envolvia um contexto fictício de Jogos de azar.

Figura 7.1 - Diferentes representações da Questão 1

Teste A - Língua natural escrita

Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores. Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12). Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),
 (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),
 (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),
 (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),
 (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),
 (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6).

- a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
- b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

Teste B - Representação tabular

Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores. Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12). Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:

1º dado	1	2	3	4	5	6
2º dado	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
1	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
2	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
3	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
4	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
5	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
- b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

Fonte: O autor.

No item 1a, “Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique”, solicitava-se a comparação da probabilidade de eventos (soma das faces dos dados) entre dois jogadores. Ambos tinham a mesma chance de vencer o jogo e encontramos diferentes tipos de respostas (Tabela 7.3).

Tabela 7.3 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 1a)

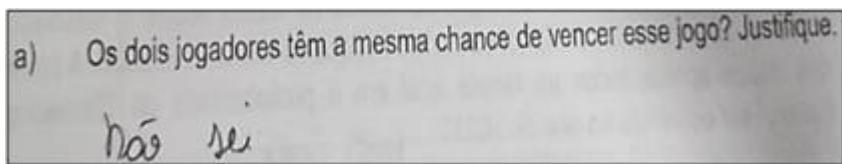
Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco/ não sabe	6,7	8,5	11,6	11,5
Sem justificativa	35,0	28,8	29,0	27,5
Considera a soma das faces	26,7	27,1	20,3	25,2
Justifica em função do cálculo errado	11,6	8,5	2,9	6,8
Adequada com justificativa	20,0	27,1	36,2	29,0

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Tabela 7.3, observa-se que, em ambos os anos, houve estudantes que acertaram a questão, sendo um maior percentual para o 3º ano. Com relação ao tipo de representação, observa-se que os percentuais estão muito próximos entre as representações por ano e ligeiramente superiores entre os anos.

Para compreender cada uma dessas categorias, passamos a descrevê-las e apresentar exemplos.

As respostas associadas à categoria “*Em branco/não sabe*” são aquelas em que o estudante não respondeu ou que escreveu “*não sei*” (Figura 7.2). Esse tipo de resposta foi encontrado em ambos os anos, com um maior percentual para o 3º ano (11,6% e 11,5%).

Figura 7.2 - Exemplo de resposta na categoria “Em branco/ não sabe” do item 1a

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “*Sem justificativa*”, reunimos as respostas que apenas sinalizam “*sim ou não*”, impossibilitando, assim, de compreendermos como os estudantes pensaram (Figura 7.3). Além dessas, foram consideradas também outras respostas que não apresentam justificativas, como nos casos em que o estudante copia o enunciado, escreve algo que não é uma justificativa (Figura 7.4) ou informa que os dois jogadores tinham a mesma chance, porém, com justificativa incoerente com a lógica da questão (Figura 7.5). Esse tipo de resposta foi encontrado em ambos os anos e com um percentual similar entre anos e tipo de representação.

Figura 7.3 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7.4 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a

Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Não, A chance de cada jogador de ganhar é diferente para cada jogador.

[*Não, A chance de cada jogador de ganhar é diferente para cada jogador*]

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7.5 - Exemplo de resposta com justificativa incoerente (item 1a)

Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Sim, eles tem probabilidades iguais.

[*Sim, eles tem probabilidades iguais*]

Fonte: Dados da pesquisa

Na categoria “Considera a soma das faces”, foram classificadas as respostas em que os estudantes justificavam erroneamente pela soma das faces que forneciam pontos aos jogadores, sendo Cláudio com seis números pares e Bruno com cinco números ímpares (Figura 7.6). Esse tipo de resposta foi o mais utilizado pelos estudantes do 1º ano (35% e 33,9%) e também utilizado pelos estudantes do 3º ano (27,5% e 27,7%).

Figura 7.6 - Exemplo de resposta que considera a soma das faces (item1a)

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Claudio tem Mais Pontos, por isso tem Mais Chances

[*Claudio tem mais pontos, por isso tem mais chances*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados referentes à categoria “Justifica em função do cálculo errado” trazem elementos importantes a serem observados. Nesse tipo de resposta, os estudantes contabilizaram o número de pares ordenados de cada jogador e observaram a chance de cada um, compreendendo a relação do evento e o espaço amostral, mas erraram nesse cálculo (Figura 7.7). Nesse caso, podemos dizer que cometem um erro procedural, e não conceitual. Percentualmente, observamos uma maior concentração de respostas inseridas nessa categoria nas turmas do 1º ano (11,6% e

8,5%), situação diferente da ocorrida com os estudantes do 3º ano, que apresentaram poucas respostas desse tipo (2,9% e 5,6%).

Figura 7.7 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 1a

1º dado \ 2º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.

Sim,

Quem vai vencer é Claudio com 20 pontos. 3 pontos a mais de Bruno.

[Quem vai vencer é Claudio

com 20 pontos. 3 pontos a mais de Bruno.]

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse exemplo, o estudante do 1º ano, considerando o espaço amostral apresentado na forma tabular, inicia colocando os resultados dos pares ordenados e depois vai contabilizando como par ou ímpar para cada jogador. Porém, errou a soma do par ordenado (6,3) e acabou se perdendo na contagem, porque daria 18 para cada jogador. Assim, utilizou uma estratégia interessante, demonstrando compreender a lógica do problema, mas errou no cálculo.

Por fim, temos a categoria “Adequada com justificativa”, na qual os estudantes contabilizaram corretamente o número de pares ordenados de cada jogador e observaram a chance de cada um, determinando que os dois jogadores tinham a mesma chance de vencer (Figura 7.8 e 7.9). Observa-se um aumento discreto do percentual de acerto do 1º (20% e 27,1%) para o 3º ano (36,2% e 29%). Assim, fica evidenciada a capacidade de estudantes, desde o 1º ano do Ensino Médio, identificarem o espaço amostral de eventos aleatórios e a contagem das possibilidades (habilidade EM13MAT311 da BNCC).

Figura 7.8 - Exemplo de resposta adequada comparando a probabilidade dos eventos, analisando a Língua natural escrita - item1a

$C = 18$ Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11).
 $B = 18$ A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:
 (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Sim, porque ambos os lados têm a mesma quantidade de pontos

[*Sim, porque ambos os lados tem a mesma quantidade de pontos*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.9 - Exemplo de resposta adequada comparando a probabilidade dos eventos, analisando a representação tabular - item1a

1º dado 2º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Sim, pois entre as 36 possibilidades, ambos possuem 18 chances de ganhar, tendo em vista que o critério seguido por eles são somas que têm como resultado números ímpares ou pares

[*Sim, pois entre as 36 possibilidades, ambos possuem 18 chances de ganhar, tendo em vista que o critério seguido por eles são somas que têm como resultado números ímpares ou pares*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Chamamos a atenção para o fato de ambos os tipos de testes apresentarem o espaço amostral da situação. Acreditamos que essa ação contribuiu significativamente para a compreensão dos estudantes, logo, iremos considerar essa informação para o desenvolvimento do Estudo 4 (processo interventivo) a ser desenvolvido com estudantes do Ensino Médio.

No item 1b, “Qual a probabilidade de sair a soma 8?”, esperávamos que os estudantes conseguissem interpretar os pares ordenados apresentados na Língua natural escrita (Teste A) ou na representação tabular (Teste B) e determinar a probabilidade de sair a soma das faces igual a 8 (Tabela 7.4).

Tabela 7.4 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 1b)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	6,7	8,5	11,6	16,7
Sem justificativa	21,7	23,7	24,6	29,2
Considera a quantidade de pares ordenados	46,6	47,4	18,8	12,4
Justifica em função do cálculo errado	5,0	5,1	11,7	12,5
Adequada com justificativa fracionária	20,0	13,6	24,7	18,1
Adequada com justificativa percentual	--	--	1,4	2,8
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	--	1,7	7,2	8,3

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados da Tabela 7.4, podemos observar que houve estudantes, de ambos os anos, que acertaram a questão – e o tipo de representação não foi fundamental nela. Para entender essas categorias, apresentamos exemplos para cada uma.

As respostas da categoria “*Em branco / não sabe*”, apesar de se fazerem presentes em ambos os anos, percentualmente, foram maiores para o 3º ano (11,6% e 16,7%).

A categoria “*Sem justificativa*” agrupa as respostas nas quais foi apresentada uma representação numérica percentual aleatória para informar a probabilidade de o evento acontecer (Figura 7.10) e as que utilizaram a concepção intuitiva da Probabilidade, por meio de termos qualitativos na Língua natural escrita para informar a probabilidade de o evento acontecer (Figura 7.11).

Figura 7.10 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
90%.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.11 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
muito baixa.

Fonte: Dados da pesquisa.
[muito baixa]

Nas respostas classificadas como “*Considera a quantidade de pares ordenados*”, observamos uma lacuna quanto à noção de Probabilidade, visto que os estudantes apresentam apenas a quantidade de pares ordenados que resultam na soma 8 (Figura 7.12) ou o total desses pares (Figura 7.13), desconsiderando o espaço

amostral e consequentemente sem calcular a probabilidade da situação. Essa lacuna apresentou-se mais evidente nas respostas fornecidas pelos estudantes do 1º ano, para ambas as representações (46,6 e 47,4%).

Figura 7.12 - Exemplo de resposta com a exposição dos pares ordenados no item 1b

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
 $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) = 5 \text{ chances}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.13 - Exemplo de resposta informando o total de pares ordenado no item1b

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
 5 chances

Fonte: Dados da pesquisa.

Já as respostas em que o estudante “*Justifica em função do cálculo errado*” evidenciam a compreensão da relação da Probabilidade Clássica, que determina a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, visto que utilizam corretamente o espaço amostral para detectar os casos favoráveis (Figura 7.14). Todavia, os estudantes cometem erros procedimentais.

Figura 7.14 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 1b

1º dado	1	2	3	4	5	6	
2º dado	1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
	2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
	3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
	4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
	5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
	6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

$$\frac{4}{36}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas categorias das respostas “*Adequadas*”, os estudantes informaram corretamente a probabilidade de sair a soma 8 ($5/36$ ou 13,8% ou 0,138). Nesse contexto, optamos por compreender quais as representações numéricas utilizadas por esses estudantes para fornecer suas respostas: resposta adequada/fracionária

(Figura 7.15); resposta adequada utilizando percentual (Figura 7.16); resposta adequada com múltiplas representações numéricas (Figura 7.17).

Figura 7.15 - Exemplo de resposta adequada com representação fracionária no item 1b

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8? 5 probabilidades

$$\frac{5}{36}$$

[5 probabilidades]

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7.16 - Exemplo de resposta adequada com representação percentual no item 1b

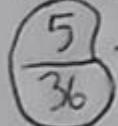
b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?

13,86%

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7.17 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 1b

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?



$$= 13,89\%$$

$$36 \sim 100$$

$$72 \sim x$$

$$36x = 720$$

$$x = \frac{720}{36}$$

$$x = 20$$

$$\frac{5}{36} \left(\frac{13,89}{100} \right)$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse contexto, compreendemos que, desde o 1º ano do Ensino Médio, os estudantes demonstram habilidade de resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade (habilidade EM13MAT312 da BNCC).

A Questão 2 estava associada a uma situação Frequentista, no contexto autêntico da Saúde.

Figura 7.18 - Diferentes representações da Questão 2

<p>Teste A - Representação Gráfica</p> <p>Em 2023, foi realizada pelo Ministério da Saúde uma pesquisa com moradores de todas as capitais do país para saber sobre a quantidade de tempo destinado para a prática de atividades físicas moderada por semana (mínimo de 150 minutos). Na cidade de Salvador os resultados foram os seguintes:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Categorias</th> <th>Quantidade de entrevistados</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Tempo Livre</td> <td>298</td> </tr> <tr> <td>Em deslocamento</td> <td>117</td> </tr> <tr> <td>Insuficiente</td> <td>288</td> </tr> <tr> <td>Inatividade Física</td> <td>97</td> </tr> </tbody> </table> <p>Fonte: Ministério da Saúde, 2024</p> <p>a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?</p> <p>b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.</p>	Categorias	Quantidade de entrevistados	Tempo Livre	298	Em deslocamento	117	Insuficiente	288	Inatividade Física	97	<p>Teste B - Língua natural escrita</p> <p>Em 2023, foi realizada pelo Ministério da Saúde uma pesquisa com moradores de todas as capitais do país para saber sobre a quantidade de tempo destinado para a prática de atividades físicas moderada por semana (mínimo de 150 minutos). Na cidade de Salvador os resultados foram os seguintes: 298 pessoas praticam atividades físicas moderada no tempo livre; 117 praticam atividades físicas moderada em deslocamento; 288 possuem prática insuficiente de atividade física moderada e 97 pessoas tem inatividade física.</p> <p>a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?</p> <p>b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.</p>
Categorias	Quantidade de entrevistados										
Tempo Livre	298										
Em deslocamento	117										
Insuficiente	288										
Inatividade Física	97										

Fonte: O Autor.

No item 2a, “*Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?*” almejávamos que os estudantes realizassem a análise e interpretação dos dados apresentados na representação gráfica (Teste A) ou na representação na Língua natural escrita (Teste B), para determinar a probabilidade de escolher um adulto que pratique atividade física moderada na cidade de Salvador-BA no ano de 2023. Dadas as categorias estabelecidas, a probabilidade dessa situação era de $\frac{415}{800}$; 51,9% ou 0,518. As respostas fornecidas pelos participantes estão sistematizadas na Tabela 7.5.

Tabela 7.5 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 2a)

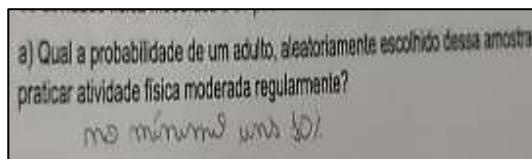
Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	11,7	18,6	18,8	36,1
Sem justificativa (intuitiva e conjectura numérica)	43,3	32,2	36,3	23,6
Considera a quantidade de casos favoráveis	20,0	6,8	10,1	9,7
Justifica em função do cálculo errado	20,0	30,5	20,4	15,3
Adequada com justificativa fracionária	3,3	3,4	4,3	4,2
Adequada com justificativa percentual	1,7	5,1	--	--
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	--	3,4	10,1	11,1

Fonte: Dados da pesquisa.

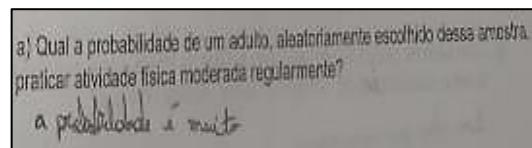
Analizando os dados apresentados na Tabela 7.5, temos um pequeno percentual de estudantes que acertaram a questão, sendo maior nas respostas dos estudantes do 3º ano. Observando o tipo de representação, podemos dizer que não há diferenças marcantes.

As respostas da categoria “*Em branco / não sabe*” concentraram-se no Teste B para o 3º ano (36,1%).

Na categoria “*Sem justificativa*”, foram agrupadas as respostas por meio de uma conjectura numérica, sem justificativa plausível (Figura 7.19), e respostas em que o estudante faz uso de termos intuitivos na Língua natural escrita para informar a probabilidade do evento (Figura 7.20). Esse foi o tipo de resposta mais frequente para ambos os anos e representações, com exceção do 3º ano, no Teste B.

Figura 7.19 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a

[no mínimo uns 10%]
Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7.20 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a

[a probabilidade é muito]
Fonte: Dados da pesquisa

Na categoria “*Considera a quantidade de casos favoráveis*”, rotulamos as soluções em que os estudantes ponderavam apenas os elementos favoráveis à quantidade de pessoas que praticavam atividade física moderada no tempo livre

(Figura 7.21); as pessoas que praticavam atividade física moderada em deslocamento (Figura 7.22); ou a soma dessas duas práticas (Figura 7.23).

Figura 7.21 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

298

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.22 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente? Baixo, pois segundo o gráfico apenas 117 em deslocamento

[Baixo, pois segundo o gráfico apenas 117 em deslocamento]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.23 - Exemplo de resposta com a soma das práticas (item 2a)

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

$$\begin{array}{r} 1 \\ 298 \\ + 114 \\ \hline 412 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “Justifica em função do cálculo errado”, identificamos que os estudantes correlacionavam o evento “prática de atividade física moderada” e o total de entrevistados da cidade de Salvador, contudo falhavam no procedimento do cálculo (Figura 7.24).

Figura 7.24 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 2a

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

$$\begin{array}{r} 298 \\ + 117 \\ \hline 415 \end{array} \quad \begin{array}{r} 415 \\ + 288 \\ \hline 703 \end{array} \quad \begin{array}{r} 703 \\ + 97 \\ \hline 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 117 \\ + 800 \\ \hline 800 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse exemplo, o estudante, considerando o espaço amostral apresentado na representação gráfica, inicia somando corretamente o total de entrevistados de cada categoria para determinar o espaço amostral dessa pesquisa (800 entrevistados). Porém, errou ao considerar como o evento possível apenas os moradores que praticam atividade física moderada em deslocamento (117 moradores). Logo, podemos inferir que esse estudante compreendeu a proposta da questão e tem a

noção de probabilidade, todavia desconsiderou um evento possível, o que resultou no erro do cálculo.

Analizando as respostas em que os estudantes apresentaram a probabilidade correta de escolher um adulto dessa amostra que pratica atividade física moderada, temos uma variedade de representações utilizadas, sendo elas fracionária (Figura 7.25), percentual (Figura 7.26) ou múltiplas representações numéricas (Figura 7.27).

Figura 7.25 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 2a

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

298 = moderada		$\frac{415}{800}$
117 = mod. em deslocamento		
288 = insuficiente		
97 = inatividade		
800 PESSOAS		

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.26 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 2a

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

<i>total : 800</i>	$= 51,875\%$
<i>praticam : 415</i>	

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.27 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 2a

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

$\frac{415}{800} = 0,51875$	$51,875\%$
$\frac{415}{800} + \frac{117}{800} + \frac{288}{800} + \frac{97}{800}$	

Fonte: Dados da pesquisa.

Como pode ser observado, esse item apresentou baixo percentual de acerto para ambos os anos e ambas as representações. O uso de múltiplas representações ocorreu predominantemente nas turmas do 3º ano (10,1% e 11,1%).

O item 2b, “*Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio*”, solicitava uma argumentação consistente e o posicionamento crítico dos estudantes quanto à relação entre a amostra da pesquisa e a comparação com a população da cidade de Salvador.

Dessa maneira, esperávamos que os estudantes fizessem uso da Língua natural escrita para pontuar que o resultado da pesquisa, apesar de ser uma situação frequentista, não refletia exatamente o estado geral de toda a população de Salvador, impedindo a generalização do evento analisado (Tabela 7.6).

Tabela 7.6 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 2b)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	28,3	37,3	30,4	44,4
Sem justificativa	21,7	10,2	26,1	9,7
Inadequada com justificativa errada	33,3	32,2	20,3	29,2
Com justificativa adequada	16,7	20,3	23,2	16,7

Fonte: Dados da pesquisa.

Como podemos notar na Tabela 7.6, poucos estudantes responderam corretamente, em ambos os anos e em ambas as representações.

A categoria “*Em branco / não sabe*” traz um aspecto preocupante. Independentemente do tipo de teste e do ano escolar, foram altos os percentuais dos estudantes que mencionaram não saber responder ou deixaram a questão sem resposta alguma.

Na segunda categoria, agrupamos as respostas que afirmavam apenas “*sim ou não*” (Figura 7.28), bem como as que apresentaram uma justificativa incoerente com a situação (Figura 7.29). Foram observadas respostas desse tipo em ambos os grupos e com proporção semelhante entre os anos e o tipo de representação.

Figura 7.28 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2b

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Não

[*Não*]
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.29 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2b

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

que os resultados da população em Salvador foi de 400

[*que os resultados da população em Salvador foi de 400*]
Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “Inadequada com justificativa errada”, os estudantes afirmam que os dados da pesquisa não estimam exatamente a probabilidade de o evento acontecer, porém com argumentos incoerentes com a situação (Figura 7.30).

Figura 7.30 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 2b

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Ta, pois não, pois eu vejo bastante adulto na academia.

[*Não, pois eu vejo bastante adulto na academia*]
Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta da Figura 7.30, de um estudante do 1º ano, traz um elemento interessante para observarmos. Analisando seu argumento, podemos dizer que ele demonstra não ser letrado probabilisticamente, visto que, mesmo se tratando de uma pesquisa com dados fidedignos fornecidos pelo Ministério da Saúde, ele considera apenas a sua percepção pessoal, prevalecendo suas crenças sobre os dados.

Há também as respostas que afirmam que os dados da pesquisa refletem exatamente a situação de Salvador, evidenciando uma lacuna conceitual no que se refere à relação entre amostra e população. Dessa forma, consideram a amostra representativa para fazer essa generalização, mesmo sem ter a ciência de se essa amostra foi obtida aleatoriamente e se representa toda a população da cidade de Salvador (Figura 7.31).

Figura 7.31 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 2b

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Sim, porque mais da metade da população faz atividade física no tempo livre

[*Sim, porque mais da metade da população faz atividade física no tempo livre*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas respostas da categoria “Com justificativa adequada”, os estudantes afirmam que não é possível fazer essa generalização, dada a falta de informações sobre os diversos fatores, tais como: perfil socioeconômico, idade, gênero, localização, dentre outros (Figura 7.32). Esse tipo de resposta foi dado por estudantes de ambos os anos e ambas as representações.

Figura 7.32 - Exemplos de respostas adequadas no item 2b

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Não porque essa amostra foi feita por uma parte da sociedade de Salvador

[*Não porque essa amostra foi feita por uma parte da sociedade de Salvador*]

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Não, A Amostra não vai ser certeza.

[*Não, A Amostra não vai ser certeza.*]

Fonte: Dados da pesquisa.

A primeira resposta evidencia que o estudante comprehende a relação entre amostra e população, inferindo, assim, que não é possível esses resultados refletirem exatamente a situação de toda a cidade. Tratando-se de uma situação frequentista, para fazer essa generalização, seria preciso uma amostra significativa e que atendesse a diversos elementos, como faixa etária, amostra de variados bairros, dentre outros.

A segunda resposta recorre ao viés da aleatoriedade e incerteza (Elemento do conhecimento: Grandes ideias), que são inerentes a situações de probabilidade. Logo,

por não ter um caráter determinista, não podemos dizer que essa amostra é uma certeza.

Sendo assim, podemos dizer que, de forma tímida, os participantes têm a habilidade de reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, investigando as implicações no cálculo de probabilidades (habilidade EM13MAT511 da BNCC).

A Questão 3 discute uma situação subjetiva atrelada ao contexto real Tecnológico referente aos dez smartphones mais vendidos no mundo no ano de 2023.

Figura 7.33 - Diferentes representações da Questão 3

<p>Teste A - Representação tabular</p> <p>a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone? Justifique a sua resposta</p> <p>(<input type="checkbox"/>) Impossível (<input type="checkbox"/>) Pouco provável (<input type="checkbox"/>) Provável (<input type="checkbox"/>) Muito provável (<input type="checkbox"/>) Certo</p> <p>b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?</p> <p>c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do "Samsung Galaxy" ser escolhido no ano de 2023?</p> <p>Tabela: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Smartphone</th> <th>Unidades (milhões)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Iphone 14 Pro Max</td><td>34</td></tr> <tr><td>Iphone 15 Pro Max</td><td>33</td></tr> <tr><td>Iphone 14</td><td>29</td></tr> <tr><td>Iphone 14 Pro</td><td>29</td></tr> <tr><td>Iphone 13</td><td>23</td></tr> <tr><td>Galaxy A14 4G</td><td>21</td></tr> <tr><td>Iphone 15 Pro</td><td>21</td></tr> <tr><td>Galaxy A54 4G</td><td>20</td></tr> <tr><td>Galaxy A14 5G</td><td>19</td></tr> <tr><td>Iphone 15</td><td>17</td></tr> </tbody> </table> <p>Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em: <https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338>. Acesso em: 22 de julho de 2024.</p> <p>d) Inicialmente você determinou a probabilidade do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido do mundo em 2023. Agora, com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do "Samsung Galaxy" mudou? Por quê?</p>	Smartphone	Unidades (milhões)	Iphone 14 Pro Max	34	Iphone 15 Pro Max	33	Iphone 14	29	Iphone 14 Pro	29	Iphone 13	23	Galaxy A14 4G	21	Iphone 15 Pro	21	Galaxy A54 4G	20	Galaxy A14 5G	19	Iphone 15	17	<p>Teste B - Representação gráfica</p> <p>a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone? Justifique a sua resposta</p> <p>(<input type="checkbox"/>) Impossível (<input type="checkbox"/>) Pouco provável (<input type="checkbox"/>) Provável (<input type="checkbox"/>) Muito provável (<input type="checkbox"/>) Certo</p> <p>b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?</p> <p>c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do "Samsung Galaxy" ser escolhido no ano de 2023?</p> <p>Gráfico: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Smartphone</th> <th>Unidades (milhões)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Iphone 14 Pro Max</td><td>34</td></tr> <tr><td>Iphone 15 Pro Max</td><td>33</td></tr> <tr><td>Iphone 14</td><td>29</td></tr> <tr><td>Iphone 14 Pro</td><td>29</td></tr> <tr><td>Iphone 13</td><td>23</td></tr> <tr><td>Galaxy A14 4G</td><td>21</td></tr> <tr><td>Iphone 15 Pro</td><td>21</td></tr> <tr><td>Galaxy A54 4G</td><td>20</td></tr> <tr><td>Galaxy A14 5G</td><td>19</td></tr> <tr><td>Iphone 15</td><td>17</td></tr> </tbody> </table> <p>Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em: <https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338>. Acesso em: 22 de julho de 2024.</p> <p>d) Inicialmente você determinou a probabilidade do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido do mundo em 2023. Agora, com base na probabilidade calculada a partir do gráfico acima, sua visão sobre a popularidade do "Samsung Galaxy" mudou? Por quê?</p>	Smartphone	Unidades (milhões)	Iphone 14 Pro Max	34	Iphone 15 Pro Max	33	Iphone 14	29	Iphone 14 Pro	29	Iphone 13	23	Galaxy A14 4G	21	Iphone 15 Pro	21	Galaxy A54 4G	20	Galaxy A14 5G	19	Iphone 15	17
Smartphone	Unidades (milhões)																																												
Iphone 14 Pro Max	34																																												
Iphone 15 Pro Max	33																																												
Iphone 14	29																																												
Iphone 14 Pro	29																																												
Iphone 13	23																																												
Galaxy A14 4G	21																																												
Iphone 15 Pro	21																																												
Galaxy A54 4G	20																																												
Galaxy A14 5G	19																																												
Iphone 15	17																																												
Smartphone	Unidades (milhões)																																												
Iphone 14 Pro Max	34																																												
Iphone 15 Pro Max	33																																												
Iphone 14	29																																												
Iphone 14 Pro	29																																												
Iphone 13	23																																												
Galaxy A14 4G	21																																												
Iphone 15 Pro	21																																												
Galaxy A54 4G	20																																												
Galaxy A14 5G	19																																												
Iphone 15	17																																												

Fonte: O autor.

Os itens “a, b e d” dessa questão trazem elementos pessoais, para os quais não podemos inferir sobre a exatidão das respostas fornecidas pelos estudantes. Esses itens estão diretamente relacionados aos Elementos disposicionais propostos

por Gal (2005), pois pondera as experiências, crenças e julgamentos dos estudantes quanto à análise dos tipos de smartphones.

O item 3a: “*Qual seria a chance de você adquirir um iPhone?*” tem caráter subjetivo, pois remete à percepção pessoal quanto à estimativa de esse evento acontecer. O estudante deveria sinalizar seu julgamento por meio dos termos qualitativos “*Impossível, Pouco provável, Provável, Muito provável e Certo*”, e justificar o motivo de ter escolhido o termo assinalado (Tabela 7.7).

Tabela 7.7 - Percentual de respostas considerando ano e teste (Questão 3a)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não respondeu	5,0	1,7	1,4	4,2
Impossível	5,0	6,8	13,0	12,5
Pouco provável	33,3	33,9	29,0	36,1
Provável	26,7	28,8	23,2	18,1
Muito provável	15,0	13,6	24,6	16,7
Certo	15,0	15,2	8,8	12,4

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados da Tabela 7.7, observamos que todas as expressões qualitativas de probabilidade foram mencionadas pelos estudantes, com maior ênfase no termo “*Pouco provável*” em todas as turmas e em todos os tipos de testes. De forma geral, os estudantes fizeram uso de variados argumentos para justificar a sua escolha.

Houve estudantes que sinalizaram uma alternativa, porém não justificaram as suas escolhas. Essas situações foram agrupadas na justificativa “*Em branco / não respondeu*”.

Nas justificativas atreladas às “*questões financeiras*”, os estudantes justificam sua escolha pelo fato de possuírem (ou não) condições financeiras para adquirir o referido smartphone (Figura 7.34). Essa justificativa foi utilizada por estudantes de ambos os anos.

Figura 7.34 - Exemplos de justificativa “Financeira” no item 3a

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo

Justifique a sua resposta: *Porque minha família passa por muitas dificuldades em questões financeiras, as vezes falta muitas coisas em casa e se eu não tenho condições em ajudar nisso, quanto mais em comprar um iPhone que custa uma fortuna.*

[*Porque minha família passa por muitas dificuldades em questões financeiras, as vezes falta muitas coisas em casa e se eu não tenho condições em ajudar nisso, quanto mais em comprar um iphone que custa uma fortuna]*

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo

Justifique a sua resposta:

Eu não quero gastar dinheiro com isso, mas se alguém comprasse para mim, eu aceitaria. Por isso é pouco provável.

[*Eu não quero gastar dinheiro com isso, mas se alguém comprasse para mim, eu aceitaria. Por isso é pouco provável.]*

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “Especificações Técnicas”, reunimos as justificativas pautadas em aspectos do próprio smartphone, tal como as configurações, bateria, qualidade da câmera, entre outras funcionalidades do aparelho (Figura 7.35). Esse tipo de justificativa foi encontrado em respostas de estudantes de ambos os anos.

Figura 7.35 - Exemplos de justificativa “Especificações Técnicas” no item 3a

Questão 3

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo

Justifique a sua resposta:

bateria Ruim, muito limitado

[*bateria Ruim, muito limitado]*

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo

Justifique a sua resposta:

O smartphone tem uma ótima qualidade, em questão de fotos, mas, por ele não ter uma excelente bateria eu descarto. É impossível utilizar um aparelho na qual o mais importante não serve

[*O smartphone tem uma ótima qualidade, em questão de foto, mas, por ele não ter uma excelente bateria eu descarto. É impossível utilizar um aparelho na qual o mais importante não serve]*

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “Já possui”, os estudantes justificam suas escolhas com o argumento de que possuem o smartphone (Figura 7.36). Essa categoria é interessante, pois conseguimos identificar que alguns conseguem correlacionar o evento “certo” com o fato de eles já possuírem um aparelho dessa marca. Esse tipo de argumento foi mais adotado pelos estudantes do 1º ano (23,3% e 18,6%), porém também está presente nas turmas do 3º ano (20,3% e 13,9%).

Figura 7.36 - Exemplos de justificativa “Já possui” no item 3a

Questão 3

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
 Justifique a sua resposta:
Só tenho

[Já tenho]

Questão 3

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
 Justifique a sua resposta:
já utilizo um, então provável que eu atualizo comprar um do momento.

[já utilizo um, então provável que eu atualizo comprar um do momento]

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados referentes à categoria “Questão pessoal” originam informações interessantes de serem observadas. Nessas justificativas, os estudantes organizaram seu raciocínio a partir de seus sentimentos, gostos ou experiências, evidenciando assim os Elementos disposicionais (Figura 7.37).

Figura 7.37 - Exemplos de justificativa “Questão pessoal” no item 3a

Questão 3

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
 Justifique a sua resposta:
Não gosto da marca

[Não gosto da marca]

Questão 3

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
 Justifique a sua resposta:
Porque não gosto muito de iphone ai não tenho

[Porque não gosto muito de iphone ai não tenho]

Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 7.8 apresenta os resultados para o item 3b: “Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?”.

Tabela 7.8 - Percentual de respostas considerando ano e teste (Questão 3b)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não respondeu	18,3	16,9	11,6	13,9
Sem justificativa e com percentual	13,3	8,5	10,1	16,7
Sem justificativa e sem percentual	5,0	5,1	1,4	1,4
Com justificativa e sem percentual	25,0	30,5	20,3	19,4
Com justificativa e com percentual	38,4	39,0	56,6	48,6

Fonte: Dados da pesquisa.

Nessa questão, percebe-se que um quantitativo maior de estudantes respondeu adequadamente.

As respostas associadas à categoria “Em branco / não respondeu” ocorreram nos dois anos, com maior incidência nas turmas do 1º ano (18,3% e 16,9%). Já as respostas sem justificativa foram categorizadas de duas formas. Na primeira, “Sem justificativa e com percentual”, reunimos as respostas em que os estudantes apenas apresentaram um número na representação percentual, porém sem argumentar (Figura 7.38). Esse tipo de resposta foi encontrado em 13,3% e 8,5% no 1º ano e em 10,1% e 16,7% no 3º ano. Na segunda, “Sem justificativa e sem percentual”, os estudantes usaram apenas termos qualitativos de probabilidade (Figura 7.39). Esse uso foi modesto, com 5% e 5,1% no 1º ano e 1,4% e 1,4% no 3º ano.

Figura 7.38 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e com percentual” no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

30%

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.39 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e sem percentual” no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

impossível

[impossível]

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas respostas em que os estudantes apresentaram justificativas, também registramos duas formas de argumentos, “*Com justificativa e com percentual*”, com muitos estudantes de ambos os anos respondendo dessa forma. Já nas respostas associadas a “*Com justificativa e sem percentual*”, apenas expuseram suas justificativas.

As justificativas foram agrupadas para facilitar nossa compreensão dos argumentos apresentados. Nas justificativas “*Financeiras*”, os estudantes argumentam que o “Samsung Galaxy” pode ter sido o mais vendido por ser de menor custo, se comparado a outras marcas de smartphone (Figura 7.40 e Figura 7.41). Essa justificativa foi utilizada por ambos os anos, com um maior percentual para o 1º ano (23,3% e 20,3%), em relação ao 3º ano (13% e 20,8%).

Figura 7.40 - Exemplo de resposta com justificativa “Financeira” e com percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
70%, porque é mais barato que outras marcas.

[70%, porque é mais barato que outras marcas]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.41 - Exemplo de resposta com justificativa “Financeira” e sem percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
Por conta do seu preço

[Por conta do seu preço]

Fonte: Dados da pesquisa.

Na justificativa “*Social*”, os estudantes explanam suas opiniões baseadas em questões de notoriedade, renome da marca e facilidade de acesso para um determinado grupo (Figura 7.42 e Figura 7.43).

Figura 7.42 - Exemplo de resposta com justificativa “Social” e percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê? 70%, pois é o smartphone mais acessível à sociedade

[70%, pois é o smartphone mais acessível à sociedade]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.43 - Exemplo de resposta com justificativa “Social” e sem percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê? Porque ela é uma marca muito famosa.

[Porque ela é uma marca muito famosa]

Fonte: Dados da pesquisa.

A justificativa “Técnica” engloba argumentos baseados nas qualidades funcionais do smartphone, pautados na funcionalidade, desempenho, conhecimento do aparelho (Figura 7.44 e Figura 7.45). Localizamos essas justificativas em respostas de ambos os anos.

Figura 7.44 - Exemplo de resposta com justificativa “Técnica” e percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
30%. Porquê atualmente os jovens preferem um iphone, que tem maior qualidade em câmera, do que um Samsung que tem vários quesitos e coisas melhores.

[30%. Porquê atualmente os jovens preferem um iphone, que tem maior qualidade em câmera, do que um Samsung que tem vários quesitos e coisas melhores]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.45 - Exemplo de resposta com justificativa “Técnica” e sem percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê? pela sua qualidade e atualizações disparadas e a facilidade de uso

[pela sua qualidade e atualizações disparadas e a facilidade de uso]

Fonte: Dados da pesquisa.

A justificativa “Pessoal” engloba o raciocínio dos estudantes a partir de suas reflexões pessoais, comumente expressas por meio de adjetivos que revelam a sua opinião (Figura 7.46 e Figura 7.47).

Figura 7.46 - Exemplo de resposta com justificativa “Pessoal” e percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?
100% . Porque ele é bom

[100%. Porque ele é bom]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.47 - Exemplo de resposta com justificativa “Pessoal” e sem percentual no item 3b

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

no Brasil
Por que a marca Samsung Galaxy
é melhor marca ai vende muito

[no Brasil por que a marca Samsung Galaxy é melhor marca ai vende muito]

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas justificativas evidenciam a subjetividade inerente à questão, visto que cada estudante tem experiências e concepções próprias. Logo, apresentam distintas opiniões quanto à chance de o evento em questão ter acontecido.

O item 3c questionava: “O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela (ou gráfico) abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados, qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023?”. Essa questão remete à análise e interpretação dos dados apresentados para calcular a probabilidade do evento (Tabela 7.9).

Tabela 7.9 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 3c)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	33,3	30,5	30,4	29,2
Sem justificativa (intuitiva e conjectura numérica)	40,0	39,0	27,5	38,9
Considera a quantidade de celulares da marca favorável	3,3	6,8	4,4	5,6
Considera a quantidade de marcas	11,7	5,1	15,9	8,3
Justifica em função do cálculo errado	6,7	16,9	7,3	8,3
Adequada com justificativa fracionária	3,3	1,7	4,3	--
Adequada com justificativa percentual	1,7	--	--	--
Adequada com Língua Materna Escrita	--	--	1,5	2,8
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	--	--	8,7	6,9

Fonte: Dados da pesquisa.

Os resultados apresentados na Tabela 7.9 evidenciam as dificuldades dos estudantes.

A categoria “*Sem justificativa*” reúne as respostas nas quais os estudantes responderam por meio de uma especulação numérica, sem detalhar seu raciocínio (Figura 7.48), ou expressam a chance de o evento acontecer por meio da Língua natural escrita (Figura 7.49). Os resultados desta categoria foram os maiores para o 1º ano (40% e 39%) e o 3º ano (27,5% e 38,9%).

Figura 7.48 - Exemplo de resposta “sem justificativa” com especulação numérica - item 3c

c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados na tabela qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023? *quase 80% de 100%*

[*quase 80% de 100%*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.49 - Exemplo de resposta “sem justificativa” na Língua natural escrita - item 3c

c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023? *Pouca probabilidade pois ele fico muito abaixo do primeiro, é que mais teve vendas, si a apple*

[*Pouca probabilidade pois ele fico muito abaixo do primeiro, é que mais teve vendas, si a apple*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “*Considera a quantidade de celulares das marcas favoráveis*”, utilizada por poucos estudantes, eles consideraram corretamente analisar o gráfico ou a tabela, identificando apenas as quantidades de celulares da marca “Samsung” vendidos no ano de 2023 - 60 milhões (Figura 7.50). Todavia, desconsideraram o total de celulares do espaço amostral e também não calcularam a probabilidade de esse evento ocorrer.

Figura 7.50 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de celulares das marcas favoráveis

c) O Instituto Canals, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do "Samsung Galaxy" ser escolhido no ano de 2023? $13 + 20 + 21 = 60 \text{ milhões}$

Fonte: Dados da pesquisa.

A categoria “*Considera a quantidade de marcas*” evidencia que os estudantes têm a compreensão do conceito de Probabilidade, determinando a razão entre os casos favoráveis e possíveis, porém ainda demonstram uma lacuna conceitual, visto que tiveram uma interpretação equivocada dos dados para calcular a probabilidade, considerando simplesmente a probabilidade da quantidade das marcas (3/10), confundindo, assim, o evento e o espaço amostral (Figura 7.51).

Figura 7.51 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de marcas

Tabela: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023

Smartphone	Unidades (milhões)
Iphone 14 Pro Max	34
Iphone 15 Pro Max	33
Iphone 14	29
Iphone 14 Pro	29
Iphone 13	23
Galaxy A14 4G	21
Iphone 15 Pro	21
Galaxy A54 4G	20
Galaxy A14 5G	19
Iphone 15	17

Fonte: Canals/Divulgação. Disponível em: <<https://bit.ly/3LkXKdA>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

60 milhões de Samsung
186 milhões de Iphone
 $\frac{7}{10}$ Iphone
 $\frac{3}{10}$ Samsung
 $\left\{ \begin{array}{l} 30\% \text{ Samsung} \\ 70\% \text{ Iphone} \end{array} \right\}$

[60 milhões de Samsung, 186 milhões de Iphone, 7/10 Iphone, 3/10 Samsung , 30% Samsung , 70% Iphone]

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas categorizadas como “*Justifica em função do cálculo errado*” identificam a relação entre a quantidade de unidades do celular Samsung e o total de smartphones mais vendidos no mundo em 2023. Entretanto, apresentam falhas procedimentais no processo de soma dos dados, apresentando assim um resultado diferente do esperado (Figura 7.52).

Figura 7.52 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 3c

Tabela: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023	
Smartphone	Unidades (milhões)
Iphone 14 Pro Max	34
Iphone 15 Pro Max	33
Iphone 14	29
Iphone 14 Pro	29
Iphone 13	23
Galaxy A14 4G	21
Iphone 15 Pro	21
Galaxy A54 4G	20
Galaxy A14 5G	19
Iphone 15	17

Fonte: Canalyis/Divulgação. Disponível em: <<https://x.com/Canalyis/status/1754809015043342330>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

$\frac{480}{166} = 3,00$
 $60 - x$
 $166x = 6000$
 $x = 6.000$
 166
 $x = 32,25$

32,25%.

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse exemplo, o estudante determina corretamente a quantidade de elementos favoráveis (60 milhões), entretanto determinou o espaço amostral de forma equivocada. Esse equívoco interferiu diretamente na probabilidade encontrada por ele.

Nas respostas adequadas, os estudantes conseguiram somar os dados referentes à marca de celular e, considerando o espaço amostral corretamente, determinar a solução correta para esse item. Essas respostas foram apresentadas nas seguintes representações: fracionária (Figura 7.53); percentual (Figura 7.54); língua natural escrita (Figura 7.55); ou com múltiplas representações numéricas (Figura 7.56). Notamos a falta de respostas adequadas de estudantes que fizeram uso da representação decimal.

Figura 7.53 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 3c

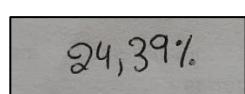
Tabela: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023	
Smartphone	Unidades (milhões)
Iphone 14 Pro Max	34
Iphone 15 Pro Max	33
Iphone 14	29
Iphone 14 Pro	29
Iphone 13	23
• Galaxy A14 4G	21
Iphone 15 Pro	21
• Galaxy A54 4G	20
• Galaxy A14 5G	19
Iphone 15	17

Fonte: Canalyis/Divulgação. Disponível em: <<https://x.com/Canalyis/status/1754809015043342330>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

$\frac{60}{246} = \frac{30}{123} = \frac{10}{41}$ de chance.

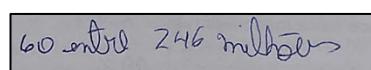
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.54 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 3c



Fonte: Dados da pesquisa.

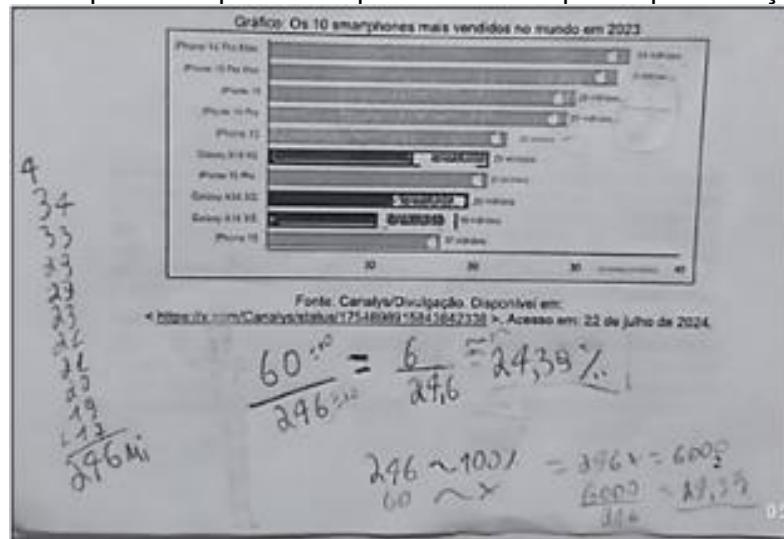
Figura 7.55 - Exemplo de resposta adequada na língua natural escrita no item 3c



[60 entre 246 milhões]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.56 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 3c



Fonte: Dados da pesquisa.

Diferente dos outros itens analisados, os estudantes do 3º ano também apresentaram a solução correta por meio da Língua natural escrita.

Por fim, o item 3d, “*Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?*”, é um item interessante porque remete à interpretação dos dados referentes aos dez tipos de smartphone vendidos no mundo em 2023 apresentados na representação tabular (Teste A) ou na representação gráfica (Teste B). Além disso, está associada diretamente às respostas dadas pelos estudantes no item 3b. Assim, reflete diretamente as percepções da Probabilidade Subjetiva, já que os estudantes apresentam suas compreensões em duas fases: *a priori* e *a posteriori*.

No item 3b (*a priori*), o estudante apresentou a chance de ocorrência do smartphone ter sido o mais vendido em 2023, a partir de suas experiências. No item 3c, apresentamos uma nova informação fornecida por uma pesquisa especializada do setor de tecnologia. Logo, o item 3d visa verificar se os estudantes retificam ou não a sua opinião, gerando, assim, a probabilidade *a posteriori* (Tabela 7.10).

Tabela 7.10 - Percentual de resposta considerando ano e teste (Questão 3d)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não respondeu	15,0	15,3	13,0	15,3
Sim, sem justificativa	5,0	1,7	4,3	4,2
Sim, com justificativa	33,3	32,2	39,1	34,7
Não, sem justificativa	13,3	10,2	14,5	6,9
Não, com justificativa	33,4	40,6	29,1	38,9

Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria dos estudantes não mudou de opinião após a análise dos dados da tabela ou do gráfico. Essa informação é preocupante quanto ao Letramento Probabilístico dos estudantes, visto que, mesmo com acesso a informações verídicas e relevantes, sua percepção permaneceu a mesma.

Nos dois tipos de teste, houve estudantes que não emitiram nenhum posicionamento. Além disso, identificamos que havia respostas sem justificativa, que sistematizamos de duas maneiras: sim (Figura 7.57) ou não (Figura 7.58).

Figura 7.57 - Exemplo de resposta “Sim, sem justificativa” no item 3d

- d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Sim,

[Sim.]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.58 - Exemplo de resposta “Não, sem justificativa” no item 3d

- d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Não, continuo com minha opinião.

[não, continuo com minha opinião]

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas com justificativas também foram organizadas de duas formas: “Sim, com justificativa”, na qual os estudantes revelaram mudança na sua compreensão a partir dos dados apresentados no item 3c; “Não, com justificativa”, na qual os estudantes disseram que não mudaram seu posicionamento.

Na justificativa “Financeira”, os estudantes pautaram-se em detalhes financeiros, como a quantidade de vendas e o preço dos smartphones, para referendar sua opinião (Figura 7.59 e Figura 7.60).

Figura 7.59 - Exemplo de resposta “Sim” e justificativa “Financeira” no item 3d

- d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Sim, porque pela tabela o Samsung galaxy não é tão vendido quanto as outras marcas.

[*Sim, porque pela tabela o Samsung galaxy não é tão vendido quanto as outras marcas]*

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.60 - Exemplo de resposta “Não” e justificativa “Financeira” no item 3d

- d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?
Porcer um celular mais em conta do que os outros

[*Porcer um celular mais em conta do que os outros]*

Fonte: Dados da pesquisa.

Na justificativa “Social”, os estudantes consideraram a posição social atrelada às marcas de smartphone e sua aceitação por parte da população (Figura 7.61 e Figura 7.62).

Figura 7.61 - Exemplo de resposta “Sim” e justificativa “Social” no item 3d

- d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

Talvez por não proporcionar ao status social que o iPhone oferece.

[*Talvez por não proporcionar ao status social que o iPhone oferece]*

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.62 - Exemplo de resposta “Não” e justificativa “Social” no item 3d

- d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?

não, já sabia que ele não era tão famoso.

[*não, já sabia que ele não era tão famoso]*

Fonte: Dados da pesquisa.

Para além dos dados apresentados na tabela e no gráfico, na justificativa “Técnica”, os estudantes basearam seu raciocínio nos recursos tecnológicos dos aparelhos, na qualidade do som e imagem, considerando elementos funcionais (Figuras 7.63 e 7.64).

Figura 7.63 - Exemplo de resposta “Sim” com justificativa “Técnica” no item 3d

d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?
 Sim, Porque antigamente o Samsung era mais desejado, acredito que era por conta da qualidade do produto, e também por não ter tanta diferença social como hoje em dia
 [Sim, Porque antigamente o Samsung era mais desejado, acredito que era por conta da qualidade do produto, e também por não ter tanta diferença social como hoje em dia]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.64 - Exemplo de resposta “Não” com justificativa “Técnica” no item 3d

d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?
 por conta este foi uma das primeiras marcas e não parou de fabricar modelos novos de aparelhos
 [por conta este foi uma das primeiras marcas e não parou de fabricar modelos novos de aparelhos]

Fonte: Dados da pesquisa.

A justificativa “Pessoal” traz aspectos individuais de cada sujeito, a partir de suas experiências, sentimentos e motivações pessoais (Figura 7.65 e Figura 7.66).

Figura 7.65 - Exemplo de resposta “Sim” com justificativa “Pessoal” no item 3d

d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?
 sim, porque eu achei que era 10% a menos e olhando o gráfico tive outra visão.

[sim, porque euachei que era 10% a menos e olhando o gráfico eu tive outra visão.]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.66 - Exemplo de resposta “Não” com justificativa “Pessoal” no item 3d

d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?
 Não, Porque o resultado deu perto do que eu achei.

[Não, Porque o resultado deu perto do que euachei.]

Fonte: Dados da pesquisa.

Essas justificativas evidenciam a subjetividade inerente à questão, visto que cada estudante tem experiências e concepções próprias. Logo, apresentam distintas opiniões quanto à chance de o evento em questão ter acontecido.

A Questão 4 estava associada ao contexto real envolvendo dados de uma situação ambiental, mais precisamente da velocidade da rajada de ventos no vale do São Francisco no início do mês de agosto de 2024.

Figura 7.67 - Diferentes representações da Questão 4

<p>Teste A - Representação gráfica</p> <p>O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), emitiu um alerta sobre o perigo potencial de vendaval no vale do São Francisco no início do mês de agosto, informando as velocidades das rajadas de vento em km/h para os próximos dias, a partir de 02 de agosto, conforme segue:</p>  <p>Fonte: Climatempo. Disponível em: https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-be. Acesso em: 22 de julho de 2024.</p> <p>Essas velocidades podem ser distribuídas nos seguintes intervalos:</p> <p>[40 - 44 km/h] [45 - 49 km/h] [50 - 54 km/h] [55 - 59 km/h]</p> <p>Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:</p> <p>a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h? b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.</p>	<p>Teste B - Língua natural escrita</p> <p>O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), emitiu um alerta sobre o perigo potencial de vendaval no vale do São Francisco no início do mês de agosto, informando as velocidades das rajadas de vento em km/h para os próximos dias, a partir de 02 de agosto, conforme segue:</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">57 km/h: 02/09</td> <td style="padding: 2px;">54 km/h: 03/09</td> <td style="padding: 2px;">55 km/h: 04/09</td> <td style="padding: 2px;">53 km/h: 05/09</td> <td style="padding: 2px;">48 km/h: 06/09</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">45 km/h: 07/09</td> <td style="padding: 2px;">49 km/h: 08/09</td> <td style="padding: 2px;">51 km/h: 09/09</td> <td style="padding: 2px;">47 km/h: 10/09</td> <td style="padding: 2px;">42 km/h: 11/09</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">54 km/h: 12/09</td> <td style="padding: 2px;">54 km/h: 13/09</td> <td style="padding: 2px;">52 km/h: 14/09</td> <td style="padding: 2px;">56 km/h: 15/09</td> <td style="padding: 2px;">54 km/h: 16/09</td> </tr> </table> <p>Fonte: Climatempo. Disponível em: https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-be. Acesso em: 22 de julho de 2024.</p> <p>Essas velocidades podem ser distribuídas nos seguintes intervalos:</p> <p>[40 - 44 km/h] [45 - 49 km/h] [50 - 54 km/h] [55 - 59 km/h]</p> <p>Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:</p> <p>a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h? b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.</p>	57 km/h: 02/09	54 km/h: 03/09	55 km/h: 04/09	53 km/h: 05/09	48 km/h: 06/09	45 km/h: 07/09	49 km/h: 08/09	51 km/h: 09/09	47 km/h: 10/09	42 km/h: 11/09	54 km/h: 12/09	54 km/h: 13/09	52 km/h: 14/09	56 km/h: 15/09	54 km/h: 16/09
57 km/h: 02/09	54 km/h: 03/09	55 km/h: 04/09	53 km/h: 05/09	48 km/h: 06/09												
45 km/h: 07/09	49 km/h: 08/09	51 km/h: 09/09	47 km/h: 10/09	42 km/h: 11/09												
54 km/h: 12/09	54 km/h: 13/09	52 km/h: 14/09	56 km/h: 15/09	54 km/h: 16/09												

Fonte: O Autor.

O item 4a pergunta ao estudante: “Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?”. Considerando o total do espaço amostral da velocidade do vento (15 velocidades) e os resultados que atendem ao evento investigado (42, 45, 47, 48, 49), temos que a probabilidade de a velocidade ser menor que 50 km/h é de 5/15 ou 1/3 (fracionária), 33,3% (percentual), 0,333 (numérica) (Tabela 7.11).

Tabela 7.11 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 4a)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	18,3	18,6	21,7	19,4
Sem justificativa	50,0	42,4	42,0	36,1
Considera a quantidade de temperatura	8,3	6,8	1,5	6,9
Justifica em função do cálculo errado	13,3	20,3	20,3	13,9
Adequada com justificativa fracionária	6,7	6,8	4,3	13,9
Adequada com justificativa percentual	3,4	3,4	1,5	1,5
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	--	1,7	8,7	8,3

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando a Tabela 7.11, observamos que poucos estudantes do 1º e do 3º ano conseguiram analisar os dados apresentados e determinar a resposta adequada.

Na categoria “*Em branco / não sabe*”, aproximadamente 20% deram esse tipo de resposta para ambos os anos e representações.

Muitos estudantes não deram justificativa. Esse fato requer atenção, visto que a falta de justificativa pode revelar uma dificuldade de analisar e refletir sobre a situação e/ou contexto (Figura 7.68 e 7.69).

Figura 7.68 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4a

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h? [50%, eu tem ou não tem]

[50%, eu tem ou não tem]
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.69 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4a

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h? [poucas, pois as rajadas de vento estão maiores que 50]

[poucas, pois as rajadas de vento estão maiores que 50]
Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “*Considera a quantidade de temperatura*”, é considerada apenas a quantidade de dias em que a velocidade do vento foi menor que 50 km/h (Figura 7.70).

Figura 7.70 - Exemplo de resposta que considera a quantidade de temperatura

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

Probabilidade de 5

Fonte: Dados da pesquisa.

Na terceira categoria, “Justifica em função do cálculo errado”, o estudante tem a compreensão da relação da probabilidade, contudo, confundiu os casos favoráveis e o espaço amostral (Figura 7.71).

Figura 7.71 - Exemplo de resposta que justifica em função do cálculo errado - Item 4a

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

Uma probabilidade de 3%
 $\frac{15}{15} \cancel{15}$
 $\frac{15}{15} \cancel{3}$
 $\frac{0}{0}$

Fonte: Dados da pesquisa

Avaliando as respostas adequadas quanto à probabilidade de a rajada de vento ser menor que 50 km/h, há uma variabilidade nas representações numéricas adotadas pelos estudantes, sendo elas fracionária (Figura 7.72), percentual (Figura 7.73) ou com múltiplas representações numéricas (Figura 7.74).

Figura 7.72 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 4a

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

$\frac{5}{15} \rightarrow 5 \text{ dias}$
 $\frac{5}{15} \rightarrow \text{soma total}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.73 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 4a

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

$0,33 \times 100 = 33\%$

$5 \cancel{15}$
 $0,33$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.74 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 4a

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

$\cancel{15 \text{ DIAS}} \quad \frac{5}{15} = \frac{1}{3} = \approx 33\%$

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 4b, “Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes

velocidades maiores que 50 km/h? Justifique” faz menção à noção de Probabilidade Condicional e sugere a compreensão de incerteza e aleatoriedade dos estudantes para a análise dessa situação. Nesse caso, esperávamos que os estudantes compreendessem a questão e afirmassem, por meio da análise do gráfico (Teste A) ou da Língua natural escrita (Teste B), que não era possível afirmar com absoluta certeza que haveria ventos com velocidade maior que 50 km/h nos dias seguintes (Tabela 7.12).

Tabela 7.12 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 4b)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	25,0	20,3	24,6	26,4
Sem justificativa	31,7	27,2	29,1	23,6
Justifica errada	38,3	35,6	27,5	29,2
Justificativa correta	5,0	16,9	18,8	20,8

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas associadas à categoria “*Em branco / não sabe*” continuam apresentando um percentual considerável.

Além disso, muitos estudantes continuam a não justificar suas respostas (Figuras 7.75, 7.76 e 7.77). Esses dados devem ser considerados nos processos interventivos, uma vez que saber argumentar sobre os dados é fundamental para um pensamento crítico. Independentemente do ano, os estudantes apresentam dificuldades para estabelecer as implicações de situações aleatórias em eventos futuros.

Figura 7.75 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4b

b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Teremos 54 Km/h

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.76 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4b

b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique. *Provavelmente sim*

[Provavelmente sim]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.77 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 4b

b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique. *Não*

Fonte: Dados da pesquisa.

Avaliando as respostas com justificativas erradas (Figura 7.78), observa-se que os estudantes apresentam dificuldades em compreender eventos cujos resultados são imprevisíveis.

Figura 7.78 - Exemplos de respostas com justificativa errada no item 4b

- b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Não, porque a rajada está menor que o vento.

[*não, porque a rajada está menor que o vento*]

- b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Sim, pois olhando as velocidades do Vento nos dias anteriores, percebe-se que ele só foi aumentando a Velocidade.

[*Sim, pois olhando as velocidades do vento nos dias anteriores, percebe-se que ele só foi aumentando a velocidade*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, nas respostas adequadas (Figura 7.79), de forma geral, em ambos os anos, os estudantes que tiveram êxito nesse item depararam-se com os dados apresentados na Língua natural escrita.

Figura 7.79 - Exemplos de respostas adequadas no item 4b

- b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Não, A análise de 5 dias é uma amostra pequena e não representa necessariamente, um padrão futuro.

[*Não, A análise de 5 dias é uma amostra pequena e não representa, necessariamente, um padrão futuro.*]

- b) Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique.

Não, porque a velocidade das rajadas de vento muda a cada dia

[*não, porque a velocidade das rajadas de vento muda a cada dia*]

Fonte: Dados da pesquisa.

A última questão da atividade diagnóstica versava sobre uma situação frequentista autêntica no contexto Social relativa ao número de adultos inseridos no mercado de trabalho brasileiro que possuíam o Ensino Médio completo e Superior Incompleto entre os anos de 2016 e 2023. Por tratar-se de uma situação com múltiplas representações (tabular e gráfica), em ambos os testes, adotamos apenas uma única organização.

Figura 7.80 - Múltiplas representações da Questão 5

Questão 5 - O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) obteve os resultados referentes ao total de pessoas inseridas no mercado de trabalho que terminaram o Ensino Médio e possuem o Ensino Superior Incompleto entre os anos de 2016 a 2023. A Tabela 1 mostra o número aproximado de pessoas em todo o país e o Gráfico 1 mostra o número aproximado de pessoas em relação a Região Nordeste.

Tabela 1: Quantidade de pessoas no Brasil inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023

Ano	Quantidade de pessoas (mil pessoas)
2016	35
2017	36
2018	37
2019	38
2022	42
2023	43

Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Gráfico 1: Quantidade de pessoas da Região Nordeste inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023



Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Com base nesses dados:

- Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?
- Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Fonte: O Autor.

No item 5a, “*Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?*”, almejávamos que os estudantes interpretassem e comparassem os dados fornecidos pelo IBGE para calcular a probabilidade do evento (Tabela 7.13).

Tabela 7.13 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 5a)

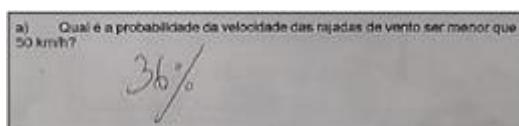
Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	23,3	20,3	23,2	29,2
Sem justificativa	36,7	37,3	34,8	26,5
Considera apenas os elementos do Nordeste ou Brasil	11,7	10,2	5,8	9,7
Justifica em função do cálculo errado	10,0	15,3	20,3	19,4
Adequada com justificativa fracionária	13,3	11,9	7,2	6,9
Adequada com justificativa percentual	3,3	3,3	4,4	2,7
Adequada com justificativa decimal	1,7	1,7	--	--
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	--	--	4,3	5,6

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se a presença de acertos nos dois anos de escolaridade, porém, com um fator inovador.

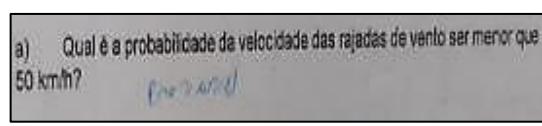
As respostas associadas à categoria “*Em branco / não sabe*” apresentam percentuais em torno de 20% para ambos os anos e ambas as representações. Já na categoria “sem justificativa”, respostas numéricas (Figura 7.81) ou intuitivas (Figura 7.82) não apresentam explanação dos argumentos.

Figura 7.81 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 5a



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.82 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 5a



Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “*Considera apenas os elementos do Nordeste ou Brasil*”, os estudantes estimam a probabilidade do evento acontecer apenas pelo número de pessoas do Nordeste (Figura 7.83) ou do Brasil (Figura 7.84) que foram inseridas no mercado de trabalho em 2018, apresentando, assim, uma lacuna na compreensão do conceito de Probabilidade quanto à relação do evento possível e o espaço amostral.

Figura 7.83 - Exemplo de resposta
“Considera apenas os elementos do Nordeste” no item 5a

Com base nesses dados:
a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?
Probabilidade de 7900 de ser escolhido aleatoriamente.

[*Probabilidade de 7900 de ser escolhido aleatoriamente*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.84 - Exemplo de resposta
“Considera apenas os elementos do Brasil” no item 5a

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

37 pessoas

[*37 pessoas*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação à categoria “Justifica em função do cálculo errado”, observamos que os estudantes conseguiram correlacionar o evento e o espaço amostral, mas cometeram erros no momento de efetivar o cálculo (Figura 7.85).

Figura 7.85 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 5a

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

$$\frac{7900}{36000} = \frac{79}{360}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse exemplo, um estudante do 3º ano considera corretamente o número de casos favoráveis da Região Nordeste no ano de 2018, todavia confundiu-se e adotou como espaço amostral a quantidade de pessoas do Brasil com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto do ano de 2017. Por esse motivo, podemos dizer que ele compreendeu a lógica do item, mas errou no cálculo.

Por fim, observamos um percentual de respostas adequadas para esse item. Vale salientar que esse foi o único item em que localizamos respostas apresentadas na forma decimal (Figura 7.86). Também obtivemos respostas por meio da representação fracionária (Figura 7.87); percentual (Figura 7.88); ou com múltiplas representações numéricas (Figura 7.89).

Figura 7.86 - Exemplo de resposta adequada na forma decimal no item 5a

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

0,213 mais ou menos

[*0,213 mais ou menos*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.87 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 5a

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

$$\frac{7.900}{37.000}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.88 - Exemplo de resposta adequada na forma percentual no item 5a

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

A probabilidade de ser escolhida uma pessoa da região Nordeste em 2018 era aproximadamente 21,35%

[A probabilidade de ser escolher uma pessoa da região Nordeste em 2018 era aproximadamente 21,35%]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.89 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 5a

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

$$P(\text{Nordeste} | 2018) = \frac{7.900}{37.000} \approx 0,9135$$

Aproximadamente
91,35%

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 5b, “Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?”, estimava que os estudantes refletissem criticamente sobre a relação entre a variabilidade dos dados relativos ao grau de escolaridade (Ensino Médio Completo e Superior Incompleto) a nível de Brasil e Nordeste, ponderando se essas mudanças interferem na probabilidade da seleção de pessoas de uma região (Tabela 7.14).

Tabela 7.14 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 5b)

Tipos de resposta	Ano de escolaridade			
	1º ano		3º ano	
	Teste A	Teste B	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	26,7	25,4	26,1	31,9
Sem justificativa	48,3	45,8	46,4	48,6
Justifica inadequada	13,3	15,2	15,9	11,2
Justificativa adequada	11,7	13,6	11,6	8,3

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados da Tabela 7.14, observamos novamente muitas respostas em branco ou sem justificativa e uma pequena quantidade de respostas adequadas, o que indica dificuldade de análise e argumentação dos estudantes.

Na categoria “*Em branco / não sabe*”, assim como em itens anteriores, foram elevadas as taxas percentuais dos estudantes que não informaram alguma resposta.

A categoria “*Sem justificativa*” engloba a maioria das respostas fornecidas pelos estudantes do 1º e do 3º ano, o que chama a nossa atenção, pois quase 50% dos estudantes simplesmente responderam esse item com “sim” ou “não”.

Na categoria “*Justificativa inadequada*”, agrupamos as respostas em que os estudantes afirmavam que o aumento entre 2016 e 2023 não interferia na probabilidade de escolher aleatoriamente uma pessoa do Nordeste (Figura 7.90) ou informavam que interferia, porém, fazendo uso de argumentos incoerentes (Figura 7.91).

Figura 7.90 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 5b

b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Não. Porque a Região Nordeste não significa nada, pois todos são iguais, então essa probabilidade é 50%.

[*Não. Porque a Região Nordeste não significa nada, pois todos são iguais, então essa probabilidade é 50%*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 7.91 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 5b

b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Sim, porque quanto mais pessoas escolhidas com ensino M. completo, essa probabilidade tem a diminuir.

[*Sim, porque quanto mais pessoas escolhidas com ensino M. completo, essa probabilidade tem a diminuir*]

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta apresentada na Figura 7.90 traz claramente uma compreensão de Probabilidade Clássica, pois o estudante acredita que o aumento não afeta a

probabilidade, que seria de 50% (ser sorteado ou não). Já na Figura 7.91, o estudante informa que o aumento afeta, porém usa como argumento que, ao invés de a probabilidade majorar, ela irá diminuir, apresentando assim uma justificativa errada.

Por fim, a categoria “*Justificativa adequada*” traz as respostas dos estudantes que afirmaram corretamente haver uma estreita relação entre o aumento de pessoas do Nordeste e a probabilidade de se escolher aleatoriamente uma pessoa dessa região (Figura 7.92).

Figura 7.92 - Exemplos de respostas adequadas no item 5b

- b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Sim, quanto maior o numero maior a chance de ser escolhido

[*Sim, quanto maior o numero maior a chance de ser escolhido*]

- b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Sim, pois com o aumento dos numeros, aumenta a probabilidade

[*Sim, pois com o aumento dos números, aumenta a probabilidade*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Ambas as respostas evidenciam que os estudantes compreendem que quanto maior for o número de pessoas que atendem aos resultados possíveis (escolher uma pessoa do Nordeste), maior será a probabilidade de esse evento acontecer. Essa ação só é possível dada a razão entre o número de casos favoráveis e o número total de resultados possíveis.

7.1 REFLEXÕES GERAIS

Refletindo sobre as respostas da atividade diagnóstica, podemos afirmar, a partir dos dados analisados, que a maioria dos estudantes possui lacunas importantes que não colaboram para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, visto o alto percentual em ambos os anos que tiveram dificuldade para analisar as situações

propostas e argumentar sobre elas. Quanto a isso, concordamos com Gal (2005) sobre a importância da postura crítica quando nos deparamos com situações probabilísticas.

As questões da atividade diagnóstica atenderam ao Elemento do conhecimento “Contexto”, proposto por Gal (2005), ao trazer variadas situações com predomínio de dados reais. Todavia, percebemos que o maior percentual de acertos para ambos os anos foi na questão envolvendo o contexto fictício dos jogos de azar. Esse resultado se assemelha aos encontrados por Alvarado Martinez *et al.* (2021) que, analisando o desempenho de estudantes chilenos do Ensino Fundamental, identificaram que a noção intuitiva dos participantes estava centralizada em situações envolvendo jogos de azar.

De fato, como analisamos na seção 5, há uma maior quantidade de habilidades atreladas ao significado Clássico nos documentos analisados (BNCC e Currículos de Pernambuco e da Bahia). Da mesma forma, na seção 6, ao analisar os livros didáticos de Matemática aprovados no PNLD 2021, identificamos a superioridade das questões de situação Clássica no contexto dos jogos de azar da unidade temática “Probabilidade e Estatística”. Essa predominância pode induzir a prática docente a concentrar o ensino de Probabilidade em situações clássicas equiprováveis e, consequentemente, limitar a visão dos estudantes para informar, averiguar e tomar decisões a partir de informações probabilísticas reais.

Nesse viés, concordamos com as reflexões feitas por Fernandes e Junior (2015), que associam essas dificuldades à forma adotada para o processo de ensino, baseada na aplicação de técnicas e restrita ao contexto escolar. Quanto a isso, Batanero *et al.* (2015) reforçam a necessidade de ter uma apreensão com as práticas desses profissionais com relação ao ensino de Probabilidade.

Tomando como base os três tipos de situações probabilísticas (computacionais/cálculo, interpretativas e de tomadas de decisão) propostas por Gal (2005), caracterizamos e analisamos os itens da atividade diagnóstica pautados nesse tripé.

Quanto ao desempenho dos estudantes nos cálculos (itens 1b, 2a, 3c, 4a e 5a) que exigiam a aplicação de técnicas para determinar um resultado numérico, concluímos que, de forma geral, os estudantes apresentaram dificuldades em responder, dado o ínfimo percentual de acertos nas questões, bem como o fato de não haver uma diferença estatística entre eles. Salientamos que as habilidades

referentes à Probabilidade estão inseridas apenas no 3º ano do Ensino Médio nos documentos oficiais analisados (Base Nacional Comum Curricular, Currículo dos estados da Bahia e de Pernambuco).

Com relação às representações das questões, diferente do que imaginamos *a priori*, não houve diferenças significativas com relação ao desempenho dos estudantes a partir das diversas representações dos dados probabilísticos presentes no enunciado das questões.

Esse resultado se contrapõe às reflexões feitas por Canaveze (2013); Binder, Krauss e Bruckmaier (2015); Agus *et al.* (2015); e Zorzos e Avgerinos (2023), os quais afirmam que os estudantes tiveram melhor desempenho a partir da representação visual.

Entretanto, ressaltamos que, em função do baixo desempenho dos estudantes, em ambos os anos, a representação pode não exercer influência. No nosso Estudo 4, buscaremos investigar com maior profundidade essa questão.

Logo, precisamos concordar com um ponto lacunar apresentado por Post e Prediger (2022), que afirmam que o uso de múltiplas representações nos enunciados das questões, por si só, não é suficiente para um bom desempenho dos estudantes. Assim, como argumentado por Custódio (2017), concordamos que a restrição no uso de representações afeta o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Nas situações interpretativas que exigiam dos estudantes um posicionamento quanto às situações, observamos que os argumentos adotados por eles não apresentavam muitos elementos linguísticos associados à Probabilidade, como “chance”, “possível”, “improvável”, dentre outros. Também identificamos dificuldades dos participantes para analisar e argumentar sobre as situações associadas ao Elemento do conhecimento “Grandes ideias”, fazendo menção a situações de variabilidade, aleatoriedade, independência, incerteza/previsibilidade. Essas dificuldades também foram diagnosticadas por Raposo, Nascimento, Costa e Gea (2017) e Fernandes e Braga (2023).

Da mesma forma, apresentaram dificuldades em tomar decisões. A questão 3 apresentava uma Probabilidade Subjetiva, estimulando o uso das crenças e atitudes dos estudantes, para serem confrontadas com dados reais. Observamos uma dificuldade dos estudantes em se posicionarem diante das situações. A prática escolar parece não estar estimulando esse tipo de habilidade. Ody e Viali (2016) também identificaram lacunas dos estudantes em argumentar, fazer avaliações críticas e tomar

decisões. Esses fatores reverberam a falta de criticidade e de sentimentos pessoais que referendam suas decisões, comprometendo, assim, o desenvolvimento do Letramento Probabilístico dos estudantes.

Diante dessas reflexões, destacamos a importância de os estudantes terem noção dos diferentes tipos de Probabilidade, compreenderem distintos contextos e representações, bem como conhecerem as noções fundamentais para a apreensão do conceito de Probabilidade e para poderem ter um posicionamento crítico e reflexivo frente às situações do cotidiano.

Dessa forma, no próximo capítulo, buscaremos descrever e comentar acerca de uma sequência de ensino que elaboramos e desenvolvemos a partir do uso de dados autênticos, associados a vários contextos, na tentativa de estimular a interpretação e a utilização de variadas representações, buscando desenvolver o Letramento Probabilístico de estudantes do Ensino Médio.

8 RESULTADOS: INTERVENÇÃO DE ENSINO

Neste capítulo, apresentamos as análises e os resultados referentes ao Objetivo Específico 4: “Analisar uma sequência de ensino envolvendo Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações, para estudantes do Ensino Médio de Pernambuco e Bahia”.

Dessa forma, sistematizamos o estudo que realizamos em duas etapas: (a) pré-teste e (b) intervenção de ensino. O estudo foi desenvolvido com duas turmas do 3º ano do Ensino Médio da rede estadual da Bahia e outra turma de Pernambuco. A escolha por conduzir esta etapa da pesquisa em ambos os estados está associada à intenção de considerar realidades diversas, tais como currículo, estudantes e ambientes escolares distintos. Apesar de este estudo ter sido realizado simultaneamente em dois estados, reafirmamos, assim como no Estudo 3, que não propusemos comparações entre esses entes federativos.

Sendo assim, inicialmente, apresentamos os resultados da análise quantitativa, seguidos da qualitativa das duas turmas no pré-teste. Posteriormente, detalhamos a condução das ações que ocorreram durante a intervenção educativa, focando nas atividades e nas conversas em grupo para identificar se a utilização de diferentes representações de Probabilidade, a partir de dados autênticos, colaborou para o aprendizado dos estudantes e para um possível desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

8.1 ANÁLISE DO PRÉ-TESTE

Para analisar quantitativamente as respostas dos estudantes, atribuimos a pontuação “0” quando a resposta era inadequada e “1” quando a resposta mostrava coerência. Dentre os 12 itens presentes no pré-teste, a pontuação máxima possível era de nove pontos, pois os itens “a, b e d” da Questão 3 foram analisados apenas qualitativamente, por trazerem aspectos disposicionais que envolvem as experiências, opiniões e crenças dos estudantes.

A atividade diagnóstica foi organizada em duas versões (A e B), apresentando as mesmas questões, porém, com a distinção nas representações dos dados (Língua

natural escrita, tabular e gráfica). Essa atividade foi desenvolvida com 42 (quarenta e dois) estudantes do 3º ano do Ensino Médio de duas instituições públicas localizadas em Juazeiro-BA e Petrolina-PE durante o mês de agosto de 2025. A seleção dessas escolas foi feita pela facilidade de acesso à gestão escolar, aos professores de Matemática e aos estudantes dessas instituições. Salientamos que essas turmas não haviam participado anteriormente do Estudo 3.

O pré-teste foi proposto para ser respondido em duas aulas de 50 minutos, totalizando um tempo máximo de cem minutos. Metodologicamente, entregamos a cada estudante, de forma intercalada, uma versão do pré-teste contendo 5 (cinco) questões com predominância de dados autênticos e contextos reais, elementos importantes do Letramento Probabilístico.

Dessa forma, apresentamos inicialmente a análise quantitativa do desempenho dos estudantes, conforme o tipo de teste (Tabela 8.1).

Tabela 8.1 - Média de acertos dos participantes no pré-teste

Ano	Teste	Média de Acertos	Desvio Padrão	N
3º ano	A	2,86	2,53	21
3º ano	B	2,14	2,15	21
	TOTAL	2,50	2,35	42

Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que o rendimento dos estudantes, independentemente do tipo de teste, foi bastante insatisfatório, dado que a pontuação máxima era de 9 (nove) pontos, permitindo-nos inferir que os estudantes apresentaram dificuldades para a resolução, seja de situações interpretativas, seja de cálculo matemático relacionados ao conceito de Probabilidade. Essas lacunas influenciam diretamente no desenvolvimento do Letramento Probabilístico, no sentido de conseguirem (ou não) analisar e posicionarse criticamente frente a dados probabilísticos reais.

A dificuldade de analisar e adotar uma postura crítica em relação a situações de Probabilidade também foi percebida no estudo de Álvarez-Arroyo, Batanero e Gea (2024) com futuros professores de Matemática do Ensino Médio.

A variação das médias (2,86 para a versão A e 2,14 para a versão B) indica que não há diferença entre os grupos de estudantes em função das diferentes representações. Realizamos uma Análise de Variância – ANOVA, considerando o desempenho total por tipo de testes para identificar a possibilidade de diferenças, e os resultados $F(1, 40) = 0,969$ $p \geq 0,331$ evidenciam que não houve diferenças

significativas. Sendo assim, podemos afirmar que o tipo de teste/representação não influenciou no desempenho dos estudantes.

Esses resultados corroboram os resultados de Agus *et al.* (2015), que também observaram que o desempenho dos estudantes não apresentava diferenças em função do tipo de representação.

Visando entender os tipos de respostas dadas pelos estudantes, realizamos uma análise qualitativa levando em conta o tipo de teste para cada uma das perguntas. Ressaltamos que essa análise foi baseada nas mesmas categorias adotadas no Estudo 3.

A Questão 1 envolvia um contexto fictício de jogos de azar, com os dados apresentados na Língua natural escrita (Teste A) e na representação tabular (Teste B).

Figura 8.1 - Questão 1 do pré-teste na representação na Língua natural escrita

TESTE A

Questão 1 - Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores.

Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12).

Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11).

A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:
(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)

- Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
- Qual a probabilidade de sair a soma 8?

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.2 - Questão 1 do pré-teste na representação tabular

TESTE B

Questão 1 - Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores.

Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12).

Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados:

1º dado \ 2º dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 1a: “Os *dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique*” requisitava a análise da probabilidade de resultados (soma dos lados dos dados) entre dois competidores. Ambos tinham a mesma probabilidade de ganhar o jogo. Analisamos qualitativamente esses resultados, ponderando os tipos de respostas e teste (Tabela 8.2).

Tabela 8.2 - Percentual por tipo de resposta e teste (Questão 1a)

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	4,8	19,0
Sem justificativa	14,3	14,3
Considera a soma das faces	33,3	19,0
Justifica em função do cálculo errado	14,3	4,8
Adequada com justificativa	33,3	42,9

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados apresentados na Tabela 8.2, observamos que em ambos os tipos de teste houve estudantes que acertaram a questão, sendo um maior percentual para o teste B. Nesse caso, podemos dizer que os dados dos pares ordenados sistematizados na representação tabular auxiliaram mais os estudantes. Essa ação difere dos resultados de Alvarado Martinez *et al.* (2021), os quais concluíram que os estudantes tiveram dificuldade ao depararem-se com situações em que os dados probabilísticos foram expostos na representação tabular.

As respostas que pertencem à categoria "Em branco / não sabe" referem-se aos casos em que o estudante não apresentou resposta alguma ou declarou "não sei". Esse tipo de retorno foi observado em maior proporção no teste B (19%).

Na categoria “Sem justificativa”, agrupamos as respostas que só indicam “sim” ou “não”, o que dificulta a nossa compreensão sobre o raciocínio dos estudantes (Figura 8.3). Além dessas, também foram incluídas respostas que não oferecem justificativas, como quando o estudante reproduz o enunciado, escreve algo que não se relaciona com a questão (Figura 8.4) ou afirma que os dois jogadores tinham a mesma probabilidade, mas com uma justificativa que não se alinha com a lógica da questão (Figura 8.5).

Figura 8.3 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a do pré-teste

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
[Não]

[Não]
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.4 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 1a do pré-teste

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Quem conseguir mais pontos ganha!

[Quem conseguir mais pontos ganha!]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.5 - Exemplo de resposta com justificativa incoerente (item 1a) do pré-teste

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Sim, pois á muitos chaces de cair o mesmo resultado

[Sim, pois á muitos chaces de cair o mesmo resultado]

Fonte: Dados da pesquisa.

A categoria "Considera a soma das faces" agrupa as respostas nas quais os estudantes justificavam de maneira incorreta, com base na adição das faces que concediam pontos aos jogadores, com Cláudio apresentando seis números pares e Bruno cinco números ímpares (Figura 8.6). Esse tipo de resposta foi o mais frequente no enunciado, na representação na Língua natural escrita (33,3%).

Figura 8.6 - Exemplo de resposta que considera a soma das faces (item 1a) do pré-teste

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
Não. Pois o Claudio tem uma chance a mais de cair em um de seus números.

[Não. Pois o Claudio tem uma chance a mais de cair em um de seus números.]

Fonte: Dados da pesquisa.

As informações relacionadas à categoria “Justifica em função do cálculo errado” trazem aspectos significativos a serem analisados. Nesse tipo de resposta, os estudantes cometem um equívoco de natureza procedural, não conceitual. (Figura 8.7). Observa-se, em termos percentuais, uma maior proporção de respostas categorizadas dessa maneira nos testes do tipo A, em que os dados foram apresentados na Língua natural escrita. Dessa maneira, podemos concluir que essa representação pode ter influenciado os equívocos cometidos pelos estudantes.

Figura 8.7 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 1a do pré-teste

- a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.

Não pois a pontuação está diferente um ficou com mais e o outro menos.
Jogadores: Claudio: 37 Bruno: 34

[*Não. pois a pontuação está diferente um ficou com mais e o outro menos. Resultados: Claudio: 37 Bruno: 34*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “Adequada com justificativa”, os estudantes analisaram os pares ordenados na Língua natural escrita ou na representação tabular e informaram corretamente que ambos os jogadores tinham chances iguais de ganhar (Figuras 8.8 e 8.9).

Figura 8.8 - Exemplo de resposta adequada comparando na Língua natural escrita – item 1a do pré-teste

Claudio	TESTE A	Bruno
(1,1)	Questão 1 - Dois jogadores precisam fazer o lançamento de dois dados e somar os resultados das faces superiores.	(1,1)
(4,3)(2,2)(3,3)	Claudio ganha um ponto se a soma das faces dos dados for os números (2, 4, 6, 8, 10, 12).	(1,4)(2,3)(3,2)
(1,5)(2,5)(3,3)(4,2)	Bruno pontuará se a soma das faces dos dados for os números (3, 5, 7, 9, 11). (4,1)	(4,5)(2,5)(3,3)
(5,1)	A seguir estão todos os possíveis pares ordenados ao lançar dois dados: (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3).	(4,3)(5,2)
(2,6)(3,5)(4,4)	(6,4), (6,5), (6,6)	(6,1)
(5,3)(6,2)	a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.	(3,6)(4,5)
(4,6)(5,5)(6,4)	<i>Sim, cada um tem 36 chances</i>	(5,4)(6,3)
6,6	b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?	$\frac{5}{36} = 0,1388 = 13,88\%$
	$(2,6)(3,5)(4,4)(5,3)(6,2) = 5$	$\begin{array}{r} 6 \\ + 4 \\ \hline 10 \end{array}$

[*Sim, cada um tem 18 em 36 chances*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.9 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações - item 1a do pré-teste

a) Os dois jogadores têm a mesma chance de vencer esse jogo? Justifique.
$\frac{36}{36} = 0,5 (50\%)$
$2+3 \\ 3+2 \\ 4+2 \\ 5+1 \\ 6+0$
$2+4 \\ 3+3 \\ 4+2 \\ 5+1 \\ 6+0$
$3+3+2+1=10$
$3+3+5+4+1=18$
$4+2+3+1=10$
$5+1+4+3=13$
$6+0+2+1=9$

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 1b, “Qual a probabilidade de sair a soma 8?”, está associado à habilidade EM13MAT312 da BNCC (Tabela 8.3). Os resultados evidenciam um baixo

percentual de acerto para ambas as turmas (23,9% e 28,6%, respectivamente). Essas dificuldades também foram encontradas por Memnun, Ozbilin, Dinc (2019), ao investigarem estudantes do Ensino Médio da Turquia.

Porém, não esperávamos essa dificuldade com o cálculo de probabilidade, uma vez que os livros didáticos aprovados pelo PNLD vêm enfatizando muito essa habilidade, como evidenciamos no Estudo 2. Logo, podemos interpretar que, mesmo os materiais didáticos insistindo nos cálculos, ainda predominam lacunas conceituais e procedimentais na formação dos estudantes com relação à Probabilidade.

Tabela 8.3 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 1b)

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	9,5	28,6
Sem justificativa	23,8	19,0
Considera a quantidade de pares ordenados	33,3	19,0
Justifica em função do cálculo errado	9,5	4,8
Adequada com justificativa fracionária	19,0	14,3
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	4,9	14,3

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando as informações da Tabela 8.3, é possível notar que o tipo de representação não foi crucial para o desempenho, dada a proximidade de acertos nos dois tipos de testes. Dessa forma, esse resultado não se coaduna com os resultados encontrados por Corter e Zahner (2007) e Zahner e Corter (2010), segundo os quais as representações são decisivas para resolver situações de Probabilidade.

As respostas da categoria “*Em branco / não sabe*” foram maiores nos testes do tipo B (28,6%). A categoria “*Sem justificativa*” reúne as respostas nas quais os estudantes apresentaram apenas um percentual aleatório para indicar a possibilidade de o evento ocorrer (Figura 8.10) e aquelas que utilizam expressões qualitativas na língua escrita para informar a chance de o evento ocorrer (Figura 8.11).

Figura 8.10 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b do pré-teste

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
[Acho que 50%]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.11 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 1b do pré-teste

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
Ela é moderada porque foi na base da sorte

[*Ela é moderada porque foi na base da sorte*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Nas respostas identificadas como “Considera a quantidade de pares ordenados”, podemos sinalizar uma lacuna na compreensão de Probabilidade, uma vez que os estudantes apenas mostram quantos pares ordenados resultam em uma soma de 8 (Figura 8.12). Essa lacuna apresentou-se de forma mais evidente nas respostas fornecidas pelos estudantes que responderam ao Teste A (33,3%).

Figura 8.12 - Exemplo de resposta com a exposição dos pares ordenados no item 1b do pré-teste

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8? (2,6), (5,3), (6,2), (4,4)
(3,5)

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas da categoria “Justifica em função do cálculo errado” evidenciam compreensões equivocadas dos estudantes para o cálculo da Probabilidade (Figura 8.13) ou determinaram de forma incorreta a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (Figura 8.14).

Figura 8.13 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 1b do pré-teste

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
~~X = 2,6, 3,5, 4,4, 5,3, 6,2 = 40~~ ~~40 / 8~~ - ~~40~~ / ~~8~~ = ~~5~~

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.14 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 1b do pré-teste

b) Qual a probabilidade de sair a soma 8?
~~6~~
~~36~~

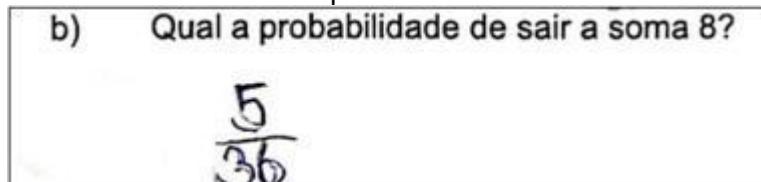
Fonte: Dados da pesquisa.

No exemplo da Figura 8.13, o estudante agrupou corretamente os pares ordenados em que a soma dá 8, porém somou todos os números, chegando ao resultado 40, e dividiu pelo valor solicitado no enunciado da questão (8).

Nas categorias das respostas “Adequadas”, os estudantes determinaram a probabilidade de sair a soma 8, na representação fracionária, percentual ou decimal. Nesse contexto, observamos que os estudantes responderam fazendo uso apenas da

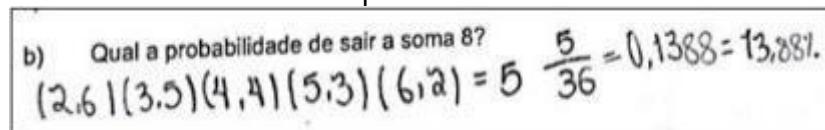
representação fracionária (Figura 8.15) e das múltiplas representações numéricas (Figura 8.16).

Figura 8.15 - Exemplo de resposta adequada com representação fracionária no item 1b do pré-teste



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.16 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 1b do pré-teste

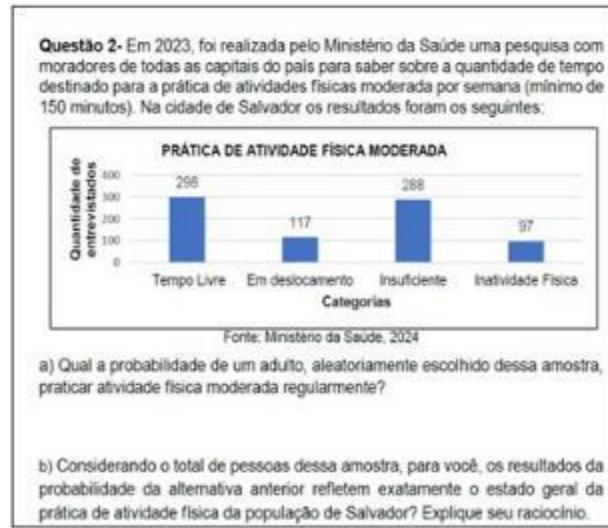


Fonte: Dados da pesquisa.

Percebemos que essa questão teve o maior percentual de acertos, se comparada às demais questões. Podemos associar isso ao contexto de jogos de azar, presente majoritariamente nos livros didáticos aprovados no PNLD 2021, que, conforme o Estudo 2, privilegia situações desse contexto. Como ressaltado por Barbosa e Melo (2021), o ensino de Probabilidade está pautado em contextos que diferem da realidade dos estudantes.

A Questão 2 também tinha dois itens, um de resolução numérica e outro de interpretação, envolvendo uma situação no contexto autêntico da Saúde, com os dados no Teste A apresentados graficamente e no Teste B na Língua natural escrita.

Figura 8.17 - Enunciado da Questão 2 do pré-teste na representação tabular



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.18 - Enunciado da Questão 2 do pré-teste na Língua natural escrita

Questão 2- Em 2023, foi realizada pelo Ministério da Saúde uma pesquisa com moradores de todas as capitais do país para saber sobre a quantidade de tempo destinado para a prática de atividades físicas moderada por semana (mínimo de 150 minutos). Na cidade de Salvador os resultados foram os seguintes: 298 pessoas praticam atividades físicas moderada no tempo livre; 117 praticam atividades físicas moderadas em deslocamento; 288 possuem prática insuficiente de atividade física moderada e 97 pessoas tem inatividade física.

Fonte: Dados da pesquisa.

No item 2a, “*Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?*”, temos um baixo percentual de acertos (28,5% no Teste A e 14,3% no Teste B), como apresentado na Tabela 8.4.

Tabela 8.4 - Percentual por tipo de resposta por teste (Questão 2a) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	23,8	14,3
Sem justificativa (intuitiva e conjectura numérica)	14,3	14,3
Considera a quantidade de casos favoráveis	4,8	9,5
Justifica em função do cálculo errado	28,6	47,6
Adequada com justificativa fracionária	23,7	14,3
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	4,8	---

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas da categoria “*Em branco / não sabe*” ocorreram nos dois tipos de testes, porém com maior ênfase no Teste A (23,8%). Na categoria “*Sem justificativa*”, agrupamos as respostas pautadas em suposições numéricas (Figura 8.19) e respostas em que o estudante recorre a expressões comuns na Língua natural escrita para mencionar a probabilidade do acontecimento (Figura 8.20). Essa forma de resposta teve o mesmo percentual em ambos os tipos de representações (14,3%).

Figura 8.19 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a do pré-teste

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?
50%
[50%]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.20 - Exemplo de resposta “sem justificativa” no item 2a do pré-teste

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?
Pouca probabilidade
[Pouca probabilidade]

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “*Considera a quantidade de casos favoráveis*”, identificamos as respostas nas quais os estudantes ponderaram somente a quantidade de pessoas que realizavam exercícios moderados, seja no tempo livre ou em deslocamento (Figura 8.21). Respostas desse tipo ocorreram nos dois tipos de testes.

Figura 8.21 - Exemplo de resposta “*Considera a quantidade de casos favoráveis*” no item 2a do pré-teste

Fonte: Ministério da Saúde, 2024

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente? 

[117]

Fonte: Dados da pesquisa.

A categoria com maior frequência de respostas foi a “*Justifica em função do cálculo errado*” (28,6% no Teste A e 47,6% no Teste B). Esses dados permitem conjecturarmos que, independentemente da representação adotada nos dados dessa questão, os estudantes cometem erros procedimentais durante a resolução, evidenciando possíveis lacunas em conceitos fundamentais, tais como nas operações fundamentais da aritmética (Figura 8.22). Esses erros procedimentais também foram descritos por Memnun, Ozbilen, Dinc (2019) e Álvarez-Arroyo, Batanero e Gea (2024).

Figura 8.22 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado no item 2a do pré-teste

Fonte: Ministério da Saúde, 2024

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

$$\begin{array}{r} 515 \\ \hline 800 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 290 \\ + 117 \\ \hline 515 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse exemplo, o estudante soma corretamente o total de entrevistados de cada categoria para determinar o espaço amostral dessa pesquisa (800 entrevistados). Porém, cometeu um equívoco ao determinar o número de casos favoráveis.

Analizando as respostas adequadas, temos apenas a utilização de duas representações, a fracionária (Figura 8.23) e múltiplas representações numéricas (Figura 8.24).

Figura 8.23 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 2a do pré-teste

a) Qual a probabilidade de um adulto, aleatoriamente escolhido dessa amostra, praticar atividade física moderada regularmente?

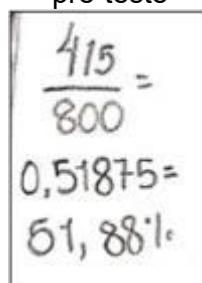
$\frac{415}{800}$

$0,51875 =$

$51,88\%$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.24 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 2a do pré-teste



Fonte: Dados da pesquisa.

O item 2b, “Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio”, visava estimular os estudantes, por meio da Língua natural escrita, a posicionarem-se em relação à amostra da pesquisa e à comparação com a população da cidade de Salvador (Tabela 8.5).

Tabela 8.5 - Percentual por tipo de resposta por teste (Questão 2b) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	33,3	52,4
Sem justificativa	4,8	4,8
Inadequada com justificativa errada	28,6	28,6
Com justificativa adequada	33,3	14,2

Fonte: Dados da pesquisa.

Diante do alto percentual de respostas em branco ou erradas, fica explícita a dificuldade dos estudantes em analisar a relação entre amostra e população. No Teste A, os estudantes apresentaram um desempenho ligeiramente superior, principalmente diante do alto percentual de respostas em branco no Teste B.

Na terceira categoria, os estudantes, de forma errônea, afirmam que as informações da pesquisa fornecem com precisão a realidade em Salvador e ainda fazem uso de argumentos que não fazem sentido no contexto (Figura 8.25).

Figura 8.25 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 2b do pré-teste

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

A falta de Atividade Física.

[A Falta de Atividade Física]

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta desse estudante apresenta um aspecto interessante para afirmarmos que ele ainda não desenvolveu o Letramento Probabilístico, uma vez que, mesmo com uma pesquisa baseada em informações confiáveis do Ministério da Saúde, ele usa um argumento desconexo, citando apenas a falta de atividade física, colocando suas convicções acima das informações fornecidas.

Nas respostas da categoria “*Com justificativa adequada*”, os estudantes mencionam que não é viável realizar essa generalização efetiva, dado o tamanho da população de Salvador, dentre outros aspectos (Figura 8.26). Esse tipo de resposta esteve mais presente no Teste A (33,3%).

Figura 8.26 - Exemplos de respostas adequadas no item 2b do pré-teste

b) Considerando o total de pessoas dessa amostra, para você, os resultados da probabilidade da alternativa anterior refletem exatamente o estado geral da prática de atividade física da população de Salvador? Explique seu raciocínio.

Não necessariamente, essa amostra mostra apenas o comportamento de 800 pessoas entrevistadas, não representa toda a população de Salvador.

[*Não necessariamente, essa amostra só mostra apenas o comportamento de 800 pessoas entrevistadas, não representa toda a população de Salvador*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Esse exemplo evidencia que o estudante tinha a noção do conhecimento estatístico/probabilístico, ao afirmar que resultados de uma amostra não podem ser generalizados automaticamente para toda a população.

A Questão 3 tinha 4 (quatro) itens, uma de resolução numérica (item c) e três subjetivas, associadas a crenças e disposições dos estudantes, envolvendo uma situação no contexto autêntico Tecnológico, com os dados no Teste A apresentados na representação tabular (Figura 8.27) e no Teste B na representação gráfica (Figura 8.28).

Figura 8.27 - Enunciado da Questão 3 do pré-teste na representação tabular**Questão 3**

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

() Impossível () Pouco provável () Provável () Muito provável () Certo
Justifique a sua resposta:

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados na tabela qual era a probabilidade do "Samsung Galaxy" ser escolhido no ano de 2023?

Tabela: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023

Smartphone	Unidades (milhões)
Iphone 14 Pro Max	34
Iphone 15 Pro Max	33
Iphone 14	29
Iphone 14 Pro	29
Iphone 13	23
Galaxy A14 4G	21
Iphone 15 Pro	21
Galaxy A54 4G	20
Galaxy A14 5G	19
Iphone 15	17

Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em:

< <https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338> >. Acesso em: 22 de julho de 2024.

d) Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do "Samsung Galaxy" mudou? Por quê?

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.28 - Enunciado da Questão 3 do pré-teste na representação gráfica

Questão 3

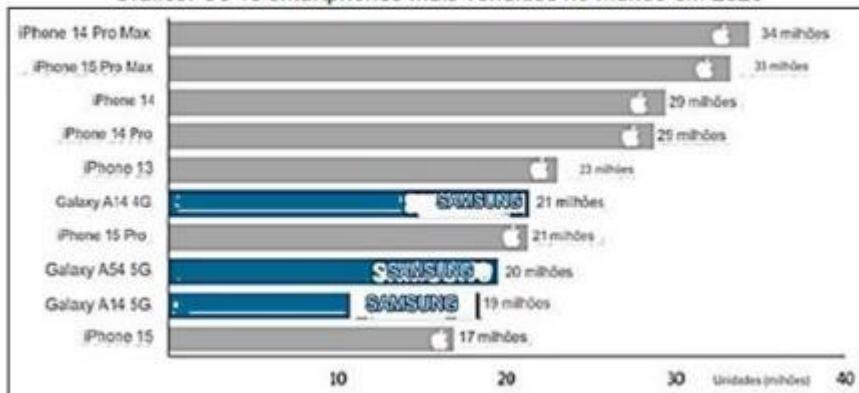
a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

() Impossível () Pouco provável () Provável () Muito provável () Certo
Justifique a sua resposta:

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do "Samsung Galaxy" ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

c) O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados qual era a probabilidade do "Samsung Galaxy" ser escolhido no ano de 2023?

Gráfico: Os 10 smartphones mais vendidos no mundo em 2023



Fonte: Canalys/Divulgação. Disponível em:
<<https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 3a, “*Qual seria a chance de você adquirir um iphone? Justifique a sua resposta*”, está relacionado à visão individual do estudante sobre a probabilidade de ele obter um iphone. Assim, não havia uma resposta correta. Propusemos o uso de termos qualitativos “*Impossível, Pouco provável, Provável, Muito provável e Certo*” (Tabela 8.6). Concordamos com Santos (2010; 2020) quanto à importância dos termos da linguagem probabilística para o processo de ensino-aprendizagem da Probabilidade.

Tabela 8.6 - Percentual de respostas considerando o tipo de teste (Questão 3a) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não respondeu	--	14,3
Impossível	4,8	9,5
Pouco provável	47,6	28,6
Provável	9,5	14,3
Muito provável	14,3	9,5
Certo	23,8	23,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados da Tabela 8.6, percebemos uma predominância de respostas com o uso do termo “*Pouco provável*” nos dois tipos de testes. Além disso, analisamos as justificativas fornecidas pelos estudantes para explicar suas escolhas e encontramos esclarecimentos relacionados às “*questões financeiras*” para comprar o iphone (Figura 8.29). Esse tipo de argumento foi apresentado em 16,7% das respostas.

Figura 8.29 - Exemplo de justificativa “*Financeira*” no item 3a do pré-teste

Questão 3
a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
Justifique a sua resposta:
Porque eu trabalho e se eu quiser eu compro

[*Porque eu trabalho e se eu quiser eu compro*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Categorizamos na classe “*Social*” as justificativas que estão pautadas em aspectos como a visibilidade, a reputação da marca e a acessibilidade para a população (Figura 8.30). Essa justificativa foi disposta em apenas 2,4% das respostas.

Figura 8.30 - Exemplo de justificativa “*Social*” no item 3a do pré-teste

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?
 Impossível Pouco provável Provável Muito provável Certo
Justifique a sua resposta:
Porque é o mais popular

[*Porque é o mais popular*]

Fonte: Dados da pesquisa.

No terceiro tipo de justificativa, “*Especificações Técnicas*”, compilamos as razões fundamentadas em aspectos técnicos desse tipo de smartphone, tais como a

duração da bateria, a resolução da câmera, dentre outras capacidades do dispositivo (Figura 8.31). Esse tipo de argumento foi identificado em apenas 2,4% das respostas.

Figura 8.31 - Exemplo de justificativa “Especificações Técnicas” no item 3a do pré-teste

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

() Impossível (Pouco provável () Provável () Muito provável () Certo

Justifique a sua resposta: *Não sou muito fã da bateria do iphone, pois dura pouco o tempo.*

[*Não sou muito fã da bateria do iphone, pois dura pouca a carga*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Na justificativa “Já possui”, 26,2% dos estudantes explicam suas decisões afirmando já ter um iphone. Nas justificativas agrupadas em "Questão pessoal", os estudantes estruturaram suas ideias com base em suas crenças e emoções, ressaltando os aspectos disposicionais (Figura 8.32). Esse tipo de argumento está presente em 21,3% das afirmações dos estudantes que responderam ao pré-teste.

Figura 8.32 - Exemplo de justificativa “Questão pessoal” no item 3a do pré-teste

a) Qual seria a chance de você adquirir um iphone?

() Impossível (Pouco provável () Provável () Muito provável () Certo

Justifique a sua resposta:
Não sou muito fã de iphone

[*Não sou muito fã de iphone*]

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 3b, “Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?”, tem caráter qualitativo, e está relacionado a uma representação numérica percentual que informa a opinião quanto à probabilidade de essa marca ter sido a mais vendida (Tabela 8.7).

Tabela 8.7 - Percentual de respostas por teste (Questão 3b) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não respondeu	14,3	23,8
Apenas um percentual	14,3	23,8
Apenas uma justificativa	33,4	28,6
Com justificativa e percentual	38,0	23,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse item, percebe-se um quantitativo maior de estudantes que apresentaram uma justificativa com percentual no Teste A (38%). As respostas em que os estudantes não apresentaram justificativas, apenas um percentual, foram mais frequentes no

Teste B (Figura 8.33). Já respostas com apenas uma justificativa e sem percentual (Figura 8.34), no Teste A.

Figura 8.33 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e com percentual” no item 3b do pré-teste

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

70%

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.34 - Exemplo de resposta “Sem justificativa e sem percentual” no item 3b do pré-teste

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

Muito alta
vai ser
mais vendido

[muito alta porque a sansung esta cada vez mais envoluindo]

Fonte: Dados da pesquisa.

Finalmente, os estudantes que apresentaram respostas “Com justificativa e percentual” (Figura 8.35 e 8.36) agruparam suas respostas com a representação numérica e na Língua natural escrita.

Figura 8.35 - Exemplo de resposta com justificativa e percentual no item 3b do pré-teste

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

70%, por ser em um preço mais acessível
do que um IPhone que deve ser mais caro

[70%, por ser em um preço mais acessível do que um IPhone que deve ser mais caro]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.36 - Exemplo de resposta com justificativa e percentual no item 3b do pré-teste

b) Para você, qual a probabilidade (em percentual) do “Samsung Galaxy” ter sido o smartphone mais vendido no mundo em 2023? Por quê?

Por conta de muitas no mercado e um smartphone muito confiável e de uma bateria excelente.

[Por conta de muitas no mercado e um smartphone muito confiável e de uma bateria excelente]

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando essas justificativas, reforçamos a natureza subjetiva dessa questão, uma vez que cada estudante, a partir de suas vivências e de seu conhecimento de mundo, expressa diferentes pontos de vista sobre a probabilidade de que a referida marca de smartphone tenha sido a mais vendida em 2023.

O item 3c apresentava duas versões: a tabular (Teste A) e a gráfica (Teste B), e explorava uma situação com dados autênticos no contexto Tecnológico, questionando: “O Instituto Canalys, empresa de pesquisa de mercado e análise especializada no setor de tecnologia, apresenta na tabela (ou gráfico) abaixo o resultado sobre os 10 principais smartphones mais vendidos no mundo em 2023. A partir dos dados apresentados, qual era a probabilidade do “Samsung Galaxy” ser escolhido no ano de 2023?” (Tabela 8.8).

Tabela 8.8 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 3c) do pré-teste

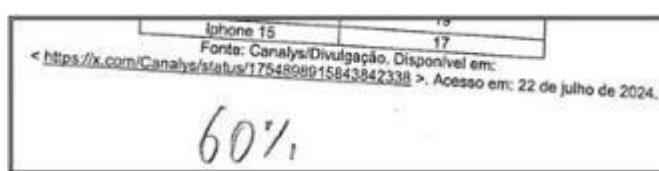
Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	28,6	52,4
Sem justificativa	19,0	9,5
Considera a quantidade de celulares da marca favorável	14,3	--
Considera a quantidade de marcas	--	9,5
Justifica em função do cálculo errado	19,1	9,6
Adequada com justificativa fracionária	19,0	19,0
Adequada com justificativa percentual	--	--
Adequada com Língua materna escrita	--	--
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	--	--

Fonte: Dados da pesquisa.

Os resultados apresentados na Tabela 8.8 evidenciam as dificuldades dos estudantes para interpretar e responder essa questão. Apenas 19% dos estudantes, em ambos os testes, apresentaram respostas adequadas e com justificativa na representação numérica fracionária.

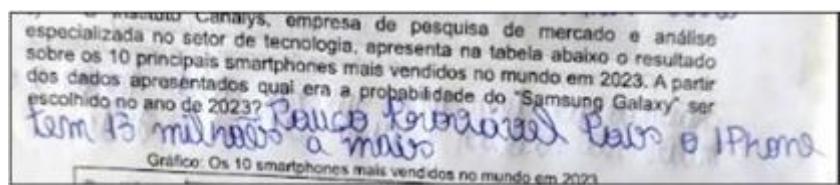
Nas respostas categorizadas como “Sem justificativa”, abrangemos as respostas nas quais os estudantes colocaram uma resposta numérica (Figura 8.37) ou na Língua natural escrita (Figura 8.38).

Figura 8.37 - Exemplo de resposta “sem justificativa” com especulação numérica - item 3c do pré-teste



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.38 - Exemplo de resposta “sem justificativa” na Língua natural escrita - item 3c do pré-teste



[Pouco provável pois o iPhone tem 13 milhões a mais]

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “Considera a quantidade de celulares das marcas favoráveis”, obtivemos apenas respostas dos estudantes que responderam ao Teste A (14,3%). Dessa forma, ao analisar o gráfico ou a tabela, os estudantes reconheceram apenas as vendas de celulares da marca “Samsung” em 2023 (Figura 8.39). No entanto, não ponderaram o total de celulares no espaço amostral e, consequentemente, não determinaram a probabilidade desse evento se concretizar.

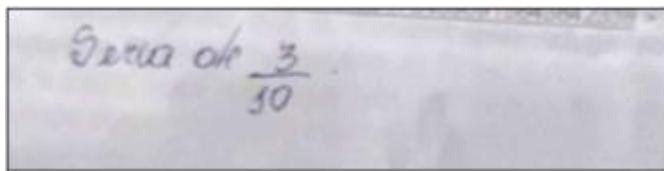
Figura 8.39 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de celulares das marcas favoráveis

23	51.
21	10
21	19
20	60
19	
17	

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “Considera a quantidade de marcas”, os estudantes entendem a relação clássica de probabilidade (casos favoráveis e os possíveis). No entanto, percebemos que ainda existe uma falha conceitual, por considerarem apenas a probabilidade da quantidade de marcas ($3/10$) e, assim, misturarem o evento com o espaço amostral (Figura 8.40). Esse tipo de argumento está presente apenas no Teste B, em 9,5% das elucidações dos estudantes.

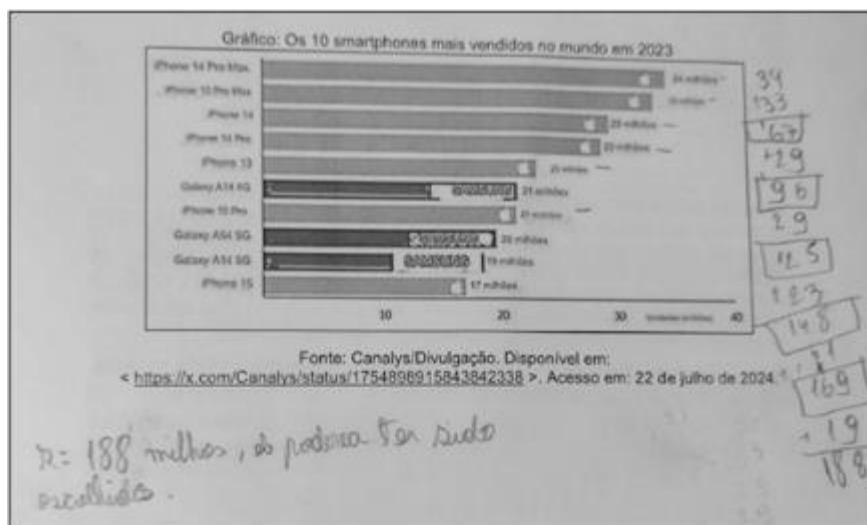
Figura 8.40 - Exemplo de resposta inadequada considerando a quantidade de marcas



[Seria de 3/10]
Fonte: Dados da pesquisa.

Nas respostas categorizadas como “*Justifica em função do cálculo errado*”, os estudantes apresentam deficiências nos procedimentos, mais precisamente durante a contagem dos dados, o que interfere no resultado final (Figura 8.41). Ressaltamos a presença desses equívocos nos dois tipos de teste, com predominância no Teste A (19,1%), em relação ao Teste B (9,6%).

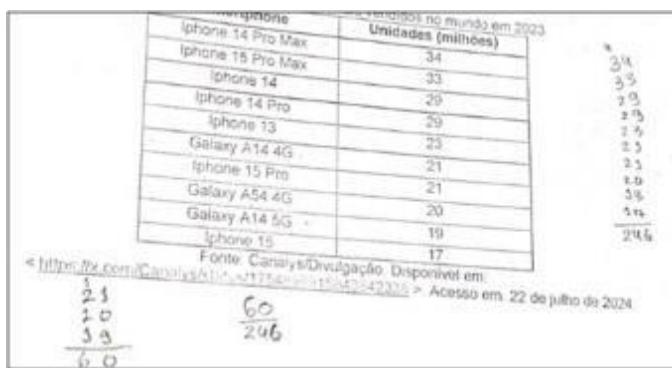
Figura 8.41 - Exemplo de resposta justificada com cálculo errado no item 3c do pré-teste



[188 milhões, ele poderia ter sido escolhido]
Fonte: Dados da pesquisa.

Os estudantes cujas justificativas foram categorizadas como “*respostas adequadas*” foram capazes de agregar as informações sobre a marca de telefone celular (casos favoráveis) e do total dos smartphones mais vendidos em 2023 (casos possíveis) para o espaço amostral, indicando a solução correta para essa questão. As respostas foram apresentadas apenas na forma fracionária (Figura 8.42). Observamos a ausência de respostas válidas que utilizaram a representação decimal, língua natural escrita e múltiplas representações.

Figura 8.42 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 3c do pré-teste



Fonte: Dados da pesquisa.

O item 3d, “*Com base na probabilidade calculada a partir da tabela acima, sua visão sobre a popularidade do “Samsung Galaxy” mudou? Por quê?*”, está associada diretamente aos Elementos dispositionais de Gal (2005), questionando sobre as crenças dos estudantes e a possibilidade de mudança de percepção após terem acesso a uma nova informação. A questão permite uma análise crítica e interpretativa dos resultados, de forma a apresentar uma probabilidade *a posteriori* (Tabela 8.9).

Tabela 8.9 - Percentual de resposta considerando ano e teste (Questão 3d) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não respondeu	33,3	38,1
Sim, sem justificativa	--	9,5
Sim, com justificativa	28,6	14,3
Não, sem justificativa	4,8	14,3
Não, com justificativa	33,3	23,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesse item, percebe-se que um quantitativo alto de estudantes não apresentou resposta alguma (33,3% e 38,1%). Esses números trazem uma preocupação quanto ao Letramento Probabilístico deles, visto que, apesar da disponibilidade de dados confiáveis, eles não conseguiram emitir opinião alguma, algo fundamental para tomar decisões coerentes e justas.

Poucos estudantes forneceram respostas “sim” ou “não” sem justificativas.

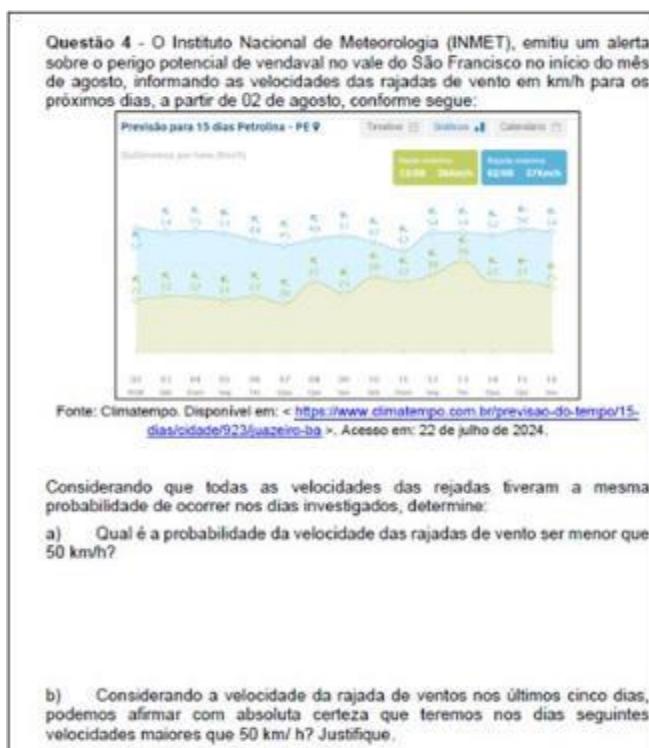
As respostas com justificativas foram organizadas de duas formas: “*Sim, com justificativa*”, na qual os estudantes expuseram sua mudança de opinião a partir dos dados apresentados no item 3c, e a categoria “*Não, com justificativa*”, na qual os estudantes informaram não haver alteração em sua concepção.

A partir dos dados apresentados no item 3c, os estudantes apresentaram justificativas que correspondiam ao contexto, porém sem correlação com os dados,

ponderando mais suas crenças e visão de mundo quanto a essa marca de celular, fornecendo justificativas com viés financeiro, social, técnico e pessoal. Dessa forma, essas razões destacam a natureza subjetiva de uma situação no contexto Tecnológico, uma vez que cada pessoa tem suas particularidades e opinião, apresentando, assim, diferentes pontos de vista sobre a Probabilidade.

A Questão 4, organizada em dois itens, estava associada a um contexto Ambiental, com base nos dados fornecidos pelo Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), sobre a velocidade do vento na região do vale do São Francisco. Os dados da questão foram apresentados em duas versões: a gráfica (Teste A) (Figura 8.43) e a Língua natural escrita (Teste B) (Figura 8.44). Os resultados estão expostos na Tabela 8.10.

Figura 8.43 - Enunciado da Questão 4 do pré-teste na representação gráfica



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.44 - Enunciado da Questão 4 do pré-teste na Língua natural escrita

Questão 4 - O Instituto Nacional de Meteorologia (INMET), emitiu um alerta sobre o perigo potencial de vendaval no vale do São Francisco no início do mês de agosto, informando as velocidades das rajadas de vento em km/h para os próximos dias, a partir de 02 de agosto, conforme segue:

57 km/h: 02/09	54 km/h: 03/09	55 km/h: 04/09	53 km/h: 05/09	48 km/h: 06/09
45 km/h: 07/09	49 km/h: 08/09	51 km/h: 09/09	47 km/h: 10/09	42 km/h: 11/09
54 km/h: 12/09	54 km/h: 13/09	52 km/h: 14/09	56 km/h: 15/09	54 km/h: 16/09

Fonte: Climatempo. Disponível em: <<https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-ba>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Considerando que todas as velocidades das rajadas tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

Fonte: Dados da pesquisa.

Tabela 8.10 - Percentual por tipo de resposta considerando ano e teste (Questão 4a) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	14,3	33,3
Sem justificativa	23,8	33,3
Considera a quantidade de temperatura	9,5	--
Justifica em função do cálculo errado	14,3	--
Adequada com justificativa fracionária	28,6	28,6
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	9,5	4,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados apresentados na Tabela 8.10, observa-se uma predominância de respostas “em branco/não sabe” e “sem justificativa” (Figura 8.45) no Teste B, o que indica a ínfima quantidade de estudantes que analisaram os dados apresentados e tentaram determinar a resposta adequada. Esses percentuais podem indicar uma dificuldade em avaliar e considerar a situação e/ou o contexto, o que interfere diretamente no desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Figura 8.45 - Exemplo de resposta sem justificativa no item 4a do pré-teste

Considerando que todas as velocidades das rajadas tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

- a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

60%

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “*Considera a quantidade de temperatura*”, foram agrupadas as respostas em que os estudantes levaram em conta somente os dias em que a intensidade do vento foi inferior a 50 km/h (Figura 8.46). Esse tipo de resposta foi encontrado apenas no Teste A.

Figura 8.46 - Exemplo de resposta da categoria “Considera a quantidade de temperatura” no item 4a do pré-teste

Considerando que todas as velocidades das rajadas tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:
a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

5

Fonte: Dados da pesquisa.

No exemplo que selecionamos da categoria “*Justifica em função do cálculo errado*” (Figura 8.47), o estudante considerou o total de velocidade tanto da rajada de vento como do vento máximo (30 velocidades) e observou que dessas, vinte eram inferiores a 50 Km/h. Além disso, enganou-se no momento de determinar o percentual equivalente a 20, informando que seriam 90% do total de ventos.

Figura 8.47 - Exemplo de resposta da categoria “Justifica em função do cálculo errado” no item 4a do pré-teste

Considerando que todas as velocidades das rajadas tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:
a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

90% 80/30 = 20
TOTAL = 30 - MENOR QUE 50 = 20
100/30 = 90% = 20

Fonte: Dados da pesquisa.

Por fim, também identificamos respostas adequadas respondidas na representação fracionária (Figura 8.48) ou com múltiplas representações (Figura 8.49).

Figura 8.48 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 4a do pré-teste

Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

*S
15*

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.49 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 4a do pré-teste

Considerando que todos os intervalos tiveram a mesma probabilidade de ocorrer nos dias investigados, determine:

a) Qual é a probabilidade da velocidade das rajadas de vento ser menor que 50 km/h?

50km/h = \frac{5}{3} 33.3\bar{3}

Fonte: Dados da pesquisa.

O segundo item dessa questão estimulava a análise crítica e interpretativa dos estudantes: “*Considerando a velocidade da rajada de ventos nos últimos cinco dias, podemos afirmar com absoluta certeza que teremos nos dias seguintes velocidades maiores que 50 km/h? Justifique*”. Nesse cenário, aguardávamos que os estudantes percebessem e confirmassem, por meio da interpretação do gráfico (Teste A) ou da Língua natural escrita (Teste B), que não era viável afirmar com total segurança que os ventos excederiam os 50 km/h nos dias subsequentes (Tabela 8.11).

Tabela 8.11 - Percentual por tipo de resposta por teste (Questão 4b) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	33,3	42,9
Sem justificativa	28,6	9,5
Justificativa errada	23,8	38,1
Justificativa correta	14,3	9,5

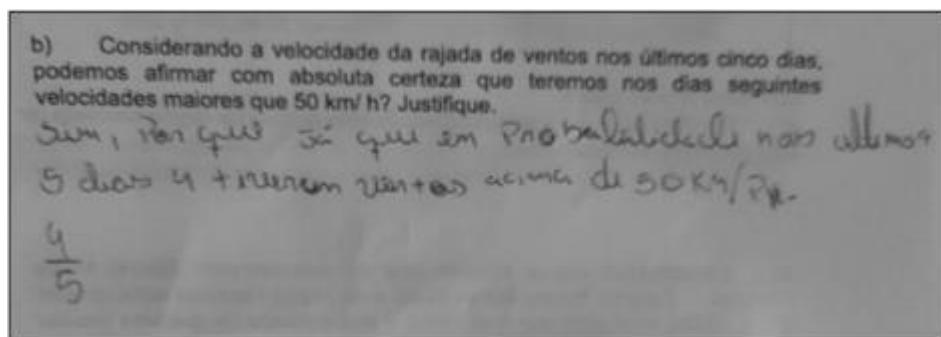
Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como em itens anteriores que exigiam a interpretação por parte dos estudantes, as respostas associadas à categoria “*Em branco / não sabe*” tiveram um percentual muito alto. Outro fator preocupante é o fato de os estudantes não justificarem suas respostas. Essa ação ocorreu nos dois tipos de teste, porém, com maior percentual nas respostas apresentadas pelos estudantes no Teste A.

Salientamos mais uma vez a importância da argumentação para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Nas respostas com justificativas erradas (Figura 8.50), observa-se que os estudantes fizeram uso de argumentos que não consideram a aleatoriedade do contexto, trazendo o caráter determinista. Esse tipo de resposta está presente nos dois tipos de testes, contudo, em maior percentual no Teste B (23,8% e 38,1%).

Figura 8.50 - Exemplo de resposta com justificativa errada no item 4b do pré-teste

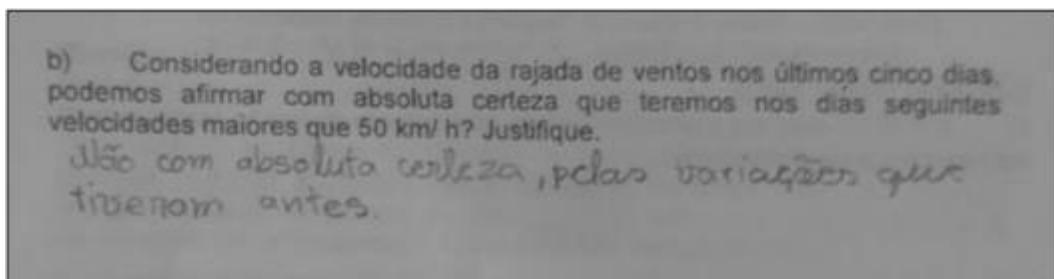


[Sim, porque já que em probabilidade nos últimos 5 dias 4 tiveram ventos acima de 50km/h]

Fonte: Dados da pesquisa.

Encontramos respostas adequadas (Figura 8.51) nos dois tipos de testes, com argumentos que evidenciam a compreensão da aleatoriedade e da variabilidade pertinentes a esse tipo de situação. As justificativas foram apresentadas na Língua natural escrita.

Figura 8.51 - Exemplos de respostas adequadas no item 4b do pré-teste



[Não com absoluta certeza, pelas variações que tiveram antes.]

Fonte: Dados da pesquisa.

A última questão da atividade diagnóstica versava sobre uma situação frequentista no contexto Social, apresentando o número de adultos inseridos no mercado de trabalho brasileiro que possuíam o Ensino Médio completo e Superior Incompleto entre os anos de 2016 e 2023. Diferente das questões anteriores, nessa,

os dados foram apresentados a partir de múltiplas representações (representação tabular e gráfica), adotando uma única organização para os dois tipos de teste.

Figura 8.52 - Enunciado da Questão 5 do pré-teste, com múltiplas representações

Questão 5 - O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) obteve os resultados referentes ao total de pessoas inseridas no mercado de trabalho que terminaram o Ensino Médio e possuem o Ensino Superior Incompleto entre os anos de 2016 a 2023. A Tabela 1 mostra o número aproximado de pessoas em todo o país e o Gráfico 1 mostra o número aproximado de pessoas em relação a Região Nordeste.

Tabela 1: Quantidade de pessoas no Brasil inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023

Ano	Quantidade de pessoas (mil pessoas)
2016	35
2017	36
2018	37
2019	38
2022	42
2023	43

Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Gráfico 1: Quantidade de pessoas da Região Nordeste inseridas no Mercado de Trabalho com nível de Instrução Médio Completo e Superior Incompleto de 2016 a 2023



Fonte: IBGE – Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em: <<https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

Com base nesses dados:

- Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?
- Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

Fonte: Dados da pesquisa.

No item 5a, “*Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?*”, esperávamos que os estudantes analisassem e confrontassem as informações disponibilizadas pelo IBGE para determinar a probabilidade do evento. A Tabela 8.12 traz os resultados encontrados.

Tabela 8.12 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 5a) do pré-teste

Tipos de resposta	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	19,0	23,8
Sem justificativa	19,0	19,0
Considera apenas os elementos do Nordeste ou Brasil	28,6	19,0
Justifica em função do cálculo errado	19,0	23,8
Adequada com justificativa fracionária	14,4	9,5
Adequada com justificativa percentual	--	--
Adequada com justificativa decimal	--	--
Adequada com justificativa em múltiplas representações numéricas	--	4,9

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria “*Considera apenas os elementos do Nordeste ou Brasil*”, os estudantes avaliaram a chance de o evento ocorrer apenas com base na quantidade de indivíduos do Nordeste (Figura 8.53) ou do Brasil, que ingressaram no mercado de trabalho em 2018, evidenciando, portanto, uma falha na compreensão do conceito de Probabilidade em relação à conexão entre o evento considerado e o espaço da amostra.

Figura 8.53 - Exemplo de resposta “*Considera apenas os elementos do Nordeste ou Brasil*” no item 5a do pré-teste

Com base nesses dados:

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

[7900 pq para tudo tem uma oportunidade na vida]

Fonte: Dados da pesquisa.

No que diz respeito à categoria “*Justifica em função do cálculo errado*”, notamos que os alunos conseguiram associar o evento ao espaço amostral, mas cometiveram um erro ao realizar o cálculo (Figura 8.54).

Figura 8.54 - Exemplo de resposta inadequada em função do cálculo errado, no item 5a do pré-teste

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

$$\frac{7900}{36\,000}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Neste caso, o estudante interpretou corretamente a quantidade de casos favoráveis na região Nordeste em 2018, mas se confundiu ao considerar como espaço amostral o número de brasileiros com Ensino Médio completo e Superior Incompleto de 2017. Por isso, podemos afirmar que ele entendeu a lógica da questão, mas cometeu um erro no cálculo.

Por último, notamos uma proporção de respostas adequadas para essa questão. É importante destacar que, assim como nos itens anteriores que exigiam a representação numérica, a representação fracionária foi a mais adotada pelos estudantes (Figura 8.55), com 14,4% no Teste A e 9,5% no Teste B. Também encontramos respostas em que o estudante utilizou múltiplas representações numéricas (Figura 8.56). Esse tipo de resposta esteve mais presente apenas no Teste B (4,9%).

Figura 8.55 - Exemplo de resposta adequada na forma fracionária no item 5a do pré-teste

Com base nesses dados:

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

$$\frac{7900}{37\,000}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.56 - Exemplo de resposta adequada com múltiplas representações no item 5a do pré-teste

Com base nesses dados:

a) Em 2018, qual era a probabilidade de uma pessoa da região nordeste ter sido escolhida aleatoriamente?

Probabilidade: $\frac{7900}{37\,000}$

0,2135

Probabilidade: 21,35%

Concordando com

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 5b, “*Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?*”, suscitava uma reflexão sobre a relação entre o nível de educação (Ensino Médio completo e Superior Incompleto) em todo o Brasil e no Nordeste, considerando se essas modificações impactam a chance de escolha de uma pessoa a partir do grau de escolaridade. Na Tabela 8.13, estão sintetizados os resultados encontrados para essa questão.

Tabela 8.13 - Percentual por tipo de resposta considerando o tipo de teste (Questão 5b) do pré-teste

Tipos de Respostas	Teste A	Teste B
Em branco / não sabe	47,6	42,9
Sem justificativa	33,3	33,3
Justificativa inadequada	14,3	19,0
Justificativa adequada	4,8	4,8

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os dados da Tabela 8.13, observamos um percentual alto de respostas em branco. Além disso, também foi alto o percentual de respostas sem justificativa. Esses dados reforçam uma situação preocupante em relação ao Letramento Probabilístico, pois evidenciam que os estudantes, *a priori*, não estão aptos a analisar situações incertas e discutir sobre elas.

Na categoria “*Justificativa inadequada*”, reunimos as respostas nas quais os estudantes mencionaram que a variabilidade entre 2016 e 2023 não afetava a chance de selecionar aleatoriamente alguém do Nordeste (Figura 8.57) ou mencionaram que isso influenciava, mas utilizaram argumentos inconsistentes.

Figura 8.57 - Exemplo de resposta inadequada com justificativa errada no item 5b do pré-teste

b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo?

*7500
19400
15900*

Não, porque se vai ser aleatório então está de boa.

[*Não, porque se vai ser aleatório então está de boa*]

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta apresentada na Figura 8.57 traz claramente uma compreensão limitada de Probabilidade Clássica e revela que o estudante acredita que, numa situação aleatória, todos têm a mesma chance, independente do aumento do espaço amostral.

Por último, a seção "Justificativa adequada" apresenta as respostas dos estudantes que indicaram de maneira precisa que há uma relação entre o crescimento da população no Nordeste e a chance de se selecionar aleatoriamente alguém desse local (Figura 8.58).

Figura 8.58 - Exemplos de respostas adequadas no item 5b do pré-teste

b) Considerando que o número total de pessoas com Ensino Médio Completo e Superior Incompleto no Brasil e na região Nordeste aumentou de 2016 a 2023, você acha que isso afetou a probabilidade de que uma pessoa escolhida aleatoriamente seja da Região Nordeste nesse intervalo de tempo? *sim, pode ser mais gente escolhida do nordeste.*

[*Sim, pode ser mais gente escolhida do nordeste.*]

Fonte: Dados da pesquisa.

Tecendo um paralelo com os resultados obtidos no Estudo 3, observamos que os estudantes do 3º ano chegaram à etapa final da Educação Básica com lacunas significativas no campo da Probabilidade, ainda que o currículo proponha o desenvolvimento dessas habilidades desde o 1º ano do Ensino Fundamental. Essas lacunas estão atreladas ao processo de interpretar, argumentar e resolver situações aleatórias em contextos autênticos. Ressaltamos que esses pontos influenciam diretamente no desenvolvimento do Letramento Probabilístico, principalmente para a tomada de decisões coerentes e justas.

Também ressaltamos a importância de o estudante conhecer o contexto da situação para posicionar-se de maneira crítica. Concordamos com Fernandes e Junior (2016) e Morais *et al.* (2018), quando advertem sobre a necessidade de o ensino de Probabilidade trazer situações associadas ao cotidiano dos estudantes.

Dentre os dados adotados nessas questões, observamos, assim como no Estudo 3, maior incidência de acertos na situação que abordava o contexto dos jogos de azar. Isso indica que se trata de um contexto natural aos estudantes, até mesmo pela efetiva presença nos livros didáticos, o que pode promover uma compreensão natural da situação.

Outro ponto relevante é o uso de diferentes representações. Observamos que os estudantes se apoiam na representação numérica fracionária para estabelecer a relação entre os casos favoráveis e os possíveis. Apesar de estatisticamente os tipos de teste (representações) não terem influenciado o desempenho dos estudantes, alguns deles argumentam:

Estudante B15: A atividade se torna mais fácil devido aos gráficos e tabelas, as sem gráficos foram mais complicadas de resolver.

Assim, o ensino deve incentivar diferentes representações, para que todos aprendam. Na seção a seguir, analisamos uma intervenção de ensino que buscou propiciar uma articulação de variadas representações, a partir de contextos autênticos, visando não só à aprendizagem dos cálculos, como também o desenvolvimento da capacidade crítica e argumentativa, características fundamentais do Letramento Probabilístico.

8.2 ANÁLISE DA INTERVENÇÃO DE ENSINO

Conforme explicitamos no capítulo 4 desta tese (Método), a intervenção de ensino corresponde a uma das etapas articuladas ao Objetivo Específico 4, que consistiu em analisar uma sequência de ensino envolvendo o Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações, para estudantes do Ensino Médio de Pernambuco e Bahia. Optamos por desenvolver essa sequência com variadas representações, ponderando a afirmação feita por Post e Prediger (2022) sobre a pequena quantidade de suporte pedagógico que possibilite ao professor propor um processo de ensino baseado no uso de múltiplas representações.

Para isso, consideramos os resultados coletados e analisados nos estudos anteriores (análise documental, análise dos livros didáticos, análise da atividade diagnóstica e análise do pré-teste).

Com base nos resultados encontrados, elaboramos um processo interventivo com o objetivo de propiciar a aprendizagem de conceitos probabilísticos a partir de diferentes representações, utilizando dados autênticos de variados contextos, partindo das crenças dos estudantes até uma tomada de decisão a partir dos dados.

Essa intervenção foi vivenciada por duas turmas do 3º ano do Ensino Médio de duas escolas públicas, uma da rede estadual da Bahia, que descreveremos como Turma A, e uma da rede estadual de Pernambuco, que denominamos de Turma B.

Para o desenvolvimento do processo interventivo, foram propostos dois encontros presenciais com cada turma, com duração de três aulas seguidas, de 50 minutos cada. A sequência de atividades foi conduzida pelo autor desta tese nas duas turmas⁹.

8.3 ANÁLISE DO 1º DIA DE INTERVENÇÃO DE ENSINO

No primeiro dia da intervenção, pautamos nossas reflexões nas representações tabular, gráfica e na Língua natural escrita, para discutir sobre o contexto dos jogos de azar, mais precisamente das apostas esportivas online – BETS – e da Mega-Sena.

Para a utilização dessas variadas formas, pautamo-nos nas ponderações feitas por Burrill e Pfannkuch (2024); Corder e Zahner (2007); Zahner e Corder (2010); Oliveira (2014); Oliveira (2018) e Oliveira, Santos e Calejon (2020), que sugerem a utilização de diferentes representações nos estudos de Probabilidade.

As turmas apresentavam um quantitativo semelhante de estudantes que frequentavam as aulas, com aproximadamente 20 estudantes. No primeiro encontro, iniciamos com uma discussão coletiva sobre as BETS, buscando identificar os conhecimentos prévios dos participantes.

Quadro 8.1 - Diálogo inicial no 1º dia de intervenção, nas turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Bom dia. Hoje nós vamos conversar em relação às BETS. Algo que está na moda atualmente e muita gente usa. Vocês já conhecem as BETS, já ouviram falar?</i></p> <p><i>Estudante 8: Já.</i></p> <p><i>Estudante 7: Sim.</i></p> <p><i>Professor: Pronto. Então, o que a gente vai discutir, na verdade, é isso. Pode não parecer, mas nas BETS tem muito conhecimento de matemática. A gente está falando de probabilidade e hoje vamos discutir relacionado às BETS.</i></p> <p><i>Estudante 6: Porcentagem.</i></p> <p><i>Professor: Então, quando a gente fala em BETS, temos exemplos como a Bet 365, Betano, Sporting Bet, dentre outras.</i></p> <p><i>Estudante 6: Estrela Bet.</i></p>	<p><i>Professor: Boa tarde. Hoje nós vamos discutir algo que eu acredito que vocês conheçam. Hoje eu vou discutir com vocês sobre as BETS. Quem aqui pode me dizer, por favor, o que significa uma BET?</i></p> <p><i>Estudante 11: Eita, não é aquele jogo, não?</i></p> <p><i>Estudante 8: É um jogo que dá lucro.</i></p> <p><i>Professor: Para o Estudante 8 é um jogo que dá lucro.</i></p> <p><i>Estudante 7: Pros donos, professor, jogo que dá lucro para os donos.</i></p> <p><i>Estudante 11: É desse jeito mesmo.</i></p> <p><i>Estudante 14: O tigrinho.</i></p> <p><i>Professor: O tigrinho e a BET é a mesma coisa?</i></p> <p><i>Estudantes 10, 18 e 4: Não é não.</i></p> <p><i>Estudante 14: Aposte.</i></p> <p><i>Estudante 19: Casa de aposta.</i></p>

<p><i>Professora: Para vocês, o que significa, o que é uma BET?</i></p> <p><i>Estudante 4: Site de aposta.</i></p> <p><i>Estudante 7: Jogos.</i></p> <p><i>Estudante 6: Tem esportes também, futebol e outros negócios.</i></p> <p><i>Estudante 16: Jogos de azar.</i></p>	<p><i>Professor: Então, falando de casa de aposta, nós temos a Bet 365, Estrela Bet, Sporting Bet, dentre outras.</i></p>
--	---

Fonte: Dados da pesquisa (2025).

Para iniciar o primeiro dia de intervenção, procuramos entender as crenças e os conhecimentos que os estudantes tinham sobre as BETS. Ao escutar suas respostas, questionamos suas explicações, estimulando uma reflexão acerca do que eles percebiam sobre esse tipo de jogo e a probabilidade de ganhar. Essa fase inicial tinha como meta investigar os aspectos disposicionais dos estudantes, como crenças e atitudes, ao mesmo tempo que criava uma base para apresentar conceitos de Probabilidade de maneira contextualizada. Dessa forma, pela condução a partir dos questionamentos e das falas dos estudantes sobre como eles compreendiam as BETS enquanto jogos de azar, identificamos os Elementos disposicionais dos estudantes. Nossa intenção não era apenas apresentar as maneiras de calcular a probabilidade, mas sim levá-los a compreender como elas são úteis para tomarmos decisões no cotidiano.

A conversa inicial com as duas turmas nos possibilitou identificar o que os estudantes conheciam sobre o contexto das apostas esportivas online (BETS). Acreditamos que é necessário discutir esse contexto de forma científica, diante da grande adesão da população, que vem sendo influenciada pela mídia massiva. Além disso, como argumentado por Barbosa e Melo (2021) e Franco Seguí e Alsina (2024), a utilização de diferentes contextos é um elemento importante para a ação docente ao ensinar conceitos de Probabilidade.

Quando questionados sobre suas compreensões em relação às BETS, todos os estudantes demonstraram saber que se tratava de jogos de sorte. Dessa forma, como ressaltado por Gal (2005), as experiências de vida dos estudantes precisam ser consideradas para a interpretação de dados. Ressaltamos que estudantes da Turma A atrelaram os ganhos nesse tipo de aposta, exclusivamente, à sorte, o que é um fator preocupante em relação ao desenvolvimento do Letramento Probabilístico, uma vez que desconsideraram a importância da Probabilidade. Na turma B, de forma tímida, apareceu uma visão crítica em relação às BETS, quando um estudante afirmou que apenas os donos das casas de apostas ganhavam dinheiro.

Posteriormente, o professor apresentou aos estudantes dados autênticos sobre as BETS e fez quatro questionamentos, para confrontar de forma direta as experiências e crenças dos estudantes com as dos outros colegas da turma sobre a probabilidade de ter lucro por meio das apostas esportivas online (BETS).

Essa atividade foi realizada com o auxílio do datashow, por meio do qual foram apresentados os resultados de uma pesquisa realizada pelo *BigDataCorp* em 2024, referente às crenças e sentimentos em relação ao risco de jogar em sites de apostas online (Quadro 8.2). As questões tinham o intuito de incentivar a reflexão crítica e o entendimento do conceito de Probabilidade, considerando a intercambialidade entre diversas representações e reforçando o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Quadro 8.2 – Primeira atividade do 1º dia

O *BigDataCorp*, uma empresa privada que faz pesquisas de mercado para ajudar a impulsionar diferentes negócios, em 2024 realizou uma pesquisa e previu que em 2025 teremos a criação de 1.300 empresas de jogos de azar. Uma pesquisa de outro grupo, o *DataSenado*, concluiu que mais de 22 milhões de pessoas apostaram nas BETS no mês de setembro de 2024.

- Alguém aqui já ganhou nesses jogos de BETS? Pode contar como foi? (*Hab.:* conhecimento do Contexto e levantamento dos conhecimentos prévios)
- Para vocês, qual a probabilidade de se ter lucro por meio das apostas esportivas online (BETS)? (*Hab.:* Sentimentos pessoais em relação ao risco)

Tabela 1- Probabilidade de se ter lucro com BETS

Probabilidade	Frequência de estudantes
Impossível	
Pouco provável	
Provável	
Muito provável	
Certo	

- Na sua opinião, qual a probabilidade de alguém ganhar dinheiro com apostas em BETS? (*Hab.:* Sentimentos pessoais em relação ao risco)

Tabela 2- Probabilidade de ganhar dinheiro com BETS

Probabilidade	Frequência de estudantes
0%	
Até 10%	
Entre 11% e 30%	
Entre 31% e 50%	
50% ou mais	

- d) Qual dessas frases vocês acreditam que representa melhor o que acontece com quem apostava com frequência? (**Hab.: Crenças e atitudes**)

Tabela 3 - Probabilidade de ganhar dinheiro com BETS

Probabilidade	Frequência de estudantes
Quem insiste, uma hora ganha	
Sempre perde no fim das contas	
Depende da sorte	
Depende do conhecimento do jogo	

Fonte: Elaboração própria

Para a resposta ao item (a), o professor interrogou os estudantes se já haviam jogado em apostas esportivas online e solicitou que contassem como tinha sido a experiência. Quando questionou se alguém já havia ganhado nesses jogos de *BETS*, os estudantes 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11 e 16 da Turma A levantaram as mãos. Nesse momento, o professor comentou: “*Então, 50% da turma já apostou em BETS. Vocês ganharam, não ganharam...*”:

Estudante 4: Eu mesmo só aposto em ganhos prováveis.

Estudante 16: Já ganhei, já perdi...

Professor: Você ganhou quanto?

Estudante 16: Ganhei R\$60,00.

Estudante 4: Eu só aposto em ganho lógico, eu só aposto em futebol.

Professor: Quando você aposta em futebol, você costuma ganhar ou perder?

Estudante 4: Só ganho. (risos da turma)

Estudante 4: O máximo que ganhei foi R\$74,00. Eu não coloco muito não, só R\$10,00, R\$15,00.

Professor: Antes de vocês jogarem, vocês procuraram saber se é possível ganhar, se não é... foi na sorte...

Estudantes 6, 7 e 11: Foi na sorte.

Nessa conversa, o professor fez o papel de articulador, estimulando os estudantes a apresentarem suas vivências e provocando um confronto entre os estudantes, quanto às suas experiências pessoais. Dessa forma, os questionamentos visavam propiciar uma reflexão crítica sobre a relação entre as apostas esportivas online e o conceito de Probabilidade. Nesse caso, o professor tem papel fundamental para estimular os estudantes a apresentarem suas crenças e sua postura crítica, por meio da argumentação oral.

De forma geral, os estudantes mencionaram que apostam somente em “jogos de futebol”, e apenas o estudante 11 afirmou que já perdeu quantia em dinheiro.

“Adivinha, perdi!!”. Quando questionado se lembrava o total de dinheiro que perdeu, esse estudante disse: *“Lembro nada, tanto dinheiro!”*, informando já ter perdido uma quantia em dinheiro tanto em BETS como no jogo do “tigrinho”.

O professor também questionou aos estudantes que não jogavam se eles conheciam pessoas de seu convívio que jogavam, e os estudantes 15 e 16 apresentaram relatos de experiências de suas casas.

Estudante 15: Minha mãe joga todo final de semana e lá mais perde do que ganha. Ela já chegou a perder a quantia de R\$ 700,00 do salário dela.

Estudante 16: Meu pai joga “jogo do bicho”, ele joga tudo!! Normalmente ele passa perto, sempre perde. Atrapalhando, às vezes, o orçamento familiar.

A estudante 15, de forma implícita, trouxe uma visão de Probabilidade Frequentista por meio das observações da situação, inferindo que a maior incidência está em perder o dinheiro, todavia sem a realização de cálculos formais. Já a fala do estudante 16 trouxe um elemento interessante. O fato de ele dizer que “sempre passa perto” nos possibilita inferir que ele tem uma percepção baseada em experiência, observando padrões, porém sem garantia de ganho.

Nesses casos, como nos resultados de Fernandes e Braga (2023), os dois estudantes não conseguiram identificar eventos desse tipo como não equiprováveis, considerando predominantemente suas crenças. Essa lacuna está diretamente associada à habilidade EM13MAT511 da BNCC (Brasil, 2018), que faz menção ao reconhecimento da existência de diferentes eventos, equiprováveis ou não, e suas implicações no cálculo de probabilidades.

Na turma B, da mesma forma, quando questionados sobre quem já havia apostado em BETS, vários estudantes (1, 2, 3, 4, 5, 6, 17 e 18) levantaram as mãos. Alguns afirmaram ter ganho dinheiro e outros, perdido.

Estudante 2: “Ganhei R\$5.000.

Professor: R\$5.000? Para você ganhar esse R\$5.000 você apostou quanto?

Estudante 11: R\$ 5.000 também. (risos)

Estudante 2: R\$1.000 reais.

Professor: Normalmente, você ganha ou perde?

Estudante 2: Varia, apostando ganha um pouquinho, perde um pouquinho...

Estudante 6: Até que perde tudo.

Professor: Vocês que já jogaram ou jogam, vocês acreditam que as BETS é só sorte ou tem outros detalhes?

Estudante 2: É como se fosse uma pirâmide. Para um ganhar, vários têm que perder.

Quando os estudantes que não haviam se posicionado foram questionados se conheciam pessoas de seu convívio que jogavam, a estudante 10 trouxe um relato de uma de suas primas: “*Foi uma prima minha, ela estava muita viciada, no caso. Ela jogou, perdeu bastante dinheiro também. Depois conseguiu sacar R\$ 1.000 e alguma coisa e até hoje ela vive nesse perde, ganha, perde...*”.

Analisando essas falas, evidenciamos que o contexto das apostas online (BETS) está presente na realidade dos estudantes da região do vale do São Francisco. Também ressaltamos que suas percepções demonstram se restringir às suas experiências de vida, por desconsiderarem a possível existência de percentuais numéricos de chances de ganhar, bem como de cálculos estatísticos feitos pelas casas de apostas.

O professor expôs para as turmas que os fatores aleatoriedade e variabilidade estão inseridos nesse tipo de situação e que, independentemente do conhecimento do contexto, não há uma forma de “prever” o resultado antes do jogo. Dessa forma, possibilitamos aos estudantes refletirem sobre o fato de que apenas as suas percepções não são suficientes para interpretar e analisar situações aleatórias.

Quanto a isso, Alvarado Martinez *et al.* (2021) também ressaltaram em seu estudo a ausência de noções elementares de Probabilidade quando os estudantes argentinos se depararam com situações reais.

Nos itens (b), (c) e (d), o professor visava identificar as crenças dos estudantes, assim como os sentimentos pessoais em relação ao risco. Para isso, optou por ir perguntando de forma individual a opinião dos estudantes, incentivando-os a apresentar suas opiniões e os motivos de suas escolhas. Essas respostas foram escritas inicialmente no quadro branco e posteriormente sistematizadas em tabelas, expressando as crenças de probabilidade com o uso de termos probabilísticos (Língua natural escrita). Na sequência, esses termos foram relacionados com a representação numérica percentual e, por fim, associado às possíveis consequências de quem joga.

De forma geral, esses itens estão associados diretamente à habilidade EM13MAT106 da BNCC, estimulando a identificação de situações cotidianas nas quais fazemos escolhas levando em conta os riscos probabilísticos.

No item (b), o professor fez uma pergunta solicitando o uso de termos probabilísticos. Nesse caso, os estudantes, individualmente, foram convidados a dizer, por meio dos termos “*Impossível, Pouco provável, Provável, Muito provável e Certo*”,

suas opiniões quanto à probabilidade de se ter lucro por meio das apostas esportivas online. Além disso, foram estimulados a dizer o motivo dessa escolha.

A Tabela 8.14 mostra os resultados das respostas dos estudantes ao item 1b.

Tabela 8.14 - Percentual de respostas dos estudantes ao item 1b

Probabilidade	Turma A	Turma B
Impossível	11,1	--
Pouco provável	33,3	36,8
Provável	55,6	36,8
Muito provável	--	5,4
Certo	--	--
Não sabe / não respondeu	--	21,0

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Analizando os dados da Tabela 8.14, percebemos uma predominância de respostas com o uso do termo “Provável”, na Turma A. Esses resultados evidenciam que a maioria dos estudantes dessa turma recorreu a termos que trazem incerteza e aleatoriedade, crendo que é real a chance de ter lucro com as BETS. Na Turma B, predominou, de forma igualitária, o uso do termo “Pouco provável” e “Provável”, identificando uma postura menos confiante em relação à probabilidade de ter lucro. Assim, os estudantes apresentaram uma relação bem positiva com as BETS. Ressaltamos também que foi alto o índice de estudantes da Turma B que não responderam, o que pode indicar uma possível falta de conhecimento desse contexto ou desinteresse em responder.

Dessa forma, nessa etapa do processo intervencivo, o professor abordou os diversos termos que permitem descrever a incerteza e associá-la com a noção formal de Probabilidade, com o intuito de estimular os estudantes a pensarem como podem expressar suas crenças.

Apresentamos alguns excertos das falas dos estudantes:

Estudante 15 (Turma A): Impossível porque eu não jogo.

Estudante 11 (Turma B): Impossível não é.

Estudante 4 (Turma A): É provável, meio termo, dependendo do que jogue.

Estudante 6 (Turma A): É provável, 50% de perder e 50% de ganhar.

De forma geral, essas falas reforçam as reflexões de Santos (2010; 2020), ao citar a importância de empregar os termos linguísticos da Probabilidade de forma

adequada para interpretar enunciados e conceitos. A fala do estudante 1 apresenta características dos Elementos disposicionais (crenças e atitudes) quanto a esse tipo de jogo de azar, informando que não joga, empregando de forma correta o termo “impossível” da linguagem probabilística. Outro detalhe que podemos analisar nessa fala é que ela se aproxima de uma visão determinística, visto que, como a ação dele é não jogar, o resultado já está definido (não tem acaso).

No excerto de fala do estudante 11, percebemos a crença do estudante, que, por suas experiências, acredita que a possibilidade existe, contudo, não a quantifica. O estudante 4 traz uma visão relacionada ao conhecimento do contexto, visto que, para ele, ter ciência da situação é importante e influencia na probabilidade de ganhar. Já a fala do estudante 6 evidencia uma visão mais próxima da Probabilidade Clássica, considerando que num evento há apenas dois resultados igualmente possíveis (ganhar ou perder), cada um com a mesma probabilidade de acontecer: 50% para cada lado. Dessa forma, podemos inferir que esse estudante está pensando em termos de equiprobabilidade.

Ao preencher a frequência das respostas dos estudantes, o professor estabeleceu um paralelo entre amostra e população, questionando se os resultados da tabela refletiam a opinião da escola. Prontamente, os estudantes disseram que não. Essa negação evidencia elementos da habilidade EM13MAT311 da BNCC, que faz menção à compreensão do espaço amostral em eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades. Questionamentos desse tipo colaboram para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico ao possibilitar que os estudantes compreendam que não é adequado generalizar a partir de dados específicos e de um único contexto.

No item (c), o professor leu o enunciado e solicitou que os estudantes levantassem as mãos para responder: “*Na sua opinião, qual a probabilidade de alguém ganhar dinheiro com apostas em BETS?*”, fazendo com que os estudantes relacionassem suas crenças com a representação numérica em percentual, além de associarem a representação com os termos do item anterior e refletirem sobre eles. Além disso, o professor propôs uma discussão coletiva que permitiu a comparação entre as duas representações (Tabela 8.15).

Tabela 8.15 - Percentual de respostas dos estudantes ao item 1c

Probabilidade	Turma A	Turma B
0%	5,6	--
Até 10%	38,8	21,1
Entre 11% e 30%	27,7	47,4
Entre 31% e 50%	5,6	31,5
50% ou mais	22,3	--

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Analizando os dados da Tabela 8.15, observa-se que, para os estudantes de ambas as turmas, a probabilidade de ganhar dinheiro com as BETS é maior do que de perder.

Para concluir a primeira atividade, no item (d), o professor interrogou os estudantes sobre qual frase refletia melhor a circunstância de quem joga com regularidade. O objetivo dessa abordagem foi descobrir, por meio da Língua natural escrita, os juízos que os estudantes tinham em relação ao comportamento dos apostadores. Ademais, o professor propôs a reflexão com toda a turma sobre as possíveis repercussões desse costume, estendendo a discussão para além do cálculo probabilístico, articulando os Elementos do conhecimento e os disposicionais (Tabela 8.16).

Tabela 8.16 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1d

Probabilidade	Turma A	Turma B
Quem insiste, uma hora ganha	11,1	---
Sempre perde no fim das contas	11,1	21,1
Depende da sorte	27,9	21,1
Depende do conhecimento do jogo	50	57,8

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Analizando os dados apresentados na Tabela 8.16, observa-se uma predominância, em ambas as turmas, de respostas associadas à frase “*Depende do conhecimento do jogo*”. Dessa forma, podemos dizer que os estudantes consideram totalmente relevante o conhecimento do contexto para fazer as previsões e inferências dos resultados, desconsiderando a aleatoriedade inerente a essa ação, reforçando a importância do contexto, conforme descrito por Franco Seguí e Alsina (2024) e Barbosa e Melo (2021).

Nas duas turmas, quando o professor perguntou aos estudantes o tipo de apostas que realizavam, eles disseram que apostavam apenas em jogo de futebol, por ser um esporte cujo placar eles têm mais chance de acertar e, consequentemente, de ganhar.

Ponderando os resultados dos itens (b), (c) e (d), o professor ressaltou que existem diferentes maneiras de analisar situações aleatórias e incertas, como a representação na língua materna e a representação numérica percentual. Também pontuou que cada turma corresponde a um espaço amostral e que aqueles resultados são restritos a esse espaço, sem podermos generalizar para toda a escola, por exemplo.

Dessa forma, aumentamos a compreensão das diferentes representações que podem ser usadas para expressar a probabilidade de uma situação. Além disso, as ações realizadas nessa atividade tinham o foco não somente de discutir o conceito de Probabilidade, mas também de relacionar os Elementos do conhecimento e os disposicionais. Logo, buscamos que os estudantes conseguissem relacionar suas crenças e seus posicionamentos para responder a essa atividade, reforçando uma reflexão crítica e ajudando a construir argumentos coerentes.

No segundo momento, o professor solicitou que os participantes se organizassem em duplas para a resolução de uma atividade impressa. A opção por essa organização foi para estimular a troca de opinião em duplas, provocando maior motivação para participar da atividade.

Considerando o nosso objetivo, sistematizamos as atividades impressas em duas versões. A versão A apresentava os dados na representação Tabular e a versão B, por meio da representação gráfica, com o intuito de que os dados fossem refletidos a partir de diferentes representações e os estudantes conseguissem perceber a importância de compreender os dados probabilísticos nas variadas formas.

Figura 8.59 – Atividade 1 Impressa - Tipo A e B

ATIVIDADE 1- IMPRESSA - TIPO A

O Datafolha realizou uma pesquisa com o objetivo de coletar a opinião dos brasileiros (com idade superior a 18 anos) sobre as apostas esportivas online. As entrevistas ocorreram entre os dias 05 e 06/11/2024 com abrangência nacional, incluindo Regiões Metropolitanas e Cidades do Interior de diferentes portes, em todas as Regiões do Brasil, em 113 municípios. A amostra total foi de 1.935 entrevistas.

Quadro 1 - Perfil da amostra



a) Qual dessas variáveis vocês acham que é mais importante?

b) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, homens ou mulheres? Por quê?

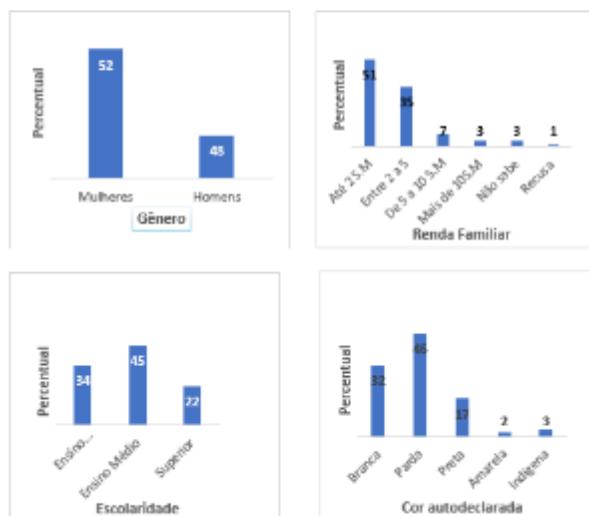
c) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, pessoas mais idosas ou jovens? Por quê?

d) Você é contrário a proibição das apostas esportivas online no Brasil?

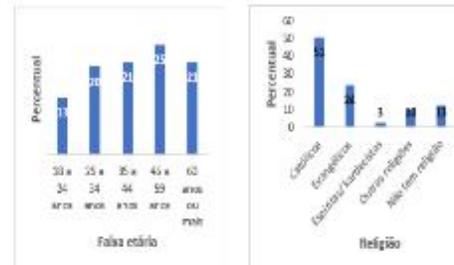
ATIVIDADE 1- IMPRESSA - TIPO B

O Datafolha realizou uma pesquisa com o objetivo de coletar a opinião dos brasileiros (com idade superior a 18 anos) sobre as apostas esportivas online. As entrevistas ocorreram entre os dias 05 e 06/11/2024 com abrangência nacional, incluindo Regiões Metropolitanas e Cidades do Interior de diferentes portes, em todas as Regiões do Brasil, em 113 municípios. A amostra total foi de 1.935 entrevistas.

Gráfico 1 - Perfil da amostra



Fonte: Dados da pesquisa.



a) Qual dessas variáveis vocês acham que é mais importante?

b) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, homens ou mulheres? Por quê?

c) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, pessoas mais idosas ou jovens? Por quê?

d) Você é contrário a proibição das apostas esportivas online no Brasil?

Para a elaboração dessa atividade, consideramos os dados de uma pesquisa elaborada pelo Datafolha em novembro de 2024 e respondida por 1935 pessoas, com o intuito de coletar a opinião dos brasileiros (com idade superior a 18 anos) sobre as apostas esportivas online. Partindo disso, as duplas tiveram um intervalo de tempo para discutir e refletir sobre suas respostas. Posteriormente, o professor-pesquisador fez a leitura em voz alta das questões, sistematizou os resultados apresentados e iniciou a reflexão com os estudantes, incentivando a argumentação oral, possibilitando uma troca de informações, confrontando as ideias dadas pelas duplas.

No item 1a, “*Qual dessas variáveis vocês acham que é mais importante?*”, buscamos levantar as hipóteses dos estudantes, para identificar as variáveis que eles consideravam mais pertinentes quando realizaram a análise do perfil da amostra dos participantes da pesquisa.

Tabela 8.17 - Percentual de respostas no item 1a na atividade impressa

Opinião dos estudantes	Turma A	Turma B
Gênero	--	--
Idade	36,4	33,4
Escolaridade	9,1	--
Cor	--	--
Renda familiar	54,5	66,6
Religião	--	--

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Observando a Tabela 8.17, temos que, para os estudantes das duas turmas, a idade e a renda familiar são as principais variáveis associadas às apostas online, com maior destaque para a renda. Observa-se que não consideraram as outras variáveis colocadas na pesquisa Datafolha.

Esse item colabora para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, uma vez que estimula os estudantes a refletirem sobre como essas variáveis podem influenciar diretamente nas práticas dos jogadores desse tipo de jogo, propiciando uma postura para fazer análises críticas e coerentes.

Quando o professor solicitou as justificativas para as percepções dos estudantes, foram apresentados variados argumentos. A seguir, apresentamos alguns excertos das falas dos estudantes em relação à idade, à faixa etária e à escolaridade expressas nas duas turmas:

Estudante 7 (Turma A): A idade é uma variável porque se for, por exemplo, um idoso, ele não tem o conhecimento...

Estudante 3 (Turma B): A idade conta porque menor de idade não pode jogar.

Estudante 6 (Turma A): Eles não são ligados às redes, dos placares dos jogos assim...de 18 a 24 anos é melhor para mexer nas redes.

Estudantes 12 (Turma B): A renda é importante pois os mais “lascados” são os mais viciados. Vende até as coisas que têm dentro de casa, “bujão”, comida, vende tudo.

Estudantes 15 e 16 (Turma A): A renda é importante porque quanto mais ganha, mais aposta.

Estudante 10 (Turma B): A pessoa joga porque está passando por dificuldade.

Estudante 6 (Turma A): Alguns já têm dinheiro e jogam para ganhar mais.

Estudante 7 (Turma A): Por exemplo, se eu venho para a escola, eu posso ter mais visibilidade para perguntar a alguém sobre tal jogo, pergunta para outra pessoa sobre outra coisa e tal. Vou pegar a opinião de cada um e juntar pra “vê” se bate com o meu conhecimento com deles, uma coisa assim.

O professor, enquanto mediador do conhecimento, incitou os estudantes a pensarem nas variáveis, que foram primordiais para entender o perfil das pessoas que apostam em BETS. Dessa forma, o uso de dados autênticos atrelado à crença dos estudantes tentou promover um comparativo entre a visão das duplas, inicialmente, e depois de toda a turma. Assim, essas falas evidenciam que o professor conduziu o processo interventivo estimulando reflexões em duplas e coletivamente, para mostrar a importância de analisar e interpretar os dados em situações aleatórias.

Analisando as falas dos estudantes, percebemos a presença do Elemento do conhecimento “Contexto”, correlacionado ao Elemento disposicional “Crenças”, com a tomada de decisão para a realização de apostas esportivas online. Para os participantes, a idade e a renda são fatores que podem influenciar os resultados e afetar as decisões tomadas no contexto das apostas esportivas. Todavia, essas justificativas estão pautadas apenas em suas percepções, sem uma devida associação com as variáveis e os dados da pesquisa. Além disso, fazem generalizações que não são possíveis, evidenciando uma lacuna na compreensão de amostra e população.

Apresentamos a seguir exemplos de respostas apresentadas pelos estudantes nesse item da atividade impressa.

Figura 8.60 - Exemplo de resposta com justificativa “idade” na atividade impressa 1a

a) Qual dessas variáveis vocês acham que é mais importante?
 IDADE, QUANTO MAIS NOVO ELE OU ELA JOGAM E CONHECE MAIS SOBRE O JOGO

[Idade, quanto mais novo ele ou ela jogam e conhecem mais sobre o jogo]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.61 - Exemplo de resposta com justificativa “renda familiar” na atividade impressa 1a

a) Qual dessas variáveis vocês acham que é mais importante?
 Renda, por que quanto maior dinheiro a pessoa tem, mais ela pode apostar.

[a renda, por que quanto mais dinheiro a pessoa tem, mais ela pode apostar]

Fonte: Dados da pesquisa.

No item 1b, o professor estimulou a associação entre as crenças pessoais dos estudantes e os dados da pesquisa, em relação à variável “gênero”, ao perguntar: “*Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, homens ou mulheres? Por quê?*”. Dessa forma, buscamos observar se os estudantes iriam se pautar apenas em suas experiências ou também iriam ponderar os dados apresentados. As respostas deles estão apresentadas na Tabela 8.18, a seguir.

Tabela 8.18 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1b na atividade impressa

Opinião dos estudantes (Gênero)	Turma A	Turma B
Homens	9,0	--
Mulheres	63,7	83,3
Nenhum ou ambos	27,3	16,7

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Para as duas turmas, as mulheres foram pontuadas como maior apoio à proibição das apostas esportivas online. Quando o professor perguntou o motivo dessa escolha, os participantes informaram que as mulheres são mais conscientes e críticas e, por isso, são a favor da proibição (Figura 8.62). Ressaltamos que os estudantes argumentaram sobre a consciência das mulheres, demonstrando que sabem sobre os riscos, mas, mesmo assim, apostam.

Figura 8.62 - Exemplo de resposta com a escolha “mulheres” na atividade impressa 1b

b) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, homens ou mulheres? Por quê?

Mulheres! Pois eu acho que São as únicas que têm Consciência, e pelo número de usuário de apostas os homens é o que mais aposta e que quer dizer mais viciados e isso faz com que as mulheres defendam a proibição.

[Mulheres, pois eu acho que são as únicas que tem consciência e pelo número de usuário de apostas, os homens é o que mais aposta e que quer dizer mais viciados e isso faz com que as mulheres defendam a proibição.]

Fonte: Dados da pesquisa.

O item 1c solicitava a opinião/crença das duplas em relação a quem defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, considerando a faixa etária (pessoas mais idosas ou jovens). Os dados das respostas foram apresentados aos estudantes (slide) (Tabela 8.19).

Tabela 8.19 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1c da atividade impressa

Opinião dos estudantes (Idade)	Turma A	Turma B
Jovens	9,0	--
Idosos	91,0	100

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Nota-se, de acordo com as crenças dos estudantes, independentemente da turma, que os idosos são os que mais defendem a proibição das apostas online, com um número ínfimo de respostas que mencionem os jovens. Quando solicitadas pelo professor por meio da representação na Língua natural oral, as justificativas apresentadas pelos estudantes trazem estereótipos, conforme podemos observar nas falas a seguir:

Estudante 17 (Turma A): Porque os jogos de azar não é algo da época deles.

Estudante 3 (Turma A): Porque os jovens são mais influenciados por essa (inaudível) e também não têm muita responsabilidade com essa questão de casa.

Estudante 18 (Turma B): Têm pouco conhecimento desse mundo virtual.

Estudante 13 (Turma B): Ao mesmo tempo que eles não têm o conhecimento disso, se eles entrarem para jogar eles não vão ter controle se eles aprenderem, né?

A partir dessas falas, o professor destacou, em ambas as turmas, que, para eles, os idosos defendem mais a proibição das apostas online, se comparados aos jovens. Todavia, ressaltou que isso não pode ser considerado como uma verdade absoluta e que há pessoas de diferentes faixas etárias que também podem ser favoráveis à proibição. Ademais, ressaltou a necessidade de analisar se os dados apresentados nas pesquisas são autênticos (questões críticas) e de se fazer uso deles para fundamentar os argumentos.

Com base nos resultados da Tabela 8.19 e nas declarações dadas pelos estudantes, nota-se que os estudantes, independentemente da turma, têm concepções preestabelecidas quanto à relação entre idade e apostas online. Dessa forma, a chance de escolher, de forma aleatória, um estudante de uma dessas turmas que pensa que os jovens são mais favoráveis à proibição das apostas esportivas online no Brasil é pequena.

Figura 8.63 - Exemplo de resposta com justificativa “Jovens” na atividade impressa 1c

c) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, pessoas mais idosas ou jovens? Por quê?

Os jovens porque eles acham que com apenas 5 reais eles acham que viram milhão e vão ficar sem trabalhar.

[Os jovens porque eles acham que com apenas 5 reais eles acham que viram milhão e vão ficar sem trabalhar.]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.64 - Exemplo de resposta com justificativa “Idosos” na atividade impressa 1c

c) Na opinião de vocês, quem mais defende a proibição das apostas esportivas online no Brasil, pessoas mais idosas ou jovens? Por quê?

Idosas, pois são mais velhas e experientes, as jovens sempre estão dispostas a mais chance de dinheiro fácil.

[Idosas, pois são mais velhas e experientes, as jovens sempre estão dispostas a mais chance de dinheiro fácil]

Fonte: Dados da pesquisa.

O último item da atividade impressa referia-se aos sentimentos pessoais dos estudantes em relação ao risco associado às apostas esportivas, questionando-os: “Você é contrário à proibição das apostas esportivas online no Brasil?”. Essa pergunta foi desenvolvida com o intuito de perceber como os

participantes consideravam os riscos associados a essa prática e como isso influencia na tomada de decisão entre defender ou não a proibição.

Tabela 8.20 - Percentual de respostas dos estudantes no item 1d na atividade impressa

Opinião dos estudantes	Turma A	Turma B
A favor da proibição	45,4	16,6
Contra a proibição	54,6	83,4

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Podemos notar (Tabela 8.20) que os estudantes das duas turmas são contrários à proibição das BETS, com maior incidência na Turma B. Vale salientar que nessa turma, dentre os estudantes que mencionaram já ter apostado, apenas um informou ter obtido lucros.

Estudante 6 (Turma A): Eu sou contrário à proibição, eu gosto de jogar e fazer jogo esportivo.

Estudante 16 (Turma A): Eu sou a favor da proibição. Quanto mais joga, mais vicia. Tudo demais é veneno.

Figura 8.65 - Exemplo de resposta com justificativa “favorável” à proibição dos jogos na atividade impressa 1d

d) Você é contrário à proibição das apostas esportivas online no Brasil?
Sou a favor da proibição pois tem consequências ruins

[Sou a favor da proibição, pois tem consequências ruins]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.66 - Exemplo de resposta com justificativa “contrária” à proibição dos jogos na atividade impressa 1d

d) Você é contrário à proibição das apostas esportivas online no Brasil?
Contrário a proibição, gosto de jogar e fazer jogos esportivo

[contrário a proibição, gosto de jogo e fazer jogos esportivo]

Fonte: Dados da pesquisa.

Outro fator importante que ressaltamos é que os estudantes desconsideraram os riscos inerentes a essa ação e tomam decisões frente a

eventos incertos confiantes em seus conhecimentos, como se infere da seguinte fala:

Estudante 18 (Turma B): Eu sou contrário à proibição. Eu jogo muito em futebol. Futebol não tem esse negócio igual ao tigrinho, não. Futebol, o cara tem que saber.

Podemos analisar essa fala com base nos elementos do Letramento Probabilístico. Quanto aos Elementos do conhecimento, conseguimos perceber que o estudante pondera o conhecimento do contexto (jogar futebol) e não acredita que a aleatoriedade seja importante nesse tipo de aposta (Grandes ideias). Com relação aos Elementos disposicionais, esse excerto traz uma postura crítica, quando o estudante justifica sua posição contra a proibição das apostas online, bem como quando expressa o seu sentimento em relação à incerteza e risco nesse tipo de prática.

Diante das respostas fornecidas pelos estudantes, ponderamos que esses itens não têm uma única resposta adequada, uma vez que as respostas são reflexos das realidades e crenças de cada estudante, o que evidencia que as nossas escolhas e decisões tomadas em nosso cotidiano são influenciadas por aspectos particulares e inerentes a cada um. Apesar disso, é importante ponderar os dados apresentados em pesquisas, quando forem autênticos, ação fundamental para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

A partir dos dados desse segundo momento, de reflexão coletiva, podemos inferir que os estudantes, independentemente da turma, levam em consideração mais os seus Elementos disposicionais (crenças e sentimentos ao risco) para posicionarem-se em relação às apostas esportivas online. Podemos dizer que isso é uma limitação para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, pois eles desconsideraram (ou até então desconheceram) a importância do conhecimento do cálculo da probabilidade nessa ação. De fato, na mídia e no cotidiano, não há estímulo a esse cálculo, e sim à ilusão do ganho.

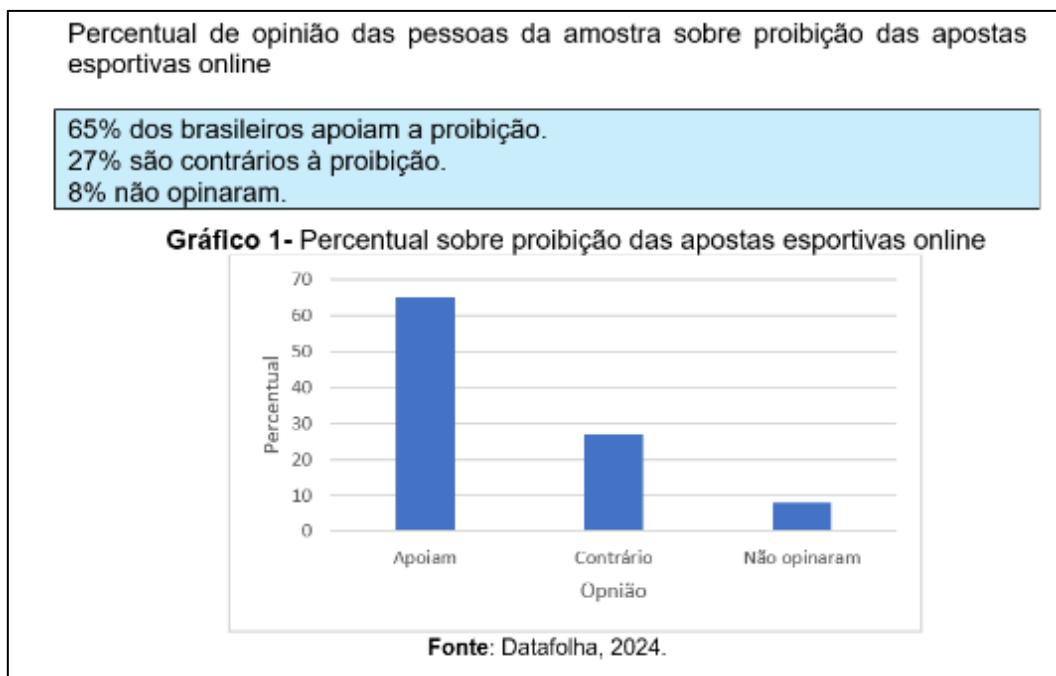
Após essa reflexão com os estudantes, no terceiro momento, apresentamos, por meio de slides, uma atividade com três itens que apresentava os dados da pesquisa feita pelo Datafolha, mostrando a opinião das pessoas da amostra sobre proibição das apostas esportivas online, bem como as pessoas favoráveis à proibição por gênero e, por fim, os gastos mensais com as BETS

por renda familiar. A nossa intenção com esses dados foi estimular as duplas a compararem suas respostas com os resultados autênticos, estabelecendo uma relação com as respostas fornecidas pelos estudantes na atividade impressa.

Considerando as proposições feitas por Mutara (2015), Custódio (2017) e Post e Prediger (2022), de que a intercambialidade entre as representações colabora para a compreensão do conceito de Probabilidade e para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, apresentamos os dados em duas representações, para identificar se os estudantes comprehendiam que as informações eram as mesmas e para discutir sobre como as diferentes representações influenciam a percepção dos estudantes.

No primeiro item, discutimos acerca do percentual de opinião das pessoas da amostra sobre a proibição das apostas esportivas online. Esse dados foram apresentados na Língua natural escrita e na representação Gráfica, como mostra a Figura 8.67.

Figura 8.67– Atividade 1 (slide) – item a – duas versões



Fonte: Dados da pesquisa.

Quando questionados sobre qual representação auxiliava mais a compreender esses dados, 62,7% de estudantes da Turma A afirmaram que a representação gráfica permite uma melhor compreensão. Na turma B, também 68,4% afirmaram que a representação gráfica era melhor. Sendo assim,

ressaltamos que, em ambas as turmas, a representação gráfica permite uma melhor visualização de dados para comparar percentuais. Todavia, esses dados podem ser expressos em outras representações e os estudantes precisam saber analisar e interpretar os dados em cada caso. Logo, o professor deve deixar evidente para os estudantes que, independentemente da representação, os dados precisam ser analisados de forma crítica.

Vale ressaltar que, mesmo de forma mais tímida, alguns estudantes citaram a representação escrita como forma de melhor compreender. Assim, concordamos com Anastasiadou e Chadjipantelis (2008), quando pontuam que apresentar os dados em diversas representações auxilia um maior número de estudantes na interpretação de situações probabilísticas, pois cada estudante pode compreender melhor em um tipo de representação. Esse detalhe permite ressaltar a importância de propor um processo de ensino pautado na utilização de múltiplas representações, para uma melhor compreensão dos conceitos de Probabilidade e para estimular o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Quadro 8.3 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1a da atividade do slide nas turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Então, 12 acham a gráfica melhor e 6 a escrita. Vocês acham a escrita melhor por quê? E a gráfica?</i></p> <p><i>Estudante 16: A escrita facilita mais a minha compreensão.</i></p> <p><i>Estudante 3: Porque a gráfica é melhor de ver, professor. Acho que dá mais sentido para você comparar. Até para explicar a quem não sabe ler é melhor, professor, eu acho, né?</i></p>	<p><i>Professor: São as mesmas informações, só que a representação é diferente, uma é na língua escrita e outra na representação gráfica. Para vocês, qual é melhor para compreender esses dados, a escrita ou a gráfica?</i></p> <p><i>Estudante 18: A escrita.</i></p> <p><i>Estudante 6: Rapaz, eu acho que é a gráfica.</i></p> <p><i>Professor: Por que a escrita? São as mesmas informações, não muda dado algum.</i></p> <p><i>Estudante 11: Se a de cima (escrita) estiver num texto enorme, eu não perco tempo lendo. A de baixo (gráfico) é bem melhor para diferenciar. A visualização ajuda.</i></p> <p><i>Estudante 18: O escrito depende do tamanho do texto.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

Considerando essas falas, o professor reforçou, em ambas as turmas, a informação de que apesar de estarem apresentadas de formas diferentes, as duas representações utilizam os mesmos dados e têm o mesmo propósito, de

divulgar as informações ao público sobre a concepção dos participantes da pesquisa. Porém, na representação gráfica, o efeito visual sobressai mais, se comparado ao da língua natural escrita.

No questionamento “*O que esses resultados indicam sobre a opinião da amostra em relação à prática das apostas esportivas?*”, o professor visava estimular a análise e interpretação crítica dos dados quantitativos, considerando o contexto e a linguagem. Além disso, essa questão permitiu uma reflexão sobre os conceitos de amostra e população e as generalizações possíveis.

Estudantes (Turma A): Mais apoiam.

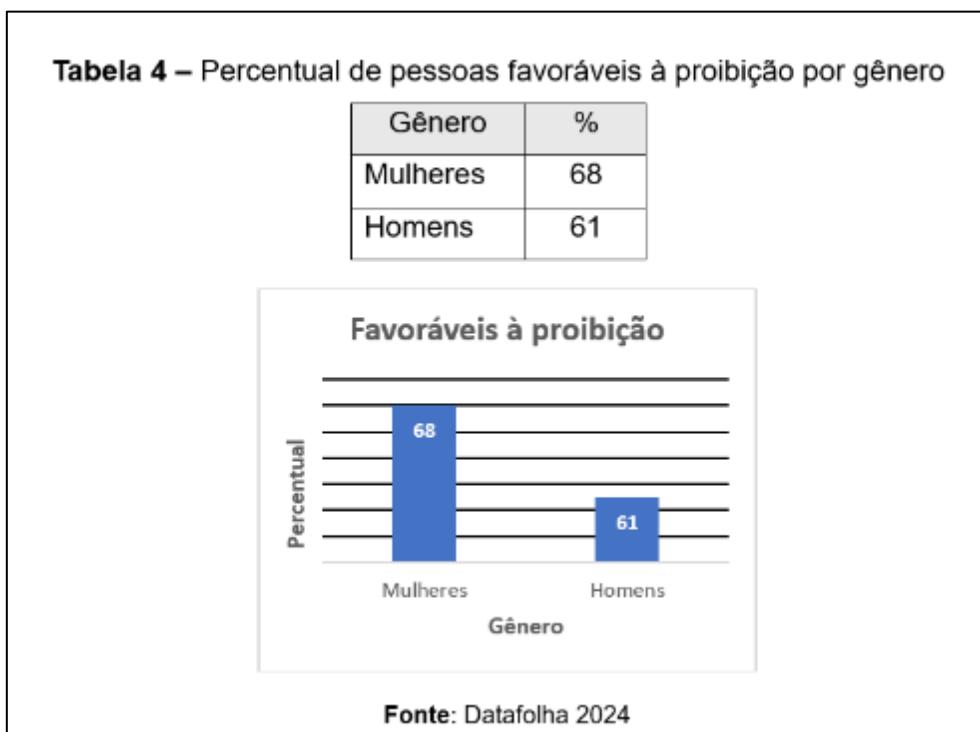
Estudante 6 (Turma A): Que os brasileiros mais apoiam a proibição.

Estudantes (Turma B): Mais apoiam.

Estudante 11 (Turma B): As pessoas são mais a favor da proibição.

O professor instigou os estudantes a apresentarem justificativas, para além de dizer que os brasileiros apoiam a proibição, porém não obteve respostas. Esses excertos evidenciam dificuldades dos estudantes em argumentar e posicionar-se após a análise de dados. Esse tipo de dificuldade também foi pontuado por Fernandes e Junior (2016), associando ao formato utilizado para o ensino dos conceitos de Estatística e Probabilidade com foco na mecanização dos conceitos e a aplicação de técnicas.

O segundo item “*O que os dados evidenciam sobre a relação entre gênero e opinião sobre a prática das apostas esportivas?*” apresentava os dados por meio da representação tabular e gráfica. Dessa forma, o professor propôs uma reflexão coletiva entre os estudantes a partir das informações apresentadas, visando analisar o Elemento disposicional “*Postura crítica*” nas suas falas.

Figura 8.68 – Atividade 1 (slide) – item b – duas versões

Fonte: Dados da pesquisa.

No que se refere à pergunta sobre qual formato ajudava mais a entender essas informações, percebemos uma diferença de resultados entre as turmas. Na turma A, 77,7% dos estudantes disseram que a forma tabular proporciona uma compreensão superior; e na turma B, 61,1% mencionaram que a representação gráfica auxilia mais que a representação tabular.

Essas diferenças ressaltam a importância do professor, enquanto mediador do conhecimento, fazer uso de múltiplas representações (Elemento do conhecimento: Linguagem), estimulando o desenvolvimento de habilidades e ampliando a visão crítica para analisar, refletir e argumentar sobre os dados probabilísticos nas mais variadas formas.

No Quadro 8.4, apresentamos as respostas dos estudantes e algumas tentativas de explicitar os motivos de suas escolhas. Vásquez e Alsina (2019) ressaltam que, em situações frequentistas (como a situação apresentada na questão), os resultados devem ser organizados por meio de tabelas ou de gráficos.

Quadro 8.4 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1b da atividade do slide, nas turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Agora, nós temos a representação tabular e a representação gráfica. Pergunto a vocês, qual vocês acham melhor para interpretar: a tabular ou a gráfica?</i></p> <p><i>Estudante 6: A tabular dá para saber o valor exato dos dois. O gráfico só vê o percentual.</i></p> <p><i>Professor: Mas nesse caso aqui, diferente do anterior, eu tenho o percentual nos dois, 68% e 68%. Você continua achando que é a tabela?</i></p> <p><i>Estudante 6: Para mim fica os dois, eu acho.</i></p> <p><i>Estudante 16: Na tabular eu já tenho acesso ao número direto.</i></p>	<p><i>Professor: Na questão anterior, vocês analisaram os dados na forma escrita e na gráfica. Nessa, os dados estão apresentados em tabela e gráfico. Qual fica melhor para interpretar?</i></p> <p><i>(sala em silêncio)</i></p> <p><i>Professor: É a mesma informação na tabela e no gráfico. Qual vocês acham melhor para interpretar?</i></p> <p><i>Estudante 6: Para mim é o gráfico, gráfico.</i></p> <p><i>Professor: Por que o gráfico?</i></p> <p><i>Estudante 6: É algo mais demonstrativo, né? É porque a imagem, né?</i></p> <p><i>Estudante 2: Para mim é o gráfico, por causa da estética.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

Nesses diálogos durante a reflexão sobre os dados da pesquisa feita pelo Datafolha, observamos que ambas as turmas chegaram à conclusão de que as mulheres são mais favoráveis à proibição das BETS online:

Estudante 16 (Turma A): As mulheres não querem que os maridos apostem para não perder dinheiro.

Estudante 13 (Turma B): Mais mulheres são a favor de acabar com as BETS.

O argumento adotado pelo Estudante 16 se refere aos maridos (fato que não foi informado nos resultados da pesquisa) e acrescenta a informação sobre “*perder o dinheiro*”, considerando o que ele acha, e não o que os dados apresentam. Esse tipo de lacuna foi descrito por Ody e Viali (2016), que observaram nos estudantes dificuldades em argumentar, fazer avaliações críticas e tomar decisões. Porém, outros estudantes, como a estudante 13, se ampararam nos dados apresentados.

O item c, também associado a esses dados, questionava: “*A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de que ela seja uma mulher contrária à proibição das apostas esportivas?*”. Para responder a essa questão, o professor esperava que os estudantes analisassem os dados apresentados na tabela ou

gráfico e chegassem a uma resposta numérica na forma percentual, fracionária ou decimal.

Em ambas as turmas, os estudantes apresentaram respostas apenas na forma percentual, informando que 32% das mulheres seriam contrárias à proibição.

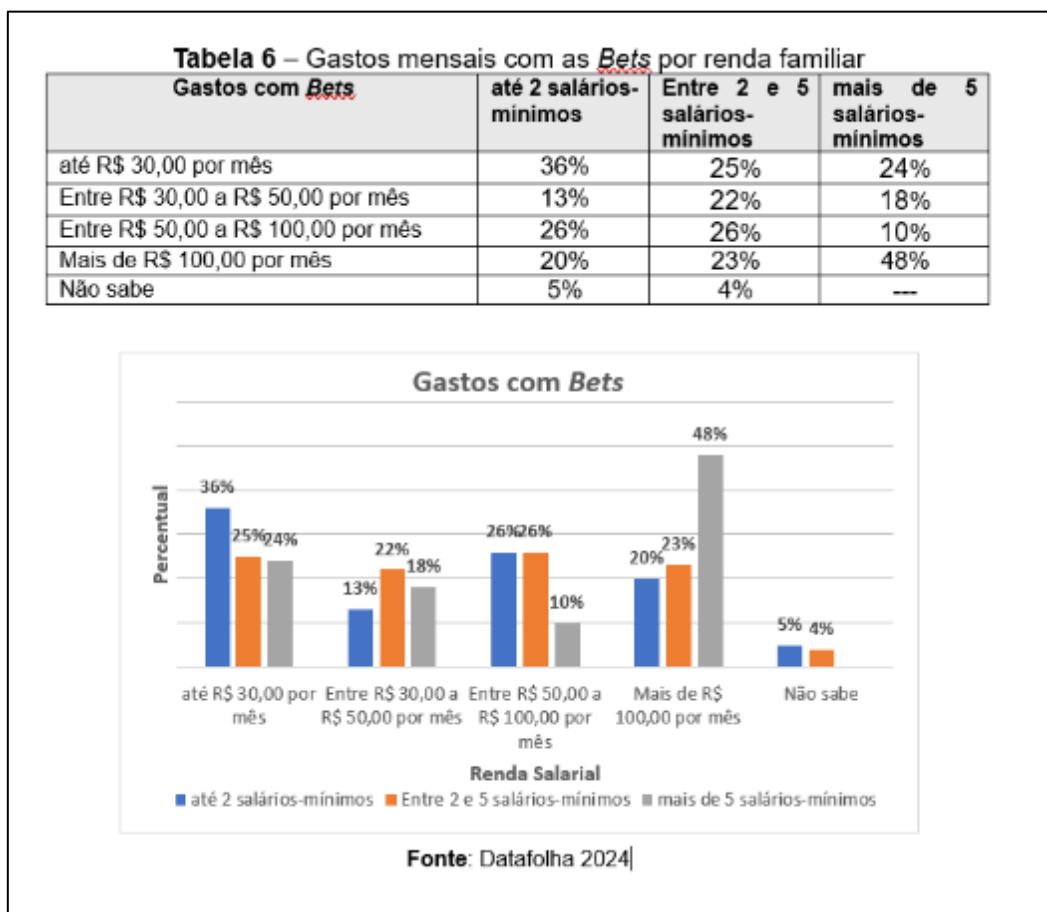
Quadro 8.5 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1c da atividade do slide nas turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de que ela seja uma mulher contrária à proibição das apostas esportivas?</i></p> <p><i>Estudante 8 e 15: A porcentagem.</i></p> <p><i>Professor: Então quanto seria contra?</i></p> <p><i>Estudante 7: a BETS, 8.</i></p> <p><i>Estudante 15: 32</i></p> <p><i>Estudante 8: Acho que vai ser isso aí.</i></p> <p><i>Estudante 16: Se o total é 100% e os favoráveis são 68, 100 menos 68 é 32.</i></p>	<p><i>Professor: A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de que ela seja uma mulher contrária à proibição das apostas esportivas?</i></p> <p><i>Estudante 6: 32</i></p> <p><i>Professor: O estudante 6 falou 32.</i></p> <p><i>Estudante 6: por cento, né?</i></p> <p><i>Professor: Por que você acha que é 32%?</i></p> <p><i>Estudante 6: Porque é o que sobra de 100%.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

Partindo dessas falas, o professor ressaltou que, ao escolher aleatoriamente uma pessoa para entrevistar, o espaço amostral corresponde ao conjunto de todas as 1935 pessoas entrevistadas. Dentre o total de mulheres entrevistadas, frisa-se que 68% são favoráveis à proibição. Logo, a maioria dos estudantes utilizou, mesmo que implicitamente, o conceito de Probabilidade Complementar, considerando que o total de mulheres entrevistadas equivale a 100% e 68% informaram ser favorável, concluindo que 32% seriam contra. Já o estudante 8 informou um número que diverge desse resultado, o que nos leva a concluir que ele informou um número de forma aleatória ou equivocada, sem considerar o espaço amostral.

No último item (item d) dessa atividade, o professor esperava que os estudantes realizassem a interpretação do gráfico e apresentassem uma postura crítica em relação à renda familiar dos participantes da pesquisa que jogam ou já jogaram nas BETS, interrogando-os: “É possível indicar uma relação entre o valor gasto em apostas e a renda familiar mensal?”

Figura 8.69 – Atividade 1 (slide) – item d – duas versões

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor encorajou os estudantes a emitirem uma opinião quanto à apresentação dos dados nas duas representações. Para 50% da Turma A, a representação gráfica permite uma melhor compreensão, e para 61,1% na Turma B.

Estudante 8 (Turma A): O gráfico ajuda mais na visualização.

Estudante 16 (Turma A): A tabela é mais fácil para calcular.

Estudante 11 (Turma B): Continuo com o gráfico. Para mim, o gráfico resolve tudo por causa da visualização.

Considerando o questionamento inicial desse item, o professor perguntou: “O que sinalizam esses resultados sobre a perspectiva da amostra em relação à prática das apostas esportivas?”

Quadro 8.6 – Diálogo durante a reflexão sobre o item 1d da atividade do slide nas turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: A partir desses dados, tem como fazer uma relação entre o valor gasto em apostas e a renda familiar mensal?</i></p> <p><i>Estudante 6: Tem.</i></p> <p><i>Professor: Qual?</i></p> <p><i>(silêncio na sala) O professor vai relacionando os percentuais da renda e a quantidade de dinheiro gasto com as BETS. Os estudantes começam a expor seus argumentos.</i></p> <p><i>Estudantes 15 e 16: Quanto mais ganha, mais joga.</i></p> <p><i>Estudante 17: Quem não tem dinheiro joga.</i></p> <p><i>Estudante 7: Quem tem dinheiro joga mais para ganhar mais.</i></p>	<p><i>Professor: A partir desses dados, tem como fazer uma relação entre o valor gasto em apostas e a renda familiar mensal?</i></p> <p><i>Estudante 10: Sim.</i></p> <p><i>Estudante 2: Cada um gasta o que pode.</i></p> <p><i>Estudante 13: Quanto mais ganha, menos gasta. Porque quem ganha mais de 5 salários, gasta mais de R\$100.00.</i></p> <p><i>Estudante 18: Isso não conta nada não. Depende do vício.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao questionar as duas turmas, o professor observou a existência de diferentes pontos de vista sobre a relação entre renda familiar e os gastos com apostas online. Além disso, essa questão provocou uma ampliação do olhar dos estudantes sobre o perfil dos apostadores das BETS. Todavia, as falas dos estudantes trazem suas crenças e percepções, desconsiderando os dados apresentados na tabela e no gráfico. Por exemplo, a fala do Estudante 18 da Turma B é preocupante, porque, apesar de ter acesso às informações, ele não as considera, pelo contrário, ele as refuta e afirma que essa relação depende do vício.

Esse tipo de dificuldade também foi pontuado por Álvarez-Arroyo, Batanero e Gea (2024), ao analisarem as respostas dos participantes, observando hiatos para interpretar e posicionar-se criticamente frente aos dados apresentados. Dessa forma, reforçamos a necessidade da articulação entre os Elementos do conhecimento e os disposicionais, que juntos colaboraram para que um sujeito seja letrado probabilisticamente.

No quarto e último momento do primeiro dia, buscamos instigar as duas turmas a pontuarem as possíveis diferenças entre dois tipos de jogos, as BETS e a Mega-Sena. Esse questionamento tinha a intenção de estabelecer uma reflexão sobre a natureza dos dois tipos de jogos, traçando um paralelo entre as probabilidades estatísticas e as manipuladas.

Quadro 8.7 – Diálogo durante o 4º momento da intervenção nas turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Eu pergunto a vocês: tem alguma diferença entre BETS e Mega-Sena?</i></p> <p><i>Estudante 3: As BETS dependem do algoritmo.</i></p> <p><i>Professor: Por que você acha que depende do algoritmo?</i></p> <p><i>Estudante 3: A função do algoritmo é fazer você sempre perder, não ganhar e centrar você a jogar mais. Ele vai dar dinheiro, dinheiro e depois vai tomar [...] E também depende da conta. A conta que um jogador normal tem é diferente da conta do influenciador.</i></p> <p><i>Estudante 6: Eu observo o número que mais sai (Mega-Sena) e jogo um número daquela casa, porque tem chance dele sair também.</i></p> <p><i>Professor: Então você acredita que, por exemplo, se 35 sair direto, você vai e joga porque você acha que vai sair direto?</i></p> <p><i>Estudante 6: Não, quando sair na casa dos 30, eu vou lá e calculo um número que passa perto.</i></p> <p><i>Professor: Então você sempre observa o número na casa dele.</i></p> <p><i>Professor: Por que a Mega-Sena sempre foi legalizada e a BET não?</i></p> <p><i>Estudante 7: Agora pegou duro.</i></p> <p><i>Estudante 6: Porque provavelmente a Mega-Sena deve pagar alguma coisa para a polícia federal, porque as BETS têm ilegais e as BETS não quer pagar imposto.</i></p>	<p><i>Professor: Fazendo agora um paralelo entre as BETS e a Mega-Sena. Para vocês têm alguma diferença entre BETS e Mega-Sena ou é tudo um jogo de azar? É tudo a mesma coisa?</i></p> <p><i>Estudante 14 e 11: É tudo um jogo.</i></p> <p><i>Estudante 11: Eu acho mais fácil ganhar na BETS.</i></p> <p><i>Estudante 6: Mega-Sena é sorte.</i></p> <p><i>Estudante 18: É sorte.</i></p> <p><i>Estudante 2: Eu acho que tem que ter conhecimento também.</i></p> <p><i>Estudante 11: Conhecimento pra quê? Você só marca uns negócios lá.</i></p> <p><i>Estudante 18: E aquele negócio das bolinhas ficar girando lá, isso ali não é conhecimento não?</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

De forma geral, ambas as turmas trazem suas crenças sobre esses dois tipos de jogos de azar, porém com enfoques diferentes. Na Turma A, foi pontuada a questão dos algoritmos inerentes às BETS. Além disso, a fala do estudante 6 desconsidera a aleatoriedade da independência dos eventos inerente à Mega-Sena, acreditando que os números com maior frequência têm maior chance de serem escolhidos.

Na Turma B, os estudantes acreditam que nas BETS o conhecimento do contexto do jogo é importante, sendo mais fácil de ganhar do que na Mega-Sena. Dessa forma, obtivemos resultados como o de Fernandes e Braga (2023), que

identificaram dificuldades dos estudantes do 3º ano em realizar a análise de eventos aleatórios.

Além disso, essas afirmações se apoiam basicamente em suas intuições e crenças. Sendo assim, o professor explicitou para as turmas que as BETS são sistematizadas e manuseadas por algoritmos, enquanto a Mega-Sena tem regras claras, espaço amostral definido e é possível de ter a probabilidade calculada.

Após esse momento, o professor focou a atenção no aspecto conceitual, buscando levar os estudantes a compreenderem o cálculo da probabilidade. A Mega-Sena recai na Probabilidade Clássica, que tem um espaço amostral delimitado. Para isso, apresentou informações de como o jogo foi criado, como é dividida a distribuição da renda obtida com os jogos e o prazo para recebimento do prêmio.

Esse ponto é crucial para que os estudantes não apenas conheçam o Elemento do conhecimento “Calculando probabilidades”, mas também o articulem com o conhecimento do contexto autêntico, fator importante para posicionarem-se criticamente e tomarem decisões coerentes e justas.

Figura 8.70 – Slide do quarto momento do primeiro dia de intervenção

Mega - Sena

- A Mega-sena foi criada em março de 1996.
- O valor arrecadado com as apostas é dividido em duas partes: 43,79% é o valor a ser sorteado e 56,21% do dinheiro é repassado ao Governo Federal e investido em áreas essenciais como saúde, segurança, educação, cultura e esporte.
- Se ninguém acertar os números o valor acumula para o concurso seguinte. Se o ganhador não for retirar o prêmio após 90 dias da data do sorteio, os valores são repassados ao tesouro nacional para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior.
- Em 2024, um dos ganhadores da Mega Sena da Virada que participou de um bolão na cidade de Osasco- SP, não resgatou o prêmio de R\$ 1.418.495,90.

Na Mega-sena são disponibilizados sessenta números na cartela (números de 01 a 60). Esses números é o que chamamos de espaço amostral, enquanto conjunto total de números possíveis de ser sorteado. Em uma moeda o espaço amostral é 2, em um dado é 6.



Fonte: Dados da pesquisa.

Posteriormente à explanação, o professor buscou entender as crenças dos estudantes em relação à probabilidade de acertar os números da Mega-Sena e entender a visão deles quanto ao total de combinações. Em seguida,

questionou: “Qual é a probabilidade de você ganhar na Mega-Sena jogando apenas seis números?” e “Quantas combinações são possíveis? Vocês acham que são poucas ou muitas combinações possíveis?”, visando a que os participantes apresentassem sua opinião quanto à probabilidade de ganhar na Mega-Sena, associando-a a uma representação numérica.

Quadro 8.8 – Diálogo durante o 4º momento da intervenção nas turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Me digam ai, qual é a probabilidade de você ganhar na Mega-Sena jogando apenas seis números?</i></p> <p><i>Estudantes em silêncio...</i></p> <p><i>Professor: É a opinião de vocês, não tem certo ou errado não.</i></p> <p><i>Estudante 7: É baixa.</i></p> <p><i>Estudante 6: É uns 6%.</i></p> <p><i>Estudante 1: 2%.</i></p> <p><i>Professor: Quantas combinações são possíveis? Vocês acham que são poucas ou muitas combinações possíveis?</i></p> <p><i>Estudantes em silêncio...</i></p> <p><i>Professor: Para calcular essa combinação da Mega-Sena, o que importa são os números e não a ordem que eles estão.</i></p>	<p><i>Professor: Qual a probabilidade vocês ganharem na Mega-Sena jogando apenas seis números?</i></p> <p><i>Estudante 4: 3%</i></p> <p><i>Estudante 6: 0,00005%.</i></p> <p><i>Estudante 14: 5%.</i></p> <p><i>Estudante 2: 32%</i></p> <p><i>Professor: Quantas combinações são possíveis? Vocês acham que são poucas ou muitas combinações possíveis?</i></p> <p><i>Estudante 2: Acho que muitas.</i></p> <p><i>Estudante 14: Muitas.</i></p> <p><i>Professor: Quando vocês falam em muitas, vocês falam em quantas combinações?</i></p> <p><i>Estudante 2: 32</i></p> <p><i>Estudante 14: 30</i></p> <p><i>Professor: Alguém acha que tem como fazermos mais combinações ou só essas?</i></p> <p><i>Estudante 10: 36</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando as conjecturas numéricas, observamos que vários estudantes creem numa baixa probabilidade de ganhar. Essas crenças remetem à possibilidade de criar um paralelo entre Elemento do conhecimento e os Elementos disposicionais.

Nenhum estudante da Turma A apresentou um palpite quanto ao total de combinações da Mega-Sena, o que nos leva a inferir sobre a dificuldade de determinar o espaço amostral ou dificuldade de argumentar, o que remete à habilidade EM13MAT311 da BNCC. Já na Turma B, os estudantes apresentaram conjecturas numéricas, porém consideramos que eles não conseguiram correlacionar a quantidade de números possíveis de serem escolhidos para a elaboração de um jogo com, no mínimo, seis números, apresentando números de combinações que não remetem à noção correta de espaço amostral.

No estudo de Raposo *et al.* (2017), os estudantes também tiveram empecilhos para interpretar situações-problema de probabilidade, bem como compreender a aleatoriedade.

Apresentamos aos estudantes como é possível calcular o total de combinações de jogos que podem ser feitos considerando o espaço amostral.

Quadro 8.9 – Diálogo sobre a Mega-Sena - Turmas A e B

Professor: Para quem não conhece, nós temos os números de 1 a 60 e você vai ganhar se acertar os seis números. Então o que nós vamos fazer para calcular o número de combinações? Os números de 1 a 60 é o que chamamos de espaço amostral e precisamos escolher seis números. Como é que vamos fazer para calcular a probabilidade de ganhar na Mega-Sena?

Estudante 6 (Turma A): Tem que ter a quantidade de combinação, né?

Professor: Isso, combinação.

Professor: A fórmula é (apresentou o slide):

$$C(n, p) = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Professor: O que seria C? C é justamente o total de combinações possíveis que eu posso ter para ganhar na Mega-Sena.

Estudante 6 (Turma A): No caso é o total.

Professor: O que seria n?

Estudante 14 (Turma B): Número?

Professor: Tem a ver com número. Só que na verdade, n é número total de elementos do conjunto.

Professor: No caso, da Mega-Sena, eu posso jogar os números de quanto a quanto?

Estudante 6 (Turma A): 60

Estudante 6 (Turma B): 60

Professor: então eu tenho que aqui n vale 60.

Professor: O que seria o p?

Estudante 11(Turma B): Seria a probabilidade?

Professor: Concordam com ela?

(silêncio na Turma B)

Na verdade, p é justamente a quantidade de números que eu preciso acertar para ganhar, ou seja, o número de elementos do subconjunto que pretendemos formar. Então, na verdade nós temos que calcular a combinação aqui p seria 6.

Então na verdade, temos que calcular a combinação de 60 e 6, C(60, 6)

Lembrando, 60 é n e p é 6. Na Mega-Sena nós temos que escolher 6 números.

Professor: Para calcular, eu preciso usar esse símbolo aqui “!” em matemática, que significa fatorial. O que seria fatorial? É a multiplicação dos números inteiros positivos menores ou iguais ao número.

n! Seria quanto?

Estudantes (Turma A): (não consegui identificar o qual) 60!

Professor: No caso é $60! = (60 \times 59 \times 58 \times 57 \times \dots \times 1)$

Professor: p! seria quanto?

Estudante (Turma A): $6! = (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)$

Professor: Porque temos que dividir por p!? foi aquele exemplo que eu falei nesse instante (Considerando que a contagem inclui todas as ordens possíveis, haverá casos de mesmo subgrupo, porém, com a ordem diferente. Ex: (12 – 37 – 60 – 34 – 01) ou se eu jogar (34 – 37 – 60 – 12 – 01), a ordem não importa, o que importa é que eu acerte os 6 números. Então a ordem diferente não interfere).

Professor: E por que eu preciso multiplicar por $(n - p)!$? Se eu escolher esses seis números aqui (aponta para os seis números: 34 – 37 – 60 – 12 – 01) eu vou ter outros números que não foram usados aqui.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os excertos apresentados no Quadro 8.9 mostram que o professor esclareceu nas duas turmas que, no jogo da Mega-Sena, são necessários, no mínimo, escolher 6 números dentre os 60 disponíveis. Posteriormente, o professor explicitou aos estudantes que a ordem dos números sorteados não importa. Logo, o total de números escolhidos deve ser agrupado seis a seis, para montar as possibilidades de ganhar.

Dessa forma, o professor foi o mediador do conhecimento, partindo da fala dos estudantes para a representação algébrica de calcular combinação. Para isso, seguindo uma ordem crescente, expôs como a chance de acertar a combinação desse jogo tem relação com o espaço amostral, ajustando os equívocos que os estudantes estavam cometendo quando expuseram suas opiniões, estimulando a reflexão crítica. Depois, os estudantes foram apresentados ao conceito de combinação, assim como à fórmula utilizada como forma de auxiliar o raciocínio matemático quanto à probabilidade real do jogo. Para isso, o professor detalhou todos os termos da fórmula, visando que os estudantes compreendessem o significado de cada um, e não apenas memorizassem.

Posteriormente, foi exposto para os estudantes o cálculo da combinação entre 60 e 6, que resulta em mais de 50 milhões de combinações possíveis.

Figura 8.71 – Cálculo das combinações possíveis no jogo da Mega-Sena

$$\frac{C(60, 6) = \frac{60!}{6!(60-6)!}}{= \frac{60!}{6! \times 54!}} = 50.063.860$$

Existem 50.063.860 combinações possíveis de escolher 6 números dos 60 disponíveis.

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor foi levando os estudantes a compreenderem cada elemento da fórmula, ressaltando o número significativo de combinações possíveis a partir desse espaço amostral, destacando que isso irá refletir na probabilidade de acertar os seis números. Quanto a isso, reforçou a importância de eles repensarem as suas conjecturas. Essa ação é primordial para relacionar os Elementos do conhecimento e os disposicionais.

Na sequência, o professor perguntou sobre a fórmula para calcular probabilidade: “*Qual a fórmula matemática que permite calcularmos a probabilidade de eventos?*”. Recordando que a fórmula consiste na razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, ressaltou que o evento favorável é acertar exatamente os seis números sorteados. Como o jogador fez uma escolha de 6 números, há uma única combinação favorável. Assim, nessa situação, a probabilidade de ganhar na Mega-Sena será de cerca de uma em cinquenta milhões.

Para finalizar, foi perguntado:

Professor: Sabendo disso, por que você acha que tantas pessoas continuam apostando?

Estudante 6 (Turma A): Tentam a sorte eles, tentam a sorte!! Dorme, sonha com a Mega-Sena e pensam, vou apostar, apostar.

Estudante 11 (Turma B): Porque elas têm fé.

Estudante 14 (Turma B): Elas só têm a esperança e o sonho.

Estudante 6 (Turma B): Eu acho que podem até saber, mas eles jogam pra tentar.

Estudante 18 (Turma B): Todo final de ano eu jogo....

Estudante 6 (Turma B): Vai que é o meu ano, hein professor, vai que é o meu ano.

Professor: Qual é a importância de entender probabilidade antes de participar desses jogos?

Estudante 7 (Turma A): É bom.

Estudante 3 (Turma A): É bom, tipo assim, para você ter uma noção do que vai fazer com os jogos.

Estudante 11 (Turma B): Acho que não.

Estudante 14 (Turma B): Precisa. Para mim eu quero saber o que vou fazer, né?

Estudante 11 (Turma B): Não, mas quem vai jogar contando com a probabilidade? O povo joga pensando na sorte.

Professor: Na Mega-Sena, se o ganhador não for retirar o prêmio após 90 dias da data do sorteio, os valores são repassados para aplicação no FIES - Fundo de Financiamento ao Estudante do Ensino Superior. E nas BETS?

Estudante 6 (Turma A): Fica lá.

Estudante 7 (Turma A): Eles continuam com o dinheiro.

Estudante 6 (Turma B): A plataforma come. Nas chinesas, o dinheiro só fica uma semana.

Analisando as falas dos estudantes das duas turmas, observamos que, para além da baixa probabilidade de ganhar, os estudantes consideram

importantes os sonhos, ou seja, os Elementos disposicionais (crenças e atitudes) são relevantes na tomada de decisão de tentar ganhar o prêmio.

O professor expôs para as turmas que, nas situações aleatórias, como a abordada nesse primeiro dia de intervenção, é importante conhecer o contexto, saber analisar os dados autênticos e refletir sobre eles, ponderando as relações entre os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais para a tomada de decisão. Mais uma vez, pontuou também a diferença entre os dois tipos de jogos e ressaltou a importância do conhecimento de Probabilidade para entender esses casos.

Assim, nesse primeiro dia, levamos os estudantes a refletirem sobre tomar decisões a partir de crenças pessoais ou de dados estatísticos; a refletirem sobre a possibilidade de ganharem jogando nas BETS – nas quais o cálculo de probabilidade não é definidor para o ganho – ou na Mega-Sena; a entenderem que as crenças não levam a ganho, e sim a probabilidade, apesar de pequena. Dessa forma, podemos visualizar uma articulação entre suas crenças e a visão Clássica da Probabilidade na percepção dos estudantes, quando analisam situações no contexto de jogos de azar.

A prática docente privilegiou inicialmente os conhecimentos prévios e as crenças dos estudantes, a partir de reflexões em duplas (escrita) e reflexões coletivas (oral). Na sequência, foram expostos dados autênticos de fontes confiáveis e apresentados em diferentes representações, ressaltando a importância de conseguir compreender os dados probabilísticos, articulando os Elementos do conhecimento (espaço amostral; calculando probabilidades; contexto, grandes ideias e questões críticas) e os Elementos disposicionais (crenças e atitudes; postura crítica e sentimento em relação ao risco), para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico dos estudantes das duas turmas.

8.4 ANÁLISE DO 2º DIA DE INTERVENÇÃO DE ENSINO

No segundo dia da intervenção, pautamos nossas reflexões nas representações em língua natural (oral e escrita), tabular, gráfica ou diagramal, concordando com Burrill e Pfannkuch (2024), os quais também defendem que proporcionar a compreensão de conceitos estatísticos utilizando diferentes representações e contextos é fundamental. Para essa primeira atividade,

utilizamos o contexto de Sustentabilidade, que necessita de muitas reflexões e tomadas de decisão.

No dia da atividade intervenciva, estiveram presentes 21 estudantes da Turma A (escola de Juazeiro-BA) e 15 estudantes da Turma B (escola de Petrolina-PE).

Iniciamos a intervenção realizando uma conversa com as turmas, para levantamento das hipóteses dos estudantes ou de suas crenças sobre questões ambientais (sustentabilidade ambiental, mudanças climáticas, desmatamento, dentre outros). Para tal, apresentamos por meio de um slide (Figura 8.72), a representação figural correspondente aos Objetivos do Desenvolvimento Sustentável (ODS) e iniciamos uma conversa com toda a turma.

Figura 8.72 – Slide do primeiro momento do segundo dia de intervenção



Fonte: ONU - Brasil
Site: <https://brasil.un.org/pt-br/sdgs>.

Quadro 8.10 – Diálogo inicial do 2º dia de intervenção nas Turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Na semana passada, nós conversamos sobre as BETS e a Mega-Sena. Hoje, nós vamos começar conversando sobre as ODS. Alguém já ouviu falar em ODS? (silêncio na sala...)</i></p> <p><i>Professor: Nem imaginam?!?! Esse ano, o estado da Bahia está trabalhando muito com as ODS.</i></p> <p><i>(silêncio em sala)</i></p> <p><i>Professor: Objetivos de Desenvolvimento Sustentável. Elas foram criadas pela Organização das Nações Unidas em 2015 com a intenção de até 2030 termos no mundo mais práticas para estimular o desenvolvimento sustentável, considerando o contexto econômico, social e ambiental. Dentro dessas práticas, nós temos (lê os títulos das 17 ODS). Dentre esses objetivos, o que os objetivos 2, 6, 7, 11, 12, 13, 14 e 15 têm em comum?</i></p> <p><i>(silêncio na sala...)</i></p> <p><i>Professor: Esses objetivos têm em comum as discussões sobre o meio ambiente. Um desses focos está relacionado à questão da sustentabilidade.</i></p>	<p><i>Professor: No primeiro dia, nós discutimos sobre as BETS. Hoje, para começar eu trago aqui (slides) a ONU. A ONU é a Organização das Nações Unidas que elaborou, em 2015, 17 ODS. Alguém sabe me dizer o que é ODS? (silêncio na sala...)</i></p> <p><i>Estudante 14: Organização...</i></p> <p><i>Professor: Não, ODS são Objetivos de Desenvolvimento Sustentável. Qual foi a intenção com a criação das ODS? Eles criaram para que até 2030 tivéssemos no mundo mais práticas para estimular o desenvolvimento sustentável, com menos poluição, igualdade de gênero entre homens e mulheres, justiça, dentre outros, considerando o contexto econômico, social e ambiental. Dentre esses objetivos, nós temos (lê os títulos das ODS 2, 6, 7, 11, 12, 13, 14 e 15). O que esses objetivos têm em comum?</i></p> <p><i>Estudante 18: A vida.</i></p> <p><i>Professor: Tem a ver com a vida. Para além disso, podemos dizer que está relacionado com o que também?</i></p> <p><i>(silêncio na sala...)</i></p> <p><i>Professor: Eles estão relacionados com o meio ambiente, porém, hoje vamos discutir sobre a questão da sustentabilidade.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa (2025).

Nesse segundo dia de intervenção, procuramos conhecer os conhecimentos que os estudantes tinham sobre as ODS. Ao perceber que eles não esboçaram nenhuma resposta, o professor optou por apresentar exemplos, como a coleta seletiva, e detalhar o significado da sigla. Além disso, questionou os participantes quanto às relações existentes entre alguns desses objetivos, estimulando uma reflexão crítica e a proximidade desse contexto com o cotidiano deles. Dessa forma, assim como no encontro anterior, buscamos partir das falas dos estudantes para apresentar o contexto real (ambiental) para abordar os diferentes conceitos de Probabilidade, como forma de colaborar para a reflexão crítica e o desenvolvimento da argumentação.

É importante ressaltar que, diferente do primeiro dia de intervenção, nesse segundo dia observamos que a maioria dos estudantes pareceu não se interessar muito pelo tema, ficando em silêncio. Essa ausência de respostas pode demonstrar o desconhecimento do contexto, o que dificulta a compreensão dos conceitos probabilísticos, como afirmam Fernandes e Junior (2016), Morais et al. (2018), Barbosa e Melo (2021) e Franco Seguí e Alsina (2024). Ademais, esse desconhecimento poderá interferir diretamente na análise, argumentação ou conjecturas, o que demonstra a importância da interrelação entre os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais propostos no Letramento Probabilístico.

Preocupado com essa situação, o professor foi tentando levantar algumas questões ambientais, para que os estudantes pudessem trazer suas crenças e hipóteses para a conversa. Assim, perguntou se eles já haviam desenvolvido alguma prática sustentável:

Estudante 11 (Turma B): Eu fiz vasos de planta utilizando vaso amaciante, serve?

Estudante 6 (Turma A): Bem provável. Separar o lixo.

Estudante 13 (Turma B): Reutilizar pote de sorvete.

Assim, como na pergunta anterior, de forma tímida, os estudantes começaram a associar as práticas sustentáveis a situações do seu cotidiano. Aproveitando esses exemplos, reiteramos a toda a turma que essas ações estão associadas à sustentabilidade, assim como outras que eles podem fazer em seu cotidiano.

É importante destacar que o estudante 6 utiliza o termo “bem provável”, ou seja, uma linguagem do cotidiano que também expressa uma situação probabilística.

Ainda tentando levantar as hipóteses e crenças dos estudantes no que se refere à questão da sustentabilidade, perguntamos qual o percentual de brasileiros que eles acreditam que se preocupam com a sustentabilidade e realizam práticas sustentáveis. Para essa pergunta, o professor solicitou que os estudantes apresentassem suas hipóteses expressas em percentual.

Algumas respostas dos estudantes foram:

Estudante 15 (Turma A): Pouco, 7%.

Estudante 11 (Turma A): 35%

Estudante 17 (Turma B): 50%

Estudante 12 (Turma B): 15%

A partir desse momento, a participação dos estudantes começou a ser maior, evidenciando que eles estavam começando a entender o que era sustentabilidade. O professor, como mediador, foi estimulando os estudantes a exporem suas crenças, fazendo um confronto entre as opiniões dos colegas da turma. É importante ressaltar que esses percentuais distintos reforçam como a quantificação das crenças é inerente às percepções pessoais de cada sujeito, dada a multiplicidade de respostas. Além disso, o professor ressaltava a intercambialidade entre a língua natural oral e a representação numérica na forma percentual.

Sendo assim, seguindo a mesma estrutura metodológica do primeiro dia, iniciamos o segundo dia de intervenção quantificando as crenças dos estudantes de forma percentual, para uma situação real.

Em seguida, o professor perguntou: “*Você acha que os brasileiros se preocupam com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil?*” e solicitou que os estudantes levantassem as mãos para emitir sua opinião. Nessa ação, buscamos perceber as hipóteses dos estudantes, atreladas às expressões comuns da língua natural escrita, como maneira de apresentar suas crenças sobre o nível de preocupação que eles consideram mais presente na vida dos brasileiros.

Para isso, as opiniões dos estudantes foram anotadas no quadro branco e, posteriormente, sistematizadas em uma tabela. Nesse contexto, o professor rememorou a noção de amostra e população que haviam discutido no primeiro dia. O professor estruturou uma tabela e foi preenchendo, de acordo com a opinião dos estudantes. Em seguida, juntamente com eles e com a ajuda de uma calculadora, colocaram os percentuais.

A Tabela 8.21 traz o resumo do percentual das respostas das duas turmas, a esse item.

Tabela 8.21 - Percentual de respostas dos estudantes ao item d

Nível de preocupação	Turma A	Turma B
Muito	--	--
Se preocupam	--	26,7
Mais ou menos	61,9	13,3
Pouco	33,3	40,0
Não se preocupam	--	20,0
Não sabe / Não respondeu	4,8	--

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

Analizando esses dados, observamos que os estudantes apresentam uma concepção pessimista com relação à sustentabilidade no país. Na Turma A, foi alto o índice de estudantes que acreditam que os brasileiros se preocupam mais ou menos com essas práticas. Na Turma B, a maioria dos estudantes respondeu que a preocupação é pouca. Essas respostas estão diretamente associadas aos Elementos disposicionais e reforçam a visão de mundo dos participantes.

Buscando confrontar as crenças dos estudantes com a visão clássica da Probabilidade, convidamos os estudantes a analisar os dados reais fornecidos pela Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais – Abrelpe (Figura 8.73).

Figura 8.73 – Slide com dados autênticos

A Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe) desenvolveu uma pesquisa em 2022 e afirma que o Índice de reciclagem no Brasil é de apenas 4%.

O Observatório do Clima afirma que, em 2022, os resíduos sólidos urbanos são responsáveis pelo lançamento de 91,3 milhões de toneladas de CO2 na atmosfera.

Fonte: Dados da pesquisa (2025).

Diante dos dados, os estudantes comentaram:

Estudante 12 (Turma B): Tá vendo, eu iria falar 5%!

Estudante 11 (Turma B): Eu iria falar 6. Imagina agora!?!? Deve tá pela misericórdia.

Nas duas turmas, o professor estimulou os estudantes a compararem os percentuais que informaram no item b, “Para você, qual o percentual de brasileiros se preocupa com a sustentabilidade e realiza práticas sustentáveis?”, com os resultados apresentados na pesquisa. Essa atividade buscava motivar os estudantes a realizarem uma análise crítica dos resultados e a reformularem a probabilidade após o conhecimento de dados reais. O professor foi incentivando essa reflexão entre os estudantes e estimulando a relação entre os termos probabilísticos e sua representação numérica.

No segundo momento da intervenção, o professor pediu que os estudantes se agrupassem em pares para realizar a primeira atividade projetada no PowerPoint. Essa proposta visava fomentar a troca de ideias entre eles, uma maior participação de todos e o tempo de cada dupla para responder. Acreditamos que essas reflexões colaboraram para o desenvolvimento de uma postura interpretativa e crítica. Para isso, apresentamos um slide com os resultados de uma pesquisa realizada em 2024 pelo grupo Nexus, a pedido da Confederação Nacional da Indústria (CNI), referente à preocupação dos entrevistados com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil.

Os dados foram apresentados em dois tipos de representação: Língua natural escrita e gráfico. A apresentação dos dados nessas duas formas teve a intenção de possibilitar a compreensão dos dados probabilísticos em variadas configurações. Coutinho, Silva e Almouloud (2011) afirmam que a variedade de representações permite uma melhor compreensão dos conceitos. Essa opção didática poderia nos permitir analisar se, assim como em pesquisas anteriores, um determinado tipo de representação dos dados poderia favorecer melhor sua compreensão.

Após um tempo para que os estudantes resolvessem a situação-problema, o professor discutiu a questão, com os dois tipos de representação.

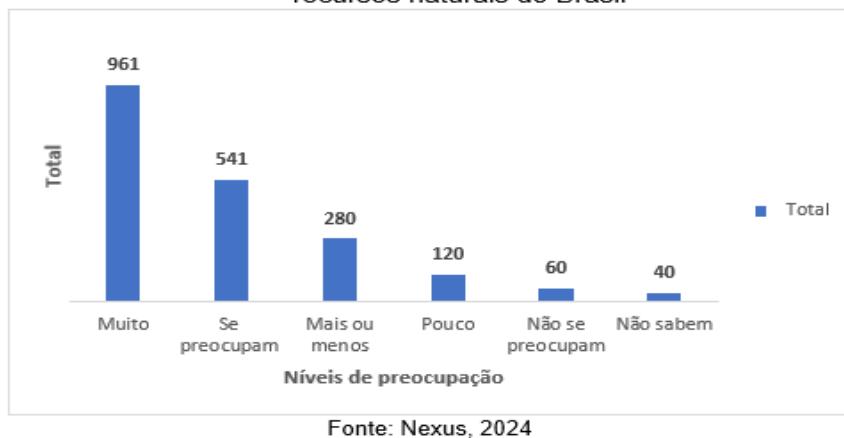
Figura 8.74 – Primeira atividade do 2º dia de intervenção

A pedido da Confederação Nacional da Indústria (CNI), o grupo Nexus uma empresa privada brasileira que atua no segmento de pesquisas de opinião, estudos de mercado e análises estratégicas de dados, desenvolveu em 2024, uma pesquisa em que os participantes foram questionados sobre a sua preocupação com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil. Os resultados foram os seguintes: 961 se preocupam muito; 541 se preocupam; 280 se preocupam mais ou menos; 120 se preocupam pouco; 60 não se preocupam; 40 não souberam responder.

- a) Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, entre os entrevistados, se preocupar muito com a sustentabilidade ambiental? (Hab.: Calculando Probabilidades)

E se eu apresentasse os dados assim, facilita? Por quê?

Gráfico 1- Nível de preocupação com a sustentabilidade no uso dos recursos naturais do Brasil



Fonte: Nexus, 2024

- b) Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso entre os entrevistados, demonstrar preocupação média (se preocupa) ou baixa (se preocupa pouco) com a sustentabilidade?

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 8.11 – Diálogo da 1ª atividade da intervenção nas Turmas A e B

Turma A	Turma B
<p>Professor: Vendo os dados nos dois tipos de representação (apresentado no slide) para vocês, a interpretação facilita mais na escrita ou na gráfica?</p> <p>Estudante 04: Mas não vai ter todos os dados...</p> <p>Professor: Os dados são os mesmos nas duas representações.</p> <p>Estudante 4: Eu acho que o gráfico fica mais organizado, mais fácil para analisar.</p> <p>Estudante 21: Para visualizar é melhor.</p> <p>Estudante 1: Gráfico. É mais objetivo.</p>	<p>Professor: Aqui temos os dados na representação escrita e agora apresento esses mesmos dados na representação gráfica. Para vocês, a interpretação facilita mais na escrita ou na gráfica?</p> <p>Estudante 11: A gráfica.</p> <p>Professor: Por que na gráfica?</p> <p>Estudante 11: Por causa do tamanho do texto. O gráfico facilita a visualização.</p> <p>Estudante 14: Fica mais visível.</p>

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que em ambas as turmas os estudantes consideram que no gráfico fica mais fácil de compreender as informações, pois o tamanho do texto é grande para ser lido. De fato, a representação gráfica, além de apresentar as informações com menos leitura, ainda facilita visualmente a comparação entre elas.

O acesso às informações, por meio de representações gráficas, trouxe mais clareza sobre os dados e facilitou a interpretação. O professor também ressaltou a importância de ler todo o enunciado, e não apenas focar na representação numérica, uma vez que o texto é que explica que relação é preciso estabelecer entre os números. Em seguida, reforçou a importância de interpretar os dados para tomar decisões coerentes.

Diversos autores (Batanero, 2005; Corter e Zahner, 2007; Zahner e Corter, 2010; Anastasiadou e Chadjipantelis, 2008; Canaveze, 2013; Mutara, 2015; Figueiredo, 2019; Burrill e Pfannkuch, 2024) já chamavam a atenção para a importância de propor atividades com diferentes representações para possibilitar uma maior compreensão do conceito de Probabilidade e o desenvolvimento do Letramento Probabilístico de todos os estudantes.

Nessa atividade, o professor também desafiou os estudantes a compararem as duas amostras (da turma e da pesquisa), e estimulou a argumentação oral, com o questionamento: “*Como vocês analisam os resultados de vocês com os da pesquisa?*”.

Nas duas turmas, alguns estudantes expressaram descrença nos dados da pesquisa.

Estudante 2 (Turma A): Na teoria é uma coisa, na prática é outra.

Estudante 6 (Turma B): Professor, é fácil dizer que faz, o difícil é fazer.

Estudante 14 (Turma B): Não mudo de opinião, pois é fácil só falar.

A descrença nos dados foi enfática nas duas turmas. Os estudantes continuavam afirmando que os brasileiros se preocupam pouco, mesmo com acesso aos dados da pesquisa. Essa postura evidencia que os estudantes consideram mais suas crenças a partir de suas experiências de vida do que a autenticidade dos dados apresentados. Diante dessa postura, o professor precisou retomar a fonte e a amostra utilizada na pesquisa, ressaltando a

autenticidade dos dados e reforçando que a opinião dos estudantes da turma refere-se a uma amostra muito menor e de pouca variabilidade em relação à população brasileira. Entretanto, concorda com os estudantes que a pesquisa investigou a preocupação com a sustentabilidade, e não o que as pessoas fazem de fato.

A partir desse momento, o professor passou a refletir sobre os Elementos do conhecimento “*Calculando Probabilidades*”. Assim, iniciou estimulando o cálculo de Probabilidade Clássica, a mais abordada nos livros didáticos, para determinar “*Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso, entre os entrevistados, se preocupar muito com a sustentabilidade ambiental?*”. Após a resolução pelas duplas para a questão da atividade impressa, o professor buscou sistematizar:

Quadro 8.12 – Diálogo durante a 1ª atividade da intervenção nas Turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Primeiro, para sabermos o espaço amostral nessa situação, o que nós temos que fazer?</i></p> <p><i>Estudante 16: Calcular.</i></p> <p><i>Professor: Calcular como?</i></p> <p><i>Estudante 16: Somar</i></p> <p><i>Professor: Somar o quê?</i></p> <p><i>Estudante 16: Somar as pessoas.</i></p> <p><i>Professor: Isso, então temos que somar todos os resultados da pesquisa.</i></p> <p><i>Professor: Então quanto é o total dessa amostra?</i></p> <p><i>Estudante 6: 2002</i></p> <p><i>Professor: Esse número equivale ao número de casos favoráveis ou possíveis?</i></p> <p><i>Estudante 6: Possíveis.</i></p> <p><i>Professor: Desses 2002 pessoas, quantas se preocupam muito com a sustentabilidade?</i></p> <p><i>Estudante 6: 961</i></p> <p><i>Professor: Então qual será a probabilidade de escolher uma pessoa que se preocupe muito?</i></p> <p><i>Estudante 16: 961 por 2002</i></p> <p><i>Professor: Só reforçando mais uma vez, nesse tipo de situação, precisamos somar todos os termos para saber o espaço amostral. Então somando tudo, deu 2002 e dessas quantos se preocupam muito? 961, logo, a probabilidade será de 961 dividido por 2002.</i></p>	<p><i>Professor: Primeiro, para sabermos o espaço amostral nessa situação, o que nós temos que fazer?</i></p> <p><i>Estudante 11: Somar todos.</i></p> <p><i>Professor: Isso, então temos que somar todos os resultados da pesquisa. Então quanto é o total dessa amostra?</i></p> <p><i>Turma: 2002</i></p> <p><i>Professor: Esse número equivale ao número de casos favoráveis ou possíveis?</i></p> <p><i>Estudante 12: Favoráveis</i></p> <p><i>Estudante 11: Possíveis.</i></p> <p><i>Professor: Possíveis, porque é a soma total. Desses 2002 pessoas, quantas se preocupam muito com a sustentabilidade?</i></p> <p><i>Estudante 14: 961</i></p> <p><i>Professor: Então qual será a probabilidade de escolher uma pessoa que se preocupe muito?</i></p> <p><i>Estudante 14: 961 dividido por 2002.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor instigou a compreensão do espaço amostral e do número de casos favoráveis para, na sequência, determinar o cálculo da probabilidade, atendendo à habilidade EM13MAT312 da BNCC, que se refere à elaboração e resolução de problemas envolvendo o cálculo de probabilidade. Os estudantes conseguiram estabelecer a razão que indica a probabilidade desse item (961/2002). Aproveitando essa situação, o professor advertiu que esse resultado poderia ser apresentado em outras representações numéricas (percentual ou decimal).

Propusemos na sequência uma reflexão sobre soma de probabilidades em casos em que um elemento da amostra não pertença a dois grupos ao mesmo tempo. Propusemos a questão: “*Qual é a probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso entre os entrevistados, demonstrar preocupação média (se preocupa) ou baixa (se preocupa pouco) com a sustentabilidade?*”, com o objetivo de que as turmas percebessem a necessidade de fazer a soma de probabilidades, considerando os dados das pessoas que se preocupam com a sustentabilidade com o total de pessoas que se preocupam pouco.

Em ambas as turmas, inicialmente, estimulamos os estudantes a compreenderem que essa é uma situação disjunta, ou seja, não pode ocorrer de forma simultânea ou não há interseção entre elas. Após essa reflexão, os estudantes foram questionados sobre a forma de responder à situação. Inicialmente, informaram que a razão que indica a probabilidade de se preocupar é de (541/2002) e de se preocupar pouco é (120/2002). Posteriormente, o professor reafirmou que, em situações dessas, para determinar a probabilidade de uma ou outra ocorrer, é preciso somar os dois dados. Como sempre, partindo dos argumentos dos estudantes, buscávamos levar toda a turma a refletir sobre os comentários realizados, como o ocorrido na Turma B:

Estudante 13: Basta repetir o 2002 e somar os outros números.

Professor: Concordam ou não concordam com a estudante 13?

Estudante 11: Concordo com ela.

Estudante 14: Mais tem outras maneiras de fazer, né?

Professor: Sim. Vamos ver as outras maneiras agora.

Na Turma B, a fala da estudante 14 foi relevante para apresentar as outras formas de resolver a situação. Aproveitando o comentário, o professor apresentou aos estudantes três maneiras de calcular:

- 1) Realizando a soma das amostras favoráveis ($541 + 120 = 661$) e o total da amostra (2002) para determinar a probabilidade.
- 2) Somando o total das probabilidades, considerando a probabilidade em relação à resposta “se preocupam” como $P = \frac{541}{2002}$ e a probabilidade em relação ao evento “se preocupam pouco” como $P = \frac{120}{2002}$, a probabilidade da soma desses dois eventos podia ser explicitada por $\frac{541}{2002} + \frac{120}{2002} = \frac{661}{2002}$
- 3) Calculando as probabilidades separadamente e depois somando os resultados na forma percentual ou decimal. Para isso, considerando: $P(\text{se preocupam}) = \frac{541}{2002} = 0,27$ e $P(\text{se preocupam pouco}) = \frac{120}{2002} = 0,05$, os estudantes podiam exibir os resultados nas seguintes representações: Percentual: $27 + 5 = 32\%$; ou Numérica: $0,27 + 0,05 = 0,32$.

Ressaltamos que essas formas de resolução também foram apresentadas na Turma A e utilizadas para sistematizar a informação de que, em casos desse tipo, precisamos somar a probabilidade dos dois eventos a serem descritos como: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Posteriormente, solicitamos a resolução, novamente nas duplas, de um novo problema com foco novamente no cálculo de Probabilidade Clássica e na soma de probabilidades. A ideia dessa atividade foi observar se os estudantes haviam compreendido a situação discutida na atividade anterior. A atividade abordava os dados de uma pesquisa desenvolvida pelo grupo Nexus sobre a sustentabilidade. As entrevistas ocorreram em setembro de 2024, com 2002 pessoas de todas as regiões do país sobre suas práticas de conservação ambiental. Os resultados dessa pesquisa foram apresentados para os estudantes em duas versões: metade da turma respondeu ao tipo A (representação Tabular) e a outra metade ao tipo B (representação Gráfica), com o objetivo de que os dados fossem apresentados de diferentes maneiras e as turmas pudessem perceber a relevância de refletir sobre dados probabilísticos em suas diversas formas.

Figura 8.75 – Primeira atividade impressa do segundo dia de intervenção

ATIVIDADE 1- IMPRESSA - TIPO A

Uma pesquisa desenvolvida pelo grupo Nexus coletou a opinião dos brasileiros com idade superior a 18 anos sobre a sustentabilidade. As entrevistas ocorreram entre os dias 18 e 24 de setembro de 2024 com pessoas de todas as regiões do país. A amostra total foi de 2002 entrevistas. Quando questionados sobre suas práticas de conservação ambiental, os resultados foram os seguintes:

Tabela 1 – Frequência de respostas sobre práticas de conservação ambiental

Atitudes	Sempre	Na maioria das vezes	Na minoria das vezes	Nunca	Não Respondeu
Evitar jogar lixo nas ruas	1602	220	60	100	20
Evitar o desperdício de água	1482	360	60	120	—
Evitar o desperdício de comida	1482	320	60	140	—
Evitar o desperdício de energia	1362	400	80	100	—

Fonte: Grupo Nexus 2024

a) O que esses resultados indicam sobre as práticas de conservação ambiental da amostra?

b) A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de ela evitar, na maioria das vezes, o desperdício de comida?

c) Qual a probabilidade de uma pessoa dessa amostra ter um padrão de consumo consciente de energia, afirmando que sempre economiza energia elétrica ou na maior parte das vezes?

ATIVIDADE 1- IMPRESSA - TIPO B

A pesquisa desenvolvida pelo grupo Nexus tinha o objetivo de coletar a opinião dos brasileiros (com idade superior a 18 anos) sobre a sustentabilidade. As entrevistas ocorreram entre os dias 18 e 24 de setembro de 2024 com pessoas de todas as regiões do país. A amostra total foi de 2002 entrevistas. Quando questionados sobre suas práticas de conservação ambiental, os resultados foram os seguintes:

Gráfico 1 - Frequência de respostas sobre práticas de conservação ambiental

Prática	Sempre	Na maioria das vezes	Na minoria das vezes	Nunca	Total
Evitar jogar lixo nas ruas	1602	220	60	100	20
Evitar o desperdício de água	1462	360	60	120	—
Evitar o desperdício de comida	1482	320	60	140	—
Evitar o desperdício de energia	1362	400	80	100	—

Fonte: Grupo Nexus 2024

a) O que esses resultados indicam sobre as práticas de conservação ambiental da amostra?

b) A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de ela evitar, na maioria das vezes, o desperdício de comida?

c) Qual a probabilidade de uma pessoa dessa amostra ter um padrão de consumo consciente de energia, afirmando que sempre economiza energia elétrica ou na maior parte das vezes?

Fonte: Dados da pesquisa.

Com essa organização, as duplas tiveram um período para conversar e tentar responder os três itens. Em seguida, o professor fez a leitura das perguntas em voz alta e começou uma reflexão com os estudantes, promovendo a discussão oral que permitiu a troca de informações e desafiou as ideias apresentadas pelas duplas.

O primeiro item, “*O que esses resultados indicam sobre as práticas de conservação ambiental da amostra?*”, requisitava a análise e interpretação dos dados, com respostas por meio da Língua natural escrita, em relação às práticas de conservação ambiental dos participantes da pesquisa apresentada. Nesse item, como não havia uma única resposta esperada, procuramos analisar a argumentação e o posicionamento crítico dos estudantes, relacionando a amostra que participou da pesquisa e as práticas de conservação ambiental.

Observamos que a maioria dos estudantes conseguiu dar uma resposta adequada na Turma A. Já na Turma B, os estudantes que responderam à questão com os dados apresentados na representação gráfica tiveram dificuldade para interpretar e argumentar sobre essa situação.

A Figura 8.76 apresenta uma resposta adequada, em que o estudante afirma que os entrevistados têm práticas ambientais conscientes, articulando os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais. Na Figura 8.77, a dupla utiliza argumentos que destoam dos resultados apresentados, faz uma generalização para toda a população brasileira e afirma, de forma errônea, que as pessoas não se preocupam com a conservação ambiental.

Figura 8.76 – Exemplo de resposta adequada no item 1a

a) O que esses resultados indicam sobre as práticas de conservação ambiental da amostra?
 OS RESULTADOS INDICAM QUE A MAIORIA DA PESSOAS ENTREVISTADAS ADOTA PRÁTICAS AMBIENTAIS CONSCIENTES.

[Os resultados indicam que a maioria das pessoas entrevistadas adota práticas ambientais conscientes]

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.77 – Exemplo de resposta inadequada no item 1a

a) O que esses resultados indicam sobre as práticas de conversação ambiental da amostra?

Que metade da população brasileira não se preocupam ou não liga para preservação do meio ambiente.

[Que metade da população brasileira não se preocupam ou não liga para preservação do meio ambiente]

Fonte: Dados da pesquisa.

Esses dados evidenciam que, mesmo no 3º ano do Ensino Médio e com várias reflexões sobre amostragem, há estudantes que ainda apresentam dificuldades em compreender o que é uma amostra e, portanto, não compreendem o papel da Probabilidade.

O segundo item, “*A partir desses dados, ao escolhermos aleatoriamente uma pessoa entre as entrevistadas nessa pesquisa, qual é a probabilidade de ela evitar, na maioria das vezes, o desperdício de comida?*”, remetia ao Elemento do conhecimento “*Calculando Probabilidades*” e objetivava analisar o desempenho dos estudantes em situações clássicas de Probabilidade.

Para entender como os estudantes responderam, apresentamos na Tabela 8.22 os tipos de respostas dadas.

Tabela 8.22 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 1b)

Tipos de resposta	Turma A		Turma B	
	Tipo A	Tipo B	Tipo A	Tipo B
Em branco / Não sabe	--	33.3	--	--
Adequada	50	33.3	100	100
Inadequada	50	33.4	--	--

Fonte: Dados da pesquisa.

Entre os estudantes da Turma A, 33% deixaram a questão em branco e o restante se dividiu exatamente na metade. Dessa forma, apenas 33,3% responderam de forma adequada. Por outro lado, todos os estudantes da Turma B responderam adequadamente, independente da representação.

Assim, a representação parece não ter influenciado o desempenho dos estudantes, contrariando os resultados apresentados por Canaveze (2013), Binder, Krauss e Bruckmaier (2015), Agus et al. (2015), Zorzos e Avgerinos (2023). Estudos futuros poderão analisar melhor esses dados, uma vez que

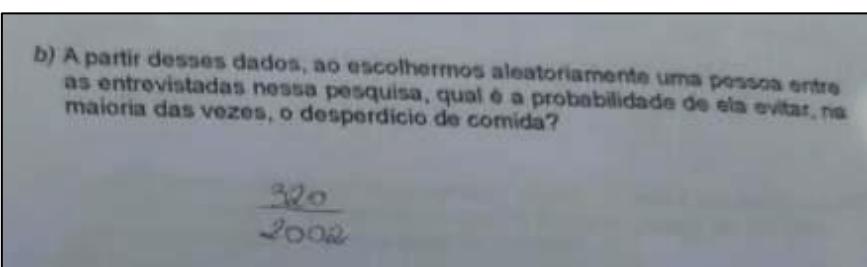
diferentes processos de investigação e de ensino foram abordados nos estudos publicados.

Ao contrário do primeiro dia de intervenção, em que todos os estudantes conheciam algo sobre as BETS, no segundo dia optamos por levar os estudantes a refletirem sobre sustentabilidade, diante da importância de agirmos diante do aquecimento global. Assim, outro dado a ser ressaltado é que todos os estudantes da Turma B acertaram o item 1b, o que não ocorreu com a Turma A. De fato, diferentemente da primeira intervenção, a Turma B nesse dia se envolveu bem mais com a atividade do que a Turma A. A motivação em participar da atividade parece ter sido um fator bem importante para o avanço na compreensão dos estudantes.

Por outro lado, acreditamos que o processo de ensino deve não só primar pela aprendizagem de conceitos estatísticos, mas também compreender o uso desses conceitos para interpretar o mundo.

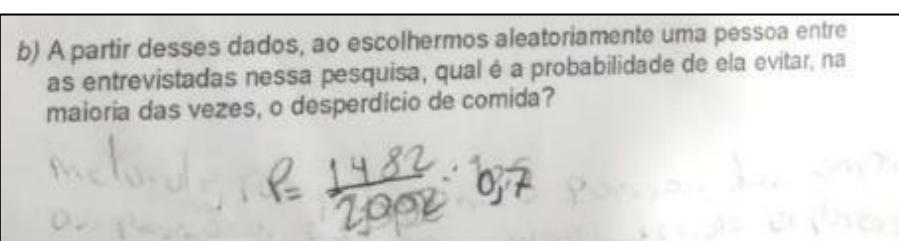
Vale salientar que estudantes das duas turmas, tanto os que responderam de forma adequada (Figura 8.78) como os que responderam inadequadamente (Figura 8.79), adotaram a representação fracionária, como já observado por Canaveze (2013).

Figura 8.78 – Exemplo de resposta adequada ao item 1b



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.79 – Exemplo de resposta inadequada ao item 1b



Fonte: Dados da pesquisa.

O item c, “Qual a probabilidade de uma pessoa dessa amostra ter um padrão de consumo consciente de energia, afirmando que sempre economiza energia elétrica ou na maior parte das vezes?”, envolvia o cálculo da soma da probabilidade de eventos exclusivos. Sendo assim, esperávamos que as turmas fizessem a soma das amostras favoráveis do total das probabilidades ou soma por parte das probabilidades.

Novamente, os dados evidenciam que os estudantes da Turma A tiveram dificuldades em realizar a soma de probabilidades, com apenas 16,7% de acertos em ambas as representações. Na Turma B, os resultados foram muito melhores, com maior percentual de respostas adequadas nos dois tipos de teste (66,6% e 75%).

A justificativa explicitada na Figura 8.80 apresenta uma visão inadequada do conceito de Probabilidade, assim como uma interpretação inadequada dos dados. Nesse caso, a dupla considerou os dados referentes ao desperdício de energia, o que evidencia uma má interpretação do enunciado do item. Além disso, a justificativa apresentada demonstra que essa dupla teve dificuldade em compreender a Probabilidade Clássica. Esse tipo de dificuldade também foi apontado nos resultados apresentados por Silva, Alves e Noronha (2018).

Figura 8.80 – Exemplo de resposta inadequada no item 1c

- c) Qual a probabilidade de uma pessoa dessa amostra te um padrão de consumo consciente de energia, afirmando que sempre economiza energia elétrica ou na maior parte das vezes?

$$p = \frac{1362}{80}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Já o exemplo da outra dupla (Figura 8.81) apresenta uma solução adequada.

Figura 8.81 – Exemplo de resposta inadequada no item 1c

- c) Qual a probabilidade de uma pessoa dessa amostra ter um padrão de consumo consciente de energia, afirmando que sempre economiza energia elétrica ou na maior parte das vezes?

$$\frac{3362 + 400}{2002} = \frac{3762}{2002}$$

$$\begin{array}{r} 3362 \\ + 400 \\ \hline 3762 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Quando questionados sobre o que os resultados da pesquisa nos permitiam concluir, os estudantes afirmaram que as pessoas da pesquisa se preocupam muito com sustentabilidade. Porém, eles não acreditaram nos dados, afirmando que “*falar é fácil, difícil é fazer, pôr em prática*”. Dessa forma, a crença deles é mais forte do que os dados da pesquisa, levando-os a questionar se ela de fato estava correta, como comentado anteriormente.

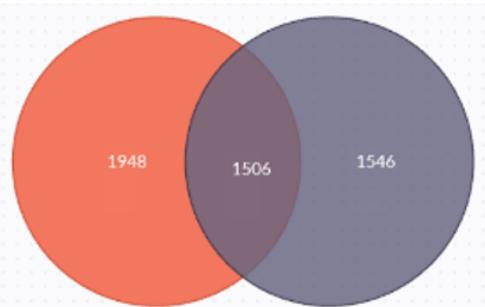
Após a resolução dessa atividade impressa, apresentamos, por meio de slides, uma atividade (Figura 8.82) que apresentava, mais uma vez, dados sobre sustentabilidade de uma pesquisa realizada pelo instituto de pesquisa Datafolha, em 2024. Essa apresentava a percepção das pessoas quanto às mudanças climáticas no dia a dia.

A nossa intenção com esses dados foi estimular as duplas a compreenderem que existem situações em que há a interseção entre eventos, proporcionando uma ampliação do conceito de soma de probabilidades proposta na atividade impressa.

Figura 8.82 – Terceira atividade do 2º dia de intervenção

Uma pesquisa encomendada pelo Instituto Clima e Sociedade (ICS) e realizada pelo instituto de pesquisa Datafolha, em 2024, realizou uma entrevista com 2008 pessoas, questionando-as se elas percebiam as mudanças climáticas no dia a dia e a quem atribuíam:

- 1948 pessoas afirmaram perceber mudanças climáticas no dia a dia;
- 1546 afirmaram que essas mudanças estão associadas a ações humanas;
- 1506 pessoas percebem essas mudanças e também dizem que as atribuem a causas humanas.



Qual é a probabilidade de escolhermos aleatoriamente uma pessoa que tenha percebido as mudanças climáticas no dia a dia ou afirma que essas mudanças são causadas por ações humanas?

Fonte: Dados da pesquisa.

Apresentamos a seguir uma parte do diálogo proposto para as Turmas A e B, que evidencia como ocorreu a compreensão dos estudantes nessa situação da soma de probabilidade com a interseção de eventos.

Quadro 8.13 – Diálogo inicial durante a 3º atividade nas Turmas A e B

Turma A	Turma B
<p><i>Professor: Na atividade anterior eu tinha como escolher mais de uma categoria?</i></p> <p><i>Estudante 6: Não</i></p> <p><i>Professor: Nessa, tem pessoas que percebem a mudança climática e também associam a ação do homem. Na atividade anterior, nós somamos as duas probabilidades e achamos o resultado. Podemos fazer a mesma coisa aqui? (silêncio na sala)</i></p> <p><i>Professor: Se eu fosse calcular apenas a probabilidade da mudança climática, seria como?</i></p> <p><i>Estudante 16: 1948 por 2008</i></p> <p><i>Professor: Isso. E só as ações humanas?</i></p> <p><i>Estudante 16: 1546 por 2008</i></p> <p><i>Professor: Eu ainda tenho 1506 que percebem essas mudanças e que elas têm causas humanas. Vamos fazer o quê, somar ou subtrair?</i></p> <p><i>Estudante 6: Subtrair.</i></p> <p><i>Professor: Por quê?</i></p> <p><i>Silêncio.....</i></p> <p><i>Professor: Porque estamos considerando a probabilidade de uma pessoa dizer os dois ao mesmo tempo, ou seja, responderam as duas coisas. Então essa probabilidade seria de 1506 por 2008. Então, como nós vamos resolver? É 1948/2008 mais 1546/2008 menos 1506/2008.</i></p>	<p><i>Professor: Nessa que a gente tinha visto (referindo-se à questão anterior) não tinha casos que podiam estar nos dois grupos, se preocupava ou se preocupava pouco. Porém, há situações em que eu tenho interseção entre os dois grupos.</i></p> <p><i>Estudante 13: Não</i></p> <p><i>Professor: Nessa, podemos dizer sim, que tem pessoas que percebem a mudança climática e também associam a ação do homem. São duas questões diferentes. Na outra atividade, nós somamos as duas probabilidades e achamos o resultado. Podemos fazer a mesma coisa aqui? (silêncio na sala)</i></p> <p><i>Professor: Se eu fosse calcular apenas a probabilidade da mudança climática, seria como?</i></p> <p><i>Estudante 11: 1948 por 2008</i></p> <p><i>Professor: E para as ações humanas?</i></p> <p><i>Estudante 13: 1546 por 2008.</i></p> <p><i>Professor: Certo.</i></p> <p><i>Professor: Eu ainda tenho esse aqui. 1506 pessoas falaram que percebem essas mudanças e que elas também têm causas humanas. Vocês acham que a gente faz o quê? Soma, subtrai ou não faz nada com esses?</i></p> <p><i>Estudante 14: Subtrai.</i></p> <p><i>Professor: Isso. Como temos pessoas que disseram perceber as duas coisas ao mesmo tempo, nós temos 1948/2008 mais 1546/2008 menos 1506/2008. Vai ser assim que nós vamos resolver quando tiver casos com respostas em mais de um item ou categoria.</i></p>

Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando esses diálogos, observamos que o professor foi conduzindo o raciocínio necessário à resolução da situação-problema envolvendo eventos sobrepostos. Para isso, fez uso da representação na Língua natural oral, a partir de dados autênticos, associando os Elementos do conhecimento (espaço amostral, interseção de eventos, cálculo de probabilidade).

Posteriormente, detalhamos o significado de cada termo na representação algébrica da união de eventos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$P(A)$ refere-se à probabilidade de ocorrer o evento A ou de escolhermos uma pessoa que tenha percebido as mudanças climáticas no dia a dia;

$P(B)$ refere-se à probabilidade de ocorrer o evento B ou de escolhermos uma pessoa que tenha afirmado que essas mudanças são causadas por ações humanas.

$P(A \cap B)$ remete à probabilidade de ocorrerem A e B ao mesmo tempo, ou seja, uma pessoa ter percebido mudanças climáticas e essas mudanças serem causadas por ações humanas.

Reiteramos a importância de apresentar essa fórmula como maneira de permitir a apropriação, por parte dos estudantes, de um método que permitirá resolver todas as situações aleatórias que estejam inseridas nessa condição, nos mais variados contextos.

Na sequência, indicamos a resolução da segunda atividade impressa (Figura 8.83) com foco na união de eventos com uma interseção. A atividade era composta por um item e abordava os dados de uma pesquisa desenvolvida em parceria com a Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial (ABDI) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), sobre a implementação de prática ambiental em empresas. Os dados dessa pesquisa foram apresentados para os estudantes em duas versões: metade da turma respondeu ao tipo A (Língua natural escrita) e a outra metade ao tipo B (diagrama).

Figura 8.83 – Segunda atividade impressa do segundo dia de intervenção

ATIVIDADE 2- IMPRESSA - TIPO A

Em 2023, uma pesquisa feita em parceria da Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial (ABDI) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) pesquisou sobre a implementação de pelo menos uma iniciativa ou prática ambiental em empresas de médio e grande porte (500 ou mais funcionários). Das 8.758 empresas industriais que realizaram uma implementação

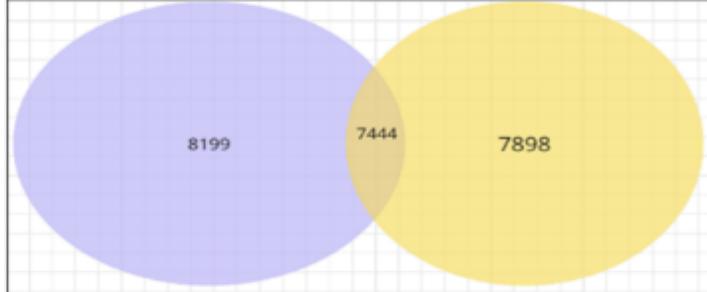
- 8199 indústrias adotam práticas ambientais relacionadas a resíduos sólidos;
- 7898 indústrias adotam práticas relacionadas à reciclagem e reuso.
- 7444 adotam ambas as práticas.

Considerando esses dados, qual é a probabilidade de escolhermos ao acaso uma dessas empresas grandes e ela adotar pelo menos uma dessas práticas ambientais?

ATIVIDADE 2- IMPRESSA - TIPO B

Em 2023, uma pesquisa feita em parceria da Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial (ABDI) e a Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) pesquisou sobre a implementação de pelo menos uma iniciativa ou prática ambiental em empresas de médio e grande porte (500 ou mais funcionários). Das 8.758 empresas industriais que realizaram uma implementação

- 8199 indústrias adotam práticas ambientais relacionadas a resíduos sólidos;
- 7898 indústrias adotam práticas relacionadas à reciclagem e reuso.
- 7444 dessas empresas adotam ambas as práticas.



Considerando esses dados, qual é a probabilidade de escolhermos ao acaso uma dessas empresas grandes e ela adotar pelo menos uma dessas práticas ambientais?

Fonte: Dados da pesquisa.

Ressaltamos que todos os contextos aqui abordados buscavam esclarecer distintos pontos sobre sustentabilidade, a partir de dados reais que pudessem ampliar o conhecimento necessário para estudantes do Ensino Médio.

Para a resolução do item “*Considerando esses dados, qual é a probabilidade de, ao escolhermos ao acaso uma dessas empresas grandes, ela adotar pelo menos uma dessas práticas ambientais (resíduos sólidos ou reciclagem e reuso)?*”, os estudantes precisaram analisar os dados que envolviam o cálculo da soma da probabilidade da união de eventos. Sendo assim, esperávamos que as duplas utilizassem a soma das amostras favoráveis, do total das probabilidades ou por parte das probabilidades.

Novamente, a Turma A apresentou um desempenho inferior à Turma B (45% e 75%, respectivamente) e o tipo de representação utilizado no enunciado não foi fator relevante. Na Figura 8.84 temos um exemplo de resposta adequada, e na Figura 8.85 de resposta inadequada.

Figura 8.84 – Exemplo de resposta adequada na segunda atividade impressa

$$\frac{8.199}{8.758} + \frac{7.898}{8.758} = \frac{7444}{8.758}$$

$$\frac{8.653}{8.758}$$

$$7898 - 7444 = 0454$$

$$\begin{array}{r} 8.199 \\ + 454 \\ \hline 8.653 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.85 – Exemplo de resposta inadequada na segunda atividade impressa

Considerando esses dados, qual é a probabilidade de escolhermos ao acaso uma dessas empresas grandes e ela adotar pelo menos uma dessas práticas ambientais?

$$P = \frac{8.199}{8.758} = \frac{7898}{8.758} = \frac{7444}{8.758} = \frac{454}{8758}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 8.84 apresenta uma resposta adequada, pois a dupla adotou a soma de probabilidades – de uma indústria com práticas ambientais relacionadas a resíduos sólidos (8199/8758) e uma indústria com práticas relacionadas à reciclagem e reuso (7898/8758) – e, depois, subtraiu pelo total de

indústrias que adotam ambas as práticas (7444/8758), evidenciando a compreensão da união de eventos.

Na resolução mostrada na Figura 8.85, a dupla apenas subtraiu o total de indústrias com práticas relacionadas à reciclagem e reuso (7898) pelo total de indústrias que adotam ambas as práticas (7444), chegando ao total de 454. Sendo assim, determinou como probabilidade a razão (454/8758).

Para iniciar a última parte dessa intervenção, buscamos, a partir das crenças dos estudantes em relação a práticas sustentáveis, promover a compreensão da noção de Probabilidade Condicional. Começamos investigando as práticas deles (*Vocês costumam separar materiais recicláveis em sua casa?*), as crenças (*Para você, como está o Brasil nesse sentido? Quem recicla mais, homens ou mulheres?*) e a frequência com que reciclavam lixo (*Você diria que separou o lixo para reciclagem nos últimos seis meses: sempre, na maioria das vezes, na minoria das vezes ou nunca?*). Para tal, fomos construindo em cada turma uma tabela com os dados dos estudantes. Na Tabela 8.23, apresentamos os dados das duas turmas.

Tabela 8.23 - Percentual de respostas dos estudantes sobre práticas recicláveis

Práticas de reciclagem	Percentual de estudantes		Práticas de reciclagem	Percentual de estudantes	
	Turma A	Turma B		Turma A	Turma B
Costumam	33,4	40,0	Homens	42,9	13,3
Não costumam	66,6	60,0	Mulheres	57,1	86,7

Práticas de reciclagem	Percentual de estudantes	
	Turma A	Turma B
Sempre	9,5	26,6
Maioria	14,3	6,7
Minoria	4,8	60,0
Nunca	71,4	6,7

Fonte: Estudantes do 3º ano de escolas públicas, em agosto de 2025.

A partir das respostas, questionamos as escolhas, estimulando uma reflexão crítica e argumentativa, investigando, assim, os aspectos disposicionais. Analisando os dados da Tabela 8.23 percebemos que as turmas possuem práticas de reciclagem semelhantes, uma vez que a maioria dos estudantes das duas turmas afirmou não ter o hábito de separar os materiais recicláveis.

Estudante 27 (Turma A) Não. Só rico separa os recicláveis.

Estudante 28 (Turma A): Só reciclo pet.

Estudante 14 (Turma B): Na maioria das casas, quem costuma tirar o lixo são as mulheres. Os homens só pegam, só recolhe.

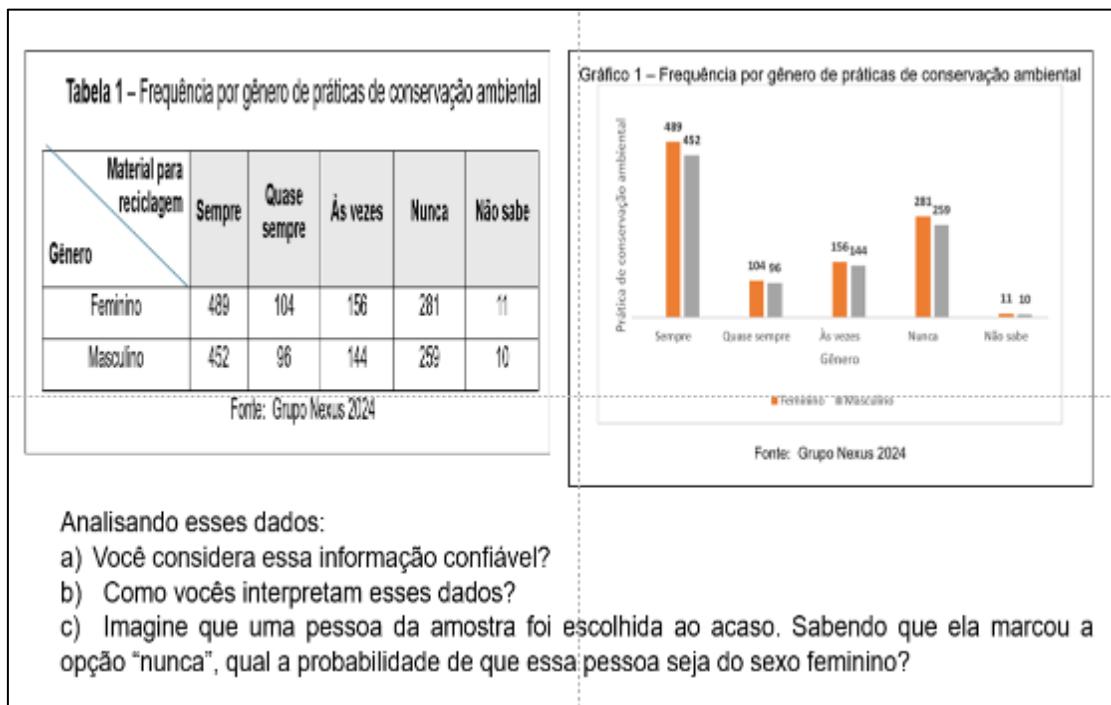
Com relação ao gênero, ambas as turmas acreditam que são as mulheres que mais reciclam, e em geral os argumentos foram sexistas. Nesse sentido, o professor ressaltou que as crenças dos estudantes, baseadas nas experiências de vida de cada um, estão gerando argumentos que reforçam a ideia de que a mulher é responsável pela organização do lar e, consequentemente, pela ação de reciclar.

Essa reflexão estabelecida pelo professor colabora para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, mais especificamente com relação aos Elementos disposicionais, ao estimular uma reflexão crítica dos estudantes quanto às suas percepções e como isso pode ser considerado como um resultado geral. Logo, propicia que os estudantes compreendam a necessidade de ter dados reais e confiáveis para montar seus argumentos quando fazem afirmações para além de suas experiências pessoais.

Quando questionados sobre suas ações em separar o lixo para reciclagem nos últimos seis meses, a maior incidência de respostas na Turma A foi que “*nunca*” realizam essa ação, e na Turma B que realizam a reciclagem do lixo na “*minoria*” das vezes. Observa-se que, apesar das discussões pelos meios de comunicação apresentarem vários tipos de protestos e outros movimentos, esses estudantes demonstram que não estão preocupados com o meio ambiente.

Partindo disso, buscamos promover uma reflexão crítica entre as suas opiniões e os resultados de uma pesquisa do grupo Nexus (Figura 8.86). A pesquisa, realizada em setembro de 2024, perguntava: “*Você diria que nos últimos seis meses separou o lixo para reciclagem: sempre, na maioria das vezes, na minoria das vezes ou nunca?*”

Propusemos uma interpretação dos resultados por gênero (Figura 8.86), visto que esse tinha sido um argumento utilizado por eles, apresentando os dados em representação tabular e gráfica.

Figura 8.86– Última atividade (slide)

Fonte: Dados da pesquisa.

Quadro 8.14 – Diálogo da última atividade da intervenção nas Turmas A e B

Turma A	Turma B
<i>Professor: Essa pesquisa aqui (Figura 8.86), foi feita pelo grupo Nexus. Eles pesquisaram para saber quem recicla mais: homens ou mulheres e com que frequência. Nós temos essa fonte aqui, grupo Nexus, eu posso dizer que esses dados são confiáveis ou não são?</i>	<i>Professor: Essa pesquisa aqui (Figura 8.86), foi feita pelo grupo Nexus. Eles pesquisaram para saber quem recicla mais: homens ou mulheres e com que frequência. Analisando essas informações, eu posso dizer que esses dados do grupo Nexus são confiáveis?</i>
<i>Estudante 28: Não são confiáveis.</i>	<i>Estudante 14: Sim</i>
<i>Professor: Por que você acha que não?</i>	<i>Estudante 18: Não</i>
<i>Estudante 28: Porque não foi com todas as mulheres do mundo.</i>	<i>Professor: Por que você acha que não?</i>
<i>Professor: Aí eu te pergunto, você acha que tem a possibilidade de... para ser confiável eu tenho que fazer a pesquisa com toda a população? Tem como eu fazer uma pesquisa com toda a população?</i>	<i>Estudante 18: Tá tudo errado aí.</i>
<i>Estudante 28: Acho que não tem como...</i>	<i>Professor: Por quê?</i>
<i>Professor: A ideia é justamente como eu selecionei a amostra e analiso a importância da amostra. É daí que vem a questão da probabilidade. Por exemplo, aqui são três turmas de 3º ano. Se eu quiser fazer uma pesquisa e falar sobre o 3º ano aqui da (nome da escola), eu tenho que selecionar estudantes das três turmas. Se eu selecionar apenas estudantes aqui da turma de vocês e falar que vale para o 3º ano</i>	<i>Estudante 18: Sei não.</i>
	<i>Professor: Analisando aqui, como vocês interpretam esses dados? Quem recicla mais, homens ou mulheres?</i>
	<i>Estudante 14 e 11: Mulheres</i>
	<i>Estudante 6: Isso tá errado. Tem mais mulheres do que homens. Deixa eu somar aqui... (aguardamos o estudante 6 somar) tem 1041 mulheres e 961 homens.</i>
	<i>Professor: Essa fala do estudante 6 é fundamental, porque apesar de não ser a mesma quantidade de entrevistados, o que vamos considerar é a proporção entre</i>

<p><i>como um todo, aí não é confiável. Mesma coisa aqui (fazendo em relação ao slide), se pegou todos os homens e mulheres de uma mesma cidade e de um mesmo bairro, realmente, aí não é confiável. É preciso analisar sempre qual foi a amostra da pesquisa para que possamos fazer generalizações. Como podemos interpretar esses dados?</i></p> <p><i>Estudante 16: As pessoas sempre reciclam...</i></p> <p><i>Professor: Podemos falar mais o quê?</i></p> <p><i>Estudante 6: Mulheres reciclam mais.</i></p> <p><i>Professor: Na verdade, temos que considerar é a proporção entre as categorias. Por exemplo do sempre (489/1041 e 452/961) a frequência é a mesma. Será proporções parecidas nas outras? Então, não podemos dizer que homens ou mulheres reciclam mais. Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela marcou a opção “nunca”, qual a probabilidade de que essa pessoa seja do sexo feminino?</i></p> <p><i>Estudante 28: 281</i></p> <p><i>Professor: Ele falou 281, que seria o número de casos favoráveis. Como eu posso determinar o número de casos possíveis? Eu tenho que levar em conta alguma consideração? Ou eu posso olhar todas? Qual é a condição que temos que olhar? Tem uma informação que já sabemos.</i></p> <p><i>Estudante 28: Nunca, tem que olhar aí.</i></p> <p><i>Professor: Então eu vou considerar o espaço amostral como um todo ou de quem só disse nunca?</i></p> <p><i>Estudante 6: De todos.</i></p> <p><i>Estudante 28: Do nunca.</i></p> <p><i>Professor: Isso gente, é o que chamamos de probabilidade condicional. Por que condicional? Porque eu tenho uma condição que eu tenho que levar em consideração antes de analisar. Então eu tenho que considerar primeiro as pessoas que disseram nunca e depois ver se ela é do sexo feminino. Então, quantas pessoas disseram nunca?</i></p> <p><i>Estudante 28: 281 mais 259.</i></p> <p><i>Professor: Isso, 540. Então a probabilidade vai ficar quanto?</i></p> <p><i>Estudante 6: 281 por 540.</i></p>	<p><i>as categorias. É o que vamos analisar. Analisando as frequências, por exemplo do sempre (489/1041 e 452/961) a frequência é a mesma. Então, não podemos dizer que homens ou mulheres reciclam mais. Essa é a última. Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela marcou a opção “nunca”, qual a probabilidade de que essa pessoa seja do sexo feminino? O total de entrevistados foi de 2002. Porém, eu já sei que a pessoa marcou “nunca”. O espaço amostral será 2002 ou será outro espaço amostral?</i></p> <p><i>(conversa entre os estudantes na sala)</i></p> <p><i>Professor: Eu já tenho uma condição aí, qual é a condição? A pessoa tem que ter assinalado o quê?</i></p> <p><i>Estudante 11: Nunca</i></p> <p><i>Professor: Então gente, toda vez que tiver situações desse jeito, podemos dizer que é uma situação de probabilidade condicional, porque eu tenho que considerar primeiro a condição. Nesse caso quem marcou nunca. Para eu saber o espaço amostral de quem marcou nunca, eu posso fazer o quê?</i></p> <p><i>Estudante 14: Soma</i></p> <p><i>Professor: Soma o quê?</i></p> <p><i>Estudante 14: 281 mais 259.</i></p> <p><i>Professor: Isso. Somando os dois, a soma é de 540. Então já sei o espaço amostral reduziu de 2002 para 540. Desses 540, quantas são mulheres?</i></p> <p><i>Estudante 14: 281</i></p> <p><i>Estudante 11: Agora eu entendi...</i></p> <p><i>Professor: Nesse caso, a probabilidade será de quanto?</i></p> <p><i>Estudante 11: 281/540</i></p>
--	---

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando essas falas, podemos ressaltar a importância do professor para articular os Elementos do conhecimento e os disposicionais, suscitando a

reflexão e trabalhando a argumentação dos estudantes frente aos dados, no sentido de serem confiáveis ou não (postura crítica). Ademais, também discute a importância do tamanho da amostra, estimula a compreensão de situações em que algumas condições precisam ser consideradas para a sua resolução. Todavia, esses extratos ainda evidenciam a dificuldade de compreensão sobre amostragem. Destacamos também as fortes crenças dos estudantes com relação a práticas recicláveis, que os levam a duvidar dos dados.

A fala do estudante 28 da Turma A (“*Porque não foi com todas as mulheres do mundo*”) traz uma preocupação quanto à sua compreensão em relação ao conceito de Probabilidade. Apesar de estar no 3º ano do Ensino Médio, ter vivenciado um processo de ensino-aprendizagem durante toda a Educação Básica sobre aleatoriedade e amostragem, ainda afirma que a pesquisa apresentada não era confiável por não ser feita com todas as mulheres do mundo. Infelizmente, ele não parece ser o único que não compreendeu efetivamente o que é amostragem e que é ela que nos permite compreender a probabilidade de inferirmos sobre eventos, mesmo sem ter acesso a dados de toda a população, seja de um bairro, cidade ou país. Exatamente quando delimitarmos uma amostra representativa da população é que podemos inferir sobre essa população.

Já a fala do estudante 6 da Turma B traz um aspecto importante a ser citado. O estudante não restringiu apenas a emitir sua opinião ponderando apenas as suas crenças, nesse caso, ele também considerou os dados apresentados em relação aos homens e mulheres entrevistados, observando a diferença entre eles. Partindo desse comentário, o professor teve o papel de mediar para toda a Turma B a argumentação do estudante e evidenciar a importância de considerar proporcionalmente as categorias.

As duas falas dos estudantes selecionadas aqui são discrepantes, porém o professor de Matemática pode deparar-se com ambas, no dia a dia. Sendo assim, o professor precisa estar atento a esses tipos de argumentos e estimular os estudantes a refletirem e compreenderem o viés por trás do cálculo.

Partindo disso, o professor concentrou-se na formalização da noção de Probabilidade Condicional, de modo a proporcionar a compreensão desse conceito a partir de situações do cotidiano. Dessa maneira, ponderando esses dados, propôs, por meio da Língua natural oral, outros exemplos, tal como: “se

uma pessoa marcou a opção “quase sempre” e que essa pessoa seja do sexo feminino?”.

Tomando como base as proposições de Corder e Zahner (2007), Zahner e Corder (2010), Anastasiadou e Chadjipantelis (2008), Oliveira (2014), Mutara (2015), Oliveira (2018) e Oliveira, Santos e Calejon (2020) quanto à utilização de diferentes representações para a resolução das situações de probabilidade, na última ação do segundo dia de intervenção, apresentamos uma situação frequentista autêntica no contexto ambiental relativo aos dados do saneamento básico da cidade de Juazeiro-BA e Petrolina-PE, com base nos dados do IBGE em 2022. Por tratar-se de uma situação com múltiplas representações (tabular e gráfica), em ambos os testes, adotamos apenas uma única organização, visando a que os estudantes vejam a relevância de interpretar dados probabilísticos de diversas maneiras.

Figura 8.87 – Última atividade impressa

<p>Escola: _____ Nome: _____ Data: _____</p> <p>ATIVIDADE IMPRESSA 3</p> <p>O Instituto Água e Saneamento reúne dados provenientes das principais fontes oficiais sobre saneamento, como o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE); Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento (SNIS) e Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA) que dispõem as características dos municípios brasileiros. Em 2022, o instituto divulgou resultados em relação ao número de habitantes sem acesso aos serviços de abastecimento de água, esgotamento sanitário e coleta de lixo das cidades brasileiras, dentre elas, Juazeiro – Bahia e Petrolina – Pernambuco. O gráfico 1 destaca o número aproximado de habitantes e domicílios dessas cidades (mil) e a tabela 1 mostra o número aproximado de pessoas sem acesso aos serviços de abastecimento de água, esgotamento sanitário e coleta de lixo.</p> <p>Gráfico 1 – Quantidade de habitantes (mil) e de domicílios (mil) em Juazeiro/Bahia e Petrolina/Pernambuco em 2022.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Cidade</th> <th>Habitantes (mil)</th> <th>Domicílios (mil)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>JUAZEIRO - BA</td> <td>238</td> <td>79</td> </tr> <tr> <td>PETROLINA - PE</td> <td>367</td> <td>138</td> </tr> </tbody> </table> <p>Fonte: Instituto Água e Saneamento. https://www.aguasaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/</p>	Cidade	Habitantes (mil)	Domicílios (mil)	JUAZEIRO - BA	238	79	PETROLINA - PE	367	138	<p>Tabela 1 - Quantidade de habitantes (mil) e de domicílios (mil) em Juazeiro – Bahia e Petrolina – Pernambuco em 2022.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>Indicadores</th> <th>População sem acesso a serviço público de água</th> <th>População sem acesso a serviço público de Esgoto</th> <th>População sem acesso a serviço público de coleta de lixo</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>JUAZEIRO - BA</td> <td>25</td> <td>37</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>PETROLINA - PE</td> <td>--</td> <td>84</td> <td>44</td> </tr> </tbody> </table> <p>Fonte: Instituto Água e Saneamento. https://www.aguasaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/</p> <p>a) Em qual das duas cidades a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter acesso à coleta de lixo é maior, considerando o total de habitantes de cada uma?</p> <p>b) Entre os moradores de Petrolina/PE, qual é a probabilidade de um morador viver sem ter acesso ao serviço público de esgoto?</p> <p>c) Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela mora em Juazeiro/BA, qual a probabilidade de que essa pessoa não tenha acesso a serviço público de água?</p>	Indicadores	População sem acesso a serviço público de água	População sem acesso a serviço público de Esgoto	População sem acesso a serviço público de coleta de lixo	JUAZEIRO - BA	25	37	15	PETROLINA - PE	--	84	44
Cidade	Habitantes (mil)	Domicílios (mil)																				
JUAZEIRO - BA	238	79																				
PETROLINA - PE	367	138																				
Indicadores	População sem acesso a serviço público de água	População sem acesso a serviço público de Esgoto	População sem acesso a serviço público de coleta de lixo																			
JUAZEIRO - BA	25	37	15																			
PETROLINA - PE	--	84	44																			

Fonte: Dados da pesquisa.

Com essa organização, as duplas tiveram um tempo para refletir e buscar responder aos três itens. O primeiro item, “*Em qual das duas cidades a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter acesso à coleta de lixo é maior, considerando o total de habitantes de cada uma?*”, remetia ao Elemento do conhecimento “Calculando Probabilidades” e objetivava realizar a comparação da probabilidade de escolher uma pessoa ao acaso e não ter acesso à coleta de lixo nas duas cidades. Outro fator que observamos foi se os estudantes iriam apresentar a resposta nas variadas representações.

Tabela 8.24 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 3a)

Tipos de resposta	Turma A	Turma B
	Múltiplas Representações	Múltiplas Representações
Em branco / Não sabe	--	--
Adequada	77,7	87,5
Inadequada	22,3	12,5

Fonte: Dados da pesquisa.

Analizando os resultados das duas turmas (Tabela 8.24), podemos observar a grande predominância de respostas adequadas nas duas turmas.

Figura 8.88 – Exemplo de resposta adequada ao item a da terceira atividade impressa

a) Em qual das duas cidades a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter acesso à coleta de lixo é maior, considerando o total de habitantes de cada uma?

$J = \frac{15}{238}$; $P = \frac{44}{387}$ $J = 0,06$ $P = 0,11$

A probabilidade maior vai ser em Petrolina

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.89 – Exemplo de resposta inadequada ao item a da terceira atividade impressa

- a) Em qual das duas cidades a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso não ter acesso à coleta de lixo é maior, considerando o total de habitantes de cada uma?

Petrolina - PE

$$\begin{array}{r} 15 \\ 77 \\ \hline 128 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta apresentada na Figura 8.88 traz uma compreensão coerente da probabilidade clássica das duas cidades. A dupla, ao fazer uso de múltiplas representações, afirma corretamente que a probabilidade maior será em Petrolina-PE, evidenciando a noção de proporcionalidade na relação entre o número de casos favoráveis e a população da cidade (espaço amostral). Já na Figura 8.89, a dupla informa os casos favoráveis de forma precisa, porém, equivocadamente, considerou o número de domicílios, e não a população.

Esse item estimulou a postura crítica dos estudantes, pois não basta apenas calcular a probabilidade de ambas as cidades. A questão também requeria a interpretação e a emissão de opinião, associando os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais.

O item b, “*Entre os moradores de Petrolina-PE, qual é a probabilidade de que um morador não tenha acesso ao serviço público de esgoto?*”, está associado à noção de Probabilidade Condicional e estimava que as duplas refletissem inicialmente sobre a condição de ser um morador de Petrolina e, a partir dessa condição, determinar a probabilidade de escolher um morador que não tenha acesso à rede de esgoto.

Tabela 8.25 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 3b)

Tipos de resposta	Turma A	Turma B
	Múltiplas Representações	Múltiplas Representações
Em branco / Não sabe	--	12,5
Adequada	66,6	75,0
Inadequada	33,4	12,5

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como no item anterior, ressaltamos que sobressaiu o número de respostas adequadas nas duas turmas, o que permite dizermos que a maioria das duplas que participaram da intervenção teve uma apreensão da noção de Probabilidade Condicional.

Figura 8.90 – Exemplo de resposta adequada ao item b da terceira atividade impressa

- b) Entre os moradores de Petrolina/PE, qual é a probabilidade de um morador viver sem ter acesso ao serviço público de esgoto?

$$\frac{84}{384} = 0,21$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.91 – Exemplo de resposta inadequada ao item b da terceira atividade impressa

b) Entre os moradores de Petrolina/PE, qual é a probabilidade de um morador viver sem ter acesso ao serviço público de esgoto?

84
128

Fonte: Dados da pesquisa.

Na resposta apresentada na Figura 8.90, a dupla analisou corretamente a representação gráfica e compreendeu a condição inicial “ser morador de Petrolina” e, posteriormente, por meio da representação tabular, identificaram o total de moradores sem acesso ao serviço de esgoto, determinando a probabilidade de maneira coerente.

Observando a Figura 8.91, a dupla considerou erroneamente a condição, ponderando o número de domicílios dessa cidade, determinando de maneira equivocada o espaço amostral desse item (128 mil domicílios). Todavia, apresentaram o número apropriado de pessoas que não têm esse acesso (84 mil moradores). A partir dessa análise, é possível deduzir que esta dupla entendeu a proposta da pergunta e tem conhecimento sobre Probabilidade, porém responde com o cálculo errado, apresentando um erro pontual.

Assim como no item anterior, no item c, “*Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela mora em Juazeiro-BA, qual a probabilidade de que essa pessoa não tenha acesso a serviço público de água?*”, almejávamos que as duplas realizassem a análise e interpretação dos dados apresentados nas duas representações para determinar a probabilidade de escolher uma pessoa que mora em Juazeiro e não tem acesso à água.

Tabela 8.26 - Percentual por tipo de resposta por teste (atividade 3c)

Tipos de resposta	Turma A	Turma B
	Múltiplas Representações	Múltiplas Representações
Em branco / Não sabe	--	25,0
Adequada	77,7	62,5
Inadequada	22,3	12,5

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados evidenciam que as duplas de ambas as turmas não tiveram dificuldades em realizar o cálculo de Probabilidade Condisional.

Figura 8.92 – Exemplo de resposta adequada ao item c da terceira atividade impressa

c) Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela mora em Juazeiro/BA, qual a probabilidade de que essa pessoa não tenha acesso a serviço público de água?

$$\frac{25}{238} = 0,150$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8.93 – Exemplo de resposta inadequada ao item c da terceira atividade impressa

c) Imagine que uma pessoa da amostra foi escolhida ao acaso. Sabendo que ela mora em Juazeiro/BA, qual a probabilidade de que essa pessoa não tenha acesso a serviço público de água?

$$\frac{25}{77}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 8.92 evidencia que a dupla comprehende a relação entre a condição inicial (ser de Juazeiro) e o número de casos possíveis, determinando a probabilidade correta. A Figura 8.93 traz a resolução de uma dupla que fez uma avaliação incorreta da situação ao remeter à quantidade de lares na cidade, estabelecendo de forma errada o espaço amostral desse aspecto (77 mil). Esse fator colabora para apresentar a probabilidade de forma errada.

Ressaltamos que, de forma geral, nessa última atividade, os estudantes se apoiaram na representação fracionária para expor suas resoluções.

8.5 REFLEXÕES SOBRE AS SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS DESENVOLVIDAS

Para a elaboração dessa proposta de intervenção de ensino, organizamos metodologicamente uma sequência que promoveu progressivamente os diversos significados, partindo inicialmente da crença dos estudantes e fazendo posteriormente uma comparação com dados reais.

Como apontado por Fernandes e Junior (2016), Morais *et al.* (2018) e Eugênio, Monteiro e Carvalho (2022), propusemos um processo interventivo que pusesse em ação uma prática docente cujo foco não estivesse apenas no significado Clássico da Probabilidade e pautada somente no cálculo. Ressaltamos a necessidade de os estudantes refletirem criticamente sobre os dados. Em sintonia com Santos (2020),

nessa intervenção consideramos inicialmente os conhecimentos prévios e as crenças dos estudantes em relação aos dois contextos, atrelados, posteriormente, ao cálculo de probabilidade de variadas situações.

Além disso, com base nas reflexões feitas por Gal (2005), Canaveze (2013), Bittar e Abe (2013), Coutinho e Figueiredo (2020), Borovcnik (2021), Barbosa e Melo (2021), Silva (2023) e Vasconcelos e Rocha (2023), Franco Seguí e Alsina (2024), os dois dias de intervenção foram pautados em dados reais, que ressaltavam o posicionamento e a argumentação crítica e reflexiva dos estudantes.

Concordamos com Gal (2019) sobre a importância de o professor levar diversos contextos para a sala de aula e propor processos de ensino que evidenciem como os conceitos de Probabilidade podem contribuir para a compreensão do mundo. Assim, acreditamos que a presença do contexto real é fundamental para todas as atividades dessa área.

Dessa forma, buscamos propor atividades em dois contextos: jogos de azar e ambiental. Nas duas situações, os estudantes expuseram de forma incisiva seus posicionamentos, a partir de suas crenças e experiências de vida. Alvarado Martinez et al. (2021) propuseram uma situação social (escolha de profissão) e outra de jogos de azar e concluíram que a noção de Probabilidade ficou mais evidente para os estudantes nas situações de jogos de azar.

Buscamos de forma sistemática abordar a utilização de diferentes representações de dados probabilísticos, porque concordamos com Corder e Zahner (2007), Zahner e Corder (2010), Anastasiadou e Chadjipantelis (2008) e Oliveira (2014), quando afirmam que a utilização de múltiplas representações colabora para a compreensão do conceito de Probabilidade pelos estudantes. Além disso, concordamos com Post e Prediger (2022), quando defendem que é fundamental o professor desenvolver um processo de ensino que promova a articulação e transição entre as diferentes representações numérica, tabular, gráfica, simbólica e língua materna.

Assim, optamos, tanto nas atividades expostas por meio de slides, como nas atividades impressas, por apresentar os dados a partir de diferentes representações, buscando reforçar a necessidade de propor práticas de ensino de Probabilidade pautada na intercambialidade entre as diferentes representações, como afirmado na literatura (Oliveira, Santos e Calejon, 2020; Santos e Dias, 2021; Carrera et al., 2021;

Amado, 2022; Burrill e Pfannkuch, 2024; Costa e Nóbrega, 2024; Álvarez-Arroyo, Batanero e Gea, 2024, entre outros).

Vários estudos focaram de forma pertinente na compreensão de estudantes diante de diferentes representações (Coutinho, Silva, Almouloud, 2022; Canaveze, 2013; Binder, Krauss e Bruckmaier, 2025; Agus et al., 2015; Silva, Alves e Noronha, 2018; Zorzos e Avgerinos, 2023; Costa e Nóbrega, 2024, entre outros). Nesta tese, nosso foco foi no papel do professor, enquanto mediador, utilizando diferentes representações para que os estudantes se apropriem dos conceitos de Probabilidade.

Assim, investigamos a viabilidade de uma proposta de ensino que considerasse a intercambialidade entre as representações para a realização de cálculos probabilísticos. Entretanto, para além da representação, durante toda a intervenção, estimulamos a argumentação oral dos estudantes, a análise crítica de dados reais e os estimulamos para que estabelecessem uma comparação entre as crenças e os dados reais.

Concordamos com Lopes (2010), Batanero *et al.* (2015), Pietropaolo, Silva e Campos (2015), Eugênio (2019), entre outros, na defesa de que o professor precisa ter domínio teórico e metodológico dos conceitos probabilísticos para realizar um processo de ensino efetivo. No processo intervencional que realizamos, partimos do que é proposto para os estudantes no currículo e nos livros didáticos, no conhecimento apresentado por estudantes do 3º ano no teste diagnóstico e, finalmente, no pré-teste realizado com as turmas envolvidas para realizar a intervenção.

Assim, o professor precisou se apropriar do conceito de Probabilidade, saber articular e transitar entre as representações, bem como levar os estudantes a refletirem e se posicionarem criticamente frente aos dados probabilísticos. Dessa forma, para o professor propor o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, é necessário ultrapassar a barreira da apresentação de atividades desconectadas da realidade do estudante e com enfoque puramente técnico.

Sendo assim, analisando o papel do professor em um processo intervencional com a abordagem do conceito de Probabilidade por diferentes representações e tomando como base Gal (2005), reiteramos a necessidade de se associar os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais com a análise de situações autênticas e com a mobilização e a intercambialidade entre múltiplas representações, o que pode colaborar de forma significativa para a compreensão do conceito de Probabilidade e para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Nesse viés, podemos dizer que o processo interventivo aqui descrito colaborou para a prática docente, pois exigiu do professor uma reflexão anterior ao processo interventivo, quanto à escolha do contexto, da fonte para adotar dados reais, das representações a serem adotadas, assim como da organização metodológica para os dois dias. Essa organização revela que o professor precisa aprender a ir além da apresentação das maneiras de calcular a probabilidade, precisa instigar a criticidade, a reflexão e a elaboração de argumentos que articulem as crenças dos estudantes e os dados reais, com uma atuação que privilegie a reflexão individual e a coletiva.

CONCLUSÕES

Os conceitos inerentes à Probabilidade estão inseridos em nosso cotidiano, ao tomarmos decisões baseadas na análise de eventos que envolvem imprevisibilidade e incerteza. Nesses casos, não temos como prever exatamente o que irá acontecer. Por isso, nos pautamos por nossas crenças e experiências de vida. Entretanto, precisamos compreender os conceitos de aleatoriedade, espaço amostral (equiprováveis ou não), diferentes significados e representações para compreendermos estatisticamente as situações e, então, tomarmos decisões efetivas.

Nos currículos brasileiros e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), a Probabilidade é um dos conceitos que deve ser aprendido pelos estudantes desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, reforçando a importância de um processo de ensino que mobilize os estudantes a compreenderem situações aleatórias, propiciando uma tomada de decisão coerente com os dados. Esse processo deve estimular o pensamento crítico e reflexivo na busca do Letramento Probabilístico (Gal, 2005). Logo, um sujeito possui um bom nível de letramento probabilístico quando consegue analisar, discutir e posicionar-se criticamente, com base nas informações probabilísticas, articulando seu conhecimento cognitivo com as concepções pessoais.

Nesse contexto, vários estudos (Anastasiadou e Chadjipantelis, 2008; Oliveira, 2014; Carrera *et al.*, 2021; Zorzos e Avgerinos, 2023; Costa e Nóbrega, 2024) evidenciam que a utilização de diferentes representações colabora para a aprendizagem da noção de Probabilidade. Assim, reforçam que o estudante precisa ser capaz de analisar uma tabela com previsão do tempo expressa com percentuais de probabilidade registrado numericamente, utilizar a visualização de um diagrama de árvore para compreender os riscos médicos na escolha de um determinado tratamento, analisar as chances apresentadas em um gráfico de um time ganhar um campeonato, compreender a diversidade de termos e expressões usados para comunicar e analisar situações casuais, entre outros.

Entretanto, a literatura ressalta a carência de estudos sobre como ensinar Probabilidade a partir de diferentes representações (gráficos, diagramas, tabelas, fórmulas, língua natural escrita), destacando que os professores apresentam dificuldades em utilizá-las em sala de aula, bem como de propor processos que

privilegiem a intercambialidade entre uma representação e outra. A multiplicidade de representações para a aprendizagem do conceito de Probabilidade é fundamental para a compreensão pelos estudantes.

Ponderando esses aspectos, esta tese buscou investigar o ensino de Probabilidade a partir de diferentes representações. Nesse sentido, tivemos como objetivo geral o de “Investigar o que vem sendo proposto para o ensino de Probabilidade para estudantes do Ensino Médio e o que podem aprender, a partir de uma intervenção de ensino que considere a perspectiva do Letramento Probabilístico, valorizando diferentes representações”.

Para alcançar esse objetivo, elencamos quatro objetivos específicos que resultaram em quatro estudos articulados. O primeiro objetivo específico, “Analisar, sob a ótica do Letramento Probabilístico de Gal (2005), o que é proposto para o conceito de Probabilidade nos documentos oficiais (Base Nacional Comum Curricular, Currículo de Pernambuco e Currículo da Bahia)”, está associado ao Estudo 1. Nesse estudo, buscamos compreender o que e como está sendo proposto o ensino de Probabilidade para o Ensino Médio, considerando os significados, contextos e as representações.

Analisando a BNCC, constatamos que são propostas situações que envolvem incerteza, risco e aleatoriedade (Elementos do conhecimento) e são mencionadas as competências de investigar, argumentar e tomar decisões (Elementos disposicionais). Assim, tanto os Elementos do conhecimento como os disposicionais, propostos no Letramento Probabilístico, estão sendo abordados. Porém, nos currículos estaduais analisados, Probabilidade está proposta para ser abordada apenas no 3º ano do Ensino Médio. Esse é um fator lacunar, uma vez que durante todo o Ensino Fundamental é proposta a compreensão da Probabilidade, não se justificando dessa forma esse hiato no 1º e 2º anos do Ensino Médio.

Em relação às habilidades de Matemática propostas na BNCC, mais especificamente as habilidades da unidade temática “Probabilidade e Estatística”, consideradas fundamentais para o desenvolvimento dos estudantes do Ensino Médio, identificamos a presença de quatro delas na área de Matemática e suas Tecnologias (EM13MAT106, EM13MAT311, EM13MAT312, EM13MAT511) e uma na área de Ciências da Natureza (EM13CNT205).

As habilidades descritas na área de Matemática (EM13MAT106 – sobre a necessidade de identificar situações cotidianas nas quais seja necessário fazer

escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos; EM13MAT311, EM13MAT312 e EM13MAT511, que mencionam a necessidade de descrever diferentes espaços amostrais de eventos aleatórios equiprováveis ou não) estimulam o cálculo de Probabilidade para a resolução de problemas, estando majoritariamente associadas ao significado clássico, e apenas duas fazem menção a contextos reais. Esse predomínio do cálculo pode estimular apenas o uso da representação numérica e reforçar o caráter determinístico da Matemática. Já a habilidade EM13CNT205, que não é da área de Matemática, estimula a interpretar resultados e realizar previsões sobre atividades experimentais, fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas noções de probabilidade e incerteza, reconhecendo os limites explicativos das ciências. Nenhuma das habilidades faz menção ao uso de diferentes representações.

Dessa forma, acreditamos que os documentos curriculares deveriam valorizar diferentes significados nos quais o conceito de Probabilidade está envolvido, explicitar a necessidade de as atividades envolverem contextos reais para refletir sua função, considerando os diferentes Elementos do conhecimento e as crenças e atitudes envolvidas nos mesmos, além de estimular a utilização de diferentes representações (numérica, gráfica/tabular, diagramal e em língua natural) e a intercambialidade entre elas, para que, de fato, os estudantes construam o seu Letramento Probabilístico.

O segundo objetivo específico foi o de “Avaliar as representações utilizadas nas atividades propostas nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD/2021, relacionadas à Probabilidade” e está desenvolvido no Estudo 2. Esse estudo foi realizado com a finalidade de investigarmos as atividades propostas nos livros didáticos que direcionam o trabalho dos professores à aprendizagem dos estudantes, além de investigarmos a relação com os documentos curriculares analisados no Estudo 1.

Para isso, foram analisadas todas as coleções (10) de livros didáticos de Conhecimento Específico - Probabilidade e Estatística, 10 coleções de livros de Projetos Integradores e 24 coleções de livros de Projeto de Vida. Foram identificadas 823 atividades referentes à Probabilidade nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio aprovados no PNLD/2021, sendo 758 nos livros de conhecimento, 65 nos livros de Projetos Integradores e nenhuma nos livros de Projetos de Vida.

Nos livros de Conhecimento Específico, observamos que a maioria das atividades envolve o significado clássico de Probabilidade, priorizando o uso das

técnicas de cálculo, sem levar o estudante a analisar criticamente e a posicionar-se quanto aos dados probabilísticos. A maioria das questões está atrelada ao contexto dos “Jogos de azar”, partindo de dados fictícios, e não estimulam o posicionamento crítico e reflexivo. Essa ausência de questionamentos que proporcionem o posicionamento crítico e reflexivo nas obras analisadas afeta diretamente o desenvolvimento do Letramento Probabilístico.

Buscando analisar tanto as representações expressas nos enunciados como as representações solicitadas na resolução dos estudantes, constatamos a predominância de enunciados com representação na língua natural escrita e na representação numérica, para as soluções dos estudantes. Assim, temos a massiva transição da escrita em língua natural para a numérica, sem contemplar outras representações, o que se torna, portanto, um empecilho para o Letramento Probabilístico.

Nos livros de Projetos Integradores, os enunciados também primam majoritariamente pela resolução do significado clássico de Probabilidade, porém há articulação entre as visões clássicas e frequentista, fator diferente dos livros de conhecimento. Apesar de um maior número de enunciados com dados autênticos, as atividades não buscam estimular a exposição pelos estudantes de suas crenças e sentimentos em relação ao risco, ou seja, os Elementos disposicionais. Todas as atividades apresentavam os dados em língua natural escrita. Entretanto, apesar do predomínio da representação numérica, outras representações eram solicitadas, como tabular, gráfica, língua natural oral ou múltiplas representações.

Por fim, apesar de os livros de Projeto de Vida terem como objetivo propiciar uma interação entre reflexões pessoais, conteúdos teóricos, atividades práticas e estudos de caso, não identificamos nenhuma situação que estabelecesse um vínculo com a ideia de Probabilidade. Enfatizamos que essa ausência representa uma lacuna, uma vez que esse componente visa apoiar os estudantes na construção de metas e planos para seu futuro, tanto pessoal quanto profissional, ação que está interligada à análise de dados e à tomada de decisão, o que se alinha com o Letramento Probabilístico.

Assim, os livros didáticos analisados colaboraram de forma parcial para o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, uma vez que não propõem situações com dados reais, priorizam o contexto de jogos de azar, concentram-se no significado clássico do conceito de Probabilidade e não estimulam a aprendizagem a partir de

diferentes representações. Diante disso, destacamos a importância do papel do professor, no sentido de promover atividades que levem os estudantes a analisarem dados reais e a tomarem posição a partir dos diferentes significados que envolvem Probabilidade (intuitiva, clássica, frequentista e subjetiva), a partir de diferentes representações, articulando os Elementos do conhecimento e os disposicionais.

Diante dessa realidade, desenvolvemos o Estudo 3, tendo como objetivo “Investigar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à compreensão do conceito de Probabilidade a partir de diferentes representações.” Nesse estudo, elaboramos uma atividade diagnóstica composta por itens que se assemelhavam aos propostos nos livros didáticos (Jogos de azar) e outras atividades que envolviam contextos reais (Saúde, Tecnológico, Ambiental e Social), outros significados (Frequentista, Intuitiva, Subjetiva e Clássica) e questões referentes às crenças e tomadas de decisão. O teste continha cinco itens, os quais foram apresentados aos estudantes em dois tipos de representação. Participaram desse diagnóstico 260 estudantes do 1º e 3º anos do Ensino Médio de cinco unidades escolares públicas da Bahia e de Pernambuco.

A partir dos dados analisados, afirmamos que não houve diferenças significativas entre os anos de escolaridade, visto que ambas as turmas tiveram um desempenho muito baixo. Os estudantes apresentaram dificuldade tanto na realização dos cálculos como em compreender os dados para se posicionarem de maneira crítica. Os argumentos escritos expressos pelos estudantes não apresentavam elementos linguísticos associados à Probabilidade. O tipo de representação não se mostrou uma variável importante para o desempenho dos estudantes.

Dessa forma, podemos ressaltar que a maioria dos estudantes, independente do ano escolar, apresentou lacunas que evidenciam um comprometimento para o Letramento Probabilístico. Dessa forma, nem a exaustiva quantidade de atividades referentes ao significado clássico a ser resolvido através do cálculo matemático permitiu a apropriação de situações de Probabilidade. Diante disso, reforçamos a importância de o professor, enquanto mediador do conhecimento, propor processos de ensino pautados na noção dos diferentes significados de Probabilidade, apresentando distintos contextos, com dados reais e distintas representações, estimulando um posicionamento crítico e reflexivo frente a fenômenos aleatórios.

Partindo do que vem sendo proposto a ser aprendido pelos estudantes (Estudo 1), das atividades apresentadas nos livros didáticos (Estudo 2) e do que estudantes

demonstraram saber sobre o conceito de Probabilidade (Estudo 3), tivemos como objetivo do Estudo 4 “Analizar uma sequência de ensino envolvendo Letramento Probabilístico, ressaltando o uso de múltiplas representações, para estudantes do Ensino Médio de Pernambuco e Bahia.”

Para tal, desenvolvemos uma sequência de ensino em duas turmas do 3º ano do Ensino Médio de duas unidades escolares públicas estaduais, uma da cidade de Juazeiro-BA e uma de Petrolina-PE. Essas escolas e turmas foram escolhidas por conveniência. Diante de duas turmas distintas, buscamos analisar as potencialidades de um processo interventivo elaborado por nós. Esse foi estruturado considerando os diferentes significados e representações do conceito de Probabilidade, estimulando a análise e interpretação de dados reais e suscitando uma análise crítica e reflexiva, a partir das crenças dos estudantes, em confronto com dados estatísticos.

Para atingir esse objetivo, realizamos inicialmente um pré-teste, para conhecer o que esses grupos de estudantes já sabiam e, em seguida, desenvolvemos o processo interventivo em dois dias em cada turma. A partir da intervenção, ficou mais uma vez evidenciada a dificuldade dos estudantes para a resolução das questões, tanto em relação ao cálculo matemático como em relação à compreensão das situações e de posicionamentos críticos. Assim, essas turmas apresentaram desempenho muito semelhante ao do Estudo 3.

No processo interventivo, propusemos atividades que estimulavam a relação entre elementos cognitivos e a reflexão crítico-argumentativa. Usando diferentes representações, partimos de uma situação de jogos de azar/apostas esportivas online (1º dia de intervenção) até situações ambiental/sustentabilidade (2º dia de intervenção). Em ambos os dias, primeiramente o professor estimulava os estudantes a apresentarem suas crenças e experiências de vida para, posteriormente, serem apresentados dados de pesquisa estatística realizada por institutos de pesquisa, a serem analisados e confrontados com as opiniões pessoais dos estudantes.

Didaticamente, era solicitada a resolução das questões em duplas e, em seguida, as respostas eram socializadas, analisadas e sistematizadas pela turma. Sempre se faziam reflexões sobre pelo menos duas representações possíveis dos dados. Os estudantes evidenciaram dificuldades para expor oralmente suas interpretações, o que pode ser explicado pela ausência desse tipo de solicitação, em geral, em sala de aula. Apresentar crenças e hipóteses sobre uma situação probabilística, analisar dados reais e confrontá-los não são solicitações frequentes nas

atividades de livros didáticos e nem na prática de muitos professores. Entretanto, consideramos fundamental que essa prática seja proporcionada aos estudantes, para compreenderem o conceito de Probabilidade.

Para tal, no estudo feito, sempre iniciamos levantando as crenças ou hipóteses dos estudantes, para compará-las, posteriormente, com dados reais de pesquisas, por meio de reflexões coletivas. Buscamos evidenciar a importância das pesquisas estatísticas para a compreensão dos fenômenos e a compreensão das fórmulas de probabilidade como forma científica dessa apropriação. Ressaltamos ainda a importância de utilizarmos diferentes representações para uma maior apropriação de todos os estudantes, valorizando a língua natural oral para argumentações baseadas nos dados. Portanto, valorizamos um processo de ensino que articula Elementos do conhecimento e Elementos disposicionais para um efetivo Letramento Probabilístico.

Dessa maneira, para o professor propor o desenvolvimento do Letramento Probabilístico, é necessário ultrapassar a barreira da apresentação de atividades desconectadas da realidade e com enfoque puramente técnico.

Os estudos aqui empreendidos nos permitiram buscar responder ao objetivo geral: “investigar o que vem sendo proposto para o ensino de Probabilidade para estudantes do Ensino Médio e o que podem aprender, a partir de uma intervenção de ensino que considere a perspectiva do Letramento Probabilístico, valorizando diferentes representações.”

Como apresentado, ficou evidenciada a possibilidade e viabilidade de um processo formativo que articulou os Elementos do conhecimento e os Elementos disposicionais, com destaque para as diferentes representações.

As “grandes ideias” da Probabilidade, ou seja, as noções fundamentais para a apreensão do conceito de Probabilidade, como variabilidade, aleatoriedade, independência, incerteza/previsibilidade, foram abordadas a partir das diferentes situações propostas nos dois dias de intervenção, além da análise dos elementos que compõem as fórmulas do cálculo. Diferentes linguagens foram utilizadas na proposição e resolução das atividades, assim como as possíveis intercambiabilidades entre elas. As situações foram propostas a partir de diferentes contextos, porém sempre com dados reais, os quais possibilitam reflexões importantes para tomadas de decisão na vida cotidiana. Para tal, o professor-pesquisador partiu sempre das crenças dos estudantes para, em seguida, confrontá-las com os dados estatísticos, de maneira crítica.

Como argumenta Gal (2005), a análise de fenômenos aleatórios e incertos do cotidiano precisa ser compreendida pelos estudantes, considerando que fatores inerentes ao sujeito, como o seu conhecimento de mundo, suas concepções pessoais, sua interpretação quanto à probabilidade e sua aptidão de entender e analisar situações influenciam seus pensamentos e ações.

Assim, ressaltamos o papel decisivo do professor em promover um processo de ensino que considere todos os elementos necessários à compreensão do conceito de Probabilidade, que vai muito além do que vem sendo prescrito pelos currículos e apresentado nos livros didáticos.

Finalmente, podemos afirmar que um processo de ensino de Probabilidade, considerando diferentes representações, na perspectiva do Letramento Probabilístico, para estudantes do Ensino Médio, pode e deve ser vivenciado nas salas de aula brasileiras.

Estudos futuros poderão investigar de forma mais detalhada a aprendizagem de estudantes a partir de proposições didáticas como as apresentadas nesta tese. Também desejamos que os futuros livros de conhecimento, de Projetos Integradores e de Projeto de Vida do Ensino Médio ampliem as propostas de atividades, auxiliando o árduo trabalho do professor.

Por fim, acreditamos que processos de formação inicial e continuada de professores de Matemática deveriam refletir sobre o ensino de Probabilidade na perspectiva do Letramento Probabilístico.

REFERÊNCIAS

- ABDI – Agência Brasileira de Desenvolvimento Industrial. **Em 2023, 89% das médias e grandes indústrias implementaram iniciativas ou práticas ambientais.** 2024. Disponível em: <https://www.abdi.com.br/em-2023-891-das-medias-e-grandess-industrias-implementaram-iniciativas-ou-praticas-ambientais/>. Acesso em: 17 de Julho de 2025.
- AGÊNCIA BRASIL. **Índice de reciclagem no Brasil é de 4%, diz ABRELPE.** 2022. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2022-06/indice-de-reciclagem-no-brasil-e-de-4-diz-abrelpe>. Acesso em: 17 de Julho de 2025.
- AGUS, M.; PERÓ-CEBOLERO, M.; PENNA, M. P.; GUÀRDIA-OLMOS, J. Comparing psychology undergraduates' performance in probabilistic reasoning under verbal-numerical and graphical-pictorial problem presentation format: What is the role of individual and contextual dimensions? **EURASIA Journal of Mathematics, Science & Technology Education**, v.11, n. 4, p. 735–750, 2015. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1382a>.
- ALMEIDA, C. M. C.; FARIAS, L. M. S. Observações acerca de uma engenharia didática de formação para o ensino de probabilidade. **Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática**, Cascavel, PR, v. 3, n. 2, p. 566–594, 2019. <https://doi.org/10.33238/ReBECEM.2019.v.3.n.2.22612>.
- ALVARADO MARTÍNEZ, H. A.; TAPIA MUÑOZ, S. T.; RETAMAL PEREZ, M. L.; TAUBER, L. Explorando noções probabilísticas informais em alunos do ensino básico. **Revista Chilena de Educação Matemática**, v.13, n.4, p.149–161, 2021. <https://doi.org/10.46219/rechierm.v13i4.80>.
- ÁLVAREZ-ARROYO, R.; BATANERO, C.; GEA, M. M. Probabilistic literacy and reasoning of prospective secondary school teachers when interpreting media news. **ZDM – Mathematics Education**, [S.I], v. 56, n. 6, p. 1045-1058, 2024.
- AMADO, N. Representações múltiplas no ensino e aprendizagem da matemática. **Educação e Matemática**, [S.I], n. 166, p. 2-6, 2022.
- AMARAL, R. B.; MAZZI, L. C.; ANDRADE, L. V; PEROVANO, A. P. **Livro didático de matemática: compreensões e reflexões no âmbito da educação matemática.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2022.
- ANASTASIADOU, S.; CHADJIPANTELIS, T. The role of representations in the understanding of probabilities in tertiary education. In: **International Congress on Mathematical Education (ICME 11)**, Monterrey, México, 2008.
- ANHEMBI MORUMBI: ENSINO SUPERIOR DE EXCELÊNCIA EM SÃO PAULO. **Especialista explica 15 fatos improváveis, porém mais fáceis de acontecer do que ganhar na Mega da Virada.** 2024. Disponível em: <https://portal.anhembi.br/noticias/especialista-explica-15-fatos-improvaveis-porem-mais-facéis-de-acontecer-do-que-ganhar-na-mega-da-virada>. Acesso em: 17 de maio de 2024.

ARAÚJO, A. F. Q. **Ensino e aprendizagem de amostragem, curva normal e suas relações no 3º ano do ensino médio.** 2024. 309 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2024.

ASSIS, J. de L. **Ensino de probabilidade:** análise de uma proposta para os anos finais do ensino fundamental. 2018.129f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.

BAHIA. Secretaria da Educação do Estado da Bahia. **Documento Curricular Referencial da Bahia para o Ensino Médio.** Rio de Janeiro: FGV Editora, 2022. 563 p.

BARBOSA, K. X. R.; MELO, D. M. B. de. Probabilidad: as relações entre conceitos e contextos a partir de um recurso didático. **Latin American Journal of Development**, Curitiba, v. 3, n. 5, p. 3065-3086, 2021.

BATANERO, C. Significados de la probabilidad en la educación secundaria. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Cidade do México, v. 8, n. 3, p. 247-264, 2005.

BATANERO, C. Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. In P. FLORES; J. LUPIÁÑEZ (Eds.), **Investigación en el aula de matemática. Estadística y azar.** Granada: Editora Sociedad de Educación Matemática Thales,p . 1-10, 2006.

BATANERO, C.; BOROVCIK, M. Educational principles for statistics and probability. In: M. BOROVCIK; C. BATANERO; G. WILD (org.). **Statistics and probability in high school.** Dordrecht: Sense Publishers, p.1-20, 2016.

BATANERO, C.; CHERNOFF, E. J.; ENGEL, J.; LEE, H. S.; SÁNCHEZ, E. Research on Teaching and Learning Probability. **Springer**, 2016. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-31625-3>.

BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M.; DÍAZ, C.; SÁNCHEZ, E. Prospective teachers' semiotic conflicts in computing probabilities from a two-way table. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 10, n. 1, p. 3-16, 2015.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. Probabilidad, grado de creencia y proceso de Aprendizaje. Anais da **XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas**, Granada, España, p.1-9, 2007. <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/PonenciaJAEM.pdf>.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. **Chilean Journal of Statistics**, Vol. 3, n. 1, p. 3-13, 2012.

BATANERO, C.; ELGUEDA-IBARRA, M.; VERA, O. D. La probabilidad en los libros de texto: investigación desde el enfoque ontosemiótico. DÍAZ-LEVICOY, D.;

SALCEDO, A. (org.). **Investigaciones sobre libros de texto para el desarrollo de la cultura estadística y probabilística.** Talca: Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística, 2024.

BATANERO, C.; SERRANO, M. M G.; ÁLVAREZ-ARROYO, R. La educación del razonamiento probabilístico. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 25, n. 2, p.127-144, 2023.

BELTRAMI, E. **What is random? Chance and order in mathematics and life.** New York: Copernicus/Springer-Verlag, 1999.

BENNETT, D. J. **Randomness.** Cambridge, MA: Harvard University Press, 1998.

BINDER, K.; KRAUSS, S.; BRUCKMAIER, G. Effects of visualizing statistical information—an empirical study on tree diagrams and 2×2 tables. **Frontiers in Psychology**, v. 6, p.1-9, 2015. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.01186>.

BITTAR, M.; ABE, T. S. Ensino de probabilidades: A articulação entre as visões clássica, frequentista e geométrica. In: COUTINHO, C. e LOPES, C. (Orgs.). **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e Estatística.** Campinas: Mercado de Letras, p.99-120, 2013.

BOROVČNIK, M. Mutual influence between different views of probability and statistical inference. **Revista Paradigma**, v. 42, n. Extra1, p. 221–256, 2021. <https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1024>.

BOROVČNIK, M. Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk; Pensamento probabilístico e alfabetização em probabilidade no contexto do risco. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 18, n. 3, 2017. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31495>.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação. **Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático.** Brasília, 2021.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB-Lei nº 9394/96**, Brasília, 1996.

BURRILL, G., PFANNKUCH, M. Emerging trends in statistics education. **ZDM Mathematics Education**, v.56, p.19–29 (2024). <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01501-7>.

CABERLIM, C. **Letramento probabilístico no ensino médio:** um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos. 2013.141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

CANALYS. **Top 10 shipped smartphones worldwide in 2023.** 2024. Disponível em: <https://x.com/Canalys/status/1754898915843842338> Acesso em: 22 de julho de 2024.

CANAVEZE, L. **O ensino-aprendizagem de probabilidade em uma escola pública de Sorocaba/SP.** 2013. 209f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas - Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2013).

CARRERA, P.; PINO-FAN, L.; ALVARADO, H.; LUGO-ARMENTA, J. Practices of the Random Variable Proposed in the Chilean Mathematics Curriculum of Secondary Education. **Mathematics**, v.9, n.19, p.1-26, 2021.

CARVALHO, J. I. F. de; SILVA, C. D. B.; PARAÍBA, T. dos S. Um estudo sobre probabilidade nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental: significados, representações e contextos. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

CHANCE DE GOL. **Campeonato brasileiro 2025 - série a: Classificação e probabilidades.** 2025. Disponível em: <https://www.chancedegol.com.br/br25.htm>. Acesso em: 2 de dezembro de 2025.

CHI, N. P. A Comparative Study of the Probability and Statistics Curricula in the High School Mathematics Textbooks of Vietnam and Germany. **International Journal of Education and Practice**, v. 10, n. 2, p. 69-83, 2022.

CLEARBLUE. **As chances de engravidar durante a menstruação.** 2024. Disponível em: [https://br.clearblue.com/estou-gravida/engravidar-na-menstruacao#:~:text=As%20chances%20de%20engravidar%20durante,dias%20antes%20da%20pr%C3%B3xi ma%20menstrua%C3%A7%C3%A3o](https://br.clearblue.com/estou-gravida/engravidar-na-menstruacao#:~:text=As%20chances%20de%20engravidar%20durante,dias%20antes%20da%20pr%C3%B3xima%20menstrua%C3%A7%C3%A3o). Acesso em: 16 de maio de 2024.

CLIMATEMPO. **Climatempo.** 2024. Disponível em: <https://www.climatempo.com.br/previsao-do-tempo/15-dias/cidade/923/juazeiro-ba>. Acesso em: 22 de julho de 2024.

CNN BRASIL. **Cortes da taxa de Juros.** 2023. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/economia/financas/probabilidade-de-corte-de-025-ponto-percentual-nos-juros-nao-e-maior-que-075-diz-campos-neto>. Acesso em: 13 de maio de 2025.

CONFEDERAÇÃO NACIONAL DA INDÚSTRIA. **Opinião pública e sustentabilidade.** 2024. Disponível em: https://static.portaldaindustria.com.br/portaldaindustria/noticias/media/filer_public/c0/3a/c03a0890-d087-4a51-acc3-7c6a6bb6ae75/opiniao_publica_e_sustentabilidade.pdf. Acesso em: 15 de julho de 2025.

CORTER, J. E; ZAHNER, D. C. Use of External Visual Representations in Probability Problem Solving. **Statistics Education Research Journal**, v. 6, n. 1, p. 22-50, 2007.

COSTA, A. R. G.; NÓBREGA, M. P. Registros de representação semiótica na educação matemática: um olhar em torno do conceito de probabilidade. **Revista Caderno Pedagógico**, Curitiba, v.21, n.7, p. 01-15, 2024.

COUTINHO, C. de Q. e S.; SILVA, M. J. F. da; ALMOULLOUD, S. A. Desenvolvimento do Pensamento Estatístico e sua Articulação com a Mobilização de Registros de Representação Semiótica. **Boletim de Educação Matemática**, v. 24, n. 39, p. 495-514, 2011.

COUTINHO, C. Introdução ao conceito de probabilidade e os livros didáticos para ensino médio no Brasil. In A. Salcedo (Ed.), **Educación estadística en América Latina: tendencias y perspectivas**, Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2013.

COUTINHO, C. Probabilidade: contexto e construção do letramento probabilístico. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín; E. Molina-Portillo (Eds.), **Actas del tercer congreso internacional virtual de educación estadística**, 2019.

COUTINHO, C.; FIGUEIREDO, A. de C. Simulação Computacional: Aspectos do Ensino da Probabilidade Frequentista. **ZETETIKE**, v. 28, p. 1-18, 2020.

CUSTÓDIO, L. **Letramento probabilístico:** um olhar sobre as situações de aprendizagem do caderno do professor. 2017. 64f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017.

DATAFOLHA. **Para 65% dos brasileiros as bets deveriam ser proibidas. Folha de S.Paulo.** 2024. Disponível em: <https://datafolha.folha.uol.com.br/opiniao-e-sociedade/2024/11/para-65-dos-brasileiros-as-bets-deveriam-ser-proibidas.shtml>. Acesso em: 04 de Julho de 2025.

DATTANI , S.; RODÉS-GUIRAO, L.; RITCHIE, H.; ORTIZ-OSPINA, E.; ROSER, M. Life Expectancy. **OurWorldinData.org**. Disponível em:<https://ourworldindata.org/life-expectancy>. Acesso em: 04 de setembro de 2024.

DÍAZ, P. D. **La estadística y la probabilidad en los libros de texto de Bachillerato y en las pruebas de acceso a la universidad.** 324f. Tese (Doutorado en Matemáticas Y Estadística) – Universidad de Oviedo. Oviedo, 2017.

EUGÊNIO, R. S. **Letramento Probabilístico nos Anos Finais do Ensino Fundamental:** um processo de formação dialógica com professores de matemática. 2019.232f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica-Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

EUGÊNIO, R. S.; MONTEIRO, C. E. F.; CARVALHO, L. M. T. L de. Letramento probabilístico de professores de matemática do Ensino Fundamental: reflexões da formação continuada. **Zetetike**, Campinas, SP, v. 30, p. 1-18, 2022.

EUGÊNIO, R. S.; MONTEIRO, C. E. F.; CARVALHO, L. M. T. L. de. Letramento probabilístico na formação de professores que ensinam estatística. In MONTEIRO, C. E. F.; CARVALHO, L. M. T. L. de. **Temas Emergentes em Letramento Estatístico**. Recife: Ed. UFPE, p.362-383, 2021.

FERNANDES, J. A.; BRAGA, B. M. Conhecimento de Probabilidade de Alunos do Ensino Médio Após o Ensino. **Revemop**, v. 5, p. 1-19, 2023.

FERNANDES, R. J. G.; JUNIOR, G. dos S. Uma proposta pedagógica para ensinar probabilidade no Ensino Fundamental. **Revista Práxis**, Ano VII, n. 14, p. 87-97, 2016. <https://revistas.unifoia.edu.br/praxis/article/view/652>.

FIGUEIREDO, A. de C. Probabilidade condicional em contexto de ensino aprendizagem. **Educação matemática pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 544-554, 2019.

FOLHA DE S.PAULO. **97% dos brasileiros percebem mudanças climáticas no dia a dia, aponta Datafolha**. 2024. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/ambiente/2024/07/97-dos-brasileiros-percebem-mudancas-climaticas-no-dia-a-dia-aponta-datafolha.shtml>. Acesso em: 18 de julho de 2024.

FRANCO SEGUÍ, J.; ALSINA, A. ¿Cómo mejorar el conocimiento especializado para enseñar probabilidad?: estrategias metodológicas para una formación eficaz. **Revista Científica Ecociencia**, v. 11, n.3, p. 57–82, 2024.

GAL, I. Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities – **Internacional Statistical Review**, Australia, v. 70, 2002. p. 1-33.

GAL, I. Towards 'probability literacy' for all citizens. In: Jones, G.A (ed.), **Exploring probability in school: challenges for teaching and learning**. Springer: p.39-63, 2005.

GAL, I. Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), **Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística**. Granada: Universidad de Granada, p.1-15, 2019.

GIL, A. C. Como elaborar projetos de pesquisa. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GUIMARÃES, Gilda; CARVALHO, José Ivanildo (Org.). **Estatística e probabilidade na escola**. Recife: Editora UFPE, 2021.

IBGE. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua Anual**. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/7107>. Acesso em: 18 de julho de 2024.

INSTITUTO ÁGUA E SANEAMENTO. **Municípios e Saneamento: Juazeiro (BA)**. Disponível em: <https://www.aquaesaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/ba/juazeiro>. Acesso em: 17 de Julho de 2025

INSTITUTO ÁGUA E SANEAMENTO. **Municípios e Saneamento: Petrolina (PE)**.

Disponível em: <https://www.aguaesaneamento.org.br/municipios-e-saneamento/pe/petrolina>. Acesso em: 17 de Julho de 2025

KOLMOGOROV, A. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione, 1st. *Ital. Attuari.* G., 4, p.1–11, 1933.

LIMA, E.; BORBA, R. Combinatória, Probabilidade e suas articulações em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 36, n. 72, p.164-192, 2022. <https://www.scielo.br/j/bolema/a/84X6mfyJHcxMQBdh4krsLbb/>.

LOPES, C. E. Os Desafios Para Educação Estatística no Currículo de Matemática. In: Lopes, C.; Coutinho, C.; Almouloud, S. A. **Estudo e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, p.47-64, 2010.

LOPES, J.M.; TEODORO, J.V.; REZENDE, J. de C. O Ensino de Probabilidade Por Meio de um Jogo e da Resolução de Problemas. In: Lopes, C.; Coutinho, C.; Almouloud, S. A. **Estudo e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, p.135-156, 2010.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M.E.D.A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MEMNUN, D. S.; OZBILEN, O.; DINC, E. A qualitative Research on the Difficulties and Failures About Probability Concepts of High School Students. **Journal of Educational Issues**, v. 5, n. 1, p. 1-19, 2019. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1206642.pdf>.

MENDONÇA, L de O.; LOPES, C.E.; O Trabalho com Educação Estatística no Ensino Médio em um Ambiente de Modelagem Matemática. In: Lopes, C.; Coutinho, C.; Almouloud, S. A. **Estudo e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, p.157- 172, 2010.

MORAES, C. A. S. **Registros de Representação Semiótica:** contribuições para o letramento probabilístico no 9º ano do Ensino Fundamental. 2017.101f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2017.

MOREIRA, A. de P. M. **Aplicações da Teoria da Decisão e Probabilidade Subjetiva em Sala de Aula do Ensino Médio**. 2015. 166 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015. <https://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/alunos/dissertacaoAndrea.pdf>.

MUTARA, L. **Exploring Grade 10 Learners' Errors and Misconceptions Involved in Solving Probability Problems Using Different Representations**. 2015. 102f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) – Universidade de Witwatersrand, Joanesburgo, 2015. <https://wiredspace.wits.ac.za/items/bdbd3669-9b19-4a0a-bfb1-d4ba5d24e42b>.

OCDE. Quadro de avaliação e análise do PISA 2012: Matemática, Leitura, Ciências, Resolução de Problemas e Alfabetização Financeira , PISA, OCDE Publishing, Paris,2013. <https://doi.org/10.1787/9789264190511-en>.

ODY, M. C.; VIALI, L. Uma Avaliação da Literacia Estatística e Probabilística no Ensino Médio. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 18, n. 2, p.923-949, 2016. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/24407>

OLIVEIRA, F. F. de. **Probabilidade Condicional: proposta de um experimento de ensino envolvendo registros de representações semióticas**. 223 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, S. G. de.; SANTOS, C. A. B. dos S.; CALEJON, L. M. C. Articulação entre os níveis de funcionamento dos conhecimentos e os registros de representações semióticas em tarefas de probabilidade. **Research, Society and Development**, v. 9, n. 10, p.1-22, 2020. <https://rsdjournal.org/index.php/rsd/article/view/8796>

OLIVEIRA, S. G. **Níveis de Funcionamento dos Conhecimentos sobre Probabilidade em Alunos do Ensino Médio**.2018. 148f.Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2018.

ONU BRASIL. **Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS)**. Disponível em: <https://brasil.un.org/pt-br/sdgs>. Acesso em: 17 de Julho de. 2025.

ORTIZ, J. J.; ALBANESE, V.; SERRANO, L. El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. In J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), Investigación en Educación Matemática XX (p. 397-406). Málaga: **SEIEM**, 2016.

PERNAMBUCO. **Curriculo do Ensino Médio**, Secretaria de Educação, Pernambuco, 2021.

PIETROPAOLO, R. C.; SILVA, A.; CAMPOS, T. M. M. Um Estudo sobre os Conhecimentos Necessários ao Professor para Ensinar Noções Concernentes à Probabilidade nos Anos Iniciais. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, p. 1534-1542, 2015.

POST, M.; PREDIGER, S. Teaching Practices for Unfolding Information and Connecting Multiple Representations: the case of conditional probability information. **Mathematics Education Research Journal**, v. 36, p. 97–129, 2022.

PRODANOV, C. C.; FREITAS, E. C. de. Metodologia do Trabalho Científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RAPOSO, S., NASCIMENTO, M.; COSTA, C.; GEA, M. Mathematics Applied to Social Sciences: Probability Tasks with Technology. **Actas del Segundo Congreso**

International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Granada, p.1-10, 2017.

RICO, N.; RUIZ-HIDALGO, J. F. Errors concerning Statistics and Probability in Spanish Secondary School Textbooks. **Applied Sciences**, v. 12, n. 24, p. 1-15, 2022.

RODRIGUES, M. R. **Estudo Sobre as Concepções de Professores do Ensino Básico em Relação a Aleatoriedade e Probabilidade.** 212f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) -Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2018.

RODRIGUES, M. R.; MARTINS, E. G. A Abordagem do tema probabilidade nos livros aprovados pelo PNLD para o triênio 2015 – 2017 e suas implicações no processo de ensino e aprendizagem. **Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016.

SAMÁ, S.; SILVA, R. C. S. da. Probabilidade e Estatística nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir da BNCC. **Zetetike**, Campinas, v. 28, p. 1-21, 2020.

SÁNCHEZ, J.; VÁSQUEZ, C.; VÁSQUEZ, P. Construção de Linguagem Probabilística e Prática Argumentativa: análise de uma experiência no ensino fundamental. **TANGRAM - Revista de Educação Matemática**, v. 6, n. 1, p. 28–62, 2023. <https://doi.org/10.30612/tangram.v6i1.16904>.

SANTOS, C.; DIAS, C. Considerações sobre o uso de representações diagramáticas no cálculo de probabilidades condicionadas. **Experiências em Ensino de Ciências**, v.16, n.1, p.121-136, 2021.

SANTOS, J. L. **O Movimento do Pensamento Probabilístico Mediado pelo Processo de Comunicação com Alunos do 7º ano do Ensino Fundamental.** 2010. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) -Universidade São Francisco, Itatiba, 2010.

SANTOS, J. L. **Pensamento Combinatório e Probabilístico:** problematizações em aulas de matemática. Curitiba: Appris, 2020.

SHAUGHNESSY, J.; ZECHMEISTER, E.; ZECHMEISTER, J. **Metodologia de Pesquisa em Psicologia.** 9. Ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

SILVA, A. R. O. **Probabilidade Subjetiva no Ensino Médio: constituição de indicadores epistêmicos e o conhecimento dos estudantes.** 118f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE, 2023.

SILVA, A. R.; GUIMARÃES, G. Probabilidade para o ensino médio nos livros de conhecimento do PNLD 2021. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 26, n. 1, p.449–471, 2024.

SILVA, M. J.; ALVES, F. J. C.; NORONHA, C. A. Uma análise semiótica em um ensino de probabilidade com questões sócio críticas. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática - REnCiMa**, v.9, n.4, p.203-218, 2018.

SILVEIRA, B. **Interpretações de Probabilidade Contempladas nas Coleções de Matemática do PNLD – 2021 para o Novo Ensino Médio**. 89f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2021.

SMANIOTTO, M. R.; ODY, M. C.; BALLEJO, C. C.; HERZOG, C. B.; VIALI, L. Educação probabilística: um estudo sobre a aleatoriedade no ensino fundamental. In: LOPES, C. E.; PORCIÚNCULA, M.; SAMÁ, S. (org.). **Perspectivas para o ensino e a aprendizagem de estatística e probabilidade**. Campinas, SP: Mercado de Letras, p.145-170,2019.

SOARES, J. A. R.; CARVALHO, E. de S.; PEREIRA, O. R.; SILVA, R. F. da; OLIVEIRA, P. A.; SILVA, W. G. da; MARTINS, G. A. de S. Limitadores do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos de probabilidade. **Desafios – Revista Interdisciplinar da Universidade Federal do Tocantins**, v. 9, n. Especial, p. 71–79, 2022.

SOARES, M. Letramento e Alfabetização: As muitas facetas. **Rev. Bras. Educ. [online]**. 2005, n.25, p.5-17. ISSN 1413-2478.

VASCONCELOS, A.; ROCHA, C. de A. Com a sorte na palma das mãos: o tradicional jogo de palitinhos em simulações no GeoGebra para o ensino da probabilidade frequentista. **Anais do Encontro de Matemática do Ifpe Campus Pesqueira**, v.3., 2023. <https://drive.google.com/file/d/1Vp4l1yKZhtoqVc2YgF1krCbHnBiJNXFb/view>.

VÁSQUEZ, C. O.; ALSINA, A. Diseño, construcción y validación de una pauta de observación de los significados de la probabilidad en el aula de Educación Primaria. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.14, p.1-20, 2019.

VÁSQUEZ, C. O.; ALSINA, A. Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 454 -478, abr. 2017.

VÁSQUEZ, C.O. Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de Educación Primaria. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 9, n. 2, p. 374-389, 2018.

VÁSQUEZ, C.O.; CABRERA, G. La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 25, n. 2, p. 245-268, 2022. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S244880892022000200245&script=sci_ar_text.

VERBISCK, J. **Uma Análise Praxeológica da Proposta de Ensino de Probabilidade em Livros Didáticos da Educação Básica**. 2019. 188f. Dissertação

(Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul,Campo Grande, 2019.

VIALI, L; OLIVEIRA, P. Uma Análise de Conteúdos de Probabilidade em Livros Didáticos do Ensino Médio. In Lopes, C.; Coutinho, C.; Almouloud, S. A. **Estudo e reflexões em Educação Estatística. Campinas**: Mercado de Letras, p.85-104, 2010.

ZAHNER, D.; CORTER, J. E. The process of probability problem solving: Use of external visual representations. **Mathematical Thinking and Learning**, vol12, n.2, p.177–204, 2010. <https://doi.org/10.1080/10986061003654240>.

ZORZOS, M.; AVGERINOS, E. Research on visualization in probability problem solving. **EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 19, n. 4, p.1-10, 2023.