UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

CAOS INTERMITENTE EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS

por

Erika Medeiros de Siqueira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:
Prof. José Roberto Rios Leite (Orientador- UFPE)
Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva (DF – UFPE)
Prof. Bernardo Gabriel Mindlin(DF, FCEyN - UBA)

Recife - PE, Brasil
Julho - 2005

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
http://www.df.ufpe.br/pg e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

Erika Medeiros de Siqueira

CAOS INTERMITENTE EM CIRCUITOS ELETRÔNICOS

A Banca Examinadora composta pelos Professores José Roberto Rios Leite (Presidente e Orientador), Mauro Copelli Lopes da Silva, ambos da Universidade Federal de Pernambuco e Bernardo Gabriel Mindlin, do Departamento de Física da Facultad de Ciencias Exactas y Naturales da Universidad de Buenos Aires, consideram a candidata:

( ) Aprovado com Distinção (x) Aprovado ( ) Reprovado

Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco aos oito dias do mês de julho de 2005.

Prof. José Roberto Rios Leite
Presidente e Orientador

Prof. Bernardo Gabriel Mindlin

Prof. Mauro Copelli Lopes da Silva

Para Helder.

Agradecimentos

Agradeço à equipe do Laboratório de Dinâmica de Lasers: a Hugo L. D. de S. Cavalcante pelas discussões, a Jhon Fredy Martinez pelo companheirismo e ajuda no laboratório, a Fábio Oikawa pela montagem dos circuitos e ao Prof. Rios Leite pela orientação e incentivo.

Aos professores Mauro Copelli, UFPE, e Gabriel Mindlin, Universidade de Buenos Aires, por participarem da banca desta dissertação.

Aos demais professores do Departamento com quem tive contato durante o mestrado.

A todos os funcionários e técnicos do Departamento, em especial à secretária de pós-graduação Ana Maria Caldeira, a Joana D. Leão Salvador e Ana Maria Costa Barbosa da Biblioteca, a Humberto B. de Siqueira do almoxarifado, a Marcos Aurélio do Nascimento da Oficina Eletrônica e a João Joaquim Batista da equipe da limpeza.

À agência de fomento à pesquisa CAPES.

A minha mãe Kátia e irmãos Virgínia e Murilo. E à outra parte da família, Bidu e Nzinga, pela constante alegria.

A Helder por ter me ajudado bastante durante a realização deste trabalho e por estar sempre ao meu lado.

Resumo

Circuitos eletrônicos não-lineares simples podem apresentar comportamento caótico para determinados valores de parâmetros, como a freqüência ou a amplitude do sinal de entrada. Estudamos este sistema teórica e experimentalmente.

Construímos um circuito com um resistor, um indutor e um diodo ligados em série e excitados por uma fonte externa de tensão. Capturamos séries temporais deste sistema e construímos diagramas de bifurcação, que apresentam cascata de dobramento de período, janelas periódicas e transição intermitente, sendo esta última uma das possíveis rotas para o caos. Também a partir destas séries construímos mapas de retorno dos máximos locais e verificamos a existência de intermitência do tipo-I neste circuito. O expoente crítico previsto teoricamente para a média das fases laminares foi encontrado tanto no experimento quanto no modelo matemático usado para descrever o circuito.

Abstract

Very simple nonlinear electronic circuits can present chaotic behavior for some values of the parameters like the frequency or the amplitude of the driving signal. We studied such circuits theoretical and experimentally.

A circuit consisting of a resistor, an inductor and a diode in series driven by a sinusodial voltage was built. Time series were capturated and used to construct bifurcation diagrams which present period-doubling, periodic windows and intermittent trasition to chaos. The time series were also used to plot the return maps for the local maxima and we could verify the type-I intermittency in this system. The critical exponent predicted theoretically was found for the average of the laminar lengths both in the experiment and in the mathematical model used to describe the circuit.

Sumário

Apresentação 1

1 Introdução 3

1.1 Sistemas Dinâmicos . . . 3

1.2 Espaço de fase . . . 5

1.3 Seção de Poincaré . . . 5

1.4 Atratores . . . 8

1.5 Caos . . . 10

2 Mapas Unidimensionais 13

2.1 Caos em Mapas Unidimensionais . . . 13

2.2 Mapa Logístico . . . 14

2.3 Estudo de Sistemas Contínuos com Mapas Unidimensionais . . . 20

2.3.1 Equações de Lorenz . . . 21

2.3.2 Mapa de Lorenz . . . 22

2.3.3 Equações de Rössler . . . 25

3 Caos Intermitente 28

3.1 Intermitência tipo-I . . . 29

3.1.1 Média das fases laminares . . . 32

3.1.2 Média da variável dinâmica . . . 34

4 Oscilador Eletrônico Não-linear Forçado **39**

4.1 O circuito RLD 39

4.2 Modelo para o circuito RLD 39

5 Experimento **49**

5.1 Experimentos com o circuito RLD 49

6 Conclusão **55**

Referências Bibliográficas **57**

Lista de Figuras

1.1 Espaço de fase de um sistema dinâmico; a condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$ determina uma única trajetória. 6

1.2 Seção de Poincaré. (a) O mapa de Poincaré é gerado pelas sucessivas interseções da órbita com o plano S. (b) Um ponto fixo do mapa de Poincaré representa uma órbita fechada. 7

1.3 O atrator do pêndulo amortecido (eq. 1.14) é a origem. 9

1.4 Atrator da equação de Van der Pol: trajetórias com condição inicial fora (α) ou dentro (β) do ciclo limite são atraídas para este. 10

1.5 Evolução de duas trajetórias vizinhas. 12

2.1 Mapa logístico. (a) $r = 1,0$, (b) $r = 2,5$, (c) $r = 3,5$. Os pontos fixos em (b) e (c) são estável e instável, respectivamente. 14

2.2 Iterações do mapa logístico (eq. 2.2) com o parâmetro de controle $r = 3,3$. As iterações do mapa representadas por pontos da figura foram interligadas por linhas para melhor visualização. 16

2.3 Mapa $F^2(x_n)$ com $r = 2,9$, antes do dobramento de período (linha pontilhada) e com $r = 3,3$, depois do dobramento (linha cheia). O ponto fixo x^* é também ponto fixo de $F(x_n)$ (instável). Os outros dois são pontos fixos apenas de $F^2(x_n)$ (estáveis). . . 16

2.4 Diagrama de bifurcação do mapa logístico 18

2.5 Gráfico de $F^3(x_n)$ para $r = 3,84$, na janela de período 3. 19

2.6 Gráfico de $F^3(x_n)$ antes e depois da bifurcação tangente que dá origem à janela de período 3. 19
2.7 Iterações do mapa logístico com $r = 3,826427$, antes da janela de período 3 ($r_c = 3,82841\ldots$), apresentando comportamento intermitente. Os pontos que representam as iterações do mapa foram interligados por linhas para melhor visualização. 20
2.8 Solução das equações de Lorenz para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$, com condição inicial $(x, y, z) = (0, 1, 0)$, integradas com algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem. 22
2.9 Atrator de Lorenz. Projeção no plano xz da solução das equações de Lorenz com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$ e condição inicial $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. 23
2.10 Projeção do atrator de Lorenz no plano yz. 23
2.11 Solução para $z(t)$, mostrando os máximos locais. 24
2.12 Mapa de Lorenz, obtido a partir dos máximos locais de uma série para $z(t)$, com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$. 25
2.13 Bifurcações no sistema de Rössler; $a = b = 0,2$. O parâmetro c tem valores (a) 2,5, (b) 3,5, (c) 4 e (d) 5. 26
2.14 Mapa de Lorenz para o sistema de Rössler, obtido a partir de uma série temporal de $x(t)$ com $c = 5$. 27
2.15 Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler. 27

3.1 Os multiplicadores de Floquet, λ_j, podem atravessar o círculo unitário de três formas e cada uma delas origina um tipo de intermitência. Em (+1) intermitência tipo-I, em (-1) intermitência tipo-III e se o multiplicador for complexo, intermitência tipo-II. 29

3.2 Gráfico da terceira aplicação do mapa logístico, com parâmetro de controle $r = 3.82643$, mostrando uma órbita que atravessa o canal formado pelo mapa e pela reta diagonal. O número de iterações que a órbita passa dentro do canal determina o comprimento da fase laminar, l, que aumenta quando $r \to r_c = 3,82841\ldots$. 30

3.3 Fases laminares no mapa logístico com $r = 3,8282$, próximo à bifurcação tangente que dá origem a janela de período 3; l é o comprimento das fases laminares. 31

3.4 Gráfico do mapa normal com intermitência do tipo-I, $x_{n+1} = x_n + \varepsilon + x_n^2$. Para $\varepsilon < 0$ existem dois pontos fixos, um instável e outro estável e as órbitas do mapa são periódicas. Em $\varepsilon = 0$ a curva é tangente à linha diagonal; os pontos fixos desaparecem quando $\varepsilon > 0$. 32

3.5 Iteradas no canal formado pelo mapa e pela reta identidade. x_{in} é o valor da primeira iterada dentro do canal, que tem largura c. 33

3.6 Diagrama de bifurcação do mapa logístico. (a) diagrama das iteradas x_n do mapa; (b) diagrama da média da varíavel x_n, $\langle x \rangle$, calculada com 10^7 iteradas do mapa e 2000 passos no valor do parâmetro de controle r. 35

3.7 Diagrama de bifurcação da média da variável x_n do mapa logístico com ajuste da equação (3.12). (a) janela de período 3, (b) janela de período 5 e (c) janela de período 7. Em todos os casos o expoente crítico é $\beta \simeq 0,5$. 36

3.8 Diagrama de bifurcação da média da variável x_n do mapa logístico na janela de período 7: (a) média calculada sem ruído externo, (b) média calculada com amplitude do ruído externo $d = 10^{-7}$ e (c) $d = 10^{-6}$, mostrando como as oscilações são destruídas com o aumento do nível do ruído externo. Na referência [27], de Cavalcante *et al* fazem estudo semelhante para as oscilações de um mapa linear por partes com intermitência do tipo-I. . . . 38

4.1 (a) Esquema do circuito RLD. (b) Esquema com modelo para o diodo. Todas as resistências do circuito estão representadas por R. 41

4.2 Séries temporais da (a) tensão e da (b) corrente para o circuito RLD calculadas numericamente com as equações (4.5). A série temporal para a tensão no diodo é semelhante à série experimental (ver fig. 5.2). Séries calculadas com $R = 90\Omega$, $L = 10\text{mH}$, $V = 5\text{V}$ e $f = 14\text{kHz}$. 42

4.3 Séries temporais da (a) corrente e da (b) carga para o sistema de equações (4.11), calculadas numericamente com $a = 0,75$ e $A_0 = 14,0$. 43

4.4 Diagrama de bifurcação para os máximos de $q(t)$ com $a = 0,75$, calculados a partir das equações simplificadas para o circuito RLD (eq. 4.11). 44

4.5 Janela de período 5 no diagrama de bifurcação para o modelo simplificado do circuito RLD ($a = 0,75$). 45

4.6 Mapa da quinta iterada dos máximos de $q(t)$ com $a = 0,75$ e $A_0 = 12,1$, próximo à janela de período 5. Os pontos azuis representam os máximos de $q(t)$ após a bifurcação, com $A_0 = 12,24$. 45

4.7 Máximos de $q(t)$ próximo à janela de período 5 com $A_0 = 12,223$ e $a = 0,75$; l é o comprimento das fases laminares. 46
4.8 Média das fases laminares próximo à janela de período 5. A bifurcação ocorre em $A_c = 12,22528$ e o expoente crítico $\nu = 0,52$. 47
4.9 Média da variável $q(t)$ próximo à janela de período 5. A bifurcação ocorre em $A_c = 12,22528$. Conseguimos o melhor ajuste com a equação (4.14) usando o expoente crítico $\beta = 0,526$. Observam-se também as oscilações presentes em bifurcações do tipo-I. 48

5.1 Diagrama do circuito RLD com seguidor de tensão. 50
5.2 Série temporal caótica típica do circuito RLD com $V_0 = 2,3$V e $f = 96$kHz (experimento). 51
5.3 Diagrama de bifurcação experimental dos máximos locais de $V(t)$ para o circuito RLD. Com $f = 100$kHz e $V_{offset} = 0$V a amplitude do sinal de entrada V_0 foi usada como parâmetro de controle e variada de $1,82$ a $2,5$V. 51
5.4 Diagrama de bifurcação experimental dos máximos locais de $V(t)$ para o circuito RLD. Com $V_0 = 2,3$V e $V_{offset} = 0$V a freqüência f foi usada como parâmetro de controle e variada de 80 a 130kHz. 52
5.5 Máximos de uma série temporal experimental de $V(t)$ do circuito RLD com $V_0 = 2,3$V, $V_{offset} = 0$V e $f = 96,266$kHz próximo à bifurcação para janela de período 6 mostrando comportamento intermitente e o comprimento de algumas fases laminares, l. 53

5.6 Mapa experimental do próximo sexto máximo extraído de uma série temporal de $V(t)$ com $V_0 = 2,3\text{V}$, $V_{offset} = 0\text{V}$ e $f = 96\text{kHz}$, próximo à bifurcação que ocorre em $f_c \simeq 96,296\text{kHz}$. O mapa é tangente à reta diagonal, o que mostra que a intermitência é do tipo-I. 53

5.7 Média das fases laminares próximo da janela de período 6. A bifurcação tangente ocorre em $f_c = 96296,668\text{Hz}$. Os pontos são dados experimentais e a reta é o ajuste com inclinação $\nu = 0,479$. 54

Apresentação

O caos intermitente, uma das conhecidas rotas para o caos, está presente em sistemas físicos e matemáticos e vem sendo estudado desde sua classificação por Pomeau e Manneville [9], em 1980. Estudamos o caos intermitente em mapas unidimensionais, em fluxos e também em sistemas físicos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: os três primeiros capítulos são descrições de conceitos necessários para o entendimento do trabalho e são baseados em livros texto [2, 3, 12] e artigos de revisão [4, 18]. Nos capítulos que seguem fizemos estudos numéricos e experimentais de um oscilador eletrônico não-linear forçado, um circuito simples que, entre outras características de sistemas caóticos, apresenta caos intermitente.

No primeiro capítulo tratamos dos principais conceitos presentes no estudo da dinâmica não-linear e do caos, apresentando apenas conceitos básicos. Todos estes conceitos estão descritos de forma mais detalhada em livros texto sobre o assunto [2, 3, 12]; apresentamos neste capítulo apenas descrições resumidas.

O segundo capítulo trata de mapas unidimensionais caóticos e foi escrito baseado principalmente no artigo de revisão *Strange attractors and chaotic motion of dynamical systems* de E. Ott [4], além dos livros texto *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and*

Engineering, de S. H. Strogatz [2] e *Chaos in Dynamical Systems*, também de E. Ott [3].

O terceiro capítulo trata de caos intermitente; uma revisão da intermitência foi feita seguindo-se o artigo *Theory of intermittency*, de J. E. Hirsch *et al* [18] e o livro texto *L'ordre dans le chaos*, de P. Bergé, Y. Pomeau e Ch. Vidal [12], além de artigos mais recentes sobre o assunto [19, 24, 25].

No quarto capítulo estudamos numericamente o circuito RLD usando um modelo proposto na referência [30]. Todas as integrações numéricas foram feitas com o algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem. Os experimentos realizados com uma montagem deste circuito são relatados no quinto capítulo onde descrevemos a montagem experimental e a forma de tratamento dos dados.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Sistemas Dinâmicos

Um *sistema dinâmico* é uma descrição matemática determinística para a evolução temporal de um sistema em que o tempo pode ser uma variável contínua ou discreta. Um exemplo de sistema dinâmico em que o tempo t é uma variável contínua é um sistema de N equações diferenciais ordinárias autônomas[1] de primeira ordem, também chamado de *fluxo.*:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), \\ &\vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \end{cases} \tag{1.1}$$

que pode ser escrito na forma de um vetor N-dimensional:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}[\vec{x}(t)]. \tag{1.2}$$

Dada uma condição inicial $\vec{x}(0)$ podemos, a princípio, resolver o sistema

[1]Equações diferenciais autônomas não possuem dependência explícita no tempo t. As equações não-autônomas podem ser reduzidas a equações autônomas acrescentando-se mais uma dimensão ao sistema. Para definições mais detalhadas de equações diferenciais, ver referência [1], capítulo 1.

de equações e obter o estado do sistema $\vec{x}(t)$ para $t > 0$.

No caso do tempo t ser discreto temos as *equações de diferenças* ou *mapas*, em que a variável $\vec{x}_{t+1}$ no tempo $t+1$ depende do seu valor no instante anterior, t. Essa relação pode ser escrita na forma geral:

$$\vec{x}_{t+1} = \vec{M}(\vec{x}_t), \tag{1.3}$$

onde $\vec{x}_t$ é N-dimensional, $\vec{x}_t = (x_t^{(1)}, \ldots, x_t^{(N)})$. Dada a condição inicial $\vec{x}_0$ podemos calcular os valores subseqüentes aplicando o mapa $\vec{M}$ de forma que $\vec{x}_1 = \vec{M}(\vec{x}_0)$, $\vec{x}_2 = \vec{M}(\vec{x}_1), \ldots$, gerando então uma *órbita* (ou trajetória) $\{\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\}$. Veremos mais detalhes sobre mapas no capítulo seguinte.

Um exemplo de sistema dinâmico é o pêndulo simples, descrito pela equação:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) = 0, \tag{1.4}$$

onde g é a aceleração da gravidade e L é o comprimento do pêndulo. Se fizermos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \dot{\theta}, \\ x_2 &= \theta, \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde o ponto sobre a variável representa sua derivada em relação ao tempo t, podemos escrever a equação (1.4) como um sistema de equações autônomas de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = & -\dfrac{g}{L}\text{sen}(x_2), \\ \dot{x_2} = & x_1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Por outro lado, se tivermos um pêndulo amortecido forçado:

$$\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) = A\cos(\omega t), \tag{1.7}$$

devemos adicionar uma outra variável, $x_3 = \omega t$, para que o sistema seja autônomo (não dependa explicitamente do tempo) e o sistema de equações

terá mais uma dimensão:

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= -\nu x_1 - \dfrac{g}{L}\text{sen}(x_2) + A\cos(x_3), \\ \dot{x_2} &= x_1, \\ \dot{x_3} &= \omega. \end{cases} \tag{1.8}$$

1.2 Espaço de fase

Alguns sistemas dinâmicos podem ser resolvidos analiticamente, mas a solução do sistema de equações é em geral difícil, sobretudo quando há termos não-lineares, como no caso do pêndulo simples[2]. Sabendo que o conhecimento do valor inicial das variáveis, $(x_1(0), x_2(0))$, descreve completamente o estado de um sistema dinâmico determinístico, podemos, a partir desta condição inicial, construir a solução $(x_1(t), x_2(t))$ para $t > 0$. Esta solução é representada por uma curva no espaço das coordenadas (x_1, x_2). A representação geométrica da solução de um sistema dinâmico oferece uma alternativa quando a integração das equações diferenciais não é possível. O espaço gerado pelas variáveis do sistema é chamado de *espaço de fase* e a curva que representa a evolução do sistema é a *trajetória* (fig. 1.1). Um espaço de fase com várias trajetórias representadas é chamado de *retrato de fase*.

1.3 Seção de Poincaré

Outra maneira de simplificar a análise de um sistema contínuo é reduzi-lo a um mapa discreto formado pela interseção de um fluxo n-dimensional $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ com uma superfície $(n-1)$-dimensional transversal ao fluxo. No

[2] A equação que descreve o pêndulo simples pode ser linearizada para ângulos pequenos; se $\theta \simeq 0$, $sen\theta \simeq \theta$ e a equação será:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0,$$

tornando-se facilmente integrável, porém esta solução não é válida para todo valor de θ.

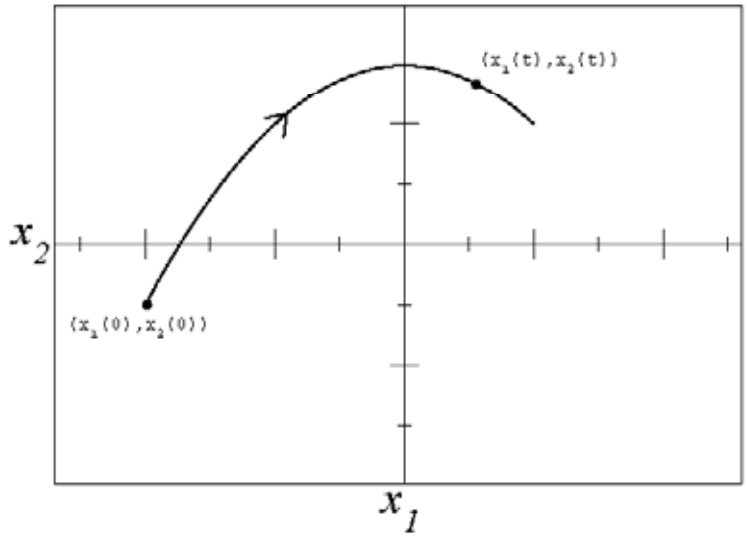

Figura 1.1: Espaço de fase de um sistema dinâmico; a condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$ determina uma única trajetória.

caso tridimensional esta superfície é um plano S que deve ser convenientemente escolhido de forma que as trajetórias sejam transversais e não paralelas ao plano (fig. 1.2(a)). Esta superfície é chamada de *superfície de interseção* e o mapa gerado pelas consecutivas interseções do fluxo com o plano é o *mapa de Poincaré*, P:

$$\vec{x}_{k+1} = P(\vec{x}_k). \tag{1.9}$$

Seja $\vec{x}^*$ um *ponto fixo* do mapa P, isto é, $\vec{x}^* = P(\vec{x}^*)$. Isto significa que após a trajetória cruzar o plano S no ponto $\vec{x}^*$ ela retorna a este mesmo ponto depois de um tempo t. Isto representa uma *órbita fechada* do fluxo (fig. 1.2(b)). Reduz-se então o problema de órbitas fechadas a pontos de um mapa. A estabilidade de órbitas pode ser analisada com o mapa de Poincaré: esta estabilidade será a mesma do ponto fixo $\vec{x}^*$ do mapa.

Para isso, considera-se uma órbita fechada do fluxo $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, representada por um ponto fixo $\vec{x}^*$ do mapa de Poincaré. Seja $\delta\vec{x}_0$ uma perturbação infinitesimal desta órbita. Iniciando a trajetória a partir de $\vec{x}^* + \delta\vec{x}_0$, após o

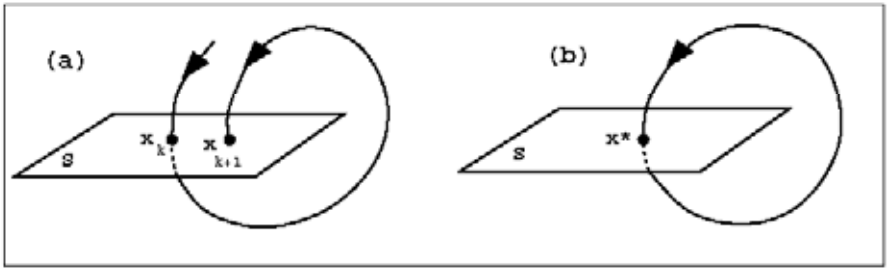

Figura 1.2: Seção de Poincaré. (a) O mapa de Poincaré é gerado pelas sucessivas interseções da órbita com o plano S. (b) Um ponto fixo do mapa de Poincaré representa uma órbita fechada.

fluxo retornar ao plano S, teremos:

$$\vec{x}^* + \delta\vec{x}_1 = P(\vec{x}^* + \delta\vec{x}_0), \tag{1.10}$$

$$\vec{x}^* + \delta\vec{x}_1 = P(\vec{x}^*) + [DP(\vec{x}^*)]\delta\vec{x}_0 + O(|\delta\vec{x}_0|^2). \tag{1.11}$$

Ignorando os termos de $O(|\delta\vec{x}_0|^2)$, obtemos uma equação linearizada para a perturbação $\delta\vec{x}_0$:

$$\delta\vec{x}_1 = [DP(\vec{x}^*)]\delta\vec{x}_0, \tag{1.12}$$

onde $[DP(\vec{x}^*)]$ é uma matriz $(n-1)\times(n-1)$ chamada de *matriz linearizada de Poincaré*. Isto reduz o problema da estabilidade de órbitas fechadas ao estudo dos autovalores λ_j da matriz $[DP(\vec{x}^*)]$. Se todos os autovalores λ_j são tais que $|\lambda_j| < 1$ (ou seja, λ_j se encontra no interior do círculo unitário no plano complexo), todas as componentes do vetor $\delta\vec{x}_1$ diminuem com o passar do tempo e o ciclo limite é estável. Caso contrário, se $|\lambda_j| > 1$ para algum j, a perturbação $\delta\vec{x}_1$ irá aumentar em alguma direção, e o ciclo limite é instável. Os λ_j são chamados de *multiplicadores de Floquet*. A mudança de algum parâmetro no sistema dinâmico pode fazer com que os valores de λ_j atravessem o círculo unitário, fazendo o sistema passar de um estado estável para um estado instável.

1.4 Atratores

Os sistemas chamados *conservativos* preservam o volume no espaço de fases, isto é, dada uma superfície fechada $S(0)$ com volume $V(0)$ no espaço de fase[3], os pontos contidos em $S(0)$ são usados como condições iniciais e a superfície evolui (seguindo as equações do sistema dinâmico) para uma superfície $S(t)$ com volume $V(t) = V(0)$. O mesmo não ocorre em sistemas *dissipativos*, onde há contração do volume no espaço de fase. Para um fluxo $\vec{f}$ qualquer, a variação do volume no espaço de fase é dada por[4]:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dV, \tag{1.13}$$

onde $\vec{f}$ é o fluxo (eq. 1.2) e $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$.

Exemplos de sistemas dissipativos são os sistemas de Lorenz e de Rössler (que serão estudados adiante) e também o pêndulo amortecido, descrito pela equação $\ddot{\theta} + \nu\dot{\theta} + \frac{g}{L}\text{sen}(\theta) = 0$. Escrevendo-a como um sistema de equações de primeira ordem autônomo teremos:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = & -\nu x_1 - \frac{g}{L}\text{sen}(x_2), \\ \dot{x_2} = & x_1. \end{cases} \tag{1.14}$$

A evolução de $V(t)$ é facilmente calculada:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\, dV = -\nu \int_V dV, \tag{1.15}$$

com solução dada por $V(t) = V(0)e^{-\nu t}$; o volume decresce e eventualmente tranforma-se em um conjunto de volume zero, chamado de *atrator*. Neste caso, o atrator é a origem (fig. 1.3).

[3] Em um espaço de fases n-dimensional, a superfície S será $(n-1)$-dimensional e o volume V, n-dimensional.

[4] Strogatz (ref. [2], capítulo 9) mostra passo-a-passo com chegar à equação (1.13).

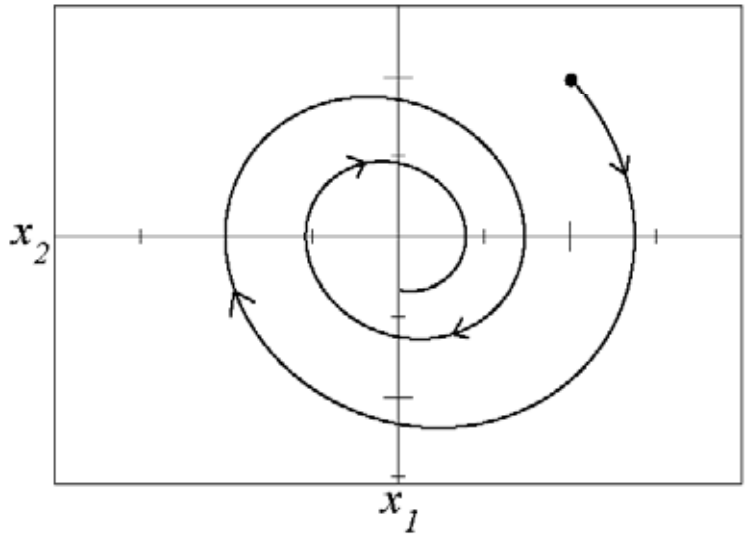

Figura 1.3: O atrator do pêndulo amortecido (eq. 1.14) é a origem.

Generalizando, atrator é todo conjunto para o qual as trajetórias vizinhas convergem; Strogatz (ref. [2], capítulo 9) dá uma definição mais precisa de atrator que reproduzimos aqui:

Um atrator é um conjunto[5] fechado A com as seguintes propriedades:

1. A é um conjunto invariante: qualquer trajetória $\vec{x}(t)$ que começa em A permanece em A indefinidamente;

2. A atrai um conjunto aberto de condições iniciais: existe um conjunto aberto U contendo A de tal forma que se $\vec{x}(0) \in U$, então a distância de $\vec{x}(t)$ ao conjunto A tende a zero com $t \to \infty$. Isso significa que A atrai todas as trajetórias que se iniciam suficientemente perto dele. O maior conjunto U é chamado de *bacia de atração* de A;

3. A é minimal: não existe subconjunto de A que satisfaça as condições 1 e 2.

[5]Para uma breve e elementar introdução a definições e teoremas sobre conjuntos, ver Ott [3], apêndice do capítulo 2

Além de pontos, ciclo limites também podem ser atratores. Um sistema que possui um ciclo limite como atrator é a equação de Van der Pol:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \tag{1.16}$$

onde μ é um parâmetro positivo. Tanto as órbitas iniciadas fora do ciclo quanto dentro (α e β na figura (1.4)) espiralam na direção do atrator.

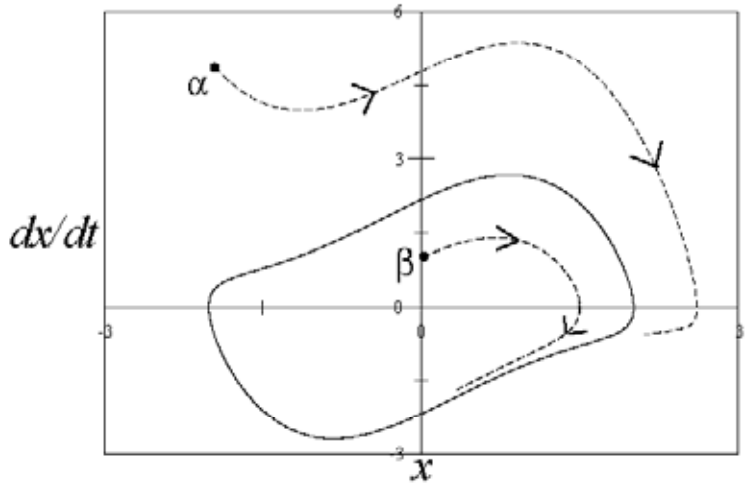

Figura 1.4: Atrator da equação de Van der Pol: trajetórias com condição inicial fora (α) ou dentro (β) do ciclo limite são atraídas para este.

1.5 Caos

Caos pode ser definido como o comportamento aperiódico de sistemas determinísticos que apresentam sensível dependência às condições iniciais [2]. Um sistema é *aperiódico* quando suas trajetórias não tendem a pontos fixos ou órbitas periódicas quando $t \to \infty$, porém permanecem em uma região finita do espaço de fase. As soluções de um sistema determinístico nunca cruzam

um mesmo ponto no espaço de fase[6], por isso uma solução aperiódica viaja indefinidamente por esta região finita, sem nunca se interceptar. Isto só é possível para sistemas com dimensão $n \geq 3$[7]. Esta trajetória é eventualmente atraída para um *atrator estranho*, um conjunto de volume zero com dimensão fractal em que há sensível dependência às condições iniciais, isto é, considerando duas condições iniciais bastante próximas:

$$\vec{x}_1(0) \quad \text{e} \quad \vec{x}_2(0) = \vec{x}_1(0) + \delta(0) \tag{1.17}$$

e sua evolução segundo equações de um sistema dinâmico:

$$\vec{x}_1(t) \quad \text{e} \quad \vec{x}_2(t) = \vec{x}_1(t) + \delta(t), \tag{1.18}$$

se $|\delta(t)|$ cresce exponencialmente com t dizemos então que o sistema é sensível às condições iniciais (ver fig. 1.5). Exemplos de atratores estranhos são o atrator de Lorenz (fig. 2.9) e o atrator de Rössler (fig. 2.13(d)), estudados no capítulo seguinte (seção 2.3).

A velocidade com que essas órbitas se separam uma da outra é medida pelo *expoente de Lyapunov*, Λ:

$$|\delta(t)| \sim |\delta(0)|e^{\Lambda t}. \tag{1.19}$$

Existem tantos expoentes de Lyapunov quantas forem as dimensões de um sistema. Se um dos expoentes for positivo, soluções deste sistema que se iniciam

[6]Esta condição é determinada pelo Teorema da existência e unicidade que diz que o problema de valor inicial:

$$\dot{y} = f(y,t); \; y(t_0) = y_0,$$

tem uma única solução num certo intervalo que contém o ponto t_0 (ref. [1], capítulo 2). Como qualquer ponto do espaço de fase pode ser considerado uma condição inicial, existirá apenas uma solução do sistema de equações f que passará por este ponto.

[7]O Teorema de Poincaré-Bendixon (ref. [2], capítulo 7) mostra que para fluxos no plano ($n = 2$), se uma trajetória está confinada em uma região fechada limitada onde não há pontos fixos, então esta trajetória ou é uma órbita fechada ou tende para uma órbita fechada. Isto elimina a possibilidade de caos em sistemas com dimensão $n < 3$.

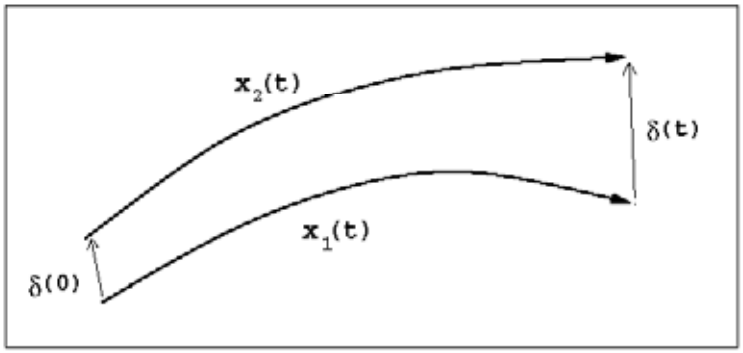

Figura 1.5: Evolução de duas trajetórias vizinhas.

muito próximas uma da outra logo divergirão. Em sistemas experimentais isso torna a previsão do futuro do sistema impossível pois em qualquer medida da condição inicial de um sistema experimental existe um erro $|\delta(0)|$ que irá divergir exponencialmente com o tempo.

Capítulo 2

Mapas Unidimensionais

2.1 Caos em Mapas Unidimensionais

Sistemas dinâmicos em que o tempo é uma variável discreta são comumente chamados de *equações de diferenças* ou *mapas*. A variável x_{t+1} no tempo $t+1$ depende do seu valor no instante anterior, t. Essa relação pode ser escrita na forma geral:

$$x_{t+1} = F(x_t). \tag{2.1}$$

A seqüência $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ gerada por seguidas iterações de F é chamada de órbita com condição inicial x_0. Algumas relações do tipo da equação (2.1) podem apresentar rica dinâmica, com pontos fixos, cascatas de dobramento de período e seqüências aperiódicas (ou caóticas), como veremos nos exemplos que seguem.

Estes mapas são bastante importantes, uma vez que podem modelar sistemas de dimensões maiores que um, desde que estes sejam altamente dissipativos. Veremos exemplos de sistemas contínuos modelados por mapas unidimensionais nas próximas seções.

2.2 Mapa Logístico

Extensivamente estudado, o mapa logístico é descrito pela equação de direfença:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \tag{2.2}$$

A dinâmica do mapa logístico pode ser estudada variando-se o parâmetro r e observando-se o comportamento das órbitas $\{x_0, x_1, x_2, ...\}$ que se originam de condições iniciais típicas. Com $0 < r < 4$ e $x_0 \in [0, 1]$ a seqüência de x_n gerada estará sempre no intervalo $[0, 1]$. Este é o intervalo de interesse pois se $x_n > 1$, as iterações subseqüentes divergirão para $-\infty$. O gráfico do mapa logístico apresenta um máximo em $x_n = 0,5$ e os chamados *pontos fixos*, calculados fazendo-se $x_{n+1} = x_n = x^*$, podem ser visualizados no gráfico. Eles são determinados pelo cruzamento do gráfico de $F(x_n)$ com a reta diagonal (fig. 2.1).

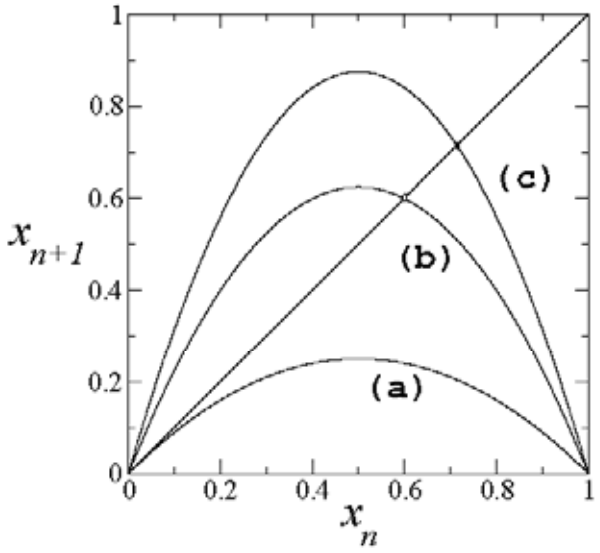

Figura 2.1: Mapa logístico. (a) $r = 1,0$, (b) $r = 2,5$, (c) $r = 3,5$. Os pontos fixos em (b) e (c) são estável e instável, respectivamente.

Para determinar se x^* é ponto fixo estável ou instável, consideramos uma perturbação $x_n = x^* + \eta_n$ e verificamos se as iteradas subseqüentes tendem para x^* ou se afastam dele. Substituindo em $F(x_n)$ e expandindo em uma série de Taylor, temos:

$$x^* + \eta_{n+1} = x_{n+1} = F(x^* + \eta_n) = F(x^*) + F'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2) \tag{2.3}$$

que se reduz a $\eta_{n+1} = F'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2)$, uma equação linear para a perturbação η_n, se os termos $O(\eta_n^2)$ forem desconsiderados. A partir desta equação, vemos que $\eta_n = [F'(x^*)]^n \eta_0$. A estabilidade do ponto fixo x^* é então determinada por $F'(x^*)$. Se $|F'(x^*)| < 1$, $\eta_n \to 0$ com $n \to \infty$ e o ponto fixo é *estável*. Se $|F'(x^*)| > 1$, o ponto fixo é *instável*. No caso de $|F'(x^*)| = 1$, devemos considerar os termos $O(\eta_n^2)$ para determinar a estabilidade. Vale notar que para $r < 1$ o único ponto fixo é $x^* = 0$ (ver fig. 2.1) e todas as órbitas são atraídas para este ponto, o que torna apenas o intervalo $1 < r < 4$ interessante para estudo de comportamentos não convencionais de $F(x_n)$.

Com $F'(x) = r(1-2x)$, o ponto fixo $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ (determinado fazendo-se $F(x^*) = x^*$) é estável se $1 < r < 3$. Quando $r > 3$ este ponto fixo perde a estabilidade. Sendo também $x^* = 0$ ponto fixo instável, o que acontece com as órbitas geradas por $F(x_n)$ com $r = 3,3$, por exemplo? Iterando o mapa $F(x_n)$ com $x_0 = 0,05$ obtemos uma série que, após um transiente, oscila entre dois valores e e f tais que $F(e) = f$ e $F(f) = e$ (fig. 2.2).

Para explicar este *ciclo de período 2* ou o *dobramento de período* ocorrido na órbita, examinemos o mapa $F^2(x_n) = x_{n+2}$, que é simplesmente o mapa logístico aplicado duas vezes $F^2(x_n) = F(F(x_n))$. Seus pontos fixos podem ser visualizados no gráfico da figura (2.3).

Vemos então que o mapa de $F^2(x_n)$ tem dois pontos fixos, com estabilidade determinada por $[F^2(x_n)]' = F'(e)F'(f)$ [4]. Estes são estáveis quando o ciclo de período 2 nasce com $[F^2(e)]' = [F^2(f)]' = 1$ [4]. Esta órbita,

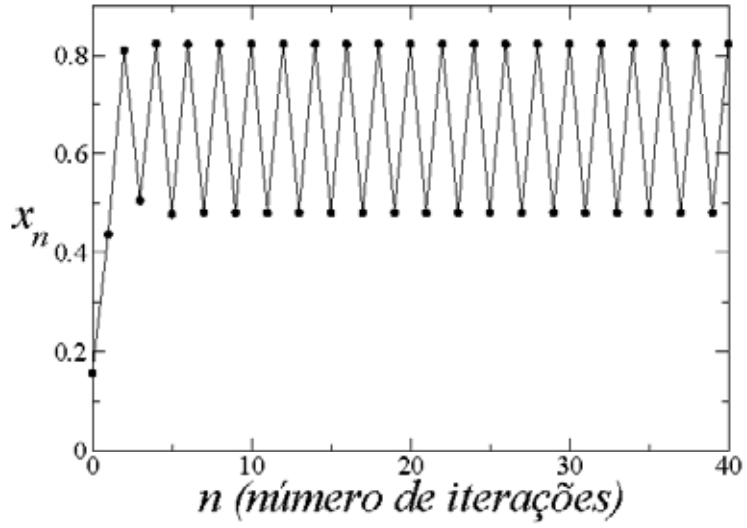

Figura 2.2: Iterações do mapa logístico (eq. 2.2) com o parâmetro de controle $r = 3,3$. As iterações do mapa representadas por pontos da figura foram interligadas por linhas para melhor visualização.

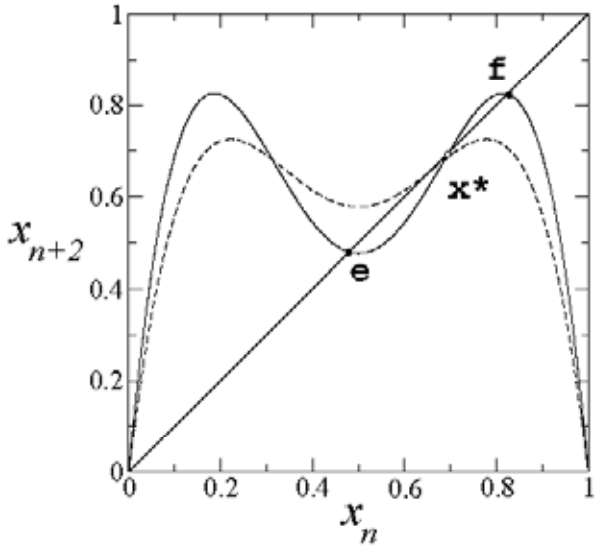

Figura 2.3: Mapa $F^2(x_n)$ com $r = 2,9$, antes do dobramento de período (linha pontilhada) e com $r = 3,3$, depois do dobramento (linha cheia). O ponto fixo x^* é também ponto fixo de $F(x_n)$ (instável). Os outros dois são pontos fixos apenas de $F^2(x_n)$ (estáveis).

no entanto, perde a estabilidade quando $r > 3,449...$ [2]. Neste mesmo ponto, uma órbita estável de período 4 aparece, podendo ser deduzida a partir do mapa $F^4(x_n) = F^2(F^2(x_n))$. A partir daí as órbitas passam por seguidos dobramentos, gerando ciclos de período $8, 16, \ldots, 2^k, \ldots$ conforme o parâmetro r é mudado. Esta mudança qualitativa na dinâmica do sistema, com criação (ou destruição) de pontos fixos e mudança de estabilidade é chamada de *bifurcação*. No caso discutido, houve bifurcação por *dobramento de período*. Esta seqüência de dobramentos é também chamada de *cascata de dobramento*.

Porém, o intervalo do parâmetro r em que um ciclo 2^k é estável diminui geometricamente com k, de forma que a distância entre sucessivas bifurcações atinge um valor limite dado por [2, 4]:

$$\delta = \lim_{k\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,669... \tag{2.4}$$

Quando $k \to \infty$, r atinge um valor limite, $r_\infty = 3,568759...$ [2], onde o ciclo de período 2^k com $k \to \infty$ aparece. Esta constante foi derivada por Feigenbaum [5] e é característica de qualquer mapa *unimodal*, que são mapas com a mesma forma do mapa logístico: curvas contínuas com derivadas contínuas que apresentam um único máximo. Dobramentos de períodos também são medidos experimentalmente em sistemas físicos, em especial citamos o oscilador não-linear forçado [6, 7], sendo o valor de δ encontrado nos experimentos bastante similar ao valor previsto teoricamente. Adiante veremos a importância do uso de modelos simples como os mapas unimodais para o estudo de sistemas caóticos.

Para um valor do parâmetro $r > r_\infty$ a órbita $\{x_n\}$ não converge para um ponto fixo nem para ciclos estáveis, mas tem um comportamento aperiódico, nunca se repetindo. Temos então uma seqüência *caótica*. Para visualizar o comportamento do mapa logístico em todo o intervalo $0 < r < 4$, construímos o *diagrama de bifurcação*, onde para cada valor de r são plotados os valores de

x_n (fig. 2.4).

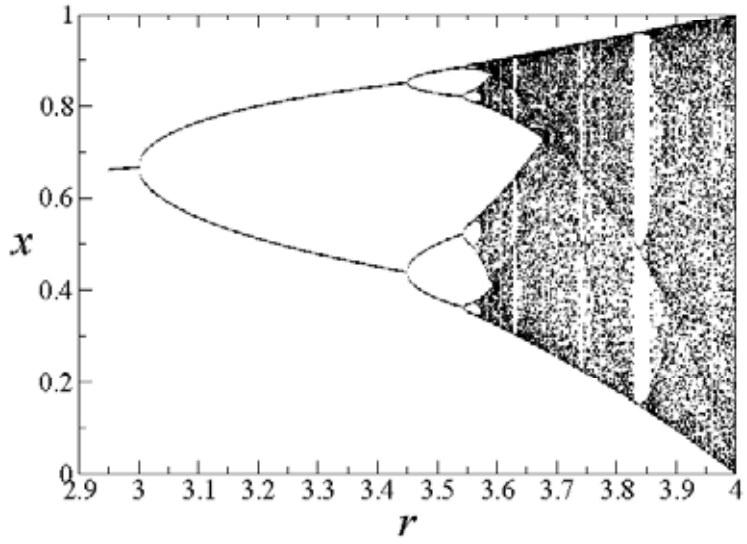

Figura 2.4: Diagrama de bifurcação do mapa logístico

Além da cascata de dobramento, vemos que existem *janelas* para $r > r_\infty$, onde o mapa gera seqüências periódicas. A maior delas ocorre com $r_c = 3,82841\ldots$. Quando r ultrapassa este valor crítico, surge um ciclo de período 3 estável. O aparecimento desta janela pode ser explicado com o mapa de $F^3(x_n)$ (fig. 2.5). As interseções do gráfico com a linha diagonal são soluções de $F^3(x^*) = x^*$. Existem 8 soluções, porém duas delas são os pontos fixos do mapa $F(x_n)$. As outras seis estão marcadas no gráfico (ver fig. 2.5). Os pontos marcados com círculos brancos são pontos fixos instáveis de $F^3(x_n)$; os marcados com círculos pretos são estáveis e formam o ciclo de período 3 estável. (Como nos exemplos anteriores, e para todos os mapas unidimensionais $f(x)$, a estabilidade dos pontos fixos x^* é determinada por $f'(x^*)$.)

Se plotarmos o gráfico de $F^3(x_n)$ para $r < r_c$, vemos que os seis pontos fixos da figura (2.5) desaparecem (ver fig. 2.6). No exato valor de r_c o gráfico é *tangente* à diagonal e é neste instante que a janela de período 3 é criada.

Temos aqui um exemplo de *bifurcação tangente*.

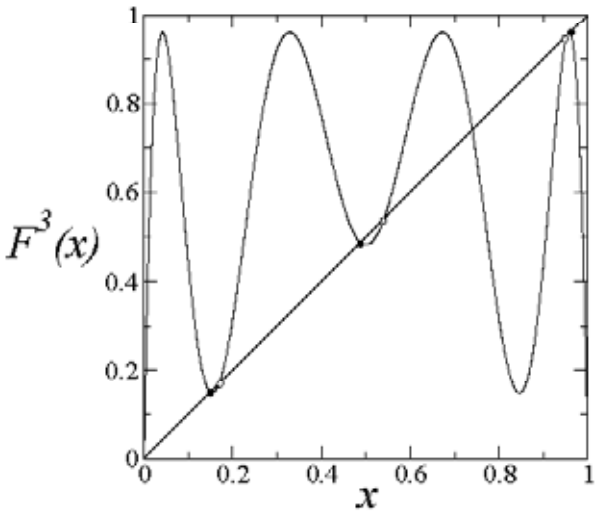

Figura 2.5: Gráfico de $F^3(x_n)$ para $r = 3,84$, na janela de período 3.

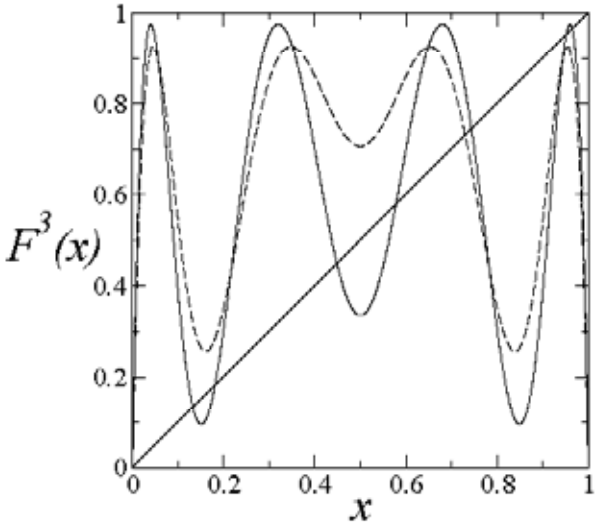

Figura 2.6: Gráfico de $F^3(x_n)$ antes e depois da bifurcação tangente que dá origem à janela de período 3.

Observando uma órbita no regime caótico, com valor de $r \lesssim r_c$, vemos uma seqüência com períodos de oscilação semelhantes ao ciclo de período 3, interrompidos por um comportamento caótico (fig. 2.7). A órbita apresenta um

comportamento *intermitente*. Trataremos com mais detalhes a intermitência em mapas nos próximos capítulos.

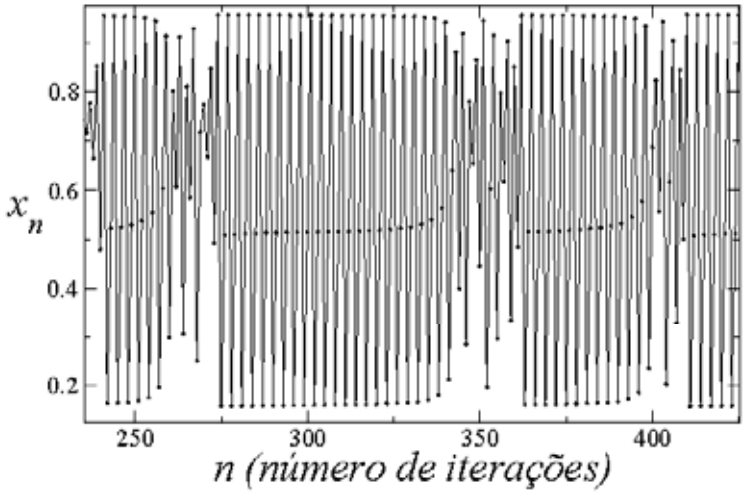

Figura 2.7: Iterações do mapa logístico com $r = 3,826427$, antes da janela de período 3 ($r_c = 3,82841\ldots$), apresentando comportamento intermitente. Os pontos que representam as iterações do mapa foram interligados por linhas para melhor visualização.

2.3 Estudo de Sistemas Contínuos com Mapas Unidimensionais

O estudo de um fluxo tridimensional, em certos casos, pode ser modelado por um mapa unidimensional. Sistemas físicos com várias dimensões que apresentam dobramento de período como rota para o caos podem ter toda sua complexidade capturada por uma mapa unidimensional. Se o sistema for suficientemente dissipativo, mapas unidimensionais podem ser construídos a partir de alguma grandeza extraída de séries temporais destes sistemas, como explicaremos a seguir. Mostraremos nesta seção como esta análise pode ser feita em sistemas matemáticos caóticos. No capítulo 5 esta técnica será usada para analisar um sistema físico caótico: o oscilador não-linear forçado.

2.3.1 Equações de Lorenz

Para ilustrar como o estudo de sistemas dinâmicos contínuos pode ser simplificado com mapas unidimensionais, vejamos o sistema de Lorenz [8]:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz. \end{cases} \tag{2.5}$$

Este é um modelo bastante simplificado que descreve turbulência convectiva em fluidos, usado para estudar o comportamento do clima. Em 1963 Lorenz descobriu que para certos valores dos parâmetros as soluções oscilam irregularmente, nunca se repetindo, mas sempre numa região limitada do espaço de fase. Descobriu ainda que condições iniciais pouco diferentes geram trajetórias que se afastam exponencialmente.

O sistema de Lorenz possui as propriedades importantes necessárias para que um sistema apresente caos: apresenta não-linearidades nos termos xz e xy e é não-conservativo (dissipativo), ou seja, há contração de volume no espaço de fase. No sistema de Lorenz, $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = -(\sigma + 1 + b)$ (calculado usando a equação (1.13)), então $dV/dt = -(\sigma + 1 + b)V$ com solução $V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$, o que mostra que V decresce exponencialmente com o tempo.

As equações de Lorenz possuem três pontos fixos: a origem, que é ponto fixo para todos os valores dos parâmetros, e dois outros pontos fixos, C^+ e C^-, que existem quando $r > 1$ e são estáveis no intervalo $1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1)}$ (ref. [2], capítulo 9). Para valores de $r > r_H$ os pontos fixos C^+ e C^- são instáveis e não existem outros atratores (como ciclos estáveis) nas proximidades. Porém as trajetórias não podem ser repelidas para o infinito; mostramos que no sistema de Lorenz sempre há contração de volume. As trajetórias devem então manter-se em uma região limitada do espaço de fase, porém sem nunca se interceptar.

Para verificar qual seria o comportamento das trajetórias, Lorenz integrou as equações com os seguintes valores de parâmetros: $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ e $r = 28$. Integrando a partir da condição inicial $(x, y, z) = (0, 1, 0)$, obteve uma solução que, após um transiente, oscila irregularmente, de forma aperiódica (fig. 2.8).

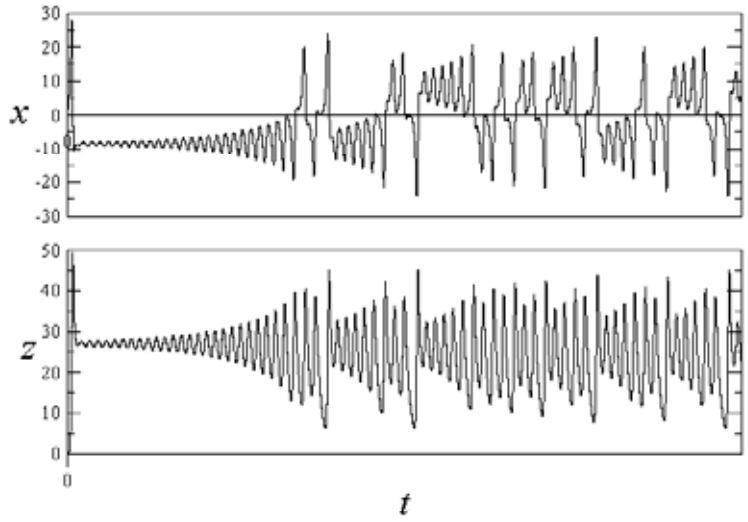

Figura 2.8: Solução das equações de Lorenz para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$, com condição inicial $(x, y, z) = (0, 1, 0)$, integradas com algoritmo de Runge-Kutta de quarta ordem.

Se plotarmos as trajetórias $x(t)$ *versus* $z(t)$, observamos um padrão interessante, em forma de borboleta (fig. 2.9). Este é o *atrator de Lorenz*, região do espaço de fase por onde viaja a trajetória caótica. Esta trajetória parte do ponto $(0, 1, 0)$ e repetidamente espirala de um lado e do outro do atrator, sem que se possa prever o número de voltas dadas em cada uma das espirais.

2.3.2 Mapa de Lorenz

Lorenz percebeu que o número de voltas dadas em cada lado do atrator estranho parecia depender do quanto a trajetória se afastava do centro da espiral.

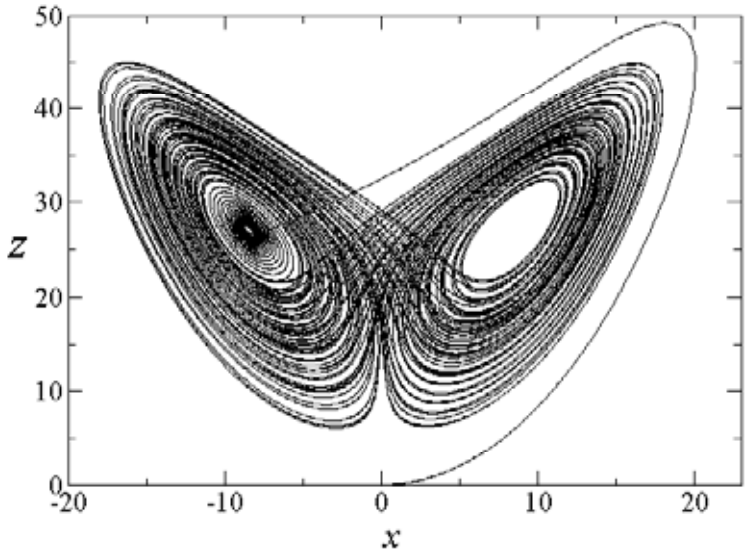

Figura 2.9: Atrator de Lorenz. Projeção no plano xz da solução das equações de Lorenz com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$ e condição inicial $(x, y, z) = (0, 1, 0)$.

Além disso, isso determinaria também quantas voltas seriam dadas na outra espiral. Isso quer dizer que uma característica de uma volta poderia prever esta mesma característica da volta seguinte (ref. [2], capítulo 9). (Ver fig.2.10.)

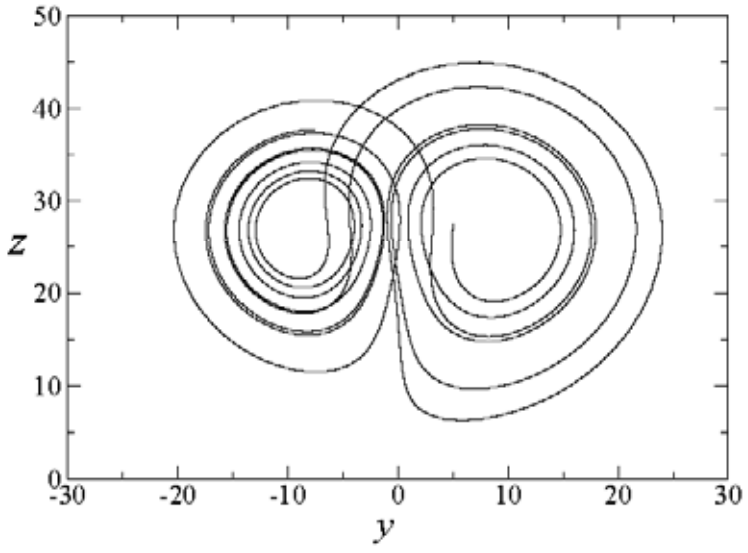

Figura 2.10: Projeção do atrator de Lorenz no plano yz.

A característica escolhida para analisar o movimento da trajetória no atrator estranho foi z_n, o máximo local de $z(t)$ (fig. 2.11). O valor de z_n deveria prever o valor do próximo máximo, z_{n+1}. Para plotar este gráfico, basta integrar uma série temporal caótica bastante longa, extrair os máximos e construir um gráfico de z_n *versus* z_{n+1}, o *mapa de Lorenz* (fig. 2.12).

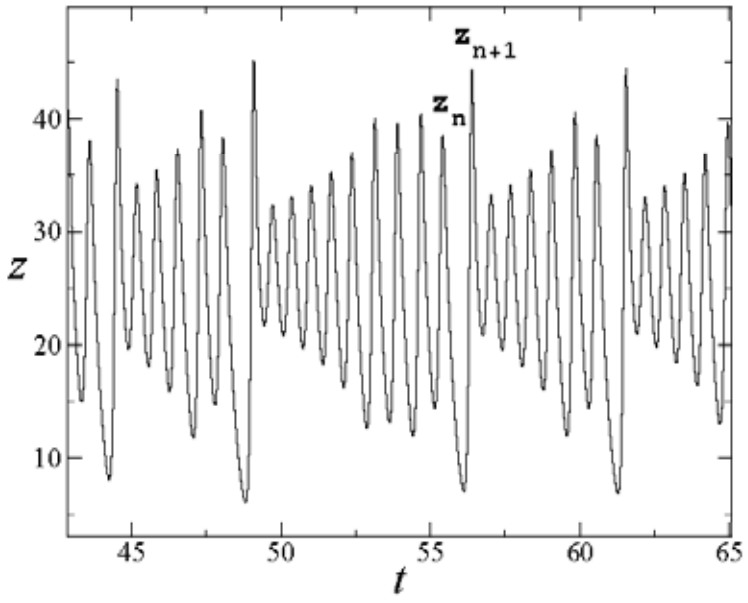

Figura 2.11: Solução para $z(t)$, mostrando os máximos locais.

Apesar de não ser rigorosamente uma função, a curva é aproximadamente um mapa unidimensional e o valor de z_n pode ser usado para calcular $f(z_n) = z_{n+1}$, como fizemos com o mapa logístico. O mapa de Lorenz tem apenas um ponto fixo que representa uma órbita fechada. A estabilidade desta órbita é determinada por $|f'(z)|$, como vimos nas seções anteriores. Observando o gráfico (fig. 2.12) vemos que $|f'(z)| > 1$, o que implica que se existe algum ciclo limite, este será *instável*. A construção de mapas a partir de séries temporais é bastante utilizada para estudar sistemas físicos; usaremos deste artifício para analisar séries temporais de um circuito eletrônico caótico.

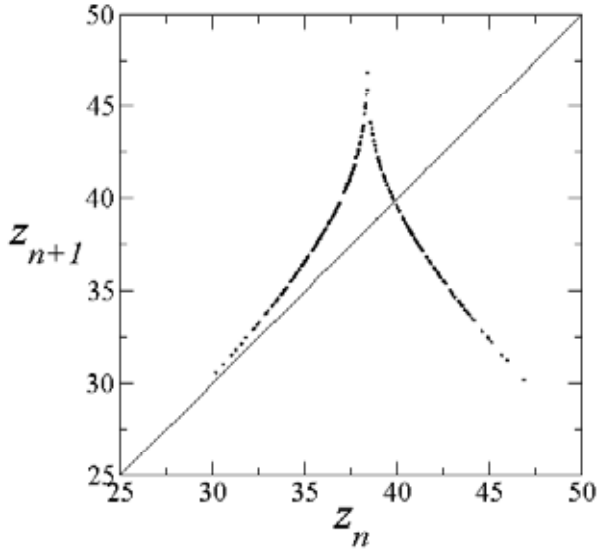

Figura 2.12: Mapa de Lorenz, obtido a partir dos máximos locais de uma série para $z(t)$, com $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$.

2.3.3 Equações de Rössler

Outro exemplo bastante simples de um fluxo tridimensional que pode ser reduzido a um mapa unidimensional é o *sistema de Rössler*:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c), \end{cases} \tag{2.6}$$

onde a, b e c são parâmetros. Fixando $a = b = 0,2$ e variando o parâmetro c, o sistema passa por bifurcações de dobramento de período de ciclos limites (fig. 2.13(a), (b) e (c)), gerando uma cascata de dobramentos como no mapa logístico. Neste sistema, porém, há bifurcação de ciclos, que ocorre apenas em sistemas com três dimensões ou mais. Após a cascata de dobramento obtém-se o atrator estranho da figura (2.13(d)).

Usando o método de Lorenz para obter uma mapa a partir de uma série temporal do sistema, tomamos os valores máximos de $x(t)$ para um valor

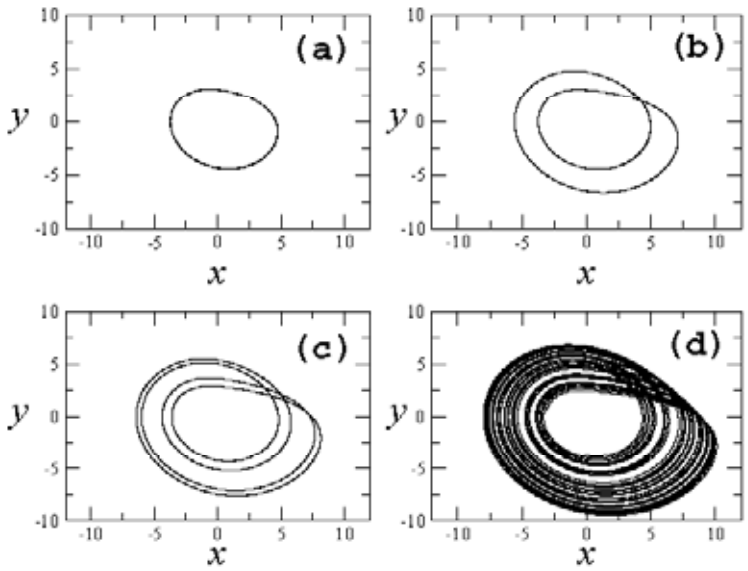

Figura 2.13: Bifurcações no sistema de Rössler; $a = b = 0,2$. O parâmetro c tem valores (a) 2,5, (b) 3,5, (c) 4 e (d) 5.

de c no regime caótico e plotamos $x_{máx[n+1]}$ *versus* $x_{máx[n]}$. O mapa obtido (fig. 2.14) é bastante semelhante ao mapa logístico (fig. 2.1). Como no mapa de Lorenz, a curva não é exatamente uma função, mas se aproxima me um mapa unidimensional. O diagrama de bifurcação do sistema de Rössler pode ser construído variando o parâmetro c e plotando os valores dos máximos de $x(t)$ para cada c (fig. 2.15).

Observamos no diagrama de bifurcação correspondente um padrão semelhante ao diagrama do mapa logístico (ver fig. 2.4) com a cascata de dobramento e janelas periódicas. Isto era esperado pois o mapa de Lorenz para o sistema de Rössler tem a forma de um mapa unimodal.

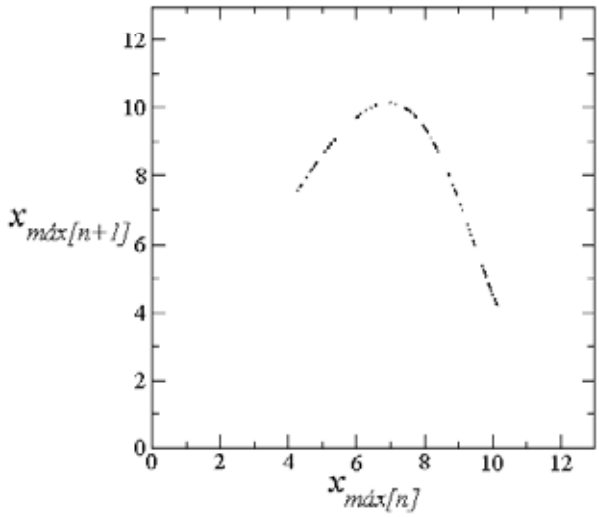

Figura 2.14: Mapa de Lorenz para o sistema de Rössler, obtido a partir de uma série temporal de $x(t)$ com $c = 5$.

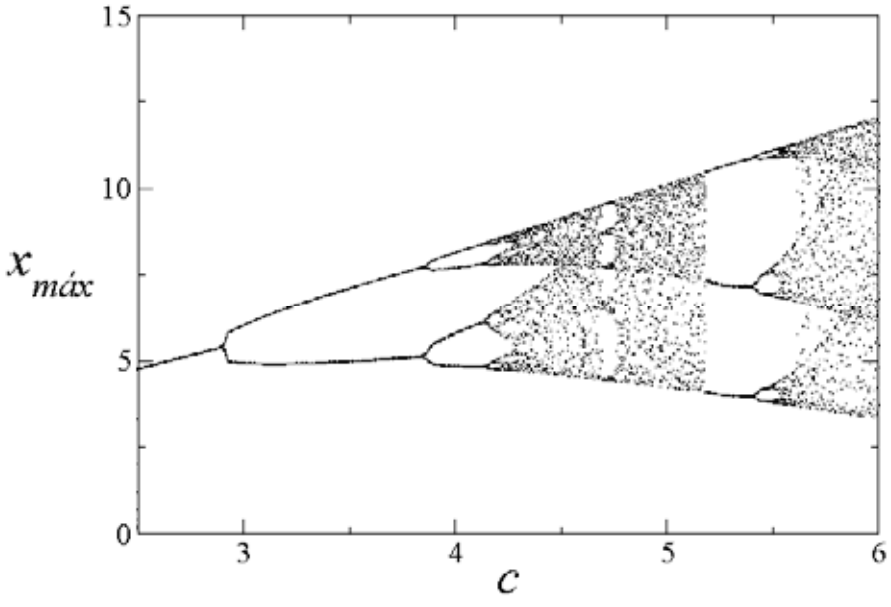

Figura 2.15: Diagrama de bifurcação do sistema de Rössler.

Capítulo 3

Caos Intermitente

A mudança de um parâmetro pode alterar qualitativamente as propriedades dinâmicas das órbitas de um sistema. Vimos no capítulo anterior como a variação do parâmetro r gera a cascata de dobramento do mapa logístico, $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$; após infinitos dobramentos a órbita se torna caótica. Esta é uma das possíveis *rotas para o caos*, ou maneiras através das quais o sistema passa de um estado estável para um comportamento caótico. Apresentaremos neste capítulo a *transição intermitente*, originalmente classificada por Pomeau e Manneville [9] e principal objeto de estudo nesta dissertação. Nesta transição, para valores do parâmetro r maiores que r_c, onde r_c é o valor crítico do parâmetro onde ocorre a bifurcação, a órbita é periódica. Para $r \lesssim r_c$ há longas fases de um comportamento aparentemente periódico semelhante à órbita extinta, intermitentemente interrompido por fases caóticas (ver fig. 2.7).

A transição intermitente para o caos está presente em mapas unimodais, como no mapa logístico, e também em sistemas mais complexos, como o sistema de Lorenz [9]. Sistemas físicos também apresentam caos intermitente, como o oscilador não-linear forçado [10, 11], reações químicas e convecção de fluidos [12].

Segundo Pomeau e Manneville, as intermitências podem ser classifi-

cadas como tipo-I, II e III [9][1], dependendo de como o atrator periódico perde a estabilidade. O módulo de um dos multiplicadores de Floquet, que determinam a estabilidade de uma órbita fechada (ver seção 1.3), passa a ser maior que um, isto podendo ocorrer de três formas: um multiplicador real cruzando o círculo unitário em +1 (tipo-I) ou em -1 (tipo-III); na intermitência do tipo-II, dois multiplicadores complexos conjugados cruzam o círculo unitário simultaneamente (fig. 3.1). Nesta dissertação exporemos a intermitência do tipo-I, encontrada no circuito eletrônico não-linear estudado teórica e experimentalmente.

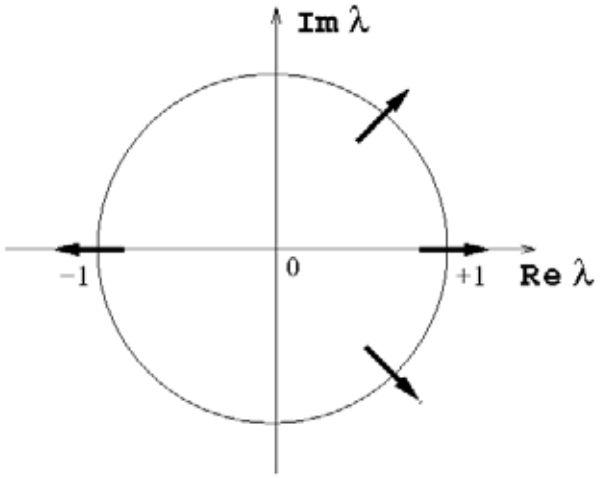

Figura 3.1: Os multiplicadores de Floquet, λ_j, podem atravessar o círculo unitário de três formas e cada uma delas origina um tipo de intermitência. Em (+1) intermitência tipo-I, em (-1) intermitência tipo-III e se o multiplicador for complexo, intermitência tipo-II.

3.1 Intermitência tipo-I

Para ilustrar com mais detalhes a intermitência do tipo-I, voltemos ao exemplo da janela de período 3 do mapa logístico (seção 2.2). Vimos que o aparecimento

[1] Outros tipos de intermitência foram classificados após Pomeau e Manneville, a saber tipo-X [13, 14], V [15, 16] e *on-off* [17].

desta janela é explicado com a bifurcação tangente da terceira aplicação do mapa logístico, $F^3(x)$: com a mudança do parâmetro r, o gráfico de $F^3(x)$ se torna tangente à linha diagonal e quando $r > r_c = 3,82841\ldots$ são criados seis pontos fixos, dos quais três são estáveis e dão origem à órbita de período 3 (ver fig. 2.6).

Para $r \lesssim r_c$ a órbita tem um corportamento intermitente: parece visitar um ciclo de período 3, interrompido por seqüências caóticas (ver fig. 2.7). Isto é explicado observando-se uma órbita típica representada no mapa $F^3(x)$ para um valor de r próximo à tangência (fig. 3.2). As iteradas sucessivas se acumulam no *canal* formado entre o mapa e a linha diagonal, gerando o que chamamos de *fase laminar* (fig. 3.3), em que a órbita parece ser periódica. De fato, estas iteradas são muito próximas dos extintos pontos fixos, o que faz a fase laminar parecer estar visitando a órbita periódica. Após sair do canal, a órbita move-se caoticamente pelo mapa até ser reinjetada em um dos três canais e dar origem a uma nova fase laminar.

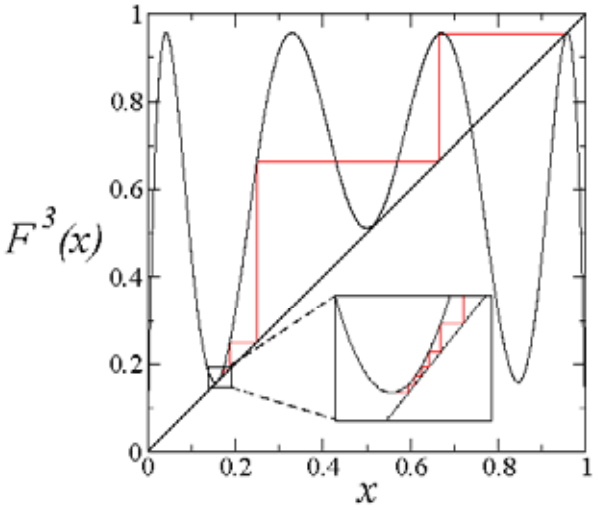

Figura 3.2: Gráfico da terceira aplicação do mapa logístico, com parâmetro de controle $r = 3.82643$, mostrando uma órbita que atravessa o canal formado pelo mapa e pela reta diagonal. O número de iterações que a órbita passa dentro do canal determina o comprimento da fase laminar, l, que aumenta quando $r \to r_c = 3,82841\ldots$.

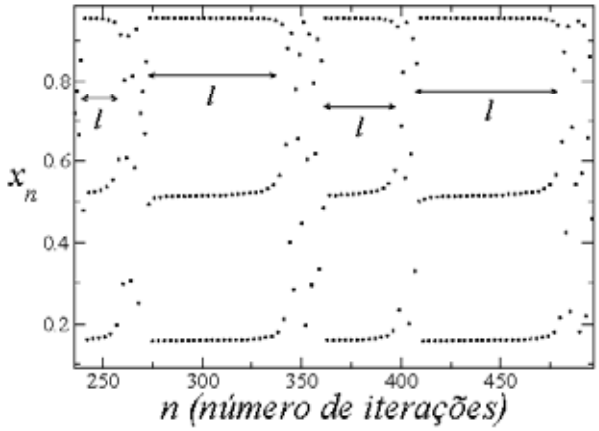

Figura 3.3: Fases laminares no mapa logístico com $r = 3,8282$, próximo à bifurcação tangente que dá origem a janela de período 3; l é o comprimento das fases laminares.

A equação de um mapa tangente pode ser expandida em torno do ponto de contato (ponto de tangência), gerando a seguinte relação [18]:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon + x_n^z, \; z \text{ par}, \tag{3.1}$$

chamada também de *forma normal*. Esta equação é válida em um intervalo $-c < x < c$, fora dele o sistema realiza seqüências de iteradas caóticas e é reinjetado no intervalo por algum processo (ver fig. 3.5). O parâmetro de controle ε determina agora o comportamento das órbitas. Para $\varepsilon < 0$ existem dois pontos fixos e o movimento é periódico; em $\varepsilon = 0$ a curva é tangente e para $\varepsilon > 0$ temos caos intermitente (fig. 3.4).

Esta equação de diferença (eq. 3.1) pode ser aproximada pela equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = x^z + \varepsilon, \tag{3.2}$$

quando ε e c forem suficientemente pequenos. Neste caso a variação de x é pequena a cada iteração e o tempo t pode ser tomado como uma variável contínua. A partir desta equação podemos calcular l, o comprimento da fase

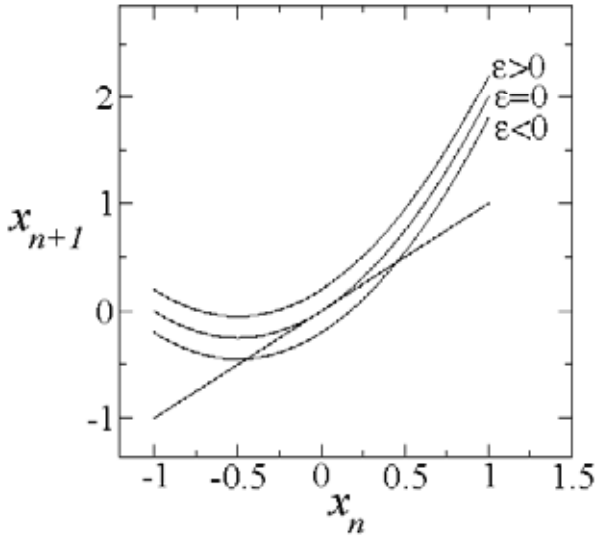

Figura 3.4: Gráfico do mapa normal com intermitência do tipo-I, $x_{n+1} = x_n + \varepsilon + x_n^2$. Para $\varepsilon < 0$ existem dois pontos fixos, um instável e outro estável e as órbitas do mapa são periódicas. Em $\varepsilon = 0$ a curva é tangente à linha diagonal; os pontos fixos desaparecem quando $\varepsilon > 0$.

laminar, isto é, o número de iterações para que a variável x saia do canal. O valor de l depende de c, a fronteira do canal, e de x_{in}, o valor inicial de x dentro do canal (fig. 3.5). Integrando a equação (3.2) para $z = 2$:

$$l(x_{in}) = \int_{x_{in}}^{c} dt = \int_{x_{in}}^{c} \frac{dx}{x^2 + \varepsilon}, \tag{3.3}$$

obtemos:

$$l(x_{in}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \arctan\left(\frac{x_{in}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right]. \tag{3.4}$$

3.1.1 Média das fases laminares

Podemos calcular o valor médio de l, $\langle l \rangle$, que depende da distribuição de probabilidade de x_{in}, $P(x_{in})$, também chamada de *distribuição de probabilidade*

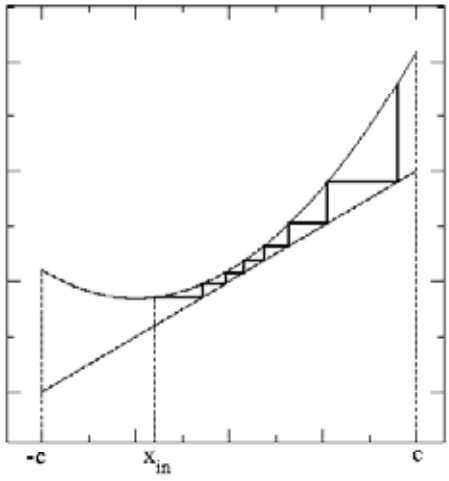

Figura 3.5: Iteradas no canal formado pelo mapa e pela reta identidade. x_{in} é o valor da primeira iterada dentro do canal, que tem largura c.

de reinjeção. A expressão para $\langle l \rangle$ é:

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^{c} P(x_{in}) l(x_{in})\, dx_{in}. \tag{3.5}$$

Se houver igual probabilidade para qualquer valor de $-c < x_{in} < c$, teremos [18]:

$$\langle l \rangle = \int_{-c}^{c} \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[\arctan\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - \arctan\left(\frac{x_{in}}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right] dx_{in}, \tag{3.6}$$

resultando em:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan\left(\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \tag{3.7}$$

onde usamos $P(x_{in}) = 1/2c$, de forma que $P(x_{in})$ é normalizada:

$$\int_{-c}^{c} P(x_{in})\, dx_{in} = 1. \tag{3.8}$$

No limite $\sqrt{\varepsilon} \ll c$, a equação (3.7) fica:

$$\langle l \rangle = \frac{\pi}{2} \varepsilon^{-1/2}. \tag{3.9}$$

No caso de z qualquer, mostra-se que a lei de escala para $\langle l \rangle$ no limite de ε pequeno é [18]:

$$\langle l \rangle \propto \varepsilon^{-(z-1)/z}. \tag{3.10}$$

O *expoente crítico* $\nu = (z-1)/z$ encontrado no cálculo de $\langle l \rangle$ caracteriza então a intermitência tipo-I. Este expoente foi encontrado em sistemas físicos não-lineares; Jeffries *et al.* [10] (1982) observaram a transição intermitente para o caos em um oscilador não-linear forçado. Este oscilador é composto por um indutor, um resistor e um diodo ligados em série e excitados por uma tensão externa $V(t) = V_0 \text{sen}(\omega t)$. Usando V_0 como parâmetro, Jeffries *et al.* [10] encontraram uma janela de período 5 e o expoente crítico $\nu = -0,43$ para $\langle l \rangle$.

Kim *et al.* [19] (1994) mostraram que o expoente crítico para $\langle l \rangle$ depende também de $P(x_{in})$, a distribuição de probabilidade de reinjeção. Em muitos sistemas a probabilidade de reinjeção não é uniforme, como foi assumido para calcular o expoente crítico acima. Dependendo da forma de $P(x_{in})$ podemos ter relações como $-\ln \varepsilon$ ou $\varepsilon^{-\nu}$, com $0 \leqslant \nu \leqslant 1/2$. Em um outro artigo [20], Kim *et al.* (1997) verificam experimentalmente estes expoentes.

3.1.2 Média da variável dinâmica

Além da média das fases laminares, a média de uma das variáveis dinâmicas também pode ser utilizada para caracterizar uma bifurcação. Este valor médio muda com o valor do parâmetro de controle quando o sistema se aproxima de uma bifurcação. Em sistemas físicos, sinais caóticos ultra-rápidos podem ter seus valores médios capturados por detectores lentos, podendo-se assim prever a chegada de uma bifurcação em sistemas experimentais apenas observando o valor médio de um pulso caótico. Tais observações já foram realizadas em lasers caóticos [22], em modelos para estes lasers [23] bem como

para as bifurcações tangentes do mapa logístico [24].

No mapa logístico, a média da variável x_n é dada por:

$$\langle x \rangle = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n; \tag{3.11}$$

de S. Cavalcante *et al* [24] (2000) fazem um estudo detalhado da variação de $\langle x \rangle$ com o parâmetro de controle r no mapa logístico. Como ilustrado na fig. 3.6, a média da variável x_n muda significativamente nas bifurcações tangentes do mapa.

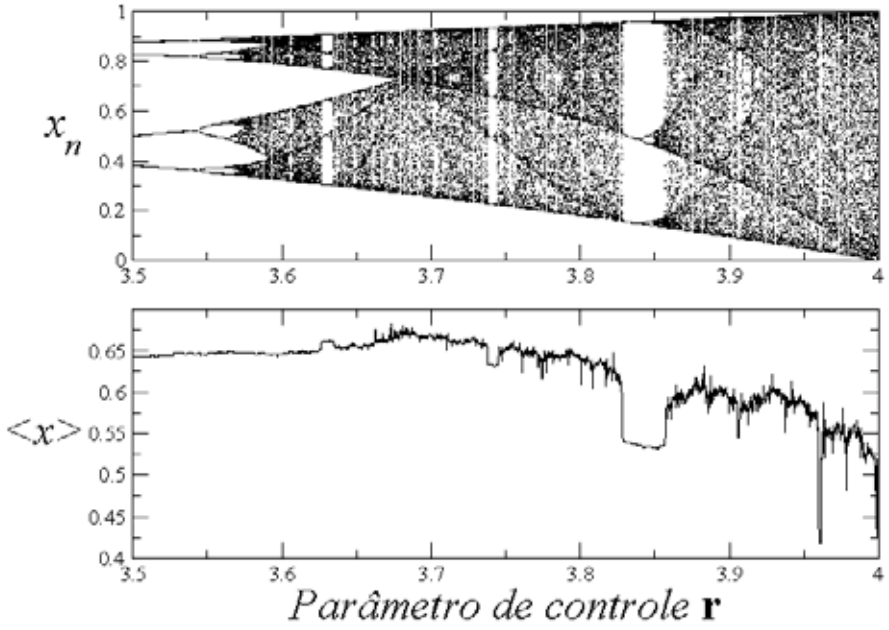

Figura 3.6: Diagrama de bifurcação do mapa logístico. (a) diagrama das iteradas x_n do mapa; (b) diagrama da média da varíavel x_n, $\langle x \rangle$, calculada com 10^7 iteradas do mapa e 2000 passos no valor do parâmetro de controle r.

Podemos encontrar expoentes críticos para $\langle x \rangle$ próximo às bifurcações ajustando as médias calculadas numericamente à equação [24]:

$$\langle x \rangle(r) = \langle x_i \rangle + A_i\{1 - \exp[-\xi_i(r_i^c - r)^{\beta_i}]\}, \tag{3.12}$$

onde $\langle x_i \rangle$ é o valor médio de x_n após a bifurcação e r_i^c o valor crítico do parâmetro r na bifurcação da janela de período i; estes valores são retirados dos dados numéricos. As outras constantes, A_i, ξ_i e β_i, são escolhidas para melhor ajuste à curva calculada numericamente. Reproduzimos neste trabalho cálculos semelhantes aos feitos na referência [24] para os expoentes críticos das bifurcações tangentes de período 3, 5 e 7 do mapa logístico. Os expoentes críticos β encontrados nos três casos foram de aproximadamente $0,5$, como mostrado na figura (3.7). Os valores das constantes A_i, ξ_i e β_i usados estão na tabela (3.1).

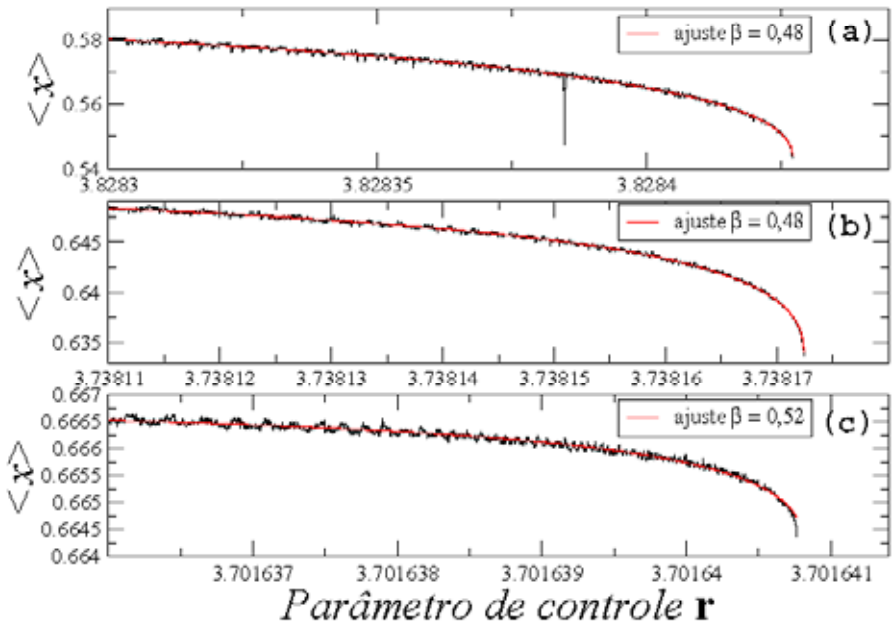

Figura 3.7: Diagrama de bifurcação da média da variável x_n do mapa logístico com ajuste da equação (3.12). (a) janela de período 3, (b) janela de período 5 e (c) janela de período 7. Em todos os casos o expoente crítico é $\beta \simeq 0,5$.

	janela 3	janela 5	janela 7
A_i	0,0617	0,01783	0,00249
ξ_i	65,3539	164,033	1232,4
β_i	0,477	0,479	0,523

Tabela 3.1: Constantes usadas no ajuste da equação 3.12 para as médias de x_n nas janelas de período 3, 5 e 7 do mapa logístico.

Além do comportamento crítico da média das iteradas do mapa logístico, observamos que esta média oscila com uma freqüência que diminui quando a bifurcação se aproxima [25] (ver figura (3.8(a))). Esta oscilação foi encontrada em outros mapas que apresentam bifurcações tangentes [26] e também em sistemas contínuos com intermitência tipo-I [23, 26]. A origem destas oscilações é discutida por de S. Cavalcante *et al* na referência [27] e estas podem ser utilizadas, junto com o comportamento monótono da média, para prever comportamentos críticos de sistemas.

Para analisar o efeito do ruído externo na oscilação na média da variável, construímos o seguinte mapa:

$$x_{n+1} = r x_n(1 - x_n) + d\,\xi_n \tag{3.13}$$

que é o mapa logístico na presença de ruído, representado por ξ_n, uma variável aleatória com:

$$\begin{aligned} \langle \xi \rangle &= 0; \\ \langle \xi_n \xi_m \rangle &= \delta_{nm}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Realizamos cálculos numéricos com 2×10^8 iterações do mapa da equação (3.13). A média de x_n com $d = 0$, $d = 10^{-7}$ e $d = 10^{-6}$ foi calculada. Na figura (3.8) vemos que as oscilações são destruídas na presença do ruído externo. A observação destas oscilações em sistemas experimentais pode então ser dificultada, pois a presença de ruído é inevitável em sistemas físicos.

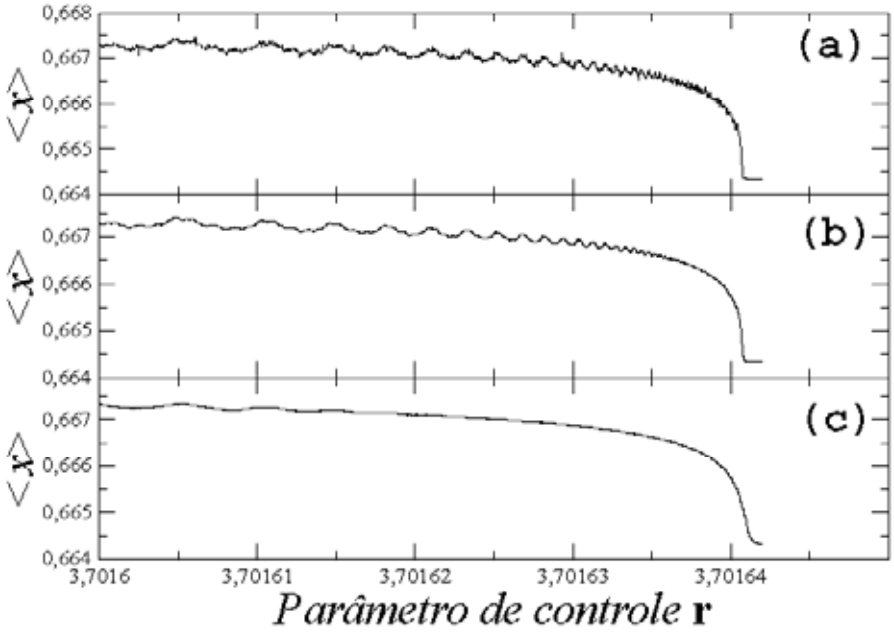

Figura 3.8: Diagrama de bifurcação da média da variável x_n do mapa logístico na janela de período 7: (a) média calculada sem ruído externo, (b) média calculada com amplitude do ruído externo $d = 10^{-7}$ e (c) $d = 10^{-6}$, mostrando como as oscilações são destruídas com o aumento do nível do ruído externo. Na referência [27], de Cavalcante *et al* fazem estudo semelhante para as oscilações de um mapa linear por partes com intermitência do tipo-I.

Capítulo 4

Oscilador Eletrônico Não-linear Forçado

4.1 O circuito RLD

O circuito composto por um resistor (R), um indutor (L) e um diodo (D) foi um dos primeiros sistemas usados para mostrar que sistemas físicos caóticos apresentando dobramento de período em sua dinâmica têm o comportamento universal demonstrado por Feigenbaum [5, 6]. Além da cascata de dobramento, este sistema apresenta janelas periódicas [7], caos intermitente tipo-I [10] e tipo-III [28] e crise [29]. Isto fez com que ele se tornasse um sistema bastante utilizado para demonstrar experimentalmente os expoentes críticos das estatísticas das intermitências tipo-I [20, 21] e tipo-III [11].

4.2 Modelo para o circuito RLD

No modelo matemático para o circuito RLD proposto por Van Buskirk e Jeffries [30], a característica do diodo responsável pela comportamento caótico do circuito é a dependência não-linear da capacitância da junção $p-n$ com a tensão aplicada.

A difusão de elétrons e buracos na junção $p-n$ gera um acúmulo de cargas não compensadas (a chamada zona de depleção ou transição), resultando em uma diferença de potencial Φ. A capacitância resultante desta carga acumulada é chamada de *capacitância de junção*, que depende da tensão aplicada V e pode ser calculada a partir da equação para a capacitância diferencial [31]:

$$C = \left| \frac{dQ}{dV} \right|, \tag{4.1}$$

resultando na seguinte expressão para a capacitância de difusão, C_j [30]:

$$C_j(V) = C_{j0} \left(1 - \frac{V}{\Phi} \right)^{-1/2}, \tag{4.2}$$

onde C_{j0} depende das dimensões da junção e da constante de difusão dos portadores minoritários. A capacitância de difusão, C_j, é dominante quando a junção está reversamente polarizada. Na polarização direta as injeções de buracos na região n e de elétrons na região p criam um acúmulo de carga maior do que aquele gerado pelo processo de difusão. A chamada *capacitância de acúmulo de carga* é dominante na polarização direta, com expressão dada por [30]:

$$C_d = C_{d0} e^{(V/\phi)}, \tag{4.3}$$

onde $\phi = kT/e$ e C_{d0} é uma constante que também depende das dimensões da junção e da constante de difusão dos portadores.

O diodo é então modelado por uma capacitância diferencial, $C(V) = C_j + C_d$, e por uma fonte de corrente [30]:

$$I_d = I_0 \left[e^{(V/\phi)} - 1 \right]. \tag{4.4}$$

As equações de movimento para o circuito RLD forçado por uma tensão externa V_e podem então ser escritas usando-se as leis de Kirchoff para o circuito

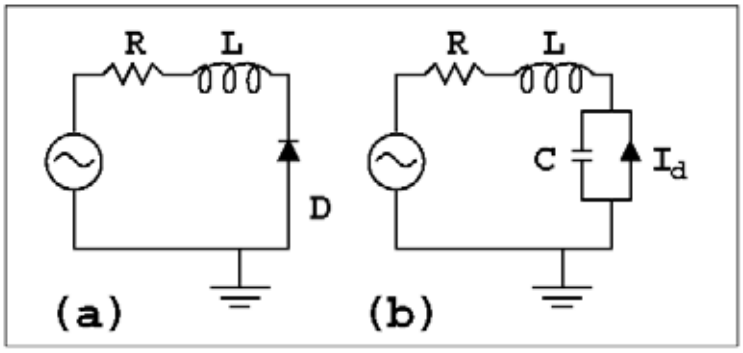

Figura 4.1: (a) Esquema do circuito RLD. (b) Esquema com modelo para o diodo. Todas as resistências do circuito estão representadas por R.

representado na figura (4.1(b)):

$$\begin{cases} \dot{I} = & \frac{V_a(\theta) - RI - V}{L}, \\ \dot{V} = & \frac{I - I_d(V)}{C(V)}, \\ \dot{\theta} = & \omega. \end{cases} \tag{4.5}$$

Integrando este sistema, obtemos séries temporais para a corrente I e a tensão V no diodo (fig. 4.2), esta última podendo ser comparada com os dados experimentais apresentados na figura (5.2). Optamos neste trabalho por analisar um modelo simplificado para o circuito RLD, também proposto por Van Buskirk e Jeffries [30]. O sistema (4.5) já foi estudado numericamente por de S. Cavalcante [26] (2003).

Podemos reescrever o sistema de equações (4.5), calculando a carga na junção:

$$\begin{aligned} q(V) &= \int_0^V C(V)\, dV \\ &= \phi C_{d0}[e^{\frac{V}{\phi}} - 1] + 2\Phi C_{j0}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{V}{\Phi}}\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

este sistema de equações pode ser então reescrito na forma de uma equação para um oscilador forçado com amortecimento [30]:

$$\ddot{q} + a(q)\dot{q} - f(q) = A_0 \mathrm{sen}(\omega t), \tag{4.7}$$

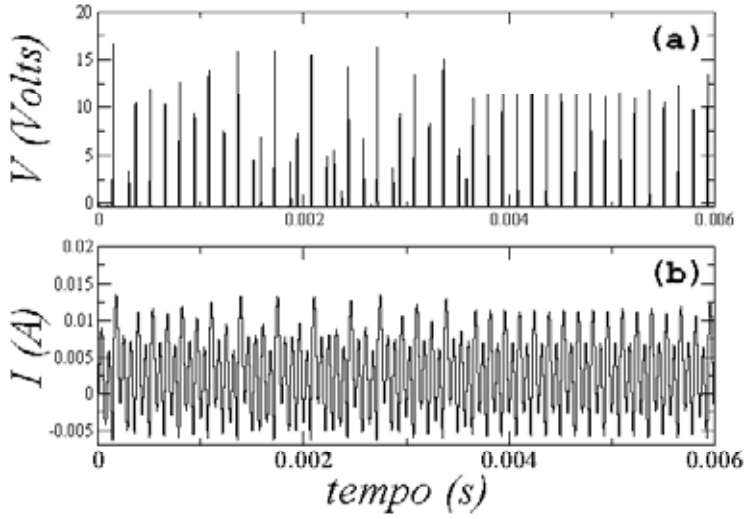

Figura 4.2: Séries temporais da (a) tensão e da (b) corrente para o circuito RLD calculadas numericamente com as equações (4.5). A série temporal para a tensão no diodo é semelhante à série experimental (ver fig. 5.2). Séries calculadas com $R = 90\Omega$, $L = 10\text{mH}$, $V = 5\text{V}$ e $f = 14\text{kHz}$.

onde $a(q)$ é o coeficiente de amortecimento não-linear:

$$a(q) = \frac{R}{L} + \frac{1}{C(q)}\frac{\partial I_d}{\partial V} \tag{4.8}$$

e $f(q)$ é a força restauradora:

$$f(q) = -\frac{1}{L}\left[V(q) + RI_d(V(q))\right]. \tag{4.9}$$

Segundo Van Buskirk e Jeffries [30], a simplificação desta equação, fazendo $a(q) \to$ constante, $-f(q) \to -1 + e^q$ e $\omega \to 1$, daria uma idéia aproximada do comportamento caótico do circuito RLD. Temos então a equação diferencial ordinária para a carga q na junção:

$$\ddot{q} + a\dot{q} + e^q - 1 = A_0 \text{sen}(t), \tag{4.10}$$

ou o correspondente sistema de equações, fazendo $\dot{q} = I$:

$$\begin{cases} \dot{I} &= -aI - e^q + 1 + A_0 \text{sen}(\theta), \\ \dot{q} &= I, \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

Usaremos a partir de agora este modelo simplificado para estudar o caos intermitente no circuito RLD e investigar os expoentes críticos para as médias das fases laminares e da variável dinâmica do sistema.

Para determinados valores dos parâmetros a e A_0, que representam, respectivamente, o amortecimento e a amplitude da força externa, temos comportamento caótico, como mostrado na figura (4.3).

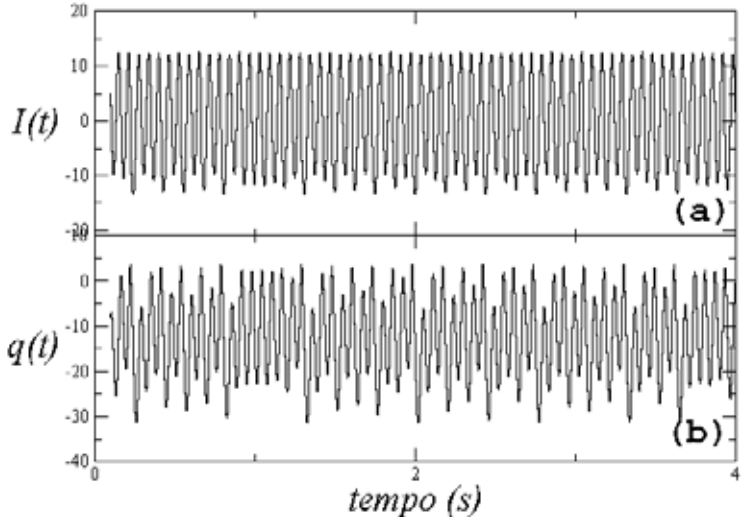

Figura 4.3: Séries temporais da (a) corrente e da (b) carga para o sistema de equações (4.11), calculadas numericamente com $a = 0,75$ e $A_0 = 14,0$.

Como foi feito com o fluxo de Rössler (fig. 2.15), podemos construir um diagrama de bifurcação para este modelo. Fixamos o valor de $a = 0,75$ e variamos o parâmetro A_0. Para cada valor de A_0 calculamos uma série temporal longa e extraímos os máximos de $q(t)$. Esses máximos são plotados em função de A_0; construímos assim o diagrama de bifurcação (fig. 4.4) para o

modelo simplificado do circuito RLD (eq. 4.11). No intervalo $8,0 < A_0 < 20,0$ podemos observar dobramento de período e janelas periódicas.

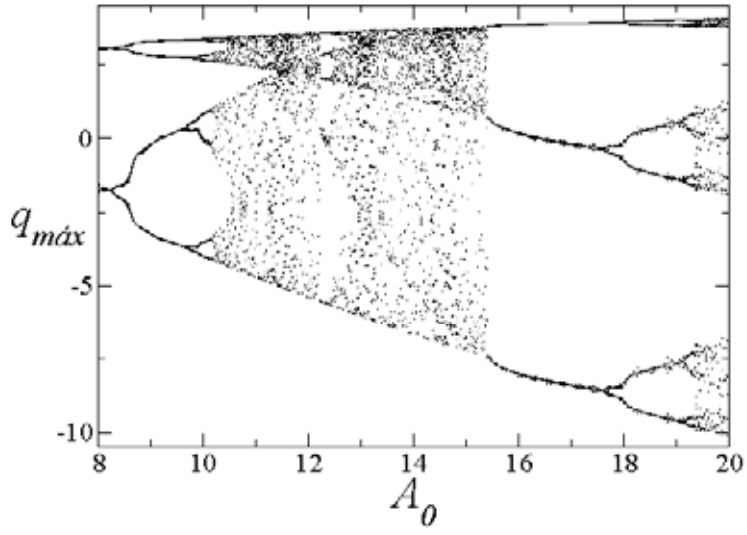

Figura 4.4: Diagrama de bifurcação para os máximos de $q(t)$ com $a = 0,75$, calculados a partir das equações simplificadas para o circuito RLD (eq. 4.11).

Existe uma janela de período 5 quando $A_0 \simeq 12,24$ (ver fig. 4.5). Para verificar se é uma bifurcação tangente que dá origem a esta janela, construímos o gráfico da quinta iterada dos máximos locais de $q(t)$ para um valor de A_0 um pouco antes da janela (fig. 4.6), ainda no regime caótico.

O mapa se aproxima bastante de uma curva unidimensional o que mostra que o valor de a foi convenientemente escolhido para que o sistema seja altamente dissipativo, gerando um mapa associado unidimensional. No valor crítico de $A_0 = A_c = 12,22528$ o mapa é tangente e para $A_0 > A_c$ o sistema bifurca para a janela de período 5. Vimos no capítulo anterior que bifurcações tangentes dão origem à intermitência do tipo-I. Esta é caracterizada pelo expoente crítico $\nu = 1/2$ no cálculo de $\langle l \rangle$, o comprimento médio das fases laminares.

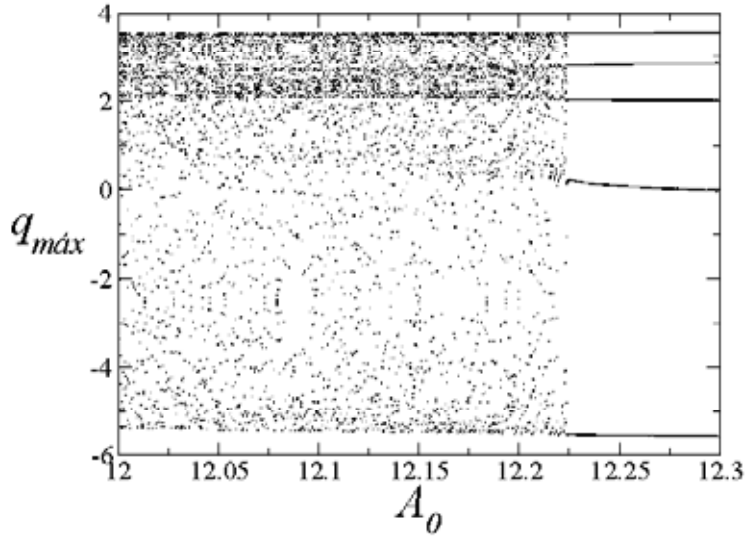

Figura 4.5: Janela de período 5 no diagrama de bifurcação para o modelo simplificado do circuito RLD ($a = 0,75$).

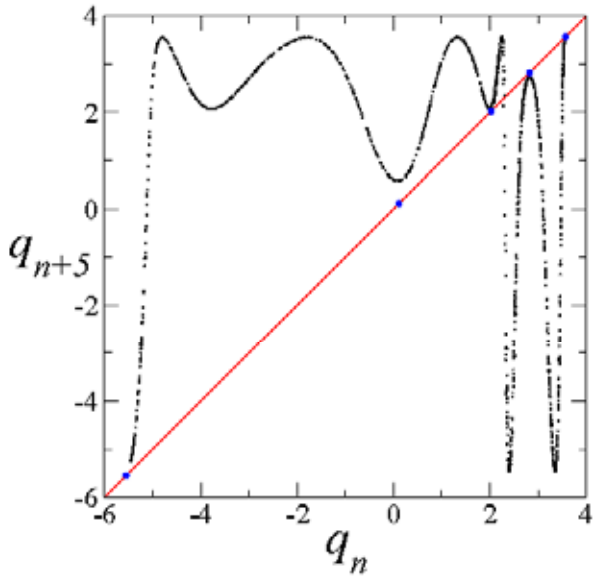

Figura 4.6: Mapa da quinta iterada dos máximos de $q(t)$ com $a = 0,75$ e $A_0 = 12,1$, próximo à janela de período 5. Os pontos azuis representam os máximos de $q(t)$ após a bifurcação, com $A_0 = 12,24$.

Podemos então calcular $\langle l \rangle$ para verificar a relação característica $\langle l \rangle \sim \varepsilon^{-1/2}$. Para adimensionalizar o parâmetro de controle, fazemos:

$$\varepsilon = \frac{A_e - A_0}{A_e}, \tag{4.12}$$

desta forma a bifurcação ocorre quando $A_0 = A_e$ ou $\varepsilon = 0$ e o sistema está no estado caótico quando $A_0 < A_e$ ou $\varepsilon > 0$. Para cada valor de A_0 uma série temporal é calculada e cerca de 8000 máximos são extraídos desta série. O comprimento das fases laminares é então calculado contando-se quantos máximos estão no canal formado pelo mapa da quinta iterada e a reta diagonal (fig. 4.6), ou seja, quantos máximos estão na fase laminar da série caótica (fig. 4.7). O valor médio de l é obtido fazendo-se a média simples para cada valor do parâmetro A_0:

$$\langle l \rangle = \frac{\text{soma dos comprimentos das fases laminares}}{\text{número de fases laminares}} \tag{4.13}$$

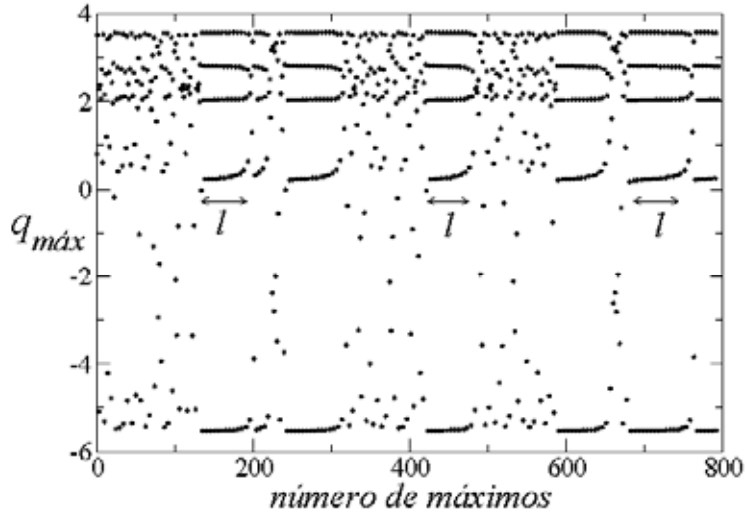

Figura 4.7: Máximos de $q(t)$ próximo à janela de período 5 com $A_0 = 12,223$ e $\alpha = 0,75$; l é o comprimento das fases laminares.

Na figura (4.8) mostramos os pontos calculados numericamente e o ajuste de uma reta na escala $log-log$. O expoente crítico neste caso é $\nu = 0,51$, bastante próximo do previsto pela teoria para a média das fases laminares.

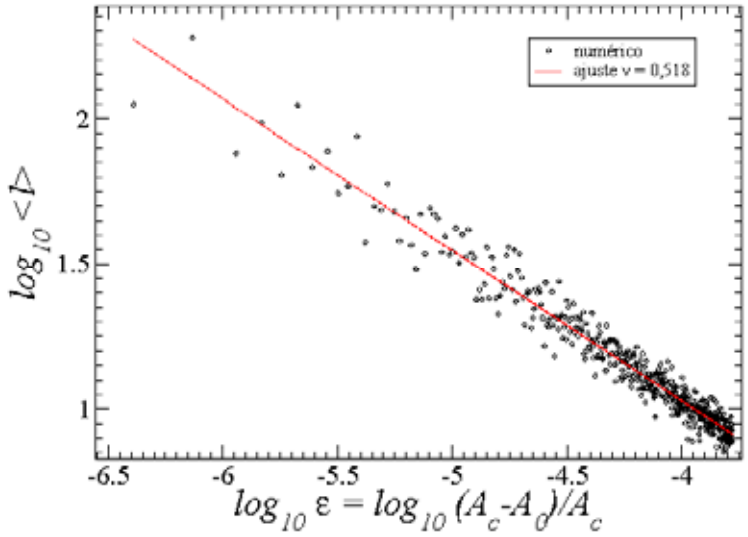

Figura 4.8: Média das fases laminares próximo à janela de período 5. A bifurcação ocorre em $A_c = 12,22528$ e o expoente crítico $\nu = 0,52$.

Também investigamos a média da variável $q(t)$ (média do fluxo) próximo à bifurcação da janela de período 5. Usamos a expressão empírica para ajuste da média da variável [26]:

$$\langle q \rangle (A_0) = b_1 \{1 - exp[-b_2(A_c - A_0)^\beta]\} + b_3(A_c - A_0) + \langle q \rangle_c, \qquad (4.14)$$

onde $\langle q \rangle_c$ é o valor médio da variável q na janela de período 5 e A_c é o valor do parâmetro A_0 onde ocorre a bifurcação. Conseguimos melhor ajuste com os coeficientes $b_1 = 0,15047$, $b_2 = 35,6741$, $b_3 = 1,89278$ e expoente crítico $\beta = 0,526$, como mostrado na figura (4.9). Observamos também que esta média apresenta as oscilações características da intermitência tipo-I, discutidas no capítulo anterior. Por estarem presentes neste modelo teórico para o circuito RLD acreditamos que seja possível encontrar estas oscilações experi-

mentalmente.

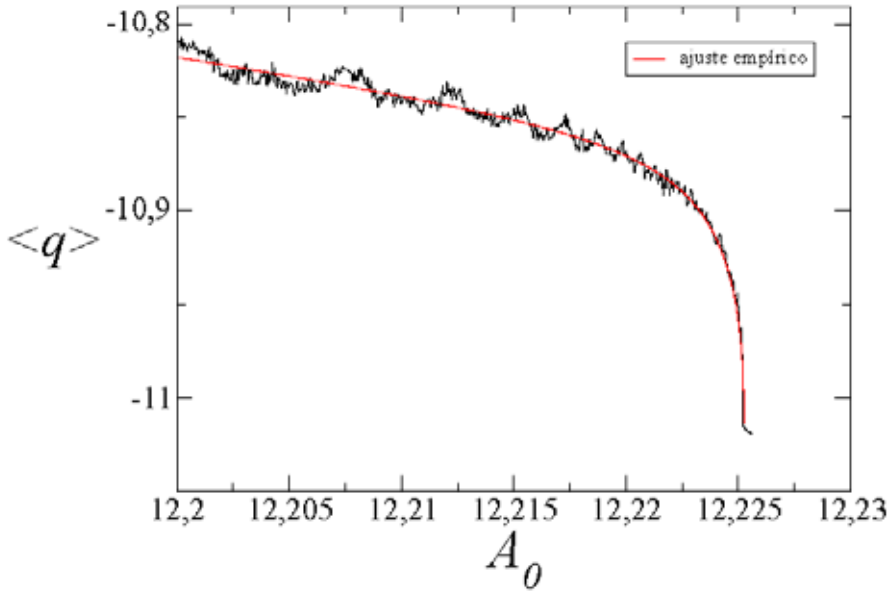

Figura 4.9: Média da variável $q(t)$ próximo à janela de período 5. A bifurcação ocorre em $A_c = 12,22528$. Conseguimos o melhor ajuste com a equação (4.14) usando o expoente crítico $\beta = 0,526$. Observam-se também as oscilações presentes em bifurcações do tipo-I.

Capítulo 5

Experimento

5.1 Experimentos com o circuito RLD

Para realizar o experimento com o circuito RLD usamos um resistor R=47Ω, um indutor L=100mH e um diodo 1N4007 ligados em série a um gerador de funções HP332A com impedância de saída de 50Ω (fig. 5.1). Com estes elementos o circuito tem freqüência de ressonância de aproximadamente 210kHz no regime linear, ou seja, com valores baixos de V_0, a amplitude do sinal de entrada. O gerador excita o circuito com uma onda senoidal do tipo:

$$V_e(t) = V_0 \text{sen}(2\pi f t) + V_{offset}, \tag{5.1}$$

onde V_0 é a amplitude e f a freqüência da onda e V_{offset} é uma tensão contínua que pode ser adicionada ao sinal de entrada. A amplitude V_0, a freqüência f ou o nível de *offset* podem ser usados como parâmetro de controle para gerar diagramas de bifurcação do circuito.

Escolhemos a tensão lida no diodo, $V(t)$, como variável dinâmica do sistema. Esta tensão foi capturada usando um seguidor de tensão (ver fig. 5.1). A série temporal para $V(t)$ era visualisada em um osciloscópio e adquirida por uma placa conversora analógico/digital CS8012A Gagescope com uma taxa

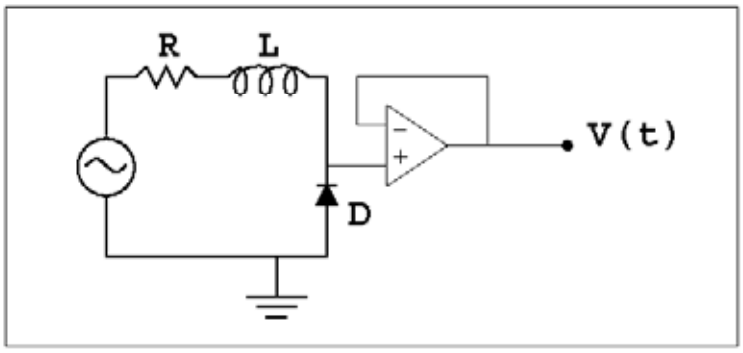

Figura 5.1: Diagrama do circuito RLD com seguidor de tensão.

de amostragem de 20MHz. Devido ao limite de tensão de entrada da placa Gagescope ser de $\pm$5V, usamos um divisor de tensão para diminuir $V(t)$, sendo seu valor na entrada da placa de $\frac{2}{3}V(t)$.

Um computador pessoal foi usado para controlar o gerador de funções e para enviar um sinal para a placa Gagescope a cada instante em que o sinal devesse ser adquirido. Desta forma automatizamos todo o processo para gerar o diagrama de bifurcação. A cada passo no parâmetro de controle escolhido (V_0, f ou V_{offset}) uma série temporal para $V(t)$ com cerca de 10^4 pontos é capturada pela placa Gagescope e armazenada em um arquivo. O tempo entre uma aquisição e outra é de 2s, tempo suficiente para que se eliminem os transientes e também para que o arquivo seja gravado. Estes arquivos são então tratados por um programa de computador que extrai os máximos locais das séries temporais (fig. 5.2) e cria o diagrama de bifurcação. Nas figuras (5.3) e (5.4) observamos diagramas de bifurcação experimentais para o circuito RLD em que a amplitude V_0 e a freqüência f da tensão de entrada foram usados como parâmetro de controle. Cascatas de dobramento de período e janelas periódicas podem ser vistas nos dois diagramas, como esperado.

Um comportamento intermitente foi encontrado próximo a uma janela de período 6, com V_0=2,3V, V_{offset}=0V e freqüência crítica do sinal de entrada próxima de 96,296kHz. Para ilustrar a intermitência, extraímos os máximos

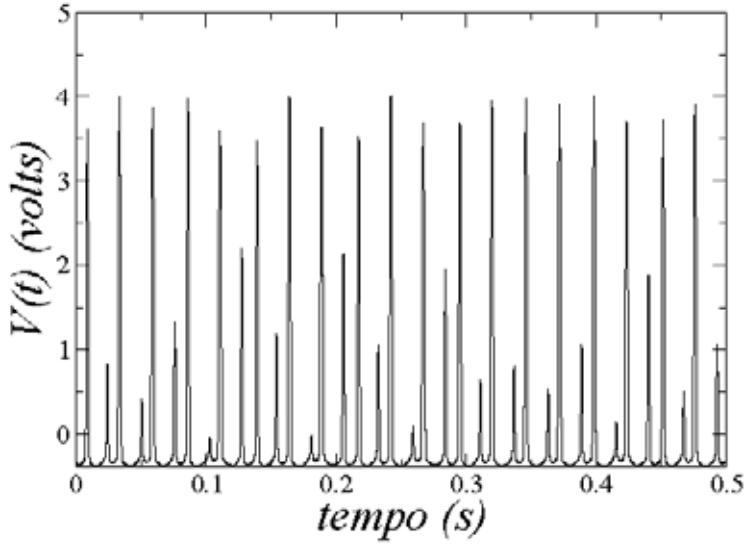

Figura 5.2: Série temporal caótica típica do circuito RLD com $V_0 = 2,3$V e $f = 96$kHz (experimento).

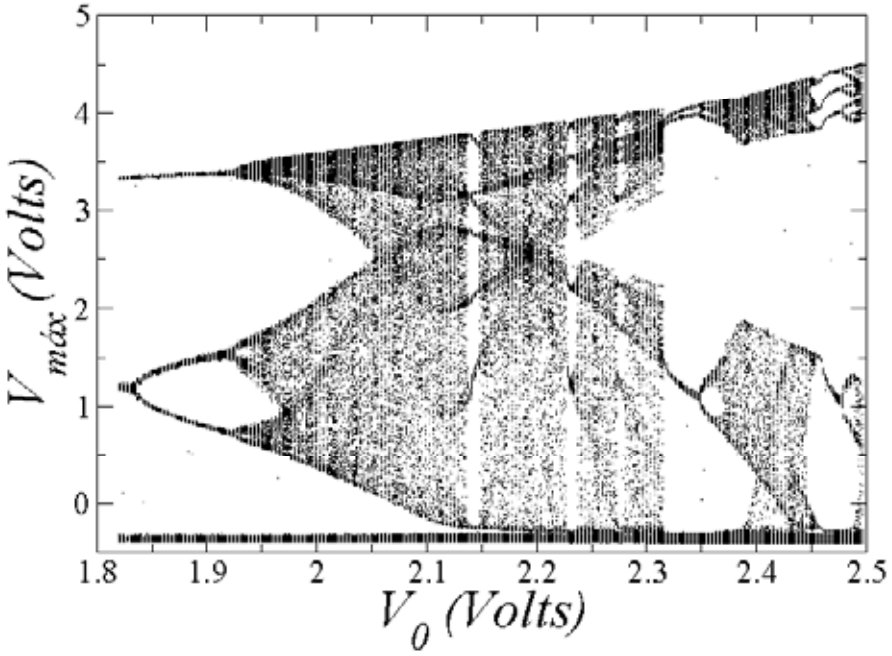

Figura 5.3: Diagrama de bifurcação experimental dos máximos locais de $V(t)$ para o circuito RLD. Com $f = 100$kHz e $V_{offset} = 0$V a amplitude do sinal de entrada V_0 foi usada como parâmetro de controle e variada de $1,82$ a $2,5$V.

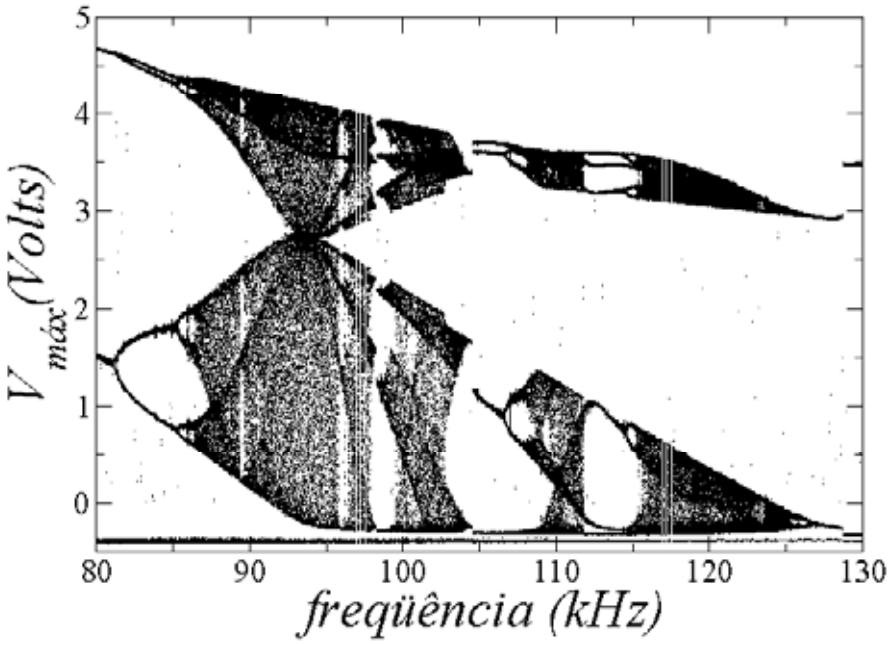

Figura 5.4: Diagrama de bifurcação experimental dos máximos locais de $V(t)$ para o circuito RLD. Com $V_0 = 2,3$V e $V_{offset} = 0$V a freqüência f foi usada como parâmetro de controle e variada de 80 a 130kHz.

locais de uma série de $V(t)$ próximo à bifurcação e plotamos no gráfico da figura (5.5). Observamos o comportamento intermitente, com longas fases periódicas interrompidas por seqüências caóticas. Para verificar o tipo desta intermitência, construímos o mapa de retorno dos máximos locais de $V(t)$ próximo à bifurcação, com $f = 96$kHz (ver fig. 5.6). O mapa dos máximos V_n *versus* V_{n+6} é tangente à reta diagonal, o que nos mostra que a intermitência é do tipo-I.

Verificamos também a relação $\langle l \rangle \propto \varepsilon^{-1/2}$ para a intermitência do tipo-I. Para cada valor do parâmetro f, a freqüência do sinal de entrada, cerca de 4000 máximos locais de $V(t)$ foram extraídos e o comprimento das fases laminares l (ver fig. 5.5) calculado usando um programa de computador.

Ajustando os pontos experimentais com a curva $\langle l \rangle \propto \varepsilon^{-\nu}$ obtemos $\nu = 0,479$, valor bastante próximo do previsto pela teoria.

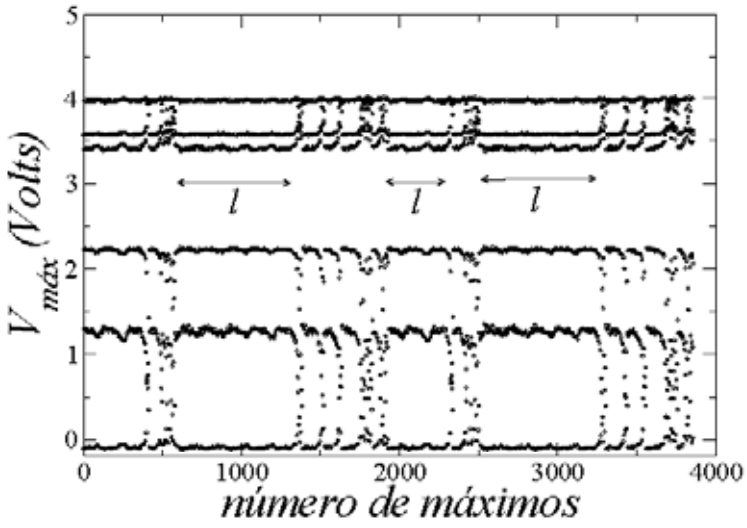

Figura 5.5: Máximos de uma série temporal experimental de $V(t)$ do circuito RLD com $V_0 = 2,3$V, $V_{offset} = 0$V e $f = 96,266$kHz próximo à bifurcação para janela de período 6 mostrando comportamento intermitente e o comprimento de algumas fases laminares, l.

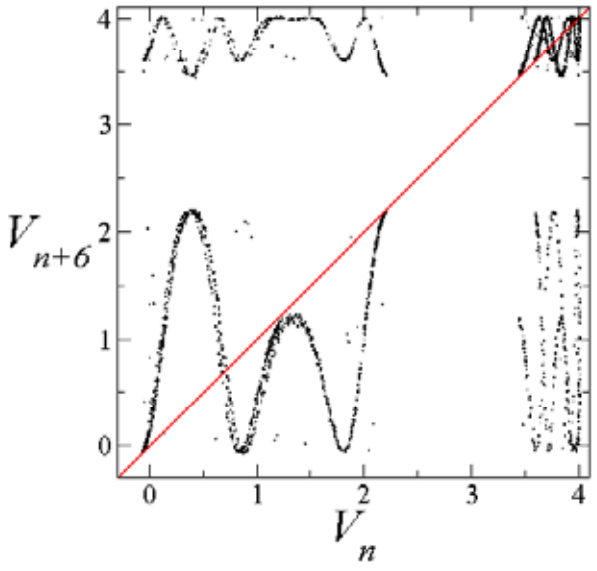

Figura 5.6: Mapa experimental do próximo sexto máximo extraído de uma série temporal de $V(t)$ com $V_0 = 2,3$V, $V_{offset} = 0$V e $f = 96$kHz, próximo à bifurcação que ocorre em $f_c \simeq 96,296$kHz. O mapa é tangente à reta diagonal, o que mostra que a intermitência é do tipo-I.

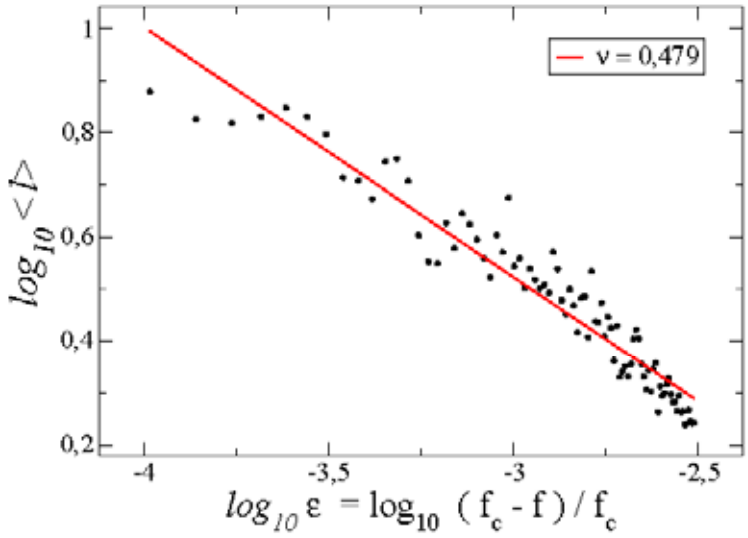

Figura 5.7: Média das fases laminares próximo da janela de período 6. A bifurcação tangente ocorre em $f_c = 96296,668\text{Hz}$. Os pontos são dados experimentais e a reta é o ajuste com inclinação $\nu = 0,479$.

Capítulo 6

Conclusão

Nesta dissertação estudamos o caos intermitente em sistemas matemáticos e também em sistemas físicos. Além disso fizemos uma breve revisão de alguns conceitos da dinâmica não-linear e do caos nos primeiros capítulos.

Este trabalho é uma continuação do estudo do caos intermitente realizado no Laboratório de Dinâmica de Lasers do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco. Conseguimos reproduzir aqui resultados conhecidos na literatura para as médias das fases laminares e de variáveis dinâmicas.

Sistemas caóticos foram analisados principalmente com a construção de mapas de retorno a partir de séries temporais calculadas numericamente ou de séries experimentais. Estes mapas foram construídos com os máximos locais destas séries, sendo estes extraídos com programas de computador. Esta é uma ferramenta poderosa no estudo do caos pois reduz um sistema com várias dimensões a um mapa unidimensional.

Com uma montagem experimental bastante simples pudemos estudar as estatísticas da intermitência do tipo-I em um circuito eletrônico. Não encontramos neste circuito comportamento intermitente do tipo-III. Nossa intenção no início dos experimentos era observar as oscilações nas estatísticas da intermitência tipo-I encontradas numericamente por Hugo L. D. de S.

Cavalcante durante seu doutoramento no Laboratório de Dinâmica de Lasers, porém só conseguimos reproduzir tais oscilações em cálculos numéricos do mapa logístico e do modelo para o circuito RLD.

Os dados experimentais podem ainda ser melhorados, sendo necessário, para tanto, diminuir o ruído presente no experimento. Acreditamos que a presença do ruído pode dificultar o aparecimento das oscilações, como verificamos numericamente no mapa logístico. Esperamos que o trabalho realizado até aqui seja uma motivação para que continuemos a investigação proposta inicialmente para este trabalho.

Referências Bibliográficas

[1] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Editora LTC, 1998.

[2] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Perseus Books, Massachusetts, 1998.

[3] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[4] E. Ott, *Strange attractors and chaotic motion of dynamical systems*, Review of Modern Physics **53**, 655 (1981).

[5] M. J. Feigenbaum, *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J. Stat. Physics **19**, 25 (1978).

[6] P. S. Linsay, *Period Doubling and Chaotic Behavior in a Driven Anharmonic Oscillator*, Physical Review Letters **47**, 1349 (1981).

[7] J. Testa, J. Pérez, and C. Jeffries, *Evidence for Universal Chaotic Behavior of a Driven Nonlinear Oscillator*, Physical Review Letters **48**, 714 (1982).

[8] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atoms. Sci. **20**, 130 (1963).

[9] Y. Pomeau and P. Manneville, *Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems*, Commun. Math. Phys. **74**, 189 (1980).

[10] C. Jeffries and José Pérez, *Observation of a Pomeau-Manneville intermittent route to chaos in a nonlinear oscillator*, Physical Review A **26**, 2117 (1982).

[11] Hugo L. D. de S. Cavalcante and J. R. Rios Leite, *Averages and critical exponentes in type-III chaos*, Physical Review E **66**, 026210 (2002).

[12] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'ordre dans le chaos vers une approche déterministe de la turbulence*, Herman, Paris, 1988.

[13] T. J. Price, T. Mullin, *An experimental observation of a new type of intermittency*, Physica **48D**, 29 (1991).

[14] J.-M. Gambaudo, I. Procaccia, S. Thomae, C. Tresser, *New universal scenarios for the onset of chaos in Lorenz-type flows*, Physical Review Letters **57**, 925 (1986).

[15] M. Bauer, S. Habip, D.-R. He, W. Martienssen, *New type of intermittency in discontinuous maps*, Physical Review Letters **68**, 1625 (1992).

[16] S.-X Qu, S. Wu, D.-R. He, *Multiple devil's staircase and type-V intermittency*, Physical Review E **57**, 402 (1998).

[17] N. Platt, E. A. Spiegel, C. Tresser, *On-off intermittency - a mechanism for bursting*, Physical Review Letters **70**, 279 (1993).

[18] J. E. Hirsch, B. A. Huberman, D. J. Scalapino, *Theory of intermittency*, Physical Review A **25**, 519 (1982).

[19] Chil-Min Kim, O. J. Kwon, Eok-Kyun Lee, Hoyun Lee, *New characteristic relations in type-I intermittency*, Physical Review Letters **73**, 525 (1994).

[20] Chil-Min Kim, Geo-Su Yim, Yeon Soo Kim, Jeong-Moog Kim, H. W. Lee, *Experimental evidence of chacteristic relations of type-I intermittency in a electronic circuit*, Physical Review E **56**, 2573 (1997).

[21] Jin-Hang Cho, Myung-Suk Ko, Young-Jay Park, and Chil-Min Kim, *Experimental observation of the characteristic relations of type-I intermittency in the presence of noise*, Physical Review E **65**, 036222 (2002).

[22] L. de B. Oliveira-Neto, Glauber J. F. T. da Silva, A. Z. Khoury, and J. R. Rios Leite, *Average intensity and bifurcations in a pulsed laser*, Physical Review A **54**, 3405 (1996).

[23] Hugo L. D. de S. Cavalvante, J. R. Rios Leite, *Bifurcations and averages in the homoclinic chaos of a laser with a saturable absorber*, Physica A **283**, 125 (2000).

[24] Hugo L. D. de S. Cavalvante, José R. Rios Leite, *Bifurcations and averages in the logistic map*, Dynamics and Stability of Systems **15**, 35 (2000).

[25] Hugo L. D. de S. Cavalvante, Giovani L. Vasconcelos, José R. Rios Leite, *Power law periodicity in the tangent bifurcation of the logistic map*, Physica A **295**, 291 (2001).

[26] Hugo L. D. de S. Cavalvante, *Bifurcações com Intermitência e Sincronismo de Sistemas Caóticos: Circuitos Eletrônicos e Lasers*, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Pernambuco (2003).

[27] Hugo L. D. de S. Cavalvante, J. R. Rios Leite, *Logaritmic Periodicities in the Bifurcations of Type-I Intermittency*, Physical Review Letters **92**, 254102 (2004).

[28] K. Fukushima and T. Yamada, *Type-III intermittency in a coupled nonlinear circuit*, Journal of the Physical Society of Japan **57**(11), 4055 (1988).

[29] C. Jeffries and José Pérez, *Direct observation of crises of the chaotic attractor in a nonlinear oscillator*, Physical Review A **27**, 601 (1983).

[30] R. Van Buskirk, C. Jeffries, *Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators*, Physical Review A **31**, 3332 (1985).

[31] B. G. Streetman, *Solid State Electronic Devices*, Prentice-Hall, New Jersey, 1980.