UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA
DOUTORADO EM ESTATÍSTICA

FRANCE EVELLYN GOMES DE OLIVEIRA

REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DE CONCEITOS DE ESTABILIDADE COM HORIZONTES VARIÁVEIS NO MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

RECIFE
2024

FRANCE EVELLYN GOMES DE OLIVEIRA

REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DE CONCEITOS DE ESTABILIDADE COM HORIZONTES VARIÁVEIS NO MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Estatística do Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de doutora em Estatística. Área de Concentração: Ciência Exatas e da Terra

Orientador: Dr. LEANDRO CHAVES RÊGO
Coorientador: Dr. GIANNINI ITALINO ALVES VIEIRA

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Oliveira, France Evellyn Gomes de.
Representações matriciais de conceitos de estabilidade com horizontes variáveis no modelo de grafos para resolução de conflitos / France Evellyn Gomes de Oliveira. - Recife, 2024.
158f.: il.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Estatística, 2024.
Orientação: Leandro Chaves Rêgo.
Coorientação: Giannini Italino Alves Vieira.

1. Modelo de grafos; 2. Noções de estabilidade; 3. Representação matricial; 4. Horizonte variável; 5. Ciclos. I. Rêgo, Leandro Chaves. II. Vieira, Giannini Italino Alves. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

Dedico o resultado deste esforço a Deus, a minha família, aos meus orientadores e a todos os envolvidos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder a sabedoria necessária para desenvolver esta tese. A minha filha Luísa Muniz, por ser meu combustível diário e a minha motivação para prosseguir, ao meu esposo, Benjamim Muniz, por sua compreensão, amor e apoio incondicional me motivaram a seguir em frente, mesmo nos momentos mais desafiadores. Vocês sempre acreditaram em mim e por isso sou eternamente grata.

Aos meus pais, Edna Oliveira e Marcos Oliveira, e aos meus irmãos Marcos V. Oliveira e Vinícius Oliveira por me apoiarem em todo momento e por serem um porto seguro e minha rede apoio, sou grata por todo amor e cuidado que me proporcionaram transformando em forças para continuar.

Agradeço também aos meus parentes e amigos que também merecem um agradecimento muito especial, cuja camaradagem e colaboração tornaram esta jornada mais leve e agradável. As trocas de ideias e os momentos compartilhados foram essenciais para meu desenvolvimento acadêmico e pessoal.

Ao meu Orientador, Leandro Rêgo e Coorientador, Giannini Vieira, pelo apoio constante e por compartilhar seus vastos conhecimentos ao longo deste percurso. Sua paciência e incentivo foram fundamentais para a realização deste trabalho.

Agradeço também aos membros da banca examinadora, Raydonal Ospina, Maísa Mendonça, Roberto Manghi e Emerson Sabino, pela disposição em avaliar minha pesquisa e pelas contribuições valiosas durante as discussões.

Por fim, agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo a Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) que tornaram esta pesquisa possível, seu apoio foi fundamental para a execução deste projeto.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, meu sincero agradecimento.

Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria, como da ciência de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, e inescrutáveis, os seus caminhos! Porque quem compreendeu o intento do Senhor? Ou quem foi seu conselheiro? Ou quem lhe deu primeiro a Ele, para que lhe seja recompensado? Porque dEle, e por Ele, e para Ele são todas as coisas; glória, pois, a Ele eternamente. Amém.

(BÍBLIA, 1995)

RESUMO

Decisões cotidianas podem levar a situações conflituosas em que as partes com poder de decisão podem ter interesses distintos em um determinado contexto. Nesse cenário, o uso de métodos de resolução de conflitos surge como uma abordagem estratégica para representar e analisar tais situações. Assim, esta tese visa contribuir para a análise da estabilidade em conflitos com horizonte variável, utilizando métodos matriciais no Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR). Mais especificamente, propusemos resultados sobre representações matriciais para determinar estados estáveis de acordo com os conceitos de estabilidade sequencial de ordem superior (m-SEQ), Maximin$_h$ e movimento limitado (L$_h$) no âmbito do GMCR considerando conflitos bilaterais e multilaterais. Com base nos sistemas lógicos já existentes na literatura, são desenvolvidos os sistemas matriciais para 2 ou mais tomadores de decisão (DMs).

Com os métodos propostos, análises de estabilidade com horizonte variável em conflitos envolvendo um grande número de estados ou DMs podem ser feitas de forma eficiente. Após o desenvolvimento dos sistemas matriciais, a fim de demonstrar a utilidade das representações matriciais obtidas, foram feitas aplicações da representação matricial m-SEQ para o caso de uma disputa com dois DMs, o clássico jogo Matching Pennies, e para o caso de n DMs, o conflito da renovação de área de instalação industrial privada. No caso da representação matricial da estabilidade Maximin$_h$, realizamos a aplicação dos métodos propostos na análise da Fase 3 do conflito entre Sun Belt e o Governo da Colúmbia Britânica e demonstramos a eficiência do método matricial e o tempo computacional a partir da aplicação do conflito do Dilema dos Prisioneiros para n DMs. Por fim, no caso da representação matricial da estabilidade L_h, foram realizadas três aplicações: o Dilema dos prisioneiros para 2 decisores para ilustrar o método, a análise das 4 fases cognitivas do conflito de seleção tecnológica até o horizonte $h = 3$, e exploramos a existência e os tamanhos dos ciclos na estabilidade L_h aplicado a todos os jogos em forma normal 2×2. Como esperado, as representações matriciais propostas quando comparadas ao sistema lógico apresentaram maior eficiência e facilidade nos cálculos de estabilidade.

Palavras-chave: Modelo de Grafos, Noções de Estabilidade, Representação Matricial, Horizonte Variável, Ciclos.

ABSTRACT

Everyday decisions can lead to conflict situations in which the parties with decision-making power may have different interests in a given context. In this scenario, the use of conflict resolution methods has emerged as a strategic approach to represent and analyze such situations. Thus, this thesis aims to contribute to the analysis of stability in conflicts with variable horizons, using matrix methods in the Graph Model for Conflict Resolution (GMCR). Specifically, we propose results on matrix representations to determine stable states according to the concepts of higher-order sequential stability (m-SEQ), Maximin$_h$, and bounded motion (L_h) in the context of GMCR, considering bilateral and multilateral conflicts. Based on existing logical systems in the literature, matrix systems for 2 or more decision makers (DMs) are developed. With the proposed methods, stability analyses with variable horizons in conflicts involving a large number of states or DMs can be carried out efficiently. After the development of the matrix systems, in order to demonstrate the usefulness of the obtained matrix representations, applications of the m-SEQ matrix representation were made to the case of a dispute with two DMs, the classic Matching Pennies game, and to the case of n DMs, the conflict over the renovation of a private industrial site. In the case of the matrix representation of Maximin$_h$ stability, we applied the proposed methods to the analysis of Phase 3 of the conflict between the Sun Belt and the Government of British Columbia, and demonstrated the efficiency of the matrix method and the computational time when applying the Prisoner's Dilemma conflict to n DMs. Finally, in the case of the matrix representation of stability L_h, three applications were made: the Prisoner's Dilemma for 2 decision makers to illustrate the method, the analysis of the 4 cognitive phases of the technological choice conflict up to the horizon $h = 3$, and we explored the existence and sizes of cycles in stability L_h applied to all games in normal form 2×2. As expected, the proposed matrix representations showed greater efficiency and ease in stability computations compared to the logical system.

Keywords: Graph Model, Stability Notions, Matrix Representation, Variable Horizon, Cycles.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

DM	Decision maker / Tomador de decisão
$GMCR$	Graph model for conflict resolution / Modelo de grafos para resolução de conflitos
GMR	Estabilidade metarracionalidade general
SMR	Estabilidade metarracionalidade simétrica
SEQ	Estabilidade sequencial
$SSEQ$	Estabilidade sequencial simétrica
m$-SEQ$	Estabilidade sequencial de ordem superior
h	horizonte
$Maximin_h$	Estabilidade maximin no horizonte h
L_h	Estabilidade movimento limitado no horizonte h
n DMs	Múltiplos tomadores de decisão
$MRSC$	Matrix representation of solution concepts / Representação Matricial de conceitos de solução
UI	Unilateral Improvement / Melhoria Unilateral
UM	Unilateral Movement / Movimento Unilateral
$FUIs$	Fuzzy Unilaterals Improvements / Movimentos Unilaterais fuzzy
D_i	Grafo direcionado para o DM i
S	Conjunto de estados do conflito
s	Estado s
A_i	Conjunto de arcos para o DM i
N	Conjunto dos DMs
H	Subconjunto dos DMs, ou seja, uma coalizão
J_i	Matriz de acessibilidade ao DM i
R_i	Lista de acessibilidade ao DM i
J_i^+	Matriz de melhorias unilaterais ao DM i
R_i^+	Lista de melhorias unilaterais ao DM i

J_H	Matriz de acessibilidade a coalizão H
R_H	Lista de acessibilidade a coalizão H
J_H^+	Matriz de melhorias unilaterais a coalizão H
$J_{i,H}^r$	Matriz dos estados atingidos em exatamente r movimentos legais.
$J_{i,H}^{r,+}$	Matriz dos estados atingidos em exatamente r movimentos legais de melhoria unilatera.
R_H^+	Lista de melhorias unilaterais a coalizão H a partir do estado s
R_H^{+m}	conjunto de estados alcançáveis pelos DMs em H através de uma sequência plausível de UIs a partir do estado s
P_i^+	Matriz de relação de preferência estrita do DM i
P_i^-	Matriz de menor preferência do DM i
$P_i^=$	Matriz de indiferença do DM i
$P_i^{-,=}$	Matriz de relação de preferência não estrita do DM i
E	Matriz de entradas iguais a 1
e_k	Vetor com k-ésimo elemento igual a 1 e os demais elementos iguais a zero.
I	Matriz identidade
$\succ_i$	Relação de preferência estrita entre estados do conflito para o DM i
$\sim_i$	Relação de indiferença entre estados do conflito para o DM i
$\succeq_i$	Relação de preferência fraca entre estados do conflito para o DM i
$\not\succ_i$	Relação de preferência não estrita entre estados do conflito para o DM i
S_i^{NASH}	Conjunto de todos os estados Nash estáveis para DM i
S_i^{GMR}	Conjunto de todos os estados GMR estáveis para DM i
S_i^{SMR}	Conjunto de todos os estados SMR estáveis para DM i
S_i^{SEQ}	Conjunto de todos os estados SEQ estáveis para DM i
S_i^{SSEQ}	Conjunto de todos os estados SSEQ estáveis para DM i
S_i^{m-SEQ}	Conjunto de todos os estados m-SEQ estáveis para DM i
K_i	Cardinalidade do conjunto de estados que são piores ao estado s para o DM i
G_h	Estado final antecipado no conflito de acordo com o conceito L_h
M_h	Algum estado $s_1^{'} \in R_i(s)$

G_h^i	Estado final antecipado por DM i de acordo com o conceito Maximin$_h$
M_h^i	Algum estado $s_1^{'} \in R_i(s)$
$G_h^{i,Fc}$	Estado final antecipado por DM i em que o DM focal realiza somente movimentos de melhorias unilaterais
$G_h^{i,Oc}$	Estado final antecipado por DM i em que o oponente realiza somente movimentos de melhorias unilaterais
$G_h^{i,Tc}$	Estado final antecipado por DM i em que todos realizam somente movimentos de melhorias unilaterais
W	Matriz de ordem $\lvert S\rvert$
Z	Matriz 0-1 de ordem $\lvert S\rvert$
δ	o número máximo de movimentos necessários para atingir um estado em $R_H(s)$
M_i^{NASH}	Conjunto de matrizes de todos os estados Nash estáveis para DM i
M_i^{GMR}	Conjunto de matrizes de todos os estados GMR estáveis para DM i
M_i^{SMR}	Conjunto de matrizes de todos os estados SMR estáveis para DM i
M_i^{SEQ}	Conjunto de matrizes de todos os estados SEQ estáveis para DM i
M_i^{SSEQ}	Conjunto de matrizes de todos os estados SSEQ estáveis para DM i
M_i^{m-SEQ}	Conjunto de matrizes de todos os estados m-SEQ estáveis para DM i
PO	Proprietário da propriedade
CG	Governo municipal
PR	Empresa imobiliária ou um promotor imobiliário
$\mathbf{K}_i$	Matriz coluna com dimensão $\lvert S\rvert$
$Min(A)$	Menor elemento presente na linha k da matriz A
$Max(A)$	Maior elemento presente na linha k da matriz A
B_h^i	Ganho antecipado que o DM i espera receber após um horizonte de conflito h
C_h^i	Ganho máximo que o DM i pode obter escolhendo ficar em s ou afastar-se de s e o que antecipa quando o DM j se move a seguir e o horizonte é $h-1$
C_i	Ação de cooperar para o decisor i

D_i	Ação de delatar para o decisor i
BCG	Governo da Colúmbia Britânica
$NAFTA$	Acordo de Livre Comércio da América do Norte
$NIPD$	Dilema dos Prisioneiros considerando n-jogadores
$\mathscr{B}_h^i$	Matriz de ganho antecipado que o DM i espera receber após um horizonte de conflito h, no conceito do movimento limitado
$\mathscr{C}_h^i$	Ganho máximo que o DM i pode obter escolhendo ficar em s ou afastar-se de s e o que antecipa quando o DM j se move a seguir e o horizonte é $h-1$, no conceito do movimento limitado

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diariamente lidamos com a necessidade de tomadas de decisões em nossa vida pessoal, profissional ou acadêmica, buscando diversas formas que possam ajudar em nossas escolhas. A partir do momento em que cada decisor toma caminhos diferentes, isso pode afetá-los mutualmente, gerando possíveis conflitos. Em uma tomada de decisão racional, o tomador de decisão (decision maker - DM) precisa definir quais objetivos ele deseja alcançar e avaliar, de forma estratégica, quais possíveis movimentos ele pode realizar a fim de que obtenha o melhor ganho para ele.

O uso de métodos de resolução de conflitos pode facilitar a finalização de conflitos, a fim de obter ganhos para todos, podendo ser utilizado em mediações e negociações. Esses métodos baseados em resultados de análise de estabilidade do modelo fornecem previsões, sugestões e possíveis soluções que auxiliam na tomada de decisões, avaliando as possíveis estratégias de resolução de conflitos.

Levando em consideração conceitos de análise de conflitos e teoria dos jogos, foi proposto, por Kilgour *et al.* em 1987, um modelo matemático que torna capaz a modelagem e análise de situações de conflitos estratégicos. Esse modelo é conhecido como modelo de grafo para resolução de conflitos (GMCR) e visa acomodar diversos comportamentos presentes nos DMs em sua análise de estabilidade, podendo ser adaptado para situações diversas.

Para tomar decisões mais coerentes e aumentar o ganho em relação à escolha realizada, um DM precisa estar ciente de suas principais características e ter noção dos possíveis comportamentos que os seus oponentes podem ter no decurso de um conflito. A fim de preservar que nenhum DM em um determinado conflito desvie da solução sugerida, a análise de estabilidade busca possíveis soluções para garantir isso em um conflito.

Dada uma escolha de ação para cada um dos DMs envolvidos no conflito, temos um cenário do conflito, que é denominado estado do conflito. A análise de estabilidade visa determinar, para cada estado, os possíveis DMs que tenham incentivo de mudar ou não as suas possíveis ações. Como existem diversos critérios que avaliam este incentivo, também existem diferentes definições de estabilidade que visam capturar diferentes tipos de comportamentos que podem surgir ao longo de um conflito estratégico. Em situações em que um DM não tem incentivo para se desviar de um estado, este estado é conhecido como estado estável para este DM. No caso em que nenhum dos DMs, envolvidos no conflito, têm incentivo para se desviar de um estado de acordo com uma definição de estabilidade, então esse estado é chamado de equilíbrio para esta noção de estabilidade.

As definições de estabilidades mais usuais na literatura sobre o modelo de grafo para resolução de conflitos (GMCR) são: Nash (NASH, 1950; NASH, 1951), metarracionalidade geral (GMR) (HOWARD, 1971), metarracionalidade simétrica (SMR) (HOWARD, 1971), estabilidade sequencial (SEQ) (FRASER; HIPEL, 1984), estabilidade sequencial simétrica (SSEQ) (RÊGO; VIEIRA, 2016), sequencial de ordem superior (m-SEQ) (RÊGO; OLIVEIRA, 2020), estabilidade maximin no horizonte h (Maximin$_h$) (RÊGO; VIEIRA, 2019) e a estabilidade movimento limitado no horizonte h (L_h) (KILGOUR, 1985). Intuitivamente, na estabilidade de Nash, cada DM, ignorando as possíveis reações que os oponentes podem ter, verifica se ele pode ou não alcançar um estado mais preferível para ele. Nas estabilidades GMR e SEQ, o DM focal, ou seja, decisor ou agente cujas preferências e estratégias estão sendo analisadas em um momento específico no conflito, verifica se os oponentes podem sancioná-lo levando o conflito a um estado que não é preferível ao estado inicial para o DM focal, sendo que esses conceitos diferem entre si pelo fato de que no conceito SEQ as reações dos adversários devem sempre trazer uma melhora para a situação deles, enquanto que no conceito GMR isso não necessariamente ocorre. A estabilidade SEQ é, portanto, um conceito de estabilidade mais forte no sentido de que as reações ao movimento inicial de DM focal são mais plausíveis. Já nos conceitos SMR e SSEQ, além do DM focal analisar as respostas que podem ser dadas pelos seus oponentes, exatamente como ocorre nos conceitos GMR e SEQ, respectivamente, o DM focal também analisa se ele consegue escapar, da situação imposta pelos seus oponentes, para uma situação que seja melhor do que o estado inicial em que o DM focal se encontrava.

Porém, na estabilidade SEQ os oponentes podem reagir, saindo de um estado que é SEQ estável para eles apenas para punir o DM focal. Esse movimento torna questionável a plausibilidade de tais reações. No entanto, a estabilidade m-SEQ evita que essas reações aconteçam, impossibilitando que um DM deixe um estado SEQ estável para sancionar o DM focal, se tornando uma ação mais plausível. Já para o caso do conceito solução L_h, o DM focal antecipa h passos a frente qual será o cenário final do conflito, levando em consideração que os DMs sempre irão mudar as suas ações a fim de obter o melhor cenário possível para eles. No conceito maximin$_h$, o DM focal também antecipa h passos a frente qual será o estado final do conflito, mas diferente da estabilidade L_h, o DM focal acredita que os oponentes sempre se movem para o pior cenário para o DM focal.

Apesar das diversas vantagens que o GMCR apresenta, em circunstâncias onde o número de estados ou DMs é expressivamente grande (ou até em alguns casos considerados pequenos) realizar a análise de estabilidade dos estados de um conflito manualmente pode tornar-se uma tarefa exaustiva. Desta forma, faz-se necessário o uso de métodos computacionais para buscar estados estáveis no modelo, com o intuito de facilitar e auxiliar as análises de forma mais rápida e eficiente. Estes métodos computacionais são baseados em representações matriciais de conceitos de solução para o GMCR, que podem ser codificados conforme a necessidade de cada representação matricial.

Atualmente na literatura sobre o GMCR é possível encontrar diversos trabalhos que apresentam representações matriciais de vários conceitos de estabilidades do GMCR. Por exemplo, no trabalho da Xu *et al.* em 2007 e em 2009 foram propostas representações matriciais de modelos grafos com vários níveis de preferência para o caso de conflitos com dois DMs e, mais tarde, em outro trabalho Xu *et al.* em 2010 expandiram estes resultados para múltiplos DMs. Xu *et al.* em 2011 propuseram representações matriciais dos conceitos solução utilizando GMCR em conflitos onde eram considerados múltiplos decisores com preferência incerta. Wu *et al.* em 2021, utilizou expressões matriciais para representar relações de preferência recíproca de DMs, movimentos unilaterais (UMs) e melhorias unilaterais fuzzy (FUIs). Em 2021 Rêgo e Vieira, propuseram representações matriciais para obtenção de estabilidades no GMCR com preferências probabilísticas, analisando para quais valores dos parâmetros α, β e γ os estados satisfazem certas noções de estabilidade. Vale ressaltar que as ideias relacionadas a representações matriciais propostas por Xu *et al.* em 2007, também foram adaptados para outras extensões do GMCR, tais como: GMCR com preferências incertas (XU; KILGOUR; HIPEL, 2007), (XU; KILGOUR; HIPEL, 2011), para análise de status quo (XU *et al.*, 2009), para aprimorar a implementação de análises de estabilidade mista (ZHAO *et al.*, 2019), e também para desenvolver um método baseado em matriz para uma análise inversa (WANG *et al.*, 2018). A representação matricial de conceitos de solução com horizonte variável é pouco explorada na literatura do GMCR.

As representações matriciais existentes no GMCR auxiliam também na avaliação da estabilidade e na implantação de novos conceitos de estabilidade por meio do desenvolvimento de algoritmos através da conversão do sistema lógico usual para um sistema matricial. Aplicando a codificação de matrizes no âmbito do GMCR, por meio de operações matriciais, as análises de estabilidade são celeremente encontradas. A partir da ideia dos artigos mencionados no parágrafo anterior motivou-se o desenvolvimento de representações matriciais para os conceitos de estabilidades sequenciais de ordem superior ($m-SEQ$), estabilidade Maximin$_h$ e a estabilidade movimento limitado (L_h).

A primeira contribuição dessa tese foi propor representações matriciais para o conceito de estabilidade sequencial de ordem superior no âmbito do GMCR, considerando conflitos bilaterais e multilaterais. Com base nos sistemas lógicos já existentes na literatura, foram desenvolvidos sistemas matriciais para auxiliar na obtenção de estabilidade, de acordo com este conceito, em conflitos com dois e com múltiplos decisores. Após o desenvolvimento dos sistemas matriciais, foram realizadas aplicações a fim de ilustrar os procedimentos encontrados. Para a aplicação da representação matricial $m-SEQ$ para o caso de uma disputa com dois DMs, consideramos o jogo clássico "Matching Pennies" (GIBBONS, 1992) e, para o caso com n-DMs, consideramos o Conflito de Renovação de Instalação Industrial Privada (WALKER; BOUTILIER; HIPEL, 2010). Com base nessas aplicações, mostramos como a representação matricial proposta é mais eficiente, no sentido de facilitar e otimizar a obtenção de estados estáveis de acordo com esse conceito.

A segunda contribuição dessa tese foi o desenvolvimento de métodos matriciais para determinar estados estáveis de acordo com o conceito de estabilidade Maximin$_h$ e algumas de suas variantes. Neste conceito de estabilidade, não é necessário ter conhecimento prévio sobre as preferências de outros DMs no conflito, e é facilmente adequado para modelagem de conflitos nos quais os DMs têm perfis cautelosos. Os conceitos clássicos de estabilidade, Nash, *GMR* e *SMR* são casos particulares da estabilidade Maximin$_h$, para horizonte igual a 1, 2 e 3, respectivamente (RÊGO; VIEIRA, 2019). Com os métodos propostos neste trabalho, a análise de estabilidade com horizonte variável em conflitos envolvendo um grande número de estados ou DMs pode ser feita eficientemente. Analisamos um conflito real descrito na literatura do GMCR, conhecido como o confronto entre o Sun Belt e o Governo de British Columbia (OBEIDI; HIPEL, 2005). Além disso, abordamos um conflito amplamente estudado na teoria dos jogos, o Dilema dos Prisioneiros, adaptado para múltiplos jogadores. O objetivo, desta última aplicação, é examinar o tempo necessário para realizar análises de estabilidade com base nos resultados matriciais que serão apresentados, à medida que o número de DMs aumenta.

A terceira contribuição dessa tese foi a representação matricial da estabilidade movimento limitado (L_h). Neste conceito o DM antecipa, um certo número de passos a frente, qual será o cenário final do conflito, considerando que os DMs mudam sempre as suas ações para alcançar o melhor cenário final possível para eles. Diferente do $Maximin_h$, é necessário ter um conhecimento completo sobre as preferências dos outros DMs. Demonstramos que as estabilidades L_h podem ser derivadas das representações matriciais fornecidas e implementamos essas operações computacionalmente. A metodologia é detalhadamente ilustrada na aplicação do

Dilema dos Prisioneiros, e na análise do conflito real de seleção tecnológica em neurociência na China (ZHOU; WANG, 2018) utilizando o conceito L_h. Esta abordagem também nos permitiu explorar o comportamento dinâmico e variável associado à estabilidade L_h (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993) em todos os jogos 2×2, conforme descrito na tabela periódica (BRUNS, 2015b), incluindo a identificação dos respectivos ciclos em cada jogo.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo principal desta tese é desenvolver representações matriciais de alguns conceitos de estabilidade com horizontes variáveis no âmbito do modelo de grafos para resolução de conflitos. Dessa forma, as representações matriciais são propostas para determinar, eficientemente, os estados estáveis de um conflito conforme os conceitos de estabilidades sequenciais de ordem superior, estabilidade Maximin_h e a estabilidade do movimento limitado com horizonte h.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

No intuito de alcançar o objetivo geral desta tese, temos como objetivos específicos:

- Revisar a literatura referente ao GMCR e acerca de trabalhos que fornecem representações matriciais de conceitos de estabilidades desse modelo, como também às definições de estabilidade $m-SEQ$, Maximin_h e L_h ;
- Desenvolver a representação matricial das estabilidades sequenciais de ordem superior para conflitos com dois e $n-$DMs;
- Desenvolver a representação matricial para o conceito de estabilidade Maximin com horizonte h e algumas de suas variantes para conflitos bilaterais e multilaterais;
- Desenvolver a representação matricial para o conceito de estabilidade do movimento limitado com horizonte h para conflitos bilaterais;
- Desenvolver e aplicar análises cíclicas do conceito de estabilidade L_h;
- Implementar as representações matriciais dos conceitos de estabilidade que foram desenvolvidos nesta tese utilizando o software R;
- Aplicar os resultados obtidos em conflitos estratégicos, com o intuito de ilustrar a utilidade das ferramentas desenvolvidas.

1.3 MÉTODOS E PROCEDIMENTOS

Para elaboração desta tese, realizamos um amplo estudo acerca de trabalhos existentes na literatura sobre o GMCR. Identificamos que, recentemente, a área de análise de estabilidade relacionada ao GMCR tem recebido muita atenção ao longo dos últimos anos, com vários conceitos de estabilidades sendo propostos para conflitos com múltiplos DMs. Dessa forma, observamos as complexidades existentes quando é necessário realizar análises de estabilidade de acordo com alguns desses conceitos, em conflitos maiores, em termos de números de DMs ou estados, por conta da exaustão e inviabilidade dos cálculos utilizando as formas lógicas desses conceitos de estabilidades.

Motivados e inspirados pelos trabalhos Xu *et al.* nos anos de 2009 e 2010, que apresentam formas mais eficazes de obter estados estáveis de acordo com as noções de estabilidades mais usuais na literatura do GMCR, ou seja, (Nash, GMR, SMR e SEQ) por meio de representações matriciais, observamos a necessidade de ampliar essa ideia de representações matriciais para otimizar a obtenção de estados estáveis de acordo com algumas dessas noções de estabilidade com horizonte variável propostas no GMCR.

1.4 ESTRUTURA DA TESE

Incluindo este capítulo introdutório, esta tese está dividida em seis capítulos. No Capítulo 2, realizamos uma revisão da literatura sobre os principais conceitos que serão abordados neste trabalho, ou seja, as principais componentes do GMCR, algumas representações matriciais de conceitos clássicos e, também, os conceitos de soluções que serão utilizados ao longo da pesquisa.

No Capítulo 3, são desenvolvidas representações matriciais para a estabilidade sequencial de ordem superior tanto para o caso bilateral, como para o caso multilateral. Apresentamos também os teoremas obtidos, especificando como as estabilidade, de acordo com essa noção, podem ser calculadas a partir das representações propostas. Adicionalmente, são apresentadas duas aplicações a fim de ilustrar o uso das representações matriciais propostas.

No Capítulo 4, apresentamos as representações matriciais relacionadas ao conceito de estabilidade Maximin$_h$ para conflitos com dois e múltiplos DMs. As adaptações necessárias para lidar com conflitos em que considera-se a credibilidade da estabilidade Maximin$_h$ também são descritas neste capítulo. Ilustramos também as representações matriciais obtidas para representar o conceito de Maximin$_h$ no conflito entre Sun Belt e o Governo da Colúmbia Britânica e no Dilema dos prisioneiros para n DMs.

No Capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos acerca do trabalho que desenvolvemos para obter representações matriciais para a estabilidade do movimento limitado. Os teoremas apresentados, são referentes a adaptação da forma lógica deste conceito em representações matriciais. Com o intuito de auxiliar no entendimento da praticidade da forma matricial do L_h, ilustramos este conceito no conflito referente a seleção da tecnologia neurocientífica na China, consideradas nesse conflito e no Dilema dos prisioneiro considerando o horizonte $h = 3$. Além disso, analisamos os ciclos na estabilidade L_h e ilustramos essa análise cíclica utilizando os jogos da tabela periódica para jogos 2×2.

No Capítulo 6, são apresentadas as principais conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento desta tese. Uma breve recapitulação sistemática dos resultados apresentados nos capítulos anteriores é realizada e, também, apresentamos as considerações finais e as sugestões para trabalhos futuros.

1.5 SUPORTE COMPUTACIONAL

O principal instrumento utilizado para a construção desta tese foi uma ferramenta de produção de textos matemáticos e científicos com elevada qualidade tipográfica conhecida como LaTeX [1] . Foi utilizada uma versão online do LaTeX oferecida pelo site Overleaf, facilitando a construção da tese em tempo real, já que o orientador, o co-orientador e a doutoranda encontravam-se em diferentes estados do Brasil, facilitando no trabalho remoto da tese. Também foi utilizado o software estatístico R [2] na construção dos algoritmos necessários para a representação matricial das estabilidades.

[1] Para mais informações e detalhes sobre o sistema de tipografia LATEX visitar http://www.tex.ac.uk/CTAN/latex

[2] (R Core Team, 2020)

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, serão apresentadas algumas definições importantes com o intuito de facilitar a compreensão dos resultados que apresentaremos nos próximos capítulos desta tese. Descrevemos os componentes básicos da GMCR, os conceitos de estabilidades mais usuais e, também, os conceitos de estabilidade $m-SEQ$, estabilidade Maximin$_h$ e estabilidade L_h. Revisamos também algumas representações matriciais, de conceitos sobre o GMCR, que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

2.1 GMCR

Os modelos de conflito consistem numa estrutura sistemática que visa captar as principais características de um conflito estratégico e podem ser utilizados para realizar análises de estabilidade com o intuito de identificar cenários estáveis que são candidatos a uma resolução de conflito viável (HIPEL; KILGOUR; FANG, 2011). De acordo com Hipel *et al.*(2011), podemos definir um conflito estratégico como um problema de decisão que envolve vários DMs, cada um dos quais apresenta preferências distintas relacionadas com possíveis cenários/estados que podem ocorrer no resultado final de um conflito.

A fim de definir uma metodologia mais abrangente e sistemática, Kilgour *et al.* em 1987, propuseram o Modelo de Grafos para Resolução de Conflitos (GMCR) em que a interação entre DMs é modelada através de possíveis movimentos e contra-movimentos que estes podem fazer.

O GMCR é formado por uma coleção de grafos direcionados, cada um representando as possíveis formas em que um DM pode alterar o estado do conflito numa única etapa. Todos estes grafos têm o mesmo conjunto de vértices que representam o conjunto de estados viáveis do conflito. Além destes grafos, são necessárias preferências relativas para cada DM sobre o conjunto de estados viáveis para medir o grau de satisfação dos DMs com cada possível estado do conflito (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993; FANG *et al.*, 2003a; XU *et al.*, 2018). Um estado é considerado estável para um DM se este preferir não se afastar dele, com base em alguma definição de estabilidade que acomoda um determinado comportamento que os DMs possam ter no decurso de um conflito.

A fim de fornecer as informações necessárias para compreender os resultados deste documento, a definição formal do GMCR e dos conceitos de estabilidade relevantes serão apresentadas a seguir. Para uma visão mais detalhada sobre estes tópicos, consultar (KILGOUR; HIPEL; FANG, 1987; FANG; HIPEL; KILGOUR, 1989; FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993; KILGOUR; HIPEL, 2005; HIPEL; KILGOUR; FANG, 2011).

Para descrever um conflito, através do GMCR, é necessário especificar os seus principais componentes. Neste modelo, o conjunto N representa os DMs atuantes no conflito, e as combinações possíveis de ações que podem ser tomadas pelos decisores são chamadas de estados viáveis e denotada pelo conjunto S. Outro componente do GMCR é uma coleção de grafos direcionados, denotados por $D_i = (S, A_i)$, $i \in N$, onde o conjunto comum de nós dos grafos corresponde aos estados de S. Os arcos em A_i são utilizados para representar a relação de acessibilidade entre estados, eles especificam para quais estados o DM i pode mover-se de um determinado estado para outro. Esta relação de acessibilidade pode ser representada por meio de um conjunto de movimentos unilaterais (UMs), representados por $R_i(s)$, um estado pertence a este conjunto se for acessível ao decisor i a partir do estado s em um único movimento. Formalmente, este conjunto é definido como $R_i(s) = \{s' \in S : (s, s') \in A_i\}$.

No GMCR, as avaliações dos estados viáveis do conflito são representadas por uma estrutura de preferências. Na maioria dos trabalhos referentes ao GMCR, assume-se que a estrutura de preferências utilizada pelos DMs é uma relação binária assimétrica, denotada por $\succ_i$, onde $s \succ_i s'$, para $i \in N$, significa que DM i prefere estritamente o estado s ao s'.

A partir das relações de preferência estritas, pode-se derivar uma outra relação de preferência, denominada de preferência fraca, denotada por $\succsim_i$. Uma preferência fraca pode ser definida como a ausência da preferência estrita, em que $s \succsim_i s'$ se $s' \not\succ_i s$, ou seja, se o DM i não prefere estritamente o estado s' ao estado s.

Uma vez definidas as preferências, podemos descrever um subconjunto do conjunto de UMs, denominado conjunto de melhoramento unilateral (UI). Este conjunto, representado por $R_i^+(s)$, contém apenas os estados em $R_i(s)$ que podem ser alcançado através de movimentos de melhoria, realizados pelo DM i a partir do estado s, sendo esse conjunto formalmente definido como $R_i^+(s) = \{s' \in R_i(s) : s' \succ_i s\}$.

Na subseção seguinte, relembramos três definições de estabilidade que serão utilizadas nesta tese e também os casos clássicos usualmente utilizados na análise de estabilidade do GMCR.

2.2 CONCEITOS DE SOLUÇÕES NO GMCR

A análise de estabilidade verifica, para cada estado, quais DMs têm interesse em alterar ou não as suas ações. A fim de avaliar o interesse dos DMs em mover-se a partir de um estado, as definições de estabilidade apresentam vários critérios que visam capturar diferentes tipos de comportamentos que DMs podem adotar em situações de conflito. Neste capítulo, iremos apresentar definições de estabilidades mais comumente usadas na análise de estabilidade do GMCR. Além disso, também apresentaremos as estabilidades que estamos particularmente interessados nesta pesquisa, ou seja, que darão base para as representações matriciais desenvolvidas nesta tese.

Nesta tese, também iremos considerar conflitos multilaterais, isto é, conflitos com mais de dois DMs. Nesse tipo de conflito, os DMs podem antecipar o que a coalizão composta por seus oponentes pode fazer em resposta a um de seus movimentos. No GMCR, um conjunto não vazio de DMs é chamado de coalizão e, ao considerar quais estados podem ser alcançados por uma coalizão, restringe-se a sequência de movimentos para ser legal, onde uma sequência legal de movimentos é aquela em que os DMs podem se mover mais de uma vez, mas não duas vezes consecutivas.

Desta forma, para uma coalizão $H \subseteq N$, faz-se necessário definir dois outros conjuntos importantes, $R_H(s)$ e $R_H^+(s)$. Uma sequência legal de movimentos realizadas por DMs em H, é uma sequência alternada de DMs e estados, ou seja, uma sequência da forma $(s_0, i_1, s_1, \ldots, i_{k+1}, s_{k+1})$, em que $s_0 = s$, $i_j \in H$, $i_{j+1} \neq i_j$ e $s_{j+1} \in R_{i_{j+1}}(s_j)$ para $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Uma UM para a coalizão H, a partir do estado s, é um estado final de uma sequência legal de movimentos realizadas por DMs em H, partindo de s. O conjunto de todas as UMs por H a partir de s é denotado por $R_H(s)$. De forma similar, pode-se definir o conjunto de UIs para a coalizão H, a partir do estado s, denotado por $R_H^+(s)$. Para isso, basta substituir R_{j+1} por R_{j+1}^+ na definição do conjunto $R_H(s)$.

A seguir, apresentamos um exemplo, conhecido na literatura da teoria dos jogos como *"Dilema do Prisioneiro"* (AXELROD, 1984), a fim de ilustrar o comportamento dos tomadores de decisão em situações de conflito, além de apresentar os possíveis movimentos e contramovimentos feitos pelos DMs em conflitos estratégicos utilizando as análises de estabilidades.

O conflito consiste em dois indivíduos que são suspeitos de cometerem um crime e são presos pela polícia. Porém, a polícia não tem provas suficientes para condená-los. Desta forma, a polícia decide separá-los em salas diferentes e propor a eles o mesmo acordo. O acordo é estabelecido da seguinte forma, como ilustrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Ilustração do problema do Dilema do prisioneiro

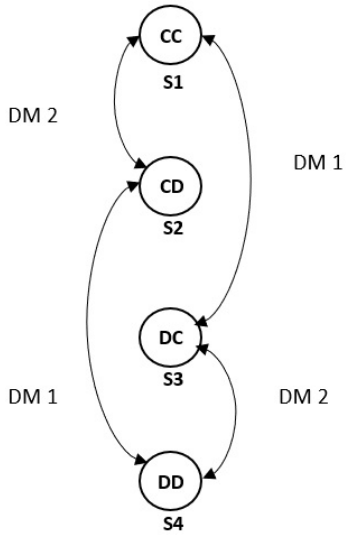
Adaptado - Foggion (2015)

- Se um deles cooperar (C) e o outro delatar (D), o traidor ficará livre e o cooperador, que ficou calado, receberá a pena de 10 anos de prisão;
- Se ambos cooperarem entre si, cada um dos presos receberá a pena de 6 meses de prisão;
- Se ambos traírem, ou seja, delatarem, cada um receberá a pena de 5 anos de prisão.

Neste jogo, os decisores possuem duas estratégias, formando um total de quatro possíveis cenários ou estados de decisão e pode ser representado por meio de modelo de grafo, em que as escolhas disponíveis para cada um dos DMs podem ser representadas utilizando nós e arcos. Na Figura 2.2 os estados de decisão são representados por s_1 (CC), s_2 (CD), s_3 (DC) e s_4 (DD). A partir do modelo de grafos, podemos observar que DM 1 pode mudar sua decisão do estado CC para o estado DC, ou entre o estado CD e o estado DD. No caso do DM 2, ele pode usar sua estratégia para mudar do estado CC para o estado CD ou entre o estado de decisão DC e DD.

Os arcos que conectam os estados de decisão, ou seja, os nós s_1 e s_3 representam a possibilidade que o DM 1 tem de decidir a mudança do estado s_1 (CC) para o estado s_3 (DC) ou

Figura 2.2 – Modelo de Grafos do conflito do Dilema do prisioneiro



vice-versa. O mesmo ocorre com as possibilidade de decisão do DM 2 com o movimento entre os estados de decisão s_2 e s_4, representado pelos arcos que conectam os nós s_2 e s_4.

A relação de preferência neste conflito para DM 1 é denotada por $s_3(DC) \succ_1 s_1(CC) \succ_1 s_4(DD) \succ_1 s_2(CD)$ e para DM 2 $s_2(CD) \succ_2 s_1(CC) \succ_2 s_4(DD) \succ_2 s_3(DC)$. Observe que o estado de decisão preferencial para o DM 1 é o estado s_3 (DC), neste estado o DM 1 estará livre, pois não colaborou e o DM 2 receberá uma pena de 10 anos de prisão por ter cooperado. Para DM 2, o estado de decisão mais preferido é o estado s_2 (CD) e o estado menos preferido é o estado s_3 (DC).

A fim de analisar os conflitos estratégicos, iremos recordar as noções de estabilidade mais utilizadas na literatura do GMCR e as noções que iremos utilizar nesta tese. Para todas as noções de estabilidade, se algum estado é estável para todo DM, ele é chamado de equilíbrio de acordo com essa noção de estabilidade.

Estabilidade de Nash

Intuitivamente, um estado é Nash (NASH, 1950) estável para o DM i, se este não pode se mover unilateralmente, a partir desse estado, para um outro estado que seja mais preferível. Denote por S_i^{NASH} o conjunto de todos os estados Nash estáveis para DM i.

Definição 2.2.1 *(NASH, 1950) Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é Nash estável (ou individualmente racional) (R) para o DM i se, e somente se, $R_i^+(s) = \emptyset$.*

No exemplo do Dilema do Prisioneiro, o estado s_3 (DC) é Nash estável para DM

1, pois não há estado mais preferível que ele. O estado s_1 (CC) é considerado Nash instável porque existe outro estado que é mais preferível e acessível para DM 1. Analisando todas as possibilidades de decisão para a estabilidade de Nash em relação a ambos os jogadores, vemos que o estado de decisão s_4 (DD) é o único equilíbrio de Nash, já que nenhum DM pode se mover unilateralmente para um estado melhor do que o estado s_4. Todos os outros estados são Nash instáveis para pelo menos um DM, que sempre pode melhorar sua situação ao não cooperar com o outro DM, ou seja, delatando.

Estabilidade Metarracionalidade Geral

No conceito de estabilidade metarracionalidade geral (*GMR*) (HOWARD, 1971), intuitivamente, o DM focal analisa seus possíveis movimentos de forma conservadora, considerando todas as possíveis reações aos seus movimentos, ignorando suas próprias possíveis contra-reações. O conjunto de todos os estados estáveis *GMR* para DM i é denotado por S_i^{GMR}.

Definição 2.2.2 *(HOWARD, 1971) Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é GMR estável para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existe $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$ tal que $s \succsim_i s_2$.*

No caso do Dilema do Prisioneiro, do estado s_1, o DM 1 tem um movimento de melhoria unilateral para o estado s_3. No entanto, DM 2 pode punir DM 1 passando do estado s_3 para o estado s_4, que é menos preferível ao DM 1 do que o estado s_1. Assim, o estado s_1 (CC) é GMR estável para DM 1. Por simetria, este estado também é GMR estável para DM 2, portanto um equilíbrio GMR. Analisando todos os estados, é possível concluir que os estados s_1 e s_4 são equilíbrios de acordo com o conceito GMR.

Estabilidade Metarracionalidade Simétrica

Na noção de estabilidade Metarracional Simétrica (*SMR*) (HOWARD, 1971), intuitivamente, o DM focal considera não apenas seus próprios movimentos possíveis e as reações de seus oponentes a cada um desses movimentos, mas também sua própria contra-reação, sendo, portanto, uma definição de estabilidade mais restritiva do que a estabilidade metarracionalidade geral. O conjunto de todos os estados *SMR* estáveis para DM i é denotado por S_i^{SMR}.

Conforme este conceito, o DM focal tem a capacidade de analisar três movimentos à frente, enquanto que segundo o conceito da estabilidade metarracionalidade geral, observa apenas dois movimentos à frente e de acordo com o conceito de Nash, apenas um movimento à frente.

Definição 2.2.3 *(HOWARD, 1971) Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é SMR para o DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existe $s_2 \in R_{N-\{i\}}(s_1)$ tal que $s \succsim_i s_2$ e $s \succsim_i s_3$, para todo $s_3 \in R_i(s_2)$.*

Observando o conflito do Dilema do Prisioneiro, vemos que quando DM 1 se move do estado de decisão s_1 para o estado s_3, o DM 2 pode reagir movendo-se do estado s_3 para o estado s_4, onde o estado s_4 não é preferível ao estado s_1 pelo DM 1. Para escapar desta punição, o DM 1 só pode passar do estado s_4 para o estado s_2, que também não é preferível ao estado s_1 para DM 1. Assim, o estado s_1 é SMR estável para o DM 1. O estado s_1 também é SMR estável para o DM 2 e, consequentemente, um equilíbrio SMR, juntamente com o estado s_4. Vale a pena notar que em uma análise de estabilidade SMR, o DM focal deve considerar que seu adversário pode reagir se punindo com o intuito de forçar o DM focal a não se mover para um estado de decisão mais preferível.

Estabilidade Sequencial

O conceito de estabilidade Sequencial (SEQ) (FRASER; HIPEL, 1979) é semelhantemente à noção GMR, porém segundo essa noção, as reações dos oponentes também são benéficas para eles, ou seja, assume-se que os movimentos dos oponentes do DM focal sejam credíveis. O conjunto de todos os estados SEQ estáveis para DM i é denotado por S_i^{SEQ}.

Definição 2.2.4 *(FRASER; HIPEL, 1979) Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é sequencialmente estável (SEQ) para DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existe s_2 em $R_{N-\{i\}}^+(s_1)$ tal que $s \succsim_i s_2$.*

No caso do Dilema do Prisioneiro, ao analisar a estabilidade SEQ do estado s_1 para DM 1, vemos que ele tem um movimento de melhora unilateral para o estado s_3. Por outro lado, DM 2 tem um movimento de melhora unilateral do estado s_3 para estado s_4, que é menos preferível do que o estado s_1 por DM 1. Assim, o estado de decisão s_1 (CC) é SEQ estável para DM 1 e, da mesma forma, SEQ estável para DM 2. Assim, o estado s_1 é um equilíbrio SEQ. O estado s_4 é Nash estável para ambos os jogadores e, consequentemente, também um equilíbrio sequencial.

Estabilidade Sequencial Simétrica

A estabilidade sequencial simétrica ($SSEQ$) (RÊGO; VIEIRA, 2016) é um tipo de estabilidade sequencial, na qual o DM focal, ao planejar se mover, considera não apenas a reação de seus oponentes, mas também sua própria contra-reação. Vale a pena notar que a contra-reação não leva necessariamente a uma melhoria unilateral para o DM focal, mas sim que o estado resultante, após sua contra-reação, não seja melhor do que o estado inicial para que este último seja estável. O conjunto de todos os estados $SSEQ$ estáveis para DM i é denotado por S_i^{SSEQ}.

Definição 2.2.5 *(RÊGO; VIEIRA, 2016) Seja $i \in N$, o estado $s \in S$ é SSEQ para DM i se, e somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existe $s_2 \in R_{N-\{i\}}^+(s_1)$ tal que $s \succsim_i s_2$ e $s \succsim_i s_3$ para todo $s_3 \in R_i(s_2)$.*

Vamos observar agora a estabilidade SSEQ no caso do conflito do Dilema do Prisioneiro. Podemos verificar um resultado semelhante ao SEQ, mas é necessário analisar a contra-resposta do DM 1. Portanto, o estado s_1 do conflito (CC) também é SSEQ estável para DM 1 e DM 2 e, consequentemente, um equilíbrio SSEQ, já que os DMs não conseguem neutralizar a punição do oponente. Além disso, como o estado s_4 (DD) é Nash estável, também é SSEQ estável. Através da análise de estabilidade, vemos que apenas os estados s_1 e s_4 são possíveis equilíbrios, sendo o estado s_4 um equilíbrio de acordo com o maior número de conceitos de estabilidade.

Estabilidade Sequencial de Ordem superior

Em 2020, Rêgo e Oliveira demostraram que alguns equilíbrios SEQ dependem de DMs deixarem um estado estável de acordo com esse conceito para que possam sancionar o DM focal. A plausibilidade de tais equilíbrios SEQ é questionável, já que, de acordo com a essa noção, os DMs não devem sair de estados SEQ estáveis. Este tipo de sanção pode ser considerado não credível, ou seja, uma sanção que não será implementada pelos oponentes.

Para superar este problema, Rêgo e Oliveira (2020) propuseram uma nova família de conceitos de solução para conflitos bilaterais no GMCR, conhecida como higher-order sequential stabilities (estabilidades sequenciais de ordem superior), que essencialmente proíbe um DM de deixar um estado SEQ estável para sancionar o DM focal, fazendo com que tais sanções sejam mais plausíveis. Eles mostraram também que as estabilidades sequenciais de ordem superior são refinamentos da estabilidade SEQ para conflitos bilaterais. Em 2023, Rêgo e Oliveira estenderam este conceito para o caso de conflitos multilaterais.

Intuitivamente, um estado s é sequencialmente estável de ordem m, denotado por $m-SEQ$, para um DM focal, se cada UI que possa ser realizada pelo DM focal, a partir do estado s, puder ser sancionada por uma sequência legal de UIs realizada pelos oponentes do DM focal, onde nenhum DM se move de um estado que é $(m-1)-SEQ$ estável para ele na sequência. Formalmente, seja S_i^{m-SEQ} o conjunto de todos os estados estáveis de $m-SEQ$ para DM $i \in N$, onde $1-SEQ$ é o mesmo que a estabilidade SEQ.

Para recordarmos o conceito $m-SEQ$, necessitamos também relembrar um importante conjunto. Seja $R_H^{+m}(s)$ o conjunto de estados alcançáveis pelos DMs em H através de uma sequência plausível de UIs a partir do estado s, em que uma sequência de UIs é legal se os DMs não puderem mover-se duas vezes consecutivas na sequência e é m-ordem plausível se nenhum DM deixar um estado que seja $(m-1)-SEQ$ estável para ele (RÊGO; OLIVEIRA, 2023). A noção de estabilidade $m-SEQ$ para $m \geq 2$ é definida indutivamente como se segue:

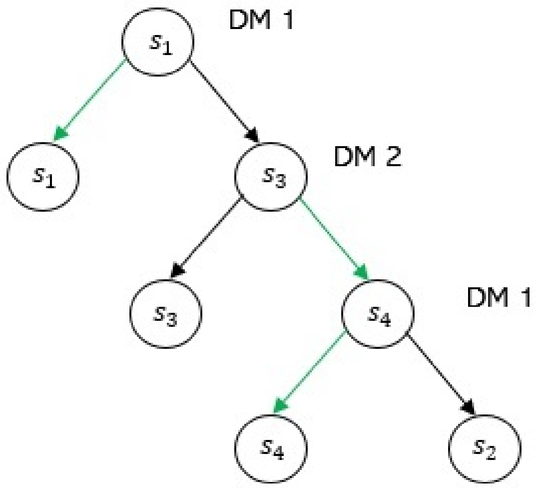
Definição 2.2.6*(RÊGO; OLIVEIRA, 2020) Para $m \geq 2$, o estado $s \in S$ satisfaz a m-ésima ordem da estabilidade sequencial para o DM i se, e somente se, $\forall s_1 \in R_i^+(s)$, existe $s_2 \in R_{N-\{i\}}^{+m}(s_1)$ de tal forma que $s \succsim_i s_2$.*

Rêgo e Oliveira (2020 e 2023) estabeleceram o resultado enunciado no Teorema 2.2.7 relativamente às implicações entre estabilidades m-SEQ para vários valores de m.

Teorema 2.2.7 *Considere $i \in N$ e dois inteiros positivos: m e m_1. Para m_1 par, segue que $S_i^{m_1-SEQ} \subseteq S_i^{m-SEQ}$, para todo $m_1 \leq m$. Para m_1 ímpar, segue que $S_i^{m-SEQ} \subseteq S_i^{m_1-SEQ}$, para todo $m_1 \leq m$.*

De acordo com a estabilidade m-SEQ, as sanções dos adversários não podem deixar um estado estável $(m-1)$-SEQ para eles, onde 1-SEQ é a estabilidade SEQ original. Assim, para verificar se um estado é 2-SEQ para um DM, conhecido como o DM focal, é necessário verificar se todos os estados que ele pode alcançar e que são melhorias para ele, são SEQ estáveis para os adversários. Para verificar se um estado é SEQ estável para um DM, analisa-se o conflito dois passos à frente, o movimento inicial e as possíveis sanções. Assim, devem ser considerados três movimentos para a estabilidade 2-SEQ: o movimento inicial do DM focal e os dois movimentos para analisar se as sanções dos adversários partem de estados SEQ para eles ou não. Este número de movimentos e contra-movimentos é designado por horizonte. Assim, por indução, pode ver-se que para analisar a estabilidade m-SEQ é necessário considerar um horizonte igual a $m+1$. Como o horizonte de conflito depende de m, a estabilidade sequencial de ordem superior é um conceito de estabilidade de horizonte variável.

Figura 2.3 – Árvore de decisão do DM 1 a partir de s_1 - 3-SEQ



Iremos utilizar árvore de decisão (Figura 2.3), para analisar a estabilidade 3-SEQ no conflito do Dilema dos Prisioneiros. Observe que a última etapa corresponde a estabilidade sequencial de primeira ordem, a antepenúltima será a de segunda ordem e assim por diante, ou seja, a ordem é analisada de trás para a frente.

Analisando a estabilidade 3-SEQ no conflito do Dilema dos Prisioneiros, vemos que na ordem 1 o DM 1 tem a escolha de permanecer no estado s_4 ou mover-se para o estado s_2, como s_4 é mais preferível para o DM 1 do que o estado s_2, ele preferirá permanecer em s_4. Logo, o estado s_4 é Nash e, consequentemente, 1-SEQ para o DM 1. No passo anterior, como s_4 é melhor que s_3 para o DM 2 e s_4 é 1-SEQ para o DM 1, temos que s_3 não é 2-SEQ para o DM 2. Finalmente, no passo inicial, apesar de s_3 ser melhor que s_1 para o DM 1, como s_3 não é 2-SEQ para o DM 2, o DM 2 prefere sair de s_3 para s_4 e s_4 é pior que s_1 para o DM 1, temos que s_1 é 3-SEQ para o DM 1.

Estabilidade do Movimento Limitado com horizonte h

O conceito de estabilidade movimento limitado com horizonte h, denotado por L_h, é uma noção na qual é permitido realizar vários movimentos de reações e contra-reações, por parte dos decisores que estão envolvidos em um determinado conflito. Neste conceito de estabilidade, o DM focal antecipa, h passos à frente, qual será o cenário final do conflito, considerando que os decisores mudam sempre as suas ações para chegar ao melhor cenário possível para eles, fazendo-se necessário o conhecimento prévio sobre as preferências dos DMs envolvidos no conflito. Nesta tese, focaremos em recordar a definição do conceito L_h somente para o caso de dois DMs, pois as definições existentes para o caso de n DMs não serão abordadas neste trabalho.

Neste conceito, assume-se que as preferências são completas, transitivas, e assimétricas em S. Para podermos recordar esse conceito, seja $K_i(s)$ a cardinalidade do conjunto de estados que são piores do que o estado s para o DM i, ou seja, $K_i(s) = |\{s' \in S : s \succ_i s'\}|$. Seja $G_h(i,s) \in S$, $i \in N$, o estado que DM i acredita que será o estado final do conflito, considerando um horizonte h, quando o conflito inicia-se no estado s e o DM i se move primeiro neste estado e os DMs alternam movimentos. Neste conceito, assume-se, por convenção, que $G_0(\cdot,s) = s$ e o estado $G_h(i,s)$, para $h \geq 1$ é construído indutivamente da seguinte forma:

$$G_h(i,s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \geq A_h(i,s) \\ G_{h-1}(j, M_h(i,s)), & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

em que $M_h(i,s)$ é algum estado $s_1' \in R_i(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}(j,s_1')) = max\{K_i(G_{h-1}(j,s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}$, $j \neq i$, e $A_h(i,s) = K_i(G_{h-1}(j, M_h(i,s)))$.

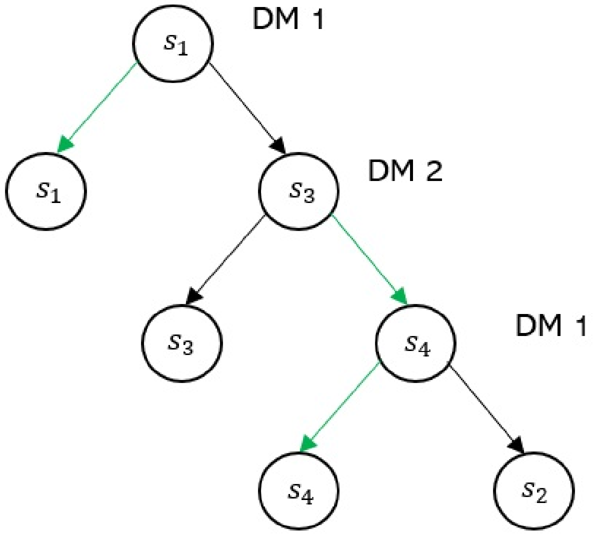
Em outras palavras, podemos intuir que $G_h(i,s)$, o estado antecipado pelo DM i quando este se move primeiro no estado s, considerando um horizonte h, será igual a s caso i não possa se afastar de s, ou se s for pelo menos tão bom quanto o melhor estado $G_{h-1}(j, M_h(i,s))$ que pode ser antecipado com o horizonte $h-1$. Esse melhor estado é aquele alcançável pelo DM i ao se afastar do estado s, considerando que seu oponente se move posteriormente dentro do horizonte $h-1$. Caso contrário, temos que $G_h(i,s) = G_{h-1}(j, M_h(i,s))$.

No conceito de estabilidade L_h, assume-se que é de conhecimento comum entre os DMs que eles realizam movimentos que sejam benéficos para si mesmo, em cada horizonte h' menor que h e, para isto, é necessário considerar que ambos os DMs conheçam as preferências um do outro. Formalmente, o conceito L_h para o caso de conflitos bilaterais é apresentado a seguir:

Definição 2.2.8 *(KILGOUR, 1985) Um estado $s \in S$ é estável de acordo com o conceito movimento limitado com horizonte h (L_h) para DM $i \in N$ se, e somente se, $G_h(i,s) = s$.*

Vamos analisar o Dilema dos prisioneiros com a estabilidade do movimento limitado considerando um horizonte de 3 passos, ou seja, $h = 3$. Para facilitar a compreensão, utilizaremos uma árvore de decisão e realizaremos a análise por indução reversa. Primeiramente, observe o que ocorre com o estado s_1, quando o DM 1 antecipa os próximos 3 passos em relação ao estado final do conflito, levando em conta que ele tem conhecimento das preferências dos DMs envolvidos. A árvore de decisão correspondente é mostrada na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Árvore de decisão do DM 1 a partir de s_1 - L_3



No último passo, o DM deve escolher entre permanecer em s_4 ou mover-se para s_2. Como $s_4 \succ_i s_2$, ele optará por permanecer em s_4. No passo anterior, como s_4 é preferível a s_3 para o DM 2, temos que o DM 2 sairá de s_3 para s_4. Finalmente, no estado inicial s_1, como s_1 é melhor que s_4 para o DM 1, temos que o DM 1 irá permanecer em s_1. Logo, podemos concluir que o estado s_1 (CC) é estável no movimento limitado para $h = 3$. Além disso, como o estado s_4 (DD) é estável em Nash, ele também é estável em L_3.

Estabilidade Maximin$_h$

Proposta por Wald (1945), a regra de decisão maximin escolherá a ação que, na pior das hipóteses, proporciona a melhor consequência possível. Ou seja, o decisor observará qual seria a pior consequência que poderia obter em relação a cada uma das suas possíveis ações e, diante disso, escolherá a ação que, na pior das hipóteses, lhe oferece a melhor consequência. Na Teoria dos Jogos (NEUMANN; MORGENSTERN, 2007), o caso em que ambos os jogadores escolhem simultaneamente uma estratégia que consegue o melhor retorno no pior caso, mas que não permite o comportamento prospectivo dos DMs chama-se equilíbrio maximin.

Rêgo e Vieira em 2019, inspirados na regra de decisão maximin, propuseram uma nova noção de estabilidade dentro do GMCR, chamada estabilidade Maximin$_h$. Este conceito é inspirado na noção de estabilidade movimento limitada (L_h) (KILGOUR, 1985) e pode ser útil em situações em que os DMs agem cautelosamente, ou seja, quando não possuem necessariamente conhecimento das preferências dos seus oponentes.

Além de não requerer conhecimento sobre as preferências dos adversários, a estabilidade Maximin$_h$ proporciona algumas vantagens interessantes, pois é flexível no que diz respeito ao horizonte do conflito, e fornece conhecimentos a outros conceitos de solução comumente utilizados na literatura da GMCR, uma vez que alguns destes são equivalentes a casos especiais da estabilidade Maximin$_h$.

Considere um modelo grafo com dois DMs, digamos i e j, de modo que quando DM i analisa o conflito considerando um horizonte h, ele acredita que DM j se deslocará para o pior cenário possível em relação ao DM i, admitindo que DM i se deslocará sempre para o melhor cenário possível considerando um horizonte $h' < h$.

Uma vez que de acordo com a estabilidade Maximin$_h$ o DM focal, prevê o conflito h passos à frente, é também necessário definir o estado que ela acredita que será o estado final do conflito após h movimentos. Seja $G_h^i(j,s) \in S, i, j \in N$ o estado final antecipado pelo DM i, com um movimento inicial de DM j a partir do estado s considerando um horizonte h. Por convenção, assume-se que $G_0^i(\cdot,s) = s$ e, o estado $G_h^i(i,s)$, é formalmente definido indutivamente, como:

$$G_h^i(i,s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_i(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \geq A_h^i(i,s) \\ G_{h-1}^i(j, M_h^i(i,s)), & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $M_h^i(i,s)$ é algum estado $s_1' \in R_i(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}^i(j,s_1')) = max\{K_i(G_{h-1}^i(j,s_1)) : s_1 \in R_i(s)\}, j \neq i$, e $A_h^i(i,s) = K_i(G_{h-1}^i(j, M_h^i(i,s)))$.

Além disso, $G_h^i(j,s)$ é definido da forma:

$$G_h^i(j,s) = \begin{cases} s, & \text{se } R_j(s) = \emptyset \\ s, & \text{se } K_i(s) \leq A_h^i(j,s) \\ G_{h-1}^i(i, M_h^i(j,s)), & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2.2}$$

em que $M_h^i(j,s)$ é algum estado $s_1^{'} \in R_j(s)$ que satisfaz $K_i(G_{h-1}^i(i,s_1^{'})) = min\{K_i(G_{h-1}^i(i,s_1)) : s_1 \in R_j(s)\}, j \neq i$, e $A_h^i(j,s) = K_i(G_{h-1}^i(i,M_h^i(j,s)))$.

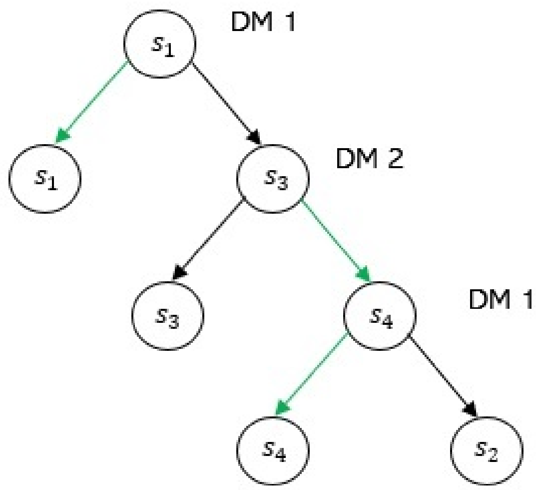
Assim, a definição formal da estabilidade Maximin$_h$ é a seguinte:

Definição 2.2.9 *(RÊGO; VIEIRA, 2019) Para qualquer inteiro positivo h, o estado $s \in S$ é maximin estável com horizonte h (Maximin$_h$) para DM i se, e somente se, $G_h^i(i,s) = s$.*

No caso de conflitos multilaterais, a estabilidade Maximin$_h$ é definida de forma semelhante ao caso bilateral. A única alteração necessária é a substituição do conjunto R_j por R_{N-i} (RÊGO; VIEIRA; KILGOUR, 2022).

Diferentemente do L_h, onde todos os DMs buscam maximizar suas preferências, no caso do Maximin$_h$, quando o DM 2 faz sua escolha, ele não leva em conta suas próprias preferências. Em vez disso, ele minimiza as preferências do DM 1, que está tentando maximizar suas próprias escolhas. Note que o DM 2 tem a opção de permanecer em s_3, o que maximiza o resultado para o DM 1, ou mover-se para s_4, que minimiza esse resultado. Como resultado, o DM 2 opta por se mover para o estado s_4. Em seguida, o DM 1 deve decidir entre permanecer no estado s_1 ou migrar para s_3, antecipando que o conflito irá acabar em s_4. Como s_1 é preferível a s_4 para o DM 1, o DM 1 prefere ficar em s_1. Isso torna o estado Maximin$_3$ estável para o DM 1. Temos também que o estado s_4 (DD) é um equilíbrio de Nash, o que confirma a estabilidade do Maximin$_3$ (Figura 2.5).

Figura 2.5 – Árvore de decisão do DM 1 a partir de s_1 - Maximin$_3$



Estabilidade Maximin$_h$ Credível

Mais recentemente, Rêgo *et al.* em 2022 propuseram três variações do conceito de estabilidade Maximin$_h$, denominado maximin credível. Estas variações diferem entre si pela possibilidade do DM focal ou seus oponentes adotarem apenas movimentos credíveis, ao analisar o conflito de acordo com o conceito Maximin$_h$. Essas variações generalizam, para horizontes variáveis, as estabilidades sequencial e sequencial simétrica. A seguir, recordaremos, brevemente, essas variações da estabilidade Maximin$_h$.

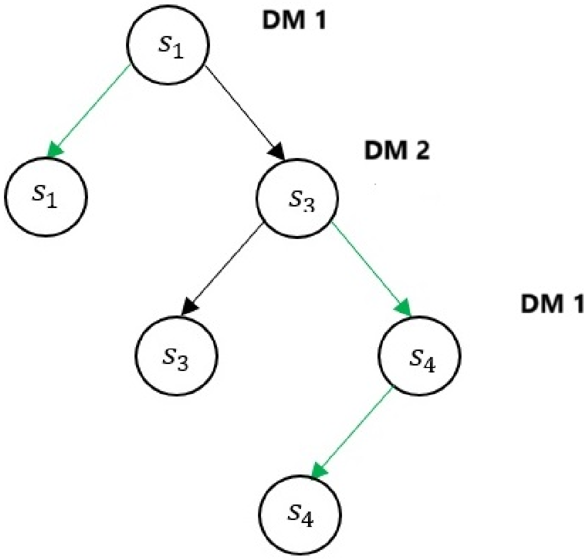
Estabilidade Maximin com DM Focal Credível

Neste conceito de estabilidade, o DM focal, ao analisar a estabilidade de um estado de acordo com a noção Maximin$_h$, não pode fazer movimentos unilaterais que não sejam melhorias unilaterais. Dessa forma, o estado antecipado pelo DM i, quando ele se move primeiro no estado s e o conflito é analisado h passos à frente, denotado por, $G_h^{i,Fc}(i,s)$, em que Fc representa que o DM focal realiza somente movimentos de melhorias unilaterais, é definido de maneira análoga ao estado $G_h^i(i,s)$, sendo que a única diferença necessária é substituir $R_i(s)$ por $R_i^+(s)$ na definição do estado $G_h^i(i,s)$ apresentada na Equação 2.1. Além disso, assumindo que $N-\{i\}=N_i$, o estado $G_h^{i,Fc}(N_i,s)$ é definido exatamente da mesma que o estado $G_h^i(N_i,s)$, apresentado na Equação 2.2. Formalmente, um estado maximin com DM focal credível estável é definido da seguinte maneira:

Definição 2.2.10 *(RÊGO; VIEIRA; KILGOUR, 2022) Para qualquer inteiro positivo h, o estado $s \in S$ satisfaz a estabilidade maximin com DM focal credível com horizonte h (Maximin$^c(h)$) para DM $i \in N$, se, e somente se, $G_h^{i,Fc}(i,s)=s$.*

Observe que, na Figura 2.6 o DM 1 não pode fazer movimentos unilaterais que não sejam melhorias unilaterais. Portanto, em s_4, o DM 1 só tem a opção de permanecer em s_4. Logo, de forma análoga à análise para o conflito do Dilema dos prisioneiros para a estabilidade Maximin$_3$, temos que para $h=3$ o estado s_1 (CC) é Maximin$_3$ com DM Focal Credível estável e s_4 (DD) é Nash estável, logo Maximin$_3$ com DM Focal Credível estável. A análise é semelhante para as estabilidades Maximin$_3$ com Oponente Credível e Total Credível.

Figura 2.6 – Árvores de decisão do DM 1 - Maximin$_3^c$ - DM Focal



Estabilidade Maximin$_h$ com Oponente Credível

Em situações em que os oponentes do DM focal podem realizar apenas melhorias unilaterais, ao analisar a estabilidade de um estado de acordo com a noção Maximin$_h$, denotamos o estado antecipado pelo DM i, quando ele se move primeiro no estado s e o conflito é analisado h passos à frente, por $G_h^{i,Oc}(i,s)$, em que Oc representa o oponente , que também é definido de maneira análoga ao estado $G_h^i(i,s)$, sendo necessário realizar uma substituição do $R_{N_i}(s)$ por $R_{N_i}^+(s)$ na definição do estado $G_h^i(N_i,s)$ apresentada na Equação 2.2. Ademais, o estado $G_h^{i,Oc}(i,s)$ é definido semelhantemente ao estado $G_h^i(i,s)$, apresentado na Equação 2.1. A definição da estabilidade maximin com oponente credível é apresentada formalmente a seguir.

Definição 2.2.11 *(RÊGO; VIEIRA; KILGOUR, 2022) Para qualquer inteiro positivo h, o estado $s \in S$ satisfaz a estabilidade maximin com oponente credível com horizonte h ($CMaximin(h)$) para DM $i \in N$, se e somente se $G_h^{i,Oc}(i,s) = s$.*

Estabilidade Maximin$_h$ Credível Total

Neste conceito de solução, todos os DMs não podem fazer movimentos unilaterais que não sejam melhorias unilaterais para eles. Conforme a noção de estabilidade Maximin$_h$, $G_h^{i,Tc}(i,s)$ denota o estado antecipado pelo DM i, quando ele se move primeiro no estado s e o conflito é analisado h passos à frente. Ele é definido de forma semelhante ao estado $G_h^i(i,s)$, sendo que a única diferença necessária é substituir $R_i(s)$ por $R_i^+(s)$ na definição do estado $G_h^i(i,s)$ apresentada na Equação 2.1. Temos também que, o estado $G_h^{i,Tc}(N_i,s)$ é definido exatamente da mesma forma que o estado $G_h^i(N_i, s)$, apresentado na Equação 2.2, exceto pela substituição do $R_{N_i}(s)$ por $R^+_{N_i}(s)$. A definição formal de estabilidade maximin credível total pode ser observada na definição a seguir.

Definição 2.2.12 *(RÊGO; VIEIRA; KILGOUR, 2022) Para qualquer inteiro positivo h, o estado $s \in S$ satisfaz a estabilidade maximin credível total com horizonte h ($CMaximin^c(h)$) para DM $i \in N$, se somente se $G_h^{i,Tc}(i,s) = s$.*

2.3 ALGUMAS REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DE CONCEITOS DE ESTABILIDADE NO GMCR

A representação matricial não elimina a necessidade de buscas exaustivas em problemas complexos, mas proporciona uma base sólida para realizar essa análise de forma mais eficiente, organizada e visualmente compreensível. Isso a torna uma ferramenta indispensável na modelagem e solução de problemas de decisão e teoria dos jogos.

Em Xu (2007 e 2008), são propostos métodos matriciais para se determinar estabilidade de acordo com alguns dos conceitos clássicos de solução no GMCR com dois e múltiplos DMs, respectivamente. Estes resultados matriciais auxiliam na utilização de códigos computacionais para determinar estabilidades de estados mais rapidamente, sendo cruciais para a análise de conflitos com numerosos DMs ou estados. Recordamos, a seguir, algumas dessas representações, que serão importantes para o desenvolvimento de resultados desta tese.

Em 2007, Xu *et al.* definiram duas matrizes para expressar as acessibilidades e melhorias unilaterais dos DMs. Essas matrizes são chamadas de matriz de acessibilidade, denotada por J_i, e a matriz de melhoria unilateral, denotada por J_i^+. Formalmente, J_i e J_i^+ são matrizes $0-1$, de ordem $|S|$, cujas entradas (s,s') são definidas, respectivamente, como se segue:

$$J_i(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } s' \in R_i(s) \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \tag{2.3}$$

e

$$J_i^+(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } J_i(s,s') = 1 \text{ e } s' \succ_i s, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Note que na matriz J_i (resp. J_i^+) a entrada (s,s') recebe o valor 1 se o estado s' for unilateralmente alcançável (resp. uma melhoria unilateral) a partir do estado s pelo DM i. Caso contrário, a entrada de (s,s') da matriz J_i (resp. J_i^+) recebe o valor 0.

Diversas matrizes relacionadas as representações das preferências dos DMs também foram propostas por Xu *et al.* em 2007. A matriz de preferências estritas, denotada por P_i^+, é uma matriz de ordem $|S|$ cujo elemento (s,s') é:

$$P_i^+(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } s' \succ_i s, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Enquanto isso, as matrizes de menor preferência (P_i^-) e indiferença ($P_i^=$) são definidas da seguinte forma por:

$$P_i^-(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } s \succ_i s', \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.6}$$

$$P_i^=(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } s \sim_i s', \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Por meio da matriz P_i^+, define-se a matriz de preferências não estrita, $P_i^{-,=}$, cujo elemento (s,s') é dado por:

$$P_i^{-,=}(s,s') = 1 - P_i^+(s,s'). \tag{2.8}$$

Esta definição de $P_i^{-,=}$ foi proposta por Rêgo e Vieira (2021), pois a definição original dada por Xu em 2007 fazia com que os elementos da diagonal principal de $P_i^{-,=}$ fossem nulos, podendo não representar corretamente as definições de estabilidades lógicas se os oponentes puderem sancionar o DM focal regressando ao estado original.

Podemos também relacionar as definições das matrizes UM (J_i) e UI (J_i^+) e a matriz de preferência (P_i^+), esta relação é dada por:

$$J_i^+ = J_i \circ P_i^+, \tag{2.9}$$

em que $\circ$ é o produto Hadamard, ou seja, $J_i^+(s,s') = J_i(s,s')P_i^+(s,s')$.

Outra matriz utilizada em Xu *et al.* em 2007 é a matriz sinal, denotada por $sinal(\cdot)$. Seja W uma matriz de ordem $|S|$, desta forma, $sinal(W)$ é uma matriz de ordem $|S|$ tal que a entrada (s,s') é:

$$sinal[W](s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } W(s,s') > 0, \\ 0 & \text{se } W(s,s') = 0, \\ -1 & \text{se } W(s,s') < 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Da mesma forma, ao aplicar a função sinal, $sinal(\cdot)$, a um número real y, o resultado será -1, 0 ou 1, dependendo se y for menor que 0, igual a 0, ou maior que 0, respectivamente.

Ao lidar com conflitos com múltiplos DMs, Xu *et al.* em 2008 forneceram representações matriciais que correspondem aos conjuntos de estados alcançáveis através de uma sequência legal de UMs, R_H, ou UIs, R_H^+. As matrizes com estes objetivos, indicadas respectivamente por J_H (matriz de movimentos conjuntos) e J_H^+ (matriz de melhoramento conjunto), são matrizes de ordem $|S|$ tais que suas entradas $(s,s^{'})$ são definidas da seguinte forma:

$$J_H(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } s' \in R_H(s), \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.11}$$

e

$$J_H^+(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } s' \in R_H^+(s), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Xu *et al.* em 2008 mostraram que as matrizes J_H e J_H^+ podem ser calculadas a partir das matrizes J_i e J_i^+, respectivamente. Para isso, assuma que Z_1 e Z_2 sejam matrizes $0-1$ de ordem $|S|$ e que $Z = Z_1 \vee Z_2$ seja uma matriz tal que a sua entrada (s,s') seja definida da seguinte forma:

$$Z(s,s') = \begin{cases} 1 & \text{se } \ Z_1(s,s') + Z_2(s,s') \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Seja $\delta = |\cup_{i\in N} \cup_{s\in S} R_i(s)|$ (resp. $\delta^+ = |\cup_{i\in N} \cup_{s\in S} R_i^+(s)|$) um limite superior para o número de movimentos legais necessários para obter todos os estados em alguma lista $R_H(s)$, para qualquer $s \in S$, (resp. $R_H^+(s)$), e seja $J_{i,H}^r$ (resp. $J_{i,H}^{r,+}$) a matriz com entrada (s,s') igual a 1 se o DM i faz o primeiro movimento e s' é alcançável a partir do estado s em exatamente $r \geq 1$ movimentos legais (resp. r movimentos legais de melhoria unilateral) de DMs em H; caso contrário, ela é igual a 0. Assim, segue-se que:

$$J_{i,H}^r = sinal\left(J_i \cdot \left(\bigvee_{j \in H-i} J_{j,H}^{(r-1)}\right)\right) \tag{2.14}$$

e

$$J_{i,H}^{r,+} = sinal\left(J_i^+ \cdot \left(\bigvee_{j \in H-i} J_{j,H}^{(r-1,+)}\right)\right), \tag{2.15}$$

em que $J_{i,H}^1 = J_i$ e $J_{i,H}^{1,+} = J_i^+$. Desta forma, Xu et al. (XU; HIPEL; KILGOUR, 2008) estabeleceram que

$$J_H = \bigvee_{r=1}^{\delta} \bigvee_{i \in H} J_{i,H}^{(r)} \tag{2.16}$$

e

$$J_H^+ = \bigvee_{r=1}^{\delta^+} \bigvee_{i \in H} J_{i,H}^{(r,+)}. \tag{2.17}$$

Em Xu *et al.* (2008), há exemplos de como as matrizes $J_{i,H}^r$, $J_{i,H}^{r,+}$, J_H e J_H^+ podem ser calculadas.

Por fim, as representações matriciais também fazem uso de uma matriz quadrada de ordem |S| com todas entradas iguais a 1, denotada por E. Vale ressaltar também que e_k é um vetor coluna |S|-dimensional com o k-ésimo elemento igual a 1 e todos os outros elementos iguais a zero.

2.4 CONCEITOS CLÁSSICOS: REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

Apresentaremos, a matriz de conceitos de solução (MRSC) de alguns casos clássicos fortemente conhecidos na literatura para conflitos bilaterais. O método MRSC, incorpora um conjunto de matrizes de ordem $|S|$, M_i^{Nash}, M_i^{GMR}, M_i^{SMR}, M_i^{SEQ} e M_i^{SSEQ}. As quatro primeiras formas matriciais dos conceitos que serão apresentadas a seguir, foram obtidas por (XU *et al.*,

2018) e (XU *et al.*, 2019). A quinta forma matricial foi proposta em (RÊGO; VIEIRA, 2021). Nesses trabalhos são apresentadas as devidas provas desses resultados.

1. Matriz Nash: $M_i^{Nash} = J_i^+ E$
2. Matriz GMR: $M_i^{GMR} = J_i^+[E - sinal(J_j(P_i^{-,=})^\top)] \;\; j \in N, j \neq i$
3. Matriz SMR: $M_i^{SMR} = J_i^+[E - sinal(J_j[(P_i^{-,=})^\top \circ (E - sinal(J_i(P_i^+)^\top))])] \;\; j \in N, j \neq i$
4. Matriz SEQ: $M_i^{SEQ} = J_i^+[E - sinal(J_j^+(P_i^{-,=})^\top)] \;\; j \in N, j \neq i$
5. Matriz SSEQ: $M_i^{SSEQ} J_i^+[E - sinal(J_j^+[(P_i^{-,=})^\top \circ (E - sinal(J_i(P_i^+)^\top))])] \;\; j \in N, j \neq i$

Para $X \in \{Nash, GMR, SMR, SEQ, SSEQ\}$, o estado s satisfaz a estabilidade X para o DM i se e somente se $M_i^X(s,s) = 0$.

No caso da matriz Nash, a multiplicação entre essas matrizes retorna uma matriz tal que seu elemento (s,s'), $M_i^{Nash}(s,s')$, é igual a linha s da matriz J_i^+ multiplicada pela coluna s dessa matriz E que é uma coluna de $1's$. Ou seja, estamos somando todos os elementos da linha s da matriz J_i^+ (melhorias unilaterais). Então, estamos somando a quantidade de estados acessíveis e melhores que s, logo, ele será Nash se esta soma for nula.

Na M_i^{GMR} estamos deixando de somar o valor resultante do sinal entre J_j e $(P_i^{-,=})^\top$, significando que o j consegue acessar um estado que não é preferível para o DM i. Quando o DM j consegue acessar um estado que seja pior ou igual para o DM i, essa matriz sinal será 1. Ou seja, é uma retaliação, então mesmo que o DM i tenha uma melhoria do estado s para o estado s', a partir de s', o DM j vai levar o conflito para um cenário pior ou igual para o DM i. Desta forma, a melhoria de s para s' não entra na soma dos elementos com a J_i^+. No caso do SMR, o último termo está capturando justamente as suas próprias contra-reações e a matriz SEQ é semelhante ao GMR, a única diferença é que ele consegue capturar que o DM j só se mova para estados de melhorias para ele.

No caso de conflitos multilaterais, basta usar as matrizes $J_{N-\{i\}}$ e $J_{N-\{i\}}^+$ no lugar de J_j e J_j^+, respectivamente.

No capítulo a seguir fornecemos representações matriciais para obtenção de estabilidades de acordo com a noção sequencial de ordem superior no modelo de grafos para resolução de conflitos, em casos bilaterais e multilaterais. Também fornecemos aplicações para ilustrar a utilidade das representações obtidas.

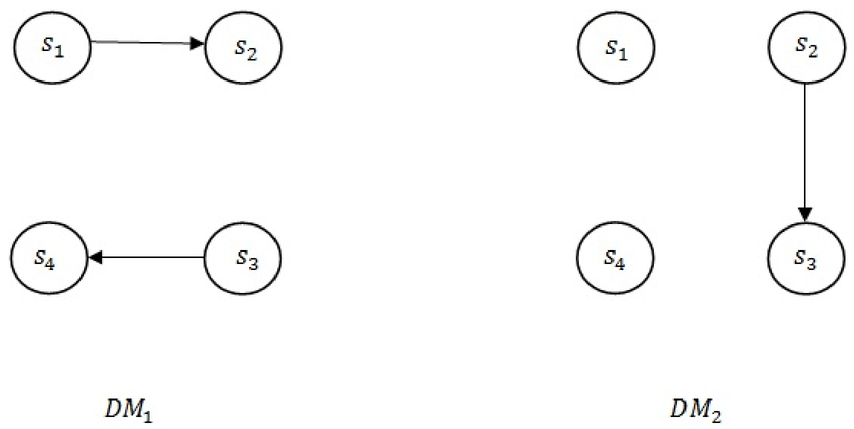
3 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DAS ESTABILIDADES SEQUENCIAIS DE ORDEM SUPERIOR NO MODELO GRAFO PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

3.1 INTRODUÇÃO

Na estabilidade SEQ, ao considerar a mudança para um estado mais preferido, o DM prevê se o oponente pode reagir levando o conflito a um estado menos preferível do que o atual, desde que a reação do oponente também beneficie a ele. No entanto, existem situações em que, para realizar tal reação, o oponente deve deixar um estado SEQ estável para ele, o que torna essa ameaça não credível.

O exemplo a seguir ilustra um cenário de análise do conceito SEQ, focando na reação ao DM focal relacionado à situação em que o adversário sai de um estado que é SEQ para ele mesmo não sendo Nash estável.

Figura 3.1 – Ilustração do SEQ não credível



Analisando a estabilidade do jogo, vemos que o estado s_1 é considerado SEQ (e SSEQ) para o DM 1, indicando que, nesse cenário, o DM 1 está em uma situação de equilíbrio. Por outro lado, o DM 2 apresenta um melhoramento a partir do estado s_2, o que provoca um conflito que resulta no estado s_3. No entanto, o estado s_3 é menos favorável para o DM 1 do que o estado s_1, tornando-o uma opção inferior. Além disso, a punição do DM 2 ao sair do estado s_2 e ir para o estado s_3 não é considerada crível, uma vez que o estado s_2 é um SEQ para o DM 2, sugerindo que ele prefere permanecer nesse estado.

Desta forma, Rêgo e Oliveira (2020 e 2023) propuseram a estabilidade sequencial de ordem superior, modificando o conceito de estabilidade sequencial a fim de mitigar o problema das ameaças não credíveis inerente a esse conceito. Isto retifica o fato de que, na estabilidade SEQ, um DM pode deixar um estado que é SEQ para ele apenas para punir o seu oponente.

A estabilidade sequencial de ordem superior identifica quais são as possíveis sanções plausíveis que os oponentes do DM focal podem impor a ele. Ou seja, DMs não devem deixar os estados que são SEQ para eles. A fim de evitar uma definição circular, é necessário definir múltiplas ordens de estabilidade SEQ.

Em conflitos complexos, caracterizados por um grande número de estados ou vários DMs, a análise de estabilidade utilizando definições lógicas torna-se inviável. Nesse contexto, a construção de representações matriciais pode tornar a obtenção de estados estáveis mais eficaz, uma vez que proporciona uma análise de estabilidade mais rápida, baseada em estruturas algébricas flexíveis, e convertendo a análise de estabilidade de uma estrutura lógica para um sistema matricial. Mesmo em conflitos menores, a análise pode ser exaustiva, o que torna o desenvolvimento de métodos computacionais para encontrar estados estáveis extremamente relevante.

Neste capítulo, nosso principal objetivo é fornecer métodos matriciais para determinar estabilidades sequenciais de ordem superior no modelo de grafos para a resolução de conflitos com dois ou múltiplos DMs. A fim de capturar estabilidades sequenciais de ordem superior, são derivadas equações matriciais recursivas. Desta forma, na Seção 3.2 serão apresentadas as propriedades e definições das representações matriciais para este conceito. Adicionalmente, na Seção 3.3, com o objetivo de ilustrar a utilidade das representações obtidas, realizamos aplicações dos métodos propostos a conflitos já existentes na literatura sobre o GMCR, considerando tanto 2-DMs quanto n-DMs. Vale ressaltar que este trabalho encontra-se submetido no periódico *Group Decision and Negotiation*.

3.2 REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DO CONCEITOS DE SOLUÇÃO m-SEQ

Nesta seção, são desenvolvidos métodos matriciais para determinar estados estáveis $m-SEQ$ no GMCR considerando conflitos com dois e n DMs.

3.2.1 Caso Bilateral

Sabemos que para que o estado seja estável m-SEQ, a reação do seu oponente, além de ser uma melhoria unilateral, não deve desviar-se de um estado estável $(m-1)$-SEQ. Como veremos no Teorema 3.2.1, podemos obter estados estáveis de acordo com esse conceito a partir da seguinte representação matricial, M_i^{m-SEQ}, para o m-SEQ, que é dada por:

$$M_i^{m-SEQ} = J_i^+[E - sinal(J_j^{(m,+)}(P_i^{-,=})^\top)] \quad , j \in N, j \neq i \tag{3.1}$$

em que, $J_j^{(m,+)}$ é dado por:

$$J_j^{(m,+)} = sinal(I \circ M_j^{((m-1)-SEQ)})J_j^+ \ \forall \ m \geq 2, \tag{3.2}$$

em que I é a matriz identidade de ordem $|S|$ e $M_j^{(1-SEQ)} = M_j^{SEQ}$, uma vez que o conceito $1-SEQ$ é por definição igual a SEQ.

O Teorema 3.2.1 a seguir estabelece que um estado s é $m-SEQ$ estável para um DM i se e somente se o elemento que se encontra na linha s e na coluna s da matriz M_i^{m-SEQ} for igual a zero.

Teorema 3.2.1*Seja $s \in S$ e $i \in N$, então s é $m-SEQ$ para DM i se, e somente se, $M_i^{(m-SEQ)}(s,s) = 0$.*

Prova: A prova será feita por indução em m. Primeiro, suponhamos que $m = 2$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} M_i^{2-SEQ}(s,s) &= \sum_{s_1 \in S} J_i^+(s,s_1)[E - sinal(J_j^{(2,+)}(P_i^{-,=})^T)](s_1,s) \\ &= \sum_{s_1 \in S} J_i^+(s,s_1)[1 - sinal(\sum_{s_2 \in S} J_j^{(2,+)}(s_1,s_2)(P_i^{-,=})^T(s_2,s))] \\ &= \sum_{s_1 \in S} J_i^+(s,s_1)[1 - sinal(\sum_{s_2 \in S} J_j^{(2,+)}(s_1,s_2)P_i^{-,=}(s,s_2))] \end{aligned}$$

Portanto, segue-se que $M_i^{2-SEQ}(s,s) = 0$ se somente se, para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existir $s_2 \in S$ tal que $J_j^{(2,+)}(s_1,s_2) = 1$ e $P_i^{-,=}(s,s_2) = 1$.

Note que $P_i^{-,=}(s,s_2) = 1$ se somente se $s \gtrsim_i s_2$. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
J_j^{(2,+)}(s_1,s_2) &= \sum_{s_3 \in S} sinal(I \circ M_j^{SEQ})(s_1,s_3) J_j^+(s_3,s_2) \\
&= \sum_{s_3 \in S} sinal(I(s_1,s_3) M_j^{SEQ}(s_1,s_3)) J_j^+(s_3,s_2) \\
&= sinal(M_j^{SEQ}(s_1,s_1)) J_j^+(s_1,s_2)
\end{aligned}$$

Assim, $J_j^{(2,+)}(s_1,s_2) = 1$ se somente se $M_j^{SEQ}(s_1,s_1) \neq 0$ e $J_j^+(s_1,s_2) = 1$. Em outras palavras, $J_j^{(2,+)}(s_1,s_2) = 1$ se somente se $s_1 \notin S_j^{SEQ}$ e $s_2 \in R_j^+(s_1)$.

Portanto, $M_i^{2-SEQ}(s,s) = 0$ se somente se para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existir $s_2 \in S$ tal que $s \succsim_i s_2$, $s_1 \notin S_j^{SEQ}$ e $s_2 \in R_j^+(s_1)$. Consequentemente, $M_i^{2-SEQ}(s,s) = 0$ se somente se $s \in S_i^{2-SEQ}$.

Assumindo agora a hipótese de indução de que $M_i^{(m-1)-SEQ}(s,s) = 0$ se somente se $s \in S_i^{(m-1)-SEQ}$, $\forall i \in N$. Temos que:

$$\begin{aligned}
M_i^{m-SEQ}(s,s) &= \sum_{s_1 \in S} J_i^+(s,s_1)[E - sinal(J_j^{(m,+)}(P_i^{-,=})^T)](s_1,s) \\
&= \sum_{s_1 \in S} J_i^+(s,s_1)[1 - sinal(\sum_{s_2 \in S} J_j^{(m,+)}(s_1,s_2)(P_i^{-,=})^T(s_2,s))] \\
&= \sum_{s_1 \in S} J_i^+(s,s_1)[1 - sinal(\sum_{s_2 \in S} J_j^{(m,+)}(s_1,s_2)P_i^{-,=}(s,s_2))]
\end{aligned}$$

Assim, segue-se que $M_i^{m-SEQ}(s,s) = 0$ se somente se para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existir $s_2 \in S$ tal que $J_j^{(m,+)}(s_1,s_2) = 1$ e $P_i^{-,=}(s,s_2) = 1$.

Posteriormente, note que

$$\begin{aligned}
J_j^{(m,+)}(s_1,s_2) &= \sum_{s_3 \in S} sinal(I \circ M_j^{(m-1)-SEQ})(s_1,s_3) J_j^+(s_3,s_2) \\
&= \sum_{s_3 \in S} sinal(I(s_1,s_3) M_j^{(m-1)-SEQ}(s_1,s_3)) J_j^+(s_3,s_2) \\
&= sinal(M_j^{(m-1)-SEQ}(s_1,s_1)) J_j^+(s_1,s_2)
\end{aligned}$$

Assim, $J_j^{(m,+)}(s_1,s_2) = 1$ se somente se $M_j^{(m-1)-SEQ}(s_1,s_1) \neq 0$ e $J_j^+(s_1,s_2) = 1$. Logo, pela hipótese de indução, $J_j^{(m,+)}(s_1,s_2) = 1$ se somente se $s_1 \notin S_j^{(m-1)-SEQ}$ e $s_2 \in R_j^+(s_1)$.

Logo, $M_i^{m-SEQ}(s,s) = 0$ se somente se para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existir $s_2 \in S$ tal que $s \succsim_i s_2$, $s_1 \notin S_j^{(m-1)-SEQ}$ e $s_2 \in R_j^+(s_1)$. Consequentemente, $M_i^{m-SEQ}(s,s) = 0$ se somente se $s \in S_i^{m-SEQ}$. ∎

3.2.2 Caso Multilateral

Na estabilidade $m-SEQ$ para conflitos multilaterais, os oponentes de um DM podem realizar uma sequência de melhorias plausíveis UIs de ordem $m-1$ para sancionar o movimento inicial de algum DM, em que uma UI é considerada plausível de ordem $m-1$ se o DM não deixar um estado estável $(m-1)-SEQ$ para ele. Agora definimos a matriz conjunta de movimentos de melhoria plausíveis de ordem $m-1$, $J_H^{(m,+)}$, que representa o conjunto R_H^{+m}. A entrada (s,s_1) da matriz $J_H^{(m,+)}$ é dada por

$$J_H^{(m,+)}(s,s_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } s_1 \in R_H^{+m}(s), \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja δ^m o número máximo de movimentos em uma sequência legal UIs plausíveis de ordem $m-1$ a partir de s realizados pelos DMs em H necessários para alcançar um estado em $R_H^{+m}(s)$. δ^m é, no máximo, igual ao número total de UIs existentes no conflito, que é dado por $L = \sum_{i \in N} \sum_{s \in S} \sum_{s_1 \in S} J_i^+(s,s_1)$.

Como a sequência de movimentos de sanção de UIs plausíveis de ordem $m-1$ realizada pelos oponentes do DM focal pode ter comprimentos diferentes, seja $J_{i,H}^{(m,t,+)}$ uma matriz de ordem $|S|$ que representa os estados alcançáveis por uma sequência de exatamente t UIs Plausíveis de ordem $m-1$ realizadas pelos DMs em H, onde o DM i faz o primeiro movimento. O elemento (s,s_1) de $J_{i,H}^{(m,t,+)}$ é formalmente definido como:

$$J_{i,H}^{(m,t,+)}(s,s_1) = \begin{cases} 1 & \text{se, de } s \in S, s_1 \in S \text{ pode ser alcançado} \\ & \text{exatamente em } t \text{ UIs legais e DM } i \text{ é o primeiro a se mover,} \\ & \text{em que nenhuma das UI deixa um } (m-1)-SEQ \\ & \text{estado estável para o DM que se move,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.3}$$

O Lema 3.2.1 mostra como obter $J_{i,H}^{(m,t,+)}$ de forma indutiva.

Lema 3.2.1 *Para $m \geq 2$ e $t \geq 2$, $J_{i,H}^{(m,t,+)}$ é dado recursivamente por*

$$J_{i,H}^{(m,t,+)} = sinal\left(J_i^{(m,+)}\left(\bigvee_{j \in H-\{i\}} J_{j,H}^{(m,t-1,+)}\right)\right), \tag{3.4}$$

em que $J_{j,H}^{(m,1,+)} = J_j^{(m,+)} = sinal(D \circ M_j^{((m-1)-SEQ)})J_j^+$, $\forall j \in N$.

Prova: Como o caso $t = 2$ tem um formato especial, vamos prová-lo primeiro.

$$\begin{aligned} J_{i,H}^{(m,2,+)} &= sinal\left(J_i^{(m,+)}\left(\bigvee_{j\in H-\{i\}} J_{j,H}^{(m,1,+)}\right)\right) \\ &= sinal\left(J_i^{(m,+)}\left(\bigvee_{j\in H-\{i\}} J_j^{(m,+)}\right)\right). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} J_{i,H}^{(m,2,+)}(s,s_2) &= sinal\left(\sum_{s_1\in S} J_i^{(m,+)}(s,s_1)\left(\bigvee_{j\in H-\{i\}} J_j^{(m,+)}\right)(s_1,s_2)\right) \\ &= sinal\left(\sum_{s_1\in S} J_i^{(m,+)}(s,s_1) sinal\left(\sum_{j\in H-\{i\}} J_j^{(m,+)}(s_1,s_2)\right)\right). \end{aligned}$$

Assim, $J_{i,H}^{(m,2,+)}(s,s_2) = 1$ se e somente se existir $s_1 \in S$ e $j \in H - \{i\}$ tal que $J_i^{(m,+)}(s,s_1) = 1$ e $J_j^{(m,+)}(s_1,s_2) = 1$. Na prova do Teorema 3.2.1, mostramos que $J_j^{(m,+)}(s_1,s_2) = 1$ se e somente se $s_1 \notin S_j^{(m-1)-SEQ}$ e $s_2 \in R_j^+(s_1)$. Portanto, $J_{i,H}^{(m,2,+)}(s,s_2) = 1$ se e somente se existir $s_1 \in S$ e $j \in H - \{i\}$ tal que $s \notin S_i^{(m-1)-SEQ}$, $s_1 \in R_i^+(s)$, $s_1 \notin S_j^{(m-1)-SEQ}$ e $s_2 \in R_j^+(s_1)$. Assim, $J_{i,H}^{(m,2,+)}(s,s_2) = 1$ se e somente se existir uma sequência de melhorias plausíveis de ordem $m-1$ e comprimento 2, com o primeiro movimento sendo do DM i.

Para o caso geral, observe que qualquer sequência plausível de UIs de ordem m e comprimento t, com o primeiro movimento sendo do DM i, consiste em um primeiro movimento plausível de ordem $m-1$ do DM i, seguido por uma sequência de melhorias plausíveis de ordem $m-1$ e comprimento $t-1$, com o primeiro movimento sendo de qualquer outro DM em H diferente de i.

Desde que

$$\begin{aligned} J_{i,H}^{(m,t,+)}(s,s_t) &= sinal\left(\sum_{s_1\in S} J_i^{(m,+)}(s,s_1)\left(\bigvee_{j\in H-\{i\}} J_j^{(m,t-1,+)}\right)(s_1,s_t)\right) \\ &= sinal\left(\sum_{s_1\in S} J_i^{(m,+)}(s,s_1) sinal\left(\sum_{j\in H-\{i\}} J_j^{(m,t-1,+)}(s_1,s_t)\right)\right), \end{aligned}$$

Temos que $J_{i,H}^{(m,t,+)}(s,s_t) = 1$ se e somente se existir $s_1 \in S$ e $j \in H - \{i\}$ tal que $J_i^{(m,+)}(s,s_1) = 1$ e $J_j^{(m,t-1,+)}(s_1,s_t) = 1$. Portanto, $J_{i,H}^{(m,t,+)}(s,s_t) = 1$ se e somente se existir

$s_1 \in S$ e $j \in H - \{i\}$ tal que $s \notin S_i^{(m-1)-SEQ}$, $s_1 \in R_i^+(s)$, e s_t pode ser alcançado a partir de uma sequência plausível de UIs de ordem $m-1$ e comprimento $t-1$ a partir de s_1, onde o primeiro movimento é do DM j.

Assim, $J_{i,H}^{(m,t,+)}(s,s_t) = 1$ se e somente se existir uma sequência plausível de UIs de ordem $m-1$ e comprimento t de s para s_t, onde o primeiro movimento é do DM i. ∎

O Teorema 3.2.2 mostra como obter a matriz $J_H^{m,+}$ a partir das matrizes $J_i^{(m,+)}$, para $i \in H$.

Teorema 3.2.2 *Seja $\emptyset \neq H \subseteq N$. A matriz $J_H^{m,+}$ pode ser derivada da seguinte forma:*

$$J_H^{m,+} = \left(\bigvee_{t=1}^{L} \bigvee_{i \in H} J_{i,H}^{(m,t,+)} \right). \tag{3.5}$$

Prova: Note que $J_H^{m,+}(s,s_1) = 1$ se e somente se existir algum $t \geq 1$ e $i \in H$ tal que $J_{i,H}^{(m,t,+)}(s,s_1) = 1$. Portanto, $J_H^{m,+}(s,s_1) = 1$ se e somente se existir alguma sequência plausível de UIs de ordem $m-1$ de s para s_1 pelos DMs em H. ∎

O Teorema 3.2.3 estabelece a representação matricial m-SEQ para conflitos multilaterais.

Teorema 3.2.3 *Defina a matriz $M_i^{m-SEQ_n}$ de ordem $|S|$ como*

$$M_i^{m-SEQ_n} = J_i^+[E - sinal(J_{N-\{i\}}^{(m,+)}(P_i^{-,=})^T).$$

Para $i \in N$, $s \in S$ e $m \geq 2$, o estado s é considerado sequencial estavelmente de ordem m (m-SEQ) para o DM i se e somente se $M_i^{m-SEQ_n}(s,s) = 0$.

Prova: Usando um argumento idêntico ao utilizado na prova do Teorema 3.2.1, segue que $M_i^{m-SEQ_n}(s,s) = 0$ se e somente se para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existe $s_2 \in S$ tal que $J_{N-\{i\}}^{(m,+)}(s_1,s_2) = 1$ e $P_i^{-,=}(s,s_2) = 1$.

Por definição de $J_{N-\{i\}}^{(m,+)}$ e $P_i^{-,=}$, temos que $M_i^{m-SEQ_n}(s,s) = 0$ se e somente se para todo $s_1 \in R_i^+(s)$ existe $s_2 \in S$ tal que $s_2 \in R_{N-\{i\}}^{+m}(s_1)$ e $s \succsim_i s_2$. ∎

3.3 APLICAÇÕES

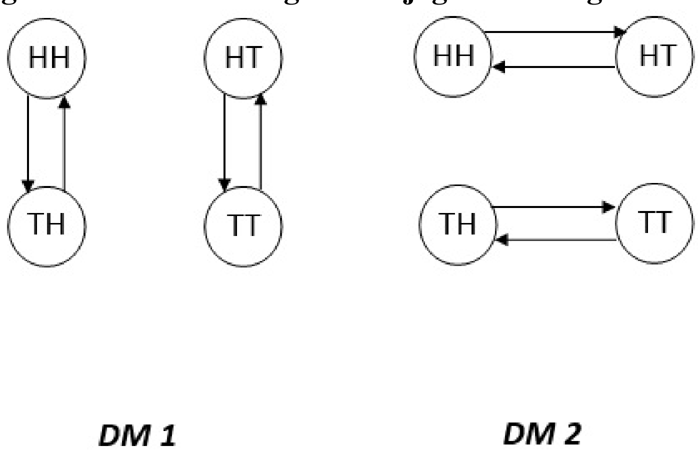
Apresentaremos, nesta seção, duas aplicações com a finalidade de ilustrar as representações matriciais para a estabilidade $m-SEQ$ obtidas neste capítulo. A primeira aplicação que consideramos foi o jogo Matching Pennies (GIBBONS, 1992) que refere-se ao caso de dois DMs. A outra aplicação, que envolve múltiplos DMs, consiste no conflito de renovação de instalações industriais privadas (WALKER; BOUTILIER; HIPEL, 2010). A partir dessas aplicações, enfatiza-se a importância da representação matricial para a estabilidade $m-SEQ$, na qual os métodos matriciais apresentam maior agilidade na resolução de conflitos.

3.3.1 Matching Pennies

O jogo Matching Pennies (GIBBONS, 1992) é considerado um exemplo clássico de um jogo de soma zero, em que num jogo de soma zero o ganho de um jogador é exatamente a perca do outro. Neste jogo, uma vez que em todas as situações possíveis, um dos jogadores tem um incentivo para mudar de estratégia, então não existem equilíbrios de Nash em estratégias puras.

Neste jogo, dois jogadores, que chamaremos de DM 1 e DM 2, movem-se de maneira simultânea, sendo que cada jogador terá uma moeda e deve escolher se quer exibir a "cara" (H) ou "coroa" (T) virada para cima. No caso em que as moedas corresponderem, o primeiro jogador ganha e fica com a moeda do outro jogador, mas se as moedas não corresponderem, o segundo jogador ganha e fica com a moeda. Este conflito é composto por quatro estados, a saber: $HH(s_1)$, $HT(s_2)$, $TH(s_3)$, e $TT(s_4)$. As preferências dos DMs 1 e 2 são dadas, respectivamente, por $HH \sim_1 TT \succ_1 HT \sim_1 TH$ e $HT \sim_2 TH \succ_2 HH \sim_2 TT$. A Figura 3.2 ilustra a forma de grafo desse conflito.

Figura 3.2 – Forma de grafo do jogo Matching Pennies



As matrizes de movimento unilateral (UM) para o DM 1 e para o DM 2, relacionadas com o jogo Matching Pennies no modelo de grafo apresentado na Figura 3.2 são dadas por:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

De acordo com a Definição 2.5, as matrizes de preferência dos DMs 1 e 2 são, respectivamente, dadas por:

$$P_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Temos também que as matrizes de melhorias unilaterais (UI) dos DMs 1 e 2 são, respectivamente, dadas por:

$$J_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Para obtermos as matrizes de preferências não estritas dos DMs 1 e 2, utilizamos $P_i^{-,=} = E - P_i^+$. Tais matrizes são dadas, respectivamente, por:

$$P_1^{-,=} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$P_2^{-,=} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Vamos inicialmente analisar a estabilidade 1-SEQ, que é equivalente a SEQ. Para isso, calculamos a matriz $M_i^{(1-SEQ)} = M_i^{SEQ} = J_i^+(E - sinal(J_j^+(P_i^{-,=})^\top)$ para ambos DMs:

$$\begin{aligned}
M_1^{1-SEQ} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - sinal \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
M_2^{1-SEQ} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - sinal \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, todos os estados são 1-SEQ estáveis para ambos os DMs. Da Equação 3.1, sabemos que a representação matricial para o m-SEQ do DM i é

$$M_i^{m-SEQ} = J_i^+[E - sinal(J_j^{(m,+)}(P_i^{-,=})^T)],$$

em que $J_j^{(m,+)} = sinal(I \circ M_j^{((m-1)-SEQ)})J_j^+$. Assim, temos que para $m = 2$:

$$
\begin{aligned}
J_1^{(2,+)} &= \left[sinal\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
J_2^{(2,+)} &= \left[sinal\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Consequentemente, M_i^{2-SEQ}, $i = 1, 2$, são dadas por:

$$
\begin{aligned}
M_1^{2-SEQ} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - sinal\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

e

Tabela 3.1 – ***Estados estáveis do jogo Matching Pennies de acordo com a estabilidade m-SEQ***

m-SEQ	HH (s_1)	HT (s_2)	TH (s_3)	TT (s_4)
m par	1	2	2	1
m impar	1,2	1,2	1,2	1,2

$$\begin{aligned} M_2^{2-SEQ} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - sinal \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \right] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, os estados s_1 e s_4 são 2-SEQ estáveis para DM 1 e, consequentemente, pelo Teorema 2.2.7, são m-SEQ estáveis para todos os $m \geq 2$ para DM 1. Por outro lado, os estados s_2 e s_3 são $2-SEQ$ estáveis para DM 2 e, consequentemente, pelo Teorema 2.2.7, são m-SEQ estáveis para todos os $m \geq 2$ para DM 2.

A Tabela 3.1 mostra os resultados obtidos de acordo com o Teorema 3.2.1 para todos os valores de $m \geq 1$. Como esperado, os resultados encontrados através da representação matricial foram os mesmos encontrados em Oliveira (2018) usando as definições lógicas.

3.3.2 Conflito de Renovação de Instalação Industrial Privada

Vamos agora ilustrar as representações matriciais obtidas neste capítulo em uma aplicação apresentada em Walker *et al.* (2010), envolvendo três DMs. O conflito consiste na transformação em área residencial de instalações industriais da empresa Kaufman Footwear na cidade de Kitchener, Ontário, Canadá, e é conhecido como conflito de renovação de instalação industrial privada. Neste conflito, tem-se que os decisores envolvidos são:

- Proprietário da propriedade (PO);
- Governo municipal (CG);
- Empresa imobiliária ou um promotor imobiliário (D).

O cenário de conflito é dado pelo fato de o proprietário do imóvel e a administração municipal estarem tentando atrair o comprador para adquirir o imóvel. O DM D, por outro lado, está interessado em comprar o imóvel pelo preço mais baixo possível e obter o maior benefício possível do DM *CG*, ao mesmo tempo que DM *PO* tenta aumentar o máximo possível o preço do imóvel. As opções para cada DM e os possíveis estados são apresentados na Tabela 3.2 a seguir.

Tabela 3.2 – *Estados viáveis no conflito de aquisição*

PO	Vender caro	N	Y	N	N	Y	N	N	Y	N	N	Y	N	-	-
	Vender barato	N	N	Y	N	N	Y	N	N	Y	N	N	Y	-	-
	Desistir	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	-	Y
CG	Incentivos	N	N	N	Y	Y	Y	N	N	N	Y	Y	Y	-	-
D	Comprar	N	N	N	N	N	N	Y	Y	Y	Y	Y	Y	-	-
	Desistir	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	Y	-
	Estado	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{13}

Fonte: (WALKER; BOUTILIER; HIPEL, 2010)

As opções disponíveis para os DMs são:

1. O proprietário (PO) pode vender a propriedade por um preço alto ou baixo;
2. O governo municipal (CG) pode oferecer incentivos para a compra da propriedade;
3. O promotor (D) tem a opção de comprar a instalação industrial;
4. O promotor (D) e o proprietário (PO) têm a opção de desistir da negociação, porém se escolherem esta opção, independentemente das opções tomadas pelos outros DMs, o promotor e o proprietário não podem voltar à negociação e o conflito vai terminar no estado 13 (como apresentado na tabela acima), ou seja, a única opção irreversível no conflito é quando o DM PO ou DM D decidem desistir;
5. Os outros DMs podem mudar o estado do conflito alterando as suas próprias opções, mantendo as opções dos outros DMs fixas.

As preferências relacionadas com os estados para cada DM são apresentadas na Tabela 3.3 abaixo. A classificação dos estados, para cada DM, é listada da esquerda para a direita, da mais preferível para a menos preferível. Os estados que estão entre parênteses são considerados igualmente preferidos.

Tabela 3.3 – Classificação dos estados do conflito de aquisição

DM	Ranking dos estados
PO	$(s_8, s_{11}), (s_1, s_2, s_4, s_5, s_7, s_{10}), (s_3, s_6, s_{13}), (s_9, s_{12})$
CG	$(s_8, s_9), (s_{11}, s_{12}), (s_1, s_2, s_3, s_7), (s_4, s_5, s_6, s_{10}), s_{13}$
D	$s_{12}, s_9, s_{11}, s_{10}, s_6, s_5, (s_3, s_4), (s_1, s_2, s_7, s_{13}), s_8$

Fonte: (WALKER; BOUTILIER; HIPEL, 2010)

Com base nos movimentos unilaterais e nas classificações de preferências disponíveis para cada DM, analisaremos, a seguir, representação matricial da estabilidades sequenciais de ordem superior para cada DM desse conflito. As matrizes de movimentos unilaterais para os DMs PO, CG e D, são, respectivamente, dadas por:

$$J_{PO} = \begin{pmatrix}
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}, \qquad J_{CG} = \begin{pmatrix}
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix} \text{ e}$$

$$J_{D} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}.$$

Temos ainda que as matrizes de preferência dos DMs PO, CG e D, são, respectivamente, dadas por:

$$P^{+}_{PO} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&0&1\\
1&1&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0
\end{pmatrix}, \qquad P^{+}_{CG} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0\\
1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0
\end{pmatrix} \text{ e}$$

$$P^{+}_{D} = \begin{pmatrix}
0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&0\\
0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1&1&0\\
1&1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&0
\end{pmatrix}$$

Com base no Teorema 3.2.3, a Tabela 3.4 a seguir apresenta os resultados obtidos para cada estado e cada DM das análises de estabilidade do conflito de renovação de instalação industrial privada.

Note que embora o estado s_{10} seja um equilíbrio sequencial, não é m-SEQ estável para DM PO e DM CG, para $m > 1$, o mesmo acontece com o estado s_6 para o DM CG, ou seja,

Tabela 3.4 – ***Resultado da análise de estabilidade do conflito de renovação de instalação industrial privada***

	m-SEQ		
	PO	CG	D
s_1	$\forall m$	$\forall m$	$\forall m$
s_2	$\forall m$	$\forall m$	$\forall m$
s_3	-	$\forall m$	$\forall m$
s_4	$\forall m$	-	$m \neq 2$
s_5	$\forall m$	-	$m = 1$
s_6	-	$m = 1$	$\forall m$
s_7	$\forall m$	$\forall m$	$\forall m$
s_8	$\forall m$	$\forall m$	-
s_9	-	$\forall m$	$\forall m$
s_{10}	$m = 1$	$m = 1$	$\forall m$
s_{11}	$\forall m$	$\forall m$	$\forall m$
s_{12}	-	$\forall m$	$\forall m$
s_{13}	$\forall m$	$\forall m$	$\forall m$

ele é estado sequencialmente estável, porém não m-SEQ para DM CG, pois, as sanções não são credíveis uma vez que envolvem o DM D ter que deixar o estado s_3 que é $2-$SEQ estável para ele. Podemos observar também que o estado s_4 é SEQ e m-SEQ para DM D para todo $m \neq 2$, no entanto não é $2-$SEQ para DM D. Desta forma, obtivemos os mesmos resultados encontrados através da representação matricial que foram apresentados em Oliveira (2018).

3.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo, propusemos representações matriciais para facilitar a obtenção de estados estáveis m-SEQ, como proposto por Rêgo e Oliveira (2020 e 2023), aplicáveis a conflitos bilaterais e multilaterais. Este conceito de estabilidade é valioso para mitigar problemas de ameaças não credíveis que podem surgir na estabilidade SEQ.

A representação matricial do m-SEQ expande a análise de conflitos, permitindo a avaliação de cenários mais complexos, com mais ordens e estados, além de proporcionar maior eficiência em termos de esforço computacional e custo de tempo na resolução de conflitos. Para validar as representações matriciais do m-SEQ, realizamos uma análise de estabilidade em dois conflitos do mundo real, Matching Pennies e o conflito de renovação de instalação industrial privado.

4 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DA ESTABILIDADE MAXIMIN$_h$ NO MODELO GRAFO PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS

4.1 INTRODUÇÃO

Rêgo e Vieira (2019), propuseram uma nova noção de estabilidade com horizonte variável. Tal noção, denominada por estabilidade Maximin$_h$, considera que o DM focal não precisa ter necessariamente informação sobre as preferências de outros DMs. Esta estabilidade foi inspirada na regra de decisão maximin, também conhecida como a regra de decisão de Wald (Wald, 1945). Esta é uma regra de decisão, não probabilística, segundo a qual um decisor deve avaliar uma ação de acordo com as piores consequências que podem ser obtidas se essa ação for escolhida. A regra maximin prescreve a escolha da ação com a melhor consequência obtida no pior cenário possível e é útil para modelar DMs pessimistas ou cautelosos.

O conceito de estabilidade Maximin$_h$ também tem o atrativo de ter horizonte variável, ou seja, pode ser utilizado para analisar um conflito com h passos à frente, onde h é um inteiro não-negativo. Além disso, em Rêgo e Vieira (2019) forneceram resultados que estabelecem que a estabilidade de Nash, a metarracionalidade geral e a metarracionalidade simétrica, que são conceitos de solução frequentemente utilizados na literatura da GMCR, são equivalentes a casos particulares do conceito de estabilidade Maximin$_h$, para $h = 1, 2, 3$, respectivamente.

Motivados pela dificuldade de se solucionar, de forma manual, conflitos onde existe um alto número de estados ou DMs, este capítulo tem como principal objetivo propôr métodos matriciais para representar o conceito de estabilidade Maximin$_h$ em conflitos com dois e múltiplos DMs. Com a ajuda das representações matriciais obtidas, conflitos maiores podem ser analisados, de maneira mais viável, utilizando esse conceito. Indicamos também como modificar os métodos de matriz propostos para representar também as variações credíveis do conceito Maximin$_h$. Além disso, para demonstrar a utilidade dos resultados obtidos neste capítulo, analisamos um conflito real, conhecido na literatura do GMCR como o Sun Belt Vs. British Columbia Government (OBEIDI; HIPEL, 2005). Vale ressaltar que este capítulo encontra-se submetido no periódico *IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics-Systems* .

Este capítulo está estruturado da seguinte forma: na Seção 4.2, são apresentadas as representações matriciais relacionadas ao conceito de estabilidade Maximin$_h$ para conflitos bilaterais. As adaptações necessárias para lidar com conflitos multilaterais ou com as estabilidades maximin credíveis também são abordadas nesta seção. Posteriormente, na Seção 4.3, ilustramos as representações matriciais obtidas para representar o conceito Maximin$_h$ no conflito de Sun Belt Vs. British Columbia Government (OBEIDI; HIPEL, 2005) considerando a terceira fase deste conflito e também analisamos o dilema dos prisioneiros para 2, 3 e 4 DMs, com o intuito de mensurar o crescimento do esforço computacional necessário para obtenção das estabilidades.

4.2 REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DA ESTABILIDADE MAXIMIN$_h$ NO GMCR

Nesta seção, fornecemos as representações matriciais para obter a estabilidade Maximin$_h$ para conflitos bilaterais e multilaterais. Mostramos também como adaptá-los de modo a representar estabilidades Maximin$_h$ credíveis. Começamos com as representações matriciais para conflitos bilaterais.

4.2.1 Representações matriciais da estabilidade Maximin$_h$ para conflitos bilaterais

Para atingir o nosso objetivo principal, precisamos introduzir algumas novas matrizes, que serão utilizadas na representação proposta. Primeiro, considere que I seja a matriz identidade de ordem $|S|$ e $E' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ uma matriz linha com dimensão $|S|$. Considere também que se F for uma matriz $0-1$, então F^c representa o complemento da matriz binária F, o que significa que $F^c(s_1, s_2) = 1 - F(s_1, s_2)$. Finalmente, seja $\mathbf{K}_i$ uma matriz coluna com dimensão $|S|$ dada por $\mathbf{K}_i = [E' \cdot P_i^+]^T$. O Lema 4.2.1 estabelece uma relação entre a matriz $\mathbf{K}_i$ e a função K_i que foi definida na Seção 2.2. O Lema 4.2.1 estabelece uma relação entre a matriz $\mathbf{K}_i$ e a função K_i.

Lema 4.2.1 *Seja $i \in N$, s e $q \in S$. Então $\mathbf{K}_i(q,1) = K_i(q)$.*

Prova: Note que

$$\mathbf{K}_i(q,1) = [E' \cdot P_i^+]^T(q,1) = \sum_{s \in S} P_i^+(s,q) = K_i(q).$$

∎

Agora vamos definir dois vetores importantes, a saber: $Min(A)$ e $Max(A)$.

Definição 4.2.1 *Seja* $A = [a_{tk}]$ *uma matriz de ordem* $|S|$, *então* $Min(A)$ *e* $Max(A)$ *são duas matrizes coluna com dimensão* $|S|$ *tais que* $Min(A)[(k,1)] = min\{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{k|S|}\}$ *e* $Max(A)[(k,1)] = max\{a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{k|S|}\}$, *respectivamente.*

Intuitivamente, o número que aparece na linha k do vetor $Min(A)$ é o menor número que aparece na linha k da matriz A, no caso do $Max(A)$ consideramos o maior número que aparece na linha k da matriz A.

Por exemplo, se considerarmos a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 5 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, então

$$Min(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Max(A) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Definimos agora duas matrizes, B^i_h e B^j_h, que em geral representam o ganho antecipado, ou seja, o valor do estado final antecipado que o DM i espera receber após um horizonte de conflito h se ele ou o adversário, respectivamente, for o primeiro a se mover. Cada linha destas matrizes contém o que o DM i prevê receber no final do conflito se o estado de conflito mudar do estado da linha para o estado da coluna. Se o estado da coluna não for alcançável a partir do estado da linha e não for igual ao estado da linha, então a entrada correspondente será zero em B^i_h e será igual a $|S|$ em B^j_h, uma vez que no primeiro caso, onde o DM focal se move, consistirá em um movimento de maximização e, no segundo, um movimento de minimização. Formalmente, temos:

$$B^i_h \quad = \quad \Big((J_i \circ (C^j_{h-1} \cdot E^{'})^\top + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top)\Big) \tag{4.1}$$

e

$$B^j_h \quad = \quad |S| \times (J_j + I)^c + (J_j \circ (C^i_{h-1} \cdot E^{'})^\top + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top), \tag{4.2}$$

em que, $C^i_0 = C^j_0 = \mathbf{K}_i$, $C^i_h = Max(B^i_h)$ e $C^j_h = Min(B^j_h)$, $\forall h \geq 1$.

Lema 4.2.2 estabelece que a entrada $(s,1)$ da matriz coluna C^i_h é igual ao ganho máximo que o DM i pode obter escolhendo ficar em s ou afastar-se de s e o que antecipa quando o DM j se move a seguir e o horizonte é $h-1$. Do mesmo modo, a entrada de $(s,1)$ da coluna da matriz C_h^j é igual ao ganho mínimo que DM i pode obter quando DM j escolhe ficar em s ou afastar-se de s e o que o DM i antecipa quando se move a seguir e o horizonte é $h-1$.

Lema 4.2.2 *Para cada estado $s \in S$ e para cada horizonte $h \geq 1$, segue-se que:*

$$C_h^i(s,1) \quad = \quad max\left\{A_h^i(i,s), K_i(s)\right\}$$

e

$$C_h^j(s,1) \quad = \quad min\left\{A_h^i(j,s), K_i(s)\right\}.$$

Prova: Para provarmos esse resultado vamos usar o primeiro princípio de indução matemática em h. Dessa forma, é necessário verificar primeiro a etapa base da indução, verificando o caso $h=1$, tanto para $C_h^i(s,1)$ como para $C_h^j(s,1)$. Como definido em (RÊGO; VIEIRA, 2019), temos que

$$\begin{aligned} A_1^i(i,s) &= K_i(G_0^i(j, M_h^i(i,s))) \\ &= max\left\{K_i(s') : s' \in R_i(s)\right\}. \end{aligned}$$

Analisamos agora o caso $h=1$. Note-se que $C_1^i(s,1) = Max(B_1^i)(s,1)$, em que

$$\begin{aligned} B_1^i(s,s') &= [\Big((J_i \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top)\Big)](s,s') \\ &= \begin{cases} K_i(s') & \text{se } s' \in R_i(s) \cup \{s\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} C_1^i(s,1) &= max(B_1^i)(s,1) \\ &= max\left\{B_1^i(s,s'), \forall s' \in S\right\} \forall s \in S. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} C_1^i(s,1) &= max\left\{K_i(s') : s' \in R_i(s) \cup \{s\}\right\} \\ &= max\left\{A_1^i(i,s), K_i(s)\right\}. \end{aligned}$$

Também temos que, de acordo com Rêgo e Vieira (2019),

$$\begin{aligned} A_1^i(j,s) &= K_i(G_0^i(i,M_h^i(j,s))) \\ &= min\left\{K_i(s') : s' \in R_j(s)\right\}. \end{aligned}$$

Note também que $C_1^j(s,1) = min(B_1^j)(s,1)$, em que

$$\begin{aligned} B_1^j(s,s') &= [|S| \times (J_j+I)^c + \Big((J_j+I)\circ(\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top\Big)](s,s') \\ &= \begin{cases} K_i(s') & \text{se } s' \in R_j(s) \cup \{s\}; \\ |S| & \text{se } s' \notin R_j(s) \cup \{s\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} C_1^j(s,1) &= min(B_1^j)(s,1) \\ &= min\Big\{B_1^j(s,s'), \forall s' \in S\Big\} \forall s \in S. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} C_1^j(s,1) &= min\left\{K_i(s') : s' \in R_j(s) \cup \{s\}\right\} \\ &= min\left\{A_1^i(j,s), K_i(s)\right\}. \end{aligned}$$

Vamos assumir que as igualdades são válidas para $h-1$, ou seja,

$$C_{h-1}^i(s,1) = max\left\{A_{h-1}^i(i,s), K_i(s)\right\}$$

e

$$C_{h-1}^j(s,1) = min\left\{A_{h-1}^i(j,s), K_i(s)\right\}.$$

Vamos agora analisar o caso h. Como definido em Rêgo e Vieira (2019)

$$\begin{aligned} A_h^i(i,s) &= K_i(G_{h-1}^i(j,M_h^i(i,s))) \\ &= max\left\{min\{K_i(s'), A_{h-1}^i(j,s') : s' \in R_i(s)\}\right\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_h^i(j,s) &= K_i(G_{h-1}^i(i,M_h^i(j,s))) \\ &= min\left\{max\{K_i(s'),A_{h-1}^i(i,s') : s' \in R_j(s)\}\right\}. \end{aligned}$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned} B_h^i(s,s') &= [(J_i \circ (C_{h-1}^j \cdot E^{'})^\top + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top)](s,s') \\ &= \begin{cases} C_{h-1}^j(s',1) & \text{se } s' \in R_i(s); \\ K_i(s') & \text{se } s' = s; \\ 0 & \text{se } s' \notin R_i(s) \cup \{s\} \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_h^j(s,s') &= [|S| \times (J_j + I)^c + (J_j \circ (C_{h-1}^i \cdot E^{'})^\top + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top)](s,s') \\ &= \begin{cases} C_{h-1}^i(s') & \text{se } s' \in R_j(s); \\ K_i(s') & \text{se } s' = s; \\ |S| & \text{se } s' \notin R_j(s) \cup \{s\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\begin{aligned} & C_h^i(s,1) = \left(max(B_h^i)\right)(s,1) \\ = \;& max\left\{B_h^i(s,s'), \forall s' \in S\right\} \forall s \in S \\ = \;& max\left\{K_i(s) \cup \left\{C_{h-1}^j(s',1) : s' \in R_i(s)\right\}\right\} \\ = \;& max\left\{K_i(s) \cup \left\{min\left\{A_{h-1}^i(j,s'),K_i(s')\right\} : s' \in R_i(s)\right\}\right\} \\ = \;& max\left\{A_h^i(i,s),K_i(s)\right\} \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
C_h^j(s,1) &= \left(min(B_h^j)\right)(s,1) \\
&= min\left\{B_h^j(s,s'), \forall s' \in S\right\} \forall s \in S \\
&= min\left\{K_i(s) \cup \left\{C_{h-1}^i(s',1) : s' \in R_j(s)\right\}\right\} \\
&= min\left\{K_i(s) \cup \left\{max\left\{A_{h-1}^i(i,s), K_i(s)\right\} : s' \in R_j(s)\right\}\right\} \\
&= min\left\{A_h^i(j,s), K_i(s)\right\}.
\end{aligned}
$$

∎

O Teorema 4.2.2 fornece um resultado que permite obter estados Maximin$_h$ estáveis usando apenas operações matriciais.

Teorema 4.2.2 *Um estado $s \in S$ é Maximin$_h$ para o DM i se, e somente se,* $\left(sinal(\boldsymbol{K}_i - C_h^i)\right)(s,1) = 0$.

Prova: Pelos Lemas 4.2.1 e 4.2.2, segue-se que $\mathbf{K}_i(s,1) \leq C_h^i(s,1)$. Assim, precisamos considerar dois casos.

Se $\left(sinal(\mathbf{K}_i - C_h^i)\right)(s,1) = 0$, então isto implica que $K_i(s) = K_i(s,1) = C_h^i(s,1)$. Assim, como $C_h^i(s,1) = max\left\{A_h^i(i,s), K_i(s)\right\}$, temos que $K_i(s) \geq A_h^i(i,s)$. Assim, temos $G_h^i(i,s) = s$, e, por conseguinte, segue-se que s é Maximin$_h$ para o DM i.

Se $\left(sinal(\mathbf{K}_i - C_h^i)\right)(s,1) < 0$, logo isto implica que $K_i(s) = \mathbf{K}_i(s,1) < C_h^i(s,1)$. Logo, $C_h^i(s,1) = A_h^i(i,s)$ e segue-se que $K_i(s) < A_h^i(i,s)$ e, consequentemente, $G_h^i(i,s) \neq s$. Logo, s é Maximin$_h$ instável para o DM i.

∎

De acordo com Teorema 4.2.2, se a entrada $(s,1)$ do vetor coluna $\mathbf{K}_i$ for igual à mesma entrada do vetor coluna C_h^i, então o estado s é Maximin$_h$ estável para o DM i. Esta situação implica que, antecipando um horizonte h e adotando uma crença pessimista sobre os movimentos do adversário, o DM focal prefere ficar no estado s. Por outro lado, se a entrada $(s,1)$ do vetor coluna $\mathbf{K}_i$ for inferior à mesma entrada do vetor coluna C_h^i, então o estado s não é Maximin$_h$ estável para DM i. Isto implica que o DM focal antecipa um ganho melhor ao sair do estado s considerando um horizonte h do que ao ficar em s.

Exemplo 1 *Para ilustrar a representação matricial obtida neste trabalho, considere um conflito hipotético envolvendo dois tomadores de decisão, DM i e DM j, e quatro estados,* s_1, s_2, s_3 *e* s_4.

Suponha que os conjuntos de acessibilidade para este conflito sejam: $R_i(s_1) = \{s_3\}$, $R_i(s_2) = \{s_4\}$, $R_i(s_3) = \{s_1\}$, $R_i(s_4) = \{s_2\}$, $R_j(s_1) = \{s_2\}$, $R_j(s_2) = \{s_1\}$, $R_j(s_3) = \{s_4\}$ *e* $R_j(s_4) = \{s_3\}$. *Suponha ainda que as preferências do DM i são* $s_1 \succ_i s_3 \succ_i s_2 \succ_i s_4$ *(as preferências de DM j não são necessárias para analisar a estabilidade* $Maximin_h$ *para o DM i). Neste conflito, temos que as matrizes* J_i, J_j, P_i^+ *e* $\boldsymbol{K}_i$ *são, respetivamente, dadas por:*

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; J_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_i^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \; e \; \boldsymbol{K}_i = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por simplicidade, utilizaremos a representação matricial obtida no Teorema 4.2.2 para analisar a estabilidade dos estados de conflito para o DM i, considerando horizontes $h = 1, 2$ *e* 3. *Neste conflito hipotético, temos*

$$B_1^i = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}, \quad C_1^i = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{3}} \\ \underline{\boldsymbol{1}} \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1^j = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 1 & 4 & 4 \\ 3 & \boxed{1} & 4 & 4 \\ 4 & 4 & \boxed{2} & 0 \\ 4 & 4 & 2 & \boxed{0} \end{bmatrix}, \quad C_1^j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2^i = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}, \quad C_2^i = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{3}} \\ \underline{\boldsymbol{1}} \\ \underline{\boldsymbol{2}} \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_2^j = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 1 & 4 & 4 \\ 3 & \boxed{1} & 4 & 4 \\ 4 & 4 & \boxed{2} & 1 \\ 4 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{bmatrix}, \quad C_2^j = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_3^i = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}, \quad C_3^i = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{3}} \\ \underline{\boldsymbol{1}} \\ \underline{\boldsymbol{2}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como pode ser observado, todos os elementos diagonais das matrizes B_h^i ou B_h^j, que estão destacados dentro de retângulos, correspondem aos valores dos estados apresentados no vetor K_i. Na matriz B_h^i, os números circulados representam os valores do estado para o qual o DM i pode se mover a partir do estado indicado na linha, sendo esses valores derivados de C_{h-1}^j. Todas as outras posições na matriz B_h^i são iguais a 0. De forma análoga, na matriz B_h^j, os números circulados representam os valores do estado para o qual o DM j pode se deslocar a partir do estado da linha correspondente, com esses valores sendo obtidos a partir de C_{h-1}^i. Todas as demais posições na matriz B_h^j são iguais a $|S| = 4$. Os números sublinhados nos vetores C_h^i indicam aqueles que coincidem com o valor do próprio estado, sugerindo que o DM i preferiria permanecer nesses estados. Consequentemente, esses estados são considerados Maximin$_h$ estáveis para o DM i, enquanto os demais não o são.

Na tabela abaixo, apresentamos os resultados da representação matricial para a estabilidade Maximin$_h$ do DM i, considerando os horizontes $h = 1, 2$ e 3. As células da tabela correspondem aos valores da matriz de sinais do Teorema 4.2.2 para os estados indicados nas colunas, levando em conta o horizonte especificado nas linhas.

Tabela 4.1 – Análise de estabilidade Maximin$_h$ para o DM i

	h	s_1	s_2	s_3	s_4
	1	0	0	-1	-1
DM i	**2**	0	0	0	-1
	3	0	0	0	-1

Rêgo e Vieira (2019) apresentaram um resultado que estabelece que a estabilidade Maximin$_{2n+1}$ implica estabilidade Maximin$_h$ para todos os $h \geq 2n+1$, e que a estabilidade Maximin$_{2n}$ implica estabilidade Maximin$_{2m}$ para todos os m tais que $1 \leq m \leq n$. Assim, se um estado satisfaz a estabilidade Maximin$_3$ para o DM i, ele também satisfaz a estabilidade

Maximin$_h$ para cada $h \geq 3$. Por outro lado, se um estado não satisfizer a estabilidade Maximin$_2$ para o DM i, ele não satisfará a estabilidade Maximin$_h$ para qualquer valor de h. Usando esse resultado, observamos que, no conflito hipotético mencionado, os estados s_1, s_2 e s_3 são Maximin$_h$ estáveis para o DM i para cada $h \geq 3$, enquanto o estado s_4 não é Maximin$_h$ estável para nenhum valor de h.

4.2.2 Representações matriciais de extensões do conceito Maximin$_h$

Os resultados matriciais para determinar estados estáveis de acordo com o conceito de estabilidade Maximin$_h$ podem ser facilmente adaptados para o caso de conflitos com múltiplos DMs. Para este fim, como nos conflitos com múltiplos DMs, o DM focal considera as possíveis respostas dos oponentes, então a representação matricial do caso n-DM para a estabilidade de Maximin$_h$ será idêntica ao caso de 2-DMs, substituindo apenas a matriz J_j, isto é, a matriz de acessibilidade do DM j pela matriz J_{N-i}, isto é, pela matriz de movimentos conjuntos de coalizão $N-i$ na definição de matriz B_h^j apresentada na Equação 4.2.

Além disso, é importante notar que, na estabilidade de Maximin$_h$, os DMs podem optar por um movimento unilateral que não represente uma melhoria imediata, mas que antecipe um ganho futuro. No entanto, isso pode tornar o conceito de estabilidade Maximin$_h$ não credível, uma vez que tais movimentos podem não ser sustentáveis ou confiáveis na prática.

No trabalho de Rêgo *et al.* (2022) foram propostas modificações da estabilidade *Maximin$_h$*, requerendo que ou o DM focal, os seus oponentes ou todos os envolvidos realizem apenas movimentos de UI. Neste estudo, os autores demonstraram que, quando se exige que o DM focal faça apenas movimentos UIs, os estados estáveis permanecem inalterados. No entanto, a estabilidade dos estados pode ser impactada se os oponentes do DM focal forem obrigados a fazer apenas UIs. Desta forma, é possível obter representações matriciais semelhantes às obtidas na subseção anterior, que facilitam a identificação de estados estáveis conforme o conceito de estabilidade Maximin credível do adversário. Para isso, a única modificação necessária é substituir a matriz J_j, ou seja, a matriz de acessibilidade de DM j pela matriz J_{N-i}^{+}, que representa a matriz de melhoria conjunta de coalizão $N-i$ na definição de matriz de B_h^j, conforme apresentada na Equação 4.2.

4.3 APLICAÇÃO

Com o intuito de ilustrar a representação matricial do conceito Maximin$_h$ proposto neste trabalho, consideramos um conflito real, conhecido na literatura do GMCR como o Sun Belt Vs. British Columbia Government (OBEIDI; HIPEL, 2005). Adicionalmente, apresentaremos também um conflito muito conhecido na literatura de teoria dos jogos, chamado de Dilema dos Prisioneiros, considerando n jogadores a fim de observar o custo de tempo para se fazer analise de estabilidade de acordo com os resultados matriciais obtidos neste capítulo a medida que o número de DMs aumenta.

4.3.1 Sun Belt Vs. British Columbia Government

A Sun Belt Water Inc., da Califórnia, formou uma parceria com uma empresa canadense, a qual possuía uma licença para exportar 200 acre-feet (247 milhões de litros) de água doce a granel por ano, transportada por caminhões-tanque da Colúmbia Britânica, no Canadá, para os Estados Unidos e outros países. Logo após o início da colaboração, o Goleta Water District, na Califórnia, convidou a Sun Belt para estabelecer um contrato para o fornecimento de água a granel via transporte marítimo.

Diante da perspectiva de aumento na demanda por água, a empresa canadense solicitou uma ampliação de sua autorização anual de fornecimento para 15.000 acre-feet ($18,5$ bilhões de litros). Segundo a Sun Belt, o Governo da Colúmbia Britânica (BCG) informou que, se o pedido da empresa canadense atendesse aos requisitos normais da Lei da Água, a expansão da licença seria aprovada para atender às necessidades de água doce do Goleta Water District. A Goleta selecionou a Sun Belt como fornecedora preferencial para negociar um contrato de compra de água a granel.

No entanto, o BCG impôs uma moratória sobre a emissão de novas ou renovadas licenças de exportação de água, bloqueando assim o potencial negócio da Sun Belt com a Goleta. Em resposta, a Sun Belt contestou as ações do BCG e entrou com uma ação judicial reivindicando indenização por danos decorrentes da moratória.

O BCG concordou em iniciar negociações extrajudiciais separadas com as duas empresas envolvidas na *joint venture* da Sun Belt. Como resultado, foi firmado um acordo monetário de 220.000 com o parceiro canadense da *joint venture*, mas não com a Sun Belt, que reivindicava uma indenização de $46,8$ milhões. Posteriormente, a legislatura provincial aprovou a Lei de Proteção da Água de 1995, que proíbe a exportação de água da Colúmbia Britânica em contentores com dimensões ou capacidades adequadas, colocando assim a atividade da Sun Belt em risco.

Após buscar, sem sucesso, compensação nos tribunais da Colúmbia Britânica, a Sun Belt decidiu recorrer ao processo de resolução de litígios entre investidores e estados previsto no Acordo de Livre Comércio da América do Norte (NAFTA). A empresa apresentou uma notificação de intenção para requerer arbitragem contra o Canadá. Na sua notificação, a Sun Belt alega que o Canadá violou suas obrigações e cometeu diversos atos ilícitos por parte de ministros e funcionários dos governos federal e provincial da Colúmbia Britânica, bem como por parte de juízes (para mais detalhes sobre o caso e referências completas, consulte (OBEIDI, 2002)).

4.3.1.1 Fases do conflito

A Figura 4.1 ilustra a cronologia do litígio com a Sun Belt, destacando a evolução dos eventos e a crescente complexidade do caso que, eventualmente, envolveu o governo federal canadense e outras províncias.

Inicialmente, quando o BCG impôs uma moratória temporária sobre as captações de água a granel, o Goleta Water District e a Sun Belt não possuíam um contrato vinculativo de fornecimento de água, e o NAFTA ainda não havia sido estabelecido. Entre março de 1991 e dezembro de 1998, as principais partes envolvidas no litígio eram a Sun Belt e o BCG.

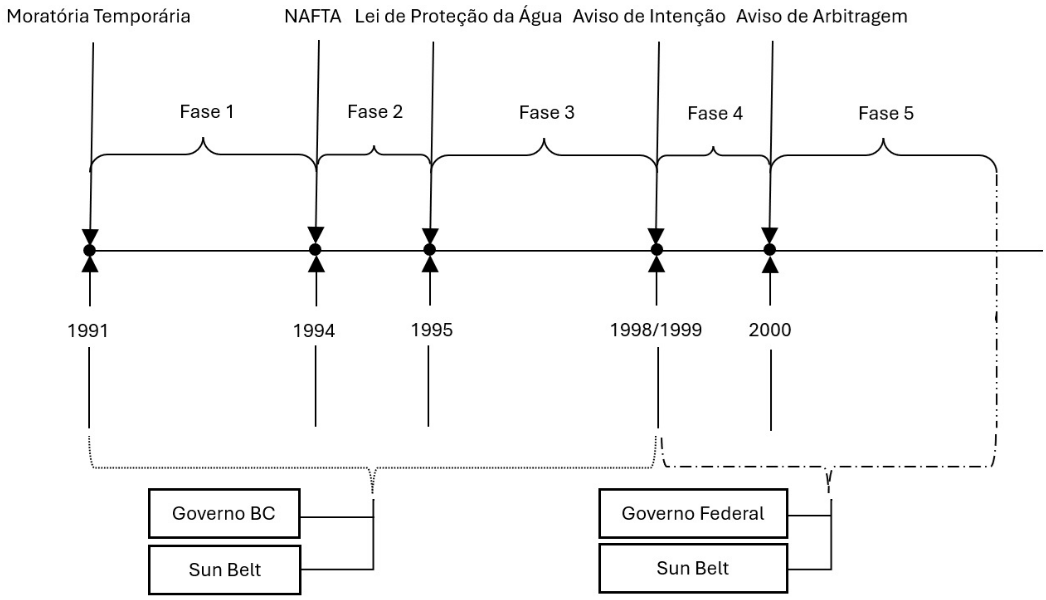
Com a percepção de que não conseguiria obter justiça nos tribunais da Colúmbia Britânica, a Sun Belt decidiu, em 1998, invocar o Capítulo 11 do NAFTA para processar o governo federal canadense. Essa decisão elevou o litígio a um novo patamar, abrangendo a totalidade do Canadá e envolvendo o governo federal na disputa.

Com base na Figura 4.1, o conflito entre a Sun Belt e o BCG pode ser dividido em três fases distintas:

- **Fase 1:** (1991 - 1994), implementação da NAFTA;
- **Fase 2:** (1994 - 1995), o BCG implementou a Lei de Proteção da Água;
- **Fase 3:** (1995 - 1998), A Sun Belt apresentou uma carta de intenções para resolver o litígio.

Para os propósitos deste capítulo, focaremos na Fase 3. Com a promulgação da Lei de Proteção da Água em 1995, o BCG enfrentou duas opções: litigar ou negociar. Neste contexto, ficou evidente que o BCG optou pela via judicial em vez da negociação.

Figura 4.1 – Cronologia do litígio com a Sun Belt



Fonte: Adaptado (OBEIDI; HIPEL, 2005)

4.3.1.2 Análise de estabilidade Maximin$_h$ da fase 3 do conflito

Os estados viáveis da terceira fase do conflito e os grafos direcionados dos DMs envolvidos são apresentados, respectivamente, na Tabela 4.2 e na Figura 4.2. Para mais detalhes sobre o contexto deste conflito, consulte (OBEIDI; HIPEL, 2005).

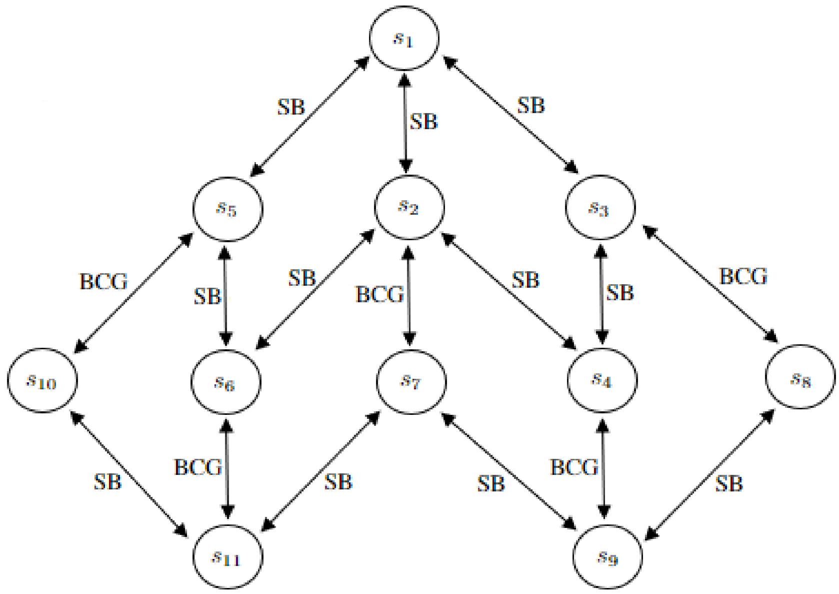
Tabela 4.2 – DMs, opções e estados viáveis do conflito estratégico - Fase 3

DMs	Opções	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
SB	Litigar	N	N	N	N	Y	Y	N	N	N	Y	Y
	Negociar	N	Y	N	Y	N	Y	Y	N	Y	N	Y
BCG	NAFTA	N	N	Y	Y	N	N	N	Y	Y	N	N
	Litigar	N	N	N	N	Y	Y	N	N	N	Y	Y
	Negociar	N	N	N	N	N	N	Y	Y	Y	Y	Y

Na Fase 3, existem 11 estados viáveis, cuja ordem de preferência para a Sun Belt (SB) é a seguinte:$s_5 \succ_{SB} s_{11} \succ_{SB} s_6 \succ_{SB} s_3 \succ_{SB} s_{10} \succ_{SB} s_9 \succ_{SB} s_4 \succ_{SB} s_8 \succ_{SB} s_7 \succ_{SB} s_2 \succ_{SB} s_1$. Nesta fase, o litígio é a opção mais preferida pela Sun Belt, seguido pela negociação e, por último, pela opção de arbitragem sob o NAFTA.

Para o BCG, a ordem de preferência dos estados é a seguinte:$s_1 \succ_{BCG} s_2 \succ_{BCG} s_5 \succ_{BCG} s_6 \succ_{BCG} s_{11} \succ_{BCG} s_8 \succ_{BCG} s_7 \succ_{BCG} s_3 \succ_{BCG} s_4 \succ_{BCG} s_{10} \succ_{BCG} s_9$. A BCG prefere a negociação ao litígio e demonstra resistência à ideia de usar o NAFTA para arbitragem.

Figura 4.2 – Modelo de grafo para o conflito Sun Belt vs British Comumbia Government - Fase 3.



As matrizes de acessibilidade dos DMs *SB* e *BCG* são, respetivamente:

$$J_{SB} = \begin{pmatrix} 0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_{BCG} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

As matrizes de preferência do DM *SB* e do DM *BCG*, na Fase 3 deste conflito, são, respetivamente, dadas por

$$P^+_{SB} = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&1&1&1&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&1&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&1&1&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^+_{BCG} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&1&0&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&1&0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&1&1 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

Na Tabela 4.3, apresentamos os resultados da representação matricial para a estabilidade Maximin$_h$ com horizontes de até 20, na Fase 3 deste conflito. As células da Tabela 4.3 correspondem aos valores da matriz de sinal do Teorema 4.2.2 para os estados indicados nas colunas, considerando os horizontes apresentados nas linhas.

Na Fase 3 do conflito, para o DM SB, os estados s_3, s_5, s_9 e s_{11} são estáveis segundo o critério de Nash e, consequentemente, satisfazem a estabilidade Maximin$_h$ para qualquer valor de h. Por outro lado, os estados s_4 e s_6 são estáveis apenas em horizontes pares. Isso ocorre porque, quando o DM SB é o último a mover-se, ele pode escapar à sanção, resultando na instabilidade desses estados em horizontes ímpares. No entanto, se o DM BCG for o último

Tabela 4.3 – ***Análise de estabilidade Maximin$_h$ até o horizonte 20 na Fase 3 do conflito***

	$h \leq 20$	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}
SB	ímpar	-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1	0	-1	0
	par	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	0	-1	0
BCG	$h = 1$	0	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	-1	-1
	$h > 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1
Eq.	-			$h \geq 2$	h par	$h \geq 1$	h par					

a mover-se, ele pode sancionar o DM SB, tornando os estados s_4 e s_6 estáveis em qualquer horizonte par.

É importante destacar que a estabilidade dos estados s_4 e s_6 não pode ser determinada apenas por relações entre estabilidades Maximin$_h$ ou entre Maximin$_h$ e noções clássicas de estabilidade. Para compreender plenamente essa questão, é necessário realizar os cálculos específicos de estabilidade Maximin$_h$. Por fim, os estados s_1, s_2, s_7, s_8 e s_{10} não são GMR para o DM SB e, portanto, não satisfazem a estabilidade Maximin$_h$ para qualquer valor de h.

Para o DM BCG, os estados s_1, s_2, s_4, s_5, s_6 e s_8 são estáveis segundo Nash e, consequentemente, em Maximin$_h$ para qualquer valor de h. Por outro lado, os estados s_9, s_{10} e s_{11} não são GMR para o DM BCG e, portanto, não satisfazem qualquer noção de estabilidade Maximin$_h$. Os estados s_3 e s_7, embora sejam SMR, não são estáveis segundo Nash para o DM BCG e, assim, satisfazem a estabilidade Maximin$_h$ apenas para valores de h superiores a 1.

Combinando esses resultados, podemos concluir que os estados s_3 e s_5 são equilíbrios Maximin$_h$ para todos os $h \geq 2$ e $h \geq 1$, respectivamente. O estado s_5 possui o grau mais forte de estabilidade, uma vez que representa um equilíbrio de Nash (Maximin$_1$). No estudo de Obeidi e Hipel (2005), os autores indicam que o desfecho real do conflito foi que o DM SB decidiu não prosseguir com o litígio e notificou o governo federal canadense sobre a intenção de arbitragem sob o Capítulo 11 do NAFTA. Essa situação é representada pelo estado s_3, que é menos preferido pelo DM SB em comparação ao estado s_5.

Adicionalmente, é importante observar que os estados s_4 e s_6 são equilíbrios Maximin$_h$ apenas quando o horizonte é par. Isso demonstra que, embora o conceito de estabilidade Maximin$_h$ seja equivalente a Nash, GMR, e SMR para horizontes 1, 2 e 3, respectivamente, como demonstrado em Rêgo e Vieira (2019), as representações matriciais desses conceitos, fornecidas em Xu *et al.* (2007 e 2008), não são suficientes para determinar estabilidades Maximin$_h$ para $h \geq 4$. Nessa situação específica, não é possível inferir nada sobre a estabilidade Maximin$_h$ para $h \geq 4$ utilizando apenas essas equivalências com conceitos clássicos. Portanto, o método proposto neste trabalho é crucial para uma compreensão mais aprofundada do comportamento do

Maximin$_h$, especialmente em grandes conflitos estratégicos envolvendo múltiplos DM e estados, analisados em horizontes mais longos.

Por fim, como esperado, os resultados da análise de estabilidade obtidos nesta aplicação são consistentes com os apresentados no artigo original de Obeidi e Hipel (2005) , quando a análise é limitada a horizontes até 3. Contudo, com a nossa proposta de representação matricial, é possível estender essa análise para horizontes superiores, proporcionando uma visão mais ampla e detalhada da situação estratégica.

4.3.2 Dilema dos Prisioneiros para n jogadores

Com o intuito de demonstrar a eficiência da representação matricial da estabilidade Maximin$_h$, iremos apresentar uma aplicação matricial para o caso do Dilema dos Prisioneiros considerando n jogadores (NIPD), conforme descrito por Yao e Darwen (1993). O NIPD é um jogo mais realista e geral que pode auxiliar na modelagem de problemas sociais e econômicos. Neste trabalho, os autores examinam o impacto do número de jogadores no NIPD sobre a evolução da cooperação no grupo, mostrando que a cooperação tem menos probabilidade de surgir considerando um grande grupo quando comparado a um grupo pequeno.

Segundo Colman (2016), três propriedades podem ser definidas para o caso do Dilema do Prisioneiro com n jogadores:

- Os jogadores podem escolher entre Cooperar (C) e delatar (D);
- Para cada jogador a opção dominante é a D, ou seja, independente de quantos dos outros jogadores escolham cooperar, a opção D sempre será a melhor escolha para cada um deles;
- As estratégias dominantes D se intersectam em um ponto de equilíbrio não eficiente. Em um caso particular, em que o resultado se todos os jogadores escolherem as suas estratégias C, ou seja, não dominantes, é preferível, do ponto de vista de cada jogador, àquele em que todos escolhem D, mas ninguém está motivado para se desviar unilateralmente de D.

A Figura 4.3 representa a matriz de payoff do conflito Dilema dos Prisioneiros considerando n jogadores, sendo ela simétrica para cada jogador, em que, C_i é a ação de cooperar para o decisor i e D_i é a ação de delatar para o decisor i. Segundo Yao e Darwen (1993) as seguintes condições devem ser satisfeitas:

1. $D_i > C_i$ para $0 \leq i \leq n-1$;
2. $D_{i+1} > D_i$ e $C_{i+1} > D_i$ para $0 \leq i \leq n-1$;
3. $C_i > (D_i + C_{i-1})/2$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Figura 4.3 – Matriz de payoff do Dilema dos Prisioneiros para *n* jogadores

Número de cooperadores entre os n-1 jogadores restantes

		0	*1*	*2*		*n-1*
jogador A	*C*	C_0	C_1	C_2	...	C_{n-1}
	D	D_0	D_1	D_2	...	D_{n-1}

Fonte: Adaptada de (YAO; DARWEN, 1993)

Inúmeros valores satisfazem os requisitos apresentados na Figura 4.3. Yao e Darwen (1993) escolheram valores de forma que caso n_c seja o número de cooperadores no jogo de n jogadores, então o prêmio (payoff) por cooperação será $2n_c - 2$ e o prêmio (payoff) por delatar será $2n_c + 1$. A Figura 4.4 ilustra um exemplo de um jogo com n jogadores.

Figura 4.4 – Matriz de payoff para *n* jogadores

Número de cooperadores entre os n-1 jogadores restantes

		0	*1*	*2*		*n-1*
jogador A	*C*	*0*	*2*	*4*	...	*2(n-1)*
	D	*1*	*3*	*5*	...	*2(n-1)+1*

Fonte: (YAO; DARWEN, 1993)

4.3.2.1 Dilema dos Prisioneiros para 3 jogadores

Neste cenário são considerados 3 prisioneiros, em que cada um deles deverá considerar as ações dos outros dois jogadores em relação a sua escolha. Desta forma, ele deverá considerar não apenas as consequências imediatas para ele, mas também para os demais jogadores. Ou seja, a dinâmica de traição, confiança e cooperação será ainda mais complexa se comparada ao cenário de 2 DMs.

São 8 possíveis estados no caso do Dilema dos Prisioneiros para 3 DMs. Os três prisioneiros podem cooperar (CCC) e receber uma recompensa coletiva. Um dos jogadores pode trair enquanto os outros dois cooperam (CCD, CDC e DCC), esse jogador pode receber uma grande recompensa enquanto os outros recebem uma penalidade significativa. Dois jogadores podem trair enquanto o terceiro coopera (CDD, DCD e DDC), o terceiro pode receber uma penalidade severa enquanto os dois traidores recebem uma recompensa moderada. E por fim, os três jogadores podem trair (DDD) e serem punidos por isto. A Tabela 4.4 apresenta a relação entre os 8 possíveis estados e suas composições.

Tabela 4.4 – Relação dos possíveis estados e suas composições - 3DMs

Estados	**Composições**	**Estados**	**Composições**
s_1	CCC	s_5	DCC
s_2	CCD	s_6	DCD
s_3	CDC	s_7	DDC
s_4	CDD	s_8	DDD

A matriz de acessibilidade de cada decisor, neste cenário de 3 DMs, será uma matriz 8×8, ou seja, 8 possíveis escolhas que os jogadores podem realizar. Para exemplificar a movimentação de um DM considere, por exemplo, o DM 3. Este DM poderá realizar movimentos apenas no que diz respeito a posição dele (a terceira), ou seja, ele não consegue interferir na decisão dos seus oponentes. Como a última posição é referente a ele, desta forma, ele pode se mover de s_1 (CCC) para s_2 (CCD) e de s_2 para s_1, mudando a opção de cooperar para delatar e de delatar para cooperar. As matrizes de acessibilidades, para cada um dos DMs considerados são apresentadas a seguir.

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \text{ e } J_3 = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar os valores dos K_i's na aplicação do Dilema dos Prisioneiros considerando 3 DMs, utilizaremos os payoffs apresentados na Figura 4.4.

Tabela 4.5 – $K_i's$ do Dilema dos Prisioneiros com 3DMs

Estados	Comp.	Cooperam	Não Cooperam
s_1	CCC	$K_1(s_1) = K_2(s_1) = K_3(s_1) = 2(n-1) = 4$	-
s_2	CCD	$K_1(s_2) = K_2(s_2) = 2(n-1) = 2$	$K_3(s_2) = 2(n-1)+1 = 5$
s_3	CDC	$K_1(s3) = K_3(s3) = 2(n-1) = 2$	$K_2(s_3) = 2(n-1)+1 = 5$
s_4	CDD	$K_1(s_4) = 2(n-1) = 0$	$K_2(s_4) = K_3(s_4) = 2(n-1)+1 = 3$
s_5	DCC	$K_2(s_5) = K_3(s_5) = 2(n-1) = 2$	$K_1(s_5) = 2(n-1)+1 = 5$
s_6	DCD	$K_2(s_6) = 2(n-1) = 0$	$K_1(s_6) = K_3(s_6) = 2(n-1)+1 = 3$
s_7	DDC	$K_3(s_7) = 2(n-1) = 0$	$K_1(s_7) = K_2(s_7) = 2(n-1)+1 = 3$
s_8	DDD	-	$K_1(s_8) = K_2(s_8) = K_3(s_8) = 2(n-1)+1 = 1$

Desta forma, temos que, $\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A Tabela 4.6, apresenta os resultados da representação matricial para a estabilidade Maximin$_h$ para vários horizontes considerando o conflito do Dilema dos Prisioneiros para 3 decisores. Cada célula da Tabela 4.6 referem-se ao valor da matriz sinal do Teorema 4.2.2 para o estado da coluna, considerando o horizonte apresentado na linha.

Tabela 4.6 – Análise de estabilidade Maximin$_h$ - 3 Decisores

DMs	h	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
1	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
	≥ 2	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0
	≥ 2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0
	≥ 2	0	0	0	0	0	0	0	0
Eq.	-	$h \geq 2$	$h \geq 2$	$h \geq 2$	$h \geq 2$	$h \geq 2$	$h \geq 2$	$h \geq 2$	$h \geq 1$

Observando os resultados, temos que apenas o estado s_8 é um equilíbrio de acordo com o conceito de estabilidade Maximin$_h$ para qualquer horizonte h. Este resultado no conflito acaba por representar a situação em que todos os 3 DMs tendem a não cooperar (DDD). Podemos observar também que a partir do horizonte $h = 2$ todos os estados são estáveis para todos os DMs.

4.3.2.2 Dilema dos Prisioneiros para 4 jogadores

A fim de observar o custo de tempo para executar um conflito com mais decisores, consideraremos agora o Dilema dos Prisioneiros para 4 prisioneiros, em que cada um deles deverá considerar as ações dos outros três jogadores em relação a sua escolha. Neste conflito temos 16 possíveis estados, sendo eles apresentados na Tabela 4.7

Tabela 4.7 – Relação dos possíveis estados e suas composições - 4 DMs

Estados	Composições	Estados	Composições
s_1	CCCC	s_9	DCCC
s_2	CCCD	s_{10}	DCCD
s_3	CCDC	s_{11}	DCDC
s_4	CCDD	s_{12}	DCDD
s_5	CDCC	s_{13}	DDCC
s_6	CDCD	s_{14}	DDCD
s_7	CDDC	s_{15}	DDDC
s_8	CDDD	s_{16}	DDDD

As matrizes de acessibilidades de cada um dos 4 DMs são:

$$\mathrm{J}_1 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\qquad
J_2 = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0
\end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix}
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0
\end{pmatrix}
\qquad
J_4 = \begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

Os valores dos K_i's na aplicação do Dilema dos Prisioneiros considerando 4 DMs também foram construídos utilizando os payoffs apresentados na Figura 4.4.

Tabela 4.8 – K_i's do Dilema dos Prisioneiros com 4 DMs

Estados	Composições	Cooperam	Não Cooperam
s_1	CCCC	$K_1(s_1) = K_2(s_1) = K_3(s_1) = K_4(s_1) = 6$	-
s_2	CCCD	$K_1(s_2) = K_2(s_2) = K_3(s_2) = 4$	$\mathrm{K}_4(s_2) = 7$
s_3	CCDC	$K_1(s_3) = K_2(s_3) = K_4(s_3) = 4$	$\mathrm{K}_3(s_3) = 7$
s_4	CCDD	$K_1(s_4) = K_2(s_4) = 2$	$\mathrm{K}_3(s_4) = K_4(s_4) = 5$
s_5	CDCC	$K_1(s_5) = K_3(s_5) = K_4(s_5) = 4$	$\mathrm{K}_2(s_5) = 7$
s_6	CDCD	$K_1(s_6) = K_3(s_6) = 2$	$\mathrm{K}_2(s_6) = K_4(s_6) = 5$
s_7	CDDC	$K_1(s_7) = K_4(s_7) = 2$	$\mathrm{K}_2(s_7) = K_3(s_7) = 5$
s_8	CDDD	$K_1(s_8) = 0$	$\mathrm{K}_2(s_8) = K_3(s_8) = K_4(s_8) = 3$
s_9	DCCC	$K_2(s_9) = K_3(s_9) = K_4(s_9) = 4$	$\mathrm{K}_1(s_9) = 7$
s_{10}	DCCD	$K_2(s_{10}) = K_3(s_{10}) = 2$	$\mathrm{K}_1(s_{10}) = K_4(s_{10}) = 5$
s_{11}	DCDC	$K_1(s_{11}) = K_4(s_{11}) = 5$	$\mathrm{K}_1(s_{11}) = K_3(s_{11}) = 5$
s_{12}	DCDD	$K_2(s_{12}) = 0$	$\mathrm{K}_1(s_{12}) = K_3(s_{12}) = K_4(s_{12}) = 3$
s_{13}	DDCC	$K_3(s_{13}) = K_4(s_{13}) = 2$	$\mathrm{K}_1(s_{13}) = K_2(s_{13}) = 5$
s_{14}	DDCD	$K_3(s_{14}) = 0$	$\mathrm{K}_1(s_{14}) = K_2(s_{14}) = K_4(s_{14}) = 3$
s_{15}	DDDC	$K_4(s_{15}) = 0$	$\mathrm{K}_1(s_{15}) = K_2(s_{15}) = K_3(s_{15}) = 3$
s_{16}	DDDD	$-$	$\mathrm{K}_1(s_{16}) = K_2(s_{16}) = K_3(s_{16}) = K_4(s_{16}) = 1$

Desta forma, temos que, $\mathbf{K}_1^T = [6\ 4\ 4\ 2\ 4\ 2\ 2\ 0\ 7\ 5\ 5\ 3\ 5\ 3\ 3\ 1]$,

$\mathbf{K}_2^T = [6\ 4\ 4\ 2\ 7\ 5\ 5\ 3\ 4\ 2\ 2\ 0\ 5\ 3\ 3\ 1]$,

$\mathbf{K}_3^T = [6\ 4\ 7\ 5\ 4\ 2\ 5\ 3\ 4\ 2\ 5\ 3\ 2\ 0\ 3\ 1]$ e

$\mathbf{K}_4^T = [6\ 7\ 4\ 5\ 4\ 5\ 2\ 3\ 4\ 5\ 2\ 3\ 2\ 3\ 0\ 1]$

A Tabela 4.9, apresenta os resultados da representação matricial para a estabilidade Maximin$_h$ para vários horizontes considerando o conflito do Dilema dos Prisioneiros com 4 decisores. Cada célula da Tabela 4.9 referem-se ao valor da matriz sinal do Teorema 4.2.2 para o estado da coluna, considerando o horizonte apresentado na linha. Nota-se que apenas o estado s_{16}, situação em que todos os 4 DMs não cooperam, é um equilíbrio segundo o conceito de estabilidade Maximin$_h$, considerando qualquer horizonte h. Podemos observar também que a partir do horizonte 2 todos os estados são Maximin$_h$ estáveis para todos os DMs.

Tabela 4.9 – Análise de estabilidade Maximin$_h$ - 4 Decisores

DMs	h	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9	s_{10}	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{14}	s_{15}	s_{16}
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
	≥ 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
	≥ 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0	-1	-1	0	0
	≥ 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0	-1	0
	≥ 2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Eq.	h	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 2	≥ 1

A Tabela 4.10 apresenta o tempo (em segundos) de execução do código *Maximin$_h$* para os conflitos que consideram $2, 3$ e 4 DMs. São consideradas três medidas principais:

- **Usuário:** Tempo de CPU gasto pelo processo em execução, ou seja, o tempo gasto pela

CPU para executar as operações da função.

- **Sistema:** Tempo de CPU gasto pelo sistema operacional em nome do processo, por exemplo, para tarefas como operações de entrada/saída.
- **Decorrido:** Tempo real decorrido desde o início até o fim da execução da função, ou seja, o tempo total “de parede” (*wall clock time*).

Tabela 4.10 – Tempo de execução Maximin$_h$ - n Decisores

	Tempo		
Qnt. DMs	**Usuário**	**Sistema**	**Decorrido**
2	0.03	0.00	0.03
3	0.05	0.00	0.14
4	0.20	0.00	0.63

Como esperado, o tempo de execução aumenta conforme o número de DM’s é incrementado. Porém, cabe enfatizar que todos os tempos ficaram abaixo de 1 segundo.

4.4 CONCLUSÃO

Neste capítulo, foram apresentadas representações matriciais para determinar os estados Maximin$_h$ estáveis dentro do GMCR, abrangendo tanto conflitos bilaterais quanto multilaterais. Além disso, introduzimos representações voltadas para a análise de estabilidades Maximin$_h$ credíveis.

Embora as tarefas envolvidas na análise matricial possam parecer complexas, elas podem ser implementadas facilmente em qualquer linguagem de programação. As operações matriciais necessárias incluem multiplicação, produto de Hadamard, complemento, transposição, e cálculo de máximos e mínimos, todas com complexidade polinomial em relação ao número de estados viáveis.

Esses resultados são significativos, pois a estabilidade Maximin$_h$ e Maximin$_h$ credíveis generalizam conceitos de estabilidade amplamente utilizados, como Nash, GMR, SMR, SEQ e SSEQ. Com o auxílio das representações matriciais propostas, é possível realizar uma análise completa de um conflito, considerando qualquer horizonte e levando em conta ou não a restrição de sanções credíveis.

Ilustramos a aplicação dos métodos propostos na análise da Fase 3 do conflito entre Sun Belt e o Governo da Colúmbia Britânica. Com os métodos matriciais, determinamos para quais horizontes os estados são estáveis de acordo com a estabilidade Maximin$_h$. Nesta análise, estendemos a análise de estabilidade até o horizonte 20.

Além disso, a fim de demostrar a eficiência do método matricial e o tempo computacional de execução a medida que incrementamos o número de jogadores, realizamos a aplicação do conflito do Dilema dos Prisioneiros para n tomadores de decisão. Verificou-se que, à medida que o valor de n aumenta, maior será o tempo de excussão, refletindo a crescente complexidade do problema.

5 REPRESENTAÇÃO MATRICIAL DA ESTABILIDADE DE MOVIMENTO LIMITADO (L_h) NO MODELO DE GRAFOS PARA RESOLUÇÃO DE CONFLITOS COM 2 DECISORES

5.1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo visa apresentar representações matriciais para alcançar estados estáveis de acordo com o conceito de estabilidade de movimento limitado (L_h) para conflitos bilaterais, de maneira análoga ao que foi desenvolvido, no capítulo anterior, para a estabilidade Maximin$_h$. Como vimos, no conceito Maximin$_h$, o DM focal não utiliza informações sobre as preferências do oponente, presumindo que este tomará a ação que minimiza os ganhos do DM focal. Deste modo, isto resulta em alternâncias entre movimentos de maximização e minimização, dependendo de quem está agindo, seja o decisor focal ou seu oponente, respectivamente. Por outro lado, no conceito L_h as preferências de ambos os DMs devem ser de conhecimento comum, resultando em ambos realizando movimentos de maximização de acordo com suas próprias preferências.

Intuitivamente, teremos que além de usar a matriz de *payoffs* K_i do DM focal, usar a matriz K_j de *payoffs* do oponente do DM focal. Assim como no caso do Maximin$_h$, teremos que definir matrizes que representam os *payoffs* que os DMs esperam receber ao final do conflito ao mudarem o conflito do estado da linha para o estado da coluna considerando um determinado horizonte de análise h. Estas matrizes também serão definidas recursivamente e a cada passo deverá ser registrado além do maior *payoff* que pode ser obtido pelo DM, ao se mover de cada estado, qual é o estado da coluna que atinge este maior valor de *payoff*.

Na Seção 5.2, apresentamos nossa proposta de como deverá ser feita esta recursão. Além disso, demonstramos que as estabilidades L_h podem ser obtida a partir das representações matriciais apresentadas e implementamos computacionalmente estas operações matriciais. A metodologia é ilustrada detalhadamente em uma aplicação no jogo do Dilema dos prisioneiros na Seção 5.2.1. A análise do conflito real de seleção tecnológica de neurociência na China (ZHOU; WANG, 2018) por meio do conceito L_h foi realizada na Seção 5.2.2. Adicionalmente, essa metodologia nos permitiu analisar o comportamento dinâmico ou oscilatório que ocorre na estabilidade L_h (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993) considerando todos os jogos 2×2, descritos conforme a tabela periódica (BRUNS, 2015b) na Seção 5.2.3, além, também, da identificação dos seus respectivos ciclos.

5.2 REPRESENTAÇÕES MATRICIAIS DA ESTABILIDADE L_h NO GMCR

Nesta seção, iremos propor a representação matricial da estabilidade L_h. Na estabilidade Maximin$_h$, o decisor focal observa qual será a pior consequência que ele poderia obter em relação a cada uma das suas possíveis ações e, dada esta análise, ele escolhe a ação que, no pior cenário, lhe oferece a melhor consequência. Recorde que, no caso da estabilidade L_h, os tomadores de decisão se movem a fim de obterem o melhor resultado possível para eles próprios, utilizando o conhecimento prévio sobre as preferências de todos os DMs envolvidos no conflito.

O primeiro passo na construção da nova representação matricial é definir a matriz de ganho antecipado, denotada por $\mathscr{B}_h^i$, que o DM i espera receber após um horizonte h, se ele for o primeiro a se mover. Nesta matriz, as linhas representam o que o DM i prevê receber ao final do conflito se o estado do conflito mudar do estado da linha para o estado da coluna.

A seguir, vamos definir uma importante matriz, denominada de $ArgMax(A)$, que será importante para uma boa compreensão de alguns resultados que apresentaremos abaixo.

Definição 5.2.1 *Seja $A = [a_{tk}]$ uma matriz de ordem $|S|$, então $ArgMax(A)$ é também uma matriz de ordem $|S|$ tal que:*

$$ArgMax(A)[(t,k)] = \begin{cases} 1, & se\ t = k\ e\ a_{kk} \geq a_{tl}, \forall 1 \leq l \leq |S| \\ 1, & se\ a_{tk} > a_{kk},\ a_{tk} \geq a_{tl}, \forall 1 \leq l \leq |S| \\ & e\ se\ existir\ l\ tal\ que\ a_{tk} = a_{tl},\ então\ k < l \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Desta forma, para qualquer $j \in N$ e horizonte h, seja D_h^j uma matriz quadrada de ordem $|S|$, tal que

$$D_h^j \;=\; ArgMax(\mathscr{B}_h^j).$$

Podemos agora definir a matriz$\mathscr{B}_h^i$ recursivamente. Considerando $h = 1$, temos,

$$\mathscr{B}_1^i \;=\; \Big(J_i \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top} + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top}\Big)$$

e quando $h \geq 2$ temos que,

$$\mathscr{B}_h^i \quad = \quad \left((J_i \circ (((D_{h-1}^j \circ (E-I)) \cdot \mathscr{C}_{h-2}^i + (D_{h-1}^j \circ I) \cdot \mathbf{K}_i) \cdot E^{'})^{\top}) + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top} \right),$$

em que $j \neq i$, $\mathscr{C}_0^i = \mathbf{K}_i$, $\mathscr{C}_0^j = \mathbf{K}_j$, $\mathscr{C}_h^i = max(\mathscr{B}_h^i)$, $\forall h \geq 1$.

O Lema 5.2.1 a seguir tem o intuito de estabelecer que a entrada $(s,1)$ da matriz coluna $\mathscr{C}_h^i$ seja igual ao ganho máximo que o DM poderá obter caso escolha permanecer em s ou se afastar de s e ambos os DMs se movem a fim de maximizar o seu próprio *payoff* a cada rodada.

Lema 5.2.1 *Para quaisquer estados $s_t, s_k \in S$ e para todo inteiro positivo h:*

$$\mathscr{B}_h^i(s_t,s_k) \quad = \quad \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(G_{h-1}(j,s_k)), & s_k \in R_i(s_t) \\ 0, & \textit{caso contrário,} \end{cases}$$

e

$$\mathscr{C}_h^i(s_t,1) \quad = \quad Max\{\{K_i(s_t)\} \cup \{K_i(G_{h-1}(j,s_k)) : s_k \in R_i(s_t)\}\} = Max\{K_i(s_t), A_h(i,s_t)\}.$$

Prova: Para provarmos esse resultado vamos usar indução matemática em h. Dessa forma, é necessário verificar primeiro a etapa base da indução, verificando o caso $h=1$, para $\mathscr{C}_h^i(s,1)$. Pela definição da estabilidade L_h, temos que,

$$\begin{aligned} A_1(i,s_t) \quad &= \quad K_i(G_0(j,M_h(i,s_t))) \\ &= \quad max\{K_i(s_k) : s_k \in R_i(s_t)\}. \end{aligned}$$

Além disso, note que $\mathscr{C}_1^i(s_t,1) = Max(\mathscr{B}_1^i)(s_t,1)$, onde

$$
\begin{aligned}
\mathscr{B}_1^i(s_t, s_k) &= \left[\left((J_i \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^\top)\right)\right](s_t, s_k) \\
&= \begin{cases} K_i(s_k) & \text{se } s_k \in R_i(s_t) \cup \{s_t\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} K_i(s_k) & \text{se } s_k = s_t \\ K_i(G_0(j, s_k)) & \text{se } s_k \in R_i(s_t) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Assim, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}_1^i(s_t, 1) &= max(\mathscr{B}_1^i)(s_t, 1) \\
&= max\left\{\mathscr{B}_1^i(s_t, s_k), \forall s_k \in S\right\} \forall s_t \in S.
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}_1^i(s_t, 1) &= max\{K_i(s_k) : s_k \in R_i(s_t) \cup \{s_t\}\} \\
&= max\{A_1(i, s_t), K_i(s_t)\}.
\end{aligned}
$$

Como $\mathscr{B}_h^i$ é definido em termos que $\mathscr{C}_{h-2}^i$, vamos provar também que para $h = 2$ o lema é válido. Pela definição da estabilidade L_h, temos que,

$$
\begin{aligned}
A_2(i, s_t) &= K_i(G_1(j, M_h(i, s_t))) \\
&= max\{K_i(G_1(j, s_k)) : s_k \in R_i(s_t)\} \\
&= max\left\{K_i(s_u) : s_u \in argmax\{K_j(s_u) : s_u \in \{s_k\} \cup R_j(s_k), s_k \in R_i(s_t)\}\right\}.
\end{aligned}
$$

Além disso, note que $\mathscr{C}_2^i(s_t, 1) = Max(\mathscr{B}_2^i)(s_t, 1)$, onde

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_2^i(s_t,s_k) &= \Big((J_i \circ (((D_1^j \circ (E-I)) \cdot \mathscr{C}_0^i + (D_1^j \circ I)\cdot \mathbf{K}_i)\cdot E')^\top) + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E')^\top\Big)(s_t,s_k) \\
&= \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(s_u), & s_k \in R_i(s_t), s_u \in R_j(s_k) \text{ e } D_1^j(s_k,s_u) = 1 \\ K_i(s_k), & s_k \in R_i(s_t) \text{ e } D_1^j(s_k,s_k) = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(s_u), & s_k \in R_i(s_t), s_u \in R_j(s_k), \mathscr{B}_1^j(s_k,s_u) > \mathscr{B}_1^j(s_k,s_k) \\ & \text{e } \mathscr{B}_1^j(s_k,s_u) \geq \mathscr{B}_1^j(s_k,s_l), \forall s_l \in S \\ K_i(s_k), & s_k \in R_i(s_t) \text{ e } \mathscr{B}_1^j(s_k,s_k) \geq \mathscr{B}_1^j(s_k,s_u), \forall s_u \in S \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Pelo caso $h = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_2^i(s_t,s_k) &= \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(s_u), & s_k \in R_i(s_t), s_u \in R_j(s_k), K_j(s_u) > K_j(s_k) \\ & \text{e } K_j(s_u) \geq K_j(s_l), \forall s_l \in R_j(s_k) \\ K_i(s_k), & s_k \in R_i(s_t) \text{ e } K_j(s_k) \geq K_j(s_u), \forall s_u \in R_j(s_k) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \\
&= \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(s_u), & s_k \in R_i(s_t) \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}
\end{aligned}$$

em que $s_u \in argmax\{K_j(s_u) : s_u \in \{s_k\} \cup R_j(s_k)\}$. Logo, temos que

$$\mathscr{B}_2^i(s_t,s_k) = \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(G_1(j,s_k)), & s_k \in R_i(s_t) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_2^i(s_t,1) &= max(\mathscr{B}_2^i)(s_t,1)\\ &= max\left\{\mathscr{B}_2^i(s_t,s_k),\forall s_k\in S\right\}\forall s_t\in S.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathscr{C}_2^i(s_t,1) = Max\{\{K_i(s_t)\}\cup\{K_i(G_1(j,s_k)) : s_k\in R_i(s_t)\}\} = Max\{K_i(s_t),A_2(i,s_t)\}.$$

Vamos assumir que estas igualdades são válidas para $h-1$ e $h-2$, ou seja,

$$\mathscr{B}_{h-1}^i(s_t,s_k) = \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(G_{h-2}(j,s_k)), & s_k\in R_i(s_t) \\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$

$$\mathscr{B}_{h-2}^i(s_t,s_k) = \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(G_{h-3}(j,s_k)), & s_k\in R_i(s_t) \\ 0, & \text{caso contrário,}\end{cases}$$

$$\mathscr{C}_{h-1}^i(s_t,1) = max\{A_{h-1}(i,s_t),K_i(s_t)\}$$

e

$$\mathscr{C}_{h-2}^i(s_t,1) = max\{A_{h-2}(i,s_t),K_i(s_t)\}.$$

Vamos agora analisar o caso h. Pela definição de L_h, temos que

$$\begin{aligned}
A_h(i,s_t) &= K_i(G_{h-1}(j,M_h(i,s_t)))\\
&= max\{K_i(G_{h-1}(j,s_k)) : s_k \in R_i(s_t)\}\\
&= \begin{cases} K_i(s_k) & K_j(s_k) \geq A_{h-1}(j,s_k), s_k \in R_i(s_t)\\ K_i(G_{h-2}(i,M_{h-1}(j,s_k)) & K_j(s_k) < A_{h-1}(j,s_k), s_k \in R_i(s_t)\end{cases}\\
&= \begin{cases} K_i(s_k) & K_j(s_k) \geq A_{h-1}(j,s_k), s_k \in R_i(s_t)\\ max\{K_i(G_{h-2}(i,s_u)) : s_u \in R_j(s_k)\} & K_j(s_k) < A_{h-1}(j,s_k), s_k \in R_i(s_t)\end{cases}\\
&= \begin{cases} K_i(s_k) & K_j(s_k) \geq A_{h-1}(j,s_k), s_k \in R_i(s_t)\\ max\{\{K_i(s_u), A_{h-2}(i,s_u)\} : s_u \in R_j(s_k)\} & K_j(s_k) < A_{h-1}(j,s_k), s_k \in R_i(s_t).\end{cases}
\end{aligned}$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}_h^i(s_t,s_k) &= \left((J_i \circ (((D_{h-1}^j \circ (E-I)) \cdot \mathscr{C}_{h-2}^i + (D_{h-1}^j \circ I)\cdot \mathbf{K}_i)\cdot E')^\top) + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E')^\top\right)(s_t,s_k)\\
&= \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t\\ \mathscr{C}_{h-2}^i(s_u,1), & s_k \in R_i(s_t), s_u \in R_j(s_k) \text{ e } D_{h-1}^j(s_k,s_u) = 1\\ K_i(s_k), & s_k \in R_i(s_t) \text{ e } D_{h-1}^j(s_k,s_k) = 1\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}\\
&= \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t\\ \mathscr{C}_{h-2}^i(s_u,1), & s_k \in R_i(s_t), s_u \in R_j(s_k), \mathscr{B}_{h-1}^j(s_k,s_u) > \mathscr{B}_{h-1}^j(s_k,s_k)\\ & \text{e } \mathscr{B}_{h-1}^j(s_k,s_u) \geq \mathscr{B}_{h-1}^j(s_k,s_l), \forall s_l \in S\\ K_i(s_k), & s_k \in R_i(s_t) \text{ e } \mathscr{B}_{h-1}^j(s_k,s_k) \geq \mathscr{B}_{h-1}^j(s_k,s_u), \forall s_u \in S\\ 0 & \text{caso contrário.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Usando o caso $h-1$ para substituir o valor de $\mathscr{B}_{h-1}^j$, temos que

$$\mathscr{B}_h^i(s_t,s_k) \quad = \quad \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ \mathscr{C}_{h-2}^i(s_u,1), & s_k \in R_i(s_t), s_u \in R_j(s_k), K_j(G_{h-2}(i,s_u)) > K_j(s_k) \\ & \text{ e } K_j(G_{h-2}(i,s_u)) \geq K_j(G_{h-2}(i,s_l)), \forall s_l \in R_j(s_k) \\ K_i(s_k), & s_k \in R_i(s_t) \text{ e } K_j(s_k) \geq K_j(G_{h-2}(i,s_u)), \forall s_u \in R_j(s_k) \\ 0 & \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Em seguida, usando o caso $h-2$ para substituir o valor de $\mathscr{C}_{h-2}^i(s_u,1)$, temos

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_h^i(s_t,s_k) \quad &= \quad \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ max\{A_{h-2}(i,s_u), K_i(s_u)\}, & s_k \in R_i(s_t), s_u \in R_j(s_k), K_j(G_{h-2}(i,s_u)) > K_j(s_k) \\ & \text{ e } K_j(G_{h-2}(i,s_u)) \geq K_j(G_{h-2}(i,s_l)), \forall s_l \in R_j(s_k) \\ K_i(s_k), & s_k \in R_i(s_t) \text{ e } K_j(s_k) \geq K_j(G_{h-2}(i,s_u)), \forall s_u \in R_j(s_k) \\ 0 & \text{ caso contrário} \end{cases} \\ &= \quad \begin{cases} K_i(s_k), & s_k = s_t \\ K_i(G_{h-1}(j,s_k)), & s_k \in R_i(s_t) \\ 0, & \text{ caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\mathscr{C}_h^i(s_t,1) \quad = \quad Max\{\{K_i(s_t)\} \cup \{K_i(G_{h-1}(j,s_k)) : s_k \in R_i(s_t)\}\} = Max\{K_i(s_t), A_h(i,s_t)\}.$$

∎

O Teorema 5.2.2 fornece o resultado matricial que visa obter estados estáveis de acordo com o conceito de estabilidade L_h.

Teorema 5.2.2 *Um estado $s \in S$ é L_h para o DM i se somente se,* $\left(sinal(\boldsymbol{K}_i - \mathscr{C}_h^i)\right)(s,1) = 0$.

Prova: A prova neste caso é similar a prova do Teorema 4.2.2, fazendo uso do Lema 5.2.1.

Se $\left(sinal(\mathbf{K}_i - \mathscr{C}_h^i)\right)(s,1) = 0$, então isto implica que $\mathbf{K}_i(s,1) = \mathscr{C}_h^i(s,1)$, assim, como pelo Lema 5.2.1, $\mathscr{C}_h^i(s,1) = max\{K_i(s), A_h(i,s)\}$, então, $K_i(s) \geq A_h(i,s)$. Assim, teremos $G_h(i,s) = s$, o que implica que s é L_h estável para o DM i.

Se $\left(sinal(\mathbf{K}_i - \mathscr{C}_h^i)\right)(s,1) < 0$, então isto implica que $\mathbf{K}_i(s,1) < \mathscr{C}_h^i(s,1)$, assim, como pelo Lema 5.2.1, $\mathscr{C}_h^i(s,1) = max\{K_i(s), A_h(i,s)\}$, então, $K_i(s) < A_h(i,s)$. Assim, teremos $G_h(i,s) \neq s$, o que implica que s não é L_h estável para o DM i.

Desta forma, isto implicaria que se somente se a entrada $(s,1)$ dos vetores colunas $\mathbf{K}_i$ e $\mathscr{C}_h^i$ forem iguais, o estado s é L_h estável para o DM i. ▮

5.2.1 Dilema dos Prisioneiros

Iremos apresentar agora uma aplicação da representação matricial do conceito L_h, considerando um horizonte $h = 3$, no conflito do dilema dos prisioneiros.

Com base na Figura 2.2, temos que as matrizes de acessibilidade a seguir apresentam o conjunto de acessibilidade entre os estados viáveis deste conflito para ambos os DMs.

$$J_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lembrando que a relação de preferência neste conflito para o DM i é denotada por $s_3(DC) \succ_i s_1(CC) \succ_i s_4(DD) \succ_i s_2(CD)$ e para o DM j temos $s_2(CD) \succ_j s_1(CC) \succ_j s_4(DD) \succ_j s_3(DC)$. Dessa forma, as matrizes de preferências dos DMs são:

$$P_i^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_j^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Precisamos encontrar agora a matriz de *payoffs* $\mathbf{K}_i$ do DM focal e a matriz $\mathbf{K}_j$ de *payoffs* do oponente do DM focal.

$$\mathbf{K}_i = (E^{'} \cdot P_i^+)^\top = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^\top = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{K}_j = (E^{'} \cdot P_j^{+})^{\top} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{\top} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos encontrar o ganho antecipado que o DM i espera receber após um horizonte de conflito $h = 3$, se ele for o primeiro a se mover. Recordando a definição de $\mathscr{B}_3^i$, temos que

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_3^i &= \Big((J_i \circ (((D_2^j \circ (E - I)) \cdot \mathscr{C}_1^i + (D_2^j \circ I) \cdot \mathbf{K}_i) \cdot E^{'})^{\top}) + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top} \Big) \\ &= \Big((J_i \circ (((ArgMax(\mathscr{B}_2^j) \circ (E - I)) \cdot \mathscr{C}_1^i + (ArgMax(\mathscr{B}_2^j) \circ I) \cdot \mathbf{K}_i) \cdot E^{'})^{\top}) + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top} \Big). \end{aligned}$$

Sabemos que $\mathscr{C}_1^i = Max\mathscr{B}_1^i$, desta forma, precisamos encontrar a matriz $\mathscr{B}_1^i$. Logo, note que

$$\mathscr{B}_1^i = \Big((J_i \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top} + I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top}) \Big)$$

Vamos obter cada parte da matriz $\mathscr{B}_1^i$ acima. Observe que:

$$J_i \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \circ \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{\top} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$I \circ (\mathbf{K}_i \cdot E^{'})^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{\top} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathscr{B}_1^i = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrando agora $\mathscr{C}_1^i$, temos que

$$\mathscr{C}_1^i = Max\mathscr{B}_1^i = Max \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Precisamos encontrar $ArgMax(\mathscr{B}_2^j)$, para isto precisamos primeiro encontrar $\mathscr{B}_2^j$. Observe que,

$$\begin{aligned} \mathscr{B}_2^j &= \Big((J_j \circ (((D_1^i \circ (E-I)) \cdot \mathscr{C}_0^j + (D_1^i \circ I) \cdot \mathbf{K}_j) \cdot E^{'})^\top) + I \circ (\mathbf{K}_j \cdot E^{'})^\top \Big) \\ &= \Big((J_j \circ (((ArgMax(\mathscr{B}_1^i) \circ (E-I)) \cdot \mathbf{K}_j + (ArgMax(\mathscr{B}_1^i) \circ I) \cdot \mathbf{K}_j) \cdot E^{'})^\top) + I \circ (\mathbf{K}_j \cdot E^{'})^\top \Big). \end{aligned}$$

Temos que como

$$ArgMax(\mathscr{B}_1^i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

obtém-se que

$$\mathscr{B}_2^j = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Desta forma, temos que

$$ArgMax(\mathscr{B}_2^j) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e, consequentemente, obtém-se que

$$\mathscr{B}_3^i = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, pode-se calcular $\mathscr{C}_3^i$ da seguinte forma:

$$\mathscr{C}_3^i = Max \mathscr{B}_3^i \quad = \quad Max \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, fazendo a diferença de quanto DM i tem se permanecer em um dado estado e quanto ele terá ao final do horizonte de análise se ele mover-se deste estado, temos que

$$K_i - \mathscr{C}_3^i \quad = \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, aplicando o sinal na matriz resultante, segue que:

$$Sinal(K_i - \mathscr{C}_3^i) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

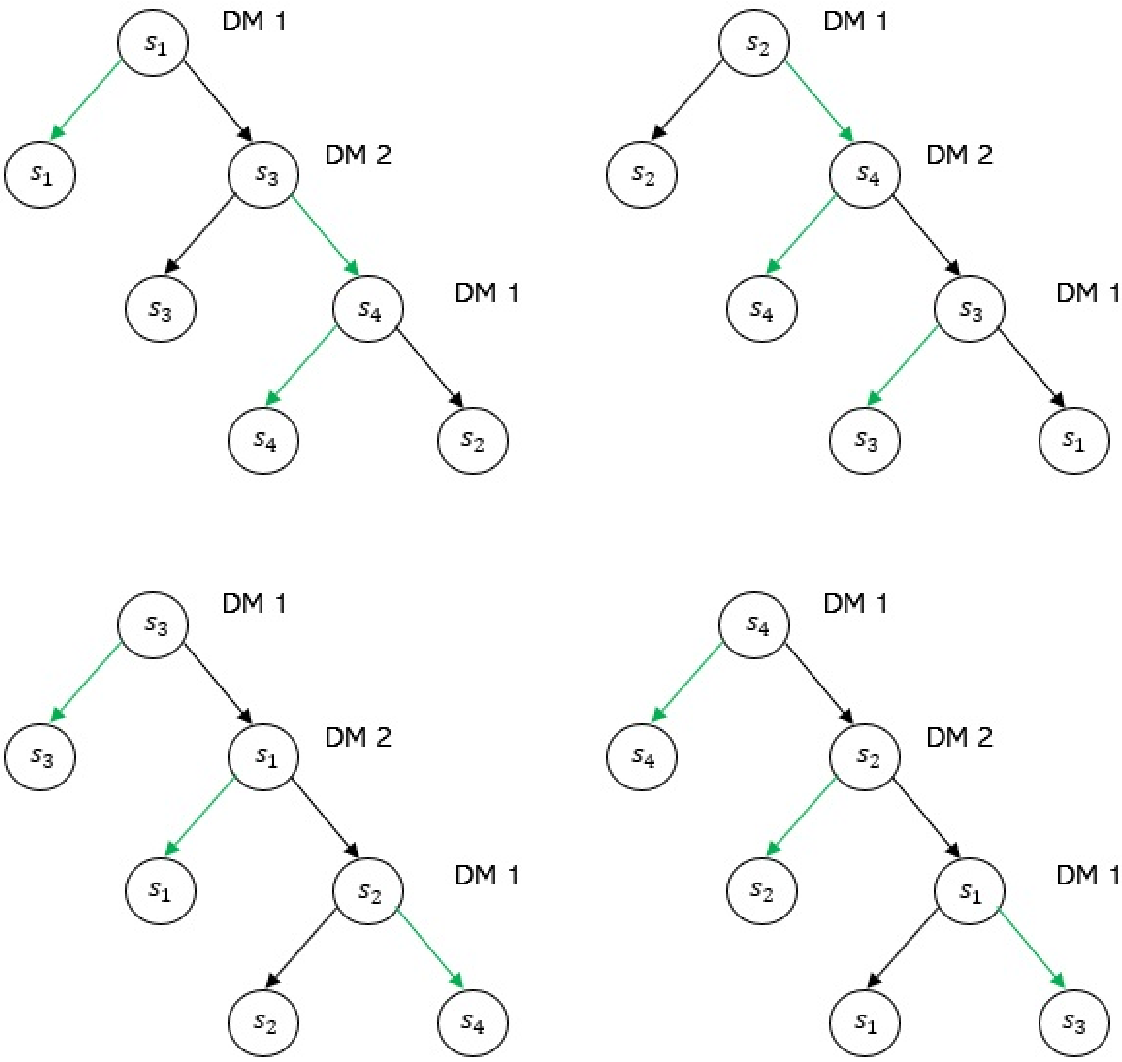
Podemos observar, pelo resultado da matriz sinal, que os estados s_1, s_3 e s_4 são estáveis para o DM i no horizonte $h = 3$, pois foram os únicos que não apresentaram valores negativos em suas colunas. Na Figura 5.1, podemos observar o mesmo resultado através das árvores de decisão, utilizando indução reversa.

Na Tabela 5.1, apresentamos os resultados da representação matricial para a estabilidade L$_h$ para os 3 primeiros horizontes deste conflito. As células da Tabela 5.1 referem-se ao valor da matriz sinal do Teorema 5.2.2 para o estado da coluna, considerando o horizonte apresentado na linha.

Tabela 5.1 – Análise de estabilidade L$_h$, para $h \leq 3$ - Dilema dos Prisioneiros

DMs	**h**	s_1	s_2	s_3	s_4
	1	-1	-1	0	0
i	2	0	-1	0	0
	3	0	-1	0	0
	1	-1	0	-1	0
j	2	0	0	-1	0
	3	0	0	-1	0
Eq.	-	$2 \leq h \leq 3$	-	-	$1 \leq h \leq 3$

Figura 5.1 – Árvores de decisão do DM 1 - L_3



Assim, temos que o estado s_4 está em equilíbrio de acordo com o conceito de estabilidade L_h para qualquer horizonte h neste conflito. Este resultado no conflito acaba por representar a situação em que ambos os DMs delatam e cada um deles recebe uma pena de 5 anos. Temos também que para horizontes maiores que dois o estado s_1 também se torna um equilíbrio que representa a situação em que ambos os DMs cooperam e cada um deles recebe uma pena de 6 meses.

5.2.2 Conflito de seleção de tecnologia de neurociência na China

No conflito de seleção de tecnologia de neurociência na China, estudado por Zhou e Wang (2018), foi realizada uma análise comportamental tendo em conta as preferências dos DMs. Uma teoria para mudanças de preferência em quatro fases do processo de cognição foi proposta sob a suposição de racionalidade limitada. As fases consideradas nesse conflito são:

- **Fase 1 (Intuição):** Falta de capacidade do DM para avaliar as suas preferências. Comportam-se intuitivamente, de acordo com experiências ou rotinas anteriores;
- **Fase 2 (Emoção):** Os DMs baseiam as suas decisões nas suas emoções;
- **Fase 3 (Racionalidade em pequena escala):** São feitas avaliações realistas, no entanto, as preferências são frequentemente arriscadas;
- **Fase 4 (Racionalidade em grande escala):** Objetivos e preferências de longo prazo são normalmente levados em consideração de forma mais conservadora.

Este conflito envolve dois DMs: o Governo (G) e a Comunidade Científica (R). O DM G tem as três opções seguintes: (M) - Manter o *status quo* existente sem fornecer suporte adequado para inovação tecnológica; (F) - Financiar o proprietário da nova tecnologia; e (P) - Fornecer apoio político através da redução de impostos e do fornecimento de terrenos ao proprietário da nova tecnologia. Por outro lado, as opções disponíveis para o DM R são: (IN) - trabalhar na inovação tecnológica disruptiva e (IM) - melhorar a tecnologia atual. Apresentamos os estados viáveis do conflito e os grafos dirigidos dos DM envolvidos no mesmo, respectivamente, em Tabela 5.2 e Figura 5.2. Para mais informações sobre o cenário desta disputa, consulte Zhou e Wang (2018).

Tabela 5.2 – DMs, opções e estados viáveis do conflito de seleção tecnológica

DMs	Opções	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
G	M	Y	N	N	N	Y	N	N	N
	F	N	Y	N	Y	N	Y	N	Y
	P	N	N	Y	Y	N	N	Y	Y
R	IN	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
	IM	N	N	N	N	Y	Y	Y	Y

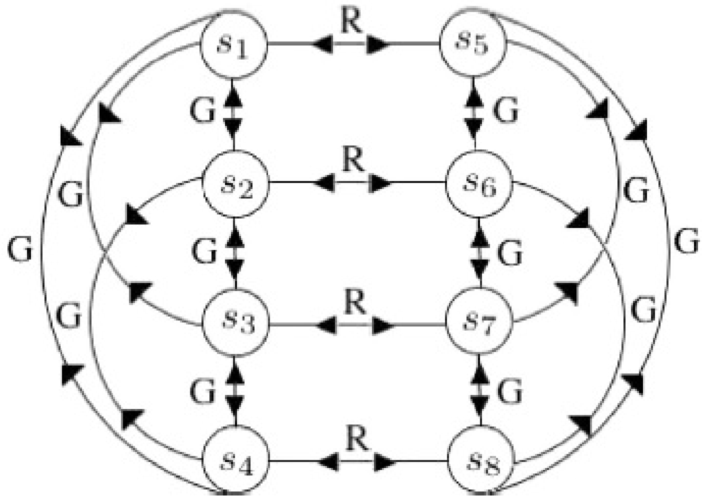
As matrizes de acessibilidade dos DMs G e R são, respectivamente:

$$J_G = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&1&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J_R = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

5.2.2.1 Fase 1 - Intuição

As matrizes de preferência de DM G e DM R, na Fase 1 são, respectivamente, dadas por

Figura 5.2 – Modelo de grafo para o conflito de seleção de tecnologia de neurociência na China



Fonte: (RÊGO; VIEIRA, 2019)

$$P_G^+ = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_R^+ = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Na Tabela 5.3, apresentamos os resultados da representação matricial para a estabilidade L_h, para $h \leq 3$, na Fase 1 deste conflito. As células da Tabela 5.3 referem-se ao valor da matriz sinal do Teorema 5.2.2 para o estado da coluna, considerando o horizonte apresentado na linha.

Tabela 5.3 – Análise de estabilidade L_h, para $h \leq 3$ - Fase 1

	h	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
	1	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1
G	**2**	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1
	3	0	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1
	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
R	**2**	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
	3	0	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
Eq.	-	$1 \leq h \leq 3$							

Assim, temos que apenas o estado s_1 está em equilíbrio de acordo com o conceito de estabilidade L_h para esta fase do conflito. Este estado é um equilíbrio para qualquer horizonte $h \leq 3$. Este resultado no conflito acaba por representar a situação em que os DMs tendem a continuar fazendo o que foi feito no passado. Em outras palavras, o DM G mantém as coisas como estão sem fazer investimentos suficientes em inovação tecnológica, enquanto o DM R opta por fazer pesquisa tecnológica incremental.

5.2.2.2 Fase 2 - Emoção

As matrizes de preferência dos DMs para a Fase 2 são apresentadas a seguir:

$$P_G^+ = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&0&0&1&1 \\ 0&1&1&1&0&0&0&1 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_R^+ = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&1&1&1 \\ 1&1&1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&1&1&0&1&0&1 \\ 1&1&1&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

A análise de estabilidade L_h, para $h \leq 3$, da Fase 2 deste conflito é apresentada na Tabela 5.4. Vê-se que apenas o estado s_4 é um equilíbrio L_h para esta fase do conflito, independentemente do horizonte h considerado. O estado s_4 representa o cenário em que o DM G atua com base em emoções e escolhe tanto fornecer incentivos políticos para inovação tecnológica quanto doar fundos e o DM R trabalhará em inovação tecnológica disruptiva. Assim, temos que os DMs G e R não levarão em consideração os riscos, agindo de forma a favorecer a inovação tecnológica enquanto estiverem na fase da emoção.

Tabela 5.4 – Análise de estabilidade L_h, para $h \leq 3$ - Fase 2

DM	h	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
	1	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0
G	**2**	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0
	3	-1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0
	1	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
R	**2**	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
	3	0	0	0	0	-1	-1	-1	-1
Eq.	-				$1 \leq h \leq 3$				

5.2.2.3 Fase 3 - Racionalidade em pequena escala

A seguir, são apresentadas as matrizes de preferência dos DMs para a Fase 3.

$$P_G^+ = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&1&1&0 \\ 1&1&1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_R^+ = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

A Tabela 5.5 apresenta os resultados da representação matricial da análise de estabilidade L_h, para $h \leq 3$, para a terceira fase deste conflito. O estado s_3 é equilíbrio para todo horizonte h, como pode ser visto. Os DMs nessa fase levam em consideração riscos e incertezas, o que pode diminuir o investimento em inovação técnica. Portanto, a presença de condições alternativas estáveis no conflito que serão consideradas vantajosas a longo prazo será quando os DMs avaliarem o conflito para qualquer horizonte.

Tabela 5.5 – Análise de estabilidade L_h, para $h \leq 3$ - Fase 3

	h	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
	1	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-1
G	**2**	-1	-1	0	-1	-1	-1	0	-1
	3	-1	-1	0	-1	-1	-1	-1	-1
	1	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0
R	**2**	-1	0	0	0	-1	0	-1	0
	3	-1	0	0	0	-1	0	-1	0
Eq.	-			$1 \leq h \leq 3$					

5.2.2.4 Fase 4 - Racionalidade em grande escala

Finalmente, as matrizes de preferência dos DMs para a Fase 4 são apresentadas abaixo:

$$P_G^+ = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P_R^+ = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&1&1 \\ 0&1&0&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \\ 0&1&1&1&0&1&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

As conclusões do estudo de estabilidade L_h, para $h \leq 3$, da Fase 4 deste conflito são apresentadas na Tabela 5.6. O estado s_7, que reflete o cenário em que DM G dá respaldo político, cede terras ao dono da nova tecnologia e reduz impostos, enquanto DM R opta por avançar na tecnologia existente, também é equilíbrio para qualquer horizonte h. O DM R é cauteloso e evita desenvolvimentos perturbadores nesta fase final.

Tabela 5.6 – Análise de estabilidade L_h, para $h \leq 3$ - Fase 4

	h	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
	1	0	-1	-1	-1	-1	-1	0	-1
G	**2**	0	-1	0	0	-1	-1	0	-1
	3	0	-1	0	0	-1	-1	0	-1
	1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
R	**2**	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
	3	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0
Eq.	-							$1 \leq h \leq 3$	

Na seção a seguir, por meio das representações matriciais L_h conseguimos identificar um padrão relacionado aos estados antecipados. Esses padrões são conhecidos como ciclos na estabilidade.

5.2.3 Ciclos na Estabilidade L_h

Os "ciclos na estabilidade L_h", são trajetórias periódicas ou oscilatórias que surgem no sistema dinâmico linear, considerando as propriedades de estabilidade L_h. Isso implica que, mesmo que o sistema possa ter um ponto de equilíbrio estável L_h, ele pode também apresentar comportamentos dinâmicos periódicos ou oscilatórios.

Um jogo entra em um ciclo de tamanho r, a partir do horizonte h, se $G_{t+r}(i,s) = G_t(i,s)$, para todo inteiro t tal que $t \geq h$, todos os $i \in N$, e todos os $s \in S$, sendo h e r os menores inteiros com esta propriedade (FANG; HIPEL; KILGOUR, 1993). Como $G_t(i,s)$ é o estado que o DM i antecipa como final a partir do estado s e considerando um horizonte t, quando o jogo entra em um ciclo de tamanho r a partir do horizonte h, significa que para horizontes pelo menos igual a h, a cada incremento de tamanho r no horizonte de análise, todos os DMs antecipam os mesmos estados finais a partir de qualquer estado inicial. Por exemplo, em um jogo que apresenta um ciclo de tamanho 2, significa que para um horizonte de análise suficientemente grande, a cada incremento de 2 no horizonte de análise os estados antecipados serão os mesmos por todos os DMs a partir de todos os estados do conflito.

Se um jogo possui um ciclo de tamanho 1, diz-se que ele possui um ponto fixo. Em Fang *et al.* (1993), os autores afirmam que em todos os jogos que eles analisaram, os jogos possuíam ciclos de tamanho 1, 2 ou 4. Esses autores conjecturaram que essas são todas as possibilidades. Nesta tese, vamos utilizar a representação matricial proposta, para investigar os ciclos em todos os jogos 2×2. A partir das matrizes C_h que apresentam os payoffs antecipados conseguimos identificar os estados antecipados e seus padrões de repetição, identificando os ciclos.

Mudanças nos *payoffs* podem transformar, por exemplo, o jogo do Dilema do Prisioneiro no jogo de Caça ao Veado, ou seja, alterações nos *payoffs* podem transformar um jogo em outro. Com base nessa visão, Bruns (2015a) demonstrou como uma topologia de trocas de *payoffs* organiza elegantemente os jogos 2×2 em uma tabela periódica, estruturada em uma ordem natural conforme os vizinhos de troca, o alinhamento dos melhores resultados, a simetria, o número de estratégias e equilíbrios dominantes, entre outras propriedades. Segundo Bruns (2015a), esta representação mostra visualmente ainda mais a topologia dos jogos 2×2, mostrando as relações entre jogos e os caminhos para transformar situações estratégicas, além disso, eles apresentam a diversidade dos jogos 2×2, a variedade de situações estratégicas no qual o resultado da ação de cada pessoa depende do que a outra decide, e a gama de estruturas de incentivos possíveis quando duas pessoas têm duas escolhas interdependentes.

A Figura 5.4 apresenta os jogos da tabela periódica referente a jogos 2×2 (BRUNS, 2015a), no qual está organizada em torno dos jogos 2×2 simétricos num eixo diagonal, destacando os doze jogos ordinais estritos em que cada DM tem quatro recompensas distintas. Os padrões de *payoffs* dos jogos simétricos se combinam para formar jogos assimétricos, constituindo assim uma base conveniente para nomear os jogos. Os *payoffs* nos equilíbrios de Nash classificam os jogos em famílias, que são representadas por cores segundo a Figura 5.3. Aqui cabe ressaltar que o conceito de jogos cíclicos na Figura 5.4 não é o mesmo que a análise de ciclos na estabilidade L_h, que está sendo investigada nesta seção. Os jogos cíclicos referem-se aos jogos que não possuem equilíbrio de Nash em estratégias puras, o que significa apenas que eles não possuem nenhum equilíbrio L_1. Ao final desta nossa análise, veremos que existe uma relação entre tais jogos e aqueles que possuem ciclo de tamanho 2.

Figura 5.3 – Legenda de cores da Tabela de jogos 2×2

Ambos DMs obtém o seu melhor resultado no equilíbrio em jogos em que todos ganham. Os jogos harmoniosos têm um único equilíbrio. Os jogos de caça ao veado (também conhecidos como jogos de garantia) têm um segundo equilíbrio em que ambos obtêm um prémio inferior, Pareto-inferior.	A troca dos *payoffs* mais baixos para um DM no Dilema do Prisioneiro ou no Jogo da Galinha cria um jogo de Called Bluff, parte da Família Injusta, em que um jogador obtém o seu melhor resultado enquanto o outro obtém o segundo pior.
Nos jogos *tendenciosos* , a maior família, no equilíbrio de Nash um DM fica com o melhor resultado e o outro com o segundo melhor	O Dilema do Prisioneiro é o único membro simétrico da família Inferior em que o equilíbrio de Nash é Pareto-inferior. Seguir os incentivos individuais para uma estratégia dominante conduz a um resultado pior do que se os dois pudessem cooperar.
A troca de em *payoffs* intermediários transforma o Dilema do Prisioneiro em Deadlock, um dos dois jogos simétricos Second-best.	
Nos jogos cíclicos, em cada célula um jogador prefere sempre mudar a sua jogada, pelo que não existe equilíbrio em estratégias puras.	Os jogos *tristes* não têm sequer o potencial para um resultado Pareto-superior.

Fonte: Adaptado de (BRUNS, 2015a)

A Figura 5.4 contém doze padrões de *payoffs* que formam 144 jogos estritamente ordinais (sem indiferença), estes jogos são considerados distintos mesmo quando os DMs 1 e 2 trocam de papéis, totalizando 144 combinações únicas. No entanto, como argumentaremos a seguir, podemos focar em apenas 78 desses jogos, selecionados dessa tabela. Esses jogos estão categorizados em 12 tipos distintos de comportamentos dos DMs. Essa classificação deriva do fato de haver 24 permutações diferentes dos números de 1 a 4 $(4!)$, mas dividimos por dois para descontar as que são distintas apenas devido à troca das estratégias dos DMs, o que mantém o jogo inalterado. Por exemplo, descrever o Dilema dos Prisioneiros com “Delatar” na linha superior e “Cooperar” na inferior é equivalente a inverter essas estratégias.

Assim, cada DM tem 12 possíveis preferências distintas, resultando em 144 combinações de jogos ($12 \times 12 = 144$). Cada uma das 12 combinações de comportamentos está associada a um jogo clássico (como o Dilema dos Prisioneiros, Galinha, Stag-Hunt, etc.). Dessa forma, existem 12 jogos nos quais ambos os DMs estão jogando o mesmo jogo clássico, como ambos jogando o Dilema dos Prisioneiros, que está localizado na interseção da linha 6 com a coluna 7 da tabela periódica da Figura 5.4.

Nos outros 132 jogos (144 - 12), os DMs têm utilidades provenientes de jogos diferentes, como por exemplo, um DM jogando o jogo da Galinha e o outro jogando o Dilema dos Prisioneiros, designado na linha 1 coluna 7 da tabela como “ChPd”. Note que se invertermos os papéis dos DMs 1 e 2, obtemos o jogo “PdCh”, localizado na linha 6 na última coluna da tabela, conhecido na literatura como “Called Bluff”. Entretanto, os jogos “ChPd” e “PdCh” são equivalentes e resultam no mesmo resultado na análise, portanto não há necessidade de duplicação, apenas de repetição dos resultados encontrados.

Ao dividir os 132 jogos distintos por dois, obtemos 66, que somados aos outros 12 jogos resultam nos 78 jogos 2×2 distintos que foram analisados. Dito isto, para interpretar os *payoffs* na Figura 5.4, consideraremos os *payoffs* do DM 1 destacados em vermelho, enquanto os do DM 2 são destacados em azul.

Vamos adotar que em cada jogo 2×2, os estados estão dispostos na seguinte ordem:

$$\begin{array}{cc} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{array}$$

Então, para todos os jogos as matrizes de acessibilidade dos DMs 1 e 2 são, respectivamente:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para obter as matrizes de *payoffs*, considere o exemplo do jogo na primeira linha da primeira coluna (ChNc) da Tabela 5.4. Reescrevendo, as utilidades dos DMs 1 e 2 conforme comumente é feito em um jogo na forma normal, temos:

Figura 5.4 – Diagrama da Topologia dos Jogos 2 × 2

Fonte: Adaptado de (BRUNS, 2015a)

Tabela 5.7 – Forma normal do jogo ChNc

	DM 2	
DM 1	(2,3)	(3,4)
	(1,1)	(4,2)

K_1 e K_2, representam o número de estados piores que o estado para os DMs 1 e 2. Como os valores na tabela do jogo variam de 1 a 4, K_1 e K_2 variam 0 a 3 correspondendo a um valor a menos. Assim, K_1 e K_2 são respectivamente:

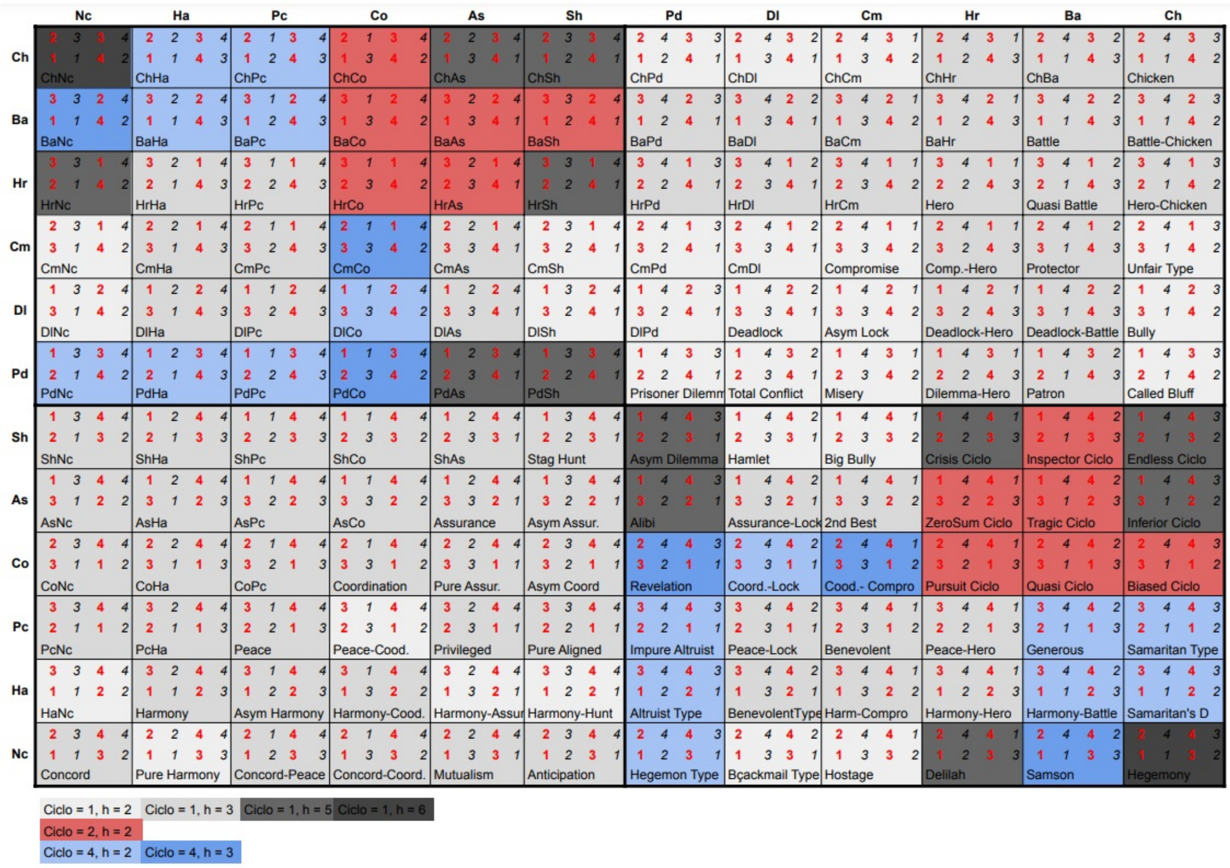
$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para cada um dos 78 jogos, podemos repetir este mesmo procedimento para obter as matrizes K_1 e K_2 de cada um deles. Utilizando a representação matricial para cada um desses jogos, foi analisado o conceito L_h até o valor $h = 20$, e observou-se a existência do ciclo, bem como seu início.

Na Figura 5.5, apresentamos os *payoffs* usando a mesma tabela, destacando com cores iguais os jogos com os mesmos ciclos resultantes e o horizonte no qual o ciclo inicia está destacado por tons da cor daquele ciclo, sendo o horizonte $h = 1$ o tom mais fraco e o $h = 5$ o tom mais forte. Vale ressaltar que cada jogo é representado pelas iniciais do seu nome original, como, por exemplo, *Chicken Game* será representado por Ch.

Ao relacionar a tabela original, Figura 5.4, com os nossos resultados sobre os ciclos, Figura 5.5, podemos extrair algumas conclusões interessantes. Observa-se que todos os jogos que apresentam ciclo de tamanho 2 pertencem ao grupo que não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras (grupo cinza na Figura 5.4). Além disso, todos os jogos em que ambos os DMs atingem o melhor resultado no equilíbrio (grupo verde na Figura 5.4) apresentam ciclo 1. Por fim, todos os jogos classificados como "tristes", ou seja, que não têm sequer o potencial para um resultado Pareto-superior (grupo rosa na Figura 5.4), também possuem ciclo 1.

Figura 5.5 – Diagrama da Topologia dos Jogos 2 × 2 por ciclos e horizontes



5.3 CONCLUSÃO

No presente capítulo, apresentamos representações matriciais para obter estados estáveis de acordo com o conceito de estabilidade do movimento limitado, L_h, considerando conflitos bilaterais. Diferentemente do conceito Maximin$_h$, que não leva em consideração as preferências dos oponentes, o L_h integra as preferências de ambos os DMs, permitindo que cada DM realize movimentos de maximização de acordo com suas próprias preferências.

Aplicamos essas representações a dois cenários distintos. Primeiramente, utilizamos o Dilema dos Prisioneiros, um conflito amplamente discutido na literatura, onde aplicamos a representação do L_h considerando um horizonte $h = 3$. Em seguida, aplicamos ao caso real de seleção de tecnologia de neurociência na China, estudado por Zhou e Wang (2018), analisando as quatro fases nas quais esse conflito foi dividido.

Além disso, exploramos os ciclos na estabilidade L_h. Ilustramos essa análise cíclica utilizando os jogos da tabela periódica para jogos 2×2, conforme apresentado por Bruns (2015a). Nessa análise, pudemos extrair conclusões interessantes ao relacionar a tabela periódica de (2015a) com a nossa versão adaptada, abrindo novas possibilidades de estudo sobre ciclos e padrões de estabilidade em jogos estratégicos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O GMCR pode ser considerado uma ferramenta que possui grande potencial para analisar, modelar e explicar conflitos estratégicos. Porém, quando consideramos conflitos estratégicos muito extensos, em termos de números de estados ou decisores, identificar estabilidades de estados pode se torna uma tarefa custosa se for realizada por meio das representações lógicas das noções de estabilidades. Desta forma, nos baseamos e realizamos adaptações de métodos matriciais propostos por Xu *et al.* (2007 e 2008) para propor representações matriciais para alguns conceitos de estabilidade com horizonte variável existentes na literatura do GMCR. As principais motivações para a construção desta tese são:

- As representações matriciais facilitam o desenvolvimento de algoritmos melhorados para avaliar as estabilidades dos estados.
- Os métodos matriciais propostos são propícios para a análise teórica de problemas de conflito.
- Os métodos matriciais possuem a vantagem de serem fáceis de se calcular e codificar, em comparação com a representação lógica dos conceitos de soluções.
- As representações matriciais fornecem expressões algébricas explícitas que podem ser adaptadas para novos conceitos de solução.
- A representação matricial de conceitos soluções pode ser integrada num sistema de suporte a decisão.

Diante disto, nesta tese foram propostas representações matriciais de conceitos de estabilidade com horizontes variáveis no GMCR considerando situações de conflitos bilaterais e multilaterais. As representações matriciais obtidas nesta pesquisa foram produzidas para as seguintes conceitos de solução: estabilidade $m-SEQ$, Maximin$_h$ e L_h.

Esses resultados são de suma importância, pois as estabilidade Maximin$_h$, e suas variantes credíveis, generalizam os conceitos de estabilidade mais utilizados na análise de estabilidade do GMCR, como: Nash, GMR, SMR, SEQ e SSEQ. Com a ajuda das representações matriciais propostas, agora se pode realizar uma análise completa de um conflito, considerando qualquer horizonte, considerando ou não a restrição a sanções credíveis.

Ilustramos diversas aplicações para demonstrar o uso das representações matriciais apresentadas nesta tese, visando facilitar o entendimento dos conceitos discutidos. No contexto de estabilidade m-SEQ, abordamos dois conflitos reais, Matching Pennies e o conflito de renovação de instalação industrial privado. Para a noção de estabilidade Maximin$_h$, analisamos a Fase 3 do conflito entre a Sun Belt e o Governo da Colúmbia Britânica, estendendo a análise de estabilidade até o horizonte $h = 20$. Além disso, aplicamos os métodos matriciais obtidos, para este conceito, ao Dilema dos Prisioneiros com n DMs, com o objetivo de demonstrar a eficiência da abordagem matricial e mensurar o tempo computacional à medida que o número de DMs, deste conflito, aumenta. Aplicamos os resultados matriciais ao Dilema dos Prisioneiros e às quatro fases cognitivas do conflito sobre a seleção de tecnologia de neurociência na China. Complementamos as aplicações com análises cíclicas do conceito L_h, ou seja, exploramos a existência de ciclos na estabilidade L_h em jogos 2×2.

Como sugestão para trabalhos futuros, planejamos propor representações matriciais para outras noções de estabilidade com horizonte variável, como: estabilidade de otimismo-pessimismo (SABINO; RÊGO, 2023), e estabilidade de arrependimento mínimo (SABINO; RÊGO, 2024). Adicionalmente, pretendemos investigar a existência de ciclos, em jogos 2×2, de acordo com a noção de estabilidade Maximin$_h$.

REFERÊNCIAS

AXELROD, R. **The Evolution of Cooperation**. [S.l.]: New York, 1984.

BRUNS, B. Atlas of 2x2 games: Transforming conflict and cooperation. 2015.

BRUNS, B. R. Names for games: locating $2\times$ 2 games. **Games**, MDPI, v. 6, n. 4, p. 495–520, 2015.

BíBLIA. **A Bíblia Sagrada**. Revista e corrigida. 1995. São Paulo: Sociedade Bíblica do Brasil, 1995. Traduzida em português por João Ferreira de Almeida.

COLMAN, A. M. **Game theory and experimental games: The study of strategic interaction**. [S.l.]: Elsevier, 2016.

FANG, L.; HIPEL, K.; KILGOUR, D. Conflict models in graph form: Solution concepts and their interrelationships. **European Journal of Operational Research**, v. 41, n. 1, p. 86–100, 1989.

FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. **Interactive decision making: the graph model for conflict resolution**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1993. v. 3.

FANG, L.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M.; PENG, X. A decision support system for interactive decision making-part i: model formulation. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)**, IEEE, v. 33, n. 1, p. 42–55, 2003a.

FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. Solving complex conflicts. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, IEEE, v. 9, n. 12, p. 805–816, 1979.

FRASER, N. M.; HIPEL, K. W. **Conflict analysis: models and resolutions**. [S.l.]: North-Holland, 1984. v. 11.

GIBBONS, R. **A primer in game theory**. [S.l.]: Harvester Wheatsheaf, 1992.

HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M.; FANG, L. Wiley encyclopedia of operations research and management science. In: ____. New York: Wiley, 2011. v. 3, cap. The graph model for conflict resolution, p. 2099–2111.

HOWARD, N. **Paradoxes of rationality: games, metagames, and political behavior**. [S.l.]: MIT press New York, 1971.

KILGOUR, D.; HIPEL, K. The graph model for conflict resolution: Past, present, and future. **Group Decision and Negotiation**, v. 14, n. 6, p. 441–460, 2005.

KILGOUR, D. M. Anticipation and stability in two-person noncooperative games. **Dynamic models of international conflict**, Lynne Rienner Press Boulder, CO, p. 26–51, 1985.

KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W.; FANG, L. The graph model for conflicts. **Automatica**, v. 23, n. 1, p. 41–55, 1987.

NASH, J. Non-cooperative games. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 286–295, 1951.

NASH, J. F. Equilibrium points in n-person games. **Proceedings of the national academy of sciences**, USA, v. 36, n. 1, p. 48–49, 1950.

NEUMANN, J. von; MORGENSTERN, O. Theory of games and economic behavior (commemorative edition, 60th-anniversary edition). **With an introduction by Harold Kuhn and Ariel Rubinstein**, 2007.

OBEIDI, A. **Canadian Bulk Water Exports: A Dynamic Analysis of the Sun Belt Case Using Drama Theory and the Graph Model for Conflict Resolution**. Tese (Doutorado) — University of Waterloo, 2002.

OBEIDI, A.; HIPEL, K. Strategic and dilemma analyses of a water export conflict. **INFOR: Information Systems and Operational Research**, Taylor & Francis, v. 43, n. 3, p. 247–270, 2005.

OLIVEIRA, F. E. G. d. **Higher-order sequential stabilities in the graph model for conflict resolution**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil, Fevereiro 2018.

R Core Team. **R: A Language and Environment for Statistical Computing**. Vienna, Austria, 2020. Disponível em: <https://www.R-project.org/>.

RÊGO, L.; OLIVEIRA, F. An extension of higher-order sequential stabilities for multilateral conflicts and for coalitional analysis in the graph model for conflict resolution. **Group Decision and Negotiation**, v. 32, p. 1117–1141, 2023.

RÊGO, L. C.; OLIVEIRA, F. E. de. Higher-order sequential stabilities in the graph model for conflict resolution for bilateral conflicts. **Group Decision and Negotiation**, Springer, p. 1–26, 2020.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Symmetric sequential stability in the graph model for conflict resolution with multiple decision makers. **Group Decision and Negotiation**, Springer, p. 1–18, 2016.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Maximin$_h$ stability in the graph model for conflict resolution for bilateral conflicts. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, IEEE, v. 50, n. 10, p. 3760–3769, 2019.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A. Matrix representation of solution concepts in the graph model for conflict resolution with probabilistic preferences and multiple decision makers. **Group Decision and Negotiation**, Springer, v. 30, n. 3, p. 697–717, 2021.

RÊGO, L. C.; VIEIRA, G. I. A.; KILGOUR, D. M. The graph model for conflict resolution and credible maximin stability. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems**, IEEE, 2022.

SABINO, E. R.; RÊGO, L. C. Optimism pessimism stability in the graph model for conflict resolution for multilateral conflicts. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 309, n. 2, p. 671–682, 2023.

SABINO, E. R.; RÊGO, L. C. Minimax regret stability in the graph model for conflict resolution. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 314, n. 3, p. 1087–1097, 2024.

Wald, A. Statistical decision functions which minimize the maximum risk. **The Annals of Mathematics**, v. 46, n. 2, p. 265–280, 1945.

WALKER, S. B.; BOUTILIER, T.; HIPEL, K. W. Systems management study of a private brownfield renovation. **Journal of Urban Planning and Development**, American Society of Civil Engineers, v. 136, n. 3, p. 249–260, 2010.

WANG, J.; HIPEL, K. W.; FANG, L.; DANG, Y. Matrix representations of the inverse problem in the graph model for conflict resolution. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 270, n. 1, p. 282–293, 2018.

WU, N.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W.; XU, Y. Matrix representation of stability definitions for the graph model for conflict resolution with reciprocal preference relations. **Fuzzy Sets and Systems**, Elsevier, v. 409, p. 32–54, 2021.

XU, H.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Matrix representation of conflicts with two decision-makers. In: IEEE. **2007 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics**. [S.l.], 2007. p. 1764–1769.

XU, H.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. Matrix representation of solution concepts in multiple-decision-maker graph models. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans**, IEEE, v. 39, n. 1, p. 96–108, 2008.

XU, H.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M.; FANG, L. **Conflict resolution using the graph model: strategic interactions in competition and cooperation**. [S.l.]: Springer, 2018. v. 153.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. Matrix representation of solution concepts in graph models for two decision-makers with preference uncertainty. **Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems**, v. 14, n. S1, p. 703–737, 2007.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. An algebraic approach to calculating stabilities in the graph model with strength of preference. In: IEEE. **2009 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics**. [S.l.], 2009. p. 1539–1544.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. An integrated algebraic approach to conflict resolution with three-level preference. **Applied mathematics and computation**, Elsevier, v. 216, n. 3, p. 693–707, 2010.

XU, H.; KILGOUR, D. M.; HIPEL, K. W. Matrix representation of conflict resolution in multiple-decision-maker graph models with preference uncertainty. **Group Decision and Negotiation**, Springer, v. 20, n. 6, p. 755–779, 2011.

XU, H.; LI, K. W.; HIPEL, K. W.; KILGOUR, D. M. A matrix approach to status quo analysis in the graph model for conflict resolution. **Applied Mathematics and Computation**, Elsevier, v. 212, n. 2, p. 470–480, 2009.

XU, H.; ZHAO, J.; KE, G. Y.; ALI, S. Matrix representation of consensus and dissent stabilities in the graph model for conflict resolution. **Discrete Applied Mathematics**, Elsevier, v. 259, p. 205–217, 2019.

YAO, X.; DARWEN, P. J. An experimental study of n-person iterated prisoner's dilemma games. In: SPRINGER. **Workshop on Evolutionary Computation**. [S.l.], 1993. p. 90–108.

ZHAO, S.; XU, H.; HIPEL, K. W.; FANG, L. Mixed stabilities for analyzing opponents' heterogeneous behavior within the graph model for conflict resolution. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 277, n. 2, p. 621–632, 2019.

ZHOU, L.; WANG, S. A dynamic bounded rationality model for technology selection in cognition process. **NeuroQuantology**, NeuroQuantology, v. 16, n. 5, 2018.

APÊNDICE A – CÓDIGOS COMPUTACIONAIS

Neste apêndice, são apresentados os códigos computacionais que foram implementados, utilizando a sintaxe do R, para obtenção dos resultados expostos nesta tese. Os scripts para as aplicações do m-SEQ, Maximin$_h$ e L_h são apresentados abaixo:

A.1 SCRIPT DO R - CONFLITO PRIVADO DE RENOVAÇÃO DE BROWNFIELD - CÓDIGO M-SEQ

```r

#####################################################################
################    Aplicacoes Private Brownfield    ################
################         Renovation Conflict          ################
################           France Oliveira            ################
#####################################################################


#--------------------- Bibliotecas necessarias ------------------- #

library(matrixcalc)
library(readxl)

#--------------------- Caso 3-DMs - Conj de Dados  ----------------#

# Matriz de acessibilidade (J_i)
J1Brownfield_PO <- read_excel("C:/Users/franc/Google Drive/UFPE/Meus
    Artigos/Artigos m-SEQ/Artigo - Matrix Representation m-SEQ/
    J1Brownfield_PO.xlsx")
J1 <- as.matrix(J1Brownfield_PO)
J1

J2Brownfield_CG <- read_excel("C:/Users/franc/Google Drive/UFPE/Meus
    Artigos/Artigos m-SEQ/Artigo - Matrix Representation m-SEQ/
    J2Brownfield_CG.xlsx")
J2 <- as.matrix(J2Brownfield_CG)
J2

```

```
J3Brownfield_D <- read_excel("C:/Users/franc/Google Drive/UFPE/Meus
    Artigos/Artigos m-SEQ/Artigo - Matrix Representation m-SEQ/
    J3Brownfield_D.xlsx")
J3 <- as.matrix(J3Brownfield_D)
J3

# Matriz de preferencia (P^+)
P1Brownfield_PO <- read_excel("C:/Users/franc/Google Drive/UFPE/Meus
    Artigos/Artigos m-SEQ/Artigo - Matrix Representation m-SEQ/
    P1Brownfield_PO.xlsx")
P1_plus <- as.matrix(P1Brownfield_PO)
P1_plus

P2Brownfield_CG <- read_excel("C:/Users/franc/Google Drive/UFPE/Meus
    Artigos/Artigos m-SEQ/Artigo - Matrix Representation m-SEQ/
    P2Brownfield_CG.xlsx")
P2_plus <- as.matrix(P2Brownfield_CG)
P2_plus

P3Brownfield_D <- read_excel("C:/Users/franc/Google Drive/UFPE/Meus
    Artigos/Artigos m-SEQ/Artigo - Matrix Representation m-SEQ/
    P3Brownfield_D.xlsx")
P3_plus <- as.matrix(P3Brownfield_D)
P3_plus


#------------------------ Elementos de entrada  -------------------#

N = sqrt(length(J1))                              #Numero de estados
m = 2 #sqrt(length(m))                            #Numero de ordem
D = diag(rep(1,N))                                #Matriz diagonal
E = matrix(1, nrow = N, ncol = N, byrow = TRUE) #Matriz de uns

#------------------ Matriz de indiferenca (P^-,=)  ----------------#

P1_ind = (E - P1_plus) # DM 1
P2_ind = (E - P2_plus) # DM 2
P3_ind = (E - P3_plus) # DM 3

```

```
#----- Matriz de Melhorias unilaterais (J_i^+ =  J_i o P^+)  ------#

J1_plus = hadamard.prod(J1, P1_plus) # DM 1
J2_plus = hadamard.prod(J2, P2_plus) # DM 2
J3_plus = hadamard.prod(J3, P3_plus) # DM 3

#-------- Matriz de representacao SEQ (M_i^SEQ) - Coalizao  -------#

# MSEQ_1
delta_1 <- sum(!!J2_plus)+sum(!!J3_plus)

J_2 <- J2_plus
J_3 <- J3_plus
J_23 <- sign(J_2+J_3)

for(t in 1:delta_1)
{
  JT2 <- J_2
  J_2 <- sign(J2_plus%*% J_3)
  J_3 <- sign(J3_plus%*% JT2)
  J_23 <- sign(J_23 + (sign(J_2 + J_3)))
}


SINAL <- sign(J_23 %*% t(P1_ind))

MSEQ_1 <- (J1_plus %*%( E- SINAL))

# MSEQ_2
delta_2 <- sum(!!J1_plus)+sum(!!J3_plus)

J_1 <- J1_plus
J_3 <- J3_plus
J_13 <- sign(J_1+J_3)

for(t in 1:delta_2)
{
  JT1 <- J_1
  J_1 <- sign(J1_plus%*% J_3)
```

```
  J_3 <- sign(J3_plus%*% JT1)
  J_13 <- sign(J_13 + (sign(J_1 + J_3)))
}


SINAL <- sign(J_13 %*% t(P2_ind))

MSEQ_2 <- (J2_plus %*%( E- SINAL))


# MSEQ_3
delta_3 <- sum(!!J1_plus)+sum(!!J2_plus)

J_1 <- J1_plus
J_2 <- J2_plus
J_12 <- sign(J_1+J_2)

for(t in 1:delta_3)
{
  JT3 <- J_1
  J_1 <- sign(J1_plus%*% J_2)
  J_2 <- sign(J2_plus%*% JT3)
  J_12 <- sign(J_12 + (sign(J_1 + J_2)))
}


SINAL <- sign(J_12 %*% t(P3_ind))

MSEQ_3 <- (J3_plus %*%( E- SINAL))


#--------- Matriz de representacao Mm1SEQ (M_j^((m-1)SEQ))  -------#

#Caso m=1
MmSEQ_1 = MSEQ_1
MmSEQ_2 = MSEQ_2
MmSEQ_3 = MSEQ_3

#caso m>1
```

```
for(k in 2:m){

  # Matriz J_j^(m,+)
  J1_mplus = sign(hadamard.prod(D, MmSEQ_1))  %*% J1_plus
  J2_mplus = sign(hadamard.prod(D, MmSEQ_2))  %*% J2_plus
  J3_mplus = sign(hadamard.prod(D, MmSEQ_3))  %*% J3_plus

  # Matriz de representacao MmSEQ (M_i^(m-SEQ))

  # MmSEQ_1
  delta_1 <- sum(!!J2_plus)+sum(!!J3_plus)

  J_2 <- J2_mplus
  J_3 <- J3_mplus
  J_23 <- sign(J_2+J_3)

  for(t in 1:delta_1)
  {
    JT2 <- J_2
    J_2 <- sign(J2_mplus%*% J_3)
    J_3 <- sign(J3_mplus%*% JT2)
    J_23 <- sign(J_23 + (sign(J_2 + J_3)))
  }

  SINAL <- sign(J_23 %*% t(P1_ind))
  MmSEQ_1 <- (J1_plus %*%( E- SINAL))

  # MmSEQ_2
  delta_2 <- sum(!!J1_mplus)+sum(!!J3_mplus)

  J_1 <- J1_mplus
  J_3 <- J3_mplus
  J_13 <- sign(J_1+J_3)

  for(t in 1:delta_2)
  {
    JT1 <- J_1
    J_1 <- sign(J1_mplus%*% J_3)
```

```
    J_3 <- sign(J3_mplus%*% JT1)
    J_13 <- sign(J_13 + (sign(J_1 + J_3)))
  }

  SINAL <- sign(J_13 %*% t(P2_ind))
  MmSEQ_2 <- (J2_plus %*%( E- SINAL))


  # MmSEQ_3
  delta_3 <- sum(!!J1_mplus)+sum(!!J2_mplus)

  J_1 <- J1_mplus
  J_2 <- J2_mplus
  J_12 <- sign(J_1+J_2)

  for(t in 1:delta_3)
  {
    JT1 <- J_1
    J_1 <- sign(J1_mplus%*% J_2)
    J_2 <- sign(J2_mplus%*% JT1)
    J_12 <- sign(J_12 + (sign(J_1 + J_2)))
  }

  SINAL <- sign(J_12 %*% t(P3_ind))
  MmSEQ_3 <- (J3_plus %*%( E- SINAL))
}
```

A.2 SCRIPT DO R - FASE 3 - WATER EXPORT CONFLICT - CÓDIGO MAXIMIN$_h$

```

######################################################################
################          Aplicacoes Phase 3        ################
################        Water Export Conflict       ################
################           France Oliveira          ################
######################################################################


#--------------------- Bibliotecas necessarias ------------------- #
```

```
library(matrixcalc)

#------------------------ Elementos de entrada  -------------------#

S= 11                          # Quantidade de estados
E = rep(1,S)                    # Vetor de um's
D = diag (x = 1, nrow=S, ncol=S) # Matriz diagonal

#---------------------- Caso DM i - Conj de Dados  ----------------#

# Matriz de acessibilidade

# Sun Belt
DM_SanBelt  = matrix(c(0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,
              1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,
              1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
              0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
              1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,
              0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
              0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,
              0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,
              0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,
              0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,
              0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0),S,S)


# BCG
DM_BCG = matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
              0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
              0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,
              0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,
              0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,
              0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,
              0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
              0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
              0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
              0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
              0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0),S,S)
```

```

Ji = DM_SanBelt
Jj = DM_BCG
# ------------------------------------ #
#        Matriz de preferencia
# ------------------------------------ #

# Sun Belts
Pi_plus_SanBelt = matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   1,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,
                   1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,
                   1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,
                   1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,0,
                   1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
                   1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,
                   1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,0,
                   1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0),S,S)


# BCG
Pi_plus_BCG = matrix(c(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,
                   0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,
                   0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,
                   0,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,
                   0,0,1,1,0,0,1,1,1,1,1,
                   0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,
                   0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,
                   0,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0),S,S)

Pi_plus = Pi_plus_SanBelt
K_i = t(E %*%  Pi_plus) # Encontrar o valor de K_i(s)

# -------------------- #
#    Ci Function
```

```
# --------------------- #

h=1
C <- function(h){
  Jj_D = D + Jj # Diagonal + matriz de acessibilidade do DM j
  comp_Jj_D = E - Jj_D # Matriz complementar da Jj_D
  prod_estado = S * comp_Jj_D
  if(h %% 2 == 0){   # Teste se par
    #h=2
    #prod_hadamard_h2 = hadamard.prod(Jj_D, (t(K_i%*%E))) # Para onde
        o oponente pode levar o conflito e quanto o DM focal vai
       receber
    prod_hadamard_h2 = (hadamard.prod(Jj, (t(K_i%*%E))) + hadamard.
       prod(D, (t(K_i%*%E))))
    B_1j = prod_estado + prod_hadamard_h2
    C_1j = cbind(apply(B_1j,1,min)) # Min de cada linha
    #F= hadamard.prod((Ji + D), (t(C_1j %*% E)))
    F= (hadamard.prod(Ji, (t( C_1j%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*
       %E))))
    C_2i= cbind(apply(F,1,max))
    Ci = C_2i
    if(h>2){
      for (g in 1:(h/2)-1){
        prod_hadamard_h = (hadamard.prod(Jj, (t(Ci%*%E))) + hadamard.
           prod(D, (t(K_i%*%E)))) # (C_(h-2)i)
        BiPlus1j = prod_estado + prod_hadamard_h
        CiPlus1j = cbind(apply(BiPlus1j,1,min)) # Min de cada linha
        F= (hadamard.prod(Ji, (t( CiPlus1j%*%E))) + hadamard.prod(D,
           (t(K_i%*%E))))
        CiPlus2= cbind(apply(F,1,max))
        Ci=CiPlus2
      }
    }
  }
  else{ # h eh impar
    # h=1
    Ji_D = D + Ji # Diagonal + matriz de acessibilidade do DM i
    B_1i = hadamard.prod(Ji_D, (t(K_i%*%E))) # Para onde o oponente
       pode levar o conflito e quanto o DM focal vai receber
```

```r
    C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max)) # Max de cada linha
    #Q=matrix(1,nrow = S,ncol = 1) # Matriz coluna de 1's
    #C_1i = Q %*% C_1_max # Matriz dos max em coluna
    Ci = C_1i
    if (h>1) {
      for (g in 1:(h-1)/2){
        prod_hadamard_h = (hadamard.prod(Jj, (t(Ci%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))) # (C_(h-2)i)
        BiPlus1j = prod_estado + prod_hadamard_h
        CiPlus1j = cbind(apply(BiPlus1j,1,min)) # Min de cada linha
        F= (hadamard.prod(Ji, (t( CiPlus1j%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E))))
        CiPlus2= cbind(apply(F,1,max))
        Ci=CiPlus2
      }
    }
  }
  Dif_h = (K_i - Ci) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto terei se eu me mover
  Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
  return(Sign_Dif_h)
}


for(h in 1:20){
  C(h)
  print(paste("Horizonte", h, ": Resultado =", C(h)))
}




#---------------------- Caso DM j - Conj de Dados  ----------------#

# Matriz de acessibilidade
# Sun Belt
Ji = matrix(c(0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,
              1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0,
              1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
```

```
                 0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
                 1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,
                 0,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,
                 0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,0),S,S)
# BCG
Jj = matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,
                 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,
                 0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,
                 0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0),S,S)

# ------------------------------------ #
#         Matriz de preferencia
# ------------------------------------ #

# Sun Belts
Pi_plus = matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                       1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                       1,1,0,1,0,0,1,1,1,1,0,
                       1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,
                       1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,1,
                       1,1,1,1,0,0,1,1,1,1,0,
                       1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                       1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,
                       1,1,0,1,0,0,1,1,0,0,0,
                       1,1,0,1,0,0,1,1,1,0,0,
                       1,1,1,1,0,1,1,1,1,1,0),S,S)

# BCG
```

```
Pj_plus = matrix(c(0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,
                   0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,
                   0,0,0,1,0,0,0,0,1,1,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,
                   0,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,
                   0,0,1,1,0,0,1,1,1,1,1,
                   0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0,
                   0,0,1,1,0,0,1,0,1,1,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,
                   0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,
                   0,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0),S,S)


K_j = t(E %*%  Pj_plus) # Encontrar o valor de K_i(s)

# --------------------- #
#    Ci Function
# --------------------- #

h=1
C <- function(h){
  Ji_D = D + Ji # Diagonal + matriz de acessibilidade do DM i
  comp_Ji_D = E - Ji_D # Matriz complementar da Ji_D
  prod_estado = S * comp_Ji_D
  if(h %% 2 == 0){   # Teste se par
    #h=2
    #prod_hadamard_h2 = hadamard.prod(Jj_D, (t(K_i%*%E))) # Para onde
        o oponente pode levar o conflito e quanto o DM focal vai
       receber
    prod_hadamard_h2 = (hadamard.prod(Ji, (t(K_j%*%E))) + hadamard.
       prod(D, (t(K_j%*%E))))
    B_1i = prod_estado + prod_hadamard_h2
    C_1i = t(cbind(apply(B_1i,1,max))) # Min de cada linha
    #F= hadamard.prod((Ji + D), (t(C_1j %*% E)))
    F= (hadamard.prod(Jj,  (C_1i%*%E)) + hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E)
       )))
    C_2j= cbind(apply(F,1,min))
    Cj = C_2j
    if(h>2){
```

```
      for (g in 1:(h/2)-1){
        prod_hadamard_h = (hadamard.prod(Ji, (t(Cj%*%E))) + hadamard.
            prod(D, (t(K_j%*%E)))) # (C_(h-2)i)
        BiPlus1i = prod_estado + prod_hadamard_h
        CiPlus1i = cbind(apply(BiPlus1i,1,max)) # Min de cada linha
        F= (hadamard.prod(Jj, (t( CiPlus1i%*%E))) + hadamard.prod(D,
            (t(K_j%*%E))))
        CjPlus2= cbind(apply(F,1,min))
        Cj=CjPlus2
      }
    }
  }
  else{ # h eh impar
    # h=1
    Jj_D = D + Jj # Diagonal + matriz de acessibilidade do DM i
    B_1j = hadamard.prod(Jj_D, (t(K_j%*%E))) # Para onde o oponente
       pode levar o conflito e quanto o DM focal vai receber
    C_1j = cbind(apply(B_1j,1,min)) # Max de cada linha
    #Q=matrix(1,nrow = S,ncol = 1) # Matriz coluna de 1's
    #C_1i = Q %*% C_1_max # Matriz dos max em coluna
    Cj = C_1j
    if (h>1) {
      for (g in 1:(h-1)/2){
        prod_hadamard_h = (hadamard.prod(Ji, (t(Cj%*%E))) + hadamard.
            prod(D, (t(K_j%*%E)))) # (C_(h-2)i)
        BjPlus1i = prod_estado + prod_hadamard_h
        CjPlus1i = cbind(apply(BjPlus1i,1,max)) # Min de cada linha
        F= (hadamard.prod(Jj, (t( CjPlus1i%*%E))) + hadamard.prod(D,
            (t(K_j%*%E))))
        CjPlus2= cbind(apply(F,1,min))
        Cj=CjPlus2
      }
    }
  }
  Dif_h = (K_j - Cj) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
     terei se eu me mover
  Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
  return(Sign_Dif_h)
}
```

```
for(h in 1:20){
  C(h)
  print(paste("Horizonte", h, ": Resultado =", C(h)))
}
```

A.3 SCRIPT DO R - DILEMA DOS PRISIONEIROS N-DMS - CÓDIGO MAXIMIN$_h$

```

#####################################################################
###########  Aplicacoes Dilema dos Prisioneiros n DMs   #############
##########              France Oliveira                ##############
#####################################################################


#--------------------- Bibliotecas necessarias ------------------- #

library(matrixcalc)
library('ramify')
library(readxl)

#------------------------ Elementos de entrada  ------------------#
# --------------------------------------- #
#    Dilema dos Prisioneiros - 3 DMs
# --------------------------------------- #


J1 <- Dilema_Prisioneiros_J1_3_Decisores
J1 <- as.matrix(J1)

J2 <- Dilema_Prisioneiros_J2_3_Decisores
J2 <- as.matrix(J2)

J3 <- Dilema_Prisioneiros_J3_3_Decisores
J3 <- as.matrix(J3)

matriz_acess = list(J1, J2, J3)
```

```r

# Acessando e removendo uma matriz especifica da lista, ou seja, o DM
    Focal
Id_DM_Focal <- 1

N = 3 # Qnt de DMs
h = 1 # Horizonte
S = 8 # Qnt de estados
E = rep(1,S) # Vetor de um's
D = diag (x = 1, nrow=S, ncol=S)                # Matriz diagonal
E_1 = matrix(1, nrow = S, ncol = 1, byrow = TRUE) # Matriz coluna de
   uns
K1 = matrix(c(4,2,2,0,5,3,3,1),  nrow = S, ncol = 1, byrow = TRUE)
K2 = matrix(c(4,2,5,3,2,0,3,1),  nrow = S, ncol = 1, byrow = TRUE)
K3 = matrix(c(4,5,2,3,2,3,0,1),  nrow = S, ncol = 1, byrow = TRUE)

matriz_pref = list(K1, K2, K3)


# --------------------------------------- #
#         Funcao Coalizao - J_H
# --------------------------------------- #

JH <- function(S, Id_DM_Focal, matriz_acess){

  conj_coalizao <- matriz_acess[-Id_DM_Focal]
  #soma_coalizao = J2 + J3 + J4
  #sinal_coalizao = sign(soma_coalizao)
  #J_r = sign(J1 %*% sinal_coalizao)

  delta = sum(unlist(conj_coalizao))
  soma_matrizes <- function(matriz1, matriz2) {
    return(matriz1 + matriz2)
  }
  J_op <- Reduce(soma_matrizes, conj_coalizao)


  #  for(l in 1:length(conj_coalizao)){
  #    DM_Focal = matriz_acess[[Id_DM_Focal]]
```

```
  #    conj_coalizao = matriz_acess[-Id_DM_Focal]
  new_conj_coalizao = conj_coalizao
  temp_conj_coalizao = new_conj_coalizao
  for(r in 2:delta){
    for(i in 1:length(conj_coalizao)){
      soma_coalizao =  matrix(0,S,S)
      for(j in 1:length(conj_coalizao)){
        if(j != i){
          soma_coalizao =  soma_coalizao + new_conj_coalizao[[j]]
        }
      }
      sinal_coalizao = sign(soma_coalizao) # o sinal garanti que
         tenhamos 1 se a soma for dif de 0 e 0 c.c.
      temp_conj_coalizao[[i]] = sign(conj_coalizao[[i]] %*% sinal_
         coalizao)
    }
    new_conj_coalizao = temp_conj_coalizao
    J_op = J_op + Reduce(soma_matrizes, new_conj_coalizao)
  }
  #  }
  J_op = sign(J_op)
  return(J_op)
}


# --------------------------------------- #
#    Ci Function  - Maximin_h DM i
# --------------------------------------- #

C <- function(h){
  Jj_D = D + Jj # Diagonal + matriz de acessibilidade do DM j
  comp_Jj_D = E - Jj_D # Matriz complementar da Jj_D
  prod_estado = S * comp_Jj_D
  if(h %% 2 == 0){   # Teste se par
    #h=2
    #prod_hadamard_h2 = hadamard.prod(Jj_D, (t(K_i%*%E))) # Para onde
        o oponente pode levar o conflito e quanto o DM focal vai
       receber
```

```
    prod_hadamard_h2 = (hadamard.prod(Jj, (t(K_i%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E))))
    B_1j = prod_estado + prod_hadamard_h2
    C_1j = cbind(apply(B_1j,1,min)) # Min de cada linha
    #F= hadamard.prod((Ji + D), (t(C_1j %*% E)))
    F= (hadamard.prod(Ji, (t( C_1j%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E))))
    C_2i= cbind(apply(F,1,max))
    Ci = C_2i
    if(h>2){
      for (g in 1:(h/2)-1){
        prod_hadamard_h = (hadamard.prod(Jj, (t(Ci%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))) # (C_(h-2)i)
        BiPlus1j = prod_estado + prod_hadamard_h
        CiPlus1j = cbind(apply(BiPlus1j,1,min)) # Min de cada linha
        F= (hadamard.prod(Ji, (t( CiPlus1j%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E))))
        CiPlus2= cbind(apply(F,1,max))
        Ci=CiPlus2
      }
    }
  }
  else{ # h eh impar
    # h=1
    Ji_D = D + Ji # Diagonal + matriz de acessibilidade do DM i
    B_1i = hadamard.prod(Ji_D, (t(K_i%*%E))) # Para onde o oponente pode levar o conflito e quanto o DM focal vai receber
    C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max)) # Max de cada linha
    #Q=matrix(1,nrow = S,ncol = 1) # Matriz coluna de 1's
    #C_1i = Q %*% C_1_max # Matriz dos max em coluna
    Ci = C_1i
    if (h>1) {
      for (g in 1:(h-1)/2){
        prod_hadamard_h = (hadamard.prod(Jj, (t(Ci%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))) # (C_(h-2)i)
        BiPlus1j = prod_estado + prod_hadamard_h
        CiPlus1j = cbind(apply(BiPlus1j,1,min)) # Min de cada linha
        F= (hadamard.prod(Ji, (t( CiPlus1j%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E))))
```

```
        CiPlus2= cbind(apply(F,1,max))
        Ci=CiPlus2
      }
    }
  }
  Dif_h = (K_i - Ci) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto terei se eu me mover
  Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
  return(Sign_Dif_h)
}

execut_i <- function(){
  for(h in 1:10){
    for (Id_DM_Focal in 1:N) {
      Ji <- matriz_acess[[Id_DM_Focal]]
      Jj <- JH(S, Id_DM_Focal,matriz_acess)
      K_i <- matriz_pref[[Id_DM_Focal]]
      C(h)
      print(paste("Horizonte", h, "DM_Focal:", Id_DM_Focal, ": Resultado =", C(h)))
    }
  }
}
tempo <- system.time(execut_i())
```

A.4 SCRIPT DO R - DILEMA DOS PRISIONEIROS - CÓDIGO L_h

```

#####################################################################
#############   Aplicacoes Dilema dos Prisioneiros   ################
#############            France Oliveira           ##################
#####################################################################



#--------------------- Bibliotecas necessarias ------------------- #

library(matrixcalc)
library('ramify')
```

```

#------------------------ Elementos de entrada  -------------------#

S=4 # Quantidade de estados
E = rep(1,S) # Vetor de um's # Matriz de um's
D = diag (x = 1, nrow=S, ncol=S) # Matriz diagonal
D_1j = matrix(c(0,0,0,0,
                0,0,0,0,
                0,0,0,0,
                0,0,0,0),S,S)

#------------------------- Conj de Dados  -------------------------#

# Matriz de acessibilidade
Ji = matrix(c(0,0,1,0,
              0,0,0,1,
              1,0,0,0,
              0,1,0,0),S,S)

Jj = matrix(c(0,1,0,0,
              1,0,0,0,
              0,0,0,1,
              0,0,1,0),S,S)



# Matriz de preferencia -  DM i
Pi_plus = matrix(c(0,1,0,1,
                   0,0,0,0,
                   1,1,0,1,
                   0,1,0,0),S,S)

# Matriz de preferencia -  DM j
Pj_plus = matrix(c(0,0,1,1,
                   1,0,1,1,
                   0,0,0,0,
                   0,0,1,0),S,S)

# Matrizes K_i e K_j
```

```
K_i = t(E %*%  Pi_plus) # Encontrar o valor de K_i(s)
K_j = t(E %*%  Pj_plus) # Encontrar o valor de K_j(s)



# ---------------------------------------------------------------- #
#                              CASO h=1
# ---------------------------------------------------------------- #

# --------------- Para o DM i  -----------------

# Calculando B_1i
B_1i = (hadamard.prod(Ji, (t(K_i%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*
    %E))))

# Calculando C_1i = Max(B_1i)
C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max))

# Calculando (K_i - C_1i) e depois o sinal da diff - dif de quanto
    tenho se permanecer e quanto terei se eu me mover
Dif_1_i = (K_i - C_1i)
Sign_Dif_1_i = sign(Dif_1_i)


# --------------- Para o DM j  -----------------

# Calculando B_1j
B_1j = (hadamard.prod(Jj, (t(K_j%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E
    ))))

# Calculando C_1j = Max(B_1j)
C_1j= cbind(apply(B_1j,1,max))

# Calculando (K_i - C_1i) e sinal da diff
Dif_1_j = (K_j - C_1j)
Sign_Dif_1_j = sign(Dif_1_j)


# ---------------------------------------------------------------- #
```

```
#                            CASO h=2
# ---------------------------------------------------------------- #


# Funcao Argmax

Argmax <- function(mat) {
  result <- mat
  for (i in 1:nrow(mat)) {
    row <- mat[i, ]
    max_index <- which.max(row)
    row[max_index] <- 1
    row[-max_index] <- 0
    result[i, ] <- row
  }
  return(result)
}

# Exemplo
matriz <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 8, 6, 7, 8, 9), nrow = 3)
resultado <- Argmax(matriz)
print(resultado)





# --------------- Para o DM i  -----------------

# Calculando B_2i
y=(E-D)
q=hadamard.prod(Argmax(B_1j), y)
p=hadamard.prod(Argmax(B_1j), D)
r= (q %*% K_i) + (p %*% K_i)
v=t(r %*% E)
I=hadamard.prod(Ji, v)
II = (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E))))

B_2i = (I + II)
```

```


# Calculando C_2i = Max(B_2i)
C_2i = cbind(apply(B_2i,1,max))

# Calculando (K_2 - C_2i) e depois o sinal da diff - dif de quanto
    tenho se permanecer e quanto terei se eu me mover
Dif_2_i = (K_i - C_2i)
Sign_Dif_2_i = sign(Dif_2_i)


# --------------- Para o DM j  -----------------

# Calculando B_2j
y=(E-D)
q=hadamard.prod(Argmax(B_1i), y)
p=hadamard.prod(Argmax(B_1i), D)
r= (q %*% K_j) + (p %*% K_j)
v=t(r %*% E)
I=hadamard.prod(Jj, v)
II = (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E))))

B_2j = (I + II)

# Calculando C_2j = Max(B_2j)
C_2j= cbind(apply(B_2j,1,max))

# Calculando (K_j - C_2j) e sinal da diff
Dif_2_j = (K_j - C_2j)
Sign_Dif_2_j = sign(Dif_2_j)



# ------------------------------ #
#    Ci Function - DM i Inicia
# ------------------------------ #

Ci <- function(h){
  if(h==1){
```

```
    B_1i = (hadamard.prod(Ji, (t(K_i%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K
        _i%*%E))))
    C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max)) # Max de cada linha
    Ci = C_1i
  }
  if(h==2){
    B_2i = ((hadamard.prod(Ji, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_1j), (E-D
        ))) %*% K_i) + ((hadamard.prod(Argmax(B_1j), D)) %*% K_i)) %*%
         E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))))
    C_2i = cbind(apply(B_2i,1,max)) # Max de cada linha
    Ci = C_2i
  }
  if(h>2){
      for (g in 3:h){
      B_3i = ((hadamard.prod(Ji, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_2j), (E
          -D))) %*% K_i) + ((hadamard.prod(Argmax(B_2j), D)) %*% K_i))
           %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))))
      C_3i = cbind(apply(B_3i,1,max)) # Max de cada linha
      Ci = C_3i
      }
    }
  Dif_h = (K_i - Ci) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
      terei se eu me mover
  Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
  return(Sign_Dif_h)
}


# ------------------------------- #
#    Cj Function - DM j Inicia
# ------------------------------- #

Cj <- function(h){
  if(h==1){
    B_1j = (hadamard.prod(Jj, (t(K_j%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K
        _j%*%E))))
    C_1j = cbind(apply(B_1i,1,max)) # Max de cada linha
    Cj = C_1j
  }
```

```
  if(h==2){
    B_2j = ((hadamard.prod(Jj, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_1i), (E-D
        ))) %*% K_j) + ((hadamard.prod(Argmax(B_1i), D)) %*% K_j)) %*%
         E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E)))))
    C_2j = cbind(apply(B_2i,1,max)) # Max de cada linha
    Cj = C_2j
  }
  if(h>2){
    for (g in 3:h){
      B_3j = ((hadamard.prod(Jj, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_2i), (E
          -D))) %*% K_j) + ((hadamard.prod(Argmax(B_2i), D)) %*% K_j))
           %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E)))))
      C_3j = cbind(apply(B_3j,1,max)) # Max de cada linha
      Cj = C_3j
    }
  }
  Dif_h = (K_j - Cj) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
      terei se eu me mover
  Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
  return(Sign_Dif_h)
}
```

A.5 SCRIPT DO R - CONFLITO DE SELEÇÃO DE TECNOLOGIA DE NEUROCIÊNCIA NA CHINA - CÓDIGO L_h

```

#-----------------------------------------------------------------
#  Conflito de selecao de tecnologia de neurociencia na China - L_h
#-----------------------------------------------------------------

# Codigo para obter os resultados do DM i

library(matrixcalc)
library('ramify')


S=8 # Quantidade de estados
E = rep(1,S) # Vetor de um's # Matriz de um's
```

```
D = diag (x = 1, nrow=S, ncol=S) # Matriz diagonal
D_1j = matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,
                0,0,0,0,0,0,0,0,
                0,0,0,0,0,0,0,0,
                0,0,0,0,0,0,0,0,
                0,0,0,0,0,0,0,0,
                0,0,0,0,0,0,0,0,
                0,0,0,0,0,0,0,0,
                0,0,0,0,0,0,0,0),S,S)

# Matriz de acessibilidade
Ji = matrix(c(0,1,1,1,0,0,0,0,
              1,0,1,1,0,0,0,0,
              1,1,0,1,0,0,0,0,
              1,1,1,0,0,0,0,0,
              0,0,0,0,0,1,1,1,
              0,0,0,0,1,0,1,1,
              0,0,0,0,1,1,0,1,
              0,0,0,0,1,1,1,0),S,S)

Jj = matrix(c(0,0,0,0,1,0,0,0,
              0,0,0,0,0,1,0,0,
              0,0,0,0,0,0,1,0,
              0,0,0,0,0,0,0,1,
              1,0,0,0,0,0,0,0,
              0,1,0,0,0,0,0,0,
              0,0,1,0,0,0,0,0,
              0,0,0,1,0,0,0,0),S,S)

# ------------------------------------------------- #
#         CASO 1 - Intuition Phase
# ------------------------------------------------- #

# Matriz de preferencia -  DM i
#Pi_plus = matrix(c(0,1,1,1,1,1,1,1,
#                   0,0,0,1,0,1,1,1,
#                   0,1,0,1,0,1,1,1,
#                   0,0,0,0,0,1,1,1,
#                   0,1,1,1,0,1,1,1,
```

```
#                   0,0,0,0,0,0,0,1,
#                   0,0,0,0,0,1,0,1,
#                   0,0,0,0,0,0,0,0),S,S)

# Matriz de preferencia -  DM j
#Pj_plus = matrix(c(0,1,1,1,1,1,1,1,
#                   0,0,0,1,0,1,1,1,
#                   0,1,0,1,0,1,1,1,
#                   0,0,0,0,0,1,1,1,
#                   0,1,1,1,0,1,1,1,
#                   0,0,0,0,0,0,0,1,
#                   0,0,0,0,0,1,0,1,
#                   0,0,0,0,0,0,0,0),S,S)

# ------------------------------------------------- #
#        CASO 2 - Emotion Phase
# ------------------------------------------------- #

# Matriz de preferencia -  DM i
#Pi_plus = matrix(c(0,0,0,0,1,0,0,0,
#                   1,0,0,0,1,1,1,0,
#                   1,1,0,0,1,1,1,0,
#                   1,1,1,0,1,1,1,1,
#                   0,0,0,0,0,0,0,0,
#                   1,0,0,0,1,0,0,0,
#                   1,0,0,0,1,1,0,0,
#                   1,1,1,0,1,1,1,0),S,S)

# Matriz de preferencia -  DM j
#Pj_plus = matrix(c(0,0,0,0,1,1,1,1,
#                   1,0,1,0,1,1,1,1,
#                   1,0,0,0,1,1,1,1,
#                   1,1,1,0,1,1,1,1,
#                   0,0,0,0,0,0,0,0,
#                   0,0,0,0,1,0,1,0,
#                   0,0,0,0,1,0,0,0,
#                   0,0,0,0,1,1,1,0),S,S)

# -------------------------------------------------- #
```

```
#         CASO 3 - Small-Scale Rationality Phase
# -------------------------------------------------- #

# Matriz de preferencia -  DM i
#Pi_plus = matrix(c(0,1,0,1,1,1,1,1,
#                   0,0,0,0,1,1,1,1,
#                   1,1,0,1,1,1,1,1,
#                   0,1,0,0,1,1,1,1,
#                   0,0,0,0,0,0,0,1,
#                   0,0,0,0,1,0,0,1,
#                   0,0,0,0,1,1,0,1,
#                   0,0,0,0,0,0,0,0),S,S)

# Matriz de preferencia -  DM j
#Pj_plus = matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,
#                   1,0,1,0,1,0,1,0,
#                   1,0,0,0,1,0,1,0,
#                   1,1,1,0,1,0,1,0,
#                   1,0,0,0,0,0,0,0,
#                   1,1,1,1,1,0,1,0,
#                   1,0,0,0,1,0,0,0,
#                   1,1,1,1,1,1,1,0),S,S)

# -------------------------------------------------- #
#         CASO 4 - Large-Scale Rationality Phase
# -------------------------------------------------- #

# Matriz de preferencia -  DM i
Pi_plus = matrix(c(0,1,1,1,1,1,1,1,
                   0,0,0,0,1,1,0,1,
                   0,1,0,1,1,1,1,1,
                   0,1,0,0,1,1,1,1,
                   0,0,0,0,0,1,0,1,
                   0,0,0,0,0,0,0,1,
                   0,1,0,0,1,1,0,1,
                   0,0,0,0,0,0,0,0),S,S)

# Matriz de preferencia -  DM j
Pj_plus = matrix(c(0,0,0,0,0,0,0,0,
```

```
                        1,0,1,0,1,0,0,0,
                        1,0,0,0,1,0,0,0,
                        1,1,1,0,1,0,0,0,
                        1,0,0,0,0,0,0,0,
                        1,1,1,1,1,0,1,0,
                        1,1,1,1,1,0,0,0,
                        1,1,1,1,1,1,1,0),S,S)

# Matrizes K_i e K_j
K_i = t(E %*%  Pi_plus) # Encontrar o valor de K_i(s)
K_j = t(E %*%  Pj_plus) # Encontrar o valor de K_j(s)


# ------------------------------------------------------------- #
#                            CASO h=1
# ------------------------------------------------------------- #

# --------------- Para o DM i  -----------------

# Calculando B_1i
B_1i = (hadamard.prod(Ji, (t(K_i%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*
    %E))))

# Calculando C_1i = Max(B_1i)
C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max))

# Calculando (K_i - C_1i) e depois o sinal da diff - dif de quanto
    tenho se permanecer e quanto terei se eu me mover
Dif_1_i = (K_i - C_1i)
Sign_Dif_1_i = sign(Dif_1_i)


# --------------- Para o DM j  -----------------

# Calculando B_1j
B_1j = (hadamard.prod(Jj, (t(K_j%*%E))) + hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E
    ))))

# Calculando C_1j = Max(B_1j)
```

```
C_1j= cbind(apply(B_1j,1,max))

# Calculando (K_i - C_1i) e sinal da diff
Dif_1_j = (K_j - C_1j)
Sign_Dif_1_j = sign(Dif_1_j)


# -------------------------------------------------------------- #
#                           CASO h=2
# -------------------------------------------------------------- #


# Funcao Argmax

Argmax <- function ( mat ) {
  result <- mat
  for ( i in 1: nrow ( mat ) ) {
    row <- mat [i , ]
    max_index <- which.max ( row )
    if (row [max_index] > row[i]){
      row [max_index] <- 1
      row [-max_index] <- 0
    }
    else {
      row [i] <- 1
      row [-i] <- 0
    }
    result [i , ] <- row
  }
  return ( result )
}


# Exemplo
#matriz <- matrix(c(1, 2, 3, 4, 8, 6, 7, 8, 9), nrow = 3)
#resultado <- Argmax(matriz)
#print(resultado)
```

```
# --------------- Para o DM i  -----------------

# Calculando B_2i
y=(E-D)
q=hadamard.prod(Argmax(B_1j), y)
p=hadamard.prod(Argmax(B_1j), D)
r= (q %*% K_i) + (p %*% K_i)
v=t(r %*% E)
I=hadamard.prod(Ji, v)
II = (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E))))

B_2i = (I + II)


# Calculando C_2i = Max(B_2i)
C_2i = cbind(apply(B_2i,1,max))

# Calculando (K_2 - C_2i) e depois o sinal da diff - dif de quanto
    tenho se permanecer e quanto terei se eu me mover
Dif_2_i = (K_i - C_2i)
Sign_Dif_2_i = sign(Dif_2_i)


# --------------- Para o DM j  -----------------

# Calculando B_2j
y=(E-D)
q=hadamard.prod(Argmax(B_1i), y)
p=hadamard.prod(Argmax(B_1i), D)
r= (q %*% K_j) + (p %*% K_j)
v=t(r %*% E)
I=hadamard.prod(Jj, v)
II = (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E))))

B_2j = (I + II)

# Calculando C_2j = Max(B_2j)
C_2j= cbind(apply(B_2j,1,max))

```

```
# Calculando (K_j - C_2j) e sinal da diff
Dif_2_j = (K_j - C_2j)
Sign_Dif_2_j = sign(Dif_2_j)



# ------------------------------ #
#    Ci Function - DM i Inicia
# ------------------------------ #

Ci <- function(h){
  if(h==1){
    B_1i = (hadamard.prod(Ji, (t(K_i%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K
        _i%*%E))))
    C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max)) # Max de cada linha
    Ci = C_1i
  }
  if(h==2){
    B_2i = ((hadamard.prod(Ji, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_1j), (E-D
        ))) %*% K_i) + ((hadamard.prod(Argmax(B_1j), D)) %*% K_i)) %*%
         E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))))
    C_2i = cbind(apply(B_2i,1,max)) # Max de cada linha
    Ci = C_2i
  }
  if(h>2){
    for (g in 3:h){
      B_3i = ((hadamard.prod(Ji, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_2j), (E
          -D))) %*% K_i) + ((hadamard.prod(Argmax(B_2j), D)) %*% K_i))
           %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))))
      C_3i = cbind(apply(B_3i,1,max)) # Max de cada linha
      Ci = C_3i
    }
  }
  Dif_h = (K_i - Ci) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
      terei se eu me mover
  Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
  if(h==1){
    lista_resultados <- list(B_1i, Sign_Dif_h)
  }
```

```
  if(h==2){
    lista_resultados <- list(B_2i, Sign_Dif_h)
  }
  if(h>2){
    lista_resultados <- list(B_3i, Sign_Dif_h)
  }
  return(lista_resultados)

}


# ------------------------------- #
#     Cj Function - DM j Inicia
# ------------------------------- #

Cj <- function(h){
  if(h==1){
    B_1j = (hadamard.prod(Jj, (t(K_j%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K
        _j%*%E))))
    C_1j = cbind(apply(B_1j,1,max)) # Max de cada linha
    Cj = C_1j
  }
  if(h==2){
    B_2j = ((hadamard.prod(Jj, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_1i), (E-D
        ))) %*% K_j) + ((hadamard.prod(Argmax(B_1i), D)) %*% K_j)) %*%
         E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E)))))
    C_2j = cbind(apply(B_2j,1,max)) # Max de cada linha
    Cj = C_2j
  }
  if(h>2){
    for (g in 3:h){
      B_3j = ((hadamard.prod(Jj, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_2i), (E
          -D))) %*% K_j) + ((hadamard.prod(Argmax(B_2i), D)) %*% K_j))
           %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E)))))
      C_3j = cbind(apply(B_3j,1,max)) # Max de cada linha
      Cj = C_3j
    }
  }
```

```
  Dif_J_h = (K_j - Cj) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
     terei se eu me mover
  Sign_J_Dif_h = sign(Dif_J_h)
  if(h==1){
    lista_resultados <- list(B_1j, Sign_J_Dif_h)
  }
  if(h==2){
    lista_resultados <- list( B_2j, Sign_J_Dif_h)
  }
  if(h>2){
    lista_resultados <- list(B_3j, Sign_J_Dif_h)
  }
  return(lista_resultados)
}
```

A.6 SCRIPT DO R - CICLOS TABELA 2X2 - CÓDIGO L_h

```

#---------------------------------------------
#          Jogos da Tabela Periodica 2x2
#---------------------------------------------

# Codigo para obter os resultados do DM i

library(matrixcalc)

S=4 # Quantidade de estados
E = rep(1,S) # Vetor de um's # Matriz de um's
D = diag (x = 1, nrow=S, ncol=S) # Matriz diagonal

# Matriz de acessibilidade
Ji = matrix(c(0,0,1,0,
              0,0,0,1,
              1,0,0,0,
              0,1,0,0),S,S)

Jj = matrix(c(0,1,0,0,
              1,0,0,0,
```

```
                 0,0,0,1,
                 0,0,1,0),S,S)

# --------------------- #
# Matrizes K_i e K_j
# --------------------- #

# Jogo 1 - ChNc | NcCh
#K_i = matrix(c(2, 3, 1, 4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3, 4, 1, 2), ncol = 1)

# Jogo 2 - ChHa | HaCh
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 3 - ChPc | PcCh
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

# Jogo 4 - ChCo | CoCh
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 5 - ChAs
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 6 - ChSh
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)

# Jogo 7 - ChPd
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,3,2,1), ncol = 1)

# Jogo 8 - ChDl
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,2,3,1), ncol = 1)
```

```
# Jogo 9 - ChCm
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,1,3,2), ncol = 1)

# Jogo 10 - ChHr
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,1,2,3), ncol = 1)

# Jogo 11 - ChBa
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,2,1,3), ncol = 1)

# Jogo 12 - ChCh - Chicken Game
#K_i = matrix(c(2,3,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,3,1,2), ncol = 1)

# Jogo 13 - BaNc
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 14 - BaHa
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 15 - BaPc
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

# Jogo 16 - BaCo
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 17 - BaAs
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 18 - BaSh
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)
```

```
# Jogo 19 - BaPd
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,3,2,1), ncol = 1)

# Jogo 20 - BaDl
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,2,3,1), ncol = 1)

# Jogo 21 - BaCm
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,1,3,2), ncol = 1)

# Jogo 22 - BaHr
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,1,2,3), ncol = 1)

# Jogo 23 - BaBa - Battle Game
#K_i = matrix(c(3,2,1,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,2,1,3), ncol = 1)

# Jogo 24 = Jogo 11

# Jogo 25 - HrNc
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 26 - HrHa
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 27 - HrPc
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

# Jogo 28 - HrCo
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)
```

```
# Jogo 29 - HrAs
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 30 - HrSh
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)

# Jogo 31 - HrPd
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,3,2,1), ncol = 1)

# Jogo 32 - HrDl
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,2,3,1), ncol = 1)

# Jogo 33 - HrCm
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,1,3,2), ncol = 1)

# Jogo 34 - HrHr - Hero
#K_i = matrix(c(3,1,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,1,2,3), ncol = 1)

# Jogo 35 = Jogo 22
# Jogo 36 = Jogo 10

# Jogo 37 - CmNc
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 38 - CmHa
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 39 - CmPc
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

```

```
# Jogo 40 - CmCo
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 41 - CmAs
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 42 - CmSh
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)

# Jogo 43 - CmPd
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,3,2,1), ncol = 1)

# Jogo 44 - CmDl
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,2,3,1), ncol = 1)

# Jogo 45 - CmCm - Compromise Game
#K_i = matrix(c(2,1,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,1,3,2), ncol = 1)

# Jogo 46 = Jogo 33
# Jogo 47 = Jogo 21
# Jogo 48 = Jogo 9

# Jogo 49 - DlNc
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 50 - DlHa
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 51 - DlPc
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
```

```
# Jogo 52 - DlCo
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 53 - DlAs
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 54 - DlSh
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)

# Jogo 55 - DlPd
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,3,2,1), ncol = 1)

# Jogo 56 - DlDl - Deadlock
#K_i = matrix(c(1,2,3,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,2,3,1), ncol = 1)

# Jogo 57 = Jogo 44
# Jogo 58 = Jogo 32
# Jogo 59 = Jogo 20
# Jogo 60 = Jogo 8

# Jogo 61 - PdNc
#K_i = matrix(c(1,3,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 62 - PdHa
#K_i = matrix(c(1,3,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 63 - PdPc
#K_i = matrix(c(1,3,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

# Jogo 64 - PdCo
```

```
#K_i = matrix(c(1,3,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 65 - PdAs
#K_i = matrix(c(1,3,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 66 - PdSh
#K_i = matrix(c(1,3,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)

# Jogo 67 - PdPd - Prisoner Dilema
#K_i = matrix(c(1,3,2,4), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(4,3,2,1), ncol = 1)

# Jogo 68 = Jogo 55
# Jogo 69 = Jogo 43
# Jogo 70 = Jogo 31
# Jogo 71 = Jogo 19
# Jogo 72 = Jogo 7

# Jogo 73 - ShNc
#K_i = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 74 - ShHa
#K_i = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 75 - ShPc
#K_i = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

# Jogo 76 - ShCo
#K_i = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 77 - ShAs
#K_i = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
```

```
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 78 - ShSh - Stag Hunt
#K_i = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)

# Jogo 79 = Jogo 66
# Jogo 80 = Jogo 54
# Jogo 81 = Jogo 42
# Jogo 82 = Jogo 30
# Jogo 83 = Jogo 18
# Jogo 84 = Jogo 6

# Jogo 85 - AsNc
#K_i = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 86 - AsHa
#K_i = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 87 - AsPc
#K_i = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

# Jogo 88 - AsCo
#K_i = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 89 - AsAs - Assurance
#K_i = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)

# Jogo 90 = Jogo 77
# Jogo 91 = Jogo 65
# Jogo 92 = Jogo 53
# Jogo 93 = Jogo 41
# Jogo 94 = Jogo 29
# Jogo 95 = Jogo 17
```

```
# Jogo 96 = Jogo 5

# Jogo 97 - CoNc
#K_i = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 98 - CoHa
#K_i = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 99 - CoPc
#K_i = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)

# Jogo 100 - CoCo - Coordination
#K_i = matrix(c(2,4,3,1), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,3,2), ncol = 1)

# Jogo 101 = Jogo 88
# Jogo 102 = Jogo 76
# Jogo 103 = Jogo 64
# Jogo 104 = Jogo 52
# Jogo 105 = Jogo 40
# Jogo 106 = Jogo 28
# Jogo 107 = Jogo 16
# Jogo 108 = Jogo 4

# Jogo 109 - PcNc
#K_i = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 110 - PcHa
#K_i = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 111 - PcPc - Peace
#K_i = matrix(c(3,4,2,1), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(1,4,2,3), ncol = 1)
```

```
# Jogo 112 = Jogo 99
# Jogo 113 = Jogo 87
# Jogo 114 = Jogo 75
# Jogo 115 = Jogo 63
# Jogo 116 = Jogo 51
# Jogo 117 = Jogo 39
# Jogo 118 = Jogo 27
# Jogo 119 = Jogo 15
# Jogo 120 = Jogo 3

# Jogo 121 - HaNc
#K_i = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 122 - HaHa - Harmony
#K_i = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)
#K_j = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)

# Jogo 123 = Jogo 110
# Jogo 124 = Jogo 98
# Jogo 125 = Jogo 86
# Jogo 126 = Jogo 74
# Jogo 127 = Jogo 62
# Jogo 128 = Jogo 50
# Jogo 129 = Jogo 38
# Jogo 130 = Jogo 26
# Jogo 131 = Jogo 14
# Jogo 132 = Jogo 2

# Jogo 133 - NcNc - Concord
K_i = matrix(c(2,4,1,3), ncol = 1)
K_j = matrix(c(3,4,1,2), ncol = 1)

# Jogo 134 = Jogo 121
# Jogo 135 = Jogo 109
# Jogo 136 = Jogo 97
# Jogo 137 = Jogo 85
# Jogo 138 = Jogo 73
# Jogo 139 = Jogo 61
```

```
# Jogo 140 = Jogo 49
# Jogo 141 = Jogo 37
# Jogo 142 = Jogo 25
# Jogo 143 = Jogo 13
# Jogo 144 = Jogo 1

# --------------------- #
#    Funcao Argmax
# --------------------- #

Argmax <- function ( mat ) {
  result <- mat
  for ( i in 1: nrow ( mat ) ) {
    row <- mat [i , ]
    max_index <- which.max ( row )
    if (row [max_index] > row[i]){
      row [max_index] <- 1
      row [-max_index] <- 0
    }
    else {
      row [i] <- 1
      row [-i] <- 0
    }
    result [i , ] <- row
  }
  return ( result )
}

# ------------------------------ #
#    Ci Function - DM i Inicia
# ------------------------------ #

Ci <- function(h){
       B_1i = (hadamard.prod(Ji, (t(K_i%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (
          t(K_i%*%E))))
       C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max)) # Max de cada linha
       Ci=C_1i
       if(h==1){
           Ci=C_1i
```

```
          Dif_h = (K_i - Ci) # dif de quanto tenho se permanecer e
             quanto terei se eu me mover
          Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
          #lista_resultados <- list(B_1i, Sign_Dif_h)
          lista_resultados <- list(Sign_Dif_h)
          }
      if(h>1){
        B_1j = (hadamard.prod(Jj, (t(K_j%*%E)))) + (hadamard.prod(D,
            (t(K_j%*%E))))
        C_1j = cbind(apply(B_1j,1,max)) # Max de cada linha
        B_2i = ((hadamard.prod(Ji, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_1j),
            (E-D))) %*% K_i) + ((hadamard.prod(Argmax(B_1j), D)) %*%
            K_i)) %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))))
        C_2i = cbind(apply(B_2i,1,max)) # Max de cada linha
        if(h==2){Ci=C_2i
        Dif_h = (K_i - Ci) # dif de quanto tenho se permanecer e
           quanto terei se eu me mover
        Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
        #lista_resultados <- list(B_2i, Sign_Dif_h)
        lista_resultados <- list(Sign_Dif_h)
        }
        if(h>2){
            C_0j <- K_j
            for (g in 3:h){
              B_2j = ((hadamard.prod(Jj, (t((((hadamard.prod(Argmax(
                  B_1i), (E-D))) %*% C_0j) + ((hadamard.prod(Argmax(B
                  _1i), D)) %*% K_j)) %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (
                  t(K_j%*%E)))))
              C_2j = cbind(apply(B_2j,1,max)) # Max de cada linha
              B_3i = ((hadamard.prod(Ji, (t((((hadamard.prod(Argmax(
                  B_2j), (E-D))) %*% C_1i) + ((hadamard.prod(Argmax(B
                  _2j), D)) %*% K_i)) %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (
                  t(K_i%*%E)))))
              C_3i = cbind(apply(B_3i,1,max)) # Max de cada linha
              B_1i <- B_2i
              B_2i <- B_3i
              C_1i <- C_2i
              C_2i <- C_3i
              C_0j <- C_1j
```

```
                C_1j <- C_2j
              }
            Ci = C_3i
            Dif_h = (K_i - Ci) # dif de quanto tenho se permanecer e
                quanto terei se eu me mover
            Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
            #lista_resultados <- list(B_3i, Sign_Dif_h)
            lista_resultados <- list(Sign_Dif_h)
          }
      }
   return(lista_resultados)

}

# ------------------------------ #
#    Cj Function - DM j Inicia
# ------------------------------ #


Cj <- function(h){
  B_1j = (hadamard.prod(Jj, (t(K_j%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_j
      %*%E))))
  C_1j = cbind(apply(B_1j,1,max)) # Max de cada linha
  Cj=C_1j
  if(h==1){
    Cj=C_1j
    Dif_h = (K_j - Cj) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
        terei se eu me mover
    Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
    #lista_resultados <- list(B_1j, Sign_Dif_h)
    lista_resultados <- list(Sign_Dif_h)
  }
  if(h>1){
    B_1i = (hadamard.prod(Ji, (t(K_i%*%E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K
        _i%*%E))))
    C_1i = cbind(apply(B_1i,1,max)) # Max de cada linha
    B_2j = ((hadamard.prod(Jj, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_1i), (E-D
        ))) %*% K_j) + ((hadamard.prod(Argmax(B_1i), D)) %*% K_j)) %*%
         E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E)))))
```

```
    C_2j = cbind(apply(B_2j,1,max)) # Max de cada linha
    if(h==2){Cj=C_2j
    Dif_h = (K_j - Cj) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
        terei se eu me mover
    Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
    #lista_resultados <- list(B_2j, Sign_Dif_h)
    lista_resultados <- list(Sign_Dif_h)
    }
    if(h>2){
      C_0i <- K_i
      for (g in 3:h){
        B_2i = ((hadamard.prod(Ji, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_1j),
            (E-D))) %*% C_0i) + ((hadamard.prod(Argmax(B_1j), D)) %*%
            K_i)) %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_i%*%E)))))
        C_2i = cbind(apply(B_2i,1,max)) # Max de cada linha
        B_3j = ((hadamard.prod(Jj, (t((((hadamard.prod(Argmax(B_2i),
            (E-D))) %*% C_1j) + ((hadamard.prod(Argmax(B_2i), D)) %*%
            K_j)) %*% E)))) + (hadamard.prod(D, (t(K_j%*%E)))))
        C_3j = cbind(apply(B_3j,1,max)) # Max de cada linha
        B_1j <- B_2j
        B_2j <- B_3j
        C_1j <- C_2j
        C_2j <- C_3j
        C_0i <- C_1i
        C_1i <- C_2i
              }
      Cj = C_3j
      Dif_h = (K_j - Cj) # dif de quanto tenho se permanecer e quanto
          terei se eu me mover
      Sign_Dif_h = sign(Dif_h)
      #lista_resultados <- list(B_3j, Sign_Dif_h)
      lista_resultados <- list(Sign_Dif_h)
    }
  }
  return(lista_resultados)

}

result_i <- list()
```

```
result_j <- list()


# Matriz Resultados

  matriz_resultados_i <- matrix(nrow = length(K_i), ncol = 0)
  matriz_resultados_j <- matrix(nrow = length(K_j), ncol = 0)

  #result <- list()
  for (h in 1:20){
    result_i[h] <- Ci(h)[1]
    result_j[h] <- Cj(h)[1]
    vetor_atual_i <- result_i[[h]]
    vetor_atual_j <- result_j[[h]]
    matriz_resultados_i <- cbind(matriz_resultados_i, vetor_atual_i)
    matriz_resultados_j <- cbind(matriz_resultados_j, vetor_atual_j)
    lista_matriz_resultados <- list(matriz_resultados_i, matriz_resultados_j)}
  print(lista_matriz_resultados)
```