



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO  
CENTRO DE TECNOLOGIA E GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

LUCÍOLO VICTOR MAGALHÃES E SILVA

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS MISTO, ESTABILIZADOS E DE ACOPLAMENTO APLICADOS A PROBLEMAS HIDROMECÂNICOS E DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS**

Recife

2025

LUCÍOLO VICTOR MAGALHÃES E SILVA

**Método dos elementos finitos misto, estabilizados e de acoplamento aplicados a problemas hidromecânicos e de escoamento bifásico em meios porosos**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em engenharia civil da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em engenharia civil. Área de concentração: simulação e gerenciamento de reservatórios de petróleo

Orientador: Leonardo José do Nascimento Guimarães

Coorientador: Jonathan da Cunha Teixeira

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Silva, Lucíolo Victor Magalhães e.

Método dos elementos finitos misto, estabilizados e de acoplamento aplicados a problemas hidromecânicos e de escoamento bifásico em meios porosos / Lucíolo Victor Magalhães e Silva. - Recife, 2025.

173f.: il.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2025.

Orientação: Leonardo José do Nascimento Guimarães.

Coorientação: Jonathan da Cunha Teixeira.

1. Escoamento bifásico; 2. Acoplamento hidromecânico; 3. Streamline Upwind Petrov-Galerkin; 4. Elementos finitos mistos; 5. Reservatórios de petróleo. I. Guimarães, Leonardo José do Nascimento. II. Teixeira, Jonathan da Cunha. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

# **LUCÍOLO VICTOR MAGALHÃES E SILVA**

## **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS MISTO, ESTABILIZADOS E DE ACOPLAMENTO APLICADOS A PROBLEMAS HIDROMECÂNICOS E DE ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Tecnologia e Geociências, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil, Área de Simulação e Gerenciamento de Reservatórios de Petróleo.

Aprovada em 27/08/2025

Orientador: Prof. Dr. Leonardo José do Nascimento Guimarães, UFPE

Coorientador: Prof. Dr. Jonathan da Cunha Teixeira, UFAL

### **BANCA EXAMINADORA**

participação por videoconferência

Prof. Dr. Bernardo Horwitz (examinador interno)

Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Débora Cristina Almeida de Assis (examinadora externa)

Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Lícia Mouta da Costa (examinadora externa)

Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência

Prof. Dr. Leorlen Yunier Rojas Mazaira (examinador externo)

Universidade Federal de Pernambuco

participação por videoconferência

Prof. Dr. Paulo Marcelo Vieira Ribeiro (examinador externo)

Universidade Federal de Pernambuco

## AGRADECIMENTOS

A contribuição das pessoas que fazem parte da minha história foi fundamental para a obtenção do mais alto grau acadêmico, nessa seção faço os devidos agradecimentos.

Agradeço a todos os mestres que fizeram parte da minha formação, da minha educação básica, tenho lembranças de grandes professores que me incentivaram nas áreas de exatas e que me passaram toda a base do conhecimento que adquiri.

Agradeço ao Prof. Peter Johnson que me orientou na primeira experiência acadêmica que tive, como monitor de Cálculo 3.

Agradeço, de forma especial, ao Prof. Paulo Lyra, responsável por me orientar no meu primeiro trabalho de iniciação científica e me introduzir no mundo da pesquisa acadêmica.

Agradeço também ao prof. Darlan Karlo, e todos os colegas do PADMEC que fizeram parte da minha época de iniciação científica. Esses colegas foram Eduardo, Márcio, Fernando e Marcelo.

Agradeço aos amigos pelos bons momentos que tivemos durante minha jornada do PPGEC da UFPE. Em especial Jean Baptiste, Ricardo, Bruno, Tarcísio, Laura, Sajan, Girão, Nayara, Marinésio, Vitor, Aura, Oscar e todos os outros que estavam sempre presente em nossas atividades.

Um agradecimento especial e saudoso ao professor Ivaldo Dário. Tive um aprendizado especial com esse professor, tanto no âmbito acadêmico e pessoal.

Agradeço à Profa. Lícia e ao Prof. Igor Gomes pelos ensinamentos.

Agradeço ao Prof. Paulo Marcelo por ter me acolhido durante meu TCC e ter sido um grande amigo e incentivador da minha carreira acadêmica.

Agradeço à Rose e Priscila, pela amizade e por apoio a todos às atividades desenvolvidas durante minha trajetória.

Agradeço ao prof. José Jefferson pelo incentivo a continuar na área acadêmica e na área computacional.

Um agradecimento especial aos meus orientadores José Leonardo Guimarães e Jonathan Teixeira, por estarem sempre presente durante o trabalho e pelo excelente trabalho como orientadores.

Agradeço aos meus amigos que fizeram parte da minha jornada acadêmica e que contribuíram para minha formação pessoal e profissional. Destaco, entre eles, Pedro Romero, Islanio Salviano e Alisson Almeida.

Agradeço ao meu tio Antônio Silva pelo exemplo de profissional e incentivo nessa jornada.

Agradeço a todos os colegas do IFSertão Pernambucano do campus Salgueiro pelo apoio e incentivo ao meu doutorado, em especial a profa. Yanne Andrade, o prof. Marcos Padilha e o prof. André Patriota.

Agradeço aos meus irmãos Carlos Igor e Carlos Hugo por todo incentivo e apoio.

Agradeço à minha esposa Claudia Nunes e à minha filha Maria Alice por estarem presente diariamente na minha vida e me incentivar a ser cada minha mais uma pessoa melhor.

Os agradecimentos aos meus pais são, sem sobra de dúvidas, a parte mais importante desse trabalho e de qualquer outro que eu escrevi ou vá escrever. Eles foram os responsáveis pela formação de um doutor, pela contribuição à ciência que esse trabalho está trazendo e por toda a minha formação como pessoa. A história da dedicação, do cuidado, do incentivo e a da formação que meus pais me deram até que eu pudesse chegar nesse momento não caberiam, nem de perto, em todos as páginas dessa tese.

## RESUMO

O presente trabalho abordou o problema de acoplamento hidromecânico e o escoamento bifásico em meios porosos. O primeiro problema foi resolvido a partir de uma formulação mista de elementos finitos, utilizando elementos de Taylor-Hood, garantindo a condição de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi. O problema de escoamento bifásico foi resolvido utilizando uma formulação *Streamline Upwind Petrov-Galerkin* associada à estratégia de estabilização *Discontinuity Capturing Operator*. Os dois problemas foram resolvidos utilizando malhas não-conformes, tratadas pelo método dos elementos de acoplamento, de forma inédita. Essa metodologia permite o acoplamento entre malhas sem a necessidade da criação de graus de liberdade adicionais. As formulações foram implementadas em ambiente MATLAB® e a geração de malha foi realizada no software livre Gmsh®. Os resultados foram comparados com problemas clássicos da literatura que possuíam solução analítica ou soluções de referência. No contexto hidromecânico foram resolvidos os problemas clássicos de Terzaghi, Terzaghi heterogêneo, Mandel e Schiffman. Nesses casos foram abordados aspectos como a utilização de malhas com interfaces não coincidentes, refinamento em locais com variações bruscas nos gradientes de pressões e refinamento local do domínio. Para o problema bifásico foram resolvidos os casos clássicos de Buckley-Leverett e  $\frac{1}{4}$  de cinco poços. Além dos problemas clássicos foram resolvidos 3 casos com soluções de referência apresentadas na literatura, considerando um caso com um reservatório com barreiras, um reservatório fraturado e uma variação do problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços. Para esses casos foi avaliada a influência nos parâmetros de estabilização, a influência da orientação da malha e da diferença entre o refinamento das malhas acopladas na estabilidade do método. A partir dos resultados as duas formulações proposta foram validadas com resultados consistentes.

**Palavras-chave:** Escoamento bifásico. Acoplamento hidromecânico. *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*. Elementos finitos mistos. Reservatórios de petróleo.

## ABSTRACT

This work addressed the hydro-mechanical coupling problem and two-phase flow in porous media. The first problem was solved using a mixed finite-element formulation with Taylor–Hood elements, ensuring the Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi condition. The two-phase flow problem was solved with a Streamline Upwind Petrov–Galerkin formulation combined with a Discontinuity-Capturing Operator stabilization strategy. Both problems were solved on non-conforming meshes, handled—in a novel manner—by the coupling-elements method. This approach enables mesh coupling without introducing additional degrees of freedom. The formulations were implemented in MATLAB®, and the meshes were generated with the open-source software Gmsh®. Results were compared against classical problems from the literature that have analytical or reference solutions. In the hydro-mechanical context, the classical Terzaghi, heterogeneous Terzaghi, Mandel, and Schiffman problems were solved. These cases examined the use of meshes with noncoincident interfaces, refinement in regions with sharp pressure-gradient variations, and local mesh refinement. For the two-phase problem, the classical Buckley–Leverett and quarter five-spot cases were solved. In addition to the classical problems, three cases with reference solutions from the literature were studied: a reservoir with barriers, a fractured reservoir, and a variation of the quarter five-spot problem. For these, we assessed the influence of stabilization parameters, the effect of mesh orientation, and the impact of differences in refinement levels between the coupled meshes on the stability of the method. Based on the results, both proposed formulations were validated and yielded consistent outcomes.

**Keywords:** Two-phase flow. Hydro-mechanical coupling. Streamline Upwind Petrov–Galerkin. Mixed finite elements. Petroleum reservoirs.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	33
2	JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO .....	38
3	OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO .....	39
3.1	OBJETIVOS GERAIS.....	39
3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	40
3.3	CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO .....	40
4	ORGANIZAÇÃO GERAL DA TESE .....	41
5	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	42
5.1	ACOPLAMENTO HIDROMECÂNICO EM MEIOS POROSOS .....	42
5.2	ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS.....	44
5.3	MÉTODOS ESTABILIZADOS DE ELEMENTOS FINITOS.....	46
5.4	MALHAS NÃO-CONFORMES .....	47
6	ELEMENTOS FINITOS DE ACOPLAMENTO .....	49
7	FUNÇÕES DE FORMA E OPERADORES DISCRETOS.....	53
7.1	ELEMENTOS TRIANGULARES LINEARES.....	53
7.2	ELEMENTOS TRIANGULARES QUADRÁTICOS.....	57
8	ACOPLAMENTO HIDROMECÂNICO EM MEIOS POROSOS COM ESCOAMENTO MONOFÁSICO .....	61
8.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....	61
8.1.1	Equação de equilíbrio mecânico.....	61
8.1.2	Relação tensão-deformação.....	62
8.1.3	Equação de conservação de massa do fluido .....	63
8.1.4	Lei de Darcy .....	63
8.1.5	Princípio das tensões efetivas .....	63
8.1.6	Sistema de equações do acoplamento hidromecânico em meios porosos .....	64
8.2	FORMULAÇÃO NUMÉRICA .....	66
8.2.1	Discretização espacial pelo método dos elementos finitos mistos .....	67
8.2.2	Construção das matrizes globais do problema hidromecânico para malhas não conformes	69
8.2.3	Discretização temporal pelo método das diferenças finitas.....	70
8.3	AVALIAÇÃO DOS ERROS.....	71
8.3.1	Erro médio absoluto (MAE – <i>Mean absolute error</i> ).....	72
8.3.2	Erro percentual absoluto médio (MAPE – <i>Mean Absolute percentual error</i> ).....	72
8.3.3	Erro quadrático médio (MSE – <i>Mean square error</i> ).....	72
8.3.4	Raiz do erro quadrático médio (RMSE – <i>Root mean squared error</i> ).....	73

8.4	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS .....	73
8.4.1	Adensamento unidimensional – Problema de Terzaghi .....	74
8.4.2	Adensamento unidimensional heterogêneo – Problema de Terzaghi heterogêneo .....	80
8.4.3	Adensamento bidimensional homogêneo – Problema de Mandel.....	84
8.4.4	Sapata em meio homogêneo – Problema de Schiffman .....	88
8.5	CONCLUSÕES .....	95
9	ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM MEIOS POROSOS.....	97
9.1	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA .....	97
9.1.1	Equações de conservação .....	97
9.1.2	Pressão capilar.....	99
9.1.3	Forma geral das equações do escoamento bifásico imiscível em meios porosos.....	99
9.1.4	Permeabilidade absoluta e permeabilidade relativa.....	100
9.1.5	Mobilidades das fases.....	100
9.1.6	Equação de pressão.....	100
9.1.7	Fluxos fracionários .....	102
9.1.8	Equação de saturação .....	103
9.1.9	Sistema de equações para o escoamento bifásico em meios porosos .....	106
9.2	FORMULAÇÃO NUMÉRICA .....	107
9.2.1	Discretização espacial pelo método dos elementos finitos.....	107
9.2.2	DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL.....	117
9.3	EXPERIMENTOS NUMÉRICOS .....	121
9.3.1	Injeção unidimensional de fluido – Problema de Buckley-Leverett .....	121
9.3.2	Injeção bidimensional de fluido – $\frac{1}{4}$ de cinco poços.....	128
9.3.3	Reservatório com 2 barreiras.....	133
9.3.4	Reservatório fraturado .....	137
9.3.5	$\frac{1}{4}$ de cinco poços modificado .....	144
9.4	CONCLUSÕES .....	147
10	CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS .....	149
10.1	SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS .....	150
11	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	151
	ANEXO A .....	160

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Diferentes escalas em problemas de meios porosos.

Figura 2. Esquema de malha não-conforme nas proximidades de um poço.

Figura 3. Esquema de acoplamento de malhas não-conforme com destaque para os elementos finitos de acoplamento.

Figura 4. Mapeamento de elemento triangular linear.

Figura 5. Mapeamento de elemento triangular quadrático.

Figura 6. Domínios e contornos no problema de acoplamento hidromecânico.

Figura 7. Graus de liberdade do problema hidromecânico.

Figura 8. Carregamento ao longo do tempo no problema hidromecânico.

Figura 9. Problema de Terzaghi: (a) descrição do caso; (b) malha conforme.

Figura 10. Problema de Terzaghi: (a) malha 1; (b) detalhe do refinamento da malha.

Figura 11. Problema de Terzaghi: (a) malha 2; (b) detalhe do refinamento da malha.

Figura 12. Problema de Terzaghi: solução analítica e numéricas das pressões.

Figura 13. Problema de Terzaghi: solução analítica e numéricas dos deslocamentos.

Figura 14. Problema de Terzaghi heterogêneo: descrição do caso.

Figura 15. Problema de Terzaghi heterogêneo: malhas não-conformes.

Figura 16. Problema de Terzaghi heterogêneo: solução da pressão ao longo da coordenada y.

Figura 17. Problema de Mandel: descrição do caso.

Figura 18. Problema de Mandel: malha não-conforme.

Figura 19. Problema de Mandel: pressões ao longo do eixo x.

Figura 20. Problema de Mandel: deformada em  $T_v = 1,00$ .

Figura 21. Problema de Mandel: campo de pressões para  $T_v = 1,00$ .

Figura 22. Problema de Mandel: campo de tensões efetivas em x para  $T_v = 1,00$ .

Figura 23. Problema de Mandel: campo de tensões efetivas em y para  $T_v = 1,00$ .

Figura 24. Problema de Mandel: campo de tensões cisalhantes para  $T_v = 1,00$ .

Figura 25. Problema de Schiffman: esquema do caso.

Figura 26. Problema de Schiffman: malha não-conforme.

Figura 27. Problema de Schiffman: malha conforme.

Figura 28. Problema de Schiffman: pressões ao longo do eixo y em  $T_v = 1,00$ .

Figura 29. Problema de Schiffman: campo de pressões em  $T_v = 1,00$ .

Figura 30. Problema de Schiffman: campo de tensões efetivas em x para  $T_v = 1,00$ .

Figura 31. Problema de Schiffman: campo de tensões efetivas em y para  $T_v = 1,00$ .

Figura 32. Problema de Schiffman: campo de tensões cisalhantes em  $T_v = 1,00$ .

Figura 33. Problema de Schiffman: deformada da malha não-conforme em  $T_v = 1,00$ .

Figura 34. Problema de Schiffman: deformada da malha conforme em  $T_v = 1,00$ .

Figura 35. Domínios e contornos no problema de escoamento bifásico.

Figura 36. Graus de liberdade do problema bifásico.

Figura 37. Problema de Buckley-Leverett: esquema do caso.

Figura 38. Problema de Buckley-Leverett: malha 1.

Figura 39. Problema de Buckley-Leverett: malha 2.

Figura 40. Problema de Buckley-Leverett: malha 3.

Figura 41. Problema de Buckley-Leverett: malha 4.

Figura 42. Problema de Buckley-Leverett: malha 5.

Figura 43. Problema de Buckley-Leverett: malha 6.

Figura 44. Problema de Buckley-Leverett: malha 7.

Figura 45. Problema de Buckley-Leverett: malha 8.

Figura 46. Problema de Buckley-Leverett: malha 9.

Figura 1. Problema de Buckley-Leverett: saturações para  $VPI = 0,25$  e  $VPI = 0,50$  dos casos 1.1 ao 1.5.

Figura 48. Problema de Buckley-Leverett: saturações para VPI = 0,25 e VPI = 0,50 dos casos 1.5, caso 2 e caso 3.

Figura 2. Problema de Buckley-Leverett: saturações para VPI = 0,25 e VPI = 0,50 dos casos 4.1 ao 4.3.

Figura 50. Problema de Buckley-Leverett: saturações para VPI = 0,25 e VPI = 0,50 dos casos 5.1 ao 5.3.

Figura 51. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: esquema do caso.

Figura 52. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: malha 1.

Figura 53. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: malha 2.

Figura 54. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: (a) malha 3; (b) malha 4; (c) malha 5; (d) malha 6.

Figura 55. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: VPI x Recuperação de óleo.

Figura 56. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: (a) detalhe 1; (b) detalhe 2; (c) detalhe 3; (d) detalhe 4.

Figura 57. Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: VPI x Volume recuperado.

Figura 58. Problema das barreiras: esquema do caso.

Figura 59. Problema das barreiras: malha.

Figura 60. Problema das barreiras: (a) campo de pressões com vista bidimensional; (b) campo de pressões extrudado.

Figura 61. Problema das barreiras: campo de saturações (a) 10,00s; (b) 60,00s; (c) 120,00s; (d) 180,00s; (e) 240,00; (f) 320,00s.

Figura 62. Problema das fraturas: esquema do caso.

Figura 63. Problema das fraturas: malha.

Figura 64. Problema das fraturas impermeáveis: (a) solução numérica; (b) solução de referência.

Figura 65. Problema das fraturas impermeáveis: solução numérica x solução de referência.

Figura 66. Problema das fraturas impermeáveis, campo de saturação: (a)  $1 \times 10^{-6}$ s; (b)  $10 \times 10^{-6}$ s; (c)  $30 \times 10^{-6}$ s; (d)  $50 \times 10^{-6}$ s; (e)  $70 \times 10^{-6}$ s; (f)  $90 \times 10^{-6}$ s.

Figura 67. Problema das fraturas impermeáveis: campo de saturação extrudado: (a)  $1 \times 10^{-6}$ s; (b)  $10 \times 10^{-6}$ s.

Figura 68. Problema das fraturas permeáveis: campo de saturação: (a)  $1 \times 10^{-6}$ s; (b)  $10 \times 10^{-6}$ s; (c)  $30 \times 10^{-6}$ s; (d)  $50 \times 10^{-6}$ s; (e)  $70 \times 10^{-6}$ s; (f)  $90 \times 10^{-6}$ s.

Figura 69. Problema das fraturas permeáveis: campo de saturação extrudado: (a)  $1 \times 10^{-6}$ s; (b)  $10 \times 10^{-6}$ s.

Figura 70. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: solução de referência.

Figura 71. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 1.

Figura 72. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 2.

Figura 73. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 3.

Figura 74. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 4.

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1. Listagem dos fenômenos que ocorrem em um reservatório de petróleo.

Tabela 2. Problema de Terzaghi: parâmetros físicos.

Tabela 3. Problema de Terzaghi: erros MAE da pressão.

Tabela 4. Problema de Terzaghi: erros MAPE da pressão.

Tabela 5. Problema de Terzaghi: erros MSE da pressão.

Tabela 6. Problema de Terzaghi: erros RMSE da pressão.

Tabela 7. Problema de Terzaghi heterogêneo: parâmetros físicos.

Tabela 8. Problema de Terzaghi heterogêneo: número de graus de liberdade das malhas.

Tabela 9. Problema de Terzaghi heterogêneo: erros MAE da pressão.

Tabela 10. Problema de Terzaghi heterogêneo: erros MAPE da pressão.

Tabela 11. Problema de Terzaghi heterogêneo: erros MSE da pressão.

Tabela 12. Problema de Terzaghi heterogêneo: erros RMSE da pressão.

Tabela 13. Problema de Mandel: parâmetros físicos.

Tabela 14. Problema de Schiffman: parâmetros físicos.

Tabela 15. Problema de Buckley e Leverett: parâmetros físicos.

Tabela 16. Problema de Buckley e Leverett: casos.

Tabela 17. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: parâmetros físicos.

Tabela 18. Problemas das barreiras: parâmetros físicos.

Tabela 19. Problema das fraturas: parâmetros físicos.

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Alfabeto romano:

<b>A</b>	vetor de derivadas temporais da saturação
$a_1$	derivada da saturação no nó 1
$a_2$	derivada da saturação no nó 2
$a_3$	derivada da saturação no nó 3
$a_b$	derivada da saturação prescrita
<b>b</b>	vetor de forças independentes
<b>B</b>	matriz contendo as derivadas das funções de forma do elemento
$b_x$	componente $x$ do vetor <b>b</b>
$b_y$	componente $y$ do vetor <b>b</b>
<b>b<sub>w</sub></b>	vetor de corpo das forças hidráulicas
<b>B<sub>x</sub></b>	componente $x$ da matriz <b>B</b>
<b>B<sub>y</sub></b>	componente $y$ da matriz <b>B</b>
<b>B<sub>u</sub></b>	matriz que relaciona tensões e deformações
<b>B<sub>u</sub><sup>C</sup></b>	matriz de acoplamento dos deslocamentos
<b>B<sub>p</sub><sup>C</sup></b>	matriz de acoplamento das pressões
<b>c</b>	matriz local de convecção
<b>C</b>	matriz global de convecção
$c_v$	coeficiente de armazenamento específico
<b>c<sub>g</sub></b>	matriz local do termo de Galerkin
<b>c<sub>pg</sub></b>	matriz local de correção SUPG

$\mathbf{c}_{dg}$	matriz local de difusão
$\mathbf{c}_{op}$	matriz local do CAU
$c_V$	coeficiente de adensamento
$\mathbf{C}_g$	matriz global de convecção
$c_n$	nó de acoplamento
$\mathbf{C}_{pg}$	matriz global de correção SUPG
$\mathbf{C}_{dg}$	matriz global de difusão
$\mathbf{C}_{op}$	matriz global do CAU
$\mathbf{C}_u$	matriz de parâmetros de penalidade mecânico
$C_{u,x}$	termo da matriz $\mathbf{C}_u$
$C_{u,y}$	termo da matriz $\mathbf{C}_u$
$C_p$	coeficiente de penalidades da pressão
$C_s$	coeficiente de penalidades da saturação
$c_1$	função de forma no nó 1
$c_2$	função de forma no nó 2
$c_3$	função de forma no nó 3
<b>CC</b>	matriz com as coordenadas nodais do elemento
<b>d</b>	vetor de deslocamentos
<b>D</b>	tensor de difusão
<b>B</b>	matriz constitutiva do material
<b>D<sub>div</sub></b>	operador divergente
$e$	e-nésimo elemento
$E$	módulo de elasticidade

$\mathbf{e}^p$	erro da pressão
$\mathbf{e}^v$	erro da velocidade
$\mathbf{e}^a$	erro da derivada temporal da saturação
$\mathbf{e}^R$	erro no balanço de massa da equação de saturação
$\mathbf{e}^E$	erro da norma de energia
$E_{MAE}$	erro MAE
$E_{MAPE}$	erro MAPE
$E_{MSE}$	erro MSE
$E_{RMSE}$	erro RMSE
$EFA_i$	elemento finito de acoplamento do elemento $i$
$\mathbf{f}$	vetor de forças
$f$	função
$f_w$	fluxo fracionário da fase molhante
$f_n$	fluxo fracionário da fase não-molhante
$\mathbf{f}_s$	vetor local independente da equação de saturação
$\tilde{\mathbf{f}}_q$	vetor local independente da equação de velocidades associado ao fluxo
$\tilde{\mathbf{f}}_p$	vetor local independente da equação de velocidades associado à pressão
$\tilde{\mathbf{f}}_{sw}$	vetor local independente da equação de velocidades associado à saturação
$\tilde{\mathbf{f}}_g$	vetor local independente da equação de velocidades associada à gravidade
$\mathbf{f}_s(\mathbf{s}_R)$	vetor de reações internas de $\mathbf{s}_R$
$\mathbf{f}^{int}$	vetor de forças internas
$\mathbf{f}_s^{int}$	vetor de fluxos de saturação internos
$\mathbf{f}(\mathbf{u}_R)$	vetor de forças internas

$\mathbf{f}^{ext}$	vetor local de forças externas no elemento
$\tilde{\mathbf{f}}$	vetor local independente da equação de velocidade
$\mathbf{F}$	vetor independente da discretização temporal
$\mathbf{F}^{n-1}$	vetor independente da discretização temporal avaliada no tempo $n - 1$
$\mathbf{F}^n$	vetor independente da discretização temporal avaliada no tempo $n$
$\mathbf{F}^{ext}$	vetor global de forças externas
$\mathbf{F}_p$	termo referente à pressão da fase não-molhante no sistema de equações
$\mathbf{F}_s$	termo referente à saturação da fase molhante no sistema de equações
$\mathbf{F}_{sat}$	vetor global que contempla as condições de contorno de saturação
$\mathbf{g}$	vetor de aceleração gravitacional
$G$	módulo de cisalhamento
$\tilde{G}$	variável auxiliar da gravidade
$g_x$	componente $x$ da aceleração da gravidade
$g_y$	componente $y$ da aceleração da gravidade
$h$	subíndice que indica discretização
$\mathbf{h}$	matriz local de condutividade hidráulica
$\mathbf{H}$	matriz global de condutividade hidráulica
$h_w$	variável auxiliar das mobilidades das fases
$H^h$	espaço de funções de Sobolev discretizadas
$H^1$	espaço de funções
$\mathbf{h}^c$	matriz tangente de acoplamento hidráulico
$\mathcal{H}(P_1)$	espaço de funções lineares de Hilbert
$\mathcal{H}(P_2)$	espaço de funções quadráticas de Hilbert

$i$	contador
<b>I</b>	matriz identidade
<b>i</b> <sub><math>x</math></sub>	versor na direção $x$
<b>J</b>	matriz jacobiana
<b>k</b>	matriz local de rigidez
$k$	permeabilidade do meio
<b>K</b>	matriz global de rigidez
<b>k</b> <sup>c</sup>	matriz tangente de acoplamento mecânico
$\kappa_x$	permeabilidade em $x$
$\kappa_y$	permeabilidade em $y$
$\kappa_{xy}$	permeabilidade em $xy$
$k_{rw}$	permeabilidade relativa da fase molhante
$k_{rn}$	permeabilidade relativa da fase não-molhante
<b>˜k</b> <sub><math>a</math></sub>	matriz local da parcela de Galerkin da equação da velocidade
<b>˜k</b> <sub><math>b</math></sub>	matriz local da parcela estabilizadora da equação da velocidade
<b>˜K</b>	matriz global de pós-processamento da equação da velocidade
<b>˜K</b> <sub><math>a</math></sub>	matriz global da parcela de Galerkin da equação da velocidade
<b>˜K</b> <sub><math>b</math></sub>	matriz global da parcela estabilizadora da equação da velocidade
<b>˜k</b>	matriz local de coeficientes da equação da velocidade
<b>I</b>	matriz local de acoplamento
$L$	operador bilinear
<b>L</b>	matriz global de acoplamento
$L_H$	comprimento característico do problema

<b>m</b>	matriz local de massa
<b>M</b>	matriz global de massa
<b>m<sub>g</sub></b>	matriz local de massa do termo de Galerkin
<b>m<sub>pg</sub></b>	matriz local de massa do termo de Petrov-Galerkin
<b>M<sub>g</sub></b>	matriz global de massa do termo de Galerkin global
<b>M<sub>pg</sub></b>	matriz global de massa do termo de Petrov-Galerkin
<b>m<sub>aux</sub></b>	vetor auxiliar do problema hidromecânico
<b>M<sub>1</sub></b>	matriz auxiliar da discretização temporal
<b>M<sub>2</sub></b>	matriz auxiliar da discretização temporal
<b>M<sub>N</sub></b>	matriz com a derivada das funções de forma em relação às variáveis do espaço mapeado
<i>n</i>	subscrito referente à fase não-molhante
<i>N</i>	número de termos no vetor dos resultados
<i>N<sub>p,1</sub></i>	função de forma hidráulica avaliada no nó 1
<i>N<sub>p,2</sub></i>	função de forma hidráulica avaliada no nó 2
<i>N<sub>p,3</sub></i>	função de forma hidráulica avaliada no nó 3
<b>N<sub>p</sub></b>	vetor contendo as funções de forma hidráulicas
<i>N<sub>p,i</sub></i>	função de forma hidráulica avaliada no nó <i>i</i>
<b>N<sub>u</sub></b>	matriz com as funções de forma mecânicas do elemento
<i>N<sub>u,i</sub></i>	função de forma do deslocamento associada ao nó <i>i</i>
<i>N<sub>p,i</sub></i>	função de forma da pressão associada ao nó <i>i</i>
<i>N<sub>u,1</sub></i>	função de forma na direção <i>x</i> no nó 1
<i>N<sub>v,1</sub></i>	função de forma na direção <i>y</i> no nó 1

$N_{u,2}$	função de forma na direção $x$ no nó 2
$N_{v,2}$	função de forma na direção $y$ no nó 2
$N_{u,3}$	função de forma na direção $x$ no nó 3
$N_{v,3}$	função de forma na direção $y$ no nó 3
$N_{u,4}$	função de forma na direção $x$ no nó 4
$N_{v,4}$	função de forma na direção $y$ no nó 4
$N_{u,5}$	função de forma na direção $x$ no nó 5
$N_{v,5}$	função de forma na direção $y$ no nó 5
$N_{u,6}$	função de forma na direção $x$ no nó 6
$N_{v,6}$	função de forma na direção $y$ no nó 6
$N_{u,nnu}$	função de forma do deslocamento avaliada no nó $nnu$
$N_{p,nnp}$	função de forma de pressão avaliada no $nnp$
$\mathbf{N}_{u,i}$	Vetor de funções de forma dos deslocamentos do nó $i$
$nnu$	número de nós do elemento de acoplamento mecânico
$nnp$	número de nós do elemento de acoplamento hidráulico
$nn$	número de nós
$nel$	número de elementos da malha
$p$	pressão
$\mathbf{p}$	vetor de pressões no elemento
$\mathbf{P}$	vetor de incógnitas hidráulicas
$\mathbf{p}^c$	vetor de pressões do elemento de acoplamento
$p_{nn}$	pressão no nó $nn$
$p_{cn}$	pressão no nó de acoplamento

$\mathbf{p}_R$	pressão relativa
$p_i$	pressão no nó $i$
$p_{cn}$	pressão no ponto material
$Pe^e$	número de Peclet do elemento
$Pe_{//}^e$	número de Peclet em relação ao gradiente de saturação do elemento
$p^0$	pressões iniciais
$p_D$	pressões impostas no contorno
$p^h$	função interpolada da pressão
$P^h$	conjunto de funções admissíveis para a pressão
$p_b$	pressão prescrita
$p_c$	pressão capilar
$p_n$	pressão da fase não-molhante
$p_w$	pressão da fase molhante
$p_1$	pressão no nó 1
$p_2$	pressão no nó 2
$p_3$	pressão no nó 3
$\mathbf{q}$	vetor local de termos fonte
$q$	termo de fonte ou sumidouro
$\mathbf{Q}$	vetor global de termos de fonte
$q_w$	termo fonte da fase molhante
$q_n$	termo fonte da fase não-molhante
$Q_w$	termo de fonte específico da fase molhante
$Q_n$	termo de fonte específico da fase não-molhante

$q_b$	fluxo prescrito
$q_N$	fluxo prescrito no contorno
$q_f$	carga final
$\mathbf{q}_q$	vetor local de fluxo do termo fonte
$\mathbf{q}_{sw}$	vetor local de fluxo com as contribuições dos efeitos das saturações da fase molhante
$\mathbf{q}_g$	vetor local de fluxo com as contribuições dos efeitos da gravidade
$\mathbf{q}_p$	vetor local de fluxo com as contribuições dos efeitos das pressões
$\mathbf{q}(\mathbf{p}_R)$	vetor de fluxos internos
$\mathbf{q}_s$	vetor de fluxos
$\mathbf{q}^{int}$	vetor de fluxos hidráulicos internos
$\mathbf{Q}_q$	vetor global de fluxos prescritos
$\mathbf{Q}_{sw}$	vetor global das contribuições dos efeitos das saturações
$\mathbf{Q}_g$	vetor global das contribuições dos efeitos gravitacionais
$\mathbf{Q}_p$	Vetor global com as contribuições dos efeitos das pressões
$\mathbf{Q}_s$	vetor global com as contribuições dos efeitos das saturações
$\mathbf{R}$	resíduo do algoritmo de integração temporal
$\mathbf{r}_{n+1}^{i+1}$	resíduo do algoritmo de integração temporal na iteração $i + 1$
$\mathbf{r}_{n+1}^{i=0}$	resíduo do algoritmo de integração temporal na iteração 0
$\mathbf{s}$	vetor local das saturações
$\mathbf{S}$	vetor global das saturações
$s_b$	saturação prescrita
$s_i$	saturação inicial

$S^h$	conjunto de funções teste de saturação
$s_w^h$	função interpolada da saturação
$s_i$	saturação no nó $i$
$\mathbf{s}_R$	saturação relativa
$s_b$	saturação imposta no bifásico
$s_{cn}$	saturação no nó de acoplamento
$\mathbf{s}^c$	vetor de saturações do elemento de acoplamento
$s_{nn}$	saturação no nó $nn$
$s_{cn}$	saturação no ponto material
$s_n$	saturação da fase não-molhante
$s_1$	saturação no nó 1
$s_2$	saturação no nó 2
$s_3$	saturação no nó 3
$s_w^e$	saturação no elemento
$s_w$	saturação da fase molhante
$t_0$	tempo inicial
$T_V$	fator tempo adimensional
$t_n$	tempo $n$
$\mathbf{t}^c$	matriz tangente de acoplamento da saturação
$t_{n+1}$	tempo $n + 1$
$tol$	tolerância
$\mathbf{u}$	vetor com os deslocamentos nodais
$\mathbf{U}$	vetor de incógnitas mecânicas
$u_i$	deslocamento em $x$ do nó $i$

$\mathbf{u}_R$	deslocamento relativo
$\mathbf{u}_{cn}$	deslocamento no ponto material
$\mathbf{u}_i$	vetor de deslocamentos do nó $i$
$\mathbf{u}^C$	vetor de deslocamentos do acoplamento
$u_{nn}$	deslocamento no nó $nn$
$u_{cn}$	deslocamento no nó de acoplamento
$\mathbf{u}^0$	deslocamentos iniciais
$\mathbf{u}_D$	deslocamento impostos no contorno
$\mathbf{u}_w$	velocidade intersticial da fase molhante
$\mathbf{u}_n$	velocidade intersticial da fase não-molhante
$U^h$	conjunto de funções admissíveis para o deslocamento
$u^h$	função interpolada do deslocamento
$u_1$	deslocamento em $x$ do nó 1
$u_2$	deslocamento em $x$ do nó 2
$u_3$	deslocamento em $x$ do nó 3
$u_4$	deslocamento em $x$ do nó 4
$u_5$	deslocamento em $x$ do nó 5
$u_6$	deslocamento em $x$ do nó 6
$\mathbf{v}$	velocidade
$v_x$	componente $x$ da velocidade
$v_y$	componente $y$ da velocidade
$v_i$	deslocamento em $y$ do nó $i$
$\mathbf{v}_a$	vetor de velocidades aparentes

$v_{ax}$	componente $x$ da velocidade aparente
$v_{ay}$	componente $y$ da velocidade aparente
$v_x$	componente $x$ da velocidade total
$v_y$	componente $y$ da velocidade total
$\tilde{\mathbf{v}}$	vetor local das velocidades
$\tilde{\mathbf{V}}$	vetor de velocidades
$\mathbf{v}_w$	velocidade superficial da fase molhante
$\mathbf{v}_n$	velocidade superficial da fase não-molhante
$\mathbf{v}_t$	velocidade total
$v_1$	deslocamento em $y$ do nó 1
$v_2$	deslocamento em $y$ do nó 2
$v_3$	deslocamento em $y$ do nó 3
$v_4$	deslocamento em $y$ do nó 4
$v_5$	deslocamento em $y$ do nó 5
$v_6$	deslocamento em $y$ do nó 6
$w$	função de forma
$w^h$	função teste interpolada
$\mathbf{w}^h$	vetor de funções teste
$W^h$	conjunto de funções teste
$x$	abscissa do espaço físico
$\mathbf{X}$	vetor de incógnitas da discretização temporal
$x_i$	coordenada $x$ do nó $i$
$x_{ij}$	variável auxiliar

$y_i$	coordenada $y$ do nó $i$
$y_{ij}$	variável auxiliar
$\mathbf{x}_D$	coordenadas do ponto material
$y$	ordenada do espaço físico
$y_i^{num}$	vetor de resultados numéricos
$y_i^{ana}$	vetor de resultados analíticos

### Alfabeto grego:

$\gamma_f$	peso específico do fluido
$\gamma_n$	peso específico da fase não-molhante
$\gamma_w$	peso específico da fase molhante
$\gamma_{xy}$	distorção angular no plano $xy$
$\Gamma^1$	contorno do subdomínio 1
$\Gamma^2$	contorno do subdomínio 2
$\Gamma^{12}$	interface entre o subdomínio 1 e o subdomínio 2
$\Gamma_D$	contorno de Dirichlet do problema mecânico
$\Gamma_N$	contorno de Neumann do problema mecânico
$\Gamma_P$	contorno de Dirichlet do problema hidráulico
$\Gamma_F$	contorno de Neumann do problema hidráulico
$\boldsymbol{\varepsilon}$	vetor de deformações
$\varepsilon_x$	deformação em $x$
$\varepsilon_y$	deformação em $y$
$\varepsilon_v$	deformação volumétrica

$\delta_1^e$	tamanho característico do elemento
$\delta_2^e$	tamanho característico do elemento para o termo CAU
$\Delta t$	passo de tempo
$\delta W_{EFA}^{int}$	trabalho virtual interno do deslocamento
$\delta Q_{EFA}^{int}$	trabalho virtual interno da pressão
$\delta F_{EFA}^{int}$	trabalho virtual interno da saturação
$\delta \mathbf{u}_R$	deslocamento virtual arbitrário
$\delta \mathbf{p}_R$	pressão virtual arbitrária
$\delta \mathbf{s}_R$	saturação virtual arbitrária
$\eta$	coordenada do espaço mapeado
$\eta$	fator multiplicador do tamanho característico do elemento
$\theta$	parâmetro do método de diferenças finitas
$\kappa$	tensor de permeabilidades
$\kappa_{res}$	tensor de permeabilidades do reservatório
$\kappa_{bar,per}$	tensor de permeabilidades das barreiras permeáveis
$\kappa_{bar,imp}$	tensor de permeabilidades das barreiras impermeáveis
$\kappa_1$	tensor de permeabilidades do meio 1
$\kappa_2$	tensor de permeabilidades do meio 2
$\lambda_w$	mobilidade da fase molhante
$\lambda_n$	mobilidade da fase não-molhante
$\mu_w$	viscosidade dinâmica da fase molhante
$\mu_n$	viscosidade dinâmica da fase não-molhante
$\nu$	coeficiente de Poisson

$\xi$	coordenada do espaço mapeado
$\sigma_x$	tensão normal em $x$
$\sigma_y$	tensão normal em $y$
$\boldsymbol{\sigma}_w$	tensor de tensões da fase molhante
$\boldsymbol{\sigma}_n$	tensor de tensões da fase não-molhante
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	tensor de tensões
$\bar{\boldsymbol{\sigma}'}$	tensor de tensões efetivas
$\boldsymbol{\sigma}'$	vetor de tensões efetivas
$\sigma'_x$	tensão efetiva normal em $x$
$\sigma'_y$	tensão efetiva normal em $y$
$\tau_{xy}$	tensão cisalhante no plano $xy$
$\tau_1$	parâmetro estabilizador SUPG
$\tau_2$	parâmetro estabilizador CAU
$\emptyset$	vazio
$\phi$	porosidade
$\phi_{bar}$	porosidade das barreiras
$\phi_{res}$	porosidade do reservatório
$\Omega$	domínio
$\Omega_e$	domínio de um elemento
$\Omega^1$	subdomínio 1
$\Omega^2$	subdomínio 2

## SIGLAS

ANP	Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis
ASGS	<i>Algebraic Subgrid-Scale</i>
CAU	<i>Consistent Approximate Upwind</i>
DG	Descontínuo Galerkin
EFA	Elementos finitos de acoplamento
EPD	Estado plano de deformações
LBB	Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi
MAE	<i>Mean absolute error</i>
MAPE	<i>Mean Absolute percentual error</i>
MEF	Método dos elementos finitos
MSE	<i>Mean square error</i>
MVF	Método dos volumes finitos
RMSE	<i>Root mean squared error</i>
SUPG	<i>Streamline Upwind Petrov–Galerkin</i>

## UNIDADES

Tempo	$s$
Pressão, tensões	$MPa$
Dimensões	$m$
Permeabilidade absoluta	$m^2$
Velocidades	$m/s$
Viscosidades	$Pa.s$

## 1 INTRODUÇÃO

A simulação numérica surgiu como uma ferramenta poderosa para a obtenção de modelos utilizados em diversas áreas do conhecimento. Essa ferramenta tornou possível a modelagem dos problemas de engenharia sem a necessidade da criação de modelos físicos, como os modelos em escala reduzida. A utilização dos modelos computacionais possui vantagens incalculáveis, inerentes à vantagem das possibilidades que a simulação numérica permite. Apesar dessas vantagens, um dos fatores que se deve levar em conta é que as formulações numéricas devem ser capazes de capturar os processos físicos que se desenvolvem no fenômeno que se deseja simular. Sendo assim, o desenvolvimento das formulações numéricas robustas e dos modelos realistas devem andar em paralelo.

Outra questão relevante quando se opta pela realização de simulações numéricas em detrimento a abordagens experimentais é a obtenção de uma economia considerável em termos de recursos físicos. No entanto, essa abordagem é acompanhada de um aumento significativo nos recursos matemáticos e computacionais, especialmente quando se deseja obter resultados que reproduzem comportamentos observados em aplicações práticas. Diante desse contexto, a busca por técnicas que otimizem tais recursos, como a utilização de malhas não-conformes e formulações estabilizadas de elementos finitos, se torna uma alternativa promissora.

Uma das áreas que há décadas vem sendo alvo de estudos para o desenvolvimento de ferramentas numéricas é a engenharia de reservatórios de petróleo. Essa área possui características ímpar, envolvendo diversas variáveis e condições complexas que precisam ser consideradas nos modelos para que se tenha robustez nas soluções. O processo de operação de um reservatório de petróleo pode estar regido por diversos fenômenos que podem ocorrer simultaneamente ou não, alguns exemplos estão listados na Tabela 1.

Nesse contexto, a indústria do petróleo tem um papel notável no desenvolvimento de tecnologia para o entendimento dos processos em meios porosos. Um importante marco nesse desenvolvimento foi o surgimento dos primeiros simuladores de reservatórios de petróleo na década de 50 do século XX. Eles surgiram a partir dos esforços da indústria petrolífera em unir a análise numérica e os computadores da época (Terry & Rogers, 2015). A escolha dos métodos numéricos como alvo principal ocorreu, pois, as equações envolvidas na modelagem de reservatórios são altamente complexas, dificultando a utilização de soluções analíticas (Silva, 2000).

Tabela 1. Listagem dos fenômenos que ocorrem em um reservatório de petróleo.

Categoria dos fenômenos	Exemplos
Hidráulicos	Escoamento multifásico (óleo, água, gás)
	Escoamento miscível
	Capilaridade
	Segregação gravitacional
	Escoamento compressível
Mecânicos	Acoplamento hidromecânico
	Fraturamento hidráulico
	Deformações e reativação de fraturas naturais
	Plastificação dos materiais
Térmicos	Injeção de calor (vapor, água quente)
	Variação de viscosidade com temperatura
	Transferência de calor por convecção
	Gradientes térmicos
Termodinâmicos	Mudança de fase
	Equilíbrio líquido-vapor
	Comportamento de reservatórios condensados retrógrados
Reológicos	Comportamento não-newtoniano (polímeros, espumas)
	Efeitos de taxa de cisalhamento (shear thinning, Bingham)
	Misturas viscosas complexas
Químicos	Reações fluido-rocha
	Precipitação de asfaltenos/parafinas
	Injeção de surfactantes, polímeros, alcalinos (EOR químico)
	Adsorção, troca iônica
Biológicos	Biodegradação de hidrocarbonetos
	Injeção de microrganismos
	Produção de biosurfactantes

Apesar da evidência dada à área de reservatórios de petróleo, deve ficar claro que as ferramentas dessa área podem ser aplicadas nos problemas de meios porosos em geral, que são de interesse de áreas como hidrogeologia, geotecnica, biomateriais e tecnologia dos alimentos. Além da abordagem numérica supracitada as soluções analíticas e experimentais também são metodologias importantes e amplamente utilizadas em conjunto com os experimentos numéricos.

A partir da análise da Tabela 1, verifica-se a quantidade de fenômenos que podem se desenvolver em um reservatório de petróleo, chegando à conclusão que a elaboração de análises acopladas considerando todos eles simultaneamente são impraticáveis perante o desenvolvimento científico e tecnológico atual. Outro fato que corrobora para essa dificuldade é que os reservatórios são formações naturais complexas, com diversas variáveis ambientais que

dependem da sua origem, fazendo com que suas propriedades sejam, em muitos casos, altamente anisotrópicas, heterogêneas, variáveis no tempo e dependente da escala de análise. Sendo assim, as abordagens práticas de simulação de reservatório são geralmente realizadas de forma segmentada, focando na análise isolada dos fenômenos e regiões que se desejam avaliar.

Uma das práticas adotadas na indústria, é a simulação do escoamento em reservatório de petróleo com a adoção de hipóteses simplificados, tais como a isotermia e a indeformabilidade. Apesar dessas considerações atenderem a uma gama de situações práticas, em outras ocasiões podem apresentar resultados muito aquém da resposta real, tornando a consideração do acoplamento multifísico essencial para a obtenção de resultados satisfatórios.

Outro fator essencial na elaboração dos modelos numéricos é a determinação da escala em que se deseja obter as soluções. Essa definição está intimamente ligada à qualidade do modelo, afetando questões como: influência de condições de contorno e propriedades do entorno, quantidade de graus de liberdade e homogeneização das propriedades do meio.

Diante dessa realidade, é fundamental a compreensão das diferentes escalas ligadas à engenharia de reservatórios. Uma visão geral é apresentada na Figura 3, onde os quadros de A à F mostram, respectivamente, as escalas do planeta, de campo, de reservatório, de poço, de testemunho e de grão.

Uma das técnicas utilizadas para a solução do problema de escala, que aparece corriqueiramente em simulações de reservatórios, e que será tema central do presente trabalho, é o emprego das malhas não-conformes. Essa metodologia permite a discretização de diferentes partes do domínio com malhas independentes. A Figura 4 apresenta um esquema da utilização de malhas não-conformes em diferentes níveis de discretização, abrangendo uma malha na escala do reservatório, das proximidades do poço e do poço. Como pode ser observado esse tipo de malha é construída a partir da união de malhas independentes, sem a necessidade de elementos de transição entre regiões de refinamentos distintos. Esse tipo de malha também permite que barreiras, falhas, fraturas e cavernas sejam discretizadas em escalas distintas da matriz porosa. Ou seja, a utilização das malhas não-conformes permite que o usuário tenha um modelo onde pode ser definido o nível de detalhes em locais específicos de forma independente dos demais.

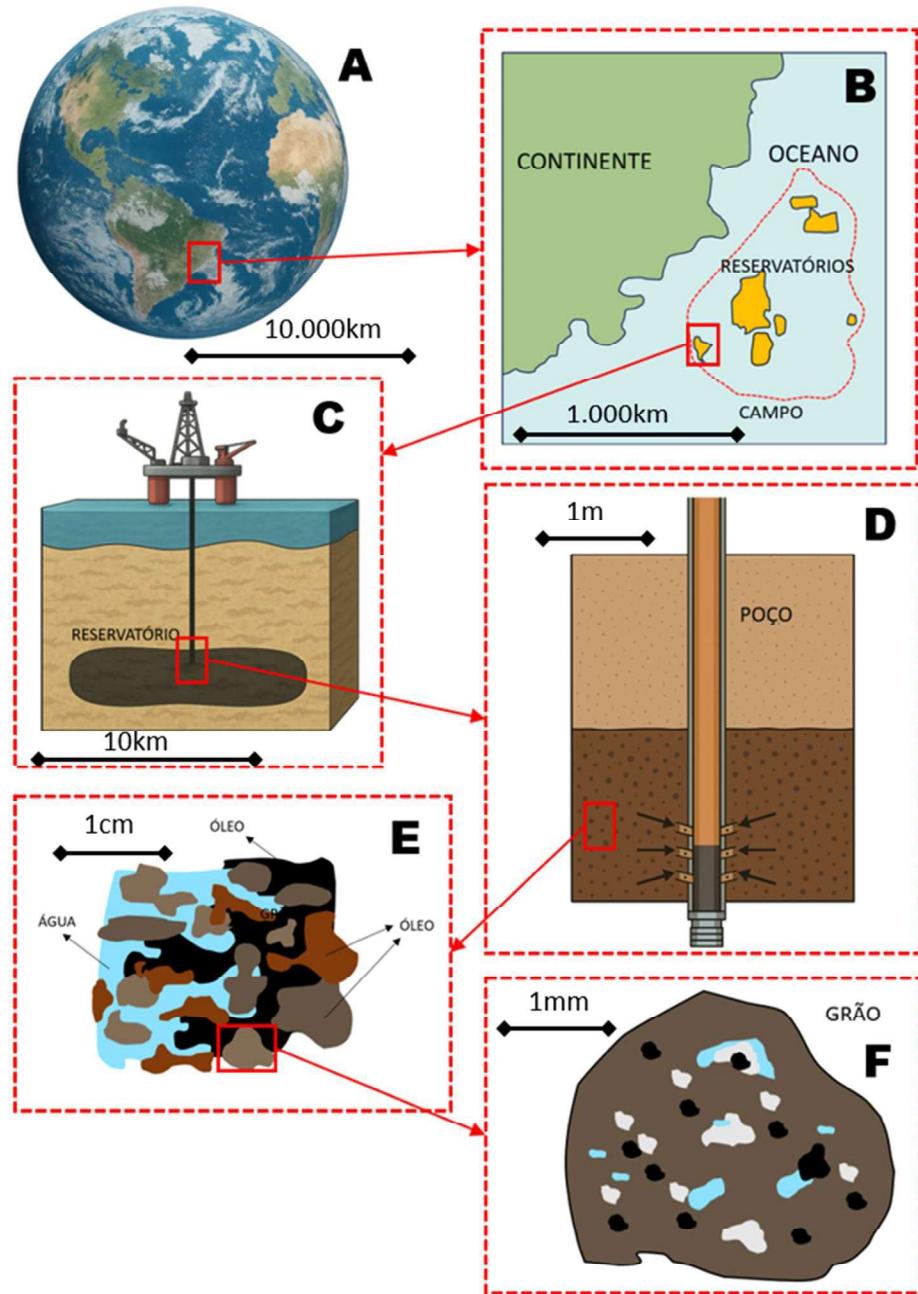


Figura 3. Diferentes escalas em problemas de meios porosos.  
Fonte: o autor (2025).

Outra aplicação para as malhas não-conformes é a possibilidade de impor acoplamentos parciais entre as partes do domínio, controlando os parâmetros que regem como as variáveis entre elas se relacionam. Além disso, uma outra vantagem desse tipo de malha é a possibilidade de acoplar modelos construídos de forma totalmente independente.

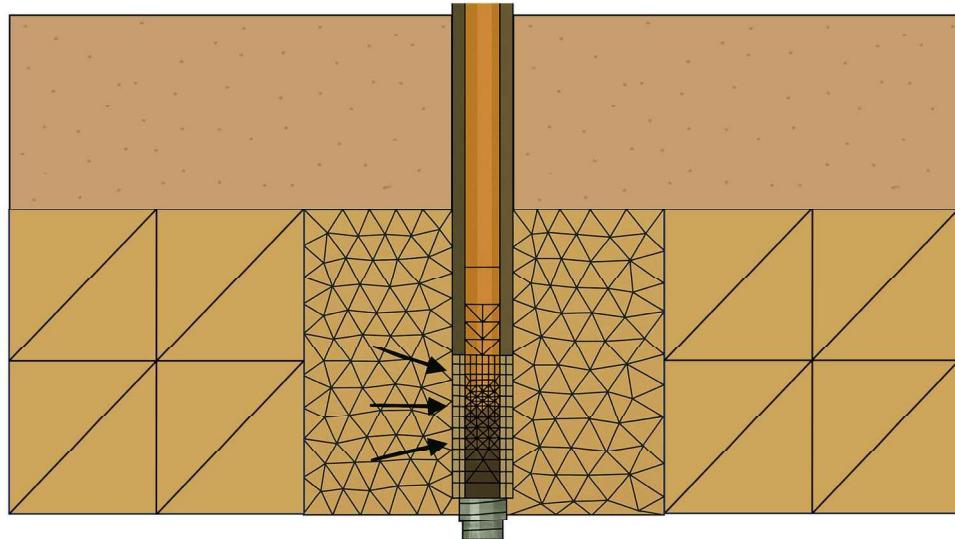


Figura 4. Esquema de malha não conforme nas proximidades de um poço.  
Fonte: o autor (2025)

Diante dos desafios apresentados, o presente trabalho é focado em desenvolver uma ferramenta robusta para a solução de dois problemas da área de engenharia de reservatórios: o acoplamento hidromecânico (Biot, 1941; Bernardi et al., 1990 e o escoamento bifásico imiscível em meios porosos (Carvalho, 2005; Langtangen, 1990). Ambos são resolvidos por propostas inéditas que combinam técnicas estabilizadas de elementos finitos (Sloan & Abbo, 1999; Mendonça, 2003) e malhas não-conformes (Bitencourt Jr et al., 2015).

## 2 JUSTIFICATIVA E MOTIVAÇÃO

A exploração do petróleo se tornou, a partir do advento da tecnologia, uma das atividades responsáveis por moldar o mundo em termos produtivo, governamental e político. A partir das descobertas de grandes reservas, espalhadas pelos mais diversos locais, o petróleo se tornou a principal matriz energética nos últimos séculos (Sousa & Gomes, 2022). O Brasil se destaca como um importante elemento desse cenário, com o petróleo e seus derivados representando 35,1% da matriz energética brasileira no ano de 2023. A cadeia de produção do petróleo brasileiro é fortemente dominada pela Petrobrás e, segundo a Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), a produção de petróleo cresceu, no Brasil, 140% nos últimos vinte anos (Morais & Oliveira, 2022).

Os desafios na exploração do petróleo estão em constante mudança, pois cada empreendimento possui características singulares em termos tecnológicos e operacionais. Na história recente da exploração brasileira, o pré-sal figurou como um importante autor no desenvolvimento científico nacional (Soares & Ferreira, 2024) e atualmente o Brasil passa por discussões acaloradas acerca dos desafios exploratórios da margem equatorial, região litorânea localizada entre o Amapá e o Rio Grande do Norte (Filho et al., 2024).

Diante da gama de desafios da indústria petrolífera, a simulação de meios porosos se destaca como um importante tema, pois é uma metodologia amplamente utilizada na tomada de decisões estratégicas de exploração. Dentro da simulação numérica de reservatórios, a consideração do acoplamento hidromecânico (Ai et al., 2012; Berger et al., 2015; Boni et al., 2020) e do escoamento bifásico (Souza et al., 2003; Langtangen, 1990) são temas centrais que possuem lacunas a serem preenchidas, como a estabilidade das formulações numéricas (Sloan & Abbo, 1999; Phillips & Wheeler, 2007; Berger et al., 2015; Appau & Dankwa, 2019) e a otimização na construção das malhas (Cheriet et al., 2007; Červený et al., 2019; Schädle et al., 2019).

Nesse contexto, esse trabalho se concentra no preenchimento dessas lacunas a partir da construção de uma ferramenta robusta de simulação de meios porosos, capaz de resolver os problemas contextualizados com técnicas numéricas avançadas.

### 3 OBJETIVOS E CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

#### 3.1 OBJETIVOS GERAIS

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma ferramenta numérica voltada à simulação em meios porosos utilizando malhas não-conformes. Na ferramenta foram implementadas formulações estabilizadas do método dos elementos finitos (MEF), aplicado tanto ao problema de acoplamento hidromecânico quanto ao de escoamento bifásico imiscível.

O problema de acoplamento hidromecânico é regido pela teoria de Biot e é de interesse de áreas como geotecnia, hidrogeologia e engenharia de reservatórios de petróleo. Essas áreas lidam frequentemente com situações em que a utilização de malhas não-conformes é adequada, isso porque esse tipo de malha permite o refinamento local em regiões cuja escala de interesse é significativamente menor que a escala global do problema.

Já o problema de escoamento bifásico imiscível em meios porosos é de interesse ímpar na indústria petrolífera, especialmente na simulação de processos de recuperação secundária. A utilização de malhas não-conformes permite refinamentos locais em regiões próximas de poços, em falhas e fraturas, por exemplo.

Outro objetivo do trabalho é a utilização de formulações que, além de robustas, sejam consolidadas na literatura como eficazes para lidar com as características intrínsecas da área de aplicação.

### 3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos do trabalho estão apresentados a seguir.

- Desenvolvimento de um código *in house* em ambiente MATLAB® para a solução de problemas de acoplamento hidromecânico e de escoamento bifásico imiscível em meios porosos utilizando malhas não-conformes;
- Utilização de uma formulação mista do método dos elementos finitos para a discretização do problema hidromecânico, empregando elementos de Taylor-Hood, de modo que a condição de Ladyzhenskaya–Babuška–Brezzi (LBB) seja satisfeita;
- Solução das equações do escoamento bifásico imiscível pelo método dos elementos finitos, utilizando as técnicas de estabilização do tipo *Streamline Upwind Petrov–Galerkin* (SUPG) e um operador de captura de descontinuidade (*Discontinuity Capturing Operator* – CAU);
- Aplicação dos elementos finitos de acoplamento (EFA) como estratégia de tratamento de malhas não-conformes nos dois problemas abordados.

### 3.3 CONTRIBUIÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

O desenvolvimento do código foi uma das principais contribuições do presente trabalho, se consolidando com uma nova ferramenta para a simulação de meios porosos aplicando formulações avançadas de elementos finitos. Além disso, o trabalho tem, como aspecto inovador, as aplicações do EFA mencionadas acima, que apresenta caráter inédito na literatura, tanto na sua aplicação com métodos elementos finitos mistos como na solução de problemas bifásicos em meios porosos.

Outro aspecto relacionado ao presente trabalho, que será abordado de forma mais sutil, é a capacidade da ferramenta de acoplamento hidromecânico resolver problemas de interação solo-estrutura. Será sugerido, como trabalhos futuros, uma abordagem mais incisiva nesse tópico.

## 4 ORGANIZAÇÃO GERAL DA TESE

O capítulo 5 apresenta a revisão bibliográfica dos assuntos abordados no presente trabalho, sendo dividido em 4 partes. Na seção 5.1 é abordado o acoplamento hidromecânico em meios porosos, na seção 5.2 o escoamento bifásico em meios porosos, na seção 5.3 os métodos estabilizados de elementos finitos e na seção 5.4 as malhas não-conformes.

O capítulo 6 e o capítulo 7 apresentam, respectivamente, a formulação dos elementos finitos de acoplamento e as funções de forma e operadores discretos. Como esses temas são comuns aos dois problemas elas foram apresentadas anteriormente em capítulos específicos.

O capítulo 8 apresenta os aspectos sobre o acoplamento hidromecânico em meios porosos com escoamento monofásico. As seções 8.1, 8.2, 8.3 e 8.4 tratam, respectivamente, da formulação matemática, formulação numérica, avaliação de erros e experimentos numéricos. A seção 8.5 se concentra nas conclusões acerca do problema hidromecânico.

O capítulo 9 apresenta os aspectos sobre o escoamento bifásico em meios porosos. As seções 9.1, 9.2 e 9.3 tratam, respectivamente, da formulação numérica, formulação numérica e os experimentos numéricos, as conclusões sobre esse tópico são apresentadas na seção 9.5.

As considerações finais e trabalhos futuros são apresentados no capítulo 10 e O anexo A trata dos aspectos relacionados ao código computacional desenvolvido.

## 5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica, apresentada nessa seção, será dividida nas 4 áreas de interesse dessa tese: o acoplamento hidromecânico em meios porosos, o escoamento bifásico em meios porosos, as formulações numéricas estabilizadas e as malhas não-conformes.

### 5.1 ACOPLAMENTO HIDROMECÂNICO EM MEIOS POROSOS

O acoplamento hidromecânico em meios porosos tem, como pioneiro, o trabalho de Terzaghi & Frohlich (1936), que apresenta uma solução para o adensamento unidimensional em solos saturados. Essa teoria foi, posteriormente, generalizada por um conjunto de trabalhos que compõem a teoria geral do adensamento, desenvolvido pelo engenheiro belga Maurice Anthony Biot (Biot, 1941; Biot, 1955; Biot, 1956; Biot & Willis, 1957; Biot, 1973). A partir dessa teoria, os trabalhos de Cryer (1963), Mandel (1953), Shiffman et al. (1969), Ai et al. (2012) e Armini et al. (2014) formularam soluções analíticas para casos específicos.

O trabalho pioneiro envolvendo a aplicação do MEF na teoria do adensamento unidimensional foi desenvolvido por Sandhu et al. (1977), que apresentou uma análise comparativa entre 4 tipos de elementos. Já se tratando da teoria geral do adensamento o primeiro grande trabalho, onde foram avaliadas 8 formulações distintas do MEF, foi desenvolvido por Zienkiewicz & Shiomi (1984). Settari & Mourits (1998) apresentaram um trabalho precursor na área de geomecânica de reservatórios, desenvolvendo uma iteração modular, parcialmente acoplada, entre um simulador de fluxo comercial, um software para o problema mecânico e um modelo de propagação de fraturas. Outras abordagens mais avançadas foram desenvolvidas a partir desses trabalhos, utilizando formulações numéricas mais robustas para capturar as características dos problemas em meios porosos.

Berger et al. (2015) formularam um modelo de elementos finitos mistos de 3 campos, utilizando a menor ordem de aproximação possível (1<sup>a</sup> ordem para pressão e 2<sup>a</sup> ordem para fluxo e deslocamento). Esse modelo foi associado a um termo de estabilização para evitar oscilações no campo de pressões.

O problema do acoplamento hidromecânico foi resolvido por Phillips & Wheeler (2007) utilizando uma formulação do MEF Bubnov-Galerkin. Uma extensão desse trabalho é apresentada por Phillips & Wheeler (2008) onde o campo dos deslocamentos é aproximado pelo espaço de Hilbert descontínuo por partes, conhecido como descontínuo Galerkin (DG). Uma análise comparativa entre as duas propostas apresentou taxas de convergência iguais entre elas, porém

a formulação descontínua apresentou uma melhor capacidade em lidar com malhas não estruturadas, já que as suas funções de aproximação são descontínuas elemento-a-elemento. Além disso, a formulação descontínua eliminou o problema de “*locking*” (travamento) que causa oscilações não físicas no campo de pressões em formulações contínuas. Esse problema também é discutido por Oyarzúa & Ruiz-Baier (2016). Outras propostas para a solução do acoplamento hidromecânico pelo MEF mistos são apresentadas por Phillips (2005), Sloan & Abbo (1999.a) e Sloan & Abbo (1999.b).

Uma formulação de quatro campos (tensão total, fluxo, deslocamento e pressão) foi proposta por Yi & Bean (2017), nessa proposta realizou-se o acoplamento de duas formulações mistas independentes, uma para o problema mecânico e outra para o problema hidráulico. Xiaobing et al. (2018) propuseram uma formulação em que as equações hidráulicas e mecânicas foram desacopladas em cada passo de tempo, gerando dois problemas distintos a serem resolvidos: o problema de Stokes (mecânico) e um campo de pseudo pressões (hidráulico), discretizados pelo MEF mistos com elementos de Taylor-Hood e MEF P1-conformes. Um esquema híbrido do MEF mistos estabilizados foi proposto por Niu et al. (2021), solucionando problemas de convergência que ocorrem em função da relação entre a permeabilidade e o tamanho dos elementos em formulações convencionais.

Além da vasta gama de trabalhos utilizando o MEF, outros métodos também foram aplicados na solução do acoplamento hidromecânico, a exemplo do método dos elementos de contorno utilizado por Cheng & Predeleanu (1987) e o método dos volumes finitos baseados em elementos (Honório et al., 2018)

As aplicações do acoplamento hidromecânico estão presentes nas mais diversas áreas do conhecimento, tais como a escavação de túneis (Song et al., 2021; Zhou et al., 2018), subsidência (Tzampoglou & Loupasakis, 2019; Tessitore et al., 2016; Pham et al., 2019), medicina (Wei et al., 2014), hidrogeologia (Bonì et al., 2020; Woodman et al., 2019; Gambolati & Teatini, 2015), engenharia de barragens (Yin et al., 2020; Bretas et al., 2013; Wang et al., 2015; Hu et al., 2014), produção de areia (Fetrati & Pak, 2020; Li et al., 2018), armazenamento geológico de CO<sub>2</sub> (Bao et al., 2014; Lucier & Zoback, 2008), recuperação de metano por ataque ácido (Fan, et al., 2019) e fraturamento hidráulico (Chen & Wang, 2017).

Uma técnica recente aplicada à problemas hidromecânicos com grandes deformações foi proposta por Karimi et al. (2022), onde os princípios variacionais são aplicados diretamente nas equações de energia, diferente dos métodos clássicos que utilizando o princípio variacional nas equações de conservação. Uma formulação estabilizada do método do ponto material foi

proposta por Tang et al. (2025), onde as estabilizações são obtidas a partir de um método de suavização de deformações combinado ao princípio variacional de múltiplos campos.

Um enriquecimento das funções de forma do MEF a partir das funções face bubble foi proposta por Niu et al. (2021) para a solução de problemas hidromecânicos. Esse enriquecimento minimizou a instabilidade numérica presente no MEF mistos híbridos. Uma abordagem hierárquica para o mesmo problema foi apresentada por Yan et al. (2021).

## 5.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIOS POROSOS

Um dos processos que envolve o escoamento bifásico em reservatórios de petróleo é a injeção de água ou gás com a finalidade de deslocar o fluido a ser recuperado. Durante a realização desse processo espera-se que os fluidos permaneçam imiscíveis, aumentando a eficiência da recuperação de óleo. Diante desse contexto e de várias outras aplicações do escoamento bifásico, a literatura aborda diversas formulações para a solução de problemas de escoamentos multifásicos em meios porosos que serão abordadas a seguir:

O trabalho de Muskat & Wyckoff (1946) é considerado o marco fundador da literatura dos escoamentos em meios porosos e engenharia de reservatórios de petróleo. Nele foi desenvolvida a formulação para escoamentos multifásicos, além da definição dos conceitos de permeabilidade relativa e funções de mobilidade.

A solução para o problema de escoamento bifásico imiscível óleo-água unidimensional, em meio homogêneo, desconsiderando os efeitos gravitacionais e capilares foi apresentada de forma pioneira no trabalho de Buckley & Leverett (1942), que se tornou um clássico da literatura. O impacto do trabalho foi tão significativo que o problema passou a ser conhecido pelo nome dos seus autores. Apesar do trabalho de Muskat & Wyckoff (1946) não apresentar a sua solução ele contribuiu fortemente com suas bases matemáticas.

A introdução dos efeitos capilares no problema de Buckley-Leverett foi realizada por Sunada (1990), que também apresentou uma solução analítica para os escoamentos bifásicos radiais.

Prescho & Galvis (2016) abordaram a forma de avanço da frente de saturação em função das propriedades do escoamento. Esse trabalho possui caráter numérico e experimental e utilizou o conceito de diagramas de fases para definir a forma da frente avaliada, que é função do número capilar (razão entre forças viscosas e forças capilares) e da razão entre as viscosidades das fases.

Coutinho et al. (2003) apontaram que popularmente são utilizados métodos híbridos para o tratamento das equações de fluxo em meios porosos, realizando a combinação de métodos como o MEF e o método dos volumes finitos (MVF).

A solução do escoamento bifásico a partir de uma formulação DG utilizando malhas adaptativas foi proposta por Dedner et al. (2019). Langtangen (1990) realizou, também para esse problema, uma análise de convergência de um esquema do MEF baseados em volumes de controle. Uma comparação entre os esquemas estabilizados SUPG e *Algebraic Subgrid-Scale* (ASGS) em escoamentos bifásicos e miscíveis em meios porosos foi realizada por Silva (2000), a formulação SUPG também foi abordada por Langtangen (1990) e Souza et al. (2003) em um contexto diferente.

Silva (2000) estudou a eficiência do método multigrid para a solução de escoamentos bifásicos em meios poroso utilizando a formulação de Galerkin para a equação de pressão e a formulação de Petrov-Galerkin com operador de captura de descontinuidade para a equação de saturação.

Fučík et al. (2019) propuseram um esquema multidimensional híbrido-misto do MEF para o escoamento composicional bifásico em meios porosos heterogêneos. No trabalho foram utilizadas abordagens de programação paralelizada e sequencial utilizando GPU.

Kovářík et al. (2016) aplicaram um método sem malha baseado em Petrov-Galerkin para a solução do escoamento bifásico em meios porosos, que é não-linear e requer malhas refinadas e um alto custo computacional, mesmo em exemplos de validação. Esse método também foi utilizado por Durlofsky (1993).

O problema de escoamento bifásico foi resolvido por Kou & Sun (2014) com uma formulação DG. Um esquema *upwind* dependente da velocidade aplicado ao método dos elementos finitos com volumes de controle nodal foi proposto por Adb & Abushaikha (2020).

Outras abordagens alternativas para a melhoria na eficiência das formulações são as técnicas de linearização, como, por exemplo, os esquemas de diferenças finitas propostos por Abd et al. (2024).

Uma análise do desenvolvimento histórico de técnicas para simulação de fluxo bifásico foi realizada por Liu et al. (2024). Esse trabalho apresenta os avanços de técnicas como o método dos elementos de contorno, método dos elementos finitos estendidos e método do campo de fases. O trabalho também aborda as recentes técnicas de aprendizado de máquina que vem sendo alvo de aplicações em diversas áreas do conhecimento.

### 5.3 MÉTODOS ESTABILIZADOS DE ELEMENTOS FINITOS

O método padrão de elementos finitos, dado pela formulação clássica de Galerkin, funciona bem em problemas difusivos, porém, quando há a predominância da advecção, tal como no escoamento multifásico em meios porosos, no transporte de contaminantes, na transferência de calor e na solução das equações de Navier-Stokes, esse método apresenta resultados com oscilações espúrias e com taxas de convergência lentas.

Diante desse contexto, as formulações estabilizadas de elementos finitos surgiram como solução para tais dificuldades, adicionando termos nas equações discretas, que podem ser interpretados como uma mudança na forma das funções de interpolação. Esses termos adicionais são determinados em função de condições físicas da solução.

Uma das técnicas utilizadas para a estabilização é a formulação SUPG (Silva, 2000; Kovářík et al., 2016; Durlofsky, 1993), amplamente utilizada no transporte convectivo e que estabiliza a solução na direção do escoamento. O termo estabilizador dessa formulação é proporcional ao resíduo da equação na forma fraca.

Outra técnica de estabilização é o CAU (Coutinho et al., 2003), que penaliza as funções de forma com uma difusão numérica proporcional à diferença entre os gradientes da solução e da função de forma. Essa técnica age de maneira localizada em regiões onde o gradiente apresenta variações bruscas. O método DG (Kou & Shuyu, 2014) também é uma alternativa estabilizada do método de Galerkin clássico.

O método dos elementos finitos mistos (Sloan & Abbo, 1999.a; Sloan & Abbo, 1999.b; Phillips, 2005; Phillips & Wheeler, 2007; Phillips & Wheeler, 2008; Oyarzúa & Ruiz-Baier, 2016; Yi & Bean, 2017; Xiaobing, et al., 2018; Niu, et al., 2021) é utilizado em situações que duas ou mais variáveis precisam ser calculadas simultaneamente, de forma acoplada, preservando a conservação local. Geralmente esse método trata a variável primária e o seu fluxo, que são aproximadas por funções de forma diferentes. Essa situação ocorre, por exemplo, na teoria geral do adensamento.

O trabalho de Raviart & Thomas (2006) é um clássico na literatura dos elementos finitos mistos, eles introduziram os elementos de Raviart-Thomas, que são compostos por aproximações de ordens distintas entre a variável analisada e seu fluxo. Apesar de outros trabalhos na década de 70 apresentarem os conceitos dos elementos finitos misto, esse trabalho é considerado o consolidador do método.

Outros métodos estabilizados utilizados na simulação de problemas em meios porosos são: método dos elementos finitos baseado em volumes de controle (Langtangen, 1990) esquema

híbrido misto do método dos elementos finitos (Fučík et al., 2019) e método sem malha baseado em Petrov Galerkin (Kovářík et al., 2016).

#### 5.4 MALHAS NÃO-CONFORMES

As malhas não-conformes surgiram como alternativas para situações em que a discretização do problema a partir de uma malha conforme se mostra restrito, ou quando se deseja otimizar o número e graus de liberdade do modelo. Uma dessas situações é quando as características da simulação podem impor a necessidade de refinamentos locais. Segundo Bitencourt Jr. et al. (2015), quando o refinamento ocorre em malhas conformes, há a possibilidade do surgimento de elementos distorcidos que comprometem a solução. Sendo assim, a utilização das malhas não-conformes surge como uma solução alternativa para essa problemática.

O método de Mortar (Bernardi et al., 1990) é um método clássico para acoplamento de malhas, que utiliza multiplicadores de Lagrange para a construção das equações de compatibilidade. Para que essas equações sejam formuladas é necessária a criação de superfícies intermediárias que satisfaçam a condição de inf-sup (ponto de sela), sendo essa escolha um fator determinante na solução. A criação das superfícies intermediárias implica no aumento dos graus de liberdade do problema, aumentando assim o custo computacional, conforme discutido por Zhou et al. (2020), que apresenta uma proposta para a minimização desse custo.

O método de Mortar é amplamente utilizado em problemas de diversas naturezas tais como o problema de contato (Belgacem et al., 1998; Temizer, 2012; Farah et al., 2017; Světlík et al., 2023), eletromagnetismo (Cheriet et al., 2007), geomecânica (Francisco & Carol, 2020) e fluxo em meios porosos (Schädle, et al., 2019).

A utilização do método de Mortar com uma formulação estabilizada do MEF foi proposta por Kim et al. (2016). Laughton et al. (2021) realizaram um estudo comparativo da performance numérica do método de Mortar e do método ponto-a-ponto em interfaces não-conformes aplicados à uma formulação descontínuo Galerkin. O método ponto-a-ponto possui conceitos e implementação mais simples que o método de Mortar, pois a compatibilização é realizada interpolando diretamente os valores das variáveis entre as malhas.

Outros métodos para o tratamento de malhas não-conformes são o método das células (Wilson et al., 2021; Surendran et al., 2021) e o método dos elementos virtuais (Xin et al., 2017). Uma aplicação interessante no contexto das malhas não-conformes é o seu refinamento adaptativo ao longo da simulação (Červený et al., 2019).

A metodologia do EFA foi proposta por Bitencourt Jr. et al. (2015) onde a construção das equações de compatibilidade é realizada utilizando os graus de liberdade das malhas a serem acopladas, sem a necessidade da criação de graus de liberdade adicionais. A validação da técnica foi realizada para acoplamentos rígidos e não rígidos em problemas mecânicos utilizando diversos tipos de malhas.

Outra vantagem do EFA é a possibilidade de simular materiais heterogêneos com a sobreposição das malhas que definem cada um dos materiais constituintes, uma dessas aplicações é apresentada por Bitencourt Jr. et al. (2018) para a modelagem de peças de concreto armado. Essa abordagem considerou as armaduras como elementos de uma malha reticulada, inserida em elementos planos para o caso bidimensional e volumétricos para o caso tridimensional, que representam o concreto, para os respectivos casos.

Outros exemplos de aplicações do EFA foram propostos por Manzoli et al. (2021), Cleto et al. (2022) e Damirchi et al. (2022) para a modelagem do fluxo em meios porosos fraturados. Eles consideraram as fraturas como elementos lineares sobrepostas à malha da matriz porosa. Nesses trabalhos também foram avaliadas as influências dos parâmetros de penalidade na continuidade do campo de pressões entre o meio poroso e as fraturas.

O EFA foi utilizado por Rodrigues et al. (2017) para problemas de fissuração em peças de concreto utilizando uma proposta multiescala simultânea, onde o concreto foi modelado em duas escalas distintas, uma para o agregado e outra para a matriz, apresentando resultados animadores.

## 6 ELEMENTOS FINITOS DE ACOPLAMENTO

A presente seção apresenta o método dos EFA, propostos por Bitencourt Jr. et al. (2015). O EFA é utilizado para o tratamento das malhas não-conformes e é utilizado tanto no problema hidromecânico quanto no problema de escoamento bifásico.

Esse método possui características que o torna bastante interessante quando confrontado com outros métodos da literatura. Essas características estão citadas a seguir.

- As equações de compatibilidade entre as variáveis das malhas são construídas sem a necessidade da criação de graus de liberdade adicionais;
- O método permite que sejam modelados acoplamentos semirrígidos com facilidade;
- O método permite o acoplamento de malhas com elementos de qualquer dimensão e qualquer tipo;
- A formulação permite o acoplamento de malhas sobrepostas e adjacentes;
- Não há a necessidade da criação de uma região intermediária entre as malhas a serem acopladas para a imposição das condições de compatibilidade.

A compatibilidade entre as malhas será imposta a partir da adição de um termo de acoplamento nas matrizes do sistema discretizado. Esse termo impõe uma rigidez relativa entre as variáveis da malha grossa e da malha fina. A determinação desses termos será apresentada a seguir.

A Figura 5 ilustra a subdivisão do domínio avaliado nos subdomínios  $\Omega^1$  e  $\Omega^2$  onde o subdomínio  $\Omega^1$  é discretizado, na interface, por uma malha menos refinada que o subdomínio  $\Omega^2$ . Para efeitos práticos a malha do subdomínio  $\Omega^1$  será denominada malha grossa e a malha do subdomínio  $\Omega^2$  será denominada malha fina. Os contornos dos subdomínios são dados por  $\Gamma^1$  e  $\Gamma^2$  e a interface entre eles é definida como  $\Gamma^{12} = \Gamma^1 \cap \Gamma^2$ . Nessa interface os nós não precisam ser compartilhados, como pode ser observado na Figura 5.

As equações de acoplamento dos subdomínios citados serão construídas utilizando os elementos finitos de acoplamento, ilustrado na Figura 5. Para cada nó de acoplamento  $c_n$  será criado um elemento finito de acoplamento ( $EFA_i$ ), constituído por este nó mais os nós do elemento correspondente da malha grossa.

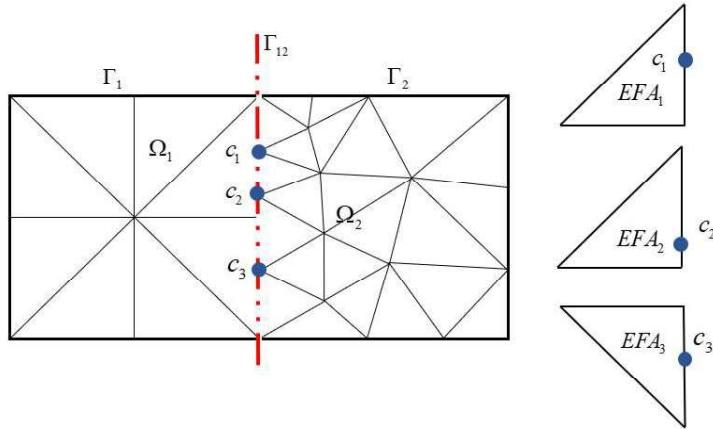


Figura 5. Esquema de acoplamento de malhas não-conforme com destaque para os elementos finitos de acoplamento.

Fonte: O autor (2025).

O estabelecimento do acoplamento da variável analisada (pressão, saturação ou deslocamento) é feito anulando a diferença do seu valor no nó de acoplamento  $c_n$  e no ponto material de coordenadas  $\mathbf{x}_D$ . Essa diferença é chamada de deslocamento relativo ( $\mathbf{u}_R$ ) para o problema mecânico e para o problema hidráulico pressão relativa ( $\mathbf{p}_R$ ) e saturação relativa ( $\mathbf{s}_R$ ).

Os valores avaliados em  $\mathbf{x}_D$  são determinados pela interpolação das funções de forma dos elementos ( $\mathbf{N}_{u,i}$  para os deslocamentos e  $N_{p,i}$  para as pressões e saturações) aplicada aos vetores das variáveis nodais ( $\mathbf{u}_i, p_i, s_i$ ). As variáveis avaliadas no nó de acoplamento são identificadas pelo subíndice  $cn$ .

As condições de compatibilidade descritas estão apresentadas nas equações 1, 2 e 3 para os deslocamentos, pressões e saturações, respectivamente.

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u}_{cn} - \sum_{i=1}^{nnu} \mathbf{N}_{u,i}(\mathbf{x}_D) \mathbf{u}_i = \mathbf{B}_u^C \mathbf{u}^C \quad (1)$$

$$\mathbf{p}_R = p_{cn} - \sum_{i=1}^{nnp} N_{p,i}(\mathbf{x}_D) p_i = \mathbf{B}_p^C \mathbf{p}^C \quad (2)$$

$$\mathbf{s}_R = s_{cn} - \sum_{i=1}^{nnp} N_{p,i}(\mathbf{x}_D) s_i = \mathbf{B}_p^C \mathbf{s}^C \quad (3)$$

sendo:

$$\mathbf{B}_u^C = [-\mathbf{N}_{u,1}(\mathbf{x}_D) \quad \dots \quad -\mathbf{N}_{u,nnu}(\mathbf{x}_D) \quad \mathbf{I}] \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^C = [\mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{u}_{nnu} \quad \mathbf{u}_{cn}] \quad (5)$$

$$\mathbf{B}_p^C = [-N_{p,1}(\mathbf{x}_D) \quad \dots \quad -N_{p,nnp}(\mathbf{x}_D) \quad 1] \quad (6)$$

$$\mathbf{p}^C = [p_1 \quad \dots \quad p_{nnp} \quad p_{cn}] \quad (7)$$

$$\mathbf{s}^C = [s_1 \quad \dots \quad s_{nnp} \quad s_{cn}] \quad (8)$$

Os vetores  $\mathbf{u}^C$ ,  $\mathbf{p}^C$  e  $\mathbf{s}^C$  armazenam os deslocamentos, pressões e saturações nos elementos de acoplamento. Os valores de  $nnu$  e  $nnp$  são, respectivamente, o número de nós do elemento mecânico e do elemento hidráulico, e a matriz  $\mathbf{I}$  é a identidade. Os vetores de funções de forma dos deslocamentos são dados por  $\mathbf{N}_{u,i} = N_{u,i}\mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{u}_i = [u_i \quad v_i]$  corresponde ao vetor de deslocamentos nodais.

As formas fracas das equações de compatibilidade para os problemas mecânicos, de fluxo e de saturação são obtidos de forma análoga ao realizado por Bitencourt Jr. et al. (2015), e dados por:

$$\delta W_{EFA}^{int} = \delta \mathbf{u}_R^T \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) \quad (9)$$

$$\delta Q_{EFA}^{int} = \delta \mathbf{p}_R^T \mathbf{q}_s(\mathbf{p}_R) \quad (10)$$

$$\delta F_{EFA}^{int} = \delta \mathbf{s}_R^T \mathbf{f}_s(\mathbf{s}_R) \quad (11)$$

onde  $\delta \mathbf{u}_R^T$  é um deslocamento virtual arbitrário,  $\delta \mathbf{p}_R^T$  é uma pressão virtual arbitraria e  $\delta \mathbf{s}_R^T$  uma saturação virtual arbitraria e seus conjugados são  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_R)$ ,  $\mathbf{q}_s(\mathbf{p}_R)$  e  $\mathbf{f}_s(\mathbf{s}_R)$ , respectivamente.

As forças internas  $\mathbf{f}^{int}$ , os fluxos hidráulicos internos  $\mathbf{q}^{int}$  e os fluxos de saturação internos  $\mathbf{f}_s^{int}$  são obtidos a partir da interpolação das variáveis conjugadas utilizando as matrizes com as funções de forma  $\mathbf{B}_u^C$  e  $\mathbf{B}_p^C$ .

$$\mathbf{f}^{int} = \mathbf{B}_u^C \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) \quad (12)$$

$$\mathbf{q}^{int} = \mathbf{B}_p^C \mathbf{q}_s(\mathbf{p}_R) \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_s^{int} = \mathbf{B}_p^C \mathbf{f}_s(\mathbf{s}_R) \quad (14)$$

As matrizes tangentes de cada problemas são dadas por:

$$\mathbf{k}^C = \frac{\partial \mathbf{f}^{int}}{\partial \mathbf{u}^C} = \mathbf{B}_u^C \mathbf{C}_u \mathbf{B}_u^C \quad (15)$$

$$\mathbf{h}^C = \frac{\partial \mathbf{q}^{int}}{\partial \mathbf{p}^C} = \mathbf{B}_p^{C^T} C_p \mathbf{B}_p^C \quad (16)$$

$$\mathbf{t}^C = \frac{\partial \mathbf{f}_s^{int^{int}}}{\partial \mathbf{s}^C} = \mathbf{B}_p^{C^T} C_s \mathbf{B}_p^C \quad (17)$$

onde  $\mathbf{C}_u$ ,  $C_p$ , e  $C_s$  são, respectivamente, as variáveis constitutivas de cada problema. Um modelo de compatibilidade pode ser utilizado de acordo com as equações abaixo.

$$\mathbf{f} = \mathbf{C}_u \mathbf{u}_D = \mathbf{C}_u \mathbf{B}_u^C \mathbf{u}^C \quad (18)$$

$$\mathbf{q} = C_p \mathbf{p}_D = C_p \mathbf{B}_p^C \mathbf{p}^C \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_s = C_s \mathbf{s}_D = C_s \mathbf{B}_p^C \mathbf{s}^C \quad (20)$$

onde a matriz  $\mathbf{C}_u$  é formada pelos parâmetros de penalidade mecânicos de acordo com a equação 21, já  $C_p$  e  $C_s$  são valores escalares que controlam o grau de acoplamento entre as pressões e saturações das malhas acopladas.

$$\mathbf{C}_u = \begin{bmatrix} C_{u,x} & 0 \\ 0 & C_{u,y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Para a consideração do acoplamento rígido os valores de  $C_{u,x}$  e  $C_{u,y}$  deverão ser números grandes, semelhante às técnicas numéricas de imposição de condições de indeslocabilidade em problemas estruturas. De forma análoga, para que haja o acoplamento total dos fluxos entre os subdomínios o mesmo critério é imposto aos parâmetros  $C_p$  e  $C_s$ . Então, a escolha desse número é função da ordem de grandeza dos elementos da matriz do problema, que é função das propriedades dos materiais envolvidos e das condições de contorno. Então, é natural que problemas distintos tenham diferentes valores dos parâmetros de acoplamento pela necessidade da sua calibração.

Caso haja o interesse de que não haja acoplamento ou que esse acoplamento seja parcial, como apresentado por Bitencourt Jr. et al. (2015), pode-se aplicar um valor intermediário entre os extremos ou até mesmo uma lei constitutiva entre os domínios.

## 7 FUNÇÕES DE FORMA E OPERADORES DISCRETOS

Essa seção apresenta o desenvolvimento das funções de forma e dos operadores discretos utilizados nas formulações de elementos finitos do presente trabalho.

### 7.1 ELEMENTOS TRIANGULARES LINEARES

A equação 22 apresenta a expressão para a interpolação da pressão ( $p$ ) a partir da função de forma hidráulica ( $\mathbf{N}_p$ ) e do vetor de pressões nodais ( $\mathbf{p}$ ). As pressões, no contexto do escoamento bifásico, recebem o subscrito  $n$ , referente à fase não-molhante e as saturações o subscrito  $w$  referente à fase molhante.

$$p = \mathbf{N}_p \mathbf{p}, \text{ onde } \mathbf{N}_p = [N_{p,1} \quad N_{p,2} \quad N_{p,3}] \text{ e } \mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T \quad (22)$$

onde  $N_{pi}$  e  $p_i$  são, respectivamente, a função de forma e a pressão no nó  $i$ .

A mesma função de forma também é utilizada para a interpolação das saturações da fase molhante, da sua derivada temporal e da função de forma  $w$ , apresentadas, respectivamente, nas equações 23.a, 23.b e 23.c.

$$s_w = \mathbf{N}_p \mathbf{s} \text{ e } \mathbf{s} = [s_1 \quad s_2 \quad s_3]^T \quad (23.a)$$

$$\frac{\partial s_w}{\partial t} = \mathbf{N}_p \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \quad (23.b)$$

$$w = \mathbf{N}_p \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T \quad (23.c)$$

Os termos  $s_i$ ,  $a_i$  e  $c_i$  são, respectivamente, a saturação, a derivada temporal da saturação e a função de forma avaliada no nó  $i$ .

Para a definição dos operadores discretos será utilizado o processo de mapeamento do elemento. Esse processo está ilustrado na Figura 6 e consiste em escrever as coordenadas no espaço mapeado ( $\xi, \eta$ ), que possui coordenadas conhecidas, em função das coordenadas do espaço físico ( $x, y$ ). Os valores das variáveis mapeadas variam da seguinte forma:  $0 \leq \xi \leq 1$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ .

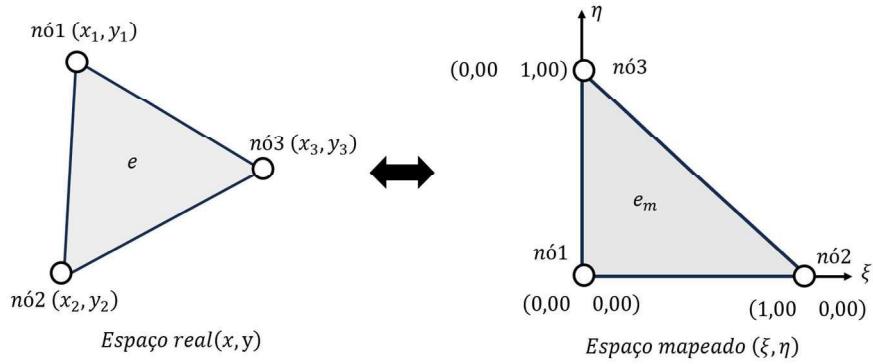


Figura 6. Mapeamento de elemento triangular linear.  
 Fonte: o autor (2025)

As relações entre as coordenadas do espaço físico e mapeado, então, podem ser escritas como:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_{p,i}(\xi, \eta) x_i \quad (24.a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_{p,i}(\xi, \eta) y_i \quad (24.b)$$

onde as funções de forma no espaço mapeado são dadas por:

$$N_{p,1}(\xi, \eta) = \xi \quad (25.a)$$

$$N_{p,2}(\xi, \eta) = \eta \quad (25.b)$$

$$N_{p,3}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta \quad (25.c)$$

A partir das definições apresentadas, pode-se obter as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{p,i}(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i \quad (26.a)$$

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{p,i}(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i \quad (26.b)$$

$$\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{p,i}(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \quad (26.c)$$

$$\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_{p,i}(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \quad (26.d)$$

Define-se **MN** como:

$$\mathbf{MN} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{p,1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{p,2}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{p,3}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_{p,1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{p,2}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{p,3}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (27)$$

e **CC** como a matriz que contém as coordenadas elementares, dada por:

$$\mathbf{CC} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^T \quad (28)$$

A partir da equação 27 e da equação 28 é possível obter a matriz jacobiana, dada por:

$$\mathbf{J} = \mathbf{MN} \cdot \mathbf{CC} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Agora é possível definir a matriz **B**, associada ao operador gradiente no espaço físico como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{p,1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{p,2}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{p,3}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_{p,1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{p,2}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{p,3}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

onde:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (31)$$

e

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{p,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{p,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{p,3}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{p,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{p,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{p,3}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Aplicando as relações acima ao triângulo linear, pode-se obter a matriz  $\mathbf{B}$  de forma explícita:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (33)$$

onde  $x_{ij} = x_i - x_j$  e  $y_{ij} = y_i - y_j$ .

Essa matriz pode ser escrita em termos de suas coordenadas como.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_x \\ \mathbf{B}_y \end{bmatrix} \quad (34)$$

onde

$$\mathbf{B}_x = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{B}_y = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (36)$$

De posse das derivadas parciais das funções de forma é possível escrever o operador divergente como:

$$\mathbf{D}_{div} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{p,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{p,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{p,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{p,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{p,3}}{\partial x} & \frac{\partial N_{p,3}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (37)$$

escrito explicitamente como:

$$\mathbf{D}_{div} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} & y_{31} & x_{13} & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (38)$$

## 7.2 ELEMENTOS TRIANGULARES QUADRÁTICOS

O elemento triangular quadrático está apresentado na Figura 7, contendo 6 nós onde serão definidos, em cada nó, um vetor bidimensional (deslocamento). A equação 39 apresenta a expressão de interpolação do deslocamento ( $\mathbf{d}$ ) no elemento a partir da função de forma mecânica ( $\mathbf{N}_u$ ) e do vetor de deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ).

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}_u \mathbf{u} \quad (39)$$

onde  $\mathbf{d} = [u \ v]^T$  é o vetor de deslocamentos e a matriz  $\mathbf{N}_u$  engloba as funções de forma do elemento como:

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_{u,1} & 0 & N_{u,2} & 0 & N_{u,3} & 0 & N_{u,4} & 0 & N_{u,5} & 0 & N_{u,6} & 0 \\ 0 & N_{v,1} & 0 & N_{v,2} & 0 & N_{v,3} & 0 & N_{v,4} & 0 & N_{v,5} & 0 & N_{v,6} \end{bmatrix} \quad (40)$$

O vetor  $\mathbf{u}$  é dado por:

$$\mathbf{u} = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6]^T \quad (41)$$

onde  $u_i$  e  $v_i$  são, respectivamente, os deslocamentos horizontais e verticais do nó  $i$ .

Para a definição das funções de forma e de suas derivadas é necessária a realização do mapeamento dos elementos, como esquematizado na Figura 7. De forma análoga aos elementos lineares, o mapeamento consiste em escrever as coordenadas no espaço mapeado  $(\xi, \eta)$  em função do espaço físico  $(x, y)$ . As coordenadas mapeadas variam de acordo com:  $0 \leq \xi \leq 1$  e  $0 \leq \eta \leq 1$ . Para que as expressões sejam obtidas de forma mais elegante, define-se a variável  $\alpha = 1 - \xi - \eta$ .

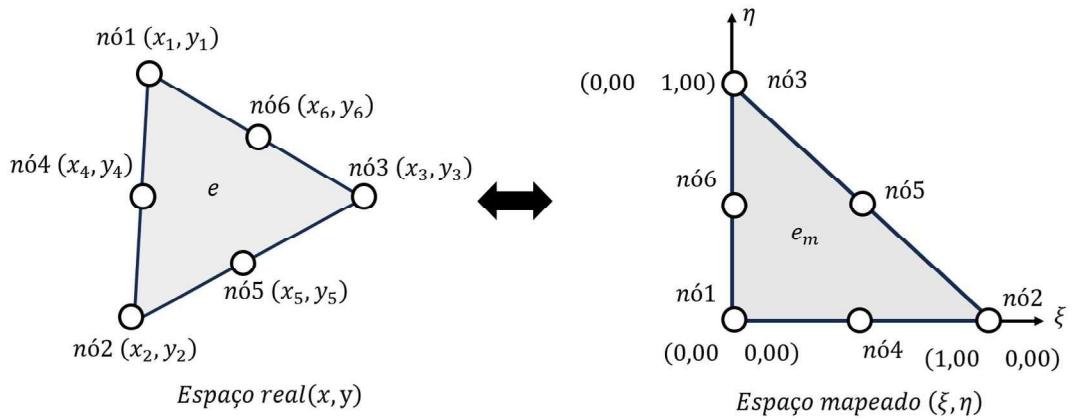


Figura 7. Mapeamento de elemento triangular quadrático.

Fonte: o autor (2025).

As funções de forma no espaço mapeado são dadas por:

$$N_{u,1}(\xi, \eta) = -\alpha(1 - 2\alpha) \quad (42.a)$$

$$N_{u,2}(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi) \quad (42.b)$$

$$N_{u,3}(\xi, \eta) = -\eta(1 - 2\eta) \quad (42.c)$$

$$N_{u,4}(\xi, \eta) = 4\xi\alpha \quad (42.d)$$

$$N_{u,5}(\xi, \eta) = 4\xi\eta \quad (42.e)$$

$$N_{u,6}(\xi, \eta) = 4\eta\alpha \quad (42.f)$$

As relações entre as coordenadas mapeadas e as coordenadas físicas são dadas por:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 N_{u,i}(\xi, \eta) x_i \quad (43.a)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^6 N_{u,i}(\xi, \eta) y_i \quad (43.b)$$

A partir desse mapeamento, obtém-se as derivadas parciais como:

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_{u,i}(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i \quad (44.a)$$

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_{u,i}(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i \quad (44.b)$$

$$\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_{u,i}(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \quad (44.c)$$

$$\frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial N_{u,i}(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \quad (44.d)$$

Define-se a matriz **MN**, que contém as derivadas das funções de forma em relação as coordenadas do espaço mapeado como:

$$\mathbf{MN} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u,1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,2}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,3}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,4}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,5}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,6}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_{u,1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,2}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,3}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,4}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,5}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,6}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Define-se a matriz **CC** contém as coordenadas dos nós do elemento como:

$$\mathbf{CC} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{bmatrix}^T \quad (46)$$

De posse das duas matrizes definidas na equação 45 e na equação 46, é possível obter a matriz jacobiana pela equação 47.

$$\mathbf{J} = \mathbf{MN} \cdot \mathbf{CC} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Define-se, então, a matriz **B**, que é composta pelas derivadas das funções de forma como:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,3}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,4}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,5}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,6}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{u,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,4}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,5}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,6}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Essa matriz pode ser obtida pela seguinte operação:

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u,1}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,2}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,3}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,4}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,5}(\xi, \eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_{u,6}(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_{u,1}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,2}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,3}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,4}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,5}(\xi, \eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_{u,6}(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (49)$$

sendo:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (50)$$

A partir da obtenção da matriz  $\mathbf{B}$  é possível definir a matriz  $\mathbf{B}_u$ , utilizada para escrever a relação entre as deformações e deslocamentos do problema mecânico como:

$$\mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u,1}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{u,2}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{u,3}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{u,4}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{u,5}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_{u,6}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{u,1}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{u,2}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{u,3}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{u,4}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{u,5}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_{u,6}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{u,1}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,1}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,2}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,2}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,3}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,3}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,4}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,4}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,5}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,5}}{\partial x} & \frac{\partial N_{u,6}}{\partial y} & \frac{\partial N_{u,6}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (51)$$

## 8 ACOPLAGEM HIDROMECÂNICO EM MEIOS POROSOS COM ESCOAMENTO MONOFÁSICO

A presente capítulo apresenta a formulação matemática e numérica para a solução do acoplamento hidromecânico com escoamento monofásico em meios porosos.

### 8.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A teoria geral do adensamento (Biot, 1941), consiste na formulação matemática que descreve o acoplamento hidromecânico em meios porosos. Um dos casos particulares dessa teoria é a poroelasticidade plana, que será introduzida nesta seção.

As hipóteses simplificadoras adotadas para esse problema são: escoamento monofásico, meio totalmente saturado, processo isotérmico e grãos e fluidos incompressíveis. Além disso, o problema mecânico é abordado utilizando as considerações do estado plano de deformações (EPD) (Silva, 2018) e regime elástico linear.

#### 8.1.1 Equação de equilíbrio mecânico

Para que um determinado corpo esteja em equilíbrio mecânico é necessário que a equação 52 seja satisfeita.

$$\nabla \cdot \bar{\sigma} + \mathbf{b}^T = \mathbf{0} \quad (52)$$

onde  $\mathbf{0} = [0 \ 0]^T$ ,  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de corpo, dado por  $\mathbf{b} = [b_x \ b_y]^T$  e  $\bar{\sigma}$  é o tensor de tensões, definidos como:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (53)$$

Sendo  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  as tensões normais na direção  $x$  e  $y$ , respectivamente. Já as tensões  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{yx}$  são as tensões cisalhantes.

### 8.1.2 Relação tensão-deformação

A relação constitutiva entre a tensão e a deformação dos meios elásticos é dada pela lei de Hooke, apresentada na equação 54.

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (54)$$

sendo  $\mathbf{D}$  a matriz constitutiva do material e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  o tensor de deformações.

Utilizando da seguinte relação:  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , que é garantida quando um corpo se encontra em equilíbrio estático, pode-se escrever de forma simplificada o tensor de tensões como um vetor, conforme a equação 55.

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (55)$$

De forma análoga, define-se o vetor de deformações como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (56)$$

Levando em conta as características dos problemas de interesse desse trabalho, que se desenvolvem ao longo de duas direções coordenadas e que a outra direção é consideravelmente maior que essas duas, será utilizado o estado plano de deformações para a descrição da matriz constitutiva, que é definida na equação 57.

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (57)$$

onde  $E$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do meio.

### 8.1.3 Equação de conservação de massa do fluido

A equação 58 é a equação de conservação de massa em meios porosos.

$$\nabla \cdot \mathbf{v} + q = 0 \quad (58)$$

onde  $\mathbf{v}$  o vetor de velocidade do escoamento e  $q$  o termo de fonte ou sumidouro. O vetor  $\mathbf{v}$  é dado por:

$$\mathbf{v} = [v_x \quad v_y]^T \quad (59)$$

### 8.1.4 Lei de Darcy

A lei de Darcy (Darcy, 1856) é uma equação constitutiva, apresentada na equação 60, que rege o escoamento de um fluido em meio poroso. Nesse contexto será apresentada a lei de Darcy para um escoamento monofásico, desprezando os efeitos capilares e gravitacionais.

$$\mathbf{v} = -\kappa \frac{\nabla p}{\gamma_f} \quad (60)$$

Nesse contexto,  $\kappa$  é o tensor de permeabilidades, definido na equação 61,  $p$  a pressão e  $\gamma_f$  a densidade do fluido.

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_{xy} \\ \kappa_{yx} & \kappa_y \end{bmatrix} \quad (61)$$

### 8.1.5 Princípio das tensões efetivas

O princípio das tensões efetivas relaciona as variáveis mecânicas e hidráulicas de um meio poroso durante o processo de adensamento. Esse princípio foi desenvolvido por Terzaghi (Terzaghi, 1943) e é dado por:

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}' + \mathbf{I}p \quad (62)$$

onde  $\bar{\sigma}'$  é o tensor de tensões efetivas, que é escrito como:

$$\bar{\sigma}' = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y \end{bmatrix} \quad (63)$$

onde  $\sigma'_x$  e  $\sigma'_y$  são as tensões efetivas normais na direção  $x$  e  $y$ .

Já  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade, que para o caso bidimensional é igual a:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Realizando uma analogia com a simplificação do tensor de tensões, pode-se definir o vetor de tensões efetivas simplificado como:

$$\sigma' = [\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad \tau_{xy}]^T \quad (65)$$

Desta forma, o princípio das tensões efetivas pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\sigma = \sigma' + \mathbf{m}_{aux}p \quad (66)$$

onde  $\mathbf{m}_{aux} = [1 \quad 1 \quad 0]^T$ .

### 8.1.6 Sistema de equações do acoplamento hidromecânico em meios porosos

O problema de acoplamento hidromecânico em meios porosos é regido por um sistema de equações diferenciais. Para a obtenção do respectivo sistema são utilizados os conceitos supracitados. Outras considerações tomadas no presente trabalho é que o coeficiente de Biot-Willis possui valor  $\alpha_b = 1$  e o coeficiente de armazenamento específico é nulo, ou seja  $c_v = 0$ . A Figura 8 apresenta um esquema de um meio poroso arbitrário com a definição do domínio e contornos.

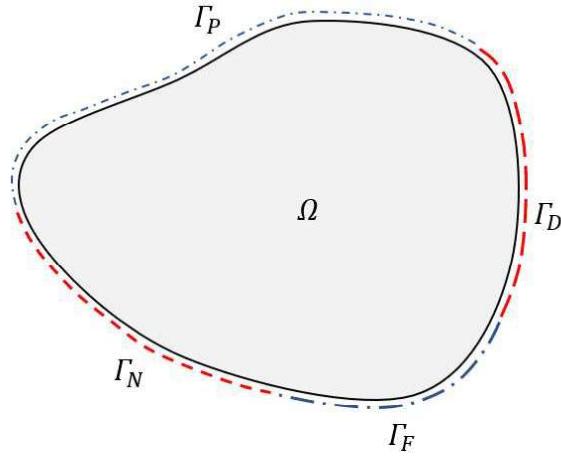


Figura 8. Domínios e contornos no problema de acoplamento hidromecânico.  
Fonte: O autor (2025).

Aplicando o princípio das tensões efetivas na equação de equilíbrio mecânico, obtém-se:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{b}^T = \mathbf{0} \quad (67)$$

No presente contexto o fluido escoante no meio poroso é incompressível e ocupa todos os espaços vazios dos poros, ou seja, saturando totalmente o meio. Sendo assim, a variação de massa do fluido é igual à variação volumétrica do meio, hipótese que pode ser escrita matematicamente como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (68)$$

sendo  $\varepsilon_v$  a deformação volumétrica, dada por  $\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ .

Desta forma, o sistema de equações que rege o problema hidromecânico com as hipóteses apresentadas anteriormente é dado por:

$$\begin{cases} \nabla^T(\boldsymbol{\sigma}' + \mathbf{m}_{aux}p) + \mathbf{b} = 0, \text{ em } \Omega \times (0, t] \\ \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}_{aux}^T \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = 0, \text{ em } \Omega \times (0, t] \\ \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \text{ (Teoria da elasticidade)} \\ \mathbf{v} = -\frac{\mathbf{k}}{\gamma_w} (\nabla \mathbf{p} - \mathbf{b}_w) \text{ (Lei de Darcy)} \end{cases} \quad (69)$$

### 8.1.6.1 Condições de contorno e iniciais

As condições de contorno, aplicadas conforme o esquema da Figura 8, são dadas por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ sobre } \Gamma_D \times [0, t] \quad (70.a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_N \text{ sobre } \Gamma_N \times [0, t] \quad (70.b)$$

$$p = p_D \text{ sobre } \Gamma_P \times [0, t] \quad (70.c)$$

$$\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{n} = q_N \text{ sobre } \Gamma_F \times [0, t] \quad (70.d)$$

e as condições iniciais são:

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}^0 \text{ em } \Omega \quad (71.a)$$

$$p(t_0) = p^0 \text{ em } \Omega \quad (71.b)$$

No conjunto de equações de acoplamento  $\boldsymbol{\sigma}'$  é o tensor de tensões efetivas,  $p$  é a poropressão e  $\mathbf{m}_{aux}$ , definido anteriormente, é um vetor auxiliar. A velocidade de Darcy é expressa por  $\mathbf{v}$  e a variação temporal da deformada volumétrica é dada por  $\partial \varepsilon / \partial t$ . Os deslocamentos ( $\mathbf{u}$ ) possuem valor  $\mathbf{u}_D$  ao longo de  $\Gamma_D$  e as tensões ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) possuem valores prescritos de  $\mathbf{t}_N$  ao longo de  $\Gamma_N$ . As pressões ( $p$ ) possuem valores prescritos  $p_D$  ao longo de  $\Gamma_P$  e o fluxo ( $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{n} = q$ ) possui valor prescrito  $q_N$  ao longo de  $\Gamma_F$ . As condições iniciais, definidas no tempo ( $t_0$ ) são dadas por  $\mathbf{u}^0$  e  $p^0$  para o campo de deslocamentos e pressões, respectivamente. O tensor da relação constitutiva da teoria da elasticidade é dado por  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{k}$  é o tensor de permeabilidades,  $\gamma_w$  é o peso específico do fluido,  $\mathbf{b}$  é o vetor de forças de corpo mecânico e  $\mathbf{b}_w$  é o vetor de forças de corpo hidráulico.

## 8.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Essa seção apresenta a formulação numérica utilizada para a discretização das equações de acoplamento hidromecânico apresentadas no sistema de equações 69, sujeito com as condições iniciais e de contornos supracitadas. A discretização espacial foi realizada pelo método dos elementos finitos mistos e a discretização temporal pelo método  $\theta$  (Sloan & Abbo, 1999).

### 8.2.1 Discretização espacial pelo método dos elementos finitos mistos

Para a realização da discretização das equações avaliadas pelo método dos elementos finitos é necessário definir a subdivisão do domínio  $\Omega$  em um conjunto de subdomínios, denominados elementos finitos,  $\Omega_e$ . A divisão apresentada segue as seguintes propriedades  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega_e$  e  $\bigcap_{e=1}^{nel} \Omega_e = \emptyset$ . Os termos  $nel$  e  $e$  são, respectivamente, o número de elementos da malha e o  $e$ -nésimo elemento avaliado.

O conjunto de funções admissíveis para a pressão e deslocamento são definidas abaixo.

$$P^h = \{p^h / p^h \in H^h(\Omega), p^h(\mathbf{x}, t) = p_d \text{ em } \Gamma_P\} \quad (72.a)$$

$$U^h = \{u^h / u^h \in H^h(\Omega), u^h(\mathbf{x}, t) = u_d \text{ em } \Gamma_D\} \quad (72.b)$$

$$W^h = \{w^h / w^h \in H^h(\Omega), w^h = 0 \text{ em } \Gamma_P \oplus \Gamma_D\} \quad (72.c)$$

onde  $h$  indica a discretização em elementos finitos, sendo  $H^h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  um espaço de dimensões finitas sobre  $\Omega$ . O espaço  $H^1(\Omega)$  é o espaço de funções no qual as primeiras derivadas são quadradas integráveis, ou seja:

$$f \in H^1(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{df}{dx} \right)^2 d\Omega < \infty \quad (73)$$

No presente trabalho os elementos utilizados são de Taylor-Hood, de forma que a condição inf-sup de LBB (Babuska, 1971; Brezzi, 1974) seja satisfeita. A discretização é feita por elementos triangulares com as pressões definidas nos vértices do triângulo (funções de interpolação e ponderação lineares, segundo o espaço de Hilbert contínuo por partes,  $\mathcal{H}(P_1)$ ) e os deslocamentos nos vértices e nos centro das arestas (funções de interpolação e ponderação quadráticas, de ordem 2, segundo espaço de Hilbert contínuo por partes,  $\mathcal{H}(P_2)$ ). O esquema da definição dessas variáveis no elemento está apresentado na Figura 9.

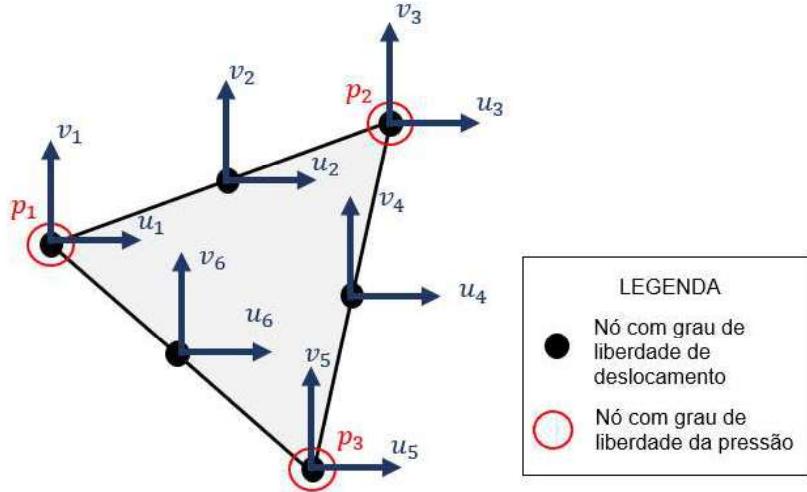


Figura 9. Graus de liberdade do problema hidromecânico.

Fonte: O autor (2025).

Aplicando o método dos resíduos ponderados de Galerkin e o teorema de Green-Gauss nas 2 primeiras equações do sistema 69 e derivando a primeira em relação ao tempo, obtém-se as suas formas fracas, definidas nas equações 74.a e 74.b e escritas, de forma compacta, nas equações 74.c e 74.d.

$$\int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}'}{\partial t} dV + \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{m}_{aux} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} dV - \int_{S^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} dS - \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV = 0 \quad (74.a)$$

$$\int_{V^e} \mathbf{N}_p^T \mathbf{m}_{aux}^T \mathbf{B}_u dV \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\kappa}{\gamma_w} \mathbf{B}_p dV \mathbf{p} + \int_{S^e} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q} dS + \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\kappa}{\gamma_w} \mathbf{b}_w dV = 0 \quad (74.b)$$

$$\mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{l} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}^{ext}}{\partial t} \quad (74.c)$$

$$\mathbf{l}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{h} \mathbf{p} = \mathbf{q} \quad (74.d)$$

sendo:

$$\mathbf{k} = \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u dV \quad (75.a)$$

$$\mathbf{l} = \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{m}_{aux}^T \mathbf{N}_p dV \quad (75.b)$$

$$\mathbf{h} = - \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\kappa}{\gamma_w} \mathbf{B}_p dV \quad (75.c)$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{S^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} dS + \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV \quad (75.d)$$

$$\mathbf{q} = - \int_{S^e} \mathbf{N}_p^T q dS - \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\kappa}{\gamma_w} \mathbf{b}_w dV \quad (75.e)$$

O conjunto de equações 75 descreve as matrizes e vetores locais dos elementos, sendo  $\mathbf{k}$  a matriz de rigidez mecânica,  $\mathbf{l}$  a matriz de acoplamento,  $\mathbf{h}$  a matriz de condutividade hidráulica,  $\mathbf{f}^{\text{ext}}$  o vetor de forças externas e  $\mathbf{q}$  o vetor de termo fonte.

Para a construção da matriz global do problema é necessária a contribuição dos elementos de acoplamento definidos na seção subsequente.

### 8.2.2 Construção das matrizes globais do problema hidromecânico para malhas não conformes

As matrizes globais do sistema são construídas com a contribuição das matrizes locais dos elementos finitos e as matrizes dos elementos de acoplamento, conforme apresentado abaixo.

$$\mathbf{K} = \sum_{\text{elem}} \mathbf{k} + \sum_{n=1}^{\text{nelc}} \mathbf{k}^c = \sum_{n=1}^{\text{nel}\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u dV + \sum_{n=1}^{\text{nel}\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{D} \mathbf{B}_u dV + \sum_{n=1}^{\text{nelc}} \mathbf{B}_u^c \mathbf{C}_u \mathbf{B}_u^c \quad (76.a)$$

$$\mathbf{L} = \sum_{\text{elem}} \mathbf{l} = \sum_{n=1}^{\text{nel}\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{m}_{aux}^T \mathbf{N}_p dV + \sum_{n=1}^{\text{nel}\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{B}_u^T \mathbf{m}_{aux}^T \mathbf{N}_p dV \quad (76.b)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \sum_{\text{elem}} \mathbf{h} + \sum_{n=1}^{\text{nelc}} \mathbf{h}^c &= - \sum_{n=1}^{\text{nel}\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\kappa}{\gamma_w} \mathbf{B}_p dV - \sum_{n=1}^{\text{nel}\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\kappa}{\gamma_w} \mathbf{B}_p dV \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\text{nelc}} \mathbf{B}_p^c \mathbf{C}_p \mathbf{B}_p^c \end{aligned} \quad (76.c)$$

$$\mathbf{F}^{ext} = \sum_{elem} \mathbf{f} = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{S^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} dS - \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{S^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} dS - \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{N}_u^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV \quad (76.d)$$

$$\mathbf{Q} = \sum_{elem} \mathbf{q} = - \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{S^e} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q} dS - \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\gamma_w} \mathbf{b}_w dV - \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{S^e} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q} dS + - \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{B}_p^T \frac{\boldsymbol{\kappa}}{\gamma_w} \mathbf{b}_w dV \quad (76.e)$$

As matrizes  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{H}$  são, respectivamente, as matrizes globais de rigidez, de acoplamento e de condutividade hidráulica. Os vetores  $\mathbf{F}^{ext}$  e  $\mathbf{Q}$  introduzem no sistema as tensões e fluxos prescritos.

Sendo assim, o sistema global é dado pela equação 77, onde o problema hidráulico e o mecânico são resolvidos simultaneamente totalmente acoplados.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^{ext} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix} \quad (77)$$

Os vetores  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{P}$  contém as incógnitas mecânicas (deslocamentos) e hidráulicas (presões), respectivamente.

### 8.2.3 Discretização temporal pelo método das diferenças finitas

Para a discretização temporal da equação 77 será utilizado o método  $\theta$  (Sloan & Abbo, 1999). O valor do parâmetro  $\theta$  poderá ser ajustado de modo que a discretização seja implícita, explícita ou intermediária. Para a aplicação da discretização a equação 77 será escrita de forma compacta como:

$$\mathbf{M}_1 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} + \mathbf{M}_2 \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (78)$$

sendo

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (79.a)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (79.b)$$

com  $\mathbf{X} = [\mathbf{U} \quad \mathbf{P}]^T$  e  $\mathbf{F}(t) = [\mathbf{F}^{ext} \quad \mathbf{Q}]^T$ .

Discretizando os termos temporais de equação 78 pelo método das diferenças finitas obtém-se:

$$(\mathbf{M}_1 + \theta \Delta t \mathbf{M}_2) \mathbf{X}^n = [\mathbf{M}_1 - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{M}_2] \mathbf{X}^{n-1} + \Delta t [(1 - \theta) \mathbf{F}^{n-1} + \theta \mathbf{F}^n] \quad (80)$$

onde  $\theta$  é um parâmetro que define o tipo de aproximação a ser usada, como citado anteriormente, e pode variar de  $0 \leq \theta \leq 1$  e os sobrescritos  $n$  e  $n + 1$  correspondem aos valores nos tempos  $t_n$  e  $t_{n+1}$ , respectivamente. O intervalo de tempo é dado por  $\Delta t$ , obtendo assim a relação  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ .

De acordo com o valor de  $\theta$  esse método corresponde a três casos particulares definidos a seguir:

- $\theta = 1,0$  – Método de Euler implícito;
- $\theta = 0,0$  – Método de Euler explícito;
- $\theta = 0,5$  – Método de Cranck-Nicolson.

### 8.3 AVALIAÇÃO DOS ERROS

Para o presente trabalho foram utilizados 4 métricas de erros para a comparação entre os resultados numéricos e as soluções analíticas. As métricas estão apresentadas nas subseções posteriores e são determinadas para um conjunto com  $N$  resultados numéricos ( $y_i^{num}$ ) associados aos respectivos resultados analíticos ( $y_i^{ana}$ ).

### 8.3.1 Erro médio absoluto (MAE – *Mean absolute error*)

O erro MAE ( $E_{MAE}(y_{ana}, y_{num})$ ) possui a mesma unidade dos dados avaliados e seu valor apresenta a média que a solução analítica está se desfalcando em relação à solução numérica. O MAE tem melhor resultados em situações que os erros próximos da mediana são mais importantes que os extremos, e sua determinação é dada por:

$$E_{MAE}(y_{ana}, y_{num}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i^{ana} - y_i^{num}| \quad (81)$$

### 8.3.2 Erro percentual absoluto médio (MAPE – *Mean Absolute percentual error*)

O erro MAPE ( $E_{MAPE}(y_{ana}, y_{num})$ ) apresenta a porcentagem do erro numérico em relação ao analítico, correspondente à média dos erros relativos. Sua determinação é dada por:

$$E_{MAPE}(y_{ana}, y_{num}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|y_i^{ana} - y_i^{num}|}{\max(|y_i^{ana}|)} \quad (82)$$

### 8.3.3 Erro quadrático médio (MSE – *Mean square error*)

O erro MSE ( $E_{MSE}(y_{ana}, y_{num})$ ) apresenta a diferença entre o valor numérico e o real com a métrica MAE elevada ao quadrado. A interpretação dos resultados obtidos através desse erro se torna as vezes difíceis de serem interpretados por conta da unidade do erro, que corresponde ao quadrado da unidade das variáveis analisadas. A diferença entre o MSE e o MAE é que o MSE eleva os erros absolutos ao quadrado, fazendo com que os erros maiores sejam mais importantes, penalizando mais os maiores erros absolutos.

$$E_{MSE}(y_{ana}, y_{num}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^{ana} - y_i^{num})^2 \quad (83)$$

### 8.3.4 Raiz do erro quadrático médio (RMSE – *Root mean squared error*)

O erro RMSE ( $E_{RMSE}(y_{ana}, y_{num})$ ) possui a mesma filosofia do MSE, porém, para lidar com a diferença de unidades entre o erro e as variáveis analisadas, é introduzido à sua determinação a radiciação, conforme a equação abaixo.

$$E_{RMSE}(y_{ana}, y_{num}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^{ana} - y_i^{num})^2} \quad (84)$$

## 8.4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para a avaliação da formulação foram realizados 4 experimentos numéricos consagrados na literatura, cada um a fim de verificar a capacidade da formulação proposta em resolver situações específicas inerentes ao problema em questão. Todos os problemas possuem solução analítica, que foram confrontadas com as soluções numéricas. Durante a validação os exemplos foram modelados utilizando malhas conformes e não-conformes.

A formulação apresentada possui o termo de carregamento mecânico em termos de derivada temporal, sendo assim, a imposição do carregamento é realizada a partir de uma função bilinear com uma parcela crescente até seu valor final, conforme apresentado na Figura 10. O carregamento é imposto de forma linear com valor nulo a partir do instante  $t = 0,00$  até  $q_f$  no instante  $t_0$ .

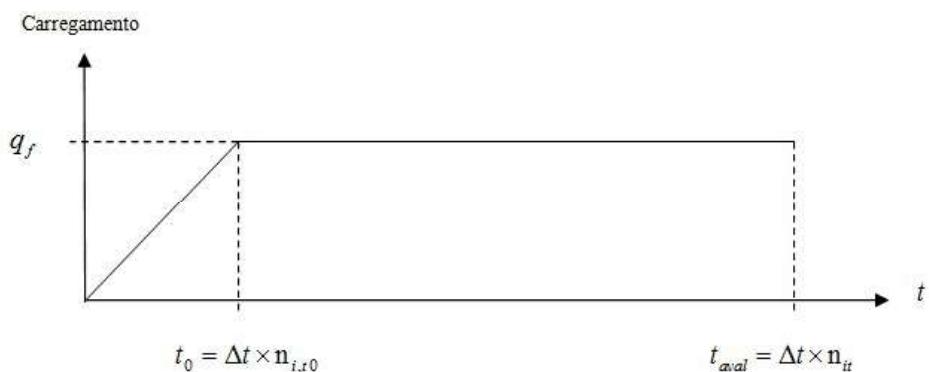


Figura 10. Carregamento ao longo do tempo no problema hidromecânico.  
Fonte: O autor (2025).

### 8.4.1 Adensamento unidimensional – Problema de Terzaghi

O problema do adensamento unidimensional de Terzaghi (Terzaghi, 1943) é um clássico da mecânica dos solos e consiste no adensamento de uma coluna onde o carregamento é aplicado no topo drenante. Nas faces laterais são aplicadas condições de simetria com fluxo e deslocamento na direção  $x$  com valores nulos. A face inferior é impermeável, ou seja, com fluxo nulo, e indeslocável na direção  $y$ . A descrição do problema é apresentada na Figura 11.

O experimento numérico foi realizado utilizando três malhas, uma conforme, apresentada na Figura 11 e duas não-conformes com características distintas. A primeira malha não-conforme, denominada malha 1, foi proposta para que o refinamento ocorra nos locais onde há a presença de variações bruscas no gradiente das pressões e tensões ao longo da direção  $y$ . Essas variações são previstas a partir do conhecimento da solução analítica. A segunda malha, denominada malha 2, foi proposta para a avaliação da capacidade do método em acoplar malhas com interfaces não coincidentes. Esse tipo de situação pode ocorrer quando há a necessidade da discretização de furos circulares, como apresentado na Figura 12.

A malha 1 e a malha 2 são apresentadas, respectivamente, na Figura 12 e na Figura 13. Os parâmetros da simulação são apresentados na Tabela 2.

Esse problema é adimensionalizado pelo fator tempo  $T_V$ , avaliado em um tempo  $t$  para uma altura da camada igual a  $H$  que é dado por:

$$T_V = \frac{c_V t}{H^2} \quad (85)$$

sendo o coeficiente de adensamento dado por:

$$c_V = \frac{kE(1-\nu)}{\gamma_w(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (86)$$

onde  $k$  é o coeficiente de permeabilidade vertical e  $\nu$  o coeficiente de Poisson do material.

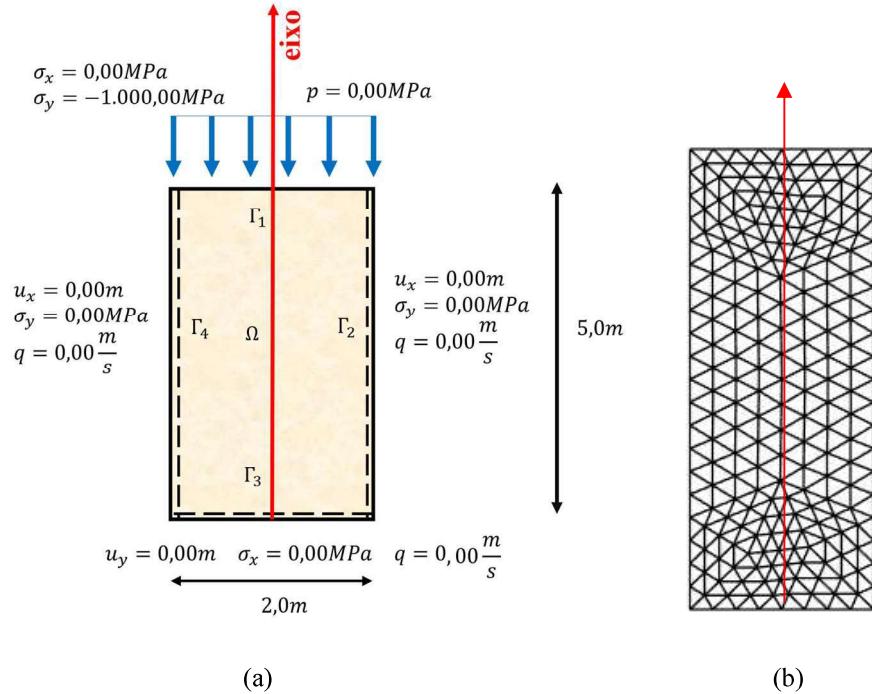


Figura 11. Problema de Terzaghi: (a) descrição do caso; (b) malha conforme.  
Fonte: O autor (2023).

Os resultados numéricos das pressões foram confrontados com a solução analítica proposta por Terzaghi (1943). Os resultados são apresentados na Figura 14 para  $T_V = 0,001$ ,  $T_V = 0,01$ ,  $T_V = 0,10$ ,  $T_V = 0,50$  e  $T_V = 1,00$ . As soluções analíticas estão plotadas em linha contínua e as soluções numéricas de acordo com a legenda. A sobreposição entre as soluções aponta a capacidade da formulação em resolver o problema de forma satisfatória para as pressões.

Tabela 2. Problema de Terzaghi: parâmetros físicos.

Parâmetro	Valor
$E$	$1,00 \times 10^7 MPa$
$\nu$	0,20
$\gamma_w$	$1.000,00 kgf/m^3$
$\kappa$	$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} cm/s$

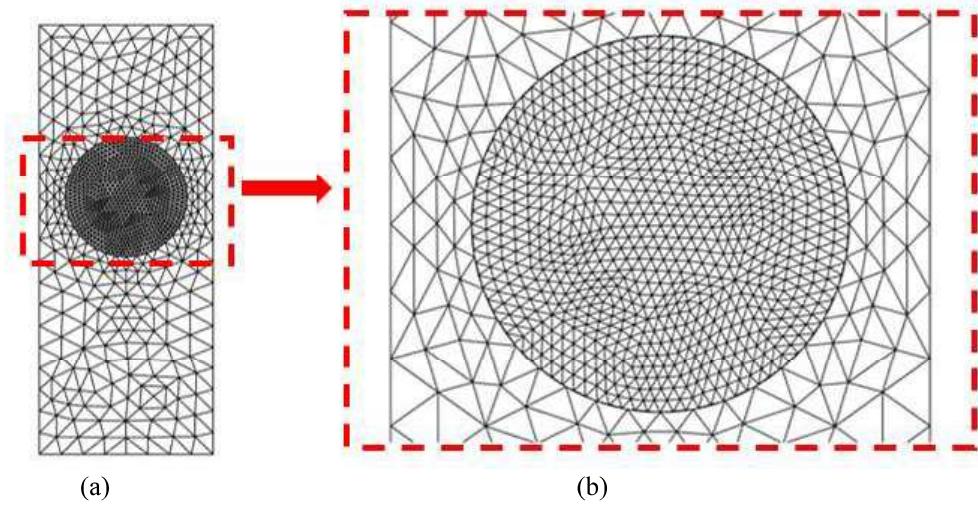


Figura 12. Problema de Terzaghi: (a) malha 1; (b) detalhe do refinamento da malha.  
Fonte: O autor (2025).

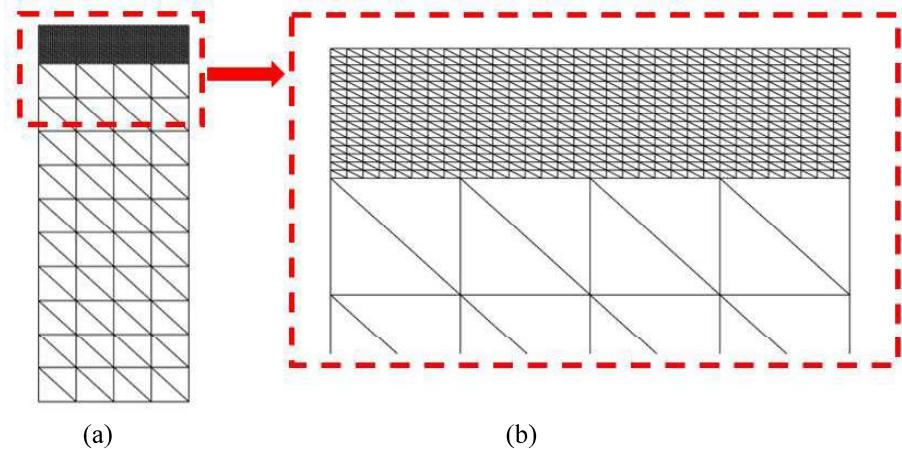


Figura 13. Problema de Terzaghi: (a) malha 2; (b) detalhe do refinamento da malha.  
Fonte: O autor (2025).

A Figura 15 apresenta os resultados numéricos e analíticos do deslocamento vertical no topo do domínio, que são consistentes. O que se pode observar é uma pequena diferença entre os resultados analíticos e numéricos que aumenta gradativamente, com os resultados numéricos menores que os analíticos.

Para uma análise quantitativa foram aplicados os erros definidos anteriormente (MAE, MAPE, MSE e RMSE). Esses erros são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 3, 4, 5 e 6 para as pressões.

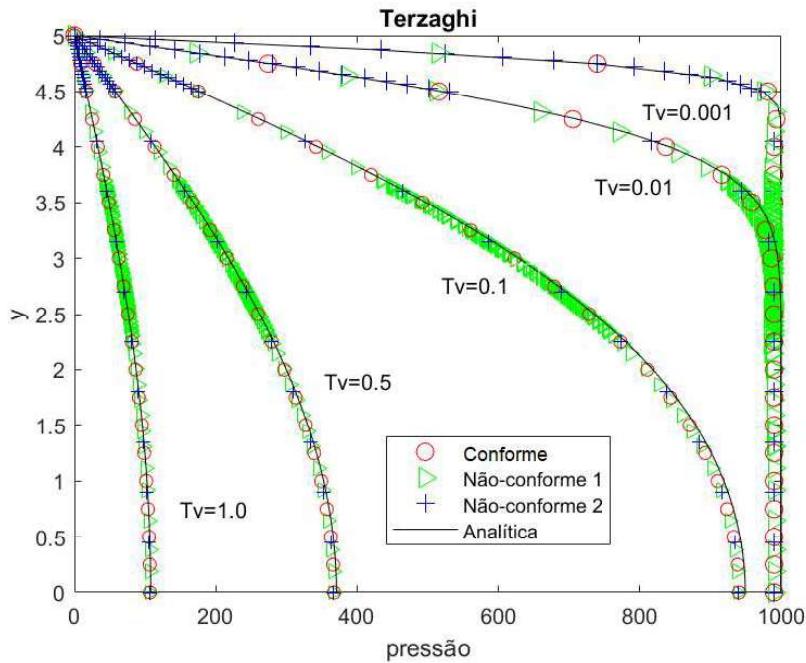


Figura 14. Problema de Terzaghi: solução analítica e numéricas das pressões.  
Fonte: O autor (2025).

Analizando a Tabela 3 verifica-se que os erros diminuem com o avanço do tempo. Esse fato é verificado devido à suavização nos gradientes das pressões ao longo da simulação. Nos tempos iniciais as diferenças entre os gradientes de tensões induzem oscilações espúrias na parte superior do domínio, o que justifica essa observação.

Ao analisar os erros, percebe-se que os erros nos tempos iniciais possuem valores semelhantes nos instantes iniciais, quando se compara a malha 1 com a malha 2. Com o avançar do tempo os erros da malha 2 caem com uma taxa maior que os da malha 1.

Quando se analisa a Tabela 4, relativa aos erros MAPE, verifica-se que todos os erros possuem valores na ordem de  $10,0^{-2}$ , apresentando resultados satisfatórios. Esses resultados são corroborados com os erros MSE e RMSE, que são apresentados na Tabela 5 e 6.

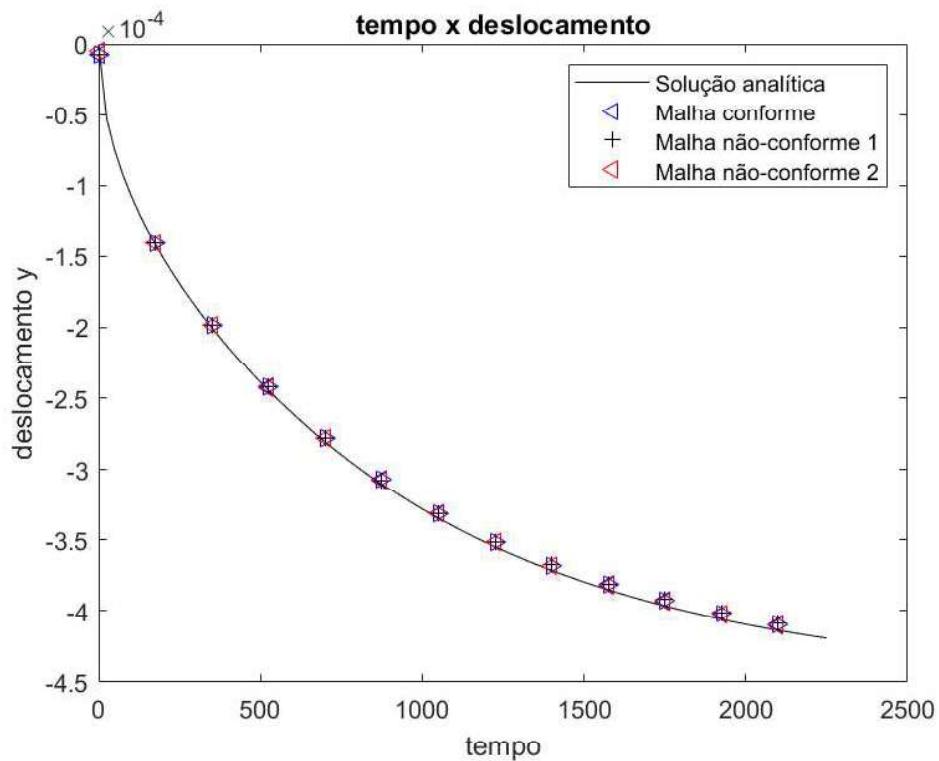


Figura 15. Problema de Terzaghi: solução analítica e numéricas dos deslocamentos.  
Fonte: o autor (2025).

A partir dos resultados qualitativos e quantitativos obtidos, verifica-se a consistência da formulação em simular problemas unidimensionais de acoplamento hidromecânico.

Tabela 3. Problema de Terzaghi: erros MAE da pressão.

fator tempo	$E_{MAE}$		
	malha conforme	malha 1 (não-conforme)	malha 2 (não-conforme)
$T_V = 0.001$	13.5268	18.8865	21.4098
$T_V = 0.01$	11.9975	13.8409	14.2267
$T_V = 0.10$	8.8052	9.8836	9.8191
$T_V = 0.50$	2.9119	4.0702	2.8545
$T_V = 1.00$	0.7181	2.1657	0.2035

Tabela 4. Problema de Terzaghi: erros MAPE da pressão.

fator tempo	$E_{MAPE}$		
	malha conforme	malha 1 (não-conforme)	malha 2 (não-conforme)
$T_V = 0.001$	0.0130	0.0182	0.0206
$T_V = 0.01$	0.0121	0.0140	0.0144
$T_V = 0.10$	0.0104	0.0116	0.0116
$T_V = 0.50$	0.0115	0.0162	0.0113
$T_V = 1.00$	0.0130	0.0407	0.0036

Tabela 5. Problema de Terzaghi: erros MSE da pressão.

fator tempo	$E_{MSE}$		
	malha conforme	malha 1 (não-conforme)	malha 2 (não-conforme)
$T_V = 0.001$	366.9823	503.7843	534.9548
$T_V = 0.01$	152.3583	198.0108	206.0281
$T_V = 0.10$	85.6819	103.3004	98.6267
$T_V = 0.50$	9.4700	17.6622	8.3582
$T_V = 1.00$	0.5751	5.0181	0.0431

Tabela 6. Problema de Terzaghi: erros RMSE da pressão.

fator tempo	$E_{RMSE}$		
	malha conforme	malha 1 (não-conforme)	malha 2 (não-conforme)
$T_V = 0.001$	19.1568	22.4451	23.1291
$T_V = 0.01$	12.3433	14.0716	14.3537
$T_V = 0.10$	9.2565	10.1637	9.9311
$T_V = 0.50$	3.0773	4.2026	2.8911
$T_V = 1.00$	0.7584	2.2401	0.2077

### 8.4.2 Adensamento unidimensional heterogêneo – Problema de Terzaghi heterogêneo

O presente problema é uma variação do anterior, possuindo as mesmas condições iniciais, de contorno e a mesma geometria. Entretanto, ele é constituído por um meio heterogêneo, dividido em duas camadas que possuem permeabilidades diferentes, conforme apresentado na Figura 16. Os parâmetros físicos e numéricos utilizados na simulação estão apresentados na Tabela 7.

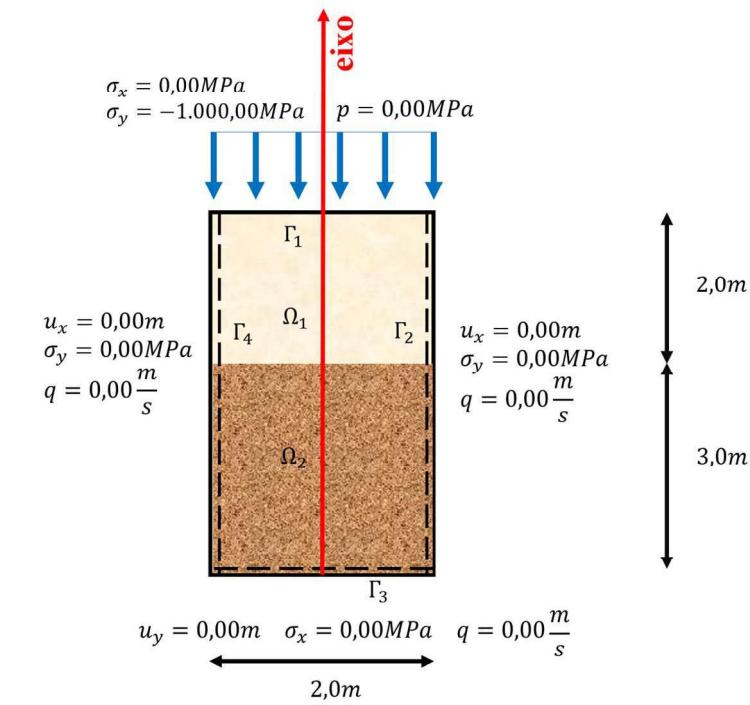


Figura 16. Problema de Terzaghi heterogêneo: descrição do caso.  
Fonte: o autor (2025).

Este problema foi solucionado a partir de 3 malhas não-conformes, denominadas malha 1, malha 2 e malha 3, apresentadas na Figura 17. Essas malhas foram propostas a fim de verificar como a formulação se comporta com malhas onde a interface entre elas não é regular, ocorrendo sobreposição dos elementos da malha grossa com os elementos da malha fina. Essa situação é corrente em malhas não-conformes com interfaces curvas, semelhante à situação abordada no experimento anterior. O número de graus de liberdade de cada malha é apresentado na Tabela 8.

A Figura 18 apresenta os resultados comparativos entre as soluções analíticas e numéricas ao longo do eixo definido na Figura 16. A solução analítica foi proposta por Verruijt (2023), e foi obtida utilizando uma analogia com as soluções de problemas termoelásticos em meios heterogêneos.

Os resultados foram obtidos para os seguintes tempos adimensionais:  $T_V = 0,01$ ;  $T_V = 0,10$ ;  $T_V = 0,50$  and  $T_V = 1,00$ . Esses tempos são obtidos da mesma forma do problema de Terzaghi, utilizando os parâmetros da camada superior. Para a avaliação da performance da formulação proposta foram utilizadas as mesmas métricas de erro do experimento anterior. Os resultados são apresentados na Tabela 9,

Tabela 10,

Tabela 11 e Tabela 12. A partir da análise da Figura 18 é possível verificar a consistência entre todos os resultados avaliados.

Quando se realiza uma análise quantitativa, a partir dos erros, pode-se perceber que em todas as métricas os eles permanecem com valores próximos e na mesma ordem de grandeza. É possível observar também que não existe uma relação direta entre o refinamento da malha e a diminuição do erro, como se espera em malhas conformes. Isso ocorre pois quanto mais refinada a malha interna mais se tem elementos que se sobreponem aos elementos da malha grossa, explicando assim esse comportamento peculiar dos erros.

Tabela 7. Problema de Terzaghi heterogêneo: parâmetros físicos.

parâmetros	valores
$E$	$1,00 \times 10^7 \text{ MPa}$
$\nu$	0,20
$\gamma_w$	$1.000,00 \text{ kgf/m}^3$
$\kappa_1$	$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ cm/s}$
$\kappa_2$	$\begin{bmatrix} 3 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 3 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \text{ cm/s}$
$\mathbf{C}_u$	$\begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix}$
$C_p$	$10^2$

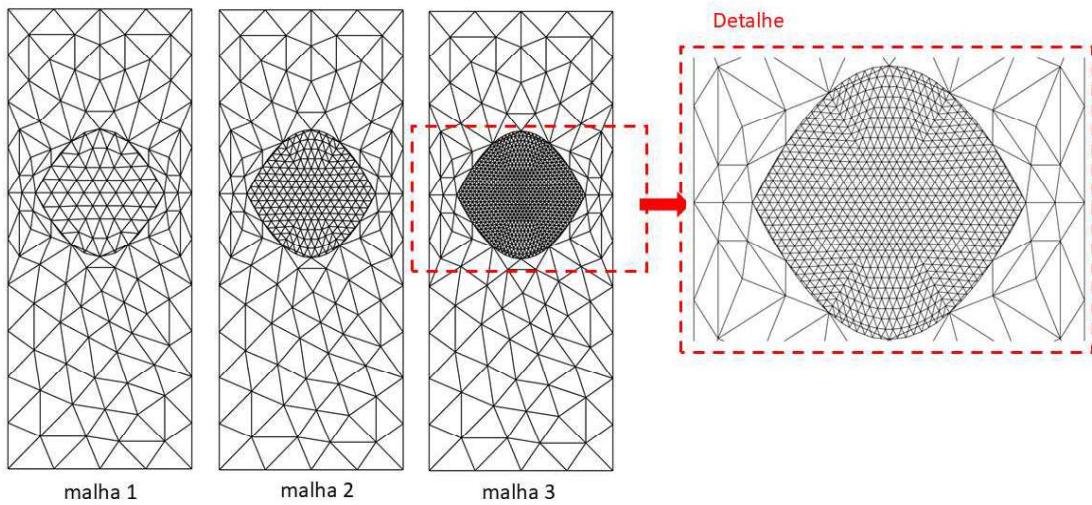


Figura 17. Problema de Terzaghi heterogêneo: malhas não-conformes.

Fonte: o autor (2025).

Tabela 8. Problema de Terzaghi heterogêneo: número de graus de liberdade das malhas.

malha	graus de liberdade do problema hidráulico	graus de liberdade do problema mecânico
malha 1	173	1250
malha 2	329	2450
malha 3	929	4154

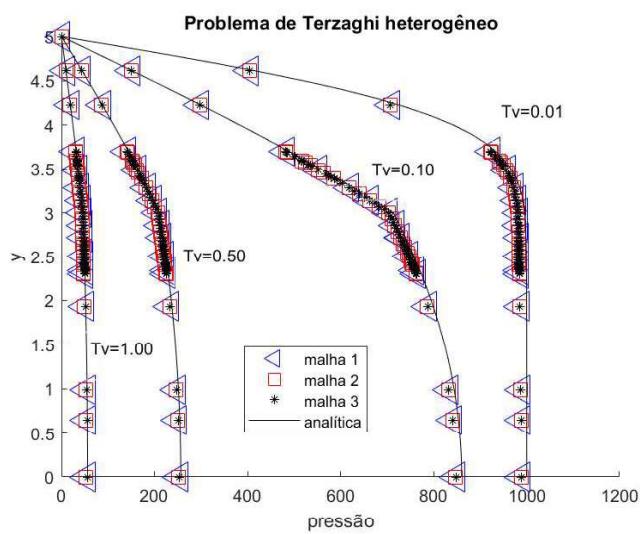


Figura 18. Problema de Terzaghi heterogêneo: solução da pressão ao longo da coordenada y.

Fonte: o autor (2025).

Tabela 9. Problema de Terzaghi heterogêneo: Erros MAE da pressão.

$E_{MAE}$			
fator tempo	malha 3	malha 4	malha 5
$T_V = 0,001$	13,5268	18,8865	21,4098
$T_V = 0,01$	11,9975	13,8409	14,2267
$T_V = 0,10$	8,8052	9,8836	9,8191
$T_V = 0,50$	2,9119	4,0702	2,8545
$T_V = 1,00$	0,7181	2,1657	0,2035

Tabela 10. Problema de Terzaghi heterogêneo: Erros MAPE da pressão.

$E_{MAPE}$			
fator tempo	malha 3	malha 4	malha 5
$T_V = 0,001$	0,0130	0,0182	0,0206
$T_V = 0,01$	0,0121	0,0140	0,0144
$T_V = 0,10$	0,0104	0,0116	0,0116
$T_V = 0,50$	0,0115	0,0162	0,0113
$T_V = 1,00$	0,0130	0,0407	0,0036

Tabela 11. Problema de Terzaghi heterogêneo: Erros MSE da pressão.

$E_{MSE}$			
fator tempo	malha 3	malha 4	malha 5
$T_V = 0,001$	366,9823	503,7843	534,9548
$T_V = 0,01$	152,3583	198,0108	206,0281
$T_V = 0,10$	85,6819	103,3004	98,6267
$T_V = 0,50$	9,4700	17,6622	8,3582
$T_V = 1,00$	0,5751	5,0181	0,0431

Tabela 12. Problema de Terzaghi heterogêneo: Erros RMSE da pressão.

$E_{ERMSE}$			
fator tempo	malha 3	malha 4	malha 5
$T_V = 0,001$	19,1568	22,4451	23,1291
$T_V = 0,01$	12,3433	14,0716	14,3537
$T_V = 0,10$	9,2565	10,1637	9,9311
$T_V = 0,50$	3,0773	4,2026	2,8911
$T_V = 1,00$	0,7584	2,2401	0,2077

#### 8.4.3 Adensamento bidimensional homogêneo – Problema de Mandel

O problema proposto por Mandel (1953) consiste na compressão de uma camada de solo por duas placas rígidas e impermeáveis na face superior e inferior, com a drenagem ocorrendo pelas faces laterais. O fluxo ocorre no sentido horizontal, indo do meio da amostra para as laterais, onde as pressões são nulas. Esse problema clássico é frequentemente utilizado na validação da capacidade das formulações em simular adensamentos que se desenvolvem em duas direções coordenadas.

Para a construção de um modelo otimizado de simulação, visando a redução no número de graus de liberdade, foram utilizadas as condições de simetria que ocorrem nos eixos médios horizontais e verticais, como pode ser observado na Figura 19. Uma característica peculiar desse problema é a imposição da condição de contorno imposto pela placa rígida, pois exige que os deslocamentos verticais sejam iguais e que os deslocamentos horizontais estejam livres ao longo de toda a face.

A imposição dessa condição de contorno é possível a partir de EFA, utilizando malhas distintas para a modelagem da placa rígida e para a massa de solo, adequando os parâmetros de penalidade do acoplamento para o problema mecânico e hidráulico. Na simulação a componente horizontal  $C_{u,x}$  da matriz  $\mathbf{C}_u$  foi anulada, para que os deslocamentos horizontais permanecessem livres. A condição de impermeabilidade da placa foi imposta anulando o parâmetro de penalidade do problema hidráulico,  $C_p$ , além disso as pressões foram mantidas nulas ao longo da simulação em todo o domínio da placa, para que não fossem desenvolvidos fluxos.

Essa abordagem proposta para a solução de problemas de interação solo-estrutura é inédita, abordada pela primeira vez no presente trabalho.

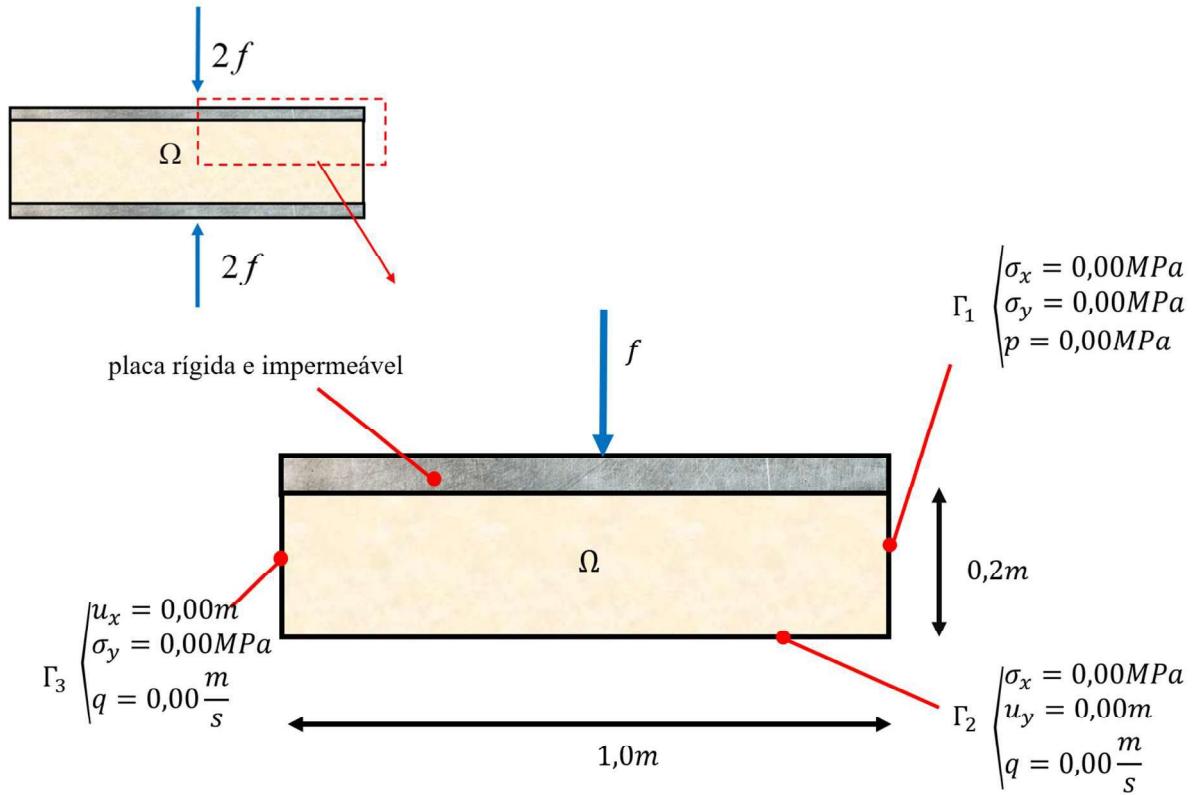


Figura 19. Problema de Mandel: descrição do caso.

Fonte: O autor (2025).

A malha da simulação está apresentada na Figura 20, sendo a parte superior, onde são encontrados os maiores elementos, a região correspondente à placa. A região inferior, correspondente à massa de solo, foi discretizada com uma malha mais refinada onde ocorrem as maiores variações nos gradientes das pressões, ou seja, na face drenante. Os parâmetros da simulação estão apresentados na Tabela 13.

As soluções numéricas das pressões foram confrontadas com as soluções obtidas por Mandel (1953). Elas foram obtidas para os fatores tempo adimensionais  $T_V = 0,01$  ,  $T_V = 0,10$  ,  $T_V = 0,50$  e  $T_V = 1,00$ , que é dado pela equação 87 onde  $c_V$  é obtido pela equação 86 considerando  $L$  o comprimento horizontal do domínio.

$$T_V = \frac{tc_V}{L^2} \quad (87)$$

A Figura 21 apresenta as soluções numéricas e analíticas, com as soluções analíticas apresentadas em linha contínua, enquanto as soluções numéricas estão identificadas na legenda. Já a Figura 22 demonstra como o conjunto solo-placa se deforma em  $T_V = 1,00$ . Analisando a figura é possível observar que a placa se mantém rígida e os deslocamentos horizontais são

livres, conforme esperado. A Figura 23 apresenta o campo de pressões correspondentes ao  $T_V = 1,00$ , onde é possível observar o desacoplamento do campo de pressões entre a placa e o solo.

Tabela 13. Problema de Mandel: parâmetros físicos.

Parâmetro	Valor
$E$	$1,00 \times 10^8 MPa$
$\nu$	0,40
$\gamma_w$	$1.000,00 kgf/m^3$
$\kappa$	$\begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix} cm/s$
$C_u$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix}$
$C_p$	0,00

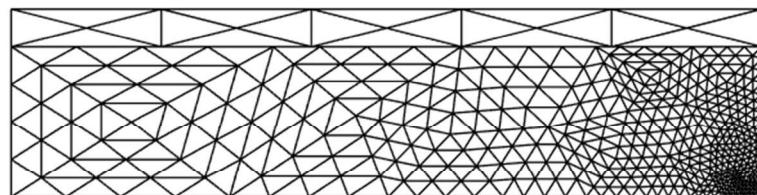


Figura 20. Problema de Mandel: malha não-conforme.  
Fonte: O autor (2025).

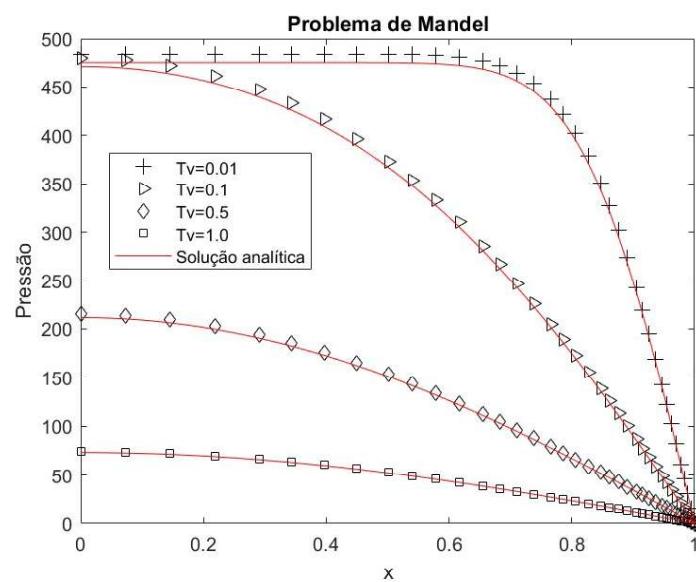


Figura 21. Problema de Mandel: pressões ao longo do eixo x.  
Fonte: O autor (2025).

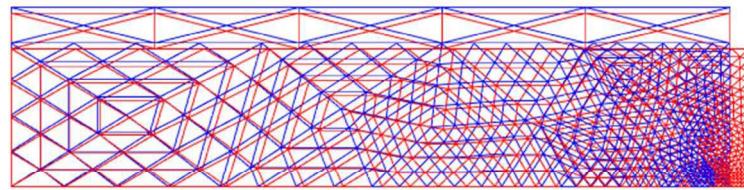


Figura 22. Problema de Mandel: deformada em  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

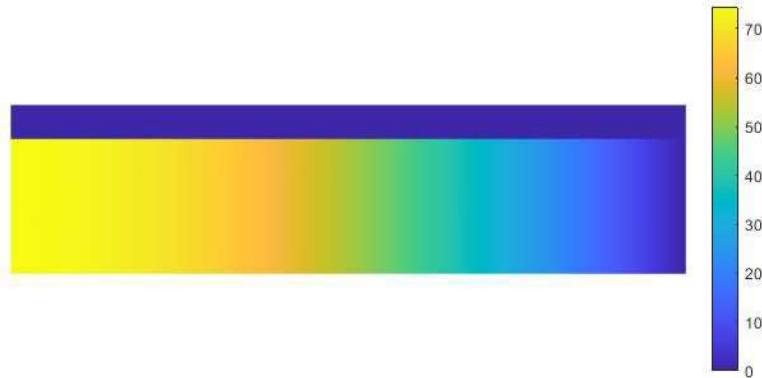


Figura 23. Problema de Mandel: campo de pressões para  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

Os campos de tensões efetivas  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  e  $\tau_{xy}$  são apresentados, respectivamente, na Figura 24, Figura 25 e na Figura 26. Como pode-se observar as tensões de mantêm constantes na amostra e apresentam valores variáveis na placa, como esperado por conta da sua elevada rigidez quando comparada à do solo.



Figura 24. Problema de Mandel: campo de tensões efetivas em x para  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).



Figura 25. Problema de Mandel: campo de tensões efetivas em y para  $T_v = 1,00$ .  
Tensão efetiva em y

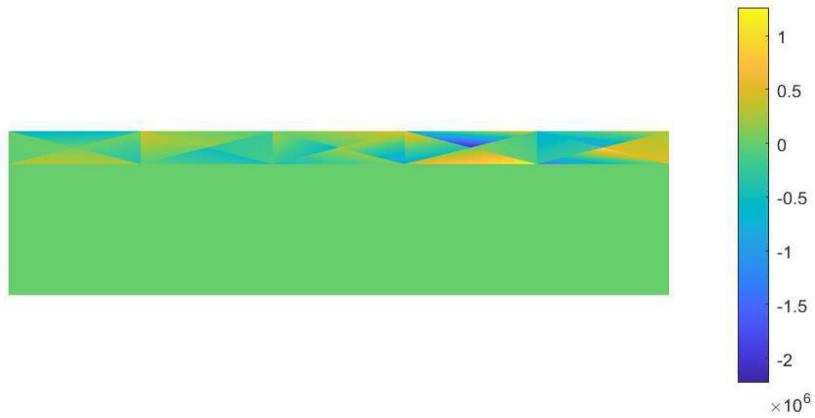


Figura 26. Problema de Mandel: campo de tensões cisalhantes para  $T_v = 1,00$ .  
Tensão cisalhante

Os resultados obtidos foram satisfatórios quando comparados com as soluções analíticas. Além disso, a utilização do EFA para a imposição da condição de contorno do problema de Mandel de forma natural, modificando apenas parâmetros intrínsecos ao método, compreende resultados animadores para a solução de problemas de interação solo-estrutura.

#### 8.4.4 Sapata em meio homogêneo – Problema de Schiffman

O presente problema consiste na aplicação de carga por uma sapata em um solo homogêneo, com a solução analítica para o campo de pressões proposta por Schiffman et al. (1969). Sua descrição é apresentada na Figura 27, onde uma carga de  $1.000 MPa$  é aplicada ao longo de  $1,00m$  na superfície do terreno. Como pode-se observar foi utilizada a simetria em relação ao eixo vertical da sapata.

Na modelagem foram utilizadas duas malhas computacionais, uma não-conforme, apresentada na Figura 28, onde uma malha mais refinada foi construída na zona de interesse e a malha mais grosseira, utilizada para que as condições de contorno do problema se mantivessem distantes o suficiente dessa região, conforme consideração tomada na solução analítica. Já a malha conforme é apresentada na Figura 29, onde é possível verificar a presença de uma quantidade significativa de elementos de transição, que possuem tamanho intermediário entre os elementos mais e menos refinados.

Os parâmetros do solo são definidos na Tabela 14 e o fator tempo adimensional dado por:

$$T_V = \frac{Gkt}{\gamma_w} \text{ e } G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (88)$$

onde  $G$  o módulo de cisalhamento.

A malha não-conforme utilizada possui, na região de interface, elementos de malha grossa que compartilham 20 elementos da malha fina em uma única aresta. Um dos objetivos das metodologias de acoplamento de malhas é conseguir capturar diferenças com altas relações entre os tamanhos dos elementos acoplados, aumentando a versatilidade das suas aplicações. Nesse caso, a consistência dos resultados foi avaliada a partir do confronto entre a solução analítica e numérica, realizado na Figura 30 para um  $T_V = 0,10$ . O campo de pressões ao longo de todo o domínio para a malha não-conforme é apresentado na Figura 31, onde pode-se observar a continuidade das pressões ao longo das interfaces das malhas.

Tabela 14. Problema de Schiffman: parâmetros físicos.

Parâmetro	Valor
$E$	$1,00 \times 10^8 MPa$
$\nu$	0,00
$\gamma_w$	$1.000,00 \frac{kgf}{m^3}$
$\kappa$	$\begin{bmatrix} 10^{-8} & 0 \\ 0 & 10^{-8} \end{bmatrix} cm/s$

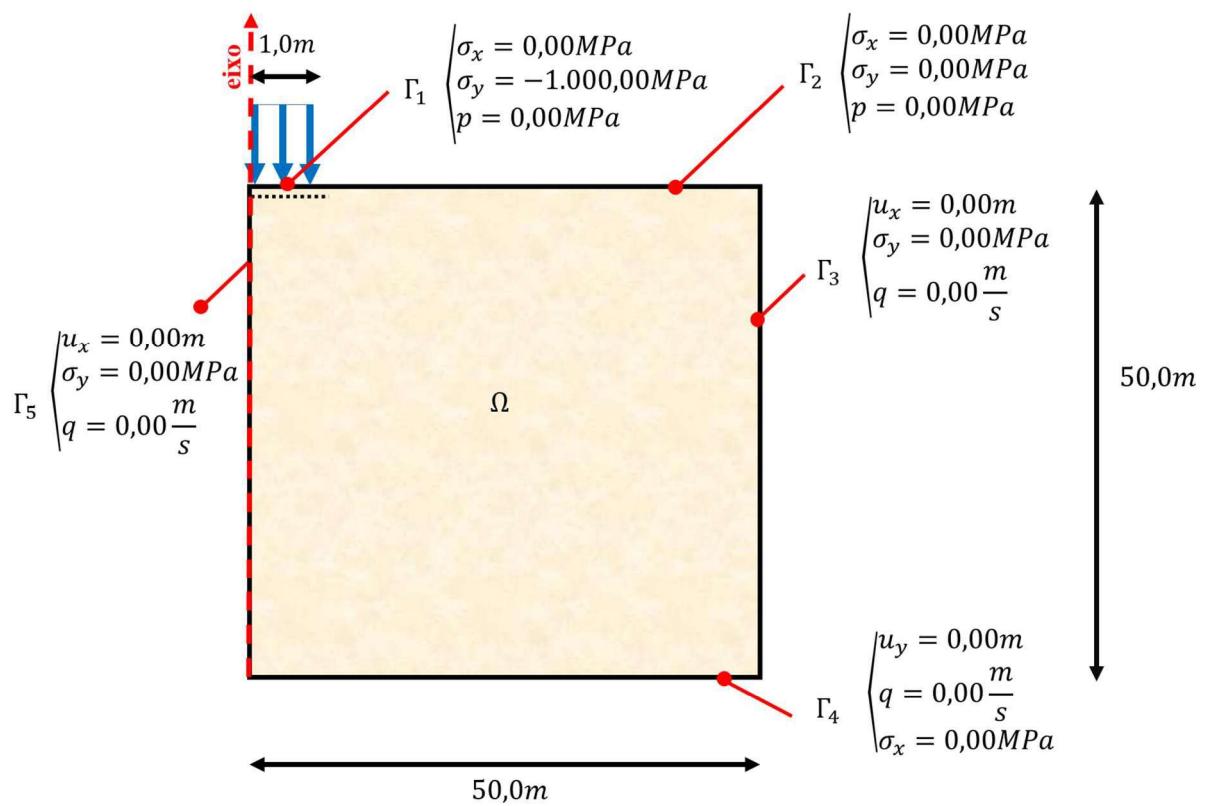


Figura 27. Problema de Schiffman: esquema do caso.

Fonte: O autor (2023).

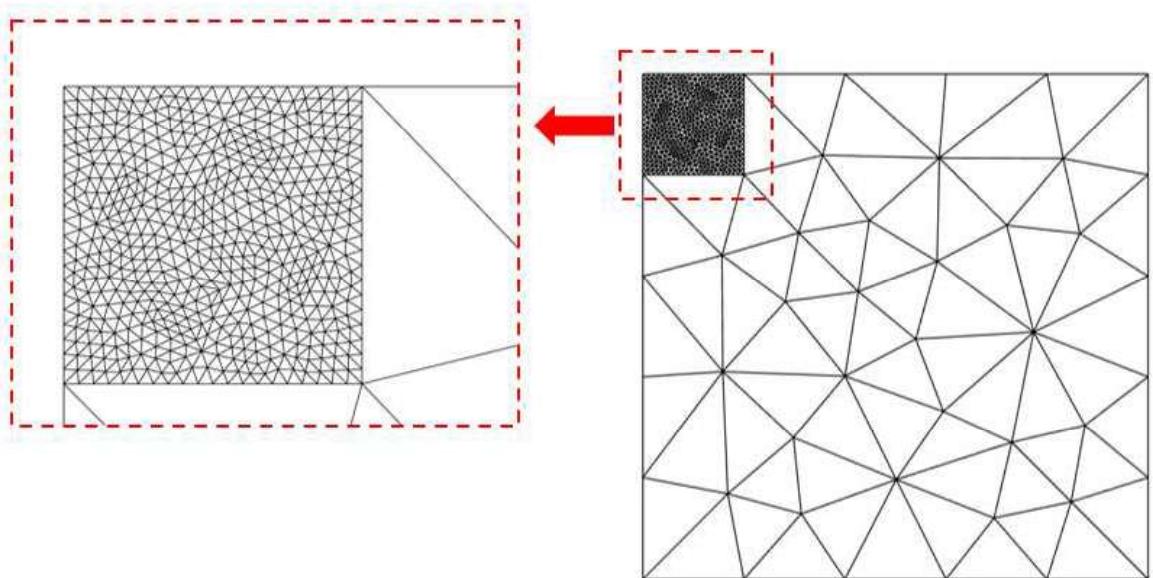


Figura 28. Problema de Schiffman: malha não-conforme.

Fonte: O autor (2023).

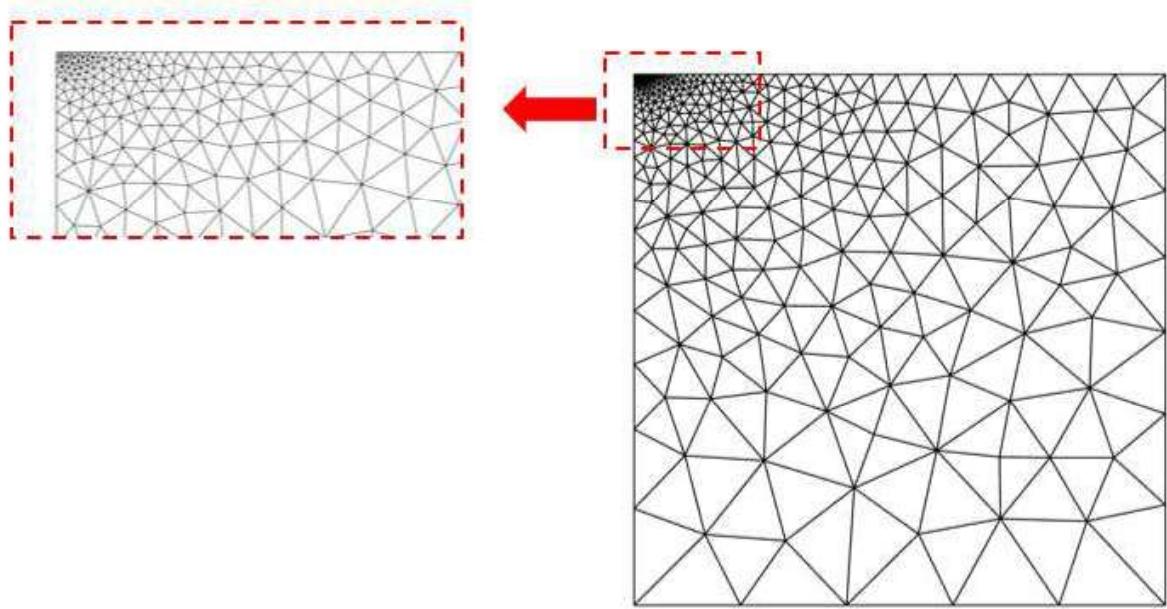


Figura 29. Problema de Schiffman: malha conforme.  
Fonte: O autor (2025).

A utilização da malha não-conforme possibilita que as condições de contorno estejam longe suficientes para que não influenciem significativamente os resultados na zona de interesse. Um estudo sobre esse assunto é apresentado na dissertação de mestrado de Silva (2018) utilizando malhas conformes e considerando outras condições de contorno. A utilização da malha não-conforme também possibilitou a economia na quantidade de graus de liberdade, evitando a necessidade de elementos de transição. Isso otimizou o refinamento da malha e minimizou a possibilidade da presença de elementos deformados ou degenerados que podem afetar a solução.

Os campos de tensões efetivas  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  e  $\tau_{xy}$  são apresentados, respectivamente, na Figura 32, Figura 33 e Figura 34. Nessas figuras é possível verificar o comportamento das tensões e que elas se concentram na região onde foi definida a malha fina.

As deformadas em  $T_V = 0,10$  apresentadas na Figura 35 para a malha conforme e na Figura 36 para a malha não-conforme mostram que o deslocamento da superfície não possui influência perceptível das condições de contorno, o que torna a simulação mais realista comprovando a eficiência da utilização das malhas não-conformes em problemas práticos. As soluções analíticas foram obtidas no programa PSPL (Verruijt, 2023).

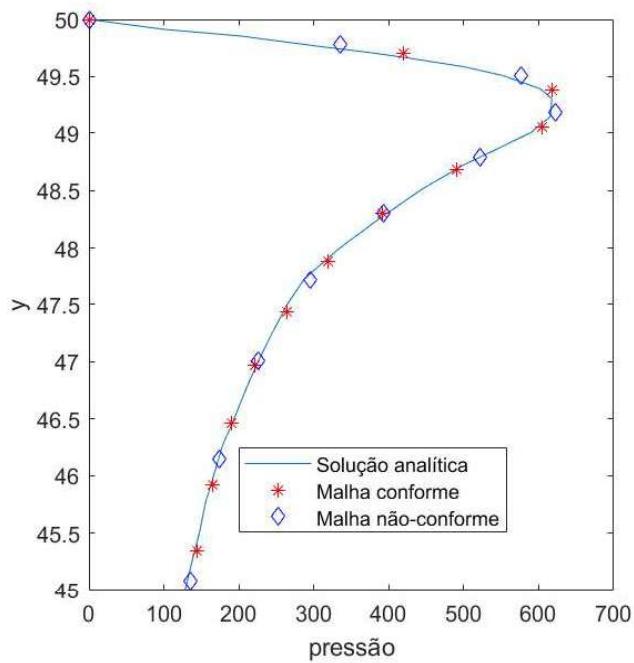


Figura 30. Problema de Schiffman: pressões ao longo do eixo y em  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

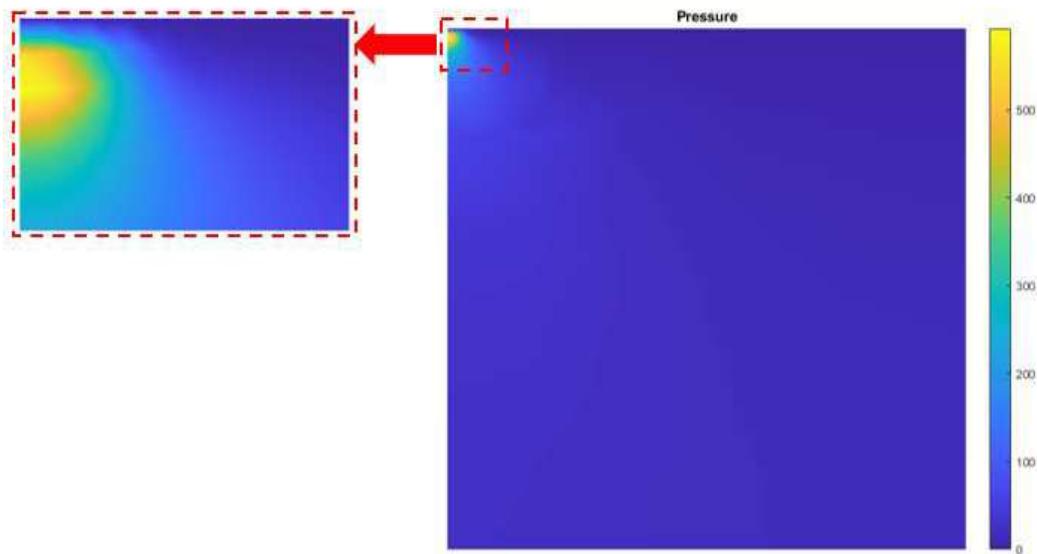


Figura 31. Problema de Schiffman: campo de pressões em  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

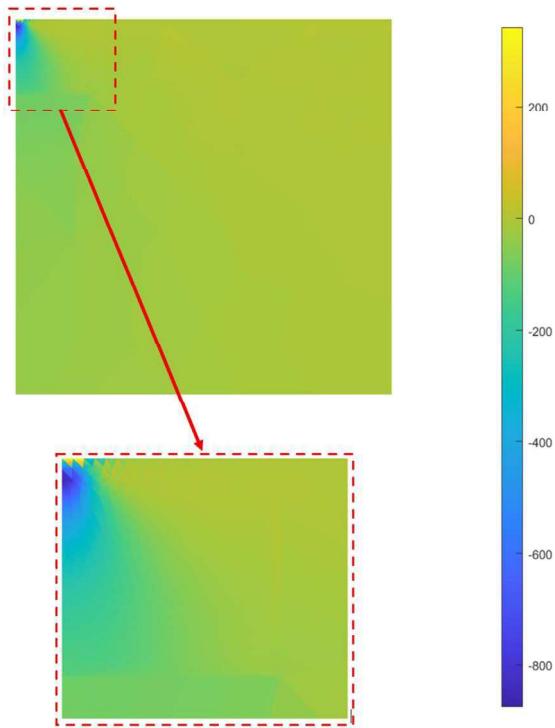


Figura 32. Problema de Schiffman: campo de tensões efetivas em x para  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

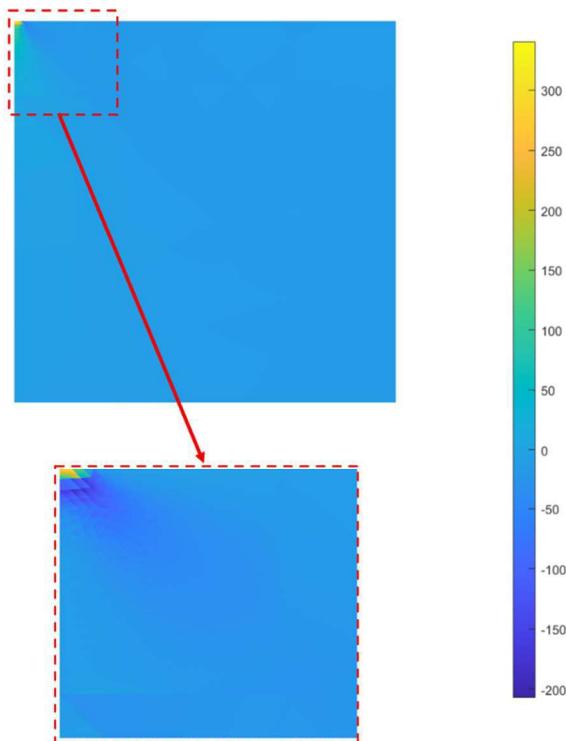


Figura 33. Problema de Schiffman: campo de tensões efetivas em y para  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

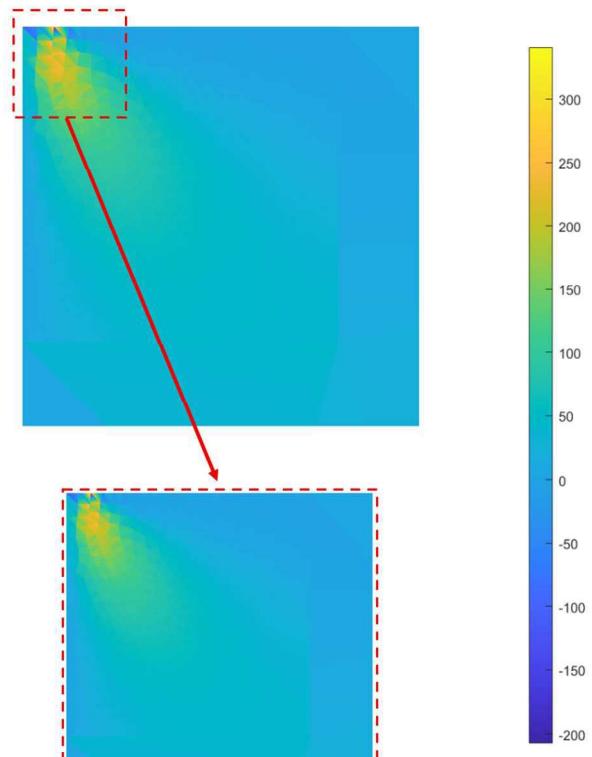


Figura 34. Problema de Schifffman: campo de tensões cisalhantes em  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

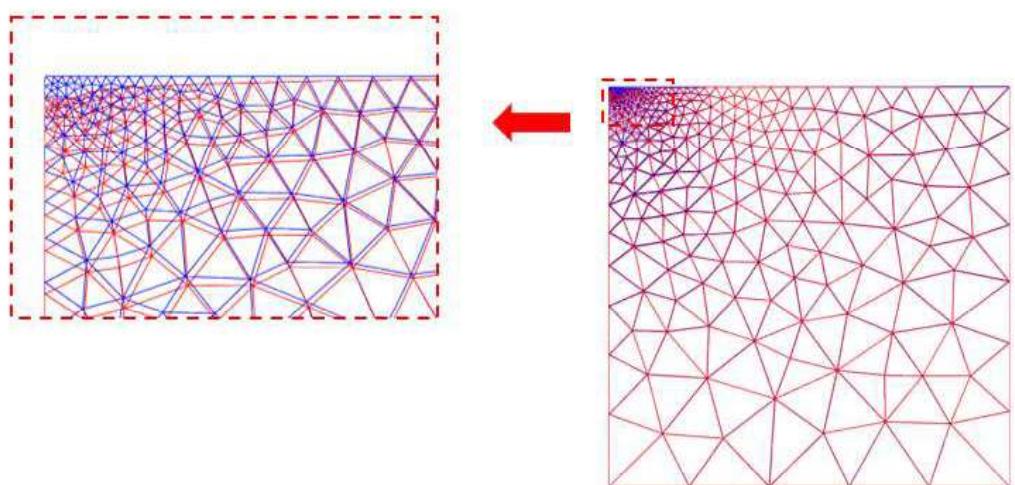


Figura 35. Problema de Schifffman: deformada da malha conforme em  $T_v = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

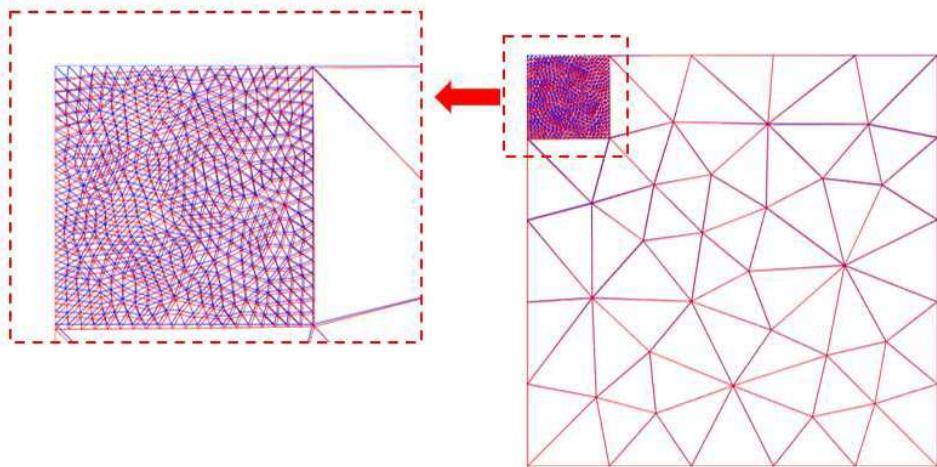


Figura 36. Problema de Schiffman: deformada da malha não-conforme em  $Tv = 1,00$ .  
Fonte: O autor (2025).

## 8.5 CONCLUSÕES

De acordo com a análise dos resultados verifica-se que a aplicação do método dos elementos de acoplamento em uma formulação mista do MEF se mostrou eficiente para a solução de problemas de acoplamento hidromecânico com características encontradas em situações práticas, tais como heterogeneidade e adensamentos bidimensionais. Além disso, as malhas não-conformes permitiram refinar, de forma localizada, regiões do domínio que tenham variações bruscas no gradiente das variáveis analisadas. Também foi possível a utilização de uma malha grosseira nas regiões em torno da zona de interesse, para que as condições de contorno ficassem longe o suficiente, afetando minimamente a solução.

Uma aplicação valiosa foi a utilização dos EFA na solução do problema de Mandel, mostrando sua eficácia em resolver a interação solo-estrutura apenas com a manipulação dos parâmetros  $C_u$  e  $C_p$ .

Uma característica inerente ao método é que não há a necessidade da criação de superfícies intermediárias entre as malhas para o acoplamento, como acontece nos métodos de Mortar, resultando assim em uma solução única, independente da escolha do usuário e sem aumento no número de graus de liberdade.

Outro aspecto relevante da utilização de malhas não-conformes, e que foi verificado no presente trabalho, é a supressão dos elementos de transição utilizados em malhas com diferentes

refinamentos, reduzindo a possibilidade da existência de elementos degenerados e concentrando os graus de liberdade nas regiões de interesse do usuário.

Sendo assim os elementos finitos de acoplamento apresentaram uma forma de otimizar a modelagem de problemas de acoplamento hidromecânico, obtendo resultados satisfatórios quando implementados junto ao MEF misto.

## 9 ESCOAMENTOS BIFÁSICOS EM MEIOS POROSOS

Nesse capítulo será apresentado o desenvolvimento da formulação numérica estabilizada para o escoamento bifásico em meios porosos utilizando malhas não-conformes, para isso é necessário a definição do par de variáveis primais do sistema de equações. No presente trabalho essas variáveis são a pressão da fase não molhante,  $p_n$ , e a saturação da fase molhante,  $s_w$ .

### 9.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

O problema abordado consiste em um escoamento bifásico em um meio poroso, isotérmico, imiscível, sem mudanças de fase, com fluidos newtonianos e que se desenvolve em duas direções coordenadas. Ele é governado pelas equações de conservação da massa e do momento linear para as fases molhante e não-molhante. Para todos os efeitos serão utilizados os subíndices  $w$  e  $n$  para as variáveis correspondentes à fase molhante e não-molhante, respectivamente. O escoamento se desenvolve em um meio poroso rígido, sem a consideração do acoplamento hidromecânico.

A formulação matemática e numérica para o problema apresentado será apresentada a seguir, com base na proposta desenvolvida por Mendonça (2003).

#### 9.1.1 Equações de conservação

As equações que governam o escoamento bifásico em um meio poroso são apresentadas a seguir e consistem na equação de conservação de massa e de momento linear para as fases molhante e não-molhante. A fase não-molhante corresponde ao fluido que tem mais afinidade físico-química com os grãos, que se encontram recobrindo as paredes dos poros. Já o fluido não-molhante tem uma menor afinidade com os grãos e se encontra nas regiões centrais dos poros (Buckley & Leverett, 1942).

$$\frac{\partial(\phi s_w \gamma_w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma_w \mathbf{v}_w) - q_w = 0 \quad (89.a)$$

$$\frac{\partial(\phi \gamma_w \mathbf{u}_w)}{\partial t} + \mathbf{u}_w \nabla \cdot (\gamma_w \mathbf{u}_w) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_w = \gamma_w \mathbf{g} \quad (89.b)$$

$$\frac{\partial(\phi s_n \gamma_n)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma_n \mathbf{v}_n) - q_n = 0 \quad (89.c)$$

$$\frac{\partial(\phi\gamma_n\mathbf{u}_n)}{\partial t} + \mathbf{u}_n \nabla \cdot (\gamma_n \mathbf{u}_n) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_n = \gamma_n \mathbf{g} \quad (89.d)$$

sendo:

- $\mathbf{v}_w$  e  $\mathbf{v}_n$ : velocidade superficial da fase molhante e da fase não-molhante;
- $\mathbf{u}_w$  e  $\mathbf{u}_n$ : velocidade intersticial da fase molhante e da fase não-molhante;
- $\gamma_w$  e  $\gamma_n$ : massa específica da fase molhante e da fase não-molhante;
- $s_w$  e  $s_n$ : saturação da fase molhante e da fase não-molhante;
- $\boldsymbol{\sigma}_w$  e  $\boldsymbol{\sigma}_n$ : tensor de tensões da fase molhante e da fase não-molhante;
- $\mathbf{g}$ : vetor de aceleração gravitacional;
- $t$ : tempo;
- $\phi$ : porosidade do meio.

As relações entre as velocidades superficiais e as velocidades intersticiais das fases são dadas por  $\mathbf{v}_w = \phi\mathbf{u}_w$  e  $\mathbf{v}_n = \phi\mathbf{u}_n$ . A velocidade superficial correspondente à velocidade do escoamento desconsiderando a matriz porosa.

As velocidades da fase molhante e não-molhante são regidas pela lei de Darcy conforme as equações abaixo.

$$\mathbf{v}_w = -\frac{k_{rw}}{\mu_w} \boldsymbol{\kappa}(\nabla p_w - \gamma_w \mathbf{g}) \quad (90.a)$$

$$\mathbf{v}_n = -\frac{k_{rn}}{\mu_n} \boldsymbol{\kappa}(\nabla p_n - \gamma_n \mathbf{g}) \quad (90.b)$$

sendo:

- $\boldsymbol{\kappa}$ : tensor de permeabilidades absoluta do meio;
- $k_{rw}$  e  $k_{rn}$ : permeabilidade relativa da fase molhante e da fase não-molhante;
- $\mu_w$  e  $\mu_n$ : viscosidade dinâmica da fase molhante e da fase não-molhante;
- $p_w$  e  $p_n$ : pressão da fase molhante e da fase não-molhante.

### 9.1.2 Pressão capilar

A pressão capilar representa a diferença entre as pressões dos fluidos presentes no meio poroso e é discutida por Muskat & Wyckoff (1946). Para o caso de escoamentos bifásicos imiscíveis em meios porosos a pressão capilar é dada por:

$$p_c = p_n - p_w \quad (91)$$

### 9.1.3 Forma geral das equações do escoamento bifásico imiscível em meios porosos

A obtenção da forma geral do sistema de equações que rege os escoamentos bifásicos imiscíveis em meios porosos é dada a partir da combinação de 4 equações: a equação de conservação de massa da fase molhante, a equações de conservação de massa da fase não-molhante, a relação entre as saturações da fase molhante e não-molhante e a relação entre as pressões das fases, regida pelo conceito de pressão capilar.

Esse sistema é apresentado na equação 92 e é altamente não-linear, já que a pressão capilar e a permeabilidade são funções das saturações das fases.

$$\begin{cases} \frac{\partial(\phi s_w \gamma_w)}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \gamma_w \frac{k_{rw}}{\mu_w} \mathbf{k}(\nabla p_w - \gamma_w \mathbf{g}) \right) - q_w = 0 \\ \frac{\partial(\phi s_n \gamma_n)}{\partial t} - \nabla \cdot \left( \gamma_n \frac{k_{rn}}{\mu_n} \mathbf{k}(\nabla p_n - \gamma_n \mathbf{g}) \right) - q_n = 0 \\ s_w + s_n = 1 \\ p_c = p_w - p_n = f(s_w, s_n) \end{cases} \quad (92)$$

Como pode ser observado, o sistema de equações possui 4 incógnitas:  $s_w$ ,  $s_n$ ,  $p_w$  e  $p_n$ . Porém, como essas variáveis se interrelacionam, é conveniente escrever o sistema em função do par de variáveis primas  $s_w - p_n$ , de forma que a apresentação das equações se torne mais elegantes e que o número de variáveis seja reduzido. Para isso, serão definidos, a seguir, conceitos e as manipulações necessárias para a obtenção do sistema final de equações que é constituído pela equação de pressão e pela equação de saturação.

#### 9.1.4 Permeabilidade absoluta e permeabilidade relativa

Para o escoamento bifásico em meios porosos são utilizados dois conceitos de permeabilidades, apresentados a seguir.

O primeiro conceito representa a capacidade do meio em permitir o escoamento, chamado permeabilidade absoluta, que é intrínseca ao meio e definida pelo tensor  $\mathbf{k}$ . Essa capacidade é ponderada pela permeabilidade relativa, que representa o quanto as saturações das fases influenciam nos seus escoamentos. Cada fase apresenta uma permeabilidade relativa que é função do grau de saturação. Essa variável pode ser obtida em experimentos de laboratórios para casos específicos. No presente trabalho serão utilizadas as seguintes relações clássicas da engenharia de reservatórios (Mendonça, 2003), onde as permeabilidades relativas da fase molhante ( $k_{rw}$ ) e da fase não-molhante ( $k_{rn}$ ) são definidas a seguir.

$$k_{rw} = (s_w)^2 \quad (93.a)$$

$$k_{rn} = (1 - s_w)^2 \quad (93.b)$$

#### 9.1.5 Mobilidades das fases

As mobilidades das fases são grandezas que mensuram a capacidade de um fluido se deslocar em um meio poroso quando está sujeito a um gradiente de pressão. Nesse contexto, a mobilidade da fase molhante ( $\lambda_w$ ) e da fase não-molhante ( $\lambda_n$ ) são definidas a seguir.

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w} \quad (94.a)$$

$$\lambda_n = \frac{k_{rn}}{\mu_n} \quad (94.b)$$

#### 9.1.6 Equação de pressão

Para a obtenção da equação de pressão escreve-se as equações de conservação de massa das fases da seguinte forma.

$$\frac{\partial(\phi s_w)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_w - \frac{q_w}{\gamma_w} = 0 \quad (95.a)$$

$$\frac{\partial(\phi s_n)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_n - \frac{q_n}{\gamma_n} = 0 \quad (95.b)$$

Somando as equações 95.a e 95.b obtém-se as seguintes expressões.

$$\frac{\partial[\phi(s_w + s_n)]}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_w) - (Q_w + Q_n) = 0 \quad (96)$$

onde:

$$Q_w = \frac{q_w}{\gamma_w} \quad (97.a)$$

$$Q_n = \frac{q_n}{\gamma_n} \quad (97.b)$$

A velocidade total do escoamento é definida por  $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_w$  e a vazão volumétrica total das fases por unidade de volume é dada por  $Q_t = Q_w + Q_n$ . Sendo assim a equação acima pode ser escrita, de maneira compacta, como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_t - Q_t = 0 \quad (98)$$

Utilizando as equações 94.a, 94.b, que definem as mobilidades das fases, na expressão da velocidade total, obtida a partir da soma das equações 90.a e 90.b., obtém-se:

$$\mathbf{v}_t = -\lambda_w \mathbf{k} \nabla p_w - \lambda_n \mathbf{k} \nabla p_n + \mathbf{k} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) \quad (99)$$

Utilizando a definição da pressão capilar, é possível definir as seguintes relações:

$$p_c = p_n - p_w \quad e \quad \nabla p_c = \nabla p_n - \nabla p_w \quad e \quad \nabla p_w = \nabla p_n - \nabla p_c \quad (100)$$

Como a pressão capilar é função de  $s_w$ , o gradiente de  $p_w$  é dado por:

$$\nabla p_w = \nabla p_n - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \quad (101)$$

Utilizando essa definição na equação 99 obtém-se:

$$\mathbf{v}_t = -\lambda_w \mathbf{k} \left( \nabla p_n - \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \right) - \lambda_n \mathbf{k} \nabla p_n + \mathbf{k} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) \quad (102)$$

Utilizando a definição da mobilidade total ( $\lambda_t = \lambda_w + \lambda_n$ ) na equação acima tem-se a forma final da equação de velocidade, dada pela equação 103.

$$\mathbf{v}_t = -\lambda_t \mathbf{k} \nabla p_n + \lambda_w \mathbf{k} \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w + \mathbf{k} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) \quad (103)$$

Substituindo a equação 103 na equação 98 obtém-se a equação de pressão, dada por:

$$\nabla \cdot \left[ -\lambda_t \mathbf{k} \nabla p_n + \lambda_w \mathbf{k} \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w + \mathbf{k} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) \right] + Q_t = 0 \quad (104)$$

Para escoamentos incompressíveis, como é o caso do presente trabalho, a equação de pressão é elíptica.

### 9.1.7 Fluxos fracionários

Os fluxos fracionários das fases representam a fração total do fluxo correspondente à fase avaliada. A seguir são definidos o fluxo fracionário da fase molhante ( $f_w$ ) e não-molhante ( $f_n$ ).

$$f_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_w} \quad (105.a)$$

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_n + \lambda_w} \quad (105.b)$$

A partir dessas definições é possível escrever as seguintes relações:

$$\frac{df_n}{ds_w} = -\frac{df_w}{ds_w} \quad (106.a)$$

$$f_n + f_w = 1 \quad (106.b)$$

$$-Q_n + f_n Q_t = Q_w - f_w Q_t \quad (106.c)$$

### 9.1.8 Equação de saturação

Para a realização da demonstração da equação de saturação utilizam-se as definições apresentadas nas equações 100 e 94.b na equação da velocidade da fase não-molhante (equação 90.b) obtendo:

$$\mathbf{v}_n = -\lambda_n \mathbf{k}(\nabla p_w + \nabla p_c - \gamma_n \mathbf{g}) \quad (107)$$

A combinação dessa equação com a equação da velocidade de percolação da fase molhante fornece a equação de escoamento fracional.

$$\mathbf{v}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_n} \mathbf{v}_n + \lambda_w \mathbf{k}(\nabla p_c - \gamma_n \mathbf{g} + \gamma_w \mathbf{g}) \quad (108)$$

Utilizando a definição de velocidade total na equação 108 obtém-se:

$$\mathbf{v}_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda_w}{\lambda_n}\right)} [\mathbf{v}_t - \lambda_w \mathbf{k}(\nabla p_c - \gamma_n \mathbf{g} + \gamma_w \mathbf{g})] \quad (109)$$

Substituindo a equação 109 na equação de conservação de massa na fase molhante, equação 95.b, e utilizando o conceito de fluxo fracionário da fase não-molhante, equação 105.a, obtém-se:

$$\nabla \cdot [f_n \mathbf{v}_t - h_w \mathbf{k}(\nabla p_c - \gamma_n \mathbf{g} + \gamma_w \mathbf{g})] = \phi \frac{\partial(s_n)}{\partial t} - Q_n \quad (110)$$

Uma variável auxiliar, que é função das mobilidades das fases ( $h_w$ ) é definida como:

$$h_w = \frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_n + \lambda_w} \quad (111)$$

Os termos que são função de  $s_w$  na equação 110 são desenvolvidos nas equações 112, 113 e 114.

$$\nabla \cdot (f_n \mathbf{v}_t) = \mathbf{v}_t \cdot \nabla f_n + f_n \nabla \cdot (\mathbf{v}_t) = \mathbf{v}_t \cdot \frac{df_n}{ds_w} \nabla s_w + f_n Q_t \quad (112)$$

$$\nabla \cdot [h_w \mathbf{k}(\gamma_w \mathbf{g} - \gamma_n \mathbf{g})] = \mathbf{k} \mathbf{g} (\gamma_w - \gamma_n) \nabla h_w = \mathbf{k} \mathbf{g} (\gamma_w - \gamma_n) \cdot \frac{dh_w}{ds_w} \nabla s_w \quad (113)$$

$$\nabla p_c = \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \quad (114)$$

O termo fonte total é dado pela soma das contribuições da fase molhante e não-molhante, conforme apresentado na equação 115.

$$Q_t = Q_w + Q_n \quad (115)$$

Aplicando as definições apresentadas nas equações 112, 113 e 114 na equação 110, obtém-se:

$$\phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + \left[ \mathbf{v}_t \frac{df_w}{ds_w} + \mathbf{k} \mathbf{g} \bar{G} \right] \cdot \nabla s_w + \nabla \cdot \left[ h_w \mathbf{k} \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \right] + Q_w - f_w Q_t = 0 \quad (116)$$

sendo:

$$\bar{G} = (-\gamma_n + \gamma_w) \frac{dh_w}{ds_w} \quad (117)$$

Nas vizinhanças dos poços as fontes e os sumidouros injetam e extraem fluidos com uma taxa proporcional às mobilidades locais, de acordo com a seguinte expressão:

$$Q_w = f_w Q_t = f_w \nabla \cdot \mathbf{v}_t \quad (118)$$

Substituindo a equação 118 na equação 116 chega-se à equação de saturação na sua forma final:

$$\emptyset \frac{\partial s_w}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla s_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla s_w = 0 \quad (119)$$

Na equação 119 o primeiro termo é o de acúmulo, o segundo termo o convectivo e o terceiro o difusivo. Essa equação possui caráter altamente não-linear pois as grandezas que compõem a equação de saturação, tais como a pressão capilar e permeabilidade relativa das fases são funções de  $s_w$  (Mendonça, 2003).

A velocidade aparente do escoamento é dada por  $\mathbf{v}_a$  e representa a velocidade efetiva da frente de saturação da fase molhante no escoamento. Essa velocidade é escrita, de forma vetorial, como:

$$\mathbf{v}_a = \begin{bmatrix} v_{ax} \\ v_{ay} \end{bmatrix} \quad (120)$$

onde suas componentes são dadas por:

$$v_{ax} = v_x \frac{df_w}{ds_w} + (k_x g_x + k_{xy} g_y) \bar{G} \quad (121.a)$$

$$v_{ay} = v_y \frac{df_w}{ds_w} + (k_{xy} g_x + k_y g_y) \bar{G} \quad (121.b)$$

O tensor de difusão ( $\mathbf{D}$ ) é definido pela equação 122. Sua nomenclatura é dada dessa forma pois apesar do termo ser referente aos efeitos capilares, o comportamento desses efeitos é semelhando à difusão.

$$\mathbf{D} = h_w \kappa \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w \quad (122)$$

### 9.1.9 Sistema de equações para o escoamento bifásico em meios porosos

A Figura 37 apresenta um esquema do escoamento bifásico. Nessa figura são definidas as subdivisões do contorno, de acordo com o tipo de condição imposta, e ilustra o escoamento bifásico a partir da interface entre dois fluidos.

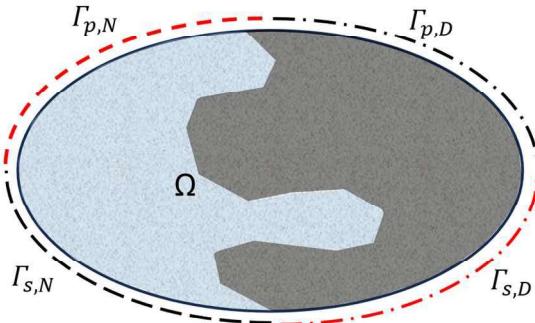


Figura 37. Domínios e contornos no problema de escoamento bifásico.  
Fonte: o autor (2025).

O sistema de equações que rege o escoamento bifásico imiscível em meios porosos é composto pela equação de pressão, a equação de pós-processamento da velocidade total do escoamento e a equação de saturação, demonstradas nas seções anteriores e dadas por:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v}_t - Q_t = 0 \\ \mathbf{v}_t = -\kappa \lambda_t \nabla p_n + \kappa \lambda_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w + \kappa \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) \\ \phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla s_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla s_w = 0 \end{cases} \quad (123)$$

#### 9.1.9.1 Condições iniciais e de contorno

O sistema de equações possui duas condições de contorno essenciais, que são as pressões e saturações conhecidas, respectivamente, por  $p_b$  e  $s_b$  e duas condições de contorno naturais, que são o fluxo e a derivada da saturação, dadas, respectivamente, por  $q_b$  e  $a_b$ . A Figura 37 ilustra as regiões onde essas condições são aplicadas, e elas são definidas matematicamente no conjunto de equações 124:

$$p(\mathbf{x}, t) = p_b \text{ sobre } \Gamma_{p,D} \times [0, t] \quad (124.a)$$

$$\mathbf{v}_t \cdot \mathbf{n} = q_b \text{ sobre } \Gamma_{p,N} \times [0, t] \quad (124.b)$$

$$s_w(\mathbf{x}, t) = s_b \text{ sobre } \Gamma_{s,D} \times [0, t] \quad (124.c)$$

$$\mathbf{D} \nabla s_w \cdot \mathbf{n} = a_b \text{ sobre } \Gamma_{s,N} \times [0, t] \quad (124.d)$$

As pressões e saturações iniciais conhecidas são dadas por  $p_i$  e  $s_i$ , respectivamente. Então, as condições iniciais são definidas como:

$$p_n(\mathbf{x}, 0) = p_i \text{ sobre } \Omega \quad (125.a)$$

$$s_w(\mathbf{x}, 0) = s_i \text{ sobre } \Omega \quad (125.b)$$

As condições de contorno e iniciais completam o sistema de equações para o escoamento bifásico em meios porosos. A solução numérica desse sistema será apresentada a seguir.

## 9.2 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

### 9.2.1 Discretização espacial pelo método dos elementos finitos

De forma análoga à formulação mista do método dos elementos finitos apresentado anteriormente, é necessário realizar a discretização a partir da subdivisão do domínio  $\Omega$  em um conjunto de subdomínios, denominados elementos finitos,  $\Omega_e$ . A divisão apresentada segue as seguintes propriedades  $\Omega = \bigcup_{e=1}^{nel} \Omega_e$  e  $\bigcap_{e=1}^{nel} \Omega_e = \emptyset$ . Os termos  $nel$  e  $e$  são, respectivamente, o número de elementos da malha e o  $e$ -nésimo elemento avaliado.

O conjunto de funções admissíveis para a pressão,  $P^h$ , saturação,  $S^h$ , e funções teste,  $W^h$ , são dadas por:

$$P^h = \{p_n^h / p_n^h \in H^h(\Omega), p_n^h(\mathbf{x}, t) = p_b \text{ em } \Gamma_{p,D}\} \quad (126.a)$$

$$S^h = \{s_w^h / s_w^h \in H^h(\Omega), s_w^h(\mathbf{x}, t) = s_b \text{ em } \Gamma_{s,D}\} \quad (126.b)$$

$$W^h = \{w^h / w^h \in H^h(\Omega), w^h = 0 \text{ em } \Gamma_{p,D} \oplus \Gamma_{s,D}\} \quad (126.c)$$

onde  $h$  indica a discretização em elementos finitos, sendo  $H^h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$  um espaço de dimensões finitas sobre  $\Omega$ . O espaço  $H^1(\Omega)$  é o espaço de funções no qual as primeiras derivadas são quadradas integráveis, ou seja:

$$f \in H^1(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \left( \frac{df}{dx} \right)^2 d\Omega < \infty \quad (127)$$

Tanto as pressões como as saturações foram discretizadas por meio de elementos triangulares lineares, com as variáveis definidas nos vértices do triângulo (funções de interpolação e ponderação lineares, segundo o espaço de Hilbert contínuo por partes,  $\mathcal{H}(P_1)$ ,). A Figura 38 apresenta o esquema de graus de liberdade no elemento.

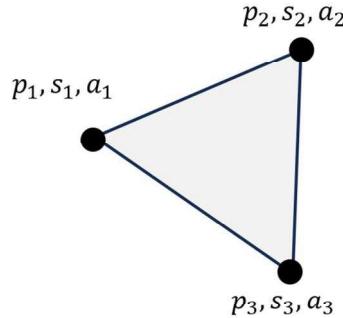


Figura 38. Graus de liberdade do problema bifásico.  
Fonte: o autor (2025).

A equação de pressão é discretizada a partir da formulação clássica de Galerkin, como essa equação é elíptica a formulação é capaz de apresentar bons resultados. Já a equação de saturação possui caráter parabólica-hiperbólica. Esse tipo de equação, quando discretizado pela formulação clássica de Galerkin apresenta oscilações numéricas espúrias.

Visando a obtenção de soluções estabilizadas foram introduzidas estabilizações na direção das linhas de corrente (SUPG – *Streamline Upwind Petrov-Galerkin*) e na direção dos gradientes de saturação (CAU – *Consistent Approximate Upwind*). Essas duas técnicas introduzem termos adicionais à forma discreta da equação de saturação que funcionam como difusões artificiais, minimizando tais oscilações.

#### 9.2.1.1 Forma fraca da equação de pressão

Para a obtenção da forma discreta da equação de pressão aplica-se o método dos resíduos ponderados na equação de conservação de massa (primeira equação do sistema 123), onde  $w^h$  é a função de teste. Essa operação é apresentada na equação 128.

$$\int_{V^e} w^h (\nabla \cdot \mathbf{v}_t - Q_t) dV = 0 \quad (128)$$

Aplicando na equação 128 o teorema da divergência e a integração por partes obtém-se, reorganizando o resultado:

$$- \int_{V^e} \nabla w^h \cdot \mathbf{v}_t dV + \int_{\Gamma^e} w^h \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{V^e} w^h Q_t dV \quad (129)$$

Substituindo a equação de velocidade total (segunda equação do sistema 123) na equação 129 obtém-se a forma fraca da equação de pressão:

$$\begin{aligned} \int_{V^e} \nabla w^h \cdot \mathbf{\kappa} \lambda_t \nabla p_n dV &= \int_{V^e} w^h Q_t dV + \int_{V^e} \nabla w^h \mathbf{\kappa} \lambda_w \frac{dp_c}{ds_w} \nabla s_w dV \\ &+ \int_{V^e} \nabla w^h \mathbf{\kappa} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) dV \end{aligned} \quad (130)$$

#### 9.2.1.2 Pós-processamento do campo de velocidades

Para a obtenção do campo de velocidades é utilizada uma técnica de pós-processamento proposta por Malta et al. (2000) pois, quando ele é calculado diretamente utilizando a lei de Darcy os resultados não são satisfatórios, pois essa abordagem não garante a conservação de massa (Loula et al., 1999; Malta et al., 2000; Masud & Hughes, 2002).

Para a realização do pós-processamento é necessário conhecer o campo de pressões  $p_n$  e saturações  $s_w$  e definir:

$$U^h = \{\mathbf{w}^h \in H^h(\Omega) \times H^h(\Omega), \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ em } \Gamma_n\} \quad (131)$$

O campo de velocidades é obtido a partir da determinação de  $\tilde{\mathbf{v}}_t \in U^h$  tal que  $\forall \mathbf{w}^h \in U^h$ . A partir disso tem-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{V^e} \mathbf{w}^h \left( \tilde{\mathbf{v}}_t - \kappa \lambda_t \nabla p_n - \kappa \lambda_w \frac{dp_c}{dS_w} \nabla S_w - \kappa \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) \right) dV \\
& + \sum_{e=1}^{nel} \int_{V^e} \delta \nabla \cdot \mathbf{w}^h (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}_t - Q_t) dV = 0
\end{aligned} \tag{132}$$

sendo o termo  $\tilde{\mathbf{v}}_t$  a velocidade pós-processada e  $\delta$  um parâmetro que depende do tamanho do elemento avaliado. Esse parâmetro é dado por  $\delta = h_e/2$ , onde  $h_e$  é o tamanho característico do elemento dado por  $h_e = \sqrt{2A}$ , sendo  $A$  a área do elemento.

#### 9.2.1.3 Formulação estabilizada da equação de saturação

Para a obtenção da formulação estabilizada da equação de saturação define-se, previamente, um operador bilinear como:

$$L(s_w, \mathbf{v}_a) = \phi \frac{\partial s_w}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla s_w + \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla s_w = 0 \tag{133}$$

onde  $\mathbf{v}_a$  é a velocidade aparente de escoamento.

A formulação estabilizada de Petrov-Galerkin consiste em encontrar  $s_w \in S^h$  tal que  $\forall w^h \in W^h$ , a forma fraca da equação de saturação é, então, dada por:

$$\int_{V^e} w^h L(s_w, \mathbf{v}_a) dV + \sum_{e=1}^{nel} \int_{V^e} \tau_1 \mathbf{v}_a \cdot \nabla w^h L(s_w, \mathbf{v}_a) dV + \sum_{e=1}^{nel} \int_{V^e} \tau_2 \nabla w^h \cdot \nabla s_w dV = 0 \tag{134}$$

Nessa equação o primeiro termo é referente à formulação clássica de Galerkin, o segundo termo é referente à correção SUPG e o terceiro termo referente à correção CAU.

Os termos de estabilização estão definidos no conjunto de equações 135.

$$\tau_1 = \frac{\delta_1^e}{|\mathbf{v}_a^e|} \min \left( \frac{Pe^e}{3}, 1 \right) \tag{135.a}$$

$$Pe^e = \delta_1^e \frac{|\mathbf{v}_a^e|^3}{\mathbf{v}_a^{eT} \mathbf{D} \mathbf{v}_a^e} \tag{135.b}$$

$$\tau_2 = \frac{|L(s_w, \mathbf{v}_a^e)|}{|\nabla s_w^e|} \delta_2^e \min\left(\frac{Pe_{//}^e}{4}, 1\right) \quad (135.c)$$

$$Pe_{//}^e = \delta_2^e \frac{|\mathbf{v}_{a//}^e|^3}{\mathbf{v}_{a//}^e \mathbf{v}_{a//}^e} \quad (135.d)$$

$$\mathbf{v}_{a//}^e = \frac{\mathbf{v}_a^e \cdot \nabla s_w^e}{|\nabla s_w^e|^2} \nabla s_w^e \quad (135.e)$$

Nos parâmetros acima  $Pe^e$  é o número de Peclet avaliado em cada elemento. Essa variável apresenta a relação entre os efeitos convectivos e difusivos do escoamento. Em todas as definições o superíndice  $e$  e o subíndice  $//$  indicam, respectivamente, que a variável foi avaliada no interior do elemento e que a variável é obtida na direção paralela ao gradiente da saturação no elemento ( $s_w^e$ ).

#### 9.2.1.4 Vetores e matrizes locais do problema bifásico

Utilizando as definições apresentadas na seção 7 nas equações 130, 132 e 134 é possível obter as formas compacta das respectivas equações como:

$$\mathbf{h}\mathbf{p} = \mathbf{q} \quad (136.a)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (136.b)$$

$$\mathbf{m}\mathbf{a} + \mathbf{c}\mathbf{s} = \mathbf{f}_s \quad (136.c)$$

onde:

- $\mathbf{h}$  é a matriz de condutividade hidráulica;
- $\mathbf{q}$  é o vetor de fluxos prescritos;
- $\mathbf{p}$  vetor das pressões nos nós do elemento;
- $\tilde{\mathbf{k}}$  matriz dos coeficientes;
- $\tilde{\mathbf{f}}$  vetor dos termos independentes;
- $\tilde{\mathbf{v}}$  vetor das velocidades nos nós do elemento;
- $\mathbf{m}$  é a matriz de massa;
- $\mathbf{c}$  matriz de convecção;
- $\mathbf{a}$  vetor das derivadas da saturação da fase molhante nos nós do elemento;

- $\mathbf{s}$  das saturações nos nós do elemento.

e

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_q + \mathbf{q}_{sw} + \mathbf{q}_g + \mathbf{q}_p \quad (137.a)$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \tilde{\mathbf{k}}_a + \tilde{\mathbf{k}}_b \quad (137.b)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{f}}_q - \tilde{\mathbf{f}}_p + \tilde{\mathbf{f}}_{sw} + \tilde{\mathbf{f}}_g \quad (137.c)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_g + \mathbf{m}_{pg} \quad (137.d)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_g + \mathbf{c}_{pg} + \mathbf{c}_{dg} + \mathbf{c}_{op} \quad (137.e)$$

Nas definições dos termos independentes, apresentadas no conjunto de equações 137,  $\mathbf{q}_q$  e  $\tilde{\mathbf{f}}_q$  são associados ao termo fonte do domínio,  $\mathbf{q}_p$  e  $\tilde{\mathbf{f}}_p$  às pressões,  $\mathbf{q}_{sw}$  e  $\tilde{\mathbf{f}}_{sw}$  às saturações e  $\mathbf{q}_g$  e  $\tilde{\mathbf{f}}_g$  aos efeitos gravitacionais. O termo  $\mathbf{f}_s$  introduz a contribuição das condições de contorno das saturações.

A matriz de coeficientes da equação de pós-processamento das velocidades,  $\tilde{\mathbf{k}}$ , é decomposta em duas partes (equação 137.b), a matriz  $\tilde{\mathbf{k}}_a$ , que representa a discretização pelo método clássico de Galerkin e a matriz  $\tilde{\mathbf{k}}_b$ , que tem função estabilizadora.

De forma análogo à matriz  $\tilde{\mathbf{k}}$ , matriz de massa da equação de saturação,  $\mathbf{m}$ , é decomposta em duas partes (equação 137.d), a matriz  $\mathbf{m}_g$ , que corresponde ao termo clássico de Galerkin, e o matriz  $\mathbf{m}_{pg}$ , que corresponde ao termo estabilizador na direção das velocidades.

Já a matriz de convecção da equação de saturação,  $\mathbf{c}$ , é decomposta em 4 partes, sendo  $\mathbf{c}_g$  referente à parcela do método clássico de Galerkin,  $\mathbf{c}_{pg}$  à correção SUPG da matriz de convecção,  $\mathbf{c}_{dg}$  à matriz de difusão e  $\mathbf{c}_{op}$  à matriz de correção do operador de captura de descontinuidade.

Os termos da equação de pressão, do pós-processamento do campo de velocidades e da equação de saturação são determinados de acordo com os conjuntos de equações 138, 139 e 140, respectivamente.

$$\mathbf{h} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \lambda_t \mathbf{B} dV \quad (138.a)$$

$$\mathbf{q}_q = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dV \quad (138.b)$$

$$\mathbf{q}_{sw} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{\kappa} \lambda_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} dV \quad (138.c)$$

$$\mathbf{q}_g = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{\kappa} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) dV \quad (138.d)$$

$$\mathbf{q}_p = -\mathbf{h} \mathbf{p} \quad (138.e)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_a = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (139.a)$$

$$\tilde{\mathbf{k}}_b = \delta \int_{V^e} \mathbf{D}_{div}^T \mathbf{D}_{div} dV \quad (139.b)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_q = \delta \int_{V^e} \mathbf{D}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dV \quad (139.c)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_p = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{\kappa} \lambda_t \mathbf{B} \mathbf{p} dV \quad (139.d)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_{sw} = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{\kappa} \lambda_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} dV \quad (139.e)$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_g = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{\kappa} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) dV \quad (139.f)$$

$$\mathbf{m}_g = \int_{V^e} \phi \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (140.a)$$

$$\mathbf{m}_{pg} = \int_{V^e} \mathbf{B}_x^T \phi \tau_1 \mathbf{v}_{ax} \mathbf{N} dV + \int_{V^e} \mathbf{B}_y^T \phi \tau_1 \mathbf{v}_{ay} \mathbf{N} dV \quad (140.b)$$

$$\mathbf{c}_g = \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{v}_{ax} \mathbf{B}_x dV + \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{v}_{ay} \mathbf{B}_y dV \quad (140.c)$$

$$\mathbf{c}_{pg} = \int_{V^e} \tau_1 \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dV \text{ sendo } \mathbf{A} = \mathbf{v}_a \otimes \mathbf{v}_a \quad (140.d)$$

$$\mathbf{c}_{dg} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \quad (140.e)$$

$$\mathbf{c}_{op} = \int_{V^e} \tau_2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \quad (140.f)$$

$$\mathbf{f}_s = -(\mathbf{m}\mathbf{a} + \mathbf{c}\mathbf{s}) \quad (140.g)$$

O termo  $\mathbf{f}_\Gamma$  leva em consideração os fluxos prescritos nas arestas de contorno. Esse termo é calculado em cada aresta e armazenado diretamente no vetor global definido a seguir.

#### 9.2.1.5 Construção das matrizes globais do problema bifásico para malhas não-conformes

As matrizes globais do sistema são construídas com a contribuição das matrizes locais dos elementos finitos e as matrizes dos elementos finitos de acoplamento, conforme apresentado abaixo.

$$\mathbf{H} = \sum_{elem} \mathbf{h} + \sum_{n=1}^{nelc} \mathbf{h}^c = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \lambda_t \mathbf{B} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \lambda_t \mathbf{B} dV \quad (141.a)$$

$$+ \sum_{n=1}^{nelc} \mathbf{B}_p^{c^T} C_p \mathbf{B}_p^c \quad (141.b)$$

$$\mathbf{Q}_q = \sum_{elem} \mathbf{q}_q = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dV \quad (141.c)$$

$$\mathbf{Q}_{sw} = \sum_{elem} \mathbf{q}_{sw} = - \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \lambda_w \frac{dp_c}{dS_w} \mathbf{B} s dV - \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \lambda_w \frac{dp_c}{dS_w} \mathbf{B} s dV \quad (141.d)$$

$$\mathbf{Q}_g = \sum_{elem} \mathbf{q}_g = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) dV$$

$$\mathbf{Q}_p = \sum_{elem} \mathbf{q}_p = - \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \mathbf{h}\mathbf{p} - \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \mathbf{h}\mathbf{p} \quad (141.e)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{elem} (\tilde{\mathbf{k}}_a + \tilde{\mathbf{k}}_b) = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \delta \int_{V^e} \mathbf{D}_{div}^T \mathbf{D}_{div} dV \quad (142.a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_q &= \sum_{elem} \tilde{\mathbf{f}}_q = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \delta \int_{V^e} \mathbf{D}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \delta \int_{V^e} \mathbf{D}^T \mathbf{N} \mathbf{q} dV \\ \tilde{\mathbf{F}}_p &= \sum_{elem} \tilde{\mathbf{f}}_p = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \lambda_t \mathbf{B} \mathbf{p} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \lambda_t \mathbf{B} \mathbf{p} dV \end{aligned} \quad (142.b) \quad (142.c)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_{sw} = \sum_{elem} \tilde{\mathbf{f}}_{sw} = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \lambda_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \lambda_w \frac{dp_c}{ds_w} \mathbf{B} \mathbf{s} dV \quad (142.d)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_g &= \sum_{elem} \tilde{\mathbf{f}}_g = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma + \lambda_n \gamma_n) dV \\ &\quad + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{K} \mathbf{g} (\lambda_w \gamma_w + \lambda_n \gamma_n) dV \end{aligned} \quad (142.e)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{elem} (\mathbf{m}_g + \mathbf{m}_{pg}) + \sum_{n=1}^{nelc} \mathbf{t}^c = \\ &\quad \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \phi \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \\ &\quad + \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \left( \int_{V^e} \mathbf{B}_x^T \phi \tau_1 v_{ax} \mathbf{N} dV + \int_{V^e} \mathbf{B}_y^T \phi \tau_1 v_{ay} \mathbf{N} dV \right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \phi \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \end{aligned} \quad (143.a)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \left( \int_{V^e} \mathbf{B}_x^T \phi \tau_1 v_{ax} \mathbf{N} dV + \int_{V^e} \mathbf{B}_y^T \phi \tau_1 v_{ay} \mathbf{N} dV \right) \\
& + \sum_{n=1}^{nelc} \mathbf{B}_p^c {}^T C_s \mathbf{B}_p^c \\
\mathbf{C}_g = \sum_{elem} & (\mathbf{c}_g + \mathbf{c}_{pg} + \mathbf{c}_{dg} + \mathbf{c}_{op}) \\
& + \sum_{n=1}^{nelc} \mathbf{t}^c = \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \left( \int_{V^e} \mathbf{N}^T v_{ax} \mathbf{B}_x dV + \int_{V^e} \mathbf{N}^T v_{ay} \mathbf{B}_y dV \right) \\
& + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \left( \int_{V^e} \mathbf{N}^T v_{ax} \mathbf{B}_x dV + \int_{V^e} \mathbf{N}^T v_{ay} \mathbf{B}_y dV \right) \\
& + \sum_{n=1}^{nel^1} \int_{V^e} \tau_1 \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \tau_1 \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \\
& + \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV + \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} \int_{V^e} \tau_2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV + \sum_{n=1}^{ne^2} \int_{V^e} \tau_2 \mathbf{B}^T \mathbf{B} dV \\
& + \sum_{n=1}^{nelc} \mathbf{B}_p^c {}^T C_s \mathbf{B}_p^c
\end{aligned} \tag{143.b}$$

$$\mathbf{F}_s = \sum_{elem} \mathbf{f}_s = - \sum_{n=1}^{nel\Omega^1} (\mathbf{m} \mathbf{a} + \mathbf{c} \mathbf{s}) - \sum_{n=1}^{nel\Omega^2} (\mathbf{m} \mathbf{a} + \mathbf{c} \mathbf{s}) \tag{143.c}$$

onde

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_q + \mathbf{Q}_{sw} + \mathbf{Q}_g + \mathbf{Q}_p + \sum_{\Gamma_{p,N}} \mathbf{f}_\Gamma \tag{144.a}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_a + \tilde{\mathbf{K}}_b \tag{144.b}$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}_q - \tilde{\mathbf{F}}_p + \tilde{\mathbf{F}}_{sw} + \tilde{\mathbf{F}}_g \tag{144.c}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_g + \mathbf{M}_{pg} \tag{144.d}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_g + \mathbf{C}_{pg} + \mathbf{C}_{dg} + \mathbf{C}_{op} \tag{144.e}$$

As matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  são as matrizes globais de condutividade hidráulica, do pós-processamento da velocidade, de massa e de convecção. A matriz  $\tilde{\mathbf{K}}$  é dada pela soma das matrizes

globais  $\tilde{\mathbf{K}}_a$ , que representa o termo do método clássico de Galerkin e da matriz  $\tilde{\mathbf{K}}_b$  que é o termo estabilizador do tipo SUPG. A matriz de massa global,  $\mathbf{M}$ , é composta pelo termo clássico de Galerkin,  $\mathbf{M}_g$ , e o termo estabilizador do tipo SUPG,  $\mathbf{M}_{pg}$ . O termo que contempla as condições de contorno da saturação é o  $\mathbf{F}_s$ .

A matriz de convecção global,  $\mathbf{C}$ , é composta pelo termo clássico de Galerkin,  $\mathbf{C}_g$ , pelo termo estabilizador do tipo SUPG,  $\mathbf{C}_{pg}$ , pelo termo de difusão,  $\mathbf{C}_{dg}$ , e pelo termo referente à estabilização pelo operador de captura de descontinuidade,  $\mathbf{C}_{op}$ .

O vetor global da equação de pressão é  $\mathbf{Q}$ , composto pelos vetores com as contribuições dos fluxos prescritos, saturações, efeitos gravitacionais e de pressões que são, respectivamente,  $\mathbf{Q}_q$ ,  $\mathbf{Q}_{sw}$ ,  $\mathbf{Q}_g$  e  $\mathbf{Q}_p$ .

O sistema global é então escrito conforme o conjunto de equações 145.

$$\mathbf{HP} = \mathbf{Q} \quad (145.a)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (145.b)$$

$$\mathbf{MA} + \mathbf{CS} = \mathbf{F}_s \quad (145.c)$$

onde  $\mathbf{P}$ ,  $\tilde{\mathbf{V}}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  são, respectivamente, os vetores globais das pressões, das velocidades, das derivadas temporais da saturação e das saturações.

### 9.2.2 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

O conjunto de equações do problema é discretizado no espaço pelo método dos elementos finitos e no tempo pelo método trapezoidal proposto por Hughes (1987). O avanço temporal será realizado por uma estratégia baseada no algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor (Mendonça, 2003). As estratégias supracitadas estão apresentadas a seguir.

#### 9.2.2.1 Algoritmo sequencialmente implícito

O avanço temporal das soluções numéricas é amplamente resolvido a partir da discretização do termo temporal pelo método de diferenças finitas. Os esquemas mais utilizados são os explícitos, implícitos, semi-implícitos e híbridos. Os esquemas explícitos, apesar de menos custosos computacionalmente necessitam do controle do passo de tempo para garantir a estabilidade da solução. Nesses casos o passo é restrito em função do número de Courant (CFL) (Appau

& Dankwa, 2019). Em contrapartida os esquemas implícitos são incondicionalmente estáveis para qualquer passo de tempo (Appau & Dankwa, 2019; Chen, 2018).

O esquema semi-implícito, abordado no presente trabalho, é uma alternativa interessante em termos de custo computacional para a solução de sistemas de equações. Ele apresenta resultados estáveis independente do passo de tempo e evita o alto custo computacional associado aos esquemas totalmente implícitos (Mendonça, 2003; Gjennestad et al., 2018). Nesses esquemas todas as equações do sistema são resolvidas de maneira acoplada, aumentando significativamente o tamanho das matrizes quando comparada à estratégia semi-implícita.

As equações 145.a e 145.c podem ser escritas como um sistema de equações diferenciais ordinárias apresentado na equação 146:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_p(p, s_w, t) \\ \mathbf{F}_{sat}(p, s_w, \frac{\partial s_w}{\partial t}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_p \\ \mathbf{Q}_s \end{bmatrix} \quad (146)$$

O termo  $\mathbf{F}_p$  é referente a equação de pressão e inclui as derivadas espaciais das pressões e termos capilares. Por conta da definição da permeabilidade relativa, esse termo também é função da saturação. Já o termo  $\mathbf{F}_s$  é referente a equação de saturação e engloba, além das variáveis do termo  $\mathbf{F}_p$ , as derivadas da saturação da fase molhante. Esse termo também é dependente da pressão e da saturação. Os termos do lado direito do sistema,  $\mathbf{Q}_p$  e  $\mathbf{Q}_s$ , correspondem as contribuições das condições de contorno na equação de pressão e de saturação, respectivamente. Conclui-se então que o sistema é altamente não-linear pois as equações estão interligadas fisicamente e matematicamente.

A solução sequencialmente implícita utilizada nesse trabalho segue a seguinte sequência:

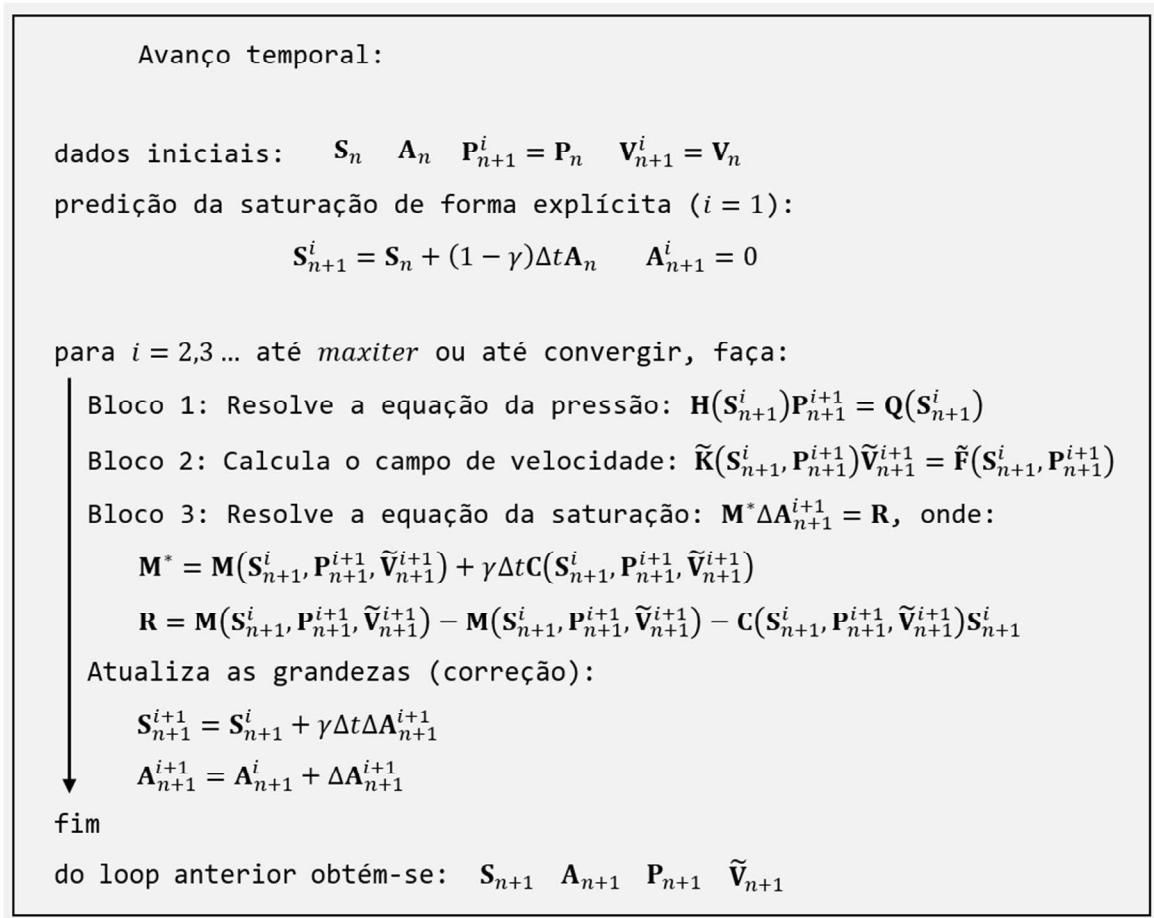
- 1º passo: solução da equação de pressão;
- 2º passo: pós-processamento das velocidades;
- 3º passo: solução da equação de saturação.

Os sistemas de equações da pressão e da velocidade são lineares e simétricos, já o sistema de equações da saturação é não simétrico. A equação de pressão possui caráter elíptico e a equação de saturação caráter parabólico-hiperbólico.

### 9.2.2.2 Algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor

O algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor (Mendonça, 2003; Terry & Rogers, 2015; Coutinho et al., 2003) é uma estratégia utilizada para a solução de sistemas fortemente acoplados, como é o caso do sistema pressão-saturação. Nessa estratégia é realizada uma estimativa inicial da solução, de forma explícita, em cada passo de tempo. De posse dessa estimativa as equações são resolvidas sequencialmente, de forma implícita, até que os critérios de convergência sejam satisfeitos. Esse procedimento é realizado em todos os passos de tempo da simulação.

O avanço de um tempo  $n$  para um tempo  $n + 1$  é obtido de acordo com o algoritmo:



onde:

- $i$ : contador das multicorreções;
- $maxiter$ : número máximo de iterações;
- $\Delta t$ : passo de tempo;

- $\gamma$ : parâmetro de ajuste do método;
- $\Delta \mathbf{A}$ : incremento da derivada temporal das saturações.

#### 9.2.2.3 Critérios de parada do algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor

Os critérios de parada para o algoritmo bloco-iterativo preditor-multicorretor são de dois tipos, o primeiro, como já apresentado, é relativo ao número máximo de iterações  $maxiter$ . O outro critério de parada é pré-determinado de acordo com a convergência do método, que é ocorre a partir da avaliação dos erros definidos no conjunto de equações 147. As iterações acontecem até que um desses critérios seja satisfeito.

$$\mathbf{e}^p = \frac{|\mathbf{p}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{p}_{n+1}^i|}{|\mathbf{p}_{n+1}^{i+1}|} \quad (147.a)$$

$$\mathbf{e}^v = \frac{|\mathbf{v}_{n+1}^{i+1} - \mathbf{v}_{n+1}^i|}{|\mathbf{v}_{n+1}^{i+1}|} \quad (147.b)$$

$$\mathbf{e}^a = \frac{|\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1}|}{|\mathbf{a}_{n+1}^{i+1}|} \quad (147.c)$$

$$\mathbf{e}^R = \frac{|\mathbf{r}_{n+1}^{i+1}|}{|\mathbf{r}_{n+1}^{i=0}|} \quad (147.d)$$

$$\mathbf{e}^E = \sqrt{\frac{(\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i+1})^T \mathbf{r}_{n+1}^{i+1}}{(\Delta \mathbf{a}_{n+1}^{i=0})^T \mathbf{r}_{n+1}^{i=0}}} \quad (147.e)$$

Os erros, definidos no conjunto de equações 147, são:

- $\mathbf{e}^p$ : erro da pressão;
- $\mathbf{e}^v$ : erro da velocidade;
- $\mathbf{e}^a$ : erro da derivada temporal da saturação;
- $\mathbf{e}^R$ : erro no balanço de massa da equação de saturação;
- $\mathbf{e}^E$ : erro da norma da energia.

Os critérios de convergência são dados por:

$$\frac{\mathbf{e}^p}{tol} \leq 1 \quad (148.a)$$

$$\frac{\mathbf{e}^v}{tol} \leq 1 \quad (148.b)$$

$$\mathbf{e}^{sat} = \max \left[ \frac{\mathbf{e}^a}{tol}, \frac{\mathbf{e}^R}{tol}, \frac{\mathbf{e}^E}{tol} \right] \leq 1 \quad (148.c)$$

### 9.3 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

A presente seção apresenta 5 experimentos numéricos que objetivam avaliar a formulação proposta sob condições específicas. Todos os experimentos numéricos propostos possuem soluções de referência apresentadas na literatura e serão avaliados a partir de malhas não-conformes com características diferentes para cada caso.

#### 9.3.1 Injeção unidimensional de fluido – Problema de Buckley-Leverett

O problema de injeção unidimensional, conhecido na literatura como Problema de Buckley-Leverett (Buckley & Leverett, 1942) que tem como objetivo a avaliação do campo de saturação em uma injeção unidimensional em um meio poroso. O problema está sintetizado na Figura 39 e consiste na injeção pela face esquerda do fluido molhante, com o objetivo de deslocar o fluido não-molhante. O domínio utilizado possui dimensões de 4,00m por 0,05m e inicialmente se encontra totalmente saturado pelo fluido não-molhante, então em  $t = 0,00s$  o valor da saturação é  $s_w = 0,00$  em todo o domínio. Na face esquerda a saturação da fase molhante se mantém constante com valor unitário durante toda a injeção e a pressão da fase não-molhante é mantida nula na face direita. O deslocamento do fluido é induzido a partir da imposição de um campo de velocidades totais unitário em todo o domínio ( $\mathbf{v}_t = \mathbf{i}_x$ ). A Tabela 15 apresenta os parâmetros físicos e numéricos utilizados na simulação.

O caso foi resolvido com  $\Delta t = 0,0001s$ , número máximo de iterações para o algoritmo multicompressor igual a 10 e  $tol = 0,01$ . Os resultados obtidos foram comparados com as soluções de referência apresentadas no trabalho de Durlofsky (1993).

Nesse caso o tamanho característico do elemento para o termo estabilizador do CAU é definido como  $\delta_2^e = \eta h_e/2$ .

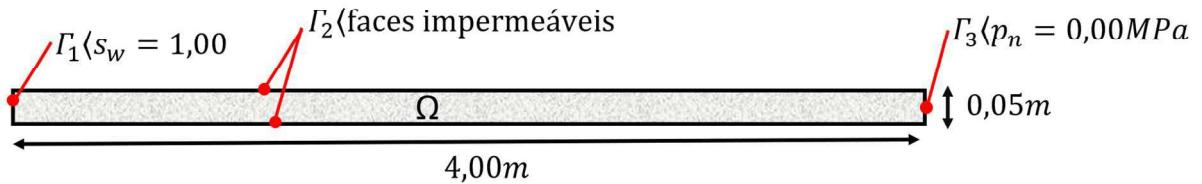


Figura 39. Problema de Buckley e Leverett: esquema do caso.  
Fonte: O autor (2025).

O experimento foi dividido em 13 casos, sintetizados na Tabela 16. Os casos de 1.1 a 1.5 possuem a mesma malha (malha 1), que é apresentada na Figura 40 onde a parte direita do domínio é mais refinada que a parte esquerda, o que diferencia um caso do outro é a utilização ou não dos termos estabilizadores do SUPG e do CAU, além da variação no valor de  $\eta$ .

Todos os outros casos foram resolvidos com os dois termos estabilizadores ativos e com o parâmetro  $\eta = 1,00$ .

Tabela 15. Problema de Buckley e Leverett: parâmetros físicos.

parâmetro	valor
$\mu_n$	$5,00 \text{ Pa.s}$
$\mu_w$	$1,00 \text{ Pa.s}$
$\kappa$	$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ m}^2$
$\phi$	0,20
$C_p, C_s$	$10^5$

Os casos 1.5, 2 e 3 foram resolvidos com as malhas 1, 2 e 3, respectivamente. Todas as malhas são estruturadas, porém a diferença entre a malha 2 e malha 3 em relação à malha 1 são os refinamentos das malhas finas, que podem ser observados na Figura 40, Figura 41 e Figura 42.

Os casos 4.1, 4.2 e 4.3 foram resolvidos com as malhas 4, 5 e 6, apresentadas na Figura 43, Figura 44 e Figura 45. Essas malhas foram construídas de forma análoga às malhas 1, 2 e 3, porém, elas possuem elementos construídos com as hipotenusas alternadas ao longo da direção horizontal.

Os casos 5.1, 5.2 e 5.3 foram resolvidos com as malhas 7, 8 e 9 que, diferente das demais, possuem a região mais fina na parte esquerda do domínio. Essas malhas são apresentadas nas Figura 46, Figura 47 e Figura 48, respectivamente.

Tabela 16. Problema de Buckley-Leverett: casos.

caso	malha	SUPG	CAU	$\eta$
caso 1.1	malha 1	×		0,5
caso 1.2	malha 1		×	1,0
caso 1.3	malha 1		×	0,5
caso 1.4	malha 1	×	×	1,0
caso 1.5	malha 1	×	×	0,5
caso 2	malha 2	×	×	1,0
caso 3	malha 3	×	×	1,0
caso 4.1	malha 4	×	×	1,0
caso 4.2	malha 5	×	×	1,0
caso 4.3	malha 6	×	×	1,0
caso 5.1	malha 7	×	×	1,0
caso 5.2	malha 8	×	×	1,0
caso 5.3	malha 9	×	×	1,0

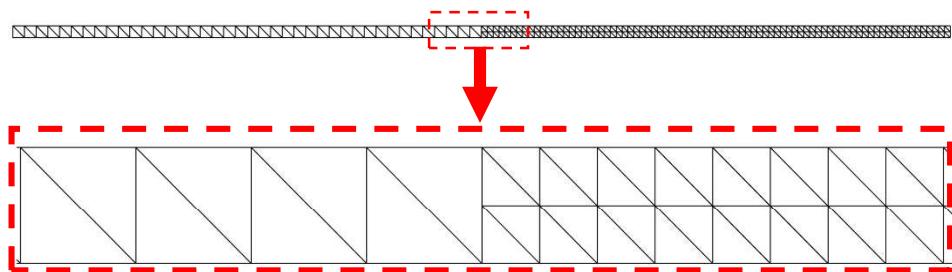


Figura 40. Problema de Buckley-Leverett: Malha 1.  
Fonte: O autor (2025).

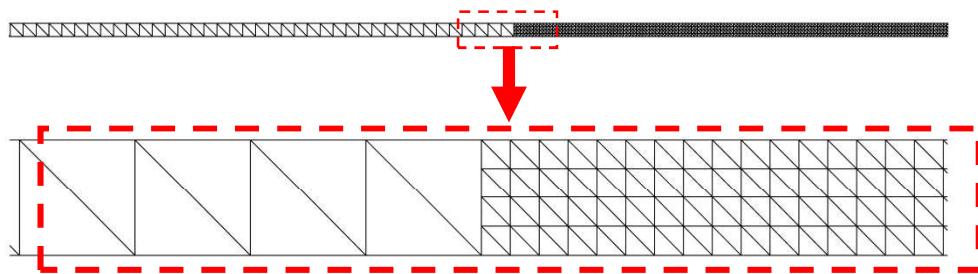


Figura 41. Problema de Buckley- Leverett: Malha 2.  
Fonte: O autor (2025).

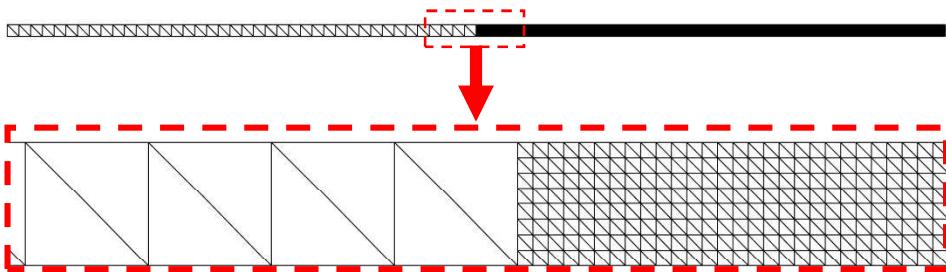


Figura 42. Problema de Buckley-Leverett: Malha 3.  
Fonte: O autor (2025).

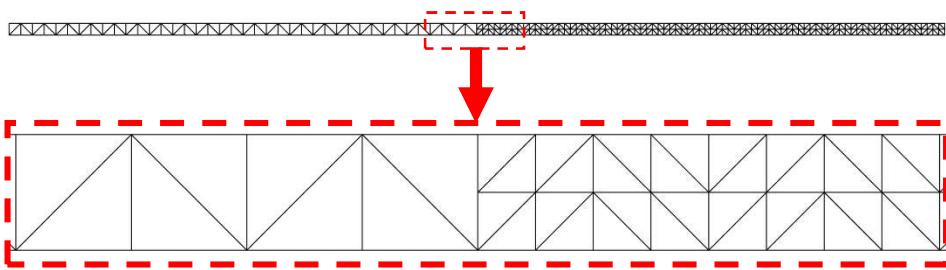


Figura 43. Problema de Buckley-Leverett: Malha 4.  
Fonte: O autor (2025).

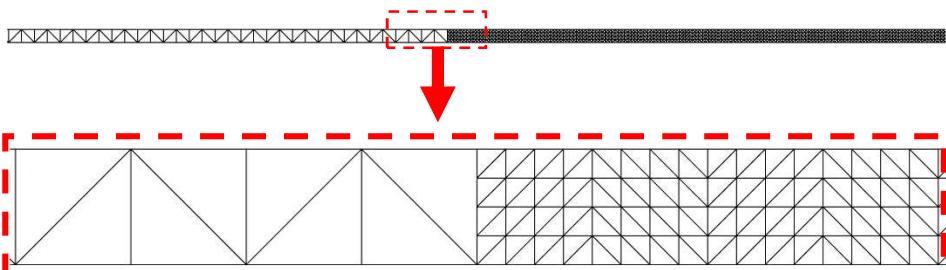


Figura 44. Problema de Buckley-Leverett: Malha 5.  
Fonte: O autor (2025).

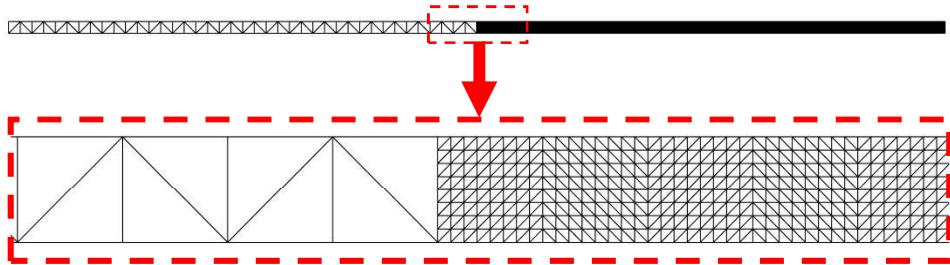


Figura 45. Problema de Buckley-Leverett: Malha 6.  
Fonte: O autor (2025).

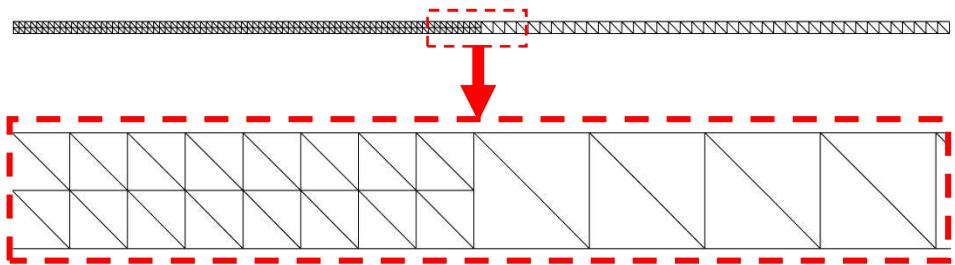


Figura 46. Problema de Buckley-Leverett: Malha 7.  
Fonte: O autor (2025).

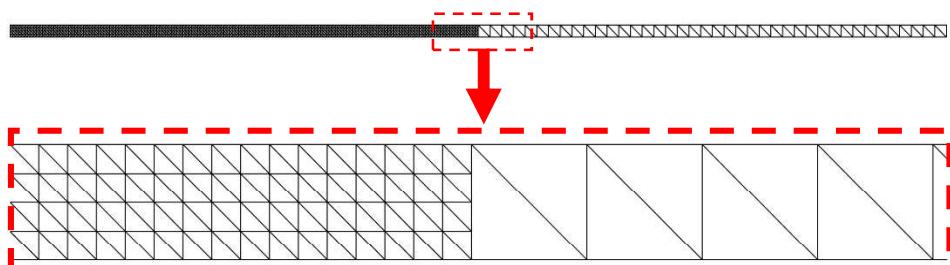


Figura 47. Problema de Buckley-Leverett: Malha 8.  
Fonte: O autor (2025).

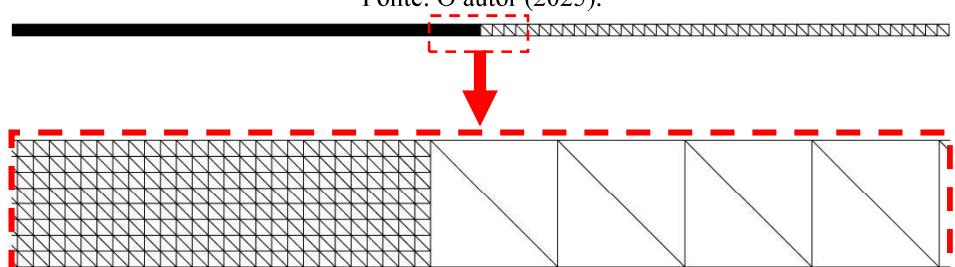


Figura 48. Problema de Buckley-Leverett: Malha 9.  
Fonte: O autor (2025).

Os resultados do campo de  $s_w$  ao longo do eixo x são apresentados na Figura 49, Figura 50, Figura 51 e Figura 52, correspondendo às análises discutidas anteriormente.

Analizando a Figura 49, observa-se que o caso 1.1 apresenta oscilações mais pronunciadas em comparação ao caso 1.2, evidenciando que o termo estabilizador CAU, para esse caso, possui uma eficácia maior no controle das oscilações quando comparado com o SUPG. Ainda nessa

figura verifica-se que a utilização dos termos CAU e SUPG reproduziu soluções estáveis. Verifica-se também que o caso 1.3 foi o que mais se aproximou da solução de referência. Outra observação a ser feita é que todos os resultados obtidos possuem a frente de saturação mais avançada que o caso de referência.

Quando se avalia o parâmetro  $\eta$  verifica-se a diferença entre as soluções do caso 1.1 e 1.2. Observa-se que no caso 1.3 os resultados foram mais suavizados e que, apesar de pequenas, o caso 1.1 apresentou oscilações.

A Figura 50 apresenta a comparação entre os casos 1.5, 2 e 3. Todos os resultados apresentaram desempenho satisfatório, conseguindo capturar a frente de saturação sem a presença de oscilações espúrias. Outra questão a ser observada é que a malha intermediária gerou uma frente de saturação mais avançada que as demais, com a malha mais refinada apresentando valores intermediários.

Os resultados da Figura 51, correspondem aos casos 4.1, 4.2 e 4.3. Analisando esses resultados chega-se à conclusão de que todos apresentaram oscilações violando o valor mínimo da saturação. Além disso, os resultados desses três casos se mostraram muito próximos, indicando baixo impacto na variação dos parâmetros testados.

Por fim, os resultados referentes aos casos 5.1, 5.2 e 5.3, apresentados na Figura 52, foram satisfatórios, capturando bem à frente de saturação. No entanto, observa-se a presença de oscilações de pequena intensidade violando o valor mínimo da saturação.

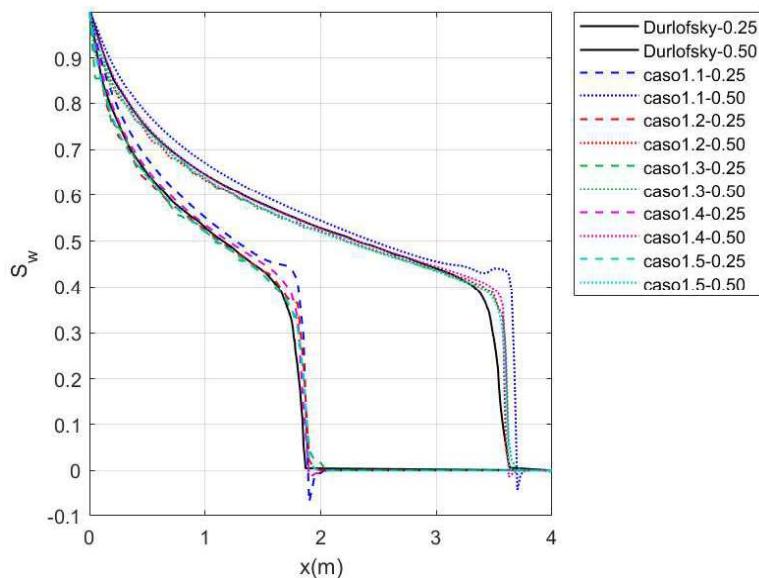


Figura 49. Problema de Buckley-Leverett: saturações para VPI = 0,25 e VPI = 0,50 dos casos 1.1 ao 1.5.

Fonte: O autor (2025).

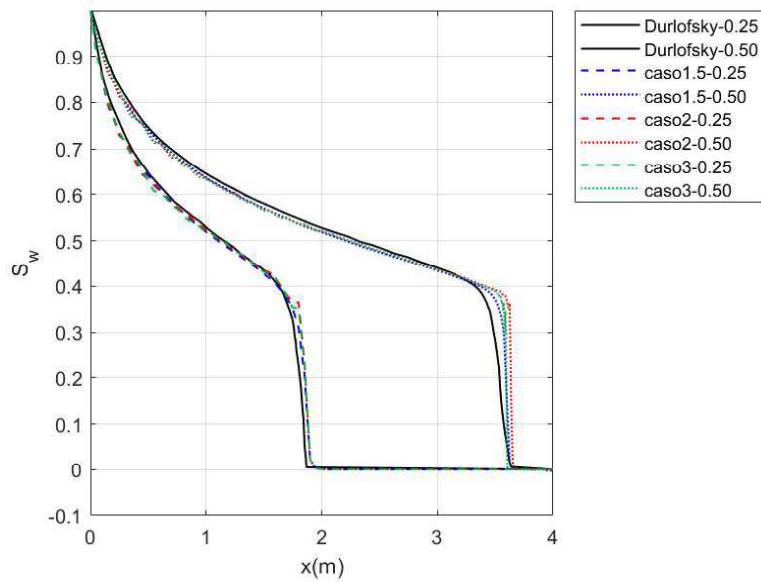


Figura 50. Problema de Buckley-Leverett: saturações para VPI = 0,25 e VPI = 0,50 dos casos 1.5, caso 2 e caso 3.

Fonte: O autor (2025).

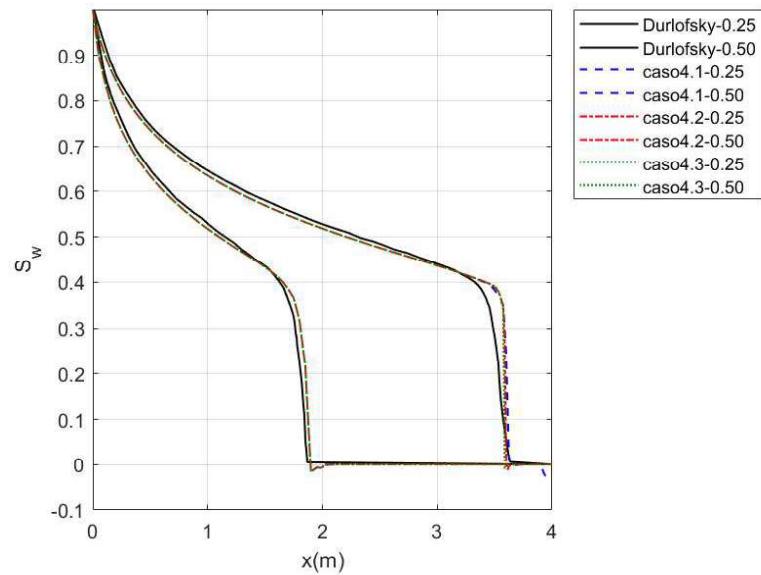


Figura 51. Problema de Buckley-Leverett: saturações para VPI = 0,25 e VPI = 0,50 dos casos 4.1 ao 4.3.

Fonte: O autor (2025).

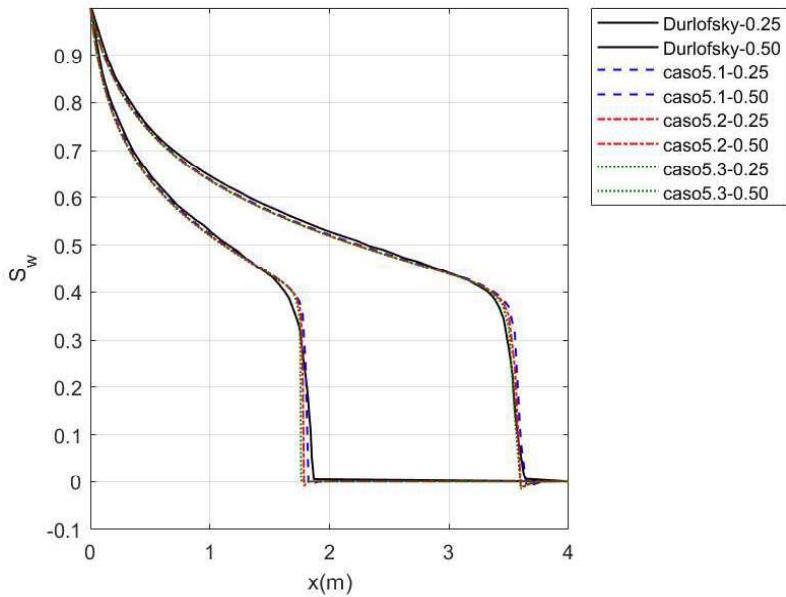


Figura 52. Problema de Buckley-Leverett: saturações para VPI = 0,25 e VPI = 0,50 dos casos 5.1 ao 5.3.  
Fonte: O autor (2025).

### 9.3.2 Injeção bidimensional de fluido – $\frac{1}{4}$ de cinco poços

O presente caso é amplamente difundido na literatura técnica, e consiste em uma proposta na distribuição de poços produtores e injetores visando a otimização na produção de petróleo quando se utiliza a técnica de recuperação secundária. O caso é conhecido como  $\frac{1}{4}$  de cinco poços e tem esse nome por conta da simetria utilizada na modelagem.

O domínio é formado por um quadrado de lados unitários com o poço produtor localizado no vértice superior direito e o poço injetor localizado no vértice inferior esquerdo. No poço injetor a saturação é unitária e a vazão é  $q = 0,002 \text{ m}^3/(\text{m}^3 \text{s})$ . Já no poço produtor a pressão é mantida nula durante toda a simulação. O passo de tempo da simulação é  $\Delta t = 0,01 \text{ s}$  e foram utilizadas, para efeito comparativo, 6 malhas não-conformes. A tolerância utilizada para o algoritmo multicompressor foi de  $tol = 0,01$ .

Os parâmetros físicos e numéricos utilizados na simulação estão apresentados na Tabela 17.

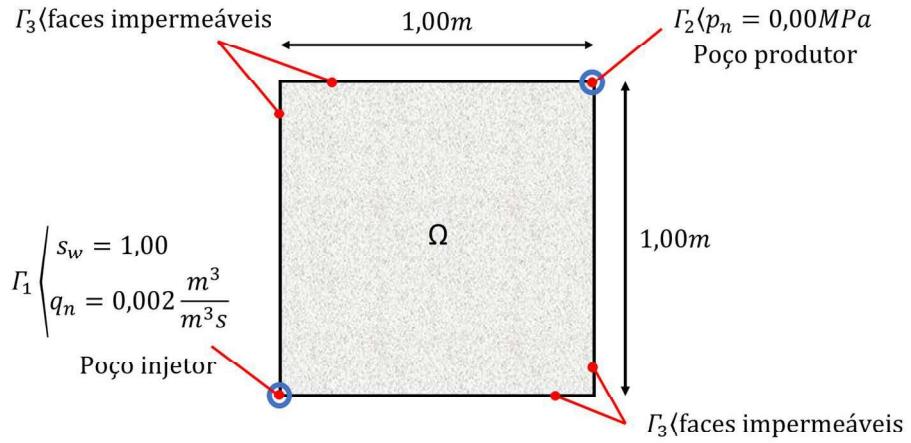


Figura 53. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: esquema do caso.  
Fonte: O autor (2025).

Tabela 17. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: parâmetros físicos.

Parâmetro	Valor
$\mu_n$	$4,00 \text{ Pa.s}$
$\mu_w$	$1,00 \text{ Pa.s}$
$\kappa$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2$
$\phi$	0,20
$C_p, C_s$	$10^5$

Para a realização do experimento foram utilizadas 6 malhas não-conformes. A malha 1 e a malha 2 são mostradas, respectivamente, na Figura 54 e Figura 55 e são mais refinadas na região diagonal que liga o poço injetor ao produtor. A malha 1 possui um refinamento mais acentuado e mais concentrado nas regiões próximas à diagonal e a malha 2 possui um refinamento mais brando, se desenvolvendo ao longo de uma região maior do domínio.

Já as malhas 3, 4, 5 e 6, apresentadas na Figura 56, foram construídas objetivando avaliar o efeito da orientação de malha nos resultados. Enquanto as malhas 3 e 4 possuem uma única orientação, as malhas 5 e 6 possuem orientações alternadas entre os elementos da malha fina e da malha grossa, conforme pode ser observado nas figuras citadas. A malha 1 possui 1418 nós, a malha 2 possui 2139 nós. As malhas 3, 4, 5 e 6 possuem 626 nós.

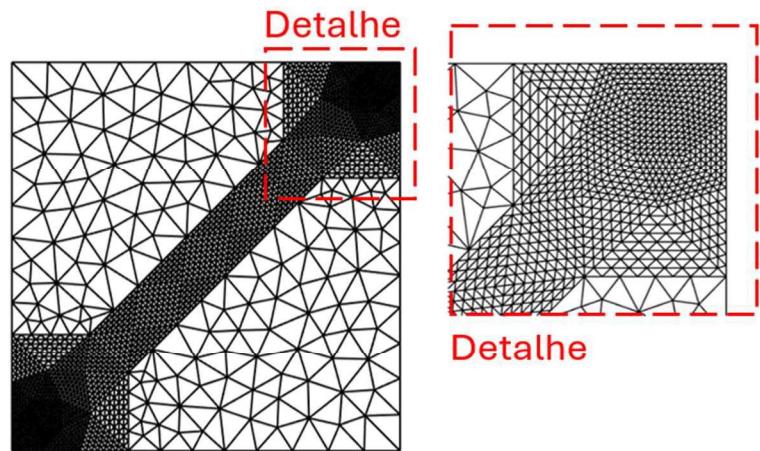


Figura 54. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: malha 1.  
Fonte: O autor (2025).

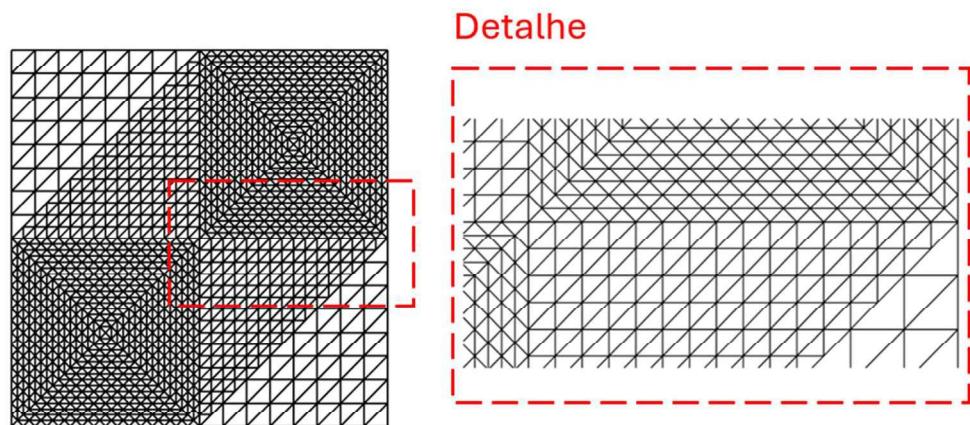
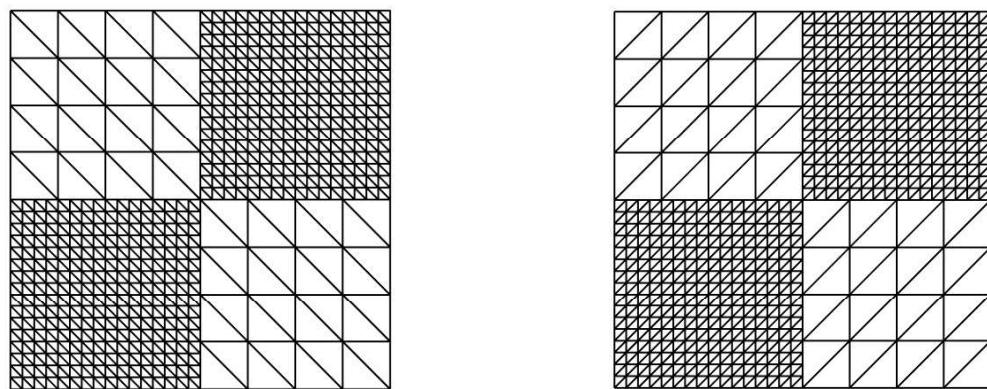


Figura 55. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: malha 2.  
Fonte: O autor (2025).



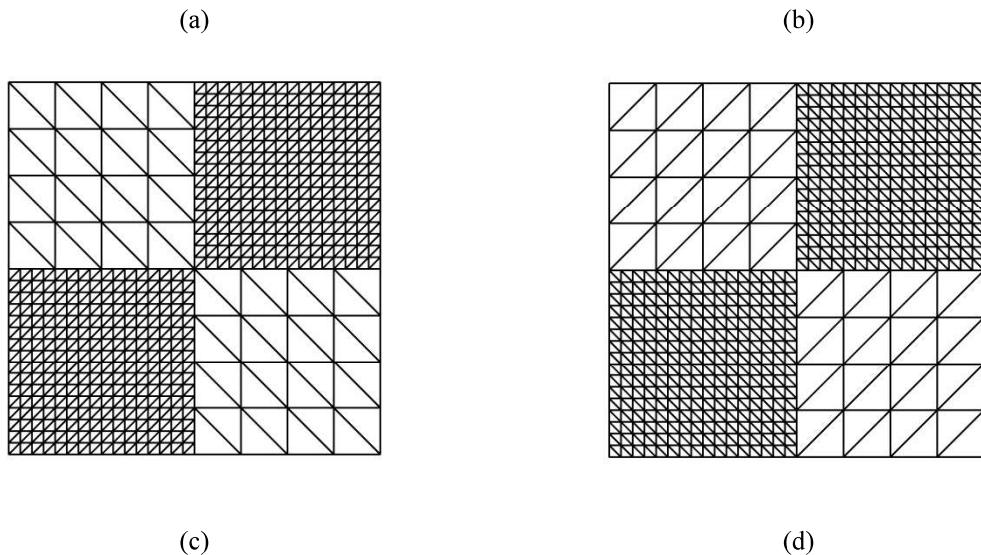


Figura 56. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: (a) malha 3; (b) malha 4; (c) malha 5; (d) malha 6.

Fonte: O autor (2025).

A solução de referência utilizada para a avaliação dos resultados foi obtida por Durlofsky (1993). A Figura 57 apresenta os resultados obtidos do VPI x Recuperação de óleo mostrando que todos os resultados obtidos apresentaram soluções onde o corte de água inicia em instantes anteriores à solução de referência. Apesar de todos os resultados apresentarem resultados satisfatórios, o caso 4 e o caso 5 apresentaram oscilações que podem ser vistas nos detalhes apresentados na Figura 58. Esses dois resultados possuem em comum a orientação dos elementos da malha fina. Já os outros resultados foram comportados em termos de oscilações.

Os resultados do volume recuperado acumulado, apresentados na Figura 59, mostraram boa concordância entre os resultados e a solução de referência.

Sendo assim, a formulação se mostrou capaz de reproduzir, de maneira satisfatória, bons resultados para esse caso.

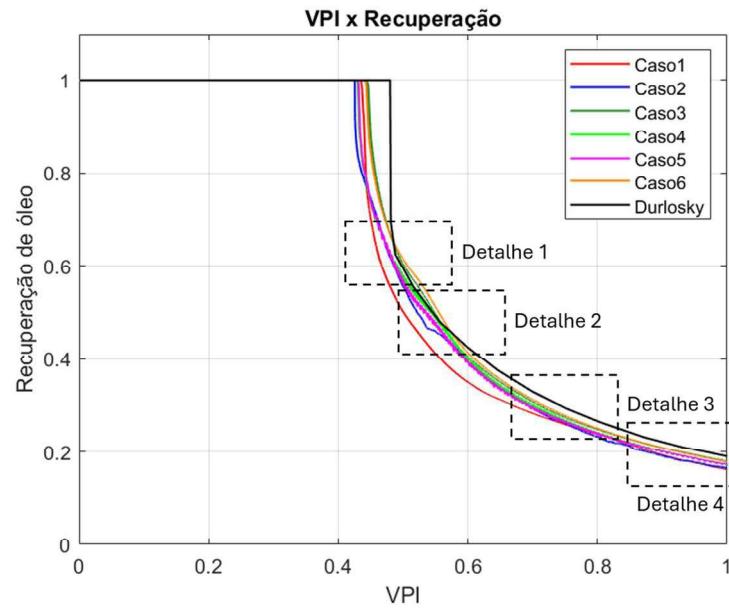


Figura 57. Problema ¼ de cinco poços: VPI x Recuperação de óleo.  
Fonte: O autor (2025).

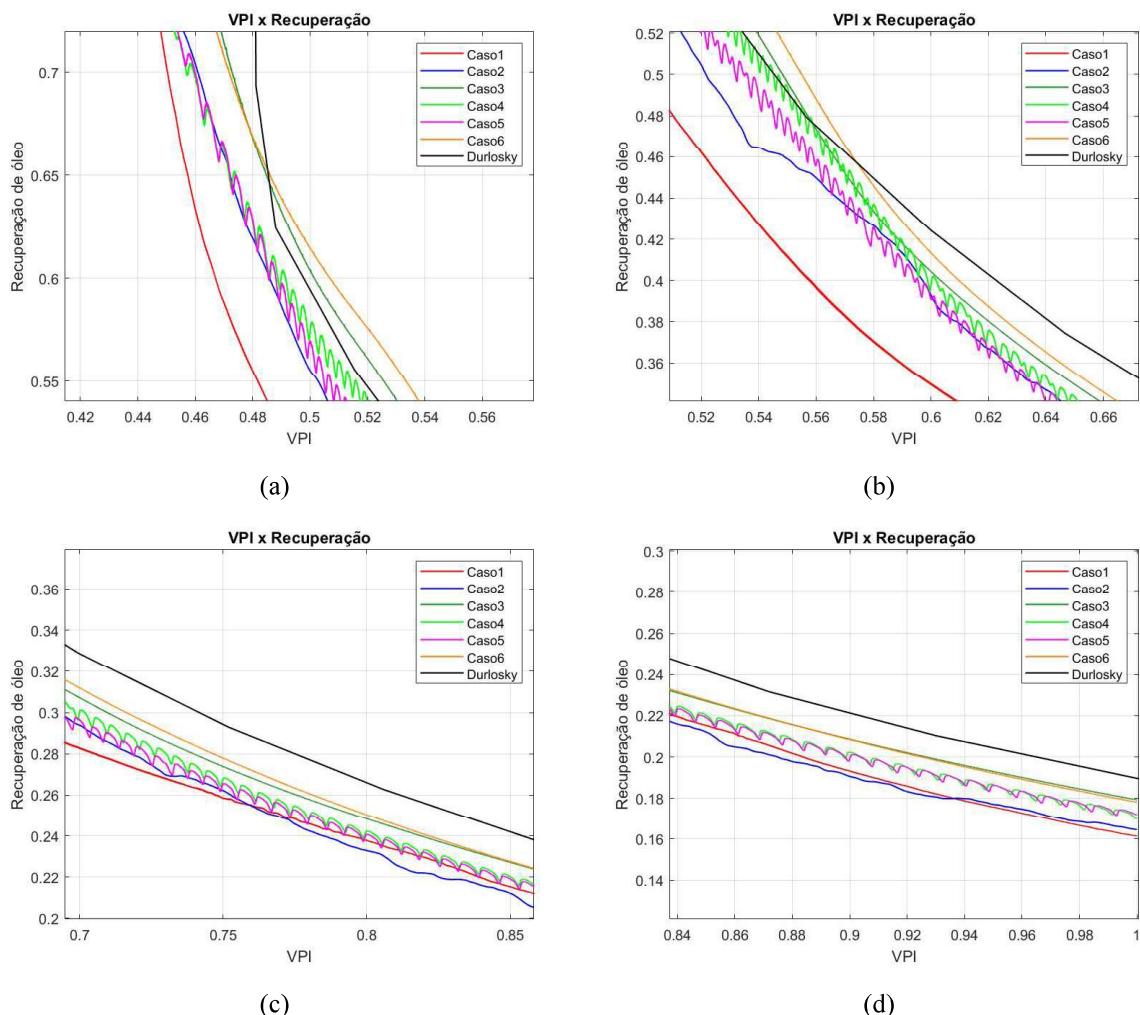


Figura 58. Problema ¼ de cinco poços: (a) detalhe 1; (b) detalhe 2; (c) detalhe 3; (d) detalhe 4.  
Fonte: O autor (2025).

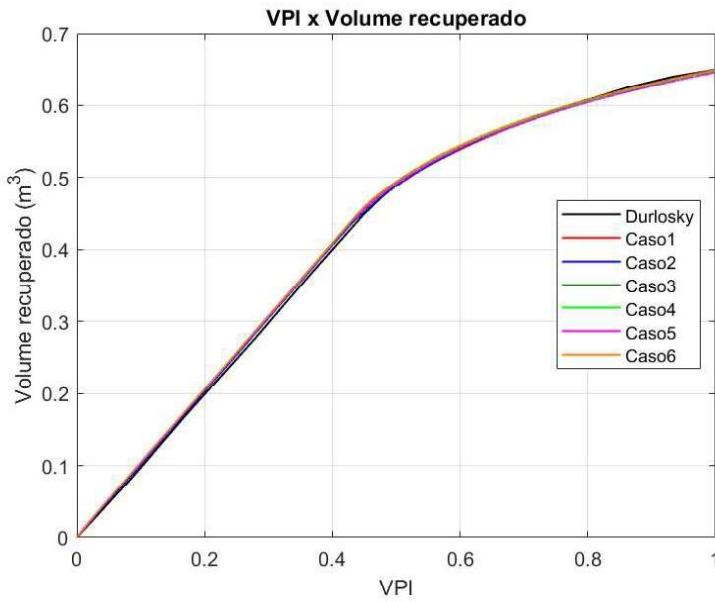


Figura 59. Problema de  $\frac{1}{4}$  de cinco poços: VPI x Volume recuperado.  
Fonte: O autor (2025).

### 9.3.3 Reservatório com 2 barreiras

O presente caso foi adaptado de Carvalho (2005) e possui o objetivo de avaliar o comportamento da formulação proposta em uma situação em que o domínio apresenta barreiras impermeáveis, além de avaliar a capacidade da malha sugerida em resolver o problema reduzindo o nível de refinamento nos locais onde a saturação não possui variações significativas.

O domínio é um quadrado medindo  $[100,00m \times 100,00m]$ , com duas barreiras que formam um canal e que são definidas no esquema do caso apresentado na Figura 60. O escoamento se desenvolve a partir de um gradiente de pressões imposto com a pressão na face esquerda igual a  $p_n = 5.000,00Pa$  e na face direita igual a  $p_n = 1.000,00Pa$ . A saturação na face esquerda é  $s_w = 0,90$ , constante ao longo de toda a simulação. O passo de tempo utilizado foi de  $\Delta t = 1,00s$  e os parâmetros físicos e numéricos da simulação estão apresentados na Tabela 18.

A malha utilizada é uma malha não-conforme onde a malha fina é referente aos locais onde se concentra o escoamento, já a malha grossa está na região onde não ocorre escoamento significativo, tanto no reservatório como nas barreiras. Essa malha possui 2194 nós e está apresentada na Figura 61.

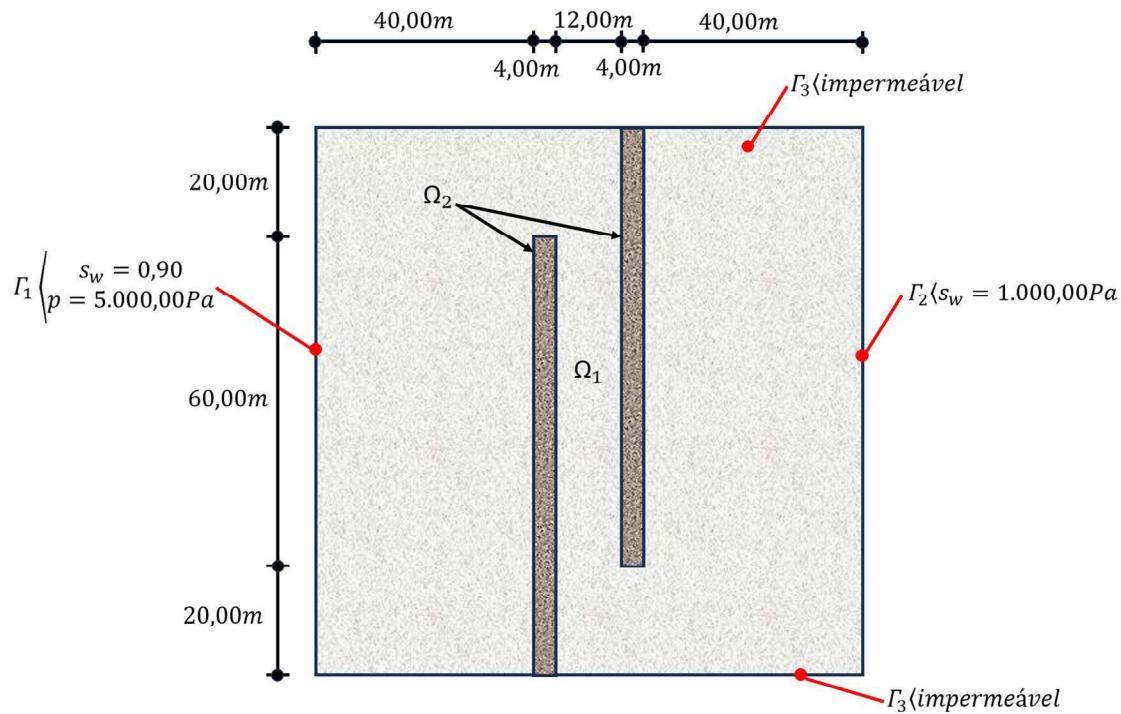


Figura 60. Problema das barreiras: esquema do caso.

Fonte: O autor (2025).

Tabela 18. Problemas das barreiras: parâmetros físicos.

Parâmetro	Valor
$\mu_n$	$0,004 Pa.s$
$\mu_w$	$0,001 Pa.s$
$\kappa_{res}$	$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} m^2$
$\kappa_{bar}$	$\begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} m^2$
$\phi_{res}$	0,35
$\phi_{bar}$	0,20
$C_p, C_s$	$10^5$

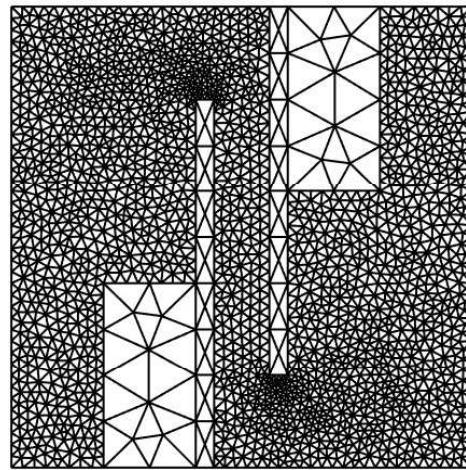


Figura 61. Problema das barreiras: malha.  
Fonte: O autor (2025).

A partir da análise do campo de pressões pode-se verificar que a formulação foi capaz de reproduzir a acentuada queda de pressões que ocorre na região confinada pelas duas barreiras, apresentando um comportamento linear ao longo do canal, conforme a Figura 62.

A Figura 63 apresenta o campo de saturação nos instantes de tempo iguais a 10,00s, 60,00s, 120,00s, 180,00s, 240,00s e 320,00s. Analisando os resultados verifica-se que os resultados são compatíveis com as condições de escoamento proposto, respeitando as barreiras e se concentrando no canal de escoamento. Verifica-se também que a malha sugerida se mostrou compatível com a solução, que variou pouco nos locais discretizados pela malha grossa.

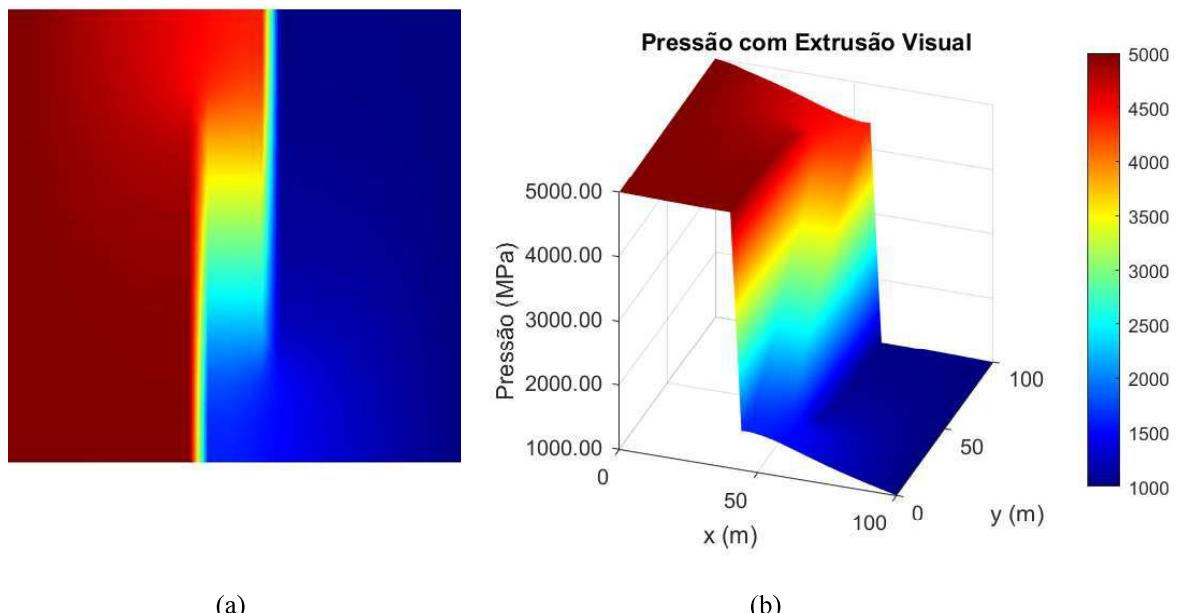


Figura 62. Problema das barreiras: (a) campo de pressões com vista bidimensional;  
(b) campo de pressões extrudado.  
Fonte: O autor (2025).

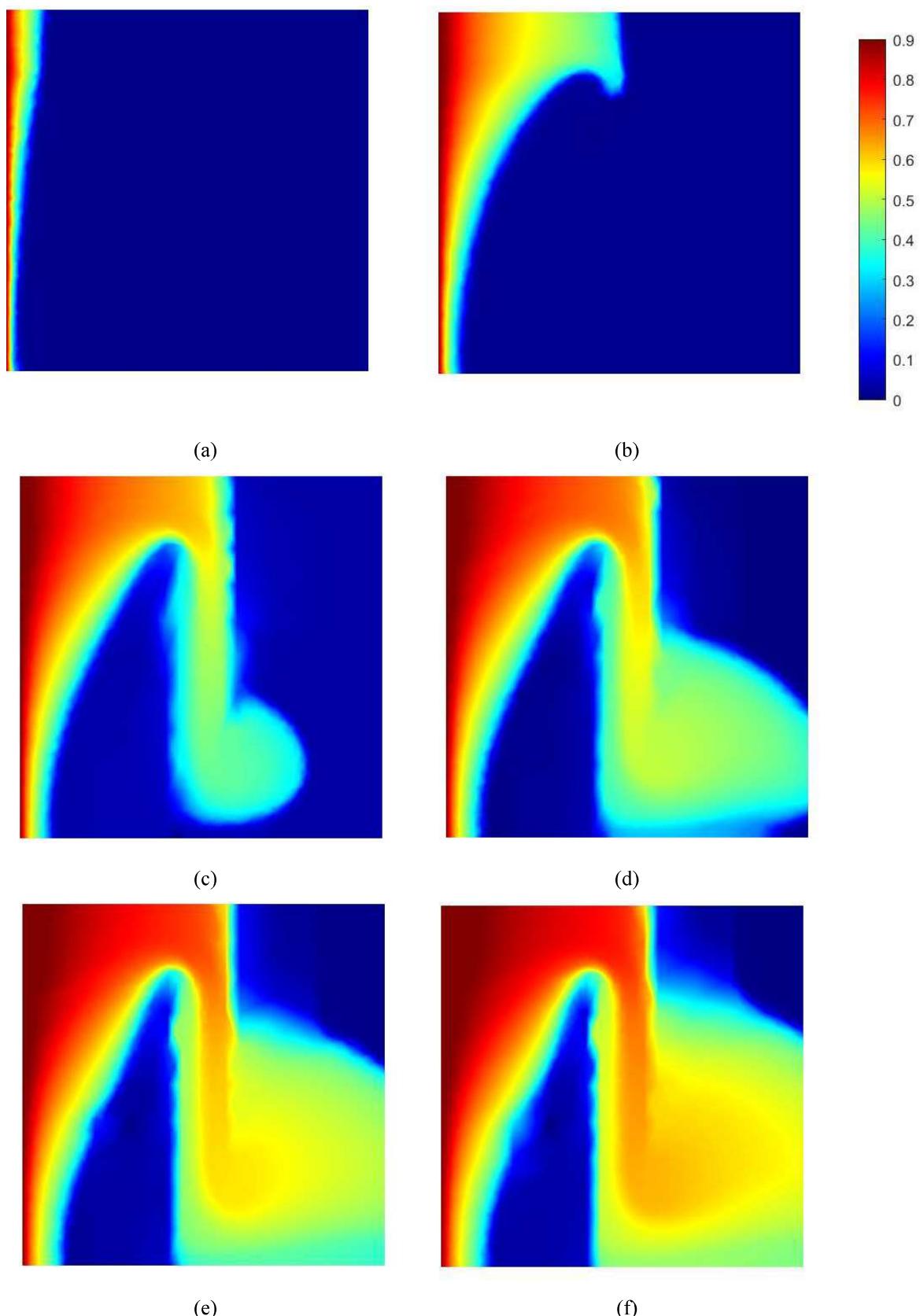


Figura 63. Problema das barreiras: campo de saturações (a) 10,00s; (b) 60,00s; (c) 120,00s; (d) 180,00s; (e) 240,00; (f) 320,00s.  
Fonte: O autor (2025).

### 9.3.4 Reservatório fraturado

O presente caso foi adaptado de Damirchi et al. (2020). Nesse trabalho os autores propuseram uma formulação para a solução do escoamento monofásico em meios porosos fraturados que também utiliza o EFA. Essa proposta sobrepõe uma malha bidimensional para a matriz porosa e uma malha de elementos lineares para as fraturas.

Propõe-se então uma comparação entre os resultados para o escoamento monofásico obtidos da formulação do presente trabalho e da abordada por Damirchi et al. (2020). Essas abordagens, apesar de usar o EFA para discretizar, de forma distinta, as fraturas e o meio, possuem uma diferença substancial que é a malha utilizada para a discretização da fratura. Como já citado, Damirchi et al. (2020) utiliza uma formulação com fraturas lineares enquanto o método proposto no presente trabalho propõe discretizar as fraturas com uma malha bidimensional concebida na escala das fraturas.

Além da análise do escoamento monofásico, foram realizadas simulações considerando o escoamento bifásico em duas condições, a primeira com as fraturas formando barreiras impermeáveis e a segunda com as fraturas formando canais de fluxo.

O caso possui a geometria definida por um quadrado de lados unitários, com a face superior e inferior impermeáveis. O fluxo ocorre a partir da imposição de um gradiente de pressões, dado por pressões com valores de  $p_n = 10.000,00\text{Pa}$  e  $p_n = 0,00\text{Pa}$  impostas, respectivamente, na face esquerda e direita do domínio. A posição das fraturas está apresentada na Figura 64 e a malha na

Figura 65. A malha utilizada neste caso possui 4455 nós.

Os parâmetros físicos e numéricos utilizados na simulação estão apresentados na Tabela 19. As fraturas impermeáveis possuem um tensor de permeabilidades  $\mathbf{K}_{bar,imp}$  e as permeáveis  $\mathbf{K}_{bar,per}$ . Todos os outros parâmetros são iguais para as duas situações. A porosidade do reservatório é dada por  $\phi_{res}$  e da barreira por  $\phi_{bar}$ .

Para as simulações bifásicas o passo de tempo utilizado foi de  $\Delta t = 1 \times 10^{-6}\text{s}$  e a tolerância utilizada para o algoritmo multicorretor foi de  $tol = 0,01$ .

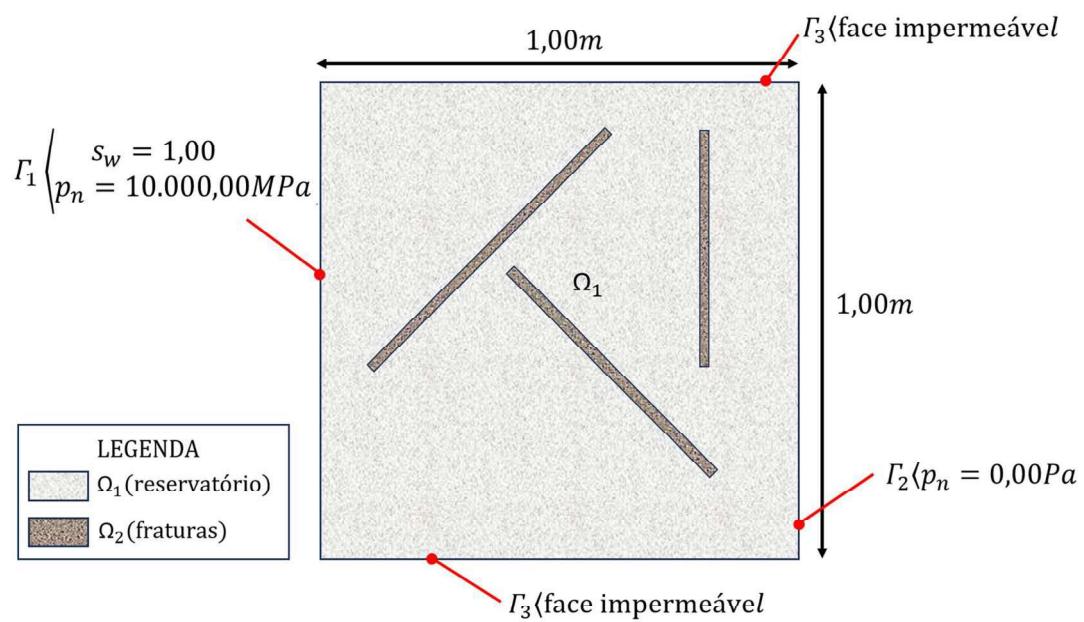


Figura 64. Problema das fraturas: esquema do caso.  
Fonte: O autor (2025).

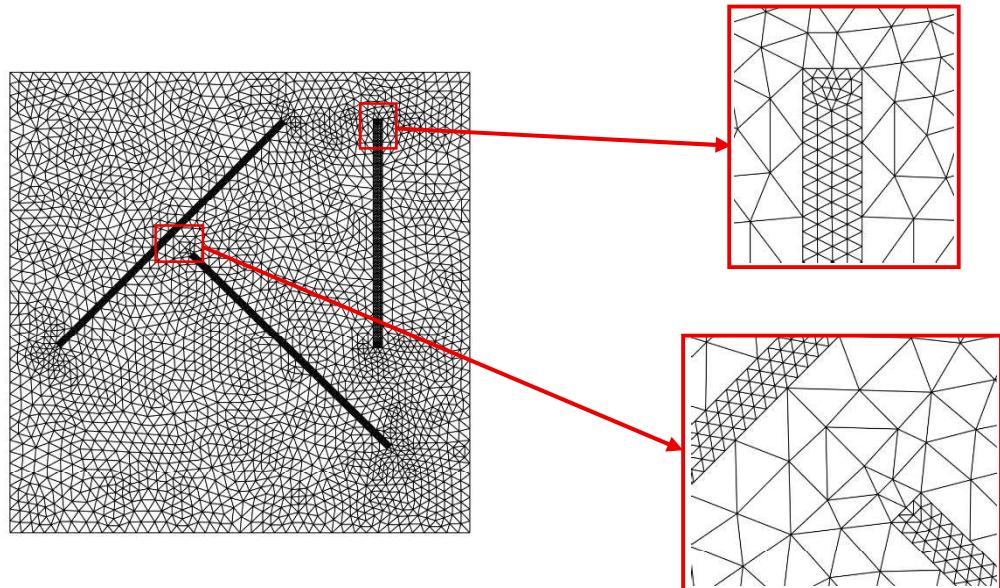


Figura 65. Problema das fraturas: malha.  
Fonte: O autor (2025).

Tabela 19. Problema das fraturas: parâmetros físicos.

Parâmetro	Valor
$\mu_n$	$4,00 \text{ Pa.s}$
$\mu_w$	$1,00 \text{ Pa.s}$
$\kappa_{res}$	$\begin{bmatrix} 10^{-4} & 0 \\ 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \text{ m}^2$
$\kappa_{bar,imp}$	$\begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} \text{ m}^2$
$\kappa_{bar,per}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2$
$\phi_{res}$	0,35
$\phi_{bar}$	0,20
$C_p, C_s$	$10^5$

### 9.3.4.1 Fraturas impermeáveis

Os resultados considerando as fraturas impermeáveis estão apresentados na Figura 66 e Figura 67, e são referentes, respectivamente ao campo de pressões e às pressões obtidas ao longo da coordenada  $y = 0.5\text{m}$ . A Figura 66 (a) apresenta os resultados utilizando a formulação proposta nesse trabalho e a Figura 66 (b) apresenta os resultados de referências, obtidos por Damirchi et al. (2020).

A partir das análises desses resultados é possível observar a concordância entre as duas formulações.

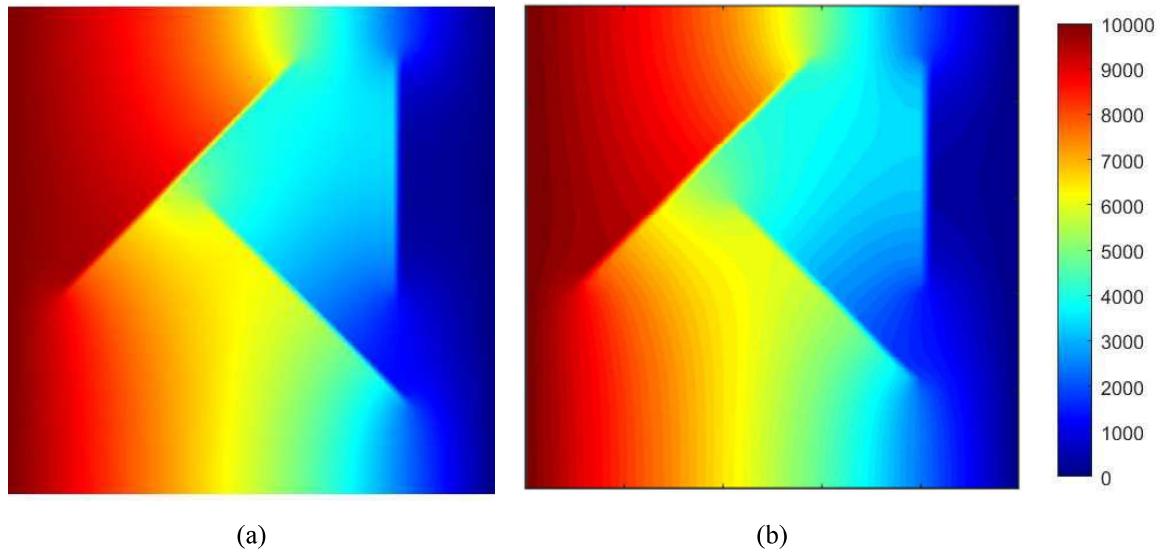


Figura 66. Problema das fraturas impermeáveis: (a) solução numérica; (b) solução de referência.  
Fonte: O autor (2025).

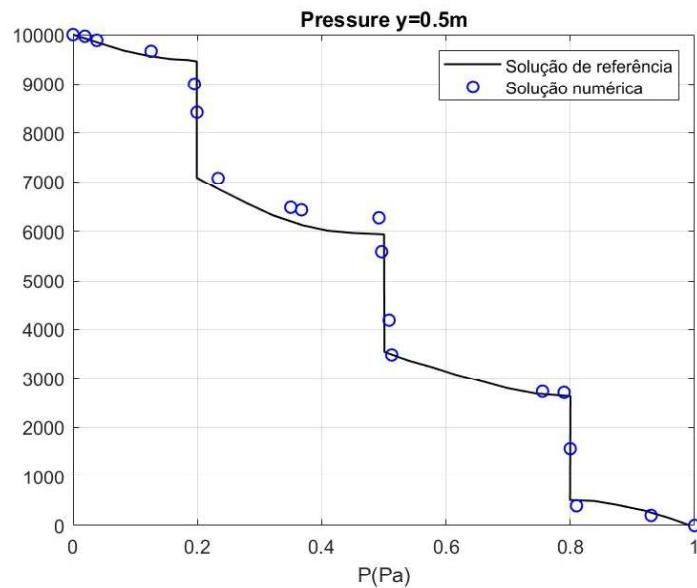


Figura 67. Problema das fraturas impermeáveis: solução numérica x solução de referência.  
Fonte: O autor (2025).

O desenvolvimento temporal do campo de saturações para o escoamento bifásico está apresentado na Figura 68 para 6 instantes distintos. A Figura 69 apresenta o campo de saturações extrudado nos instantes iniciais. No primeiro instante de tempo é possível notar a presença de oscilações espúrias que se estabilizaram posteriormente.

A partir dos resultados analisados verifica-se que o avanço da frente de saturação contornou as fraturas impermeáveis conforme esperado.

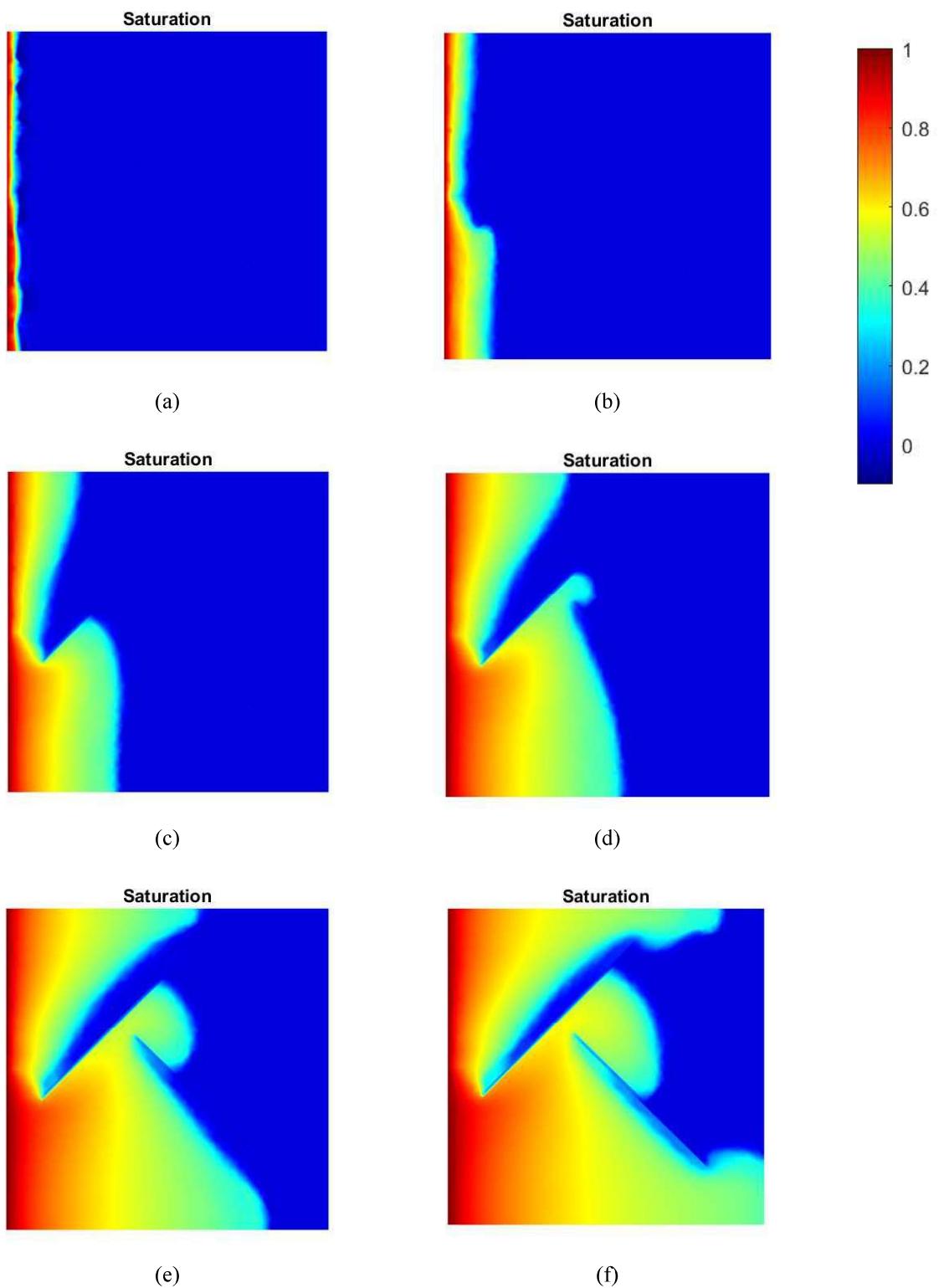


Figura 68. Problema das fraturas impermeáveis, campo de saturação: (a)  $1 \times 10^{-6}$ s; (b)  $10 \times 10^{-6}$ s; (c)  $30 \times 10^{-6}$ s; (d)  $50 \times 10^{-6}$ s; (e)  $70 \times 10^{-6}$ s; (f)  $90 \times 10^{-6}$ s.

Fonte: O autor (2025).

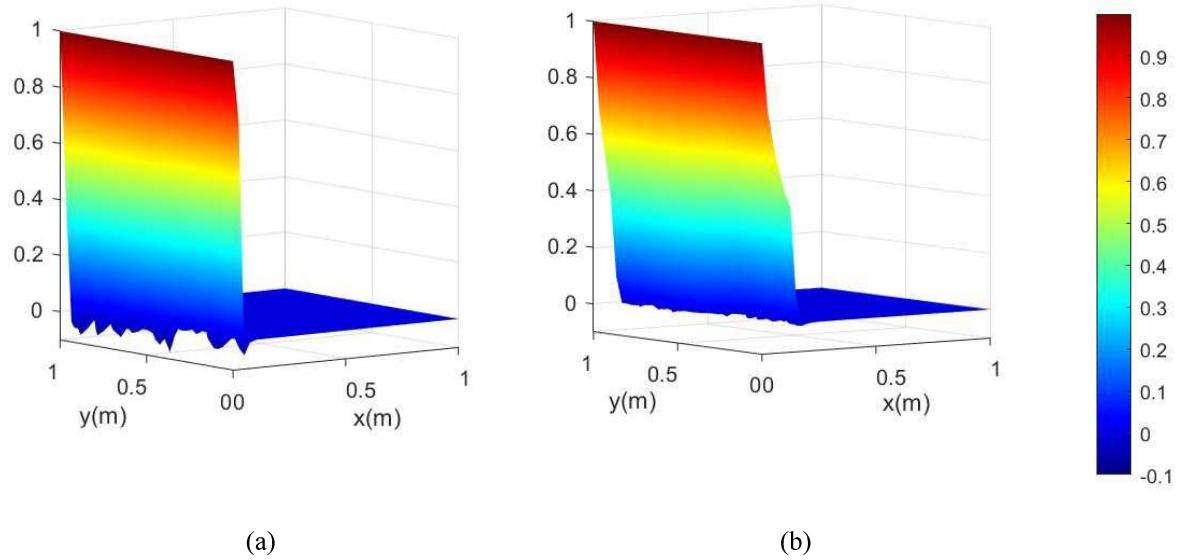


Figura 69. Problema das fraturas impermeáveis, campo de saturação extrudado:  
 (a)  $1 \times 10^{-6}$ s; (b)  $10 \times 10^{-6}$ s.  
 Fonte: o autor (2025).

#### 9.3.4.2 Fraturas permeáveis

Os resultados para a situação em que as fraturas foram consideradas permeáveis, formando canais de fluxo, estão apresentados na Figura 70 e Figura 71. De forma semelhante ao caso anterior, a Figura 70 apresenta o avanço do campo de saturações ao longo do tempo e a Figura 71 apresenta o campo de saturações extrudado para os dois primeiros instantes de tempo.

A partir da análise dos resultados percebe-se que as oscilações espúrias também ocorreram nos tempos iniciais e foram se estabilizando com o avançar da simulação. Analisando o comportamento da frente de saturação também percebe-se o seu avanço de forma mais intensa ao longo das fraturas, conforme esperado.

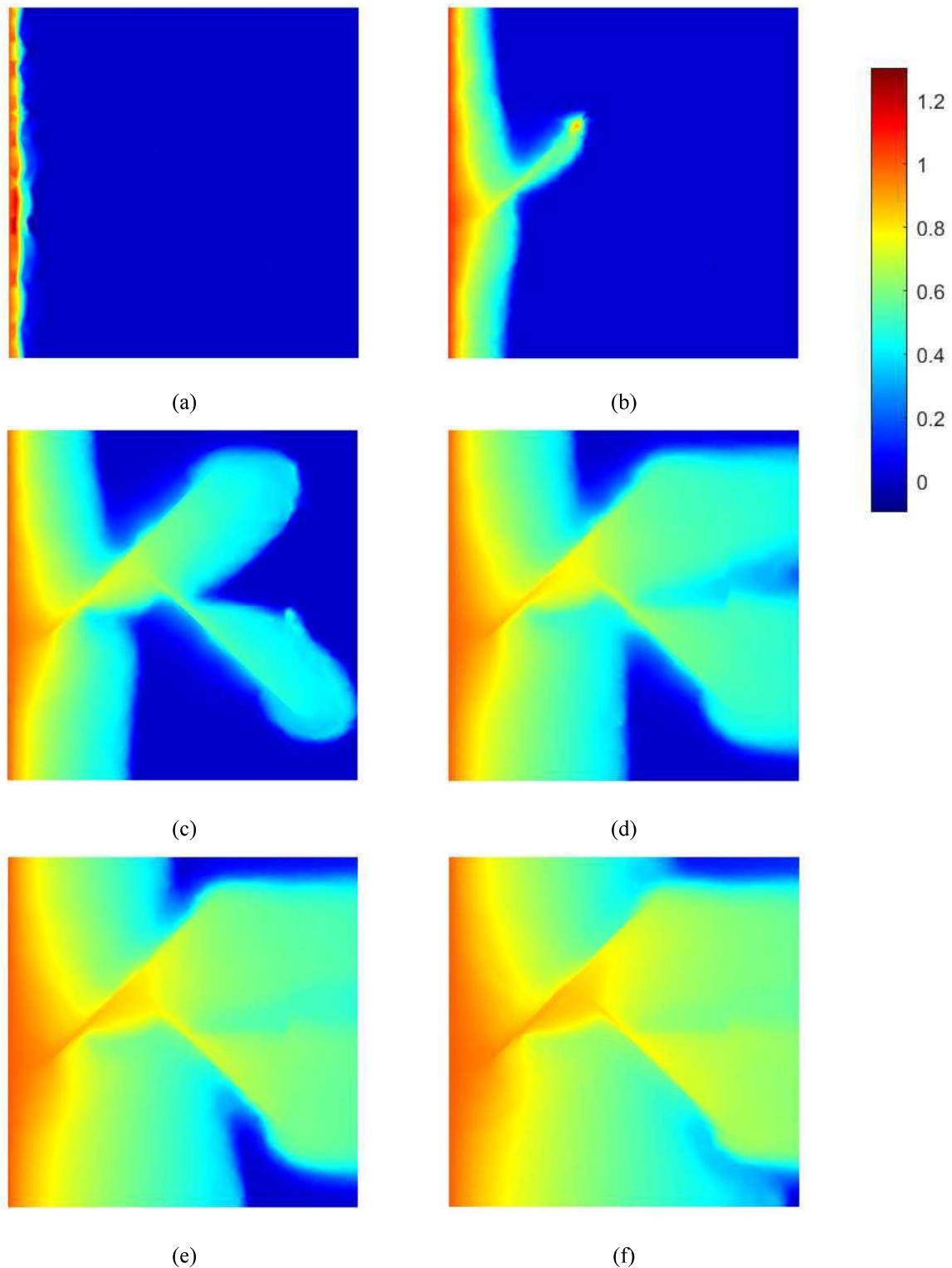


Figura 70. Problema das fraturas permeáveis, campo de saturação: (a)  $1 \times 10^{-6}$ s; (b)  $10 \times 10^{-6}$ s; (c)  $30 \times 10^{-6}$ s; (d)  $50 \times 10^{-6}$ s; (e)  $70 \times 10^{-6}$ s; (f)  $90 \times 10^{-6}$ s.  
Fonte: O autor (2025).

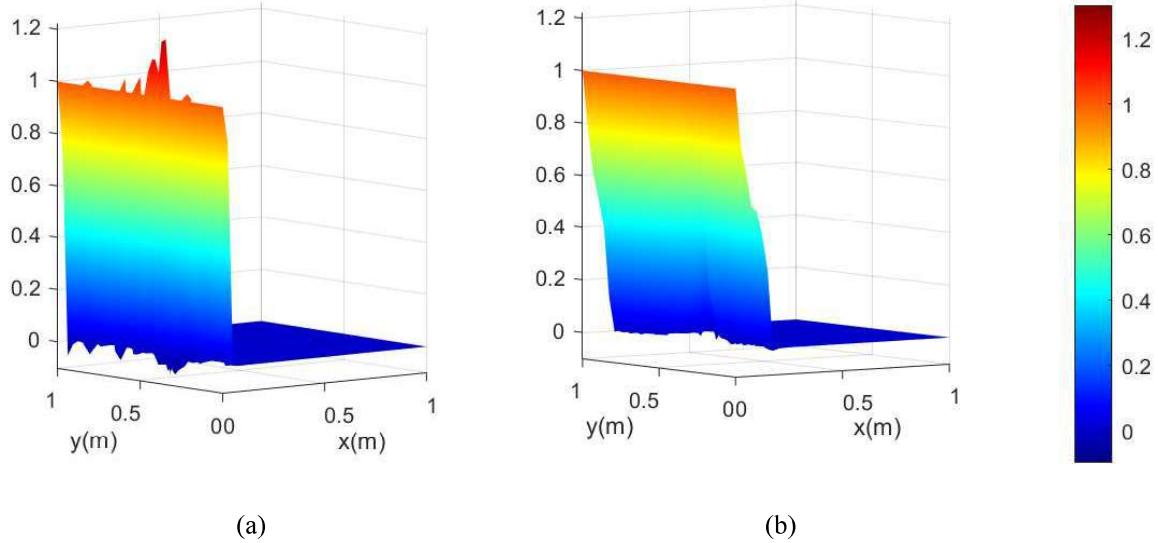


Figura 71. Problema das fraturas permeáveis, campo de saturação extrudado:

(a)  $1 \times 10^{-6}$  s; (b)  $10 \times 10^{-6}$  s.

Fonte: O autor (2025).

### 9.3.5 ¼ de cinco poços modificado

O presente caso foi proposto por Souza (2015) e consiste em uma variação do problema de ¼ de cinco poços. Para o presente caso foram considerados  $\mu_n = 50 \text{ Pa.s}$ ,  $\mu_w = 1,00 \text{ Pa.s}$  e o tensor de permeabilidades obtido pela equação 149. Todos os outros parâmetros e definições do modelo foram iguais ao caso ¼ de cinco poços apresentado anteriormente.

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\sin(45^\circ) \\ \sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & \sin(45^\circ) \\ -\sin(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix} \quad (149)$$

A partir de uma análise da expressão que define o tensor de permeabilidades, percebe-se que ele é obtido aplicando uma rotação em um ângulo de  $45^\circ$  de um tensor isotrópico, resultando em um tensor cheio.

A solução de referência foi proposta por Souza (2015) utilizando uma formulação de MVF do tipo Multipoint Flux Approximation (MPFA). Essa é uma família do MVF onde utiliza-se formato malhas duais, com os elementos do estêncil divididos em subvolumes de controle onde são obtidos os gradientes para a realização dos balanços locais. Na solução de referência, apresentada na Figura 72 foi utilizada a técnica MPFA-O em uma malha triangular estruturada com 37.996 volumes de controle.

Para o presente caso foram propostas 4 malhas, sendo 3 não conformes e 1 conforme. Essas malhas, estão apresentadas nas Figura 73 (b), Figura 74 (b), Figura 75 (b) e Figura 76 (d) e serão denominadas, respectivamente, por malha 1, malha 2, malha 3 e malha 4. Os campos de saturação para cada malha estão apresentados nas Figuras Figura 73 (a), Figura 74 (a), Figura 75 (a) e Figura 76 (a).

A malha 1 foi proposta a fim de obter um resultado onde a região mais refinada é onde a solução se desenvolve. As malhas 2, 3 e 4 foram sugeridas a partir de uma sequência com 3 refinamentos distintos. Todos os campos de saturação foram obtidos para um VPI = 0,40.

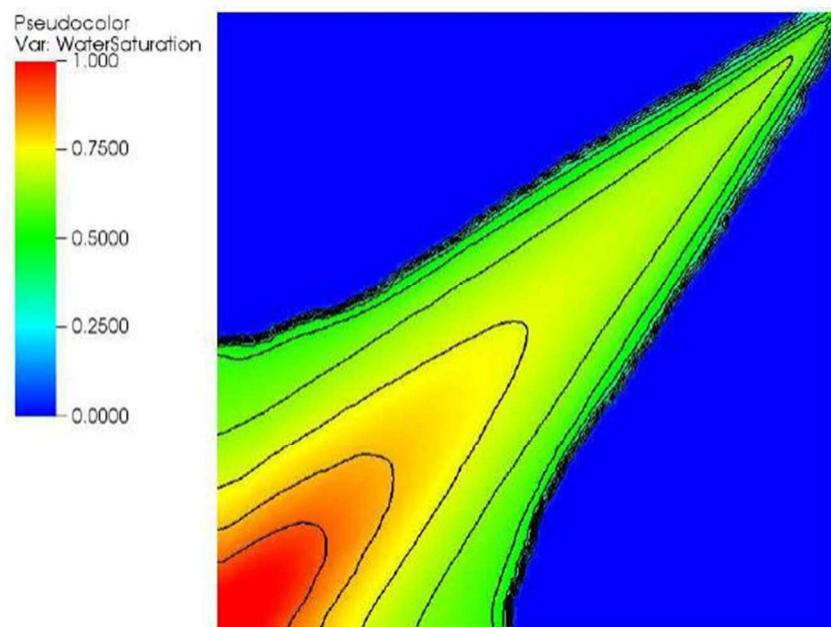
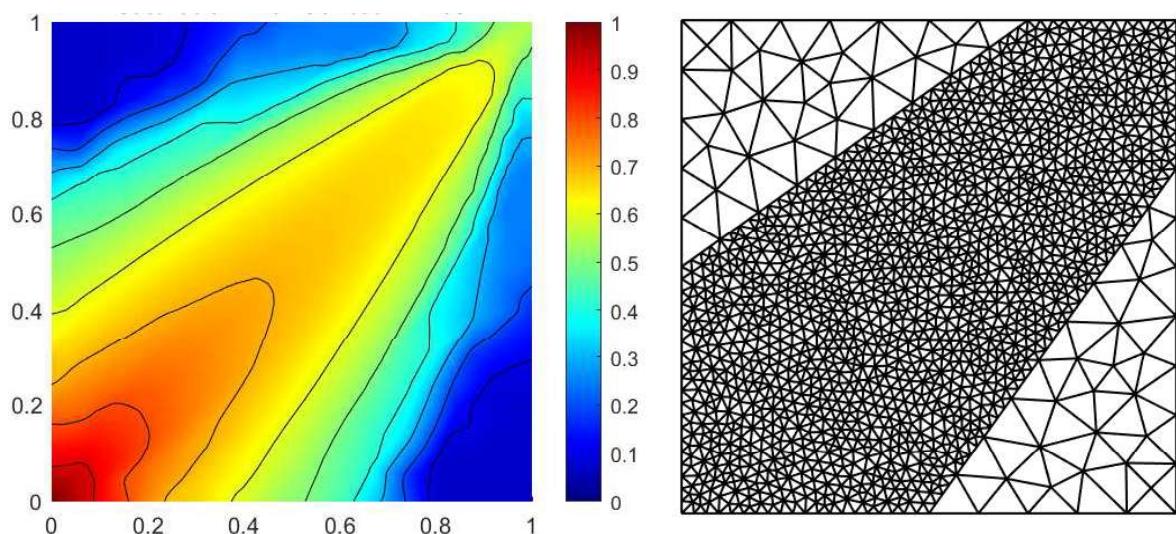


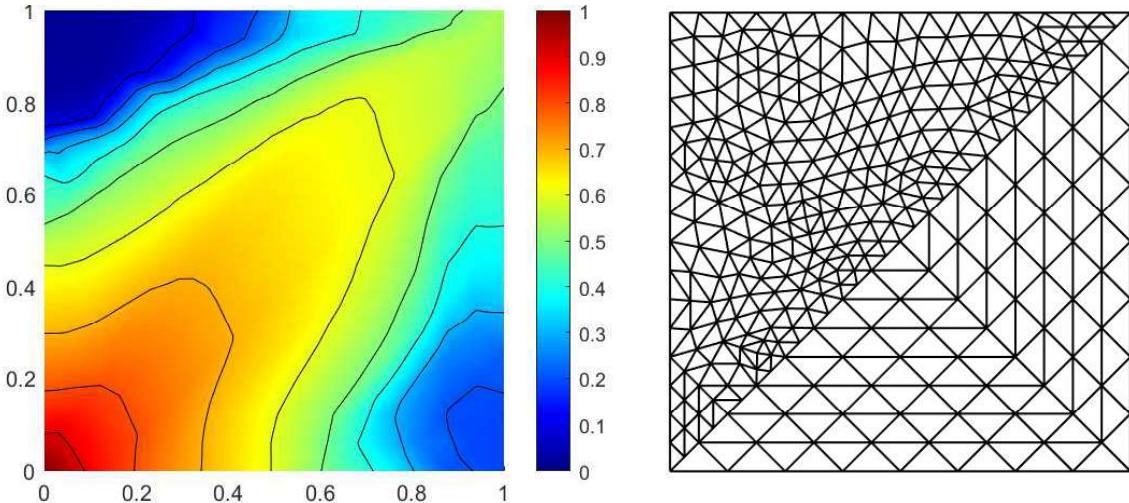
Figura 72. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: solução de referência.  
Fonte: Souza (2015).



(a)

(b)

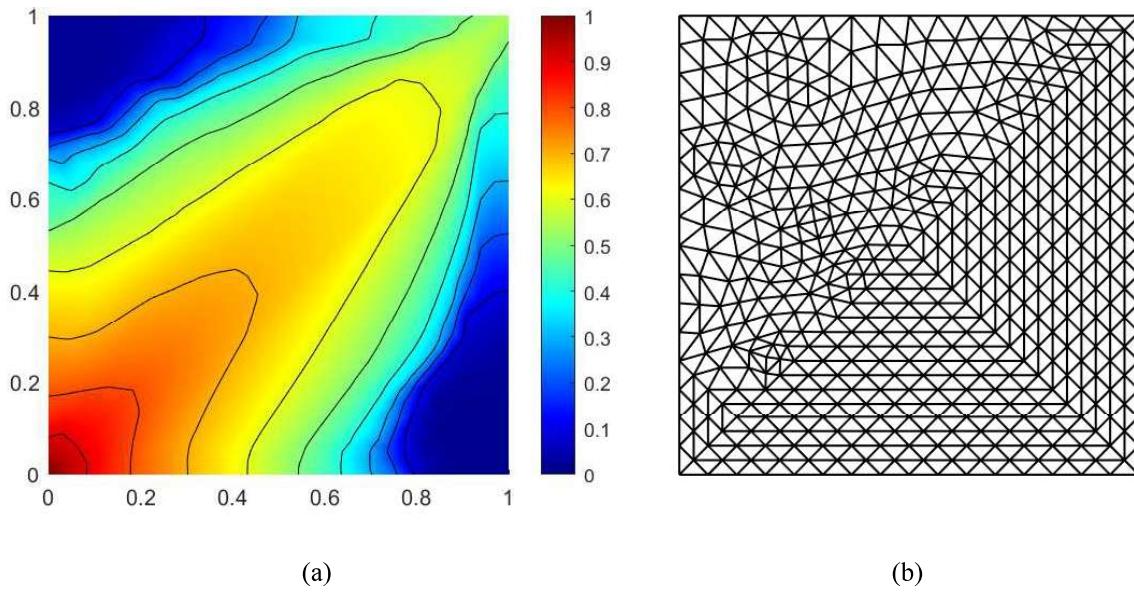
Figura 73. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 1.  
 Fonte: o autor (2025).



(a)

(b)

Figura 74. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 2.  
 Fonte: o autor (2025).



(a)

(b)

Figura 75. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 3.  
 Fonte: o autor (2025).

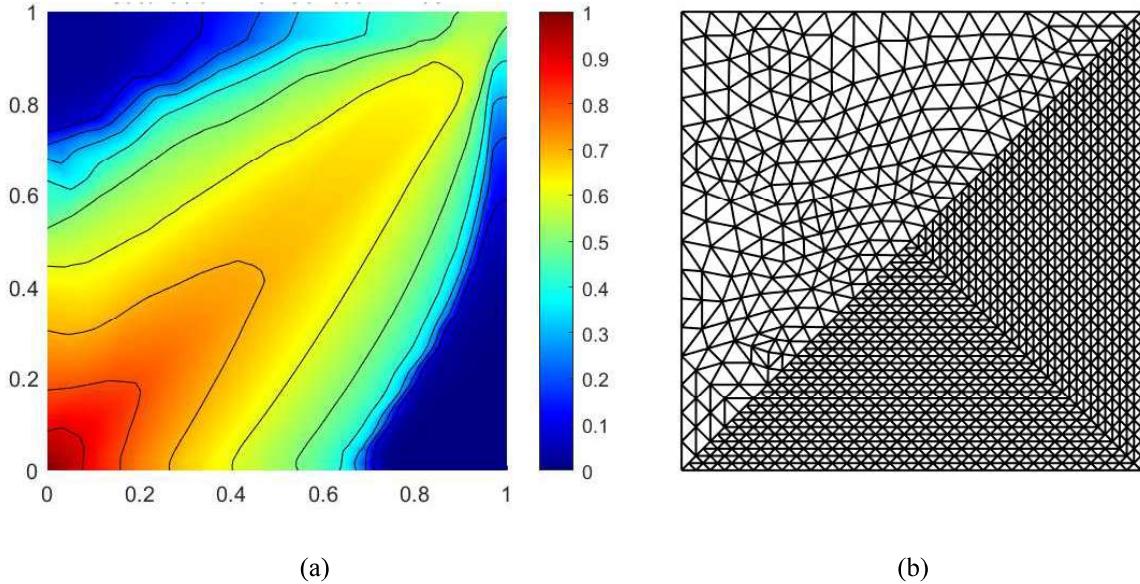


Figura 76. Problema  $\frac{1}{4}$  de cinco poços modificado: (a) campo de saturação; (b) malha 4.  
Fonte: o autor (2025).

A partir da análise dos resultados é possível verificar que todos eles foram mais difusivos que a solução de referência. Esse fato por ser explicado pela própria natureza da formulação que introduz uma difusão artificial para a sua estabilização, tendo em vista que a quantidade de elementos utilizado nas soluções numéricas são consideravelmente menores que a de referência, então o efeito da difusão é bem mais pronunciado.

Percebe-se também uma maior evidência na assimetria do resultado na malha 2, que é minimizado na malha 3 e que volta a ficar um pouco mais assimétrico na malha 4, esse fato pode ser explicado pela diferença entre os níveis de refinamento das duas regiões.

Apesar das observações apresentadas anteriormente os resultados se mostraram satisfatórios e compatíveis com a solução de referência.

#### 9.4 CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos verifica-se que a utilização do método dos elementos de acoplamento em conjunto com as formulações propostas apresentou resultados satisfatórios. O problema de Buckley-Leverett, por exemplo, serviu como demonstração da influência nos parâmetros de estabilização e da construção da malha. Uma das características a ser observada é que quando o refinamento ocorre à montante da frente de saturação os resultados se mantêm estáveis, reduzindo as oscilações espúrias. Desta forma, isso sugere que esse tipo de malha pode ser utilizado em aplicações práticas em proximidades de poços injetores, por exemplo.

A formulação também apresentou resultados animadores em situações que são frequentemente encontradas em aplicações práticas da área de reservatórios, como é o caso de recuperação secundária com a configuração  $\frac{1}{4}$  de cinco poços. Nesse caso verificou-se que apesar da pequena influência das malhas nos fluxos fracionários (recuperação), os resultados dos volumes acumulados se mantiveram consistentes.

Outras condições frequentemente encontradas em reservatórios são a presença de barreiras e fraturas que formam canais de fluxos. As malhas não-conformes permitiram a simulação desses casos que apresentaram resultados animadores, com as malhas sendo construídas de forma otimizada de acordo com os locais onde há grandes variações nos gradientes das saturações.

Os resultados apresentados são animadores e apresentam as possibilidades da aplicação da formulação sugerida em problemas de reservatórios de petróleo com as características avaliadas.

## 10 CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho apresenta uma contribuição inédita à simulação em meios porosos com a aplicação do EFA (Bitencourt Jr et al., 2015) em conjunto com formulações estabilizadas do MEF (Sloan & Abbo, 1999; Mendonça, 2003; Coutinho et al., 2003) em dois problemas da área. O foco principal do trabalho foi a validação das formulações propostas, bem como o entendimento dos seus comportamentos frente a situações que podem ocorrer na prática como anisotropias e heterogeneidades. Para isso, essas propostas foram testadas exaustivamente a partir de experimentos clássicos da literatura, apresentando resultados animadores.

Diante da natureza dos problemas abordados, as formulações propostas se mostraram eficiente em todas as situações apresentadas, permitindo tanto a redução do número de graus de liberdade do sistema, como imposição de condições de acoplamento entre malhas construídas de forma independente.

O EFA possui duas características particularmente vantajosas: a capacidade de acoplar malhas mantendo o número de graus de liberdade das malhas originais e a realização do acoplamento sem a criação de superfícies definidas pelo usuário. Essas características fazem com que o acoplamento seja tratado de forma natural e direta, possibilitando facilmente a replicação dos resultados e diminuindo o custo computacional da simulação.

Todo o desenvolvimento do trabalho foi realizado em um código implementado pelo autor, possibilitando total controle sobre sua estrutura, funcionalidades, permitindo intervenções diretas nos esquemas numéricos implementados. Além disso o gerador de malhas utilizado é gratuito e de fácil acesso. Essas características permitem que outras formulações sejam implementadas e facilita os trabalhos futuros, sugeridos a seguir.

## 10.1 SUGESTÃO DE TRABALHOS FUTUROS

Sugere-se, então, como extensões desse trabalho os seguintes temas.

Para o problema de acoplamento hidromecânico:

1. Generalização do código para simulações tridimensionais;
2. Aplicação com materiais plásticos;
3. Consideração do escoamento bifásico;
4. Consideração de fraturas lineares utilizando o EFA;
5. Aprofundamento na aplicação do método para a solução de problemas de interação solo estrutura;
6. Aplicação do controle de passo de tempo na simulação.

Para o problema de escoamento bifásico:

1. Considerar o escoamento de fluidos miscíveis;
2. Implementar o escoamento trifásico;
3. Utilizar esquemas de refinamento adaptativos de malhas;
4. Considerar fluidos não-newtonianos no escoamento.

Para os dois problemas, recomenda-se:

1. Simular casos reais de reservatórios;
2. Utilizar técnicas de paralelização;
3. Implementar as técnicas sugeridas para problemas tridimensionais.

## 11 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abd, A. S. & Abushaikha, A., 2020. Velocity dependent up-winding scheme for node control volume finite element method for fluid flow in porous media. *Scientific Reports*, Volume 10, p. 4427.
- Abd, A. S., Asif, A. & Abushaikha, A., 2024. Performance analysis of linearization schemes for modelling multi-phase flow in porous media. *Scientific Reports*, Volume 14, p. 15626.
- Ai, Z. Y., Cao, G. J. & Cheng, Y. C., 2012. Analytical layer-element solutions of Biot's consolidation with anisotropic permeability and incompressible fluid and solid constituents. *Applied Mathematical Modelling*, pp. 4817 - 4829.
- Amiri, S. N., Hajali, M. & Esmaeily, A., 2014. Consolidation of a Layer under a Strip Loading and Resting on an Impermeable Foundation. *Journal of Earth Sciences and Geotechnical Engineering*, 4(2), pp. 111 - 125.
- Anon., s.d. *Gmsh*. [Online]  
Available at: <https://gmsh.info/>  
[Acesso em 10 Maio 2023].
- Appau, P. O. & Dankwa, O. K., 2019. A comparative study between finite difference explicit and implicit method for predicting pressure distribution in a petroleum reservoir. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, 11(4), pp. 23-40.
- Babuska, I., 1971. Error-Bounds for Finite Element Method. *Numer. Math.*, Volume 16, pp. 322-333.
- Bao, J., Xu, Z. & Fang, Y., 2014. A coupled thermal-hydro-mechanical simulation for carbon dioxide sequestration. *Environmental Geotechnics*, 3(5), pp. 312-324.
- Belgacem, F. B., Hild, P. & Laborde, P., 1998. The Mortar Finite Element Method for Contact Problems. *Mathl. Comput. Modelling*, Volume 28, pp. 263-271.
- Berger, L., Bordas, R., Kay, D. & Tavener, S., 2015. Stabilized lowest-order finite element approximation for linear three-field poroelasticity. *Journal on Applied Mathematics*, 37(5), pp. A 2222-A 2245.
- Bernardi, C., Debit, N. & Maday, Y., 1990. Coupling Finite Element and Spectral Methods: First Results. *Mathematics of Computation*, Volume 54, pp. 21-39.
- Biot, M. A., 1941. General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics*, Volume 12, pp. 155-164.
- Biot, M. A., 1955. Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Media. *Journal of Applied Physics*, Volume 26, pp. 182 - 185.
- Biot, M. A., 1956. Theory of Deformation of a Porous Viscoelastic Anisotropic Solid. *Journal of Applied Physics*, Volume 27, pp. 459 - 467.
- Biot, M. A., 1973. Nonlinear and Semilinear Rheology of Porous Solid. *Journal of Geophysical Research*, 78(23), pp. 4924 - 4937.

- Biot, M. A. & Willis, D. G., 1957. The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 594 - 601.
- Bitencourt Jr., L. A. G. et al., 2018. Modeling reinforced concrete structures using coupling finite elements for discrete representation of reinforcements. *Finite Elements in Analysis and Design*, Volume 149, pp. 32-44.
- Bitencourt Jr, L. A. et al., 2015. A coupling technique for non-matching finite element meshes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Volume 290, pp. 19-44.
- Bitencourt Jr, L. A. et al., 2015. A coupling technique for non-matching finite element meshes. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, pp. 19-44.
- Bonì, R. et al., 2020. 3D groundwater flow and deformation modelling of Madrid aquifer (Spain): insights from the integration of A-DInSAR and 3-D groundwater flow and geomechanical models. *Journal of Hydrology*.
- Bonì, R. et al., 2020. Understanding the dynamic behaviour for the Madrid aquifer (Spain): insights from the integration of A-DInSAR and 3-D groundwater flow and geomechanical models. *Tenth International Symposium on Land Subsidence*, p. 409–414.
- Bretas, E. M., Lemos, J. V. & Lourenço, P. B., 2013. Hydromechanical Analysis of Masonry Gravity Dams and their Foundations. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, pp. 327-339.
- Brezzi, F., 1974. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. *Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle*, , Volume 8, pp. 129 - 151.
- Buckley, S. E. & Leverett, . M. C., 1942. Mechanism of Fluid Displacement in Sands. *SPE*, 146(1), p. 107–116.
- Caputo, H. P., 2015. *Mecânica dos solos e suas aplicações*. s.l.:LTC.
- Carvalho, D. K. E., 2005. *Tese do doutorado*. Recife(Pernambuco): Universidade Federal de Pernambuco.
- Cavalcanti, M. d. C. R., 2002. *Análise por Elementos de Contorno de Meios Poro-elásticos Saturados pela Teoria de Biot*. Rio de Janeiro(Rio de Janeiro): s.n.
- Červený, J., Dobrev, V. & Kolev, T., 2019. Nonconforming Mesh Refinement for High-Order Finite Elements. *Software and High-Performance Computing*, 41(4).
- Cheng, A. H.-D. & Predeleanu, M., 1987. Transient boundary element formulation for linear poroelasticity. *Appt. Math. Modelling*, Volume 11.
- Chen, J., 2018. A review of hybrid implicit explicit finite difference time domain method. *Journal of Computational Physics*, Volume 363, pp. 256-267.
- Chen, Z. & Wang, M., 2017. Pore-scale modeling of hydromechanical coupled mechanics in hydrofracturing process. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, pp. 3410–3429,.
- Cheriet, A., Feliachi, M. & Mimoune, S. M., 2007. Nonconforming mesh generation for finite volume method applied to 3-D magnetic field analysis. *The European Physical Journal Applied Physics*, Volume 37, pp. 191-195.

- Coutinho, A. L., da Silva, A. S. & Devloo, P. R., 2003. Uma comparação de esquemas de estabilização para a simulação por elementos finitos de escoamentos imiscíveis bi-fásicos em meios porosos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Deseño en Ingeniería*, pp. 279-294.
- Cryer, C. W., 1963. A Comparison od the Three-Dimensional Consolidation Theories of Biot and Terzaghi. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Volume 16, pp. 401-412.
- Damirchi, B. V. et al., 2020. Transverse and longitudinal fluid flow modelling in fractured porous media with non-matching meshes. *Int J Numer Anal Methods Geomech*, Volume 45, p. 1–25.
- Darcy, H., 1856. Paris: s.n.
- Dedner, A., Kane, B., Klöfkorn, R. & Nolte, M., 2019. Python framework for hp-adaptive discontinuous Galerkin methods for two-phase flow in porous media. *Applied Mathematical Modelling*, Volume 67, pp. 179-200.
- c, L. J., 1993. A Triangle Baser Mixed Finite Element-Finite Volume Technique for Modeling Two Phase Flow through Porous Media. *Jounal of Computational Physics*, Volume 105, pp. 252-266.
- Fan, C. et al., 2019. A Thermo-Hydro-Mechanical-Chemical Coupling Model and Its Application in Acid Fracturing Enhanced Coalbed Methane Recovery Simulation. *Energies*, 12(4).
- Farah, P., Wall, W. A. & Popp, A., 2017. A mortar finite element approach for point, line, and surface contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 114(3), pp. 255-291.
- Fetrati, M. & Pak, A., 2020. Numerical simulation of sanding using a coupled hydro-mechanical sand erosion model. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, Volume 12, pp. 811-820.
- Filho, A. K. D. B., Carmona, R. G. & Zalán, P. V., 2024. Um novo "pré-sal"<sup>1</sup> no arco norte do território brasileiro?. *Nota técnica sobre a margem equatorial brasileira*, março.
- Francisco, M. & Carol, I., 2020. Displacement-based and hybrid formulations of zero-thickness mortar/interface elements for unmatched meshes, with application to fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(3), pp. 796-822.
- Fučík, R., Klinkovský, J., Solovský, J. & Mikyška, J., 2019. Multidimensional mixed-hybrid finite element method for compositional two-phase flow in heterogeneous porous media and its parallel implementation on GPU. *Computer Physics Communications*, Volume 238.
- Gambolati, G. & Teatini, P., 2015. Geomechanics of subsurface water withdrawal and injection. *Water Resources Research*, Volume 51, pp. 3922-3955.
- Gjennestad, M. A., Vassvik, M., Kjelstrup, S. & Hansen, A., 2018. Stable and Efficient Time Integration of a Dynamic Pore Network Model for Two-Phase Flow in Porous Media. *Frontiers in Physics*, 13 Junho, Volume 6.

GroundwaterSoftware, s.d. *GroundwaterSoftware*. [Online]  
 Available at: <https://www.groundwatersoftware.com/feflow.htm>  
 [Acesso em 10 Maio 2023].

Honório, H. T., Maliska, C. R., Ferronato, M. & Janna, C., 2018. A stabilized element-based finite volume method for poroelastic problems. *Journal of Computational Physics*, Volume 364, pp. 49-72.

Hughes, T. J. R., 1987. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Englewoods Cliffs(Nova Jersey): Prentice-Hall.

Hu, S. et al., 2014. Effect of seepage control on stability of a tailings dam during its staged construction with a stepwise-coupled hydro-mechanical model. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*.

Jia-Dong, Z. et al., 1982. The Application of the Finite Element Method to solving Biot's Consolidation Equation. *Applied Mathematics and Mechanics*, Dezembro, 3(6), pp. 857 - 871.

Karimi, M. et al., 2022. Energetic formulation of large-deformation poroelasticity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 10 Janeiro, Volume 46, p. 910–932.

Kim, H. H., Chung, T. C. & Lam, C. Y., 2016. Mortar formulation for a class of staggered discontinuous Galerkin methods. *Computers and Mathematics with Applications*, Volume 71, pp. 1568-1585.

Kou, J. & Shuyu, S., 2014. Analysis of a combined mixed finite element and discontinuous Galerkin method for incompressible two-phase flow in porous media. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Volume 37, pp. 962-982.

Kou, J. & Sun, S., 2014. Upwind discontinuous Galerkin methods with mass conservation of both phases for incompressible two-phase flow in porous media. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(5), pp. 1674-1699.

Kovářík, K., Masarovičová, S., Mužík, J. & Sitányiová, D., 2016. A meshless solution of two dimensional multiphase flow in porous media. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Volume 70, pp. 12-22.

Langtangen, H. P., 1990. Implicit finite element methods for two-phase flow in oil reservoirs. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Volume 10, pp. 651-681.

Laughton, E., Tabor, G. & Moxey, D., 2021. A comparison of interpolation techniques for non-conformal high-order discontinuous Galerkin methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 381.

Lenormand, R., Touboul, E. & Zarcone, C., 1988. Numerical models and experiments on immiscible displacements in porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, Volume 189, pp. 165-187.

Liu, P., Zhao, J., Li, Z. & Wang, H., 2024. Numerical simulation of multiphase multi-physics flow in underground reservoirs: Frontiers and challenges. *Capillarity*, 12(3), pp. 72-79.

- Li, X., Feng, Y. & Gray, K. E., 2018. Hydro-Mechanical Sand Erosion Model for 1 Sand Production Simulation. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, pp. 208-224.
- Loula, A. F. D., Garcia, E. L. & Coutinho, A. L. G. A., 1999. Miscible displacement simulation by finite element methods in distributed memory machines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174(3-4), pp. 339-354.
- Lucier, A. & Zoback, M., 2008. Assessing the economic feasibility of regional deep saline aquifer CO<sub>2</sub> injection and storage: A geomechanics-based workflow applied to the Rose Run sandstone in Eastern Ohio, USA. *International Journal of Greenhouse Gas Control*, 2(1), p. 230–247.
- Malta, S. M. C., Loula, A. F. D. & Garcia, E. L. M., 2000. Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations. *Computer methods on applied mechanics and engineering*, Volume 187, pp. 119-136.
- Mandel, J., 1953. Consolidation des Sols (Etude Mathematique). *Geotechnique*, 3(7), pp. 287-299.
- Manzoli , O. L. et al., 2021. A new discrete fracture approach based on the use of coupling finite elements for modeling fluid transport in naturally fractured porous media. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Volume 386.
- Masud, A. & Hughes, T. J. R., 2002. A stabilized mixed finite element method for Darcy flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 30, pp. 4341-4370.
- MathWorks, s.d. *MATLAB*. [Online]  
Available at: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>  
[Acesso em 10 Maio 2023].
- M. C. et al., 2022. Modeling the hydrodynamic behavior of fractures and barriers in porous media using coupling finite elements. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Volume 208, pp. 1-19.
- Mendonça, A. d. L., 2003. *Simulação numérica de escoamentos incompressíveis bifásicos de fluidos não-newtonianos e imiscíveis em meios porosos via método dos elementos finitos*. Rio de Janeiro(Rio de Janeiro): Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Mendonça, A. d. L., 2003. *Simulação numérica de escoamentos incompressíveis bifásicos de fluidos não-newtonianos e imiscíveis bifásicos de fluidos não-newtonianos e imiscíveis em meios porosos via método dos elementos finitos*. Rio de Janeiro(Rio de Janeiro): Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Morais, J. M. & Oliveira, J. M., 2022. *Nota Técnica*. s.l.:Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada.
- Muskat, M. & Wyckoff, R. D., 1946. *The flow of homogeneous fluids through porous media*. Primeira ed. Arbor(Michigan): Copyright.
- Niu, C., Rui, H. & Hu, X., 2021. A stabilized hybrid mixed finite element method for poroelasticity. *Computational Geosciences*, Volume 25, p. 757–774.

- Oyarzúa, R. & Ruiz-Baier, R., 2016. Locking- free Finite Element Methods for Poroelasticity. *Siam J. Numer. Anal.*, 54(5), p. 2951–2973.
- Pham, H. T., Rühaak Wolfram, Schuster, V. & Sass, I., 2019. Fully hydro-mechanical coupled Plug-in (SUB +) in FEFLOW for analysis of land subsidence due to groundwater extraction. *SoftwareX*, Volume 9, pp. 15-19.
- Pham, T. H., Rühaak, W., Schuster, V. & Sass, I., 2019. Fully hydro-mechanical coupled Plug-in (SUB+) in FEFLOW for analysis of land subsidence due to groundwater extraction. *SoftwareX*, Volume 9, pp. 15-19.
- Phillips, J. P., 2005. Finite Element Methods in Linear Poroelasticity: Theoretical and Computational Results. Dezembro.
- Phillips, P. J. & Wheeler, M. F., 2007. A coupling of mixed and continuous Galerkin finite element methods for poroelasticity I: the continuous in time case. *Comput Geosci*, Volume 11, p. 131–144.
- Phillips, P. J. & Wheeler, M. F., 2008. A coupling of mixed and discontinuous Galerkin finite-element methods for poroelasticity. *Comput Geosci*, Volume 12, p. 417–435.
- Presho, M. & Galvis, J., 2016. A mass conservative Generalized Multiscale Finite Element Method applied to two-phase flow in heterogeneous porous media. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Volume 296, pp. 376-388.
- Raviart, P. A. & Thomas, J. M., 2006. Mathematical Aspects of Finite Element Methods. *A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems*, 01 Janeiro, pp. 292-315.
- Rodrigues, E. A. et al., 2017. An adaptive concurrent multiscale model for concrete based on. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, pp. 1-36.
- Sandhu, R. S., Liu, H. & Singh, K. J., 1977. Numerical Performance of Some Finite Element Schemes for Analysis of Seepage in Porous Elastic Media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 1, pp. 177-194.
- Schädle, P. et al., 2019. 3D non-conforming mesh model for flow in fractured porous media using Lagrange multipliers. *Computers and Geosciences*, Volume 132, pp. 42-55.
- Schiffman, L. R., Chen, A. T. F. & Jordan, J. C., 1969. An analyses of Consolidation Theories. *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division ASCE*, pp. 285 - 312.
- Sesini, P. A., 2006. *Um estudo sobre a solução de leis de conservação não lineares por elementos finitos estabilizados*. Rio de Janeiro(Rio de Janeiro): Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Settari, A. & Mourits, F. M., 1998. A Coupled Reservoir and Geomechanical Simulation System. *SPE Journal*, 3(3), pp. 219-226.
- Silva, A. S., 2000. *Tese de doutorado*. Rio de Janeiro(Rio de Janeiro): Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- Silva, A. S., Coutinho, L. G. A. A. & Parsons, I. D., 2000. Método multigrid para a simulação por elementos finitos de escoamentos imiscíveis em meios porosos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 16(3), pp. 311-326.

- Silva, L. V. M., 2018. *Dissertação de mestrado*. Recife(Pernambuco): UFPE.
- Sloan, S. W. & Abbo, A. J., 1999. Biot consolidation analysis with automatic time stepping and error control Part 1: theory and implementation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 23, pp. 467 - 492.
- Sloan, S. W. & Abbo, A. J., 1999. Biot Consolidation Analysis with Automatic Time Stepping and Error Control Part 2: Applications. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 23, pp. 493 - 529.
- Sloan, S. W. & Abbo, A. J., 1999. International Journal Numerical. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 23, pp. 467 - 492.
- Soares, E. M. d. S. R. & Ferreira, G. d. S., 2024. *Engenharia, Gestão e Inovação*. Belo Horizonte: Poisson.
- Song, F., Rodriguez-Dono, A. & Olivella, S., 2021. Hydro-mechanical modelling and analysis of multi-stage tunnel excavations using a smoothed excavation method. *Computers and Geotechnics*, Volume 135, pp. 1-25.
- Sousa, R. D. R. & Gomes, E. T. A., 2022. Os principais estados produtores de petróleo no Brasil e os efeitos da aplicação dos recursos dos royalties do petróleo. *Research, Society and Development*, 11(12).
- Souza, D. A. F., Sesini, P. A. & Coutinho, A. L. G. A., 2003. Comparison of stabilization schemes to simulate two-phase flows and miscible displacements in porous medium by finite element. *Mecânica Computacional*, Volume XXII, pp. 368-382.
- Souza, M. R. d. A., 2015. *Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em Reservatórios de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos Utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem*. Recife(Pernambuco): UFPE.
- Sunada, D. K., 1990. Exact Integral Solutions for Two-Phase Flow. *Water Resources Research*, Março, 26(3), pp. 399-413.
- Surendran, M. et al., 2021. Cell-based smoothed finite element method for modelling interfacial cracks with non-matching grids. *Engineering Fracture Mechanics*, 242(1).
- Světlík, T., Varga, R., Lukáš, P. & Čermák, M., 2023. Mortar method for 2D elastic bounded contact problems. *Management Systems in Production Engineering*, 31(4), pp. 449-455.
- Tang, X. et al., 2025. Stabilized two-phase material point method for hydromechanical coupling problems in solid–fluid porous media. *Geoscientific Model Development*, Volume 18, p. 4743–4758.
- Temizer, İ., 2012. A mixed formulation of mortar-based frictionless contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 223-224(1), pp. 173-185.
- Terry, R. E. & Rogers, J. B., 2015. *Applied Petroleum Reservoir Engineering*. 3 ed. Massachusetts: Prentice Hall.
- Terzaghi, K., 1943. Theoretical Soil Mechanics. *John Wiley & sons*.

- Terzaghi, K. & Frohlich, K. O., 1936. Theorie der Setzung Ven Tonschiten. *Franz Deuticke*.
- Tessitore, J. et al., 2016. Comparison of water-level, extensometric, DInSAR and simulation data for quatification of subsidence in Murcia City (SE Spain). *Hydrogeol J*, pp. 727-747.
- Tzampoglou, P. & Loupasakis, C., 2019. Numerical simulation of the factors causing land subsidence due to overexploitation of the aquifer in the Amyntaio open coal mine, Greece. *HydroResearch*, Volume 1, pp. 8-24.
- Verruijt, A., 2023. *verruijt*. [Online]  
Available at: <https://geo.verruijt.net/>
- Wang, M. et al., 2015. Coupled hydro-mechanical analysis of a dam foundation with thick fluvial deposits: a case study of the Danba Hydropower Project, Southwestern China. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 20(1), p. 19–44.
- Wei, Z., Yu, X., Xu, X. & Chen, X., 2014. Experiment and hydro-mechanical coupling simulation study on the human periodontal ligament. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 113(3), pp. 749-756.
- Wilson, P., Teschemacher, T., Bucher, P. & Wüchner, R., 2021. Non-conforming FEM-FEM coupling approaches and their application to dynamic structural analysis. *Engineering Structures*, Volume 241.
- Woodman, N. D., Burgess, W. G., Ahmed, K. M. & Zahid, A., 2019. A partially coupled hydro-mechanical analysis of the Bengal Aquifer System under hydrological loading. *Hydrology and Earth System Sciences*, Volume 23, pp. 2461-2479.
- X. F., Z. G. & Y. L., 2018. Analysis of a multiphysics finite element method for a poroelasticity model. *IMA Journal of Numerical Analysis*, Volume 38, p. 330–359.
- Xin, L., Li, J. & Chen, Z., 2017. A Nonconforming Virtual Element Method for the Stokes Problem on General Meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 320(15), pp. 694-711.
- Yan, X. et al., 2021. Hierarchical Modeling of Hydromechanical Coupling in Fractured Shale Gas Reservoirs with Multiple Porosity Scales. *Energy Fuels*, Volume 35, p. 5758–5776.
- Yin, T. et al., 2020. Coupled Thermo-Hydro-Mechanical Analysis of Valley Narrowing Deformation of High Arch Dam: A Case Study of the Xiluodu Project in China. *Applied Sciences*, 10(2).
- Yi, S.-Y. & Bean, M. L., 2017. Iteratively coupled solution strategies for a four-field mixed finite. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Volume 41, pp. 159-179.
- Zhang, C., Zarrouk, S. J. & Archer, R., s.d. Development of a fully coupled flow-geomechanics simulator for flow in saturated porous media. pp. 1 - 11.
- Zhou, H. et al., 2018. A 3D model of coupled hydro-mechanical simulation of double shield TBM excavation. *Tunnelling and Underground Space Technology*, Volume 71, pp. 1-14.
- Zhou, M. et al., 2020. A three-field dual mortar method for elastic problems with nonconforming mesh. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 362(15), pp. 1-24.

Zienkiewicz, O. C. & Shiomi, T., 1984. Dynamic Behavior of Saturated Porous Media; the Generalized Biot Formulation and its Numerical Solution. *Intenational Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Volume 8, pp. 71-96.

## ANEXO A

Esse anexo trata dos aspectos associados ao código computacional desenvolvido, onde foram implementadas as formulações apresentadas no presente trabalho. A Figura 77 ilustra um esquema didático do procedimento de simulação apresentando as seguintes etapas: geração de malha, entrada de dados, pré-processamento, processamento e pós-processamento. Salvo a etapa de geração de malha, que é realizada no Gmsh®, todas as outras são realizadas no código desenvolvido, ou seja, no próprio MATLAB®. A Figura 78 apresenta um esquema do código, indicando se a etapa é definida pelo usuário ou realizada automaticamente e em que ferramenta ela ocorre.



Figura 77. Esquema do código.

As etapas apresentadas na Figura 77 estão sintetizadas abaixo:

Geração de malha:

Essa etapa é realizada no Gmsh®, onde o usuário define a geometria, o tipo de elemento, o refinamento da malha, os locais que contém condições de contorno e os parâmetros do material. Para os casos de malhas conformes apenas uma malha é criada já para casos de malhas não-conformes são criadas duas malhas. Nesse passo são gerados arquivos do tipo ‘.msh’ que serão lidos no código.

Entrada de dados:

A entrada de dados é realizada em um arquivo principal em formato MATLAB® onde o usuário define os parâmetros de simulação, os valores e tipos de condição de contorno, o nome dos arquivos de malhas e as definições de pós-processamento. Esse procedimento é definido em um arquivo padrão que quando processado acessa as funções de pré-processamento, processamento e pós-processamento.

Pré-processamento:

De posse dos nomes dos arquivos de malha essa rotina faz a leitura desses arquivos e organiza os vetores e matrizes das coordenadas, conectividades dos elementos e de condições de contorno. Para o MEF misto essa rotina cria os graus de liberdade mecânicos a partir dos elementos hidráulicos. No caso de malhas não-conformes essa rotina identifica as interfaces, cria os elementos de compatibilidade e a malha final resultante da união dos elementos de interface e dos elementos das malhas iniciais.

Processamento:

A partir dos dados lidos anteriormente e a definição do módulo a ser utilizado o processamento é realizado conforme as formulações apresentadas.

Pós-processamento:

Todo o pós-processamento é realizado no MATLAB®, onde são criadas imagens com as deformadas das malhas, imagens com escalas de cores das variáveis, seções no domínio com planos onde os resultados são apresentados em termos da direção coordenada x ou y e variação nos valores de coordenadas ao longo do tempo.

O código apresenta 8 módulos de análises que são sintetizados na Figura 78.

**Módulos:**

- Hidráulico (T3)
- Hidráulico não-conforme (T3+EFA)
- Mecânico (T6)
- Mecânico não-conforme (T6+EFA)
- Hidromecânico (T3-T6)
- Hidromecânico não-conforme (T3-T6+EFA)
- Bifásico (SUPG T3)
- Bifásico não-conforme (SUPG T3+EFA)

**LEGENDA**

- T3 Elemento triangular linear (3 nós)
- T6 Elemento triangular quadrático (6 nós)
- EFA Elementos finitos de acoplamento

Figura 78. Módulos do código.