



UNIVERSIDADE  
FEDERAL  
DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA  
**EDUMATEC**  
UFPE

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO**  
**CENTRO DE EDUCAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E**  
**TECNOLÓGICA**  
**CURSO DE DOUTORADO**

**ALAN GUSTAVO FERREIRA**

**PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES**  
**DE MATEMÁTICA SOBRE O ENSINO DE COMBINATÓRIA**

RECIFE/PE

2024



UNIVERSIDADE  
FEDERAL  
DE PERNAMBUCO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO  
MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA  
**EDUMATEC**  
UFPE

**ALAN GUSTAVO FERREIRA**

**PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES  
DE MATEMÁTICA SOBRE O ENSINO DE COMBINATÓRIA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, como requisito parcial para obtenção do título de doutor.

**Área de concentração:** Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Paula Moreira Baltar Bellemain

Coorientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cristiane de Arimatéa Rocha

Recife

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Ferreira, Alan Gustavo.

Percurso de estudo e pesquisa para a formação de professores de Matemática sobre o ensino de Combinatória / Alan Gustavo Ferreira. - Recife, 2024.

237f.: il.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2024.

Orientação: Paula Moreira Baltar Bellemain.

Coorientação: Cristiane de Arimatéia Rocha.

1. Combinatória; 2. Formação de professores; 3. Teoria Antropológica do Didático; 4. Percurso de estudo e pesquisa para formação de professores. I. Bellemain, Paula Moreira Baltar. II. Rocha, Cristiane de Arimatéia. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

**ALAN GUSTAVO FERREIRA**

**PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES  
DE MATEMÁTICA SOBRE O ENSINO DE COMBINATÓRIA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação  
em Educação Matemática e Tecnológica da  
Universidade Federal de Pernambuco, Centro de  
Educação, como requisito para a obtenção do título  
de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica  
Área de concentração: Ensino de Ciências e  
Matemática

Aprovado em: 25/10/2024.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain (Orientadora e Presidente)  
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

---

Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Examinadora Interna)  
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

---

Profa. Dra. Marilena Bittar (Examinadora Externa)  
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS

---

Prof. Dr. Ricardo Nicasso Benito (Examinador Externo)  
Universidade Federal de Sergipe - UFS

---

Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Examinadora Externa)  
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

À minha mãe, Luciana Ferreira.

## AGRADECIMENTOS

Concluir uma tese de doutorado representa mais do que a realização de um sonho; é uma demonstração da bondade e misericórdia de Deus, manifestada de diversas formas ao longo dessa trajetória. Por isso, agradeço profundamente a Deus, fonte de todo conhecimento, por me sustentar até aqui e por me conceder a graça de avançar mais um passo nessa jornada acadêmica.

Agradeço à minha orientadora, Paula Baltar Bellemain, pelo zelo, ética e dedicação com que orientou esta pesquisa. Suas contribuições e *insights* foram um verdadeiro farol, iluminando o caminho deste estudo, especialmente ao navegarmos pela Teoria Antropológica do Didático. Agradeço também pela confiança depositada, pela compreensão e pelo respeito ao meu ritmo e à minha autonomia intelectual.

Agradeço igualmente à minha coorientadora, Cristiane Rocha, cuja leveza e competência enriqueceram este estudo, especialmente nas discussões sobre os objetos de saber da Combinatória.

Aos estimados membros da banca examinadora, Jaqueline Lixandrão Santos, Marilena Bittar, Ricardo Nicasso e Rute Borba, expresso meus sinceros agradecimentos pela leitura cuidadosa e crítica, cujas contribuições foram fundamentais e inestimáveis para o aperfeiçoamento desta pesquisa. Estendo os agradecimentos à Marilene Santos pelas contribuições oferecidas durante a qualificação.

Agradeço profundamente à minha mãe, Luciana Ferreira, por ter sonhado comigo e torcido desde as primeiras etapas da seleção. Mas, mais do que isso, por todo o esforço, dedicação e abnegação ao longo de minha vida, que foram essenciais para que este momento se tornasse realidade.

A Tarcísio Vieira, com quem tenho compartilhado os fardos, os fracassos e também as conquistas dos últimos anos, manifesto minha profunda gratidão. Seu companheirismo e compreensão, especialmente nos momentos de tensão durante a escrita deste trabalho, foram indispensáveis para que hoje possamos celebrar este momento, que não é apenas meu, mas nosso.

Agradeço a minha família, Ana Paula Ferreira, Marinalva Silva, Jailton Freitas e Paulo Fernando Rodrigues, por terem sido meu suporte e vibrarem com minhas conquistas como se fossem suas.

Não encontro palavras suficientes para expressar minha gratidão aos professores e professoras que participaram do nosso estudo empírico (os quais, por questões éticas, não podem ser citados nominalmente). Apesar das inúmeras demandas profissionais e acadêmicas,

vocês dedicaram uma parte significativa do seu tempo para contribuir com esta pesquisa. Sem o comprometimento e a participação ativa de cada um, este estudo não teria sido possível. Minha eterna gratidão a todos vocês!

Agradeço ao Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico – GERAÇÃO da Universidade Federal de Pernambuco por ter me acolhido e proporcionado um ambiente no qual esta pesquisa também pudesse ser discutida e aperfeiçoada.

Um agradecimento especial aos professores e professoras do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica – PPGEDUMATEC da Universidade Federal de Pernambuco, especialmente aos docentes da linha de pesquisa em Didática da Matemática, pelas valiosas contribuições não só a este estudo, mas também a minha formação acadêmica.

Agradeço aos colegas da turma de doutorado 2020.1. Apesar de termos iniciado o curso em meio a uma pandemia, as palavras de incentivo e encorajamento de todos tornaram o processo mais leve. Estendo esses agradecimentos aos colegas da linha de pesquisa em Didática da Matemática, especialmente Valéria Santos e Leonardo Morais, pelas valiosas trocas e contribuições compartilhadas. Agradeço, em particular, a Franklin Pachêco, com quem tive a honra de compartilhar a mesma orientadora, pelas conversas reservadas sobre nossas pesquisas e pelo encorajamento mútuo que foi essencial ao longo dessa jornada.

Agradeço ao Governo do Estado de Pernambuco pela concessão da licença remunerada, que me permitiu dedicar-me com mais afinco ao curso e à pesquisa.

Agradeço aos amigos e amigas, de perto e de mais distante, que acreditaram no meu potencial e vibram com minhas conquistas.

“Todo o conhecimento é uma resposta a uma pergunta.” (Bachelard, 1996, p. 18)

## RESUMO

Este estudo tem por objetivo central desenvolver, implementar e analisar um processo de formação de professores sobre o ensino de Combinatória, baseado na metodologia do Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), com um grupo de professores de Matemática do Ensino Médio. Possui como marco teórico-metodológico a Teoria Antropológica do Didático elaborada por Chevallard e colaboradores. Esse referencial tem tido estreita relação com a formação docente, pois fornece elementos que podem subsidiar a análise de práticas, inclusive as formativas. Além disso, fez emergir um dispositivo de formação, o PEP-FP, que coloca no centro desse processo questões intrínsecas à profissão docente, vinculando uma investigação com a docência e criando novas infraestruturas matemático-didáticas. O percurso metodológico esteve alicerçado nos pressupostos da Engenharia Didática, considerando as quatro fases: análise preliminar, análise *a priori*, análise *in vivo* e análise *a posteriori*. Na primeira fase, construímos um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) para o campo da Combinatória no Ensino Médio e explicitamos um Modelo Praxeológico Dominante (MPD) para o Ensino Médio brasileiro concernente a esse campo. No que se refere ao MPR, modelizamos quatro tipos de tarefas relativas aos problemas de contagem em Combinatória: Produto de Medidas, Arranjo, Permutação e Combinação. Como técnica ou principal ingrediente técnico para a resolução desses tipos de tarefas, elegemos o Princípio Multiplicativo. Quanto à constituição do entorno tecnológico-teórico, os discursos justificativos estiveram ancorados nas ideias de ordem e natureza, entendidas como as diferentes disposições possíveis dos elementos nos agrupamentos formados. Na análise *a priori*, elaboramos dois mapas preliminares de questões de dois PEPs: o primeiro, referente ao Módulo 0 de um PEP-FP, baseado na questão geradora “Como ensinar Combinatória?”; e o segundo, um PEP experimentado pelos professores como se fossem estudantes a partir da pergunta “*Q<sub>0</sub>: Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo*”. Na análise *in vivo*, foram vivenciados quatro módulos ( $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$ ) de um PEP-FP com um grupo de professores de Matemática, durante 11 encontros no formato predominantemente remoto síncrono. Durante a vivência dos quatro módulos, os professores em formação tiveram a oportunidade de ter contato com elementos do MPR, incorporando-os ao seu repertório praxeológico, bem como confrontar o MPD. Também puderam experimentar novas infraestruturas didático-matemáticas, como o PEP, nas quais os estudantes assumem um papel de protagonismo a partir de uma atividade investigativa genuína, com vistas a suscitar uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória. Isso foi possível a partir da colocação da

pergunta  $Q_0$  elencada anteriormente. Nessa perspectiva, foi possível constatar que um PEP-FP sobre o ensino de Combinatória agrega saberes matemáticos e didáticos ao equipamento praxeológico dos professores em formação, de maneira articulada, a fim de que possam atuar de forma pertinente no ensino desta área da Matemática, desde que sejam consideradas as condições e restrições para realização desse processo, favorecendo um ambiente propício para que os professores fossem iniciados no paradigma de questionamento do mundo.

**Palavras-chave:** Combinatória. Formação de professores. Teoria Antropológica do Didático. Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores.

## ABSTRACT

The main objective of this study is to develop, implement and analyze a teacher training process on the teaching of Combinatorics, based on the methodology of the Study and Research Path for Teacher Training (SRP-TT), with a group of high school Mathematics teachers. Its theoretical and methodological framework is the Anthropological Theory of Didactics developed by Chevallard and collaborators. This framework has been closely related to teacher training, as it provides elements that can support the analysis of practices, including formative ones. In addition, it has given rise to a training device, the SRP-TT, which places at the center of this process issues intrinsic to the teaching profession, linking research with teaching and creating new mathematical and didactic infrastructures. The methodological path was based on the assumptions of Didactic Engineering, considering the four phases: preliminary analysis, a priori analysis, in vivo analysis and a posteriori analysis. In the first phase, we constructed a Praxeological Reference Model (PRM) for the field of Combinatorics in High School and explained a Dominant Praxeological Model (DPM) for Brazilian High School concerning this field. Regarding the PRM, we modeled four types of tasks related to counting problems in Combinatorics: Product of Measures, Arrangement, Permutation and Combination. As the technique or main technical ingredient for solving these types of tasks, we chose the Multiplicative Principle. Regarding the constitution of the technological-theoretical environment, the justifying discourses were anchored in the ideas of order and nature, understood as the different possible arrangements of the elements in the formed groups. In the a priori analysis, we elaborated two preliminary maps of questions from two SRP: the first, referring to Module 0 of a SRP-TT, based on the generating question “How to teach Combinatorics?”; and the second, a SRP experienced by teachers as if they were students based on the question “Q<sub>0</sub>: How to create an efficient and secure universal code that identifies all citizens of the world”. In the in vivo analysis, four modules (M<sub>0</sub>, M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub> and M<sub>3</sub>) of a SRP-TT were experienced with a group of Mathematics teachers, during 11 meetings in a predominantly synchronous remote format. During the experience of the four modules, the teachers in training had the opportunity to have contact with elements of the MPR, incorporating them into their praxeological repertoire, as well as confronting the MPD. They were also able to experiment with new didactic-mathematical infrastructures, such as the SRP, in which students assume a leading role based on a genuine investigative activity, with a view to raising a possible reason for teaching Combinatorics. This was possible by posing the question Q<sub>0</sub> listed above. From

this perspective, it was possible to verify that a SRP-TT on the teaching of Combinatorics adds mathematical and didactic knowledge to the praxeological equipment of teachers in training, in an articulated manner, so that they can act pertinently in the teaching of this area of Mathematics, as long as the conditions and restrictions for carrying out this process are considered, favoring an environment conducive to teachers being initiated into the paradigm of questioning the world.

**Keywords:** Combinatorics. Teacher training. Anthropological Theory of Didactics. Study and Research Path for Teacher Training.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 1</b> – Esquema representativo dos componentes de uma Praxeologia.....                                     | 31  |
| <b>Figura 2</b> – Escala de Níveis de Codeterminação Didática .....                                                  | 33  |
| <b>Figura 3</b> – Escala de Níveis de Codeterminação no Paradigma de Questionamento do Mundo .....                   | 38  |
| <b>Figura 4</b> – Esquema herbartiano desenvolvido .....                                                             | 40  |
| <b>Figura 5</b> – Esquema das praxeologias da profissão docente .....                                                | 44  |
| <b>Figura 6</b> – Fases de um PEP-FP segundo Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gáscon Perez (2019) .....                  | 49  |
| <b>Figura 7</b> – Esquema sintetizador das fases/etapas do percurso metodológico da pesquisa baseado na ED .....     | 102 |
| <b>Figura 8</b> – Esquema sintetizador das questões que nortearam a construção do MPR.....                           | 104 |
| <b>Figura 9</b> – Esquema-síntese da subcategorização dos problemas de contagem.....                                 | 106 |
| <b>Figura 10</b> – Modelo praxeológico de referência sobre problemas combinatórios de contagem .....                 | 112 |
| <b>Figura 11</b> – Recursos utilizados para representar possibilidades .....                                         | 121 |
| <b>Figura 12</b> - Formação do entorno tecnológico-teórico relativo ao tipo de tarefas T1 (Produto de Medidas) ..... | 122 |
| <b>Figura 13</b> – Diagrama de árvore com as possibilidades de casos da tarefa do tipo T2 .....                      | 123 |
| <b>Figura 14</b> – Formação do entorno tecnológico-teórico em torno do tipo de tarefas T2.....                       | 124 |
| <b>Figura 15</b> – Formação do entorno tecnológico-teórico em torno do tipo de tarefas T3.....                       | 125 |
| <b>Figura 16</b> – Tarefa do tipo T4 presente no livro didático.....                                                 | 126 |
| <b>Figura 17</b> – Esquema para sistematização das possibilidades.....                                               | 129 |
| <b>Figura 18</b> – Diagrama de árvore utilizado para representar uma tarefa do tipo T1.....                          | 129 |
| <b>Figura 19</b> – Formação do entorno tecnológico-teórico do tipo de tarefas T4 .....                               | 132 |
| <b>Figura 20</b> – Esquema sintetizador das questões que nortearam a construção do MPR.....                          | 137 |
| <b>Figura 21</b> – Síntese do Modelo Praxeológico Dominante para o ensino de Combinatória no Ensino Médio.....       | 139 |
| <b>Figura 22</b> – Mapa de questões a priori referente ao Módulo 0 do PEP – FP .....                                 | 141 |
| <b>Figura 23</b> – Mapa de questões preliminares do PEP a ser experimentado no Módulo 1 .....                        | 146 |
| <b>Figura 24</b> – Mapa de questões elaboradas pelos participantes durante o Módulo 0 do PEP-FP .....                | 157 |

|                                                                                                                                    |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Figura 25</b> – Mapa de perguntas e respostas fruto da construção da comunidade de estudos durante a vivência do Módulo 0 ..... | 181 |
| <b>Figura 26</b> – Prototipação do código de identificação realizada pelos professores em formação .....                           | 197 |
| <b>Figura 27</b> – Mapa de perguntas e respostas do PEP experimentado no Módulo 1 .....                                            | 202 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Quadro 1</b> – Configuração dos encontros realizados durante a vivência do PEP-FP.....                        | 100 |
| <b>Quadro 2</b> - Mapa de frequência dos participantes durante os encontros formativos .....                     | 101 |
| <b>Quadro 3</b> – Síntese dos tipos de tarefas relativas aos problemas de contagem.....                          | 107 |
| <b>Quadro 4</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T1 .....                         | 122 |
| <b>Quadro 5</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T2.....                          | 124 |
| <b>Quadro 6</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T3.....                          | 125 |
| <b>Quadro 7</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T4.....                          | 127 |
| <b>Quadro 8</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T1 de Dante e Viana (2020) ..... | 129 |
| <b>Quadro 9</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T2 de Dante e Viana (2020) ..... | 130 |
| <b>Quadro 10</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T3 de Dante e Viana (2020)..... | 131 |
| <b>Quadro 11</b> – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T4 de Dante e Viana (2020)..... | 132 |
| <b>Quadro 12</b> – Perguntas elaboradas pelos grupos durante o primeiro encontro do Módulo 0151                  |     |
| <b>Quadro 13</b> – Segunda versão das perguntas derivadas formuladas pelos grupos durante Módulo 0 .....         | 155 |
| <b>Quadro 14</b> – Respostas preliminares das questões derivadas do M0 apresentadas pelo Grupo 1 – E2.....       | 162 |
| <b>Quadro 15</b> – Respostas preliminares das questões derivadas do M0 apresentadas pelo Grupo 2 .....           | 165 |
| <b>Quadro 16</b> – Respostas elaboradas pelo Grupo 1 – E2 durante vivência do M0 .....                           | 168 |
| <b>Quadro 17</b> – Respostas elaboradas pelo Grupo 2 – E2 durante vivência do M0 .....                           | 174 |
| <b>Quadro 18</b> – Questões preliminares levantadas pelo Grupo 2 – E5 durante o Módulo 1 .....                   | 186 |
| <b>Quadro 19</b> – Questões preliminares levantadas pelo Grupo 2 – E5 durante o Módulo 1 .....                   | 187 |
| <b>Quadro 20</b> – Questões derivadas elaboradas pela comunidade de estudos no PEP do Módulo 1 .....             | 188 |
| <b>Quadro 21</b> – Questões e respostas elaboradas pelo Grupo 1 – E7 durante a vivência do PEP no Módulo 1 ..... | 190 |

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Quadro 22</b> – Questões e respostas elaboradas pelo Grupo 2 durante a vivência do PEP no Módulo 1 ..... | 191 |
| <b>Quadro 23</b> – Análise matemática do PEP experimentado no Módulo 1 .....                                | 210 |
| <b>Quadro 24</b> – Análise didática do PEP experimentado no Módulo 1.....                                   | 212 |
| <b>Quadro 25</b> – Desenho preliminar de um PEP para o ensino de Combinatória no Ensino Médio .....         | 216 |

## LISTA DE GRÁFICOS

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Gráfico 1</b> - Distribuição do quantitativo de trabalhos sobre Formação de Professores e a TAD na década 2011-2020 ..... | 51 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Tabela 1</b> – Distribuição dos trabalhos, por categoria, sobre formação de professores e a TAD .....                                                                                | 52  |
| <b>Tabela 2</b> – Distribuições de trabalhos nas subcategorias de propostas de formação de professores.....                                                                             | 57  |
| <b>Tabela 3</b> – Distribuição das tarefas matemáticas do capítulo sobre Combinatória do livro didático “Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade” .....            | 120 |
| <b>Tabela 4</b> – Distribuição das tarefas matemáticas do capítulo sobre Combinatória do livro didático “Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação” ... | 128 |

## SUMÁRIO

|                                                                                                                                                  |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1 INTRODUÇÃO .....</b>                                                                                                                        | <b>19</b>  |
| <b>2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.....</b>                                                                                                   | <b>30</b>  |
| <b>2.1 O Paradigma de Visita às Obras <i>versus</i> o Paradigma da Investigação e do Questionamento de Mundo .....</b>                           | <b>35</b>  |
| <b>2.2 Percurso de Estudo e Pesquisa .....</b>                                                                                                   | <b>39</b>  |
| <b>2.3 A TAD, a profissão docente e a formação de professores .....</b>                                                                          | <b>43</b>  |
| <b>2.3 Pesquisas brasileiras e internacionais sobre formação de professores que se ancoram na Teoria Antropológica do Didático .....</b>         | <b>49</b>  |
| 2.3.1 Aspectos conceituais da TAD utilizados para análise de formação de professores .....                                                       | 52         |
| 2.3.2 Praxeologias Matemáticas e/ou Didáticas necessárias para a formação de professores .....                                                   | 54         |
| 2.3.3 Propostas metodológicas, no âmbito da TAD, para formação de professores .....                                                              | 56         |
| 2.3.4 Trabalhos de natureza bibliográfica .....                                                                                                  | 64         |
| 2.3.5 Condições e restrições para realização da formação de professores no contexto do paradigma de investigação e questionamento de mundo ..... | 65         |
| <b>3 COMBINATÓRIA .....</b>                                                                                                                      | <b>68</b>  |
| <b>3.1 O que é a Combinatória? Um ponto de vista histórico-epistemológico .....</b>                                                              | <b>68</b>  |
| <b>3.2 Por que ensinar Combinatória? .....</b>                                                                                                   | <b>79</b>  |
| <b>4. OBJETIVOS e hipótese de pesquisa .....</b>                                                                                                 | <b>93</b>  |
| <b>4.1 Objetivo Geral.....</b>                                                                                                                   | <b>93</b>  |
| <b>4.2 Objetivos Específicos .....</b>                                                                                                           | <b>94</b>  |
| <b>4.3 Hipótese de Pesquisa.....</b>                                                                                                             | <b>94</b>  |
| <b>5 PERCURSO METODOLÓGICO .....</b>                                                                                                             | <b>95</b>  |
| <b>5.1 Análise Preliminar .....</b>                                                                                                              | <b>96</b>  |
| <b>5.2 Análise <i>a priori</i> .....</b>                                                                                                         | <b>98</b>  |
| <b>5.3 Análise <i>in vivo</i>.....</b>                                                                                                           | <b>98</b>  |
| <b>5.4 Análise <i>a posteriori</i> .....</b>                                                                                                     | <b>101</b> |
| <b>6 UM MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO .....</b>                                                | <b>103</b> |
| <b>7 O MODELO PRAXEOLÓGICO DOMINANTE PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO .....</b>                                                     | <b>113</b> |
| <b>7.1 A Combinatória na Base Nacional Comum Curricular .....</b>                                                                                | <b>114</b> |
| <b>7.2 A combinatória no Currículo de Pernambuco – Ensino Médio .....</b>                                                                        | <b>116</b> |
| <b>7.3 A Combinatória em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio .....</b>                                                                | <b>118</b> |

|                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.4 A Combinatória nas práticas docentes .....                                                       | 133 |
| 7.5 Explicitação do Modelo Praxeológico Dominante para o ensino de Combinatória no Ensino Médio..... | 136 |
| 8 ANÁLISE <i>A PRIORI</i> .....                                                                      | 140 |
| 8.1 Um PEP-FP para formação de professores sobre o ensino de Combinatória.....                       | 140 |
| 8.2 Uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória .....                                    | 142 |
| 9 UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES SOBRE O ENSINO DE COMBINATÓRIA.....  | 148 |
| 9.1 Análise do Módulo 0 .....                                                                        | 148 |
| 9.1 Análise do Módulo 1 .....                                                                        | 183 |
| 9.3 Análise do Módulo 2 .....                                                                        | 206 |
| 9.4 Análise do Módulo 3 .....                                                                        | 215 |
| 10 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....                                                                         | 218 |
| Referências .....                                                                                    | 225 |
| APÊNDICE .....                                                                                       | 235 |
| Lista dos periódicos verificados nas revisões sistemáticas realizadas.....                           | 235 |

## 1 INTRODUÇÃO

A Combinatória é um campo matemático que vem ganhando, de maneira progressiva, espaço no currículo escolar da educação básica no Brasil. Este fato se nota com mais veemência a partir do advento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (a partir de agora, PCN) (BRASIL, 1997; 1998) no final da década de 1990. Inspirado nas recomendações para o ensino de Matemática do *National Council of Teachers of Mathematics* – NCTM, dos Estados Unidos, esse documento de orientações curriculares fez não somente emergir a necessidade e a importância de se trabalhar elementos da Combinatória desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, mas trouxe repercussão sobre o modo de trabalhar esse ramo da Matemática na escolarização obrigatória. Segundo Melo (2018), a Combinatória que, antes do surgimento dos PCN, era contemplada de forma explícita apenas em livros didáticos do 2º ano do Ensino Médio, passou a ser abordada, de maneira notadamente conhecida em outros anos e etapas da educação básica.

Ainda que de forma tênue, a inserção da Combinatória nos currículos escolares impulsionou, em certa medida, durante os anos finais daquela década e nos primeiros anos do século XXI, o surgimento de diversos estudos, no contexto da Educação Matemática. Esses estudos trouxeram à tona preocupações e reflexões com o objetivo de subsidiar professores e pesquisadores na compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório, bem como no planejamento e acompanhamento dos processos de ensino e aprendizagem dos conceitos associados a esse campo

Isso se evidencia no trabalho de Borba, Rocha, Martins e Lima (2009) que sistematizaram um estado da arte a partir de estudos referentes ao desenvolvimento do raciocínio combinatório nos ensinos Fundamental, Médio e Superior, apresentados em eventos de divulgação científica da área de Educação Matemática, nacionais e internacionais, realizados no período de 2001 a 2008. As autoras agruparam os estudos segundo as seguintes categorias: análises de recursos didáticos; reflexões sobre a formação e a prática docente; investigações de conhecimentos de alunos; e relatos de experiências vivenciadas em sala de aula.

À época de publicação do estudo, Borba *et al.* (2009) apontaram para a necessidade de que mais estudos sobre o raciocínio combinatório fossem desenvolvidos, tendo em vista o baixo número de investigações encontradas no levantamento realizado. Além disso, o trabalho evidenciou, entre outras coisas, as limitações quanto à amplitude dos problemas de Combinatória apresentados nos livros didáticos, a insuficiência da formação matemática dos professores de séries iniciais e a necessidade de uma formação mais aprofundada sobre esse

campo com o intuito de propiciar o enfrentamento de uma prática baseada exclusivamente em aplicação de fórmulas sem a devida compreensão.

Mais à frente, Silva e Pessoa (2015) realizaram um trabalho de mesmo impacto que o anteriormente apresentado, dessa vez, considerando o período de 2009 a 2013. A investigação comprovou a evolução não apenas quantitativa, mas também qualitativa dos estudos que abordam o campo da Combinatória. Os resultados apresentados indicam uma maior ênfase nos estudos de sondagem com estudantes de diferentes níveis, enquanto os estudos com professores figuram em penúltima colocação como categoria. Dentre estes últimos, uma parte está relacionada ao que os professores sabem acerca da Combinatória e/ou seu ensino, e outra a propostas de formação específica para esse domínio. Apesar dos avanços nas pesquisas, as autoras também constataram a necessidade de um trabalho mais cuidadoso na elaboração dos livros didáticos, para que esse recurso atenda a critérios importantes para a construção e desenvolvimento eficiente do raciocínio combinatório, além da imperiosa necessidade de maior investimento na formação docente quanto ao ensino e à aprendizagem dessa área da Matemática.

Observando a carência de pesquisas nas quais o professor aparece como sujeito, especialmente no que concerne à análise de práticas docentes em Combinatória, buscamos, em Ferreira (2019), investigar as características relativas ao ensino desse campo no Ensino Médio, com foco especial na análise das atividades matemática e didática do professor. Utilizando como aporte teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1996; 1999; 2002) e colaboradores, os resultados que apresentamos indicam que os problemas de contagem, especificamente os tipos arranjo, permutação e combinação, foram estudados em sequências didáticas distintas, mas, em geral, iniciavam-se com a apresentação de definições bastante formais, seguidas do esboço de uma técnica, frequentemente uma fórmula, o que sugere características de um ensino tradicional. Além disso, as tarefas apresentadas eram pouco problemáticas e, de certo modo, padronizadas, o que facilitava a escolha da técnica, cuja justificativa, em grande parte, não era explorada de forma suficiente. Também destacamos a necessidade de processos formativos que incentivem a reflexão sobre saberes matemáticos e didáticos essenciais ao ensino de conteúdos combinatórios.

Os estudos apresentados até aqui apontam para a importância de que haja uma maior atenção no que se refere à formação de professores de Matemática, tanto inicial quanto continuada, voltadas para o campo da Combinatória. No entanto, é preciso esclarecer que, propostas de formação, em diferentes níveis educativos, têm surgido com a finalidade de suprir essa lacuna como as de Córdova e Salazar (2012), Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014),

Miranda da Silva (2014), Coutinho e Barbosa (2016), Nunes e Vidal (2017) e Albanese, Batanero e Ortíz (2019).

A partir de agora, concentraremos esforços em apresentar, mesmo que de maneira breve, as pesquisas supramencionadas, que foram frutos de uma revisão sistemática realizada em 87<sup>1</sup> periódicos brasileiros e estrangeiros, das áreas de Ensino e Educação, que têm tradição nas divulgações em pesquisas do campo da Educação Matemática e são avaliados pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e obtiveram conceitos entre A1 e B2 no período de 2013 a 2016<sup>2</sup>. O período temporal considerado foi a década de 2011 a 2020. A busca se deu em quatro idiomas – Português, Espanhol, Francês e Inglês – para que tivéssemos uma maior abrangência dos estudos nessa área.

A busca também foi realizada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações que integra as produções de programas de pós-graduação de instituições de ensino e pesquisa do Brasil. Utilizou-se como parâmetros de busca as palavras-chave “Combinatória” e “Formação de Professores” (que no caso dos periódicos, foi realizada em todos os idiomas supracitados). Na sequência, apresentamos a síntese desses achados.

Córdova e Salazar (2012) propuseram um processo de formação para professores da pré-escola do México, tanto em exercício quanto em formação, sobre o papel da intuição nas ideias de Estocástica, que articula de forma integrada elementos da Combinatória, Probabilidade e Estatística, a partir de um estudo dirigido. Dentre os conteúdos discutidos durante o referido estudo estão conceitos da Combinatória como permutação, combinação e arranjo. O processo formativo em si desenvolveu-se a partir da organização de seminários ministrados pelos participantes a fim de elaborar atividades relacionadas à Estocástica para pôr em jogo em salas de aula da educação infantil. De forma geral, os resultados sugerem que é difícil romper esquemas determinísticos já arraigados nos professores em formação devido à ausência de elementos de Estocástica em sua educação básica, sendo necessário continuar um trabalho de fortalecimento ao longo da formação docente.

Partindo do pressuposto de que professores dos anos iniciais nem sempre possuem conhecimentos necessários para trabalhar adequadamente a variedade de situações combinatórias, Borba *et al.* (2014) realizaram uma formação para docentes da rede pública do Recife – PE dessa etapa da escolarização voltada para o trabalho com essas situações à luz da

---

<sup>1</sup> A lista dos 87 periódicos consultados encontra-se no apêndice deste trabalho.

<sup>2</sup> No período da coleta dos dados ainda não tinha sido divulgada a classificação de periódicos do quadriênio 2017 – 2020, fato que ocorreu apenas no final de dezembro de 2022.

Teoria dos Campos Conceituais. A formação, dividida em três etapas, abordou desde as situações, invariantes e diferentes representações simbólicas possíveis no processo de estudo de problemas combinatórios até a realização e vivência de um planejamento de aula abordando o tema. Os dados analisados exprimem que o processo de formação pôde auxiliar os docentes no avanço em seus conhecimentos de situações combinatórias.

Buscando refletir sobre as maneiras de agir e pensar a respeito do ensino de matemática escolar, Miranda da Silva (2014) propôs um percurso de formação, desenvolvido à luz da TAD, para um grupo de licenciandos de Matemática do estado do Acre que também atuavam como professores dessa disciplina na rede pública. Durante o processo formativo, os participantes escolheram o saber Combinatória como lócus de investigação. O propósito era compreender a maneira como o professor se relacionava com o saber matemático e com os conhecimentos que mobiliza em sua prática. Nesse contexto, o Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), vivenciado como parte integrante da formação, foi concebido como um dispositivo didático que trouxe contribuições para a antecipação e reflexão acerca das maneiras de agir e pensar do professor sobre sua prática no ensino da Matemática. A TAD, no caso em tela, apresentou-se como um importante conjunto de ferramentas e instrumentos que possibilitou uma análise ampliada da Combinatória, tanto como materialização de um saber quanto como uma problemática enfrentada pela profissão docente no processo de difusão do conhecimento.

Coutinho e Barbosa (2016), por sua vez, elaboraram um estudo coletivo com professores do estado da Bahia, atuantes em diversos níveis educativos com experiência no ensino de Combinatória. No intuito de modelar uma Matemática para o ensino de combinação simples a partir de uma abordagem investigativa denominada de Estudo do Conceito, a investigação permitiu perceber a variabilidade das formas de comunicar tal conceito a partir de quatro panoramas de análise: formalista, instrumental, ilustrativo e comparativo. No entanto, os autores advertem que cada um desses panoramas apresenta possibilidades e limitações para o ensino dos conceitos combinatórios. O estudo ainda sugere que o modelo apresenta potencialidades para a formação de professores e para outras pesquisas no campo da Educação Matemática.

Nunes e Vidal (2017) explicitaram os benefícios da utilização da metodologia da resolução de problemas para estudantes de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado da Bahia a fim de que estes pudessem se apropriar dos conceitos da Combinatória, alcançando generalizações que partissem da sua própria compreensão e não do texto de um livro didático. A associação de formulação de problemas à resolução de problemas tornou-se um potencializador do processo de aprendizagem. Os autores

evidenciaram que o trabalho com metodologias diferenciadas é imprescindível no ambiente de preparação docente, já que esses futuros professores geralmente transportam às suas salas de aula aquilo que experimentam durante sua formação.

Já Albanese, Batanero e Ortiz (2019) apresentaram uma experiência de ensino inovadora que promove o raciocínio combinatório a partir do estudo da trança artesanal e que faz parte de um programa de formação inicial de professores em Etnomatemática da Universidade de Buenos Aires – Argentina. O grupo de futuros docentes participou de um estudo sobre como fazer tranças de 4 fios e modelá-las usando grafos para, posteriormente, criar novos grafos de tranças de 16 fios a partir de padrões combinatórios em tranças de 8 fios. Os resultados evidenciaram o valor educativo do processo formativo para os futuros professores devido à metodologia proposta que envolve a construção de um conceito matemático a partir de um artefato concreto.

Como se pode perceber, as investigações voltadas à formação de professores no campo da Combinatória ainda são relativamente pouco numerosas na Educação Matemática, considerando o recorte temporal e as bases consultadas. Vale ressaltar que, dentre os trabalhos analisados, apenas o de Miranda da Silva (2014) constitui um trabalho de tese de doutorado. As demais investigações são artigos científicos constituintes dos periódicos analisados.

Essa realidade não é exclusivamente nossa, enquanto nação brasileira, haja vista a abrangência internacional considerada nos estudos apresentados anteriormente. Córdova e Salazar (2012) e Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) também sinalizam que existem relativamente poucos estudos que investigam como os professores podem aprender a apoiar os alunos nessas práticas matemáticas voltadas para os saberes combinatórios em contextos mais específicos, como no México e nos Estados Unidos, por exemplo.

Por outro lado, foi possível perceber, durante o processo de revisão sistemática, que muitos estudos enunciavam tratar dessa temática, seja no título, resumo, palavras-chave ou mesmo na constituição do trabalho. No entanto, após a leitura minuciosa dos estudos, percebeu-se que o escopo destas se coadunava em apontar as percepções dos docentes acerca dos saberes matemáticos e/ou didáticos em detrimento da apresentação e discussão dos processos formativos.

Fazendo breves considerações das pesquisas anteriormente apresentadas, as propostas de formação, seja inicial ou continuada, abrangem diversos níveis educativos. É possível vislumbrar que, ora esses processos formativos estão centrados em aspectos inerentes aos saberes matemáticos desse campo, como as investigações de Córdova e Salazar (2012), Coutinho e Barbosa (2016) e de Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014), ora o foco de interesse

está em aspectos didáticos, mais especificamente em metodologias para o ensino de Combinatória, como é o caso de Nunes e Vidal (2017), Miranda da Silva (2014) e Albanese, Batanero e Ortiz (2019). Vale ressaltar que, apesar do empenho de Borba, Pessoa, Rocha e Assis (2014) em firmar uma formação que considere saberes matemáticos e didáticos, os elementos evidenciados na investigação restringem-se a aspectos do conteúdo.

Até então, nossos empenhos convergiram na intenção de revelar os caminhos percorridos, no âmbito das produções científicas no campo da Educação Matemática em torno da Combinatória, mais especificamente no que tange à formação de professores voltadas a essa área da Matemática. Como já exposto, há mais de uma década pesquisadores vêm apontando a importância de oportunizar processos formativos voltados para conteúdos combinatórios em face da falta de conhecimentos, por parte dos docentes, para atuar adequadamente no ensino desse campo. Por outro lado, as poucas propostas de formação que emergiram na tentativa de enfrentar essa realidade trazem contribuições importantes a esse domínio de pesquisa, mas também apontam para a necessidade de percorrer novos caminhos na intenção de viabilizar uma formação sólida, tanto do ponto de vista dos saberes matemáticos quanto dos saberes didáticos que são imprescindíveis para que professores possam gerir o processo de estudo dos saberes combinatórios de forma eficaz, o que torna, ainda nos dias de hoje, a temática urgente e atual.

No entanto, para além das considerações aqui já explanadas, ainda nos cabe levantar um importante questionamento: “Por que pensar sobre a formação de professores voltada para o ensino de Combinatória?”. Não queremos ser exaustivos ou até mesmo ter a pretensão de esgotar as razões pelas quais se revela a urgência de se refletir sobre um processo formativo capaz de municiar professores de saberes matemáticos e didáticos que tenham impacto nas suas classes. Todavia, queremos explicitar, daqui em diante, algumas alegações nas quais pretendemos ancorar as justificativas deste estudo.

A primeira delas extrapola as fronteiras da formação docente voltada para o campo da Combinatória e se estende pela formação do professor de Matemática como um todo. Reis e Fiorentini (2009) e Oliveira e Fiorentini (2018) denunciam um descompasso existente entre os processos formativos em relação aos desafios e às mudanças sociais, políticas, econômicas, culturais e tecnológicas da sociedade atual, fazendo com que as concepções de formação venham sendo questionadas e, por conseguinte, tornem-se objeto de investigação.

Ainda nessa perspectiva, conforme assinalam Albuquerque e Gontijo (2013), existe uma preocupação em esclarecer e estudar os constituintes de uma formação que esteja direcionada para o desenvolvimento docente de forma que este adquira competências e habilidades que reflitam sobre sua ação de ensinar. Isso se manifesta, em certa medida, na numerosa produção

de estudos que têm emergido nos últimos anos como propostas de formação a fim de superar as adversidades anteriormente apontadas.

Cabe ressaltar que, apesar dos empreendimentos realizados, tanto em termos de ofertas de processos formativos interventivos como de reformas curriculares, ainda impera nos cursos de formação inicial de professores de matemática a concepção de que a formação matemática e a formação para o ensino de Matemática (formação didático-pedagógica) são blocos estanques e que pouco dialogam entre si, causando uma desarticulação entre esses dois núcleos formativos (Oliveira; Fiorentini, 2018). Essa concepção parece também prevalecer nos processos de formação continuada desses profissionais, especialmente nas propostas voltadas para o ensino de conteúdos combinatórios, como discutido anteriormente.

Tratando-se especificamente do ramo da Combinatória, estudos como os de Ferreira, Rufino e Silva (2016) e Esteves (2001) têm evidenciado a dificuldade de alunos, de diferentes níveis, na compreensão dos problemas e na aquisição dos conceitos concernentes a esse campo matemático. Quanto a isso, Sabo (2010), por exemplo, não teme ao afirmar que as dificuldades dos estudantes em apropriar-se dos conceitos combinatórios podem emergir dos saberes e das práticas do professor. Já Rocha (2011), analisando as dificuldades que professores da educação básica têm sobre essa área da Matemática e seu ensino, considera que pode existir uma articulação entre a prática docente voltada a esse campo e suas experiências de formação.

No que diz respeito à formação inicial de professores direcionada aos conteúdos dessa área, Martins (2018), a partir de um estudo exploratório-descritivo com professores de Matemática do Ensino Médio, constata que a maioria deles considera que o tema é um dos tópicos mais difíceis de se ensinar e declara que o mesmo não foi devidamente estudado na sua formação inicial ou continuada.

O que queremos elencar é que os trajetos realizados até aqui apontam na mesma direção: professores que não dispõem de saberes matemáticos e didáticos suficientes para intervirem eficazmente no ensino dos objetos de saber da Combinatória, tendo, ao que tudo indica, como fator motivador, uma formação insuficiente; em contrapartida, as poucas propostas de formação existentes com essa temática ainda continuam sob a égide do paradigma apontado por Oliveira e Fiorentini (2018), que ratifica a desproporção com que os saberes matemáticos e didáticos são levados em conta nesses processos formativos.

Dessa forma, os argumentos já expostos seriam bastante razoáveis para justificar a importância desta investigação. Não obstante a tudo isso, Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) ratificam a necessidade que os professores têm de um desenvolvimento profissional suficiente na área de Combinatória para que sejam capazes de saber como até mesmo problemas

muito simples podem ser usados para gerar um pensamento rico e profundo. Além disso, os autores consideram que as instituições de formação docente precisam considerar essa necessidade e os formadores de professores devem ter a tarefa de preparar uma força de trabalho docente para tal incorporação.

Diante do quadro investigativo levantado até o momento, surge a necessidade de se estruturar um processo de formação de professores sobre o ensino de Combinatória que possa munir os docentes de recursos de natureza matemático-didática necessários, além de intentar resgatar o sentido de se estudar os conteúdos específicos deste campo, já que, ainda nos dias de hoje, o seu ensino é essencialmente baseado na aplicação de fórmulas em tarefas pouco problemáticas. Dessa forma, emerge, então, um importante questionamento sob o qual nos dispomos a nortear este estudo: "O que se pode fazer para ajudar professores a dispor de saberes matemáticos e didáticos, de forma articulada, de modo que possam intervir pertinentemente nos processos de ensino de estudantes do Ensino Médio sobre Combinatória?".

Na intenção de responder a esta questão norteadora, faz-se necessário lançar mão de um referencial teórico-metodológico adequado. Esse referencial deve ser capaz de subsidiar as reflexões, durante os processos formativos, acerca da imprescindibilidade de considerarmos tanto saberes matemáticos quanto didáticos nos estudos de determinado conteúdo, em especial os do campo da Combinatória, que constituem objeto da nossa investigação. Além disso, precisa possibilitar formas de colocar esses saberes em jogo na formação, bem como oferecer elementos teóricos que auxiliem as análises desse processo.

É nesse contexto que elegemos a TAD, que emerge dos quadros teóricos da Didática da Matemática e que tem despontado como um importante referencial teórico-metodológico que cumpre o papel de subsidiar análises de práticas, seja no âmbito da sala de aula ou mesmo nas instituições de formação docente, e de materiais didáticos, como os livros didáticos, conforme bem destaca Almouloud (2015), a partir de um dos conceitos mais basilares da teoria que é a ideia de praxeologia. Para a TAD, toda atividade humana regularmente feita pode descrever-se como um modelo único, denominado praxeologia. O modelo mais elementar de uma praxeologia tem quatro componentes: um tipo de tarefas, uma técnica que permite realizar esse tipo de tarefas, um discurso que permite descrever, explicar e/ou justificar a técnica (a tecnologia), e a teoria que justifica a tecnologia. A noção de organização matemática ou praxeologia matemática é uma ferramenta fundamental para modelizar qualquer atividade matemática. Por outro lado, os trajetos que permitem a construção de uma organização matemática acontecem em processos invariantes, mas não lineares, denominados de organização didática ou praxeologia didática. Esses e outros aspectos teóricos desse referencial

aqui considerados preliminarmente serão aprofundados posteriormente no marco teórico deste estudo.

É preciso considerar, também, que a TAD sempre teve, desde a sua gênese, estreita relação com a formação inicial e continuada de professores, como apontam Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Pérez (2019). Estes autores destacam que esta teoria foi uma das primeiras abordagens a considerar como objeto de estudo e pesquisa não apenas as atividades de ensino e aprendizagem em sala de aula, mas todo o processo que vai da criação e uso do conhecimento matemático até sua incorporação na escola como conhecimento ensinado, o que perpassa necessariamente, também, pelas instituições de formação de professores.

Nessa direção, percebe-se, nos últimos anos, um movimento crescente nos estudos que concernem à formação de professores no marco da TAD, especialmente a partir do trabalho de Cirade (2006), que buscou assentar a docência como uma verdadeira profissão e descrever as praxeologias necessárias ao exercício dessa profissão.

Esse movimento intensificou-se ainda mais com o advento de um dispositivo didático, inscrito na TAD, chamado de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) que busca suscitar o (re)aparecimento do(s) sentido(s) e funcionalidade(s) dos saberes estudados a partir da combinação de um questionamento teórico e prático da atividade matemática escolar (Chevallard, 2009a; Florensa; Bosch; Gascón, 2019). Isso implica dizer que o PEP situa as perguntas como ponto de partida do saber matemático. Dessa forma, Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Pérez (2019) adaptaram o PEP para a formação de professores (denominando-se Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores – PEP-FP) buscando realizar a integração da análise praxeológica matemática com a didática a partir de um problema relevante à profissão docente. Isso pode muito bem servir como resposta à problemática supramencionada levantada por Oliveira e Fiorentini (2018) da desarmonia entre os polos formativos dos saberes matemáticos e didáticos na formação docente, tanto do ponto de vista da formação inicial quanto da continuada.

A metodologia do PEP-FP concebida por Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Pérez (2019) permite que os professores em formação vivenciem etapas que vão desde a reflexão sobre as razões que justificam o estudo de um objeto matemático, a vivência, na posição de estudantes, e análise de um PEP até o desenho e experimentação de um PEP análogo ao experienciado.

Sendo assim, o objetivo deste estudo está centrado em desenvolver, implementar e analisar um processo de formação de professores sobre o ensino de Combinatória, baseado na metodologia do PEP-FP, com um grupo de professores de Matemática do Ensino Médio.

Na intenção de alcançar o objetivo acima elencado e responder aos questionamentos anteriormente levantados, investiremos, na seção seguinte, na apresentação e discussão de aspectos da Teoria Antropológica do Didático que são mobilizados no desenvolvimento deste estudo como, por exemplo, a ideia de praxeologia, de paradigma de questionamento de mundo e do construto do PEP, culminando na adaptação do PEP para a formação de professores. Também apresentaremos uma revisão sistemática de estudos sobre formação de professores no âmbito da referida teoria.

Detalharemos na segunda parte do referencial teórico, que corresponde ao capítulo 3, as bases conceituais da Combinatória a partir de um ponto de vista histórico-epistemológico, dando ênfase aos problemas de contagem, mais comumente tratados no âmbito da escolarização básica, especialmente no Ensino Médio.

Nos capítulos 4 e 5 buscaremos apresentar os objetivos que nortearão esta investigação bem como a nossa hipótese de pesquisa, respectivamente, para, na sequência, demarcarmos o percurso metodológico deste estudo. Nessa seção, nossa preocupação estará direcionada em caracterizar a opção metodológica deste estudo que está ancorada na Engenharia Didática, bem como as principais etapas de sua realização na busca pelo alcance do objetivo já elencado e das respostas aos questionamentos realizados.

Os capítulos 6 e 7 constituem nossa análise preliminar. No primeiro deles, elaboramos um Modelo Praxeológico de Referência para o campo da Combinatória, assim como no sétimo, tratamos de explicitar o Modelo Praxeológico Dominante referente ao ensino desse campo, no contexto brasileiro, ambos tendo como *locus* a última etapa da escolarização básica.

O oitavo capítulo, dedicado à análise *a priori* deste estudo, reúne a exploração inicial de dois mapas de perguntas. O primeiro está relacionado à primeira etapa de um PEP-FP, cujo ponto de partida é uma questão intrínseca à profissão docente. O objetivo é iniciar os professores em formação em uma mudança paradigmática, a partir de um questionamento didático. O segundo mapa de perguntas visa situar esses docentes em uma verdadeira atividade de investigação, com o objetivo de suscitar uma possível justificativa para o ensino de Combinatória.

No capítulo 9, nos dedicamos a discutir e analisar a vivência de um PEP-FP sobre o ensino de Combinatória com um grupo de professores do Ensino Médio. Essa incursão foi dividida em quatro fases chamadas de módulos e constitui o estudo principal desta investigação. E, por fim, apresentaremos as considerações finais, retomando o objetivo principal, bem como os resultados mais relevantes. Ainda nessa etapa, evidenciaremos as condições e restrições que

permearam o processo formativo vivenciado, enunciaremos a tese e apontaremos possibilidades de pesquisas futuras a partir dos dados produzidos.

## 2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A TAD surge, a partir das ideias de Yves Chevallard, com as primeiras teorizações sobre Transposição Didática (TD) no final da década de 80 do século passado. A priori, a ideia de TD era entendida como corpo teórico, passando, mais tarde, a ser incorporada no marco teórico da TAD.

Para Chevallard (1996), a TAD deve ser encarada como um desenvolvimento e uma articulação das noções cuja elaboração visa permitir pensar de maneira unificada um grande número de fenômenos didáticos que surgem no final de múltiplas análises.

Com o intuito de buscar uma compreensão mais esclarecedora sobre esse marco teórico, utilizamo-nos dos adjetivos qualificativos dessa teoria para entendermos melhor as ideias que estão na fundamentação da TAD.

O termo “antropológica” justifica a ideia de que a TAD situa a atividade matemática e, por conseguinte, o estudo da matemática, dentro do conjunto das atividades humanas e de instituições sociais. O desenvolvimento dessas atividades ocorre em dois níveis: o da prática (práxis) e o da justificação dessas práticas (logos). Dessa forma, qualquer atividade humana que se realiza regularmente pode ser modelizada com a noção de *praxeologia*, que se constitui em um dos postulados fundamentais da teoria. Assim, uma praxeologia que descreve uma atividade matemática ou o saber que dela emerge se chama praxeologia matemática ou organização matemática (OM).

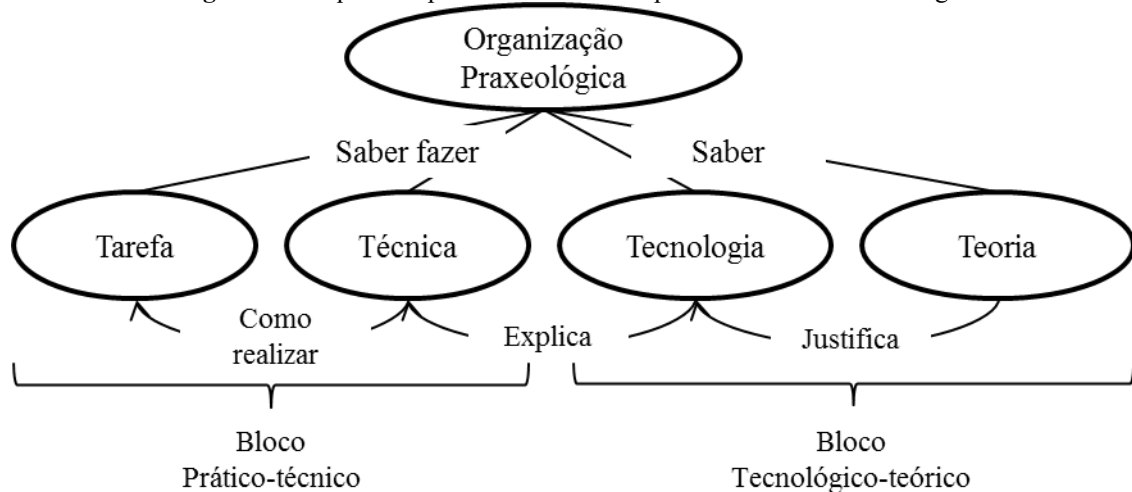
A esse respeito, Bosch assinala que:

Uma organização matemática é uma entidade composta por: *tipos de problemas* ou *tarefas problemáticas*; *tipos de técnicas* que permitem resolver os tipos de problemas; *tecnologias* ou discurso (“logos”) que descrevem ou explicam as técnicas; uma *teoria* que fundamenta e organiza os discursos tecnológicos. (Bosch, 2000, p. 16, tradução nossa<sup>3</sup>)

O esquema, a seguir, busca tornar mais inteligível a noção de praxeologia discutida até aqui, enfatizando seus componentes.

---

<sup>3</sup> “Una organización matemática es una entidad compuesta por: tipos de problemas o tareas problemáticas; *tipos de técnicas* que permiten resolver los tipos de problemas; *tecnologías* o discursos (“logos”) que describen y explican las técnicas; una *teoría* que fundamenta y organiza los discursos tecnológicos” (Bosch, 2000, p. 16)

**Figura 1** – Esquema representativo dos componentes de uma Praxeologia

Fonte: Ferreira (2019)

A partir da noção de praxeologia, Bosch (2000) entende que fazer Matemática consiste em ativar uma organização matemática, isto é, resolver determinados tipos de tarefas com determinados tipos de técnicas (o “saber fazer”) de maneira inteligível, justificada e fundamentada (mediante o “saber”). Esse processo pode conduzir à construção de novas organizações matemáticas ou, simplesmente, à reprodução de organizações previamente construídas. Nessa perspectiva, a autora ainda advoga que “Ensinar e aprender matemática corresponde à atividade de reconstrução de organizações matemáticas para poder utilizá-las em novas situações e sob diferentes condições” (Bosch, 2000, p. 16, tradução nossa<sup>4</sup>).

Chevallard (1999) introduziu a distinção de diferentes tipos de Organizações Matemáticas (OM), de acordo com o grau de complexidade de seus componentes:

- Organizações Pontuais (OMP): são geradas pelo que é considerado na instituição como um único tipo de tarefas e é definido a partir do bloco técnico-prático;
- Organizações Locais (OML): resultantes da integração de várias organizações pontuais; neste caso, o discurso tecnológico assume o protagonismo, já que justifica, explica, relaciona e produz as técnicas de todas as OMP que estão em torno de si;
- Organizações Regionais (OMR): obtidas mediante a coordenação, articulação e posterior integração de várias OML a uma teoria matemática que lhes é comum; neste caso, o discurso teórico tem papel essencial;
- Organizações Globais (OMG): articulam várias organizações regionais a partir da integração de diferentes teorias.

<sup>4</sup> “Enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poder las utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones” (Bosch, 2000, p. 16).

No desenvolvimento e análise da atividade matemática, dois aspectos inseparáveis aparecem: por um lado, o trabalho matemático que pode ser realizado (modelizado mediante organizações matemáticas) e, por outro lado, a forma como o processo de estudo e a elaboração das organizações matemáticas é estruturado (modelizado por meio da noção de organização didática).

Para Chevallard (1999), esses dois aspectos são inseparáveis porque não há organizações matemáticas sem um processo de estudo que as crie, da mesma forma que não existe um processo de estudo sem organizações matemáticas em construção. Assim, esse processo se situa num espaço determinado denominado pelo autor como *momentos didáticos* ou *momentos de estudos*, sem a intenção de se propor uma estrutura linear. Cada momento pode ser vivido em tempos diversos, com diferentes intensidades, quantas vezes se necessite, podendo alguns deles, inclusive, aparecerem de forma simultânea.

Chevallard (1999, p. 22-25) descreve os seis momentos de estudo de uma organização matemática nos seguintes termos: o *primeiro momento* é o do primeiro encontro com a organização matemática que está em jogo a partir de pelo menos um tipo de tarefas; o *segundo momento* é o da exploração do tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica relativa a este tipo de tarefas; o *terceiro momento* é o da constituição do entorno tecnológico-teórico que, de maneira geral, tem uma estreita relação com cada um dos outros momentos; o *quarto momento* é do trabalho com a técnica, que deve simultaneamente melhorar a técnica, tornando-a mais eficiente e mais confiável; o *quinto momento* é o da institucionalização, que delimita e especifica os elementos constituintes da organização matemática construída; o *sexto momento* é o da avaliação, que se articula com o elemento da institucionalização.

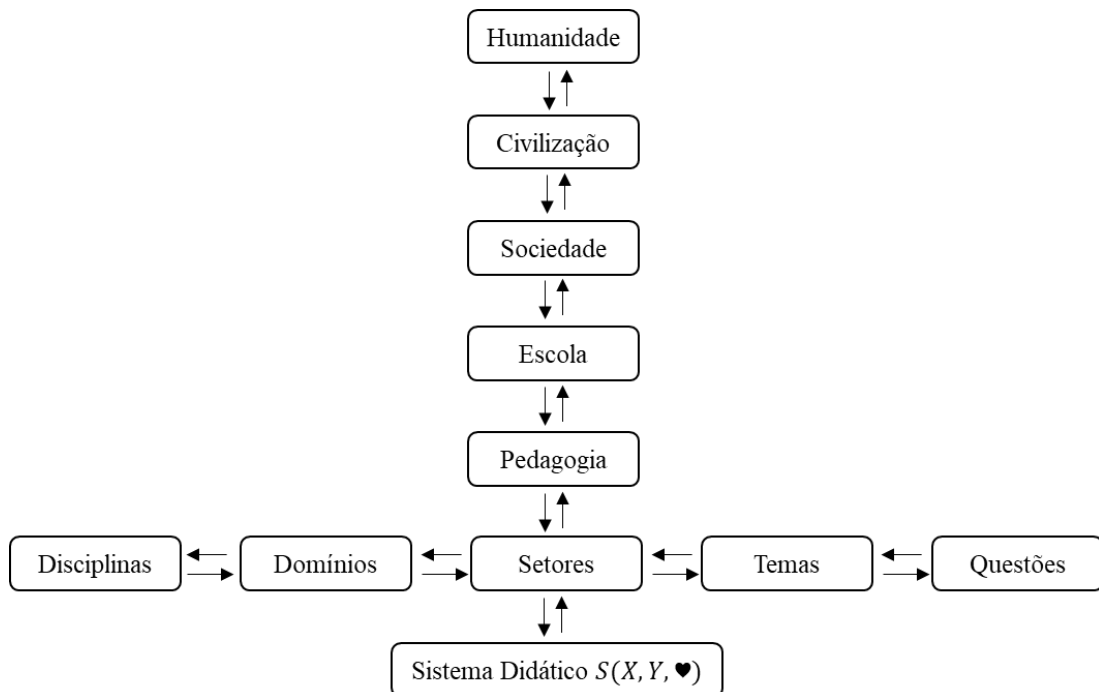
Para Chevallard (1999), o modelo dos momentos do estudo apresenta, para o professor, duas grandes finalidades. Em primeiro lugar, constitui uma grade para a análise dos processos didáticos. Posteriormente, permite colocar claramente o problema da realização dos diferentes momentos do estudo.

Ainda pensando nos significados das palavras que constituem “Teoria Antropológica do Didático”, temos o termo “do didático”. Segundo Chevallard (2013), trata-se de uma dimensão vital das sociedades humanas, na qual uma pessoa ou uma instituição manifesta uma intenção de fazer algo para que alguma pessoa ou instituição aprenda alguma coisa. Qualquer situação considerada “didática” gera um sistema da forma  $S(X, Y, \heartsuit)$ , onde  $X$  é a instância (pessoa ou instituição) que estuda,  $Y$  a instância que tem a intenção de fazer algo para ajudar  $X$  no estudo e  $\heartsuit$  é aquilo que está em jogo no estudo.

Dentro dessa intenção de fazer uma pessoa ou uma instituição integrar, em seus equipamentos praxeológicos, uma determinada organização praxeológica, Chevallard (2009a) coloca que a didática tem procurado, em primeiro lugar, estudar condições e restrições de vida dessa organização. Embora considere que toda ciência (inclusive as ciências matemáticas) tem por objeto de estudo um certo tipo de condições e restrições na vida das sociedades, o autor estabelece a distinção entre essas duas ideias no âmbito da TAD.

Para Chevallard (2009a), uma restrição é uma condição considerada, a partir de uma determinada posição institucional num determinado momento, como não modificável relativa e temporariamente. Da mesma forma, uma condição é uma restrição considerada modificável. O autor ainda chama a atenção para o fato de que a didática se centrou, antes de tudo, na didática criada em sala de aula e, mais precisamente, naquela criada pelo professor. No entanto, a TAD, desde o seu primeiro estado histórico, busca evidenciar as condições e restrições que não são criadas pelo professor, sejam elas do conhecimento ou não, que foram criadas em outros níveis, do que esse pesquisador chama de escala de níveis de codeterminação didática. Esta escala será esquematicamente representada a seguir:

**Figura 2** – Escala de Níveis de Codeterminação Didática



Fonte: Adaptado de Bosch Casabò (2018)

Segundo Chevallard (2001b, p. 3, tradução nossa<sup>5</sup>), “cada nível corresponde a um nível de estruturação da organização matemática e, em cada um deles, são introduzidas restrições particulares ao que será didaticamente possível em sala de aula.”. Assim, para se ensinar uma determinada questão é preciso percorrer um caminho que começa na Sociedade, continua na Escola, passa por um determinado Domínio (Área) de alguma Disciplina em que o assunto é estudado, por um determinado Setor dentro da área e por um determinado tópico do Setor. O autor ainda pontua que

Em cada uma dessas etapas, são impostas restrições e condições que acabam por definir o que é possível fazer para estudar a questão em consideração, ou seja, criar e transmitir uma praxeologia que seja a resposta esperada à questão: uma OM se ela é uma questão de matemática. (Chevallard, 2001b, p. 3, tradução nossa<sup>6</sup>)

Chevallard (2001b) também chama a atenção para o fato de que essa hierarquia anteriormente indicada é aquela que é comumente observada na qual uma questão está geralmente relacionada a um tema que, por sua vez, pertence a um setor que está incluído em um domínio e assim por diante. Se pensarmos, por exemplo, na questão “Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 2, 4, 6 e 8?”, podemos considerá-la pertencente ao tema “Permutação Simples”, que se insere no setor dos “Problemas de Contagem” que, por sua vez, está incluído no domínio de Combinatória, que pertence à disciplina de Matemática. Esta é a hierarquização que acontece na maioria dos sistemas de ensino.

Todavia, essa hierarquia pode ser mais ou menos complexa se levantarmos questões como, por exemplo, “Como criar um código universal, eficaz e seguro que permita identificar todos os cidadãos do planeta?” que, se não for construída, há grandes chances de não ser estudada na escola e na sala de aula. Vale ressaltar que não se trata apenas de uma questão de complexidade. Essa hierarquização também pode estar relacionada às possibilidades diferentes de organização de uma instituição para outra ou, quando na mesma instituição, de um tempo para outro.

Na sequência, abordaremos dois paradigmas didáticos nos quais há maneiras distintas de se hierarquizar o processo de estudos.

---

<sup>5</sup> “[...] cada nivel corresponde a un nivel de estructuración de la OM y, en cada uno de ellos, se introducen restricciones particulares sobre lo que será didácticamente posible en el aula.” (Chevallard, 2001b, p.3)

<sup>6</sup> “En cada una de estas etapas se imponen restricciones y condiciones que acaban definiendo lo que es posible hacer para estudiar la cuestión considerada, es decir para crear y transmitir una praxeología que sea la respuesta esperada a la cuestión: una OM si se trata de una cuestión de matemáticas.” (Chevallard, 2001b, p. 3)

## 2.1 O Paradigma de Visita às Obras *versus* o Paradigma da Investigação e do Questionamento de Mundo

Entre as teorizações da TAD, Chevallard (2005; 2013) identifica e caracteriza um fenômeno didático presente nos sistemas de ensino que denomina de monumentalização dos saberes. Este fenômeno se descreve a partir de uma analogia a uma visita ao museu na qual um guia conduz uma pessoa ou um grupo de pessoas a admirar os monumentos que ali estão presentes, de forma que essas obras expostas só podem ser observadas e admiradas, sem tocá-las e nem as manipular e mantendo certa distância. Analogamente, nas instituições de ensino se estuda Matemática como se fosse um monumento a honrar, admirar e que seria raramente útil, seja na atualidade ou no passado. Os professores convidam os estudantes a visitar o conhecimento, sem alterá-lo, transformá-lo ou desconstruí-lo.

Este fenômeno do monumentalismo está inscrito em um paradigma didático denominado por Chevallard (2013) de Paradigma de Vista às Obras sob o qual uma situação de ensino produz um sistema didático  $S(X, Y, O)$ , sendo  $O$  uma obra ou praxeologia que um conjunto de estudantes  $X$  deverá estudar com a ajuda de um único ou mais professores  $Y$ . Nesse contexto, o saber matemático é considerado imutável no tempo, bastando apenas apresentá-lo e, dessa forma, resultando na perda do sentido das questões matemáticas que se estudam ou se propõe em uma instituição.

A escala de níveis de codeterminação didática apresentada na seção anterior corresponde ao paradigma em tela, no qual os sistemas didáticos são estabelecidos em torno de objetos de saberes previamente determinados, localizados em relação a uma determinada disciplina. Nessa escola, os níveis mais baixos distinguem diferentes “tamanhos” das organizações praxeológicas: disciplinas, domínios, setores, temas e questões. A esse respeito, Bosch Casabò (2018) considera que a pergunta sobre a delimitação e a composição daquilo que é estudado é respondida internamente e corresponde a este ou àquele tipo de tarefas, ou a este ou àquele tema, setor, domínio ou disciplina, que, por sua vez, pertence à (ou é composto por) estes temas, setores, domínios, etc.

Ao criticar a escola contemporânea, Chevallard (2002) observa que, ao longo do tempo, certas necessidades praxeológicas oriundas da sociedade foram sendo negligenciadas, o que levou o currículo de Matemática a um estado de confinamento, resistente a cruzamentos epistemológicos e, conseqüentemente, propenso à monumentalização ou à degradação das obras matemáticas ensinadas. Essa busca pela pureza disciplinar e pelo afastamento de outros

campos do saber constitui um fenômeno subjacente ao paradigma de visita às obras, denominado pelo autor autismo disciplinar.

Do ponto de vista das responsabilidades assumidas pelos que integram o sistema didático, nas instituições onde o paradigma monumentalista é dominante, há uma redução do papel dos estudantes com pouca autonomia, trivializando sua atividade e, em casos mais extremos, ao de meros espectadores. Ao professor, cabe a função de ensinar as obras por meio de uma autoritária apresentação discursiva ou por meio de um relato, que tende a silenciar todo tipo de perguntas sobre elas. O processo de estudos é levado a cabo no momento do primeiro encontro com as obras que se visitam e que se identifica com o momento teórico-tecnológico (Gáscon; Nicolás, 2021).

Especificando as múltiplas características da atividade matemática escolar considerada que podem acarretar dificuldades, Gáscon e Nicolás (2021) pontuam, entre elas, o caráter pontual das praxeologias matemáticas escolares, sua rigidez e incompletude relativa, a tendência para a algoritmização de tarefas matemáticas, a baixa incidência do questionamento tecnológico das técnicas e, em geral, do bloco teórico-tecnológico, na prática matemática, a desarticulação entre os diferentes domínios e setores da matemática escolar, o isolamento temático que envolve o esquecimento das possíveis razões de ser de uma obra, e a autossuficiência da matemática escolar que parece fechada em si mesma e cuja relação com o resto das disciplinas se reduz a um mero aplicacionismo.

Sobre esse aspecto, Lucas, Fonseca, Gáscon e Casas (2014) revelam, no contexto do ensino espanhol no nível correspondente ao Ensino Médio brasileiro, a atomização das organizações matemáticas e a rigidez no tipo de tarefas e técnicas que são utilizadas, rechaçando o questionamento tecnológico das técnicas, o que poderia flexibilizar a atividade matemática escolar. Ainda, estes autores consideram que, neste caso

[...] a Matemática surge como uma sequência de conhecimentos pontuais, que consiste basicamente em aplicar técnicas predeterminadas para um certo tipo de problemas, após uma apresentação teórica descritiva por parte do docente, em que raramente é questionada a necessidade de justificar a técnica usada para a atividade matemática, nem o seu domínio de validade. (Lucas; Fonseca; Gascón; Casas, 2014, p. 1333).

As características anteriormente descritas, embora revelem a perspectiva da educação na Espanha, sugerem um aspecto potencialmente monumentalista, que pode emergir em qualquer instituição sob a égide do paradigma de visita às obras, inclusive em parte dos sistemas educativos brasileiros.

Apesar de ser um paradigma dominante nas instituições de ensino em diferentes níveis educativos, Chevallard (2013) considera que o monumentalismo encontra-se em decadência. O

autor argumenta que isso acontece porque esse paradigma tende a dar pouco sentido às obras visitadas, levantando uma série de questionamentos como, por exemplo, “Por que isso aparece aqui?”, “Qual é a sua utilidade?”, cujas respostas não são suficientemente claras ou até mesmo inexistentes.

Opondo-se ao paradigma monumentalista, o enfoque antropológico propõe o paradigma da investigação e do questionamento de mundo, que ainda não é dominante. A atividade de questionamento é o motor do processo de estudos, buscando resgatar o sentido e a utilidade dos saberes. Chevallard (2007) considera que um programa escolar deveria ser composto por perguntas  $Q$  cuja resposta  $R$  seja construída e validada pela classe, pela cultura, pela sociedade e pela escola.

No paradigma de questionamento de mundo, o sistema adota a forma  $S(X, Y, Q)$ . Os estudantes  $X$  investigam e estudam uma pergunta  $Q$  sob a direção de um professor ou de um conjunto de professores  $Y$ , com o objetivo de elaborar e desenvolver uma resposta  $R^\heartsuit$  à  $Q$ . O expoente  $\heartsuit$  indica que a resposta à  $Q$  se produz sob determinadas restrições às quais está sujeita, ou seja, esse fato aponta para a não existência de uma resposta universalmente efetiva à  $Q$  (Chevallard, 2009b).

A questão que marca o início dos processos de estudo neste novo paradigma é uma questão problemática no sentido de que muito raramente pode ser resolvida diretamente com os elementos pertencentes ao sistema em que foi gerada, pois requer a criação de diferentes tipos de modelos: conceituais, analógicos, gráficos, físicos ou matemáticos, do sistema em questão (ou uma parte dele), a fim de reformular e simplificar a questão problemática inicial e avançar para uma possível resposta (Gáscon; Nicolás, 2021).

Nesse caso, Bosch Casabò (2018) aponta que a escala de níveis de codeterminação deve terminar no nível do sistema didático, já que o que aparece abaixo não dependerá apenas do tipo de pergunta abordada, mas também das decisões tomadas pelos pesquisadores sobre as possíveis obras a serem escolhidas para fornecer respostas parciais às perguntas derivadas.

A autora ainda assinala que

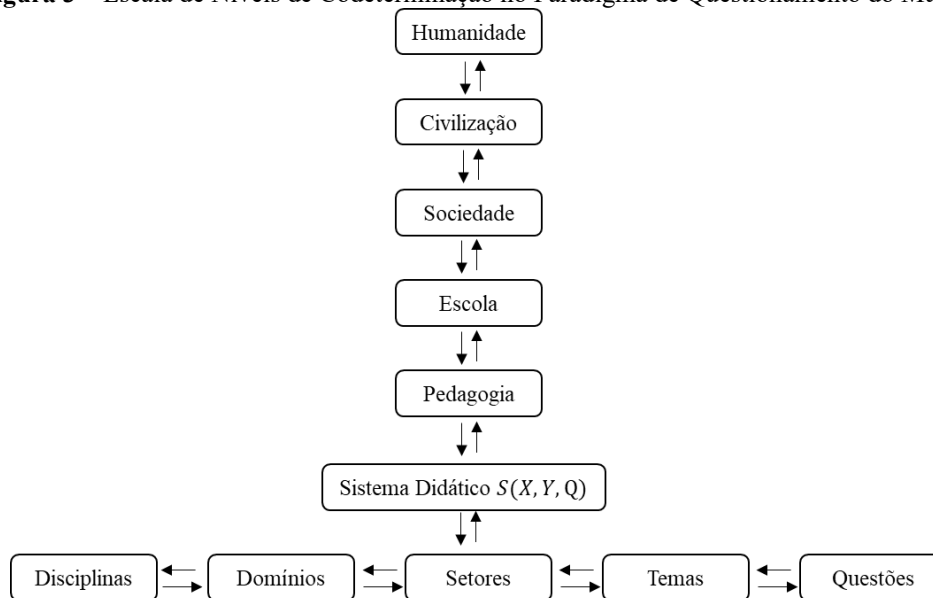
no paradigma de questionar o mundo, as perguntas não pertencem a nenhum campo de conhecimento pré-estabelecido. Além disso, faz parte do processo de pesquisa investigar as possíveis fontes de respostas úteis e, em especial, misturar praxeologias de natureza, tamanho e grau de “honradez” diferentes. Assim, os níveis específicos correspondentes a determinadas disciplinas devem ser localizados abaixo – ou depois – do sistema didático (Bosch Casabò, 2018, p. 4036, tradução nossa<sup>7</sup>).

---

<sup>7</sup> “in the paradigm of questioning the world, questions do not belong to any preestablished field of knowledge. Moreover, it is part of the inquiry process to investigate the possible sources of useful answers and, in particular, to mix praxeologies of a diferente nature, size and degree of “honourability”. Thus, the specific levels

Assim, apresentamos na Figura 3, que segue, a escala de níveis de codeterminação no paradigma de questionamento do mundo.

**Figura 3** – Escala de Níveis de Codeterminação no Paradigma de Questionamento do Mundo



**Fonte:** Adaptado de Bosch Casabò (2018)

Comparando a escala apresentada na Figura 2 com a mostrada anteriormente, é possível perceber que, na primeira, o Sistema Didático  $S$  está subordinado às condições e restrições dos níveis superiores, o que inclui determinar o 'tamanho' da praxeologia a ser ensinada ou estudada, seja ela referente a temas, setores, domínios, disciplinas, etc. Já na escala da Figura 3, fica clara a ideia de que o último nível (dos mais gerais aos mais específicos) é o Sistema Didático  $S$ . Isso ocorre porque, como já destacado, a entrada em temas, setores, domínios e disciplinas dependerá tanto do tipo de pergunta estabelecida quanto das decisões da comunidade de estudos.

Segundo Chevallard (2013), este novo paradigma se alicerça em atitudes que estão interrelacionadas que são a atitude herbartiana, a atitude procognitiva e a atitude exotérica. A *atitude herbartiana*<sup>8</sup> está relacionada à mesma atitude de um cientista em seu campo de investigação que se ocupa em fazer perguntas não respondidas e/ou problemas não resolvidos. Isso deve ser assim para qualquer cidadão, em qualquer área de sua atividade.

A *atitude procognitiva* nos conduz a um comportamento de pensar como se o conhecimento ainda estivesse para ser descoberto e ainda a ser conquistado (ou a ser descoberto

corresponding to the given disciplines have to be located below – or after – the didactic system” (Bosch Casabò, 2018, p. 4020)

<sup>8</sup>Em Chevallard (2013) não se justifica a escolha do adjetivo “herbartiano” a não ser pela referência ao filósofo alemão e fundador da pedagogia Johann Heinrich Herbart (1776-1841).

e conquistado novamente). O contrário disso, na interpretação retrocognitiva, somos conduzidos a expressar a atitude cognitiva que nos leva a referir preferencialmente e quase exclusivamente àquilo que já é conhecido de antemão. Portanto, na interpretação retrocognitiva, o conhecimento é "saber para trás", enquanto no modo procognitivo, o conhecimento é "saber para a frente".

Já a *atitude exotérica*, segundo Otero, Fanaro e Llanos (2013), pode ser entendida no sentido atribuído por Pitágoras, em cuja escola existiam dois tipos de estudantes: *esotéricos*, os que já sabem, e *exotéricos*, os que precisam aprender. Assim, a atitude esperada no paradigma de investigação e questionamento, conforme defende Chevallard (2013), é de quem tende a estudar e aprender indefinidamente, e nunca alcançará o status de esotérico.

No âmago do paradigma da investigação e do questionamento de mundo, surge um dispositivo didático, que potencialmente pode gerar relações funcionais entre as pessoas e o saber, denominado Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). O PEP posiciona as perguntas como ponto de partida dos processos de estudos. Chevallard (1999) considera que estas são perguntas em sentido forte. Isso implica dizer que as respostas a essas perguntas não se reduzem a uma simples busca de informações, sendo necessária a construção ou reconstrução de uma obra<sup>9</sup> (no nosso caso, uma obra matemática) ou um conjunto delas. Apresentaremos, a seguir, os principais elementos teóricos que embasam o construto PEP.

## 2.2 Percurso de Estudo e Pesquisa

O PEP surge a partir da necessidade de se recuperar o sentido e as razões de ser das praxeologias matemáticas que carecem ser reconstruídas em diferentes níveis educativos, assentando as questões como ponto de partida do saber matemático. Nessa perspectiva, Chevallard (2009b) faz notar que o objetivo principal dos PEP é introduzir uma nova epistemologia que dê sentido e funcionalidade ao estudo escolar da matemática como um todo e que rompa, em certa medida, com o paradigma de visita às obras.

Posto isto, é preciso esclarecer que a configuração do sistema didático que se adota no marco do novo paradigma é a mesma admitida no PEP, na qual os estudantes  $X$  investigam e estudam uma pergunta  $Q$  sob a direção de um professor ou de um conjunto de professores  $Y$ , com o objetivo de elaborar e desenvolver uma resposta  $R^\heartsuit$  à  $Q$ .

---

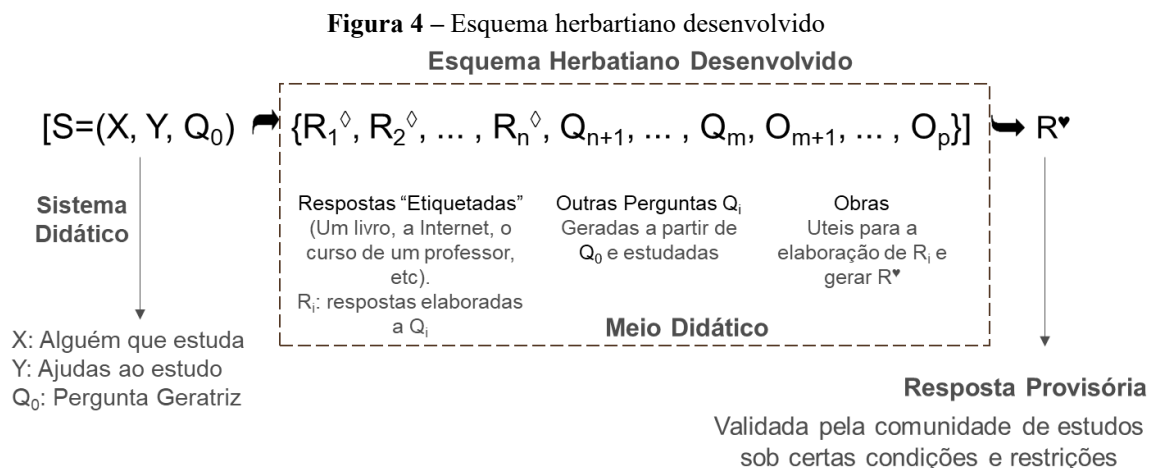
<sup>9</sup> Chevallard (1999) atribui o sentido de "obra" como sendo uma organização praxeológica inédita ou mesmo já existente em uma determinada instituição que pode servir como uma resposta a uma determinada questão que se estuda.

No desenvolvimento de um PEP, com a finalidade de produzir  $R^\heartsuit$ , o sistema didático  $S$  necessita de instrumentos, recursos, obras, ou seja, faz-se necessário criar um meio didático  $M$ . Daí, formaliza-se o que Chevallard (2007) chama Esquema Herbartiano.

$$[S(X, Y, Q) \rightsquigarrow M] \rightsquigarrow R^\heartsuit$$

O sistema didático  $S$  fabrica e organiza ( $\rightsquigarrow$ ) o meio  $M$ , com o qual produzirá ( $\rightsquigarrow$ ) uma resposta  $R^\heartsuit$ . O meio  $M$  contém as perguntas geradas a partir de  $Q$  e as respostas já existentes e acessíveis à comunidade de estudo, que se denotam por  $R_i^\diamond$  para  $i = 1, \dots, n$ . As respostas prontas são aquelas que estão apresentadas, por exemplo, em um livro, na Web, em um curso, por um professor. Chevallard (2013) destaca que, na TAD, é comum denotar as respostas existentes acrescentando à letra  $R$  um pequeno losango ou diamante no sobrescrito de  $R$  para expressar que essa resposta foi criada e disseminada por uma instituição que, em certo sentido, a endossou, “a rotulou”. O autor acrescenta que uma resposta  $R^\diamond$  não precisa ser “verdadeira” ou “válida”, pois cabe à  $X$  avaliar se essas respostas são relevantes. Esse aspecto também difere do gesto monumentalista no qual as respostas fornecidas pelo professor são sempre garantidas pelo próprio professor.

Para elaborar a resposta  $R^\heartsuit$  apropriada, também são pertencentes à  $M$ , entidades  $O_j$ , com  $j = n + 1, \dots, m$ , potencialmente úteis como, por exemplo, teorias, praxeologias matemáticas ou não etc., isto é, obras de diferentes naturezas. Sendo assim, a partir do estudo combinado das respostas  $R^\diamond$  e das obras  $O$ , o esquema herbartiano se amplia e dá origem ao esquema herbartiano desenvolvido:



Para que o ensino por PEP ocorra, Chevallard (2009c) afirma que a organização didática deve atender a algumas condições, denominadas mesogênese, cronogênese e topogênese, as quais são descritas a seguir.

Na mesogênese, a primeira condição a ser satisfeita é que o  $M$  não está totalmente feito ou construído de antemão, mas é construído pela classe a partir das produções diversas, tanto externas como internas a ela. Essas últimas incluem respostas  $R_x$  propostas pelos alunos a partir de sua própria atividade. Os recursos se incorporam conforme a necessidade e em qualquer momento, sob a condição de que sejam validados pela comunidade de estudo.

A condição mesogenética anda de mãos dadas com a condição própria da topogênese: a construção do meio  $M$  é um produto da classe e não apenas do professor. Apesar de dirigir a comunidade de estudo, o professor não tem um papel preponderante na construção de  $M$  e suas contribuições podem ou não integrar o meio. O *topos*<sup>10</sup> dos estudantes deve receber uma extensão importante, pois além de suas respostas pessoais, pode-se acrescentar ao  $M$  obras que decidir e que considere pertinente para a elaboração de  $R^\heartsuit$ . O *topos* do professor também é ressignificado já que este decidirá, em última instância, explicitando as razões, se a classe incorporará ou não em seu meio de estudo uma determinada obra.

No PEP, a cronogênese gera uma dilatação do tempo didático e uma expansão do tempo de relógio durante a construção e o trabalho do meio  $M$ .

Realizar um ensino por meio de um PEP implica pôr em funcionamento maneiras de fazer gestos de estudos e de investigação denominadas de dialéticas. Salgado e Otero (2020) consideram que a dialética tem dois polos, que se opõem e se atraem, sem que haja uma dualidade entre eles. Por exemplo, na chamada dialética da difusão e recepção, difundir e receber seriam ações opostas, mas a primeira ação consiste em dar a conhecer uma resposta que justifique seus componentes e as escolhas feitas. No entanto, também é preciso considerar questões, aceitações e resistências do restante da classe, ou seja, há uma interação entre quem transmite e quem recebe uma resposta.

Chevallard (2007) estabelece as seguintes dialéticas com o intuito de organizar e ao mesmo tempo descrever o processo de estudo:

---

<sup>10</sup> No idioma grego, *topos* significa lugar; no âmbito da TAD, *topos* refere-se ao papel ou responsabilidade que um sujeito assume em determinada instituição. Preferimos usar este termo quando estamos falando especificamente das responsabilidades de um indivíduo ou de um grupo deles ao invés do termo “topogênese” (que abrange todos os espaços ocupados por todos os indivíduos vinculados a um sistema didático).

- **Dialética do estudo e da investigação** supõe, numa investigação, a combinação do estudo de perguntas e respostas, pois não é possível investigar sem estudar, ao passo que um verdadeiro estudo produz perguntas a serem investigadas.
- **Dialética da análise e síntese praxeológica e didática** está ancorada no fato de que a construção de uma resposta a uma pergunta requer fazer uma análise desse saber e determinar o que é útil para a construção da resposta desejada. Salgado e Otero (2020) consideram que toda análise praxeológica exige fazer certas perguntas (didáticas) relacionadas à difusão de determinado conhecimento como, por exemplo, “De onde vem essa praxeologia?”, “Como ela surge nessa instituição?” etc.
- **Dialética do paraquedista e das trufas** – esta metáfora, de acordo com Salgado e Otero (2020), vem do historiador Emmanuel Leroy-Ladurie que se referia aos historiadores como paraquedistas e caçadores de trufas<sup>11</sup>. Essa dialética alude à condição de exploradores que assumem os atores do sistema didático durante um PEP quando tomam uma grande distância do problema e o exploram panoramicamente (a ideia do paraquedista). Após identificado um objetivo, é preciso avaliar o achado de forma minuciosa (a ideia dos caçadores de trufas).
- **A dialética de entrar e sair do tema** refere-se ao processo de, durante o desenvolvimento de um PEP, buscar respostas para uma pergunta que permite expandir a investigação além do tema inicial, podendo até extrapolar a disciplina de referência antes de retornar ao foco principal.
- **A dialética das caixas negras e caixas claras** se refere ao processo segundo o qual se estabelece que conhecimento é pertinente e merece ser analisado ou esclarecido, opondo-se ao ensino tradicional no qual se propõe esclarecer tudo sobre um tema.
- **A dialética da leitura (descrição) e da escrita (inscrição)** está relacionada à ideia de evitar a transcrição formal das respostas parciais já existentes, respostas que têm sentido e são consideradas pertinentes porque podem conduzir à construção da resposta desejada, mas não necessariamente ser transcrita. Deve-se, então, considerar apenas a parte útil, o sentido dessas respostas parciais.

---

<sup>11</sup> Trufa é um cogumelo raro e difícil de ser explorado que nasce sob a terra, a uma profundidade de 20 a 40 centímetros. Sua exploração requer bastante habilidade e um minucioso trabalho por parte do especialista para que seja retirada do solo sem quebrá-la nem ferir-lhe, já que seu valor está atrelado à preservação das suas características originais. Sua principal utilidade está ligada à gastronomia, especialmente na composição de pratos típicos da França e da Itália. (Adaptado de: <https://www.terra.com.br/culinaria/infograficos/21-coisas-para-comer-antes-de-morrer/21-coisas-para-comer-01.htm>, acesso em 20/04/2022).

- **A dialética mídia-meio** – uma mídia é qualquer sistema que emite mensagens em direção a certos públicos como, por exemplo, um diário, um programa de TV, um curso, um livro, um artigo científico. Um PEP só pode se desenvolver se os estudantes dispuserem de algumas respostas já estabelecidas, com as quais podem elaborar respostas provisórias, sendo os diferentes meios de comunicação e difusão a via de acesso a essas mídias. Sua incorporação no meio dependerá de um processo de validação.
- **A dialética do individual e do coletivo** consiste no estudo e na investigação coletiva de uma pergunta problemática que foi elaborada que, por sua vez, exige dividir responsabilidades e atribuir tarefas individuais para, em seguida, voltar a incorporar-se a um processo coletivo a fim de dar uma resposta.
- **A dialética da produção e da recepção** se refere à gestão do processo que conduz a difundir e defender a resposta desenvolvida pela comunidade de estudo. Isso implica dizer que cada resposta obtida, cada obra utilizada ou cada caminho percorrido na construção de uma resposta são justificados.

Matos *et al.* (2018) postulam que, em algumas investigações, o sistema didático do PEP pode assumir a forma  $S(X, \emptyset, Q)$ , ou seja,  $Y = \emptyset$ , pois, neste tipo de sistema didático, a metodologia confere legitimidade ao pesquisador quando este estuda as obras  $O$  que serão necessárias para fundamentar uma pesquisa em desenvolvimento. Assim, essa configuração na qual  $Y = \emptyset$  e  $X = \{X_1\}$  é compreendida como a metodologia de um PEP solitário.

### 2.3 A TAD, a profissão docente e a formação de professores

Como já mencionado, a TAD, desde a sua gênese, tem mantido estreita relação com a formação inicial e continuada de professores. A esse respeito, Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Pérez (2019) destacam algumas razões dessa íntima relação, das quais já elencamos o fato de a TAD ter como objeto de pesquisa todo o processo de criação e uso do conhecimento matemático até sua incorporação na escola como saber ensinado. Outra razão se dá pelo fato de que alguns pesquisadores que trabalham no âmbito da TAD estiveram ou estão amplamente envolvidos na formação de professores em diferentes níveis educacionais.

Esses autores também defendem que ainda hoje persiste em diversos setores da sociedade uma concepção errônea da profissão docente que busca responsabilizar o professor pelos resultados do ensino. Isso conduz a uma falsa percepção de que os problemas e dificuldades que se encontram no desenvolvimento da profissão docente decorrem

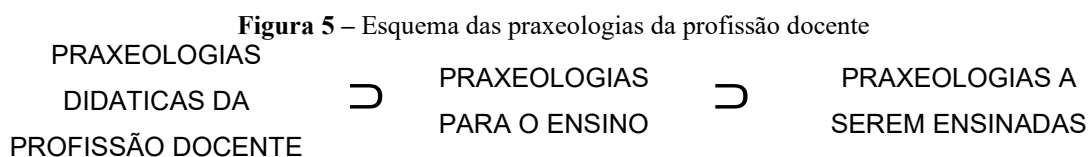
principalmente de limitações pessoais. No entanto, essa percepção pode ser modificada a partir do momento em que o professor se considera parte de uma profissão e, então, a responsabilidade de buscar respostas não seria considerada individualmente, mas sobre a profissão como instituição.

Situando o problema da formação do professor na perspectiva da TAD segundo a qual toda atividade humana pode descrever-se em termos de praxeologias, Cirade (2006) e, mais tarde com as contribuições de Chevallard e Cirade (2010), distinguem ao menos três tipos de praxeologias docentes diretamente relacionadas com a formação dos professores de matemática:

- praxeologias matemáticas a serem ensinadas;
- praxeologias matemáticas para o ensino;
- praxeologias didáticas da profissão docente.

As praxeologias matemáticas a serem ensinadas dizem respeito aos saberes matemáticos prescritos nos currículos e documentos de orientação curricular, nos livros didáticos e na própria atividade matemática escolar. No entanto, a formação de professores não pode se limitar aos conteúdos que se deve ensinar. É aí que entra em cena a necessidade das praxeologias matemáticas para o ensino que, além de incorporar as praxeologias matemáticas a ensinar, contém, também, os saberes matemáticos necessários para delimitar, interpretar, relacionar e explicitar as razões de ser da matemática a ensinar.

Para pôr em jogo as praxeologias supramencionadas no processo de estudo da Matemática, são necessárias as praxeologias didáticas da profissão docente que, além de incorporar as praxeologias anteriormente mencionadas, são os conhecimentos indispensáveis para desenhar e gerenciar esse processo. Como bem salientam Olarría *et al.* (2014), essas praxeologias didáticas não se reduzem à mera prática, como às vezes é interpretado quando se fala em prática docente, mas antes inclui um *logos* didático, ou seja, um discurso justificativo e explicativo da referida prática. Vale ressaltar que particularizamos essas praxeologias da profissão docente para o nosso campo de interesse, aos conhecimentos matemáticos, mas elas podem ser aplicadas a outras disciplinas. Podemos, portanto, escrever o seguinte:



Fonte: Adaptado de Wozniak (2020)

Cirade (2006) considera a existência de uma enorme problemática contida na matemática ensinada, especialmente no âmbito do ensino médio, e de como os recursos matemáticos que poderiam abordar essa problemática ainda estão muito distantes da cultura matemática tanto de professores como de um grande número de membros da comunidade matemática científica. Para enfrentar essa problemática, é necessário que os programas de formação continuada no âmbito da TAD, segundo Olarria *et al.* (2014), levem em consideração algumas ações que citamos a seguir:

- O conjunto das praxeologias da profissão de professores de Matemática deve estar estruturado em uma progressão de complexidade e completude crescente;
- Não existem respostas completas e definitivas em nenhum dos três níveis das referidas praxeologias, nem mesmo as praxeologias matemáticas a serem ensinadas podem ser consideradas já disponíveis e prontas para serem utilizadas na formação de professores. Assim, postula-se que a elaboração e o desenvolvimento de praxeologias matemáticas para o ensino tendem a modificar tanto as praxeologias matemáticas a serem ensinadas como as próprias praxeologias didáticas;
- A construção e o ajuste das praxeologias que fazem parte do equipamento dos professores de matemática requerem um rigoroso trabalho de pesquisa que não pode ser ignorado por uma mera análise empírica dos conhecimentos que os professores já utilizam em sua prática docente habitual;
- As praxeologias matemáticas para o ensino, ao conter os conhecimentos necessários para delimitar adequadamente, interpretar, relacionar entre si e explicitar a razão de ser da Matemática a ser ensinada, constituem componentes essenciais das praxeologias didáticas da profissão docente;
- As praxeologias didáticas da profissão docente se constroem (ou reconstroem), em grande parte, como consequência do desenvolvimento das respostas às questões que podem surgir no âmbito das praxeologias matemáticas para o ensino ou, inclusive, no âmbito das praxeologias matemáticas a serem ensinadas;
- As questões geratrizes dessas praxeologias podem surgir tanto no âmbito da formação de professores, na noosfera do sistema de ensino, na própria profissão docente ou na investigação didática;

- É necessário introduzir novos dispositivos didáticos que possibilitem o estudo de questões e sejam capazes de gerar e fazer viver, nas instituições responsáveis pela formação docente, as questões umbilicais da profissão<sup>12</sup>.

Apesar de considerarmos a imprescindibilidade do conjunto dessas ações, como já exposto, a última delas parece ser o ponto de partida para se pensar em um processo de formação de professores nos domínios da TAD. No enfoque antropológico, a dialética entre a formulação de questões problemáticas e a construção de respostas constitui o fundamento de qualquer processo formativo.

Se nas instituições de ensino nas quais os professores têm atuado a dialética das perguntas e das respostas é praticamente inexistente, devido à predominância do paradigma de visita às obras, quando nos transportamos para as instituições onde esses docentes são formados o cenário também não é diferente. As questões que podem dar sentido e responder aos problemas da profissão docente são ignoradas para dar lugar ao estudo de saberes desassociados, como se fossem dois campos independentes, a formação geral ou pedagógica para o ensino de qualquer disciplina da formação específica, em particular, da Matemática (Olarria *et al.*, 2014).

Na busca por uma solução à problemática anteriormente apontada, algumas propostas metodológicas, no campo da TAD, têm surgido, colocando as questões umbilicais à profissão de professor de Matemática como cerne do processo de formação e ajudando os professores a dotar-se de recursos de natureza matemático-didática que constituem a infraestrutura necessária para enfrentar as dificuldades, problemas e desafios que surgem continuamente no exercício da docência.

Umas dessas propostas metodológicas precursoras de formação de professores no quadro da TAD, é o que Chevallard e Cirade (2006) chamam de dispositivo de perguntas da semana. Essa proposta surgiu basicamente da experiência, enquanto professor formador, do primeiro autor, no contexto da formação inicial de professores de Matemática na França. Os futuros professores devem, a cada semana e de forma concisa, especificar uma dificuldade que encontraram ou uma pergunta que se fizeram no decorrer de seu trabalho na semana anterior. Em seguida, as questões são apreciadas pelo conjunto de estudantes que deve procurar validá-las e, em seguida, incorporá-las a um mecanismo chamado de Fórum de Perguntas que opera

---

<sup>12</sup> Cirade (2010) denomina de "questões umbilicais" aquelas que estão profundamente ligadas à vida cotidiana dos professores em formação. Chevallard (2009) complementa essa ideia ao afirmar que essas questões não apenas representam o ponto de partida e de chegada do estudo, seja na formação ou na pesquisa, mas também surgem diretamente da prática. São perguntas que o profissional comum, neste caso o professor de Matemática, carrega consigo, conferindo-lhes uma legitimidade profissional imediata.

sob algumas premissas tais como qualquer questão merece, *a priori*, ser examinada, trabalhada, estudada e deve ser considerada como eco ou sintoma de pelo menos um problema da profissão.

Buscando sistematizar em etapas a proposta anteriormente apresentada, Olarría *et al.* (2014) propuseram um dispositivo de formação voltado para o estudo de questões sobre matemática para o ensino. As etapas do referido dispositivo são: formular as questões da semana por escrito ligadas à profissão do professor de Matemática; propor elementos de respostas às perguntas da semana; levantar questões umbilicais da profissão e entregar materiais associados; procurar respostas disponíveis na cultura para as questões levantadas; realizar uma atividade matemática relacionada com as questões estudadas e propor elementos de resposta.

Inspirados no trabalho de Cirade (2006), Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Pérez (2019) apresentaram uma metodologia para a reconstrução de praxeologias matemáticas para o ensino, baseada nos Percursos de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP). Os autores destacam que o PEP-FP deve constituir uma ferramenta útil para questionar os paradigmas dominantes, possibilitando que os professores reflitam sobre sua própria prática, além de oferecer instrumentos para a análise epistemológica e didática, de modo a vincular a investigação à docência, favorecer a elaboração de respostas próprias em vez de prescrever ações e promover, de forma colaborativa, novas infraestruturas matemáticas e didáticas.

Assim, as considerações anteriormente citadas se materializaram em uma metodologia para formação de professores, os PEP-FP, que segundo Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Pérez (2019) se descrevem nas seguintes etapas:

1. Módulo M<sub>0</sub>: Como ensinar um conteúdo C? – este módulo contém tanto a construção de Q<sub>0</sub>-FP como as explorações iniciais com vista a elaborar os primeiros elementos de resposta, geralmente a partir das mídias mais habituais para os professores: currículo, livros didáticos, revistas para o professor, revistas de investigação, webs, pesquisas anteriores etc. Além disso, nessa etapa também se investigam as razões que justificam o estudo de um objeto matemático a partir da elaboração de questões derivadas que tem por objetivo introduzir os professores em formação à prática de gestos básicos do questionamento didático como “O que é C? De onde surgiu? Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava? Por que se deve ensinar C? Quais são suas razões de ser na matemática escolar (as estabelecidas explícita ou implicitamente e as potenciais)? Quais propostas de ensino existem? O que se sabe delas? etc.” (Ruiz-Olarría; Bosch Casabò; Gáscon Perez, 2019, p. 135, tradução nossa<sup>13</sup>)

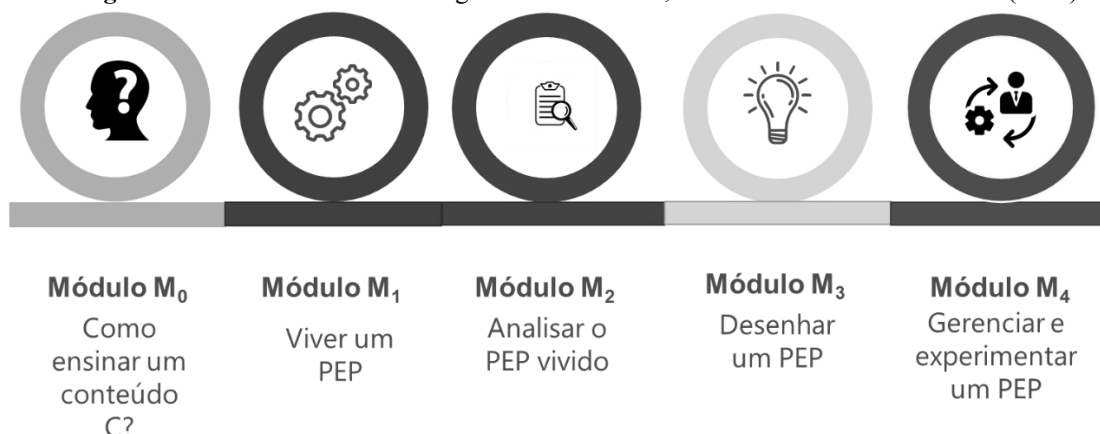
---

<sup>13</sup> “¿Qué es C? ¿De dónde viene? ¿En qué ámbitos matemáticos y no matemáticos se utiliza o utilizaba? ¿Por qué hay que enseñarlo? ¿Cuáles son sus razones de ser en la matemática escolar (las establecidas explícita o

2. Módulo M<sub>1</sub>: Viver um PEP – o objetivo deste módulo é que o estudante-professor experimente um PEP como membro X do sistema didático S(X, Y, Q<sub>1</sub>) situado na instituição de formação de professores, onde Y são os formadores (diretores do estudo) e Q<sub>1</sub> a questão para qual deverão construir sua própria resposta.
3. Módulo M<sub>2</sub>: Analisar o PEP vivido – a questão geradora Q<sub>2</sub> deve girar em torno do questionamento matemático-didático do PEP vivido anteriormente em posição de estudante. Também devem questionar a respeito das praxeologias matemáticas construídas, como a organização didática deste processo, em termos de articulação dos momentos e das dialéticas de estudo, são postas em jogo, e a respeito das responsabilidades assumidas pelos professores em formação sob o papel de estudantes e o formador em seu papel de diretor do processo de estudo.
4. Módulo M<sub>3</sub>: Desenhar um PEP – a questão geradora Q<sub>3</sub> deve estar baseada na tarefa de desenhar um PEP para alunos de certa etapa de ensino, análogo ao vivido, e analisado nas fases anteriores. Durante essa adaptação, espera-se que diferentes restrições institucionais surjam, por exemplo, rigidez curricular, distribuição de tempo, papéis tradicionais assumidos por professores e alunos, entre outros, e que sejam os próprios professores que os façam explícitos. (Barquero; Bosch; Romo-Vázquez, 2019)
5. Módulo M<sub>4</sub>: Gerenciar e experimentar um PEP – o objetivo deste módulo é dar suporte regular aos professores que se iniciam no desenho e gerenciamento dos PEP. Além disso, busca-se também analisar questões, dificuldades e obstáculos que podem surgir durante a implementação, mediante a análise das condições e restrições institucionais que vão surgir.

O esquema, a seguir, apresenta a síntese das fases de um PEP-FP.

**Figura 6** – Fases de um PEP-FP segundo Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Pérez (2019)



Fonte: O autor (2024)

Ressaltamos que essas propostas metodológicas de formação apresentadas até aqui não são unânimes dentro do programa da TAD. Outras organizações didáticas têm surgido, sendo que uma grande porção delas inspiradas no PEP, tendo como mola propulsora a dialética das perguntas e das respostas.

### 2.3 Pesquisas brasileiras e internacionais sobre formação de professores que se ancoram na Teoria Antropológica do Didático

Nesta seção, concentraremos esforços para responder a duas questões importantes que são “*Que propostas de formações, tanto inicial quanto continuada, para professores de matemática existem no âmbito da TAD e o que se pode dizer sobre elas?*” e “*Quais são as condições e restrições enfrentadas na realização de uma formação de professores nos domínios da TAD, especialmente quando se usa utiliza o dispositivo do PEP?*”.

Para enfrentar as perguntas sobreditas, recorreremos a uma pesquisa de caráter bibliográfico, mais especificamente do tipo estado da arte, de acordo com Soares (1989) e Ferreira (2002), pelo seu caráter inventariante e descritivo da produção acadêmica e científica a respeito de um tema que se busca investigar.

Realizamos um levantamento de estudos em 87 periódicos científicos on-line, de âmbitos nacional e internacional, que são de acesso livre (gratuito), nas áreas de ensino e educação, que têm notório reconhecimento na divulgação de pesquisas do campo da Educação

Matemática e que possuem classificação entre A1 e B2 no Qualis Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) no quadriênio 2013 – 2016<sup>14</sup>.

O recorte temporal escolhido para esta investigação é de 10 anos, considerando a década de 2011 a 2020, pois a intenção também é evidenciar se há uma evolução quantitativa e qualitativa dos trabalhos que abordam a formação de professores utilizando os aspectos teórico-metodológicos da TAD. Dessa forma, não nos detivemos apenas a analisar propostas que aludem à formação de professores baseada no dispositivo do PEP, mas todas as propostas que, de certa forma, tenham interfaces com os quadros teóricos e metodológicos da TAD.

Utilizamos como descritores de busca as expressões “Teoria Antropológica do Didático” e “Formação de professores” e, para obter um maior alcance neste estudo, realizamos a pesquisa em quatro idiomas, Português, Espanhol, Francês e Inglês, considerando as expressões traduzidas em cada um dos respectivos idiomas. A procura considerou a existência dos descritores tanto no título, como no resumo ou no corpo dos artigos científicos. Após a realização das buscas, procedeu-se a leitura dos resumos dos trabalhos e, aqueles que se enquadraram no escopo da pesquisa, foram lidos em sua completude para, em seguida, serem submetidos à análise.

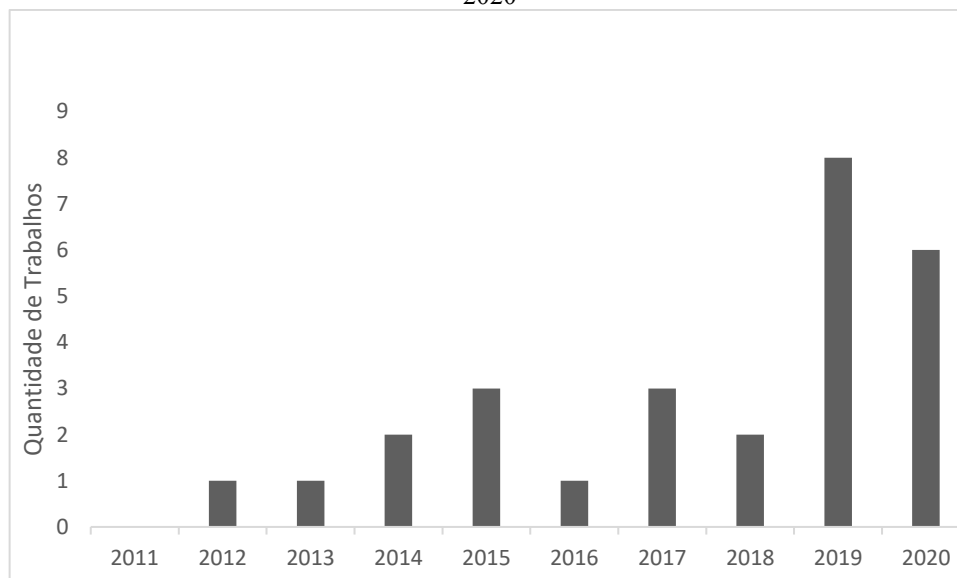
Dos 87 periódicos científicos pesquisados, foi possível encontrar estudos que atendiam aos requisitos em 9 deles: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Amazônia, Bolema, Educação Matemática Pesquisa, Enseñanza de las Ciencias, Perspectivas da Educação Matemática, REDIMAT, Revista de Enseñanza de la Física e Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT. Após a busca segundo os descritores escolhidos, foi possível encontrar 31 pesquisas dentre as quais consideramos 27 para estudo e análise, pois as demais não se enquadravam nos objetivos da investigação.

O Gráfico 1 apresenta a distribuição do quantitativo dos trabalhos analisados por ano.

---

<sup>14</sup> A classificação de periódicos do quadriênio 2017 – 2020 não havia sido divulgada no momento da coleta dos dados deste estudo.

**Gráfico 1** - Distribuição do quantitativo de trabalhos sobre Formação de Professores e a TAD na década 2011 - 2020



Fonte: O autor (2021)

Apesar de haver uma oscilação no comparativo do número de trabalhos de um ano ao outro, é possível perceber que nos últimos anos considerados no estado da arte esse importante domínio de investigação, que é a formação de professores, tem passado por uma significativa expansão quantitativa no âmbito da TAD.

Após a realização de leituras minuciosas de cada uma das pesquisas, buscamos identificar de que forma cada uma delas recorre aos aspectos teórico-metodológicos da TAD a fim de que, encontrando conexões entre elas, possamos agrupá-las e, assim realizar uma análise qualitativa. Isso torna-se relevante no sentido de entendermos quais os aspectos e dimensões vêm sendo tratados nesses trabalhos no referido recorte temporal e, assim, apontar possíveis necessidades de estudos nesta área. Dessa forma, foi possível agrupar os trabalhos selecionados em quatro categorias: 1) Aspectos conceituais da TAD utilizados para análise de formação de professores; 2) Praxeologias Matemáticas e/ou Didáticas necessárias para a formação de professores; 3) Propostas metodológicas, no âmbito da TAD, para formação de professores e 4) Trabalhos de natureza bibliográfica. A tabela 1 apresenta a distribuição quantitativa desses trabalhos em suas respectivas categorias:

**Tabela 1** – Distribuição dos trabalhos, por categoria, sobre formação de professores e a TAD

| <b>CATEGORIAS</b>              | <b>Aspectos conceituais da TAD utilizados para análise de formação de professores</b> | <b>Praxeologias Matemáticas e/ou Didáticas necessárias para a formação de professores</b> | <b>Propostas metodológicas, no âmbito da TAD, para formação de professores</b> | <b>Trabalhos de natureza bibliográfica</b> |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| <b>QUANTIDADE DE TRABALHOS</b> | 5                                                                                     | 4                                                                                         | 17                                                                             | 1                                          |

Fonte: Elaboração própria (2024)

Como é possível perceber, na tabela apresentada anteriormente, os estudos que versam sobre propostas metodológicas para formação de professores são mais abundantes entre todas as categorias e trabalhos de cunho bibliográfico figuram em última posição. Isso evidencia não apenas o caráter teórico da TAD, já bastante consolidado, mas também a sua qualidade enquanto referencial metodológico para o desenvolvimento de práticas formativas.

Nas subseções que se seguem, nos dedicaremos à apresentação dos principais achados da investigação realizada de acordo com as categorias supramencionadas.

### 2.3.1 Aspectos conceituais da TAD utilizados para análise de formação de professores

Os estudos voltados para a utilização de aspectos conceituais dos quadros teóricos da TAD na análise de práticas, inclusive de práticas formativas como é o caso que ora apresentamos, e de recursos didáticos como, por exemplo, os livros didáticos, têm reforçado a importância e a pertinência desse referencial teórico como uma poderosa ferramenta de análise tanto da atividade matemática quanto didática dessas práticas e recursos (Almouloud, 2015). Dentre as investigações analisadas foi possível encontrar um número significativo de estudos nesta categoria que abrangem tanto contextos de formação inicial como de formação continuada de professores. Apresentaremos, inicialmente, as que tratam da formação inicial e, em seguida, as que abrangem processos formativos para professores em serviço.

Na perspectiva da formação inicial de professores, Cruz e Bittar (2019) desenvolveram uma experiência de formação compartilhada utilizando-se de uma proposta metodológica baseada na *Lesson Study* com estudantes da licenciatura em Matemática, mais especificamente licenciandos que cursavam o estágio supervisionado no Ensino Médio. O objetivo central foi a análise dos elementos praxeológicos que compunham as práticas escolares dos futuros professores. A reflexão conduzida na ação oportunizou modificações na organização didática, enriquecendo a etapa da execução da aula.

Corica e Ferrari (2020) investigam a formação em Estatística de estudantes de cursos de licenciatura em Matemática do Ensino Médio em instituições de ensino superior na Argentina. Com base nas noções de praxeologia e de modelo epistemológico de referência, as autoras identificam um reducionismo nas praxeologias relacionadas ao ensino de Estatística durante a formação inicial desses professores, uma vez que o foco recai predominantemente sobre aspectos descritivos, resultando em praxeologias pontuais e rígidas. Destacam, ainda, que um equipamento praxeológico frágil, decorrente de organizações matemáticas rígidas e desarticuladas, que não evidenciam a utilidade do conhecimento, constitui uma limitação significativa para o professor ao planejar suas práticas profissionais.

No âmbito da formação continuada de professores, Montoya e Luzema (2012) apresentaram a descrição de um processo de investigação, em andamento à época da publicação, que pretendia realizar um estudo com professores que participavam de um curso de formação continuada avançado e que lecionavam Matemática a alunos entre 12 e 14 anos. Esse curso tinha a finalidade de fazer com que os participantes pudessem atualizar saberes matemáticos, didáticos e pedagógicos e planejar sequências de aprendizagem com base em quadros teóricos da Didática da Matemática. A pesquisa proposta considerou aspectos conceituais de diversos tipos, dentre eles da TAD, sob os quais os dados coletados na fase experimental seriam analisados. No entanto, os autores não especificaram que elementos advindos dessas teorias seriam considerados nessas análises.

O estudo proposto por Comiti (2014) destaca que a formação de professores só pode promover avanços significativos na docência quando situada no conjunto de condições que compõem o desenvolvimento do sistema educativo, de modo a sustentar a construção de pesquisas socialmente orientadas para as necessidades da escola, de seus responsáveis e de seus atores. Nessa perspectiva, a autora enfatiza que as pesquisas em Didática da Matemática constituem uma dessas condições. Comiti levanta questões fundamentais a serem consideradas na formação docente, tais como: “Como é construído o conhecimento a ser ensinado?”, “Por que este e não outro?”, “Por que dessa forma?” e “Que restrições isso impõe?”. Na busca por respostas a essas questões, a autora ancora-se no quadro teórico da TAD, o qual permite compreender o professor como um sujeito institucional.

A pesquisa supracitada defende que os diferentes aspectos do trabalho do professor que podem ser levados em consideração na sua formação devem estar alicerçados no arcabouço dos construtos da didática, mais especificamente no âmbito da TAD, pois fornece ao educador as ferramentas teóricas forjadas pela pesquisa de uma forma funcional para a análise das práticas da sala de aula e para o desenvolvimento de situações de ensino. Entre as ferramentas teóricas,

destaca as Organizações Matemáticas (o que ensinar?), a Organização Didática (como ensinar?) e a avaliação e controle da organização matemática proposta através da análise de erros.

Por sua vez, Franco, Gentile e Uribe (2015) descrevem e analisam um programa de formação continuada organizado com um formador, seis professores do ensino médio e professores dos 4º, 5º e 6º anos de 32 escolas sobre a conceituação de números racionais. A análise centrou-se nas relações entre o que se desenvolveu com os professores no ciclo de formação, discussão das sequências didáticas e o que se poderia especificar nas salas de aula. Utilizou-se de construtos como o meio como ferramenta, da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2007), e as praxeologias, da TAD, que permitiram aos investigadores aprofundar o estudo das práticas docentes.

Em geral, os estudos anteriormente apresentados evidenciam que a unidade mínima de análise da TAD, denominada praxeologia, tem sido uma ferramenta teórica útil para análise de saberes, tanto matemáticos quanto didáticos, em diferentes aspectos nos desdobramentos dos processos de formação de professores, seja para a exploração dos saberes construídos pelos docentes em formação ou para que estes reflitam sobre suas práticas. Essas investigações também se expressam qualitativamente por abranger diferentes níveis de ensino, o que pode denotar a amplitude dos âmbitos de utilização desse equipamento teórico.

### 2.3.2 Praxeologias Matemáticas e/ou Didáticas necessárias para a formação de professores

Os estudos voltados para as praxeologias matemáticas e/ou didáticas necessárias para a formação de professores aludem para os conhecimentos matemático-didáticos, do ponto de vista da TAD, que devem ser levados em consideração nos processos formativos de professores.

Dentre tais estudos, Sierra Delgado, Bosch Casabó e Gáscon Pérez (2013) descreveram uma dimensão da atividade matemática, o questionamento tecnológico-teórico das técnicas matemáticas, que, apesar de possuir um papel importante na construção do conhecimento matemático, está relativamente ausente tanto no sistema de ensino em que o professor deve exercer a sua profissão, como nas instituições de formação de professores. Segundo os autores, esta dimensão contém as questões matemáticas que surgem quando as próprias técnicas são tomadas como objeto de estudo. Ela também é utilizada para avaliar o domínio de economia, confiabilidade e alcance ou domínio de validade de algumas técnicas matemáticas escolares, o que permite comparar sua eficácia e tornar seu uso mais flexível. Mais especificamente no campo da formação de professores, essa dimensão pode tornar-se uma ferramenta fundamental para realizar uma análise matemática (com intenção didática) dos conteúdos matemáticos a

serem ensinados. Também é postulado que, além desses conteúdos, a formação matemático-didática de professores deve incluir os conhecimentos matemáticos necessários para definir, interpretar, relacionar adequadamente os conteúdos da matemática a ser ensinada e, o que é mais importante, explicitar suas razões de ser.

Artaud (2019), tomando como apoio a noção de praxeologia, buscou realizar uma análise ecológica das praxeologias de formação e praxeologias para a formação a partir da justificativa das práticas como condição e restrição. Com o olhar voltado para a realização do momento tecnológico-teórico, a autora chama a atenção para uma dificuldade existente, particularmente no nível do sistema didático, de se propor uma dialética entre a experimentação e a teorização em Matemática. Isto se dá pela existência de um dilema que põe de um lado os métodos empíricos, que permitem realizar um certo número de tarefas matemáticas, e do outro, a teorização que possibilita a construção de uma técnica que permita resolver o máximo de problemas do mesmo tipo.

A autora supramencionada advoga que o trabalho do professor de matemática é articular esses dois polos de modo a construir uma teoria que possa dar confiabilidade ao sistema e que a necessidade de fazer existir uma dialética entre experimentação e teorização permite destacar a importância de desenvolver o *logos* das praxeologias matemáticas. No entanto, considera, também, que a transposição para a profissão de elementos que permitam melhorar significativamente a relação do professor com o conhecimento a ser ensinado é difícil. Conclui que a formação de professores de Matemática, cientificamente baseada na Didática da Matemática, requer condições particulares para existir e para permitir que as condições/restrições do nível escolar, da sociedade e além evoluam.

García *et al.* (2019) propuseram uma reinterpretação da *Lesson Study* (LS) como praxeologia da profissão docente. A partir da análise de três estudos de caso baseados na LS em diferentes contextos, os autores procuraram evidenciar o papel que diferentes modelos epistemológicos e didáticos desempenham na sua estruturação, desenvolvimento e possível aprendizagem profissional dos participantes. O estudo visava, precisamente, aprofundar a identificação e questionamento dos *logos* profissionais. O uso de ferramentas da TAD também permitiu identificar tipos de tarefas mais importantes do bloco prático da LS, destacando tipos de tarefas e técnicas profissionais específicas e ligar esta especificidade com os modelos epistemológicos e didáticos que atuam como componente crucial dos *logos* (bloco tecnológico-teórico) dessa praxeologia da profissão.

A investigação conduzida por Wozniak (2020) analisou as possibilidades de o pesquisador em Didática da Matemática explorar as demandas praxeológicas, tanto

matemáticas quanto didáticas, envolvidas no ato de ensinar. Para a autora, reconhecer tais demandas significa antecipar as dificuldades que os professores podem enfrentar no exercício de sua profissão, ou seja, os próprios desafios inerentes à docência. Para essa identificação, três caminhos são propostos: a análise ecológica, as observações naturalistas e a mobilização de uma engenharia didática de investigação. Wozniak enfatiza ainda que o reconhecimento dessas dimensões praxeológicas constitui um pré-requisito para o aprimoramento das práticas docentes, embora represente apenas o ponto de partida desse processo. Nessa perspectiva, a autora destaca que, segundo a TAD, uma possível resposta a tais desafios está na constituição da docência como uma verdadeira profissão.

Como é possível perceber, os estudos apresentados nesta categoria apontam claramente para a necessidade de desenvolver o bloco tecnológico-teórico (o *logos*) das organizações matemáticas, um aspecto que tem sido amplamente negligenciado. Tal negligência é evidente tanto nas práticas dos sistemas de ensino nos quais os professores atuam, como nas práticas formativas das instituições responsáveis pela formação desses profissionais. Isso implica dizer que as tarefas e as técnicas (a *práxis*) apresentadas, enquanto atividades matemáticas e/ou didáticas, quase sempre estão dissociadas de um discurso ou justificativa que as torne inteligíveis ou que lhes dê sentido. Além disso, também apontam para a imprescindibilidade de se pensar a formação matemático-didática dos professores para além do reduto das praxeologias a serem ensinadas e de situar a docência como uma profissão.

### 2.3.3 Propostas metodológicas, no âmbito da TAD, para formação de professores

Os estudos que versam sobre propostas metodológicas para a formação de professores ancorados nos saberes da TAD foram os mais numerosos dentre todas as categorias e também revelam a abrangência qualitativa desses trabalhos em diferentes níveis educativos. Dividimos as pesquisas encontradas nessa categoria em três subcategorias: propostas de formação de professores no contexto da formação inicial considerando os saberes matemáticos e/ou didáticos que integram o currículo dos cursos de licenciatura; propostas de formação de professores no contexto da formação inicial considerando as praxeologias matemáticas a serem ensinadas e/ou necessárias para o ensino e as propostas de formação continuada de professores levando em conta as praxeologias matemáticas a serem ensinadas e/ou necessárias para o ensino.

A tabela 2 apresenta a distribuição da quantidade de trabalhos em suas respectivas categorias. Chamamos a atenção para o fato de que o total de estudos dispostos na referida

tabela excede em um em relação à quantidade total desta categoria. Isso se justifica devido à existência de um trabalho que se desdobra nas duas últimas subcategorias.

**Tabela 2** – Distribuições de trabalhos nas subcategorias de propostas de formação de professores

| <b>SUBCATEGORIAS DE PROPOSTAS DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES</b> | <b>Formação inicial considerando os saberes matemáticos e/ou didáticos que integram o currículo dos cursos de licenciatura</b> | <b>Formação inicial considerando as praxeologias matemáticas a serem ensinadas e/ou necessárias para o ensino</b> | <b>Formação continuada de professores levando em conta as praxeologias matemáticas a serem ensinadas e/ou necessárias para o ensino</b> |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>TOTAL DE TRABALHOS</b>                                    | 7                                                                                                                              | 5                                                                                                                 | 6                                                                                                                                       |

Fonte: Elaboração própria (2024)

Na subcategoria que explora propostas de formação de professores no contexto da formação inicial, com foco nos saberes matemáticos e/ou didáticos que compõem o currículo dos cursos de licenciatura, Llanos *et al.* (2015) apresentaram resultados de uma pesquisa fundamentada no Paradigma de Questionamento do Mundo. Esse estudo implementou um Percurso de Estudo e Pesquisa baseado em uma questão interdisciplinar que conecta Física e Matemática. A intenção era causar uma modificação substancial do ensino a partir da implementação do PEP em substituição ao ensino tradicional. A investigação foi realizada durante dois anos com estudantes de um curso de licenciatura em Matemática e desenvolvida por quatro pesquisadores com formação em Física e Matemática no contexto argentino. A equipe de pesquisa “vivenciou” o PEP na posição de estudantes, analisando as respostas disponíveis para que, a partir disso, pudesse implementar o dispositivo didático.

Corica e Otero (2016) desenharam e implementaram, em uma universidade argentina, um curso para formação de futuros professores de matemática em Didática da Matemática. O objetivo era fazer com que os docentes em formação adotassem gestos de um modelo pedagógico não tradicional, baseado na pesquisa e na conexão com outras disciplinas. Foi proposto um PEP no qual os licenciandos estudaram uma questão essencial da profissão de professor de Matemática que é “Como planejar e implementar dispositivos didáticos para o estudo da Matemática?”. O curso teve duração de 4 meses com dois encontros semanais, de 3 a 4 horas cada. Foram formados grupos compostos por 2 ou 3 membros que tinham a incumbência de contribuir com pares de perguntas e respostas de acordo com seus interesses e necessidades.

Os principais resultados da investigação em tela indicaram que, embora toda a formação dos futuros professores tenha sido regida pelo fenômeno da monumentalização do

conhecimento, os investigadores conseguiram incorporar alguns germes do paradigma de questionamento do mundo. A comunidade de futuros professores conseguiu, ao se deparar com uma questão sobre a profissão de professor de matemática, formular e estudar outras, e que o produto do estudo fosse compartilhado e defendido por todo o grupo. No entanto, as autoras consideraram que a dialética do estudo e da pergunta foi vivenciada de forma enfraquecida, uma vez que os futuros professores elaboravam perguntas, mas antes da primeira resposta encerrava-se a busca. Essa fragilidade se estendeu para a gestão de outras dialéticas, como a de mídia e meio, uma vez que os licenciandos frequentemente se limitavam aos materiais fornecidos pelos pesquisadores. Diante disso, as autoras concluíram que, embora o PEP tenha sido idealizado de uma forma, ele não foi vivenciado dessa maneira.

Rodrigues, Menezes e Santos (2017) apresentaram o PEP como um dispositivo didático que pode ser utilizado como metodologia para o ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos nas licenciaturas em Matemática, no contexto brasileiro. A proposta de aplicação do PEP se daria por meio do conteúdo de Função, presente tanto nos currículos da educação básica como da educação superior. Os autores consideraram que seria necessária a construção de um MER, utilizando os quatro estágios da modelização matemática: delimitação ou construção do sistema a modelizar que formula questões problemáticas; construção dos modelos e formulação das questões iniciais; utilização do modelo e sua interpretação e novo processo de modelização. Além disso, os níveis de modelização algébrico-funcional também auxiliariam nessa construção. No entanto, a fase exploratória do estudo não havia acontecido à época da publicação desse artigo.

Matos *et al.* (2018) explicitaram alguns aspectos metodológicos das noções originais do PEP que foram adaptados para dois processos de formação de professores de Matemática em instituições de ensino superior brasileiras: um processo de formação inicial cujo objetivo é o ensino da Álgebra Linear, num curso de licenciatura em matemática, e um processo de formação continuada que tinha como finalidade o ensino da Álgebra Escolar no ensino básico. A formação inicial desdobrou-se em três principais sistemas didáticos auxiliares, dos quais o primeiro orientou os estudos do pesquisador na elaboração do MER, o segundo constituiu-se nas etapas de sala de aula nas quais a comunidade de estudo se mobilizou para responder a pergunta geratriz a respeito dos objetivos matemáticos que poderiam ser mobilizados para se estudar Álgebra Linear, concernente ao estudo dos espaços vetoriais, e o terceiro possibilitou ao diretor de estudo dialogar sobre o bloco do saber-fazer.

Otero e Llanos (2019) apresentaram um estudo realizado em um curso on-line de Didática da Matemática, com 31 professores em formação de uma universidade argentina, que

analisou como eles estudam uma pergunta que poderia engendrar um PEP. Os professores investigaram a pergunta de maneira individual e grupal e, em seguida, foi lhes solicitado que organizassem um possível ensino adaptado a uma instituição conhecida com base na pergunta. Os resultados apresentados descreveram as dificuldades dos professores em organizar um ensino de acordo com o paradigma da pesquisa e do questionamento do mundo, pois os professores evitam perder o controle do ambiente de ensino.

Olivero, Martínez e Santori (2020) implementaram processos de estudos baseados em PEPs multidisciplinares como parte constituinte na formação de professores de Matemática em uma universidade argentina. Como, nessa universidade, realizar roteiros matemáticos que integrem a modelagem matemática no trabalho dos estudantes de graduação é parte integrante da formação matemática dos professores, criou-se uma oficina denominada Atividade Matemática e Resolução de Problemas como um espaço curricular para este fim. O trabalho foi realizado em grupos de dois ou três membros e, em cada sessão, cada grupo deveria entregar um relatório escrito contendo as questões a serem abordadas, possíveis formas de resolução e conclusões finais. No entanto, muito do que foi realizado nas sessões de trabalho não foi refletido nos relatórios que os estudantes entregaram.

Otero, Llanos e Arlego (2020) descreveram os resultados obtidos em dois cursos de formação de professores de Matemática, no âmbito universitário argentino, ao abordar uma questão que coloca os futuros professores em uma situação de investigação e questionamento. Para tanto, foi experimentado um PEP codisciplinar, envolvendo Física e Matemática, adaptado à instituição em que é desenvolvido. Divididos em grupos, os alunos iniciaram suas pesquisas na biblioteca selecionando alguns textos, documentos etc., e apresentaram suas descobertas e possíveis formas de enfrentar a questão geratriz. Na segunda aula, muitas perguntas derivadas foram explicitadas e a comunidade de estudo selecionou as perguntas a serem estudadas e, então, os estudantes se debruçaram sobre seu estudo.

No contexto da formação inicial de professores, considerando as praxeologias matemáticas a serem ensinadas e/ou necessárias para o ensino, Olarría *et al.* (2014) apresentaram uma proposta de formação de professores do Ensino Médio a respeito do conhecimento matemático necessário para o ensino. Basearam a formação no estudo de um conjunto de questões que podem ser consideradas cruciais e que destacam a natureza problemática (matemático-didático) da matemática escolar e, por conseguinte, na construção, como respostas provisórias, de certas praxeologias matemáticas para o ensino. Postula-se, então que a dialética entre a elaboração de questões problemáticas e a construção de respostas constitui a base de qualquer processo de formação.

O método de formação sustentado pelos autores do estudo em apreciação baseou-se na estruturação das seguintes etapas: formular por escrito as perguntas da semana; propor elementos de resposta a essas perguntas; levantar questões umbilicais da profissão e entregar materiais associados; buscar respostas disponíveis na cultura para as perguntas feitas; realizar uma atividade matemática relacionada com as questões estudadas e propor elementos de resposta da comunidade de estudo.

Delgado e García (2015) formularam o problema da formação matemático-didática dos futuros professores da Educação Infantil em uma universidade espanhola e propuseram uma possível resposta em termos do que chamaram de Percurso de Formação a partir da dialética entre a formulação de questões profissionais que surgem da própria formação e a construção de possíveis elementos de respostas. Os alunos do curso foram organizados em grupos de 4 a 6 componentes cada e esses grupos deveriam fazer uma pergunta quinzenalmente relacionada com o estudo da Matemática na referida etapa de ensino. O processo de estudo em torno do tema (no caso em tela, Número) iniciou-se pelo levantamento e construção de respostas provisórias a respeito de uma questão profissional mais global, sucedendo-se por questões voltadas para a razão de ser da Matemática a se estudar, das técnicas matemáticas e análise de situações didáticas de iniciação aos números naturais na Educação Infantil.

Ferreira, Viana e Guerra (2019) expuseram uma pesquisa que estava sendo realizada, no momento da publicação do estudo, no âmbito da formação inicial de professores, no Brasil, com o objetivo de questionar o papel e a funcionalidade do Sistema de Numeração Posicional na formação didática de professores, permitindo o diálogo entre a teoria e a prática em torno dos saberes envolvidos. Recorreu-se a uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP)<sup>15</sup> como dispositivo didático com uma comunidade de estudos formada por 3 diretores de estudo e 16 estudantes de um curso de licenciatura integrada em Ciências e Matemática. A AEP se desenvolveu em 9 encontros com 1h40min cada, sendo a classe dividida em 4 grupos. A respeito dos resultados, a estratégia metodológica da AEP permitiu desconstruir e reconstruir as praxeologias dos futuros professores.

Cid, Muñoz-Escolano e Ruiz-Munzón (2020) desenvolveram um PEP-FP para apresentar um processo de estudo no âmbito da formação didática inicial de futuros professores

---

<sup>15</sup> Segundo Chevallard (2009b), as AEP têm sua gênese na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, apoiada na ideia de situação fundamental, mas com condições menos radicais. As AEP têm o intuito de motivar o estudo de um determinado tipo de tarefas  $T$ , apresentando ao menos uma de suas razões de ser. Esse tipo de atividade coloca uma pessoa (ou um grupo de pessoas) a se deparar com uma questão  $Q$  a fim de que se possa realizar (de forma inteligível e justificada) tarefas  $t$  de um certo tipo  $T$ , ou seja, propõe um problema cuja tentativa de resolução será o resultado de uma análise matemática.

do Ensino Médio, em uma universidade espanhola, para a introdução de números negativos em ambiente algébrico. O estudo realizado levou em consideração as cinco etapas propostas por Ruiz-Olarría, Bosch e Gáscon (2019), com algumas modificações que afetaram principalmente os módulos  $M_0$  e  $M_2$ . O módulo  $M_4$  não pode ser desenvolvido porque os estágios dos estudantes não coincidiram com o momento em que os números negativos são inseridos nas escolas. A comunidade de estudos foi composta por dois diretores de estudo e 18 estudantes que formaram 6 grupos. Cada grupo teve que comunicar seus resultados por escrito. No módulo  $M_0$ , os futuros professores além de ter que lidar com um problema didático relacionado a  $Q_0$ , tiveram que analisar as respostas de um questionário proposto a estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Na fase  $M_1$ , vivenciaram um PEP na posição de estudantes típicos dos 1º e 2º anos do Ensino Médio. Em  $M_2$  foi realizada uma análise epistemológica, econômica e ecológica do PEP vivido utilizando as ferramentas didáticas desenvolvidas na TAD ou na TSD e utilizando um roteiro recebido a fim de facilitar a análise. Já no  $M_3$ , os estudantes deveriam conceber por si próprios um PEP, mas ou reproduziram com mais ou menos detalhes o PEP que haviam estudado ou propuseram um ensino baseado no modelo tradicional.

Muñoz, García e Fernández (2020) apresentaram uma proposta de formação inicial de futuros professores da Educação Infantil na Espanha explorando o potencial do dispositivo metodológico da *Lesson Study* a partir da TAD como ferramenta para desenvolver o equipamento praxeológico dos professores em resposta a questões profissionais vivas e autênticas. 8 grupos de estudo, com o auxílio de vários formadores, trabalharam na identificação de uma questão de pesquisa sobre a aprendizagem numérica na creche e na concepção de um plano de aula. Cada grupo teve a oportunidade de implementar seu plano de aula em uma sala de aula real da Educação Infantil de uma escola pública, tendo recebido previamente informações sobre as habilidades matemáticas dos alunos. Após análise e discussão dos dados coletados, os grupos puderam fazer modificações em seus planos de aula. A experiência revelou o papel crucial desempenhado pela infraestrutura matemático-didática disponível nas etapas da *Lesson Study* e permitiu emergir e verificar a complexidade das tarefas profissionais que os futuros professores devem enfrentar.

Já no âmbito da formação continuada de professores a respeito das praxeologias matemáticas a serem ensinadas e/ou necessárias para o ensino, Santos e Freitas (2017) realizaram uma discussão em torno do PEP como proposta metodológica para a formação continuada de professores de Matemática, discussão constituída de esboços iniciais, já que a pesquisa estava em andamento no momento da divulgação deste estudo. Através de um projeto de extensão desenvolvido no âmbito de uma universidade brasileira, o PEP foi desenvolvido

com professores dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio com objetivo de realizar estudos referentes aos conteúdos geométricos. A questão geratriz visava identificar a existência ou não de divergências entre os conceitos de polígono dos participantes e o modo como estes desenvolviam esses conteúdos em sala de aula. Essa pergunta deu origem a uma família de questões derivadas que guiaram o processo de estudo. A conclusão provisória fornecida pelos autores é de que os procedimentos metodológicos do PEP pareciam viáveis ao trabalho com a formação continuada.

Mesquita e Guerra (2017) trataram do problema da formação pessoal do professor a partir da noção de relação com o saber sob a compreensão da TAD. A partir da análise da construção de compreensões, utilizando como objeto de estudo o ensino da resolução da equação do segundo grau, mostram a potencialidade do PEP como dispositivo de formação pessoal por revelar aquisições de novos saberes e procedimentos úteis, bem como novos problemas relacionados, para as práticas de ensino do professor.

Matos *et al.* (2018) desenvolveram, também, um projeto de formação continuada de professores de Matemática do ensino básico brasileiro, especialmente os das escolas públicas. Utilizando adaptações do PEP, a formação foi dividida em 11 seções com duração média de 1h40min cada e foi dividida em quatro sistemas didáticos auxiliares: o primeiro buscou identificar o modelo epistemológico da Álgebra Escolar predominante no equipamento praxeológico do professor de Matemática quando este se torna professor da Escola Elementar; o segundo mobilizou o equipamento praxeológico, dos professores de matemática, nas sessões do PEP, no primeiro módulo da formação continuada; o terceiro possibilitou aos diretores de estudo dialogar sobre o bloco do saber-fazer e o quarto, que engloba os anteriores, intentou analisar que alterações e recombinações praxeológicas ocorreram no equipamento praxeológico do professor de Matemática durante o decurso de um PEP por meio de um Modelo Epistemológico Alternativo para a Álgebra Escolar.

Vázquez e Chávez (2018) apresentaram uma proposta de formação para professores de Matemática através de um curso de mestrado em Educação Matemática à distância, oferecido por uma universidade mexicana, que tinha por objetivo fornecer ferramentas teóricas e metodológicas para que os professores pudessem elaborar atividades de aprendizagem que envolvessem contextos de vida e contextos escolares. Alguns aportes teóricos e metodológicos foram utilizados, entre estes a TAD. Utilizando uma adaptação da metodologia do PEP-FP proposta por Ruiz-Olarría (2015), os professores em formação, na posição de estudantes, tiveram que resolver diferentes tarefas que solicitavam o cálculo de área, algumas matemáticas e outras topográficas, e, a partir disso, deveriam propor questões que lhes permitissem gerar

uma análise da atividade que realizaram, das técnicas postas em prática e das validações associadas. As fases que se desenvolveram na sequência do estudo concentravam-se nos desdobramentos e análise dessa atividade inicial.

Costa *et al.* (2019) discutiram os primeiros resultados de uma pesquisa empreendida em uma formação continuada para professores mediadores de cursos de Ensino Superior na modalidade EAD, no Brasil. O objetivo foi analisar as declarações, justificativas e argumentos dados pelos professores ao conduzirem seus alunos numa possível realização de atividade relacionada à análise de uma “conta d’água” no intuito de abordar o pensamento algébrico. Para isso, foi analisado o emprego de uma “conta d’água” por meio de uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), proposta aos professores/tutores participantes que responderam à questão de como conduziriam seus estudantes na análise dessa conta d’água para abordar noções ligadas ao pensamento algébrico. Os resultados parciais apresentados revelaram o poder gerador da questão e a importância das reflexões compartilhadas para apresentar as relações investigadas. O caráter gerador da questão  $Q_0$  conduziu a um PEP, pois apareceram questões diretamente associadas às representações matemáticas indicadas na conta como questões associadas a outras ciências, como por exemplo, a sustentabilidade.

Florensa, Bosch e Gáscon (2019) apresentaram o desenvolvimento de um curso on-line de formação de professores, no âmbito de um Mestrado em Educação Matemática no México, a respeito da natureza do pensamento matemático. A fim de fornecer aos professores elementos que permitissem realizar um questionamento epistemológico e didático utilizando como ferramenta principal o modelo epistemológico de referência associado a um PEP, o curso teve duração de 4 semanas e em cada uma delas uma atividade diferente era proposta. Os estudantes, divididos em grupos, tinham que trabalhar na construção de um mapa de perguntas e respostas que surgiram quando eles vivenciaram um PEP na posição de estudantes. As fases seguintes destinaram-se à utilização desse mapa para análise de documentos oficiais, à ampliação desse mapa e na apresentação da importância de se ter uma noção explícita da concepção da natureza do pensamento matemático e, mais especificamente, da própria atividade matemática ao abordar questão de pesquisa didática. Os autores consideraram que o uso de mapas de perguntas e respostas parece ser uma ferramenta poderosa para os professores analisarem o conhecimento mobilizado durante um processo de estudo além de serem capazes de descrever aspectos matemáticos que normalmente passam despercebidos na matemática escolar e de poder facilitar a implementação do PEP em diferentes instituições.

Analisando as pesquisas apresentadas nesta subseção, percebe-se que, em todas as subcategorias das propostas de formação de professores, há vestígios de uma mudança do

paradigma didático tradicional de "visita às obras" para um paradigma centrado na pesquisa e no questionamento do mundo. Assim sendo, destacam a necessidade de uma formação que desenvolva o equipamento praxeológico dos professores a partir de questões umbilicais da profissão docente, considerando não apenas os aspectos da atividade matemática, mas também questões relacionadas à pesquisa didática. Outra característica preponderante observada nesses estudos é a forte presença da dialética das perguntas e das respostas como gesto imprescindível do processo formativo e um instrumento de análise para verificação dos conhecimentos mobilizados nos momentos de estudo.

No que diz respeito, de forma mais contundente, aos aspectos metodológicos empregados nos processos formativos, é notória a predileção pelo dispositivo do PEP enquanto caminhar metodológico. Isso reforça não apenas as tentativas dos diretores de estudos em formar professores sob a égide do paradigma de questionamento do mundo, mas, sobretudo, a viabilidade do PEP em relação ao trabalho com a formação de professores. No entanto, algumas pesquisas não forneceram elementos suficientemente esclarecedores que pudessem dar uma visão mais ampla ao leitor sobre o itinerário metodológico dos processos formativos.

### 2.3.4 Trabalhos de natureza bibliográfica

No que tange à subcategoria que aborda os trabalhos de cunho bibliográfico, foi possível encontrar apenas o estudo de Santos e Cruz (2019) que realizaram um levantamento de dissertações e teses em Educação Matemática e Ensino de Matemática a partir de 13 universidades que possuem em seus quadros docentes membros do Grupo de Trabalho 14 (GT 14), de Didática da Matemática, da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). O foco eram as produções científicas que discutem a formação de professores sob a ótica da referida teoria.

Dos 87 trabalhos selecionados que se fundamentam na TAD, 24 versam sobre a formação de professores, sendo que a parte prevalecente se refere à formação continuada (87,5%) e, em menor porção, à formação inicial (12,5%). Foi possível verificar que a maioria das pesquisas busca compreender as praxeologias de professores de Matemática, mais precisamente, as discussões analisam as relações do professor com o saber matemático por meio das organizações praxeológicas, bem como as organizações matemáticas em livros didáticos.

As autoras consideram que a TAD ainda não tem sido muito empregada no campo da formação de professores, no Brasil, especialmente nas instituições de formação inicial. Isso contrasta com os achados da nossa investigação, pois os trabalhos que discorrem sobre

formação inicial de professores superam numericamente os que abordam a formação continuada. No entanto, é preciso destacar que o estudo realizado por Santos e Cruz (2019) é de impacto nacional, enquanto o nosso é de abrangência internacional. Corroborando com a conclusão apontada pelas autoras, dos 12 trabalhos que aludem sobre formação inicial, apenas 3 foram desenvolvidos no âmbito nacional, o que reafirma a carência de desenvolvimento de estudos nessa área.

Na continuidade, concentraremos esforços em elencar as condições e restrições, extraídas dos estudos, que podem influenciar a viabilidade de processos formativos de professores e futuros professores sob circunscrição da TAD.

### 2.3.5 Condições e restrições para realização da formação de professores no contexto do paradigma de investigação e questionamento de mundo

Antes de especificarmos as condições e restrições que permearam as propostas de formação de professores que estão sob o arbítrio do paradigma didático de investigação e questionamento de mundo, precisamos clarificar o que são, segundo a TAD, condição e restrição. Segundo Chevallard e Cirade (2010), existe uma distinção, segundo o viés da referida teoria, entre condição e restrição que considera que “[...] restrição é uma condição considerada, a partir de uma determinada posição institucional, num determinado momento, como não modificável; da mesma forma, uma condição é uma restrição considerada modificável, no mesmo sentido.” (p. 2, tradução nossa<sup>16</sup>).

Queremos sublinhar que não é intenção deste estudo apontar em que níveis da escala de níveis de codeterminação didática essas condições e restrições foram criadas, mas elencá-las, baseados nos achados das pesquisas anteriormente analisadas. Enfatizamos, também, que em algumas investigações, os autores expressamente se eximiram de enunciar as restrições. Em outras, os pesquisadores se desobrigaram em relatá-las. O que trataremos de expor, a partir de agora, foi obtido a partir das constatações exteriorizadas nos estudos ou a partir de nossas inferências.

No tocante às condições para a realização dos processos de formação de professores segundo os aspectos metodológicos da TAD, as pesquisas apontam, em primeira instância, para a possibilidade de vivenciar uma formação por investigação. Isso foi possível graças a gestos

---

<sup>16</sup> “[...] une contrainte est une condition regardée, depuis une certaine position institutionnelle, à un certain instant, comme non modifiable; de même, une condition est une contrainte jugée modifiable, en ce même sens.” (Chevallard; Cirade, 2010, p. 2)

como o da dialética da pergunta e da resposta que permearam os estudos formativos. Embora os formadores fossem responsáveis por colocar as perguntas iniciais, os professores e futuros professores em formação eram instigados a, progressivamente, assumir a responsabilidade sobre seu processo de estudo e irem enveredando, cada vez mais, nesse movimento de responder questões levantadas e a partir dessas respostas levantar novas questões. Isso, por outro lado, reafirma o grau de autonomia que os sujeitos participantes das formações experimentam, deixando de lado a responsabilidade exclusiva dos diretores de estudo (nesse caso, a/s figura/s do/s formador/es).

As práticas formativas, sob o crivo da TAD, também são um terreno fértil para o desenvolvimento tanto do trabalho em equipe como do dispositivo de formação pessoal, como explicitado no trabalho de Mesquita e Guerra (2017). Elas podem ser desenvolvidas na modalidade EAD, utilizando ambientes virtuais de aprendizagem que, a partir da questão geradora, pode alimentar fóruns e chats.

A formação de professores, no contexto ora analisado, permite que seus participantes entrem em contato com o paradigma de questionar o mundo não apenas por apresentar propostas metodológicas diferentes da vigente nos cursos de formação, mas, também, em apresentar novas possibilidades para o professor em formação de buscar o ensino dos conteúdos matemáticos, promovendo uma prática bastante significativa, já que também abre possibilidades de aplicação para resolver problemas que permeiam a realidade dos estudantes.

Quanto às restrições, as investigações, em grande parte, apresentam deficiências relacionadas à gestão do tempo, pois os processos formativos, especialmente vivenciados na forma de PEP, sofrem uma dilatação do tempo. Dessa forma, é necessário buscar um equilíbrio, pois se o processo se tornar muito longo, pode comprometer o gerenciamento das etapas. Arelado a isso, algumas investigações indicam a dificuldade que os participantes têm em manter o mesmo problema vivo por meses.

Uma restrição objetiva da qual deriva uma dificuldade na implementação de novos dispositivos didáticos, segundo Olarría *et al.* (2014) é a falta de disponibilidade, dentro da comunidade matemática atual, de praxeologias matemáticas para o ensino e da infraestrutura necessária para a sua elaboração. Isso se ratifica em muitos dos estudos em situações em que, por exemplo, os participantes consideram deficiências pessoais em sua formação ou dificuldades pessoais, especialmente se forem de natureza matemática.

A mudança de contrato didático tem despontado em muitos estudos, a exemplo de Cid, Muñoz-Escolano e Ruiz-Munzón (2020), como uma restrição. Isso deve-se em grande parte à pedagogia monumentalista dominante nas instituições escolares e também nas instituições de

formação de professores. Esse redirecionamento de perspectiva causa maior dificuldade em abordar os temas que estão no currículo, pois as respostas possíveis às questões colocadas não são pré-determinadas e, na maioria dos casos, não existem respostas completas e definitivas para essas questões. Enfrentar essas questões implica, em muitas vezes, a existência da dialética de entrar e sair do tema.

Ligada à ideia de contrato didático, outra restrição que precisa ser igualmente considerada é em relação à abordagem dos temas do currículo. As questões levantadas nos processos formativos quase sempre não estão imediatamente disponíveis na cultura. Outras vezes, há forte presença da dialética de entrar e sair do tema devido às demandas das questões elaboradas, o que pode inviabilizar o estudo dos temas do currículo da maneira linear como este se apresenta.

### 3 COMBINATÓRIA

Neste capítulo, o nosso interesse estará voltado às discussões desse importante campo matemático que é a Combinatória que tem propiciado profícuas reflexões, no âmbito das produções acadêmicas em Educação Matemática.

#### 3.1 O que é a Combinatória? Um ponto de vista histórico-epistemológico

Antes de assentarmos uma definição do que é a Combinatória, seu objeto de estudo e as principais ideias (ou ao menos aquelas que subsidiam as reflexões deste estudo) que constituem o seu corpus enquanto ramo da Matemática, vale retroagirmos à história do processo evolutivo desse campo, buscando relacionar sua origem e desenvolvimento com a forma com que esta área está estruturada.

A primeira consideração a ser feita é que, segundo Biggs (1979), a Combinatória tem sido negligenciada pelos historiadores da Matemática. Este fato pode ser notado quando consultamos obras consideradas importantes e que servem de fonte histórica tanto para matemáticos quanto para educadores matemáticos como, por exemplo, os trabalhos de Boyer (1974), Eves (2011) e Mol (2013). Neles, ou não há qualquer menção à Combinatória ou, quando há, diz respeito apenas a alguma contribuição desta para outro ramo, especialmente à Probabilidade, desconsiderando aspectos históricos inerentes à sua constituição. Ainda que essas obras nutram certo interesse na biografia e produção científica de importantes matemáticos, quando se mencionam os principais precursores da sistematização dos conhecimentos combinatórios, como Blaise Pascal e Gottfried Wilhelm Leibniz, não há referência das suas produções a esse campo.

No entanto, o trabalho de Biggs (1979), que buscou, nas palavras do autor, “a fonte” do surgimento dos saberes combinatórios, possibilita a identificação de importantes contribuições, ao longo da história em diferentes culturas, da utilização desses saberes antes de tornar-se um ramo sistematizado da Matemática, o que apresentamos na sequência.

O primeiro registro histórico de que se tem conhecimento que trata de algum problema típico do campo da Combinatória é o papiro de Rhind, de origem egípcia. Esse, que é um dos manuscritos matemáticos mais antigos, datado de cerca de 1650 a.C., detalha a resolução de 85 problemas matemáticos de diversas áreas. Nele, pode ser encontrado um problema que ganhou diferentes versões ao longo do tempo e que é conhecido, na história mais recente, como problema de Fibonacci. A versão de Fibonacci, de 1202, pode ser traduzida da seguinte

maneira: “Sete mulheres idosas estão indo para Roma; cada uma delas tem sete mulas; cada mula carrega sete sacos; cada saco contém sete pães; cada pão tem sete facas; cada faca tem sete bainhas. Qual é o número total de coisas?” (Biggs, 1979, p. 110).

Não há como afirmar, ao certo, a que propósito mais sério esse tipo de problema pode ter servido originalmente. Talvez, conforme assinala Biggs (1979), possa se tratar de um tipo de exercício aritmético padrão sem sentido. No entanto, é possível notar que as regras básicas de contagem têm sido utilizadas desde as primeiras civilizações.

A China também trouxe importantes contribuições para o campo da Combinatória. O *I Ching*, tradicional livro chinês que comumente é conhecido como *Livro das Mutações*, escrito por volta de 1000 a 750 a.C. já trazia registros históricos das combinações com repetição. No entanto, o quadrado mágico, ao que parece, destaca-se entre as contribuições chinesas. O primeiro registro é o diagrama de Lo Shu que, apesar de haver alegações de seu surgimento por volta de 2000 a.C, a primeira referência ocorre no século I ou alguns séculos antes.

Tratando-se das contribuições dos gregos, a quase total ausência de material relevante na literatura clássica grega e latina nos conduz à conclusão de que os gregos não se interessavam por tal assunto. Todavia, nos escritos de Boécio, por volta do século VI a.C., há uma passagem que indica a regra para encontrar o número de combinações sem repetição de  $n$  coisas tomadas duas de cada vez, ainda que essa regra não apareça nos seus escritos.

Apesar das alegações dos chineses em creditarem a si mesmos como os grandes impulsionadores para a constituição do campo combinatório, Biggs (1979) não hesita em afirmar que o principal estímulo veio de outro povo oriental, os hindus. Esse povo, pelo que se percebe, acostumou-se a, desde muito cedo, considerar questões envolvendo permutação e combinação. Os exemplos disso são abundantes. No tratado médico de Susruta (Século VI a.C.), por exemplo, encontramos uma discussão sobre os vários tipos de sabor que podem ser feitos combinando seis qualidades básicas: doce, ácido, salino, pungente, amargo e adstringente. Já no trabalho de Jainas (século II a.C.) há discussões envolvendo as combinações de categorias filosóficas, de sentidos e de machos, fêmeas e eunucos. Pingala (200 a.C.), a quem também se alega ter conhecimento sobre o triângulo aritmético, discutiu questões sobre ritmos métricos que podem ser construídos a partir de um determinado número de sílabas longas e curtas.

Mesmo que os saberes envolvidos fossem de conhecimento comum entre os hindus, as evidências, segundo Biggs (1979), apontam para o fato de que os resultados para os problemas anteriormente apontados eram obtidos a partir de uma lista direta das possibilidades. A evolução das regras para encontrar respostas numéricas a problemas combinatórios, sem ter que listar todos os casos, parece ter ocorrido gradualmente ao longo de um extenso período.

Entretanto, alguns registros históricos nos conduzem a acreditar que a fórmula para o cálculo do número de combinações já era conhecida pelos hindus no século VI a.C. No *Brhat samhita* de Varahamihira, importante matemático indiano, há um capítulo sobre perfumes e cálculos relativos ao número de perfumes que podem ser feitos tomando quaisquer quatro dos dezesesseis ingredientes dados e misturá-los em várias proporções. Parece improvável que se tenha obtido a resposta listando todos os casos. Isso se infere a partir da inexistência de comentários no referido capítulo, já que uma lista desse tamanho poderia ser pensada para exigir algum comentário. Sendo assim, existe a possibilidade de que a resposta tenha sido obtida pelo uso direto da fórmula.

O matemático indiano Bhaskara, por volta de 1150, escreveu um livro denominado de *Lilavati* que aborda problemas simples de Aritmética, Geometria Plana e Combinatória. Os escritos evidenciam a familiaridade do matemático com a fórmula do número de combinações.

Diante do exposto, não resta dúvidas das contribuições dos povos hindus para a formação do campo matemático da Combinatória. A esse respeito, Biggs (1979, p. 117) afirma que

[...] no campo da combinatória, o equilíbrio das evidências aponta para a conclusão de que os hindus foram a fonte. Os conceitos envolvidos parecem ter sido parte integrante de sua cultura, de modo que o desenvolvimento matemático foi gradual, mas inevitável. Na combinatória, a contribuição oriental foi primordial. (tradução nossa<sup>17</sup>)

Somente a partir do século XII é que os cálculos envolvendo a fórmula para combinações sem repetição começaram a aparecer em uma variedade de idiomas e contextos. No entanto, é a partir da obra de Pascal, no século XVII, que os elementos da Combinatória ganham tratamento reconhecidamente moderno e, com a publicação de “Arte Combinatória”, escrita por Leibniz que se tornou um ramo de conhecimento aceito no âmbito da Matemática.

Embora a sistematização da Combinatória enquanto campo matemático tenha sido um fato mais recente, não há dúvidas da presença de elementos que lhes são inerentes durante toda a história das civilizações. E, dois princípios podem ser considerados, segundo Biggs (1979), a pedra de fundação desse campo: os princípios aditivo e multiplicativo.

O princípio aditivo está associado a situações em que se pode realizar uma decisão de  $m$  maneiras e a outra, de  $n$  e não há como realizar as duas simultaneamente, o total é  $m+n$  (Pinto, 2014; Rifo, 2017). Traduzindo essa ideia para a teoria dos conjuntos, podemos dizer que

---

<sup>17</sup> [...] in the field of combinatorics, the balance of the evidence does point to the conclusion that the Hindus were the source. The concepts involved seem to have been an integral part of their culture, so that the mathematical development was gradual, but inevitable. (Biggs, 1979, p. 117)

se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos disjuntos (ou seja, sua interseção é vazia), com  $m$  e  $n$  elementos, respectivamente, então  $A \cup B$  possui  $m+n$  elementos. Podemos ilustrar o caso mais simples da aplicação deste princípio a partir da seguinte situação:

Ana deseja participar da Semana Universitária. Foram oferecidos 3 palestras e 2 seminários que interessavam a Ana, todos no mesmo horário. De quantas maneiras distintas ela pode participar de uma atividade do seu interesse? (Cabral, 2017, p. 33, adaptado).

É possível perceber que ela tem três maneiras diferentes para a escolha da palestra e duas para a escolha do seminário. Ana não poderá assistir a uma palestra e participar de um seminário, já que os eventos são no mesmo horário. Logo, o número de possibilidades de escolha será de  $3 + 2 = 5$ .

Já o princípio multiplicativo garante que se um evento  $A$  pode ocorrer de  $m$  maneiras diferentes e, se para cada uma dessas  $m$  maneiras possíveis de  $A$  ocorrer, um outro evento  $B$  pode ocorrer de  $n$  maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento  $A$  seguido do evento  $B$  é  $m \cdot n$  (Rifo, 2017). Também é possível expressar tal princípio em termos de conjuntos: se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos respectivamente com  $m$  e  $n$  elementos, então o número de elementos do produto cartesiano de  $A$  por  $B$  ( $A \times B$ ) pode ser dado por  $m \cdot n$ . Podemos retomar a situação do exemplo anterior para entendermos melhor tal princípio:

Os organizadores da Semana Universitária, observando o interesse dos alunos em participar de palestras e seminários resolveram oferecer as palestras em um horário e os seminários em outro. De quantas maneiras, então, Ana poderá participar de uma palestra e de um seminário? (Cabral, 2017, p. 34, adaptado)

A ideia, agora, consiste em escolher uma palestra e, depois da palestra escolhida, escolher um seminário (se a ordem de escolha for a inversa, obtém-se, também, o mesmo resultado final). Os eventos, neste caso, não são mutuamente excludentes, já que as atividades acontecerão em horários distintos. Então, Ana terá três possibilidades de escolha para a palestra e, para o seminário, 2 possibilidades, independentemente da palestra escolhida. Assim, ela poderá escolher as atividades que deseja participar de 6 maneiras diferentes (pois  $3 \cdot 2 = 6$ ).

Entretanto, Benítez e Brañas (2001) chamam a atenção para um fato muito importante: apesar de a Combinatória ter emergido das bases da aritmética, não é qualquer contagem que envolve a enumeração ou mesmo a simples aplicação das regras da soma e do produto que caracteriza um problema desse campo.

Por isso, faz-se necessário uma demarcação acerca do que trata o campo da Combinatória, de forma que se tenha clareza sobre qual é o seu objeto de estudo e quais são as

ideias basilares que estão subjacentes aos saberes combinatórios, especialmente àqueles que são tratados no âmbito da educação básica, objeto de interesse deste estudo.

O matemático Jacob Bernoulli lançou em 1713 um livro, *Ars Conjectandi*, que foi um marco para a história dos campos da Probabilidade e da Combinatória. Nele, o autor definiu a Combinatória como a arte de enumerar todas as formas possíveis em que um determinado número de objetos pode ser misturado e combinado, de modo a não perder nenhum resultado possível. Muito próxima a essa definição, Merayo (2015) e Torres (2004) assinalam que se trata da técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los ou enumerá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

Todavia, essas definições não conseguem dar conta, em sua integralidade, do objeto de estudo desse campo, pois conforme já advertiram Benítez e Brañas (2001), não basta contar ou enumerar para que esse procedimento esteja ancorado em um procedimento combinatório. Silva (2009), Hazzan (2013), e Borba *et al.* (2015), por exemplo, comungam da ideia de que além de saber a quantidade de elementos de um conjunto a partir de métodos que dispensam a enumeração ou contagem um a um, esses elementos são agrupamentos formados sob certas condições.

Sendo assim, a partir das contribuições de Merayo (2015), Benítez e Brañas (2001), Torres (2004), Silva (2009), Hazzan (2013), e Borba *et al.* (2015) definimos a Combinatória como sendo o ramo da Matemática que estuda o desenvolvimento de métodos e técnicas de contagem de agrupamentos de elementos ou subconjuntos formados a partir de um ou mais conjunto(s) finito(s) dado(s), que obedeçam a certas condições para sua formação e que não necessitem listar ou enumerar esses elementos e/ou agrupamentos.

Em relação à classificação dos diferentes tipos de problemas combinatórios, Morgado *et al.* (1991) observam que os cursos de Combinatória tendem a privilegiar o estudo de combinações, arranjos e permutações, o que, de certo modo, gera a percepção de que esse foco resume o escopo do campo. No entanto, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997) alertam que o corpus da Combinatória é muito mais amplo, indo além da mera resolução desses tipos de problemas.

Benítez e Brañas (2001, p. 125, tradução nossa), por exemplo, afirmam que “com a Análise Combinatória ampliam-se as técnicas básicas de contagem, estudando os arranjos, permutações, combinações, partições e distribuições”. As considerações desses autores já nos chamam à atenção para a abrangência dessa área da Matemática para além do estudo dos problemas de combinação, arranjo e permutação. Contudo, é preciso esclarecer que não há um

consenso quanto à classificação dos problemas combinatórios, ao menos no que diz respeito aos critérios utilizados nessa classificação.

Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997), inicialmente, defendem que há três categorias desses problemas: os problemas de existência, que tratam se um determinado problema tem ou não uma solução; os problemas de contagem, aqueles que investigam quantas soluções podem existir para problemas com soluções conhecidas; e os problemas de otimização que, por sua vez, concentram-se em encontrar uma melhor solução para um problema em particular. Inspirados nas contribuições de Bernoulli, os autores ainda acrescentaram os problemas de enumeração, que correspondem à questão de saber se é possível produzir um procedimento para listar todas as soluções para um determinado problema. Todavia, essa classificação adotada por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997), ao que parece, remete muito mais à escolha dos procedimentos resolutivos do que à própria natureza desses problemas combinatórios.

Já Santos *et al.* (2008), no que diz respeito à natureza dos problemas que compõem esse campo matemático, assinalam que são basicamente subdivididas em dois tipos de problemas: os problemas de contagem e os problemas de existência. Todavia, os autores se eximiram em definir esses tipos. No entanto, Morgado *et al.* (1991) advogam que há dois tipos de problemas frequentemente encontrados em Combinatória: uns que contam ou classificam os subconjuntos de um conjunto finito dado e que satisfaçam certas condições dadas; e outros que buscam demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que também satisfaçam a certas condições. Isso nos conduz à conclusão que os dois casos citados por Morgado *et al.* (1991) correspondem, respectivamente, aos problemas que Santos *et al.* (2008) classificam como problemas de contagem e problemas de existência. Nota-se que, as ideias, aqui, de problemas de contagem e de problemas de existência não são as mesmas que aquelas preceituadas por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997).

Partindo da classificação proposta por Santos *et al.* (2008) e Morgado *et al.* (1991), nos centraremos nos problemas de contagem, que são o foco de interesse deste estudo, e que correspondem aos problemas nos quais as soluções são caracterizadas por subconjuntos ou agrupamentos binários, ternários, ..., agrupamentos com  $n$  elementos, a depender do número de elementos que vai ser tomar do conjunto gerador, com  $m$  elementos. Também serão objeto deste estudo os problemas nos quais se intentam contar os agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições. Como já mencionado, o campo da Combinatória não se limita a esses tipos de problemas, mas são os mais tratados no âmbito da educação básica, especialmente no Ensino Médio.

No que se refere aos problemas em que se busca contar os agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições, é comum percebermos, em livros-textos, que os mesmos são tratados sem uma classificação adequada, pois os autores, de forma costumeira, associam uma maneira de se resolver problemas combinatórios, que é o Princípio Multiplicativo (também chamado de Princípio Fundamental da Contagem ou Regra do Produto) como se fosse um tipo específico de problema. No entanto, conforme adverte Rocha (2011), este princípio não se aplica apenas aos problemas com essa estrutura, mas também a outros problemas combinatórios.

A esse tipo de problemas, assumiremos a classificação adotada por Pessoa e Borba (2009) e Rocha e Borba (2021), fruto das discussões realizadas no âmbito do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório e Probabilístico (Geração), da Universidade Federal de Pernambuco, que os designa de problemas de Produto de Medidas (outrora denominados de produto cartesiano). Cabe dizer que foram os estudos do referido grupo que contribuíram no sentido de destacar que problemas do tipo Produto de Medidas constituem um dos problemas básicos da Combinatória e que apresentam uma particularidade que os outros tipos (Arranjo, Permutação e Combinação) não possuem: a escolha dos elementos na formação dos agrupamentos acontece de dois ou mais conjuntos disjuntos.

Anteriormente, apresentamos um exemplo de um problema do tipo produto de medidas do tipo mais simples quando exemplificamos a aplicação do princípio multiplicativo no contexto da Combinatória.

Já para classificar os problemas de contagem nos quais os subconjuntos ou agrupamentos são formados a partir de um conjunto gerador é preciso analisar as diferentes disposições que se podem adotar os elementos desses subconjuntos ou agrupamentos. Essas diferentes disposições constituem-se basicamente em duas formas distintas a serem consideradas: a natureza e a ordem dos elementos na formação dos subconjuntos ou agrupamentos. Dessa forma, chega-se, então, aos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação. Rufino (2015) ressalta que os livros texto ora fazem referência a esses objetos matemáticos como conceitos ora como técnicas. A esse aspecto, a autora considera que isso está relacionado com a ideia de que a identificação do que está sendo contado, ou seja, das propriedades que demarcam o objeto da contagem, interfere na forma de contar, ou melhor, na técnica que vai ser utilizada para contar.

Assim, partindo da intenção de se classificar esses problemas de contagem a partir das distintas disposições com que se abordam os elementos, ou seja, estabelecendo a distinção desses agrupamentos a partir das ideias de ordem e natureza de seus elementos, consideramos

que as contribuições de Merayo (2015) trazem uma compreensão mais esclarecedora das definições desses problemas. Passaremos, na sequência, a fazer uma apresentação que consiga melhor demarcar os problemas de contagem do tipo Arranjo, Permutação e Combinação. Todavia, salientamos que tais conceitos serão definidos para os agrupamentos em que não se admite a repetição de elementos no mesmo subconjunto, caracterizando assim os agrupamentos do tipo simples

Merayo (2015, p. 236, tradução nossa<sup>18</sup>) define Arranjos Simples da seguinte maneira:

Seja um conjunto de  $m$  elementos distintos. Recebem o nome de arranjo de ordem  $n$  desses  $m$  elementos, a todo grupo ordenado formado por  $n$  elementos tomados dos  $m$ , de tal maneira que dois grupos são considerados distintos se diferem em algum de seus elementos ou bem, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados.

O autor faz notar que os agrupamentos formados por  $n$  elementos gerados a partir dos  $m$  elementos distintos de um conjunto finito dado são chamados de Arranjos Simples quando se distinguem por dois tipos de disposições do elementos desses agrupamentos: os que são distintos por natureza, quando diferem pelo menos por um de seus elementos, e grupos distintos por ordem, já que ainda que possuam os mesmos elementos, ou seja, possuam a mesma natureza, diferem pela ordem em que estão dispostos os elementos. A seguir, apresentamos um exemplo de problema de contagem do tipo Arranjo Simples:

**Exemplo – Arranjo Simples:** Em um grêmio estudantil, três estudantes se candidataram para as vagas de presidente e secretário. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros da direção desse grêmio. De quantas maneiras distintas essa escolha poderá ser feita?

**Solução:** Se considerarmos  $A = \{a, b, c\}$  o conjunto dos dirigentes que se candidataram às vagas e elencarmos algumas das possibilidades de votação, podemos observar que existem dois tipos de agrupamentos: aqueles que se diferenciam por algum dos seus elementos (por exemplo,  $ab$ ,  $ac$  e  $bc$ , são agrupamentos distintos pela natureza dos seus elementos, pois possuem ao menos um elemento distinto); os agrupamentos que possuem os mesmos elementos, diferenciando-se apenas pela ordem em que estão colocados como, por exemplo,  $ab$  e  $ba$ , já que o resultado  $ab$  pode significar que o estudante  $a$  foi escolhido como presidente do grêmio e o estudante  $b$ , como secretário, da mesma forma que no resultado  $ba$  o presidente escolhido

---

<sup>18</sup> “Sea un conjunto formado por  $m$  elementos distintos. Recibe el nombre de **variación de orden  $n$**  o  **$n$ -aria** de esos  $m$  elementos, a todo grupo ordenado formado por  $n$  elementos tomados de los  $m$ , de tal manera que dos variaciones o grupos se considerarán distintos si difieren en alguno de sus elementos o bien, si teniendo los mismos, difieren en el orden en que están colocados.” (Merayo, 2015, p. 280)

foi o estudante  $b$  e, por conseguinte,  $a$  foi escolhido como secretário, concluindo, portanto, que esses agrupamentos são distintos pela ordem dos seus elementos. Assim, para ocupar os dois cargos no grêmio, pode-se escolher dois estudantes diferentes entre os três disponíveis, levando em consideração que a ordem irá interferir na escolha a ser realizada. Para contar os resultados possíveis, duas decisões devem ser tomadas: a primeira, escolher o estudante para ocupar o cargo de presidente e, a segunda, escolher o estudante para o cargo de secretário. Como as decisões são sucessivas e independentes e considerando que um mesmo estudante não pode ocupar o cargo de presidente e secretário ao mesmo tempo, a obtenção do resultado do total de possibilidades dessa votação pode ser realizada aplicando o princípio multiplicativo:

$$\begin{array}{ccc} 3 & \cdot & 2 \\ \text{Pres.} & & \text{Secr.} \end{array} = 6 \text{ possibilidades.}$$

Traduzindo para um procedimento algébrico, podemos generalizar os Arranjos Simples se quisermos contar todos os agrupamentos de  $n$  elementos distintos formados a partir de um conjunto com  $m$  elementos. Assim, para escolher o primeiro dos  $n$  elementos, temos  $m$  opções; uma vez escolhido um dos  $m$  elementos, este não pode ser mais utilizado, restando  $(m - 1)$  opções para escolher o 2º elemento; o raciocínio é o mesmo até a escolha do  $n$ -ésimo elemento, que pode ser feita de  $(m - n + 1)$  maneiras. Então, utilizando o princípio multiplicativo, temos que o total de modos de escolher os  $n$  elementos é dado pelo produto:  $m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1)$ . Multiplicando essa expressão por  $\frac{(m-n)!}{(m-n)!}$ , chega-se à

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1) \cdot \frac{(m - n)!}{(m - n)!} = \\ &= \frac{m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1)(m - n)(m - n - 1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m - n)!} = \\ &= \frac{m!}{(m - n)!} \end{aligned}$$

Temos então,  $A_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$ , a notação para Arranjo Simples juntamente com a fórmula para o cálculo de todos esses arranjos.

Sobre as Permutações Simples, Merayo (2015, p. 241, tradução nossa<sup>19</sup>) propõe a seguinte definição “Recebe o nome de **permutação simples** de  $m$  elementos, cada um dos diferentes grupos que podem ser formados de forma que cada um deles contenha os  $m$  elementos dados, um grupo diferindo do outro apenas na ordem de colocação de seus elementos.” (grifo do autor).

Muitos autores consideram que as permutações simples são um caso particular dos arranjos simples já que, se nestes ocorrer de  $m = n$  na formação dos agrupamentos, se tomará todos os elementos que compõem o conjunto gerador e, neste caso, os agrupamentos serão distintos uns dos outros unicamente pela ordenação dos seus elementos.

Numa formatação algébrica, se um conjunto  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$  com  $m$  elementos, uma permutação simples de  $m$  elementos de  $A$  é uma sequência formada de  $m$  elementos de  $A$  na qual cada permutação é uma ordenação desses  $m$  elementos. Para escolher o primeiro elemento há  $m$  possibilidades,  $m - 1$  opções para o segundo,  $m - 2$  para o terceiro e esse raciocínio prossegue até o  $n$ -ésimo elemento, em que se escolhe o último elemento que corresponde apenas a uma opção, ou seja, o único elemento que ainda não foi escolhido. Abaixo, apresentamos um exemplo de problema de contagem do tipo Permutação Simples:

**Exemplo – Permutação Simples:** De quantas maneiras 5 livros distintos podem ser arrumados em uma prateleira de estante?

**Solução:** A arrumação desses livros corresponde às ordenações ou permutações do conjunto dos 5 livros. Na primeira extração, temos todos os livros disponíveis, ou seja, temos 5 escolhas possíveis; escolhido o primeiro livro, restam 4 para a segunda extração; para escolher o terceiro, teremos 3 escolhidas possíveis; para a quarta posição, teremos 2 livros possíveis, restando apenas um livro para a quinta e última escolha. Aplicando o princípio multiplicativo, teremos

$$\begin{matrix} 5 & \cdot & 4 & \cdot & 3 & \cdot & 2 & \cdot & 1 \\ 1^a & & 2^a & & 3^a & & 4^a & & 5^a \end{matrix} = 120 \text{ possibilidades.}$$

Aplicando a fórmula para o cálculo de permutação simples a esse exemplo, temos  $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$  possibilidades de organizar os 5 livros na prateleira.

---

<sup>19</sup> “Sea un conjunto formado por  $m$  elementos distintos. Recibe el nombre de **permutación simple** de  $m$  elementos, cada uno de los distintos grupos que puede formarse de manera que cada uno de ellos contenga los  $m$  elementos dados, difiriendo un grupo de otro únicamente en el orden de colocación de sus elementos. (Merayo, 2015, p. 285)

Os arranjos e as permutações são tipos de problemas nos quais a ordem dos elementos nos agrupamentos formados é essencial. No entanto, há outros problemas para os quais a ordem não é relevante. É o caso das Combinações. Nelas, o que é relevante na contagem é que os agrupamentos formados sejam diferentes uns dos outros por ao menos um de seus elementos, ou seja, a distinção é por natureza.

Para esse tipo de problema de contagem Merayo (2015, p. 313, tradução nossa<sup>20</sup>) apresenta a seguinte definição:

Seja um conjunto formado por **m** elementos distintos. Recebe o nome de combinação de ordem **n** desses **m** elementos, cada grupo formado por **n** elementos tomados dos **m**, tal que duas combinações serão consideradas distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que, dois agrupamentos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem.

Nessa definição dois aspectos principais são elencados: os agrupamentos formados precisam diferir um dos outros por algum de seus elementos e, se dois agrupamentos contêm os mesmos elementos, mesmo que ordenados de maneiras distintas, trata-se do mesmo agrupamento. O exemplo que segue traduz um problema desse tipo:

**Exemplo – Combinação Simples:** Considere o conjunto dos principais times pernambucanos  $T = \{\text{Sport, Náutico, Santa Cruz, Salgueiro}\}$ . De quantas maneiras diferentes esses times podem disputar um campeonato no qual cada time joga contra os demais uma única vez?

**Solução:** Averiguando se a mudança de ordem dos elementos deve ser considerada, é possível notar que, por exemplo, uma disputa entre Sport x Santa Cruz é idêntica à disputa entre Santa Cruz x Sport. Se considerássemos essas possibilidades como distintas, haveria uma duplicação na contagem, pois todas correspondem ao mesmo jogo. Logo, a ordem, neste caso, é irrelevante. Assim, estamos em busca de elencar os subconjuntos binários, que é o que deve ser considerado na contagem. Logo, temos  $\{\text{Sport, Náutico}\}$ ,  $\{\text{Sport, Santa Cruz}\}$ ,  $\{\text{Sport, Salgueiro}\}$ ,  $\{\text{Náutico, Santa Cruz}\}$ ,  $\{\text{Náutico, Salgueiro}\}$  e  $\{\text{Santa Cruz, Salgueiro}\}$ , num total de 6 subconjuntos e que esses diferem pela natureza de seus elementos.

Se temos um conjunto com poucos elementos, listar as combinações dos elementos pode ser um procedimento fácil e rápido. Mas se a quantidade de elementos do conjunto for grande,

---

<sup>20</sup> “Sea un conjunto formado por  $m$  elementos distintos. Recibe el nombre de **combinación simples de orden  $n$**  o  **$n$ -aria** de esos  $m$  elementos, cada grupo formado por  $n$  elementos tomados de los  $m$ , e tal que dos combinaciones se considerarán distintas se difieren en alguno de sus elementos. En esta ordenación no influye el orden de colocación, es decir, dos agrupaciones son las misma si contienen los mismos elementos colocados em distinto orden.” (Merayo, 2015, p. 313)

se faz necessário generalizar. Então, se considerarmos um conjunto  $A$  com  $m$  elementos tomados  $n$  a  $n$ , (com  $0 \leq n \leq m$ ), as Combinações Simples são os subconjuntos de  $A$  com exatamente  $n$  elementos que podem se formar com  $m$  elementos dados. A quantidade desses subconjuntos ou quantidade de Combinações Simples pode ser denotada por  $C_{m,n}$  ou  $C_m^n$ .

Como a intenção é calcular a quantidade de subconjuntos de  $n$  elementos tomados de um conjunto  $A$  com  $m$  elementos e utilizando o mesmo raciocínio feito para arranjos simples, chega-se a  $\frac{m!}{(m-n)!}$ . No entanto, a ordem entre os  $n$  elementos escolhidos é irrelevante. Por isso, a permutação das ordenações possíveis entre esses  $n$  elementos não deve ser considerada, pois, caso contrário, um mesmo subconjunto será considerado mais de uma vez, conduzindo ao erro o processo de contagem. Para descontarmos essas permutações, basta dividir a expressão  $\frac{m!}{(m-n)!}$  por  $n!$ . Assim, temos:

$$C_{m,n} = \frac{A_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!}$$

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n! (m-n)!}, 0 \leq n \leq m$$

Retomando ao exemplo anterior, temos uma combinação simples de 4 elementos, tomados 2 a 2, ou seja, há 6 possibilidades nas quais os times podem disputar partidas no campeonato, pois  $C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = 6$ .

### 3.2 Por que ensinar Combinatória?

A Combinatória só se estruturou enquanto campo matemático por volta do século XVII. Todavia, conforme apontado anteriormente, é possível percebermos, ao longo da história e de diferentes culturas, a utilização dos saberes constituintes deste campo em diferentes contextos. No entanto, o seu aparecimento nos currículos escolares brasileiros é um fato recente. A partir de um estudo bibliográfico realizado por Ferreira (2019), constatou-se que esse surgimento, de forma incipiente, aconteceu por volta da década de 1940 a partir da inclusão de conteúdos combinatórios à sessão de Aritmética em livros didáticos do Ensino Médio.

Esse movimento recebeu um grande impulsionamento com a publicação dos PCN (Brasil, 1997) que passou a recomendar o ensino de Combinatória não apenas na última etapa da educação básica, mas desde os 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental, o que corresponde na

estruturação atualmente vigente ao período de 1º ano 5º anos do Ensino Fundamental, a fim de atender uma demanda social. Esse documento ainda advoga em favor do ensino de elementos da Combinatória pela necessidade que se tem, na vida contemporânea, de resolver problemas utilizando ideias dessa área. De forma mais específica, suas orientações curriculares objetivam “[...] levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.” (Brasil, 1997, p. 40).

Contudo, fazendo uma breve análise dessas recomendações contidas nos PCN, é razoável constatarmos que se trata de orientações, em *stricto sensu*, voltadas para a delimitação de objetos de saberes a serem ensinados. Quanto aos possíveis usos sociais e exemplos de situações-problema nas quais esses saberes podem ser utilizados como ferramentas nos processos resolutivos, o documento pouco ou nada acrescenta além de afirmações bastante genéricas.

A elaboração e homologação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) ratificou a inclusão de conteúdos da Combinatória no currículo escolar brasileiro. Todavia, restringiu-se ao caráter prescritivo dos objetos de conhecimentos a serem estudados em cada etapa/ano da escola básica, relegando a explanação de sua importância e/ou de suas razões de ser.

Embora a finalidade de documentos orientadores curriculares, a exemplo dos PCN e da BNCC, em última análise, seja a de apresentar um conjunto de objetos de saberes que deva ser ensinado ao longo das etapas e modalidades em qualquer nível de ensino (em específico, na educação básica), não se pode deixar em segundo plano a importância que se tem desses documentos não apenas apontar o que deve ser ensinado, mas também por quê.

Ao que parece, se quisermos fazer emergir, em certa medida, as razões pelas quais um objeto de saber figura entre os saberes a serem ensinados, no contexto das teorizações da transposição didática, não é o bastante a análise do *saber a ensinar*, enquanto instituição, que se encontra materializado nos programas curriculares e de orientações ou, até mesmo, nos livros didáticos. Parece ser razoável o entendimento de que para isso seja necessário analisarmos uma instituição (em sentido abstrato) encarregada de selecionar os saberes dentre aqueles ditos *saber sábio* e transformá-los em *saber a ensinar*. Esta instituição, chamada por Chevallard (1988) de *Noosfera* discute ideias significativas ao ensino, entre as quais podemos destacar os programas oficiais de ensino, ou seja, aquilo que deve ser ensinado e por quê.

Nesse sentido, reconhecendo a insuficiência de elementos presentes nesses documentos que possam justificar ou apontar às razões de ser dos objetos de saberes, ao menos daqueles relacionados à Combinatória, alvos da nossa análise, empreenderemos esforços a fim de, com

o olhar voltado para a Didática e a Psicologia Cognitiva deste campo, fazer emergir elementos que denotem essas razões de ser e consubstanciar a importância que tem o estudo desses saberes. Lançaremos mão de uma revisão narrativa que, segundo Rother (2007), é apropriada para descrever e discutir o desenvolvimento de um determinado assunto, sob o ponto de vista teórico ou contextual. Esse tipo de revisão é constituído, basicamente, de análise da literatura publicada em livros e artigos de revistas, a partir de uma análise crítica pessoal do autor.

Ressalta-se que não temos o intento presunçoso de exaurir as discussões em torno dessa questão, assim como não tivemos quando buscamos assentar aspectos histórico-epistemológicos que empreendessem na apresentação de elementos que figuraram ou figuram como importantes contribuições para o desenvolvimento deste campo matemático e, por conseguinte, que motivem seu ensino. Também não intencionamos ter um olhar panorâmico para todos os atores que compõem a *Noosfera*. Por isso, restringimos nossas discussões estritamente às pesquisas científicas ancoradas nos vieses elencados anteriormente e que podem consubstanciar nosso estudo.

Vale salientar que, embora a discussão se baseie em autores da Didática e da Psicologia Cognitiva do campo da Combinatória, isso não implica que tais autores sejam necessariamente representantes da *Noosfera*. O que se pretende afirmar é que esses estudos, em certa medida, influenciam ou deveriam influenciar as escolhas empreendidas nessa instituição.

No âmbito da Psicologia Cognitiva, podemos destacar os estudos de Piaget e Inhelder (1951) que têm a Combinatória como um componente fundamental do pensamento, podendo-se estabelecer uma comparação de importância aos esquemas de proporcionalidade e correlação. Esses teóricos destacam que, se o sujeito não possui capacidade combinatória, ele não é capaz de usar a ideia de probabilidade, com raras exceções quando se trata de experimentos aleatórios muito elementares. Além disso, estes autores relacionaram o surgimento do conceito de chance à compreensão da ideia de permutação e as estimativas corretas de probabilidades ao desenvolvimento do conceito de combinação.

Todavia, é preciso ponderar que, apesar de Piaget e Inhelder (1951) considerarem a aprendizagem combinatória como condição *sine qua non* para o desenvolvimento e a capacidade de usar a ideia de probabilidade, outros teóricos contrapõem-se a essa alegação. É o caso, por exemplo, de Amorin e Mozer (2020, p. 1) que, mesmo reconhecendo a importância do desenvolvimento do raciocínio combinatório, assim como sua aplicação em problemas de probabilidade, advogam que “o raciocínio probabilístico e o raciocínio combinatório são independentes e devem ser desenvolvidos de diversas formas, relacionando-os, quando adequado, e distinguindo-os, quando necessário.”. Aqui, fica demarcada a independência da

Combinatória em si mesmo enquanto campo, como também a forma como se relaciona estreitamente com a Probabilidade.

Inhelder e Piaget (1955) também destacam que o raciocínio hipotético-dedutivo opera por meio de operações combinatórias que são aplicadas a um conjunto de possibilidades que devem ser examinadas e listadas até chegar a uma conclusão. Uma vez atingido o estágio das operações formais, é possível descobrir espontaneamente os procedimentos sistemáticos de enumeração e contagem combinatória, para que se possa resolver problemas combinatórios simples.

Não obstante, Fischbein (1975) ressalta que a capacidade combinatória de solução de problemas nem sempre é alcançada, nem mesmo no nível das operações formais, como defendiam Piaget e Inhelder (1951), sem um ensino específico. Nota-se que Fischbein (1975) já imprimia em seus estudos uma preocupação com o ensino do campo da Combinatória ainda em tempos remotos se compararmos com o acervo das produções científicas em torno da temática que se desenvolveu a partir da segunda década do século XXI, que é quando essas discussões se intensificam, conforme já assinalado anteriormente.

Reconhecendo a importância que tem o ensino das ideias combinatórias, Heitele (1975) incluiu a Combinatória em sua lista de dez ideias fundamentais estocásticas<sup>21</sup> que deveriam estar presentes, explícita ou implicitamente, em todas as situações de ensino do currículo estocástico.

Todavia, ao que parece, é em 1970 que se percebe pela primeira vez uma defesa contundente em favor de uma maior inclusão da Combinatória no currículo a partir do trabalho de Kapur (1970) que forneceu uma lista de 11 razões pelas quais os conteúdos combinatórios são importantes para a matemática escolar. Essas razões são:

- (a) Como não depende de cálculo, seus problemas podem ser abordados em um estágio inicial do currículo escolar. Na verdade, há problemas adequados para todas as classes.
- (b) Pode ser usada para treinar os alunos nos conceitos de enumeração (contar com contar por contar sem contar), fazer conjecturas, generalizações, otimização, existência, pensamento sistemático etc.
- (c) Podem ser indicadas aplicações à física, química, biologia, análise de rede, projeto de experimentos, teoria da comunicação, simetria, probabilidade, programação dinâmica, teoria dos números, topologia, matemática recreativa etc.
- (d) A necessidade de criação de mais matemática pode ser criada na mente dos alunos. Um grande número de problemas desafiadores pode ser indicado a eles.
- (e) A distinção entre provas plausíveis e rigorosas pode ser apresentada.
- (f) Pode fornecer motivação suficiente para trabalhar com computadores.

---

<sup>21</sup> Estocástica é um termo, segundo Oliveira Júnior e Anjos (2017), que tem sido utilizado por pesquisadores do ensino de Estatística, Probabilidade e Combinatória, referindo-se à interface entre os conceitos combinatório, probabilístico e estatístico, os quais possibilitam o desenvolvimento de formas particulares de pensamento.

- (g) Os alunos podem apreciar os poderes e limitações da matemática, bem como os poderes e limitações dos computadores por meio da matemática combinatória.
- (h) Pode ajudar no desenvolvimento de conceitos de mapeamento, relações, funções, relações de equivalência, classes de equivalência, isomorfismos etc. de forma bastante clara.
- (i) Podem ser indicadas algumas das grandes vitórias da mente humana sobre problemas desafiadores.
- (j) A maioria dos problemas combinatórios e suas aplicações foram desenvolvidas recentemente e, portanto, os alunos podem ter uma ideia do crescimento da matemática.
- (k) Isso pode ajudar a desenvolver a atitude combinatória da mente que examina todas as possibilidades, enumera-as e descobre a melhor possibilidade e, assim, leva a um pensamento lúcido. (Kapur, 1970, p. 114, tradução nossa<sup>22</sup>).

Kapur (1970), no entanto, não ofereceu evidências empíricas que pudessem respaldar essas razões. Pelo contrário, preferiu apontar para a necessidade de explorar e solidificar suas afirmações por meio da pesquisa. Associado a isso, o autor ainda sublinha que para descobrir quais problemas combinatórios podem ser ensinados na escola iria demandar uma grande quantidade de investigação, pesquisa e experimento, dando indícios de que essa tarefa fosse totalmente explorada no futuro (em relação à sua época) e é o que se percebeu ao longo dos anos seguintes até então.

Com efeito muitos estudos que saem em defesa da necessidade de uma maior abordagem da Matemática Discreta (que tem a Combinatória como alicerce) no currículo escolar procuraram, de alguma maneira, ampliar as discussões apresentadas por Kapur (1970) de modo que, muitas dessas afirmações do autor, listadas anteriormente, ganharam protagonismo em pesquisas na área da Educação Matemática, inclusive com evidências empíricas. É o caso, por exemplo, dos estudos realizados por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Sriraman e

---

<sup>22</sup> “(a) Since it does not depend on calculus, its problems can be taken up at an early stage in the school curriculum. In fact it has problems suitable for all grades.

(b) It can be used to train students in the concepts of enumeration (counting with counting through counting without counting), making conjectures, generalizations, optimization, existence, systematic thinking etc.

(c) Applications to physics, chemistry, biology, network analysis, design of experiments, communication theory, symmetry, probability, dynamic programming, number theory, topology, recreational mathematics etc. can be indicated.

(d) The need for creation of more mathematics can be created in the minds of the students. A large number of challenging problems can be indicated to them.

(e) Distinction between plausible and rigorous proofs can be brought out.

(f) Enough motivation for working with computers can be provided.

(g) Students can appreciate the powers and limitations of mathematics as well as the powers and limitations of computers through combinatorial mathematics.

(h) It can help in the development of concepts of mapping, relations, functions, equivalence relations, equivalence classes, isomorphisms etc. rather clearly.

(i) Some of the great victories of the human mind over challenging problems can be indicated.

(j) Most of the combinatorial problems and their applications have been developed recently and so students can get a feeling for the growth of mathematics.

(k) This can help in developing the combinatorial attitude of mind which examines all possibilities, enumerates them and finds out the best possibility and thus leads to clearheaded thinking.” (Kapur, 1970, p. 114)

English (2004) e Lockwood, Wasserman e Tillema (2020). Estes trabalhos reforçam que, embora passados mais de 50 anos desde a sua publicação, as razões pontuadas por Kapur (1970) ainda são válidas e dignas de notoriedade.

Seguindo na mesma direção, que é a defesa do ensino de Combinatória, Sriraman e English (2004, p. 183, tradução nossa<sup>23</sup>), pensando especificamente no contexto educacional, assumem que “[...] os problemas combinatórios podem ajudar os alunos a construir representações significativas, raciocinar matematicamente, abstrair e generalizar conceitos matemáticos”. Para tanto, os autores apresentaram cinco grandes implicações para a sala de aula, que tem o ensino deste campo, que emergiram de uma síntese de pesquisas realizadas ao redor do mundo. Segundo eles,

- O uso de problemas combinatórios pode
- fomentar o pensamento independente,
  - incentivar a flexibilidade,
  - incentivar o foco na estrutura,
  - incentivar o compartilhamento de soluções e
  - apresentar oportunidades de apresentação de problemas. (Sriraman; English, 2004, p. 183, tradução nossa<sup>24</sup>).

A partir de agora, procuraremos descrever de forma sucinta cada um dos temas propostos por Sriraman e English (2004) e anteriormente elencados a fim de ratificar os contributos que há na inserção da temática nos processos educativos, especificamente da Matemática.

A primeira grande implicação (sem estabelecimento de prioridades) apontada pelos teóricos em discussão é que o trabalho com problemas combinatórios pode *fomentar o pensamento independente*. Sobre este aspecto, é preciso que ressaltar que Sriraman e English (2004) preocuparam-se mais em apresentar resultados de diversas pesquisas com dados empíricos de forma que pudessem sustentar sua argumentação do que realizar uma discussão de cunho mais teórico. Todavia, os autores consideram que os professores podem usar problemas combinatórios como, por exemplo, o *problema da Torre*<sup>25</sup>, para ajudar os estudantes

---

<sup>23</sup> “[...] combinatorial problems can help students construct meaningful representations, reason mathematically, and abstract and generalize mathematical concepts.” (Sriraman; English, 2004, p. 183)

<sup>24</sup> “The use of combinatorial problems can:

- foster independent thinking,
- encourage flexibility,
- encourage a focus on structure,
- encourage sharing solutions, and
- present problem-posing opportunities.” (Sriraman; English, 2004, p. 183)

<sup>25</sup> “O problema da torre (Martino e Maher 1999): Dados os cubos de plástico unifix de duas cores, quantas torres diferentes de uma certa altura podem ser construídas? Por exemplo, quantas torres que são três “cubos” de altura podem ser construídos?” (Sriraman; English, 2004, p. 184, tradução nossa).

a sistematizar seu pensamento e pensar de forma independente. Analisando as pesquisas consideradas no estudo, os autores puderam concluir que o trabalho escolar com esses problemas fez com que os estudantes fossem capazes de conceber estratégias complexas, construir representações significativas, abstrair e generalizar sem nenhuma instrução explícita.

Tratando sobre *incentivar a liberdade*, Sriraman e English (2004) consideram que as situações combinatórias podem instigar os estudantes a usarem uma variedade de abordagens de solução, bem como a adotar várias representações na solução dessas situações, entre as quais pode-se incluir o recurso a desenhos, tabelas, listagens sistemáticas e não sistemáticas e modelos concretos. Nesse caso, é importante que os alunos tenham liberdade de fazer esses usos e que sejam encorajados a explicar suas ações. Desse modo, nas palavras dos autores, “Encorajar essa flexibilidade e a análise crítica das escolhas constrói uma base para a flexibilidade em matemáticas mais complexas” (Sriraman; English, 2004, p. 185, tradução nossa<sup>26</sup>).

Partindo do pressuposto de que o ensino da Matemática tem como um dos seus principais objetivos fazer com que o estudante perceba as conexões e relações entre as ideias matemáticas e possam aplicar esse entendimento para resolver novos problemas, é que esses teóricos apresentaram a implicação de que o uso de problemas combinatórios pode *incentivar o foco na estrutura*. Isso implica dizer que é importante, do ponto de vista pedagógico, escolher problemas que variam contextualmente, mas são essencialmente semelhantes na estrutura matemática.

No que diz respeito ao *incentivo ao compartilhamento de soluções*, Sriraman e English (2004) recomendam que os estudantes compartilhem uns com os outros suas soluções a problemas combinatórios, descrevendo e explicando como chegaram às suas soluções e por que consideram as suas soluções eficazes, de tal modo que essas soluções possam resistir ao escrutínio de seus pares.

Trabalhar com problemas combinatórios pode ser um bom caminho também para *apresentar oportunidades de apresentação de problemas*. A capacidade de propor novos problemas, além de resolvê-los, está ganhando cada vez mais espaço na sociedade atual. Isso pode ser percebido, tal como na BNCC (Brasil, 2018) que apresenta uma diversidade de habilidades, na área de Matemática, que estão pautadas essencialmente em “resolver e elaborar

---

“The tower problem (Martino and Maher 1999): Given plastic unifix cubes of two colors, how many different towers of a certain height can be built? For instance, how many towers that are three “cubes” tall can be built?” (Sriraman; English, 2004, p. 184)

<sup>26</sup> “Encouraging such flexibility and the critical analysis of choices builds a foundation for flexibility in more complex mathematics.” (Sriraman; English, 2004, p. 185)

problemas”. Sriraman e English (2004) argumentam que incluir esse tipo de prática nas experiências com crianças, no contexto da Combinatória, pode fazer com que se aumente o acesso a importantes conceitos e procedimentos combinatórios, além de aumentar a compreensão das estruturas desses problemas. Os autores ainda esclarecem que, ao criar seus próprios problemas combinatórios, as crianças precisam considerar os componentes que irão compor o problema, como as informações conhecidas e desconhecidas.

Fazendo uma breve análise das contribuições trazidas por Sriraman e English (2004), é apropriado inferirmos que existem pontos de convergências entre implicações supramencionadas defendidas por estes autores e as razões elencadas por Kapur (1970), corroborando com a pertinência e o caráter atual que tem esses argumentos.

Por outro lado, é salutar que pontuemos, entre outros aspectos e que, ao nosso ver, está bem evidenciado nos estudos de Sriraman e English (2004), que é imprescindível que, ao inserir problemas combinatórios em sala de aula, o professor não perca de vista apenas a atividade matemática que pode estar envolvida e/ou ser desenvolvida nesse tipo de trabalho. Os autores em tela também apontam, ainda que indiretamente, que a forma como se conduz o processo de ensino (ou seja, os saberes didáticos que são e/ou podem ser mobilizados nesse processo) enseja no tipo de saber matemático que pode ser aprendido. Isso se revela, por exemplo, quando estes indicam a necessidade de utilização de diferentes tipos representações e abordagens, a escolha de problemas de contextos diversos, o compartilhamento de soluções e a proposição de problemas por parte dos estudantes.

Concordando com a primeira razão apontada por Kapur (1970), Hurdle, Warshauer e White (2016) consideram que, no campo da Combinatória, os problemas podem ser fáceis de escrever, pois é possível se identificar algumas categorias, adicionar algumas restrições, especificar um resultado. No entanto, os problemas combinatórios são extremamente desafiadores de resolver.

Na defesa que fazem esses autores sobre o lugar que os problemas combinatórios devem ocupar no processo de escolarização desde os primeiros anos, é destacado que a temática ajuda a incentivar os estudantes a criarem soluções diferentes, legitimando as ideias anteriormente apresentadas Sriraman e English (2004). Eles ainda sustentam que “A combinatória fornece um contexto para discussões sobre o porquê e como de um problema matemático, além de permitir que os estudantes possam apresentar suas ideias.”.

Nessa mesma perspectiva, Rosenstein (1997) sugere que a Matemática Discreta, que tem a Combinatória como base, pode oferecer uma oportunidade para revitalizar o ensino de Matemática na educação básica. Para tanto, o autor ressalta que de duas maneiras principais é

possível tornar essa alegação em realidade. A primeira sublinha que o ensino dessa área específica da Matemática oferece um novo começo para os estudantes, de modo que aqueles que não tiveram sucesso com a disciplina possam ter possibilidade de sucesso. Por outro lado, o estudante talentoso que perdeu o interesse pela matéria, pode se sentir desafiado.

A segunda maneira tem uma implicação direta sobre o trabalho do professor. O autor propõe que a Matemática Discreta oferece uma oportunidade em dar aos professores novas formas de olhar para a Matemática e novas formas de torná-la acessível aos seus alunos. Assim sendo, o seu ensino não é um fim em si, mas uma ferramenta para reformar a Matemática Escolar.

Embora as proposições levantadas por Rosenstein (1997) estejam direcionadas para sustentar a importância do ensino de Matemática Discreta, conforme já elencado anteriormente, consideramos que elas são igualmente válidas se as restringirmos ao campo da Combinatória. Outro aspecto que também merece evidência é o fato de que o autor supramencionado, a exemplo de Sriraman e English (2004), enfatiza não apenas o caráter da atividade matemática que está em jogo, quando do trabalho com conteúdos dessa área, mas também revela a importância que tem o professor em mobilizar adequadamente os gestos didáticos a fim de tornar eficaz o seu ensino.

Muito próximos a essas considerações, Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) denunciam o pouco espaço ocupado pela Combinatória nos currículos, seja na educação básica ou em etapas posteriores, e defendem que sua presença é benéfica tanto para estudantes quanto para a sociedade. A esse respeito, esses autores assumem que

Para os alunos, essa inclusão oferece oportunidades acessíveis de inclusão em torno da aprendizagem matemática e fortalece seu desenvolvimento matemático, aprofundando seu pensamento matemático e expandindo suas noções de matemática. Para a sociedade, essa inclusão oferece oportunidades para melhorar o engajamento cívico em um mundo tecnológico. (Lockwood; Wasserman; Tillema, 2020, p. 1, tradução nossa<sup>27</sup>).

Para apoiar essa ponderação, os autores apresentam cinco argumentos sobre por que a Combinatória é importante e como ela pode ser relevante na Matemática Escolar. Essas afirmações são acompanhadas de exemplos de pesquisas existentes na área da Educação Matemática relacionadas a cada uma delas e ainda destacam as áreas nas quais há uma

---

<sup>27</sup> For students, this inclusion provides accessible opportunities for inclusion around mathematical learning, and it strengthens their mathematical development by deepening their mathematical thinking and expanding their notions of mathematics. For society, this inclusion offers opportunities to improve civic engagement in a technological world. (Lockwood; Wasserman; Tillema, 2020, p. 1)

necessidade de pesquisas adicionais a fim de fornecer mais evidências para substantiar essas afirmações. Faz-se necessário ressaltar que esses teóricos revisitaram os estudos de Kapur (1970), inclusive para ratificar algumas das razões apontadas por este para advogar em favor da inclusão de conteúdos combinatórios no currículo. Logo, é fácil percebermos diversos pontos de convergência existentes entre as razões apontadas por este autor e as afirmações apresentadas por aqueles. Na sequência, apresentaremos essas afirmações e discorreremos brevemente sobre elas.

A primeira das cinco afirmações apresentadas por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) é que *Combinatória é acessível* e há ao menos duas características dos problemas combinatórios que podem sustentar essa afirmação: as perguntas são geralmente situações concretas que exigem pouca terminologia técnica, facilitando o entendimento do que está sendo perguntado, com soluções que se chegam muitas vezes contando números concretos e contrastando com outras áreas matemáticas em que a linguagem com termos mais específicos é mais presente; além disso, exige poucos pré-requisitos matemáticos para que o estudante tenha a chance de explorar as soluções para esses problemas.

Uma outra implicação de que a Combinatória é acessível é que crianças em tenra idade, mesmo as que ainda que não tiveram muito contato com outras áreas da Matemática, podem ter a chance de se envolver significativamente com problemas interessantes, geralmente originados em contextos cotidianos. Isso também já vem sendo evidenciado em diversos estudos no âmbito da Educação Matemática como, por exemplo, os de Montenegro, Borba e Bittar (2020), Borba (2016) e Borba, Rocha e Azevedo (2015).

Todavia, os autores advertem que o fato de que os problemas combinatórios são acessíveis não sugerem que eles sejam fáceis ou triviais para os estudantes resolverem. Tanto é que muitos estudos, em diferentes níveis educativos como, por exemplo, os de Esteves (2001) e Ferreira, Rufino e Silva (2016), revelam dificuldades dos estudantes em resolver problemas combinatórios. No entanto, conforme consideram Lockwood, Wasserman e Tillema (2020),

[...] embora os problemas combinatórios possam ser fáceis de lidar (porque suas afirmações são fáceis de entender), eles também exigem pensamento cuidadoso e certas práticas para dominar ou compreender completamente. Isso implica que tais problemas podem agradar a uma ampla faixa de alunos porque geralmente são compreensíveis, ao mesmo tempo que oferecem desafios envolventes. (p. 6, tradução nossa<sup>28</sup>).

---

<sup>28</sup> “[...] combinatorial problems can be easy to engage with (because their statements are easy to understand), they also require careful thought and certain practices to master or understand completely. This implies that such problems can appeal to a wide swath of students because they are generally comprehensible while also providing engaging challenges.” (Lockwood; Wasserman; Tillema, 2020, p. 6)

É circunscrita nessa ideia que os autores fazem a segunda afirmação de que *problemas combinatórios fornecem oportunidades para um pensamento matemático rico e desafiador para todos os alunos*. E o que torna esses problemas com o potencial de serem tão ricos é que nem sempre há um caminho ou procedimento claro que permita resolver um determinado problema de contagem, pois nem sempre se pode recorrer a aplicações de fórmulas. Se por um lado isso pode tornar esses problemas frustrantes, por outro, os diferenciam, pois geralmente exigem criatividade e novas abordagens de resolução de problemas.

No âmbito das implicações pedagógicas, o professor precisa ter a clareza de que o trabalho com Combinatória não pode ser reduzido a uma aplicação procedimental. Esse tipo de atividade requer uma reflexão sobre cada problema. Por isso pode tornar desafiador o ensino de conteúdos combinatórios, de acordo com Annin e Lai (2010), já que grande parte dos problemas não pode ser enquadrado em uma única categoria, pois cada um deles normalmente envolve diferentes aspectos que dependem de diferentes técnicas.

A terceira afirmação declarada por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) é de a *Combinatória promove práticas matemáticas desejáveis*. Baseados em diversos estudos de cunho qualitativo, os autores concebem que a inserção dessa temática em sala de aula oferece aos estudantes oportunidades de pensar e raciocinar sobre seus próprios argumentos e argumentos de outros alunos, já que os problemas podem ser abordados e resolvidos de maneiras muito diferentes e, para tanto, será necessário defender suas próprias soluções e criticar ou vir a compreender o raciocínio de outra pessoa.

Dois aspectos essenciais na atividade de todos que trabalham com Matemática, que é a justificação e a generalização, podem estar presentes no trabalho com Combinatória. Segundo Lockwood, Wasserman e Tillema (2020, p. 8, tradução nossa<sup>29</sup>) “Um dos componentes centrais da justificação em Combinatória é fornecer um argumento que demonstra que se contou todos os resultados desejados exatamente uma vez.”. De fato, um dos objetivos desse campo matemático está centrado no desenvolvimento de técnicas de contagem que permitam contar todos os elementos gerados a partir de um ou mais conjuntos, de forma que elementos não sejam rechaçados ou contados mais de uma vez nesse processo. Já quando se trata da generalização, os autores argumentam que, dentro da Combinatória e embasados em diversas pesquisas, existem muitas oportunidades para os alunos generalizarem além de apenas encontrar padrões numéricos ou algébricos como, por exemplo, a generalização de padrões estruturais relacionados aos coeficientes binomiais e a multiplicação de binômios.

---

<sup>29</sup> “One of the central components of justification in combinatorics is providing an argument that demonstrates that one has counted all of the desired outcomes exactly once.” (Lockwood; Wasserman; Tillema, 2020, p. 8)

A afirmação seguinte feita pelos autores é de que a *Combinatória pode contribuir positivamente para questões de equidade no ensino de Matemática*. Se nas afirmações anteriormente apresentadas podemos estabelecer pontos de afinidade com as razões difundidas por Kapur (1970), aqui trata-se de um novo desdobramento sobre a importância da Combinatória que, pode estar relacionado às questões de acessibilidade, mas que, por envolver não apenas a natureza do conteúdo combinatório, também repercute sobre a forma como se tem acesso à Matemática na sociedade.

Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) partem da premissa de que, para muitos estudantes, “[...] é possível que parte de sua (não) identificação matemática possa resultar do fato de não terem acesso a diferentes domínios matemáticos, aqueles que podem se alinhar mais de perto com suas próprias formas matemáticas de pensar e fazer.” (p. 9, tradução nossa<sup>30</sup>). Isso remete ao fato de que, ainda que esses estudantes estejam “atrasados” em outras áreas da Matemática como a Álgebra, por exemplo, eles podem recomençar em uma área diferente, a exemplo da Combinatória, que envolva um pensamento matemático suficientemente desafiador e rigoroso.

Avalizando essa afirmação, os autores delinearam três maneiras mais específicas pelas quais os tópicos combinatórios podem ser particularmente relacionados às questões atuais de equidade no ensino de Matemática. A primeira delas é de que os problemas de contagem podem ser naturalmente aplicados às questões relacionadas à justiça social. É caso dos estudos de Gatza (2018) que usou problemas combinatórios, no contexto norte-americano, para explorar como os estudantes do Ensino Médio entendem o preconceito racial na seleção do júri, elencando a natureza de apoio mútuo do desenvolvimento crítico da consciência racial e do aprendizado matemático.

A segunda delas consiste no fato de que a Combinatória pode expandir a visão dos estudantes sobre o significado da Matemática, apresentando-a como uma multiplicidade, pois este campo matemático oferece oportunidades para que muitos tópicos e ideias matemáticas sejam vistas sob diferentes perspectivas, além de oferecer maneiras diferentes de abordar e resolver problemas.

Por fim, os autores propõem que a Combinatória pode ampliar as oportunidades para que os estudantes se sintam capazes diante da Matemática. Ao estudar uma área diferente, como

---

<sup>30</sup> “[...] it is possible that some of their mathematical (non)identification may stem from their not being afforded access to different mathematical domains, ones which might align more closely to their own mathematical ways of thinking and doing.” (Lockwood; Wasserman; Tillema, 2020, p. 9)

a Combinatória, os estudantes que anteriormente não se identificavam com a Matemática podem agora ver-se positivamente em relação à mesma.

A última afirmação exposta por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) sobre a importância da Combinatória no ensino de Matemática considera que esse campo é *domínio natural para examinar e desenvolver o pensamento e a atividade computacional*. De fato, desde a concepção dos primeiros computadores, os conhecimentos combinatórios vêm tendo um papel preponderante no desenvolvimento das tecnologias digitais da comunicação e informação. Se por um lado a Combinatória tem contribuído para que cientistas da computação conheçam e entendam melhor essa área do conhecimento, por outro, é crível que cidadãos não ligados diretamente a esse ramo sejam capazes de se envolver criticamente nesse mundo tecnológico.

Considerando que cada vez mais a computação está integrada ao currículo como, por exemplo, é possível percebermos na BNCC (Brasil, 2018)<sup>31</sup>, os autores assumem que “[...] faria bem em olhar para a combinatória como o lugar natural para introduzir estruturas e conceitos de computação fundamentais no currículo de matemática.” (Lockwood; Wasserman; Tillema, 2020, p. 11, tradução nossa<sup>32</sup>). Assim, compete ao professor de Matemática favorecer um ambiente no qual os estudantes possam ser estimulados a desenvolver e utilizar o pensamento computacional como parte do seu trabalho científico e matemático.

Os autores sintetizam que a Combinatória tem recursos potencialmente únicos dentro do domínio da Educação Matemática dentre os quais pode-se destacar, particularmente, duas tendências atuais que são especialmente oportunas para o trabalho com este campo que são as questões de acessibilidade e equidade, que estão circunscritas no corpus da tendência da Educação Matemática Crítica, assim como o impulso em direção a iniciativas de pensamento computacional, que eclodem para a utilização das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação. Acreditamos, também, que a Resolução de Problemas pode ser um terreno fértil para exploração de problemas combinatórios, especialmente pela natureza desses problemas, anteriormente exploradas.

---

<sup>31</sup> Segundo a BNCC (Brasil, 2018), os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento do pensamento computacional. Isso do ponto de vista das estratégias de aprendizagem. Todavia, se considerarmos o aspecto do conhecimento matemático, o mesmo documento preceitua que a aprendizagem das unidades temáticas de Álgebra, Números, Geometria e Probabilidade e estatística podem contribuir para o desenvolvimento desse pensamento.

<sup>32</sup> “[...] we contend that the field would do well to look to combinatorics as the natural place to introduce fundamental computing structures and concepts into the mathematics curriculum” (Lockwood; Wasserman; Tillema, 2020, p. 11)

Consideramos que as cinco afirmações difundidas por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) se configuram numa espécie de síntese das razões anteriormente apresentadas e que traduz os argumentos pelos quais a Combinatória deva ser inserida no currículo escolar e, por conseguinte, no ensino de Matemática. Todavia, é preciso reiterar que não se trata apenas do porquê se deva fazer essa inclusão, considerando os benefícios que tem a atividade matemática em torno do trabalho com essa temática. Essas afirmações extrapolam as justificativas relativas ao aspecto dos saberes matemáticos que podem ser desenvolvidos e revelam, também, possibilidades de como o professor deve conduzir o processo de estudo dos problemas combinatórios, chamando a atenção para como os aspectos didáticos podem influenciar no tipo de conhecimentos matemáticos que se pode construir.

As razões aqui apresentadas parecem ser suficientes, ao menos no que tange o embasamento deste estudo, para justificar a importância que tem a inclusão dos conteúdos combinatórios na educação básica tanto do ponto de vista da atividade matemática que pode ser desenvolvida quanto das possibilidades, em termos didáticos, que são possíveis de alcançar em termos de estratégias de ensino, dois aspectos que, no nosso entender, são indissociáveis.

#### 4. OBJETIVOS E HIPÓTESE DE PESQUISA

Na parte introdutória deste estudo levantamos a seguinte questão de pesquisa: “O que se pode fazer para ajudar professores para que disponham de saberes matemáticos e didáticos, de forma articulada, a fim de que possam intervir efetiva e pertinentemente nos processos de ensino de estudantes do Ensino Médio sobre Combinatória?”.

Em síntese, o questionamento supracitado emergiu a partir do entendimento de que a formação de professores, tanto inicial como continuada, tem sido insuficiente para que os profissionais dessa área possam atuar adequadamente nas suas classes no que diz respeito ao ensino de conteúdos combinatórios. É preciso que os professores tenham a clareza de que, para que a Combinatória ensinada na educação básica cumpra com os propósitos que pode e deve cumprir, segundo as discussões apresentadas na seção anterior, é imprescindível pensar não apenas o que ensinar, mas, também, como ensinar, conforme defendem Rosenstein (1997) e Sriraman e English (2004), e isso de maneira não fragmentada. Ou seja, é preciso buscar a articulação entre os saberes matemáticos e didáticos.

Nessa mesma direção, as discussões, no seio da TAD, têm suscitado a necessidade de que esses processos formativos municiem professores de uma infraestrutura matemático-didática indispensável para pôr em jogo o processo de ensino que são as praxeologias da profissão docente (praxeologias matemáticas a serem ensinadas, praxeologias matemáticas para o ensino e praxeologias didáticas), segundo Cirade (2006) e Chevallard e Cirade (2010).

O PEP-FP, por sua vez, tem provado ser um importante dispositivo formativo que, além de questionar a forma como tem sido abordada a matemática escolar nas instituições de ensino, permite que os professores elaborem perguntas intrínsecas (também chamadas, no âmbito da TAD, de questões umbilicais) sobre sua profissão como, por exemplo, “Como ensinar um conteúdo C?” e busquem respondê-las sob uma análise epistemológica e didática.

Desse modo, passamos a apresentar, na sequência, os objetivos que nortearão esta investigação, bem como nossa hipótese de pesquisa.

##### 4.1 Objetivo Geral

Desenvolver, implementar e analisar um processo de formação de professores sobre o ensino de Combinatória, baseado na metodologia do PEP-FP, com um grupo de professores de Matemática do Ensino Médio.

## 4.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) relativo ao ensino de Combinatória para o Ensino Médio;
- Explicitar e analisar o Modelo Praxeológico Dominante (MPD) referente ao campo da Combinatória no Ensino Médio;
- Identificar e analisar as características em termos de dialéticas e funções didáticas (mesogênese, topogênese e cronogênese) que tem um PEP vivenciado por professores em formação na posição de estudantes;
- Identificar e analisar as condições e restrições que enfrentam os professores em um processo formativo baseado no PEP-FP.

## 4.3 Hipótese de Pesquisa

Tomando como referência os nossos objetivos traçados neste estudo, apresentamos nossa hipótese de pesquisa:

*Hipótese:* Um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP) sobre o ensino de Combinatória agrega saberes matemáticos e didáticos ao equipamento praxeológico dos professores em formação, de maneira articulada, a fim de que possam atuar de forma pertinente no ensino desta área da Matemática.

## 5 PERCURSO METODOLÓGICO

A base metodológica dos estudos na TAD, especialmente aqueles que empregam o PEP, é fundamentada na Engenharia Didática (ED) (Chevallard, 2009; García *et al.*, 2019; Barquero; Bosch, 2022). A ED, desde as suas primeiras teorizações, tem sido utilizada, particularmente no campo da Didática da Matemática, para definir as relações entre os desenvolvimentos teóricos desta ciência e as ambiências empíricas da sala de aula.

Conforme discorrem Barquero e Bosch (2022), a ED surge como metodologia de pesquisa subsidiando as ferramentas conceituais da Teoria das Situações Didáticas, se consolida nas pesquisas da comunidade didática francesa e se amplia sob a égide da TAD.

O processo de desenho de um PEP ou mesmo um PEP-FP (pois, como defendem Almouloud *et al.* (2021), esses tipos de PEP podem engendrar a ED como metodologia de pesquisa) se apoia nos princípios básicos da ED que estão estruturados em quatro fases, que passamos a discorrer, sinteticamente, apoiados em Barquero e Bosch (2022), García *et al.* (2019) e Almouloud *et al.* (2021):

- **Análise Preliminar** – o ponto de partida é um conteúdo a ser ensinado e, geralmente, um problema didático associado a ele; deste modo, esta primeira fase inclui uma análise epistemológica do conteúdo matemático, o que pode implicar na construção de um modelo praxeológico de referência do saber em questão, assim como o reconhecimento de fenômenos didáticos hipotéticos, de forma que se permita a identificação do modelo praxeológico dominante;
- **Análise a priori** – nesta fase, o conteúdo em questão é modelizado na pesquisa didática em dois níveis: um matemático (que buscar definir ou caracterizar o conteúdo), que são as praxeologias matemáticas, e um didático (propor como fazê-lo emergir de questões problemáticas em uma sequência de situações concretas) que constitui as praxeologias didáticas; no caso do PEP-FP, se identificam as questões do módulo  $M_0$  a partir da questão geradora “ $Q_0$ : Como ensinar um conteúdo?” e suas questões derivadas, bem como o desenho do PEP a ser vivenciado no  $M_1$ ;
- **Análise in vivo** – a terceira fase é o nível da experimentação do processo didático previamente projetado, da observação e da produção de dados, e que serve de ponte entre a fase anterior e a seguinte; é nesta fase que se aplicam os módulos  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$ , tantos quantos forem possíveis e/ou necessários à pesquisa, com professores em formação inicial e/ou continuada;

- **Análise a posteriori** – busca testar, validar e desenvolver as hipóteses nas quais o processo foi baseado a partir das evidências empíricas coletadas, podendo conduzir a formulação de novos problemas e/ou fenômenos didáticos; a validação tanto do PEP quanto do PEP-FP acontece por meio das dialéticas elencadas no referencial teórico e do estudo das condições e restrições dos módulos do PEP-FP a partir das funções didáticas da mesogênese, cronogênese e topogênese.

Posto isto, este estudo está estruturado sob os postulados da Engenharia Didática como metodologia de pesquisa seguindo as quatro fases supramencionadas e que replicamos na sequência com os desdobramentos desta pesquisa.

## 5.1 Análise Preliminar

Nesta fase, elaboramos, inicialmente um Modelo Praxeológico de Referência para o ensino de Combinatória no Ensino Médio. Vale ressaltar que, inicialmente, esses modelos eram chamados de modelos epistemológicos de referência, conforme assinala Bosch (2019), pois há uma necessidade, para a pesquisa em didática, de desenvolver descrições específicas do saber a ser ensinado, que é o cerne dos processos didáticos estudados. Como o termo “epistemológico” refere-se a “conhecimento” e para a TAD todo o conhecimento pode ser concebido como uma organização praxeológica, esses modelos podem ser chamados de Modelos Praxeológicos de Referência (MPR).

A autora ainda chama a atenção para outro aspecto importante: o MPR nunca é o modelo (em sentido único e total) de um objeto de conhecimento, mas um modelo possível entre tantos outros, pois é provisório, sujeito ao teste empírico dos fatos e em permanente revisão.

Dessa forma, a primeira etapa desta investigação centrou-se na elaboração de um Modelo Praxeológico de Referência (MPR) para o campo da Combinatória. Esse modelo proposto não pretende abranger o nível completo do domínio, pois foi situado no nível do setor correspondente aos problemas de contagem. Além disso, é importante destacar que sua abrangência foi delimitada aos objetos de saber pertinentes ao Ensino Médio.

Para tanto, revisitamos a seção 3.1 intitulada de “*O que é Combinatória? Um ponto de vista histórico-epistemológico*” a fim de explicitar o MPR, pois acreditamos que a referida seção possui elementos suficientes para embasar a explicitação, em termos praxeológicos, da atividade matemática em torno dos problemas combinatórios de contagem.

Em paralelo à construção do MPR, construímos o Modelo Praxeológico Dominante (MPD) relacionado ao ensino de Combinatória no Ensino Médio brasileiro. Partimos do pressuposto de que não é possível delinear um MPD sem que haja um MPR para servir como referência de confronto. Da mesma forma, consideramos que o MPD pode, em certa medida, enriquecer o processo de elaboração do MPR. Assim, embora estes modelos sejam apresentados separadamente ao longo da pesquisa, na prática, foram desenvolvidos de forma interligada.

Assim, para a construção do MPD, realizamos uma análise documental nos documentos de orientações curriculares vigentes como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) e o Currículo de Pernambuco (Pernambuco, 2021). A finalidade foi identificarmos os saberes a serem ensinados para o Ensino Médio relativos ao campo da Combinatória que são indicados nesses documentos.

Na sequência, procedemos à análise de dois livros didáticos de Matemática que tratam especificamente dos conteúdos combinatórios desta mesma etapa da escolarização aprovados no Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD) 2021. Trata-se dos livros “Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020) e “Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação” (Dante; Viana, 2020). Estes foram os dois livros de Matemática mais distribuídos, segundo dados estatísticos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE)<sup>33</sup>, responsável pela gestão do PNLD.

Salientamos que não tivemos por objetivo atribuir juízo de valor ou mesmo de avaliar no sentido de enaltecer ou depreciar a obra em análise. A finalidade foi analisá-los sob a ótica das organizações praxeológicas referentes os objetos de saberes da Combinatória neles contidos. Por isso, também não se constituiu propósito deste estudo examinar as obras em sua completude. Nossos empenhos se concentraram em analisar apenas os capítulos destinados ao estudo de Combinatória.

Utilizamos como ponto de partida para a elaboração do MPD o modelo que construímos em Ferreira (2019) e que buscou identificar essas organizações praxeológicas que emergiam em um livro didático. Todavia, é preciso esclarecer que praxeologias em torno de problemas como, por exemplo, do tipo Produto de Medidas, desconsiderados em Ferreira (2019), também foram objeto de apreciação.

---

<sup>33</sup> Os dados de distribuição de todos os títulos distribuídos no PNLD Ensino Médio 2021 podem ser acessados através do site do FNDE: <https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>

Também na intenção de explicitar e analisar o MPD, procedemos a uma revisão de estudos brasileiros que versam sobre práticas de ensino em Combinatória com o propósito de identificarmos as organizações praxeológicas relativas a esse campo que são de fato ensinadas na educação básica, especialmente no Ensino Médio. Os trabalhos para essa revisão foram oriundos de buscas realizadas no Portal de Periódicos da CAPES e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Na busca, foi possível encontrar apenas dois trabalhos: Lima (2016) e Ferreira (2019).

As análises dos documentos de orientações curriculares, dos livros didáticos de Matemática e das práticas docentes (acessadas a partir dos trabalhos supracitados) embasaram a explicitação do MPD que foi elaborado em confrontação com o MPR que assumimos.

## 5.2 Análise *a priori*

Nesta segunda fase, atuamos nas análises matemática e didática referentes à Combinatória enquanto saber. Iniciamos com a elaboração de um mapa de questões preliminares referentes ao Módulo 0 que tem por objetivo tornar explícitas as razões de ser do PEP-FP a partir de uma questão própria da profissão docente. O ponto de partida foi a seguinte questão geradora “ $Q_0$ : Como ensinar Combinatória?”. Desta questão geradora, elencamos as questões derivadas, conforme assentado no referencial teórico, e elaboramos outras que consideramos pertinentes e que, de certa forma, subsidiam a elaboração de resposta à  $Q_0$ .

Também elaboramos o desenho do PEP para o Módulo 1, no qual os professores participantes foram convidados a vivenciar o percurso na posição de estudantes. Na busca por uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória, elaboramos a questão geradora que conduziu o  $M_1$  que é “ $Q_1$ : Como criar um código eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?”. Elaboramos, também, um mapa de questões derivadas e possíveis respostas a essas questões que podem emergir na vivência do PEP.

Esses desenhos do PEP-FP e do PEP serviram para confrontação, durante a análise *a posteriori*, dos PEP efetivamente vivenciados durante a fase da experimentação (análise *in vivo*).

## 5.3 Análise *in vivo*

Esta foi a fase experimental, na qual se experimentou o PEP-FP para o ensino de Combinatória no Ensino Médio. O estudo empírico aconteceu em período de 04 meses,

abrangendo 11 encontros que aconteceram de maneira híbrida (predominantemente com encontros remotos), de forma síncrona, em sua grande maioria, e um encontro assíncrono. Cada encontro tinha em torno de 2h30min de duração. As plataformas utilizadas para os encontros remotos foram o *Google Meet* (encontros síncronos) e *WhatsApp* (encontro assíncrono).

O grupo participante foi formado, inicialmente, por 16 professores de Matemática, que abrangia tanto professores em serviço (que já possuíam formação em licenciatura em Matemática e atuam ao menos em um dos níveis da educação básica) como licenciandos em Matemática. Neste sentido, sempre que nos reportamos aos docentes participantes do processo formativo, estamos fazendo referência aos professores no sentido *lato sensu*, que compreende tanto professores em atuação quanto em formação.

Todavia, vale ressaltar que, ao longo do processo formativo, houve algumas impossibilidades de participação na pesquisa por parte de alguns professores (quase sempre associadas à incompatibilidade dos horários dos encontros devido às demandas profissionais ou acadêmicas). Assim, o grupo participante que percorreu todo o processo formativo foi constituído por 09 professores, dos quais 08 são licenciados e um ainda estava em formação. Além disso, 07 professores atuavam em uma ou mais etapas de ensino da educação básica em escolas públicas do estado de Pernambuco.

É importante salientar que o grupo participante apresenta diversidade em vários aspectos. No que diz respeito à formação, além das informações previamente mencionadas, 03 professores possuíam especialização, 01 era estudante de mestrado, 02 eram mestrado e 01 já havia concluído seu doutorado, todos na área de ensino de Matemática. Vale destacar que tanto o participante que estava cursando o mestrado quanto aquele com doutorado direcionaram suas pesquisas ao campo da Combinatória. Quanto à experiência profissional, o grupo incluiu desde professores com pouco tempo de atuação (entre 1 e 2 anos) até aqueles com mais de 15 anos de experiência docente.

O recrutamento do grupo participante foi realizado através do preenchimento de um formulário elaborado no *Google Forms* e disparado em grupos de *WhatsApp* que congregavam professores de algumas redes de ensino, bem como em grupos de estudantes de licenciatura em Matemática, dos quais o pesquisador também participava e/ou tinha acesso aos administradores. O formulário continha informações básicas sobre o estudo como, por exemplo, objetivo, previsão de duração, configuração dos encontros etc. bem como tinha por finalidade coletar informações sobre a formação e a atuação profissional dos participantes e sua disponibilidade de participação no processo formativo.

Os professores que concordaram em participar do PEP-FP preencheram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, formalizando assim seu compromisso e consentimento com a pesquisa. É importante destacar que este estudo foi submetido ao escrutínio do Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal de Pernambuco, obtendo a devida aprovação sob o Certificado de Apresentação para Apreciação Ética número 69757323.0.0000.5208.

Durante a realização do experimento, exploramos integralmente os módulos M<sub>0</sub>, M<sub>1</sub> e M<sub>2</sub>, enquanto o M<sub>3</sub> foi abordado de forma incipiente. Contudo, devido a restrições de tempo, disponibilidade dos participantes e alinhamento com o calendário escolar das redes em que esses professores atuavam, especialmente considerando que o último encontro ocorreu em novembro, não foi viável avançar para a implementação do M<sub>4</sub>. Apesar disso, os módulos que foram efetivamente experimentados forneceram os dados necessários para embasar nossas análises e alcançar os objetivos estabelecidos neste estudo.

É importante esclarecer que, ao longo do processo de formação, os participantes foram organizados em grupos, os quais foram reorganizados a cada novo módulo, visando promover uma interação mais ampla entre eles. Essa prática também se justificou pela variação na presença dos participantes nos encontros, que oscilava de um dia para o outro. Na sequência, apresentamos o quadro 1 que sintetiza a configuração dos encontros realizados. Vale ressaltar que a distribuição da quantidade de dias destinados para a vivência de cada módulo não foi definida a priori.

**Quadro 1** – Configuração dos encontros realizados durante a vivência do PEP-FP

| Encontro | Data de realização | Tema          | Formato | Interação  | Quantidade de Participantes |
|----------|--------------------|---------------|---------|------------|-----------------------------|
| 1        | 21/08/23           | Módulo 0      | Remoto  | Síncrona   | 16                          |
| 2        | 28/08/23           | Módulo 0      | Remoto  | Síncrona   | 11                          |
| 3        | 04/09/23           | Módulo 0      | Remoto  | Síncrona   | 7                           |
| 4        | 11/09/23           | Módulo 0      | Remoto  | Síncrona   | 9                           |
| 5        | 18/09/23           | Módulos 0 e 1 | Remoto  | Síncrona   | 6                           |
| 6        | 25/09/23           | Módulo 1      | Híbrido | Síncrona   | 9                           |
| 7        | 02/10/23           | Módulo 1      | Remoto  | Assíncrona | -                           |
| 8        | 09/10/23           | Módulo 1      | Remoto  | Síncrona   | 7                           |
| 9        | 16/10/23           | Módulo 1      | Remoto  | Síncrona   | 9                           |
| 10       | 30/10/23           | Módulo 2      | Remoto  | Síncrona   | 9                           |
| 11       | 06/11/23           | Módulos 2 e 3 | Remoto  | Síncrona   | 8                           |

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

O Quadro 2, a seguir, apresenta o mapa de presença dos participantes ao longo dos encontros. Para preservar suas identidades, utilizaremos letras do alfabeto para distingui-los. Cabe ressaltar que a frequência apresentada se refere apenas aos participantes que concluíram todo o processo formativo.

**Quadro 2** - Mapa de frequência dos participantes durante os encontros formativos

| Participantes | E1 | E2 | E3 | E4 | E5 | E6 | E7 | E8 | E9 | E10 | E11 |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|
| A             | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x   | x   |
| B             | x  | x  | x  |    | x  | x  | x  | x  | x  | x   | x   |
| C             | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x   | x   |
| D             | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x   | x   |
| E             | x  | x  | x  |    | x  | x  | x  | x  | x  | x   | x   |
| F             | x  | x  |    | x  |    | x  | x  |    | x  | x   | x   |
| G             | x  | x  |    | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x   |     |
| H             | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x  | x   | x   |
| I             | x  |    | x  | x  | x  | x  | x  |    | x  | x   | x   |

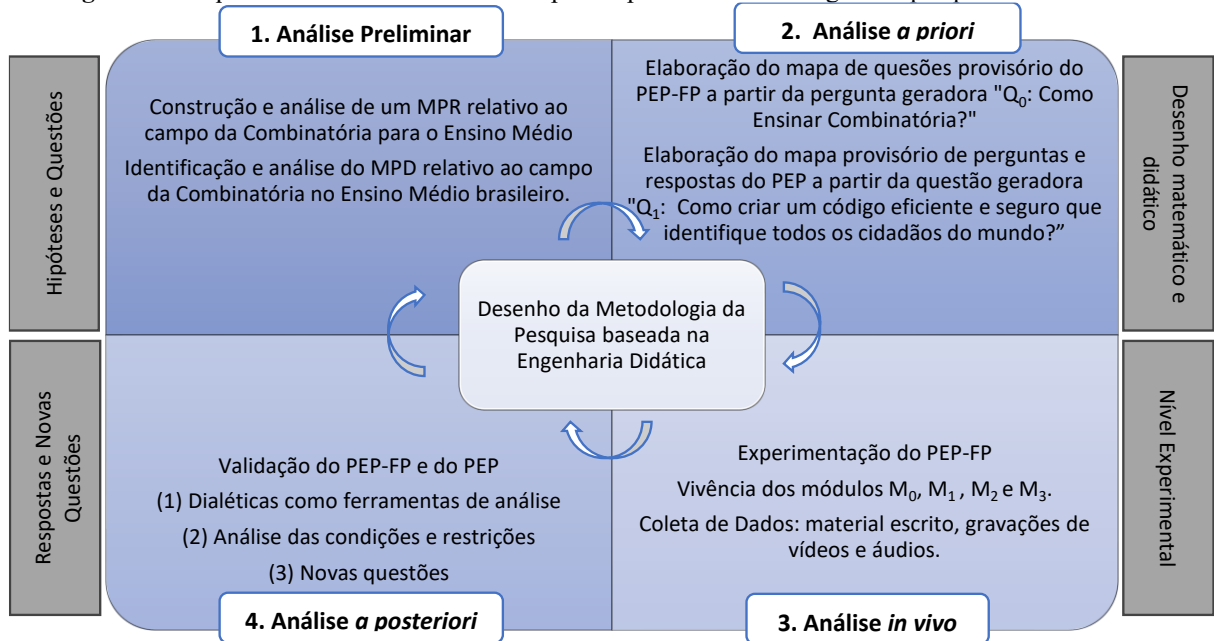
**Fonte:** Acervo da pesquisa

Como meio de produção de dados, utilizamos os registros que os participantes realizavam em grupo a cada sessão, gravação em vídeo das chamadas do *Google Meet*, gravação em áudio das discussões realizadas nos grupos. Todavia, o material escrito pelos grupos e entregue ao término de cada encontro, bem como as apresentações e discussões nas sessões plenárias (que eram os momentos nos quais os grupos compartilhavam suas produções e havia deliberação dos próximos passos a se seguir) foi o insumo base para nossas análises na etapa seguinte.

#### 5.4 Análise a posteriori

Nesta etapa, nosso objetivo foi testar, validar e desenvolver as hipóteses que fundamentaram o PEP-FP como processo formativo e o PEP experimentado durante o Módulo 1. Para isso, realizamos uma análise, partindo das evidências empíricas produzidas na fase anterior. Essa análise se apoiou nas dialéticas apresentadas no referencial teórico do estudo. Além disso, investigamos as condições e restrições dos módulos vivenciados, considerando as funções didáticas da mesogênese, cronogênese e topogênese.

Dessa forma, apresentamos na figura 7 um esquema que delinea as etapas desta pesquisa:

**Figura 7** – Esquema sintetizador das fases/etapas do percurso metodológico da pesquisa baseado na ED

Fonte: Elaboração Própria

A aplicação das fases da ED, que incluíram a análise preliminar, análise *a priori*, análise *in vivo* e análise *a posteriori*, possibilitou alcançar os objetivos estabelecidos. A apresentação e a análise dos resultados acontecem a partir do próximo capítulo.

## 6 UM MODELO PRAXEOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Nesta seção, nos empenhamos em explicitar um modelo praxeológico de referência para o ensino de Combinatória no âmbito do Ensino Médio, etapa da educação básica que contemplamos nesta pesquisa. Chevallard (1999) considera que, num processo didático sobre um tema matemático, a primeira etapa da análise do pesquisador da Didática da Matemática deve ser a adoção de um modelo como este.

Todavia, a construção do MPR aconteceu de maneira interligada com o MPD, conforme explicado anteriormente. Corroborando com isso, Gáscon (2018) chama a atenção para a necessidade que há, por parte do investigador em didática, ao analisar criticamente um modelo praxeológico dominante em determinada instituição, libertar-se das suas posições enquanto sujeito institucional e construir modelos específicos, tomando-os como sistemas de referências úteis para analisar esses modelos dominantes.

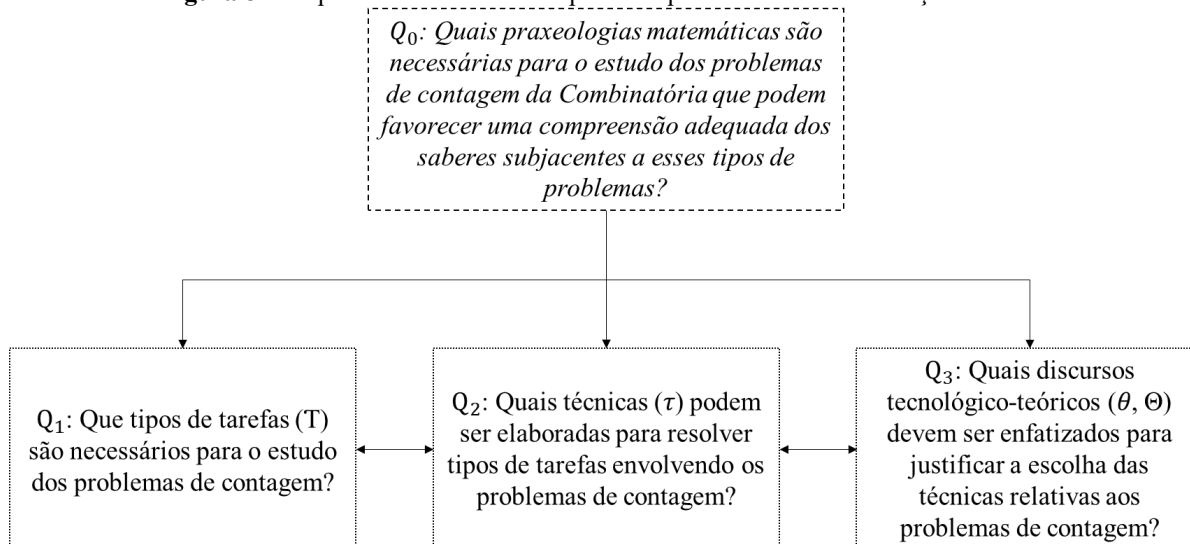
Assim, partimos da imprescindibilidade de elaborarmos um MPR relativo aos problemas de contagem, situados no nível do setor, pertencente ao domínio da Combinatória na escala de codeterminação didática, que nos sirva de referência epistemológica e também de instrumento para analisarmos e confrontarmos o MPD difundido nas instituições de nível médio da educação básica.

Conforme assinalado anteriormente, este será apenas um modelo possível entre tantos outros e estará sujeito a permanentes revisões ao longo do desenvolvimento desta pesquisa. Por outro lado, queremos salientar que o MPR que passaremos a descrever terá como finalidade, em última análise, subsidiar as reflexões dos professores que serão participantes do processo formativo, no contexto desta investigação, bem como embasar nosso processo analítico enquanto pesquisador. Isso implica dizer que, não é nosso desejo, *a priori*, colocar este modelo à disposição dos estudantes da última etapa da escolarização básica.

Dessa maneira, queremos assentar uma questão teórica inicial que consideramos ser relevante para a elaboração desse MPR: “ $Q_0$ : *Quais praxeologias matemáticas são necessárias para o estudo dos problemas de contagem da Combinatória que podem favorecer uma compreensão adequada dos saberes subjacentes a esses tipos de problemas?*”. Para responder esta questão  $Q_0$ , elaboramos, também, algumas questões derivadas que nortearam a construção do modelo em tela: “ $Q_1$ : *Que tipos de tarefas (T) são necessárias para o estudo dos problemas de contagem?*”, “ $Q_2$ : *Quais técnicas ( $\tau$ ) podem ser elaboradas para resolver tipos de tarefas envolvendo os problemas de contagem?*” e “ $Q_3$ : *Quais discursos tecnológico-teóricos ( $\theta$ ,  $\Theta$ )*

devem ser enfatizados para justificar a escolha das técnicas relativas aos problemas de contagem?”. O esquema, a seguir, sintetiza o conjunto de questões que conduziram a estruturação do MPR.

**Figura 8** – Esquema sintetizador das questões que nortearam a construção do MPR



Fonte: Elaborado pelo autor

No início deste capítulo, utilizamos, intencionalmente, o verbo *explicitar* para nos reportarmos ao que queremos de fato executar a partir de então. Isso se ampara na certeza que temos ao entendermos que na seção 3.1 intitulada de “*O que é Combinatória? Um ponto de vista histórico-epistemológico*” temos elementos suficientes para estruturar o MPR que queremos elaborar. Por isso, o nosso intuito é, revisitando a referida seção, explicitar, em termos praxeológicos, o modelo de referência que assumimos para a atividade matemática em torno dos problemas combinatórios de contagem.

O estudo histórico-epistemológico do campo da Combinatória não deixa dúvidas de que a sua origem e desenvolvimento estão intimamente relacionados à forma como esta área está sistematizada. Apesar da dificuldade de encontrarmos elementos históricos que possam nos fornecer indícios mais esclarecedores do seu processo evolutivo, conforme apontado anteriormente, é possível percebermos a utilização de saberes combinatórios em diferentes períodos da História e em diversas culturas. No que tange às finalidades desses usos, pode-se identificar uma vasta aplicabilidade que vai desde problemas de uso recreativo ou sem propósito real específico, como o do Papiro de Rhind e o quadrado mágico, por exemplo, bem como em situações do cotidiano nas quais a aplicação desses saberes era fundamental, como se pode notar no tratado médico de Susruta e no trabalho de Jainas (Biggs, 1979).

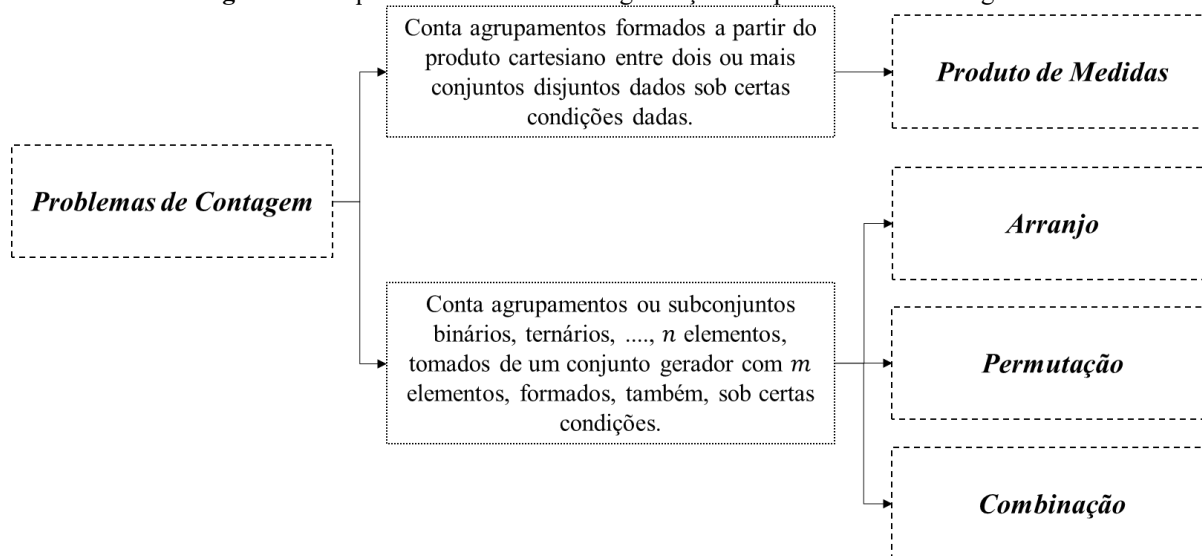
Ademais, para além do contexto histórico, há de se considerar os diversos usos e aplicações que tem a Combinatória em outras áreas do conhecimento como física, química, biologia, comunicação, probabilidade, programação dinâmica, teoria dos números, topologia, informática etc. conforme aponta Kapur (1970).

O estudo histórico-epistemológico realizado evidencia que, em Combinatória, conforme assinalam Morgado *et al.* (1991) e Santos *et al.* (2008) há duas categorias principais de problemas: os problemas de contagem e os problemas de existência. Para a construção deste MPR, nos deteremos a estes primeiros que têm por finalidade contar ou classificar os subconjuntos de um ou mais conjuntos finitos dados e que satisfaçam certas condições dadas. Trata-se de problemas que aparecem mais abundantemente nas fontes históricas e suas aplicações podem ser vistas e realizadas em diversas situações cotidianas. Além disso, essa categoria de problemas é a mais tratada, senão a única abordada, na educação básica, especialmente no Ensino Médio.

Situados, em linhas gerais, os diferentes usos e aplicações do campo combinatório, tanto no passado como no presente, bem como a classificação dos diferentes problemas combinatórios que adotamos, nos caber levantar, agora, a primeira questão derivada que buscaremos enfrentar, a “ $Q_1$ : *Que tipos de tarefas (T) são necessários para o estudo dos problemas de contagem?*”.

No setor dos problemas de contagem, é possível encontrarmos duas subcategorias de problemas: uma que trata de problemas nos quais se intentam contar os agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições e outra que abrange problemas nos quais as soluções são caracterizadas por agrupamentos ou subconjuntos binários, ternários, ....., com  $n$  elementos, a depender do número de elementos que vai se tomar de um conjunto gerador com  $m$  elementos, formados, também, sob certas condições. A primeira remete aos problemas do tipo *produto de medidas*, segundo Vergnaud (1991) e a segunda corresponde aos problemas de contagem do tipo *arranjo*, *permutação* e *combinação*, de acordo com Merayo (2015). O esquema abaixo apresenta uma síntese da subcategorização dos problemas de contagem.

**Figura 9** – Esquema-síntese da subcategorização dos problemas de contagem



Fonte: Elaborado pelo autor

Como a nossa intenção é descrever em termos praxeológicos os tipos de tarefas que podem ser associados a cada um desses tipos de problemas, nos diligenciamos a modelizar cada problema de contagem supramencionado correlacionando ao seu respectivo tipo de tarefas principal<sup>34</sup>. Em Ferreira (2019) é possível encontrar a modelização dos tipos de tarefas relativos aos problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação e combinação, da qual faremos uso para a construção do MPR. Somado a isso, modelizaremos o tipo de tarefas correspondente aos problemas de contagem classificados como produto de medidas. Adaptamos os tipos de tarefas ao gênero *contar* para fazermos referência que se trata de problemas de contagem.

Nomeamos de  $T_1$  o tipo de tarefas alusivo ao problema de contagem do tipo produto de medidas que descrevemos por “*Contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições*”. Para os demais problemas, adotaremos a modelização de Ferreira (2019), também adequadas ao gênero *contar*.

O tipo de tarefas associados aos problemas do tipo arranjo serão designados por  $T_2$  e descritos por “*Contar o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com  $0 < n < m$ . Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos.*”.

<sup>34</sup> Em Ferreira (2019), conforme já assinalado, aparecem tipos de tarefas principais relativos aos problemas de contagem do tipo arranjo, permutação e combinação e também subtipos de tarefas para os quais chamamos as diferentes configurações em relação à estrutura do tipo de tarefas principal.

$T_3$  será a denominação do tipo de tarefas relativo aos problemas de permutação definida como “*Contar o número de agrupamentos formados a partir de  $m$  elementos, nos quais todos os  $m$  elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos.*”.

Já os problemas do tipo combinação serão identificados pelo tipo de tarefas  $T_4$  que trata sobre “*Contar o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de  $m$  elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... ,  $n$  elementos, com  $0 < n < m$ . Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, pois a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.*”.

O quadro 3 que aparece subsequentemente apresenta um resumo dos tipos de tarefas relativas aos problemas de contagem aqui considerados.

**Quadro 3 – Síntese dos tipos de tarefas relativas aos problemas de contagem**

| <b>Tipo de problema de contagem</b> | <b>Tipo de tarefa (<math>T_x</math>)</b> | <b>Descrição</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b><i>Produto de Medidas</i></b>    | $T_1$                                    | Contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições                                                                                                                                                                |
| <b><i>Arranjo</i></b>               | $T_2$                                    | Contar o número de agrupamentos formados a partir de $m$ elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , $n$ elementos, com $0 < n < m$ . Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos |
| <b><i>Permutação</i></b>            | $T_3$                                    | Contar o número de agrupamentos formados a partir de $m$ elementos, nos quais todos os $m$ elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos                                                                                             |
| <b><i>Combinação</i></b>            | $T_4$                                    | Contar o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de $m$ elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , $n$ elementos, com $0 < n < m$ . Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos.  |

Fonte: Adaptado de Ferreira (2019)

De acordo com Chevallard (1999), uma praxeologia relativa à  $T$  requer, ao menos, uma maneira de realizar as tarefas  $f \in T$  que recebe o nome de técnica. Por isso, é apropriado que suscitemos a nossa segunda questão derivada: “ $Q_2$ : *Quais técnicas ( $\tau$ ) podem ser elaboradas para resolver tipos de tarefas envolvendo os problemas de contagem?*”.

No campo da Combinatória, desde o surgimento dos primeiros problemas de contagem que se tem conhecimento, algumas técnicas também emergiram na tentativa de solucionar esses problemas. Segundo Biggs (1979), a lista de possibilidades figurou como técnica utilizada para resolver os primeiros problemas combinatórios. Conforme indicado anteriormente, as técnicas

de contagem, sem ter que listar todos os casos, surgiram gradualmente durante um longo período. Apenas no século XII que se verifica o surgimento dos primeiros cálculos envolvendo fórmulas para resolver problemas combinatórios e ganha força a partir da sistematização do campo, no século XVII.

Nota-se que, um dos objetos de estudo da Combinatória é a elaboração de técnicas a fim de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los ou enumerá-los, como definem Merayo (2015) e Torres (2004). Isso nos conduz à ideia de que superar a listagem direta de possibilidades é um imperativo e desenvolver técnicas que possam resolver cada vez um número maior de problemas, inclusive de diferentes tipos, tem sido parte do trabalho daqueles que se debruçam nos estudos desse campo.

Por outro lado, o enfoque antropológico proposto por Chevallard (1999) considera que as técnicas utilizadas para realizar um certo tipo de tarefas  $T$  precisam seguir alguns critérios para bem servir ao seu propósito: elaboração (se são realmente elaboradoras ou apenas esboçadas); facilidade de utilização; alcance (imprescindíveis para o cumprimento do tipo de tarefas proposto); confiabilidade (se são confiáveis, tendo em vista as condições de sua utilização no cumprimento do tipo de tarefas proposto); e possibilidade de evolução (se as técnicas utilizadas para resolver o tipo de tarefas podem evoluir).

Na intenção de descrever uma técnica ou de determinar do que ela é feita, Chaachoua (2018), observando os trabalhos que recorrem à análise praxeológica, pontua que há ao menos duas maneiras principais de se fazer isso: descrevendo-a na forma de ações mais ou menos estruturadas ou em termos de subtarefas. O autor complementa que uma técnica pode ser descrita por um conjunto de tipos de tarefas, denominados ingredientes da técnica.

Coadunados com os propósitos da Combinatória elencados acima e com o que preceitua a TAD no que concerne a estabelecer uma técnica ou conjunto de técnicas que respondam satisfatoriamente aos critérios de avaliação (ou à maioria deles), elegeremos o Princípio Multiplicativo como um tipo de tarefas que constitui o ingrediente principal das técnicas que são capazes de resolver os problemas de contagem supramencionados e também exemplificados na seção 3.1 deste estudo.

Vale ressaltar que em muitas tarefas dos tipos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  o Princípio Multiplicativo é, à primeira vista, o único ingrediente das técnicas. Em outras tarefas desses tipos, o Princípio Multiplicativo é um ingrediente sempre presente no conjunto de tipos de tarefas que compõem os ingredientes da técnica. Portanto, o fato de o Princípio Multiplicativo ser considerado, ora como único ingrediente das técnicas, ora como parte integrante do conjunto de ingredientes que

resolvem as tarefas que se configuram como problemas de contagem, nos leva a adotar a perspectiva de considerá-lo uma técnica, em vez de apenas um ingrediente.

Ferreira (2019) também aponta que o PM tem sido uma técnica bem elaborada, de fácil utilização, pois dispensa a necessidade de se decorar fórmulas, tem amplo nível de alcance, uma vez que consegue dar conta dos tipos de tarefas propostos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , é confiável no cumprimento desses tipos de tarefas, além da possibilidade de evoluir, inclusive chegando a níveis de generalização.

Elencados os tipos de tarefas  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  bem como a escolha do Princípio Multiplicativo enquanto técnica utilizada para realizar esses tipos de tarefas (que denominaremos de  $\tau_{PM}$ ), é pertinente que enfrentemos nossa terceira questão derivada: “ $Q_3$ : *Quais discursos tecnológico-teóricos  $(\theta, \Theta)$  devem ser enfatizados para justificar a escolha das técnicas relativas aos problemas de contagem?*”.

Retomando as ideias de Rufino (2015), no campo da Combinatória, as propriedades que demarcam o objeto da contagem interferem na forma de contar, ou melhor, na técnica que vai ser utilizada para contar. Assim, podemos separar o entorno tecnológico-teórico relativo aos problemas de contagem de acordo com sua subcategorização.

No que diz respeito ao tipo de tarefas  $T_1$  (Produto de Medidas) que são problemas que buscam contar os agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições, implica dizer que a natureza desses agrupamentos formados é distinta da natureza dos conjuntos que os originaram, pois os mesmos são combinados para formar um novo conjunto.

Resgatando o problema da escolha de dois eventos em uma semana universitária, apresentado na seção 3.1, no qual Ana teria que escolher uma palestra e um seminário entre um conjunto de 3 palestras e um total de 2 seminários, podemos ilustrar o conjunto das palestras disponíveis como  $P = \{P_1, P_2, P_3\}$  e o dos seminários como  $S = \{S_1, S_2\}$ . Considerando que ela pode escolher um evento de cada para participar, podemos elencar o conjunto das possíveis escolhas:  $\{(P_1, S_1), (P_1, S_2), (P_2, S_1), (P_2, S_2), (P_3, S_1), (P_3, S_2)\}$ . É possível observar que os elementos do conjunto das possíveis escolhas realizadas por Ana diferem dos elementos dos conjuntos que lhe deram origem. Além disso, é perceptível que os eventos são mutuamente excludentes, ou seja, são independentes e sucessivos, o que justifica a escolha de  $\tau_{PM}$  como técnica, pois  $3 \cdot 2 = 6$  possibilidades.

Sobre os tipos de tarefas para as quais as soluções são caracterizadas por agrupamentos ou subconjuntos binários, ternários, ..., agrupamentos com  $n$  elementos, a depender do número

de elementos que vai se tomar de um conjunto gerador com  $m$  elementos, formados, também, sob certas condições, que são  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  correspondentes aos problemas dos tipos arranjo, permutação e combinação, respectivamente, o nível da justificação da técnica escolhida, no nosso caso a  $\tau_{PM}$ , está alicerçado nas diferentes disposições que se podem adotar os elementos dos subconjuntos ou agrupamentos formados que são duas: a ordem e a natureza desses elementos.

Na seção 3.1 apresentamos, de maneira exemplificada, o discurso tecnológico-teórico subjacente à escolha de  $\tau_{PM}$  na resolução de  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ . Na sequência, resgatamos a justificação da referida técnica.

Em relação à  $T_2$ , os agrupamentos formados por  $n$  elementos gerados a partir dos  $m$  elementos distintos de um conjunto finito dado a partir de dois tipos de disposições dos elementos desses agrupamentos: os que são distintos por natureza, quando diferem pelo menos por um de seus elementos, e grupos distintos por ordem, já que ainda que possuam os mesmos elementos, ou seja, ainda que tenham a mesma natureza, diferem pela ordem em que estão dispostos os elementos. Além disso, como os eventos (a escolha de  $n$  elementos tomados dos  $m$  elementos) são independentes uns dos outros, é possível calcular a quantidade de arranjos a partir de uma expressão formada por  $n$  fatores decrescentes e sucessivos a partir de  $m$ , o que pode ser deduzido empregando o Princípio Multiplicativo.

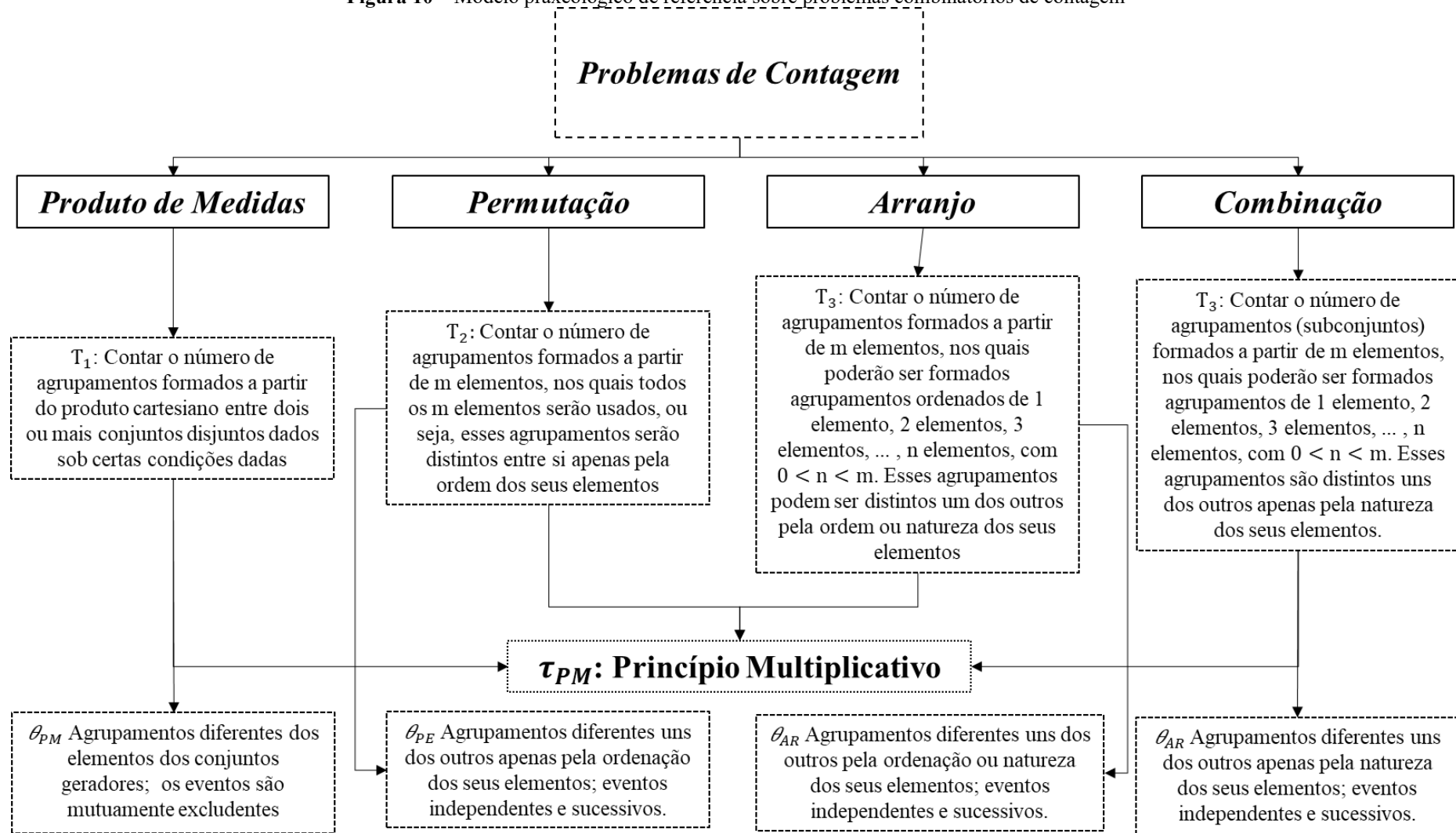
Sobre  $T_3$ , os agrupamentos formados a partir dos  $m$  elementos dados são distintos uns dos outros unicamente pela ordem de seus elementos. Isso implica dizer, que no caso das permutações simples,  $m = n$ . Se para resolvermos tipos de tarefas relativas à  $T_2$ , basta aplicar  $\tau_{PM}$ , o mesmo pode ser realizado tratando-se de  $T_3$ .

Já no que concerne à  $T_4$ , a ordem dos elementos não é relevante na formação dos agrupamentos, pois o que é relevante na contagem é que os agrupamentos formados sejam diferentes uns dos outros por ao menos um de seus elementos, ou seja, a distinção é dada pela natureza dos seus elementos. Como a intenção é calcular a quantidade de subconjuntos de  $n$  elementos tomados de um conjunto  $A$  com  $m$  elementos, pode-se utilizar o mesmo raciocínio feito para arranjos simples, aplicando  $\tau_{PM}$ . Todavia a ordem entre os  $n$  elementos escolhidos é irrelevante. Por isso, a permutação das ordenações possíveis entre esses  $n$  elementos não deve ser considerada.

Consideramos que os discursos tecnológico-teóricos levantados aqui trazem não apenas um nível de justificação para escolha da técnica a ser empregada, mas também uma compreensão do que está sendo de fato contado. E, como já explanado anteriormente, aquilo

que está sendo contado interfere na escolha da técnica utilizada, reforçando ainda mais a necessidade de que esse entorno possa aparecer nas atividades matemáticas realizadas. Abaixo, apresentamos um esquema que sintetiza o nosso MPR relativo aos problemas combinatórios de contagem que assumimos nesta investigação.

**Figura 10** – Modelo praxeológico de referência sobre problemas combinatórios de contagem



Fonte: Elaborado pelo autor

## **7 O MODELO PRAXEOLÓGICO DOMINANTE PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO**

Neste capítulo, buscaremos explicitar e analisar o Modelo Praxeológico Dominante para o ensino de Combinatória no Ensino Médio no Brasil. Para tanto, procuraremos analisar alguns documentos e estudos que podem subsidiar essa construção.

Na primeira parte, analisaremos a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que surgiu como uma referência comum obrigatória para todas as escolas do Brasil, e o Currículo de Pernambuco – Ensino Médio (Pernambuco, 2021), que, por sua vez, além de buscar atender à BNCC, “(...) também considerou as sugestões de professores, estudantes, comunidade escolar e demais instituições da sociedade civil que participaram ativamente do processo de construção.” (Pernambuco, 2021, p. 13).

Na sequência, examinaremos os livros didáticos de Matemática do Ensino Médio que abordam específica e explicitamente os conteúdos combinatórios. Para isto, lançamos mão dos dois livros didáticos mais adotados no Brasil, segundo números divulgados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), que são “Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020) e “Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação” (Dante; Viana, 2020). Cabe destacar que essas obras foram as mais distribuídas de sua categoria, com 932.126 e 299.497 exemplares, respectivamente, de um total 1.433.611 exemplares, segundo dados do PNLD 2021 – Ensino Médio.

De modo geral, as obras aprovadas no PNLD Ensino Médio 2021 (do qual os referidos títulos fazem parte) têm o intuito de promover o desenvolvimento das competências, tanto gerais quanto específicas, e das habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias presentes na BNCC. Para caracterizar o Modelo Praxeológico Dominante, escolhemos analisar esses dois exemplares tendo em vista serem aqueles que tratam da Combinatória nas duas coleções mais distribuídas nas escolas brasileiras.

Na sequência, discutiremos pesquisas que versem sobre a prática docente com vistas ao ensino da Combinatória no Ensino Médio. Dois estudos subsidiaram essa análise: os de Lima (2016) e Ferreira (2019).

Por fim, explicitaremos o modelo praxeológico dominante relativo ao ensino da Combinatória no âmbito do Ensino Médio brasileiro.

## 7.1 A Combinatória na Base Nacional Comum Curricular

Nesta seção, discutiremos de que maneira o campo da Combinatória é apresentado na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), especificamente na etapa do Ensino Médio. A apreciação deste documento justifica-se pelo seu caráter normativo para as escolas da educação básica de todo o país

Não temos, aqui, a intenção de fazer juízo de valor em relação ao dito documento, tampouco enaltece-lo ou deprecia-lo. Nosso propósito está estritamente relacionado à maneira como os conteúdos combinatórios são tratados nele, pautando nossa análise a partir do Modelo Praxeológico de Referência assumido no capítulo anterior.

O primeiro ponto que queremos elencar é que há uma diferença na forma como a base está estruturada em relação à disciplina de Matemática nas etapas dos Ensinos Fundamental e Médio. No Ensino Fundamental, as habilidades estão organizadas segundo unidades temáticas de conhecimento da própria área que são Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

Essa estruturação, ao nosso ver, colocou o campo da Combinatória, na BNCC (Brasil, 2018), em uma posição de retrocesso se compararmos com a organização proposta pelos PCN (Brasil 1997). Neste último, os diversos conteúdos matemáticos estão estruturados em blocos de conteúdos (Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas, Álgebra e funções e Tratamento da informação), dos quais a Combinatória figura, ao lado da Estatística e da Probabilidade, como ramos da Matemática.

Já na BNCC (Brasil, 2018) a Combinatória, ao que parece, perde esse status de área de estudos da Matemática e aparece fragmentada nas unidades temáticas de Probabilidade e Estatística e Números, sendo percebida mais fortemente nesta última. Com isso, não queremos fazer uma defesa do estudo dos conteúdos combinatórios de maneira isolada ou estanque de outros campos da Matemática ou até mesmo de outras áreas do conhecimento. Nossa intenção é trazer luz ao fato de que a apresentação desse campo matemático tão importante, no documento em tela, parece estar caracterizada muito mais como instrumento nos processos resolutivos de problemas de outros campos. do que ser concebida como ramo que possui seu objeto de estudo definido e problemas inerentes.

Outro fato que pode corroborar com o que acabamos de discorrer é a supressão, nesse documento, do termo “Combinatória” que foi substituído por “Problemas de contagem”. Embora reconheçamos que, historicamente, os problemas combinatórios mais tratados no âmbito da escolarização básica sejam, de fato, esses tipos de problemas, não se pode rechaçar

a ideia de que a indicação do trabalho com problemas de contagem pode, por um lado, conduzir ao entendimento de que a Combinatória se limite apenas a essa categoria de problemas e, por outro, tornar-se um fator limitante para o trabalho com outros tipos de problemas combinatórios.

Em relação à estruturação da BNCC de Matemática para o Ensino Médio, existe uma tentativa de integrar os diferentes campos da Matemática de maneira mais consistente. Por isso, nessa etapa, é proposto um conjunto de pares de ideias consideradas fundamentais e que produzem articulações entre as várias unidades temáticas. O conjunto de pares de ideias fundamentais adotados é: variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; e relações e inter-relações (Brasil, 2018).

Os problemas de contagem estão inseridos nas ideias fundamentais “certeza e incerteza” que, normalmente, na Matemática Escolar, também está associado ao estudo de “fenômenos aleatórios, à obtenção de medidas no mundo físico, a estimativas, análises e inferências estatísticas e a argumentações e demonstrações algébricas ou geométricas. Mas ela engloba muitas outras ideias” (Brasil, 2018, p. 520). Mais à frente, o documento explicita que esse par de ideias é inerente a variadas formas de comunicação social, das quais também fazem parte os tipos de problemas supramencionados.

Visando a articulação com as competências gerais da educação básica e com as da própria área da Matemática do Ensino Fundamental, a área de Matemática e suas tecnologias, na etapa do Ensino Médio, está estruturada em 5 competências específicas às quais são relacionadas habilidades a serem alcançadas nessa etapa. Embora no próprio documento se reconheça que uma mesma habilidade pode estar a serviço de mais de uma competência, preferiu-se associar àquela que ela tem maior afinidade.

A competência específica que abrange a habilidade relacionada ao campo da Combinatória é a de número 3 que trata sobre:

Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018, p. 527).

Observa-se a enumeração de diversos campos matemáticos na referida competência que, por conseguinte, serão pormenorizados nas habilidades concernentes à mesma. Todavia, a Combinatória não logrou à mesma condição, o que corrobora com o que afirmamos anteriormente sobre o enfraquecimento no tratamento do referido campo na BNCC.

A habilidade associada à competência específica 3 que trata sobre os problemas de contagem é a: “(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore” (Brasil 2018, p. 529).

Dessa habilidade, podemos fazer alguns destaques. O primeiro deles é que a BNCC de Matemática para a etapa do Ensino Médio (Brasil, 2018) traz poucas considerações sobre os diferentes problemas combinatórios a serem abordados nessa etapa de escolarização, bem como orientações específicas para o seu ensino como, por exemplo, a integração com outros ramos da Matemática, pressuposto da própria Base. Todavia, é preciso ponderar a importância que se tem em considerar o princípio multiplicativo como técnica eficaz para resolver problemas desse tipo, sem a necessidade de fazer uso de fórmulas.

O que podemos inferir é que a BNCC (Brasil, 2018) não apresenta novidades em relação ao ensino da Combinatória, nem em termos de conteúdos propostos nem a respeito de estratégias específicas de ensino que poderiam ser seguidas ou utilizadas por professores da área.

## **7.2 A combinatória no Currículo de Pernambuco – Ensino Médio**

O Currículo de Pernambuco – Ensino Médio (Pernambuco, 2021) surgiu em meio às reformas curriculares que aconteceram em todas as redes de ensino do Brasil impulsionadas pela obrigatoriedade de adequação à BNCC (Brasil, 2018), já que este documento é de caráter normativo e serviu como referência para que essas redes elaborassem seus próprios currículos.

Segundo o próprio documento, para a sua elaboração,

professores de todo o estado contribuíram com a análise dessas habilidades, validando-as ou propondo alterações, bem como o acréscimo de outras habilidades consideradas necessárias para o desenvolvimento das competências matemáticas apresentadas. (Pernambuco, 2021, p. 193).

Em relação ao formato de apresentação da Matemática no Currículo de Pernambuco – Ensino Médio (Pernambuco, 2021), algumas reformulações foram realizadas em relação à BNCC (Brasil, 2018). As unidades temáticas foram retomadas e agrupadas, concentrando-se apenas em três: Números e Álgebra; Geometria e Medidas; e Probabilidade e Estatística. Logo, percebe-se, também, que a Combinatória não aparece explicitamente na denominação dos domínios da Matemática do Ensino Médio.

Apesar de explicitar o resgate das unidades temáticas, o documento não organiza os diferentes conteúdos (denominados de objetos de conhecimento) a partir das mesmas. Tampouco agrupa por competências específicas, como é o caso da BNCC (Brasil, 2018). A apresentação dos conteúdos matemáticos está estruturada em um quadro denominado de organizador curricular, separado por ano de ensino e a partir da retomada das habilidades da BNCC sucedidas das habilidades específicas dos componentes (habilidades elaboradas para o Currículo de Pernambuco) e os objetos do conhecimento (descrição tradicional dos conteúdos).

Indica-se no Currículo de Pernambuco que os conteúdos combinatórios sejam vivenciados no segundo ano do Ensino Médio. Em relação à habilidade retomada da Base Nacional relacionada a esses conteúdos, percebemos que esse documento apresenta uma redação distinta do documento nacional, como podemos perceber no extrato abaixo.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore (Pernambuco, 2021, p. 203).

Apesar de a escrita ter bastante similaridade com aquela apresentada na BNCC (Brasil, 2018), o currículo estadual especificou os tipos de agrupamentos que estão em jogo nos problemas de contagem que são os ordenáveis ou não ordenáveis, remetendo às distintas disposições que podem adotar os elementos nos agrupamentos formados sob certas condições. Todavia, o texto curricular não destaca aqueles agrupamentos que se diferenciam pela natureza dos seus elementos e que são bastante comuns em problemas de contagem dos tipos produto de medidas, arranjo e combinação.

Já a habilidade específica do componente do currículo pernambucano elaborada para a área da Combinatória apresenta a seguinte redação:

(EM13MAT310PE26) Resolver e elaborar situações-problema de contagem, envolvendo agrupamentos que dependam da ordem dos elementos ou não (com ou sem repetição), por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, bem como da Análise Combinatória, utilizando estratégias diversas (Pernambuco, 2021, p. 203).

É admissível considerarmos que essa habilidade avança em relação à contida no currículo nacional, pois, além de abrir possibilidades para o trabalho com problemas cujos agrupamentos formados possuam elementos repetidos ou não, também possibilita o surgimento de outros problemas da Combinatória para além dos problemas de contagem. Todavia, assim como na BNCC, o texto não pontua os agrupamentos formados pela natureza dos seus elementos. Outro aspecto positivo levado em consideração é a ampliação do repertório de

técnicas para resolver esses problemas ao não se restringir apenas aos princípios multiplicativo e aditivo e ao diagrama de possibilidades.

Em relação aos objetos de conhecimento (detalhamento dos conteúdos combinatórios), o currículo estadual apresenta a seguinte composição: “Agrupamentos de elementos que dependam da ordem ou não (com repetição ou não). Princípio multiplicativo e aditivo. Análise Combinatória: permutação, arranjo e combinação” (Pernambuco, 2021, p. 203). É possível constatar, neste trecho, que a Combinatória ganha certa visibilidade, pois o termo “Análise Combinatória” aparece explicitamente no documento em apreciação, diferentemente do analisado anteriormente.

No entanto, esse movimento de enumerar os princípios multiplicativo e aditivo como conteúdos combinatórios pode remeter à ideia de que se tratam de uma categorias de problemas desse campo e não de técnicas que podem ser utilizadas na resolução desses problemas. Outro destaque necessário é sobre a ausência da indicação do produto de medidas como problema de contagem. Isso, em certa medida, pode dar a impressão de que a Combinatória está restrita aos problemas dos tipos permutação, arranjo e combinação ou mesmo fazer uma associação equivocada do produto de medidas com o princípio multiplicativo, conforme já exposto anteriormente.

### **7.3 A Combinatória em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio**

O livro didático tem se constituído, ao longo dos anos, como um dos recursos didáticos que é parte integrante da cultura escolar e, em muitos contextos, o único disponível. Os usos em processos de ensino e de aprendizagem são variados, em todos os níveis educativos, como fonte de consulta, como repositório de exercícios e problemas de naturezas distintas, como guia curricular (o professor ensina os conteúdos indicados pelo livro didático adotado e, em muitos casos, na mesma ordem apresentada) e até mesmo para estabelecer estratégias de ensino (Ferreira; Almeida, 2019; Silva; Pessoa, 2015; Fonseca *et al.*, 2014).

Tendo em vista a importância atribuída a esse recurso didático, na esfera do ensino brasileiro, é que assentamos a necessidade de investigar como a Combinatória está estruturada e organizada nesses livros destinados às classes de Matemática no Ensino Médio. Para subsidiar essa análise, utilizaremos os pressupostos teórico-metodológicos da TAD (Chevallard, 1999), mais precisamente a noção de praxeologia matemática (tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias). Também tomaremos como base a investigação realizada por Ferreira (2019) que,

dentre outras coisas, analisou os saberes combinatórios sob a ótica do referencial anteriormente citado em um livro didático de Matemática para essa mesma etapa da educação básica.

Antes de procedermos às nossas análises, vale ressaltar que o PNLD passou por uma reestruturação a partir do ano de 2021. Anteriormente, as coleções do Ensino Médio eram organizadas em 3 volumes, que correspondiam a cada ano dessa etapa de ensino. Atualmente, elas são organizadas em 6 volumes (com exceção das obras de língua inglesa). No caso específico da Matemática, o volume que trata dos conteúdos combinatórios geralmente é o mesmo que também aborda os saberes relacionados à Estatística e à Probabilidade.

Assim, os livros analisados foram “Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020) e “Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação” (Dante; Viana, 2020). Estes foram os dois livros de Matemática das coleções dos autores anteriormente relacionados que abordam especificamente os conteúdos combinatórios.

De agora em diante, nos empenharemos em analisar os livros didáticos de Matemática supramencionados, buscando categorizar os tipos de tarefas, técnicas utilizadas, e elementos tecnológicos-teóricos em torno das tarefas propostas nas seções destinadas especificamente à Combinatória. Ressaltamos que nos isentamos de explorar possíveis tarefas combinatórias que possam ser encontradas em outras seções dos livros em apreciação ou mesmo em outras obras dessas mesmas coleções.

Iniciaremos nossas análises pelo livro “Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020). O volume está organizado em 4 capítulos, dos quais dois estão destinados aos estudos da Estatística, um ao estudo da Combinatória e o outro à Probabilidade.

Mais especificamente, o terceiro capítulo é o que está reservado aos conteúdos combinatórios que abrange 31 páginas de um total de 160. A referida seção está estruturada da seguinte maneira: apresenta uma introdução que faz uma provocação inicial com alguns problemas de contagem relacionados a situações cotidianas; expõe os princípios multiplicativo e aditivo, ilustrando suas aplicações em tarefas combinatórias; discorre sobre o conceito de fatorial, relacionando-o como possibilidade de escrita simplificada de um produto com muitos fatores que são números naturais consecutivos; e apresenta, especificamente, os problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação e combinação. O capítulo também abrange listas de exercícios resolvidos e a serem resolvidos.

Observa-se que, embora o produto de medidas não seja mencionado explicitamente como um tipo de problema de contagem, é possível identificar a presença de problemas desse

tipo ao longo do capítulo, especialmente na introdução e na apresentação do princípio multiplicativo. Isso pode levar à interpretação equivocada de que essa técnica de contagem constitui uma categoria de problemas combinatórios.

No capítulo em apreciação, encontramos 102 tarefas matemáticas que foram agrupadas em 6 categorias, conforme distribuição na tabela 3 abaixo. É preciso salientar que a ideia de tarefa utilizada aqui é a mesma concebida pela TAD (Chevallard, 1999). Além disso, os tipos de tarefas nomeados com a notação  $T_x$  são aqueles que também aparecem no MPR assumido neste estudo.

**Tabela 3** – Distribuição das tarefas matemáticas do capítulo sobre Combinatória do livro didático “Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade”

| <b>Produto de medidas</b><br>$T_1$ | <b>Fatorial</b> | <b>Arranjo</b><br>$T_2$ | <b>Permutação</b><br>$T_3$ | <b>Combinação</b><br>$T_4$ | <b>Outras tarefas matemáticas</b> |
|------------------------------------|-----------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 10                                 | 13              | 31                      | 31                         | 13                         | 4                                 |

**Fonte:** Acervo da pesquisa

É preciso sublinhar que a distribuição das tarefas matemáticas, especialmente aquelas relacionadas aos problemas de contagem da Combinatória não acontecem de maneira equânime. Outro aspecto que merece notoriedade é o fato de que as tarefas ligadas à ideia de fatorial e suas operações ganham posição de destaque nesse capítulo não apenas pela sua quantidade, mas também pelo tratamento dado às mesmas. Esses tipos de tarefas aparecem como uma seção no capítulo em análise, da mesma maneira que os problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação e combinação. E, apesar de os autores indicarem no início da referida seção que o conceito de fatorial pode auxiliar no cálculo de produtos nos quais os fatores são números naturais consecutivos, esse trabalho com o fatorial desvinculado da resolução de tarefas combinatórias pode, em certa medida, conduzir a uma concepção equivocada de que os tipos de tarefas relacionadas ao fatorial sejam necessariamente problemas combinatórios.

Em relação aos tipos de tarefa ligados aos problemas combinatórios de contagem que aparecem na porção do livro didático analisado, percebemos que aparecem os tipos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , que se relacionam, respectivamente, aos problemas de contagem dos tipos Produto de Medidas, Arranjo, Permutação e Combinação, conforme distribuição da tabela 3. Vale ressaltar que, não nos detivemos à modelização praxeológica das demais tarefas matemáticas como, por exemplo, as relacionadas ao conceito de fatorial, pois as mesmas fogem ao corpus do nosso estudo que são os problemas de contagem.

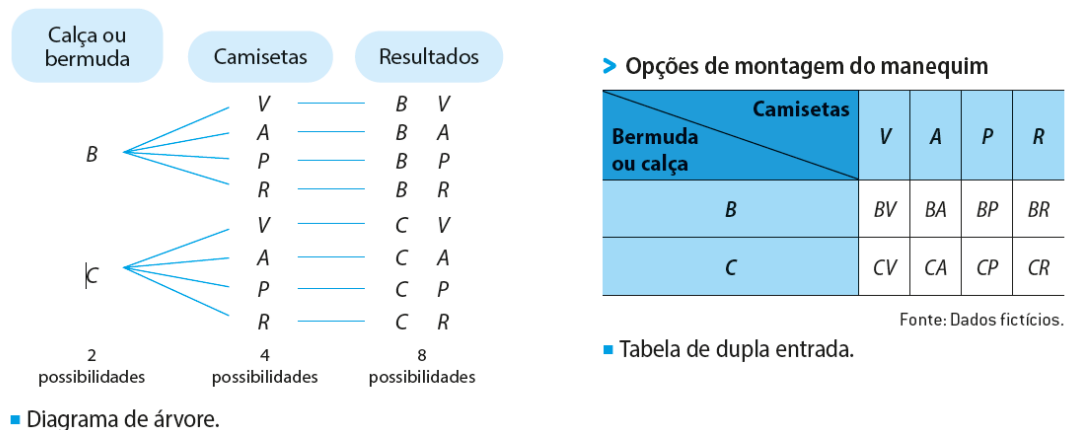
Na sequência, apresentaremos exemplos de tarefas dos tipos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  presentes no livro didático em tela, bem como as técnicas sugeridas e a formação do entorno tecnológico-teórico. Acerca do tipo de tarefas  $T_1$  (Produto de Medidas), que é contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados, sob certas condições dadas, os autores apresentaram a seguinte tarefa:

Margarete trabalha em uma loja de roupas masculinas e ficou responsável por vestir um dos manequins da vitrine durante uma semana. A cada dia, ela precisa apresentar o manequim vestido com uma combinação diferente de roupas. Sem saber quantas peças seriam necessárias para montar as sete combinações, uma para cada dia da semana, ela separou uma calça, uma bermuda e quatro camisetas (verde, azul, rosa e preta). Qual a quantidade de combinações possíveis para se vestir o manequim com as quatro camisetas, a bermuda e a calça? (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020, p. 81, adaptado),

Esta é uma tarefa clássica do tipo  $T_1$  que é bastante comum ser encontrada, com algumas pequenas variações, em livros didáticos de Matemática em diferentes níveis de ensino. Trata-se de um problema pouco complexo, especialmente para a etapa da escolarização proposta que é o Ensino Médio. Isso pode contrastar com o que preceituam Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) e Sriraman e English (2004) ao considerarem que os problemas dessa área da Matemática devem ter o caráter desafiador e fornecer oportunidades para o desenvolvimento de um pensamento matemático rico.

No que tange ao trabalho com a técnica, os autores começam por buscar “recursos para sistematizar o raciocínio, simplificando a contagem das possibilidades” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020, p. 81). Nesse sentido, apresentam o diagrama de árvore e tabela de dupla entrada como recurso para representar todas as possibilidades, conforme figura 11 a seguir.

**Figura 11** – Recursos utilizados para representar possibilidades



**Fonte:** Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p 82)

Concluimos que tanto o diagrama de árvore quanto a tabela de dupla entrada têm, em primeiro plano, a função de se colocar como técnica para a tarefa proposta, uma vez que se trata de recursos nos quais é possível elencar todas as possibilidades. Todavia, as técnicas anteriormente descritas têm alcance limitado, especialmente quando se coloca diante de uma grande quantidade de elementos, inviabilizando o trabalho com elas.

Mas, mais adiante nas explicações trazidas pelos autores, esses recursos, ao que se percebe, estão mais assentes a servir de justificação (tecnologia) para a técnica que é enunciada na sequência que é o princípio multiplicativo. Isso se torna ainda mais nítido quando os autores fazem referência direta ao diagrama de árvores e à tabela de dupla entrada para justificar a utilização do princípio multiplicativo, conforme fragmento apresentado logo em seguida:

**Figura 12** - Formação do entorno tecnológico-teórico relativo ao tipo de tarefas T1 (Produto de Medidas)

Analisando a árvore de possibilidades e a tabela de dupla entrada, podemos perceber que há:

- duas possibilidades para vestir a parte de baixo do manequim;
- quatro possibilidades para vestir a parte de cima do manequim.

Desse modo, como para cada uma das duas possibilidades de vestir a parte de baixo do manequim temos quatro possibilidades de compor a parte de cima, então o número total de maneiras diferentes de vesti-lo é  $2 \cdot 4 = 8$ .

**Fonte:** Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p 82)

Isso se coaduna com o que advogam Santos e Freitas (2017) ao considerarem que, em dado momento ou instituição, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia e, uma tecnologia que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica. É o que acontece, na situação em apreciação, com o diagrama de árvores e a tabela de dupla entrada. Frisamos, também, a importância que tem o princípio multiplicativo como técnica para resolver tarefas desse tipo

Assim, podemos sintetizar a praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas  $T_1$  a partir do quadro 3 abaixo:

**Quadro 4** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T1

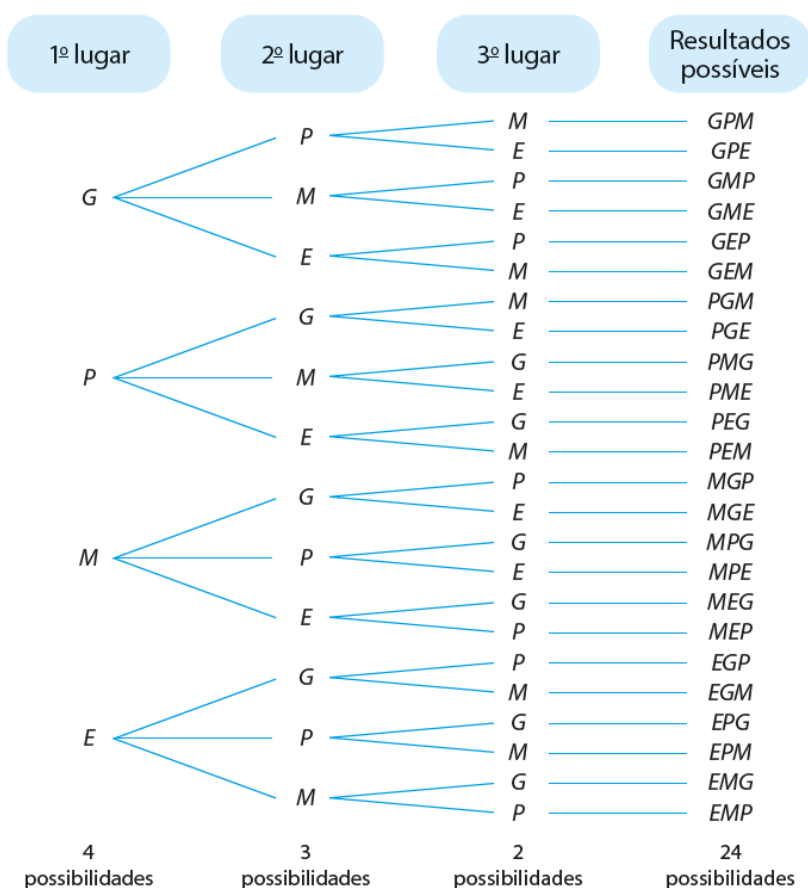
| Tipo de tarefas                                                                                                                                                        | Técnicas                                                                                               | Entorno tecnológico-teórico                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_1$ (Produto de Medidas): Contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama da árvore de possibilidades (<math>\theta_{AP}</math>);</li> <li>• Tabela de dupla entrada (<math>\theta_{TDP}</math>);</li> <li>• Definição de princípio multiplicativo (<math>\theta_{DPM}</math>).</li> </ul> |

**Fonte:** Elaboração própria

A respeito do tipo de tarefas  $T_2$  (Arranjo), que se refere a contar o número de agrupamentos formados a partir de  $m$  elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... ,  $n$  elementos, com  $0 < n < m$ , nos quais os agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou pela natureza dos seus elementos, apresentamos a seguinte tarefa proposta por Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p. 88) “Quatro atletas, Guilherme ( $G$ ), Paulo ( $P$ ), Marcos ( $M$ ) e Everaldo ( $E$ ), disputam uma corrida. Supondo que todos terminem a prova, quantas são as possibilidades de chegada para os três primeiros lugares?”.

No primeiro momento, assim como realizado na tarefa do tipo  $T_1$ , os autores utilizaram o diagrama de árvore para listar todas as possibilidades para os 1º, 2º e 3º lugares, conforme exibido na figura 13 abaixo:

**Figura 13** – Diagrama de árvore com as possibilidades de casos da tarefa do tipo  $T_2$



**Fonte:** Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p. 88)

Como se percebe, o uso desse tipo de técnica pode tornar-se trabalhoso, dada a quantidade de elementos do conjunto gerador e/ou da formação dos agrupamentos. Todavia, os

autores também se utilizaram do diagrama de árvores para justificar a escolha da técnica manifestada na sequência que é o princípio multiplicativo. Além disso, também lançaram mão das distintas disposições que podem adotar os elementos dos agrupamentos elencados acima, que são a ordem e a natureza dos elementos, como se percebe no extrato abaixo:

**Figura 14** – Formação do entorno tecnológico-teórico em torno do tipo de tarefas T2

Observe que essas possibilidades de chegada diferem entre si:

- pela **ordem dos elementos**: *GPM* e *GMP*, por exemplo, representam pódios diferentes com os mesmos elementos (atletas);
- pela **natureza dos elementos**: *GPM* e *GPE*, por exemplo, representam pódios diferentes com elementos diferentes.

**Fonte:** Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p 88)

Embora os autores façam a opção pelo princípio multiplicativo como técnica para resolver a tarefa em análise, mais à frente, fica nítida a opção pela fórmula de Arranjo como técnica para resolver esse tipo de tarefas. Isso pode ser evidenciado nas demais tarefas desse tipo que aparecem resolvidas. Assim, apresentamos o quadro 5 que sumariza a praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas  $T_2$ :

**Quadro 5** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T2

| Tipo de tarefas                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | Técnicas                                                                                                                                                       | Entorno tecnológico-teórico                                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_2$ (Arranjo): Contar o número de agrupamentos formados a partir de $m$ elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., $n$ elementos, com $0 < n < m$ . Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> <li>• Fórmula de Arranjo (<math>\tau_{FA}</math>).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama da árvore de possibilidades (<math>\theta_{AP}</math>);</li> <li>• Definição de Arranjo (<math>\theta_{DA}</math>).</li> </ul> |

**Fonte:** Elaboração própria

Concernente ao tipo de tarefas  $T_3$  (Permutação), no qual se conta o número de agrupamentos formados a partir de  $m$  elementos, em que todos os  $m$  elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos, os autores ilustram com a seguinte tarefa: “vamos calcular quantos anagramas<sup>35</sup> podemos formar a partir da palavra QUEIJO” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020, p. 90).

<sup>35</sup> Um anagrama é formado pela troca de posição das letras de uma palavra, podendo ter ou não significado na língua oficial.

Essa tarefa também aparece comumente em muitos livros-texto de Matemática para exemplificar esse tipo de tarefas. No processo de resolução, os autores inicialmente utilizam-se do princípio multiplicativo, mas a fórmula de Permutação é priorizada como técnica para resolver problemas desse tipo. Já para a formação do bloco tecnologia-teoria, utilizou-se a própria definição de Permutação e também a ideia e fórmula de Arranjo no qual  $m = n$ , ou seja, todos os elementos do conjunto gerador são utilizados na formação dos agrupamentos. Todavia, os autores fizeram uso dos termos  $n$  para representar os elementos de um conjunto dado e  $p$  para expressar os elementos dos agrupamentos. É o que se apresenta logo depois:

**Figura 15** – Formação do entorno tecnológico-teórico do tipo de tarefas T3

Seja  $E$  um conjunto com  $n$  elementos,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Denomina-se permutação simples dos  $n$  elementos qualquer agrupamento ou sequência dos  $n$  elementos distintos de  $E$ .

Se fizermos  $n = p$  na fórmula de arranjos simples  $(A_{n,p})$ , obtemos o total de permutações simples, indicado por  $P_n$ , formado com  $n$  elementos. Observe:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = P_n$$

Portanto, o número de permutações simples de  $n$  elementos é:

$$P_n = n!$$

**Fonte:** Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p 91)

Assim, podemos sintetizar a organização matemática em torno do tipo de tarefas T<sub>3</sub> a partir do quadro 6 abaixo:

**Quadro 6** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T3

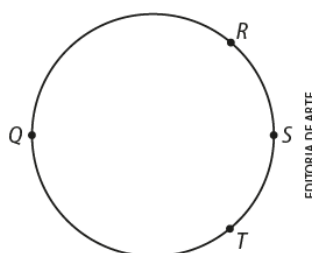
| Tipo de tarefas                                                                                                                                                                                                                            | Técnicas                                                                                                                                                          | Entorno tecnológico-teórico                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| T <sub>3</sub> (Permutação): Contar o número de agrupamentos formados a partir de $m$ elementos, nos quais todos os $m$ elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> <li>• Fórmula de Permutação (<math>\tau_{FP}</math>).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Definição de Arranjo (<math>\theta_{DA}</math>)</li> <li>• Definição de Permutação (<math>\theta_{DP}</math>)</li> </ul> |

**Fonte:** Elaboração própria

Já sobre o tipo de tarefas  $T_4$  que se refere aos problemas em que contamos o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de  $m$  elementos, nos quais esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, ou seja, problemas de Combinação, os autores propuseram a seguinte tarefa:

**Figura 16** – Tarefa do tipo  $T_4$  presente no livro didático

**Situação 6:** Observe os pontos  $R$ ,  $S$ ,  $T$  e  $Q$  na circunferência a seguir. Quantos segmentos de reta podemos traçar com extremidades em 2 desses 4 pontos?



**Fonte:** Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020, p 92)

O processo de elaboração da técnica para resolver esse tipo de tarefas é iniciado elencando alguns casos possíveis como, por exemplo, escolhendo o ponto  $Q$  como uma das extremidades. Partindo desse ponto escolhido, a outra extremidade do segmento de reta poderia ser  $R$  ou  $S$  ou  $T$ . Ou seja, haveria três possibilidades de segmento tomando o ponto  $Q$  como uma das extremidades. Aplicando o mesmo raciocínio aos demais pontos, os autores conduzem o leitor e elencar 12 pares de pontos, pois há 4 pontos e para cada um deles há outras 3 possibilidades de extremidade de segmento ( $4 \cdot 3 = 12$ ), seguindo esse raciocínio. O livro destaca que  $\overline{QR}$  e  $\overline{RQ}$ , por exemplo, representam o mesmo segmento, já que a ordem das extremidades não os distingue. Assim, é preciso dividir o produto pela permutação dos elementos dos agrupamentos, para que a contagem não seja duplicada.

Apesar do uso do princípio multiplicativo para resolver essa tarefa, os autores, nas demais tarefas desse tipo que aparecem resolvidas no livro, fazem a opção pela fórmula de Combinação. Também é possível perceber a utilização da árvore de possibilidades como tecnologia para justificar a escolha da técnica. Posto isto, explicitamos no quadro 7 a síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas  $T_4$ :

**Quadro 7** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T4

| <b>Tipo de tarefas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>Técnicas</b>                                                                                                                                                   | <b>Entorno tecnológico-teórico</b>                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| T <sub>4</sub> (Combinação): Contar o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$ . Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> <li>• Fórmula de Combinação (<math>\tau_{FC}</math>).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama da árvore de possibilidades (<math>\theta_{AP}</math>)</li> <li>• Definição de Combinação (<math>\theta_{DC}</math>)</li> </ul> |

**Fonte:** Elaboração própria

Procederemos, de agora em diante, com a análise do segundo livro didático de Matemática mais distribuído pelo PNLD 2021 e que trata especificamente dos conteúdos combinatórios que é o “Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação” de Dante e Viana (2020). O volume está organizado em três capítulos, dos quais, o primeiro é dedicado exclusivamente à Combinatória, abrangendo 42 das 160 páginas do livro.

No que tange à estruturação do capítulo em análise, percebemos uma organização muito semelhante àquela apresentada no livro “Prisma matemática: estatística, combinatória e probabilidade” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Câmara de Sousa, 2020), analisado anteriormente. O capítulo inicia com uma introdução onde se apresentam tarefas do tipo T<sub>1</sub> – Produto de Medidas, em seguida formaliza o princípio multiplicativo, aborda os problemas de contagem do tipo Permutação juntamente com a ideia de fatorial, trata dos Arranjos e, por fim, das Combinações. Diferentemente do livro anterior que apresentou esses três últimos tipos de problema de contagem em uma única seção, denominada de “Problemas de contagem”, Dante e Viana (2020) expõem cada tipo de problema em uma seção distinta.

Apesar de encontrarmos tarefas relacionadas aos problemas do tipo Produto de Medidas, o termo em si também não aparece no capítulo sobre Combinatória. Vale ressaltar que as tarefas desse tipo apareceram na parte introdutória e também em aplicações do princípio multiplicativo, o que corrobora, mais uma vez, com o que afirmamos anteriormente sobre uma associação errônea desse tipo de problema com a dita técnica, tomando esta como categoria de problemas de contagem.

No capítulo analisado, foi possível encontrar 219 tarefas matemáticas que estão distribuídas na tabela 4 que apresentamos abaixo:

**Tabela 4** – Distribuição das tarefas matemáticas do capítulo sobre Combinatória do livro didático “Matemática em contextos: análise combinatória, probabilidade e computação”

| <b>Produto de medidas</b><br>$T_1$ | <b>Fatorial</b> | <b>Arranjo</b><br>$T_2$ | <b>Permutação</b><br>$T_3$ | <b>Combinação</b><br>$T_4$ | <b>Outras tarefas matemáticas</b> |
|------------------------------------|-----------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| 16                                 | 11              | 48                      | 80                         | 53                         | 11                                |

**Fonte:** Acervo da pesquisa

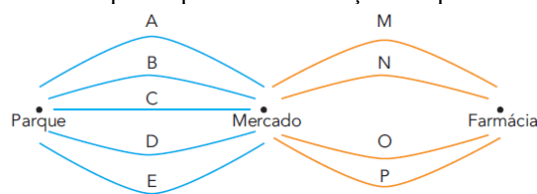
Notamos que a distribuição das tarefas também não acontece de modo igualitário, pois há uma prevalência da quantidade dos problemas de Permutação em relação aos demais. Da mesma maneira que o livro anterior analisado, Dante e Viana (2020) também dão um tratamento especial às tarefas relacionadas ao produto fatorial tanto na quantidade de tarefas desse tipo apresentadas quanto pela separação de uma sessão do capítulo para tratar especificamente das mesmas. Apesar das ideias do produto fatorial aparecerem, a priori, como possibilidade de técnica para resolver os problemas de Permutação, mais adiante, nas sessões das tarefas resolvidas e das atividades propostas, as mesmas recebem status de tarefa. Isso pode, alegadamente, direcionar para uma compreensão equivocada de que as tarefas do tipo produto fatorial figurem também entre os problemas combinatórios.

Concentraremos esforços, doravante, em apresentar exemplos de tarefas dos tipos  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$  presentes no livro didático em apreciação de Dante e Viana (2020), bem como a construção das praxeologias matemáticas em torno desses tipos de tarefas. Assim como procedemos anteriormente, tomaremos as tarefas para as quais os autores apresentam resolução a fim de que possamos ter uma estreita relação entre as praxeologias aqui modelizadas com as que são construídas nos livros analisados.

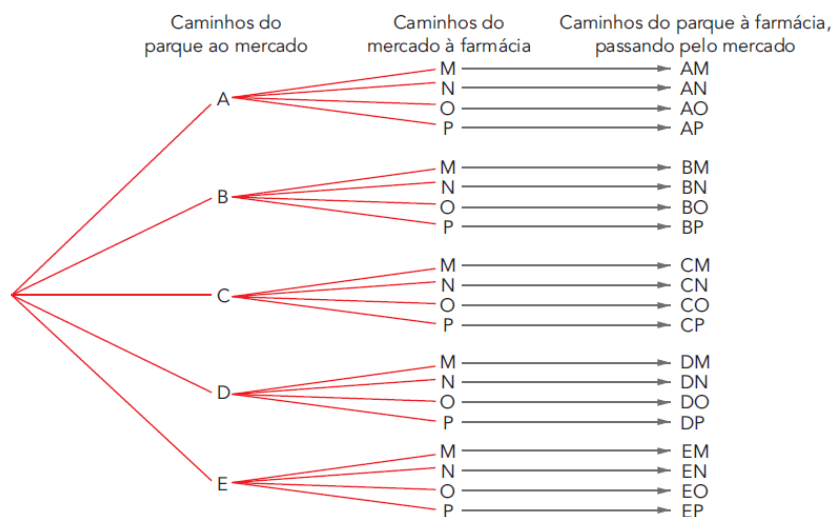
Em relação ao tipo de tarefas  $T_1$ , que se refere aos problemas do tipo produto de medidas, os autores apresentaram a seguinte situação:

Uma pessoa está no parque e quer ir à farmácia, mas antes precisa passar no mercado. Essa pessoa considera 5 caminhos diferentes para chegar ao mercado, saindo do parque, e 4 caminhos diferentes para chegar à farmácia, saindo do mercado. De quantas maneiras essa pessoa pode ir do parque até a farmácia, passando antes pelo mercado? (Dante; Viana, 2020, p. 14, adaptado)

Percebe-se que a tarefa apresentada acima é típica de um problema de contagem do tipo produto de medidas. Para resolvê-la, os autores recorrem inicialmente à enumeração das possibilidades, utilizando alguns recursos para sistematizar essa listagem que são esquemas e o diagrama de árvore, conforme ilustrado nas figuras 17 e 18 a seguir:

**Figura 17** – Esquema para sistematização das possibilidades

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 14)

**Figura 18** – Diagrama de árvore utilizado para representar uma tarefa do tipo T1

Fonte: Dante e Viana (2020, p. 15)

A utilização dos esquemas expostos acima para elencar as possibilidades, de maneira sistemática, também recai, no primeiro plano, como vestígio de técnica para resolver a tarefa proposta. Todavia, a organização matemática apresentada pelos autores não deixa dúvidas do seu status de discurso tecnológico que justifica a técnica escolhida que é o princípio multiplicativo. Isso também se evidencia nas tarefas do mesmo tipo que aparecem resolvidas ao longo do capítulo do livro em apreço. Também aparece, em outra tarefa envolvendo o produto de medidas, a utilização da tabela de dupla entrada na formação do entorno tecnológico-teórico da praxeologia matemática do tipo de tarefas  $T_1$  que aparece sintetizada no quadro 8 abaixo:

**Quadro 8** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas  $T_1$  de Dante e Viana (2020)

| Tipo de tarefas                                                                                                                                                        | Técnicas                                                                                             | Entorno tecnológico-teórico                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_1$ (Produto de Medidas): Contar o número de agrupamentos formados a partir do produto cartesiano entre dois ou mais conjuntos disjuntos dados sob certas condições. | <ul style="list-style-type: none"> <li>Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Diagramas (<math>\theta_{DIA}</math>)</li> <li>Diagrama da árvore de possibilidades (<math>\theta_{AP}</math>);</li> <li>Tabela de dupla entrada (<math>\theta_{TDP}</math>);</li> <li>Definição de princípio multiplicativo (<math>\theta_{DPM}</math>).</li> </ul> |

Fonte: Elaboração própria

Sobre o tipo de tarefas  $T_2$ , que diz respeito aos problemas de contagem do tipo Arranjo, destacamos a seguinte tarefa apresentada pelos autores: “Quantos números de 2 algarismos distintos podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?” (Dante; Viana, 2020, p. 30). Para resolver esta tarefa, duas técnicas são escolhidas pelos autores: a fórmula de arranjo ( $\tau_{FA}$ ) e o Princípio multiplicativo ( $\tau_{PM}$ ). Pelo que se observa, não há predileção entre estas técnicas, pois todas as tarefas do tipo  $T_2$ , que aparecem resolvidas na porção analisada do livro didático, são solucionadas utilizando as técnicas  $\tau_{FA}$  e  $\tau_{PM}$ . Vale ressaltar que, do ponto de vista dos critérios para avaliação de uma técnica, segundo Chevallard (1999), ambas possuem alcance satisfatório e fiabilidade tanto para resolver a tarefa proposta como outras tarefas do mesmo tipo.

Já em relação à formação do entorno tecnológico-teórico, os autores utilizaram-se da definição de Arranjo, especialmente as distintas disposições dos elementos dos agrupamentos formados a partir do conjunto gerador que são as ideias de ordem e natureza. Todavia, Dante e Viana (2020) se detêm apenas à ideia de ordem, não apontando a importância da natureza dos elementos na formação dos agrupamentos, pois, conforme assinala Merayo (2015), no Arranjo, ora os agrupamentos se diferenciam pela ordem dos seus elementos, ora se distinguem pela natureza dos seus elementos (há ao menos um elemento diferente de um agrupamento para o outro).

Assim, podemos resumir a praxeologia matemática, concebida por Dante e Viana (2020), em torno do tipo de tarefas  $T_2$  a partir do quadro 9 que aparece na sequência:

**Quadro 9** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas  $T_2$  de Dante e Viana (2020)

| <b>Tipo de tarefas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <b>Técnicas</b>                                                                                                                                               | <b>Entorno tecnológico-teórico</b>                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| T2 (Arranjo) - Contar o número de agrupamentos formados a partir de $m$ elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , $n$ elementos, com $0 < n < m$ . Esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos. . | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> <li>• Fórmula de Arranjo (<math>\tau_{FA}</math>)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Definição de Arranjo – ordenação dos elementos (<math>\theta_{DA}</math>).</li> </ul> |

**Fonte:** Elaboração própria

Em relação ao tipo de tarefas  $T_3$ , que trata dos problemas de contagem do tipo Permutação, os autores apresentaram várias tarefas desse tipo, dentre as quais podemos destacar a seguinte: “Quantos números diferentes de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?” (Dante; Viana, 2020, p. 22).

Algumas possibilidades de técnica são apresentadas, a princípio, pelos autores como, por exemplo, a resolução por tentativas, que se trata da enumeração das possibilidades, e a árvore de possibilidades. No entanto, é preciso convir que estas técnicas têm um nível de alcance bastante limitado, pois podem não ter eficácia na resolução de outras tarefas do mesmo tipo, especialmente aquelas cujo conjunto gerador e/ou os agrupamentos formados possuam um grande número de elementos. Por isso, entendemos que, os autores as utilizam como justificação das técnicas principais escolhidas que são o princípio multiplicativo e a fórmula de permutação. Assim, o quadro 10 apresenta o resumo da organização matemática em torno do tipo de tarefas  $T_3$  proposta por Dante e Viana (2020):

**Quadro 10** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas  $T_3$  de Dante e Viana (2020)

| <b>Tipo de tarefas</b>                                                                                                                                                                                                             | <b>Técnicas</b>                                                                                                                                                  | <b>Entorno tecnológico-teórico</b>                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_3$ (Permutação) - Contar o número de agrupamentos formados a partir de $m$ elementos, nos quais todos os $m$ elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> <li>• Fórmula de Permutação (<math>\tau_{FP}</math>)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Diagrama da árvore de possibilidades (<math>\theta_{AP}</math>);</li> <li>• Enumeração (<math>\theta_{EN}</math>);</li> <li>• Definição de Permutação (<math>\theta_{DP}</math>).</li> </ul> |

**Fonte:** Elaboração própria

Concernente aos problemas de contagem do tipo Combinação (tipo de tarefas  $T_4$ ), Dante e Viana (2020, p. 36) propuseram algumas tarefas resolvidas das quais destacamos a seguinte: “Julio precisa escolher quatro entre seis opções de frutas para fazer uma salada de frutas. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer essa escolha?”. Reconhece-se que esta tarefa se trata de um problema de Combinação, pois a ordem de escolha das frutas não gera novas possibilidades de saladas. Logo, os autores buscaram, a priori, resolvê-la utilizando a enumeração a partir da ideia de subconjuntos. Contudo, do ponto de vista do alcance da técnica, a enumeração se torna ineficiente em casos em que a quantidade de elementos do conjunto gerador e/ou dos agrupamentos for muito grande.

Por isso, os autores procuram assentar duas técnicas para dar conta não apenas dessa tarefa, mas de todas as tarefas do tipo  $T_4$  que são o princípio multiplicativo e a fórmula de Combinação, sendo esta última a principal. Na elaboração do entorno tecnológico-teórico, além da enumeração, Dante e Viana (2020) se utilizaram da definição de Combinação, construída a partir das definições de Arranjo e de Permutação, como percebemos no extrato abaixo:

**Figura 19** – Formação do entorno tecnológico-teórico do tipo de tarefas T4

A cada combinação de  $n$  elementos distintos tomados  $p$  a  $p$  correspondem  $p!$  arranjos, que são obtidos pela permutação dos elementos da combinação, ou seja:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Calcular o número total de combinações simples de  $n$  objetos tomados  $p$  a  $p$  é o mesmo que perguntar de quantos modos diferentes podemos selecionar  $p$  objetos distintos entre  $n$  objetos distintos dados. Por esse motivo, a **ordem dos elementos não importa** em contextos que envolvem a combinação.]

**Fonte:** Dante e Viana (2020, p. 36)

É possível depreender, a partir do fragmento acima, que os autores frisam aquilo que não é relevante na formação dos agrupamentos, nos problemas envolvendo Combinação, que é a ordem dos elementos, em detrimento daquilo que é constituinte desses mesmos agrupamentos, ou seja, a natureza dos elementos. O quadro 11 abaixo sumariza a praxeologia matemática, constituída por Dante e Viana (2020), em torno do tipo de tarefas T<sub>4</sub>.

**Quadro 11** – Síntese da praxeologia matemática em torno do tipo de tarefas T4 de Dante e Viana (2020)

| Tipo de tarefas                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | Técnicas                                                                                                                                                         | Entorno tecnológico-teórico                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| T <sub>4</sub> (Combinação) - Contar o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de $m$ elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., $n$ elementos, com $0 < n < m$ . Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio multiplicativo (<math>\tau_{PM}</math>).</li> <li>• Fórmula de Permutação (<math>\tau_{FC}</math>)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Enumeração (<math>\theta_{EN}</math>);</li> <li>• Definição de Arranjo (<math>\theta_{DA}</math>).</li> <li>• Definição de Permutação (<math>\theta_{DP}</math>);</li> <li>• Definição de Combinação (<math>\theta_{DC}</math>).</li> </ul> |

**Fonte:** Elaboração própria

Após a apresentação das praxeologias matemáticas em torno das tarefas combinatórias presentes nos livros didáticos analisados e aqui modelizadas, cabem algumas considerações. Ambos os livros possuem abordagens muito similares no que diz respeito aos conteúdos combinatórios, inclusive das tarefas propostas. Em nenhum deles foi possível perceber outros problemas de Combinatória além dos que foram apontados anteriormente.

Com relação as praxeologias matemáticas, podemos classificá-las como sendo praxeologias pontuais, conforme considera Chevallard (1999), pois estão organizadas, de maneira particularizada, sob tipos de tarefas únicos. Todavia, percebemos um movimento em direção às praxeologias locais, que são aquelas que estão centradas sobre uma tecnologia, quando Bonjorno, Giovanni Júnior e Câmara de Sousa (2020) e Dante e Viana (2020) buscam fazer conexão das justificações (tecnologias) das técnicas escolhidas entre os tipos de tarefas T<sub>2</sub> e T<sub>3</sub> e T<sub>2</sub> e T<sub>4</sub>, respectivamente.

## 7.4 A Combinatória nas práticas docentes

Os estudos que nutrem interesse sobre a prática docente, sob os mais diferentes enfoques, têm se constituído como um importante núcleo investigativo nas pesquisas em Educação Matemática, com uma vasta quantidade de trabalhos produzidos, especialmente a partir das últimas décadas do século passado. Todavia, esse movimento não é percebido, ao menos na mesma proporção, quando se trata de estudos que privilegiem a práxis do professor de Matemática voltada para o campo da Combinatória. Este fato é denunciado por Ferreira (2019) que, apontando para a ausência de pesquisas que privilegiem essa temática, buscou analisar as atividades matemática e didática do professor em torno do estudo de saberes combinatórios, sob a égide da TAD.

Mas não somente isto. Ao realizarmos uma busca avançada sobre prática docente em Combinatória, tanto no Portal de Periódicos Capes como na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, nos deparamos com a ausência de trabalhos na primeira base de dados, enquanto, na segunda, foi encontrado apenas um que é o estudo de Lima (2016).

Sendo assim, nesta seção, nos deteremos a analisar aspectos da atividade matemática em torno do ensino de Combinatória a partir dos trabalhos de Lima (2016) e Ferreira (2019). Sublinhamos que nossa apreciação será concisa, pois nos deteremos aos interesses deste estudo e lançaremos mão apenas do que as investigações em tela permitiram evidenciar.

O trabalho de Lima (2016) teve como objetivo analisar o ensino de Combinatória pelos docentes em turmas de 2º ano de Ensino Médio e, para tanto se apoiou na Teoria dos Campos Conceituais e na Teoria dos Conhecimentos Docentes de Professores que Ensinam Matemática. Os participantes da pesquisa foram dois professores de Matemática que tiveram a sequência de aulas sobre os conteúdos combinatórios analisadas.

No que diz respeito ao primeiro professor (chamado pela pesquisadora de P1), foram observadas 11 aulas, durante 7 dias, nas quais foram trabalhados os tipos de tarefas referentes aos problemas de contagem Permutação, Arranjo e Combinação. Todavia, é preciso destacar que a sequência de aulas se inicia com o estudo do fatorial e suas operações.

Quanto às técnicas utilizadas na resolução das tarefas por parte de P1, houve apenas a utilização das fórmulas de Permutação, Arranjo e Combinação, desconsiderando outras abordagens como, por exemplo, o Princípio Multiplicativo. Já sobre a formação do entorno tecnológico-teórico, é possível percebermos, de modo geral, a ausência de um discurso que justifique a escolha das técnicas, pois não foram levadas em consideração as distintas

disposições que podem utilizar os elementos dos agrupamentos formados em cada caso que são as ideias de ordem e natureza.

No entanto, é possível percebermos alguns vestígios de discurso tecnológico no trabalho com os tipos de tarefas envolvendo Combinação, conforme o fragmento que apresentamos: “Definimos como combinação de  $(n)$  elementos tomados  $(p)$  a  $(p)$ , qualquer agrupamento não ordenado (subconjunto) escolhido entre os possíveis” (Lima, 2016, p. 81).

Já sobre as aulas do segundo professor, nomeado de P2, foi analisado, durante 6 encontros, um total de 12 aulas ministradas referente aos conteúdos combinatórios, das quais metade foi destinada ao trabalho com os problemas de contagem do tipo Permutação e as demais igualmente divididas entre os dos tipos Arranjo e Combinação.

As técnicas utilizadas por P2 na resolução das tarefas propostas estavam centradas na aplicação das fórmulas de Permutação, Arranjo e Combinação. Todavia, foi possível perceber a utilização do Princípio Multiplicativo, mas apenas para os dois primeiros tipos de problemas. No que concerne à formação do entorno tecnológico-teórico, o professor em tela lançou mão de definições bastante formais, mas embasadas nas ideias de ordem e natureza dos elementos dos agrupamentos formados em cada caso, mas com ênfase na primeira. No entanto, é preciso explicitar a ausência de um discurso tecnológico em torno do tipo de tarefas envolvendo Permutação.

Por sua vez, o estudo de Ferreira (2019) teve como objetivo a análise das atividades matemática e didática do professor em torno do estudo de Combinatória usando como aporte teórico-metodológico a TAD. Teve como participante da pesquisa um professor de Matemática do Ensino Médio. Nessa pesquisa, foram analisadas um total de 13 aulas, durante 09 dias, nas quais foram abordados os tipos de tarefas relacionados aos problemas dos tipos Produto de Medidas, Permutação, Arranjo e Combinação.

Contudo, o que chama a atenção é a quantidade de tarefas envolvendo o produto fatorial e suas operações: do total de 89 tarefas matemáticas efetivamente trabalhadas durante as aulas analisadas, 37 (42% do total) estão associadas às ideias de fatorial. Os tipos de tarefas combinatórias aparecem em 38 tarefas, sendo que 13 delas tratam dos problemas do tipo Produto de Medidas, 13 referem-se aos problemas combinatórios envolvendo Permutação, 6, Arranjo e 5, Combinação.

No tocante às técnicas utilizadas na resolução dos tipos de tarefas elencados anteriormente, o professor fez uso, prioritariamente, do Princípio Multiplicativo e, para a resolução dos problemas envolvendo Permutação, utilizou-se da fórmula de Permutação. Vale ressaltar que, em muitos momentos das aulas, as fórmulas eram constantemente enunciadas.

Apesar disso, o Princípio Multiplicativo foi, de fato, a técnica mais trabalhada na resolução das tarefas.

Acerca dos discursos que buscam justificar a escolha das técnicas, nas tarefas envolvendo Permutação, observaram-se justificativas de natureza explicativa, relativamente próximas daquelas matematicamente válidas que abrangem a definição de Permutação, ainda que permanecessem implícitas no discurso do professor. No que se refere à constituição do entorno tecnológico-teórico associado às tarefas envolvendo Arranjo, a justificativa apresentada baseia-se na ideia de ordem dos elementos na formação dos agrupamentos, desconsiderando que estes também podem se distinguir pela natureza dos próprios elementos. Todavia, Ferreira (2019) aponta que não foi possível identificar a presença de um discurso tecnológico nas atividades relacionadas ao tipo de tarefas envolvendo Combinação.

Como Ferreira (2019) modelizou as organizações matemáticas em torno dos tipos de tarefas nos quais os agrupamentos são formados a partir de um conjunto gerador, que no nosso caso correspondem aos tipos  $T_2$ ,  $T_3$ , e  $T_4$ , não foi possível elencar a praxeologia em torno do tipo de tarefas  $T_1$ , que correspondem aos problemas do tipo produto de medidas.

É importante estabelecermos algumas asserções para o nosso estudo a partir das pesquisas acima retomadas. Primeiramente, gostaríamos de enfatizar a ausência do tipo de tarefas  $T_1$  na maioria das práticas docentes analisadas ou a sua associação equivocada ao Produto Multiplicativo como se esta técnica em si fosse um tipo de problema combinatório. Essa associação pode ser justificada pelo fato dos livros-textos, conforme já elencado na seção anterior, ainda não apresentarem uma classificação adequada para essa categoria de problemas.

Outro fato que também merece notoriedade é o espaço que o fatorial tem na atividade docente, recebendo, ao nosso entender, status de tipo de tarefas combinatórias ao invés de servir como possibilidade de técnica ou mesmo de evolução da técnica do Princípio Multiplicativo, por exemplo. Isso é ressaltado com bastante nitidez nas investigações de Ferreira (2019) dada a quantidade de tarefas associadas às ideias de fatorial, bem como a ordem em que aparecem nas sequências das aulas em ambas as pesquisas (geralmente antes do trabalho de algum tipo de tarefas e não durante a elaboração de uma técnica que possa resolver essas tarefas).

No que tange às técnicas escolhidas, é nítida a predileção pelo uso das fórmulas, desconsiderando, em muitos casos, o nível de abrangência, facilidade de acesso e confiabilidade que tem o Princípio Multiplicativo para resolver os tipos de tarefas combinatórias que apareceram nas aulas investigadas. Isso se torna ainda mais controverso quando se escolhe fazer uso das fórmulas sem que estas técnicas sejam, de fato, elaboradas, mas apenas enunciadas e

desassociadas de um discurso tecnológico capaz de justificar sua escolha, como foi possível perceber nos estudos em apreciação.

A formação do entorno tecnológico-teórico é outro ponto de alerta a ser destacado. Ora as justificativas não eram suficientemente contundentes para embasar a escolha das técnicas ora esse discurso era inexistente. Embora, conforme considera Chevallard (1999), não raramente, os elementos tecnológicos podem estar integrados às técnicas e, considerando o que assinala Rufino (2015) que, tratando-se dos problemas combinatórios, aquilo que está sendo contando repercute na forma de contar, o fato de apenas enunciar uma técnica e não a elaborar, faz com quem esses elementos de justificação sejam excluídos da formação da organização matemática proposta.

Do ponto de vista da complexidade de uma organização matemática, foi possível perceber apenas praxeologias pontuais, que são praxeologias relativas a um único tipo de tarefas. Isso também pode justificar a ausência do bloco do saber (tecnologia-teoria) em alguns tipos de tarefas, pois, como considera Chevallard (1999), esse bloco raramente se encontra em praxeologias pontuais.

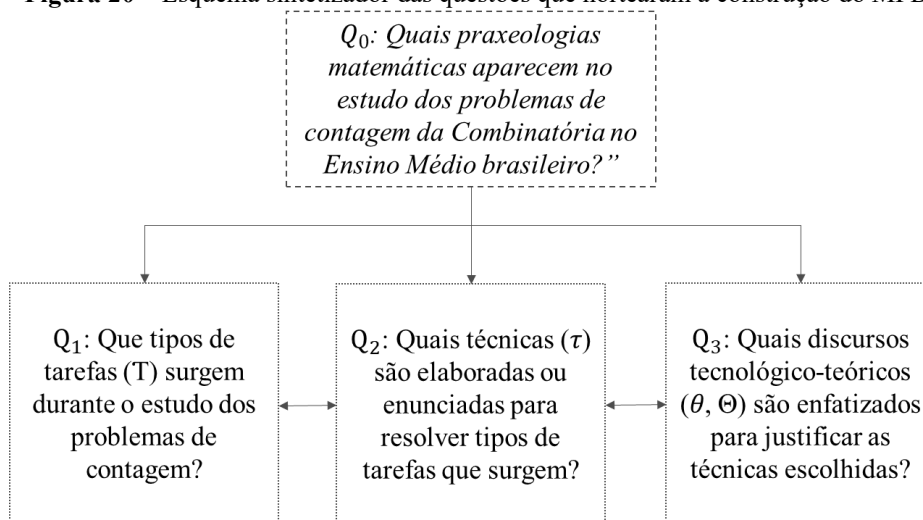
## **7.5 Explicitação do Modelo Praxeológico Dominante para o ensino de Combinatória no Ensino Médio**

Nas sessões anteriores, nos detivemos a analisar de que maneira os saberes combinatórios estão assentados nos documentos de orientação curricular, em livros didáticos de Matemática e em práticas docentes. Partimos da convicção de que as análises empreendidas serviram de sustentação para explicitarmos o Modelo Praxeológico Dominante - MPD em torno dos problemas de contagem do campo matemático da Combinatória, no Ensino Médio brasileiro atual. A incidência de um MPD, conforme preceitua Gáscon (2018), condiciona fortemente o tipo de atividades matemáticas empreendidas em uma certa instituição em torno de um campo matemático em questão. Mas não somente isso. As atividades didáticas também são materializadas sob a influência desse modelo.

Assim, da mesma forma como procedemos na elaboração do Modelo Praxeológico de Referência construído no capítulo anterior, queremos lançar mão de uma questão teórica inicial que será o fio condutor para a explicitação do MPD: “ $Q_0$ : *Quais praxeologias matemáticas aparecem no estudo dos problemas de contagem da Combinatória no Ensino Médio brasileiro?*”. Para responder esta questão  $Q_0$ , elaboramos, também, algumas questões derivadas que servirão de alicerce à construção do modelo em tela: “ $Q_1$ : *Que tipos de tarefas (T) surgem*

durante o estudo dos problemas de contagem?”, “ $Q_2$ : Quais técnicas ( $\tau$ ) são elaboradas ou enunciadas para resolver os tipos de tarefas que surgem?” e “ $Q_3$ : Quais discursos tecnológico-teóricos ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) são enfatizados para justificar as técnicas escolhidas?”. O esquema, a seguir, sintetiza o conjunto de questões que conduziram a estruturação do MPD.

**Figura 20** – Esquema sintetizador das questões que nortearam a construção do MPD



**Fonte:** Elaborado pelo autor

Caminhando em direção da busca por respostas das questões derivadas elencadas acima, especificamente a “ $Q_1$ : Que tipos de tarefas (T) surgem durante o estudo dos problemas de contagem?”, o que se percebe, tanto nas análises realizadas na BNCC e no Currículo de Pernambuco – Ensino Médio como nos livros didáticos de Matemática e nas práticas docentes, é que três tipos de tarefas estão bem fixados quando se trata dos conteúdos combinatórios: são os tipos  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , que correspondem aos problemas dos tipos Arranjo, Permutação e Combinação, respectivamente.

Todavia, é preciso sublinhar que as tarefas do tipo  $T_1$ , que dizem respeito aos problemas do tipo Produto de Medidas também aparecem, mesmo com menos veemência se comparado aos demais tipos de tarefas. No entanto, esses problemas combinatórios, quando existentes nos momentos de estudos, não recebem uma classificação adequada ou aparecem comumente intitulados, de maneira equivocada, como Princípio Fundamental da Contagem pelo fato de que a técnica canônica para resolver esse tipo de tarefas é o Princípio Multiplicativo. Contudo, conforme já elencado anteriormente, esse princípio é uma técnica para resolver não somente os problemas de Produto de Medidas, mas também outros problemas de contagem.

Ainda na enumeração dos tipos de tarefas que emergem durante o estudo da Combinatória, destaca-se o espaço atribuído às atividades relacionadas à ideia de fatorial e às

suas operações. Tanto nos livros didáticos analisados quanto nas práticas observadas em estudos anteriores, o produto fatorial assume o status de um tipo de tarefa, o que leva a compreender que ele é tratado como um problema de contagem. Essa tendência se evidencia não apenas pela quantidade de tarefas dessa natureza, trabalhadas em uma das práticas docentes investigadas, mas também pela posição que ocupa nas sequências de conteúdos dos livros ou das aulas, surgindo sempre antes do estudo dos tipos de tarefas  $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ , em vez de aparecer no momento de elaboração da técnica ou como desdobramento do Princípio Multiplicativo.

Após definir os tipos de tarefas que emergem no estudo dos problemas combinatórios de contagem, é pertinente nos voltar para a pergunta derivada “ $Q_2$ : Quais técnicas ( $\tau$ ) são elaboradas ou enunciadas para resolver os tipos de tarefas que surgem?”.

Se voltarmos o olhar para a BNCC (Brasil, 2018) e o Currículo de Pernambuco – Ensino Médio (Pernambuco, 2021), é possível percebermos a indicação expressa do Princípio Multiplicativo como técnica para resolver os problemas de contagem. Todavia, quando nos encaminhamos para os livros didáticos (que como dito anteriormente, ainda têm um papel importante nas escolhas matemático-didáticas dos professores), bem como às práticas analisadas, em sua maioria, há um favoritismo pelo uso das fórmulas. Ainda há um agravante neste último caso, uma vez que as fórmulas enquanto técnicas são apenas enunciadas, ao invés de elaboradas. Isso, de certo modo, justifica porque é possível perceber uma ausência do discurso tecnológico-teórico relativo às técnicas escolhidas. Por outro lado, essa predileção pelo uso de fórmulas vai na contramão do que preceituam tanto as orientações curriculares como as pesquisas em Educação Matemática voltadas para o campo da Combinatória.

Finalmente, iremos abordar a questão derivada “ $Q_3$ : Quais discursos tecnológico-teóricos ( $\theta$ ,  $\Theta$ ) são enfatizados para justificar as técnicas escolhidas?”. No contexto das tarefas do tipo  $T_1$ , não há qualquer discurso justificativo em relação ao bloco do saber. No entanto, em relação aos outros tipos de tarefas ( $T_2$ ,  $T_3$  e  $T_4$ ), observa-se, em geral, uma tentativa de fundamentação das técnicas escolhidas com base nas diversas configurações que os agrupamentos formados podem assumir, ou seja, a elaboração de um esboço do bloco tecnológico-teórico. Entretanto, é importante notar que apenas um desses aspectos é considerado, que é a ordenação ou não dos elementos na criação de novas possibilidades de agrupamento. A natureza dos elementos é negligenciada como um discurso tecnológico-teórico, desconsiderando sua relevância na formação de agrupamentos em contextos que envolvem Arranjo e Combinação, por exemplo.

Porém, é crucial salientar que, principalmente no contexto das práticas de ensino investigadas, em certos casos, a integração entre técnica e tecnologia é ausente na abordagem

dos diversos tipos de tarefas. Como discutido anteriormente na fundamentação teórica, esse fenômeno faz com que a prática (tarefa-técnica) perca, de certa forma, sua essência.

A seguir, delineamos de forma sucinta o modelo praxeológico dominante para o ensino da Combinatória no Ensino Médio. Gostaríamos de ressaltar que os tipos de tarefas relacionadas aos problemas de contagem que recebem maior ênfase estão identificados em letras maiúsculas, enquanto aqueles que recebem menos destaque, ou que são classificados incorretamente de acordo com o modelo praxeológico adotado, estão destacados em vermelho para facilitar a identificação.

**Figura 21** – Síntese do Modelo Praxeológico Dominante para o ensino de Combinatória no Ensino Médio



Fonte: Elaborado pelo autor

## 8 ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo, voltado para análises matemáticas e didáticas no contexto da Combinatória, nossa abordagem se divide em duas frentes: primeiramente, focaremos na elaboração de um mapa preliminar de questões referentes ao Módulo 0, visando entender as bases do PEP-FP. Em seguida, concentraremos esforços na estruturação de um mapa provisório de perguntas e respostas do PEP vivenciado pelos professores, assumindo o papel de estudantes durante o Módulo 1.

### 8.1 Um PEP-FP para formação de professores sobre o ensino de Combinatória

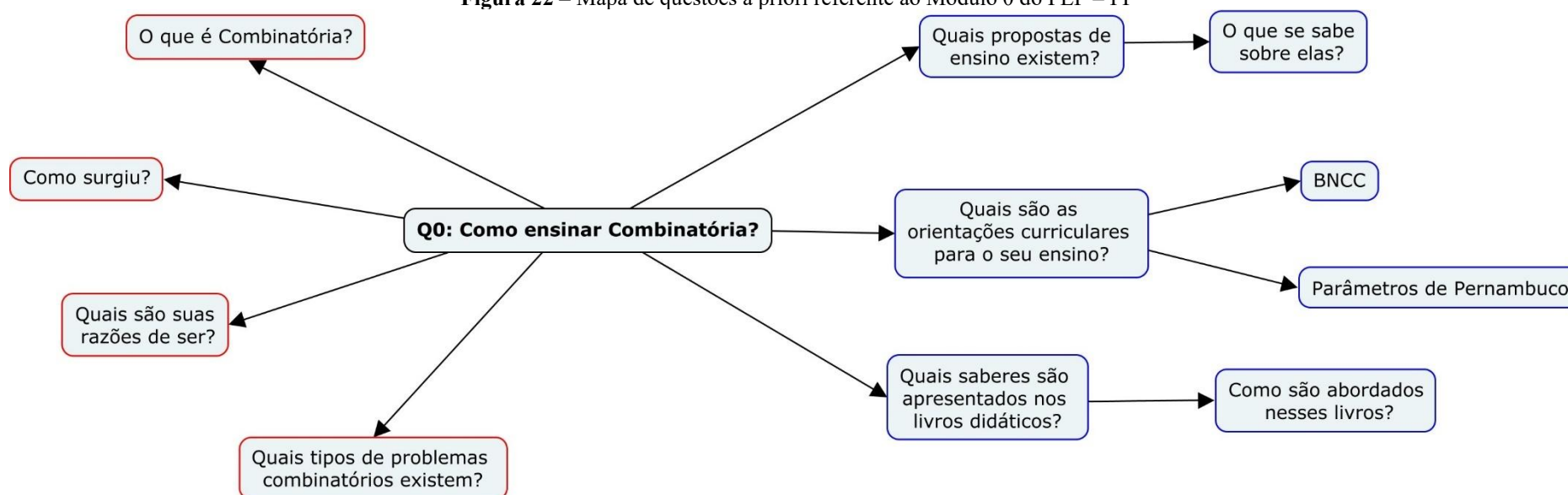
Conforme já mencionado, Ruiz-Olarria, Bosch Casabo e Gascon Perez (2019) apontaram uma ferramenta útil para a reconstrução das praxeologias matemáticas para o ensino, que busca fazer a integração das praxeologias matemáticas e didáticas, que é o Percurso de Estudos e Pesquisas para Formação de Professores (PEP-FP).

Dividido em 5 módulos, o PEP-FP parte do Módulo 0 que se estrutura a partir de uma questão geradora que é uma questão própria da profissão docente que, aqui, adaptamos ao nosso contexto: “ $Q_0$ : Como ensinar Combinatória?”. Buscamos estudar esta questão tendo como referência o entorno institucional dos professores, que neste caso são profissionais das redes públicas de educação básica. Assim, elaboramos um conjunto de questões derivadas, a partir das sugeridas pelos autores anteriormente citados:

*O que é Combinatória? De onde surgiu? Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou se utilizava? Por que se deve ensinar Combinatória? Quais são suas razões de ser na matemática escolar (as estabelecidas explícita ou implicitamente e as potenciais)? Quais propostas de ensino existem? O que se sabe delas? Que saberes combinatórios estão indicados nos documentos de orientação curricular? Quais saberes da Combinatória são apresentados nos livros didáticos? Quais abordagens estão presentes nos livros didáticos?*

Organizamos as questões derivadas acima em mapa de questões que apresentamos a seguir na figura 22.

**Figura 22** – Mapa de questões a priori referente ao Módulo 0 do PEP – FP



**Fonte:** Elaborado pelo autor

Como é possível perceber, da  $Q_0$ , derivam-se questões que podem ser divididas em dois blocos: as questões que tratam dos saberes matemáticos, representadas pelos “retângulos arredondados” grifados na cor vermelha e que estão à esquerda da questão geradora, e as questões mais relacionadas aos saberes didáticos, que aparecem à direita da  $Q_0$  e destacadas na cor azul. Ambos os conjuntos de perguntas são essenciais para que os professores participantes do processo formativo iniciem uma mudança paradigmática, questionando os modelos epistemológicos e didáticos vigentes das instituições a que pertencem.

Conforme preceituam Ruiz-Olarria, Bosch Casabo e Gascon Perez (2019), espera-se que esses docentes desenvolvam esse módulo a partir da busca de respostas em meios mais habituais como artigos científicos, livros didáticos, documentos de orientação curricular, etc. Ressaltamos ainda, coadunados com os mesmos autores, que a proposta do Módulo 0 é de caráter transversal, mantendo-se aberto durante toda a vivência do PEP-FP.

## **8.2 Uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória**

Um dos propósitos deste estudo é suscitar uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória, visto que a abordagem deste campo matemático, em diversos níveis educativos, ainda tem sido centrada na aplicação de fórmulas de maneira segmentada, sem a compreensão adequada dos seus significados subjacentes. Além disso, conforme observado na explicitação do modelo praxeológico dominante, o ponto de partida dos processos de ensino dos tipos de tarefas combinatórias tem sido o estudo de praxeologias pontuais, cujas tarefas têm a intenção de não mais que aplicar uma técnica enunciada (geralmente as fórmulas), corroborando com a manutenção do paradigma de visita às obras como único meio possível de se estudar.

Frente a essa concepção, o Módulo 1 propõe que os professores em formação devam experimentar um PEP como estudantes a fim de que possam se familiarizar com uma forma de fazer uma atividade matemática até então desconhecida, na qual o formador assume o papel de professor, guiando o processo de estudo e investigação com um contrato didático mais flexível que o tradicional.

No caso específico da Combinatória, a emergência de um PEP como dispositivo didático pode corroborar com aspectos importantes que precisam ser levados em consideração e que pontuamos na seção 3.2. Dentre essas considerações, destacamos as de Rosenstein (1997) e Sriraman e English (2004) que chamam a atenção para o fato de que a forma como se conduz o processo de ensino (mobilização de saberes didáticos) implica necessariamente no tipo de saber matemático que pode ser apreendido.

Nesse sentido, um PEP para o ensino de Combinatória, além de apresentar a possibilidade de poder fazer emergir uma possível razão de ser, pode oportunizar a articulação de saberes matemáticos e didáticos, promovendo práticas matemáticas desejáveis, fornecendo oportunidades para o desenvolvimento de um pensamento matemático rico e desafiador, conforme preceituam Lockwood, Wasserman e Tillema (2020). Além disso, também pode propiciar a possibilidade de elaboração de problemas, como defendem Sriraman e English (2004), visto que a dialética da pergunta e da resposta é uma das molas propulsoras da atividade do PEP.

É importante destacar que o campo da Combinatória na Matemática tem sido pouco explorado nas pesquisas em Didática da Matemática, como indicam Vásquez, Barquero e Bosch (2021). Essa lacuna é ainda mais evidente quando se trata de investigações no âmbito da TAD voltadas para a implementação do PEP como dispositivo didático nas aulas de Matemática na educação básica.

No entanto, as mesmas autoras propuseram uma iniciativa para a implementação de um PEP no Ensino Médio sobre Combinatória. Essa proposta foi baseada na formulação de uma pergunta geradora que tinha como objetivo descobrir quanto tempo seria necessário para abrir cada um dos cinco cadeados apresentados. Vale destacar que essa, ao que parece, é a primeira e única proposta que se tem conhecimento (ao menos no domínio das pesquisas em Didática da Matemática dessa natureza), até a realização deste estudo, de um PEP que conduza a um processo de estudos no qual os saberes combinatórios são elementos preponderantes para se responder a uma pergunta elaborada.

Todavia, é preciso sublinhar que a proposta em pauta foi desenhada no contexto espanhol, no qual, pelo que se percebe, é factível a existência de diferentes tipos de cadeados que se utilizam de códigos/senhas para os quais a “digitação” correta deva seguir ou não uma ordem pré-estabelecida (além dos que utilizam chave para abrir e fechar, que são os tipos mais comuns no Brasil).

Entendendo que, conforme defendem Chevallard (2009a) e Florensa, Bosch e Gascón (2019), o PEP busca suscitar o (re)aparecimento do(s) sentido(s) e da(s) funcionalidade(s) dos saberes estudados a partir da combinação de um questionamento teórico e prático da atividade matemática escolar, conforme já mencionado, e isso para a comunidade de estudos envolvida, é que elaboramos a seguinte pergunta geradora: “*Q<sub>0</sub>: Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?*”. Esta é, nos termos da TAD, uma pergunta no sentido forte, pois a elaboração de uma resposta à mesma não se restringirá a uma simples busca de informações ou o mero estudo de uma obra.

Esta pergunta tem sua pertinência atestada pelo fato de que a globalização, a junção de países em blocos econômicos (a exemplo da União Europeia e do Mercosul), a organização de entidades governamentais e não-governamentais, a abertura de comércio entre diversos países, entre outros, têm impulsionado, cada vez mais, a padronização internacional de moedas, de identificação de placas de automóveis, de registro de origem de produtos etc. Isso, de certo modo, pode compelir a se pensar na adoção de um código de identificação pessoal que seja adotado pela comunidade internacional.

Deste modo, da questão  $Q_0$ , pode-se extrair diversas questões derivadas como:

*$Q_1$ : Que códigos de identificação pessoal existem e como funcionam?*

*$Q_2$ : Qual o tamanho da população mundial?*

*$Q_{21}$ : Qual a população de cada país?*

*$Q_{211}$ : Qual o país com maior população?*

*$Q_{212}$ : Qual o país com menor população?*

*$Q_{22}$ : Quantos países há no mundo?*

*$Q_{221}$ : Existe algum código/sigla de uso internacional para os países?*

*$Q_{23}$ : Quais perspectivas de crescimento e/ou decrescimento da população mundial?*

*$Q_3$ : Como estruturar esse código?*

*$Q_{31}$ : Que símbolos poderão ser considerados?*

*$Q_{311}$ : Quantos dígitos serão suficientes para esse código?*

*$Q_{312}$ : Quantos e quais caracteres identificarão a nacionalidade?*

*$Q_{313}$ : Quantos e quais caracteres identificarão o indivíduo?*

*$Q_{32}$ : Como distinguir cidadãos de países diferentes?*

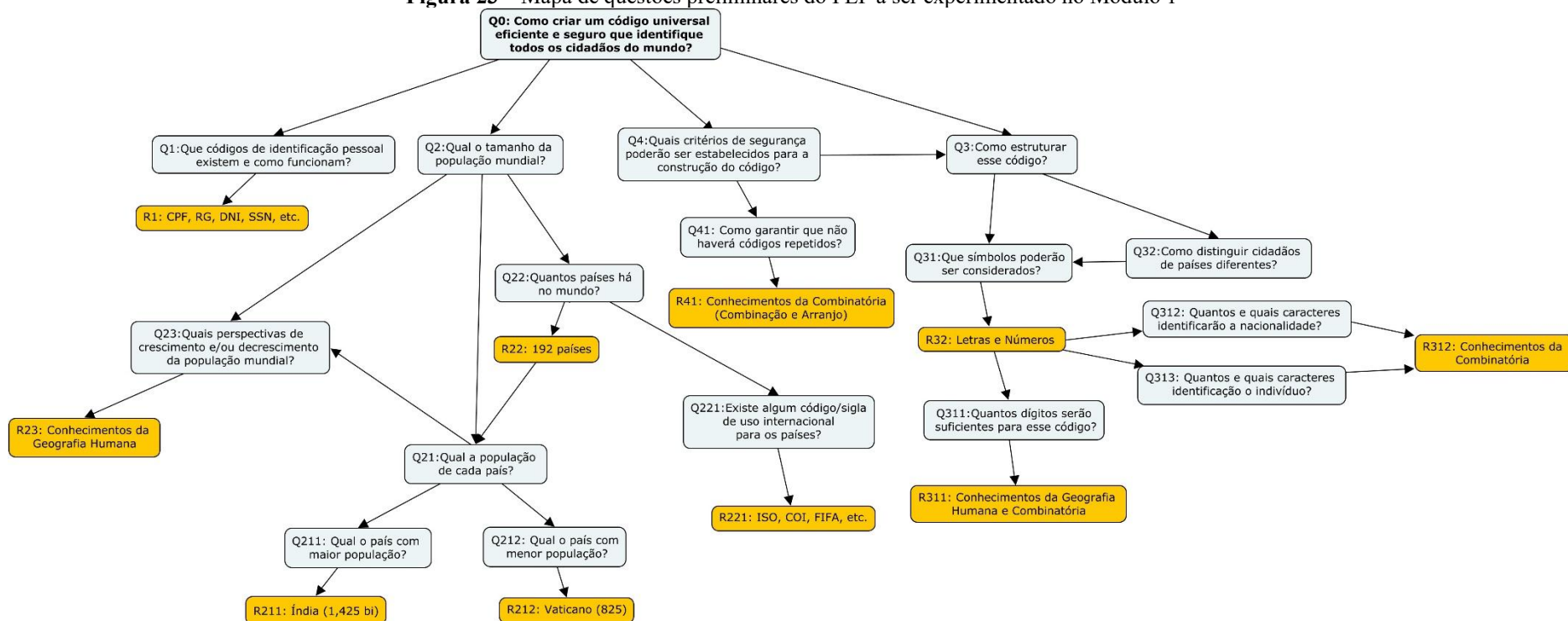
*$Q_4$ : Quais critérios de segurança poderão ser estabelecidos para a construção do código?*

*$Q_{41}$ : Como garantir que não haverá códigos repetidos?*

O levantamento dessas questões derivadas preliminares nos faz notar o caráter interdisciplinar que possui o PEP em torno da questão  $Q_0$ , pois o processo de elaboração das respostas  $R_i^\diamond$  conduzirá ao estudo de saberes e/ou obras da Demografia (ramo da Geografia que se dedica ao estudo das populações e a relação delas com a sociedade e que recebe várias contribuições da Matemática). Isso se evidencia, por exemplo, na questão  $Q_2$  e em suas questões derivadas. Por outro lado, as perguntas  $Q_3$  e  $Q_4$  e suas respectivas questões derivadas aduzem à necessidade dos saberes combinatórios nos momentos de formulação das respostas  $R_i^\diamond$  dessas perguntas.

Entendemos que o enfrentamento dessas questões derivadas (e de outras possíveis) pode garantir a elaboração da resposta  $R^\forall$  à  $Q_0$ . Assim, apresentamos, na figura 23 que segue, o mapa de questões preliminares que busca relacionar alguns elementos de respostas às questões derivadas. Salientamos que, no mapa, “retângulos arredondados” preenchidos na cor cinza exprimem as perguntas e os que aparecem preenchidos na cor amarela, elementos de respostas.

**Figura 23 – Mapa de questões preliminares do PEP a ser experimentado no Módulo 1**



**Fonte:** Elaboração própria

Conforme mencionamos, o mapa apresentado anteriormente tem como objetivo não apenas expor um conjunto de questões derivadas, mas também sugerir elementos de resposta ou indicar possíveis caminhos a serem seguidos na busca por essas respostas. Por isso, é pertinente trazermos alguns esclarecimentos sobre alguns desses elementos de resposta.

A Q<sub>1</sub>, por exemplo, busca identificar os códigos de identificação pessoal existentes e compreender seu funcionamento. Entre os códigos apresentados, destaca-se o Cadastro de Pessoas Físicas (CPF), que inicialmente servia apenas para o registro de contribuintes pela Receita Federal do Brasil. No entanto, com a sanção da Lei 14.534/23, o CPF passou a ser o único número de identificação presente em documentos oficiais brasileiros. Outro exemplo é o Registro Geral (RG), agora denominado Carteira de Identidade Nacional, que anteriormente funcionava como documento de identificação, porém sua emissão e gestão dos números de identificação eram de responsabilidade dos estados. Com a nova lei, os números de identificação foram substituídos pelo CPF.

Fora das fronteiras brasileiras, destacam-se também o Documento Nacional de Identidad (DNI), na Argentina, e o Social Security Number (SSN), nos Estados Unidos, que funcionam como os principais documentos de identificação desses países, sendo equivalentes ao CPF no Brasil.

Sobre a Q<sub>221</sub> “Existe algum código/sigla de uso internacional para os países?”, apontamos como vestígios de respostas as classificações adotadas pelo Comitê Olímpico Internacional (COI) e da Federação Internacional de Futebol (FIFA)<sup>36</sup>, entidades esportivas que congregam maioria absoluta dos países do mundo, além da International Organization for Standardization (ISO) que é um organismo internacional de padronização e normalização.

A elaboração de respostas para a questão Q<sub>311</sub>, “Quantos dígitos serão suficientes para esse código?”, requer conhecimentos das áreas de Geografia e Combinatória. Entre outros fatores, é necessário considerar a projeção da população mundial ao longo dos anos, incluindo taxas de natalidade e mortalidade, além de calcular o total de possíveis códigos de identificação que possam ser gerados a partir desses dígitos, atendendo a essa população.

Esses são alguns exemplos de exploração das respostas às perguntas derivadas que abordamos preliminarmente e que podem ser realizadas pelos professores em formação durante a vivência do Módulo 1. Todavia, o surgimento dessas questões dependerá das escolhas empreendidas pela comunidade de estudos que será responsável pelo levantamento das questões derivadas e da elaboração das respostas às mesmas.

---

<sup>36</sup> Em francês, *Fédération Internationale de Football Association*.

## 9 UM PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA PARA FORMAÇÃO DE PROFESSORES SOBRE O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Como já elencamos, o objetivo central deste estudo é desenvolver, implementar e analisar um processo de formação de professores sobre o ensino de Combinatória, baseado na metodologia do PEP-FP, com um grupo de professores de Matemática do Ensino Médio.

Nos últimos capítulos, especificamente os 6, 7 e 8, estivemos debruçados no *design* deste PEP-FP, com a elaboração dos modelos praxeológicos de referência e dominante relativos ao campo da Combinatória com vistas ao seu estudo no Ensino Médio, bem como com as análises *a priori* dos Módulos 0 e 1, elementos indispensáveis para subsidiar a exploração das análises *in vivo* e *a posteriori* desses respectivos módulos.

Agora, procederemos com a apresentação e a discussão dos resultados produzidos durante a experimentação da formação engendrada nesta investigação.

### 9.1 Análise do Módulo 0

Este módulo tem como ponto de partida uma questão umbilical da profissão docente. Como considera Ruiz-Olarría (2015), essa questão inicial deve ser formulada em termos próprios à problemática docente e fazer referência ao entorno institucional dos professores em formação. Neste caso, tivemos como questão geradora “ $Q_0$ : Como ensinar Combinatória?”.

A vivência deste módulo teve duração de 04 encontros, nos quais os participantes foram conduzidos à elaboração de questões derivadas a partir da  $Q_0$  e, posteriormente, ao levantamento de respostas a essas perguntas.

O primeiro encontro foi marcado, inicialmente, pela apresentação dos participantes, pela explicitação dos objetivos da formação e pela leitura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido e sua assinatura, posteriormente. Na sequência, o formador fez uma breve explanação sobre o que é um Percurso de Estudo e Pesquisa, pois esta era uma inquietação por parte dos professores participantes desde o recrutamento do grupo (nenhum deles havia experimentado ou participado de um processo formativo baseado no PEP e a maioria sequer tinha ouvido falar sobre até então).

Em continuidade, o formador fez a apresentação da proposta da formação e também do funcionamento das sessões (ao menos as que se referiam aos Módulos 0 e 1, já que tiveram a mesma estruturação) que foram conduzidas da seguinte maneira: o formador apresentava uma questão geradora  $Q_0$ , os participantes, separados em grupo, elaboravam questões derivadas a

partir da pergunta  $Q_0$ , cada grupo apresentava as questões derivadas que conseguiam elaborar, no grande grupo (chamado de plenária), era feito o cruzamento das questões dos diferentes grupos para eliminação de possíveis duplicidades ou de questões que tinham pontos em comum e que pudessem conduzir a mesma resposta. Ainda na sessão plenária, eram definidas as questões que a comunidade de estudos iria responder para que, reorganizados em novos grupos, elaborassem respostas às perguntas que cada grupo tinha a incumbência de responder.

Enfatizamos que a reorganização dos participantes em grupo a cada nova etapa (elaboração de questões derivadas e de respostas a essas questões) tinha como propósito incentivar a interação e a colaboração entre todos, mas também permitir que os grupos tivessem uma quantidade equânime de pessoas, pois os participantes nos encontros nem sempre eram os mesmos.

Para dar início às atividades propriamente ditas do Módulo 0, o pesquisador (na posição de formador) apresentou a pergunta  $Q_0$  “Como ensinar Combinatória?” aos participantes e deu algumas orientações, dentre as quais exibiu a comanda do dia (que é uma ficha com orientações da atividade):

#### ATIVIDADE

- Em grupo, discuta e elenque questões derivadas que precisam ser respondidas para dar conta da questão principal “Como ensinar Combinatória?”
- Organize as questões por nível

Por exemplo:

*Questão Derivada 1: ...*

*Questão Derivada 1.1: ...*

*Questão Derivada 1.2: ...*

*Questão Derivada 2: ...*

Elencamos algumas questões que podem ser tidas como questões derivadas. Discutam a pertinência de cada uma delas (se mantém ou retira) e elabore e acrescente novas questões.

1. O que é combinatória?

1.1. De onde surgiu?

1.2 Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava?

...

2. Por que se deve ensinar Combinatória?

2.1 Quais são as razões de ser da Combinatória ensinada na matemática escolar?

2.2 Quais propostas de ensino sobre Combinatória existem?

...

A colocação de algumas questões derivadas para os participantes, conforme ponderam Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Perez (2019) tem por intuito introduzir os professores em formação à prática de gestos básicos do questionamento didático a partir da dialética do estudo e da investigação, também conhecida como dialética da pergunta e da resposta. Nota-se que não utilizamos todas as perguntas derivadas propostas pelos autores e apresentadas no referencial teórico (mais especificamente na seção “2.3 A TAD, a profissão docente e a formação de professores”), pois a intenção era permitir que os participantes fossem autônomos e elaborassem as questões que achassem mais pertinentes.

As orientações citadas anteriormente foram compartilhadas com os grupos através de arquivos no *Google Drive*, facilitando a colaboração e preenchimento entre todos os participantes. O formador também solicitou que cada grupo elegeisse um(a) secretário(a), pessoa responsável para formalizar os registros e preencher o *doc*, e um(a) repórter, que era o(a) participante que tinha a incumbência de apresentar o resultado das discussões do grupo na plenária.

Depois de dadas todas as orientações, os participantes foram divididos em 03 grupos (03 salas temáticas enumeradas de acordo com a quantidade de grupos, já que a plataforma utilizada para a realização do encontro foi o *Google Meet*) e, assim, dar início à realização da atividade proposta. Durante esse processo, o formador visitava as salas a fim de trazer esclarecimentos sobre o desenvolvimento da atividade, bem como auxílio na utilização de algum recurso.

Após a finalização do tempo proposto para as discussões, foi o momento de cada grupo apresentar as questões derivadas que conseguiram elaborar. O quadro 12 apresenta as perguntas fornecidas na versão inicial e que foram mantidas pelos grupos bem como as que foram acrescentadas.

**Quadro 12** – Perguntas elaboradas pelos grupos durante o primeiro encontro do Módulo 0

| <b>Questões fornecidas na versão inicial e mantidas pelos grupos</b>                                                                                                                           | <b>Questões incluídas pelo Grupo 1 – E1</b>                                                                  | <b>Questões incluídas pelo Grupo 2 – E1</b>                                                                                                     | <b>Questões incluídas pelo Grupo 3 – E1</b>                                                                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. O que é combinatória?<br>1.1. De onde surgiu?<br>1.2 Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava?<br>...                                                         | 1.3. Quais princípios básicos da Combinatória?                                                               | 1.2.2. Para que serve a combinatória?<br>1.2.3 Como se classifica a combinatória em termos de situações?                                        |                                                                                                                                                                                                        |
| 2. Por que se deve ensinar Combinatória?<br>2.1 Quais são as razões de ser da Combinatória ensinada na matemática escolar?<br>2.2 Quais propostas de ensino sobre Combinatória existem?<br>... |                                                                                                              | 2.2.1 Quais recursos podem ser utilizados para facilitar o processo de ensino e aprendizagem de combinatória na educação básica (ensino médio)? |                                                                                                                                                                                                        |
|                                                                                                                                                                                                | 3. Como ensinar Combinatória?<br>3.1 Quais tendências matemáticas podemos aplicar no ensino de Combinatória? | 3. Quais representações aparecem com maior frequência nos problemas combinatórios? Diagramas de árvores, listagem etc.?                         | 3. Quais os conceitos atrelados à combinatória?<br>3.1 Quais os conhecimentos prévios que os estudantes precisam apresentar?<br>3.2 Que situações podem ser propostas para introduzir esses conceitos? |

Fonte: Acervo da pesquisa

Como é possível perceber, todos os grupos formularam novas perguntas derivadas a partir da  $Q_0$ , bem como das questões derivadas dadas, seja acrescentando um novo nível ou incluindo perguntas aos níveis já pré-determinados. Também é nítida a escolha unânime de manter as questões propostas inicialmente pelo formador.

No que diz respeito à natureza das perguntas elaboradas, os participantes levantaram diferentes inquietações no que diz respeito aos saberes subjacentes ao campo da Combinatória, a exemplo das perguntas elaboradas pelo Grupo 1 – E1<sup>37</sup> (“Quais princípios básicos da Combinatória?”), pelo Grupo 2 – E1 (“Como se classifica a combinatória em termos de situações?”) e pelo Grupo 3 – E1 (“Quais os conceitos atrelados à combinatória?”). Também houve interesse pelos diferentes usos dos saberes combinatórios em situações diversas, apresentado na questão formulada pelo Grupo 1 – E1 (“Como os profissionais estão utilizando da Combinatória em seu contexto profissional?”). Esse conjunto de questões pode ser associado às praxeologias da profissão docente, formuladas por Chevallard e Cirade (2010), mais precisamente às praxeologias matemáticas a serem ensinadas e às praxeologias matemáticas para o ensino.

Em relação às preocupações mais relacionadas aos gestos necessários para pôr em jogo a Combinatória em um processo de ensino (que podem estar relacionadas às praxeologias didáticas da profissão docente), a quantidade de questões elaboradas foi mais abundante, com 06 questões no total. As perguntas foram: “Quais tendências matemáticas podemos aplicar no ensino de Combinatória?”; “Quais recursos podem ser utilizados para facilitar o processo de ensino e aprendizagem de combinatória na educação básica (ensino médio)?”; “Quais os conhecimentos prévios que os estudantes precisam apresentar?”; “Que situações podem ser propostas para introduzir esses conceitos?”; “Quais recursos podem ser utilizados como mediadores no ensino desses conceitos?”.

Apesar de muitas dessas questões poderem ser frutos de uma experiência de formação sob o paradigma de visita às obras, é preciso reconhecer que os grupos caminharam em diferentes direções e interesses, mas que são preocupações complementares e pertinentes.

Chama-nos a atenção a pergunta elaborada pelo Grupo 1 – E1, no nível 3, que nada mais é do que a retomada da questão  $Q_0$  “Como ensinar Combinatória?” para elaborar uma pergunta no subnível 3.1 que pode ser relacionada ao desenho e gerenciamento do processo de difusão dos saberes combinatórios. Talvez o grupo não tenha a compreensão de que para pensar sobre as praxeologias didáticas, conforme distinguem Chevallard e Cirade (2010), é necessário

---

<sup>37</sup> Utilizamos a designação E1, E2, ... E<sub>n</sub> para diferenciar os grupos de um encontro para o outro já que os mesmos sofriam alteração na sua composição a cada encontro e/ou etapa do processo formativo.

também incorporar as praxeologias matemáticas a serem ensinadas, bem como aquelas necessárias para o ensino. Por isso, a pergunta  $Q_0$  é o ponto de partida deste processo formativo e não um subproduto dele.

Durante a apresentação dos grupos, algumas outras perguntas foram levantadas por alguns participantes como “Existe diferença entre Combinatória e Análise Combinatória?” e “Por que a BNCC apresenta problemas de contagem ao invés de Combinatória?”. No entanto, nenhuma delas constava nos registros dos grupos.

A atividade de formulação de perguntas derivadas no Módulo 0 se estendeu para o segundo encontro. Previamente, reorganizamos e agrupamos as questões elaboradas pelos grupos de acordo com suas similaridades e pontos em comum, disponibilizando-as na comanda da primeira atividade desse encontro. Além disso, acrescentamos às instruções as questões apresentadas nas discussões coletivas que não constavam no material escrito dos grupos, assim como uma inquietação sobre a pertinência de se levar em consideração o currículo ao responder à questão geradora, que estava ausente nas primeiras discussões. A intenção era estimular os grupos, nesse momento reorganizados em dois, a formularem novas questões. Abaixo, expomos a comanda da primeira atividade do segundo encontro.

### **ATIVIDADE**

**Considerando as questões levantadas anteriormente pelos grupos, que outras questões vocês ainda consideram que necessitamos elencar para dar conta da questão geradora “Como ensinar Combinatória?”?**

**1. O que é combinatória?**

1.1. De onde surgiu?

1.2 Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava?

1.3 Quais princípios básicos da Combinatória?

1.4 Para que serve a combinatória?

1.5 Como se classifica a combinatória em termos de situações?

1.6 Quais representações aparecem com maior frequência nos problemas combinatórios?  
Diagramas de árvores, listagem etc.?

**2. Por que se deve ensinar Combinatória?**

2.1 Quais são as razões de ser da Combinatória ensinada na matemática escolar?

2.2 Como os profissionais estão utilizando da Combinatória em seu contexto profissional?

3. Quais preocupações relacionadas ao ensino devem ser consideradas no contexto da Combinatória?

3.1 Quais propostas de ensino sobre Combinatória existem?

3.2 Quais tendências matemáticas podemos aplicar no ensino de Combinatória?

3.3 Quais os recursos didáticos que podem ser utilizados para o ensino de Combinatória?

3.4 Quais são os conhecimentos prévios para o ensino de Combinatória?

#### OUTRAS ORIENTAÇÕES PARA DISCUSSÃO:

- Algumas questões que foram colocadas nas discussões coletivas e não apareceram entre as perguntas levantadas: “Existe diferença entre *Combinatória* e *Análise Combinatória*?”; “Por que a BNCC apresenta *problemas de contagem* ao invés de *Combinatória*?”
- Vocês consideram que é necessário levar em consideração o currículo ao responder à questão geradora “Como ensinar Combinatória?”? Se sim, quais questões poderíamos levantar nesse sentido?

Ao término do tempo destinado às discussões nos pequenos grupos, os participantes foram convidados a apresentarem o resultado das atividades realizadas. O quadro 13 traz a nova configuração das perguntas derivadas formuladas pelos grupos a partir da Q<sub>0</sub>.

**Quadro 13** – Segunda versão das perguntas derivadas formuladas pelos grupos durante Módulo 0

| <b>Questões derivadas reorganizadas e fornecidas aos grupos</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>Novas perguntas elaboradas pelo Grupo 1 – E2</b>        | <b>Novas perguntas elaboradas pelo Grupo 2 – E2</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. O que é combinatória?<br>1.1. De onde surgiu?<br>1.2. Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava?<br>1.3. Quais princípios básicos da Combinatória?<br>1.4. Para que serve a combinatória?<br>1.5. Como se classifica a combinatória em termos de situações?<br>1.6. Quais representações aparecem com maior frequência nos problemas combinatórios? Diagramas de árvores, listagem etc? |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 2. Por que se deve ensinar Combinatória?<br>2.1. Quais são as razões de ser da Combinatória ensinada na matemática escolar?<br>2.2. Como os profissionais estão utilizando da Combinatória em seu contexto profissional?                                                                                                                                                                                                |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 3. Quais preocupações relacionadas ao ensino devem ser consideradas no contexto da Combinatória?<br>3.1. Quais propostas de ensino sobre Combinatória existem?<br>3.2. Quais tendências matemáticas podemos aplicar no ensino de Combinatória?<br>3.3. Quais os recursos didáticos que podem ser utilizados para o ensino de Combinatória?<br>3.4. Quais são os conhecimentos prévios para o ensino de Combinatória?    |                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 4. Como realizar uma avaliação no contexto da combinatória | 4. Como o ensino de combinatória pode ser melhorado a partir do uso de tecnologias digitais?<br>4.1. Quais softwares podem ser utilizados para o ensino de combinatória?<br>4.2. Quais jogos digitais podem ser utilizados para o ensino de combinatória?<br>4.3. Existem perdas de se trabalhar o ensino de combinatória apenas com recursos digitais? |

Fonte: Acervo da pesquisa

Em atenção ao quadro 13, é possível constatar que os grupos mantiveram as mesmas questões derivadas elaboradas no encontro anterior e acrescentaram algumas outras perguntas. O Grupo 1 – E2, por exemplo, produziu apenas uma nova questão derivada que foi “4. Como realizar uma avaliação no contexto da combinatória?”. Já o Grupo 2 – E2, com a preocupação voltada para os diferentes recursos que podem ser implementados no processo de ensino de Combinatória, criou questões derivadas voltadas para o uso de tecnologias digitais nesse processo, como é possível perceber no nível 4 e em suas respectivas perguntas derivadas.

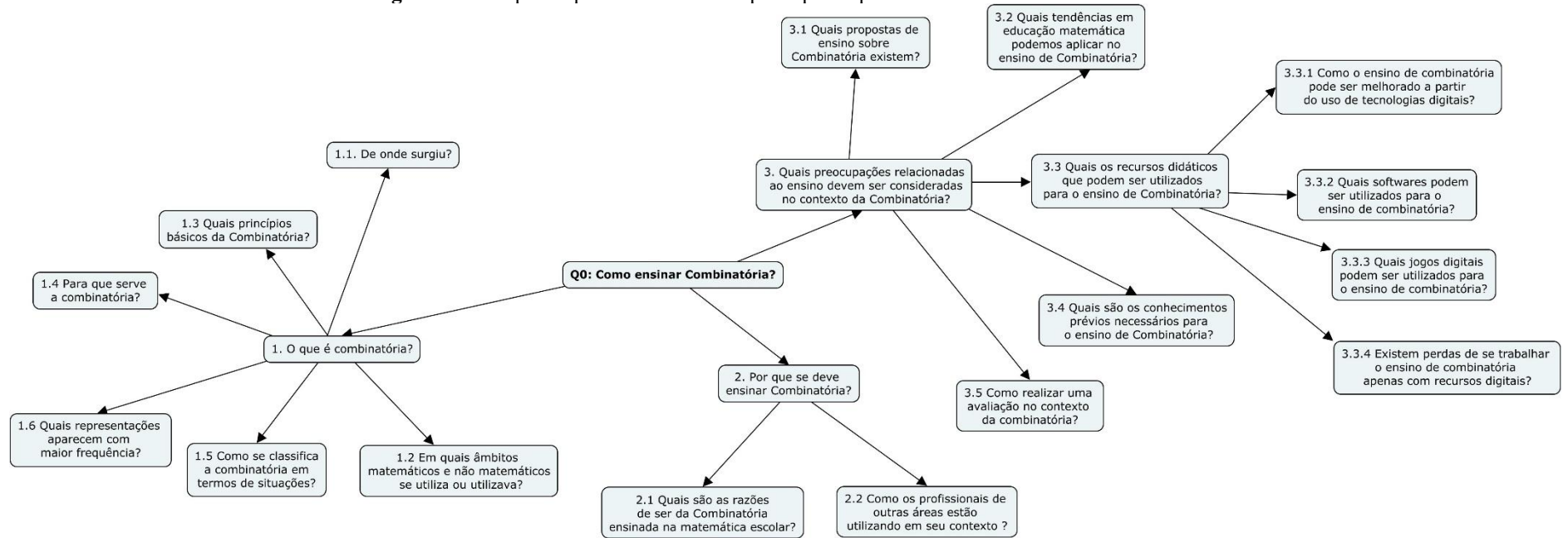
Entretanto, não surgiram questões relacionadas ao currículo, sobre a possível diferenciação entre os termos Combinatória e Análise Combinatória, bem como sobre a supressão desses termos na BNCC.

A ausência de questões relacionadas ao currículo ou aos livros didáticos de Matemática pode ter suas raízes em várias frentes, entre as quais destacam-se: a percepção dos professores de que o currículo é algo transparente, implícito ou naturalizado em suas práticas, o que os leva a não sentir a necessidade de uma análise crítica; a dificuldade em identificar qual currículo adotar como referência, uma vez que o ensino remoto emergencial, em decorrência do isolamento social causado pela pandemia da Covid-19, e as reformas do Novo Ensino Médio resultaram na criação de diferentes documentos pelas redes de ensino; e, por último, embora os livros didáticos ainda ocupem um espaço significativo nas práticas de ensino, muitos professores têm se voltado para pesquisas em sites e canais de vídeos, entre outras fontes.

Todavia, pensando nos objetivos desta investigação, esse distanciamento, em certa medida, tanto do currículo como dos livros didáticos de Matemática, pode ser visto, *a priori*, como algo positivo. Dependendo da evolução do meio M produzido pelo sistema didático em jogo nesse PEP-FP, o afastamento do modelo praxeológico dominante, representado principalmente pelo currículo e pelos livros didáticos, pode proporcionar uma compreensão mais ampla da Combinatória e do seu papel nos processos de ensino e aprendizagem. Esses referenciais, muitas vezes, apresentam a Combinatória de maneira restrita, oferecendo uma abordagem equivocada ou incompleta dos conceitos e ideias inerentes a esse campo, especialmente no âmbito do Ensino Médio.

Logo após a apresentação das questões elaboradas pelo grupo, foi o momento da realização da sessão plenária, na qual as questões a serem investigadas foram validadas e reorganizadas conforme o mapa de questões que apresentamos na figura 24 que aparece na sequência.

**Figura 24** – Mapa de questões elaboradas pelos participantes durante o Módulo 0 do PEP-FP



**Fonte:** Elaborado pelo autor

Se confrontarmos o mapa de questões *a priori*, da Figura 22, com o mapa de questões *a posteriori*, da figura acima, identificamos a ausência de questões ligadas ao currículo e aos livros didáticos, como apontamos anteriormente. Todavia, perguntas relacionadas à epistemologia do campo da Combinatória, como as 1.3 (Quais os princípios básicos da Combinatória?), 1.5 (Como se classifica a Combinatória em termos de situações?) e 1.6 (Quais representações aparecem com maior frequência?), referentes aos diferentes usos desses saberes (possíveis razões de ser e funcionalidades), a exemplo das questões 1.4 (Para que serve a Combinatória?) e 2.2 (Como profissionais de outras áreas estão utilizando em seu contexto?), bem como sobre sua implementação em situações de ensino, como a pergunta 3 (Quais preocupações relacionadas ao ensino devem ser consideradas no contexto da Combinatória?) e todas as suas respectivas questões derivadas, evidenciam a forte presença de gestos próprios da atividade de um PEP, caracterizados, neste caso, pela dialética de estudo e investigação. A esse respeito, Chevallard (2007) destaca que um verdadeiro estudo produz perguntas a serem investigadas. Esse movimento fica bastante delineado na formulação de perguntas derivadas pelos participantes.

Terminada a validação das perguntas a serem investigadas pela comunidade de estudos em formação, o formador apresentou a segunda atividade que consistiu na busca inicial por respostas às questões derivadas levantadas. Para essa etapa, foi mantida a mesma configuração dos grupos estabelecida no início do encontro. Também foi necessário decidir quais questões ficariam a cargo de cada grupo. Após um momento de discussão, foi decidido que o Grupo 1 – E2 ficaria responsável pela questão “3. Quais preocupações relacionadas ao ensino devem ser consideradas no contexto da Combinatória?” e suas respectivas perguntas derivadas e o Grupo 2 – E2 com a incumbência de explorar as questões “1. O que é combinatória?” e “2. Por que se deve ensinar Combinatória?” e todas as perguntas derivadas relacionadas às mesmas.

Antes dos grupos se reunirem para explorar as perguntas sob sua responsabilidade, foram dadas algumas orientações presentes na comanda dessa atividade.

### **Atividade 2**

Agora é o momento de iniciarmos a busca por respostas às questões que foram levantadas. Por isso, é importante considerar os seguintes aspectos:

- É preciso dividir as responsabilidades. Por isso sugerimos que cada integrante do grupo seja responsável por pesquisar uma questão ou um conjunto de questões.

- Verifique se as fontes consultadas são confiáveis e anote-as.
- É importante que o grupo faça uma validação interna das respostas encontradas e, se necessário, refaça as buscas por respostas.
- A busca pelo conhecimento é um processo que não termina. Partindo deste pressuposto, que nova(s) pergunta(s) o grupo pode elencar a partir dos achados das respostas?

Mesa de ajuda:

Portal de Periódicos da CAPES: <https://www-periodicos-capes-gov-br.ezl.periodicos.capes.gov.br/index.php?>

Plataforma SciELO: <https://www.scielo.br/>

Google Acadêmico: <https://scholar.google.com.br/?hl=pt>

Blog do Grupo de Pesquisa GERAÇÃO: <http://geracaoufpe.blogspot.com/>

Essas orientações tiveram alguns objetivos. Em relação à divisão das responsabilidades, a intenção foi de encorajar os professores em formação a enveredarem em gestos próprios da dialética do individual e do coletivo que, segundo Chevallard (2007), consiste em dividir responsabilidades e atribuir tarefas individuais para, em seguida, voltar a incorporar-se a um processo coletivo a fim de dar uma resposta. É nesse momento que se espera que os membros da comunidade de estudo, em grupo, tomem decisões sobre como abordar as questões a serem respondidas, distribuir as tarefas entre os membros do grupo, chegar a um acordo sobre a forma de desenvolver e compartilhar as respostas construídas, entre outras ações (Otero, 2021).

Nessas orientações, também consta um importante indicativo sobre as mídias a serem incorporadas ao meio M (dialética mídia-meio). Chevallard (2008) define uma mídia como qualquer sistema que represente uma parte do mundo natural ou social destinado a um público específico. E, como o desenvolvimento do Módulo 0 se deu de maneira remota e síncrona, seria natural que os participantes do processo formativo utilizassem sites de Internet como mídia. Então, destacamos a importância do grupo em verificar as fontes consultadas.

E, para fornecer algumas ajudas, disponibilizamos um recurso que chamamos de “Mesa de ajuda” que consistia na indicação de alguns sites de buscas confiáveis que poderiam ser utilizados como mídia na elaboração das respostas como, por exemplo, Portal de Periódicos da CAPES, Plataforma SciELO e Google Acadêmico, bases importantes, de notória relevância acadêmica e que reúnem produções da comunidade científica. Além desses, também sugerimos

o blog do grupo de Pesquisa GERAÇÃO, que congrega uma vasta produção científica dos membros desse grupo voltada para o campo da Combinatória. Todavia, o formador também destacou que os grupos poderiam consultar outras mídias, mas sem esquecer de tomar os devidos cuidados de verificação sobre a confiabilidade dessas mídias.

Também foi solicitado que o grupo realizasse internamente a validação das respostas encontradas, com vistas a emergir atitudes próprias da dialética da análise e síntese praxeológica e didática, pois construir uma resposta a uma pergunta não se limita a buscar, pesquisar e estudar conhecimentos relevantes. É essencial analisar esses conhecimentos para determinar o que é útil e funcional na elaboração da resposta desejada.

Por fim, os participantes eram instigados, a todo instante, a terem uma postura própria de alguém que entende que além de buscar informações em alguma mídia, estudá-las e adaptá-las, também formula novas perguntas derivadas. Isso são gestos da dialética do estudo e investigação. Por isso, foi solicitado aos professores que elaborassem novas perguntas a partir dos achados da resposta.

Como o tempo para a realização da atividade proposta foi insuficiente nesse segundo encontro, os professores se restringiram apenas à divisão das responsabilidades entre os participantes de cada grupo, separando as perguntas que cada um teria a incumbência de responder ou elaborar elementos de respostas.

Analisando o material escrito de cada grupo, foi possível perceber uma distinção na distribuição dessas responsabilidades: o Grupo 1 – E2 decidiu que cada membro ficaria responsável por um conjunto de questões, enquanto o Grupo 2 – E2 deliberou que haveria perguntas que ficaram a cargo de uma única pessoa, outras ficaram na responsabilidade de duplas e apenas uma das questões seria atribuição de todo o grupo. Esse movimento realizado pelos grupos coaduna com o que pontua Chevallard (2013) a respeito da dialética do individual e do coletivo. O autor considera que cada membro da comunidade de estudo deve considerar-se livre para prosseguir um estudo e investigar as questões, mas sem deixar de contribuir para o todo.

A busca por respostas pelas questões derivadas levantadas no Módulo 0 aconteceu, de fato, no terceiro encontro, que se deu no dia 04 de setembro de 2023. Nesse dia, o formador iniciou retomando essas perguntas e, em seguida, deu orientações para a primeira atividade que foram repassadas a cada grupo através da comanda.

### Atividade

#### Orientações:

- Em grupo, comecem a elaborar elementos de respostas para as questões levantadas e que ficaram sob a responsabilidade do grupo;
- Procurem registrar separadamente perguntas, respostas e fontes consultadas;
- É preciso que o grupo valide as respostas, adicionando ou retirando as informações que acharem pertinentes;
- Ao final, procurem elaborar novas perguntas a partir das respostas apresentadas.

Além dessas instruções, cada grupo recebeu um *doc*, documento no qual deveriam registrar, através de um quadro contendo três colunas distribuídas entre as questões, os elementos de resposta e as fontes consultadas. Como os grupos se organizaram para a distribuição das responsabilidades da elaboração de respostas desde o encontro anterior, mantivemos a mesma configuração para que eles pudessem continuar com a mesma organização, exceto pelo fato de incluirmos professores que não participaram do encontro anterior.

Os grupos se reuniram em salas temáticas do *Google Meet* e começaram a trabalhar na elaboração das respostas e no preenchimento do *doc*. Após o tempo determinado para a realização da atividade (em torno de 1h20min), os participantes foram reintegrados à chamada principal e, então, iniciaram as apresentações, começando pelo Grupo 1 – E2 que expôs as respostas dispostas no quadro 14 abaixo. Gostaríamos de sublinhar que os textos apresentados nos quadros, fruto do trabalho realizado pelos grupos, encontram-se em sua redação original (tal como foi redigido pelo grupo).

**Quadro 14** – Respostas preliminares das questões derivadas do M0 apresentadas pelo Grupo 1 – E2

| <i>Questões</i>                                                                                                         | <i>Elementos de Resposta</i>                                                                                                                                                                                                                                          | <i>Fonte(s)</i>                                                                                                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. O que é combinatória?                                                                                                | Combinatória como a área da Matemática que estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de certas transformações que originam mudanças na estrutura da composição dos elementos desses conjuntos.                                  | Lima, Ewellen Tenório de. Combinatória, probabilidade suas articulações no currículo dos anos finais do ensino fundamental: o que é prescrito, o que é apresentado e o que se pode fazer? / Ewellen Tenório de Lima. - Recife, 2022.186 f.: il. Página 42 |
| 1.1. De onde surgiu?                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 1.2 Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava?                                             | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Biologia;</li> <li>• Engenharia;</li> <li>• informática;</li> <li>• economia</li> </ul>                                                                                                                                      | FERREIRA, Francinária. Análise Combinatória no Ensino Médio. Uma abordagem sem uso de fórmulas. Juazeiro, 2013, 16 f. Dissertação (mestrado) - Univasf. Profmat.                                                                                          |
| 1.3 Quais princípios básicos da Combinatória?                                                                           | Segundo Biggs (1979) há dois princípios de contagem que podem ser considerados a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação.                                                                                             | VASQUEZ, C.M.R; NOGUTI, F.C.H.. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. Anais do XIII ENEM. Recife, Julho, 2004.                                                                                                     |
| 1.4 Para que serve a combinatória?                                                                                      | A combinatória permite que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem que haja a necessidade de enumerá-los. Hoje ela serve de base a várias teorias da análise matemática: probabilidade, teoria dos números, determinantes, etc. | VASQUEZ, C.M.R; NOGUTI, F.C.H.. Análise combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica. Anais do XIII ENEM. Recife, Julho, 2004.                                                                                                     |
| 1.5 Como se classifica a combinatória em termos de situações?                                                           | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Produto cartesiano;</li> <li>• Combinação;</li> <li>• Arranjo;</li> <li>• Permutação.</li> </ul>                                                                                                                             | PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. Anais... 4 SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília, OUT. 2009b.       |
| 1.6 Quais representações aparecem com maior frequência nos problemas combinatórios? Diagramas de árvores, listagem etc? | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Árvore de possibilidades (o mais indicado);</li> <li>• Listagem sistematizada;</li> <li>• Diagrama/quadro;</li> </ul>                                                                                                        | AZEVEDO, Juliana. Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador? Recife, 2013. 126 f.                                                                                                                 |

|                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Princípio fundamental da contagem;</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Dissertação (mestrado) - UFPE, Centro de Educação, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2013.                                                                                                                                                                                              |
| 2. Por que se deve ensinar Combinatória?                                                                 | A mudança dos métodos de ensinar matemática tem como objetivo principal fazer com que os estudantes se apropriem dos conceitos matemáticos de forma crítica, capaz de agir com autonomia nas suas relações sociais. Para tanto as práticas pedagógicas dos educadores não devem ser impostas e sim, dar a possibilidade do educando construir seus conhecimentos sob uma visão histórico crítica, de forma que os conteúdos sejam apresentados, construídos e reconstruídos influenciando na formação do pensamento e na produção de conceitos por meio de ideias e das tecnologias. | PINTO, Neuza. O problema de Guthrie como metodologia no ensino da Análise Combinatória e Probabilidade<br>Neuza Pinto Especialista em Educação Matemática – UEL – PR<br>neuzapin@seed.pr.gov.br Orientador: Professor Mestre Daniel de Lima<br>profdalima@hotmail.com                                                 |
| 2.1 Quais são as razões de ser da Combinatória ensinada na matemática escolar?                           | Permitir contar e selecionar elementos de um conjunto sem necessariamente listá-lo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | FERREIRA, Francinária. Análise Combinatória no Ensino Médio. Uma abordagem sem uso de fórmulas. Juazeiro, 2013, 16 f. Dissertação (mestrado) - Univasf. Profmat.                                                                                                                                                      |
| 2.2 Como os profissionais de outras áreas estão utilizando da Combinatória em seu contexto profissional? | Profissional da área de biológicas pode-se utilizar da combinatória para o estudo genético.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | MEDEIROS, M. O.; ALVES, S. M.; KIMURA, M. T. Modelo didático aplicado no curso de licenciatura em ciências biológicas da UFR/MT para a compreensão da interação entre a análise combinatória e o estudo genético de uma ninhada de Athene Cunicularia (CORUJA-BURAQUEIRA). Biodiversidade, v. 21, n. 3, 11 out. 2022. |

Fonte: Acervo da Pesquisa

No que diz respeito ao quadro exposto anteriormente, é possível notar, de modo geral, que o grupo trouxe bons elementos de respostas para as questões levantadas. Utilizaram-se de boas mídias nesse processo de elaboração de respostas como, por exemplo, dissertações e artigos científicos publicados em periódicos e em anais de eventos de relevância para a Educação Matemática.

Apenas uma pergunta ficou sem ser respondida no *doc*, que foi a questão “1.1. De onde surgiu?”. No entanto, alguns participantes do grupo apresentaram oralmente a resposta a essa questão após as demais exposições, como percebemos em algumas falas que trazemos abaixo:

“Para não deixar 1.3 sem resposta “De onde surgiu a Análise Combinatória”. A gente encontrou um artigo de Vasquez que traz que os primeiros indícios de Análise Combinatória surgiram com o problema dos quadrados mágicos. Porém, somente no século XVII a teoria da Combinatória apareceu como capítulo de um livro de Matemática. Na verdade, apareceu simultaneamente no século XVII em três livros de Matemática distintos.” [Recorte da fala do Participante 1 do Grupo 1 – E2<sup>38</sup>]

“A Análise Combinatória originou-se com a preocupação de selecionar problemas vinculados ao jogo de azar, segundo Vasquez, no século XVI. Podemos fazer associações dos usos de Combinatória desde os primeiros séculos até hoje.” [Recorte da fala do Participante 2 do Grupo 1 – E2]

Apesar do Participante 1 do Grupo 1, em sua fala, mencionar que daria resposta a questão 1.3 (que já aparece respondida no *doc* do grupo), quando averiguamos seu conteúdo, percebemos que se trata, sem dúvidas, de elementos de resposta à pergunta 1.1.

As análises das respostas apresentadas pelos grupos serão feitas mais adiante, considerando que, no quarto encontro, os grupos realizaram uma segunda apresentação, incluindo respostas a questões que permaneceram em aberto.

O Grupo 2 – E2 também realizou a sua apresentação. Todavia, um dos participantes chamou a atenção para o fato de que as respostas apresentadas foram feitas segundo o combinado do encontro anterior (divisão das responsabilidades), mas que não houve tempo para uma discussão coletiva e posterior validação dessas respostas por parte do grupo. Assim, o quadro 15 revela as respostas preliminares sob a incumbência desse grupo.

---

<sup>38</sup> Utilizamos os termos “Participante 1”, “Participante 2”, “Participante *n*” apenas para diferenciar falas de diferentes pessoas em um mesmo momento. Por isso, em outro momento do texto, se aparecer a fala do “Participante 1”, por exemplo, não significa que seja a fala do mesmo participante. Quando utilizarmos a fala de apenas um participante indicaremos por “Recorte da fala de um participante”.

**Quadro 15** – Respostas preliminares das questões derivadas do M0 apresentadas pelo Grupo 2

| <i>Questões</i>                                                                                  | <i>Elementos de Resposta</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <i>Fonte(s)</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. Quais preocupações relacionadas ao ensino devem ser consideradas no contexto da Combinatória? | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Necessidade da construção do raciocínio combinatório - (Rocha, 2011)</li> <li>• Resolução de problemas (Silva, Andrade e Santos, 2017) <ul style="list-style-type: none"> <li>○ Momento em que se pode introduzir as fórmulas que resolvem determinados tipos de problemas (como Combinações)?</li> <li>○ Os contextos e situações podem ser explorados mais a fundo nos problemas propostos aos alunos?</li> </ul> </li> </ul> | <a href="https://www.cempem.fe.unicamp.br/pf-cempem/elion_souza_da_silva_-_fabiana_chagas_de_andrade_-_jefferson_araujo_dos_santos.pdf">https://www.cempem.fe.unicamp.br/pf-cempem/elion_souza_da_silva_-_fabiana_chagas_de_andrade_-_jefferson_araujo_dos_santos.pdf</a><br><br><a href="https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/934">https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/934</a>                                                                                        |
| 3.1 Quais propostas de ensino sobre Combinatória existem?                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 3.2 Quais tendências matemáticas podemos aplicar no ensino de Combinatória?                      | Metodologia da análise do erro                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | <a href="https://www.researchgate.net/publication/362918361_Contribuicoes_da_metodologia_analise_de_erro_para_o_ensino_e_aprendizagem_da_analise_combinatoria_no_ensino_medio">https://www.researchgate.net/publication/362918361_Contribuicoes_da_metodologia_analise_de_erro_para_o_ensino_e_aprendizagem_da_analise_combinatoria_no_ensino_medio</a>                                                                                                                                       |
| 3.3 Quais os recursos didáticos que podem ser utilizados para o ensino de Combinatória?          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 3.3.1 Como o ensino de combinatória pode ser melhorado a partir do uso de tecnologias digitais?  | Os softwares proporcionam um processo de ensino e de aprendizagem dinâmico. Isso ocorre, pois é possível analisar as situações apresentadas pelo professor instantaneamente, e, em caso de constatação de erro, ele pode ser corrigido pelos próprios alunos de forma imediata.                                                                                                                                                                                          | <a href="https://repositorio.ifes.edu.br/bitstream/handle/123456789/797/TCC_Combinatoria_Tecnologias_Digitais_Revisao_Sistematica.pdf?sequence=1&amp;isAllowed=y">https://repositorio.ifes.edu.br/bitstream/handle/123456789/797/TCC_Combinatoria_Tecnologias_Digitais_Revisao_Sistematica.pdf?sequence=1&amp;isAllowed=y</a>                                                                                                                                                                 |
| 3.3.2 Quais softwares podem ser utilizados para o ensino de combinatória?                        | Geogebra<br>Diagramas de Arbol<br>Rived                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Geogebra<br>( <a href="https://repositorio.ufersa.edu.br/handle/prefix/7904">https://repositorio.ufersa.edu.br/handle/prefix/7904</a> ;<br>chrome-extension://efaidnbmninnibpcapjcgglefindmkaj/ <a href="https://tedebc.ufma.br/jspui/bitstream/tede/1924/2/PabloImperio.pdf">https://tedebc.ufma.br/jspui/bitstream/tede/1924/2/PabloImperio.pdf</a><br><br>Diagramas de Arbol, Rived<br>( <a href="https://docs.google.com/file/d/0B3nOb_rG1">https://docs.google.com/file/d/0B3nOb_rG1</a> |

|                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <a href="https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/15095/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_JogosDid%C3%A1ticosEnsino.pdf">DUhak1nbXBBRW1KaVU/edit?resourcekey=0-lmfOMiofwLILdDKvdl_s7g</a>                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 3.3.3 Quais jogos digitais podem ser utilizados para o ensino de combinatória?              | Jogo da senha<br>Xadrez<br>Cubo da soma                                                                                                                                                                                                                                                             | Jogo da senha<br>( <a href="https://www.jogosematematica.com.br/jogos-digitais/jogo-da-senha-digital">https://www.jogosematematica.com.br/jogos-digitais/jogo-da-senha-digital</a> )<br>Xadrez<br>( <a href="https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/15095/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_JogosDid%C3%A1ticosEnsino.pdf">https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/15095/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_JogosDid%C3%A1ticosEnsino.pdf</a> ) |
| 3.3.4 Existem perdas de se trabalhar o ensino de combinatória apenas com recursos digitais? |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <a href="https://drive.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhY2tfMUtBRGN6LXM/edit?resourcekey=0-XkBnwcAqkphStLQxaKwYQQ">https://drive.google.com/file/d/0B3nOb_rG1DUhY2tfMUtBRGN6LXM/edit?resourcekey=0-XkBnwcAqkphStLQxaKwYQQ</a>                                                                                                                                                                                                                         |
| 3.4 Quais são os conhecimentos prévios para o ensino de Combinatória?                       | Os conhecimentos prévios necessários para o ensino de Combinatória incluem uma base sólida em aritmética, familiaridade com permutações e codificação, compreensão do princípio fundamental da contagem, conhecimento de fatorial e, em alguns casos, conceitos básicos de probabilidade e álgebra. | <a href="https://repositorio.ifrs.edu.br/bitstream/handle/123456789/390/123456789390.pdf?sequence=1&amp;isAllowed=y">https://repositorio.ifrs.edu.br/bitstream/handle/123456789/390/123456789390.pdf?sequence=1&amp;isAllowed=y</a>                                                                                                                                                                                                                 |
| 3.5 Como realizar uma avaliação no contexto da combinatória?                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | <a href="https://www.researchgate.net/publication/362918361_Contribuicoes_da_metodologia_analise_de_erro_para_o_ensino_e_aprendizagem_da_analise_combinatoria_no_ensino_medio">https://www.researchgate.net/publication/362918361_Contribuicoes_da_metodologia_analise_de_erro_para_o_ensino_e_aprendizagem_da_analise_combinatoria_no_ensino_medio</a>                                                                                             |

Fonte: Acervo da Pesquisa

Como podemos perceber, algumas perguntas sob a responsabilidade do Grupo 2 não foram respondidas neste primeiro momento. Contudo, observamos nas linhas do quadro 15 dessas questões, mais especificamente na coluna "Fontes", a indicação de links que sugerem que essas respostas estavam em processo de elaboração. Vale ressaltar que, no campo destinado ao registro das fontes consultadas, os participantes do grupo inseriram apenas links. Ao consultar esses links, constatamos que eles direcionam a dissertações, teses e artigos científicos publicados em periódicos e anais de eventos na área da Educação Matemática.

Ao término da apresentação do *doc* do Grupo 2, um dos participantes ainda endossou a resposta relativa à pergunta 3.4, que trata dos conhecimentos prévios necessários para o ensino de Combinatória, conforme no fragmento apresentado abaixo:

Só para complementar, nesses conhecimentos prévios, reforçar a importância do que os estudantes estão vendo de Combinatória, de situações mais leves, menos complexas a partir dos anos iniciais. Então, como é que o trabalho foi desenvolvido anteriormente para ter essa base, esses conhecimentos prévios? Porque, talvez, caminhe para uma avaliação diagnóstica, antes de desenvolver o trabalho propriamente no Ensino Médio [Trecho da fala de um participante].

Após o momento de apresentação dos grupos, o formador deu as orientações e encaminhamentos para a atividade da semana seguinte, apresentando a seguinte comando:

**Orientações:**

- Concluir o preenchimento do *doc* com as respostas validadas pelo grupo;
- Elaborar uma apresentação a partir do *doc*;
- A apresentação deve ter caráter de defesa dos pontos de vista;
- Lócus - Ensino Médio;
- (Re)organizar as perguntas de acordo com a pertinência.

Durante a exposição dessas orientações, o formador destacou a necessidade de validação das respostas pelos grupos, incentivando os participantes a se engajarem na dialética da análise e síntese praxeológica e didática. Isso se justifica pelo fato de que, durante as apresentações, os participantes evidenciaram que a construção das respostas preliminares foi baseada apenas na busca de informações, sem considerar o que é útil e funcional para a elaboração da resposta desejada. Assim, foi ressaltada a importância da validação das respostas, bem como a

necessidade de os participantes prepararem a apresentação em defesa dos pontos de vista levantados nessas respostas.

O formador também enfatizou que as respostas não deveriam perder de vista a etapa da escolarização a que se destinam, que é o Ensino Médio. Além disso, sugeriu que as perguntas poderiam ser re(organizadas) conforme sua pertinência, pois, em dado momento das apresentações, alguns participantes consideraram trocar a ordem de algumas delas.

No quarto encontro, os grupos se reuniram inicialmente para organizar a apresentação das respostas às perguntas sob sua responsabilidade e realizar a validação das mesmas. Em seguida, começaram a apresentar essas respostas. Cada grupo recebeu um arquivo compartilhado no Google Apresentações para estruturar suas apresentações. Vamos, portanto, apresentar o conteúdo desse arquivo em formato de texto corrido.

O primeiro grupo a se apresentar foi o Grupo 1 – E2<sup>39</sup>. No quadro abaixo, exibimos o conteúdo organizado por eles

**Quadro 16** – Respostas elaboradas pelo Grupo 1 – E2 durante vivência do M0

**1. O que é combinatória?**

Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver problemas em que é necessário “escolher”, “arrumar” e, principalmente, “contar” os objetos de um conjunto.

**1.1. De onde surgiu?**

Formação dos quadrados mágicos, China 2000 a.C.

**1.2 Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava?**

Biologia; Engenharia; informática; economia.

**1.3 Quais princípios básicos da Combinatória?**

Segundo Biggs (1979) há dois princípios de contagem que podem ser considerados a pedra fundamental da combinatória: o princípio da adição e o princípio da multiplicação.

**1.4 Para que serve a combinatória?**

A combinatória permite que se escolha, arrume e conte o número de elementos de determinado conjunto, sem que haja a necessidade de enumerá-los. Hoje ela serve de base a várias teorias da análise matemática: probabilidade, teoria dos números, determinantes, etc.

**1.5 Como se classifica a combinatória em termos de situações?**

Produto cartesiano; Combinação; Arranjo; Permutação.

**1.6 Quais representações aparecem com maior frequência nos problemas combinatórios? Diagramas de árvores, listagem etc?**

<sup>39</sup> O quarto encontro manteve a mesma configuração de grupos do segundo, uma vez que a atividade desenvolvida era a continuação daquela iniciada anteriormente.

Árvore de possibilidades (o mais indicado); Listagem sistematizada; Diagrama/quadro; Princípio fundamental da contagem;

## **2. Por que se deve ensinar Combinatória?**

A mudança dos métodos de ensinar matemática tem como objetivo principal fazer com que os estudantes se apropriem dos conceitos matemáticos de forma crítica, capaz de agir com autonomia nas suas relações sociais. Para tanto as práticas pedagógicas dos educadores não devem ser impostas e sim, dar a possibilidade do educando construir seus conhecimentos sob uma visão histórico crítica, de forma que os conteúdos sejam apresentados, construídos e reconstruídos influenciando na formação do pensamento e na produção de conceitos por meio de ideias e das tecnologias.

### **2.1 Quais são as razões de ser da Combinatória ensinada na matemática escolar?**

Permitir contar e selecionar elementos de um conjunto sem necessariamente listá-lo

### **2.2 Como os profissionais de outras áreas estão utilizando da Combinatória em seu contexto profissional?**

Profissional da área de biológicas pode-se utilizar da combinatória para o estudo genético.

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Se estabelecermos um paralelo entre as respostas apresentadas no Quadro 1 (versão preliminar das respostas elaboradas pelo Grupo 1 – E2) com as exibidas neste Quadro 16, é possível percebermos algumas modificações, especificamente na resposta da pergunta “1. O que é combinatória?”. A questão “1.1. De onde surgiu?” também aparece com resposta, no material escrito. As demais questões aparecem inalteradas em relação às respostas apresentadas anteriormente. A partir de agora, buscamos realizar uma análise das respostas apresentadas pelo Grupo 1 – E2, examinando sua pertinência, clareza e embasamento teórico, confrontando-as tanto com a fundamentação teórica construída nesta pesquisa quanto com o modelo praxeológico de referência adotado.

Iniciaremos pela questão “1. O que é combinatória?”, que teve duas versões de respostas. A primeira delas versa que a Combinatória pode ser entendida “como a área da Matemática que estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de certas transformações que originam mudanças na estrutura da composição dos elementos desses conjuntos”, que está presente no Quadro 14. Como se pode observar, essa definição não alude completamente ao objeto de estudo desse campo matemático, pois restringe às “transformações que originam mudanças na estrutura da composição dos elementos desses conjuntos”, rechaçando, por exemplo, os problemas de contagem do tipo permutação, nos quais as transformações não originam mudança na estrutura da composição dos elementos desses conjuntos, já que os agrupamentos formados se diferenciam uns dos outros apenas pela ordem desses elementos.

Já em relação à segunda versão da resposta dessa questão, “Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver problemas em que é necessário “escolher”, “arrumar” e, principalmente, “contar” os objetos de um conjunto.”, observa-se que ela se aproxima da definição adotada neste estudo, sobretudo se entendermos os verbos “escolher” e “arrumar” como expressões das condições sob as quais se deve “contar” tais objetos. Assim, neste trabalho, assumimos a Combinatória como o ramo da Matemática que estuda o desenvolvimento de métodos e técnicas de contagem de agrupamentos de elementos ou subconjuntos formados a partir de um ou mais conjunto(s) finito(s), que obedeçam a determinadas condições para sua formação e que não necessitem listar ou enumerar esses elementos e/ou agrupamentos.

Para a pergunta “1.1. De onde surgiu?”, o grupo respondeu que os quadrados mágicos da soma foram inventados pelos chineses por volta de 2000 a.C. Contudo, conforme mencionamos anteriormente, Biggs (1979) aponta que, apesar de algumas alegações sobre o surgimento desses quadrados nessa data, a primeira referência é mais recente, por volta do século I ou alguns séculos antes. Os integrantes do Grupo 1 também mencionaram o papiro de Rhind, de origem egípcia, como uma das contribuições mais antigas da Combinatória, o que está de acordo com o que apresentamos na seção 3.1 da nossa fundamentação teórica.

Sobre a questão “1.2 Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava?”, o grupo apenas se restringiu a elencar algumas áreas do conhecimento que se utilizam dos saberes combinatórios como a Biologia, a Engenharia, a Informática e a Economia, sem acrescentar informações durante a apresentação oral. Já sobre a pergunta “1.3 Quais são os princípios básicos da Combinatória?”, foram destacados os princípios da adição e da multiplicação como a base fundamental da Combinatória, o que está em consonância com a nossa posição.

A resposta apresentada pelo Grupo para a questão “1.4 Para que serve a combinatória?” focou mais na definição do campo da Combinatória do que em sua funcionalidade para a Matemática e outras áreas do conhecimento, que era o propósito da pergunta. Isso fica evidente no fragmento: “A combinatória permite escolher, arranjar e contar o número de elementos de determinado conjunto, sem a necessidade de enumerá-los”. No entanto, a resposta é complementada com algumas aplicações desse campo na Matemática, como em “probabilidade, teoria dos números, determinantes, etc.”. Além disso, um dos integrantes do grupo destacou oralmente a importância da Combinatória para a criptografia e a proteção de dados.

Já sobre a pergunta “1.5 Como se classifica a combinatória em termos de situações?”, o grupo destacou os problemas de contagem nos tipos "Produto Cartesiano, Combinação, Arranjo e Permutação". Ressaltamos que as primeiras produções que categorizam esses problemas de contagem utilizam o termo "Produto Cartesiano", que atualmente chamamos de "Produto de Medidas". Também merece destaque o uso do termo "situações" na formulação dessa questão. Acreditamos que isso foi influenciado pela fonte consultada<sup>40</sup> para a elaboração da resposta, uma vez que ela se baseia na Teoria dos Campos Conceituais, na qual esse termo é amplamente utilizado.

No que concerne às representações (simbólicas) que aparecem com maior frequência nos problemas combinatórios (questão 1.6), o grupo elencou a árvore de possibilidades como a mais indicada, além da listagem sistematizada, diagrama/quadro e o Princípio Fundamental da Contagem. Pelo que se percebe, o que o grupo considera como representações, no âmbito da TAD, podemos considerar como técnicas para resolver determinadas tarefas ou, em outras situações, como vestígios de discursos tecnológicos, como elencamos nos modelos praxeológicos de referência e dominante que explicitamos anteriormente. Mais à frente teceremos comentários sobre esta resposta elaborada.

Em resposta à pergunta “2. Por que se deve ensinar Combinatória?”, os participantes do Grupo 1 destacaram a importância de centrar o ensino de Matemática em práticas que favoreçam a construção crítica de conceitos pelos estudantes. Além disso, enfatizaram a necessidade de permitir que os alunos construam seus próprios conhecimentos de forma autônoma, com a mediação das tecnologias. Como é evidente, essa abordagem não se aplica estritamente ao ensino da Combinatória, mas pode ser um pressuposto para o ensino da Matemática de maneira geral.

Na resposta à questão “2.1 Quais são as razões de ser da Combinatória ensinada na matemática escolar?”, os professores do grupo, ao que parece, retomaram a definição da Combinatória para justificar seu ensino nas escolas, desviando-se do verdadeiro propósito da pergunta. Alguns participantes tentaram justificar a escolha desse argumento citando o caso dos números de celular que tiveram o acréscimo do dígito 9 para aumentar a capacidade da rede de telefonia móvel. Isso nos traz a compreensão de que situações da vida em sociedade emergem nas reflexões dos professores sobre as razões de ser da Combinatória ensinada.

Para encerrar sua apresentação, o Grupo 1 – E2 respondeu à pergunta “2.2 Como os profissionais de outras áreas estão utilizando a Combinatória em seu contexto profissional?”

---

<sup>40</sup> Refere-se ao artigo publicado por Pessoa e Borba (2009).

com o exemplo de profissionais da área de Biologia que utilizam esses conhecimentos para estudos genéticos.

Na sequência, o formador questionou os participantes do grupo sobre alguns pontos observados na apresentação. O primeiro ponto diz respeito à definição de Combinatória apresentada pelo grupo. O formador destacou a importância de considerar outras definições que abordem de forma mais abrangente o objeto de estudo desse campo, pois "contar" parece ser a ideia mais básica e comum nos problemas combinatórios. No entanto, esse campo também abrange outros tipos de problemas, como os de existência. De certo modo, essa argumentação se fundamenta na compreensão de Chevallard e Cirade (2010), que destacam a importância de a formação de professores não se limitar apenas aos conteúdos a serem ensinados, representados pelas praxeologias a serem ensinadas. Ela deve também incluir as praxeologias para o ensino, que envolvem os saberes matemáticos necessários para delimitar, interpretar, relacionar e explicitar as razões de ser da Matemática a ser ensinada.

Ainda sobre esse aspecto, um participante sugeriu revisitar a definição concebida pelo grupo de pesquisa Geração, da UFPE, que foi estruturada a partir das contribuições de matemáticos importantes como João Bosco Pitombeira e Elon Lages Lima, além de pesquisadores da Psicologia Cognitiva. Vale ressaltar que essa definição, assumida nas investigações desse grupo de pesquisa, possui estreita relação com a abordagem que consideramos neste estudo.

O formador também destacou a ausência de menções aos contextos matemáticos em que a Combinatória é ou foi utilizada, como, por exemplo, no campo da Probabilidade. Em relação à resposta à pergunta 1.3, a posição defendida pelo grupo foi ratificada. No entanto, o formador chamou a atenção para a importância de compreender quando a aplicação desses princípios está fundamentada no campo da Combinatória e quando não, retomando o que argumentam Benítez e Brañas (2001) ao considerarem que a simples aplicação das regras da soma e do produto não caracteriza necessariamente um problema desse campo.

Outra questão discutida com a plenária foi a 1.6 que diz respeito às representações, pois o grupo elegeu a árvore de possibilidades como a mais indicada. Sobre esse aspecto é preciso considerar que a árvore de possibilidades é uma ferramenta visual que ajuda os estudantes a compreenderem e visualizarem todas as opções possíveis em problemas combinatórios. No entanto, levantamos um ponto importante: a árvore de possibilidades pode não ser a estratégia mais eficiente quando o objetivo não é listar todas as possibilidades, o que está mais próximo daquilo que é esperado no âmbito do Ensino Médio. Um dos participantes trouxe algumas contribuições nesse sentido, que estão contidas nos fragmentos de fala abaixo.

“Quando falou na árvore de possibilidades como mais indicado em um dos textos que eu coloquei, que trata de métodos de ensino de combinatória, o autor (cujo nome não lembro mais) coloca que a árvore de possibilidades não é muito indicada para o Ensino Médio. Não é o método mais indicado para o Ensino Médio. Eu não concordo com o que ele colocou, porque a árvore de possibilidades também traria uma visualização diferente desses probleminhas de combinatória. Quando a autora foca muito no princípio fundamental da contagem (que eu sou defensora) e esquece outros tipos de representação que são mais intuitivos para os estudantes, acaba limitando a compreensão deles. No Ensino Médio, eles podem desenvolver essas habilidades melhor, e dependendo da turma, pode ser que abandonem o desenho da própria árvore de possibilidades. No entanto, dizer que não é indicado vejo como um problema, pois tira possibilidades do estudante de pensar em outras estratégias.” [Recorte da fala de um professor]

A esse respeito, é importante destacar que é necessário encontrar um equilíbrio entre o uso de métodos visuais (como a árvore de possibilidades) e a introdução de técnicas que se encaminhem para um maior nível de abstração (como o Princípio Multiplicativo). A visualização pode ajudar na compreensão inicial, enquanto o Princípio Multiplicativo, por exemplo, contribui para a eficiência e para a resolução tarefas mais complexas, em que o número de elementos do conjunto gerador ou dos agrupamentos formados seja muito grande.

Outra provocação realizada foi sobre o não aparecimento das fórmulas, tão presentes no modelo praxeológico dominante. A esse respeito, alguns professores tomaram a palavra e discutiram um pouco sobre isso, como apresentamos nos recortes de fala abaixo.

“o professor falou sobre a questão das fórmulas. Realmente, nós não as colocamos porque, quando se pergunta quais representações aparecem com maior frequência nos problemas de Combinatória, já se mencionam diagramas de árvore, listagens, etc. Falando no contexto, o que realmente vai aparecer são as árvores, e o aluno começará a perceber, lá na frente, que pode resolver o problema mesmo se esquecer a fórmula. Se ele esquecer a fórmula, ele pode resolver, e isso é o que mais queremos no Ensino Médio: que o aluno compreenda o contexto e não fique fixado na ideia de que, sem a fórmula, não consegue resolver o problema.” [Recorte da fala do Professor 1]

“Eu penso o seguinte: as pesquisas em si tentam se distanciar um pouco das fórmulas para trazer outras possibilidades de ensino para os estudantes. Então, como vocês colocaram bem aqui, as diferentes representações. Mas, quando a gente vai analisar os livros didáticos para o Ensino Médio, observa que o que mais aparece com recorrência são as fórmulas. Aparece ali na introdução dos capítulos alguma coisa sobre o princípio fundamental da contagem, para se trabalhar um pouquinho, dependendo do autor, a árvore de possibilidades. Mas, depois, quando engata nos problemas diferentes, é só fórmula, fórmula, fórmula. Que fórmula? Então, eu acho que o movimento que o Professor 1 faz é, a meu ver, correto: procurar outras representações que não aquele emaranhado de fórmulas. Quando o aluno vê que combinação é isso, arranjo é aquilo, e vão resolver problemas que não têm aquela sequenciazinha bem

definida como no livro didático, aí eles ficam perdidos, sem entender qual fórmula aplicar.” [Recorte da fala do Professor 2]

Os recortes indicam que os professores reconhecem a importância de se afastar do uso exclusivo e indiscriminado de fórmulas no ensino de Combinatória. Essa compreensão é baseada na observação de que a dependência excessiva de fórmulas pode limitar a compreensão profunda dos conceitos pelos estudantes. E os professores em formação parecem estar cientes de que se deva incluir uma variedade de métodos e representações para enriquecer a experiência de aprendizagem, com ênfase para o uso do Princípio Multiplicativo, já demonstrada, anteriormente, sua eficácia para resolver problemas combinatórios de contagem. Lockwood, Wasserman e Tillema (2020) reforçam essa visão. Segundo esses autores, os problemas combinatórios muitas vezes não possuem um procedimento claro e definido que permita resolvê-los. Portanto, a aplicação de fórmulas nem sempre é uma solução viável ou eficaz.

A respeito da pergunta "2. Por que se deve ensinar Combinatória?", o formador salientou que as respostas apresentadas pelo grupo refletem uma preocupação que não se limita apenas ao campo da Combinatória, mas abrange a Matemática como um todo. Por isso, solicitou que o grupo repensasse como justificar o ensino dos conteúdos desse campo nas aulas de Matemática do Ensino Médio.

Assim, encerraram-se as discussões e validações das respostas elaboradas pelo Grupo 1 – E2 para o conjunto de questões atribuídas a ele. O formador ressaltou, no entanto, que essas construções são provisórias e podem ser revisadas ao longo do processo formativo.

Devido à falta de tempo para a apresentação do Grupo 2 – E2 durante o quarto encontro, o quinto encontro iniciou com a exposição das perguntas sob responsabilidade desse grupo, junto com as respostas elaboradas até então. A seguir, apresentamos no quadro 17 esse conjunto de questões e respostas desenvolvidas e que constam no material escrito registrado pelo grupo.

**Quadro 17** – Respostas elaboradas pelo Grupo 2 – E2 durante vivência do M0

**3.1 Quais tendências matemáticas podemos aplicar no ensino de Combinatória?**

*O que entendemos por tendências matemáticas para o ensino?*

Resolução de problemas

Tecnologias digitais

Modelagem Matemática

Educação Matemática Crítica

Etnomatemática

Metodologia de Análise do Erro - com “foco voltado para a análise das produções dos alunos”.

**3.2 Quais propostas de ensino sobre Combinatória existem?**

*Resolução de Problemas sem o uso de equações.*

Segundo Ferreira, F 2013, Calisti, A. 2016 e Santos, P. 1983 uma das propostas seria uma proposta pedagógica de ensino para se trabalhar com conceitos básicos da Análise Combinatória voltados para o Ensino Médio, sem o uso de fórmulas, utilizando exclusivamente a resolução de problemas e enfatizando o princípio multiplicativo como principal estratégia de resolução para os problemas de contagem.

### Jogos

Segundo Maia, 2020 e Flemming 2005, é uma metodologia prazerosa aos alunos e também é satisfatória aos professores, pois torna a aula mais dinâmica e envolvente e favorecendo a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções.

### Sequência didática com resolução de problemas

Segundo Gonçalves, E 2020 “a sequência didática vai auxiliar na aprendizagem de alguns tópicos de análise combinatória através da resolução de problemas. Para tanto, foram delineados os seguintes objetivos específicos: Identificar algumas dificuldades de aprendizagem, através da resolução de problemas com contagem; elaborar e aplicar uma sequência didática, envolvendo resolução de problemas, a partir do que se possa contribuir para a aprendizagem dos alunos e analisar as contribuições da sequência didática na aprendizagem de Análise Combinatória por meio da resolução de problema”

Souza (2010) - *Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da resolução de problemas*

“A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação significa que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente, durante o processo de construção de um determinado conceito. E a avaliação, integrada ao ensino, contribui para a melhora da aprendizagem” (p. 22)

Roda (2018) - *Análise Combinatória: Uma abordagem diferenciada sem a utilização de fórmulas.*

“O **objetivo** principal desta dissertação foi **mostrar uma abordagem diferenciada** da Análise Combinatória na 2ª série do Ensino Médio, onde **deixamos de utilizar fórmulas mecanizadas** de permutação, arranjos e combinações, e **desenvolvermos os exercícios através do uso do Princípio Fundamental da Contagem (PFC)**” (p. 62).

“Esse exercício tem como objetivo mostrar para o aluno que a utilização da **árvore de possibilidades não é a resolução mais viável** e sim multiplicar os valores de cada opção” (p. 35).

Coelho; Dias (2022) - *Contribuições da metodologia análise de erro para o ensino e aprendizagem da Análise Combinatória no Ensino Médio.*

“a Análise de Erro **tem dois momentos principais** que evidenciam a proposta como uma vertente eficaz de ensino e pesquisa. A **primeira parte** é a análise das produções e classificação dos tipos de erros e, em um **segundo momento**, investigar o porquê e como tais conhecimentos foram adquiridos ou adaptados nessas produções e isso inclui tanto os erros como os acertos” (p. 232).

*Desenvolvendo princípios da Análise Combinatória através da Etnomatemática*

Sujeitos: alunos do Curso Integrado de Técnico em Móveis (p. 667, [http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed\\_5/Anais\\_RE\\_2016.pdf](http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_5/Anais_RE_2016.pdf))

Práticas profissionais e suas relações com a matemática : uma análise das justificativas matemáticas apresentadas por cambistas. (<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/41080>)

## 3.3 Quais os recursos didáticos que podem ser utilizados para o ensino de Combinatória?

O que entendemos por recursos didáticos?

Segundo Kaiber e Groenwald (2022, p. 22) “é considerado recurso didático todo material utilizado como auxiliar no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos que o professor tem por objetivo trabalhar com seus estudantes. Assim, são considerados recursos didáticos materiais concretos ou manipulativos, jogos, o uso de um software, vídeos, filmes, músicas, cartazes e o livro didático. “

### 3.3.1 Quais softwares podem ser utilizados para o ensino de Combinatória?

- Geogebra
- Diagramas de Arbol
- Rived

#### 3.3.1.1 Como o ensino de Combinatória pode ser melhorado a partir do uso de tecnologias digitais?

“Os softwares *proporcionam um processo de ensino e de aprendizagem dinâmico*. Isso ocorre, pois é possível analisar as situações apresentadas pelo professor instantaneamente, e, em caso de constatação de erro, ele pode ser corrigido pelos próprios alunos de forma imediata” (Oinhas; Zanon, 2021, p. 11).

#### 3.3.1.2 Existem perdas de se trabalhar o ensino de Combinatória apenas com recursos digitais?

“Os dois grupos (1 grupo usando lápis e papel e 1 grupo usando o software) demonstraram desempenhos significativamente melhores [...]. O avanço se evidencia mais quando os alunos são avaliados na mesma representação em que foram trabalhadas as situações, uma vez que, os alunos do Grupo 1 (Árbol) precisavam ainda transformar o conhecimento aprendido no software para a representação escrita utilizada no pós-teste. Contudo, entende-se que, representar a árvore de possibilidades em diferentes meios, virtual e escrito, por exemplo, pode ser um aspecto positivo para

o aprendizado da Combinatória. É preciso, entretanto, perceber que nem sempre será possível para os alunos representar por escrito o que aprenderam virtualmente. Conclui-se que, possivelmente, o trabalho com o software Diagramas de Árvore, articulado com a representação escrita, possa ser um diferencial para a aprendizagem de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental” (AZEVEDO, 2013, p. 12)

### **3.3.2 Quais jogos podem ser utilizados para o ensino de Combinatória?**

- Jogo da senha
- Xadrez
- Cubo da soma

### **3.4 Quais são os conhecimentos prévios para o ensino de Combinatória?**

Os conhecimentos prévios necessários para o ensino de Combinatória incluem:

- uma base sólida em aritmética,
- familiaridade com permutações e codificação,
- compreensão do princípio fundamental da contagem,
- conhecimento de fatorial e, em alguns casos, conceitos básicos de probabilidade e álgebra.

### **3.5 Como realizar uma avaliação no contexto da Combinatória?**

Souza (2010) - Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática através da resolução de problemas

“A palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação significa que o ensino e a aprendizagem devem ocorrer simultaneamente, durante o processo de construção de um determinado conceito. E a avaliação, integrada ao ensino, contribui para a melhora da aprendizagem” (p. 22)

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Ao compararmos o quadro acima com o Quadro 15, que abordava as respostas preliminares elaboradas pelo grupo, observamos inicialmente a ausência da questão "3. Quais preocupações relacionadas ao ensino devem ser consideradas no contexto da Combinatória?", a qual estava acompanhada de elementos de resposta naquele quadro. Além disso, a ordem de algumas questões foi modificada, e notamos que neste último quadro foram fornecidas respostas para perguntas que não haviam sido respondidas anteriormente, além de novos elementos terem sido adicionados às respostas já existentes.

Vamos agora proceder da mesma forma que fizemos em relação às respostas apresentadas pelo Grupo 1 – E2, examinando agora o conjunto de respostas apresentado pelo Grupo 2 – E2. Em relação à pergunta "3.1 Quais tendências matemáticas podemos aplicar no ensino de Combinatória?", inicialmente observamos que o grupo tinha a preocupação de compreender o conceito de tendência matemática. No contexto da apresentação, ficou claro que se referiam às tendências na Educação Matemática. Durante a exposição, foram mencionadas várias tendências como Resolução de Problemas, Tecnologias Digitais e Metodologia de Análise de Erros, todas elas relacionadas ao ensino de Combinatória e embasadas em pesquisas publicadas. Além dessas, o grupo também destacou a Modelagem Matemática, a Educação Matemática Crítica e a Etnomatemática como possíveis abordagens para o ensino dos conteúdos combinatórios.

Na questão "3.2 Quais propostas de ensino sobre Combinatória existem?", o grupo apresentou algumas propostas de ensino, tentando conectá-las às tendências mencionadas na pergunta anterior. A redação da resposta e sua apresentação sugerem que os participantes do grupo não discutiram nem validaram adequadamente as informações. Isso é evidenciado pelo fato de que as informações contidas na resposta fornecem poucos detalhes sobre as propostas de ensino em si e muitas vezes consistem em trechos copiados das fontes consultadas.

Em relação à pergunta 3.3, que trata dos recursos didáticos que podem ser utilizados no ensino de Combinatória, os participantes do grupo limitaram-se a definir o que entendiam por recursos didáticos. No entanto, nas questões derivadas 3.3.1 e 3.3.2, esses recursos são mencionados nas respostas, com destaque para a utilização de softwares e jogos, respectivamente. E, nesse contexto dos recursos, um dos participantes ressalta que, apesar da preocupação maior do grupo estar voltada para os recursos tecnológicos, é preciso considerar outros tipos de recursos. Isso se observa no fragmento da fala de um dos participantes a seguir:

“Para ensinar, a gente também tem que pensar que tipo de recurso é esse. Então, não é um recurso apenas tecnológico. Materiais concretos, ou o que chamamos de manipulativos, jogos, softwares, filmes, músicas, cartazes e o próprio livro didático também podem ser utilizados para o ensino da Combinatória.” [Fragmento da fala de um dos participantes].

Em relação ao Diagrama de Árvore, sugerido pelo Grupo 2 – E2, um dos participantes destacou a importância de sua utilização, mesmo no contexto do Ensino Médio, como uma possibilidade de retomar problemas combinatórios que deixaram de ser apresentados aos estudantes durante o Ensino Fundamental. Isso fica explícito na fala de um dos participantes, apresentada a seguir.

“Os diagramas de árvore foram bem utilizados pelo grupo Geração. Existem alguns trabalhos que trazem uma perspectiva de ensino de Combinatória para os anos iniciais, mas esses diagramas podem ser muito bem aplicados no Ensino Médio. Essa abordagem visa resgatar problemas iniciais que, talvez, os estudantes não tenham tido acesso nos anos finais.” [Fragmento da fala de um dos participantes].

Ainda em relação à utilização dos recursos, o grupo também teve a preocupação de pensar como o ensino de Combinatória pode ser melhorado a partir do uso de tecnologias digitais, bem como entender se existem perdas ao se trabalhar apenas esse tipo de recursos, que correspondem às questões 3.3.1.1 e 3.3.1.2, respectivamente.

Sobre essas perguntas, o Grupo 2 – E2 apresenta um argumento que não é restrito ao campo da Combinatória ao ressaltar que "os softwares proporcionam um processo de ensino e de aprendizagem dinâmico" (Acervo da Pesquisa). O grupo também considerou a importância de explorar outras abordagens além da utilização de recursos tecnológicos, conforme podemos observar no extrato de fala de um dos participantes a seguir.

“A partir das tecnologias, o texto de Oinhas e Zanon traz a ideia de que, mesmo que não diretamente relacionado à combinatória, o estudante terá um processo de ensino e de aprendizagem mais dinâmico. O estudante poderá manipular as possibilidades e eliminar algumas com mais facilidade, pensando nas tecnologias digitais. Em contrapartida, há uma crítica no texto de Azevedo. Ela trabalhou com anos iniciais e utilizou diagramas de árvore. Seu trabalho comparou um grupo que se utilizava de diagramas de árvore com outro que trabalhava apenas com lápis e papel. Em ambos os casos foram percebidos avanços em relação a formação do pensamento combinatório, mas no cenário papel e lápis, os estudantes tiveram um melhor desempenho.”  
[Fragmento da fala de um dos participantes]

Quanto aos conhecimentos prévios necessários para o ensino de Combinatória (questão 3.4), o grupo pontuou a necessidade de os estudantes terem uma base sólida em aritmética, familiaridade com permutações e codificações, compreensão do Princípio Multiplicativo, conhecimento de fatorial e, em alguns casos, conceitos básicos de Probabilidade e Álgebra. Todavia, no contexto da apresentação, os professores deixaram nítido que o trabalho com Combinatória não requer um leque extenso de conhecimentos prévios, especialmente desses últimos citados anteriormente, o que pode ser observado na fala de um dos professores em seguida.

“Essa compreensão do princípio fundamental da contagem seria interessante de se ter no Ensino Médio, como uma compreensão inicial. A partir daí, os alunos desenvolveriam o conhecimento sobre fatorial. Nesse contexto, há uma integração com a probabilidade e a álgebra, que, embora não sejam necessariamente conhecimentos prévios, podem ser trabalhados em conjunto. À medida que trabalhamos com esses conhecimentos, eles podem se complementar, tornando-se ferramentas um do outro. Portanto, não é necessário que sejam conhecimentos prévios para se trabalhar com Combinatória.” [Fragmento da fala de um dos participantes].

Esse posicionamento também é defendido por Lockwood, Wasserman e Tillema (2020), pois consideram que os problemas combinatórios exigem poucos pré-requisitos matemáticos para que o estudante tenha a chance de explorar as soluções para esses problemas. Essa também é a posição que assumimos.

A última pergunta apresentada pelo grupo foi “3.5 Como realizar uma avaliação no contexto da Combinatória?”. Em relação à resposta elaborada, o grupo pontua que não considerou algo relacionado ao ensino de Combinatória especificamente. Todavia, retomaram o estudo no qual se embasaram para construir a resposta sobre as tendências em Educação Matemática, mais precisamente sobre a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação.

Contudo, durante a apresentação da resposta à questão 3.3.1.2, foram comentados os contextos nos quais essa avaliação acontece, situando o debate a partir dos cenários com uso de papel e lápis e com uso de software. O extrato da fala de um dos participantes ilustra essa reflexão, como pode ser percebido a seguir.

“Se eu vou trabalhar com software, que eu avalie também no software. Porque uma coisa é trabalhar a dinâmica na metodologia no lápis e papel e avaliar no lápis e papel. Então vai ter-se uma comparação e ver como é que o estudante está evoluindo naquela aprendizagem. E não que seja ruim, mas que é um olhar mais atento. Porque trabalhar com software e depois cobrar o aluno no lápis e papel, que ele faça uma coisa que estava num sistema mais dinâmico, todo coloridinho, bonitinho ali, arrumadinho... Então, é um olhar especial no processo de avaliação. De como a gente vai avaliar essa passagem do software para o lápis e papel.” [Fragmento da fala de um dos participantes]

Após a explanação do Grupo 2 – E2, o formador fez algumas ponderações sobre a apresentação realizada. Em particular, destacou a importância dos jogos que podem ser utilizados no ensino de Combinatória, uma vez que o grupo não forneceu mais esclarecimentos durante a apresentação. Complementando a discussão, um dos participantes do grupo se colocou a respeito do trabalho com jogos, como se percebe na porção de fala abaixo.

“A parte de propostas com jogo, a gente viu aqui. Só que eu não coloquei as referências. Eu acho que as referências estão nessa apresentação ou estão naquele outro documento. Mas tem: ele traz essa perspectiva. O jogo da senha, inclusive, tem um grupo do Rio de Janeiro, se não me engano, que tentou ter uma metodologia para se trabalhar com o jogo da senha, tanto a questão da combinatória quanto, se não me engano, com probabilidade também. E em uma das referências que tem lá as autoras fazem menção ao jogo do xadrez e ao cubo da soma para se trabalhar com a combinatória. Por isso que a gente arrastou a parte de jogos de lá para cá (separando dos recursos digitais) para não ficar só. Porque até então aqui só tinha os softwares, aí nas discussões, um dos meninos colocou a questão dos jogos que não necessariamente estão no formato do software. O jogo da senha, por sinal, tem ele tanto manipulativo quanto digital e que você pode imprimir e trabalhar em sala de aula com os alunos.” [Fragmento da fala de um dos participantes].

Em relação ao uso do software Diagrama de Arbol como recurso didático no contexto do Ensino Médio, o formador destacou que o grupo anterior defendeu sua utilização (referindo-

se à utilização do diagrama de árvore), enquanto na apresentação do grupo atual foi mencionado um trabalho que contesta esse uso. No entanto, o formador ressaltou que durante a discussão do encontro anterior foi alcançado um bom ponto de equilíbrio em relação ao uso dessa técnica, que também pode se estender ao uso de softwares que permitem trabalhar com ela, como é o caso do Arbol, conforme já mencionado anteriormente.

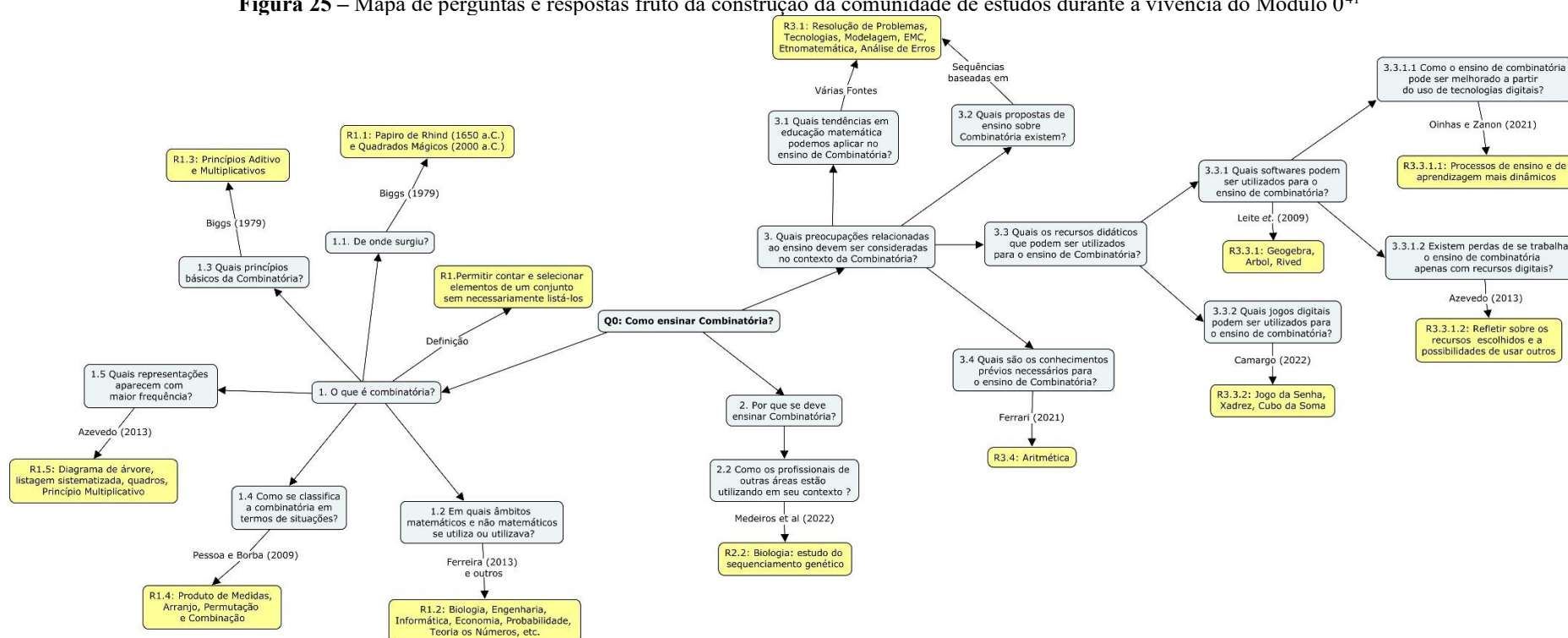
Outra discussão levantada abordou o ensino baseado na metodologia de análise de erros. O debate central focou-se em como essa análise seria conduzida: pelo pesquisador, pelo professor, ou como uma reflexão metacognitiva por parte do próprio estudante. Um dos participantes do grupo destacou a importância de envolver o estudante no processo de reflexão sobre seus erros, com a orientação e intervenções estratégicas do professor.

Após encerradas as discussões sobre as questões levantadas e as respostas elaboradas pelos grupos, o formador perguntou se os participantes gostariam de acrescentar mais alguma contribuição. Como não houve manifestações nesse sentido, o formador informou que estavam concluindo provisoriamente o Módulo 0. Ele também destacou que, nas próximas etapas da formação, os participantes teriam a oportunidade de revisar as perguntas e respostas elaboradas para fazer ajustes ou adições, conforme necessário.

Na figura 25 abaixo, apresentamos o mapa de perguntas e respostas, resultado da colaboração da comunidade de estudos durante o Módulo 0 e elaborado pelo pesquisador. Para facilitar a leitura, as perguntas estão nos "retângulos cinza" e as respostas, nos "retângulos amarelos". As conexões entre perguntas e respostas geralmente indicam as fontes consultadas para a elaboração dessas respostas.

Sublinhamos que, nesse mapa, aparecem as perguntas que foram efetivamente respondidas, de alguma forma, pelos grupos, seja no material escrito, durante as apresentações ou nos momentos de discussões coletivas.

**Figura 25** – Mapa de perguntas e respostas fruto da construção da comunidade de estudos durante a vivência do Módulo 0<sup>41</sup>



Fonte: Elaborado pelo autor

<sup>41</sup> Para acesso ao mapa em visualização em melhor resolução, acesse: <https://drive.google.com/file/d/1F7wgcx0MYpApzx8ptmnVvVEDLKQXgmZZ/view?usp=sharing>

Realizando uma retrospectiva do que foi vivenciado neste Módulo 0, o ponto de partida foi uma questão inicial que, segundo Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gáscon Perez (2019), faz parte da problemática da profissão docente. Neste caso, em particular, a questão geradora, chamada de  $Q_0$ , foi “Como ensinar Combinatória?”. E, como se pode notar, a construção da resposta de uma  $R^\heartsuit$  a essa pergunta não se deu de forma imediata, mas se impôs a necessidade de se formular perguntas derivadas  $Q_n$ . A fim de iniciar os professores  $X$  em formação em gestos básicos do questionamento didático, o formador  $Y$  (que também é o pesquisador) optou por fornecer algumas questões derivadas  $Q_n$ .

Como a vivência deste módulo se deu totalmente de maneira remota, com encontros síncronos através do *Google Meet*, foi natural que os participantes utilizassem como *mídia* recursos disponíveis na internet, especialmente teses, dissertações e artigos publicados em anais de eventos científicos da área da Educação Matemática ou em periódicos científicos.

Nesse processo, a construção do meio didático  $M$  se deu simultaneamente à construção de respostas, pois uma das características de um PEP (ou um PEP-FP) é que esse meio não é concebido *a priori*. Isso se evidencia quando comparamos o mapa de questões *a priori*, da Figura 22, elaborado pelo pesquisador, com o mapa de perguntas e respostas fruto da construção da comunidade de estudos, exposto na Figura 25. O confronto entre esses dois mapas, bem como o contexto da vivência do Módulo 0 não deixam dúvidas que esse meio evoluiu ao longo do tempo.

Ainda a esse respeito, pode-se afirmar que o meio  $M$  construído foi produto da comunidade de estudos e não apenas do formador  $Y$ . Os professores  $X$  puderam ampliar suas possibilidades de atuação, formulando perguntas, propondo fontes de informações, construindo, validando e difundindo suas respostas de maneira crítica. Isso é compatível com que o defende Chevallard (2012). Além disso, características da dialética do estudo e da investigação também permearam esse processo. Isso porque além da formulação de perguntas provocarem mudanças na evolução do meio  $M$ , o próprio meio fez com que perguntas levantadas em determinado momento desaparecessem, enquanto outras surgiram e foram analisadas e respondidas.

Nesse contexto, também podem ser observados gestos da dialética do individual e do coletivo. A própria organização dos encontros proposta pelo formador viabilizou o surgimento desses gestos. Os participantes foram divididos em grupos e realizaram, inicialmente, as mesmas tarefas de forma simultânea. Posteriormente, as responsabilidades foram divididas entre esses grupos de forma que cada um deles tinha uma incumbência distinta do outro (elaborar respostas para perguntas diferentes). Dentro da dinâmica de cada grupo também

houve divisão das responsabilidades entre os participantes. Todavia, a decisão final sobre as perguntas a serem analisadas e respondidas se deu de maneira coletiva.

Durante o processo de elaboração de perguntas e respostas, os professores tiveram a oportunidade de ter contato, ainda que de maneira implícita, com elementos presentes tanto no modelo praxeológico dominante como no modelo praxeológico de referência assumidos. Nesse processo, eles puderam questionar e/ou confrontar o modelo dominante, bem como incorporar ao seu repertório e/ou ratificar elementos do modelo de referência.

Além disso, a decisão coletiva da comunidade de estudos, ainda que não dada explicitamente, de não abordar questões relacionadas ao currículo ou aos livros didáticos, trouxe, ao nosso entender, importantes avanços para desprendimento do modelo praxeológico dominante e se encaminhar para o modelo de referência defendido neste estudo.

### 9.1 Análise do Módulo 1

Este módulo tem como objetivo, segundo Florensa, Bosch e Gascón (2019), familiarizar os professores em formação sobre uma atividade matemática normalmente desconhecida e que pode existir, dadas as condições e restrições, em uma sala de aula comum. Nesta etapa, os professores atuaram como estudantes *X* e o formador (pesquisador) como professor *Y* do PEP, buscando orientar o processo de estudo e pesquisa com um contrato didático mais flexível que o tradicional.

Conforme explicitado nas análises *a priori* empreendidas na seção 8.2, o PEP desenvolvido neste módulo teve como questão geradora “Q<sub>0</sub>: Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos mundo?”.

O início da experimentação deste PEP se deu no quinto encontro, que aconteceu em 18 de setembro de 2023. O formador apresentou a comanda da atividade.

#### ATIVIDADE

Em grupo, discuta e elenque questões derivadas que precisam ser respondidas para dar conta da questão geradora:

**“Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?”**

**Orientações:**

- Este momento é destinado apenas à elaboração de perguntas;
- Elenque questões derivadas de cunho matemático e não matemático que são pertinentes para responder à pergunta principal;
- Procure agrupar as questões derivadas por níveis (assim como fizemos nas atividades anteriores)

Após a explanação das orientações acima, o formador também procurou situar os professores em relação à  $Q_0$ , como podemos perceber no trecho de fala a seguir.

“Eu queria situar um pouco dessa problemática, porque essa discussão da codificação, de ter um documento único, é uma discussão global. Aqui no Brasil, por exemplo, eu acho que foi uma lei de 2019, 2020, se não me engano. O CPF vai ser, a partir de agora, o único documento de identificação de todo brasileiro, né? Então, automaticamente, as cédulas de identidade estão sendo modificadas para poder incluir o CPF como o número de registro. E por conta dessa questão de a gente ter, utilizar vários documentos, por exemplo. Enquanto a gente poderia ter apenas um, que fornecesse todas as informações. Mas quando a gente sai das fronteiras do Brasil, por exemplo, essa discussão é gigantesca. A gente tem hoje muitos movimentos, por exemplo, da comunidade internacional, já tentando trabalhar nessa questão. Então, hoje a gente já tem, por exemplo, registro internacional de pessoas que têm determinadas deficiências ou possuem alguma doença muito específica ou rara. Então, hoje já se cria um banco de dados que se possa identificar essas pessoas do mundo todo.” [Fragmento da fala do formador]

Como podemos notar, buscamos, nesse preâmbulo, situar a pergunta geradora a partir de uma atividade própria do paradigma de questionamento do mundo, que é a problematização. Além disso, procuramos chamar a atenção para algumas necessidades que devem ser levadas em consideração, relacionadas à estruturação desse código e aos requisitos necessários para garantir sua segurança, como podemos perceber no extrato de sua fala abaixo.

“Mas a nossa ideia é como poderíamos criar um código universal, semelhante ao CPF brasileiro, para identificar todos os cidadãos do mundo. Então, quando pegássemos esse código e o inseríssemos no sistema, por exemplo, já poderíamos saber de onde a pessoa veio, sua nacionalidade, de que país ela é, e outras informações básicas de todos os cidadãos do mundo. Portanto, precisamos criar um código eficiente, que funcione de fato, e que seja seguro. Observando, por exemplo, o CPF, percebemos que cada dígito ali presente não está por acaso; cada um tem uma razão de ser. Cada dígito traz uma informação diferente sobre a região e o estado, e os dois últimos dígitos são verificadores.” [Fragmento da fala do formador]

Após dar as orientações, o formador reorganizou os participantes em dois grupos, utilizando o recurso de divisão em salas temáticas do *Google Meet*. Cada grupo recebeu um documento compartilhado no *Google Drive*, que continha a comanda com as instruções da atividade e que serviria para o registro das construções realizadas por cada grupo. Cabe sublinhar que, para este módulo, não foram apontadas questões derivadas, como foi feito no Módulo 0. Os professores ficaram livres para elaborarem as suas próprias perguntas.

Ao término do tempo destinado à atividade (em torno de 45 min), os participantes dos grupos foram reintegrados à chamada principal e, antes que as apresentações se iniciassem, alguns participantes colocaram algumas preocupações, que trazemos em algumas porções de falas a seguir.

“Surgiram muitas dúvidas, porque eu, particularmente, vejo a quantidade de pessoas no mundo hoje, que possivelmente é de sete ou oito bilhões. Então, para mim, isso é um dos grandes impasses que tivemos nessa primeira etapa do problema. Você acha que a quantidade de pessoas no mundo inviabilizaria a criação de um código desse tipo?” [Fragmento da fala do Participante 1].

Ele não vai inviabilizar, mas vai dificultar a leitura para quem não tem um conhecimento mínimo. Teria que ser um código robusto. Pensávamos em implementar situações que, ao serem inseridas, gerariam muitas dúvidas e perguntas. [Fragmento da fala do Participante 2].

Diante das questões levantadas pelos professores em formação (agora, na posição de estudantes) e percebendo que essas questões poderiam ser abordadas nos próprios grupos, o formador reformula os questionamentos e os direciona de volta aos participantes, como podemos observar no extrato de sua fala na sequência.

“Nós vamos pensar também, por exemplo, no CPF, que é um código que utilizamos aqui no Brasil. O CPF tem algumas informações embutidas em seus dígitos; o nono dígito, por exemplo, trata da região fiscal. Utilizamos o CPF no dia a dia sem nos darmos conta do que se trata cada dígito. O CEP, por exemplo, é usado para identificar nossos endereços, e também não nos damos conta das informações codificadas ali. A pergunta que faço é a seguinte: será que é realmente necessário que uma pessoa, para ser identificada, precise saber o que significa cada dígito, letra ou caractere?” [Fragmento da fala do Formador].

A partir dessa provocação do formador, outro participante também requereu a palavra e acrescentou à discussão:

“Então, levantamos essa questão também. Começamos pontuando que hoje a população está entre 7 e 8 bilhões de pessoas. Acho que um participante mencionou agora no chat que é um pouco mais de 8 bilhões, certo? Mas você não vai criar um código com caracteres para 8 bilhões de pessoas. Você tem que pensar que esse código precisa ter uma previsão de uso ou uma aplicação contínua, certo? Então, o que vamos pontuar nas nossas perguntas? Como criar um código que leve em consideração a quantidade de caracteres ou que utilize algum mecanismo para prever o comportamento da população. Se houver um crescimento, o que queremos dizer com essa pergunta é: se houver um crescimento na geração desse código, isso deve ser considerado. Por exemplo, hoje esse código pode ter tantos caracteres, a primeira parte pode ser letras, depois números, enfim, há inúmeras possibilidades.” [Fragmento da fala do Participante 3]

Como é possível notar, os participantes já começam a perceber a necessidade de lidar com questões que remetam à previsibilidade do crescimento populacional, para que o código não venha se tornar obsoleto caso a população aumente e a quantidade de caracteres desse código não consiga acompanhar esse crescimento. Além disso, também podemos perceber uma preocupação em levantar questões que tratam da composição desse código (utilização de caracteres como letras e números). Essas questões se aproximam daquelas que engendramos na análise *a priori* deste PEP.

Após o momento de discussões coletivas, os grupos iniciaram as apresentações, começando pelo Grupo 2 – E5, que se voluntariou para começar. As primeiras perguntas derivadas propostas pelo grupo estão descritas no quadro abaixo.

**Quadro 18** – Questões preliminares levantadas pelo Grupo 2 – E5 durante o Módulo 1

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Qual a Capacidade do código?             <ol style="list-style-type: none"> <li>1.1 Quais elementos devem compor o código?</li> <li>1.2 O código atende ao levantamento estatístico da população?</li> <li>1.3 É possível assegurar a proteção de dados?</li> </ol> </li> <li>2. Quais os dados populacionais?             <ol style="list-style-type: none"> <li>2.1 Devemos usar letras para identificar País, Estado e a Cidade?</li> </ol> </li> <li>3. Qual o custo e recursos?             <ol style="list-style-type: none"> <li>3.1 Onde seriam armazenadas as informações?</li> <li>3.2 De que forma aconteceria a divisão das despesas?</li> </ol> </li> <li>4. Quais as jurisdições necessárias?             <ol style="list-style-type: none"> <li>4.1 O que pode ser contemplado com código?</li> <li>4.2 A base de dados fornece proteção aos dados?</li> <li>4.3 Onde seriam armazenadas as informações?</li> </ol> </li> </ol> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Durante a apresentação, os participantes do Grupo 2 – E5 justificaram a escolha das questões levantadas. Em relação à pergunta 2.1, por exemplo, os professores desse grupo

manifestaram preocupação com a quantidade de caracteres utilizada na criação do código. Eles desejavam que fosse a menor possível, mas que ainda assim conseguisse abranger o maior número de pessoas.

Ao observarmos as questões dos níveis 3 e 4, percebemos um foco maior na repercussão da criação e do armazenamento dos dados que poderiam estar contemplados nesse código, em vez de sua elaboração em si.

Na sequência, o Grupo 1 – E5 também apresentou as questões que elaboraram a partir da pergunta geradora, que estão contidas no quadro a seguir.

**Quadro 19** – Questões preliminares levantadas pelo Grupo 2 – E5 durante o Módulo 1

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Qual(s) símbolo(s) utilizaríamos?</li> <li>2. Seria preciso diferenciar os cidadãos dos diferentes países?</li> <li>3. Como se daria a concepção de um algoritmo para atender a este código?               <ol style="list-style-type: none"> <li>3.1 Como está sendo desenvolvido códigos ditos como universais?</li> <li>3.2 Quais profissionais seriam preciso para essa concepção?</li> </ol> </li> <li>4. Quais informações o código precisaria registrar de cada cidadão?</li> <li>5. Quais seriam as dificuldades para criação do código universal?</li> </ol> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Da mesma forma que o grupo anterior, o Grupo 1 – E5 também trouxe algumas justificativas, durante a apresentação, para as perguntas derivadas elaboradas. E, nesse processo, também foi possível identificar outras perguntas que estiveram presentes na discussão do grupo, mas que não estavam no material escrito. Isso fica nítido no trecho da fala de um dos participantes do grupo que apresentamos abaixo.

“Então, será que no código em si, como o nosso CPF, haveria algum dígito que diferenciaria os cidadãos de diferentes países? Ou seria um código mais universal, com a informação da nacionalidade entre os dados contidos no código? E se mudássemos de país, poderíamos atualizar essa informação sem modificar o código de origem?” [Fragmento da fala de um dos participantes].

De modo geral, os grupos conseguiram elaborar boas perguntas derivadas, algumas bastante próximas das que propomos durante a análise *a priori*. Eles também convergiram em algumas questões, como, por exemplo, os requisitos necessários para a construção desse código, considerando o crescimento populacional, a efetividade, e a dimensão (em termos numéricos de caracteres) desse código. O objetivo é que ele não seja muito grande, mas também não muito pequeno, de forma que consiga identificar as pessoas do mundo todo e não se torne obsoleto

em poucos anos. Todavia, cada grupo também apontou questões de naturezas distintas: o Grupo 2 – E5 abordou sobre os custos e recursos necessários para essa criação, enquanto que o Grupo 1 – E5 manifestou preocupação em relação aos profissionais que seriam necessários para trabalhar na concepção desse código.

A atividade de levantamento de questões derivadas a partir da  $Q_0$  se estendeu até o sexto encontro, realizado de maneira híbrida, com parte do grupo reunido presencialmente e a outra parte participando remotamente via *Google Meet*. Devido à impossibilidade de dividir os participantes em grupos que incluíssem tanto os presentes quanto os remotos no ambiente da reunião presencial, as discussões desse dia foram conduzidas coletivamente.

No início do encontro, o formador retomou as questões apresentadas no encontro anterior e, em seguida, a comunidade de estudos começou a discussão em torno dessas questões, avaliando a pertinência de cada uma, bem como elencando outras perguntas derivadas. Nesse processo, naturalmente, à medida que as perguntas iam sendo levantadas, os participantes também realizavam um movimento para já trazer alguns elementos de resposta como, por exemplo, em relação à questão derivada sobre a classificação internacional das siglas dos países. Isso pode ser constatado no trecho da fala de um dos participantes que apresentamos a seguir.

“Eu coloquei aqui: seria preciso diferenciar o cidadão dos países, estado e cidade? Como diferenciar cidadãos de diferentes países? E como os países são representados em classificações internacionais, como o Brasil e a Europa? Por exemplo, a Europa, a ONU, o COI, o DDI, a FIFA, e como estão sendo desenvolvidos códigos ditos como universais.” [Fragmento da fala de um dos participantes].

Após o processo de discussão coletiva sobre levantamento de questões derivadas, a pertinência de se investigar cada uma delas, bem como a sua organização, os participantes validaram o conjunto de questões que exibimos no quadro abaixo.

**Quadro 20** – Questões derivadas elaboradas pela comunidade de estudos no PEP do Módulo 1

$Q_0$ : Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?

$Q_1$ : Qual(is) símbolo(s) utilizaríamos (letras, algarismos, símbolos, etc.)?

$Q_{1.1}$ : Qual a Capacidade do código (tamanho)?

$Q_2$ : Quais informações deveriam estar contidas nesse código?

$Q_{2.1}$ : Como diferenciar cidadãos de países diferentes?

$Q_{2.2}$ : Seria preciso diferenciar os cidadãos dentro dos países pelo estado, cidade, etc.?

$Q_{2.3}$ : Como os países são representados em classificações internacionais (ONU, COI, DDI, FIFA, etc.).

$Q_{2.4}$ : Quais códigos de identificação pessoal internacional/nacional existem? O que se pode dizer sobre eles?

Q<sub>3</sub>: Como se daria a concepção de um algoritmo para atender a este código?

Q<sub>3.1</sub>: Quais profissionais seriam preciso para essa concepção?

Q<sub>4</sub>: Quais seriam as dificuldades para criação do código universal?

Q<sub>4.1</sub>: Qual o custo e recursos?

Q<sub>4.2</sub>: Onde seriam armazenadas as informações?

Q<sub>4.3</sub>: De que forma aconteceria a divisão das despesas?

Q<sub>4.4</sub>: Quais as jurisdições necessárias?

Q<sub>5</sub>: O código atende ao levantamento estatístico da população?

Q<sub>5.1</sub>: Qual a previsão de crescimento e decrescimento populacional dos países e do mundo?

Q<sub>5.2</sub>: Quais órgãos oficiais realizam a contagem da população mundial?

Q<sub>6</sub>: É possível assegurar a proteção de dados? O pode ser feito nesse sentido?

Q<sub>6.1</sub>: O que fazer para tornar o código seguro (ser pessoal e intransferível)?

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Analisando o conjunto das questões derivadas levantadas pela comunidade de estudos e estabelecendo um paralelo com aquelas que elaboramos na análise *a priori* e que se encontram no mapa da Figura 23, percebemos muitas questões que se aproximam, a exemplo das questões dos níveis Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub> e Q<sub>5</sub>. Todavia, questões não apontadas nas análises prévias surgiram, como as do nível Q<sub>3</sub> e Q<sub>4</sub>. Também percebemos que perguntas relacionadas a segurança dos códigos, especialmente sobre o que fazer para garantir que não haja códigos repetidos, não surgiram.

O sétimo encontro foi realizado de forma assíncrona, pois, nesse dia, a maioria dos professores não pôde participar de maneira síncrona. Assim, o formador separou os participantes em dois grupos no *WhatsApp* e neles, apresentou a comanda da atividade que consistia no levantamento de respostas para as questões que ficaram sob a responsabilidade de cada grupo.

### Atividade

#### Orientações:

- Em grupo, comecem a elaborar elementos de respostas para as questões levantadas e que ficaram sob a responsabilidade do grupo;
- Procurem registrar separadamente perguntas, respostas e fontes consultadas;
- As respostas não precisam ser curtas;
- É preciso que o grupo valide as respostas, adicionando ou retirando as informações que acharem pertinentes;
- Ao final, procurem elaborar novas perguntas a partir das respostas apresentadas.

Além dessa comanda com as orientações da atividade, o formador também disponibilizou um documento compartilhado no *Google Drive* para cada grupo no qual eles deveriam registrar as respostas ou elementos de respostas que conseguissem elaborar, bem como as fontes utilizadas nessa construção.

Essa atividade, então, foi retomada no oitavo encontro. Os professores foram divididos em salas temáticas no *Google Meet*, segundo a organização dos grupos realizada no encontro anterior para que pudessem continuar o trabalho de responder as perguntas derivadas que ficaram a cargo de cada um.

Após as discussões e realização das atividades nos grupos, os participantes retornaram à chamada principal e iniciaram as apresentações das respostas ou elementos de respostas que conseguiram elaborar. O primeiro grupo a apresentar, foi o 1 – E7. O quadro 21 apresenta a construção realizada pelo grupo no material para registro escrito.

**Quadro 21** – Questões e respostas elaboradas pelo Grupo 1 – E7 durante a vivência do PEP no Módulo 1

| <i>Questões</i>                                                                                            | <i>Elementos de Resposta</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Qual(is) símbolo(s) utilizaríamos (letras, algarismos, símbolos, etc.)?                                 | Letras (diversos alfabetos), algarismo.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 1.1 Qual a Capacidade do código (tamanho)?                                                                 | 10 bilhões para 2300                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 2. Quais informações deveriam estar contidas nesse código?                                                 | Informações de identificação unicamente do indivíduo: data de nascimento; filiação; nacionalidade; gênero; detalhes biométricos (impressão digital; retina).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 2.1 Como diferenciar cidadãos de países diferentes?                                                        | Diferenciação em nível subnacional dependeria de requisitos, como: estado; províncias; cidades; regiões.<br>Código ISO 3166-1 de três letras.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 2.2 Seria preciso diferenciar os cidadãos dentro dos países pelo estado, cidade, etc.?                     | Sim, é necessário.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 2.4 Como os países são representados em classificações internacionais (ONU, COI, DDI, FIFA, etc)           | Código ISO 3166-1 de três letras.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 2.5 Quais códigos de identificação pessoal internacional/nacional existem? O que se pode dizer sobre eles? | CPF no Brasil; SSN nos EUA.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3. Como se daria a concepção de um algoritmo para atender a este código?                                   | Para conceber o algoritmo, seria indispensável contar com a experiência de engenheiros de software, criptógrafos, matemáticos e especialistas em segurança cibernética.<br>Pode ser necessário envolver profissionais de ética, sociólogos e antropólogos para abordar as implicações éticas, culturais e sociais do projeto.<br>Diplomatas e políticos desempenhariam um papel fundamental na garantia da cooperação internacional e na conformidade com regulamentos e acordos internacionais. |

|                                                             |                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                             | A participação de especialistas em privacidade de dados seria vital para assegurar a proteção das informações pessoais dos cidadãos. |
| 3.2 Quais profissionais seriam preciso para essa concepção? | Engenharia de software, segurança de dados, matemática e estatística                                                                 |

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Em seguida, o formador sugeriu que o Grupo 2 – E7 fizesse sua apresentação. Após essa explanação, seria aberta uma discussão coletiva sobre as perguntas e respostas elaboradas. As asserções realizadas pelo segundo grupo encontram-se dispostas no quadro 22 abaixo.

**Quadro 22** – Questões e respostas elaboradas pelo Grupo 2 durante a vivência do PEP no Módulo 1

| <i>Questões</i>                                                   | <i>Elementos de Resposta</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4. Quais seriam as dificuldades para criação do código universal? | As dificuldades seriam:<br>- Elaborar uma equipe de profissionais para estudar o problema, levantar todas as variáveis geográficas do indivíduo e previsões futuras (ambiental e crescimento populacional). (programador, geógrafo, ambientalista) para elaboração do código.<br>- Que não seja extenso demais para possibilitar a memorização.<br>- Que seja com uma quantidade de caracteres (envolvendo números, letras e símbolos) suficiente para que não haja novas reformulações.<br>- Cada país terá um órgão responsável para alimentar a plataforma?                                                                                                                                   |
| 4.2 Onde seriam armazenadas as informações?                       | O armazenamento deveria ser armazenado em mais de um local por questões de segurança. Os locais escolhidos devem ser discutidos em reuniões como a ONU.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 4.1 Qual o custo e recursos?                                      | O custo vai depender da plataforma utilizada, dos profissionais que farão a manutenção do programa e dos custos locais para a alimentação dos dados em cada país.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 4.3 De que forma aconteceria a divisão das despesas?              | Haveria uma taxa de cada país para a manutenção geral da plataforma (incluindo os profissionais) de acordo com o PIB de cada país, possivelmente tendo um valor mínimo do PIB para contribuição, ou uma forma alternativa de pagamento, como cotas de carbono para países mais pobres.<br>A alimentação local seria de responsabilidade de cada país, e caso não tivesse tecnologia, profissionais e renda para manutenção, o mesmo receberia apoio externo (possivelmente com pessoas externas) para executar e manter a alimentação dos dados. O pagamento desses países, para manutenção local, poderia ser feito com cotas de carbono ou acesso a implantações de fábricas, agricultura etc. |
| 4.4 Quais as jurisdições necessárias?                             | Observar as jurisdições de cada país usado para compor o banco de dados populacional, que podem levar em consideração as especificidades de cada grupo como: população urbana e rural, população carcerária e não                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

|                                                                                        |                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                        | carcerária, obrigações como o alistamento militar para homens, obrigação eleitoral a depender da idade.                                                 |
| 5. O código atende ao levantamento estatístico da população?                           | Deverá atender, com base nos estudos feitos (item anterior 4)                                                                                           |
| 5.1 Qual a previsão de crescimento e decrescimento populacional dos países e do mundo? | A população mundial está projetada para atingir um pico de cerca de 10,4 bilhões de pessoas durante a década de 2080 e permanecer nesse nível até 2100. |

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Imediatamente após a conclusão das apresentações, o formador abriu para uma discussão coletiva e, posteriormente, validação das respostas elaboradas. A primeira ponderação realizada pelo formador foi sobre a divergência apresentada entre os dois grupos em relação à projeção da população mundial, conforme se percebe no excerto de sua fala na sequência.

“E aí, o que me chamou a atenção, que eu estava falando lá no Grupo 1 – E7, foi essa questão em relação às fontes. O Grupo 1 – E7 previu uma população em torno de 10 bilhões de pessoas até 2300, enquanto o Grupo 2 – E7 já reduz um pouco essa previsão, colocando isso para 2100.” [Fragmento da fala do formador].

A partir dessa provocação realizada, um participante do Grupo 1 – E7 pede a palavra a fim de defender a resposta elaborada pelo seu grupo. Essa réplica pode ser observada no trecho da sua fala destacada abaixo.

É o seguinte: ele atinge 10 bilhões em 2100, aí parece que cai, depois volta, mais ou menos entre 2200 e 2300, a atingir novamente esse patamar. Como se fosse uma política de controle de natalidade. Entendeu? Aí cai, depois volta a subir para estabilizar mais ou menos nesse valor até 2300. Nós consideramos esse tempo aí de 200 a 300 anos pela longevidade do código. Estimamos que vamos precisar de cerca de 10 bilhões de códigos durante esse intervalo de tempo. A pesquisa que fizemos bate com o que o Grupo 2 disse. [Fragmento da fala de um participante do Grupo 1 – E7].

Como é possível notar, os dois grupos tiveram respostas coincidentes sobre a projeção da população mundial para 2100. Contudo, O Grupo 1 – E7 avançou na discussão, pois tem uma preocupação voltada para a durabilidade do código, procurando fazer essa estimativa até o ano de 2300. Todavia, após o debate sobre esse tema, os grupos comungaram da ideia de pensar o código com perspectivas de utilização até 2100, pois as fontes utilizadas para estimar a projeção da população do planeta dava mais respaldo para isso.

Outro aspecto levantado pelo formador foi a questão da taxa de mortalidade, considerando que a ideia é prototipar um código que seja pessoal e intransferível. Portanto, não seria viável criar um código apenas com cerca de 10 bilhões de possibilidades, pois seria necessário levar em consideração as taxas de natalidade e mortalidade ao longo do tempo de duração desse código. Todavia, nenhum dos participantes se manifestou a esse respeito.

Dando continuidade às discussões, o formador voltou a atenção da comunidade de estudos para a prototipação do código. As perguntas e respostas levantadas até o momento contribuíram em certa medida para a criação do código, mas ainda não haviam avançado para sua concretização.

Então, o formador iniciou a discussão explicando aos participantes como funciona o número de identificação do CPF. O objetivo era situá-los sobre o funcionamento de um documento de identificação em um país com uma grande população, como o Brasil, e sobre o significado de cada dígito presente nesse código. Tendo a reflexão sobre o funcionamento do CPF como pano de fundo, o formador então indagou aos professores sobre as informações que que deveriam conter nos caracteres do código a ser elaborado.

A primeira informação mencionada pelos participantes e confirmada pelos demais professores é que o código deve incluir informações sobre a nacionalidade, como pode ser observado na fala de um deles a seguir.

“Identificação: a primeira coisa é pelo país, né? Beleza. Então, nesse código, tem que estar a identificação do país.” [Fragmento da fala de um dos participantes].

E, a esse respeito, encontramos elementos de respostas na questão derivada 2.1 “Como diferenciar cidadãos de países diferentes?” disposta no quadro 21. Ainda nesse processo que enumeração das informações que deveriam estar expressas nesse código em forma de dígitos ou caracteres, alguns participantes se manifestaram e trouxeram algumas contribuições. Os excertos que aparecem na sequência apontam essas contribuições.

“Esse código deve ter dígitos aleatórios para poder identificar cada pessoa.” [Fragmento da fala do Participante 1]

“Eu penso que sim, né? Devemos considerar dígitos aleatórios. Acredito que isso é necessário, tanto pela quantidade quanto pela impossibilidade de atribuir significado a todos os números que vão compor o código. Para fazer a cobertura, será preciso ter um conjunto de caracteres aleatórios, pois isso vai identificar as pessoas.” [Fragmento da fala do Participante 2]

A ideia foi prontamente aceita pela comunidade de estudos que considerou a necessidade de haver dígitos (algarismos) aleatórios para identificação das pessoas. Nesse mesmo contexto, o formador também questionou se seria necessário que, nesse código, houvesse um conjunto de caracteres para a identificação de pessoas dentro de um mesmo país de acordo com sua localização geográfica ou político-administrativa como, por exemplo, estados ou municípios. Um dos participantes, então, fez a seguinte observação:

“Quando estávamos discutindo as perguntas, nos perguntamos se seria necessária essa identificação dentro do país, tanto a identificação estadual quanto a municipal. Antes, isso existia, por exemplo, nas placas dos carros. Eu até pesquisei que, anteriormente, as placas tinham a identificação municipal a partir do nome. Hoje, no entanto, essa identificação não é mais considerada, pois seguimos o padrão Mercosul, o que eliminou essa variável para as placas.” [Fragmento da fala de um dos participantes].

O comentário apresentado fez com que os demais professores considerassem a inviabilidade de incluir caracteres para essas subdivisões, tendo em vista os diferentes contextos dos países. Assim, o formador continuou questionando sobre o que deveria constar nesse código, em termos de informações expressas por meio de caracteres.

A comunidade de estudos levantou a possibilidade de também conter dígitos verificadores, assim como no CPF. E, quando o formador prosseguiu inquerindo sobre o que mais era nesse necessário conter nesse código, alguns participantes fizeram algumas ponderações, como expresso nos trechos de falas abaixo.

“Essas três informações seriam suficientes: a identificação do país, dígitos verificadores e dígitos aleatórios para a identificação das pessoas.” [Fragmento da fala do Participante 1].

“Eu acho suficiente, porque assim mantemos o que colocamos nas apresentações: um código que tenha letras, números ou outros caracteres, e que seja de fácil utilização. É importante que a pessoa consiga lembrar do código com facilidade. A quantidade de dígitos também é relevante; se colocarmos um código com 30 dígitos, fica praticamente impossível de memorizar e de facilitar a digitação.” [Fragmento da fala do Participante 2].

A proposta levantada pelos participantes foi aceita pela comunidade de estudos, que confirmou a necessidade de o código conter apenas três informações expressas através de seus caracteres: identificação da nacionalidade, identificação dos indivíduos e dígitos verificadores.

A prototipação do código universal para identificação dos cidadãos do mundo foi materializada durante o nono encontro. Esse encontro foi iniciado pelo formador, apresentando as orientações da atividade do dia.

### Atividade

Como base nas perguntas e respostas levantadas, ***crie um protótipo desse código universal*** que possa responder a Pergunta Geradora:

***“Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?”***

Segundo os apontamentos discutidos no encontro anterior, esse código deve ter:

- Dígitos para a identificação do país (nacionalidade);
- Dígitos aleatórios para identificação das pessoas;
- Dígitos verificadores;
- Quantidade de caracteres para dar conta de uma projeção de 10,4 bi de pessoas até 2100.

Alguns pontos que ficaram em aberto (a serem pensados e levados em consideração no momento da criação do código):

- Taxa mortalidade do planeta por ano;
- A repetição dos algarismos pode impactar na geração dos dígitos verificadores?

Além das considerações apontadas anteriormente, é preciso provar que o código é, de fato, eficiente (suficiente para dar conta da projeção da população mundial) e seguro (ser impessoal e intransferível).

#### Ajudas:

- Como é gerado o número do CPF (Clique [AQUI](#));
- Alguns sistemas de identificação adotados em outros países (Clique [AQUI](#))

Como é possível notar, o formador retomou nas orientações os pontos discutidos anteriormente sobre os elementos que deveriam estar presentes na elaboração do código, além

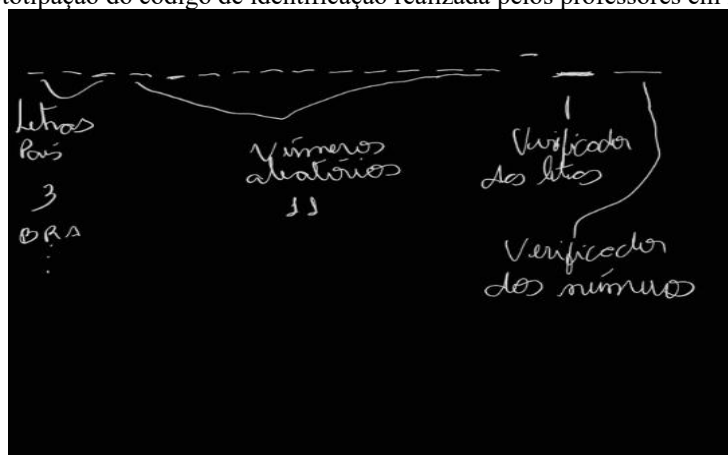
de algumas questões que ainda não foram suficientemente respondidas. Foi disponibilizada uma mesa de recursos (links) contendo materiais que abordavam a criação de sistemas de identificação adotados em alguns países, incluindo o CPF. Também foram disponibilizadas as perguntas e respostas elaboradas nos encontros anteriores do Módulo 1 por meio de um documento compartilhado no *Google Drive*.

Após dadas as orientações, os participantes se reuniram, inicialmente sem a atuação do formador, para discutiram coletivamente as questões abordadas de acordo com a comanda da atividade. Em seguida, apresentaram o resultado das discussões. Os professores em formação (na posição de estudantes) apresentaram a prototipação do código seguindo as orientações disponibilizadas na comanda da atividade, conforme exposto abaixo:

- **Identificação do país (nacionalidade):** ISO 3166-1 alpha-3, um sistema de três letras internacionalmente reconhecido para se referir aos países e suas subdivisões;
- **Identificação dos indivíduos:** 11 dígitos numéricos, sendo o primeiro do algarismo 1 até o 9 e os dez restantes, do 0 até 9, com capacidade para  $9 \cdot 10^{10} = 90.000.000.000$  (90 bilhões) de possibilidades.
- **Dígitos verificadores:** 02 dígitos verificadores (o décimo quinto e o décimo sexto dígito), dos quais o primeiro é o dígito verificador das letras (dígitos que representam a nacionalidade) e o segundo, verificador dos algarismos (dígitos que identificam os indivíduos).
- **Quantidade de caracteres é suficiente para dar conta de uma projeção de 10,4 bi de pessoas até 2100, levando em conta as taxas de mortalidade e natalidade a cada ano?** Uma pesquisa do Population Reference Bureau (PRB) estima que já passaram pela Terra, desde o aparecimento do primeiro ser humano, cerca de 107 bilhões de pessoas; assim, a capacidade do código atenderia a projeção da população nesse intervalo tempo (de 2023 a 2100).
- **A repetição dos algarismos pode impactar na geração dos dígitos verificadores?** Resposta ainda em aberto.

Abaixo, apresentamos na figura 26 a configuração desse código proposto pelos professores em formação.

**Figura 26** – Prototipação do código de identificação realizada pelos professores em formação



Fonte: Acervo da Pesquisa

Depois da apresentação dos professores (na posição de estudantes), o formador realizou alguns questionamentos em relação à prototipação do código que foi realizada. A primeira pergunta focou nos dígitos numéricos destinados à identificação dos indivíduos. Dado que foi decidido incluir dígitos para a identificação da nacionalidade das pessoas, questionou-se se seria necessário utilizar 11 algarismos aleatórios ou se 10 seriam suficientes. Isso pode ser constatado no trecho da fala do formador a seguir:

“Vejam: considerando que utilizássemos 10 dígitos, uma pessoa que nascesse no Brasil, por exemplo, poderia ser identificada por BRA1234567890-00 e outra pessoa que nascesse na França, por FRA1234567890-00. Poderia utilizar os mesmos algarismos para identificar tanto o cidadão brasileiro quanto o francês porque, nesse caso, o conjunto das três letras que representam a nacionalidade já diferenciariam um do outro. Então, não seria necessário um total de 90 bilhões de possibilidades para os dígitos numéricos.” [Fragmento da fala do formador].

Então, após essa provocação, alguns participantes defenderam o argumento de que seria necessário manter os 11 dígitos, como se observa no extrato de suas falas abaixo:

“Então, se nós fizermos esse código para 10.000.000.000... Mas isso é mundial, né? Mas, focando somente na Índia, que é onde a gente tem o maior percentual de pessoas, de habitantes no país... Quantos habitantes tem na Índia hoje? Um bilhão e meio, mais ou menos, estimando. Vamos gerar mais hoje, para hoje, dois bilhões (que não chega a isso). Aí, quantos dígitos hoje seriam necessários para dar conta da Índia? Para dar conta de dois bilhões? Para dar três bilhões e meio, seriam dez dígitos. Mas aí também que se levar em conta as taxas de mortalidade e de natalidade a cada ano porque vai que venha outra pandemia aí nesse intervalo de tempo? Então a projeção com 11 dígitos fica mais segura.” [Fragmento da fala do Participante 1].

“Estamos dizendo o seguinte: será suficiente, sim, com 11 dígitos. Basta adicionar três letras antes, o que permitirá que cada país tenha capacidade para

identificar até 99 bilhões de indivíduos. É isso que queremos dizer.”  
[Fragmento da fala do Participante 2].

Assim, a argumentação realizada pelos participantes acima foi acatada pela comunidade de estudos que validou a posição de ter 11 dígitos numéricos para a identificação das pessoas. Todavia, ainda nessa mesma direção, o formador indagou sobre o porquê de os participantes terem escolhido apenas 9 algarismos (de 1 até 9) para o primeiro dígito numérico. A fração da fala do formador, destacada abaixo, traz essa provocação:

“Vocês também pontuaram que para a escolha do primeiro dígito da identificação das pessoas teríamos que utilizar os algarismos de 1 até 9, desconsiderando o 0. Mas o primeiro dígito de muitos CPF é o zero.”  
[Fragmento da fala do formador].

Na sequência, uns dos participantes fez algumas ponderações sobre o questionamento realizado pelo formador, como no trecho de fala abaixo:

“Alguns sistemas não reconhecem o algarismo zero quando está à esquerda, no caso dos CPF. E o fato de que ter um código formado apenas por uma sequência de zeros pode causar algum impacto num sistema como esses. E a gente viu também o caso das placas de trânsito antes de terem essa mudança para o padrão Mercosul. Não tinha placa com final 0000.” [Fragmento da fala de um participante].

O formador contra-argumentou que o fato de excluir o algarismo zero do primeiro dígito numérico descartaria muitas possibilidades de códigos e que bastaria excluir o código formado apenas por uma sequência de zeros para atender a demanda pontuada pelos participantes, sem comprometer a funcionalidade do sistema de codificação. Essa proposição foi aceita e validada pela comunidade de estudos. Assim, os 11 dígitos numéricos permitirão o total de  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 1 = 100.000.000.000 - 1 = 99.999.999.999$  possibilidades para cada país, considerando que, para cada dígito haverá 10 possibilidades de escolha de algarismos (do 0 até 9), mas descartando a possibilidade do código 00.000.000.000.

Outra discussão levantada pelo formador foi a respeito da formação dos dígitos verificadores (como se daria) e se a repetição de algarismos de identificação das pessoas, por exemplo, poderia impactar na concepção desses dígitos, já que esses elementos de resposta não constaram nem no material escrito nem na fala dos participantes durante a apresentação. Os professores, então, levantaram algumas considerações a esse respeito, como podemos perceber nos excertos de falas que apresentamos na sequência.

“Eu acho que a parte mais complexa é a questão do dígito verificador, né?”  
[Fragmento da fala do Participante 1]

“Pensamos no caso dos dígitos verificadores do CPF que funcionam da seguinte maneira: o primeiro dígito verificador verifica os nove primeiros números, que são aleatórios. O último dígito, ou seja, o segundo dígito verificador, verifica o dígito verificador anterior a ele. É uma maravilha! O primeiro dígito verifica os nove números aleatórios, e o segundo dígito verifica os nove números anteriores a ele. E nesse caso, não haveria problemas de repetição dos números porque se formos utilizar o critério de não poder repetir os números, a gente iria identificar poucas pessoas por país, já que a quantidade de possibilidades iria reduzir exponencialmente. Além disso, a gente pode ter códigos dentro de um mesmo país utilizando os mesmos números, mas com posições diferentes.” [Fragmento da fala do Participante 2]

“Mas assim, a questão do dígito verificador é algo inerente ao Brasil. Então, eu acho que é uma medida de segurança. Mas, se a gente olhar para códigos de outros países, como da Índia, não existe o dígito verificador. Então, não necessariamente precisaríamos colocar um dígito verificador. [Fragmento da fala do Participante 3]

Com base nas considerações levantadas pelos participantes, o formador destacou que a ideia de incluir dígitos verificadores foi confirmada no encontro anterior. Além disso, ele enfatizou que esses dígitos são itens de segurança. No trecho de fala a seguir, o formador apresenta essa argumentação.

Mas, quando a pessoa vai digitar, por exemplo, o código, o código... Digamos que a gente aqui é do Brasil. O código vai ser BRA00123, uma hipótese. E se a gente entrar em um sistema que aceita esses mesmos caracteres em uma ordem diferente, sem ter o dígito verificador, ele pode confirmar esse código como sendo o código certo, mesmo se a gente digitar fora da ordem. O dígito verificador é justamente para ajudar na segurança do código em qualquer sistema. Quando a gente for digitar esse código, ele faz o cálculo de forma que considera a posição de cada caractere. Então, faz mais sentido colocar um dígito verificador. [Fragmento da fala do formador].

Após essa explanação, os participantes chegaram ao consenso de que é importante haver os dois dígitos verificadores, conforme estabelecido anteriormente. O primeiro dígito verifica as letras (que representam a nacionalidade do indivíduo) e o segundo, os algarismos (que identificam as pessoas dentro de um mesmo país). Ambos os dígitos verificadores se basearão no mesmo procedimento adotado pelo CPF, conforme elencamos abaixo:

- ***Primeiro Dígito Verificador ( $dv_1$ )***

A posição (segundo a ordem alfabética) que se encontra cada uma das três letras que formam o código são ordenadamente multiplicadas pela sequência 10, 9 e 8 (a posição da primeira multiplica por 10, a segunda por 9 e a terceira por 8). Em seguida, calcula-se o resto  $r$  da divisão da soma dos resultados das multiplicações por 11. Se esse resto for 0 ou 1, o primeiro dígito verificador é zero ( $dv_1 = 0$ ); caso contrário,  $dv_1 = 11 - r$ .

- **Segundo Dígito Verificador ( $dv_2$ )**

Os onze Algarismos destinados à identificação dos indivíduos dentro de um mesmo país são ordenadamente multiplicados pela sequência 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (o primeiro por 11, o segundo por 10, e assim por diante). Em seguida, calcula-se o resto  $r$  da divisão da soma dos resultados das multiplicações por 11. Se esse resto for 0 ou 1, o segundo dígito verificador é zero ( $dv_2 = 0$ ); caso contrário,  $dv_2 = 11 - r$ .

Se tomarmos como exemplo hipotético um cidadão brasileiro que tem como código de identificação BRA12345678902, o primeiro dígito verificador seria calculado da seguinte maneira:

B = 2ª posição no alfabeto

R = 18ª posição no alfabeto

A = 1ª posição no alfabeto

$$10 \cdot 2 + 9 \cdot 18 + 8 \cdot 1 = 20 + 162 + 8 = 190$$

Dividindo a soma dos resultados da multiplicação por 11, teremos:  $190 \div 11 = 17$ , com  $r = 3$ .

$$\text{Então, } dv_1 = 11 - 3 = 8.$$

Para o cálculo do segundo dígito verificador  $dv_2$ , consideraríamos o seguinte:

$$\begin{aligned} &11 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 + 6 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 4 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ &= 11 + 20 + 27 + 32 + 35 + 36 + 35 + 32 + 27 + 0 + 2 = 257 \end{aligned}$$

Dividindo a soma dos resultados da multiplicação por 11, teremos:  $257 \div 11 = 23$ , com  $r = 4$

$$\text{Então, } dv_2 = 11 - 4 = 7.$$

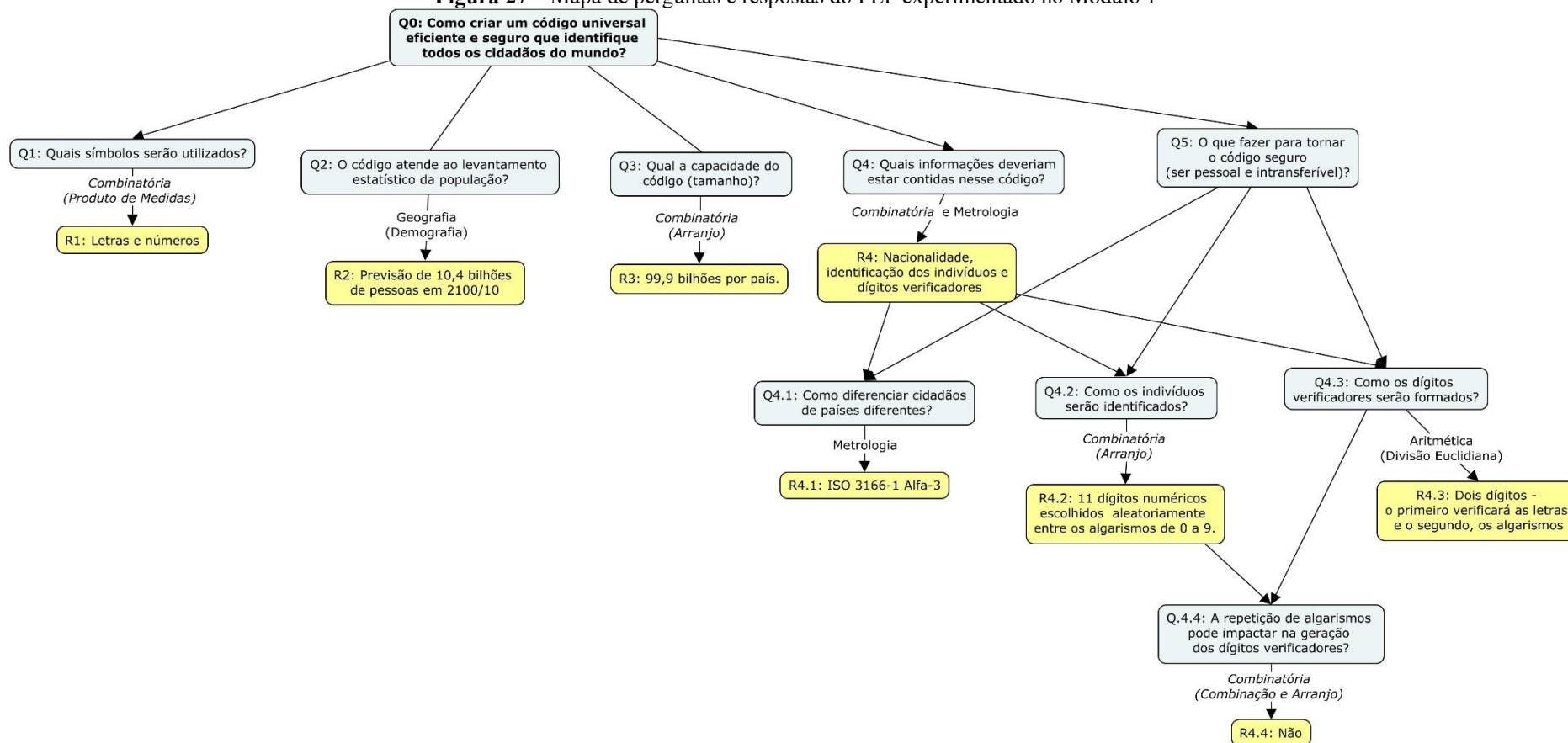
Assim, o código completo (incluindo os dois dígitos verificadores) para um cidadão brasileiro (de acordo com o exemplo sugerido) seria BRA12345678902-87.

Com as considerações sobre a formação dos dígitos verificadores, a comunidade decidiu por validar a resposta elaborada para responder à pergunta “ $Q_0$ : Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?”. A resposta  $R^\heartsuit$  elaborada e validada pela comunidade de estudos foi:

*$R^\heartsuit$ : O código de identificação universal será composto por 16 dígitos alfanuméricos. Os três primeiros representarão a nacionalidade do indivíduo, segundo a classificação ISO 3166-1 Alfa-3. Em seguida, haverá uma sequência de 11 dígitos numéricos aleatórios, onde cada dígito pode ser escolhido entre os algarismos de 0 a 9. Por fim, haverá dois dígitos verificadores: o primeiro relativo às três letras e o segundo à sequência de 11 algarismos.*

A figura 27 apresenta o mapa de perguntas e respostas relativas à pergunta  $Q_0$  do PEP, experimentado pelos professores (na posição de estudantes) durante o Módulo 1. Decidimos incluir neste mapa apenas o conjunto de perguntas que, de algum modo, teria repercussão direta na criação do código, o objetivo principal da questão geradora. Para facilitar a leitura e compreensão do mapa, os "retângulos arredondados" em cinza apresentam perguntas, enquanto os em amarelo apresentam os elementos de respostas. Além disso, as conexões entre perguntas e respostas indicam as obras e/ou áreas do conhecimento necessárias para elaborar essas respostas, com destaque (em itálico) para aquelas do campo da Combinatória.

**Figura 27 – Mapa de perguntas e respostas do PEP experimentado no Módulo 1**



**Fonte:** Elaborado pelo autor

Como é possível perceber, o PEP vivenciado neste módulo tem um caráter interdisciplinar. O estudo da questão geradora e suas derivadas vai além das fronteiras da Combinatória, estendendo-se para outras áreas da Matemática, como a Aritmética. Além disso, adentra uma importante área da Geografia, que é a Demografia. Isso, em certa medida, pode ser um dos indicativos que caracterizem o paradigma de investigação e questionamento do mundo.

No caso específico da Combinatória, foi possível notar o surgimento de tarefas (na forma de perguntas derivadas) que remetem diretamente aos problemas de contagem dos tipos Produto de Medidas, Combinação e, com mais frequência, Arranjo. Na proposta do PEP, o sistema didático não está subordinado à fragmentação das disciplinas em setores, domínios, temas e assuntos, como ocorre no paradigma de visita às obras. Assim, o estudo de diferentes problemas de contagem não se deu de maneira fragmentada.

O surgimento do Princípio Multiplicativo enquanto técnica para resolver esses problemas de contagem ocorreu naturalmente, pois a utilização de fórmulas poderia inviabilizar, por exemplo, a resolução da quantidade de dígitos numéricos necessários para representar a população mundial até 2100, considerando as taxas de natalidade e mortalidade a cada ano. Esta situação caracterizou um Arranjo com repetição, no qual  $m < n$ .

Na experimentação deste PEP, não foi possível contemplar o estudo de todos os problemas de contagem que estão assentados no modelo praxeológico de referência (pois, não foi possível perceber questões que dessem conta dos problemas do tipo permutação). Essa pode ser uma característica de um PEP aberto<sup>42</sup>, pois, conforme advoga Chevallard (2017), o nível de profundidade do estudo de uma obra, nesse caso, deve ser proporcional ao que o percurso precisa, nem mais nem menos. O autor ainda complementa que, apenas a partir do seu uso funcional, é que uma obra tem seu verdadeiro valor.

Outra característica apontada por Chevallard (2017) a respeito do PEP aberto e que também pode ser percebida é o papel desempenhado pelo formador como líder da investigação. A posição assumida pelo formador foi de neutralidade (ainda que não no sentido total), pois estava limitada a de, esporadicamente, impor alguns limites na abordagem de algumas questões (especialmente aquelas que não tinham papel preponderante na criação do código) e, ao mesmo tempo, chamar a atenção para questões pertinentes e que ainda não haviam sido abordadas. Todavia, essa atuação se deu a partir de uma estrutura democrática, em que as decisões foram tomadas a partir do resultado de deliberação coletiva. Essa ambiência também favoreceu o

---

<sup>42</sup> Para saber sobre as características do PEP aberto, bem como de outros tipos de PEP (fechado e semiaberto), consultar CHEVALLARD, Y. ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *La Gaceta de la RSME*, v. 20, n. 1, p. 159-169, 2017.

trabalho autônomo por parte dos professores (na posição de estudantes) que receberam uma extensão importante do seu papel, pois decidiram o que seria pertinente estudar em termos de questões derivadas e as obras que estudariam na elaboração das respostas parciais dadas.

O meio *M* também foi enriquecido a partir da construção das respostas parciais, incorporando a todo momento do processo de estudos recursos que foram aceitos e validados pela comunidade de estudos. O mesmo se pode dizer com a exclusão de algumas perguntas e/ou respostas que, ao longo do processo, foram perdendo sua utilidade na elaboração da resposta *R*<sup>♥</sup>. O meio *M* também sofre uma dilatação, se compararmos o mapa de questões preliminares da figura 23, que elaboramos nas análises *a priori*, com o mapa de perguntas e respostas construído a partir da vivência da comunidade de estudos neste módulo e que representamos na figura 27. Além das questões preliminares surgirem durante a experimentação, outras questões não previstas também foram elaboradas pelos participantes.

A experimentação do PEP no Módulo 1 também facilitou o surgimento das dialéticas, que, segundo Chevallard (2007), são consideradas gestos do estudo e da pesquisa. A dialética do estudo e da investigação (ou das perguntas e das respostas) manifestou-se durante a contínua formulação de perguntas e a elaboração de respostas, que se materializou tanto de forma escrita, nos registros realizados pelos participantes, quanto oralmente, durante as discussões em grupo ou coletivas. Nesse processo, os participantes exploraram especialmente textos disponíveis na internet para construir respostas e selecionar conhecimentos úteis com o objetivo de responder à *Q*<sub>0</sub> e suas derivadas, ao mesmo tempo em que novas questões foram formuladas.

A dialética do individual e do coletivo também permeou o processo de estudo e pesquisa, pois os membros da comunidade de estudos decidiram em conjunto e de forma colaborativa as questões derivadas que deveriam responder, a distribuição das tarefas entre os participantes, bem como as propostas e respostas às questões derivadas. Os professores na posição de estudantes também distinguiam as respostas individuais das respostas coletivas (quando estas eram validadas pelo grupo ou pelo coletivo). Isso se manifestava particularmente durante as atividades realizadas em grupo. O uso de documentos compartilhados no *Google Drive* favoreceu tanto o trabalho individual quanto o coletivo. Cada professor pôde inserir as respostas das questões sob sua responsabilidade em um mesmo arquivo, enquanto os demais participantes podiam sugerir melhorias nas respostas dos outros e colaborar na redação final, após a validação.

A dialética mídia-meio é evidenciada quando, durante o processo de estudo, a informação (mídia) introduzida no meio passa por um processo de validação pela comunidade de estudo. Conforme já apontado anteriormente, o fato de os encontros terem acontecido

predominantemente de forma remota pode ter sido um ambiente natural para que as mídias incorporadas ao meio tenham sido provenientes de buscas realizadas na internet. É possível perceber que essas mídias, geralmente, passavam por um processo de validação antes de serem incorporadas ao meio. Um exemplo disso pode ser notado quando os participantes abordaram a pergunta sobre a projeção da população a longo prazo. Nesse caso específico, embora em certo momento se tenha considerado as taxas de natalidade e mortalidade da população mundial, esse sistema de informações foi descartado. Preferiu-se validar e incorporar a estimativa do total de seres humanos que já existiram, utilizando-a como referência na formulação do código.

Também foi possível identificar indicadores da presença da dialética de entrar e sair do tema. Em relação a entrar no tema, observamos o estudo de conteúdos de diversos campos do conhecimento, como a Matemática e a Geografia, que estiveram presentes. Particularmente, no que diz respeito ao tema Combinatória, percebeu-se a utilização de problemas de contagem que permitiram responder a perguntas derivadas. No entanto, é importante ressaltar que essa entrada ao tema da Combinatória (visita à obra) ocorreu antes da experimentação do PEP neste módulo, pois os professores exploraram essa área (mais especificamente, os problemas de contagem) durante a vivência do Módulo 0.

Do ponto de vista da dialética entre caixas negras e caixas claras, os professores, na condição de estudantes, começaram a estabelecer, ainda que de forma incipiente, os saberes considerados pertinentes e necessários para avançar na construção de respostas às questões derivadas, bem como à questão inicial ( $Q_0$ ). Nesse contexto, observou-se, por exemplo, uma maior dedicação dos participantes ao estudo dos conteúdos combinatórios e suas possíveis conexões com a elaboração de respostas às perguntas formuladas. Por outro lado, o estudo de saberes relacionados à Demografia ficou limitado à coleta de informações das mídias consultadas. Esse cenário pode refletir, conforme apontado por Gazzola, Otero e Llanos (2020), a influência do monumentalismo dominante, no qual, de maneira tradicional, o professor – neste caso, o formador – assume o papel de determinar quais saberes são relevantes e até que ponto devem ser aprofundados para responder às questões propostas.

Já no que tange à dialética da leitura e da escrita, foi possível observar que os participantes realizaram gestos desta dialética de maneira progressiva. Isso pode ser percebido nos documentos compartilhados que os professores utilizavam para realizar seus registros. Inicialmente, os achados das mídias utilizadas eram copiados na íntegra e, posteriormente, reescreviam os dados que eram úteis para elaborar as respostas ou realizavam sínteses.

Em relação à dialética da produção e da recepção, a difusão e defesa das respostas desenvolvidas pela comunidade de estudos se deu de maneira escrita (no aspecto da difusão) e

também se difundiu através de relatos orais (difusão e defesa). E sobre isso, podemos citar ao menos dois exemplos da difusão fundamentada dos saberes do campo da Combinatória: o primeiro deles foi o caso da capacidade de possibilidades de códigos de identificação, em que o formador questionou se a utilização de 10 dígitos numéricos seria suficiente, contrapondo a escolha dos participantes que era por utilizar 11 dígitos. A partir da provocação por parte do formador, os professores em formação defenderam a opção já elencada por eles. As características dessa dialética também se manifestaram no momento de abordar a questão derivada sobre o impacto da repetição de algarismos na formação dos dígitos verificadores. Os participantes, utilizando-se das ideias de Combinação e Arranjo, reforçaram sua posição de que a repetição de algarismos na formação dos códigos (agrupamentos) geraria novas possibilidades e que a constituição desses dígitos verificadores levaria em consideração a ordenação desses elementos (algarismos).

As dialéticas do paraquedista e das trufas e da análise e síntese praxeológica e didática não puderam ser identificadas nos registros escritos dos professores nem nos momentos de discussão coletiva. Contudo, é preciso ressaltar que, ainda que estas dialéticas não tenham sido percebidas durante a experimentação, o conjunto das dialéticas se mostrou útil para avaliar o desenvolvimento do PEP, bem como analisar as principais condições e restrições para o seu funcionamento.

### **9.3 Análise do Módulo 2**

Este módulo, segundo Ruiz-Olarría (2015), tem como objetivo questionar e analisar a estrutura do PEP vivenciado pelos professores, na posição de estudantes, tanto do ponto de vista das praxeologias matemáticas construídas efetivamente, como da organização didática deste processo em termos de articulação dos momentos de estudo, dos gestos e das técnicas e tecnologias didáticas que foram postas em jogo, e também em termos das responsabilidades que assumiram os professores em formação (em seu papel de estudantes) e do formador (em seu papel de diretor do estudo).

Inspirados pelo trabalho da referida autora que desenvolveu a metodologia PEP-FP, adotada neste estudo, o processo de análise ocorreu em dois níveis. O primeiro nível visava realizar uma análise matemática da atividade executada. Embora essa atividade tenha abrangido diversos campos, a análise se restringiu ao campo da Combinatória, uma vez que o principal objetivo desta investigação era propor uma formação voltada a esse campo.

Para isso, revisitamos as questões propostas por Ruiz-Olarría (2015) para a análise matemática neste módulo, reformulando-as e adaptando-as ao contexto desta investigação. A questão geradora para essa análise foi a seguinte:

*“Q<sub>21</sub>: Como você pode descrever a atividade matemática desenvolvida para responder à pergunta Q<sub>0</sub> (do PEP do código)? Quais são os elementos matemáticos (noções, técnicas, propriedades, etc.) utilizados e os procedimentos seguidos?”*

A fim de trazer significado à questão geradora apontada anteriormente, elaboramos algumas questões derivadas para orientar a análise matemática do PEP experimentado pelos professores na posição de estudantes:

- Qual o papel que os conhecimentos do campo da Combinatória desempenharam ao longo do processo de estudo da questão Q<sub>0</sub> (do PEP do código)?
- Em que momentos específicos do processo surgiu a necessidade de utilização de conhecimentos combinatórios?
- Que papel desempenharam os problemas de contagem do tipo produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação na atividade matemática desenvolvida?
- Quais técnicas de contagem (fórmulas, princípio multiplicativo, árvore de possibilidades, listagem um a um etc.) foram utilizadas durante o processo? Foi percebida alguma limitação dessas técnicas de contagem utilizadas durante o processo? Se sim, quais?
- Você considera necessário continuar o processo de estudo por mais algumas sessões ou, pelo contrário, sente que dedicou tempo suficiente à problemática da criação de um código de identificação universal?

O segundo nível de análise deste módulo corresponde à dimensão didática da atividade realizada no PEP do Módulo 1. Assim, foi proposta a questão geradora para esta fase do Módulo 2 da seguinte forma:

*“Q<sub>22</sub>: Como você descreve a atividade didática realizada no âmbito do PEP vivenciado? Que novos dispositivos de ensino surgiram em relação à organização do ensino escolar tradicional e, em particular, como se modificou a distribuição habitual das responsabilidades didáticas entre os membros da comunidade de estudo?”*

E para orientar a análise didática do PEP vivenciado pelos professores na posição de estudantes durante o Módulo 1, foram propostas as seguintes questões derivadas:

- A quem cabe, no PEP, a responsabilidade da criação de um código de identificação universal?
- Qual o papel que a questão geradora desempenhou em todo o PEP? Permaneceu sempre presente? Desapareceu? Permaneceu inalterada ao longo do processo ou evoluiu?
- Quem foram os responsáveis por levantar as questões e tarefas iniciais? Que outras tarefas poderiam ter surgido desta questão geradora? Que outra direção possível o processo de estudo poderia ter tomado?
- Quem tem a responsabilidade de decidir em cada momento os meios, instrumentos e técnicas mais adequados para continuar o estudo?
- Como foi decidido o tipo de problemas a serem estudados em cada momento, bem como a direção que o processo de estudo deveria tomar?
- Como tem sido gerido o tempo didático? Ou seja, com base em quais critérios foi decidido o tempo que deveria ser dedicado a cada tipo de problema? Com base em quais critérios foi decidido aprofundar um determinado tipo de problema ou, pelo contrário, mudar a atividade para estudar outros tipos de problemas?
- Quem foi responsável pela avaliação dos resultados parciais e das respostas provisórias que surgiram ao longo do processo?
- Qual tem sido, em suma, o grau de autonomia assumido pelos estudantes (professores na posição de estudantes) ao longo do PEP vivenciado?
- Muitos estudos mostram que o ensino de Combinatória no âmbito do Ensino Médio tem sido centrado no uso abusivo de fórmulas e, conseqüentemente, com o estudo compartimentado (separado) dos problemas de contagem. Isso tem gerado um efeito, certamente negativo, nos processos de aprendizagem, pois é comum que estudantes se questionem, ao resolver problemas combinatórios, se trata de um problema de arranjo, permutação ou combinação, por exemplo, desconsiderando que um mesmo problema pode abordar vários tipos de situações combinatórias. Como explicar esse fenômeno didático-matemático?

A vivência deste módulo pela comunidade de estudos ocorreu durante o décimo encontro. Inicialmente, o formador apresentou as orientações da atividade, que consistia na leitura das perguntas elaboradas e apresentadas anteriormente. Em seguida, ele reorganizou os

professores em dois grupos, já que havia um total de 09 participantes nesse encontro, utilizando salas temáticas no *Google Meet*, e compartilhou um documento no *Google Drive* contendo essas questões, onde os participantes deveriam escrever suas respostas.

Para esta atividade, especificamente, não houve apresentação para a comunidade de estudos. Cada um dos grupos propôs, por escrito, respostas às questões geradoras ( $Q_{21}$  e  $Q_{22}$ ) e às questões derivadas mencionadas. No quadro 23 abaixo, apresentamos inicialmente o conjunto de questões e respostas elaboradas pelos dois grupos, referentes à análise matemática do PEP experimentado.

**Quadro 23** – Análise matemática do PEP experimentado no Módulo 1

| <b>Q21:</b> Como você pode descrever a atividade matemática desenvolvida para responder à pergunta Q <sub>0</sub> (do PEP do código)? Quais são os elementos matemáticos (noções, técnicas propriedades, etc.) utilizados e os procedimentos seguidos? |                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Questões Derivadas</b>                                                                                                                                                                                                                              | <b>Respostas do Grupo 1 – E10</b>                                                                                                                                                                  | <b>Respostas do Grupo 2 – E10</b>                                                                                                                                          |
| Qual o papel que os conhecimentos do campo da Combinatória desempenharam ao longo do processo de estudo da questão Q <sub>0</sub> (do PEP do código)?                                                                                                  | <i>Acompanhou todo o processo de formulação de maneira implícita, de forma usual direta no papel de verificação da abrangência do código.</i>                                                      | <i>Desempenharam um papel de relevância, pois sem uma base conceitual desse conhecimento se tornaria inviável a criação do código.</i>                                     |
| Em que momentos específicos do processo surgiu a necessidade de utilização de conhecimentos combinatórios?                                                                                                                                             | <i>Na verificação da abrangência do código, a partir da estimativa populacional, nos momentos de debates da criação do código, em especial na quantidade de elementos de composição do código.</i> | <i>No momento de conferir a validação e segurança do código.</i>                                                                                                           |
| Que papel desempenharam os problemas de contagem do tipo produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação na atividade matemática desenvolvida?                                                                                                    | <i>Dimensionamento e capacidade do código.</i>                                                                                                                                                     | <i>Desempenharam um papel fundamental na criação do código, no sentido de determinar a quantidade de dígitos de tal código, garantindo que não haverá repetição deste.</i> |
| Quais técnicas de contagem (fórmulas, princípio multiplicativo, árvore de possibilidades, listagem um a um etc.) foram utilizadas durante o processo?                                                                                                  | <i>Princípio multiplicativo, Arranjo, Combinação</i>                                                                                                                                               | <i>Utilizamos o princípio multiplicativo.</i>                                                                                                                              |
| Foi percebida alguma limitação dessas técnicas de contagem utilizadas durante o processo? Se sim, quais?                                                                                                                                               | <i>Observamos que não era possível a utilização de árvores de possibilidade.</i>                                                                                                                   | (Resposta Ausente)                                                                                                                                                         |
| Você considera necessário continuar o processo de estudo por mais algumas sessões ou, pelo contrário, sente que dedicou tempo suficiente à problemática da criação de um código de identificação universal?                                            | <i>Se possível mais um encontro. Se houvesse tempo, seria ideal tentarmos fazer algumas verificações com algum programa.</i>                                                                       | <i>Sinto que dedicamos tempo suficiente à problemática da criação do código. No entanto, quanto a sua aplicabilidade na prática ainda restam alguns questionamentos.</i>   |

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

É possível perceber claramente que os dois grupos reconhecem a imprescindibilidade que os saberes do campo da Combinatória desempenharam ao longo do processo de estudo questão Q<sub>0</sub>, tanto do ponto de vista da abrangência do código criado (quantidade de possibilidades) como da sua otimização (utilização da menor quantidade de elementos possíveis a fim de atender à demanda), além de garantir que não haverá repetição de códigos.

Os participantes também reconheceram a importância do Princípio Multiplicativo para resolver as tarefas surgidas nesse processo a partir das questões derivadas levantadas. No entanto, quando questionados sobre a utilização de diferentes técnicas, o Grupo 1 – E10 equivocadamente classificou os Arranjos e as Combinações como técnicas utilizadas, em vez de considerá-las categorias de problemas combinatórios de contagem. Isso pode ser justificado, em certa medida, pelo que afirma Rufino (2015) em relação ao campo da Combinatória. A autora adverte que aquilo que está sendo contado interfere na forma de contar, de maneira que muitos livros-texto desse campo ora se referem a esses termos como técnicas ora como conceitos. Todavia, a posição assumida no modelo praxeológico de referência neste estudo é de que consideramos Arranjo e Combinação como problemas de contagem.

Em relação às limitações das técnicas utilizadas durante o processo, apenas o Grupo 1 – E10 mencionou a inviabilidade de utilizar a árvore de possibilidades. Como nenhum dos grupos apontou dificuldades no uso do Princípio Multiplicativo como técnica de contagem, podemos inferir que sua aplicação não apresentou problemas e foi suficientemente abrangente para resolver os problemas de contagem surgidos.

Quanto à necessidade de continuar o processo de estudos sobre a criação de um código de identificação universal, os grupos foram unânimes em considerar a importância de entender melhor a aplicabilidade do código e realizar testagens com algum software. No entanto, divergiram sobre a necessidade de continuar explorando a questão geradora: o Grupo 1 – E10 indicou que precisaria de mais um encontro, enquanto o Grupo 2 – E10 considerou que dedicou tempo suficiente à problemática da criação do código.

O segundo conjunto de questões para análise do PEP vivenciado no Módulo 1 diz respeito à dimensão da atividade didática engendrada nesse processo. No quadro 24, apresentamos os elementos de resposta apontados pelos grupos no material escrito a essas perguntas.

**Quadro 24** – Análise didática do PEP experimentado no Módulo 1

| <b>Q22:</b> Como você descreve a atividade didática realizada no âmbito do PEP vivenciado? Que novos dispositivos de ensino surgiram em relação à organização do ensino escolar tradicional e, em particular, como se modificou a distribuição habitual das responsabilidades didáticas entre os membros da comunidade de estudo? |                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Questões Derivadas</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | <b>Respostas do Grupo 1</b>                                                                                                                            | <b>Respostas do Grupo 2</b>                                                                                                                                                                                                                 |
| A quem cabe, no PEP, a responsabilidade da criação de um código de identificação universal?                                                                                                                                                                                                                                       | <i>A responsabilidade é do estudante.</i>                                                                                                              | <i>A responsabilidade da criação será dos estudantes.</i>                                                                                                                                                                                   |
| Qual o papel que a questão geradora desempenhou em todo o PEP? Permaneceu sempre presente? Desapareceu? Permaneceu inalterada ao longo do processo ou evoluiu?                                                                                                                                                                    | <i>Presente em todo processo, depois tivemos que considerar a segurança e a intransferibilidade.</i>                                                   | <i>O seu papel foi central. Ela permaneceu sempre presente, no entanto ela foi evoluindo ao longo do processo de criação.</i>                                                                                                               |
| Quem foram os responsáveis por levantar as questões e tarefas iniciais? Que outras tarefas poderiam ter surgido desta questão geradora? Que outra direção possível o processo de estudo poderia ter tomado?                                                                                                                       | <i>Os estudantes respondendo à pergunta geradora. Novos questionamentos, como identificar os países.</i>                                               | <i>A provocação inicial foi do mediador.</i>                                                                                                                                                                                                |
| Quem tem a responsabilidade de decidir em cada momento os meios, instrumentos e técnicas mais adequados para continuar o estudo?                                                                                                                                                                                                  | <i>Os estudantes tinham a liberdade de decidir.</i>                                                                                                    | <i>A responsabilidade da decisão ocorreu em conjunto, os estudantes e o mediador. Sendo que o mediador atuou por meio de observações e questões provocativas, no sentido de ampliar o nosso olhar sobre o que estava sendo apresentado.</i> |
| Como foi decidido o tipo de problemas a serem estudados em cada momento, bem como a direção que o processo de estudo deveria tomar?                                                                                                                                                                                               | <i>Através de debate, vimos que primeiro deveríamos saber a perspectiva de aumento da população (estimativa), depois vimos a quantidade de países.</i> | <i>Foi decidido a partir das discussões em grupos e das plenárias.</i>                                                                                                                                                                      |
| Como tem sido gerido o tempo didático? Ou seja, com base em quais critérios foi decidido o tempo que deveria ser dedicado a cada tipo de problema? Com base em quais critérios foi decidido aprofundar um determinado tipo de problema ou, pelo contrário, mudar a atividade para estudar outros tipos de problemas?              | <i>Fomos dividindo e respondendo os questionamentos e debatendo no final.</i>                                                                          | <i>O tempo foi gerido inicialmente pelo mediador, porém de acordo com a complexidade das temáticas houve negociação com participantes para ampliação do tempo inicial.</i>                                                                  |
| Quem foi responsável pela avaliação dos resultados parciais e das respostas provisórias que surgiram ao longo do processo?                                                                                                                                                                                                        | <i>Todos os participantes dos Subgrupos de forma consensual.</i>                                                                                       | <i>Foram os participantes, ou seja, os estudantes.</i>                                                                                                                                                                                      |
| Qual tem sido, em suma, o grau de autonomia assumido pelos estudantes (professores na posição de estudantes) ao longo do PEP vivenciado?                                                                                                                                                                                          | <i>Autonomia quase que total.</i>                                                                                                                      | <i>Aproximadamente, tivemos uma participação de 70%.</i>                                                                                                                                                                                    |
| Muitos estudos mostram que o ensino de Combinatória no âmbito do Ensino Médio tem sido centrado no uso abusivo de fórmulas e, consequentemente, com o estudo compartimentado (separado) dos problemas de contagem. Isso tem gerado um efeito, certamente negativo, nos                                                            | (Resposta Ausente)                                                                                                                                     | <i>Algumas variáveis podem ser consideradas ao explicar esse fenômeno, tais como, falta de abordagem desse conteúdo na formação inicial e continuada, falta de tempo didático, excesso de conteúdos.</i>                                    |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| processos de aprendizagem, pois é comum que estudantes se questionem, ao resolver problemas combinatórios, se trata de um problema de arranjo, permutação ou combinação, por exemplo, desconsiderando que um mesmo problema pode abordar vários tipos de situações combinatórias. Como explicar esse fenômeno didático-matemático? |  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Além das respostas elencadas no quadro acima, o Grupo 1 – E10 também incluiu em seus registros elementos de resposta para a questão geradora  $Q_2$ , que apresentamos abaixo:

“inovadora, investigação por parte dos alunos sobre elaboração do código, com estudantes exercendo papel protagonista. Multidisciplinaridade envolvida no PEP.” [Excerto da resposta do Grupo 1].

Como é possível notar, os professores deste grupo consideram o PEP uma proposta inovadora, na qual a investigação é conduzida pelos estudantes que assumem um papel protagonista. Além disso, ressaltam o caráter interdisciplinar (chamado pelo grupo de multidisciplinar) que teve esse dispositivo didático vivenciado durante o Módulo 1.

Esse aspecto do protagonismo também foi destacado pelos grupos ao responderem à questão derivada sobre o grau de autonomia. O Grupo 1, por exemplo, afirmou que os professores (na posição de estudantes) tiveram quase total autonomia. Por sua vez, os participantes do Grupo 2 – E10, mesmo sem ter parâmetros claros, quantificaram esse grau de autonomia em 70%, reforçando o papel autônomo dos professores ao longo do PEP vivenciado.

Em relação ao *topos* dos professores enquanto experimentavam o PEP na condição de estudantes, os grupos concordaram que eles próprios eram responsáveis pela criação de um código de identificação universal, bem como pela elaboração de novas perguntas. Quanto à responsabilidade de decidir, em cada momento, os meios, instrumentos e técnicas mais adequados para continuar o estudo, o Grupo 1 – E10 considerou que os estudantes (os professores em formação) tinham a liberdade de decidir. Já o Grupo 2 – E10 ponderou que essa decisão ocorreu de modo consensual entre os professores e o formador. No entanto, este grupo destacou o papel do formador em fazer observações e levantar questões problematizadoras, ampliando a compreensão sobre o que estava sendo apresentado.

Ainda sobre as responsabilidades assumidas pelos membros da comunidade de estudos, os grupos concordaram que ficava sob a incumbência dos participantes (professores) a avaliação dos resultados parciais e das respostas provisórias que surgiram ao longo do processo.

No que concerne ao papel desempenhado pela questão geradora ao longo de todo o processo do PEP, houve também uma unanimidade por parte dos professores em considerar que a  $Q_0$  esteve presente ao longo de todo o percurso e que ela foi evoluindo ao longo do tempo. A esse respeito, apesar da questão geradora ter permanecido inalterada durante a vivência do PEP, pode-se dizer que sua compreensão foi sendo ampliada à medida que novas perguntas derivadas surgiram.

Duas perguntas derivadas propostas receberam respostas incipientes ou ficaram sem resposta por pelo menos um dos grupos. A primeira tratava da gestão do tempo didático. Os grupos apenas mencionaram a divisão do tempo para a realização das tarefas propostas pelo formador, sem justificar como foi decidido o tempo dedicado a cada tipo de problema.

A última pergunta abordava um fenómeno didático-matemático no ensino de Combinatória que subordina o sistema didático ao estudo fragmentado dos conteúdos desse campo, geralmente a partir de temas e assuntos (do ponto de vista da escala de níveis de codeterminação didática). Sobre essa questão, o Grupo 1 – E10 não apresentou respostas, enquanto o Grupo 2 – E10 ponderou algumas variáveis, como a falta de abordagem desses conteúdos na formação inicial e continuada, a escassez de tempo didático e a grande quantidade de conteúdos a serem abordados.

#### 9.4 Análise do Módulo 3

O objetivo deste módulo é que os professores em formação adaptem e desenhem sua própria versão de um PEP, semelhante ao vivenciado no Módulo 1, para uma determinada etapa da escolarização. Como pontuado anteriormente, no capítulo 5, que trata do percurso metodológico deste estudo, o Módulo 3 foi experimentado de forma incipiente. Este módulo foi vivenciado no décimo primeiro encontro, porém o tempo destinado não foi suficiente para que os professores o explorassem de maneira consistente.

Assim, não tivemos a pretensão de que os professores elaborassem um desenho detalhado de um PEP que pudesse servir como uma possível justificativa para o ensino de Combinatória. O objetivo foi proporcionar uma experiência que incorporasse gestos do paradigma do questionamento do mundo e se aproximasse, em certa medida, da atividade que eles vivenciaram durante o PEP no Módulo 1.

Na abertura do encontro, o formador apresentou as seguintes orientações da atividade.

#### **ATIVIDADE**

Adapte o PEP vivenciado (o PEP da criação do código de identificação universal) para uma turma do Ensino Médio, considerando os seguintes aspectos:

- Considere os módulos vivenciados anteriormente;
- Elenque a pergunta geradora;

- Liste as primeiras questões derivadas, separando as questões de âmbito não-matemático das de âmbito matemático (focalizando as questões derivadas que podem estar relacionadas ao campo da Combinatória);
- Apresente os primeiros elementos de respostas para as questões derivadas de âmbito matemático (especialmente as relacionadas ao campo da Combinatória).

Além das orientações elencadas acima, o formador também sublinhou que essas questões derivadas deveriam ser possíveis questões que os estudantes elaborariam quando estivessem trabalhando a questão geradora. Na sequência, os professores foram divididos em dois grupos e foi compartilhado um documento no *Google Drive* contendo as orientações e que também serviria para registro das respostas de cada grupo. O quadro 25 a seguir apresenta o resultado das construções realizadas pelos grupos na vivência deste módulo.

**Quadro 25** – Desenho preliminar de um PEP para o ensino de Combinatória no Ensino Médio

|               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| GRUPO 1 – E11 | <p><b>Q<sub>0</sub>:</b> Como criar um código de identificação para controle e acesso às instalações da escola por parte da comunidade escolar, de modo que esse código seja único e intransferível?</p> <p><b>QUESTÕES DERIVADAS</b></p> <p><b>Âmbito matemático</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Quantos elementos devem compor o código, de maneira que atenda a toda comunidade escolar?</li> <li>• A forma que os elementos estão posicionados interfere na quantidade?</li> <li>• Qual a validade deste código?</li> </ul> <p><b>Âmbito não-matemático</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• O código terá abrangência para as pessoas externas da comunidade escolar?</li> <li>• Quais as informações que devem ser contempladas no cadastro?</li> <li>• Será preciso diferenciar os participantes da comunidade escolar em grupos como por exemplo: estudantes, visitantes, pais, professores e funcionários?</li> </ul> |
| GRUPO 2 – E11 | <p><b>Q<sub>0</sub>:</b> Como podemos criar um código de identificação estudantil por escola?</p> <p><b>QUESTÕES DERIVADAS</b></p> <p><b>Âmbito matemático</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Quais conteúdos matemáticos seriam mobilizados para a criação desse código?<br/><i>R: Análise combinatória</i></li> <li>• Quantos dígitos/números teriam no código?<br/><i>R: 7 dígitos</i></li> </ul> <p><b>Âmbito não-matemático</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Quais informações deveriam estar contidas neste código?<br/><i>R: Nome, RG.</i></li> <li>• Quantos estudantes haveria na escola nos próximos 10 anos?</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Como é possível perceber, os dois grupos propuseram um desenho de um PEP muito próximo daquele experimentado durante o Módulo 1, tanto do ponto de vista das questões geradoras como das perguntas derivadas apresentadas. Observa-se, ainda, que as perguntas elaboradas não têm resposta imediata, o que constitui uma condição essencial para a formulação de uma pergunta geradora no âmbito do PEP. Nesse sentido, evidencia-se também uma preocupação dos professores em propor uma atividade matemática que se aproxime de uma investigação ou de uma busca por soluções para problemas emergentes do cotidiano dos estudantes, o que sinaliza uma aproximação com o paradigma de questionamento do mundo.

## 10 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve duas frentes de atuação importantes: a primeira foi suscitar uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória, que ainda é negligenciado na educação básica brasileira. O seu ensino tem ocorrido de maneira fragmentada, focando na aplicação de fórmulas sem a devida compreensão dos significados subjacentes, e distanciando-se da realidade e dos problemas que podem surgir na vida cotidiana, tanto no âmbito social quanto no profissional.

A outra frente de atuação importante diz respeito à formação de professores de Matemática para o ensino desse campo, especialmente no nível do Ensino Médio. As investigações na área da Educação Matemática indicam que essa formação, tanto inicial quanto continuada, tem sido insuficiente para proporcionar a esses profissionais os saberes matemáticos e didáticos necessários, de forma articulada, para que possam atuar eficientemente em suas salas de aula.

Por isso, o objetivo geral desta investigação foi desenvolver, implementar e analisar um processo de formação de professores sobre o ensino de Combinatória, baseado na metodologia do Percurso de Estudos e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), com um grupo de professores de Matemática do Ensino Médio.

O PEP-FP surgiu como dispositivo de formação docente a partir da adaptação do PEP, o qual, por sua vez, emerge da necessidade de recuperar o sentido e as razões de ser das praxeologias matemáticas, que precisam ser reconstruídas em diferentes níveis educativos. Esse processo envolve estabelecer as questões como ponto de partida para o conhecimento matemático, contrapondo-se ao modelo vigente, no qual os processos de estudos se concentram nas obras matemáticas, mesmo que suas razões de ser e funcionalidades permaneçam desconhecidas. Ambos, PEP e PEP-FP situam-se no âmbito da TAD.

Nesse sentido, Ruiz-Olarría, Bosch Casabò e Gascón Perez (2019) adaptaram o PEP para a formação de professores buscando realizar a integração da análise praxeológica matemática com a didática a partir de um problema relevante à profissão docente. A metodologia proposta por esses autores possui cinco fases, chamadas de Módulos (do 0 ao 4). Elas abrangem desde a reflexão sobre as razões que justificam o estudo de um objeto matemático, a vivência na posição de estudantes, e a análise de um PEP, até o desenho e experimentação de um PEP que pode ser análogo ao experienciado.

O percurso metodológico empregado nesta pesquisa esteve ancorado nos pressupostos da Engenharia Didática (ED) que, segundo Chevallard (2009), Barquero e Bosch (2022) e García *et al.* (2018), tem sido base metodológica dos estudos na TAD, especialmente aqueles relacionados ao PEP. Os princípios básicos da ED estão estruturados em quatro fases: Análise Preliminar, Análise *a priori*, Análise *in vivo*, Análise *a posteriori*.

A Análise Preliminar foi dividida em duas etapas. Na primeira, tratamos de construir e analisar um Modelo Praxeológico de Referência relativo ao campo da Combinatória, mais especificamente sobre os problemas de contagem, para o Ensino Médio. Esse modelo é constituído por quatro tipos de tarefas, cada uma relacionada aos problemas dos tipos Produto de Medidas, Permutação, Arranjo e Combinação, contrapondo-se ao modelo tradicional que explicita apenas esses três últimos. A técnica escolhida para realizar essas tarefas foi o Princípio Multiplicativo, que se mostrou eficaz, abrangente e com possibilidades de evolução. Os discursos teórico-tecnológicos levantados não apenas justificaram a escolha da técnica empregada, mas também proporcionaram uma compreensão do que está sendo contado, utilizando a ideia das diferentes disposições dos elementos nos subconjuntos ou agrupamentos formados, considerando a ordem e a natureza desses elementos.

Ainda nessa fase, explicitamos o Modelo Praxeológico Dominante para o ensino de Combinatória no Brasil. Para essa elaboração, utilizamos como insumos a BNCC (Brasil, 2018), o Currículo de Pernambuco – Ensino Médio (Pernambuco, 2021), livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio e estudos sobre a prática docente nesse campo. O modelo evidenciou a predominância de abordagens focadas em tipos tarefas relacionadas a problemas de contagem, como Arranjos, Permutações e Combinações. Tarefas do tipo Produto de Medidas também são abordadas, mas são frequentemente denominadas de Princípio Fundamental da Contagem, o que do ponto de vista do Modelo Praxeológico de Referência adotado nessa tese é uma escolha equivocada. Outro aspecto destacado é que a ênfase nas tarefas ligadas ao produto fatorial confere a elas o *status* de problemas de contagem. Em relação às técnicas, apesar de algumas utilizações do Princípio Multiplicativo e das recomendações contidas nos documentos de orientação curricular, os livros didáticos e as práticas analisadas priorizaram o uso de fórmulas. Quanto à formação do entorno teórico-tecnológico, observou-se uma ausência de justificativas adequadas ou, quando presentes, estas se restringiam à relevância da ordem dos elementos na formação dos agrupamentos.

Na Análise *a priori*, elaboramos um mapa preliminar de questões referentes ao Módulo 0 visando entender as bases do PEP-FP e antecipando possíveis perguntas essenciais para que

os professores participantes do processo formativo pudessem iniciar uma mudança paradigmática. Além disso, também construímos um mapa preliminar de questões e respostas da proposta de um PEP experimentado no Módulo 1 pelos professores, na posição de estudantes, buscando emergir uma possível razão de ser para o ensino de Combinatória a partir da questão geradora “*Q<sub>0</sub>: Como criar um código universal eficiente e seguro que identifique todos os cidadãos do mundo?*”.

A Análise *in vivo* foi marcada pela experimentação do PEP-FP com a comunidade de estudos, composta por professores em formação e pelo pesquisador na posição de formador, ao longo de 11 encontros, que ocorreram predominantemente de forma remota e síncrona. Durante essa fase, foi possível vivenciar quatro dos cinco módulos propostos pela metodologia do PEP-FP. Foi também nesse período que se realizaram a produção de dados por meio das gravações audiovisuais dos encontros e das produções escritas elaboradas pelos participantes.

O ponto de partida do Módulo 0 teve como questão geradora “Como ensinar Combinatória?”. Os participantes tiveram a oportunidade de se iniciarem em gestos básicos do questionamento didático, a partir do levantamento de questões derivadas e elaboração de respostas a essas questões. Nesse processo, eles puderam questionar e/ou confrontar o modelo dominante, bem como incorporar ao seu repertório e/ou ratificar elementos do modelo de referência.

No Módulo 1, como se fossem estudantes do Ensino Médio, os professores experimentam um PEP que conduziu a um processo de estudos que extrapolou as fronteiras do campo da Combinatória e da própria Matemática. Também foi possível o estudo de problemas de contagem que surgiram a partir das questões derivadas construídas, essenciais para a elaboração da resposta R<sup>♥</sup>.

Outra importante constatação observada durante a experimentação deste módulo refere-se à forma como foram estudados os tipos de tarefas relacionadas aos problemas de contagem, resultantes do processo de elaboração de respostas às perguntas derivadas. Ao contrário do ensino tradicional, onde essas tarefas geralmente aparecem de maneira segmentada e separadas por temas ou assuntos, o PEP vivenciado pela comunidade de estudos permitiu que os professores, na posição de estudantes, estudassem esses problemas de maneira articulada.

Nesse processo, as funções didáticas (cronogênese, mesogênese e topogênese) e os diferentes gestos dialéticos descritos por Chevallard (2007), que visam organizar e descrever o processo de estudo, materializados através das nove dialéticas, constituíram-se em importantes ferramentas para a análise das práticas desenvolvidas no PEP. O uso das dialéticas como

instrumento de análise possibilitou evidenciar sinais de mudança paradigmática, indicando movimentos de deslocamento em direção ao paradigma de questionamento do mundo.

No Módulo 2, os professores analisaram as atividades matemáticas e didáticas desenvolvidas durante a vivência do PEP no módulo anterior. Eles puderam destacar a importância dos saberes do campo da Combinatória para responder à pergunta geradora, assim como perceber o papel central dessa questão ao longo de todo o percurso. Observou-se também a relevância das infraestruturas didáticas nesse processo, especialmente no que se refere à ampliação do meio didático ao longo do desenvolvimento das etapas de formulação de perguntas e construção de respostas. Outro aspecto considerado pelos participantes refere-se à topogênese, expressa na divisão de responsabilidades, na compreensão dos papéis dos estudantes (neste caso, professores assumindo a posição de estudantes) e no grau de autonomia assumido por eles e pelo formador. Por sua vez, a cronogênese foi evidenciada na gestão do tempo didático e na avaliação dos resultados parciais e das respostas provisórias que emergiram ao longo do processo.

Já no Módulo 3, ainda que de maneira incipiente, os participantes tiveram a incumbência de adaptar e desenhar uma versão própria do PEP, semelhante ao vivenciado no Módulo 1, com vistas ao ensino de Combinatória no Ensino Médio. Apesar das propostas apresentadas estarem muito próximas da experiência anterior, foi possível notar gestos do paradigma de questionamento do mundo, como a elaboração de perguntas que não possuem respostas imediatas, um dos elementos essenciais no contexto desse paradigma, incentivando a problematização e a reflexão coletiva.

Até aqui, tratamos de explicitar, brevemente, os principais achados desta pesquisa. Todavia, ainda nos resta enfrentar um dos objetivos específicos traçados nesta investigação que foi o de identificar e analisar as condições e restrições que enfrentam os professores em um processo formativo baseado no PEP-FP.

Pensar no conjunto de condições e restrições que permeiam o processo de difusão social das praxeologias, sejam elas matemáticas ou didáticas, seria pensar, segundo Chevallard e Cirade (2010), na própria definição da ciência didática. A esse respeito, Artaud (2019) complementa afirmando que as praxeologias de pesquisa produzidas pela TAD permitem que se preste especial atenção à articulação práxis/logos e às condições e restrições que promovem, permitem ou, ao contrário, dificultam, impedem a existência de praxeologias numa instituição.

Assim, concentraremos nossos esforços a partir de agora para apresentar alguns intervenientes, na forma de condições e restrições, que atravessaram o PEP-FP vivenciado pela

comunidade de estudos. Vale ressaltar que, ao longo da análise desse percurso apresentamos alguns indícios dessas condições e restrições, ainda que implicitamente. Nosso intuito não é esgotá-las, mas evidenciar aquelas que, a nosso ver, tiveram um papel relevante.

A primeira consideração que queremos fazer diz respeito ao formato em que ocorreram os encontros. O formato predominantemente remoto, mediado pela plataforma *Google Meet*, facilitou a reunião de professores de diferentes mesorregiões do estado de Pernambuco. Esse formato permitiu a participação de docentes que, devido à distância e à necessidade de deslocamento, dificilmente conseguiriam participar de encontros presenciais. Havia representantes das mesorregiões do Agreste, Zona da Mata e Região Metropolitana, o que proporcionou a diversificação das discussões, enriquecidas pelos diferentes contextos regionais e de formação.

O uso da plataforma *Google Meet* também possibilitou o trabalho em grupos, utilizando o recurso de divisão em salas temáticas, além de facilitar o trabalho colaborativo em rede através de documentos compartilhados no *Google Drive*. A plataforma de reuniões online também possibilitou a gravação dos encontros, permitindo que o pesquisador (que também atuou como formador) realizasse as análises posteriormente.

No entanto, enfrentamos algumas restrições ao utilizar o *Google Meet*. A plataforma não permite a gravação das reuniões nas salas temáticas, o que dificultou o acesso às discussões realizadas nesses grupos. Contudo, os materiais escritos elaborados pelos grupos e as discussões coletivas na chamada principal da plataforma serviram como insumos valiosos para nossas análises.

Quanto às condições para a realização do processo formativo, destaca-se que os participantes eram voluntários e que a formação não estava vinculada a uma instituição oficial de formação. Essa independência permitiu que o processo fosse conduzido de maneira autônoma, sem a necessidade de seguir um currículo ou conteúdos programáticos preestabelecidos. Isso pode, em certa medida, justificar o desinteresse dos professores em considerar a análise de currículos ou livros didáticos, geralmente vinculados aos processos formativos dessas instituições, durante a vivência do Módulo 1.

Por outro lado, a participação voluntária dos professores pode ser vista como uma restrição, já que eles poderiam abandonar o processo a qualquer momento. Especificamente neste caso, a formação começou com 16 participantes e foi concluída com apenas 9, pois 7 desistiram ao longo do percurso. No entanto, é importante destacar que os professores que

permaneceram até o final do processo participaram ativamente e mostraram-se motivados durante os encontros.

A formação proporcionou um ambiente propício para que os professores fossem iniciados no paradigma de questionamento do mundo, confrontando o Modelo Praxeológico Dominante e incorporando elementos do modelo de referência ao seu repertório praxeológico. Além disso, possibilitou aos participantes o contato e a experimentação com um novo dispositivo didático, o PEP, ampliando as oportunidades para uma atuação mais significativa desses docentes em suas salas de aula.

Nesse contexto, não se pode ignorar as dificuldades relacionadas ao tempo didático. Ao longo do processo formativo, os professores frequentemente expressaram insatisfação com a limitação de tempo para o desenvolvimento das atividades. Para evitar que o processo se tornasse excessivamente longo e garantir que as discussões sobre o levantamento de questões, bem como a elaboração e validação das respostas, ocorressem de forma consistente, o formador buscou um equilíbrio necessário. Contudo, não foi possível avançar nas discussões do Módulo 3 nem executar o Módulo 4, como era o nosso desejo inicial.

Também é importante destacar que, diferentemente do que ocorreu nesta investigação, os processos formativos que utilizam a metodologia do PEP-FP geralmente empregam PEP previamente testados em alguma etapa de ensino. Nesta investigação, a primeira experimentação do PEP vivenciado no Módulo 1 ocorreu durante o próprio estudo. Isso, de certo modo, tornou-se uma fonte de incertezas para o formador (pesquisador). Mesmo tendo realizado a análise *a priori* desse percurso e compreendendo que a resposta elaborada à Q<sub>0</sub> em todo PEP é sempre validada pela comunidade de estudos sob determinadas condições e restrições, ele continuou a refletir sobre a possibilidade do surgimento de questões imprevistas, nas quais teria que tomar decisões sobre seu estudo sem saber, de antemão, as respostas possíveis.

Pelo exposto, concluímos esta tese validando que *“O Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP), ancorado numa metodologia de Engenharia Didática, tem potencial para agregar, articuladamente, saberes matemáticos e didáticos ao equipamento praxeológico dos professores em formação acerca do ensino de Combinatória, apesar das restrições que pesam sobre o processo.”*.

Por fim, gostaríamos de destacar algumas possibilidades de trabalhos futuros com base nos dados produzidos, que não foram explorados ou foram abordados de forma insuficiente. O primeiro deles é sobre a necessidade de experimentar o PEP vivenciado no Módulo 1 com

estudantes do Ensino Médio. Durante a formação, alguns professores deram pistas de possibilidades da vivência de um dispositivo como o PEP no âmbito das disciplinas eletivas do Novo Ensino Médio<sup>43</sup>.

Outro aspecto que não foi possível contemplar neste estudo foi a vivência dos cinco módulos prescritos na metodologia do PEP-FP. Esse é um ponto que precisa ser mais explorado em investigações sobre a formação de professores no âmbito da TAD. Geralmente, as pesquisas conseguem executar até o Módulo 2 e, mais raramente, até o Módulo 3. No entanto, é necessário realizar estudos que auxiliem os professores iniciantes no desenho e gerenciamento dos PEP, evidenciando as praxeologias de pesquisa necessárias para a análise do Módulo 4.

Uma outra indicação de estudos futuros é sobre a utilização do esquema herbartiano como ferramenta para analisar as atividades, tanto matemáticas quanto didáticas, desenvolvidas durante os Módulos 0 e 1. Embora elementos desse esquema tenham sido utilizados, ainda que de forma implícita, nas análises realizadas, acreditamos que sua aplicação mais explícita, articulada às dialéticas, pode ser útil para os próprios participantes da formação.

Não poderíamos deixar de ressaltar as contribuições que esta pesquisa trouxe aos participantes. Os depoimentos que surgiram espontaneamente ao longo dos encontros dão conta de que os participantes, de modo geral, tiveram uma formação inicial insuficiente no que diz respeito ao campo da Combinatória. Mas, também, que a vivência do PEP-FP permitiu a ampliação do repertório dos saberes matemáticos e didáticos inerentes a esse campo.

---

<sup>43</sup> Durante a escrita deste trabalho, estava em vigência o Novo Ensino Médio, em vigor desde 2022 nas escolas públicas e privadas do Brasil. Todavia, gostaríamos de destacar nossa posição contrária às reformas implantadas e ratificar o manifesto da Sociedade Brasileira de Educação Matemática sobre o tema.

## REFERÊNCIAS

- ALBANESE, V.; BATANERO, C.; ORTÍZ, J. J. Razonamiento combinatorio del trenzado artesanal: una innovación con futuros profesores. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, 2019. v. 32, n. 2, p. 266–272. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/14039/>>. Acesso em: 12 jul. 2021.
- ALBUQUERQUE, L. C.; GONTIJO, C. H. A complexidade da formação do professor de matemática e suas implicações para a prática docente. **Espaço Pedagógico**. Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 76-87, jan./jun. 2013.
- ALMOULOUD, S. A. Teria antropológica do didático: metodologia de análise de materiais didáticos. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**. n 42, p. 09-34, 2015.
- ALMOULOUD, S. A. *et al.* Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. **REVASF**, Petrolina – PE, v. 11, n. 24, p. 427-467, 2021. Disponível em: <<https://www.periodicos.univasf.edu.br/index.php/revasf/article/view/1538>>. Acesso em: 20 jul. 2023.
- AMORIM, V; MOZER, G. Por que probabilidade além da combinatória? *In: Probabilidade além da combinatória: tópicos e problemas reais com foco no raciocínio probabilístico*. Rio de Janeiro: ANPMat, 2020.
- ANNIN, S. A; LAI, K. S. Common errors in counting problems. **Mathematics Teacher**, v. 103, n. 6, p. 402–409, 2010.
- ARTAUD, M. Praxéologies de formation, praxéologies pour la formation et leur écologie - la justification des pratiques comme condition et comme contrainte. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 5, p. 80-98, 2019.
- BARQUERO, B; BOSCH, M; ROMO-VÁZQUEZ, A. El uso del esquema Herbartiano para analizar um REI online para la formación del profesorado de secundaria. **Educação matemática e pesquisa**, v.21, n.4, p. 493-509, 2019.
- BARQUERO, B; BOSCH, M. Didactic Engineering as a Research Methodology: From Fundamental Situations to Study and Research Paths. *In: WATSON, A; OHTANI, M. (Orgs.). Task Design In Mathematics Education*. Suíça: Springer, 2022. p. 249-272.
- BATANERO, C ; GODINO, J. D ; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial Reasoning and its Assessment. *In: GAL, I; GARFIELD, J. B. (Org.). Assessment Challenge in Statistics Education*. IOS Press, 1997.
- BATANERO, C; GODINO, J; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio**. Madrid: Síntesis, 1996.
- BENÍTEZ, P. R. A; BRAÑAS, J. R. F. **Introducción a la matemática aplicada** (matemática discreta). Colección Textos Universitarios. Canarias, Litografía A. Romero S, 2001.
- BIGGS, N. L. The roots of combinatorics. **Historia Mathematica**, v. 6, n. 2, p. 109-136, 1979.

BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; CÂMARA DE SOUZA, P. R. **Prisma matemática: combinatória e probabilidade**. São Paulo: Editora FTD, 2020.

BORBA, R. E. De S. R. *et al.* A formação de professores de anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino da Combinatória. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, 2014. v. 3, n. 4, p. 115–137. Disponível em: <<http://revista.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/421>>. Acesso em: 12 jul. 2021.

BORBA, R. E. S. R. Antes que seja tarde: aprendendo Combinatória desde o início da escolarização. **Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, p. 1-17, 2016.

BORBA, R. E. S. R.; ROCHA, C. A.; AZEVEDO, C. Estudos em raciocínios combinatórios: investigações e práticas de ensino na educação básica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro – SP, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BORBA, R.; ROCHA, C.; MARTINS, G.; LIMA, R. **O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório**. In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 10. 02-05 jun. 2009, Ijuí. Anais. Ijuí: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Rio Grande do Sul.

BOSCH, M. Les modèles praxéologiques de référence: réflexions méthodologiques en TAD. In: **Actes du séminaire de didactique des mathématiques**. Paris, 2019.

BOSCH, M. **Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática**. In: IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva – Espanha. p.15-28, 2000.

BOSCH CASABÒ, M. **Study and research paths: a model for inquiry**. In: International Congress of Mathematics. Rio de Janeiro, Brasil, 2018. p. 4001-4022.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática**. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental. 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental**. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental. 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018.

BROUSSEAU, G. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas**. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2007.

CABRAL, R. M. P. **Matemática Discreta**. Fortaleza: EDUECE, 2017.

CHAACHOUA, H. **T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH**. Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM – pág. 5-22. Paris: 2018. Disponível em: <https://ardm.eu/wpcontent/uploads/2018/10/Préactes-ARDM-fevrier2018.pdf>

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. **Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica**, 1992. In: Didáctica das matemáticas / Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. **Journal of Research in Mathematics Education**. v. 2, n. 2, p. 161-182, jun. 2013.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder**. Questionnement et éléments de réponse a partir de la TAD, 2009c. Disponível em <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 15 ago. 2019.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER: problèmes et avancées**. 2009b. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 15 ago. 2019.

CHEVALLARD, Y. **La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire**. 2005. Disponível em: <<<http://yves.chevallard.free.fr/>>>. Acesso em: 02 jun. 2020.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**, 2009a. Disponível em <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 15 ago. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude. 3. Ecologie & regulation**. 2001a. Disponível em <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 10 mar. 2022.

CHEVALLARD, Y. **Aspectos problemáticos de la formación docente**. 2001b. Disponível em <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 10 de mar. 2022.

CHEVALLARD, Y. **Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique**. 2007. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 20 ago. 2019.

CHEVALLARD, Y. **Recherches en didactique et pratiques de formation d'enseignants**. 2002. Disponível em: <<<http://yves.chevallard.free.fr/>>>. Acesso em: 02 mar. 2021.

CHEVALLARD, Y. ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. **La Gaceta de la RSME**, v. 20, n. 1, p. 159-169, 2017. Disponível em: <<https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1378>>. Acesso em: 30 mai. 2024.

CHEVALLARD, Y; CIRADE, G. **Les ressources manquantes comme problème professionnel**. 2010. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 15 ago. 2020.

CHEVALLARD, Y; CIRADE, G. **Organisation et techniques de formation des enseignants de mathématiques**. Disponível em: <<http://yves.chevallard.free.fr/>>. Acesso em: 15 ago. 2020.

CID, E; MUÑOZ-ESCOLANO, J. M; RUIZ-MUNZÓN, N. La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP. **Educación Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 4, p. 646-660, 2020.

CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques**. Entre problèmes de la profession et formation à l'IUFM. 2006. Tese (Doctorado em Mathématiques Appliquées). Université de Provence, Francia.

COMITI, Claude. Recherche en didactique et formation des enseignants. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 7, número temático, p. 444-456. 2014.

CÓRDOVA, A. R.; SALAZAR, A. M. O. La formación docente de preescolar en estocásticos. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, 2012. v. 25, p. 1189–1199. Disponível em: <<http://funes.uniandes.edu.co/4421/>>. Acesso em: 12 jul. 2021.

CORICA, A. R; FERRARI, C. N. Análisis de las praxeologías estadísticas que se proponen estudiar en la formación de estudiantes de profesorado en matemática. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 15, p. 01-24, jan./dez. 2020.

CORICA, Ana Rosa; OTERO, María Rita. Diseño e Implementación de un Curso para la Formación de Profesores en Matemática: una Propuesta desde la TAD. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 763-785, Aug. 2016.

COSTA, N. M. L. *et al.* Sustentabilidade e consumo: uma proposta de análise de uma “conta d’água”. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Coacalco/México, v. 32, n. 2, p. 479-487, 2019.

COUTINHO, J. L. D. E.; BARBOSA, J. C. Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores A Mathematics for simple combination teaching from. **Educación Matemática Pesquisa**, 2016. v. 18, n. 2, p. 783–808. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/emp/article/download/24399/pdf>>. Acesso em: 12 jul. 2021.

CRUZ, M. A. S; BITTAR, M. O futuro professor de matemática no estágio supervisionado: uma experiência de formação compartilhada no contexto da lesson study. **Educación Matemática em Revista – RS**, Rio Grande do Sul, v. 2, n. 20, p. 123-133, 2019.

DANTE, L. R; VIANA, F. **Matemática em contextos**: análise combinatória, probabilidade e computação. São Paulo: Ática, 2020.

DELGADO, T. A. S; GARCÍA, F. J. G. Cómo organizar la formación matemático-didáctica del maestro de educación infantil? propuesta de un recorrido de formación. **Educación Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.17, n. 4, p. 767-790, 2015.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental**. 2001. 203f. Dissertação (Mestrado

em Educação Matemática) – Centro das Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERREIRA, A. G. **Organizações matemáticas e didáticas no ensino de combinatória**. 2019. 194 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2019.

FERREIRA, N. S. de A. As pesquisas denominadas “Estado da Arte”. **Educação e Sociedade**, ano 23, n. 79, ago. 2002.

FERREIRA, A. G; RUFINO, M. A. S; SILVA, J. R. **Os obstáculos epistemológicos em combinatória: um estudo com os licenciandos em matemática**. In: II CONGRESO INTERNACIONAL DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS E LA MATEMÁTICA, 1, 2016, Tandil – Argentina. Libro de Actas. Tandil – Argentina: NIECyT/FCE, 2016, p. 312-319.

FERREIRA, R. S. R; VIANA, J. M. S; GUERRA, R. B. Atividade de estudos e investigação sobre o sistema de numeração posicional na formação de professores dos anos iniciais. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n. 5, p. 274-288, 2019.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht, The Netherlands: Reidel, 1975.

FLORENSA, I; BOSCH, M; GASCÓN, J. Análisis a posteriori de un REI-FP como herramienta de formación del profesorado. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.4, p. 382-394, 2019.

FRANCO, N. B; GENTILE, C; URIBE, W. N. Praxeologías para revisar prácticas heredadas. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Coacalco/México, v. 28, p. 1376-1384, jul. 2015.

GARCÍA, F. J; WAKE, G; LENDÍNEZ, E. M; Lerma, A. M. El papel de los modelos epistemológicos y didácticos en la formación del profesorado a través del dispositivo del estudio de clase. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 37, n. 1, p. 137-156, 2019.

GARCÍA, F. J. *et al.* Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, n. 15, p. 75-94, 2019. Disponível em: <https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/disenio-de-tareas-en-el-marco-de-la-teoria-antropologica-de-lo-didactico/> . Acesso em: 20 jul. 2023.

GÁSCON, J; NICOLÁS, P. Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente. **Educación Matemática**. v. 33, n. 1, p. 7-40, abr. 2021.

GÁSCON, J. **Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da didática e da história da matemática**. In: ALMOULOU, S.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. Curitiba, PR: CRV, 2018.

GAZZOLA, M. P.; OTERO, M. R.; LLANOS, V. C. Acciones didácticas en el desarrollo de un recorrido de estudio y de investigación que involucra a la matemática y a la física en la escuela secundaria. **Perspectiva Educacional**, Valparaíso, vol. 59, p. 52 – 80, 2020.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent**. París: P.U.F, 1955.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática elementar**, v. 5: Combinatória, probabilidade, 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

HEITELE, D. An epistemological view on fundamental stochastic ideas. **Educational Studies in Mathematics**, v. 6, p. 187-205, 1975.

HURDLE, Z; WARSHAUER, M; WHITE, A. The place and purpose of combinatorics. **Mathematics Teacher**, v. 110, n. 3, p. 216–221, 2016.

KAPUR, J. N. Combinatorial analysis and school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 3, p. 111-127, 1970.

LIMA, I. B. **Aulas de combinatória no ensino médio**: como estão ocorrendo. 2016. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

LLANOS, V. C. *et al.* Recorridos de estudio y de investigación (REI) co-disciplinares a la física y la matemática con profesores en formación en la universidad. **Revista de Enseñanza de la Física**. Argentina, vol. 27, n. Extra, Nov. 2015, p. 251-258.

LOCKWOOD, Elise; WASSERMAN, Nicholas H.; TILLEMA, Erik S.. A case for combinatorics: A research commentary. **The Journal Of Mathematical Behavior**, [s. l], v. 59, p. 1-15, set. 2020.

LUCAS, C; FONSECA, C; GASCÓN, J; CASAS, J. O fenômeno didático institucional da rigidez e a atomização das organizações matemáticas escolares. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 50, p. 1327-1347, dez. 2014.

MARTINS, G. G. **Ensino de Análise Combinatória**: um estudo das representações de professores de matemática do Ensino Médio público de São Mateus. 2018. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus – ES.

MATOS, F. C. *et al.* A metodologia do percurso de estudo e pesquisa adaptada à formação inicial e continuada de professores de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, vol. 20, n. 1, 2018, p. 448-470.

MELO, M. A. P. de. **Ecologia do saber**: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da educação básica. 2018. 205 f. Tese (Doutorado) - Curso de Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

MERAYO, F. **Matemática Discreta**. 3 ed. Madrid: Paraninfo, 2015.

MESQUITA, F. N. N.; GUERRA, R. B. A prática de ensino como formação docente do professor de matemática. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 13, n. 27, p. 67-86, set. 2017.

MIRANDA DA SILVA, I. **A relação do professor com o saber matemático e os conhecimentos mobilizados em sua prática**. 2014. 215 f. Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2014. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

MONTENEGRO, J. A.; BORBA, R. E. S. R.; BITTAR, M. Representações intermediárias na aprendizagem de situações combinatórias. **Educação & Realidade**, v. 45, n. 1, p. 1-26, 2020.

MONTOYA, M.S; LUZEMA. J. El fenómeno de la reproducibilidad en los procesos de formación de profesores en servicio: un caso de la geometría escolar. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, Coacalco/México, v. 25, p. 1169-1177. 2012.

MORGADO, ALGUSTO C ; OLIVEIRA. *et al.* **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro : Grafica Wagner Ltda, 1991.

MUÑOZ, E. M. L; GARCÍA, F. J. G; FERNÁNDEZ, A. M. L. Propuesta de un proceso de estudio de clases para la formación inicial del profesorado de Educación Infantil desde el paradigma del cuestionamiento del mundo. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 4, p. 694-710, 2020.

NUNES, C. B.; VIDAL, T. C. Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório. **Com a Palavra o Professor**, 2017. v. 2, n. 5, p. 80–104. Disponível em: <<http://revista.geem.mat.br/index.php/PPP/article/view/237>>. Acesso em: 12 jul. 2021.

OLARRIA, A. R. *et al.* Las matemáticas para la enseñanza en una formación del profesorado basada en el estudio de cuestiones. **Bolema**, Rio Claro, v. 28, n. 48, p. 319-340, Apr. 2014.

OLIVEIRA, A. T. de C. C. de; FIORENTINI, D. O papel e o lugar da didática específica na formação inicial do professor de matemática. **Revista Brasileira de Educação**, [s. l], v. 23, p. 1-17, 2018. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/JJBw6TkhHnx4X9qQS4HjmMh/?lang=pt#>. Acesso em: 02 fev. 2022.

OLIVEIRA JÚNIOR, A. P. de; ANJOS, R. de C. dos. O ensino de estocástica no currículo de Matemática do Ensino Fundamental no Brasil. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 13–41, 2017.

OLIVERO, F.; MARTÍNEZ, M.; SANTORI, M. L. El problema de la modelización matemática en la formación de profesores: una propuesta de cambio curricular desde la TAD. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 4, pp. 517-530, 2020.

OTERO, M. R.; LLANOS, V. C.; ARLEGO, M. **Mathematics and physics study and research paths within two groups of pre-service teacher education.** *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 22, n. 4, 711-724, 2020.

OTERO, M. R.; FANARO, M.; LLANOS, V. C. La Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo y el Inquiry: un análisis desde la enseñanza de la Matemática y la Física. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, Argentina, vol. 8, n. 1, 2013, p. 77-89.

OTERO, M. R.; LLANOS, C. Formación de profesores de matemática en servicio: la organización de una enseñanza basada en preguntas. *REDIMAT*, v. 8, n. 2, p. 193-225, jun. 2019.

OTERO, M. R. **La formación de profesores:** recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, 2021.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco:** ensino médio. Recife, PE, 2021.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetike*, Campinas, SP, v. 17, n. 1, p. 105–150, 2009.

PINTO, R. C. **Introdução à Análise Combinatória.** 2014. 59 f. Dissertação (Mestrado em Pós-graduação em Matemática) – Departamento de Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio. Rio de Janeiro – RJ.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **La g nese de l'idée d' hasard chez l'enfant.** Paris: Presses Universitaire de France, 1951.

REIS, M. E. T.; FIORENTINI, D. Formação profissional de professores de matemática em serviço e políticas públicas. *Zetetiké*, v. 17, 2009, p. 123-150. Disponível em: <http://www.fe.unicamp.br/zetetike/viewarticle.php?id=199>

RIFO, L. R. F. **Análise Combinatória, Probabilidade, Noções de Estatística.** Campinas, 2017. Disponível em: <<<https://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/apostila/apostila1.pdf>>> Acesso em: 05 mar 2019.

ROCHA, C. A. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

ROCHA, C. A.; BORBA, R. E. S. R. Conhecimentos de Combinatória para ensinar nas diferentes etapas da Educação Básica: com a palavra, professores! In: BORBA, R. E. S. R.; MONTENEGRO, J. A.; SANTOS, J. A. F. L. (Orgs.). **Investigações em ensino e em aprendizagem:** uma década de pesquisas do Grupo de Estudos em Raciocínios Combinatório e Probabilístico (Geração). Recife: Ed. UFPE, 2021.

RODRIGUES, R. F.; MENEZES, M. B.; SANTOS, M. C. Licenciatura em matemática e o percurso de estudo e pesquisa: uma proposta do modelo epistemológico de referência para o

ensino e aprendizagem do conceito de função. **Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**. v. 14, n.27, 2017.

ROSENSTEIN, J.G. Discrete mathematics in the schools: An opportunity to revitalize school mathematics. In J.G. ROSENSTEIN, D; FRANZBLAU; ROBERTS, F. (EDS.). **DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science**: Discrete mathematics in the schools. v. 36. American Mathematical Society and National Council of Teachers of Mathematics, 1997.

ROTHER, E. T. Revisão sistemática X revisão narrativa. **Acta Paulista de Enfermagem** [online]. 2007, v. 20, n. 2 [Acessado 16 Abril 2022] , pp. v-vi. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/S0103-21002007000200001>>.

RUFINO, M. A. S. **Aprendizagem Significativa na Resolução de Problemas de Matemática**: o Arsenal Operatório Cognitivo dos Professores do Ensino Básico. 2015. 307 f. Tese (Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias) – Departamento de Didácticas Específicas. Universidad de Burgos - Espanha.

RUIZ-OLARRÍA, A. **La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria**: de las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza. 2015. 372 f. Tese (Doctorado en Educación) – Facultad de Formación de Profesorado y Educación – Universidad Autonoma de Madrid – Espanha.

RUIZ-OLARRÍA, A; BOSCH CASABO, M; GASCÓN PEREZ, J. Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del professorado. **Educación Matemática**. México, vol. 31, n. 2, agos. 2019. p.132-160.

SABO, R. D. **Saberes docentes**: a análise combinatória no ensino médio. 2010. 210 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SALGADO, D. P; OTERO, M. R. Enseñanza por investigación en un curso de matemática de nivel universitario: los gestos didácticos esenciales. **Educación Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 1, 2020, p. 532-557.

SANTOS, C. M. dos; CRUZ, M. A. S. Pesquisas brasileiras sobre formação de professores: estudos desenvolvidos a partir da TAD. **Educación Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 5, pp. 720-736, 2019.

SANTOS, Cintia Melo dos; FREITAS, José Luiz Magalhães de. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação de professores de matemática. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 13, n. 27, p. 51-66, set. 2017.

SANTOS, J. P. O. *et al.* **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro : Ciência Moderna, 2008.

SIERRA DELGADO, Tomás Ángel; BOSCH CASABO, Marianna; GASCON PEREZ, Josep. El cuestionamiento tecnológico-teórico en la actividad matemática: el caso del algoritmo de la multiplicación. **Bolema**, Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 805-828, dez. 2013.

SILVA, J. R. **Uso de Textos de apoyo como Organizador Previo**: Matemáticas para la Enseñanza Fundamental y Media. 2009. 390 f. Tese (Programa Internacional de Doctorado Enseñanza de las Ciencias) – Departamento de Didácticas Específicas. Universidad de Burgos (España), Burgos.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo – SP, v. 17, n. 4, p. 670-693, 2015.

SOARES, M. . **Alfabetização no Brasil** – O estado do conhecimento. Brasília: INEP/MEC, 1989.

SRIRAMAN, B; ENGLISH, L. D. Combinatorial mathematics: Research into practice. **Mathematics Teacher**, v. 98, n. 3, p. 182–191, 2004.

TORRES, F. J.C. **Matemática Discreta**: Iniciación al Método Matemático. Org. José Manuel Gamboa. Madrid: Base Universitaria, 2004.

VÁSQUEZ, S; BARQUERO, B; BOSCH, M. Teaching and learning combinatorics in secondary school:a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. **Quadrante: Revista de Investigação em Educação Matemática**, v. 30, n. 2, p. 200-219, 2021.

VÁZQUEZ, A. R; CHÁVEZ, O. N. C. Desarrollo profesional de profesores de matemáticas en la modalidad en línea y a distancia. El caso de un curso para el diseño de actividades didácticas. **REDIMAT**, v. 7, n. 1, p. 69-92, fev. 2018.

VERGNAUD, **El niño, las matemáticas y la realidad**: problemas de la enseñanza en las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas, 1991.

WOZNIAK, Floriane. Les besoins praxéologiques du professeur. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 22, n. 4, p. 787-800, 2020.

## APÊNDICE

### Lista dos periódicos verificados nas revisões sistemáticas realizadas

| Nº  | TÍTULO                                                            | Classificação na área de ensino / educação |
|-----|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 1.  | A FÍSICA NA ESCOLA (ONLINE)                                       | B2                                         |
| 2.  | ABAKÓS                                                            | B1                                         |
| 3.  | ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA                      | B2                                         |
| 4.  | ACTA SCIENTIAE                                                    | A2                                         |
| 5.  | ACTIO: DOCÊNCIA EM CIÊNCIAS                                       | B2                                         |
| 6.  | ALEXANDRIA (UFSC)                                                 | A2                                         |
| 7.  | AMAZÔNIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS (ONLINE) | A2                                         |
| 8.  | AMERICAN REVIEW OF MATHEMATICS AND STATISTICS                     | B1                                         |
| 9.  | ANAIS DA ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS (ONLINE)                 | A2                                         |
| 10. | APPLIED MATHEMATICAL MODELLING                                    | B2                                         |
| 11. | APPLIED MATHEMATICAL SCIENCES                                     | B3                                         |
| 12. | ARGUMENTOS PRÓ-EDUCAÇÃO - REVISTA DE EDUCAÇÃO DA UNIVÁS           | B2                                         |
| 13. | BOLEMA : BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ONLINE)                  | A1                                         |
| 14. | BOLETIM DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA                     | B2                                         |
| 15. | BOLETIM ONLINE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA                             | B1                                         |
| 16. | CADERNO BRASILEIRO DE ENSINO DE FÍSICA                            | A2                                         |
| 17. | CADERNO BRASILEIRO DE ENSINO DE FÍSICA                            | A2                                         |
| 18. | CAMINHOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA                        | B2                                         |
| 19. | CIÊNCIAS & COGNIÇÃO (UFRJ)                                        | B2                                         |
| 20. | COM A PALAVRA, O PROFESSOR                                        | B2                                         |
| 21. | COMPTES RENDUS. MATHÉMATIQUE                                      | B2                                         |
| 22. | CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA    | B2                                         |
| 23. | DEBATES EM EDUCAÇÃO                                               | B1                                         |
| 24. | EDUCA - REVISTA MULTIDISCIPLINAR EM EDUCAÇÃO                      | B1                                         |
| 25. | EDUCAÇÃO E CULTURA CONTEMPORÂNEA (ONLINE)                         | A2                                         |
| 26. | EDUCACAO E REALIDADE                                              | A1                                         |
| 27. | Educação matemática – debate                                      | B2                                         |
| 28. | EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA                                    | A2                                         |

|     |                                                                           |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 29. | EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA (SÃO PAULO)                                | A2 |
| 30. | EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS                                         | A2 |
| 31. | EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA (ONLINE)                                     | A2 |
| 32. | EDUCAÇÃO ON-LINE (PUCRJ)                                                  | B1 |
| 33. | EDUCAÇÃO POR ESCRITO PUCRS                                                | B1 |
| 34. | EDUCACIÓN MATEMÁTICA                                                      | B1 |
| 35. | EM TEIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA IBEROAMERICANA     | B1 |
| 36. | ENSAIO: PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS (ONLINE)                         | A1 |
| 37. | ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS                                                 | A1 |
| 38. | ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS DE LA TIERRA                                    | A2 |
| 39. | ENSINO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA EM REVISTA                                | B1 |
| 40. | EURASIA JOURNAL OF MATHEMATICS, SCIENCE AND TECHNOLOGY EDUCATION          | A2 |
| 41. | EXPERIÊNCIAS EM ENSINO DE CIÊNCIAS (UFRGS)                                | B1 |
| 42. | GÓNDOLA, ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS                          | B1 |
| 43. | HIPÁTIA - REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA, EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA           | B2 |
| 44. | INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICAL EDUCATION IN SCIENCE AND TECHNOLOGY | A1 |
| 45. | INVESTIGAÇÕES EM ENSINO DE CIÊNCIAS (ONLINE)                              | A2 |
| 46. | JORNAL INTERNACIONAL DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA                    | A2 |
| 47. | JOURNAL OF HUMANISTIC MATHEMATICS                                         | B1 |
| 48. | JOURNAL OF MATHEMATICS EDUCATION AT TEACHERS COLLEGE                      | B2 |
| 49. | JOURNAL OF URBAN MATHEMATICS EDUCATION (JUME)                             | B1 |
| 50. | MATHEMATICAL PROBLEMS IN ENGINEERING (PRINT)                              | A2 |
| 51. | PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA                                       | B1 |
| 52. | PHILOSOPHY OF MATHEMATICS EDUCATION JOURNAL                               | B2 |
| 53. | PNA : REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA              | A2 |
| 54. | PRÁXIS EDUCACIONAL (ONLINE)                                               | B1 |
| 55. | PRÁXIS EDUCATIVA (UEPG. ONLINE)                                           | B1 |
| 56. | REDIMAT- REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS         | A2 |
| 57. | REEC. REVISTA ELECTRÓNICA DE ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS                    | A2 |
| 58. | REMATEC. REVISTA DE MATEMÁTICA, ENSINO E CULTURA (UFRN)                   | B2 |
| 59. | RENCIMA                                                                   | A2 |

|     |                                                                           |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|----|
| 60. | REVEMAT : REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA                       | A2 |
| 61. | REVISTA BRASILEIRA DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA                              | B1 |
| 62. | REVISTA BRASILEIRA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS                    | A2 |
| 63. | REVISTA CIÊNCIAS & IDÉIAS                                                 | B1 |
| 64. | REVISTA COLOMBIANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA                                | B2 |
| 65. | REVISTA DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO                                           | B1 |
| 66. | REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA                                | A2 |
| 67. | REVISTA DE ENSEÑANZA DE LA FÍSICA                                         | B1 |
| 68. | REVISTA DE ENSINO, EDUCAÇÃO E CIÊNCIAS HUMANAS                            | B2 |
| 69. | REVISTA DE INICIAÇÃO À DOCÊNCIA                                           | B2 |
| 70. | REVISTA DIÁLOGO EDUCACIONAL                                               | A2 |
| 71. | REVISTA E-CURRICULUM (PUCSP)                                              | B2 |
| 72. | REVISTA ELECTRÓNICA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN EN CIENCIAS (EN LÍNEA)  | A2 |
| 73. | REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO (SÃO CARLOS)                               | A2 |
| 74. | REVISTA EUREKA SOBRE ENSEÑANZA Y DIVULGACIÓN DE LAS CIENCIAS              | A1 |
| 75. | REVISTA INTERNACIONAL DE CIÊNCIAS                                         | B2 |
| 76. | REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (RIPEM)          | B2 |
| 77. | REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACION EN MATEMATICA EDUCATIVA          | A2 |
| 78. | REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA (RELIME) | A2 |
| 79. | REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA                                 | B1 |
| 80. | REVISTA PORTUGUESA DE EDUCAÇÃO                                            | B1 |
| 81. | REVISTA SAPIÊNCIA: SOCIEDADE, SABERES E PRÁTICAS EDUCACIONAIS             | B1 |
| 82. | REVISTA SERGIPANA DE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA                     | B2 |
| 83. | SUMA:REVISTA SOBRE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS             | B2 |
| 84. | TEMA - REVISTA ELETRÔNICA DE CIÊNCIAS                                     | B2 |
| 85. | TEMA. TENDÊNCIAS EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL                   | B2 |
| 86. | THE JOURNAL OF MATHEMATICAL BEHAVIOR                                      | A1 |
| 87. | ZETETIKÉ (ON LINE)                                                        | A2 |