



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E
TECNOLÓGICA

DAYVID EVANDRO DA SILVA LÓS

**COMBINTER: dos princípios teóricos às repercussões no processo de ensino e
aprendizagem de análise combinatória**

Recife

2025

DAYVID EVANDRO DA SILVA LÓS

**COMBINTER: dos princípios teóricos às repercussões no processo de ensino e
aprendizagem de análise combinatória**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação Matemática e Tecnológica.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Cristine Martins Gomes de Gusmão.

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Lós, Dayvid Evandro da Silva.

COMBINTER: dos princípios teóricos às repercussões no processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória / Dayvid Evandro da Silva Lós. - Recife, 2025.
292f.: il.

Tese (Doutorado)- Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, 2025.

Orientação: Cristine Martins Gomes de Gusmão.

1. Princípios teóricos; 2. Objetos de aprendizagem; 3. Análise combinatória; 4. Ensino; 5. Aprendizagem; 6. Matemática. I. Gusmão, Cristine Martins Gomes de. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

DAYVID EVANDRO DA SILVA LÓS

**COMBINTER: dos princípios teóricos às repercussões no processo de ensino e
aprendizagem de análise combinatória**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Educação Matemática e Tecnológica da
Universidade Federal de Pernambuco, como
requisito parcial para a obtenção do título de Doutor
em Educação Matemática e Tecnológica.

Aprovado em: 17/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Cristine Martins Gomes de Gusmão (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE/BR

Prof^a. Dr^a. Ana Beatriz Gomes Pimenta de Carvalho (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE/BR

Prof. Dr. Marcelo Sabbatini (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE/BR

Prof^a. Dr^a. Querte Teresinha Conzi Mehleck (Examinador Externo)
Faculdades Integradas Taquara – FACCAT/BR

Prof. Dr. Joaquim Luís Medeiros Alcoforado (Examinador Externo)
Universidade de Coimbra – UC/PT

Dedico este trabalho a Deus, por ser meu guia em todos os momentos; à minha família, em especial meus pais, Djalma e Vilma, pela educação e exemplo; à minha esposa, Adriana, por todo amor, incentivo, compreensão e paciência; e aos meus filhos, Isabel e Samuel, por serem luzes constantes em minha vida e me tornarem a cada dia um ser humano melhor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado força e coragem para superar as dificuldades.

Aos meus familiares, em especial meus pais, Djalma e Vilma, e meus irmãos, Daiana, Rodolfo e Danilo, pelo carinho, apoio e incentivo.

À minha esposa, Adriana, pelo incentivo e palavras de conforto nos momentos delicados. Sua força e perseverança foram alicerce e motivação durante esta caminhada.

Aos meus filhos, Isabel e Samuel, por compreenderem, mesmo tão pequenos, a minha ausência.

Aos colegas discentes do EDUMATEC, pelos momentos de crescimento conjunto, descontração, companheirismo e amizade.

Aos professores do EDUMATEC por contribuírem para minha formação humana e profissional.

À minha orientadora, Profa. Dra. Cristine Gusmão, por seu acompanhamento, sua dedicação e presteza na orientação deste trabalho. Muito obrigado pela confiança depositada nesta empreitada.

Aos professores Dra. Ana Beatriz de Carvalho, Dr. Marcelo Sabbatini e Dr. Luís Alcoforado, pelas contribuições realizadas durante a qualificação desta tese.

Aos professores e estudantes que participaram deste trabalho. A contribuição de vocês foi fundamental para alcançar os objetivos desta pesquisa.

Ao professor Dr. Rodolfo Carneiro, pelo auxílio na indicação de colaboradores para o desenvolvimento do objeto de aprendizagem, bem como, por sua contribuição no projeto de desenvolvimento do software.

A Arnaldo, Gustavo, Willames e Marcos, pela colaboração durante o desenvolvimento do objeto de aprendizagem.

Aos meus colegas de trabalho que assumiram minhas funções durante a minha ausência.

A todos os professores que fizeram parte de minha jornada enquanto estudante. De alguma maneira, vocês contribuíram para a semente do buscar conhecer e aprender pudesse nascer e florescer.

.

Tudo aquilo que o homem ignora, não existe para ele. Por isso, o universo de cada um, se resume no tamanho de seu saber.

Albert Einstein

A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.

Arthur Schopenhauer

RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi elaborar um conjunto de princípios teóricos que orientem o desenvolvimento de objetos de aprendizagem para o ensino de análise combinatória. Para isso, observou-se que os poucos estudos que abordavam diretrizes específicas voltadas para a construção de objetos de aprendizagem em matemática eram pouco informativos, no sentido de explicitar elementos conceituais que favorecessem a aprendizagem em matemática. Verificou-se também que os objetos de aprendizagem desenvolvidos para o ensino de matemática não se baseavam em uma abordagem teórica relacionada à matemática. Considerando, como pano de fundo, a problemática referente ao ensino e aprendizagem de análise combinatória – dificuldade de interpretação dos problemas e baixo repertório metodológico nos processos de ensino –, foram construídos princípios teóricos a partir das teorias dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986) e dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2003), do conceito de andaimes modelados a partir da metodologia de resolução de problemas, e de estudos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória, que serviram como requisitos pedagógicos de um objeto de aprendizagem que foi desenvolvido para o ensino e aprendizagem de análise combinatória. Em uma perspectiva metodológica de pesquisa em *Design-Based Research* (DBR), o objeto de aprendizagem foi bem avaliado, inicialmente, por um grupo de professores, desenvolvedores e estudantes, obtendo, em uma escala de 1 a 5, médias superiores a 4 nas categorias usabilidade, interface e recursos interativos, prover auxílios aos usuários, foco pedagógico e conteúdo matemático. Em um segundo momento, a partir do uso do objeto de aprendizagem no contexto da sala de aula de matemática, percebeu-se que os princípios teóricos foram bem-sucedidos no sentido de proporcionar a caracterização das funcionalidades do objeto de aprendizagem de tal modo que favorecesse a aprendizagem dos conceitos envolvidos, ao passo que, a abordagem da aula influenciada pelo objeto de aprendizagem proporcionou a formação de grupos de estudos, o estudo independente, uma maior participação dos estudantes, um aumento de questionamentos de ordem superior e uma evolução qualitativa da escrita das soluções. Em termos de aprendizagem, a aula com o objeto de aprendizagem contribuiu para que um maior número de estudantes obtivesse maiores níveis de compreensão combinatória, bem como proporcionou um desempenho significativo superior no que se refere à compreensão de uma maior diversidade de raciocínios combinatórios. Desse modo, é possível construir objetos de aprendizagem para o ensino de matemática desenvolvidos a partir de aportes teóricos que auxiliam no processo de apreensão dos conceitos matemáticos, eficazes

para o ensino de análise combinatória, contribuindo para uma melhora do ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: princípios teóricos; objetos de aprendizagem; análise combinatória; ensino; aprendizagem; matemática.

ABSTRACT

The objective of this research was to develop a set of theoretical principles to guide the development of learning objects for teaching combinatorial analysis. To this end, it was observed that the few studies that addressed specific guidelines for the construction of learning objects in mathematics were not very informative in terms of explaining conceptual elements that favored learning in mathematics. It was also found that the learning objects developed for teaching mathematics were not based on a theoretical approach related to mathematics. Considering, as a backdrop, the problems related to the teaching and learning of combinatorial analysis – difficulty in interpreting problems and low methodological repertoire in teaching processes –, theoretical principles were constructed based on the theories of Conceptual Fields (Vergnaud, 1986) and Semiotic Representation Records (Duval, 2003), the concept of scaffolding modeled from the problem-solving methodology, and studies related to the teaching and learning process of combinatorial analysis, which served as pedagogical requirements for a learning object that was developed for the teaching and learning of combinatorial analysis. From a methodological perspective of research in Design-Based Research (DBR), the learning object was initially well evaluated by a group of teachers, developers and students, obtaining, on a scale of 1 to 5, averages higher than 4 in the categories usability, interface and interactive resources, providing assistance to users, pedagogical focus and mathematical content. In a second moment, from the use of the learning object in the context of the mathematics classroom, it was noticed that the theoretical principles were successful in providing the characterization of the functionalities of the learning object in such a way that it favored the learning of the concepts involved, while the approach of the class influenced by the learning object provided the formation of study groups, independent study, greater student participation, an increase in higher order questions and a qualitative evolution of the writing of solutions. In terms of learning, the class with the learning object contributed to a greater number of students obtaining higher levels of combinatorial understanding, as well as provided a significantly higher performance in terms of understanding a greater diversity of combinatorial reasoning. Thus, it is possible to construct learning objects for teaching mathematics developed from theoretical contributions that assist in the process of understanding mathematical concepts, effective for teaching combinatorial analysis, contributing to an improvement in teaching and learning.

Keywords: theoretical principles; learning objects; combinatorial analysis; teaching; learning; mathematics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Gráfico das proficiências médias no SAEB em matemática	20
Figura 2	Etapas da metodologia INTERA	74
Figura 3	Esquema das relações envolvidas no campo conceitual das estruturas multiplicativas	82
Figura 4	A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão – dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas	86
Figura 5	Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura de representação em função da conceitualização	90
Figura 6	Processo de desenvolvimento de um sujeito na perspectiva da Teoria Sociocultural	93
Figura 7	Fatores que contribuem para a resolução bem-sucedida de problemas	100
Figura 8	Ciclos de aplicação, análise, avaliação e validação da DBR	109
Figura 9	Desenho da pesquisa baseado nos ciclos da DBR	111
Figura 10	Exemplos de recursos interativos a serem modelados no OA	146
Figura 11	Mapa conceitual do OA	149
Figura 12	Mapa navegacional do OA	150
Figura 13	Protótipo do OA: tela com as principais funcionalidades	151
Figura 14	Protótipo do OA: Tela dos conceitos	152
Figura 15	Modelo de desenvolvimento técnico do CombInter	154
Figura 16	Diagrama de classes UML do CombInter	154
Figura 17	Classe “Turma”	155
Figura 18	Relações entre as classes	156
Figura 19	Tela principal	157
Figura 20	Protótipo do OA: tela inicial	273
Figura 21	Protótipo do OA: tela principal	274
Figura 22	Protótipo do OA: tela com as principais funcionalidades	274
Figura 23	Protótipo do OA: tela principal do problema 1	275
Figura 24	Protótipo do OA: Tela da dica 1 do problema 1	276
Figura 25	Protótipo do OA: Tela da dica 2 do problema 1	276
Figura 26	Protótipo do OA: Tela da dica 3 do problema 1	277
Figura 27	Protótipo do OA: Tela da dica 4 do problema 1	278
Figura 28	Protótipo do OA: Tela da solução do problema 1	278
Figura 29	Protótipo do OA: Veja mais referente ao problema 1	279

Figura 30	Protótipo do OA: Tela para simular as possibilidades de contagem do problema 1	280
Figura 31	Protótipo do OA: Tela do problema 2	281
Figura 32	Tela inicial do CombInter	282
Figura 33	Tela de <i>login</i>	282
Figura 34	Tela principal	283
Figura 35	Tela de conceitos	283
Figura 36	Tela de atividades	284
Figura 37	Tela referente ao problema 3	284
Figura 38	Tela de simulação referente ao problema 3	285
Figura 39	Tela da dica 1 referente ao problema 3	286
Figura 40	Tela da dica 2 referente ao problema 3	286
Figura 41	Tela da dica 3 referente ao problema 3	287
Figura 42	Tela da dica 4 referente ao problema 3	287
Figura 43	Tela de solução referente ao problema 3	288
Figura 44	Tela Veja mais referente ao problema 3	288
Figura 45	Tela de solução do “Veja mais” referente ao problema 3	289
Figura 46	Tela de simulação referente ao problema 62	290
Figura 47	Tela de relatórios	290
Figura 48	Tela de respostas referente ao problema 62	291
Figura 49	Tela de comentário do professor referente ao item A do problema 62	291
Figura 50	Tela Sobre	292

LISTAS DE QUADROS

Quadro 1	Resolução de problema do tipo produto cartesiano a partir de várias representações	29
Quadro 2	Resolução de problema do tipo arranjo a partir de várias representações	31
Quadro 3	Resolução de problema do tipo permutação a partir de várias representações	33
Quadro 4	Resolução de problema do tipo combinação a partir de várias representações	34
Quadro 5	Periódicos consultados	37
Quadro 6	Resultado do levantamento dos textos	39
Quadro 7	Distribuição dos trabalhos por área temática	39
Quadro 8	Resultado do levantamento dos textos	55
Quadro 9	Distribuição dos trabalhos por ano, título e tipo de pesquisa	56
Quadro 10	Questões ou objetivos de pesquisa dos textos levantados	57
Quadro 11	Trabalhos revisados por conteúdo, tipo de OA e público-alvo	58
Quadro 12	Trabalhos revisados por metodologia, forma de validação, verificação de aprendizagem e tipo de feedback	60
Quadro 13	Tipos de participações dos públicos-alvo nas pesquisas levantadas	61
Quadro 14	Implicações dos resultados na pesquisa e na prática nas pesquisas levantadas	63
Quadro 15	Levantamento de textos	66
Quadro 16	Distribuição dos trabalhos por grupo	66
Quadro 17	Fases adotadas para construção de OAs referentes às pesquisas do grupo 1	67
Quadro 18	Diretrizes adotadas para construção e/ ou avaliação de OAs referentes às pesquisas do grupo 2	67
Quadro 19	Diretrizes que orientam a construção e/ou avaliação de objetos de aprendizagem em matemática referentes ao grupo 3	69
Quadro 20	Metodologias para a Construção de OAs	71
Quadro 21	Descrição dos papéis da metodologia INTERA	73
Quadro 22	Diferentes tipos de situações multiplicativas propostas por Vergnaud (1983, 1991)	82
Quadro 23	Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)	85
Quadro 24	Problemas aditivos por nível de congruência	88

Quadro 25	Problemas combinatórios por critérios de congruência	90
Quadro 26	Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias Psicológicas de Aprendizagem	97
Quadro 27	Etapas da pesquisa	112
Quadro 28	Perfil dos profissionais convidados para a fase de aperfeiçoamento	114
Quadro 29	Estudantes convidados para a fase de aperfeiçoamento	116
Quadro 30	Identificação e perfil do professor da turma experimental	118
Quadro 31	Identificação dos estudantes da turma experimental convidados para participar da entrevista	118
Quadro 32	Membros e papéis do projeto CombInter	127
Quadro 33	Exemplo de análise de problema para criação do recurso interativo	132
Quadro 34	Construção de feedbacks para o recurso interativo	132
Quadro 35	Modelo de auxílio 1 (múltipla escolha)	134
Quadro 36	Modelo de auxílio 2 (sim ou não)	134
Quadro 37	Modelo de auxílio 3 (texto)	135
Quadro 38	Modelo de auxílio 4 (sim ou não)	135
Quadro 39	Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de auxílio 1	136
Quadro 40	Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de auxílio 2, item b)	137
Quadro 41	Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de auxílio 4, item b)	137
Quadro 42	Modelo de resolução como andaime de execução do plano	138
Quadro 43	Problema relacionado ao de origem (exemplo 5)	138
Quadro 44	Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de problema relacionado ao de origem	139
Quadro 45	Modelo de resolução do problema relacionado ao de origem	139
Quadro 46	Modelo de problema para conversão de registros de representação	140
Quadro 47	Modelo de auxílios para o conjunto de itens referente ao exemplo 7	141
Quadro 48	Modelo de resolução para o conjunto de itens referente ao exemplo 7	142
Quadro 49	Plano de testes do OA	158
Quadro 50	Modelo de cálculo do Ranking Médio (RM)	159
Quadro 51	Respostas referentes ao critério de Usabilidade	160
Quadro 52	Respostas referentes ao critério de Interface e recursos interativos do CombInter	162
Quadro 53	Respostas referentes ao critério de Prover auxílio aos usuários	167
Quadro 54	Respostas referentes ao critério de Foco pedagógico	171
Quadro 55	Respostas referentes ao critério de Conteúdo matemático	173

Quadro 56	Modelo de lista de questões do pré-teste	178
Quadro 57	Classificação e pontuação por item	179
Quadro 58	Emparelhamento dos integrantes dos grupos controle e experimental	179
Quadro 59	Porcentagens de resposta por grupo, tipo de problema, classificação, no pré-teste e no pós-teste	181
Quadro 60	Porcentagens de resposta por grupo e classificação, no pré-teste e no pós-teste	182
Quadro 61	Médias por tipo de problema no pré-teste e no pós-teste por grupo	182
Quadro 62	Médias obtidas no pré-teste e pós-teste por grupo	184

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADDIE	Analysis, Design, Development, Implementation e Evaluation
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BDTD	Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
DBR	Design-Based Research
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
ERIC	Educational Resources Information Center
IFAL	Instituto Federal de Alagoas
IEEE	Institute of Electrical and Electronic Engineers
INTERA	Inteligência em Tecnologias Educacionais e Recursos Acessíveis
LMS	Learning Management System
OA	Objetos de Aprendizagem
ODS	Objetivos de Desenvolvimento Sustentável
PCN+	Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
PNED	Política Nacional de Educação Digital
PFC	Princípio Fundamental da Contagem
RM	<i>Ranking</i> Médio
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
SPSS	Statistical Package for the Social Sciences
TIC	Tecnologia de Informação e Comunicação
UML	Unified Modeling Language
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	QUESTÃO DA PESQUISA	25
1.2	HIPÓTESE	25
1.3	OBJETIVOS	25
1.4	ORGANIZAÇÃO DA TESE	25
2	A ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA	27
2.1	ANÁLISE COMBINATÓRIA: DEFINIÇÕES	27
2.2	TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS	28
2.3	ANÁLISE COMBINATÓRIA: ESTUDOS ANTERIORES	36
2.3.1	Obstáculos para aprendizagem de combinatória	40
2.3.3	Estratégias e recursos de ensino em análise combinatória	43
3	OBJETOS DE APRENDIZAGEM E O ENSINO DE MATEMÁTICA	51
3.1	OBJETOS DE APRENDIZAGEM: CONCEITO E TIPOLOGIA	51
3.2	OBJETOS DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA: ESTUDOS ANTERIORES	54
3.3	METODOLOGIAS E DIRETRIZES PARA O DESENVOLVIMENTO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM PRESENTES NA LITERATURA	65
3.4	METODOLOGIA INTERA	71
4	A FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS	78
4.1	TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	78
4.1.1	As estruturas multiplicativas	81
4.2	A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS	84
5	ANDAIMES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO POTENCIALIZADORES DE APRENDIZAGEM	92
5.1	ANDAIMES: CONCEITOS E FUNÇÕES	92
5.2	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	96
6	METODOLOGIA	106
6.1	TIPO DE PESQUISA	106
6.2	SUJEITOS DA PESQUISA	111
6.3	ETAPAS DA PESQUISA	112
6.3.1	Fase de desenvolvimento	112
6.3.1.1	Etapa de criação do OA	112
6.3.1.2	Etapa de aperfeiçoamento	113
6.3.1.2.1	Apresentação da versão 1 a especialistas	113
6.3.1.2.2	Apresentação da versão 1 a licenciandos em matemática e alunos do	

<i>ensino médio</i>	115
6.3.2 Fase de validação	116
6.3.3 Fase de reflexão	118
7 ANÁLISES E RESULTADOS	119
7.1 COMBINTER: UM OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA	119
7.1.1 Princípios teóricos iniciais	119
7.1.2 Projeto CombInter	127
7.1.2.1 Etapa de contextualização	127
7.1.2.2 Etapa de requisitos	130
7.1.2.2.1 <i>Requisitos didático-pedagógicos</i>	130
7.1.2.2.2 <i>Requisitos funcionais</i>	145
7.1.2.2.3 <i>Requisitos não funcionais</i>	147
7.1.2.3 Etapa de arquitetura	148
7.1.2.3.1 <i>Esboço do OA</i>	149
7.1.2.3.2 <i>Decomposição do OA</i>	151
7.1.2.3.3 <i>Definições técnicas</i>	152
7.1.2.4 Etapa de Desenvolvimento	156
7.1.2.5 Etapa de Testes e Qualidade	157
7.1.2.6 Etapa de Disponibilização	158
7.1.2.7 Etapa de Avaliação	158
7.2 ETAPA DE APERFEIÇOAMENTO	159
7.2.1 Usabilidade	160
7.2.2 Interface e recursos interativos do CombInter	162
7.2.3 Prover auxílio aos usuários	167
7.2.4 Foco pedagógico	171
7.2.5 Conteúdo matemático	173
7.3 ETAPA DE VALIDAÇÃO	176
7.3.1 Análises comparativas entre pré e pós-teste	180
7.3.2 Repercussões no processo de ensino e aprendizagem	185
7.3.2.1 CombInter e a aprendizagem em análise combinatória	186
7.3.2.2 Aula de análise combinatória com o CombInter	193
7.4 PRINCÍPIOS TEÓRICOS	197
8 CONCLUSÕES	210
REFERÊNCIAS	219
APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA IDENTIFICAÇÃO DO GRUPO DE PESQUISA	238

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PARA TRAÇAR PERFIL DO GRUPO PESQUISADO	239
APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO PARA ESPECIALISTAS	240
APÊNDICE D – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER - (Especialistas – etapa de aperfeiçoamento)	245
APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO PARA ESTUDANTES - (Fases de aperfeiçoamento e validação)	249
APÊNDICE F – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER - (Estudantes – Etapa de aperfeiçoamento)	254
APÊNDICE G – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER - (Professor – fase de validação)	256
APÊNDICE H – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER - (Estudantes – Fase de validação)	261
APÊNDICE I – PRÉ-TESTE	264
APÊNDICE J – PÓS-TESTE	266
APÊNDICE K – ESPECIFICAÇÃO DE REQUISITOS DO COMBINTER	267
APÊNDICE L – RELATÓRIO DE ANÁLISE DE CONTEXTO	271
APÊNDICE M – PROTÓTIPO DO OA	273
APÊNDICE N – DESENVOLVIMENTO DO OA	282

1 INTRODUÇÃO

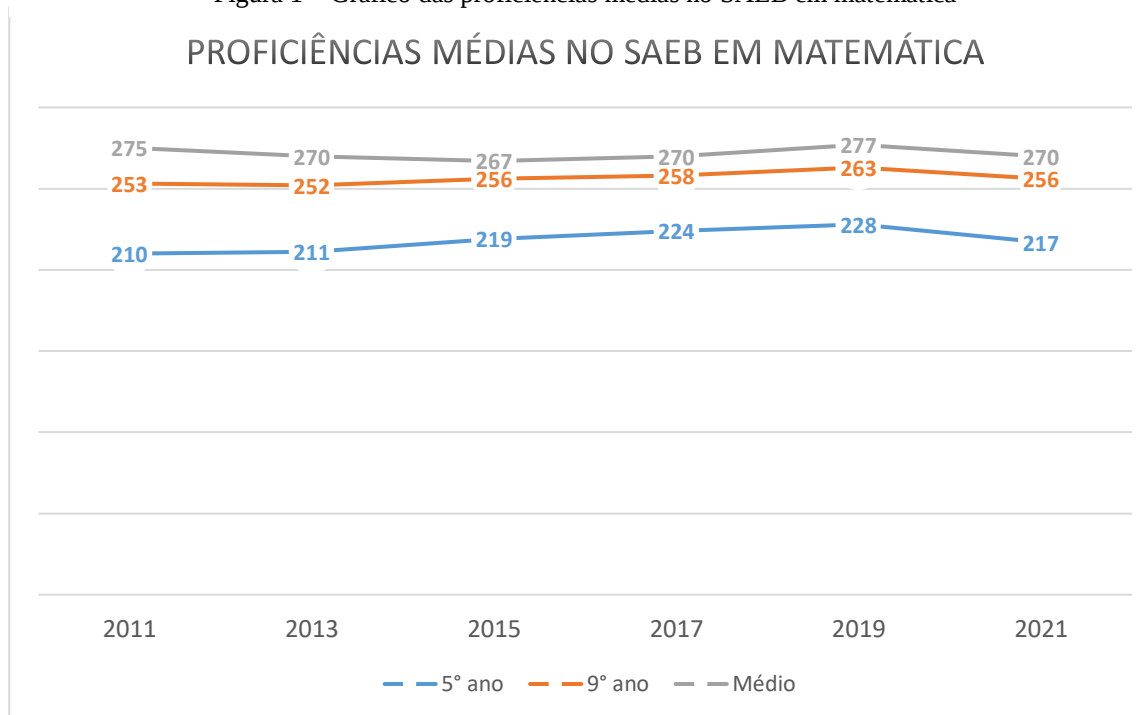
O ensino de matemática é marcado, historicamente, por baixos índices de aprendizagem. São várias as razões que vêm contribuindo para esse estado, dentre as quais, Freitas (2001) e D'Ambrosio (1989) elencam alguns aspectos, a saber: discussões isoladas de conteúdos, desfavorecendo o aspecto contextual entre os conceitos matemáticos; um ensino mecânico que privilegia a repetição e o treino, a partir de uma enorme quantidade de exercícios semelhantes; dissociação entre material concreto e abstração, ao acreditar que com a manipulação de material concreto, o estudante desenvolverá naturalmente o raciocínio abstrato; pouca variação na forma de ensinar independente do conteúdo e público; modelo padronizado de avaliação; e ignorar o tempo de aprendizagem do estudante.

Tais situações contribuem para alguns comportamentos que influenciam negativamente a aprendizagem, tais como: a falta de motivação dos alunos para aprender; desinteresse pela maioria dos conteúdos ministrados e dificuldades em associar conteúdos matemáticos aos estudos de outras disciplinas e às necessidades do cotidiano; esquecimento do que foi estudado; maior dificuldade nas etapas de ensino posteriores (Freitas, 2001; Masola; Allevato, 2019). Além disso, trazem consequências para a visão que os alunos têm de matemática, pois “passam a acreditar que a aprendizagem matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos, [...] que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, [...] os estudantes, acreditando e supervalorizando o poder da matemática formal, perde qualquer autoconfiança em sua intuição matemática” (D'Ambrosio, 1989, p. 15).

Esse cenário envolvendo aprendizagem matemática pode ser observado também a partir dos resultados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), conforme figura 1. Considerando os resultados do SAEB referente ao ano de 2021, no 5º ano do ensino fundamental, 57,6% dos alunos encontram-se até o nível 4 de proficiência (de uma escala de nível 0 ao 10), com média de proficiência igual a 217 (de 0 a 350 pontos); no 9º ano do ensino fundamental, 62,6% dos alunos encontram-se até o nível 3 (de uma escala de nível 1 ao 9), com média de proficiência igual a 256 (de 200 a 400); e, no 3º ano do ensino médio, 71,6% dos alunos encontram-se até o nível 3 (de uma escala de nível 1 ao 10), com média de proficiência igual a 270 (de 225 a 450 até o nível 9 e maior ou igual a 450 no nível 10) (Brasil, 2022). No que se refere ao ensino médio, por exemplo, pode-se dizer que tais estudantes, provavelmente, têm dificuldade em habilidades presentes, respectivamente, nos níveis 4, 7 e 8 de proficiência,

tais como resolver problemas de contagem usando princípio multiplicativo, permutação e arranjo, conceitos esses relacionados ao estudo de análise combinatória (Brasil, 2022).

Figura 1 – Gráfico das proficiências médias no SAEB em matemática



Fonte: Brasil (2022).

São várias situações relacionadas à área de combinatória que vêm contribuindo para que sua aprendizagem seja comprometida. Em revisão sistemática de literatura apresentada no decorrer deste trabalho, algumas situações chamaram atenção. Por exemplo, os alunos possuem dificuldades em compreender os invariantes combinatórios, devido, principalmente, à forma de ensino do professor ainda caracterizada pelo modelo mecânico; os professores possuem dificuldades conceituais relacionadas à área, fazendo com que vários evitem abordar o tema durante suas aulas ou que abordem o conteúdo a partir de definições e repetição de modelos únicos de exercício, com ênfase em fórmulas e algoritmos; os professores não encontram recursos didáticos diferentes para aprender o conteúdo como para auxiliar em suas aulas. Esse último dado é corroborado por pesquisas realizadas neste trabalho que observou que no universo de aproximadamente 400 pesquisas acadêmicas dos últimos 5 anos, apenas um trabalho tratava-se da aplicação de um objeto de aprendizagem para o ensino de combinatória. Por outro lado, nenhuma pesquisa foi encontrada tratando-se de desenvolvimento de objetos de aprendizagem para o ensino de combinatória.

O fato do conteúdo de análise combinatória nem sempre ser abordado na educação básica, foi um dos fatores que motivou o pesquisador a realizar pesquisas envolvendo essa temática, uma vez que ele não teve oportunidade de estudar enquanto estudante do ensino médio. Não só ele, mas vários colegas comentavam que não havia sido ofertado este conteúdo durante o ensino médio. Durante o seu mestrado, o pesquisador teve a oportunidade de estudar a temática e percebeu algumas peculiaridades desta área, conforme argumenta Morgado *et al.* (2016, p. 02):

é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Dessa forma, algumas questões preliminares foram levantadas: como incentivar/contribuir para que professores de matemática abordem o conteúdo de combinatória com maior frequência no ensino médio? Como facilitar a compreensão dos conceitos relacionados à análise combinatória? Considerando o contexto da cultura digital em que estudantes estão envolvidos, marcado pelo “avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, tablets e afins” (Brasil, 2019, p. 61), acreditamos que o ensino de matemática pode se beneficiar de recursos digitais e do potencial das tecnologias para auxiliar no processo de compreensão de conceitos matemáticos. Nessa perspectiva,

[...] pode-se pensar em utilizar as TICs para propiciar aos aprendizes possibilidades de desenvolver suas habilidades cognitivas de ordem superior, bem como; acessar, armazenar, manipular e analisar informações. Dessa forma, os estudantes podem usar melhor seu tempo na reflexão, no entendimento e na compreensão dos conceitos a serem apreendidos (Ramos; Amaral, 2012, p. 228).

Alguns estudos destacam aspectos que as tecnologias podem contribuir no ensino de matemática. Os softwares de geometria dinâmica “podem ir além da comparação de figuras geométricas, pois permitem criar, mover, distorcer, analisar e testar propriedades de figuras em um processo de investigação” (Almeida, 2015; Bona, 2009 *apud* Faria, 2017, p. 95). As simulações e modelações permitem “reproduzir no computador modelos de fenômenos do mundo real que não poderiam ser trabalhados pelos alunos com papel e lápis com igual qualidade e realismo” (Oliveira; Domingos, 2008, p. 270). As representações múltiplas possibilitadas pelos recursos digitais permitem que alunos e professores possam observar uma

situação sob diversas perspectivas: tabela, gráfico, vídeo, animação, etc., o que interfere no ensino e aprendizagem de matemática (Borba, 1994).

Dentre os recursos digitais disponíveis, os objetos de aprendizagem (OAs) vêm sendo uma alternativa para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de matemática, pois são relativamente simples de usar, possuem uma abordagem pedagógica melhor definida em relação a outros recursos, podem ser usados em diversas plataformas, além de aproveitar o potencial da tecnologia para facilitar a abordagem de conteúdos abstratos. Em revisão sistemática da literatura apresentada neste trabalho, constatou-se, dentre outras questões, que os objetos de aprendizagem de matemática, em sua maioria, têm sido desenvolvidos sem levar em consideração teorias que fundamentam os processos de aprendizagem envolvidos. Nessa perspectiva, é necessário que seja dada uma maior atenção às questões pedagógicas no seu processo de desenvolvimento (Friesen, 2004; Hummel *et al.*, 2004; Nurmi; Jaakkola, 2006), pois o “design e o desenvolvimento de objetos de aprendizagem de alta qualidade são cruciais antes de chegarmos a questões de metadados e empacotamento de software. [...] o design pedagógico está no centro de objetos de aprendizagem eficazes” (Boyle, 2009, p. 03).

Farmer e Hughes (2005, p. 01) argumentam que “o projeto bem-sucedido de objetos de aprendizagem (OAs) necessita da incorporação do design instrucional e das teorias de aprendizagem com as atuais metodologias de projeto de OAs”. Além disso, para que os OAs possam alcançar resultados de aprendizagem, “o design do objeto deve ser compatível com os processos de aprendizagem reais, uma abordagem que atualmente falta nos modelos existentes” (Farmer; Hughes, 2005, p. 01). Para que haja a construção de quadros pedagógicos que possam ser implementados no design do OA, Bennett, Lockyer e Agostinho (2004) sugerem que um dos caminhos é compreender os processos pelos quais os professores constroem experiências de aprendizagem e entender como tais processos podem ser implementados no OA de modo que permitam exercer tais experiências. Desse modo, somada às outras questões apresentadas, indagamos: como desenvolver objetos de aprendizagem para o ensino de matemática que levem em consideração aspectos teóricos pertinentes à aprendizagem de conceitos matemáticos?

As orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais (PCN+), bem como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresentam algumas competências e habilidades que os alunos deverão desenvolver ao vivenciarem o estudo em matemática e em análise combinatória. Além disso, existem os objetivos de desenvolvimento sustentável (ODS) que são concretizados a partir do alcance das metas definidas na Agenda

2030 no Brasil. A seguir, abordamos as competências e objetivos (ODS) que pretendemos atender com este trabalho.

ARTICULAÇÃO DOS SÍMBOLOS E CÓDIGOS DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

– Ler, articular e interpretar símbolos e códigos em diferentes linguagens e representações: sentenças, equações, esquemas, diagramas, tabelas, gráficos e representações geométricas. Ler e interpretar dados ou informações apresentados em diferentes linguagens e representações, como tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, árvores de possibilidades, fórmulas, equações ou representações geométricas. Traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra. Selecionar diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo as vantagens e limites de cada uma delas (Brasil, 2002, p. 114).

ESTRATÉGIAS PARA ENFRENTAMENTO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

– Identificar em dada situação problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la. Identificar os dados relevantes em uma dada situação problema para buscar possíveis resoluções. Identificar as relações envolvidas e elaborar possíveis estratégias para enfrentar uma dada situação-problema. Frente a uma situação ou problema, reconhecer a sua natureza e situar o objeto de estudo dentro dos diferentes campos da Matemática (Brasil, 2002, p. 115).

Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente – (EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore (Brasil, 2019, p. 531).

Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas (Brasil, 2019, p. 531).

Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 4. Educação de qualidade: Garantir o acesso à educação inclusiva, de qualidade e equitativa, e promover oportunidades de aprendizagem ao longo da vida para todos. 4.6 Até 2030, garantir que todos os jovens e uma substancial proporção dos adultos, homens e mulheres estejam alfabetizados e tenham adquirido o conhecimento básico de matemática (ODSBRASIL, 2023).

Além de evidenciar situações relacionadas à compreensão matemática, este trabalho aspira contemplar dimensões que envolvem a computação e as tecnologias digitais discutidas na BNCC e na Política Nacional de Educação Digital (PNED), a saber:

- usar diversas ferramentas de software e aplicativos para compreender e produzir conteúdos em diversas mídias, simular fenômenos e processos das diferentes áreas do conhecimento, e elaborar e explorar diversos registros de representação matemática; e
- utilizar, propor e/ou implementar soluções (processos e produtos) envolvendo diferentes tecnologias, para identificar, analisar, modelar e solucionar problemas complexos em diversas áreas da vida cotidiana, explorando de forma efetiva o raciocínio lógico, o pensamento computacional, o espírito de investigação e a criatividade (Brasil, 2019, p. 475).

Eixo Educação Digital Escolar. Art. 3º - III - cultura digital, que envolve aprendizagem destinada à participação consciente e democrática por meio das tecnologias digitais, o que pressupõe compreensão dos impactos da revolução digital e seus avanços na sociedade, a construção de atitude crítica, ética e responsável em relação à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais e os diferentes usos das tecnologias e dos conteúdos disponibilizados (Brasil, 2023, p. 02).

A partir das discussões levantadas, acreditamos que o desenvolvimento e uso de objetos de aprendizagem para o ensino de matemática que levem em consideração em seu design pedagógico aportes teóricos que contribuam para apreensão de conceitos matemáticos, contribuem para compreensão de conceitos matemáticos e, desse modo, podem amenizar os problemas de aprendizagem em matemática. Defendemos que o desenvolvimento de tais recursos ultrapasse a barreira dos “recursos” do ambiente tradicional e que se possa fazer uso de recursos tecnológicos que potencializem as oportunidades de aprendizagem. Isto é, é importante que tais recursos não sejam apenas a transposição de aulas tradicionais para ambientes informatizados. Isso torna-se importante, uma vez que nas pesquisas realizadas durante este trabalho, constatou-se que vários OAs de matemática reproduzem práticas de ensino similares a do ambiente tradicional, práticas essas geralmente criticadas por pesquisadores da educação.

É importante que as características do saber envolvido no OA sejam levadas em consideração durante o processo de desenvolvimento, de modo que sejam criadas estratégias para que as principais dificuldades sejam identificadas e se criem mecanismos de superação. Por exemplo, nos OAs de matemática estudados neste trabalho, foram percebidas formas de ajuda direcionadas aos aspectos técnicos da ferramenta e poucos auxílios direcionados para o entendimento do erro e formas de superação relacionados ao conceito estudado, limitando-se, geralmente, a informar se a situação-problema estaria certa ou errada.

Dessa forma, nesta pesquisa, buscamos desenvolver um objeto de aprendizagem que considere em seu design pedagógico aportes teóricos relacionados à apreensão de conceitos matemáticos. Os conceitos a serem abordados no OA são os que pertencem ao conteúdo de análise combinatória do ensino médio. Para isso, foram desenvolvidos princípios teóricos baseados em teorias existentes e no seu refinamento a partir da prática do OA desenvolvido com especialistas e estudantes em contexto escolar. É importante mencionar que o foco da pesquisa está relacionado aos princípios teóricos subjacentes ao design do OA e não aos aspectos técnicos. Entretanto, como o desenvolvimento do OA é um dos produtos desta pesquisa, foram utilizados aspectos técnicos relacionados aos OAs disponíveis na literatura.

1.1 QUESTÃO DA PESQUISA

Quais princípios teóricos que, utilizados no processo de construção de objetos de aprendizagem, podem contribuir para a apreensão dos conceitos de análise combinatória?

1.2 HIPÓTESE

Os objetos de aprendizagem para o ensino de matemática, desenvolvidos a partir de aportes teóricos que auxiliam no processo de apreensão dos conceitos matemáticos, são alternativas eficazes para o ensino de análise combinatória, contribuindo para uma melhora do ensino e aprendizagem.

1.3 OBJETIVOS

Objetivo geral:

Elaborar um conjunto de princípios teóricos que orientem o desenvolvimento de objetos de aprendizagem para o ensino de análise combinatória.

Objetivos específicos:

- Desenvolver um objeto de aprendizagem para o ensino de matemática que explore conceitos relacionados à análise combinatória;
- Avaliar os aspectos técnicos e de conteúdo implementados durante o desenvolvimento do objeto de aprendizagem;
- Analisar a influência dos princípios teóricos para o estudo de combinatória a partir do desenvolvimento e aplicação do objeto de aprendizagem;
- Analisar o uso do objeto de aprendizagem no ensino de matemática, em relação ao ensino e a aprendizagem dos conceitos de análise combinatória.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA TESE

Para atingir os objetivos deste trabalho, no capítulo 2, discutimos conceitos e estudos anteriores relacionados à análise combinatória, com ênfase no seu processo de ensino e aprendizagem. No capítulo 3, abordamos conceitos, tipologia, diretrizes e critérios de desenvolvimento, e estudos anteriores relacionados aos objetos de aprendizagem, destacando como os objetos de aprendizagem em matemática estão sendo desenvolvidos e aplicados. Ainda no mesmo capítulo, é apresentada a metodologia de desenvolvimento de OA adotada nesta pesquisa. No capítulo 4, é discutido o papel das teorias dos Campos Conceituais e dos Registros de Representação Semiótica na formação e desenvolvimento dos conceitos matemáticos. No capítulo 5, apresentamos o conceito e as funções de andaimes e como esses podem ser potencializados a partir da metodologia de resolução de problemas para o ensino de matemática mediado por OAs.

A metodologia adotada para o desenvolvimento da pesquisa é abordada no capítulo 6. No capítulo 7, são apresentados o desenvolvimento do objeto de aprendizagem bem como as análises e resultados da fase de aperfeiçoamento do OA feita com especialistas e estudantes, da validação no contexto da sala de aula de matemática e dos princípios teóricos oriundos das fases de desenvolvimento, aperfeiçoamento e validação do objeto de aprendizagem. Por fim, são apresentadas as conclusões e as referências.

2 A ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, são discutidas as definições sobre análise combinatória e sua importância como área do saber matemático, os tipos de problemas e situações que caracterizam o seu estudo e, por fim, estudos anteriores que evidenciam a situação do processo de ensino e aprendizagem desta área.

2.1 ANÁLISE COMBINATÓRIA: DEFINIÇÕES

A análise combinatória é uma área da matemática que analisa estruturas e relações discretas, abrangendo, geralmente, um perfil de problemas preocupados em demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições, e contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas (Morgado *et al.*, 2016). É importante salientar que a análise combinatória não se resume a tais tópicos, isto é, existem outros tipos de problemas também de análise combinatória que necessitam de outros tipos de técnicas para obtermos a solução, a saber: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey, etc. (Morgado *et al.*, 2016). Kapur (1970) *apud* Navarro-Pelayo, Godino e Batanero (1996, p. 26) aborda algumas razões para que a combinatória seja discutida no currículo da escola:

Por não depender de Cálculo, permite colocar problemas adequados para diferentes níveis; Problemas ainda não resolvidos podem ser discutidos com os alunos, para que estes descubram a necessidade de criar uma nova matemática; Pode ser usado para treinar estudantes em enumeração, conjectura, generalização, otimização e pensamento sistemático; Pode ajudar a desenvolver muitos conceitos, como aplicação, relações de ordem e equivalência, função, amostra, conjunto, subconjunto, produto cartesiano, etc.; Muitas aplicações podem ser apresentadas em diferentes áreas, tais como: Química, Biologia, Física, Comunicação, Probabilidade, Teoria dos Números, Gráficos, etc.

O estudo de combinatória no Brasil é recomendado desde os anos iniciais do ensino fundamental ao ensino médio, pois diversos fenômenos na sociedade exigem tratamento e raciocínios que são estudados em combinatória (Borba, 2016), (Brasil, 1997). O seu estudo favorece a “construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que

constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos” (Brasil, 1998, p. 49).

Nos anos iniciais e ensino fundamental, a análise combinatória resume-se em problemas de contagem baseados na realização de agrupamentos possíveis ao se combinar elementos de um conjunto com elementos de outro conjunto por meio de imagem e/ou material manipulativo, e do princípio multiplicativo a partir de diagramas de árvores e por tabelas (Brasil, 2019). Já no ensino médio, baseia-se, em geral, a partir da formalização do princípio fundamental da contagem, arranjos, permutações e combinações (Morgado *et al.*, 2016). Nesse processo de formalização dos conceitos combinatórios vivenciados no ensino médio, o estudante pode adquirir algumas habilidades, a saber:

Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos; Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (Brasil, 2002, p. 127).

O princípio fundamental da contagem (PFC), nessa perspectiva, ganha destaque, pois é a partir dele que os conceitos de arranjos, permutações e combinações são desenvolvidos, além de ser possível resolver uma diversidade de problemas. Tal princípio pode ser definido do seguinte modo: se uma decisão d_1 pode ser tomada de X maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de Y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $X \times Y$ (Hazzan, 1977; Lima *et al.*, 1998; Morgado *et al.*, 2016).

2.2 TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Os problemas combinatórios podem ser categorizados em problemas de existência, caracterizados pela verificação da existência de solução a partir das condições propostas; problemas de contagem, que investigam quantas soluções podem existir; problemas de otimização, que identificam a melhor solução para determinado problema; e problemas de enumeração, que objetivam desenvolver um procedimento para listar sistematicamente todas as soluções para um determinado problema (Batanero; Godino; Navarro-Pelayo, 1997). Na educação básica são abordados, geralmente, os problemas de contagem e de enumeração.

Pessoa e Borba (2010) estudaram problemas dessa natureza e realizaram uma classificação única levando em consideração as situações e propriedades de cada problema a

partir da teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1991). Dessa forma, os tipos de problemas encontrados foram: produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação. As representações simbólicas trabalhadas nas situações combinatórias podem ser: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, entre outras. Elas são usadas no processo de solução e na proposição dos problemas (Pessoa; Borba, 2010). De modo geral, Vergnaud (1986) destaca que o aluno, ao ter experiências com diversas situações-problema, mobiliza diversos invariantes e representações simbólicas, favorecendo a apreensão dos conceitos. As soluções podem ser realizadas de forma menos formal, a partir de listagens, tabelas, ou árvore de possibilidades, ou, de maneira formal, a partir de uma expressão numérica. Vejamos, abaixo, como os problemas dessa natureza se caracterizam, seus invariantes e formas gerais de solução, conforme Borba (2010), Montenegro (2018), Pessoa (2009), Pessoa e Borba (2010).

- Produto cartesiano

Problemas do tipo produto cartesiano envolvem dois ou mais conjuntos disjuntos que são combinados a partir da escolha de um elemento de cada conjunto independente que formam um novo conjunto de natureza distinta dos conjuntos disjuntos dados. Como invariantes deste tipo de problema, temos: (1) dado dois (ou mais) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto; (2) a ordem dos elementos escolhidos não determina possibilidades distintas; (3) a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado.

Exemplo 1: Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos e 4 meninas que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Convertendo os dados do enunciado em símbolos e identificando os meninos por h_1 , h_2 e h_3 e as meninas por m_1 , m_2 , m_3 e m_4 , vejamos, no quadro 1, algumas possibilidades de solução de referido exemplo.

Quadro 1 – Resolução de problema do tipo produto cartesiano a partir de várias representações

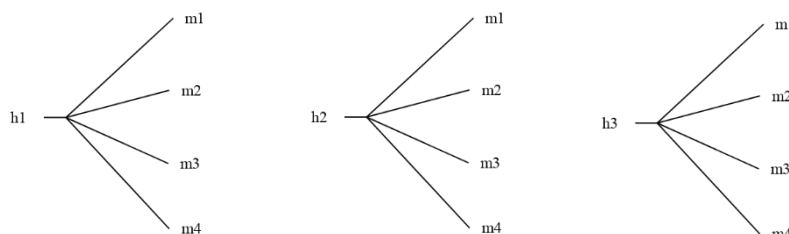
(continua)

Listagem
h_1m_1 , h_1m_2 , h_1m_3 , h_1m_4

(conclusão)

$h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4$
 h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3 e h_3m_4

Árvore de possibilidades



Generalização de possibilidades a partir da expressão numérica: $4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$

Expressão numérica a partir do PFC: $3 \times 4 = 12$

Fonte: elaborado pelo autor.

Na resolução por listagem sistemática, são enumeradas todas as possibilidades iniciando por h_1 e formando os pares respectivos com m_1, m_2, m_3 e m_4 ; em seguida por h_2 e formando os pares respectivos com m_1, m_2, m_3 e m_4 ; e, por fim, por h_3 e formando os pares respectivos com m_1, m_2, m_3 e m_4 . Essa sistematização garante que sejam contabilizadas todas as possibilidades. Na árvore de possibilidades, também ocorre uma enumeração sistemática a partir das conexões do diagrama que facilitam perceber como se dá a contagem das possibilidades. A generalização de possibilidades é derivada da listagem e da árvore de possibilidades, contabilizando os casos possíveis. A partir do princípio fundamental da contagem, temos três possibilidades de escolha para primeira etapa – escolha do menino – e temos quatro possibilidades de escolha para a segunda etapa – escolha da menina. Assim, obtemos $3 \times 4 = 12$ possibilidades de pares diferentes para dançar quadrilha.

- Arranjo

Problemas do tipo arranjo são caracterizados pela escolha de elementos de um conjunto que, quando ordenados, geram possibilidades distintas. Como invariantes deste tipo de problema, temos: (1) Tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Exemplo 2: O quadrangular final da Copa do Mundo será disputado pelas seguintes seleções: Argentina, Brasil, Camarões e Dinamarca. De quantas maneiras distintas podemos ter os três primeiros colocados?

Convertendo os dados do enunciado em símbolos e identificando as seleções por A, B, C e D, vejamos, no quadro 2, algumas possibilidades de solução do referido exemplo.

Quadro 2 – Resolução de problema do tipo arranjo a partir de várias representações

(continua)

Listagem

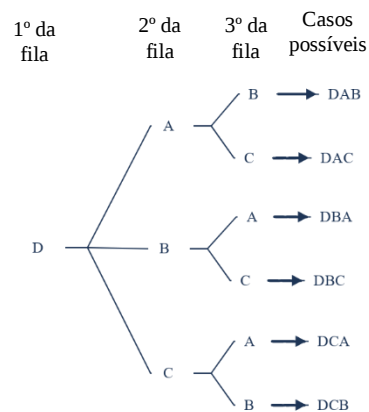
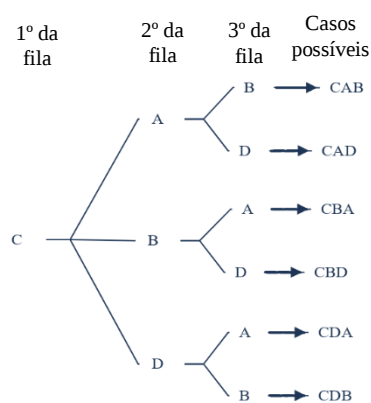
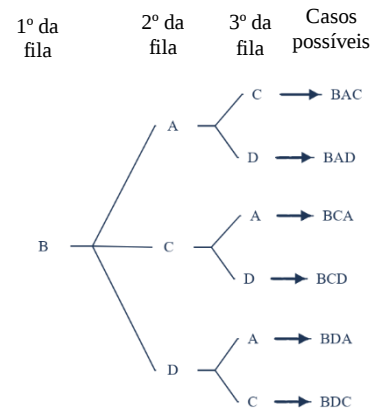
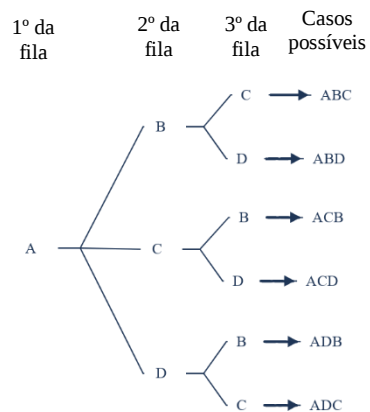
ABC, ABD, ACB, ACD, ADB, ADC

BAC, BAD, BCA, BCD, BDA, BDC

CAB, CAD, CBA, CBD, CDA, CDB

DAB, DAC, DBA, DBC, DCA, DCB

Árvore de possibilidades



(conclusão)

Generalização de possibilidades a partir da expressão numérica: $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6 = 24$

Expressão numérica a partir do PFC: $4 \times 3 \times 2 = 24$

Uso da fórmula: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{1} = 24$

Fonte: elaborado pelo autor.

Na resolução por listagem sistemática, são enumeradas todas as possibilidades iniciando por A e formando os pódios respectivos com B, C e D dois a dois (ABC, ABD, ACB, ACD, ADB, ADC), em seguida por B e formando os pódios respectivos com A, C e D dois a dois, em seguida por C e formando os pódios respectivos com A, B e D dois a dois e, por fim, por D e formando os pódios respectivos com A, B e C dois a dois. Essa sistematização garante que sejam contabilizadas todas as possibilidades. Na árvore de possibilidades, também ocorre uma enumeração sistemática a partir das conexões do diagrama que facilitam perceber como se dá a contagem das possibilidades. A generalização de possibilidades é derivada da listagem e da árvore de possibilidades, contabilizando os casos possíveis. A partir do princípio fundamental da contagem, temos (i) escolha de um país para o 1º lugar, o que pode ser feito de 4 possibilidades; ii) escolha de um país para o 2º lugar, após a escolha de um país para o 1º lugar, o que pode ser feito de 3 possibilidades; iii) escolha de um país para o 3º lugar, após as escolhas dos países para o 1º e 2º lugares, o que pode ser feito de 2 possibilidades. Assim, obtemos $4 \times 3 \times 2 = 24$ possibilidades de pódio para os três primeiros colocados. No uso da fórmula, n representa o número de elementos do conjunto maior dado (no caso em tela, são as quatro seleções) e p representa o número de elementos dos agrupamentos que se deseja realizar a contagem (no caso em tela, $p = 3$, pois o pódio é formado por três países).

- Permutação

Problemas do tipo permutação diferenciam-se dos arranjos por considerar todos os elementos do conjunto para formar novas possibilidades. Como invariantes deste tipo de problema, temos: (1) todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez; (2) a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Exemplo 3: De quantas maneiras diferentes, três pessoas podem posicionar-se numa fila do banco?

Convertendo os dados do enunciado em símbolos e identificando as pessoas por A, B, C, vejamos, no quadro 3, algumas possibilidades de solução de referido exemplo.

Quadro 3 – Resolução de problema do tipo permutação a partir de várias representações

Listagem

ABC, ACB

BAC, BCA

CAB, CBA

Árvore de possibilidades

1º da fila	2º da fila	3º da fila	Casos possíveis
A	B	C	→ ABC
	C	D	→ ACD

1º da fila	2º da fila	3º da fila	Casos possíveis
B	A	C	→ BAC
	C	A	→ BCA

1º da fila	2º da fila	3º da fila	Casos possíveis
C	A	B	→ CAB
	B	A	→ CBA

Generalização de possibilidades a partir de uma expressão numérica: $2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$

Expressão numérica a partir do PFC: $3 \times 2 = 6$

Uso da fórmula: $A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! = P_n$; $P_n = P_3 = 3! = 3 \times 2 = 6$

Fonte: elaborado pelo autor.

Na resolução por listagem sistemática, são enumeradas todas as possibilidades iniciando por A e formando as filas respectivas com B e C dois a dois (ABC, ACB), em seguida por B e formando as filas respectivas com A e C dois a dois, em seguida por C e formando as filas com A e B dois a dois. Essa sistematização garante que sejam contabilizadas todas as possibilidades. Na árvore de possibilidades, também ocorre uma enumeração sistemática a partir das conexões do diagrama que facilita perceber como se dá a contagem das possibilidades. A generalização de possibilidades é derivada tanto da listagem como da árvore de possibilidades, contabilizando

os casos possíveis. A partir do princípio fundamental da contagem, temos: (i) escolha de uma pessoa para o 1º lugar, o que pode ser feito de 3 possibilidades; ii) escolha de uma pessoa para o 2º lugar, após a escolha da pessoa para o 1º lugar, o que pode ser feito de 2 possibilidades. Assim, obtemos $3 \times 2 = 6$ possibilidades de organizar a fila no banco. No uso da fórmula, n representa o número de elementos do conjunto maior dado que coincide com o número de elementos dos agrupamentos que se deseja realizar a contagem.

- Combinação

Problemas do tipo combinação são caracterizados pela escolha de elementos de um conjunto que, diferentemente dos arranjos, a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas. Como invariantes deste tipo de problema, temos: (1) tendo n elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos., p elementos, com $0 < p < n$, p e n naturais; (2) a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Exemplo 4: Márcia tem em casa quatro tipos de frutas e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas, de modo que as três frutas sejam distintas?

Convertendo os dados do enunciado em símbolos e identificando as frutas por A, B, C e D, vejamos, no quadro 4, algumas possibilidades de solução de referido exemplo.

Quadro 4 - Resolução de problema do tipo combinação a partir de várias representações

(continua)

Listagem

ABC, ~~ACB~~, ~~BAC~~, ~~BCA~~, ~~CAB~~, ~~CBA~~

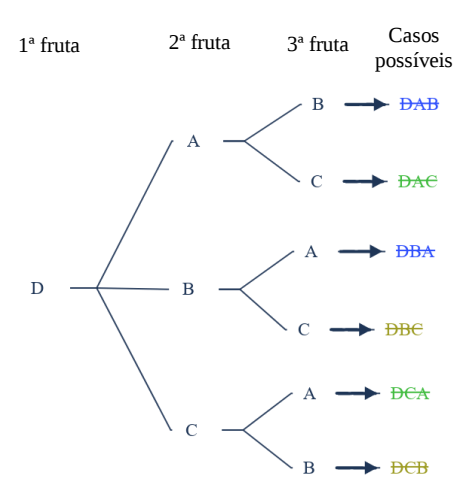
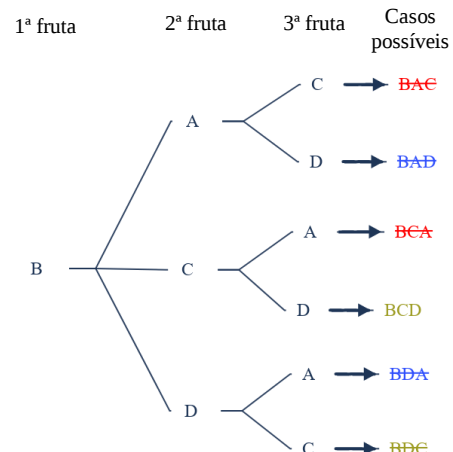
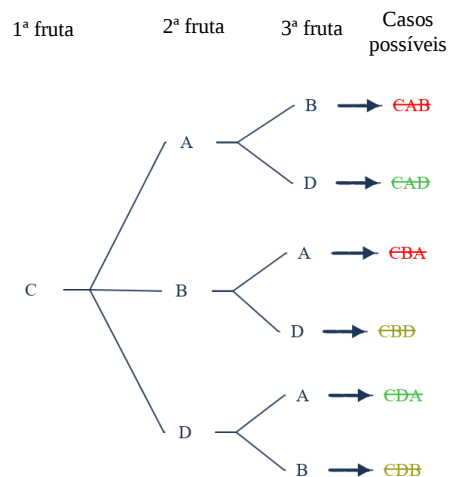
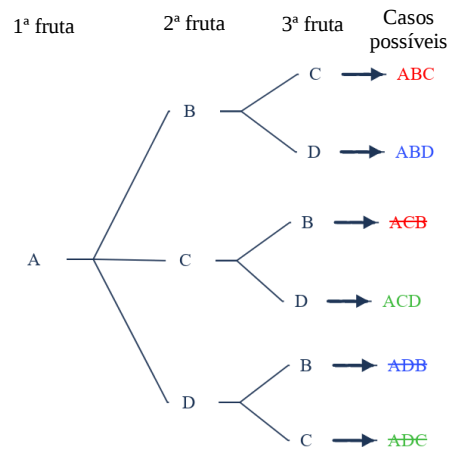
ABD, ~~ADB~~, ~~BAD~~, ~~BDA~~, ~~DAB~~, ~~DBA~~

ACD, ~~ADC~~, ~~CAD~~, ~~CDA~~, ~~DAC~~, ~~DCA~~

BCD, ~~BDC~~, ~~CBD~~, ~~CDB~~, ~~DBC~~, ~~DCB~~

(conclusão)

Árvore de possibilidades



Generalização de possibilidades a partir de uma expressão numérica: $24 \div 6 = 4$

Expressão numérica a partir do PFC: $4 \times 3 \times 2 = 24 \div 6 = 4$

Uso da fórmula: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \times 3!}{3!} = 4$

Fonte: elaborado pelo autor.

Na resolução por listagem sistemática, são enumeradas todas as possibilidades iniciando por A e formando as possíveis saladas com B, C e D dois a dois (ABC, ABD, ACB, ADB, ACD e ADC), em seguida por B e formando as possíveis saladas com A, C e D dois a dois, em seguida por C e formando as possíveis saladas com A, B e D dois a dois e, por fim, por D e formando as possíveis saladas com A, B e C dois a dois. Entretanto, nessa contagem, há várias saladas repetidas, uma vez que a mudança de ordem dos elementos no agrupamento não gera uma nova possibilidade. Observe, por exemplo, que a salada ABC é a mesma que ACB, BAC,

BCA, CAB e CBA. É necessário, portanto, excluir os casos repetidos. Essa sistematização garante que sejam contabilizadas todas as possibilidades. Na árvore de possibilidades, também ocorre uma enumeração sistemática a partir das conexões do diagrama que facilitam perceber como se dá a contagem das possibilidades. A generalização de possibilidades é derivada da listagem e da árvore de possibilidades, contabilizando os casos possíveis. A partir do princípio fundamental da contagem, temos (i) escolha da primeira fruta, o que pode ser feito de 4 possibilidades; ii) escolha da segunda fruta, após a escolha da primeira fruta, o que pode ser feito de 3 possibilidades; iii) escolha da terceira fruta, após as escolhas da primeira fruta e da segunda fruta, o que pode ser feito de 2 possibilidades. Assim, obtemos $4 \times 3 \times 2 = 24$. Entretanto, nessa contagem, foram incluídos os casos repetidos, conforme abordados anteriormente. Dessa forma, como, para cada agrupamento de frutas, teremos 6 permutações, devemos dividir o total de possibilidades por 6. Assim, teremos $24 \div 6 = 4$ possibilidades de fazer uma salada de frutas com três frutas distintas a partir de 4 frutas distintas disponíveis. No uso da fórmula, n representa o número de elementos do conjunto maior dado e p representa o número de elementos dos agrupamentos que se deseja realizar a contagem.

A seguir, são abordadas situações de ensino e aprendizagem relacionadas aos conceitos apresentados nesta seção, enfatizando as dificuldades que os estudantes possuem ao estudar tais tópicos, os desafios que os professores enfrentam ao lecionar este conteúdo e que estratégias vêm se mostrando promissoras para uma melhor aprendizagem deste conteúdo matemático.

2.3 ANÁLISE COMBINATÓRIA: ESTUDOS ANTERIORES

Como nos propomos a desenvolver um recurso digital envolvendo análise combinatória, torna-se importante estudar as produções relacionadas à área, com intuito de entender as dificuldades no ensino e aprendizagem desse conteúdo, propostas de ensino e recursos que vêm sendo utilizados para auxiliar a aprendizagem dos estudantes. Dessa forma, de modo a contribuir com o desenvolvimento deste estudo, foi elaborado um protocolo de revisão sistemática a partir das seguintes questões norteadoras: Como ocorre o processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica? Há problemas de ensino e aprendizagem de análise combinatória na educação básica? Quais as principais dificuldades dos alunos e dos professores? Que estratégias didático-metodológicas (incluindo recursos) estão sendo utilizadas para melhorar a aprendizagem dos alunos?

Como nossas questões norteadoras estão relacionadas ao ensino e aprendizagem de análise combinatória, foram utilizados os seguintes termos em português e inglês para localização das publicações: Combinatória AND Ensino AND Aprendizagem; Combinatório AND Ensino AND Aprendizagem; *Combinatorics* AND *Teaching* AND *Learning*; *Combinatorial* AND *Teaching* AND *Learning*.

As bases de dados consultadas foram: Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), principais periódicos de Educação Matemática (Qualis A1 a B2), os anais dos dois grandes eventos nacionais da área (Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM; Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM), *Educational Resources Information Center* (ERIC) e *ScienceDirect*. Optamos por tais bases, pois possuem pesquisas com ênfase em educação e temas relacionados. As buscas foram realizadas no período de 18 de novembro 2022 a 16 de dezembro de 2022 e contemplaram trabalhos publicados entre 2017 e 2022.

O levantamento dos textos foi realizado de forma diferente conforme as características de cada base de dados e da quantidade de publicações encontrada. Nas bases de dados Portal de Periódicos da CAPES, BDTD e *ScienceDirect*, foi possível utilizar os termos citados de forma combinada a partir do conector AND, bem como refinar a busca a partir do título, assunto e resumo, o que proporcionou filtrar textos que se adequaram à busca. Devido à pouca quantidade de textos encontrada na base de dados ERIC e nos principais periódicos de Educação Matemática (Qualis A1 a B2), optou-se por utilizar os termos Combinatória, Combinatório, *Combinatorics* e *Combinatorial*. No que se refere aos anais do ENEM e SIPEM, como não era possível utilizar conectores para realização da busca, foi utilizada a função pesquisar no sumário dos anais a partir dos termos Combinatória, Combinatório, *Combinatorics* e *Combinatorial*.

Na etapa de levantamento dos principais periódicos em Educação Matemática (Qualis A1 a B2), foram consultados 25 periódicos que são apresentados no quadro 5.

Quadro 5 – Periódicos consultados

(continua)

ISSN	Título	Classificação
1980-4415	BOLEMA: BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ONLINE)	A1
1983-3156	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA (ONLINE)	A1
2014-3621	REDIMAT- REVISTA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS	A1
2238-0345	REVISTA INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (RIPEM)	A1
1665-2436	REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACION EN MATEMATICA EDUCATIVA	A1

		(conclusão)
ISSN	Título	Classificação
2007-6819	REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA (RELIME)	A1
2178-7727	ACTA SCIENTAE: REVISTA DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	A2
2317-5125	AMAZÔNIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS (ONLINE)	A2
2317-904X	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA	A2
2359-2842	PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ONLINE)	A2
2179-426X	REVISTA DE ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	A2
2176-4603	VIDYA (ONLINE)	A2
2176-1744	ZETETIKÉ	A2
2176-5634	JORNAL INTERNACIONAL DE ESTUDOS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A3
1981-1322	REVEMAT : REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A3
2238-5800	REVISTA PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A3
2176-2988	BOLETIM GEPEM (ONLINE)	A4
2358-4750	CAMINHOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA (ON-LINE)	A4
1980-3141	REMATEC. REVISTA DE MATEMÁTICA, ENSINO E CULTURA (UFRN)	A4
2238-2380	REVISTA DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	A4
2525-5444	REVISTA SERGIPANA DE MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	A4
2448-6469	ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMATICA EDUCATIVA	B1
2357-724X	BOLETIM ONLINE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	B1
2177-9309	EM TEIA - REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLÓGICA IBEROAMERICANA	B1
1518-8221	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA-RS	B2

Fonte: os autores.

Após o levantamento inicial dos textos em cada base de dados, foi realizado o primeiro refinamento a partir da leitura dos resumos. Os critérios de exclusão adotados nesse primeiro momento foram: 1) Data (no caso de estar fora do período de 2017 a 2022; 2) Duplicação; 3) Tipo de publicação (no caso de não ser tese, dissertação, artigo ou relato de experiência); 4) Trabalhos não disponíveis gratuitamente para download; 5) Área / Temática (no caso de não ter foco na Educação Matemática).

Após a seleção dos trabalhos, foi realizado o segundo refinamento a partir da leitura dos textos, com ênfase na introdução, metodologia, resultados e conclusões. Nesse momento, os trabalhos excluídos não explicitavam metodologias e/ ou recursos para o ensino de análise combinatória; não apresentavam discussões acerca das dificuldades dos estudante em aprender análise combinatória; não abordavam discussões sobre o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem em análise combinatória; descreviam uma proposta de ensino, mas não haviam feito nenhum tipo de intervenção; e outros tratavam de tópicos de análise combinatória diferentes dos abordados na educação básica.

No quadro 6, é apresentado de forma detalhada o levantamento dos textos realizado de acordo com cada base de dados.

Quadro 6 – Resultado do levantamento dos textos

Bases de dados	Total de textos levantados		Refinamento inicial		Refinamento final	
Portal de Periódicos da CAPES	106		43		18	
BDTD	Dissertações	Teses	Dissertações	Teses	Dissertações	Teses
	41	7	27	2	18	1
Periódicos (A1 a B2)	95		38		11	
Anais do ENEM e SIPEM	21		18		2	
ERIC	22		3		1	
ScienceDirect	79		7		2	
Total	371		138		53	

Fonte: elaborado pelo autor.

No total, foram levantados, inicialmente, 371 trabalhos que, após a utilização dos critérios de exclusão e inclusão, resultaram em 53 trabalhos selecionados. No quadro 7, os trabalhos foram organizados em áreas temáticas de acordo com o objetivo de cada pesquisa, a saber: propostas de ensino e/ou sequências didáticas, recursos para o ensino, formação de professores, estratégias de resolução de problemas, documentos curriculares e livros didáticos em que a análise combinatória estava presente.

Quadro 7 – Distribuição dos trabalhos por área temática

(continua)

Área temática	Textos	Total
Propostas de ensino e/ou sequências didáticas	(Ambrozi, 2017) (Antonides; Battista, 2022) (Assis; Pessoa, 2018) (Bastos, 2019) (Bastos; Lopes; Victor, 2020) (Batista, 2020) (Brito; Almeida, 2022) (Coelho; Dias, 2022) (Jacoby, 2019) (Lara, 2017) (Lockwood; Reed, 2020) (Nunes; Vidal, 2017) (Oliveira, 2017) (Oliveira, 2018) (Pereira, 2021) (Rostirola; Siple, 2020) (Santos, 2019) (Silva; Guerra, 2017) (Silveira; Andrare, 2020) (Silveira; Andrade, 2022a) (Silveira; Andrade, 2022b) (Soto; Siy; Harel, 2022) (Tolio; Bisognin, 2017) (Vidal, 2019)	24

(conclusão)		
Área temática	Textos	Total
Recursos para o ensino	(Aguiar, 2019) (Araújo; Santos, 2019) (Borba, 2017) (Carneiro, 2019) (Couto, 2019) (Gadelha; Borba; Montenegro, 2020) (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021) (Georgiev; Andreev, 2021) (Montenegro; Borba; Bittar, 2020) (Santos, 2018) (Silva, 2019) (Tavares; Bogutchi, 2019)	12
Formação de professores	(Ferreira; Almeida, 2022) (Martins, 2018) (Martins; Borba, 2022) (Semanišinová, 2021) (Silva <i>et al.</i> , 2019) (Teixeira, 2020)	6
Estratégias de resolução de problemas	(Estevam <i>et al.</i> , 2019) (Lima; Borba, 2018) (Lockwood; De Chenne, 2021) (Lopes; Alves, 2019) (Montenegro, 2018) (Salavatinejad; Alamolhodaei; Radmehr, 2021) (Souza; Castro; Barreto, 2020)	7
Documentos curriculares e livros didáticos em que a análise combinatória está presente	(Lima; Borba, 2019) (Lima, 2019) (Martins; Borba, 2021) (Teza, 2018)	4

Fonte: elaborado pelo autor.

De acordo com o quadro 7, podemos observar uma concentração maior de trabalhos nas áreas propostas de ensino e/ou sequências didáticas e recursos para o ensino. Esse fato vem acontecendo também em outras revisões realizadas (Campos; Iglioni, 2021). A partir do processo de aproximações e distanciamentos por agrupamentos semelhantes realizado durante a leitura dos textos, foram estabelecidas as categorias a seguir que de alguma maneira respondem aos questionamentos apresentados.

2.3.1 Obstáculos para aprendizagem de combinatória

São várias as situações relatadas pelos pesquisadores que dificultam a aprendizagem de análise combinatória na educação básica. Georgiev e Andreev (2021), Jacoby (2019), Silveira e Andrade (2020) e Teza (2018) destacam que a maneira de ensinar esse conteúdo vem contribuindo para uma aprendizagem baseada em fórmula-aplicação. Dessa forma, os

estudantes são condicionados a “adivinhar” a fórmula que será utilizada naquela situação combinatória a partir de parâmetros “treinados” pelos professores. Devido a isso, não há um enfoque na compreensão dos problemas combinatórios e, de certo modo, habitua o aluno a se preocupar em identificar os números do enunciado, substituir na fórmula e encontrar um número, desconsiderando a real interpretação do problema. Outros autores vão além e mencionam que, ao realizarem uma nova abordagem do conteúdo – com ênfase em reflexão e interpretação –, alguns estudantes questionavam ao docente se esse tipo de problema fazia parte da disciplina matemática (Batista, 2020; Martins, 2018; Pereira, 2021; Santos, 2019; Tolio; Bisognin, 2017). Ainda assim, muitos alunos consideram difícil aplicar a fórmula e entender os seus parâmetros (Coelho; Dias, 2022; Oliveira, 2017).

Como, em regra, há pouca discussão sobre os conceitos e definições relacionados à combinatória (Georgiev; Andreev, 2021), os estudantes não conseguem identificar os invariantes relacionados a uma determinada situação combinatória. Entre os invariantes relacionados às situações combinatórias, destaca-se como principal dificuldade dos alunos, o entendimento do invariante de ordem (Ambrozi, 2017; Borba, 2017; Coelho; Dias, 2022; Couto, 2019; Jacoby, 2019; Lima; Borba, 2018; Montenegro, 2018; Oliveira, 2017; Pereira, 2021; Rostirola; Siple, 2020). Essa não compreensão pode ser percebida quando o estudante repete os mesmos agrupamentos trocando apenas a ordem dos elementos, o que é mais comum no ensino fundamental (Borba, 2017; Lima; Borba, 2018; Montenegro, 2018; Rostirola; Siple, 2020) ou quando o estudante é acostumado a trabalhar com situações padronizadas, nas quais ele sabe de antemão qual tipo de agrupamento e, posteriormente, migra para situações combinatórias quaisquer (Carneiro, 2019; Jacoby, 2019).

As dificuldades destacadas em relação ao invariante de escolha e ao problema de não esgotamento de possibilidades são apresentadas em sua maioria na educação infantil e ensino fundamental (Borba, 2017; Lima; Borba, 2018; Pereira, 2021; Rostirola; Siple, 2020; Silva, 2019). Diante disso, o pouco repertório de representações simbólicas é identificado como um dos fatores que contribuem para a referida problemática (Carneiro, 2019; Coelho; Dias, 2022; Lima; Borba, 2018; Souza; Castro; Barreto, 2020), uma vez que é dada ênfase às representações de linguagem natural e fórmula, e pouca representação de enumeração sistemática é utilizada. A junção desses fatores contribui para que os alunos não consigam interpretar os problemas combinatórios corretamente (Carneiro, 2019; Coelho; Dias, 2022; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Lima; Borba, 2018; Lopes; Alves, 2019; Martins; Borba, 2022; Oliveira, 2017; Rostirola; Siple, 2020). Vários estudantes não conseguem entender o que

o problema solicita, converter o problema de linguagem natural para outro tipo de representação para auxiliar na compreensão, mesmo sabendo realizar cálculos numéricos. Dessa forma, o cálculo relacional é pouco presente quando se fala em ensino e aprendizagem de análise combinatória (Pereira, 2021; Souza; Castro; Barreto, 2020).

Várias pesquisas vêm apontando os problemas do tipo de combinação como o que os alunos têm maior dificuldade (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Lima; Borba, 2019; Montenegro, 2018). Entretanto, de modo geral, há problemas de aprendizagem nos diversos tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, permutação e combinação), principalmente, quando as situações-problema exigem várias etapas para sua solução (Coelho; Dias, 2022; Rostirola; Siple, 2020). Assim, apesar da análise combinatória possuir como pré-requisitos as operações fundamentais, é considerada por muitos estudantes o assunto mais difícil para aprender na educação básica (Lopes; Alves, 2019; Oliveira, 2018; Souza; Castro; Barreto, 2020). A situação se agrava com o fato de poucos conhecimentos prévios de combinatória serem identificados nos estudantes, o que é um indicativo de que o assunto não é abordado nos anos anteriores (Carneiro, 2019; Montenegro, 2018). Além disso, a imagem que os estudantes possuem sobre o ensino de matemática ao considerá-la uma disciplina difícil, com altas taxas de reprovação e pouco relacionamento com o cotidiano influenciam para esse quadro (Santos, 2018).

Não só os estudantes apresentam dificuldades relacionadas à temática de análise combinatória. Apesar de poucas pesquisas evidenciarem a situação docente e a análise combinatória, conforme Quadro 3, algumas investigações se debruçaram nessa temática. Autores como Assis e Pessoa (2018) e Nunes e Vidal (2017) salientam que os professores possuem um baixo repertório metodológico quando se trata de ensinar análise combinatória. Na educação infantil e ensino fundamental, essa situação faz com que os professores não consigam criar condições facilitadoras que promovam a aprendizagem. Já no ensino médio, o que se vê é um ensino baseado puramente por meio de fórmulas e algoritmos. Tal perspectiva contribui para que docentes estimulem uma aprendizagem baseada em exercícios padronizados que promovem a aplicação de fórmulas conforme os dados do problema, reduzindo, consideravelmente, as oportunidades de refletir sobre o problema. Dessa forma, é comum ver soluções de problemas baseadas em algoritmos e fórmulas terem um valor superior a outras formas de solução (Ferreira; Almeida, 2022; Teixeira, 2020).

Além do fator metodológico, vários professores possuem pouco conhecimento específico de análise combinatória (Martins, 2018; Martins; Borba, 2022; Silva *et al.*, 2019).

Muitos não tiveram acesso ao estudo de análise combinatória em sua formação (Assis; Pessoa, 2018; Bastos, 2019; Martins, 2018) e outros, mesmo com formação, não conseguiram aprender os conceitos de modo satisfatório (Coelho; Dias, 2022; Martins, 2018; Semanišínová, 2021). A ausência ou má formação em relação à aprendizagem de análise combinatória, bem como o baixo repertório metodológico geram insegurança no docente e faz com que muitos não abordem o conteúdo em sala de aula ou, os que tentam abordá-lo, não conseguem promover uma aprendizagem satisfatória (Martins, 2018).

As principais fragilidades dos professores referentes ao saber específico de análise combinatória estão relacionadas ao conhecimento de definições, propriedades e seus fundamentos, bem como à capacidade de interpretar uma expressão combinatória de diferentes maneiras e de ver e aplicar a mesma expressão combinatória em diferentes contextos (Semanišínová, 2021; Silva *et al.*, 2019). No aspecto metodológico, Martins (2018) destaca a má interpretação da metodologia de resolução de problemas, ao perceber professores aplicando exercícios de fixação e afirmarem que aplicam a referida metodologia. Como forma de sanar tais lacunas em seu processo formativo, os professores alegam que há poucos recursos e materiais relacionados à análise combinatória, realizando críticas ao material didático disponível ao professor (Assis; Pessoa, 2018). Priorizam a preparação das aulas a partir dos livros didáticos e consultas à internet, ignorando, por exemplo, uma formação continuada (Martins, 2018). Em relação aos livros didáticos, há críticas no que se refere à baixa quantidade de situações combinatórias e representações simbólicas apresentadas, bem como em relação à falta de uniformização da quantidade de situações problemas para cada conceito nas etapas do ensino fundamental (Martins; Borba, 2021). Assim, os aspectos discutidos até então fazem com que os professores considerem o conteúdo de análise combinatória como o mais difícil para ensinar e para aprender (Oliveira, 2018; Martins, 2018).

2.3.3 Estratégias e recursos de ensino em análise combinatória

Considerando a problemática envolvida com o ensino e aprendizagem de análise combinatória abordada anteriormente, várias pesquisas vêm sendo desenvolvidas com a intenção de propor situações de ensino que possam contribuir para que tanto o ensino como a aprendizagem desse conteúdo sejam facilitados. Tais situações perpassam os diversos tipos de metodologia empregados pelos pesquisadores. Uma característica marcante em vários trabalhos é a ação docente de questionar os estudantes seja no processo de resolução de problemas ou mediando algum experimento a partir de algum recurso pedagógico (Antonides; Battista, 2022;

Gadelha; Borba; Montenegro, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019); Lockwood; De Chenne, 2021; Nunes; Vidal, 2017; Pereira, 2021; Rostirola; Siple, 2020; Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2020; Soto; Siy; Harel, 2022; Tavares; Bogutchi, 2019; Tolio; Bisognin, 2017). Esses questionamentos devem ser realizados com intuito de criar processos, insights e estratégias próprias que estimulem a criatividade e autonomia dos alunos (Santos, 2019), para que favoreçam a reflexão sobre o que se está fazendo, de modo que seja criado um ambiente de diálogo e cooperação entre os estudantes e o professor (Antonides; Battista, 2022; Rostirola; Siple, 2020; Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2020, Tavares; Bogutchi, 2019). Dessa forma, quando os estudantes realizarem perguntas sobre o conteúdo, é importante que os docentes evitem fornecer as respostas e utilizem as dúvidas para realizar novas perguntas (questões investigativas) que mantenham o caráter investigativo do problema e influenciem o modo de pensar do estudante em relação ao problema (melhor caminho a seguir), contribuindo para uma crença em seus potenciais (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Silveira; Andrade, 2020; Tavares; Bogutchi, 2019; Tolio; Bisognin, 2017).

Alguns pesquisadores ressaltam que os questionamentos não devem ficar restritos às dúvidas dos estudantes. Desse modo, é interessante que os professores façam questionamentos a partir do momento em que o estudante cometa algum erro, com intuito de refutar ou validar alguma estratégia, ou como mecanismo para manter os estudantes concentrados durante o período de ensino (Jacoby, 2019; Soto; Siy; Harel, 2022). Além disso, foi destacado como os questionamentos / problematizações podem contribuir para compreender invariantes, organizar e sintetizar as ideias e, por conseguinte, delimitar as estratégias de resolução para os diferentes tipos de problemas combinatórios (Gadelha; Borba; Montenegro, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Rostirola; Siple, 2020; Santos, 2019; Tolio; Bisognin, 2017). Entretanto, Santos (2019) assinala a necessidade dessas problematizações serem planejadas com intuito de ter consciência das possíveis interpretações dos problemas e estratégias de solução, de modo que permita, por exemplo, que o professor realize diferentes reformulações dos problemas para que os estudantes compreendam os conceitos combinatórios envolvidos.

Para que as ações de questionar / problematizar façam sentido, o ambiente proporcionado pelos professores precisa valorizar a criatividade e a autonomia dos estudantes, no sentido de que esses possam expor suas dificuldades, incompreensões e formas de pensar (Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2020; Silveira; Andrade, 2022a). Por outro lado, os docentes precisam mostrar-se abertos a essas situações, saber ouvir sem intimidação e, ainda mais, consigam interpretar as diversas manifestações e, com isso, potencializar a aprendizagem dos

estudantes (Coelho; Dias, 2022; Silveira; Andrade, 2020). É essa relação professor-aluno que irá proporcionar ao docente identificar os melhores momentos de problematizar situações em prol de potencializar a compreensão de algum conceito (Santos, 2019; Teixeira, 2020). Essa postura docente deve perpassar, inclusive, a liberdade do estudante de selecionar e testar diversas estratégias de solução, o que faz desenvolver gradualmente as habilidades referentes a esse processo (Nunes; Vidal, 2017; Rostirola; Siple, 2020; Teixeira, 2020).

O trabalho em grupo, nessa perspectiva, foi bastante discutido pelos pesquisadores como potencializador da compreensão dos conceitos combinatórios mediante as intervenções dos docentes (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Nunes; Vidal, 2017; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2022a; Silveira; Andrade, 2022b; Tavares; Bogutchi, 2019). O diálogo entre os integrantes do mesmo grupo e dos grupos distintos, seja durante a resolução dos problemas mediada pelos questionamentos dos professores ou no momento de expor as soluções encontradas para os demais grupos, possibilitou a evolução na capacidade de socialização, a superação de dificuldades, a compreensão dos invariantes relacionados a várias situações combinatórias e, inclusive, a compreensão de novos conceitos (Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Jacoby, 2019; Nunes; Vidal, 2017; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2022a; Silveira; Andrade, 2022b; Tavares; Bogutchi, 2019).

Aliada à habilidade de dialogar com o estudante, a escolha dos problemas iniciais para abordar análise combinatória é tida como relevante pelos pesquisadores (Antonides; Battista, 2022; Bastos; Lopes; Victor, 2020; Nunes; Vidal, 2017; Santos, 2019; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2020). Os problemas iniciais precisam ser bem planejados, uma vez que é a partir deles que o professor irá incentivar os estudantes a explorarem outros problemas com características diferentes de acordo com os invariantes combinatórios que se deseja evidenciar (Santos, 2019; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2020). São esses problemas iniciais e a exploração de problemas derivados destes que irão proporcionar, por exemplo, uma compreensão satisfatória do princípio fundamental da contagem e dos demais tipos de agrupamentos (Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2022a). Bastos, Lopes e Victor. (2020), Salavatinejad, Alamolhodaei e Radmehr (2021) e Silveira e Andrade (2020) complementam ao recomendar que os problemas iniciais possuam uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos. É importante, também, que tais problemas contemplem diversas situações combinatórias, pois permitem a discussão dos invariantes, no momento das transformações de conversão e de tratamento de cada registro (Montenegro, 2018).

A formulação de problemas por parte dos alunos é citada por algumas pesquisas como potencial para desenvolver o raciocínio combinatório (Salavatinejad; Alamolhodaei; Radmehr, 2021; Silveira; Andrade, 2022b). Tal perspectiva favorece a aproximação da matemática com o contexto real dos estudantes, uma vez que, observa-se que geralmente os problemas gerados se relacionam diretamente com as suas vivências. Assim, a matemática passa a fazer sentido, uma vez que não apenas a solução do problema deve ser levada em consideração, mas também as interpretações que explicam os interesses e funcionamento da sociedade (Bastos; Lopes; Victor, 2020; Santos, 2019; Silveira; Andrade, 2022b). Essa relação próxima dos problemas combinatórios à vida dos estudantes estimula uma aprendizagem significativa, pois os conhecimentos prévios são facilmente relacionados ao problema (Jacoby, 2019).

Nesse processo de exploração de problemas, as representações simbólicas tornam-se instrumentos eficazes para o ensino e aprendizagem de análise combinatória. Por exemplo, vários estudos destacam o uso de árvore de possibilidades, desenhos, tabela ou lista organizada como representações que facilitam a compreensão dos invariantes combinatórios (Batista, 2020; Lara, 2017; Martins; Borba, 2022; Montenegro, 2018; Semanišinová, 2021; Silveira; Andrade, 2020). Borba (2017), Montenegro (2018) e Silva (2019) complementam que tais representações quando usadas como registros auxiliares de transição contribuem para que os estudantes interpretem corretamente o problema e definam a melhor operação para solucioná-lo. A representação intermediária de árvore de possibilidades é a que mais possibilita transição de linguagem materna para registro numérico com maior taxa de sucesso, principalmente quando os problemas possuem uma maior quantidade de possibilidades (Montenegro, 2018; Montenegro; Borba; Bittar, 2020). Outra faceta das representações, é a oportunidade que os professores têm de perceberem de forma explícita os erros dos estudantes e o real nível da sofisticação do raciocínio, seja a partir de soluções erradas ou certas. Dessa forma, o docente pode realizar intervenções mais assertivas de modo que haja a compreensão satisfatória dos conceitos envolvidos (Borba, 2017).

Uma alternativa promissora para perceber de forma explícita os invariantes combinatórios é o trabalho com material concreto, principalmente quando se trata do público infantil (Araújo; Santos, 2019; Lara, 2017; Rostirola; Siple, 2020; Silva, 2019). Esses materiais permitem visualizar mais facilmente as representações dos elementos contidos nos enunciados dos problemas, visualizar e movimentar as figuras que, dessa forma, auxiliam no desenvolvimento da compreensão dos conceitos combinatórios (Lara, 2017; Rostirola; Siple, 2020; Silva, 2019). Alguns pesquisadores destacam, entretanto, que o simples uso desses

materiais não é garantia de resultados satisfatórios. É importante a mediação do professor para que tais recursos sejam potencializados e possam contribuir no ensino e aprendizagem de análise combinatória (Araújo; Santos, 2019).

Outras metodologias também são trabalhadas com análise combinatória, mas em menor número. São os casos, por exemplo, da história da matemática (Bastos; Lopes; Victor, 2020) e modelagem matemática (Bastos, 2019; Batista, 2020). Em relação à história da matemática, destaca-se o papel motivacional em proporcionar ao estudante um maior interesse e inspiração, além de demonstrar o papel da matemática na sociedade, o que traz uma abordagem rica em significados (Bastos; Lopes; Victor, 2020). Já a modelagem matemática estimula a abordagem de análise combinatória a partir dos contextos vivenciados pelos estudantes, materializando-se, nesse caso, a partir das situações-problema. Assim, não só o conteúdo matemático é referenciado, mas também os fenômenos diários relacionados às atividades extraescolares (Bastos, 2019). Outro aspecto é referente à liberdade dos estudantes em escolher temas de seu interesse, bem como o ambiente de investigação que é gerado por essa abordagem de ensino (Batista, 2020).

Algumas estratégias de resolução de problemas são mencionadas nas pesquisas como bem-sucedidas para a aprendizagem dos alunos. Montenegro (2018) cita, por exemplo, a utilização de riscos nas possibilidades repetidas, o que permite ao estudante perceber que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades nos problemas de combinação. Soto, Siy e Harel (2022) destacam a representação física utilizada pelo professor para discutir as características da situação combinatória. Segundo os autores, tal estratégia permitiu que os estudantes exteriorizassem os conceitos envolvidos no problema e, dessa forma, pode intervir da melhor maneira junto aos estudantes. Assim, o professor pode gerar necessidades cognitivas nos estudantes, no sentido de mostrar que sem o domínio de conceitos combinatórios, determinada contagem seria impossível ou mal interpretada. Salavatinejad, Alamolhodaie e Radmehr (2021) desenvolveram um modelo que traz estratégias que são utilizadas para solucionar problemas combinatórios, a saber: usar outros problemas ou subproblemas relevantes, ter uma melhor compreensão da tarefa dada por meio de exemplos simples e representações visuais, e identificar relações entre conceitos combinatórios, fazer generalizações a partir de exemplos concretos. Lockwood e De Chenne (2021) argumentam que o uso de programação pode contribuir para codificação de problemas combinatórios.

Semanišinová (2021) enfatiza a necessidade de o professor aperfeiçoar sua capacidade de feedback relevante ao aluno. Para esse autor, o professor precisa entender porque os

estudantes não conseguem resolver determinado problema, saber escolher a representação ou método de solução adequado para a solução do problema, e identificar os conceitos e propriedades que estão interligados com a solução apresentada. Lockwood e Reed (2020) salientam que um caminho promissor é identificar formas abrangentes de pensar ou perspectivas que possam ajudar os alunos em várias situações de contagem. Os autores destacam o pensamento por equivalência, isto é, perceber aproximações entre problemas que se sabe e não se sabe resolver e, a partir daí, criar relações para solucionar novos problemas. Além disso, sugerem que esse modo de pensar contribui para o entendimento das fórmulas e o aumento da capacidade de solucionar diversos tipos de situações-problema de análise combinatória.

Algumas pesquisas analisaram a aplicação de algumas ferramentas durante o ensino de análise combinatória (Ambrozi, 2017; Montenegro; Borba; Bittar, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021; Santos, 2018; Tavares; Bogutchi, 2019; Vidal, 2019). O trabalho com jogos (digitais ou não) facilitou o entendimento e a compreensão do tema, tornando as aulas mais participativas, atraentes, produtivas, interessantes, dinâmicas e significativas para os alunos (Ambrozi, 2017; Santos, 2018; Tavares; Bogutchi, 2019; Tolio; Bisognin, 2017), bem como auxiliou na concentração e construção de estratégias (Ambrozi, 2017; Santos, 2018). O trabalho com o software Pixton foi relatado como uma alternativa interessante para ilustrações de possibilidades combinatórias, contribuindo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório (Gadelha; Borba; Montenegro, 2020; Gadelha; Borba; Montenegro, 2021). O trabalho com criptografia foi abordado como atrativo e presente no contexto atual, o que chamou a atenção dos alunos e despertou-lhes a curiosidade (Vidal, 2019). Aguiar (2019) e Brito e Almeida (2022) trabalharam com técnicas de gamificação e destacaram o seu aspecto motivacional para aprendizagem.

A metodologia de resolução de problemas, sob a ótica de diversos teóricos, foi abordada na maioria das pesquisas. Alguns resultados são destacados: aumento no índice de respostas corretas, a consistência e coerência dos argumentos e a variedade de estratégias de resolução percebida (Bastos; Lopes; Victor, 2020; Lara, 2017; Nunes; Vidal, 2017; Santos, 2019; Silva; Guerra, 2017; Silveira; Andrade, 2020); perspectiva ativa, exploradora, propositiva de problemas e menor dependência do estudante em relação aos auxílios docentes (Silveira; Andrade, 2020; Silveira; Andrade, 2022b); valorização do processo de resolução e não apenas do resultado (Estevam *et al.*, 2019); influência positiva na visão didática de futuros professores (Nunes; Vidal, 2017); visualização de diferentes registros/representações de um mesmo objeto

matemático (Lara, 2017); acompanhamento do crescimento cognitivo do discente (Silveira; Andrade, 2022a).

A partir da presente revisão de trabalhos, fica clara a problemática envolvendo o ensino e aprendizagem de análise combinatória. As principais dificuldades apresentadas pelos estudantes estão relacionadas à dificuldade de interpretação dos problemas com ênfase na incompreensão dos invariantes combinatórios e baixo repertório de representações simbólicas, tendo como origem um ensino pautado majoritariamente por aplicação de fórmulas em situações padronizadas.

Já em relação às dificuldades dos docentes, as pesquisas indicam um baixo repertório metodológico ao ensinar análise combinatória e pouco conhecimento específico do conteúdo. Tais lacunas têm origem na formação docente deficiente que nem sempre o tópico de combinatória foi abordado, bem como no material didático disponibilizado, este com pouca diversidade de situações combinatórias, invariantes e representações simbólicas.

Podemos perceber, portanto, um ciclo que vem se repetindo: professores com lacunas no seu processo de formação em combinatória optando por não ensinar o referido conteúdo ou, quando realizado, priorizam um ensino com pouca reflexão e com ênfase em fórmula-aplicação, com situações combinatórias padronizadas (baixa diversidade) e, conseqüentemente, poucos invariantes e representações simbólicas discutidos.

Conforme quadro 7, foi possível observar uma quantidade significativa de pesquisas que propuseram propostas e recursos de ensino. Percebe-se, desse modo, que os pesquisadores vêm buscando meios para que os professores aumentem o seu repertório metodológico para lecionar o conteúdo de análise combinatória de modo que ocorra uma melhor apreensão dos conceitos por parte dos estudantes. Nesse processo, as pesquisas destacaram o questionamento orientado realizado pelos professores como mecanismo que favorece o desenvolvimento dos estudantes ao lidar com problemas combinatórios. Abordagens e/ ou recursos de ensino – resolução de problemas, gamificação, história e modelagem matemática, jogos, softwares, material concreto – que deem autonomia aos alunos também são evidenciados, pois permitem que os estudantes exponham suas formas de pensar, permitindo intervenções mais assertivas por parte dos professores.

Mesmo com vários trabalhos apresentando resultados positivos, nota-se que os estudantes continuam com baixa aprendizagem em análise em combinatória. Outro fato observado é que algumas propostas são interessantes, mas que no contexto real do professor possa ser difícil de implementar, seja devido à falta de recursos ou tempo necessário para

realização da proposta. Em vários trabalhos que abordaram jogos e a metodologia de gamificação, houve destaque para o aspecto motivacional dos estudantes, entretanto, não houve discussão sobre a aprendizagem dos conceitos envolvidos. Dessa forma, abre-se oportunidade para novas pesquisas que favoreçam tanto a aprendizagem dos estudantes, bem como o entusiasmo docente em envolver-se com análise combinatória.

A partir do exposto, os resultados encontrados contribuem eminentemente para o desenvolvimento deste estudo, uma vez que permitem que o pesquisador se aproxime de forma detalhada dos contextos reais envolvendo o ensino e aprendizagem de análise combinatória. Tal fato é imprescindível para que seja possível propor possíveis caminhos que busquem estreitar a relação ensino-aprendizagem em combinatória, como veremos durante este trabalho.

3 OBJETOS DE APRENDIZAGEM E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Este capítulo apresenta o conceito e a tipologia sobre objetos de aprendizagem, traz uma revisão sistemática de literatura, discutindo como estão sendo desenvolvidos e aplicados objetos digitais de aprendizagem no ensino de matemática, aborda diretrizes técnicas e pedagógicas presentes na literatura que auxiliam no processo de desenvolvimento e avaliação de OAs e descreve a metodologia de desenvolvimento de OA adotada neste trabalho.

3.1 OBJETOS DE APRENDIZAGEM: CONCEITO E TIPOLOGIA

A partir do crescimento, disponibilização e acesso das tecnologias, os recursos digitais passaram a estar envolvidos na atividade humana nas mais diversas dimensões. Apesar do movimento ter partido do ambiente empresarial, a partir das atividades econômicas, paulatinamente, outros ambientes, como o educacional, passaram a acomodar tais recursos. Em um primeiro momento, mais relacionado aos aspectos de hardware e gerenciamento, tais como data show, computadores, softwares de gerenciamento, etc., e, mais recentemente, recursos que interferem na forma de conduzir a aula, no planejamento docente, na forma de ensinar dos professores e na forma de aprender dos estudantes.

Nesse ponto, os objetos de aprendizagem surgem como tecnologias que possuem características que podem influenciar de forma positiva os processos de ensino e aprendizagem, pois “permitem que um número infinito de pessoas possa acessá-los e usá-los simultaneamente, OAs mais simples podem ser arranjados para formarem um novo objeto mais complexo, a ser aplicado em um contexto diferente” (Aguiar; Flores, 2014, p. 14). Além disso, permitem que o aluno faça diversas tentativas com objetivo de criar hipóteses e estratégias sobre alguma temática, obtendo feedback em tempo real, além da mediação do professor (Aguiar; Flores, 2014). Haughey e Muirhead (2005, p. 02) argumentam que os objetos de aprendizagem são projetados para auxiliar os professores nos seguintes aspectos:

Introduzir novos tópicos e habilidades; fornecer reforço às habilidades existentes; ampliar a aprendizagem fornecendo novos meios para apresentar material curricular; ilustrar conceitos que são menos facilmente explicados através de métodos tradicionais de ensino; apoiar novos tipos de oportunidades de aprendizagem não disponíveis em um ambiente de sala de aula; fornecer atividades de enriquecimento para estudantes habilidosos e altamente motivados.

Para Wiley (2000, p. 08), objeto de aprendizagem é “qualquer recurso digital que pode ser reutilizado para apoiar a aprendizagem”¹. Dessa forma, são considerados objetos de aprendizagem imagens, vídeos, pequenos textos, aplicativos, simulações, páginas da Web, animações, etc. O autor chama a atenção para os termos “reutilizável”, “digital”, “recurso” e “aprendizagem” como características essenciais de um OA. Outras características também são consideradas importantes, conforme foram abordadas por Mendes, Souza e Caregnato (2004, p. 16):

- Reusabilidade: reutilizável diversas vezes em diversos ambientes de aprendizagem. É a capacidade de o objeto ser compatível com uma quantidade alta de contextos, podendo ser aproveitado para diversas implementações;
- Adaptabilidade: adaptável a qualquer ambiente de ensino;
- Granularidade: é o grau de divisão dos conteúdos presentes no objeto de aprendizagem. Assim, quanto mais tipos de conteúdos o objeto de aprendizagem possuir, menor sua granularidade e menor será sua reusabilidade; quantos menos tipos de conteúdos o objeto de aprendizagem possuir, maior a granularidade e maior será sua reusabilidade;
- Acessibilidade: acessível facilmente via Internet para ser usado em diversos locais;
- Durabilidade: possibilidade de continuar a ser usado, independente da mudança de tecnologia;
- Interoperabilidade: habilidade de operar através de uma variedade de hardware, sistemas operacionais e browsers, com intercâmbio efetivo entre diferentes sistemas.
- Metadados (dados sobre dados): descrevem as propriedades de um objeto, como título, autor, data, assunto, etc. Os metadados facilitam a busca de um objeto em um repositório.

Tais características podem ser consideradas como vantagens que os objetos de aprendizagem possuem em relação a outros recursos educacionais. Além disso, podem ser critérios importantes para produção e seleção de objetos de aprendizagem por parte dos professores (Aguiar; Flôres, 2014). Para que os OAs mantenham suas características, seu desenvolvimento deve “levar em conta tanto aspectos inerentes a teorias de aprendizagem como combinar o conhecimento de áreas como ergonomia, engenharia de sistemas além de levar em conta as potencialidades e limitações da tecnologia envolvida” (Tarouco *et al.*, 2006, p. 02).

¹ Nesta pesquisa, adotamos a perspectiva conceitual de Wiley (2000) acerca de objetos de aprendizagem.

Dessa forma, é importante que haja um equilíbrio entre o desenvolvimento técnico e pedagógico do OA, sob o risco de termos recursos com alto padrão técnico de desenvolvimento, mas que não levam à aprendizagem ou recursos que são bem fundamentados em teorias de aprendizagem, mas que são pouco usáveis ou reusáveis por serem mal construídos.

Na dimensão pedagógica, algumas características são destacadas que podem fazer parte da concepção do OA, a saber:

Interatividade: indica se há suporte às consolidações e ações mentais, requerendo que o aluno interaja com o conteúdo do OA de alguma forma, podendo ver, escutar ou responder algo; **Autonomia:** indica se os objetos de aprendizagem apoiam a iniciativa e tomada de decisão; **Cooperação:** indica se há suporte para os alunos trocarem opiniões e trabalhar coletivamente sobre o conceito apresentado; **Cognição:** refere-se às sobrecargas cognitivas alocadas na memória do aluno durante o processo de ensino-aprendizagem; **Afetividade:** refere-se aos sentimentos e motivações do aluno com sua aprendizagem e durante a interação com o OA (Braga; Menezes, 2014, p. 33).

Wiley (2002, p. 15) considera que todos os objetos de aprendizagem possuem qualidades e que é a partir da “diferença no grau (ou maneira como) eles exibem essas qualidades que torna um tipo de objeto de aprendizagem diferente de outro”. A taxonomia possui 5 tipos de objetos de aprendizagem que são abordados abaixo.

- Fundamental: um recurso digital individual não combinado com qualquer outro. O objeto de aprendizagem fundamental é geralmente um auxílio visual (ou outro) que serve uma função de exposição ou de exemplo;
- Combinado-fechado: um objeto de aprendizagem combinado-fechado é composto por um pequeno conjunto de recursos digitais que não permitem serem extraídos para reutilização. Como exemplo de objeto deste tipo, temos o vídeo;
- Combinado-aberto: um objeto de aprendizagem combinado-aberto é composto por um grande número de recursos digitais que permitem ser extraídos para reutilização. Como exemplo de objeto deste tipo, temos uma página da Web;
- Apresentação generativa: um objeto de aprendizagem do tipo apresentação generativa possui uma lógica e estrutura para combinar ou gerar e combinar objetos de aprendizagem de nível inferior (tipos fundamentais e combinados fechados). Embora os objetos de aprendizagem de apresentação generativa tenham uma elevada reutilização intra-contextual (podem ser utilizados repetidamente em contextos semelhantes), têm

uma reutilização inter-contextual relativamente baixa (utilização em domínios diferentes daquele para o qual foram concebidos);

- Gerativo-instrucional: um objeto de aprendizagem do tipo generativo-instrucional possui lógica e estrutura para combinar objetos de aprendizagem (fundamentais, tipos combinados-fechados e gerativo-apresentação. O objeto de aprendizagem generativo-instrucional tem um elevado grau de reutilização intra-contextual e inter-contextual.

A seguir, apresentamos uma revisão sistemática de trabalhos que teve como principal objetivo analisar como estão sendo desenvolvidos e aplicados objetos digitais de aprendizagem no ensino de matemática.

3.2 OBJETOS DE APRENDIZAGEM NO ENSINO DE MATEMÁTICA: ESTUDOS ANTERIORES

Como nos propomos a desenvolver um objeto de aprendizagem envolvendo um conteúdo matemático (análise combinatória), torna-se importante investigar como estão sendo desenvolvidos e aplicados objetos digitais de aprendizagem para o ensino de matemática. Dessa forma, de modo a contribuir com o desenvolvimento deste estudo, foi elaborado um protocolo de revisão sistemática a partir das seguintes questões norteadoras: Como estão sendo desenvolvidos e aplicados objetos digitais de aprendizagem no ensino de matemática? Quais são os públicos-alvo usados nesses estudos? Que tipos de questões de pesquisa são investigados? Quais são os tipos de objetos digitais de aprendizagem utilizados? Quais as áreas da matemática envolvidas? Como foi o envolvimento do público-alvo no processo? Quais as implicações dos resultados na pesquisa e na prática? Os OAs são elaborados por meio de metodologias técnicas e pedagógicas?

Como nossas questões norteadoras estão relacionadas a objetos de aprendizagem no ensino de matemática, foram utilizados os seguintes termos em português e inglês para localização das publicações: “Objetos de aprendizagem” AND Matemática; “*Learning Objects*” AND *Mathematics*; “Objetos de aprendizagem” AND Matemática AND Desenvolvimento; “*Learning Objects*” AND *Mathematics* AND *Development*.

As bases de dados consultadas foram: Portal de Periódicos da CAPES, Biblioteca Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), *Educational Resources Information Center* (ERIC), *ScienceDirect*, *Web of Science* e o *Institute of Electrical and Electronic Engineers*

(IEEE Xplore). Optamos por tais bases, pois possuem pesquisas com ênfase em educação e tecnologia. As buscas foram realizadas no período de 13 a 29 de junho de 2023 e contemplaram trabalhos publicados entre 2017 e 2023.

Após o levantamento inicial dos textos em cada base de dados, foi realizado o primeiro refinamento a partir da leitura dos resumos. Os critérios de exclusão adotados nesse primeiro momento foram: 1) Data (no caso de estar fora do período de 2017 a 2023; 2) Duplicação; 3) Tipo de publicação (no caso de não ser tese, dissertação, artigo ou relato de experiência); 4) Trabalhos não disponíveis gratuitamente para download; 5) Área / Temática (no caso de não ter foco na Educação Matemática); 6) Não se tratar de desenvolvimento e aplicação de OA na educação básica.

Após a seleção dos trabalhos, foi realizado o segundo refinamento a partir da leitura dos textos, com ênfase na introdução, metodologia, resultados e conclusões. Nesse momento, os trabalhos excluídos distanciaram-se das questões norteadoras, trazendo ora desenvolvimentos de OA sem nenhum tipo de validação e aplicação com público alvo, ora apenas aplicação de OA na sala de aula.

No quadro 8, é apresentado de forma detalhada o levantamento dos textos realizado de acordo com cada base de dados.

Quadro 8 – Resultado do levantamento dos textos

Bases de dados	Total de textos levantados		Refinamento inicial		Refinamento final	
Portal de Periódicos da CAPES	202		30		5	
BDTD	Dissertações	Teses	Dissertações	Teses	Dissertações	Teses
	84	9	25	5	5	2
ERIC	21		2		1	
ScienceDirect	273		3		0	
Web of Science	42		6		0	
IEEE Xplore	27		9		2	
Total	658		80		15	

Fonte: elaborado pelo autor.

No total, foram levantados, inicialmente, 658 trabalhos que, após a utilização dos critérios de exclusão e inclusão, resultaram em 15 trabalhos selecionados. No quadro 9, os trabalhos foram organizados de acordo com o ano de publicação, autor, título e o tipo de pesquisa.

Quadro 9 – Distribuição dos trabalhos por ano, título e tipo de pesquisa

Ano	Autor	Título	Tipo
2023	(Silva <i>et al.</i> , 2023)	Utilização de e-book interativo em aulas de matemática em um curso técnico em eletroeletrônica integrado ao ensino médio	Artigo
2022	(Menezes, 2022)	E-numerando: desenvolvimento e aplicação de objetos de aprendizagem digital para o ensino de números naturais	Dissertação
2022	(Loss <i>et al.</i> , 2022)	Tecnologias digitais e interdisciplinaridade: articulações entre matemática e arte por meio da utilização de objetos de aprendizagem	Artigo
2021	(Santoso; Sarinastiti; Wulandari, 2021)	Animation of mathematics learning for vocational high school about geometry transformation using participatory design	Artigo
2020	(Zoppo <i>et al.</i> , 2020)	Interação e motivação: o ensino da matemática com um objeto de aprendizagem	Artigo
2019	(Soto; Valdivia; Baca, 2019)	Effect of using an educational software "pequemath móvil 5" on mobile devices in the learning process of the mathematical area in children of five years	Artigo
2019	(Mourão; Netto, 2019)	Inclusive model application using accessible learning objects to support the teaching of mathematics	Relato de experiência
2019	(Mota, 2019)	O uso de objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino médio	Dissertação
2019	(Lima, 2019)	Objeto de aprendizagem na forma de game como auxílio ao professor na promoção do ensino	Dissertação
2018	(Maulano, 2018)	Etnoinformática na educação: integração do objeto de aprendizagem n'samat na 2ª classe do ensino básico para aprendizagem de aritmética em moçambique.	Tese
2018	(Lima Junior, 2018)	GAMEALG – ferramenta de apoio ao ensino introdutório da álgebra	Dissertação
2018	(Puhl, 2018)	Números complexos: um objeto de aprendizagem para ensinar e aprender	Artigo
2018	(Pereira, 2018)	Um estudo sobre o ensino de geometria com o uso da farma	Dissertação
2018	(Caetano, 2018)	Uso do livro interativo multimídia na aprendizagem de matemática em uma escola primária: impacto no desempenho dos alunos da 7ª classe	Tese
2017	(Caio, 2017)	A construção do jogo kogoca na interface entre avaliação em larga escala e aprendizagem matemática	Dissertação

Fonte: elaborado pelo autor.

Após a análise das questões e objetivos de pesquisa apresentados nos trabalhos, conforme quadro 10, foi possível constatar que há uma predominância em investigar se o objeto de aprendizagem desenvolvido contribui para o processo de ensino e aprendizagem de um conceito matemático relacionado. A exceção foi o trabalho 1 que investigou as percepções dos alunos e do professor a respeito do OA desenvolvido. Apesar disso, conforme veremos no quadro 12, poucos trabalhos verificaram efetivamente se os OAs desenvolvidos proporcionaram a aprendizagem dos conceitos relacionados. Além disso, tais pesquisas não trouxeram uma fundamentação pedagógica durante o desenvolvimento do OA.

Quadro 10 – Questões ou objetivos de pesquisa dos textos levantados

(continua)

	Título	Questão / objetivo de pesquisa
1	Utilização de e-book interativo em aulas de matemática em um curso técnico em eletroeletrônica integrado ao ensino médio	Identificar as percepções dos alunos e da professora de matemática acerca do uso do e-book interativo.
2	E-numerando: desenvolvimento e aplicação de objetos de aprendizagem digital para o ensino de números naturais	Como elaborar um objeto digital de aprendizagem que contribua para a aprendizagem dos números junto aos alunos do 1º ano do ensino fundamental?
3	Tecnologias digitais e interdisciplinaridade: articulações entre matemática e arte por meio da utilização de objetos de aprendizagem	Como a interdisciplinaridade, mediante uso de OA, pode propiciar ao estudante momentos de investigação em ações relacionadas à aprendizagem de conteúdos afins de Matemática e Arte?
4	Animation of mathematics learning for vocational high school about geometry transformation using participatory design	Qual potencial da animação matemática para aprendizagem relativa ao tópico de transformações geométricas?
5	Interação e motivação: o ensino da matemática com um objeto de aprendizagem	Entender as potencialidades do uso do objeto de aprendizagem na sala de aula, como também identificar as possibilidades de aprendizagem do conteúdo de sistema de medidas de comprimento.
6	Effect of using an educational software "pequemath móvel 5" on mobile devices in the learning process of the mathematical area in children of five years	Qual potencial do software pequemath móvel 5 para aprendizagem matemática relativa ao estudo de aritmética e geometria.
7	Inclusive model application using accessible learning objects to support the teaching of mathematics	Qual potencial da ferramenta para aprendizagem matemática relativa aos conceitos de números naturais?
8	O uso de objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino médio	Quais as contribuições observadas, do uso de Objetos de Aprendizagem, especificamente voltados para as medidas de tendência central e de dispersão, para o ensino e aprendizagem de Estatística no Ensino Médio?
9	Objeto de aprendizagem na forma de game como auxílio ao professor na promoção do ensino	Que tipo de contribuição um game educacional pode disponibilizar aos professores de Matemática para que possa contribuir ao ensino dos alunos o conteúdo de funções afim e quadrática?
10	Etnoinformática na educação: integração do objeto de aprendizagem n'samat na 2ª classe do ensino básico para aprendizagem de aritmética em moçambique.	Que contribuição pode trazer o uso do objeto de aprendizagem N'SAMAT para auxiliar na melhoria do aproveitamento dos alunos da 2ª classe do ensino básico na disciplina de matemática em Moçambique?
11	GAMEALG – ferramenta de apoio ao ensino introdutório da álgebra	Desenvolver um software educativo para mediar o ensino de álgebra e a inclusão digital de crianças em escolas públicas, através do aplicativo GAMEALG.
12	Números complexos: um objeto de aprendizagem para ensinar e aprender	Qual potencial do objeto de aprendizagem matemática relativa ao conceito de números complexos?
13	Um estudo sobre o ensino de geometria com o uso da FARMA	Verificar se o uso da FARMA, através da interação com os Objetos de Aprendizagem, contribui para uma melhor compreensão de conceitos geométricos.

(conclusão)

	Título	Questão / objetivo de pesquisa
14	Uso do livro interativo multimídia na aprendizagem de matemática em uma escola primária: impacto no desempenho dos alunos da 7ª classe	Verificar se o uso dos livros interativos Multimídia melhora o desempenho dos alunos na aprendizagem de matemática.
15	A construção do jogo kogoca na interface entre avaliação em larga escala e aprendizagem matemática	Contribuir para o ensino de Matemática para além das avaliações externas, buscando o desenvolvimento do pensamento matemático teórico de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

Fonte: elaborado pelo autor.

No que se refere aos conceitos matemáticos relacionados aos OAs, os tipos de OAs desenvolvidos e os públicos-alvo, houve uma diversidade entre os elementos de cada categoria, conforme quadro 11. Nota-se uma prevalência de trabalhos no nível de ensino fundamental (11 trabalhos) e, como consequência, uma maior cobertura de conteúdos matemáticos desse nível de ensino. Em relação ao tipo de OA, houve uma maior quantidade do tipo jogo (5 trabalhos). É preciso destacar os poucos trabalhos relacionados ao nível médio (4 trabalhos), uma vez que é nesse nível de ensino que há um maior déficit de aprendizagem em matemática no Brasil. Apesar disso, ao ser considerado o universo de 658 trabalhos identificados a partir das bases de dados e apenas 15 pesquisas tratarem-se de desenvolvimento e aplicação de OAs, é possível afirmar que o campo de pesquisas em desenvolvimento e aplicação de OAs em matemática ainda é incipiente.

Quadro 11 – Trabalhos revisados por conteúdo, tipo de OA e público-alvo

(continua)

	Título	Conteúdo	Tipo de OA	Público-alvo
1	Utilização de e-book interativo em aulas de matemática em um curso técnico em eletroeletrônica integrado ao ensino médio	Função afim	Ebook interativo	Ensino médio
2	E-numerando: desenvolvimento e aplicação de objetos de aprendizagem digital para o ensino de números naturais	Números naturais	Multimídia	1º ano do ensino fundamental
3	Tecnologias digitais e interdisciplinaridade: articulações entre matemática e arte por meio da utilização de objetos de aprendizagem	Estudo de triângulos	Palavras cruzadas e quiz	8º ano do ensino fundamental
4	Animation of mathematics learning for vocational high school about geometry transformation using participatory design	Transformações geométricas	-	-
5	Interação e motivação: o ensino da matemática com um objeto de aprendizagem	Sistema de medidas	Jogo	5º ano do ensino fundamental
6	Effect of using an educational software "Pequemath Móvil 5" on mobile devices in the learning process of the mathematical area in children of five years	Números naturais	-	Ensino fundamental

(conclusão)				
	Título	Conteúdo	Tipo de OA	Público-alvo
7	Inclusive model application using accessible learning objects to support the teaching of mathematics	Números naturais	-	8º ano do ensino fundamental
8	O uso de objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino médio	Estatística	Ebook interativo	Ensino médio
9	Objeto de aprendizagem na forma de game como auxílio ao professor na promoção do ensino	Funções afim e quadrática	Jogo	Ensino médio
10	Etnoinformática na educação: integração do objeto de aprendizagem n'samat na 2ª classe do ensino básico para aprendizagem de aritmética em moçambique.	Números naturais	Jogo	Anos iniciais
11	GAMEALG – ferramenta de apoio ao ensino introdutório da álgebra	Incógnita / equação do 1º grau	Jogo	6º ano do ensino fundamental
12	Números complexos: um objeto de aprendizagem para ensinar e aprender	Números complexos	Applets do geogebra	3º ano do ensino médio
13	Um estudo sobre o ensino de geometria com o uso da FARMA	Geometria	-	9º ano do ensino fundamental
14	Uso do livro interativo multimídia na aprendizagem de matemática em uma escola primária: impacto no desempenho dos alunos da 7ª classe	-	Ebook interativo	Ensino fundamental
15	A construção do jogo KOGOCA na interface entre avaliação em larga escala e aprendizagem matemática	Ensino fundamental de matemática	Jogo	Anos iniciais ²

Fonte: elaborado pelo autor.

Por mais que as discussões acerca de como desenvolver e avaliar objetos de aprendizagem venham sendo realizadas há duas décadas, ainda não se refletiram na prática real de pesquisas acadêmicas que buscam construir OAs para o ensino e aprendizagem em matemática, como é possível observar no quadro 12. Em relação aos tipos de metodologias utilizados para o desenvolvimento do OA, pode-se observar que houve uma prevalência de uma abordagem técnica (7 trabalhos) em relação a uma abordagem pedagógica (3 trabalhos), apesar de termos ainda trabalhos que não fundamentaram a construção do OA (6 trabalhos). Isso corrobora com os estudos de Bennett, Lockyer e Agostinho (2004), Braga *et al.* (2012) e Silveira e Carneiro (2012), nos quais argumentaram que há uma ênfase nos aspectos técnicos durante o processo de desenvolvimento de OAs. A não utilização de metodologias técnicas e pedagógicas como auxílio na construção de um OA, aumenta o risco de ser desenvolvido uma ferramenta que se distancie do seu papel principal, que é promover a aprendizagem. Inclusive,

² Quando as informações não estavam presentes no texto de origem, foi inserido um hífen (-) no quadro.

pode haver pouca exploração do potencial dos recursos tecnológicos e muitos OAs serem apenas recursos analógicos trazidos para uma plataforma digital (Nascimento, 2007).

Quadro 12 –Trabalhos revisados por metodologia, forma de validação, verificação de aprendizagem e tipo de feedback

	Explicitou alguma metodologia?		Explicitou alguma forma de validação?			Verificou aprendizagem?	Tipo de feedback
	Técnica	Pedagógica	Alunos	Professores	Especialistas		
1	Não	Não	Sim	Sim	Não	Não	-
2	Não	Não	Não	Não	Não	Sim	-
3	Não	Não	Não	Não	Não	Não	C/E
4	Não	Não	Sim	Sim	Sim	Não	-
5	Sim	Não	Não	Não	Não	Não	C/E
6	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim	-
7	Sim	Não	Não	Sim	Sim	Sim	C/E
8	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim	Personalizado
9	Sim	Não	Não	Não	Não	Não	C/E
10	Não	Sim	Não	Não	Não	Sim	-
11	Sim	Não	Não	Não	Não	Sim	-
12	Não	Sim	Sim	Não	Não	Não	-
13	Não	Não	Não	Não	Não	Não	Personalizado
14	Não	Não	Não	Não	Não	Sim	-
15	Sim	Sim	Não	Não	Não	Não	Personalizado ³

Fonte: elaborado pelo autor.

Quanto ao aspecto de validação do OA desenvolvido, isto é, se o OA passou por algum tipo de avaliação prévia (por estudante, professores ou especialistas), observou-se que ainda não é uma prática comum dos pesquisadores nesse tipo de pesquisa, uma vez que apenas 3 trabalhos foram validados por alunos e professores, e apenas 2 trabalhos foram validados por especialistas. Sobre esse aspecto, autores como Braga e Kelly (2015a) destacaram a importância de uma equipe diversa de validação para que erros técnicos e pedagógicos possam ser sanados antes da prática real do OA com o público-alvo. Ainda sobre esse ponto, a baixa adesão dos pesquisadores em fundamentar seus trabalhos a partir de teorias técnicas e pedagógicas pode estar contribuindo para que não seja dada atenção ao processo de validação do OA.

Em relação ao processo de verificar se o OA desenvolvido contribui para o ensino e aprendizagem do conceito matemático relacionado, ainda de acordo com o quadro 12, 7

³ Quando as informações não estavam presentes no texto de origem, foi inserido um hífen (-) no quadro. C/E significa que o feedback informado era do tipo certo ou errado. Personalizado significa que o feedback ia além do certo ou errado e auxiliava no porquê do erro e como superá-lo.

trabalhos apresentaram dados nessa perspectiva. Ou seja, nota-se que mais da metade dos trabalhos não realizaram algum tipo de verificação de aprendizagem a partir do uso do OA desenvolvido. Algo nesse sentido foi discutido por Braga *et al.*, (2012), argumentando que não dá para saber se os OAs promovem aprendizagem efetiva, uma vez que não vêm sendo realizadas avaliações de aprendizagem. Quando se trata de auxílios aos usuários quando erram, o mais comum ainda é o feedback que informa se o item está correto ou errado, não informando o porquê do erro e como superá-lo. A falta de uma abordagem pedagógica definida pode estar contribuindo para que os auxílios aos usuários se limitem às questões técnicas da ferramenta ou a informar ao usuário se o problema está certo ou errado. Conforme Leite *et al.* (2009, p. 08), é importante que os auxílios estejam relacionados aos invariantes dos conceitos envolvidos, “permitindo aos usuários um suporte para a aprendizagem/aquisição do conceito, uma vez que o propósito seria oportunidade de nova reflexão sobre a situação”.

A participação dos estudantes nas pesquisas se deu de forma variada, conforme quadro 13. Em algumas pesquisas, a sua participação foi opinando sobre a usabilidade da ferramenta, em outras se deu de forma qualitativa, sendo observado pelo pesquisador em termos de comportamento ao interagir com a ferramenta e, em outros casos, participando de avaliações para verificar se houve uma melhor aprendizagem do conteúdo.

Quadro 13 – Tipos de participações dos públicos-alvo nas pesquisas levantadas

(continua)

	Título	Tipo de participação do público-alvo na pesquisa
1	Utilização de e-book interativo em aulas de matemática em um curso técnico em eletroeletrônica integrado ao ensino médio	Professora e estudantes participaram de uma aula remota com o uso do e-book interativo; em seguida, responderam um formulário online com questões abertas e fechadas para que a professora e estudantes retratassem a experiência interagindo com o e-book.
2	E-numerando: desenvolvimento e aplicação de objetos de aprendizagem digital para o ensino de números naturais	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; realizaram pré-teste e pós-teste para verificação de aprendizagem do conceito.
3	Tecnologias digitais e interdisciplinaridade: articulações entre matemática e arte por meio da utilização de objetos de aprendizagem	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; as pesquisadoras registravam as informações a partir de observações e relatórios.
4	Animation of mathematics learning for vocational high school about geometry transformation using participatory design	Os estudantes participaram de testes para avaliar o OA por meio de uma escala Likert.
5	Interação e motivação: o ensino da matemática com um objeto de aprendizagem	Os estudantes participaram de uma oficina com a aplicação do OA; as pesquisadoras registravam as informações a partir de observações e relatórios.

(conclusão)

	Título	Tipo de participação do público-alvo na pesquisa
6	Effect of using an educational software "pequemath móvel 5" on mobile devices in the learning process of the mathematical area in children of five years	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; realizaram pós-teste para verificação de aprendizagem do conceito.
7	Inclusive model application using accessible learning objects to support the teaching of mathematics	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; realizaram pré-teste e pós-teste para verificação de aprendizagem do conceito.
8	O uso de objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino médio	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; realizaram pré-teste e pós-teste para verificação de aprendizagem do conceito.
9	Objeto de aprendizagem na forma de game como auxílio ao professor na promoção do ensino	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; as pesquisadoras registravam as informações obtidas a partir de questionários, observações diretas e diários de campo.
10	Etnoinformática na educação: integração do objeto de aprendizagem n'samat na 2ª classe do ensino básico para aprendizagem de aritmética em moçambique.	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; realizaram pré-teste e pós-teste para verificação de aprendizagem do conceito.
11	GAMEALG – ferramenta de apoio ao ensino introdutório da álgebra	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; realizaram pré-teste e pós-teste para verificação de aprendizagem do conceito.
12	Números complexos: um objeto de aprendizagem para ensinar e aprender	Os estudantes participaram de testes para avaliar o OA por meio de uma escala Likert.
13	Um estudo sobre o ensino de geometria com o uso da farma	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; as pesquisadoras registravam as informações por meio de observações, anotações, questionários e atividades.
14	Uso do livro interativo multimídia na aprendizagem de matemática em uma escola primária: impacto no desempenho dos alunos da 7ª classe	Os estudantes participaram de aulas de matemática utilizando o OA; realizaram pré-teste e pós-teste para verificação de aprendizagem do conceito.
15	A construção do jogo kogoca na interface entre avaliação em larga escala e aprendizagem matemática	O protótipo do jogo foi testado com estudantes do segundo ano em relação as duas primeiras fases do jogo.

Fonte: elaborado pelo autor.

De acordo com o quadro 14, as implicações dos resultados dessas pesquisas se deram ao potencial que esses OAs possuíam, em conjunto com a abordagem de ensino promovida pelo professor, de motivar o estudante ao estudo do conceito matemático, na promoção de ambiente colaborativo, dinâmico, em que os estudantes tinham maior autonomia no contexto de ensino. Além disso, algumas pesquisas evidenciaram uma maior aprendizagem dos conceitos matemáticos quando a aula foi mediada com o OA desenvolvido. Tais resultados são corroborados pelo estudo de Nesi *et al.* (2019, p. 557) que concluiu que o uso de objetos de aprendizagem em matemática “oportuniza momentos de interatividade e interação entre os envolvidos. [...] pode proporcionar práticas pedagógicas diferenciadas, auxiliando o professor

na criação de estratégias dinâmicas e possibilitando ao estudante a internalização e outras formas de organização do pensamento matemático”.

Quadro 14 – Implicações dos resultados na pesquisa e na prática nas pesquisas levantadas

(continua)

	Título	Implicações dos resultados na pesquisa e na prática
1	Utilização de e-book interativo em aulas de matemática em um curso técnico em eletroeletrônica integrado ao ensino médio	A maioria dos alunos avaliou como “ótimo” ou “bom” cada recurso do e-book. A exceção foi em relação aos recursos de Geogebra e Scratch que a maioria avaliou como regular. A justificativa, segundo o pesquisador, foi devido ao fato dos estudantes “sentirem-se perdidos” na interação com os recursos. A professora também avaliou como positiva a ferramenta, entretanto, chamou a atenção para que fosse possível verificar as respostas dos estudantes nos recursos presentes no e-book.
2	E-numerando: desenvolvimento e aplicação de objetos de aprendizagem digital para o ensino de números naturais	Foi percebida pelos pesquisadores uma evolução das médias de acerto à medida que as sessões eram realizadas, bem como uma nítida melhora na avaliação final quando comparada com a avaliação inicial. Dessa forma, os autores concluíram que o E-numerando favorece para o processo de aprendizagem.
3	Tecnologias digitais e interdisciplinaridade: articulações entre matemática e arte por meio da utilização de objetos de aprendizagem	As autoras destacaram que os estudantes se interessaram pelas ferramentas, utilizando-se dos cadernos e buscadores da internet para responder as questões apresentadas pelos OA. Além disso, destacaram o aspecto colaborativo, uma vez que os estudantes interagiam em busca de concluir as respostas nas ferramentas.
4	Animation of mathematics learning for vocational high school about geometry transformation using participatory design	Os resultados dos testes dos estudantes e professores indicam que o OA foi avaliado de forma positiva, obtendo índices acima de 90%. Em relação aos especialistas, algumas considerações específicas foram realizadas, como ajuste de tamanho de fonte, cores, etc.
5	Interação e motivação: o ensino da matemática com um objeto de aprendizagem	Durante a aplicação do jogo, os autores destacaram o comportamento dos alunos durante o processo, no sentido de se tornarem mais colaborativos, falantes e competitivos. Ressaltaram, inclusive, que o jogo motivou aqueles alunos que demonstravam pouca afinidade com matemática. Com relação à aprendizagem do conteúdo, salientaram que os estudantes não conseguiam se concentrar em ler os problemas e resolvê-los, optando, em sua maioria, em questionar ao outro a resposta ou tentar responder por tentativa e erro. Nesse caso, pontuaram a importância docente para mediar tais situações de modo a orientar os estudantes no uso correto da ferramenta.
6	Effect of using an educational software "pequemath móvil 5" on mobile devices in the learning process of the mathematical area in children of five years	Foi possível concluir que as crianças, utilizando o software educacional “PequeMath Movil 5”, apresentaram um resultado significativamente melhor.
7	Inclusive model application using accessible learning objects to support the teaching of mathematics	Os alunos apresentaram um desempenho acima do diagnosticado, interagiram mais entre si e auxiliaram o aluno com deficiência auditiva, proporcionando um ambiente educacional colaborativo e cooperativo.
8	O uso de objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino médio	Verificou-se que com a aplicação do OA, houve uma diferença significativa entre os testes realizados. Foi constatado que não houve diferenças significativas para o desenvolvimento do pensamento estatístico. Em relação à literacia estatística e ao raciocínio estatístico, foi constatada uma contribuição significativa.

(conclusão)

	Título	Implicações dos resultados na pesquisa e na prática
9	Objeto de aprendizagem na forma de game como auxílio ao professor na promoção do ensino	Os professores destacaram o envolvimento dos estudantes com o jogo, as problematizações práticas proporcionadas, a utilização como introdução, revisão e retomada de conteúdo, o favorecimento do refletir sobre o erro, o provimento de momentos de ludicidade e a mediação docente como fundamental condutora desse processo.
10	Etnoinformática na educação: integração do objeto de aprendizagem n'samat na 2ª classe do ensino básico para aprendizagem de aritmética em moçambique.	Foi constatado que a aplicação do jogo N'SAMAT pode ser uma boa alternativa para aprendizagem da aritmética. No momento qualitativo da pesquisa, os estudantes ficaram motivados e envolvidos com o jogo, promovendo uma interação conjunta entre alunos, professor e o jogo. Entretanto, algumas dificuldades foram elencadas, como, por exemplo, a dificuldade dos alunos no uso dos computadores.
11	GAMEALG – ferramenta de apoio ao ensino introdutório da álgebra	Os dados encontrados sugerem que os participantes submetidos à intervenção com a utilização do GAMEALG demonstraram uma maior compreensão dos invariantes algébricos após o treinamento quando comparado aos estudantes do grupo controle.
12	Números complexos: um objeto de aprendizagem para ensinar e aprender	O OA foi considerado potencialmente significativo, uma vez que, obteve, em todos os aspectos avaliados, “concordo” ou “concordo plenamente”.
13	Um estudo sobre o ensino de geometria com o uso da farma	A partir da comparação das respostas dos questionários por meio das categorias conceito, quase-conceito, cotidiano e outros, foi constatado que houve uma evolução na compreensão dos conceitos de ponto, reta e plano com a interação do OA.
14	Uso do livro interativo multimídia na aprendizagem de matemática em uma escola primária: impacto no desempenho dos alunos da 7ª classe	Foi constatado que o uso do livro interativo Multimídia na aprendizagem de matemática não melhora o desempenho dos alunos e que houve maior coesão no desempenho do grupo de controle em relação ao grupo experimental.
15	A construção do jogo kogoca na interface entre avaliação em larga escala e aprendizagem matemática	O protótipo do jogo foi testado com estudantes do segundo ano em relação as duas primeiras fases do jogo. O autor considerou os resultados satisfatórios, destacando que os alunos gostaram bastante dos personagens e se envolveram com a busca pelas respostas.

Fonte: elaborado pelo autor.

É importante mencionar que em muitos trabalhos os autores não disponibilizaram formas de ter acesso ao OA desenvolvido. Nos trabalhos em que disponibilizavam o link para acesso, em alguns casos o site estava inacessível. Em outros casos, mesmo com acesso ao site, tornava-se difícil interagir com a ferramenta, pois algumas tecnologias que foram utilizadas no desenvolvimento da ferramenta haviam sido descontinuadas.

A partir desta revisão de trabalhos, nota-se a iniciativa dos pesquisadores em desenvolver objetos de aprendizagens para facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos. Foram pesquisas para vários perfis de alunos (anos iniciais, ensino fundamental e médio) e de diferentes áreas da matemática. Em algumas pesquisas a participação do aluno foi opinando sobre a usabilidade da ferramenta, em outras se deu de forma qualitativa, sendo observado pelo pesquisador em termos de comportamento ao interagir com a ferramenta e, em outros casos, participando de avaliações para verificar se houve uma melhor aprendizagem do conteúdo.

Considerando que vários trabalhos não foram incluídos nesta revisão por restringirem-se apenas ao desenvolvimento do OA ou apenas à aplicação de objetos de aprendizagem já desenvolvidos, além de várias áreas da matemática ainda não serem abordadas na elaboração deste tipo de recurso, é possível afirmar que a área de desenvolvimento e aplicação de objetos de aprendizagem em matemática tem muito a evoluir. A partir das discussões levantadas, algumas lacunas puderam ser identificadas no processo de desenvolvimento de OA para o ensino de matemática, principalmente no que se refere à inclusão de uma abordagem pedagógica na sua elaboração, bem como na realização de verificações efetivas de aprendizagem na prática real escolar.

Dessa forma, acreditamos que o desenvolvimento de princípios teóricos que auxiliem a construção de objetos de aprendizagem para o ensino de matemática pode ser uma alternativa interessante para que os desenvolvedores de OA possam construir seus recursos com teorias que fundamentam a aprendizagem de conceitos matemáticos.

3.3 METODOLOGIAS E DIRETRIZES PARA O DESENVOLVIMENTO DE OBJETOS DE APRENDIZAGEM PRESENTES NA LITERATURA

Algumas pesquisas desenvolveram metodologias e/ ou diretrizes que auxiliaram na criação, seleção e avaliação de objetos de aprendizagem, como forma de maximizar a qualidade desses produtos. Em geral, esses trabalhos orientam sobre as principais etapas a serem seguidas para produção de um OA, trazem discussões acerca do aspecto visual em termos de usabilidade do OA (cores, contraste, tamanho da fonte, uso de imagens, botões, etc.), a forma de interagir com a ferramenta (se é de fácil navegação e se é possível personalizar configurações de acordo com o perfil do usuário), o fornecimento de feedbacks que auxiliem na compreensão do conteúdo, a discussão do objetivo pedagógico (contexto, conteúdo, formas de exploração, etc.), e outros.

Em mapeamento da literatura realizado nas bases Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Google Acadêmico foram identificadas várias pesquisas com essas perspectivas. No quadro 15, é apresentado o número de trabalhos em cada base de dados citada.

Quadro 15 – Levantamento de textos

Bases de dados	Total de textos	
	Dissertações	Teses
BDTD	7	3
Google Acadêmico	9	
Total	19	

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir da leitura dos trabalhos, três grupos distintos emergiram: G1 – Metodologia completa para desenvolvimento de objetos de aprendizagem; G2 – Diretrizes técnicas e/ou pedagógicas gerais relacionadas ao desenvolvimento/avaliação de objetos de aprendizagem; e G3 – Diretrizes técnicas e/ ou pedagógicas para objetos de aprendizagem em matemática, conforme quadro 16 abaixo:

Quadro 16 – Distribuição dos trabalhos por grupo

Grupo	Texto	Total
G1	(Braga; Pimentel; Dotta, 2013) (Fernandes <i>et al.</i> , 2009) (Flôres, 2011) (Oliveira; Amaral; Bartholo, 2010) (Kemczinski <i>et al.</i> , 2012) (Nibon, 2008) (Pacheco, 2016) (Passos; Behar, 2012) (Queiros, 2015) (Torrezzan, 2014)	10
G2	(Burd, 1999) (Lapolli <i>et al.</i> , 2010) (Mourão, 2019) (Prevedello, 2011) (Reategui; Boff; Finco, 2010) (Silveira; Carneiro, 2012) (Torrezzan, 2009)	7
G3	(Braga, 2006) (Leite, 2007)	2

Fonte: elaborado pelo autor.

Analisando as pesquisas do grupo 1, referentes às metodologias completas para desenvolvimento de objetos de aprendizagem, observamos que se tratam de orientações gerais para construção de objetos de aprendizagem, levando em consideração aspectos técnicos e pedagógicos. Os autores criaram fases de elaboração, envolvendo, geralmente, uma equipe multidisciplinar. No quadro 17, abaixo, são destacadas as fases adotadas por cada pesquisa deste grupo para a construção de OAs.

Quadro 17 – Fases adotadas para construção de OAs referentes às pesquisas do grupo 1

Texto	Fases
(Braga; Pimentel; Dotta, 2013)	Contextualização, Requisitos, Arquitetura, Desenvolvimento, Testes e qualidade, Disponibilização, Avaliação, Gestão de projetos e Ambiente e padrões
(Fernandes <i>et al.</i> , 2009)	Elaboração do Design Pedagógico, Roteiro Pedagógico, Definição da Interface do Objeto de Aprendizagem, Guia do professor, Utilização nas escolas e Publicação na web
(Flôres, 2011)	Planejamento pedagógico, planejamento tecnológico, desenvolvimento dos OAs e planejamento das estratégias para aplicação
(Oliveira; Amaral; Bartholo, 2010)	Análise, Projeto, Implementação e Validação
(Kemczinski <i>et al.</i> , 2012)	Análise, Projeto, Implementação, Submissão, Avaliação e Publicação
(Nibon, 2008)	Planejamento Pedagógico, Engenharia de Requisitos, Design da Interação, Aspectos Técnicos, Reuso, Avaliação do Software, Comunicação, Documentação do Usuário
(Pacheco, 2016)	Análise, Planejamento, Projeto, Desenvolvimento, Teste, Implementação, Avaliação, Publicação
(Passos; Behar, 2012)	Compreensão, Preparação, Experimentação, Elaboração, Apresentação
(Queiros, 2015)	Modelagem do plano de negócio; Apresentação do Canvas; Criação dos cartões de insight; Criação do mapa conceitual; Realização do brainstorming; Criação do cardápio de ideias; Desenvolvimento do storyboard; Realização da análise e projeto; Desenvolvimento do objeto de aprendizagem; Verificação do resultado; Validação do objeto de aprendizagem
(Torrezzan, 2014)	Preparação, Planejamento, Implementação, Avaliação, Distribuição

Fonte: elaborado pelo autor.

É importante mencionar que as orientações relacionadas à parte pedagógica não são direcionadas a uma área específica, mas sim a um caráter geral, sugerindo, por exemplo: definição do público-alvo, conteúdo, modalidade de ensino, objetivo de aprendizagem, etc. Desse modo, não mencionam, por exemplo, como conceitos de matemática podem ser abordados no OA de modo que potencializem a aprendizagem.

Em relação aos trabalhos do grupo 2, referentes às diretrizes técnicas e/ou pedagógicas gerais relacionadas ao desenvolvimento/avaliação de objetos de aprendizagem, os autores apresentam diretrizes que podem ser utilizadas para desenvolver um OA ou auxiliar os usuários na seleção de OAs, considerando tais diretrizes como requisitos de qualidade. No quadro 18, abaixo, são destacadas algumas diretrizes adotadas por cada pesquisa deste grupo para a construção e/ ou avaliação de OAs.

Quadro 18 – Diretrizes adotadas para construção e/ ou avaliação de OAs referentes às pesquisas do grupo 2 (continua)

Texto	Diretrizes
(Burd, 1999)	Ser guiado por uma teoria educacional que indique os pontos a serem enfatizados e sustente as escolhas feitas durante a implementação; envolver, no processo, educadores, estudantes e outros cuja experiência possa ajudar a complementar as idéias teóricas; facilitar, na medida do possível, o intercâmbio de idéias entre os desenvolvedores e o público atendido pela tecnologia; efetuar testes práticos em situações próximas das idealizadas para assegurar que as expectativas estejam, de fato, sendo atingidas, entre outras.

(conclusão)

Texto	Diretrizes
(Lapolli <i>et al.</i> , 2010)	Elaborar o conceito principal; Procurar novos significados para o conceito; Gerar situações de conflitos; Definir o cenário operacional e os conceitos a serem veiculados na interface; Identificar as situações que tornam esses conceitos significativos e oferecer essas situações ao usuário, entre outras.
(Mourão, 2019)	Vídeos, animações ou scripts devem ter título claro que se relacione com o tema; Fotos, diagramas, tabelas, gráficos, desenhos, arte ANSI, logos, charts, botões, imagens link, etc. devem ter alto contraste; Todo texto apresentado deve ter fundo de cor sólida; Linguagem no texto deve ser clara e simples, entre outras.
(Prevedello, 2011)	Conteúdo apresentado de modo significativo; Fixação de metas próximas, objetivos e informações claras; Desafio de acordo com a carga cognitiva do usuário; Aprendizado centrado no aluno/estudante, entre outras.
(Reategui; Boff; Finco, 2010)	Apresenta recursos (como exercícios, alternativas de navegação) que favorecem a capacidade de elaboração a partir da ação e reflexão? Apresenta os conteúdos de maneira apropriada, podendo adequar sua utilização ao nível de conhecimento de cada aprendiz? O uso intensivo da aplicação, principalmente num contexto em rede com muitos usuários, mantém seu desempenho? Há contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura dos textos? Entre outras.
(Silveira; Carneiro, 2012)	Apresentar uma contextualização inicial, descrevendo o tema/conteúdo tratado no objeto; Explicitar quais softwares são necessários para execução do objeto; Apresentar mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas; Utilizar uma sequência de ações padronizada e de fácil entendimento.
(Torrezzan, 2009)	Fornecer feedbacks aos usuários (jogos educacionais e mensagens do sistema); Adotar uma navegação não-linear; Os ícones devem seguir uma lógica facilmente entendível pelo usuário; Utilizar imagens estáticas, dinâmicas e animações interativas, entre outras.

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir da análise destes trabalhos, percebe-se que grande parte das diretrizes abordadas são voltadas para questões de usabilidade e, como nas pesquisas do grupo 1, as diretrizes pedagógicas são gerais, não relacionando a áreas específicas do saber. Por exemplo, Reategui, Boff e Finco (2010) apresentam o questionamento: o OA apresenta os conteúdos de maneira apropriada, podendo adequar sua utilização ao nível de conhecimento de cada aprendiz? Lapolli *et al.* (2010) trazem a diretriz “Identificar as situações que tornam esses conceitos significativos e oferecer essas situações ao usuário”, entre outras. Apesar de apresentarem diretrizes importantes para o desenvolvimento e avaliação de OAs, não trazem elementos vinculados aos saberes específicos que podem potencializar a aprendizagem de conceitos em um contexto digital.

No que se refere aos trabalhos do grupo 3, referentes às diretrizes técnicas e/ ou pedagógicas para objetos de aprendizagem em matemática, os autores trazem diretrizes que orientam a construção e/ou avaliação de objetos de aprendizagem em matemática. No quadro 19, abaixo, são destacadas algumas diretrizes adotadas por cada pesquisa deste grupo para a construção e/ ou avaliação de OAs.

Quadro 19 – Diretrizes que orientam a construção e/ou avaliação de objetos de aprendizagem em matemática referentes ao grupo 3

Autor	Diretrizes
(Braga, 2006)	O software deve fornecer feedback constante para o usuário sobre suas ações; Definir o campo conceitual a ser veiculado na interface; Identificar as situações que tornam esses conceitos significativos e oferecer essas situações ao usuário; Definir as diferentes representações que serão utilizadas para lidar com essas situações e permitir ao usuário fazer uso delas durante o uso da interface; Identificar os invariantes que devem ser capturados pelos usuários ao lidar com essas situações, entre outras.
(Leite, 2007)	O software deve privilegiar o uso de recursos motivacionais; O software deve permitir acesso a diferentes níveis de dificuldade; O software deve disponibilizar a manipulação de pelo menos dois sistemas de sinais; O software deve apresentar o conteúdo com variedade de representações das estruturas aditivas, entre outras.

Fonte: elaborado pelo autor.

A pesquisa de Braga (2006) traz diretrizes voltadas para os aspectos pedagógicos envolvendo objetos de aprendizagem em matemática. Para construir as diretrizes, Braga (2006) fez uso da teoria dos Campos Conceituais e de *scaffolding*. Leite (2007), além de desenvolver diretrizes relacionadas à usabilidade, também fez uso da teoria dos Campos Conceituais e apresentou diretrizes pedagógicas voltadas para o campo aditivo. Ambas as pesquisas utilizaram as diretrizes propostas no desenvolvimento de um OA para o campo aditivo. Mesmo trazendo a iniciativa de abordar diretrizes voltadas para a área do saber matemático quando se trata de desenvolvimento de OA, consideramos que vários elementos precisam estar presentes em diretrizes dessa natureza para que professores e equipes de desenvolvimento potencializem as chances de desenvolverem OAs com foco em aprendizagem matemática. Por exemplo, quando Braga (2006) aborda a diretriz “O software deve fornecer feedback constante para o usuário sobre suas ações”, de que maneira podemos potencializar os feedbacks para aprendizagem de conceitos matemáticos? Ou quando aborda a diretriz “Identificar as situações que tornam esses conceitos significativos e oferecer essas situações ao usuário”, como identificar tais situações e como projetá-las em um OA?

O presente estudo busca, aproximando-se dessa perspectiva relacionada ao grupo 3, além de abordar princípios teóricos para construção de OA em matemática, trazer elementos que possam tornar tais princípios exequíveis por meio de teorias relacionadas à matemática e à aprendizagem por meio de software, conforme abordaremos nos próximos capítulos.

Nota-se, a partir do mapeamento realizado, a ênfase que é dada aos aspectos técnicos de desenvolvimento de objetos de aprendizagem, bem como no aspecto geral das orientações pedagógicas. Apenas duas pesquisas direcionaram as diretrizes pedagógicas para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem em matemática. Tais resultados corroboram com algumas pesquisas, como as de Silveira e Carneiro (2012) e Braga *et al.* (2012) que observaram

que as propostas de diretrizes priorizam questões de interface/interação relacionadas à usabilidade do objeto e que é fundamental detalhar e incluir diretrizes voltadas às questões pedagógicas. Wiley (2000, p. 16) complementa, ao afirmar que “para promover a aprendizagem, o uso da tecnologia deve ser guiado por princípios instrucionais”. Distanciar-se de tais princípios pode favorecer para a elaboração de objetos de aprendizagem baseada na simples transferência de conteúdos escolares para uma plataforma digital, não trazendo ganhos para o processo de aprendizagem.

Sobre esse aspecto, Watson (2009) argumenta que a criação de objetos de aprendizagem é geralmente realizada por tecnólogos e não por professores que são pedagogicamente conscientes. Tal fato colabora para que a criação de “páginas web interactivas careça de uma base pedagógica reconhecível ou de um design de aprendizagem” (Watson, 2009, p. 41). O mesmo autor salienta que enquanto se buscava um processo de reutilização relacionado aos aspectos técnicos dos objetos de aprendizagem, o mesmo não ocorreu com a reutilização da abordagem pedagógica, ou seja, não se discute “uma abordagem pedagógica específica ou um modelo de design para a produção de resultados com potencial de reutilização ou reaproveitamento” (Watson, 2009, p. 42).

Ávila e Tarouco (2014, p. 193) argumentam que “a qualidade de um material educacional está diretamente relacionada com a preparação pedagógico-tecnológica dos responsáveis pela sua elaboração”. Quando se trata da produção de objetos de aprendizagem, a parte pedagógica está relacionada, principalmente, às dificuldades intrínsecas ao conteúdo e ao conhecimento das questões cognitivas relacionadas aos estudantes, tomando por base subsídios teóricos pautados em princípios da cognição humana (Ávila; Tarouco, 2014). De posse dessas informações, é possível realizar o “delineamento de atividades a ser implementado no Objeto de Aprendizagem, a adequação da carga cognitiva ao seu público-alvo, a integração dos recursos de multimídia, nos níveis de interatividade a serem alcançados (Ávila; Tarouco, 2014, p. 196).

Concordamos com Farmer e Hughes (2005, p. 01) ao argumentarem que “o projeto bem-sucedido de objetos de aprendizagem (OAs) necessita da incorporação do design instrucional e das teorias de aprendizagem com as atuais metodologias de projeto de OAs”. Além disso, para que os OAs possam alcançar resultados de aprendizagem, “o design do objeto deve ser compatível com os processos de aprendizagem reais, uma abordagem que atualmente falta nos modelos existentes” (Farmer; Hughes, 2005, p. 01). Para que haja a construção de quadros pedagógicos que possam ser implementados no design do OA, Bennett, Lockyer e Agostinho

(2004) sugerem que um dos caminhos é compreender os processos pelos quais os professores constroem experiências de aprendizagem e entender como tais processos podem ser implementados no OA de modo que permitam exercer tais experiências.

O fato de haver poucas diretrizes pedagógicas voltadas para áreas do saber específicas, como a matemática, pode estar contribuindo para o desenvolvimento de OAs que não considerem as nuances de aprendizagem deste saber e acabam por reproduzir práticas tradicionais de ensino, conforme observamos na seção 3.2, uma vez que, não há menção nestes trabalhos de uma fundamentação em alguma teoria pedagógica, seja ela do campo geral ou do campo específico do saber matemático. Dessa forma, acreditamos que o desenvolvimento de princípios teóricos específicos para área de matemática pode contribuir para que os profissionais envolvidos no desenvolvimento de OA levem em consideração tais princípios, uma vez que interpretar teorias de aprendizagem para inserir seus aspectos no desenvolvimento de OAs por vezes pode ser uma tarefa complexa.

A seguir, apresentamos a metodologia de desenvolvimento de OA adotada por este trabalho.

3.4 METODOLOGIA INTERA

Várias metodologias de desenvolvimento de objetos de aprendizagem foram desenvolvidas, com objetivo de organizar o processo de desenvolvimento, a padronização e a comunicação entre os envolvidos. No quadro 20, são apresentadas algumas metodologias que orientam o desenvolvimento de OAs, a instituição, a ferramenta de autoria vinculada, a quantidade de etapas, a relação com algum *Learning Management System* (LMS), a geração de um padrão de integração com ambientes computacionais e se a metodologia é nacional ou internacional.

Quadro 20 – Metodologias para a Construção de OAs

(continua)

Nº	Metodologia	Instituição	Ferramenta de Autoria	Qtd. de Etapas	Atrelada a LMS?	Garante Padrão?	É Nacional?
1	ADDIE	Univ. Porto	eXe-learning	5		SCORM	Não
2	MACOBA	Univ. Politecnica de Aguascaliente		5		IMS-LD	Não

(conclusão)

Nº	Metodologia	Instituição	Ferramenta de Autoria	Qtd. de Etapas	Atrelada a LMS?	Garante Padrão?	É Nacional?
3	CETL	Univ. Metrop. De Londres; Univ. de Cambridge; Univ. de Nottingham	Reload Editor	5			Não
4	MEAMOA	UFRGS	eXe-leaning	4	Moodle/ Pbworks	SCORM	Sim
5	Aprendizagem Significativa	UFPB	Flash+HTML+XML	6			Sim
6	Própria	UENP	Adobe Flash	4			Sim
7	RIVED	SEED	Adobe Flash	6			Sim
8	MCOAI	UDESC	Livre	6	ROAI		Sim
9	INTERA	UFABC		3			Sim
10	MOA	UFJF		3			Sim

Fonte: adaptado de Kemczinski *et al.* (2012) baseado em Lucena (2011).

Neste trabalho, optamos pela metodologia INTERA, por ter sido elaborada levando em consideração aspectos positivos de metodologias anteriores e por considerar de forma equitativa o trabalho com questões técnicas e pedagógicas relacionadas ao objeto de aprendizagem.

A metodologia de desenvolvimento de objetos de aprendizagem INTERA (Inteligência em Tecnologias Educacionais e Recursos Acessíveis), proposta por Braga, Pimentel e Dotta (2015), foi baseada em processos de desenvolvimento de *software* e no modelo *Analysis, Design, Development, Implementation e Evaluation* (ADDIE) para desenvolvimento de conteúdos instrucionais. É considerada um conjunto de processos iterativos, isto é, admite-se o ir e vir em suas etapas, que pode ser usado para o desenvolvimento de qualquer tipo de recurso digital que tenha como objetivo a aprendizagem (Braga *et al.*, 2012).

De acordo com Braga, Pimentel e Dotta (2015), os seguintes componentes fazem parte da metodologia INTERA: fases, papéis, artefatos e etapas. As fases estão relacionadas ao período que uma das etapas de desenvolvimento pode estar inserida, que podem ser inicial, intermediária e de transição. Os papéis estão relacionados a como os integrantes vão se comportar no projeto de desenvolvimento e quais as suas funções, que podem ser: analista, conteudista, gerente de projetos, demandante, designer de interface, designer instrucional, equipe de desenvolvimento e equipe de teste. Cada um dos papéis é descrito no quadro 21.

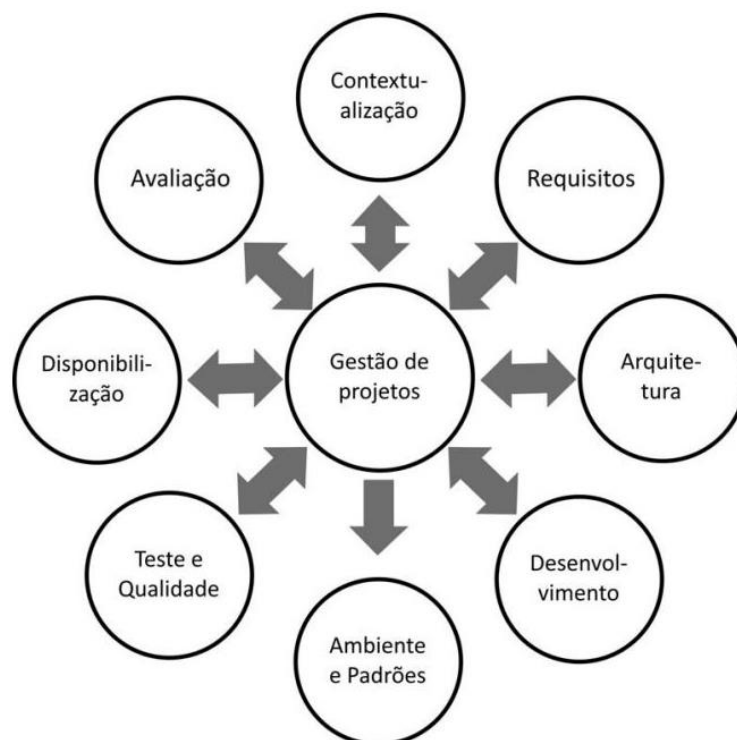
Quadro 21 – Descrição dos papéis da metodologia INTERA

Papel	Descrição das atividades do papel
Analista	Responsável por fazer o levantamento e análise do contexto e dos requisitos do OA. Também é responsável por elaborar o planejamento da qualidade e dos testes do OA.
Conteudista	Responsável pela elaboração do conteúdo, incluindo pesquisa de conteúdo, especificação de conteúdos adicionais e avaliação do conteúdo na etapa de testes. É também sua função manter a integridade do conteúdo do OA realizando nele várias revisões, se necessário. Deverá manter o OA conforme os objetivos pedagógicos que ele foi concebido e garantir a qualidade e veracidade do conteúdo.
Demandante	Solicita o desenvolvimento do OA que será desenvolvido. Pode ser o principal responsável por fornecer a verba necessária para o desenvolvimento do OA.
Gerente de Projetos	Responsável por planejar e gerenciar o projeto de desenvolvimento do OA. Faz parte de suas atribuições: manter a comunicação entre a equipe, acompanhar o cronograma, o escopo e o custo do projeto, distribuir e gerenciar as atividades da equipe.
Designer de Interface	Projeta os componentes de interface do OA de forma a potencializar o entendimento do conteúdo (produzido pelo conteudista) a partir do uso de linguagens e formatos variados (hipertexto, da mixagem e da multimídia). Desenvolve a identidade visual do objeto.
Designer Instrucional (designer pedagógico)	Será o responsável por realizar o planejamento pedagógico e a avaliação pedagógica do OA.
Designer Técnico (ou Arquiteto)	Responsável pelas escolhas tecnológicas para o desenvolvimento do OA, de acordo com seu contexto e requisitos. Também é responsável por fornecer subsídios técnicos de forma a guiar a equipe de desenvolvimento. Exerce a função de um consultor técnico e necessita ter formação na área de computação ou similar.
Equipe de desenvolvimento	Responsável pelo desenvolvimento ou produção do OA. Essa equipe deverá ser formada por profissionais técnicos de acordo com o tipo de OA a ser desenvolvido. Exemplos: se o curso precisar de um vídeo, a equipe deverá possuir técnicos em produção de vídeo. Se a equipe precisar de um software, deverá poder contar com programadores.
Equipe de teste	Responsável por realizar diferentes tipos de testes ao longo do desenvolvimento do curso, garantindo assim sua qualidade. Faz parte de suas atribuições testar as funcionalidades, a acessibilidade, a confiabilidade, etc.

Fonte: Braga, Pimentel e Dotta (2015, p. 30).

Os artefatos são os dados que são gerados pela equipe envolvida em cada etapa da metodologia, que podem ser o esboço do OA, o *storyboard*, o código-fonte, etc. As etapas são um conjunto de atividades relacionadas a uma área de interesse principal, que podem ser: contextualização, requisitos, arquitetura, desenvolvimento, testes e qualidade, disponibilização, avaliação, gestão de projetos e ambiente e padrões. Tais etapas são interativas e integradas pela gestão de projetos, conforme a figura 2.

Figura 2 – Etapas da metodologia INTERA



Fonte: Braga, Pimentel e Dotta (2015, p. 32).

- Contextualização

A etapa de contextualização é recomendada para ser a primeira a ser realizada pela equipe de desenvolvimento. Trata-se de conhecer de forma profunda o contexto pedagógico em que está inserida a problemática trazida pelo demandante. Inclui-se, nesse contexto, conhecer o público-alvo, as dificuldades envolvidas para aprendizagem do conteúdo envolvido, e de que forma o desenvolvimento do OA vai contribuir para que ocorra uma melhor aprendizagem. Braga e Ponchio (2015a, p. 57) ressaltam que é necessário “realizar uma investigação minuciosa no contexto pedagógico em que esse objeto será utilizado. Essa apreciação cuidadosa do que ocorre em contexto é fundamental para elaborar uma solução de objeto de aprendizagem adequado ao aprendizado”.

- Requisitos

Na etapa de requisitos, ocorre o levantamento do que se espera do OA, suas características técnicas e pedagógicas. Braga e Kelly (2015a, p. 70) argumentam que esta etapa “é a complementação da etapa de contextualização do OA, onde devem ser explorados e

entendidos os ‘desejos’, objetivos e características que o demandante traz sobre o OA, além de viabilizar o levantamento de custos, o cronograma e a qualidade do OA”. Os mesmos autores complementam ao afirmarem que é a partir desta etapa que o “o entendimento sobre as características do OA perpassa o “que” deve ser feito e o “como” será feito, e possibilita que toda a equipe visualize como deve ser o OA, o que ele pretende alcançar e como” (Braga; Kelly, 2015a, p. 72).

A metodologia INTERA divide os requisitos em três tipos: requisitos didático-pedagógicos, que são responsáveis por representar os conceitos e conteúdos a serem abordados, bem como a metodologia e as estratégias pedagógicas em que o OA será inserido, que favoreçam a aprendizagem dos alunos; requisitos funcionais, que são responsáveis por listar todas as funcionalidades que estarão presentes no OA, bem como a maneira que serão dispostas; e requisitos não funcionais, que estão relacionados às questões técnicas referentes às propriedades, restrições e qualidade do OA em sua totalidade. Podem ser subdivididos nas seguintes categorias: confiabilidade, usabilidade, segurança, disponibilidade, reusabilidade, acessibilidade, desempenho, portabilidade, ajuda, design e direitos autorais.

- Arquitetura

Na etapa de arquitetura, é realizada uma análise dos requisitos que resultará no esboço (ou rascunho) do OA, na definição das tecnologias mais adequadas para o desenvolvimento do OA, dos padrões a serem adotados e dos componentes de reúso. Três atividades principais fazem parte desta etapa: esboço do OA, decomposição do OA e definições técnicas.

O esboço do OA resulta em um artefato que exhibe o rascunho ou delineamento do OA a ser desenvolvido. Torna-se relevante, pois o esboço “faz a ponte com o objeto do campo do ideal e o objeto que pode ser produzido, considerando as condições da equipe, o cronograma, o orçamento e os recursos tecnológicos” (Braga; Kelly; Nishida, 2015, p. 88). São exemplos de esboço (artefatos) de acordo com cada tipo de OA: mapa de atividades, sumário executivo, roteiro, storyboard e protótipos. A decomposição do OA está relacionada à possibilidade de “descrever como o OA pode ser decomposto e organizado em componentes pequenos e reutilizáveis, e como serão as interfaces (ou conexões) entre esses componentes” (Braga; Kelly; Nishida, 2015, p. 97).

- Desenvolvimento

Esta etapa está relacionada ao desenvolvimento do OA e de seus componentes, tais como manual do usuário, instalação, guia de edição, etc. Devido às peculiaridades que cada OA exige em sua construção, cada tipo de objeto exige uma técnica de desenvolvimento distinta. Por exemplo, no caso de um software educacional, é necessária uma linguagem de programação, tais como *Python*, *C#*, *Objectv C*, *Delphi* para, para realizar o seu desenvolvimento.

- Testes e qualidade

Nesta etapa, são realizados testes de validação que verificam a qualidade do OA em termos técnicos e pedagógicos. Segundo Braga e Kelly (2015b, p. 127) “os testes possuem dois objetivos: 1) mostrar se o que o objeto de aprendizagem faz é exatamente aquilo para o que ele foi proposto e 2) descobrir os defeitos do OA antes da sua utilização”. De forma geral, os testes complementam as etapas anteriores quando:

Compara a contextualização idealizada com a existente, realizando testes em diferentes realidades tecnológicas, com números de usuários variáveis, em plataformas diversas etc; Verifica se o conteúdo gerado está correto e se abrange tudo o que foi idealizado em etapas anteriores; Verifica se os requisitos foram todos implementados de forma adequada e correspondente com a expectativa do demandante; Valida as características que definem um OA, em especial analisando a sua reusabilidade; Avalia, de forma geral, a arquitetura do OA; Localiza e permite a correção de defeitos antes da implementação final do OA (Braga; Kelly, 2015b, p. 129).

Vários tipos de testes podem ser realizados, tais como: testes técnicos, que verificam aspectos relacionados à funcionalidade, acessibilidade, confiabilidade técnica, precisão, portabilidade, instalação, interoperabilidade, usabilidade, manutenibilidade, eficiência, disponibilidade e segurança; testes com usuários, são aqueles que os usuários experimentam o OA como se fossem usuários finais; e testes de conteúdo, que estão relacionados à verificação se o conteúdo do OA está correto, atualizado e adequado ao público-alvo e são direcionados, geralmente, a especialistas em conteúdo, em design instrucional, na educação do conteúdo específico (conteudista) ou usuários finais (alunos e professores).

- Disponibilização

Nesta etapa, ocorre a publicação do OA e da documentação de uso em um repositório para que professores e alunos tenham acesso. Apesar de ser possível publicar o OA de outra forma, como, por exemplo, em uma página da web, é importante que a publicação seja feita em um repositório especializado, uma vez que influencia diretamente na capacidade de reúso do OA (Braga; Ponchio, 2015b). Outro fator que contribui para essa forma de publicação, são os metadados que geralmente são armazenados juntos ao OA no repositório. Braga e Ponchio (2015b, p. 144) argumentam que “além de permitir armazenar informações sobre os OAs, os metadados podem facilitar a busca, aquisição, avaliação e utilização de Objetos de Aprendizagem por aprendizes e instrutores ou processos automáticos de software”.

- Avaliação

Esta etapa está relacionada à aplicação do OA em sala de aula de modo que seja possível verificar se ele influencia a aprendizagem dos alunos. Para esse tipo de avaliação, além das questões didático-pedagógicas presentes no OA, o contexto pedagógico no qual o OA foi inserido precisa ser incluído nesse processo (Braga; Pimentel; Menezes, 2015). Dessa forma, pelo menos dois momentos podem ser levados em consideração quando da avaliação pedagógica dos OAs, “i) um referente à aprendizagem do aluno, onde se avalia o quanto ele aprendeu com o OA; ii) o outro, referente ao ensino, onde se avaliam as possibilidades de trabalho e reúso do OA em outros contextos pedagógicos” (Braga; Pimentel; Menezes, 2015, p. 158).

Para verificação da aprendizagem podem ser aplicados testes antes e depois do uso do OA, realizando a comparação entre ambos. Para os demais casos, a avaliação deve ser realizada a partir de um processo detalhado de observação com critérios bem definidos.

- Gestão de projetos

Esta etapa está relacionada ao acompanhamento do processo de desenvolvimento do OA, gerenciando custos, cronograma e os envolvidos.

- Ambiente e padrões

Esta etapa está relacionada à parte técnica de desenvolvimento, envolvendo realização de backups e controle de versionamento.

4 A FORMAÇÃO E DESENVOLVIMENTO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, apresentamos as contribuições das teorias dos Campos Conceituais e dos Registros de Representação Semiótica para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. Por um lado, a teoria dos Campos Conceituais destaca três dimensões fundamentais para a formação de um conceito e, por outro, a teoria dos Registros de Representação Semiótica enfatiza o papel das representações no processo de conceitualização.

4.1 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista que visa estudar o desenvolvimento e a aprendizagem das competências complexas, com objetivo de compreender as relações e rupturas entre conhecimentos relativos ao saber fazer e aos saberes expressos (Vergnaud, 1996). Para Vergnaud (1986, p. 84), um campo conceitual pode ser definido como “um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão”. O conceito de situação, nesse caso, não remete à situação didática, mas como uma combinação de tarefas, cuja natureza e dificuldades próprias é importante conhecer. Dessa forma, “a dificuldade de uma tarefa não é, nem a soma, nem o produto das dificuldades das diferentes subtarefas, mas é claro que o fracasso numa subtarefa implica o fracasso global” (Vergnaud, 1996, p. 167).

Dentre os diversos campos conceituais existentes nas ciências, Vergnaud estudou de forma detalhada o campo das estruturas aditivas e o campo das estruturas multiplicativas, ambos relacionados à matemática. Para ele, o campo conceitual das estruturas aditivas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações resolvidas por meio de uma ou várias adições ou subtrações e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. Da mesma forma, o campo conceitual das estruturas multiplicativas é, ao mesmo tempo, o conjunto das situações resolvidas por meio de uma ou várias multiplicações ou divisões e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações (Vergnaud, 1996).

Diferentemente de outras teorias, a teoria dos Campos Conceituais “privilegia modelos que atribuem um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos” (Vergnaud, 1996, p. 167). Além disso, “relativamente a uma psicologia cognitiva centrada nas estruturas lógicas como é a de Piaget, a teoria dos Campos Conceituais aparece antes como uma psicologia dos

conceitos” (Vergnaud, 1996, p. 167). Para Vergnaud (1986, 1996), um conceito pode ser definido como o tripé de três conjuntos, a saber: conjunto das situações (S) que dão sentido ao conceito, conjunto dos invariantes (I) que constituem as diferentes propriedades do conceito, e o conjunto das representações simbólicas (R), que são as formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento. Desse modo, Vergnaud (1996, p. 166) salienta que “estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito, no decurso da aprendizagem ou aquando da sua utilização, é necessariamente considerar estes três planos ao mesmo tempo”.

Vergnaud (1986) elenca algumas razões que justificam que os conceitos, que compõem o mesmo campo conceitual, devam ser estudados em conjunto e não isoladamente: a partir de uma dada situação, não é possível perceber todas as propriedades de um conceito. É necessário trabalhar uma classe de problemas para que seja possível perceber todas as propriedades relativas a um conceito; para analisar uma situação, são necessários vários conceitos e, portanto, as dificuldades geradas também serão relativas a vários conceitos; a formação de um conceito ocorre a partir da resolução de problemas por um longo período. Esses elementos sugerem que o processo de conceitualização é favorecido quando se explora uma diversidade de situações relacionadas aos conceitos em foco do processo de ensino e aprendizagem, explicitando os invariantes e representações simbólicas necessários para solucionar as situações. Considera-se, assim, que “a operacionalidade de um conceito deve ser experimentada através de situações variadas” (Vergnaud, 1996, p. 165).

Para Vergnaud (1986, 1996), é através das situações e dos problemas a resolver que o saber é construído e o conceito adquire sentido. Por problema, entenda-se como “qualquer situação em que é necessário descobrir relações, desenvolver atividades de exploração, hipótese e verificação, para produzir uma solução” (Vergnaud, 1986, p. 76). Durante esse processo, o sujeito pode ficar diante de dois tipos de classes de situações: as que ele possui competências necessárias para lidar com a situação de forma imediata, e as que o sujeito não possui competências necessárias, o que o obriga a refletir, explorar, hesitar, tentativa e erro, ocasionando soluções corretas ou incorretas. No primeiro caso, estamos diante de um esquema único; já no segundo caso, estamos diante de um desencadeamento sucessivo de diversos esquemas (Vergnaud, 1996). Assim, Vergnaud (1996, p. 157) define esquema como a “organização invariante da conduta para uma dada classe de situações” e que “é nos esquemas que se tem de procurar os conhecimentos em ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem a ação do sujeito ser operatória”.

A partir da segunda classe de situações apresentada, nota-se que o funcionamento cognitivo de um sujeito diante de uma nova situação é baseado em um repertório de esquemas construídos por meio da interação com situações anteriores. Diante da nova situação, os sujeitos descobrem novos aspectos e, eventualmente, novos esquemas (Vergnaud, 1996). Desse modo, Vergnaud (1986) argumenta que no processo de ensino de matemática, as concepções que os alunos constroem de forma incorreta só serão corrigidas mediante a interação com situações novas em que tais concepções entrem em conflito. Nesse processo, chama a atenção para a importância dos professores em dominar uma diversidade de situações que possam auxiliar os estudantes a analisá-las com mais profundidade e, desse modo, reverem ou ampliarem as suas concepções, isto é, “proporcionar situações que visem alargar a significação de um conceito e pôr a prova as competências e as concepções dos alunos” (Vergnaud, 1986, p. 79).

Nesse processo de resolução de problemas ou de interação com situações novas a dominar, o sujeito pode mobilizar esquemas construídos em outras situações para as novas situações. Isto é, o sujeito passa a perceber um caráter invariante dos esquemas. Sobre esse aspecto, aponta Vergnaud (1996, p. 161) que o “reconhecimento de invariantes é, pois, a chave da generalização do esquema”. Como exemplo, consideremos a resolução de um problema de aritmética elementar. A identificação dos dados do problema, a procura por informações em documentação e a combinação dessas informações com operações obedecem a esquemas entre os alunos que dominam essas situações. Entretanto, para alunos que ainda não dominam tais ações, trata-se de resolução de problemas, ou seja, “é em termos de esquemas que devemos analisar a escolha das operações e dos dados adequados à resolução de um problema para o qual existem diversas possibilidades de escolha” (Vergnaud, 1996, p. 162).

Para Vergnaud (1996), os esquemas são compostos geralmente por invariantes operatórios (conceitos em ação e teoremas em ação) que conduzem o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes da situação; antecipações do objetivo a atingir, dos efeitos e das eventuais etapas intermediárias; regras de ação, que permitem gerar a sequência de ações do sujeito; e inferências, que permitem determinar as regras e as antecipações a partir das informações e do sistema de invariantes operatórios de que o sujeito dispõe.

Por sua vez, os invariantes operatórios dividem-se em teoremas em ação e conceitos em ação que se desenvolvem em estreita interação. Os teoremas em ação são invariantes do tipo proposições, suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, possuindo um alcance local. Um exemplo é quando as crianças descobrem que para contar os elementos de $(A \cup B)$, basta conhecer o cardinal de A e o cardinal de B, sem precisar contar tudo novamente. Nesse caso,

temos o teorema em ação: $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, desde que $A \cap B = \text{vazio}$. Já os conceitos em ação são invariantes do tipo função proposicional, construídos na ação e raramente explicitados pelos alunos, não sendo suscetíveis de serem verdadeiros ou falsos, mas são indispensáveis para construção das proposições. Como exemplo, temos os conceitos de cardinal e de coleção, os de estado inicial, de transformação e de relação quantificada, indispensáveis à conceitualização das estruturas aditivas. É importante mencionar que “um conceito em ação não é propriamente um conceito, nem um teorema em ação um teorema” (Vergnaud, 1996, p. 165).

Além dos conceitos e invariantes, Vergnaud (1996) destaca a importância das representações simbólicas para teoria dos Campos Conceituais, argumentando que: auxiliam na identificação dos objetos, propriedades, relações e teoremas; no raciocínio e inferência; e na antecipação dos efeitos e dos objetivos, na planificação e no controle das ações. No que se refere ao processo de resolução de problemas, as representações podem ajudar quando os dados são numerosos ou quando para se chegar à solução exigem-se várias etapas. Além disso, “são também meios para identificar mais claramente objetos matemáticos decisivos para a conceitualização (Vergnaud, 1996, p. 184). Ainda sobre esta temática, Vergnaud (1996) defende que a conceitualização em matemática não seja apenas por meio de linguagem natural (considerando-a como ferramenta do pensamento) e que sejam incluídas ao processo outras formas de representação (considerando-as objetos do pensamento), destacando o seu aspecto invariante, argumentando que “a invariância do significante contribui para uma melhor identificação do significado e para a sua transformação em objeto de pensamento” (Vergnaud, 1996, p. 186). Portanto, “a linguagem natural é o meio essencial de representação e de identificação das categorias matemáticas, mas não possui, tal como os diagramas, as fórmulas e as equações, o “laconismo” indispensável à seleção e ao tratamento das informações das relações pertinentes (Vergnaud, 1996, p. 188).

Abordamos, a seguir, o campo conceitual das estruturas multiplicativas, uma vez que o contexto de estudo deste trabalho é relativo ao conceito análise combinatória, o qual faz parte do referido campo.

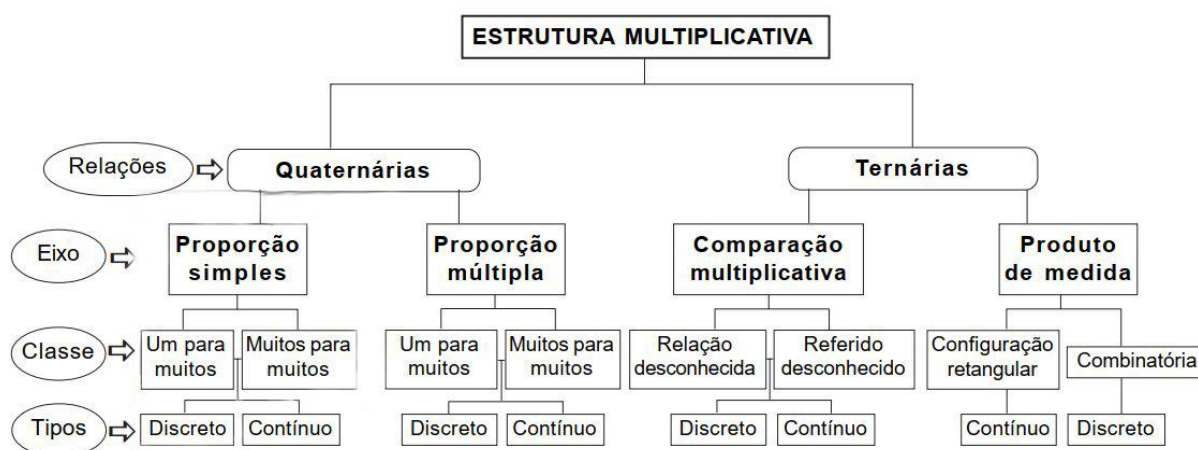
4.1.1 As estruturas multiplicativas

Como o campo conceitual das estruturas multiplicativas envolve situações que são resolvidas por meio de uma ou várias multiplicações e/ou divisões, vários conceitos fazem parte

desse campo, tais como: a multiplicação e a divisão, a razão e a proporção, as funções linear e a n-linear, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração e a porcentagem.

Vergnaud (1983, 1991), ao estudar os conceitos que fazem parte das estruturas multiplicativas, chegou à conclusão de que pertencem a duas grandes classes de situações: isomorfismo de medidas e produto de medidas. As situações que envolvem isomorfismo de medidas diferenciam-se das situações de produto de medidas, uma vez que as primeiras possuem uma relação quaternária, na qual “tem-se uma dupla relação entre duas quantidades” (Magina; Santos; Merlini, 2014, p. 521), e as demais possuem uma relação ternária, na qual “uma relação entre dois elementos, de naturezas iguais ou distintas, que se compõem para formar um terceiro elemento” (Magina; Santos; Merlini, 2014, p. 522). A partir da figura 3, podemos ver um esquema das relações do campo conceitual das estruturas multiplicativas.

Figura 3 – Esquema das relações envolvidas no campo conceitual das estruturas multiplicativas



Fonte: Magina, Santos e Merlini (2014).

Conforme figura 3, podemos observar várias subdivisões das relações em eixos, classes e tipos. A partir do quadro 22, podemos observar diferentes tipos de situações multiplicativas propostas por Vergnaud (1983, 1991).

Quadro 22 – Diferentes tipos de situações multiplicativas propostas por Vergnaud (1983, 1991)

(continua)

		Multiplicação	Divisão
Isomorfismo de medidas (Quaternárias)	Proporção simples	<u>Um para muitos</u> : A receita de brigadeiro de Maria leva 1 lata de leite condensado para 5 colheres de chocolate. Ela vai fazer brigadeiros com 4 latas de leite condensado. Quantas colheres de chocolate ela usará?	<u>Partição</u> : O médico mandou Marta tomar 24 comprimidos em 8 dias. Ela tem que tomar a mesma quantidade de comprimidos todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia?

		(conclusão)	
		Multiplicação	Divisão
Isomorfismo de medidas (Quaternárias)	Proporção simples	<u>Muitos para muitos (quarta proporcional)</u> : Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 6 bolos?	<u>Quotição</u> : Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias esse tratamento durou?
	Proporção Múltipla	A receita da massa de pastel do “seu” Manoel é assim: para cada copo de leite ele usa 3 ovos, e para cada ovo, 2 xícaras de farinha. Para fazer a massa usando 2 copos de leite, quantas xícaras de farinha vai precisar?	
Produto de medidas (Ternárias)	Comparação multiplicativa	<u>Referido desconhecido</u> : Uma loja do shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R\$ 6,00 na lojinha da esquina. Quanto custa a mesma sandália na loja do shopping?	<u>Referente desconhecido</u> : A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho? <u>Relação desconhecida</u> : Mário ganhou 18 bolas e Rosa ganhou 6 bolas. A quantidade de bolas que Rosa ganhou é quantas vezes menor que a de Mário? <u>Relação desconhecida</u> : Comprei uma boneca por R\$ 21,00 e uma bola por R\$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?
	Combinatória	<u>Produto cartesiano</u> : Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinho ou copinho. Tem 4 sabores diferentes (menta, baunilha, chocolate, morango). Maria quer um sorvete de uma bola. Quantas maneiras diferentes ela tem para escolher? <u>Área</u> : A sala de aula da Escola Divertida tem formato retangular com 3 metros de largura e 5 metros de extensão. Qual é a área da sala de aula?	<u>Produto cartesiano inverso</u> : Uma loja vende bola de cores diferentes e em 2 tamanhos (pequeno e grande). Para cada cor tem bolsas dos dois tamanhos. No total são 12 bolas diferentes. Quantas cores diferentes poder ser as bolas?

Fonte: Montenegro (2018, p. 60) – problemas extraídos de Gitirana *et al.* (2014).

É possível observar a diversidade de problemas que faz parte das estruturas multiplicativas. As situações combinatórias, por exemplo, fazem parte das relações ternárias caracterizadas como produto de medidas. Entretanto, conforme vimos no capítulo 2, a combinatória ultrapassa problemas dessa natureza, incluindo-se, ainda, neste campo, os arranjos, permutações e combinações.

4.2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Vergnaud (1996), em sua teoria dos campos conceituais, já havia dado mostras de que as representações simbólicas têm um papel importante no processo de conceitualização. Nessa perspectiva de representação, Duval (2003, 2012), em sua teoria dos Registros de Representações Semióticas, torna tais representações o centro de suas investigações no que se refere ao processo de aprendizagem matemática, considerando alguns aspectos fundamentais: o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para evolução do pensamento matemático; as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado; e há uma grande variedade de representações semióticas utilizadas na matemática.

Para Duval (2012, p. 04), as representações semióticas são “produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento”. Como exemplos de representações semióticas, temos um sistema de numeração, uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica ou um gráfico (Duval, 2003, 2012). O autor destaca que tais representações não são um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, “elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento” (Duval, 2012, p. 04). Dessa forma, elas são fundamentais para o desenvolvimento das representações mentais, para realização de diferentes funções cognitivas – objetivação, comunicação e tratamento – e para produção de conhecimentos – tratar o mesmo objeto matemático sob diversas representações semióticas (Duval, 2012).

Como o acesso ao objeto matemático se dá por meio de representações semióticas, é preciso não confundir o objeto matemático com suas formas de representação. Tal confusão acarreta “uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações “inertes” que não sugerem nenhum tratamento” (Duval, 2012, p. 03). Se ocorre uma confusão entre o objeto matemático e sua representação e, ao mesmo tempo, para lidar com as diversas representações semióticas relacionadas a um objeto matemático exige uma apreensão satisfatória do conceito, como se dará a aprendizagem em matemática? A essa situação, Duval (2012) chama de paradoxo cognitivo do pensamento matemático e afirma que, no ensino de matemática, não é dada tanta importância, uma vez que

há uma maior preocupação com as representações mentais, isto é, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado.

Para que seja possível diferenciar o objeto matemático e suas representações semióticas e de fato se tenha acesso ao objeto matemático (a apreensão do conceito), é importante coordenar uma diversidade de registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc.) (Duval, 2003, 2012). Duval (2003) organiza os diversos tipos de registros envolvidos na aprendizagem matemática em quatro grandes grupos, conforme quadro 23.

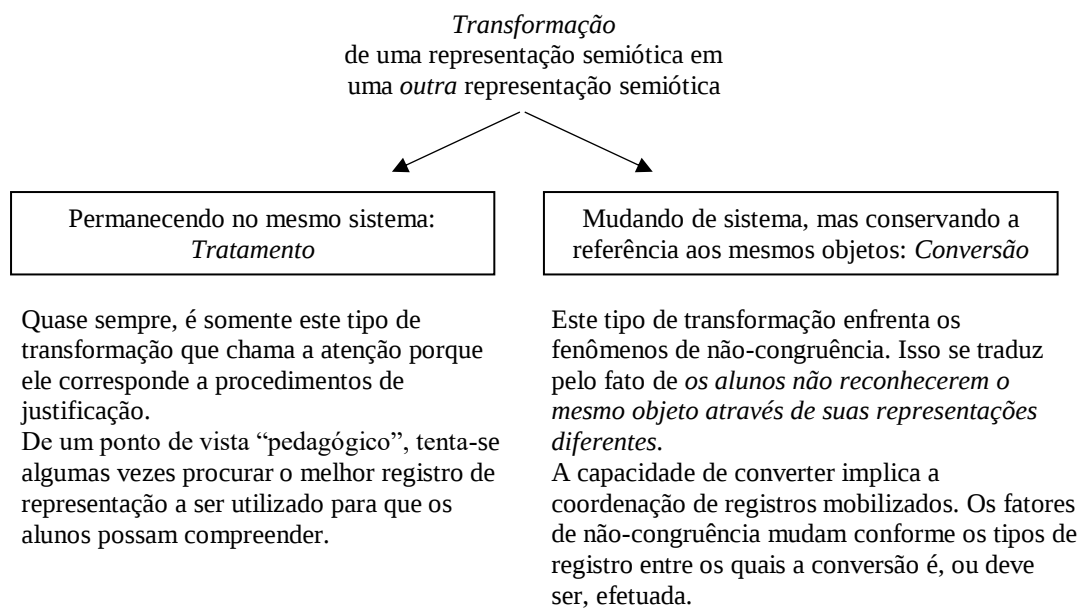
Quadro 23 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p. 14).

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação, três atividades cognitivas são necessárias: a formação de uma representação identificável que obedeça a regras referentes ao tipo do registro, tais como enunciação de uma frase (compreensível em uma língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, etc.; o tratamento, que é a transformação da representação no mesmo registro em que ela foi criada; e a conversão, que é a transformação da representação em outra representação em outro registro, conservando os objetos denotados (Duval, 2003, 2012). Sobre esses dois últimos, Duval (2003) destaca a sua importância para compreensão matemática e o cuidado necessário para saber distingui-los, conforme figura 4.

Figura 4 – A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão – dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas



Fonte: Duval (2003, p. 15).

Podemos observar o tratamento e a conversão de representações semióticas na situação problema abaixo, extraída do texto de Montenegro (2018). De 1) para 2) temos uma conversão de um registro de língua natural para um registro numérico. Em 2) temos o tratamento de cálculo numérico no registro numérico.

- 1) Lourenço joga duas partidas de bolinha de gude. Na primeira perde 2, na segunda perde 5. O que aconteceu?
- 2) -2 (perde duas) -5 (perde 5) $= -7$ ($2 + 5 = 7$) (perdeu 7 bolinhas).

Duval (2003, 2012) destaca que a conversão não pode ser confundida como um caso particular de tratamento ou até mesmo como algum tipo de codificação, mencionando alguns aspectos importantes: a conversão permite escolher um registro no qual as opções de tratamento efetuadas sejam mais econômicas e efetivas ou funcione como auxílio de tratamento para outro registro; usando como exemplo uma função e seu gráfico, uma codificação é simplesmente uma leitura pontual das representações gráficas, ao passo que a conversão permite uma apreensão global e qualitativa do registro gráfico, levando em conta, por exemplo, as variáveis visuais próprias dos gráficos (inclinação, interseção, com os eixos, etc.), bem como valores escalares das equações (coeficientes positivos ou negativos, maior ou menor a 1, etc.); cada tipo de registro possui suas variáveis cognitivas de funcionamento que são necessárias para que haja

algum tipo de articulação. Assim, “a conversão de representações, quaisquer que sejam os registros considerados, é irreduzível a um tratamento” (Duval, 2003, p. 17) e do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que “aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão” (Duval, 2003, p. 16).

Ainda sobre as peculiaridades que as conversões entre registros de representação semiótica apresentam, Duval (2003, 2012) aborda inicialmente as variações de congruência e de não congruência. Duval 1993 *apud* (Duval, 2012, p. 20) elenca três critérios que torna dois registros de representação semióticos congruentes ou não congruentes, além de medir o grau de não congruência das conversões:

Os três critérios de congruência são: a possibilidade de uma correspondência “semântica” de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar; A univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada; A organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica, segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjo das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão.

Dessa forma, duas representações semióticas são congruentes quando atendem os três critérios acima elencados. Quando pelo menos um dos critérios não é atendido, o grau de congruência é reduzido de tal modo que quando os três critérios não são atendidos, afirmamos que não há congruência entre as representações semióticas. Vejamos, abaixo, alguns exemplos que apresentam uma análise de cada critério de congruência em situações de problemas aditivos, extraídas de Montenegro (2018):

Lourenço joga duas partidas de bolinha de gude. Na primeira perde 2, na segunda perde 5. O que aconteceu?

-2 (perde duas) -5 (perde 5) = -7 ($2 + 5 = 7$) (perdeu 7 bolinhas).

Nesta situação, o critério de correspondência semântica não é atendido entre os registros de saída (linguagem natural) e o de chegada (tratamento numérico), uma vez que os verbos presentes no enunciado (perder) indicam para o aluno uma subtração, mas, na verdade, no registro de chegada houve uma soma para indicar a quantidade de bolinhas perdidas.

No exemplo seguinte, podemos observar o critério de univocidade semântica terminal:

Miguel joga duas partidas. Na primeira ganha 4. Na segunda perde 6. O que aconteceu?

$+4$ (ganha 4) - 6 (perde 6) = -2 (6 - 4 = 2) (perdeu duas bolinhas).

Nesta situação, há a presença de verbos antônimos (ganhar e perder) no enunciado, o que faz não haver uma única unidade significativa. Assim, quando há presença de dualidade, não é possível haver univocidade semântica terminal.

No próximo exemplo, podemos observar o critério de organização das unidades significantes:

Cristiano joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 5. Joga uma segunda partida. Depois dessas partidas, ganhou ao todo 9 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

$+5$ (?) = + 9 (9 - 5 = 4) (ganhou 4 bolinhas na segunda partida).

Nesta situação, observa-se que não há uma ordem de apresentação das unidades significantes, uma vez que o enunciado informa o resultado de duas partidas, mas não informa o resultado da segunda partida. Dessa forma, o critério da organização das unidades significantes não foi atendido.

Além de uma análise individual de cada critério de congruência, é importante observarmos uma análise completa por nível de congruência, conforme quadro 24:

Quadro 24 – Problemas aditivos por nível de congruência

Nível de congruência	Exemplo	Crítérios de congruência estabelecidos
Estritamente congruentes	- Pedro tem 6 bolinhas de gude, joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas tem depois da partida?	Há correspondência; não há inversão; não há presença de verbos antônimos.
Entre os polos	- Miguel joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 4. Na segunda, perde 6. O que aconteceu? - Cristiano joga duas partidas de bolinha de gude. Na primeira partida, ganha 5. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas ele ganhou, ao todo, 9 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?	- Há presença de verbos antônimos. - Não há correspondência; há inversão.
Fortemente não congruentes	- Olívio joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira ganha 2. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 7 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?	Não há correspondência; há inversão; há presença de verbos antônimos.

Fonte: Montenegro (2018, p. 71) com situações extraídas de Passoni e Campos (2003).

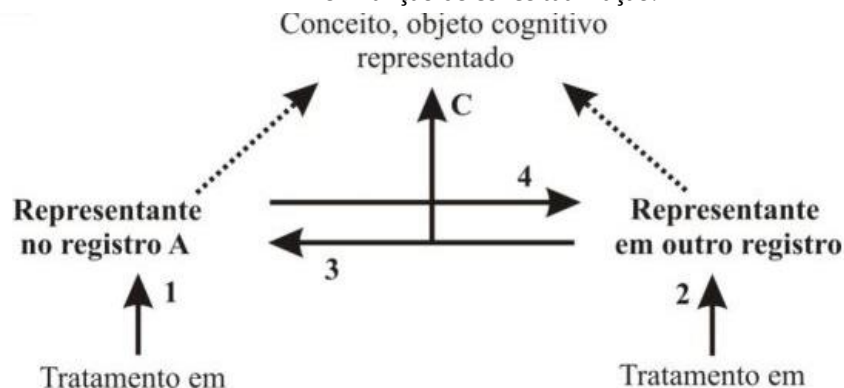
Outra situação envolvida com a atividade de conversão de registros de representação é a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Ou seja, Duval (2003) argumenta que não apenas um sentido seja privilegiado, mas que ambos sejam trabalhados nas diversas situações matemáticas. A não observância desse fato pode levar estudantes a não reconhecer representações por eles criadas, mas, que, em dado momento, seja necessário realizar conversões no sentido inverso das quais estavam habituados a lidar. Entretanto, “geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido” (Duval, 2003, p. 20).

Duval (2003, p. 21) exalta a importância do processo de conversão de registros de representação semiótica ao afirmar que “a compreensão matemática implica a capacidade de mudar de registro”. Entretanto, quando o estudante se depara com situações em que seja necessário mudar de registro, o fracasso e os bloqueios relacionados à aprendizagem matemática aumentam consideravelmente. A situação se agrava quando as situações exigem conversões de registros não-congruentes. Ou seja, os alunos conseguem desenvolver-se em matemática, em grande parte, quando estão diante de situações de monoregistro. A esse fenômeno, Duval (2003) chama de “enclausuramento” de registro, que traz como consequência a impossibilidade de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Além disso, “limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, o que afeta sua capacidade de compreensão e aprendizagem” (Duval, 2003, p. 21). Isso torna-se preocupante, pois

o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado [...]. Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto. Vemos, então, que duas representações de um mesmo objeto, produzidas em dois registros diferentes, não têm de forma alguma o mesmo conteúdo (Duval, 2003, p. 22).

Ao mesmo tempo, no contexto escolar, secundariza-se o trabalho com uma diversidade de representações semióticas, favorecendo, quando se erra, um maior estudo dos conceitos (Duval, 2012). Entretanto, para Duval (2012), o processo de aprendizagem matemática envolve uma relação harmônica entre conceito e representação, conforme podemos observar na figura 5.

Figura 5 – Hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização.



Fonte: Duval (2012, p. 17).

No esquema acima, as setas 1 e 2 representam os tratamentos em cada registro e as setas 3 e 4 correspondem às mudanças de registro por conversões. A seta C corresponde a uma coordenação entre os dois registros e as setas pontilhadas indicam a distinção entre representante e representado.

Duval (2012) destaca que a conversão de língua natural para outro registro de representação não é simples, principalmente nos casos de registros com grau elevado de não-congruência. Nesses casos, é necessário o uso de representações auxiliares de transição que se caracterizam como uma representação intermediária. Tais representações são usadas para que o registro simbólico em forma de expressão numérica seja melhor identificado e interpretado, de modo que, aos poucos, tais representações auxiliares vão dando espaço à conversão direta ao registro de expressão numérica, por ser mais econômico e eficiente. Nas situações combinatórias, por exemplo, sempre teremos conversões de registros não-congruentes, uma vez que não há correspondência semântica entre as unidades significantes, pois, os verbos presentes no enunciado dos problemas não indicam a multiplicação implícita nas situações. Nesse caso, o uso de representações auxiliares torna-se imprescindível. Vejamos alguns exemplos extraídos de Montenegro (2018) a respeito da não-congruência de registros quando se trata de situações combinatórias:

Quadro 25 – Problemas combinatórios por critérios de congruência

(continua)

Tipo	Exemplo	Critério de congruência
Produto cartesiano	Tenho 5 blusas e 3 saias. De quantas maneiras diferentes posso me vestir? $5 \times 3 = 15$ (15 maneiras diferentes de se vestir)	Não há correspondência semântica

(conclusão)		
Tipo	Exemplo	Critério de congruência
Arranjo	5 motocicletas estão participando de uma corrida. Quantas maneiras podemos elencar os três primeiros colocados? $5 \times 4 \times 3 = 60$ maneiras	Não há univocidade semântica (não há presença de verbos antônimos)
Combinação	Tenho 5 tipos de frutas e vou usar 3 para fazer uma salada de frutas. Quantas combinações de três frutas diferentes posso fazer? $(5 \times 4 \times 3) \div (3 \times 2) = 10$ (10 combinações).	
Permutação	Tenho 5 canetas de cores diferentes. De quantas formas posso ordená-las? $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ possibilidades	
Inversa (produto cartesiano)	Thalita tem algumas blusas e 2 saias. Combinando cada uma de suas blusas com cada uma de suas saias, ela pode formar 10 trajes. Quantas blusas Thalita tem? $10 \div 2 = 5$ (5 blusas).	

Fonte: Montenegro (2018, p. 80).

Podemos observar que em todas as situações expostas o enunciado não traz de forma explícita a operação de multiplicação a ser realizada para solução e não traz verbos que possam sugerir a operação a ser realizada. Dessa forma, os critérios de correspondência semântica e univocidade semântica não são atendidos, caracterizando as situações combinatórias como complexas em termos de congruência.

No presente estudo, as contribuições das teorias discutidas neste capítulo foram fundamentais para a construção de princípios que fundamentaram pedagogicamente o desenvolvimento do objeto de aprendizagem CombInter, aplicação desenvolvida neste trabalho.

5 ANDAIMES E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO POTENCIALIZADORES DE APRENDIZAGEM

Neste capítulo, são apresentados conceitos e funções dos andaimes, bem como a importância da metodologia de resolução de problemas no contexto matemático.

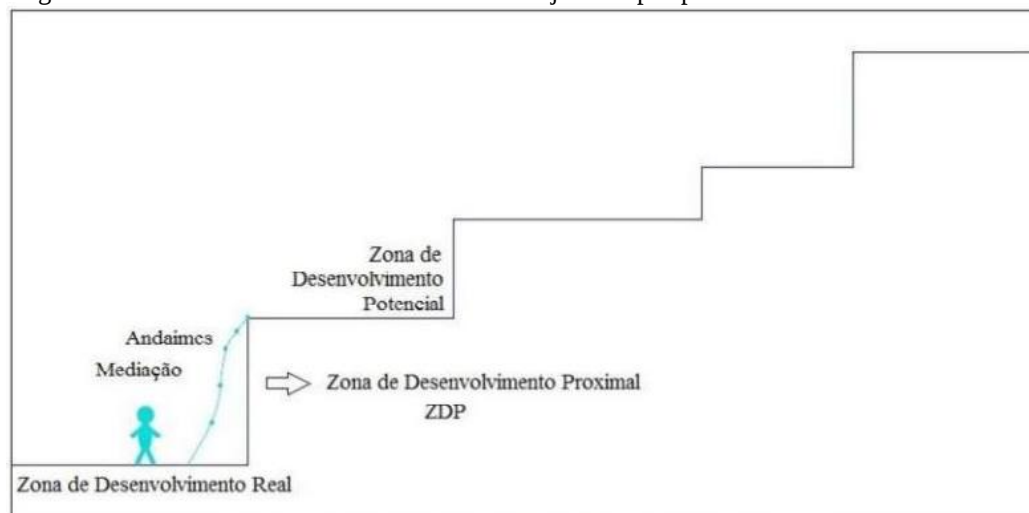
5.1 ANDAIMES: CONCEITOS E FUNÇÕES

O conceito de andaime foi, inicialmente, discutido por Wood, Bruner e Ross (1976). Para tais autores, andaime pode ser considerado como uma forma de ajuda que permite a um aprendiz realizar uma tarefa, resolver um problema ou alcançar um objetivo que estaria além do seu alcance. Essa forma de ajuda é muito além de uma simples resolução de problema assistida, uma vez que possibilita o “desenvolvimento da competência para a tarefa por parte do aluno a um ritmo que superaria em muito os seus esforços não assistidos” (Wood; Bruner; Ross, 1976, p. 90). Desse modo, podemos considerar andaime como “ferramentas, estratégias e guias que apoiam os alunos a atingir um nível mais elevado de compreensão” (Brush; Saye, 2002, p. 02). Para que se obtenha sucesso com uso de andaimes, Bikmaz *et al.*, (2010, p. 26) elencam alguns princípios:

a) manter um equilíbrio delicado entre desafiar e apoiar o aluno, b) usar formas de andaime apropriadas (permanentes, temporárias), c) modelar traços de personalidade e comportamentos favoráveis (experimentação, evitando julgamento, abertura...), d) proporcionar o ambiente mais adequado, e) responder e dar feedback aos alunos sobre suas dúvidas e comentários para que eles possam ser responsáveis por sua própria aprendizagem.

Como, inicialmente, a caracterização do andaime estava relacionada à relação de adulto e uma criança, vários autores relacionaram a ideia de andaime à teoria sociocultural de Vygostky, especialmente ao conceito de zona de desenvolvimento proximal (ZDP) (Gonulal; Loewen, 2018; Margolis, 2020; Verenikina, 2003). Para Vygostky (1999, p. 117), a ZDP representa “a distância entre o nível de desenvolvimento real, determinado pela resolução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da resolução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais capazes”, conforme representado na figura 6.

Figura 6 – Processo de desenvolvimento de um sujeito na perspectiva da Teoria Sociocultural



Fonte: Ludovico (2021, p. 55) – baseada em Vygotsky (1996).

Sob essa perspectiva, “os processos sociais e psicológicos humanos se formam através de ferramentas, ou artefactos culturais, que medeiam a interacção entre indivíduos e entre estes e os seus envolvimentos físicos” (Fino, 2001, p. 02). Segundo Joenk (2002, p. 04), mediação “é o processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação, que deixa de ser direta e passa a ser mediada por esse elemento”. Dessa forma, para Vygotsky, a mediação é característica central de sua teoria, pois a “utilização de artefactos, que são social e culturalmente construídos, tem efeitos sobre a mente do utilizador e sobre o contexto envolvente” (Joenk, 2002, p. 03) e “não apenas como um meio de facilitar processos mentais já existentes” (Joenk, 2002, p. 03).

Nesse processo de mediação, destacam-se dois elementos: o instrumento e o signo. O instrumento é o “elemento interposto entre o homem e o objeto de seu trabalho, ampliando as possibilidades de ação sobre a natureza”, isto é, o instrumento “é um elemento externo ao indivíduo, voltado para fora dele” (Joenk, 2002, p. 04). Já os signos são “como instrumentos psicológicos orientados para o próprio sujeito, para dentro do indivíduo, dirigindo-se ao controle de ações psicológicas” (Joenk, 2002, p. 04). Como exemplo de signos, temos a linguagem, os sistemas simbólicos algébricos, os esquemas, diagramas, etc. O sujeito, na realização desses processos, exerce o que Vygotsky chamou de internalização, que se inicia em um processo interpessoal a partir de uma atividade externa, que é reconstruída e passa a ser realizada internamente; em seguida, transforma-se em um processo intrapessoal. Essa série de transformações resulta sucessivos eventos de desenvolvimento do indivíduo (Vygotsky, 1999).

Os andaimes que, inicialmente, faziam parte de uma relação entre professor e aluno, passaram a ser programados em software de computador e jogos digitais, desenvolvidos com base em uma projeção das dificuldades dos alunos (Belland; Kim; Hannafin, 2013; Brush; Saye, 2002; Quintana; Fishman, 2006). Os andaimes de software usam “estratégias como prompts de perguntas, modelagem de especialistas/pares e ferramentas de manipulação de dados para aumentar e melhorar a compreensão conceitual, metacognição, uso de estratégias e compreensão de procedimentos dos alunos (Belland; Kim; Hannafin, 2013, p. 246).

Nessa perspectiva, o feedback instantâneo, a representação gráfica e a interatividade dos ambientes digitais foram considerados mecanismos importantes como forma de obtenção de dados do usuário e indução de regras. O apoio e orientações suficientes estão relacionados a um aumento da motivação para aprendizagem e a um menor risco de frustração. Esta última pode ocorrer devido a vários fracassos repetidos ou até mesmo levar à desistência devido à carga cognitiva excessiva. Entretanto, é importante dosar o momento de disponibilizar andaimes, bem como identificar os momentos de sua retirada gradativa para não inibir o desenvolvimento de soluções heurísticas pelos alunos (Sun; Wang; Chan, 2011).

Brush e Saye (2002) consideram que há dois tipos de suporte: andaimes flexíveis e andaimes rígidos. Os andaimes flexíveis são uma forma de ajuda “dinâmica e específica para uma situação fornecida por um professor ou colega para ajudar no processo de aprendizagem” (Brush; Saye, 2002, p. 02). Nesse modelo, o professor monitora os estudantes em situação de aprendizagem e, em momento oportuno, fornece apoios ou orientação de acordo com as respostas dos alunos. Já os andaimes rígidos “são suportes estáticos que podem ser antecipados e planejados com base nas dificuldades típicas dos alunos em uma tarefa” (Brush; Saye, 2002, p. 02). São essas estruturas de suporte que podem ser incorporadas em softwares multimídia e hipermídia de modo que sejam acionadas por estudantes enquanto usam o software (Brush; Saye, 2002).

Belland, Kim e Hannafin (2013) ressaltam que os andaimes de software são complementares e não substitutos dos andaimes do professor, enfatizando que a presença de ambas formas de andaime é necessária, de modo que as características fortes de cada modelo sejam implementadas, como a flexibilidade do andaime do professor, bem como, devido a sua natureza, os sempre ativos e replicáveis andaimes baseados em software. Além disso, os andaimes de software podem contribuir também para o desenvolvimento docente, fortalecendo suas práticas de ensino de modo que se tornem mais eficazes (Quintana; Fishman, 2006).

Há algumas discussões sobre os efeitos da “quantidade” de diferentes orientações instrucionais. Algumas pesquisas defendem que os estudantes aprendem melhor com instrução não guiada ou minimamente guiada, outras alegam que os alunos devem ser assistidos de forma direta com o objetivo de reduzir possível carga cognitiva (Quintana; Fishman, 2006). Kao, Chiang e Sun (2017, p. 296) evidenciam, entretanto, os trabalhos de Chang (2016) e Moreno (2004) ao discutirem que, respectivamente, “o uso de andaimes com orientação mínima, mas crítica, como a abordagem da pergunta orientadora, pode beneficiar a aprendizagem dos alunos em termos de seu envolvimento cognitivo” e que “a carga cognitiva dos alunos novatos poderia ser reduzida e eles poderiam aprender melhor com feedback fortemente orientado do que com descoberta”.

Verenikina (2003) elenca algumas formas de andaime que vêm sendo estudadas, a saber: demonstração; dividir uma tarefa em etapas mais simples; fornecer diretrizes; manter a atenção focada, bem como fornecer exemplos e questionamentos; quebrar o conteúdo em partes gerenciáveis. Wood, Bruner e Ross (1976) abordam seis funções principais sobre andaime:

- **Engajamento (recrutamento):** consiste em mobilizar o interesse do aluno e a adesão aos requisitos da tarefa;
- **Redução do grau de liberdade:** trata-se de simplificar a tarefa de tal modo que o aprendiz possa reconhecer os efeitos de sua ação, permitindo o uso de feedbacks para orientação;
- **Manutenção da direção:** corresponde em manter o aprendiz direcionado aos objetivos específicos que permitem solucionar a tarefa. Essa relação permanece, inclusive, quando o aprendiz obtém sucesso em tarefas simples e arrisca solucionar problemas mais complexos;
- **Aspectos críticos destacados:** trata-se de destacar elementos de uma tarefa que sejam relevantes para aprendizagem do aluno. A relação do aprendiz com esses destaques permite associar o que o estudante produziu com o que ele reconheceria como produção correta.

- **Controle de frustração:** consiste em criar meios para que a resolução de problemas seja menos estressante. É importante que os andaimes dessa natureza não causem uma excessiva dependência no estudante;
- **Demonstração:** corresponde à modelação de soluções para uma tarefa com objetivo de destacar conceitos e procedimentos relevantes que possam facilitar a compreensão dos estudantes.

No presente trabalho, como se trata de favorecer a aprendizagem de conceitos matemáticos a partir de objetos de aprendizagem, nos apropriamos das ideias de andaime e suas funções para estabelecer auxílios gradativos que possam facilitar a resolução de problemas e, consecutivamente, a apreensão dos conceitos envolvidos. A seguir, discutimos a importância da resolução de problemas para a compreensão matemática.

5.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A resolução de problemas acompanha a matemática desde a antiguidade. Por meio da resolução de problemas, tivemos respostas a várias questões, sejam relacionadas a “diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática” (Brasil, 1997, p. 32).

Trazendo para o contexto do ensino de matemática, um problema matemático “é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la” (Brasil, 1997, p. 33). Nesse tipo de situação, não se dispõe de procedimentos automáticos, que permitam solucionar o problema de forma imediata, exigindo sempre um processo de reflexão e tomada de decisão sobre que passos seguir (Echeverría; Pozo, 1998). Dessa forma, há mobilização de conceitos, princípios e procedimentos matemáticos para obter uma resposta (Proença, 2018).

Diferentemente, um exercício pressupõe uma aplicação quase direta de uma fórmula ou processo operatório para obter a solução (Brasil, 1997). O exercício, portanto, tem uma função específica de por meio da repetição favorecer a consolidação de procedimentos algorítmicos, técnicas e certas habilidades. Desse modo, dificilmente tais técnicas servirão de ajuda para

situações diferentes das quais foram treinadas, o que dificulta a compreensão e aprendizagem de conceitos (Echeverría, 1998). Considerando o conhecimento, experiência, habilidade ou interesse, uma situação pode ser problema para uma pessoa e para outra ser um exercício, ou para uma mesma pessoa, algumas situações podem ser um problema, mas com o tempo podem ser exercícios (Kaur, 1997).

A resolução de problemas representa, assim, um conjunto de atividades cognitivas de nível complexo, que interfere em várias faculdades intelectuais do indivíduo: memória, percepção, associação, raciocínio, conceituação, linguagem, emoções, motivação, autoconfiança, capacidade de controle, manipulação, construção, síntese, generalização, cada uma precisando ser gerenciadas e todas coordenadas (Garofalo; Lester, 1985; Raynal; Rieunier, 1997 *apud* Căprioară^a, 2014). Entretanto, apesar dos problemas sempre fazerem parte do ensino de matemática, a resolução de problemas como metodologia de ensino foi surgir apenas a partir de 1980, conforme quadro 26.

Quadro 26 – Relações entre as Fases da Educação Matemática e as Teorias Psicológicas de Aprendizagem (continua)

Fases	Principais Teorias e Teóricos	Foco	Como atingir
Exercício e prática (aprox.. 1920 – 1930)	Coneccionismo e Associacionismo (Thorndike)	Facilidade com cálculo.	• Rotina, memorização de fatos e algoritmos. • Quebrar todo o trabalho em séries de pequenos passos.
Aritmética significativa (aprox.. 1930 – 1950s)	Teoria da Gestalt (Brownell, Wertheimer, Van Engen, Fehr)	Compreensão de ideias e habilidades aritméticas. Aplicações da matemática em problemas do mundo real	• Ênfase nas relações matemáticas. • Aprendizagem incidental. • Abordagem de atividade orientada.
Matemática Moderna (aprox. 1960 – 1970s)	Psicologia do desenvolvimento, teoria sociocultural (ex: Brunner, Piaget, Dienes)	Compreensão da estrutura da disciplina	• Estudo das estruturas matemáticas. • Currículo em espiral. • Aprendizagem por descoberta
Volta às bases (aprox.. 1970s)	(Retorno ao) coneccionismo.	(Retorno à) preocupação com o desenvolvimento do conhecimento e das habilidades.	• (Retorno à) aprendizagem de fatos por exercício e prática.

(conclusão)

Fases	Principais Teorias e Teóricos	Foco	Como atingir
Resolução de problemas (aprox. 1980s)	Construtivismo, psicologia cognitiva e teoria sociocultural (Vygotsky)	Resolução de problemas e processos de pensamento matemático	• Retorno à aprendizagem por descoberta. • Aprendizagem através de resolução de problemas.
Padrões, avaliação, responsabilidade (aprox. 1990 até o presente)	Psicologia cognitiva, teoria sociocultural vs renovada ênfase na psicologia experimental. (NCBL)	Guerras matemáticas: preocupação com a alfabetização matemática dos indivíduos vs preocupação com a gestão dos sistemas educacionais.	• NSF – desenvolvimento de currículos baseados em padrões e orientados ao estudante vs foco na preparação para os testes com expectativas específicas.

Fonte: Onuchic e Allevato (2011, p. 77) – traduzido de Lambdin e Walcott (2007, p. 5).

Apesar das fases – (1) Exercício e prática; (2) Aritmética significativa; (3) Matemática Moderna; (4) Volta às bases; (5) Resolução de problemas; e, atualmente, (6) Padrões e responsabilidade – elencadas no quadro 26 terem sido elaboradas com base nas escolas americanas, Onuchic e Allevato (2011, p. 77) salientam que “algumas das fases apontadas também foram vivenciadas em outros lugares do mundo, e exerceram forte influência nos rumos que o trabalho com a matemática escolar tomou a partir de então”.

Nesse tipo de proposta, os problemas são colocados em destaque, no sentido de saber escolhê-los de modo a proporcionar reflexões importantes em quem vai tentar solucioná-los. Nessa perspectiva, Lappan e Phillips (1998) desenvolveram um conjunto de critérios que são importantes para um bom problema: (1) O problema envolve matemática útil e importante; (2) O problema exige níveis mais altos de pensamento e resolução de problemas; (3) O problema contribui para o desenvolvimento conceitual dos alunos; (4) O problema cria uma oportunidade para o professor avaliar seus alunos; (5) O problema pode ser abordado por estudantes de múltiplas maneiras usando diferentes estratégias de resolução; (6) O problema tem várias soluções ou permite diferentes decisões ou posições a serem tomadas e defendidas; (7) O problema encoraja o envolvimento e o discurso dos alunos; (8) O problema se liga a outras importantes ideias matemáticas; (9) O problema promove o uso habilidoso da matemática; (10) O problema proporciona uma oportunidade de praticar habilidades importantes.

Cai e Lester (2012) consideram que dificilmente todos os problemas que um professor selecione contenham os dez critérios apresentados. Há momentos em que o professor precisa desenvolver aspectos que priorizem um ou mais critérios. Entretanto, argumentam que os quatro

primeiros critérios são essenciais para que o professor torne a resolução de problemas um balizador de sua atividade docente, uma vez que o “valor real desses critérios é que eles fornecem aos professores as diretrizes para a tomada de decisões sobre como tornar a resolução de problemas um aspecto central do seu ensino” (Cai; Lester, 2012, p. 150).

Mendonça (1999) apresenta uma categorização sobre a forma de abordar a resolução de problemas: (1) como objetivo, quando se ensina matemática para resolver problemas. Nesse caso, a teoria é exposta e, em seguida, são propostos problemas que serão solucionados com a teoria e procedimentos discutidos; (2) como processo, quando a ênfase é dada às estratégias de solução (heurísticas). Nessa situação, durante o ensino de matemática, há prioridade em discutir estratégias de solução, de modo que os estudantes tenham domínio nos procedimentos necessários para resolver um problema em matemática; (3) e, como ponto de partida, quando a partir dos problemas busca-se construir os conceitos e o ensino de diversos conteúdos, incluindo, as estratégias de solução. Além dessas abordagens de resolução de problemas, diversos autores, tais como, Mendonça (1999), Polya (2006), Proença (2021) e Stoyanova (1998), destacam a formulação ou reformulação de problemas como uma nova etapa a ser inserida no processo de aprendizagem matemática, uma vez que permite que os alunos “se envolvam diretamente nos processos, aumentem os níveis de motivação, sendo encorajados a investigar, tomar decisões, procurar padrões, estabelecer conexões, generalizar, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas” (Vale; Pimentel; Barbosa, 2015, p. 47).

Ensinar e aprender na perspectiva da resolução de problemas é uma tarefa complexa, pois, geralmente, envolve o conhecimento de fatos, de algoritmos, e de matemática em geral que o indivíduo possui; conhecimento de estratégias de solução de problemas; conhecimento sobre como o indivíduo utiliza e gerencia as informações; as percepções que cada um tem de si próprio, da matemática, dos problemas e do mundo em geral (Shoenfeld, 1985). Fernandes (1989) sugere que o ensino explícito de aspectos metacognitivos podem contribuir para resolução de problemas e, conseqüentemente, para compreensão e utilização de conceitos matemáticos. Nessa perspectiva

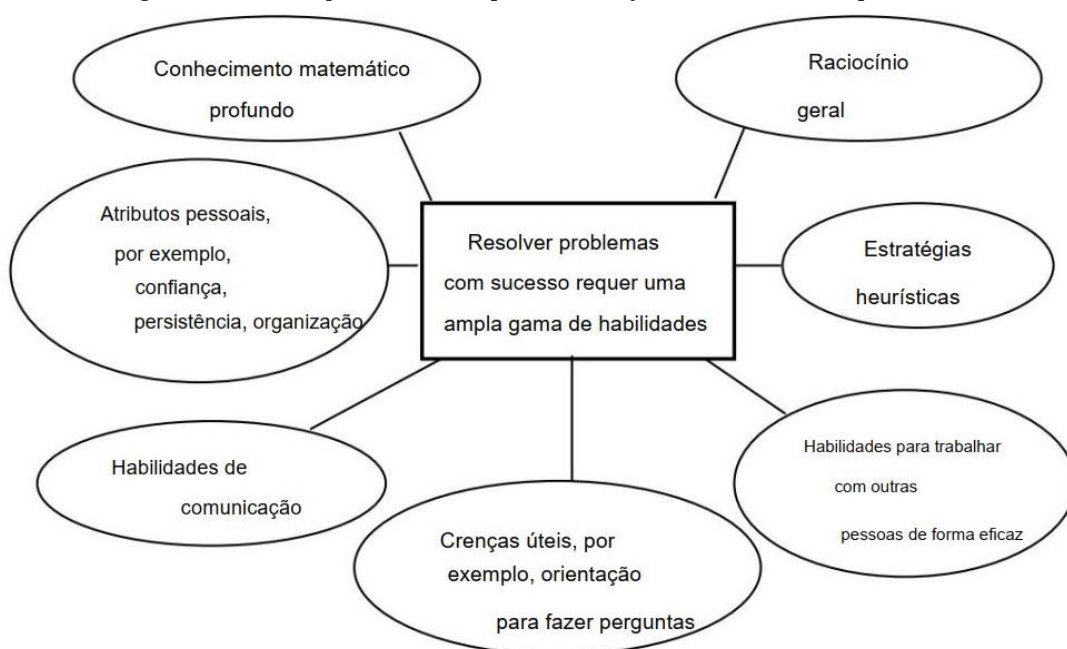
(1) Os alunos tornam-se mais conscientes acerca dos seus conhecimentos e utilizam-nos de forma mais sistemática e organizada; (2) os alunos revelam-se mais capazes de utilizarem uma diversidade de estratégias de uma forma mais flexível e eficaz; e (3) os alunos podem corrigir pré-conceitos e ideias erradas que muitas vezes adquirem acerca da matemática e dos problemas (Fernandes, 1989, p. 04).

Para que isso seja possível, é importante que os alunos passem por um processo de conscientização acerca de suas capacidades metacognitivas. Os professores podem realizar

algumas atividades que contribuam para esse processo, a saber: (1) fazer perguntas que levem os alunos a refletir sobre seus comportamentos e maneiras de pensar, analisar e aplicar seus conhecimentos matemáticos; (2) transmitir aos alunos um conjunto de ideias, fatos, e conceitos inerentes ao ensino e à aprendizagem da matemática que possam influenciar o rendimento nesta disciplina de forma significativa; (3) auxiliar os alunos a avaliar e regular os seus comportamentos e ações (Fernandes, 1989). Sobre o terceiro ponto abordado, é importante que o professor, ao demonstrar a solução de um problema, possa “explicitar as decisões que tomou e deve explicitar como avaliou e controlou tais decisões. Numa palavra, o professor deve explicitar aos alunos a forma como geriu e/ou organizou os seus conhecimentos na resolução do problema” (Fernandes, 1989, p. 05).

Vários autores identificaram tipos de conhecimentos que estavam relacionados ao bom desenvolvimento em resolução de problemas (Heller; Hungate, 1985; Kilpatrick, 1985; Kroll; Miller, 1993; Mayer, 1982; Schoenfeld, 1983a, 1983b). A partir dessas pesquisas, Kaur (1997) ressalta que os aspectos que maior diferenciam os solucionadores de problemas bem-sucedidos e malsucedidos são o conhecimento matemático, a metacognição e as crenças e fatores de afeto. Destacamos, na figura 7, os casos apresentados por Stacey (2005).

Figura 7 – Fatores que contribuem para a resolução bem-sucedida de problemas



Fonte: Anderson (2009, p. 01) a partir de Stacey (2005, p. 342).

Com a resolução de problemas, a aprendizagem se materializa a partir da tentativa de solucionar problemas que possuem conceitos e habilidades matemáticas relevantes

incorporados. Nesse processo, os estudantes podem elaborar diversas formas de pensar sobre o problema e, em parceria com seus pares, apresentar possíveis soluções que podem ser discutidas e /ou reelaboradas, contribuindo para um processo de compreensão compartilhada (Cai; Lester, 2012). Os discursos em sala de aula ganham evidência, sejam entre professor e aluno ou entre alunos, principalmente na forma de questionamento docente, uma vez que há “evidências empíricas que sustentam as relações positivas entre os questionamentos de ordem superior dos professores e a aprendizagem dos alunos” (Cai; Lester, 2012, p. 153).

Ainda em relação à importância do professor para aprendizagem matemática, Van de Walle (2009) sugere que o docente, durante seu planejamento, inicie com problemas que os alunos possam resolver sozinhos, de modo a criar confiança em suas próprias capacidades; valorize os esforços e as tentativas, questionando os estudantes como pensaram as estratégias tomadas e não apenas o resultado; escute todos os alunos, de modo que a discussão não seja encerrada ao obter a solução correta; possibilite a inclusão de estudantes com menores habilidades em resolver problemas, a partir da disponibilidade de questões com variados níveis de dificuldade. Cai e Lester (2012) chamam a atenção para fornecer mais tempo para os estudantes discutirem o problema, bem como dedicar mais tempo nos processos que levam a uma solução. Além disso, alerta para que professores não retirem “os desafios de uma tarefa matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, e dizendo aos alunos como resolver o problema” (Cai; Lester, 2012, p. 156). Ensinar na perspectiva de resolução de problemas significa que o “o professor deve estar preparado para o aleatório, o não-pensado, pois são situações que podem ocorrer durante a busca das soluções para os problemas trabalhados” (Romanatto, 2012, p. 304).

Há várias evidências de que o trabalho com resolução de problemas traz importantes capacidades para o indivíduo que vão além do conteúdo matemático abordado: criatividade e autonomia dos estudantes, melhora na escrita e leitura, confiança, favorece o estabelecimento de conexões com outras áreas do conhecimento, com os diversos campos da Matemática e com situações do cotidiano (Barros; Justulin, 2020; Costa; Allevato, 2014; Gonçalves; Allevato, 2018; Possamai; Silva, 2020; Gieseler *et al.*, 2021; Leal Junior; Onuchic, 2018). Além disso, ajuda os alunos a abordar o problema e a descobrir um caminho, facilita a interpretação das situações, permite compreender que um problema pode ser abordado de muitos modos diferentes e com a utilização de várias estratégias (Vale; Pimentel; Barbosa, 2015), favorece elevadas qualidades morais (coragem, determinação, ambição, paciência, perseverança, espírito

de iniciativa e entusiasmo), desenvolvem uma compreensão de quando é apropriado usar estratégias específicas (Cáprioarã, 2015).

No que se refere às estratégias de resolução de problemas, alguns autores, como Polya (2006) e Proença (2018), caracterizaram a resolução de problemas em etapas não rígidas que auxiliam professores e estudantes a melhor compreender o processo de resolução de problemas. Para Polya (2006), se dá, de forma geral, a partir da compreensão do problema, da formulação de um plano, da execução de um plano e do retrospecto. A seguir, discutimos, cada etapa sugerida pelo referido autor.

- **Compreensão do problema**

Em todas as etapas de resolução de problemas, Polya chama a atenção para as indagações que o professor ou estudante pode fazer tanto para si como para os outros quando estão diante de algum problema para resolver. Para compreensão do problema, pode-se questionar: Qual é a incógnita do problema? Do que é que se precisa? Quais são os dados? Qual é a condicionante? O que é que se quer? O que é que se deve procurar? Por qual condição está a incógnita ligada aos dados? Tais indagações têm o objetivo de “focalizar a atenção do aluno na incógnita. [...] A indagação e a sugestão visam ao mesmo objetivo: ambas tendem a provocar a mesma operação mental. [...] operações mentais, úteis para a resolução de problemas” (Polya, 2006, p. 02). Além disso, “elas encaminham a atenção do aluno para as partes principais de um problema de determinação, a incógnita, os dados, a condicionante” (Polya, 2006, p. 151). Dessa forma, o estudante

deve considerar as partes principais do problema, atenta e repetidamente, sob vários pontos de vista. Se houver uma figura relacionada ao problema, deverá traçar uma figura e nela indicar a incógnita e os dados. Se for necessário designar estes elementos, deverá adotar uma notação adequada, pois, dedicando alguma atenção à escolha dos signos apropriados, será obrigado a considerar os elementos para os quais esses signos têm de ser escolhidos (Polya, 2006, p. 05).

Ainda sobre esse processo de compreensão, devemos visualizar “o problema como um todo, com tanta clareza e nitidez quanto possível”, [...] familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo” (Polya, 2006, p. 29). Essa atenção dada ao problema pode estimular a memória e propiciar a recordação de pontos relevantes, além de identificar as possíveis relações entre incógnita, dados e condicionante do problema. Outro aspecto importante refere-se ao equacionamento da condicionante, isto é, traduzir a condicionante em símbolos matemáticos.

Para que esse processo seja válido, é importante escolher uma boa notação, pois “quando nos defrontamos com um novo problema, devemos escolher certos símbolos, devemos adotar uma notação adequada”. Além disso, a notação “aparece como uma espécie de linguagem, *une langue bien faite*, uma linguagem bem adaptada ao seu objetivo, concisa e precisa, cujas regras, ao contrário do que ocorre com as regras da gramática corrente, não sofrem exceções” (Polya, 2006, p. 111). A partir de uma notação cuidadosamente adotada, evitam-se hesitações e confusões no relacionamento dos dados, incógnita e condicionantes do problema, uma vez que os elementos do problema foram bem denotados, o que contribui consideravelmente para compreensão do problema (Polya, 2006). Dessa forma, “uma boa notação deve ser inequívoca, fecunda, fácil de lembrar; ela deve fugir de segundos sentidos prejudiciais e aproveitar os segundos sentidos úteis” (Polya, 2006, p. 112).

- **Formulação de um plano**

Durante o processo de compreensão do problema, “a ideia proveitosa” pode surgir a qualquer momento. Por exemplo, ao traçar uma figura que represente a condicionante do problema, o estudante pode vislumbrar ideias que possam solucionar ou contribuir para elaboração de um plano de solução. Mesmo o problema não sendo de geometria, “é possível tentar traçar uma figura. A procura de uma lúcida representação geométrica para um problema não geométrico constitui um importante passo no sentido da solução” (Polya, 2006, p. 97).

Outro aspecto também importante e que pode suscitar no estabelecimento de um plano é o equacionamento da condicionante. Esse processo ocorre, quando convertemos a condicionante, inicialmente em linguagem natural, para uma linguagem matemática por meio de expressões ou símbolos matemáticos. Com isso, é possível separar diversas partes da condicionante, de modo que possam ser estudadas isoladamente, facilitando o processo de solução. Nesse processo, surgem também as suposições que são conjecturas realizadas a partir dos dados e condicionantes. Elas “merecem ser examinadas e levadas a sério: aquelas que nos ocorrem depois de realmente compreendido e atentamente examinado um problema no qual estamos sinceramente interessados” (Polya, 2006, p. 87). Até mesmo suposições “erradas” podem ser interessantes, pois servem de ponte para outras melhores (Polya, 2006).

Diante da compreensão do problema, identificação dos dados, incógnita e condicionantes, ter feito o equacionamento, uma figura, pensar em um problema correlato pode

ser uma alternativa para contribuir na elaboração de um plano. Dessa forma, estabelecemos um plano quando

conhecemos, pelo menos de um modo geral, quais as contas, os cálculos ou os desenhos que precisamos executar para obter a incógnita. O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso. Realmente, o principal feito na resolução de um problema é a concepção da ideia de um plano. Esta ideia pode surgir gradualmente ou, então, após tentativas infrutíferas e um período de hesitação, aparecer repentinamente, num lampejo, como uma “ideia brilhante” (Polya, 2006, p. 07).

Alguns questionamentos podem ser realizados nessa etapa, tais como: é possível utilizar o problema correlato? É possível reformular o problema? Todos os dados e condicionantes do problema foram utilizados? Em qualquer caso, a experiência de quem está diante do problema irá influenciar consideravelmente nesse processo, uma vez que os conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente, bem como os problemas anteriormente resolvidos influenciam de sobremaneira no processo de resolução de problemas (Polya, 2006).

- **Execução do plano**

Com a elaboração de um plano definida, a execução do plano se dá com a efetivação das ideias tidas anteriormente. Para isso, cada operação, seja algébrica ou geométrica, é realizada detalhadamente, assegurando-se de que as conjecturas elaboradas na determinação de um plano façam sentido para obter a solução.

- **Retrospecto**

O retrospecto é o processo pelo qual o estudante ou professor, diante da solução do problema, realiza diversas ações que possibilitam rever e reanalisar a solução encontrada e o caminho que a levou; estuda formas de aplicação daquela solução em outros problemas; reflete sobre o problema, seja verificando parâmetros que interferem na interpretação do resultado, seja reformulando ou criando novos problemas a partir do problema anterior (Polya, 2006). A partir disso, os estudantes “poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a sua capacidade de resolver problemas”, transmite a ideia de que “problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer. Com estudo e aprofundamento,

podemos melhorar qualquer resolução e, seja como for, é sempre possível aperfeiçoar a nossa compreensão da resolução” (Polya, 2006, p. 12). Dessa forma,

os detalhes da fórmula adquirem um novo significado e ficam ligados a vários fatos. A fórmula tem, portanto, melhor probabilidade de ficar lembrada, o conhecimento do estudante consolida-se. Finalmente, as indagações podem facilmente ser transferidas para problemas semelhantes. Após alguma experiência com problemas semelhantes, um estudante hábil poderá perceber as ideias básicas gerais: a utilização dos dados relevantes, a variação dos dados, a simetria, a analogia. Se ele adquirir o hábito de dirigir sua atenção para estes pontos, a sua capacidade de resolver problemas poderá definitivamente beneficiar-se (Polya, 2006, p. 14).

Alguns questionamentos são sugeridos durante esse processo, tais como: É possível verificar o resultado? É possível verificar o argumento? É possível chegar ao resultado por um caminho diferente? É possível utilizar um argumento curto e intuitivo ao invés de outro longo e trabalhoso? É possível utilizar o resultado, ou o método, em algum outro problema? Essa prática mostrará para os estudantes que a solução de um problema pode ir muito além da “resposta correta e ir para outro problema”, contribuindo assim para uma melhor compreensão conceitual envolvida.

Conhecer os processos relacionados à resolução de problemas é fundamental para caracterização de andaimes que auxiliem no processo de compreensão matemática. Neste trabalho, tanto as discussões teóricas a respeito da resolução de problemas, bem como as estratégias de resolução de problemas abordadas por Polya (1996) serviram de base para a construção de andaimes pertinentes aos princípios teóricos desenvolvidos.

No próximo capítulo, é apresentada a metodologia de pesquisa adotada por este trabalho.

6 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentados o percurso metodológico adotado nesta pesquisa, as técnicas de coleta de dados, os sujeitos participantes, bem como a forma de análise dos dados.

6.1 TIPO DE PESQUISA

Como pretendemos discutir aspectos teóricos que possam servir de base para construção de objetos de aprendizagem em matemática, adotamos, como contexto matemático, a situação problemática de ensino e aprendizagem envolvendo o conteúdo de análise combinatória. Nessa perspectiva, é proposto o desenvolvimento e aplicação do objeto de aprendizagem CombInter como recurso para amenizar os problemas educativos envolvidos. No presente contexto, os principais consumidores de objetos de aprendizagem são os professores e alunos e foi a partir da participação desta comunidade que foram construídas propostas de solução. Dado o caráter aplicado desta pesquisa e por propor soluções para problemas reais da educação matemática, optamos pela abordagem de pesquisa *Design-Based Research* (DBR) como metodologia deste estudo, uma vez que busca desenvolver “investigações com foco no desenvolvimento de aplicações e na busca de soluções práticas e inovadoras para os graves problemas da educação [...]” (Matta; Silva; Boaventura, 2014, p. 25).

Segundo Barab e Squire (2004, p. 02), a DBR pode ser definida como “uma série de abordagens, com a intenção de produzir novas teorias, artefatos e práticas que considerem e potencialmente impactem a aprendizagem e o ensino em ambientes naturalistas”. Wang e Hannafin (2005, p. 02) complementam ao argumentar que a pesquisa baseada em design é uma metodologia destinada a melhorar “as práticas educacionais por meio de revisão, análise, design, desenvolvimento e implementação sistemática, flexível e iterativa, com base na colaboração entre pesquisadores e profissionais em ambientes do mundo real, e levando a princípios ou teorias de design”. A partir dessas definições, podemos observar a ênfase que é dada à questão prática na pesquisa, no sentido de além de existir discussões teóricas, também haja algum tipo de intervenção envolvendo a comunidade. Essa é, inclusive, um dos motivos que favoreceu o seu desenvolvimento, uma vez que “a maior parte das pesquisas, com metodologia descritiva ou experimental, outras migrando para abordagens qualitativas, tinham resultados expressivos, mas pouco voltadas para a aplicação” (Matta; Silva; Boaventura, 2014, p. 24).

Mckenney e Reeves (2012) *apud* (Matta; Silva; Boaventura, 2014, p. 26) destacam 5 características da DBR:

- 1) **Teoricamente orientada:** as teorias se mostram como princípios de design e modelagem para as soluções práticas demandadas. Um dos sentidos mais importantes da DBR é utilizar uma proposta teórica como fundamento para a construção do design educacional proposto. A base teórica baseia a construção da proposta prática a ser sugerida, mas também é estudada e potencialmente melhorada e compreendida, na medida dos resultados.

Nesta pesquisa, a base teórica discutida nos capítulos 4 e 5 foi fundamental para a elaboração de princípios teóricos iniciais abordados na seção 7.1.1, que foram utilizados para fundamentar pedagogicamente o objeto de aprendizagem desenvolvido. Uma vez que o OA foi estudado e validado (conforme seções 7.2 e 7.3), tais princípios e também a ferramenta foram potencialmente melhorados a partir do refinamento dos princípios existentes, além da possibilidade da produção de novos princípios oriundos da prática (conforme seção 7.4).

- 2) **Intervencionista:** utiliza-se o fundamento teórico escolhido e o diálogo com o contexto de aplicação para que a pesquisa desenvolva uma aplicação que irá intervir no campo da práxis pedagógica e pretenderá produzir: a) produtos educacionais tais como materiais didáticos de toda natureza e suporte; b) processos pedagógicos como, por exemplo, recomendações de atitude docente, novas propostas didáticas; c) programas educacionais como currículos, cursos, organização de temas e didáticas, também desenvolvimento profissional para professores; ou d) políticas educacionais como protocolos de avaliação docente ou discente, procedimentos e recomendações de investimento, aquisição, opções para relação entre a escola e a comunidade.

Neste trabalho, o campo da práxis pedagógica envolvido refere-se ao ensino e aprendizagem de análise combinatória no ensino médio. A partir de buscas por soluções para os problemas envolvidos com a área, discutidos no capítulo 2, foram elaborados princípios teóricos que norteiam a fundamentação pedagógica de objetos de aprendizagem que favoreçam a aprendizagem de conceitos matemáticos. Tais princípios serviram de base para a construção do objeto de aprendizagem CombInter que foi aplicado e validado no contexto de sala de aula de matemática. Durante a aplicação, voltou-se o olhar para as consequências que tais princípios, neste caso, em forma de objeto de aprendizagem, promoveram em termos de ensino e aprendizagem em análise combinatória. Dessa forma, percebem-se duas formas de resultados da DBR abordadas por Herrington *et al.* (2007): o produto científico, que são os princípios teóricos gerados – nesta pesquisa, são os princípios teóricos para fundamentação de OAs; e o

produto prático, que são os artefatos projetados – nesta pesquisa, é o objeto de aprendizagem CombInter. Outro resultado, também abordado pelos mesmos autores, refere-se desenvolvimento profissional dos participantes, devido, principalmente, ao caráter colaborativo da DBR, conforme podemos observar no tópico a seguir.

- 3) **Colaborativa:** a DBR é sempre conduzida em meio a vários graus de colaboração. O desenvolvimento e a busca por uma aplicação que seja solução concreta para problemas dados obrigam à colaboração de todos os envolvidos: investigador, comunidade e pessoas que se relacionam.

Nessa perspectiva, Kennedy-Clark (2013) destaca a importância de inserir no estudo uma série de grupos participantes relevantes, uma vez que é possível agregar valor a um estudo, pois podem identificar problemas com o projeto a partir de uma análise crítica antes do teste de campo final. Considerando o contexto desta pesquisa, utilizamos professores de matemática da educação básica e ensino superior, profissionais com experiência em desenvolvimento de recursos digitais para o ensino de matemática, estudantes do ensino médio e licenciandos em matemática como grupos participantes relevantes, de modo que possam apresentar contribuições em termos do objeto de aprendizagem desenvolvido, bem como em relação ao design proposto.

- 4) **Fundamentalmente responsiva:** a DBR é moldada pelo diálogo entre a sabedoria dos participantes, o conhecimento teórico, suas interpretações e advindos da literatura, e pelo conjunto dos testes e validações diversas realizadas em campo.

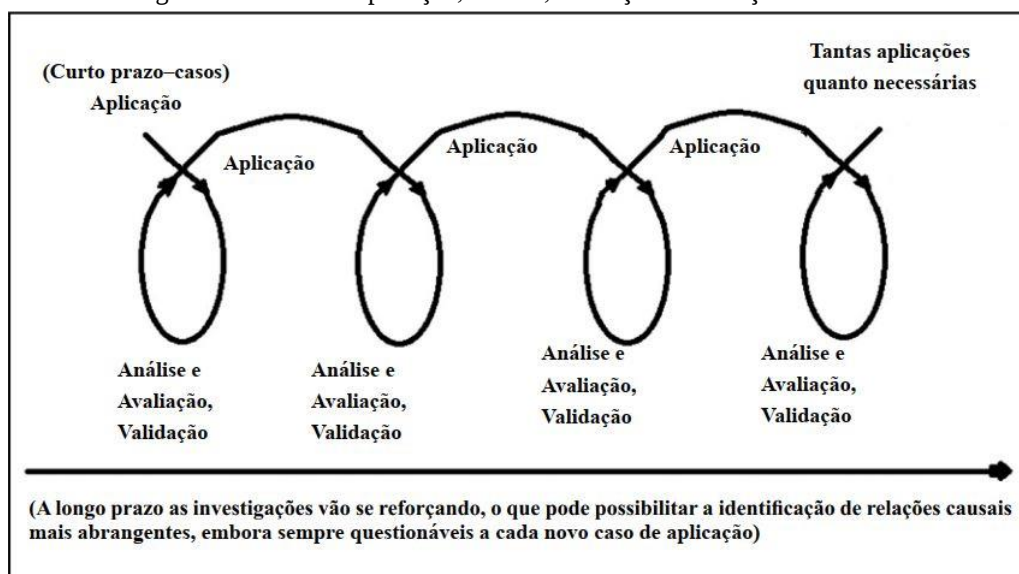
Neste trabalho, consideramos a revisão de literatura para aproximação do contexto do problema (capítulos 2 e 3), o conhecimento teórico para fundamentação dos princípios teóricos (capítulos 4 e 5) e os conhecimentos da comunidade envolvida a partir dos grupos participantes relevantes.

- 5) **Iterativa:** na DBR, cada desenvolvimento é o resultado de uma etapa, de um processo de arquitetura cognitiva, e será necessariamente o início do próximo momento de aperfeiçoamento e de melhorias. Uma abordagem baseada em ciclos de estudo, análise, projeção, aplicação, resultados, que depois são reciclados, e assim quando for necessário, ou possível.

Devido a sua característica iterativa e considerando que “cada relação causal estabelecida em meio a uma práxis social será sempre em parte replicável e generalizável – seu design e princípios entendidos como fonte de solução do caso anterior –, e em outra parte única

e intransferível – o que se refere à nova aplicação, novo contexto e nova comunidade engajada” (Gravemeijer; Cobb, 2006, *apud* Matta; Silva; Boaventura, 2014, p. 28), podemos representar os ciclos da DBR a partir da figura 8.

Figura 8 – Ciclos de aplicação, análise, avaliação e validação da DBR



Fonte: Matta, Silva e Boaventura (2014, p. 29).

Herrington *et al.* (2007) apresentam 4 fases que fazem parte da metodologia DBR:

- Fase 1: análise do problema prático por pesquisadores e sujeitos engajados em colaboração

Nesta fase, são destacadas a identificação do problema prático envolvido com uma comunidade específica, as questões de pesquisa geradas a partir da problemática observada e uma revisão de literatura que aproxima sobremaneira os investigadores do contexto real do problema. Herrington *et al.* (2007, p. 05) chamam atenção para a definição e exploração do problema, uma vez que “é este problema que cria um propósito para a pesquisa, e é a criação e avaliação de uma solução potencial para este problema que constituirá o foco de todo o estudo”. Sobre a revisão de literatura, destacam que o diferencial na DBR é que “facilita a criação de projetos de diretrizes de design para informar a concepção e o desenvolvimento da intervenção que procurará resolver o problema identificado” (Herrington *et al.*, 2007, p. 06).

- Fase 2: desenvolvimento de soluções construídas a partir dos princípios de design existentes e de inovações

Nesta fase, são definidas teorias que servirão de base para a elaboração de um conjunto de princípios que serão utilizados para elaboração da proposta de aplicação, que assim ganhará

uma primeira versão definida pelos princípios teóricos. Os caminhos e contextos apontados na fase 1 são analisados segundo os princípios teóricos para que possa existir a modelagem primeira da aplicação desejada (Matta, Silva, Boaventura, 2014, p. 31). Segundo Herrington *et al.* (2007, p. 06) “uma estrutura teórica bem descrita fornece uma base sólida para a solução proposta, porque a teoria pode informar diretrizes práticas de projeto”. Além disso, é nesta fase que é feita uma descrição da intervenção proposta.

- Fase 3: ciclos iterativos de aplicação e refinamento da solução em práxis da solução

Nesta fase, após o ambiente de aprendizagem ou intervenção tenha sido projetado e desenvolvido, são realizadas a implementação e a avaliação da intervenção em ação. O diálogo de avaliação e validação de cada ciclo de aplicação deve ter como regra a responsividade em relação à comunidade envolvida e suas questões. Métodos qualitativos ou quantitativos podem ser utilizados em ciclos na medida em que forem interpretados como relacionados aos fenômenos em estudo, e voltados para a aplicação prática e seu desenvolvimento. Um estudo DBR deve ter dois ou mais ciclos de aplicação, os quais vão, a partir da análise da aplicação anterior, provocar alterações e refinamentos na intervenção proposta, que assim vai se desenvolvendo (Matta; Silva; Boaventura, 2014).

- Fase 4: reflexão sobre princípios de design e perspectivas de novos melhoramentos na solução implementada

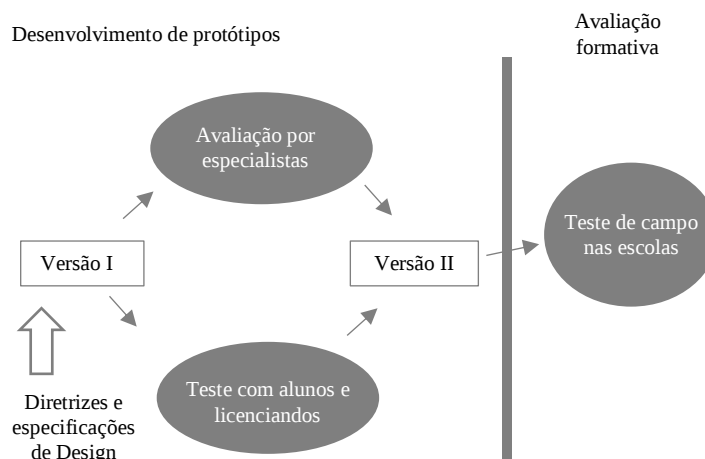
O resultado da DBR em termos de conhecimento científico toma a forma de Princípios Teóricos, ou de Design, resultante da heurística evidenciada pela práxis da aplicação desenvolvida. Em termos de artefatos resultantes do design podem ser softwares, desenvolvimento profissional, desenvolvimento atitudinal comunitário ou outro pertinente ao processo cognitivo estudado, mas sempre de natureza prática e realizados em práxis social.

Considerando as fases da DBR, os elementos discutidos da fase 1 encontram-se na introdução e capítulos 2 e 3 deste trabalho, nos quais foram abordados o problema e conceitos relacionados à pesquisa, além de trabalhos desenvolvidos que contextualizaram a problemática envolvida e indicaram caminhos para solução. Em relação à fase 2, as teorias que contribuíram para elaboração de princípios teóricos encontram-se nos capítulos 4 e 5. Tais princípios, também derivados das discussões da fase 1, são apresentados na seção 7.1.1 deste trabalho.

No presente capítulo e nos próximos são apresentados o desenvolvimento do objeto de aprendizagem CombInter e discutidos os ciclos iterativos e o refinamento do OA desenvolvido, bem como dos princípios teóricos. Além disso, são apresentados o método de coleta e as formas

de análises dos dados. Considerando os ciclos da DBR, apresentamos na figura 9, um esquema iterativo desta pesquisa.

Figura 9 – Desenho da pesquisa baseado nos ciclos da DBR



Fonte: adaptado e modificado de Mafumiko (2006).

Por fim, são realizadas reflexões sobre os princípios teóricos e perspectivas de novos melhoramentos.

6.2 SUJEITOS DA PESQUISA

Após o desenvolvimento da primeira versão do objeto de aprendizagem a partir dos princípios teóricos produzidos, o OA foi avaliado por um grupo de especialistas formado por professores de matemática da educação básica e ensino superior, e profissionais com experiência em desenvolvimento de recursos digitais para o ensino de matemática. Essa primeira avaliação teve o objetivo de que outros profissionais de áreas correlatas pudessem identificar problemas técnicos ou pedagógicos e/ou realizar sugestões de modo que o principal objetivo do OA que é a aprendizagem seja potencializado. Além disso, serviu de parâmetro acerca do potencial do design e do OA ser promissor na prática escolar.

Além do público de especialistas, o OA foi testado por um grupo formado por estudantes licenciandos em matemática e do ensino médio, antes da efetiva prática no contexto escolar. O objetivo desta avaliação foi trazer a análise dos estudantes sobre o OA desenvolvido, considerando que eles serão os principais usuários da ferramenta.

Após os ajustes no design e no OA, a segunda versão foi testada no contexto da sala de aula de matemática como forma de validação do OA. A instituição de ensino selecionada foi o Instituto Federal de Alagoas (IFAL) Campus Arapiraca, localizada no município de Arapiraca-AL e o ambiente da sala de aula foi o segundo ano do ensino médio, uma vez que é nessa série de ensino que ocorre o ensino de análise combinatória. A escolha da referida instituição de ensino, deu-se pela disponibilidade de um dos professores que participou da fase de aperfeiçoamento. Dessa vez, o foco da avaliação do OA foi em verificar o potencial do CombInter na aprendizagem dos conceitos relacionados à análise combinatória.

6.3 ETAPAS DA PESQUISA

A partir dos ciclos da DBR, podemos dividir a pesquisa nas fases apresentadas no quadro 27 abaixo:

Quadro 27 – Etapas da pesquisa

FASE DE DESENVOLVIMENTO DO OA		FASE DE VALIDAÇÃO	FASE DE REFLEXÃO
Etapa de criação do OA	Etapa de aperfeiçoamento	Etapa de validação	Etapa de discussão acerca dos princípios teóricos
Desenvolvimento do OA	Apresentação da versão 1 a especialistas, licenciandos e alunos do ensino médio	Aplicação da versão 2 na escola	Definição dos princípios teóricos a partir de reinterpretações oriundas da prática

Fonte: elaborado pelo autor.

Apresentamos, a seguir, como foram realizadas as fases de desenvolvimento, validação, reflexão, bem como as análises dos dados.

6.3.1 Fase de desenvolvimento

6.3.1.1 Etapa de criação do OA

O objeto de aprendizagem foi desenvolvido de acordo com metodologia INTERA, abordada no capítulo 3, percorrendo as seguintes etapas: contextualização, requisitos, arquitetura, desenvolvimento, testes e qualidade, disponibilização, avaliação, gestão de projetos e ambiente e padrões. O nome dado ao OA desenvolvido foi CombInter, em alusão à expressão Combinatória Interativa, derivada das opções interativas envolvendo conceitos de análise combinatória disponíveis pelo software. O processo de desenvolvimento do OA encontra-se no capítulo 7.

6.3.1.2 Etapa de aperfeiçoamento

6.3.1.2.1 *Apresentação da versão 1 a especialistas*

Após o desenvolvimento da versão 1 do CombInter, foram convidados profissionais que de alguma forma o seu campo de atuação estivesse relacionado com objetos de aprendizagem e análise combinatória. Dessa forma, professores de matemática da educação básica e ensino superior, e profissionais com experiência em desenvolvimento de recursos digitais para o ensino de matemática foram convidados para avaliar a primeira versão do OA. O pesquisador visitou escolas e universidades para realização do convite. Dentre os critérios de participação, em relação aos professores de matemática, foram priorizados docentes que tivessem algum tipo de experiência com ensino de análise combinatória no ensino médio e /ou superior, e que tivessem interesse/afinidade por uso de recursos digitais em sala de aula. Nesse primeiro momento, foram aplicados questionários para que fosse possível obter um perfil dos sujeitos que fariam parte do grupo de avaliação, conforme apêndices A e B.

O CombInter foi disponibilizado aos profissionais para que fosse analisado, inicialmente, por meio de questionários de avaliação. Tais questionários foram elaborados a partir de critérios baseados nos trabalhos de Braga (2006), Braga e Kelly (2015b), Leite (2007), Reategui, Boff e Finco (2010), e Silveira e Carneiro (2012), a saber: usabilidade, interface e recursos interativos do CombInter, prover auxílio aos usuários, foco pedagógico e conteúdo matemático, conforme apêndice C. Para cada critério, foram apresentados alguns itens que pudessem ser avaliados a partir de uma escala Likert, que indica o grau de concordância que o avaliador teve para cada item, com os seguintes valores: 1 (discordo totalmente), 2 (discordo), 3 (nem concordo nem discordo), 4 (concordo) 5 (concordo plenamente). Para cada critério, havia um espaço para observações. Os questionários foram entregues no momento da disponibilização do CombInter aos sujeitos da pesquisa.

Após esse processo de avaliação geral do CombInter, que durou um período de 15 a 30 dias, foram realizadas entrevistas com os avaliadores, de acordo com roteiro apresentado no apêndice D, para complementar as informações presentes nos questionários, principalmente no que se refere aos princípios teóricos adotados no CombInter. Nesse contexto, as entrevistas “além de permitir uma obtenção mais direta e imediata dos dados, serve para aprofundar o estudo, complementando outras técnicas de coleta de dados [...] permite ao entrevistado fazer emergir aspectos que não são normalmente contemplados por um simples questionário”

(Fiorentini; Lorenzato, 2009, p. 120). Os dados obtidos por meio de entrevistas foram transcritos e organizados em categorias que pudessem qualificar as análises derivadas dos formulários/questionários. As categorias foram usabilidade, interface e recursos interativos do CombInter, prover auxílio aos usuários, foco pedagógico, conteúdo matemático.

Dessa forma, os profissionais convidados para essa fase da pesquisa foram organizados em professores de matemática da educação básica, professores de matemática do ensino superior e desenvolvedores, entendidos esses, como profissionais que possuem experiência em desenvolvimento de recursos digitais para o ensino de matemática. No quadro 28, é apresentada a lista dos profissionais selecionados, a sua formação e o tempo de experiência.

Quadro 28 – Perfil dos profissionais convidados para a fase de aperfeiçoamento

(continua)

PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA		
Identificador	Formação	Tempo de experiência
Professor 1	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em Matemática	Ensino médio: 6 anos; Ensino fundamental: 4 anos
Professor 2	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em matemática	Ensino médio: 7 anos; Ensino fundamental: 12 anos
Professor 3	Graduação em Licenciatura em Matemática; Especialização em Educação Matemática; Mestrado em Matemática	Ensino médio: 10 anos; Ensino fundamental: 1 ano
Professor 4	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em Matemática	Ensino médio: 10 anos
Professor 5	Graduação em Licenciatura em Matemática; Especializações em Educação Matemática e Gestão Escolar; Mestrado em Matemática	Ensino médio: 12 anos; Ensino fundamental: 9 anos
Professor 6	Graduação em Licenciatura em Matemática; Especializações em Educação Matemática e Gestão em Educação Profissional e Tecnológica	Ensino médio: 11 anos; Ensino fundamental: 10 anos
Professor 7	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática; Doutorando em Educação	Ensino médio: 2 anos; Ensino fundamental: 2 anos
Professor 8	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em Matemática	Ensino superior: 3 anos; Ensino médio: 3 anos; Ensino fundamental: 1 ano
Professor 9	Graduação em Licenciatura Matemática; Especialização em Educação Matemática	Ensino médio: 9 anos; Ensino fundamental: 9 anos

(conclusão)

PROFESSORES DE MATEMÁTICA DA EDUCAÇÃO BÁSICA		
Identificador	Formação	Tempo de experiência
Professor 10	Graduação em Licenciatura em Matemática; Especializações em Metodologia do Ensino de Ciências e Matemática e Educação Matemática; Mestrado em Matemática	Ensino médio: 4 anos; Ensino fundamental: 4 anos
PROFESSOR DE MATEMÁTICA DO ENSINO SUPERIOR		
Identificador	Formação	Tempo de Experiência
Professor 11	Graduação em Licenciatura em Matemática; Especialização em Tutoria para as Licenciaturas Diversas à Distância; Mestrado em Matemática	Ensino superior: 15 anos; Ensino médio: 2 anos; Ensino fundamental: 2 anos
DESENVOLVEDORES		
Identificador	Formação	Tempo de Experiência
Desenvolvedor 1	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em Matemática	Ensino médio: 6 anos; Ensino fundamental: 14 anos
Desenvolvedor 2	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática; Doutorando em Educação Matemática e Tecnológica	Ensino médio: 7 anos; Ensino fundamental: 4 anos
Desenvolvedor 3	Graduações em Licenciatura em Matemática e Análise e desenvolvimento de Sistemas; Especializações em Matemática e suas Tecnologias, e Neuropsicopedagogia e Psicanálise	Ensino fundamental: 3 anos
Desenvolvedor 4	Graduação em Licenciatura em Matemática; Especialização em Matemática; Mestrado em Matemática; Doutorando em Ensino	Ensino superior: 5 anos; Ensino médio: 18 anos; Ensino fundamental: 9 anos
Desenvolvedor 5	Graduação em Licenciatura em Matemática; Especialização em Metodologia do Ensino de Matemática e Física; Mestrado em Matemática	Ensino superior: 2 anos; Ensino médio: 8 anos; Ensino fundamental: 3 anos

Fonte: Dados da pesquisa

Desse modo, temos um total de 11 professores de matemática e 5 desenvolvedores, abrangendo uma heterogeneidade de sujeitos com diferentes experiências profissionais.

6.3.1.2.2 Apresentação da versão 1 a licenciandos em matemática e alunos do ensino médio

Além do grupo de especialistas, foram selecionados estudantes de licenciatura em matemática e estudantes do ensino médio para experimentar a versão 1 do CombInter. A seleção dos estudantes se deu a partir da indicação de professores participantes da pesquisa e se baseou nos critérios de ter afinidade por matemática e interesse em recursos digitais para o ensino de matemática. As avaliações foram realizadas na mesma perspectiva da seção anterior, com aplicação de questionários de acordo com o apêndice E, e de entrevistas de acordo com o apêndice F, diferenciando-se, apenas, na ênfase que foi dada para perceber a visão do estudante a respeito do CombInter. No quadro 29, é apresentada a lista de estudantes selecionados por tipo de vínculo.

Quadro 29 – Estudantes convidados para a fase de aperfeiçoamento

ESTUDANTES DO ENSINO MÉDIO
Identificador
Aluno 1
Aluno 2
Aluno 3
Aluno 4
Aluno 5
Aluno 6
Aluno 7
Aluno 8
LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA
Identificador
Licenciando 1
Licenciando 2

Fonte: Dados da pesquisa

Desse modo, temos um total de 8 alunos do ensino médio e 2 alunos licenciandos em matemática. O processo de aperfeiçoamento encontra-se na seção 7.2.

6.3.2 Fase de validação

Após o período de aperfeiçoamento, a versão 2 do CombInter foi validada no contexto real de sala de aula de matemática. Nessa perspectiva, o foco desta fase foi em verificar o potencial do CombInter em contribuir para aprendizagem dos conceitos de análise

combinatória. Para isso, foi selecionado o Instituto Federal de Alagoas (IFAL), Campus Arapiraca, localizado no município de Arapiraca-AL, para que o CombInter fosse utilizado pelo professor de matemática no segundo ano do ensino médio. Após selecionar a escola e o professor, foram definidas duas turmas. Uma serviu de base para composição do grupo experimental, em que o professor fez uso do CombInter durante as aulas de combinatória, e a outra serviu de base para composição do grupo de controle, em que o professor ministrou as aulas de combinatória sem o CombInter. Antes de iniciar as aulas, ambas as turmas fizeram um pré-teste, conforme apêndice I, envolvendo questões de combinatória, de modo que fosse possível estimar o nível de conhecimento em combinatória dos estudantes. Após as aulas, foram realizados pós-testes, conforme apêndice J, em ambas as turmas, envolvendo questões de combinatória semelhantes às do pré-teste. A partir dos dados dos testes, foi construído um banco de dados no software *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS) para realização das análises estatísticas inferenciais a partir do Teste T⁴, de modo que fosse possível perceber se houve algum tipo de influência do uso do CombInter na aprendizagem dos conceitos combinatórios.

Além desse aspecto quantitativo desta fase da pesquisa, também foi adotada uma abordagem qualitativa. Nessa perspectiva, foram elaborados diários de bordos a partir da observação dos estudantes do grupo experimental ao interagir com o CombInter durante as aulas e foram feitas entrevistas com estudantes (conforme apêndice F) e com o professor (conforme apêndice G) da turma experimental. Os dados das entrevistas foram categorizados e interpretados com objetivo de entender como o CombInter influenciou no processo de aprendizagem dos conceitos de combinatória. No quadro 30, é apresentada a identificação do professor, a sua formação e o tempo de experiência. No quadro 31 é apresentada uma lista com a identificação dos estudantes selecionados.

⁴ O teste T verifica se a diferença que possa ser encontrada na média resultante de duas condições é significativa. É importante observar que o teste T é paramétrico, pautando-se na média e na comparação entre duas condições (Mattar; Ramos, 2021, p. 518). O nível de significância é expresso pelo valor de “p” que indica um ponto de corte, a partir do qual assumimos a hipótese nula como verdadeira — ou seja, que não há efeito ou diferença nas variáveis analisadas — ou falsa (não suportada) — sugerindo que há efeito ou diferença. O valor de “p” é obtido nos testes estatísticos e está relacionado ao tamanho amostral (Dancey; Reidy, 2019 *apud* Mattar; Ramos, 2021, p. 496). O valor do “p” é calculado presumindo que a hipótese nula seja verdadeira. Convencionalmente, utiliza-se o nível de significância de 95%, o que, na prática, indica que o valor de “p” deve ser menor que 0,05 para que se rejeite ou não se sustente a hipótese nula. Esse valor de 0,05 nos informa que há uma probabilidade que um pesquisador estabelece como limite para aceitar ou rejeitar as hipóteses (Coutinho, 2018 *apud* Mattar; Ramos, 2021, p. 496).

Quadro 30 – Identificação e perfil do professor da turma experimental

Identificador	Formação	Tempo de experiência
Professor 1V	Graduação em Licenciatura em Matemática; Mestrado em Matemática	Ensino superior: 3 anos; Ensino médio: 3 anos; Ensino fundamental: 1 ano

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 31 – Identificação dos estudantes da turma experimental convidados para participar da entrevista

Identificador
Aluno 1V
Aluno 2V
Aluno 3V
Aluno 4V
Aluno 5V
Aluno 6V
Aluno 7V
Aluno 8V
Aluno 9V
Aluno 10V
Aluno 11V

Fonte: Dados da pesquisa

Desse modo, temos 1 professor e um total de 11 alunos que participaram desta etapa da pesquisa. O processo de validação encontra-se na seção 7.3.

6.3.3 Fase de reflexão

Nesta fase, são apresentadas discussões realizadas pelos especialistas e estudantes a respeito dos princípios teóricos utilizados como requisitos pedagógicos do CombInter. Desse modo, são apresentadas falas que de alguma maneira ratificam a importância desses princípios para a construção do OA e aprendizagem dos conceitos, bem como refinamentos que apontam para um novo olhar acerca das construções realizadas. Além disso, são apresentados outros princípios oriundos da interação dos profissionais envolvidos na prática escolar com o CombInter. Tais discussões encontram-se na seção 7.4.

7 ANÁLISES E RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os princípios teóricos que serviram de base para fundamentação pedagógica do CombInter, ao passo que descreve as etapas de desenvolvimento do OA de acordo com a metodologia INTERA. Além disso, são apresentados e discutidos os dados referentes aos grupos de especialistas e estudantes que testaram o CombInter e à validação do CombInter no contexto da sala de aula de matemática. Por fim, traz uma reflexão a respeito dos princípios teóricos a partir da perspectiva dos especialistas e estudantes.

7.1 COMBINTER: UM OBJETO DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

7.1.1 Princípios teóricos iniciais

Propomos, a seguir, um conjunto de princípios teóricos para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem que possa contribuir para que os objetos de aprendizagem sejam úteis para alunos e professores, facilitando a aprendizagem de conceitos matemáticos. O referido modelo foi construído a partir das teorias dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986, 1996) e da teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2003, 2012) discutidas no capítulo 4, que nos indicaram como se dá a apreensão de conceitos matemáticos; da identificação e compreensão das principais dificuldades que os alunos e professores possuem ao estudar análise combinatória e que estratégias estão se mostrando promissoras, que nos permitiram construir situações compatíveis com esse contexto real escolar, discutidos no capítulo 2; da metodologia de resolução de problemas e dos processos de andaimes, que nos possibilitaram criar situações de intervenção relevantes de aprendizagem, discutidos no capítulo 5; e dos aspectos importantes relacionados aos objetos de aprendizagem, que nos permitiu compreender como se está dando o desenvolvimento de OAs em matemática e quais aspectos influenciam para um maior sucesso da prática de ensino por meio dessas ferramentas, discutidos no capítulo 3.

- Oportunizar aos estudantes a abordagem dos conceitos matemáticos

Nem sempre a abordagem do conteúdo de matemática do livro didático atende as necessidades do professor e/ ou estudante. Na combinatória, por exemplo, Lima e Borba (2019) identificaram que várias coleções de livros didáticos abordavam um baixo repertório de representações simbólicas nos problemas e pouca variação dos tipos de problemas propostos.

Torna-se significativo, portanto, explicar os conceitos e, para além de definições e demonstrações, apresentar diversos exemplos com diversas situações-problema que possam explicitar os invariantes inerentes aos conceitos no contexto da situação e as representações simbólicas como estratégias de resolução do problema. A respeito das representações simbólicas, é interessante que sejam apresentadas diversas de modo que os estudantes percebam os processos de conversões de registros de representação de linguagem natural para um registro intermediário e deste para o registro em expressão numérica, uma vez que contribuem para compreensão dos conceitos.

- Propiciar aos estudantes a interação com uma diversidade de situações-problema relacionadas aos conceitos estudados

Conforme Vergnaud (1986, 1996), é a partir do contato com uma diversidade de problemas que ocorre a apreensão dos conceitos. É importante, portanto, que tais problemas sejam estudados e sejam selecionados de modo que o estudante vivencie os diversos invariantes relacionados aos conceitos, bem como diversas representações simbólicas. Dessa forma, problemas dessa natureza são caracterizados pelo modo não automatizado de resolver, que exigem reflexão e tomada de decisão sobre os passos a seguir. Devem ser interessantes, no sentido de gerar o interesse pelo aluno na situação exposta, possibilitem diversas estratégias de solução e que oportunizem a avaliação docente.

Outro aspecto significativo é que as situações-problema sejam balanceadas de acordo com o tipo do problema, bem como em termos de complexidade e, na medida do possível, haja uma variação de representações simbólicas apresentadas no problema, bem como nos possíveis usos como estratégias de solução. Além disso, que possam ser flexibilizadas em termos de estrutura, permitindo, por exemplo, que estudantes elaborem ou identifiquem problemas de acordo com alguns parâmetros dados e que permitam os estudantes refletirem sobre a conversão de registros de representação mais formais (fórmula, expressão numérica) para menos formais (gráfico, figura, linguagem natural). Tais variações possibilitam ao estudante construir um repertório de representações que contribuam para a interpretação do problema, a conscientização dos invariantes do conceito e a construção de estratégias de solução, favorecendo a compreensão dos conceitos. A diversidade de situações-problema possibilita ao estudante a correção de concepções que foram construídas de forma incorreta mediante conflitos entre os esquemas que o estudante possui e os necessários para solucionar a situação.

- Considerar os aspectos relevantes que interferem na aprendizagem dos conceitos a serem trabalhados

Estudar as perspectivas pedagógicas do conceito envolvido, tais como as metodologias bem-sucedidas, principais dificuldades tanto de professores como de alunos podem contribuir para aproximar as decisões de desenvolvimento do OA do contexto real vivenciado por alunos e professores. Isto é, “o design de OA se torna inseparável de contextos específicos de domínio e comunidades de uso” (Farmer; Hughes, 2005, p. 02). Essa perspectiva pode contribuir, também, para que os professores reconheçam vantagens relativas em usar o OA, uma vez que percebem que a inovação presente na ferramenta é apresentada em termos significativos para a prática docente (Friesen, 2004).

- Desenvolver mecanismos de interação que permitam o estudante manipular e obter respostas com feedbacks em tempo real

Algumas ações no contexto de sala de aula tradicional às vezes são difíceis de serem executadas (por exemplo, verificar processos de contagem válidos) ou até mesmo impossíveis (por exemplo, simulações envolvendo sólidos geométricos, cônicas). Quando o contexto é o computacional, tais situações podem ser facilitadas e inseridas de forma personalizada de acordo com a situação problema, promovendo uma dimensão de interação com a situação problema privilegiada. Por exemplo, no contexto do estudo da combinatória, é possível que o estudante experimente as possibilidades de contagem de acordo com alguma situação problema e, a partir das ações do estudante, sendo certas ou erradas, o OA realize feedbacks justificando os erros e os acertos.

- Estabelecer questionamentos que permitam auxiliar os estudantes na resolução de problemas

Já há evidências, conforme discutido nos capítulos 2 e 5, que questionamentos direcionados ao estudante contribuem para resolução de problemas matemáticos. Dessa forma, é importante que o OA conduza a resolução de problemas a partir de questionamentos que instiguem o estudante a refletir sobre os dados, a incógnita, os condicionantes, as formas de

representação e os conceitos relacionados ao problema, a direcionar sua atenção a aspectos essenciais do problema, a favorecer o conflito de estratégias corretas e erradas, e a construir novas estratégias de resolução.

- Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações-problema

É comum, nos objetos de aprendizagem que envolvem aprendizagem matemática, a presença de auxílios para interagir com a ferramenta e feedbacks informados ao final da resolução de algum problema indicando que está certo ou errado na maioria dos casos e, em alguns casos, orientando o usuário a superar o erro. Esse tipo de feedback dificulta o estudante a entender, por exemplo, em qual parte da solução do problema está ocorrendo o equívoco e de que forma é possível refletir sobre o erro, superá-lo e concluir a resolução do problema. Além disso, nesse tipo de auxílio, o professor não consegue avaliar de forma assertiva os motivos pelos quais o estudante errou, o que dificulta a ação docente no sentido de orientá-lo na superação do erro. Dessa forma, estabelecer andaimes relacionados aos invariantes do conceito inerentes a uma situação-problema pode permitir que o estudante obtenha auxílios gradativos que contribuem para a solução do problema e aprendizagem dos conceitos.

Baseados na metodologia de resolução de problemas de Polya (1996), discutida no capítulo 5, consideramos quatro tipos de andaimes:

a) Andaime de compreensão

Os andaimes de compreensão são feedbacks apresentados pelo OA a partir de respostas certas ou erradas realizadas pelo estudante ao responder questionamentos relacionados ao problema. Esse tipo de ajuda tem a função de auxiliar para que o estudante identifique e reflita sobre os dados do problema, a incógnita, a condicionante e as formas de representação. Além disso, permite orientar o estudante a ter o foco da atenção na incógnita do problema e instigar o estudante a criar esquemas que possibilitem o estudante mudar de registros de representação que permitam compreender os invariantes da situação-problema.

b) Andaime para formulação de um plano

Igualmente como os andaimes de compreensão, os andaimes para formulação de um plano são feedbacks apresentados pelo OA a partir de respostas certas ou erradas realizadas pelo estudante ao responder questionamentos relacionados ao problema. Nesse caso, são apresentadas suposições que envolvem a relação entre os dados e a condicionante com os invariantes do conceito envolvido que podem contribuir para a elaboração de um plano de solução. Esse tipo de ajuda tem a função de estimular a reflexão a partir de operações mentais que permitam lembrar de um problema parecido; elaborar uma forma de representação que permita interpretar de outra forma o problema; descartar estratégias possivelmente equivocadas, mas, o fato de percebê-las como equivocadas, instigar a pensar em outras mais assertivas; direcionar a atenção a aspectos relacionados a incógnita; enfim, promover ao estudante uma maior segurança na elaboração de um plano.

c) Andaime para execução do plano

O andaime para execução do plano configura-se como a apresentação da solução do problema, relacionando cada etapa de solução com os andaimes de compreensão do problema e para formulação de um plano, de modo que o estudante perceba como as relações entre dados, condicionantes, incógnitas, os invariantes do conceito e formas de representação foram estabelecidos em um plano de solução bem-sucedido. A percepção e a conscientização pelo estudante de que as estratégias elaboradas foram adequadamente utilizadas na execução do plano contribuem para a construção de estratégias de solução de problemas futuros e para apreensão dos conceitos envolvidos.

d) Andaime para o retrospecto

Os andaimes para o retrospecto são feedbacks realizados pelo OA que permitem que o estudante reflita sobre todos os processos envolvidos na solução do problema, tais como o conceito envolvido e seus invariantes, as estratégias tomadas, além de perceber possíveis variações do problema. Além disso, podem ser suposições que favoreçam o estudante pensar em outras formas de solucionar o problema, possibilitando formas de validar a solução encontrada, experimentar outras formas de representação e refinar a solução encontrada anteriormente. Esse tipo de ajuda contribui para que o estudante tome consciência dos

invariantes do conceito inerentes a situação problema, as possíveis formas de representação realizadas, além de uma “nova” compreensão do problema.

Como os princípios teóricos aqui propostos estão relacionados à fundamentação pedagógica de objetos de aprendizagem, os andaimes citados configuram-se como rígidos, conforme discutidos na seção 5.1, uma vez que são programados antecipadamente baseados nas principais dificuldades dos estudantes em algum conceito. Apesar de tais princípios enfatizarem questões relacionadas aos conceitos estudados, no caso presente, conceitos matemáticos, existem situações psicológicas que os andaimes propostos podem influenciar positivamente que motivam os estudantes a permanecerem disponíveis ao aprendizado. Tais situações são consideradas as funções dos andaimes, discutidas na seção 5.1, a saber: Engajamento (recrutamento), Redução do grau de liberdade, Manutenção da direção, Aspectos críticos destacados, Controle de frustração e Demonstração (Wood; Bruner; Ross, 1976). Discutimos, abaixo, como os andaimes propostos pelos princípios teóricos pretendem alcançar as funções citadas.

- Função de engajamento (recrutamento)

Quando se trata de conceitos matemáticos, principalmente conteúdos de maior complexidade, como análise combinatória, é comum que o estudante, diante de um problema, mesmo interessante e ciente dos conceitos envolvidos, não conseguir construir caminhos para solucionar o problema. A partir dos andaimes propostos, com ênfase nos andaimes de compreensão, procura-se mobilizar o interesse do aluno e a adesão aos requisitos da tarefa. Essa mobilização passa a ser resgatada, uma vez que a compreensão do problema passa a dar mais confiança ao estudante para realizar a mobilização de esquemas que possam ser compatíveis com requisitos de solução do problema. Além disso, conscientizar-se da compreensão do problema favorece sobremaneira a motivação em busca da solução.

- Função de redução do grau de liberdade

Esta função de andaime está relacionada à simplificação da tarefa de tal modo que o aprendiz possa reconhecer os efeitos de sua ação, permitindo o uso de feedbacks para orientação. Podemos observar que a prática de questionamentos abordada nos princípios teóricos, bem como os tipos de andaimes apresentados configuram-se como mecanismos que

procuram simplificar as situações-problema em etapas que permitam a realização de feedbacks assertivos realizados a partir da interação do estudante com o OA. Além disso, essas etapas permitem que os estudantes reconheçam seus avanços e percebam que façam sentido para resolução do problema e compreensão dos conceitos. A prática de suposições torna-se importante, pois permitem gerar conflitos entre possíveis esquemas incorretos e esquemas corretos, ambos intermediados por feedbacks que justificam os motivos pelos quais alguns esquemas são incompatíveis com algumas situações-problema, bem como evidencia a validade dos esquemas corretos que contribuem para solução do problema e a compreensão dos conceitos.

- Função de manutenção da direção

A manutenção de direção corresponde a manter o aprendiz direcionado aos objetivos específicos que permitem solucionar a tarefa. Em um primeiro momento, o sequenciamento dos questionamentos compatíveis com andaimes abordados traz um caminho a ser seguido para solucionar o problema. Em um segundo momento, é imprescindível que a escolha dos questionamentos e andaimes (com ênfase nos andaimes de compreensão e de formulação de um plano) sejam planejados e que sejam pensados em função dos invariantes do conceito envolvido e das principais dificuldades relacionadas ao conteúdo.

- Função de aspectos críticos destacados

Esta função de andaime enfatiza a importância de identificar elementos durante o processo de resolução de problemas que facilitam a aprendizagem. Esses aspectos críticos estão diluídos nos andaimes propostos, mas de forma enfática nos andaimes de compreensão e andaimes de formulação de um plano. Tais destaques contribuem para que o aluno paulatinamente perceba os modos de pensar em cada problema e possa direcionar sua atenção e mobilização de esquemas aos aspectos relevantes do problema proposto.

- Função de controle de frustração

A função de controle de frustração consiste em criar meios para que a resolução de problemas seja menos estressante. Considerando que a aprendizagem matemática é tida como complexa por grande parte dos estudantes, talvez esta função de andaime seja fundamental para

que os alunos avancem degraus em termos de compreensão matemática. No que se refere aos princípios teóricos propostos, a proposição de questionamentos somada aos andaimes realizados a partir da interação do estudante com o OA, configuram-se como mecanismos que dão confiança à medida que os estudantes vão cumprindo as etapas e obtendo respostas que confirmam raciocínios corretos, justificando os motivos e, também, redirecionam os raciocínios incorretos para a situação problema, justificando os motivos que fizeram com que aquela forma de pensar não contribuísse para a solução daquele problema. Esse processo de conscientização de acertos e erros (saber os motivos e em que parte da resolução de problema se dão) contribui para uma redução de insegurança ao se defrontar com situações-problema e, paralelo a isso, gera confiança no estudante em arriscar solucionar problemas mais complexos, aumentando, consideravelmente, a compreensão dos conceitos envolvidos. É importante que esse processo de ajuda (questionamentos e andaimes) sejam apresentados paulatinamente a partir de respostas dadas pelos estudantes no OA, de modo que o estudante seja estimulado a tentar criar estratégias de solução desde os primeiros auxílios. Essa prática é sugerida para que não haja uma dependência excessiva dos auxílios e que o estudante possa ir desenvolvendo esquemas a partir de cada auxílio na busca de uma solução. O controle de frustração também pode ser benéfico quando se considera o contexto, principalmente, das escolas públicas brasileiras com alto número de alunos por sala de aula, pouco tempo disponível do professor para abordar o conteúdo e realizar auxílios individuais. Tais situações contribuem para que alunos não tentem solucionar problemas propostos por considerá-los exigentes, gerando desmotivação para aprendizagem matemática. Com andaimes rígidos programados em OA, tal situação pode ser amenizada e vários alunos poderão ter uma perspectiva diferente para aprender matemática.

- Função de demonstração

A função andaime demonstração corresponde à modelação de soluções para uma tarefa com objetivo de destacar conceitos e procedimentos relevantes que possam facilitar a compreensão dos estudantes. Esta função é realizada, principalmente, a partir do andaime de execução do plano. Cabe mencionar que, nesse processo, deve-se explicitar os aspectos abordados nos andaimes de compreensão do problema e de elaboração do plano de modo que os feedbacks realizados anteriormente façam sentido para o aluno. O reconhecimento, por parte do aluno, da lógica matemática por trás de cada passo da solução contribui para que o aluno desmistifique a ideia de que solucionar problemas é aplicação de uma fórmula e, em

contrapartida, perceba que existe todo um processo construtivo que fundamenta todas as ações em busca da solução.

7.1.2 Projeto CombInter

Conforme discutido na seção 3.4, foi adotada como metodologia de desenvolvimento do OA a metodologia INTERA. Desse modo, inicialmente, foram definidos os membros envolvidos no projeto do CombInter, bem como o papel de cada um no processo de desenvolvimento. Fizeram parte do projeto 4 estudantes, aqui definidos por estudantes A, B, C e D, o pesquisador e o professor A, totalizando 6 integrantes. No quadro 32, é identificado cada membro, os papéis atribuídos e a formação de cada integrante.

Quadro 32 – Membros e papéis do projeto CombInter

Membro	Papéis	Formação
Estudantes A, B, C e D	Equipe de desenvolvimento	Graduandos em Ciência da Computação
Pesquisador	Analista, Conteudista, Demandante, Designer de Interface e Designer pedagógico.	Mestre em Matemática
Professor A	Gerente de Projetos, Designer Técnico, Equipe de Desenvolvimento.	Doutor em Ciência da Computação

Fonte: elaborado pelo autor.

A escolha dos membros se deu por meio do convite do pesquisador feito ao Professor A para participação do projeto de desenvolvimento do CombInter. Por sua vez, o Professor A realizou processo seletivo que culminou na escolha dos estudantes A, B, C e D. A seguir, são apresentadas as etapas de desenvolvimento do OA delineadas pela metodologia INTERA.

7.1.2.1 Etapa de contextualização

A etapa de contextualização é a primeira a ser realizada conforme a metodologia INTERA. Nesta etapa, é dada ênfase em conhecer o público-alvo, as dificuldades envolvidas para aprendizagem do conteúdo envolvido, e de que forma o desenvolvimento do OA vai contribuir para que ocorra uma melhor aprendizagem. A partir desse processo, é possível refletir e agregar a parte pedagógica ao OA a ser desenvolvido de modo que haja uma maior aproximação entre o conhecimento escolar e os contextos presentes na vida do estudante, contribuindo para aprendizagem de maior significado (Braga; Ponchio, 2015a).

Como o objeto de aprendizagem a ser desenvolvido neste trabalho tem como área do saber a análise combinatória, foram realizados estudos sobre essa temática na educação básica com objetivo de entender como esse conteúdo é abordado, as principais dificuldades dos estudantes em aprender os conceitos envolvidos e que tipo de estratégias de ensino se mostram promissoras para facilitar a sua compreensão. Tais estudos foram apresentados e discutidos no capítulo 2 e, de modo geral, destacaram algumas situações, a saber:

- As principais dificuldades apresentadas pelos estudantes estão relacionadas à dificuldade de interpretação dos problemas com ênfase na incompreensão dos invariantes combinatórios e baixo repertório de representações simbólicas, tendo como origem um ensino pautado majoritariamente por aplicação de fórmulas em situações padronizadas;
- Em relação às dificuldades dos docentes, as pesquisas indicaram um baixo repertório metodológico ao ensinar análise combinatória e pouco conhecimento específico do conteúdo. Tais lacunas têm origem na formação docente deficiente que nem sempre o tópico de combinatória foi abordado, bem como no material didático disponibilizado, este com pouca diversidade de situações combinatórias, invariantes e representações simbólicas;
- Em relação às estratégias de ensino promissoras, as pesquisas destacaram o questionamento orientado realizado pelos professores como mecanismo que favorece o desenvolvimento dos estudantes ao lidar com problemas combinatórios. Abordagens e/ou recursos de ensino – resolução de problemas, gamificação, história e modelagem matemática, jogos, softwares, material concreto – que deem autonomia aos alunos também foram evidenciados, pois permitiram que os estudantes exponham suas formas de pensar, permitindo intervenções mais assertivas por parte dos professores.

Como forma de amenizar tais problemas, definimos que o OA a ser desenvolvido deve apresentar os principais conceitos de análise combinatória (princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos simples e combinações), levando em consideração uma diversidade de situações-problema resolvidas para evidenciar diversas situações, invariantes e representações simbólicas relacionadas ao conceito; deve apresentar diversos problemas combinatórios para resolver (com diferentes níveis de dificuldade e relacionados de forma equitativa aos conceitos de princípio fundamental da contagem, permutações, arranjo simples e combinações) que,

mediante dificuldades do estudante e a seu critério, pode acionar auxílios (em forma de questionamentos e feedbacks) e recursos interativos, que contribuem para compreensão do problema, a elaboração de estratégias de solução e o entendimento de soluções propostas; deve apresentar as soluções dos problemas propostos, priorizando soluções construtivas e evidenciando como os auxílios disponibilizados contribuíram para solucionar os problemas; e deve disponibilizar oportunidades para o estudante elaborar problemas e/ou converter representações simbólicas. Essas funcionalidades disponibilizadas pelo OA foram construídas de acordo com os princípios teóricos discutidos na seção 7.1.1.

Tais princípios são resultados de análise do quadro teórico deste trabalho, discutido nos capítulos 4 e 5, que, considerando as estratégias de ensino que vêm se mostrando promissoras no que se refere à compreensão de conceitos combinatórios, espera-se potencializar o processo de aprendizagem a partir da interação dos estudantes com o OA. Desse modo, o OA irá favorecer a compreensão combinatória a partir dos aspectos: acesso à discussão dos conceitos de princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos e combinações, de modo que os invariantes de cada conceito sejam explícitos e que haja prioridade de raciocínio construtivo; interação com uma diversidade de situações-problema resolvidos de forma construtiva para cada conceito, de modo que o estudante tenha acesso a uma diversidade de situações, invariantes e representações simbólicas, que favoreçam a vivência e percepção de como se dá a compreensão do problema, a elaboração de um plano de solução e como relacionar os invariantes do conceito com os dados do problema; interação com uma diversidade de situações-problema a resolver de modo que o estudante possa analisar as situações e construir soluções para os problemas. Nesse processo, o estudante poderá acionar auxílios gradativos (por meio de questionamentos e feedbacks) que os leva a entender como se dá a compreensão do problema – identificar os dados e condicionantes, bem como converter representações simbólicas –, a elaborar esquemas que possam ser válidos para construção de um plano de solução e a executar um plano de solução (diferenciar estratégias de solução que são compatíveis e não compatíveis com o problema). Após os auxílios gradativos, o estudante terá acesso às soluções dos problemas de forma construtiva, evidenciando a relação entre os auxílios realizados para solucionar o problema.

Devido às características citadas, o OA enquadra-se como um software educacional e poderá ser acessado por meio de qualquer sistema operacional, necessitando apenas de um navegador web compatível. Desse modo, os professores e alunos poderão usar o software no ambiente escolar como em outro tipo ambiente, o que proporciona ao estudante um estudo

individualizado. No contexto de sala de aula, o software poderá ser usado durante a discussão dos conceitos de análise combinatória; após a discussão dos conceitos combinatórios; e, como estudo individualizado do estudante. Como a temática a ser abordada é análise combinatória, o principal público alvo são os alunos do 2º ano do ensino médio, uma vez que é nessa etapa de ensino que geralmente os alunos estudam o referido conteúdo. Apesar disso, o OA pode ser utilizado por outros públicos, uma vez que os problemas combinatórios são comuns em outras disciplinas, tais como, probabilidade, estatística e matemática discreta, geralmente, estudadas na educação superior. A partir dos elementos discutidos, de acordo com a metodologia INTERA, foi criado o artefato chamado relatório de análise de contexto, disponível no apêndice L, que foi disponibilizado para a equipe de desenvolvimento do OA.

A seguir, abordamos a etapa de requisitos que traz elementos importantes para o desenvolvimento do OA.

7.1.2.2 Etapa de requisitos

A etapa de requisitos da metodologia INTERA permite que a equipe de desenvolvimento entenda o que deve ser feito e como será feito para caracterização do OA de modo que alcance seu objetivo. Os requisitos são divididos em três tipos: requisitos didático-pedagógicos, requisitos funcionais e requisitos não funcionais.

7.1.2.2.1 *Requisitos didático-pedagógicos*

Os requisitos didático-pedagógicos são responsáveis por representar os conceitos e conteúdos a serem abordados, bem como a metodologia e as estratégias pedagógicas em que o OA será inserido, que favoreçam a aprendizagem dos alunos. Desse modo, para o desenvolvimento do OA, foram adotados os princípios teóricos discutidos na seção 7.1.1 como abordagem pedagógica. Para cada princípio teórico, apresentamos, abaixo, os requisitos que foram adotados durante o desenvolvimento do OA.

- Oportunizar aos estudantes a abordagem dos conceitos matemáticos

O OA irá disponibilizar aos estudantes a discussão dos conceitos de princípio fundamental da contagem, permutações simples, permutações com elementos repetidos,

arranjos simples e combinações, apresentando, para cada conceito, definições, invariantes e representações simbólicas por meio de uma abordagem construtiva. Como forma de materializar os conceitos, serão apresentadas, para cada conceito combinatório, pelo menos cinco situações-problemas resolvidas que permitam explorar uma variedade de situações, invariantes e representações simbólicas. Além disso, serão disponibilizadas pelo menos cinco situações-problema resolvidas relacionadas ao processo de elaboração de problemas combinatórios, propiciando a conversão direta ou inversa de registros de representação. A produção do conteúdo dos conceitos e dos problemas será feita a partir de livros didáticos de matemática. É importante que os problemas selecionados tenham potencial de abordar situações interessantes que permitam discutir vários invariantes e representações simbólicas.

- Propiciar aos estudantes a interação com uma diversidade de situações-problema relacionadas aos conceitos estudados

O OA irá conter pelo menos seis problemas por tipo de conceito combinatório (princípio fundamental da contagem, permutações simples, permutações com elementos repetidos, arranjos simples e combinações) para que os estudantes possam analisar e solucionar. Os problemas serão selecionados a partir de livros didáticos e é importante que sejam interessantes, no sentido de despertar o interesse do aluno pela situação exposta, possibilitem diversas estratégias de solução, que permitam discutir vários invariantes e representações simbólicas. Os problemas deverão ser separados por nível de complexidade (iniciante, intermediário e avançado). Por exemplo, caso tenhamos seis problemas por conceito combinatório, teremos dois problemas de nível iniciante, dois problemas de nível intermediário e dois problemas de nível avançado. O nível de complexidade será medido pela quantidade de etapas necessárias para solucionar o problema. Além desses problemas, serão disponibilizadas pelo menos cinco situações por conceito combinatório que possibilitem o estudante a elaborar situações problemas a partir de uma dada representação simbólica, bem como converter registros de representação.

- Considerar os aspectos relevantes que interferem na aprendizagem dos conceitos a serem trabalhados

O conteúdo a ser disponibilizado no OA deve levar em consideração a produção acadêmica relacionada, no sentido de identificar quais as dificuldades de compreensão do conceito estudado, os principais motivos e estratégias que vêm se mostrando bem-sucedidas.

- Desenvolver mecanismos de interação que permitam o estudante manipular e obter respostas com feedbacks em tempo real

Em cada problema proposto, o OA irá apresentar recursos interativos que possam simular a situação apresentada pelo problema. Nesse recurso, o estudante poderá interagir, inserindo informações de acordo com sua interpretação do problema e ir obtendo feedbacks, sejam eles justificando o acerto ou o erro. Para que essa construção seja possível, será necessário analisar profundamente o problema, identificar como se dá a formação dos agrupamentos inerentes ao problema e as condições necessárias para sua validação. Um exemplo de análise do problema que deverá ser feita para que seja criado o recurso interativo pode ser observado no quadro 33 abaixo:

Quadro 33 – Exemplo de análise de problema para criação do recurso interativo

Exemplo 5: Quantos números telefônicos com 7 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9?

A partir do enunciado do problema, podemos afirmar que:

- Os agrupamentos devem ter 7 dígitos;
- Os agrupamentos podem ter dígitos repetidos;
- Os dígitos possíveis são: 0, 1, 2, ..., 9;
- Dois ou mais números telefônicos são iguais quando todos os dígitos são iguais;
- A mudança de ordem entre dígitos distintos gera um número telefônico diferente.

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir dessas informações, podemos construir os feedbacks a partir das possíveis ações dos estudantes, conforme podemos observar no quadro 34.

Quadro 34 – Construção de feedbacks para o recurso interativo

(continua)

- O estudante informa um número de telefone com 7 dígitos.
Nesse caso, o feedback de acerto pode ser: Parabéns, número de telefone válido. Observe que o número de telefone deve possuir 7 dígitos.

(conclusão)

- O estudante informa um número de telefone com menos de 7 dígitos.
Nesse caso, o feedback de erro pode ser: Número de telefone inválido. Observe que o número de telefone deve possuir 7 dígitos.
- O estudante informa um ou mais números de telefones iguais.
Nesse caso, o feedback de erro pode ser: Número de telefone já foi inserido. Observe que dois ou mais números telefônicos são iguais quando todos os dígitos são iguais.
- O estudante informa números de telefones que se diferenciam pela ordem dos dígitos distintos.
Nesse caso, o feedback de acerto pode ser: Parabéns, número de telefone válido. Observe que a mudança de ordem entre dígitos distintos gera um número telefônico diferente.

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir dessas informações, a equipe de desenvolvimento irá projetar o recurso interativo, conforme observaremos na seção 7.1.2.2.2.

- Estabelecer questionamentos que permitam auxiliar os estudantes na resolução de problemas

Os auxílios que estarão disponíveis nos problemas a resolver serão elaborados a partir de questionamentos. Desse modo, cada problema deverá ser analisado profundamente para que os questionamentos sejam pertinentes. Os questionamentos devem ser modelados de tal modo que contribuam, em ordem, para a compreensão do problema, a elaboração de um plano, a execução do plano e o retrospecto, conforme discussão feita nos capítulos 5 e 7 a respeito da metodologia de resolução de problemas potencializada por meio dos andaimes, e dos princípios teóricos derivados da discussão teórica. Os questionamentos serão de três tipos: múltipla escolha, sim ou não e em forma de texto. Usando o problema anterior (exemplo 5 do quadro 33), os questionamentos seguirão de modo geral os modelos apresentados por quatro auxílios. O auxílio 1, conforme quadro 35, deve trazer alguns agrupamentos (possíveis ou não) de acordo com o enunciado do problema, que favoreçam o estudante a compreender o problema. Nesse caso, mais de um item pode estar correto.

Quadro 35 – Modelo de auxílio 1 (múltipla escolha)

Quais dos números abaixo são exemplos de situações expostas pelo enunciado?

- () 1234567
- () 91993941
- () 0000000
- () 3245124
- () 4444444
- () 129844

Fonte: elaborado pelo autor.

No auxílio 2, conforme quadro 36, os agrupamentos (possíveis ou não) devem ser apresentados individualmente, de modo que, o estudante possa responder para cada situação, se determinado agrupamento está de acordo com o enunciado do problema.

Quadro 36 – Modelo de auxílio 2 (sim ou não)

Os números de telefone abaixo podem ser incluídos na contagem?

a) 1232185

- ☐ Sim
- ☐ Não

b) 098323

- ☐ Sim
- ☐ Não

c) 9876543 e 8976543

- ☐ Sim
- ☐ Não

d) 9999999 e 8888888

- ☐ Sim
- ☐ Não

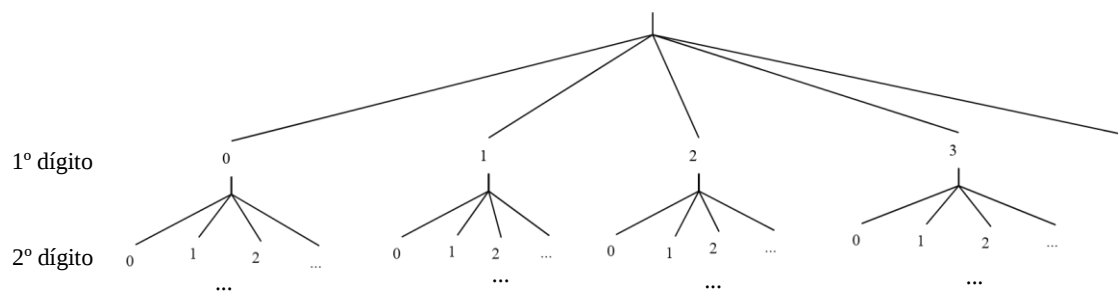
Fonte: elaborado pelo autor.

No auxílio 3, conforme quadro 37, será apresentado um diagrama da árvore e /ou texto que permita melhor compreender o problema e formular um plano de solução.

Quadro 37 - Modelo de auxílio 3 (texto)

Como podemos representar o problema por meio de um diagrama da árvore?

Podemos representar o problema por meio de um diagrama da árvore e analisarmos como os agrupamentos são formados:



Note que, em alguns casos, é difícil construir todos os casos possíveis por meio do diagrama da árvore. Entretanto, por meio deste diagrama, pode-se estudar melhor como os possíveis agrupamentos serão formados, bem como facilita na identificação de uma expressão multiplicativa que possa generalizar a situação apresentada.

Fonte: elaborado pelo autor.

Em relação ao auxílio 4, conforme quadro 38, devem ser elaboradas assertivas que permitam o estudante refletir sobre quais podem ou não contribuir para solucionar o problema.

Quadro 38 - Modelo de auxílio 4 (sim ou não)

(continua)

A partir das assertivas abaixo, quais poderiam auxiliar na solução do problema?

a) Como os números telefônicos devem possuir 7 dígitos, podemos fixar o esquema da forma _____, _____, _____, _____, _____, _____ e verificar as possibilidades dos dígitos para cada espaço vazio. Por fim, aplicamos o princípio fundamental da contagem.

- ☐ Sim
- ☐ Não

b) Como os números telefônicos devem possuir 7 dígitos, podemos fixar o esquema da forma _____, _____, _____, _____, _____, _____ e verificar as possibilidades do seguinte modo: 10 possibilidades para o primeiro caso, pois temos 10 números disponíveis; Escolhido o primeiro número, temos 9 possibilidades para o segundo caso, pois temos 9 números disponíveis; E assim por diante. Por fim, aplicamos o princípio fundamental da contagem.

- ☐ Sim
- ☐ Não

c) Podemos utilizar arranjo simples de 10 elementos tomados 7 a 7.

- ☐ Sim
- ☐ Não

(conclusão)

d) Podemos utilizar combinação de 10 elementos tomados 7 a 7.

- Sim
- Não

Fonte: elaborado pelo autor.

Os auxílios serão elaborados para cada problema de modo que, à medida que o estudante acione uma quantidade maior de auxílios, mais se aproxima da solução do problema. Eles estarão relacionados aos vários tipos de andaimes que veremos adiante.

- Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações problema

Além do modelo apresentado do auxílio 1 no quadro 35, para esse tipo de auxílio, deverá estar disponível feedbacks de erro e de acerto, destacando os dados e condicionantes do problema. Os auxílios que possuem essas características, denominamos de andaime de compreensão. Para esse tipo de auxílio, os feedbacks de acerto e de erro deverão ter o modelo apresentado no quadro 39, que serão disponibilizados ao estudante ao responder o auxílio 1:

Quadro 39 - Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de auxílio 1

Feedback de acerto: Parabéns, resposta correta. Observe que, de acordo com o enunciado do problema: os números de telefone devem possuir 7 dígitos; os dígitos podem ser repetidos; a mudança de ordem entre os dígitos distintos gera um novo número.

Feedback de erro: Resposta incorreta. Tente novamente. Observe que, de acordo com o enunciado do problema: os números de telefone devem possuir 7 dígitos; os dígitos podem ser repetidos; a mudança de ordem entre os dígitos distintos gera um novo número.

Fonte: elaborado pelo autor.

Em relação ao auxílio 2 (quadro 36), deverão estar disponíveis feedbacks de erro e de acerto, justificando o motivo do referido agrupamento estar ou não de acordo com o enunciado. Os auxílios que possuem essas características, denominamos de andaime de compreensão. Para esse tipo de auxílio, os feedbacks de acerto e de erro deverão ter o modelo apresentado no quadro 40, que serão disponibilizados ao estudante ao responder o auxílio 2.

Quadro 40 – Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de auxílio 2, item b)

Feedback de acerto: Parabéns, resposta correta. Observe que o número de telefone apresentado possui 6 dígitos, o que não é permitido pelo enunciado do problema.

Feedback de erro: Resposta incorreta. Observe que o número de telefone apresentado possui 6 dígitos, o que não é permitido pelo enunciado do problema.

Fonte: elaborado pelo autor.

No que se refere ao auxílio 3 (quadro 37), será apresentado um diagrama da árvore e /ou texto que permita melhor compreender o problema e formular um plano de solução. Esse tipo de auxílio pode ser considerado como andaimes de compreensão e para formulação de um plano.

Em relação ao auxílio 4 (quadro 38), deverá estar disponível feedback de erro e de acerto, justificando o motivo da estratégia apresentada na assertiva contribuir ou não para solucionar o problema. Os auxílios que possuem essas características, denominamos de andaimes para formulação de um plano. Para fins de exemplificação, os feedbacks de acerto e de erro deverão ter o modelo apresentado no quadro 41, que serão disponibilizados ao estudante ao responder o auxílio 4.

Quadro 41 – Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de auxílio 4, item b)

Feedback de acerto: Parabéns, resposta correta. Observe que nessa forma de contagem os números telefônicos com dígitos iguais não estão sendo incluídos na contagem, o que não está de acordo com o enunciado do problema. Por exemplo, os números telefônicos (1122334) e (8888888) não estão sendo contabilizados.

Feedback de erro: Resposta incorreta. Observe que nessa forma de contagem os números telefônicos com dígitos iguais não estão sendo incluídos na contagem, o que não está de acordo com o enunciado do problema. Por exemplo, os números telefônicos (1122334) e (8888888) não estão sendo contabilizados.

Fonte: elaborado pelo autor.

Outros dois tipos de andaimes deverão estar presentes no OA: os andaimes para execução do plano e para o retrospecto. Para contemplar o andaime de execução do plano, o OA deverá apresentar a solução de cada situação-problema a resolver, explicitando como os auxílios se relacionaram e contribuíram para solução do problema. Considerando a mesma situação-problema apresentada anteriormente (exemplo 5), uma solução do problema se dará a partir do seguinte modelo apresentado no quadro 42.

Quadro 42 – Modelo de resolução como andaime de execução do plano

A partir do enunciado do problema, algumas situações podem ser deduzidas: os agrupamentos deverão ser formados por sete números escolhidos de 0 a 9; os agrupamentos podem ter elementos repetidos; a mudança de ordem entre elementos distintos gera um agrupamento diferente. Alguns exemplos de agrupamentos podem ser dados: 1234567, 1111111, 1233333, 21333333, etc., conforme observamos no recurso interativo e auxílios 1 e 2. Como teremos 7 dígitos possíveis, podemos fazer uso do esquema ____, ____, ____, ____, ____, ____, ____ e verificarmos as possibilidades para cada dígito, conforme observamos nos auxílios 3 e 4. Assim, teremos:

10 possibilidades para o primeiro dígito, uma vez que podemos escolher do número 0 ao 9; escolhido o primeiro dígito, teremos 10 possibilidades de escolha para o segundo dígito, uma vez que podemos ter elementos repetidos nos agrupamentos; escolhidos os números dos dígitos 1º e 2º, teremos 10 possibilidades de escolha para o terceiro dígito e, assim, sucessivamente, até que teremos 10 possibilidades de escolha para o sétimo dígito. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, teremos:

$$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 = 10^7 = 10000000.$$

Portanto, teremos 10000000 de números telefônicos com 7 dígitos podem ser formados, se usarmos os dígitos de 0 a 9.

Fonte: elaborado pelo autor.

Em relação ao andaime para o retrospecto, serão apresentados, quando cabível, uma solução alternativa para o problema, que terá o mesmo modelo apresentado no quadro 42, e/ ou um novo problema relacionado ao de origem, como podemos observar no quadro 43.

Quadro 43 – Problema relacionado ao de origem (exemplo 5)

Exemplo 6: Considere que no estado de Alagoas a operadora TIM utilize os números de celulares nos seguintes formatos: 99XXX-XXXX e 98XXX-XXXX. Quantos números de celulares a TIM poderá ofertar no referido estado?

Fonte: elaborado pelo autor.

O novo problema terá feedbacks de acerto e de erro. Nesse caso, é importante que os feedbacks deem algum indicativo de como o problema pode ser solucionado, como podemos observar no quadro 44.

Quadro 44 – Feedbacks de acerto e de erro para o modelo de problema relacionado ao de origem

Feedback de acerto: Parabéns, resposta correta. Observe que, nesse caso, basta identificarmos os possíveis números que compõem os dígitos e, para cada modelo, realizar o procedimento de contagem semelhante ao problema anterior. Ao final, soma-se a quantidade de números de cada modelo.

Feedback de erro: Observe que, nesse caso, basta identificarmos os possíveis números que compõem os dígitos e, para cada modelo, realizar o procedimento de contagem semelhante ao problema anterior. Ao final, soma-se a quantidade de números de cada modelo.

Fonte: elaborado pelo autor.

As funcionalidades “Simular” e “Dicas” não estarão disponíveis para este tipo de problema, como forma de reduzir paulatinamente os auxílios para os estudantes. A sua solução deverá ser disponibilizada seguindo o modelo apresentado no quadro 45.

Quadro 45 – Modelo de resolução do problema relacionado ao de origem

(continua)

Inicialmente, contemos os números de celulares possíveis no formato 99XXX-XXXX. Observe que os possíveis números que podem compor os dígitos dos números de celulares são de 0 a 9, isto é, 10 possíveis números. Além disso, podemos afirmar que: o número celular é formado por 9 dígitos; os dois primeiros dígitos serão necessariamente iguais a 9; os dígitos podem ter números iguais; a mudança de ordem entre os dígitos distintos gera um número de celular diferente. A partir disso, podemos elaborar o seguinte modelo de contagem:

_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____

Para o primeiro dígito, teremos uma possibilidade, já que necessariamente deverá ser o número 9; para o segundo dígito, teremos uma possibilidade, já que necessariamente deverá ser o número 9; para o terceiro dígito, teremos 10 possibilidades, já que podemos escolher entre os números de 0 a 9 e podemos ter dígitos iguais; para o quarto dígito, teremos 10 possibilidades, já que podemos escolher entre os números de 0 a 9 e podemos ter dígitos iguais e, assim, sucessivamente, até que para o nono dígito teremos 10 possibilidades. Pelo princípio fundamental da contagem, teremos:

$$1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 = 10^7 = 10000000.$$

Portanto, teremos 100000000 de números de celulares no formato 99XXX-XXXX.

Para o formato 98XXX-XXXX, os cálculos são semelhantes. Vejamos:

Observe que os possíveis números que podem compor os dígitos dos números de celulares são de 0 a 9, isto é, 10 possíveis números. Além disso, podemos afirmar que: o número celular é formado por 9 dígitos; os dois primeiros dígitos serão necessariamente iguais a 9 e 8 respectivamente; os dígitos podem ter números iguais; a

(conclusão)

mudança de ordem entre os dígitos distintos gera um número de celular diferente. A partir disso, podemos elaborar o seguinte modelo de contagem:

_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____, _____

Para o primeiro dígito, teremos uma possibilidade, já que necessariamente deverá ser o número 9; para o segundo dígito, teremos uma possibilidade, já que necessariamente deverá ser o número 8; para o terceiro dígito, teremos 10 possibilidades, já que podemos escolher entre os números de 0 a 9 e podemos ter dígitos iguais; para o quarto dígito, teremos 10 possibilidades, já que podemos escolher entre os números de 0 a 9 e podemos ter dígitos iguais e, assim sucessivamente, até que o para o nono dígito teremos 10 possibilidades. Pelo princípio fundamental da contagem, teremos:

$$1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 = 10^7 = 10000000.$$

Portanto, teremos 1000000000 de números de celulares no formato 98XXX-XXXX. Desse modo, a TIM poderá ofertar no estado de Alagoas 20000000 de números de celulares.

Fonte: elaborado pelo autor.

Tais elementos caracterizam o tipo de problema que aqui definimos como “Geral”, isto é, possuem um enunciado, uma resposta numérica, uma simulação, quatro dicas, uma ou mais soluções, um ou mais subproblemas e soluções. Além desse modelo de situação-problema, o OA irá dispor de situações que o estudante possa converter registros de representação, isto é, possam elaborar problemas a partir de representações simbólicas dadas e/ ou possam converter representações simbólicas na ordem direta ou inversa. A esse tipo de problema, aqui definimos como “Específico”. Será apresentado pelo menos um conjunto de itens por conceito resolvidos durante a discussão dos conceitos e pelo menos um conjunto de itens por conceito para resolver. No quadro 46, podemos exemplificar um conjunto de itens (exemplo 7) relacionado ao conceito de princípio fundamental da contagem.

Quadro 46 – Modelo de problema para conversão de registros de representação

(continua)

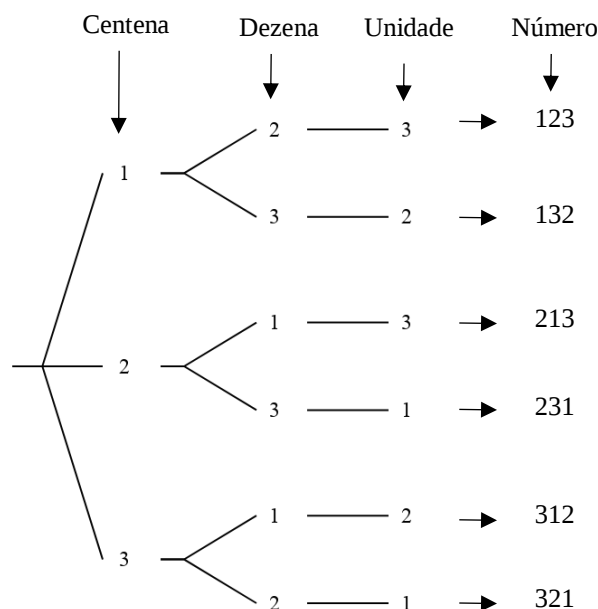
Exemplo 7: Experimente gerar outras representações a partir das situações abaixo.

- apresente um diagrama da árvore que possa deduzir a expressão $3 \cdot 4 = 12$.
- elabore uma situação problema que possa ser representada a partir da tabela abaixo:

Líquido \ Fruta	Goiaba	Maracujá	Acerola
Água	(Água, Goiaba)	(Água, Maracujá)	(Água, Acerola)
Leite	(Leite, Goiaba)	(Leite, Maracujá)	(Leite, Acerola)

(conclusão)

- c) apresente a tabela do item b) por meio do diagrama de árvore.
 d) elabore uma situação problema que possa deduzir a expressão $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.
 e) deduza uma expressão numérica do diagrama da árvore abaixo.



Fonte: elaborado pelo autor.

Nas situações a resolver, devem ser apresentados auxílios caracterizados como andaimes de compreensão e para elaboração de um plano que contribuem para solucionar o problema. No quadro 47, podemos observar, para cada item, auxílios nessa perspectiva.

Quadro 47 – Modelo de auxílios para o conjunto de itens referente ao exemplo 7

(continua)

Auxílios do item a)

- Podemos considerar $3 \cdot 4 = 12$ como aplicação do princípio fundamental da contagem;
- Podemos considerar que 3 representa o número de elementos distintos de um conjunto X e 4 representa o número de elementos distintos de um conjunto Y.
- Podemos considerar que 12 representa o conjunto Z formado pelo agrupamento de cada elemento do conjunto X com cada elemento do conjunto Y.

Auxílios do item b)

- Note que a tabela representa informações de dois tipos: líquido e fruta;
- Observe que cada elemento de uma linha da coluna “líquido” foi combinado com um elemento de uma coluna (uma fruta).

(conclusão)

Auxílios do item c)

- Temos dois tipos de líquidos (água e leite) e três tipos de frutas (goiaba, maracujá e acerola);
- Inicialmente, dispomos os tipos de sucos. Em seguida, dispomos os tipos de frutas. Por fim, elaboramos os agrupamentos possíveis.

Auxílios do item d)

- Podemos considerar que a expressão numérica $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ representa a aplicação do princípio fundamental da contagem;
- O fato de termos quatro “dois” na aplicação do princípio fundamental da contagem, sugere que uma possível situação geradora deve trazer 4 conjuntos distintos;
- Cada conjunto deve ser formado por dois elementos distintos.

Auxílios do item e)

- Pelo diagrama, são dados três números (1, 2 e 3) e é solicitado que com tais números formem números de três algarismos distintos;
- Para o algarismo das centenas, foram dadas 3 possibilidades; após a escolha do algarismo das centenas, tivemos 2 possibilidades para escolha do algarismo das dezenas; e, após a escolha dos algarismos das centenas e dezenas, temos 1 possibilidade de escolha para o algarismo das unidades.

Fonte: elaborado pelo autor.

Para cada situação, será apresentada uma solução que leve em consideração os auxílios anteriores. Nesse caso, as soluções se caracterizam como andaime para execução do plano e retrospecto. No quadro 48, podemos observar as resoluções nessa perspectiva.

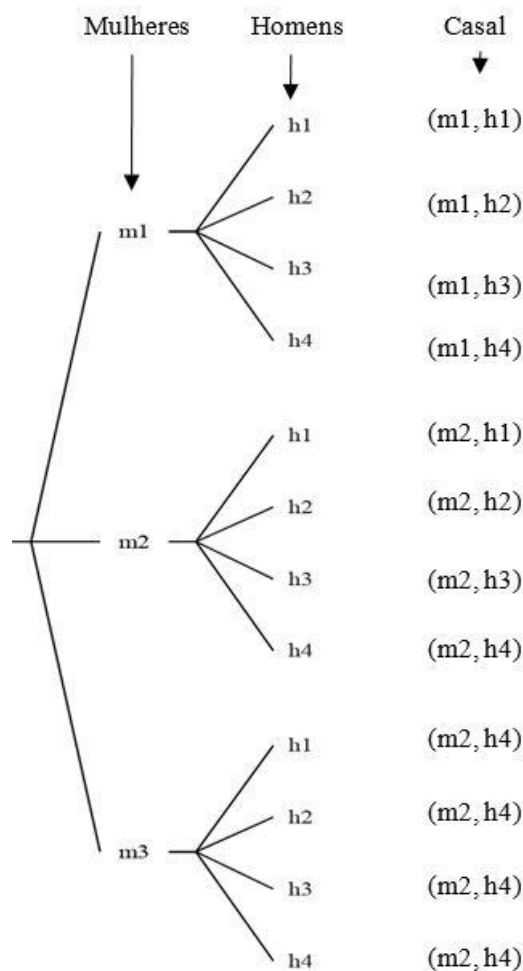
Quadro 48 – Modelo de resolução para o conjunto de itens referente ao exemplo 7

(continua)

Resolução do item a)

Observe que $3 \cdot 4 = 12$ representa a aplicação do princípio fundamental da contagem. Dessa forma, podemos considerar que 3 e 4 representam o número de mulheres e homens, respectivamente, presentes numa sala de aula. Suponhamos, portanto, que $3 \cdot 4 = 12$ representa o número de casais que podem ser formados para o ensaio de uma dança. Identifiquemos as mulheres por m_1, m_2 e m_3 e os homens por h_1, h_2, h_3 e h_4 . Um diagrama de árvore que deduz a expressão $3 \cdot 4 = 12$ pode ser apresentado da seguinte forma:

(continua)



Observe que, inicialmente, dispomos as mulheres (m_1 , m_2 e m_3). Em seguida, para cada mulher, dispomos os homens possíveis (h_1 , h_2 , h_3 e h_4). Por fim, realizamos os agrupamentos representados por “Casal” no diagrama acima.

Resolução do item b)

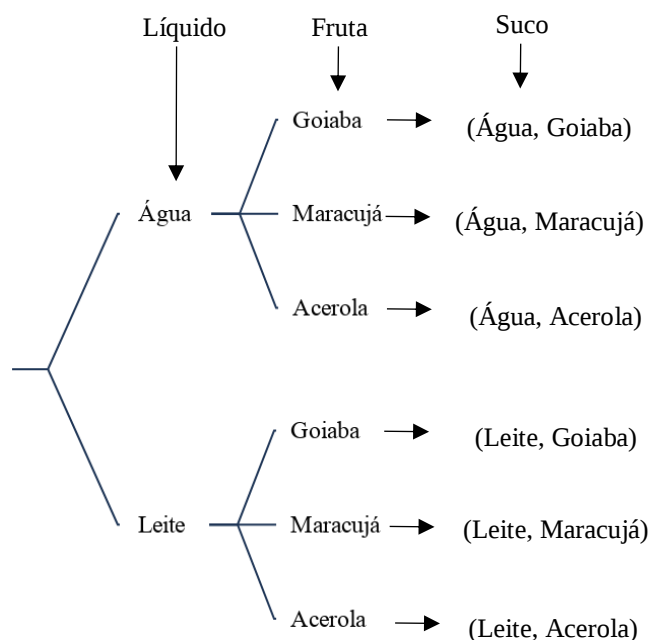
Note que a tabela representa informações de dois tipos: líquido e fruta. Observe também que cada elemento de uma linha da coluna “líquido” foi combinado com um elemento de uma coluna (uma fruta). Temos dois tipos de líquidos (água e leite) e três tipos de frutas (goiaba, maracujá e acerola). A partir desses dados, podemos elaborar o seguinte enunciado.

Maria e seus filhos foram para um restaurante. Ao pedir o cardápio, notou que havia duas opções de suco (com água ou com leite) e três opções de fruta (goiaba, maracujá e acerola). Joaquim, um de seus filhos, falou para sua mãe: mamãe, estou estudando na escola como descobrir quantos sucos podem ser feitos com essas frutas e opções de líquido. Maria, então, faz o seu pedido e pede para Joaquim mostrar como ele faz as combinações e encontra a quantidade de sucos possíveis. Como Joaquim poderia responder sua mãe?

Resolução do item c)

(continua)

A partir dos dados elencados em b), podemos elaborar um diagrama de árvore de modo que a primeira ramificação representa o tipo de líquido (água ou leite), a segunda ramificação representa o tipo de fruta (goiaba, maracujá e acerola). Por fim, temos todos os agrupamentos possíveis representados por “Suco”. Assim, teremos:



Resolução do item d)

Note que a expressão numérica $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ representa a aplicação do princípio fundamental da contagem. Com isso, podemos afirmar que cada número “2” indica a quantidade de possibilidades de algo ocorrer. Observe que o fato de termos quatro “dois” na aplicação do princípio fundamental da contagem, sugere que uma possível situação geradora deve trazer 4 conjuntos de elementos, que esses conjuntos tenham naturezas distintas, e que cada conjunto seja formado por dois elementos distintos. Dessa forma, podemos elaborar o seguinte enunciado:

Num restaurante do tipo self-service, são disponibilizados dois tipos de feijão, dois tipos de arroz, dois tipos de saladas e dois tipos de frutas. No mínimo quantas pessoas podem ser servidas de modo que cada uma delas tenha uma composição de prato diferente?

Resolução do item e)

Note que, pelo diagrama, são dados três números (1, 2 e 3) e é solicitado que, com tais números, formem números de três algarismos distintos. Observe que, para o algarismo das centenas, foram dadas 3 possibilidades; após a escolha do algarismo das centenas, tivemos 2 possibilidades para escolha do algarismo das dezenas; e, após a escolha dos algarismos das centenas e dezenas, temos 1 possibilidade de escolha para o algarismo das

(conclusão)

unidades. Assim, pelo princípio fundamental da contagem, a quantidade de números de três algarismos distintos formados pelos números 1, 2 e 3 é dado por $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Fonte: elaborado pelo autor.

7.1.2.2.2 Requisitos funcionais

Os requisitos funcionais “trazem a relação de todas as funcionalidades que um OA deverá conter e como elas devem ser apresentadas” (Braga; Kelly, 2015a, p. 74). Desse modo, a partir dos requisitos didático-pedagógicos apresentados, o OA deverá apresentar os seguintes requisitos funcionais:

- Ao iniciar o OA, o usuário deverá ter acesso aos botões: Conceitos, Atividades e Sobre;
- Ao acessar o botão Conceitos, o usuário terá acesso aos botões Princípio fundamental da contagem, Permutações simples, Permutações com elementos repetidos, Arranjos simples e Combinações;
- O conteúdo de cada conceito será composto por discussão teórica e exemplos resolvidos;
- Ao acessar o botão Atividades, o usuário terá acesso aos botões Iniciante, Intermediário e Avançado;
- Ao acionar os botões Iniciante, Intermediário ou Avançado serão apresentados problemas de modo que o usuário tenha liberdade de escolha;
- Ao acionar algum problema contido no botão Atividades, o usuário terá acesso ao enunciado, simulação, auxílios, solução e problema auxiliar.
- A simulação poderá ser acessada a partir do botão Simular;
- Os auxílios poderão ser acessados a partir do botão Dicas;
- A solução poderá ser acessada a partir do botão Solução;
- O problema auxiliar poderá ser acessado a partir do botão Veja mais;
- Inicialmente, o usuário visualizará apenas o enunciado do problema e o espaço para responder. Caso o estudante acerte o problema, o sistema emitirá um feedback e os botões Simular, Dicas e Solução serão apresentados. Caso o estudante erre o problema, o sistema emitirá um feedback e os botões Simular e Dicas serão apresentados;

- Ao acionar o botão Simular, será apresentado um recurso interativo que será modelado conforme um dos modelos abaixo (figura 10):

Figura 10 – Exemplos de recursos interativos a serem modelados no OA

The figure shows two examples of interactive resources. The left example is a mobile phone interface with a screen labeled "Possibilidades válidas:", a numeric keypad (0-9), and buttons "Limpar" and "Conferir" at the bottom. The right example is a desktop interface with seven empty input boxes, a "Conferir" button, a label "Possibilidades válidas:", a large empty text area, and a "Limpar" button.

Fonte: elaborado pelo autor.

- Ao acionar o botão Dicas, os auxílios irão aparecer à medida que forem sendo respondidos de forma correta, geralmente, na seguinte ordem: auxílio 1, auxílio 2, auxílio 3 e auxílio 4 (conforme especificações definidas nos requisitos didático-pedagógicos);
- O auxílio 1 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo múltipla escolha (com mais de uma opção podendo estar correta), irá conter um enunciado, os itens a marcar e feedbacks relacionados ao auxílio;
- O auxílio 2 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo sim ou não, irá conter um enunciado, os itens a marcar e feedbacks relacionados a cada item;
- O auxílio 3 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo texto e irá conter um enunciado;
- O auxílio 4 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo sim ou não, irá conter um enunciado, os itens a marcar e feedbacks relacionados a cada item;
- No caso de o estudante errar a resposta do problema e passar por todos os auxílios, o botão Solução irá aparecer na tela principal do problema;
- O botão solução irá apresentar a solução do problema;

- Ao final da solução, será apresentado o botão Veja mais;
- Ao acionar o botão Veja mais, será apresentado um problema auxiliar relacionado ao problema de origem;
- O problema auxiliar terá as seguintes configurações: enunciado, feedbacks e solução;
- Em todas as telas, deverá estar disponível um botão de ajuda que oriente o usuário sobre como funciona a dinâmica dos recursos disponíveis naquele respectivo espaço;
- Em todas as telas deverá haver botões de navegação (voltar, próximo, início, etc) que facilitem a navegação do usuário.

7.1.2.2.3 Requisitos não funcionais

Os requisitos não funcionais “são aqueles que dizem respeito às propriedades, restrições e qualidade do OA como um todo, [...] e podem ser divididos nas seguintes subcategorias: confiabilidade, usabilidade, disponibilidade, reusabilidade, acessibilidade, desempenho, portabilidade, ajuda e documentação, design de interface e direitos autorais” (Braga; Kelly, 2015a, p. 75).

Em relação ao requisito de confiabilidade, o conteúdo pedagógico do OA deverá ser elaborado a partir de fontes confiáveis, citando as referências dos documentos consultados. Os enunciados dos problemas, suas análises e soluções deverão ser cuidadosamente verificados de modo a evitar possíveis ambiguidades e erros. A forma de apresentação do conteúdo do OA deverá ser clara, simples e com nível de detalhe elevado, considerando o público alvo do OA.

Em termos de usabilidade, o OA deverá manter uma consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos); os botões de navegação deverão ser facilmente reconhecíveis, compreensíveis e deverão manter um padrão entre as telas do OA; deverá permitir que o usuário se situe durante a navegação entre as telas; em todas as telas deverão estar disponíveis formas de ajuda para orientar sobre como proceder de acordo com os recursos presentes na tela; além do aspecto navegacional, o OA irá permitir a interatividade (alterar configurações, testar situações, editar, etc.) por meio dos recursos interativos disponíveis ao usuário (Simular e Dicas); as dinâmicas do OA irão utilizar uma sequência de ações padronizada e de fácil entendimento.

No que se refere aos requisitos de acesso, o OA terá três perfis diferentes: o administrador do sistema, o professor e o aluno. O perfil do aluno dará acesso ao conteúdo do OA e ao guia do estudante. O perfil do professor dará acesso ao conteúdo do OA, ao guia do

professor e a uma tela de gerenciamento dos estudantes (o que foi feito, quantidade de erros, acertos, etc.); o perfil do administrador do sistema permitirá gerenciar professores, editar o conteúdo do OA, bem como cadastrar novas atividades. Em relação ao requisito de disponibilidade, o OA deverá estar disponível numa página Web que será criada para manter o software e seu histórico de atualizações e formas de uso. Além disso, o OA deverá ficar disponível no ambiente de EaD da instituição, juntamente com o metadado.

Em termos de reusabilidade, o OA apresentará os conceitos de princípio fundamental da contagem, permutações simples, permutações com elementos repetidos, arranjos simples e combinações de modo que possam ser estudados separadamente. Quando se trata dos requisitos de acessibilidade, o OA poderá ser acessado por vários sistemas operacionais e diferentes dispositivos (computadores, notebooks, celulares, tablets), exigindo apenas um navegador Web compatível. Em relação ao desempenho, o OA será desenvolvido para que possa atender uma quantidade elevada de estudantes simultaneamente de modo que as respostas entre as ações do estudante e o software sejam rápidas e possam promover precisão dos resultados.

No que se refere ao requisito de portabilidade, o OA funcionará adequadamente em diversos navegadores Web e não necessitará de instalação. Sobre os requisitos de ajuda e documentação, o OA irá disponibilizar o guia do professor, detalhando as principais funcionalidades do OA para esse tipo de perfil, bem como alguns cenários de uso do OA em sala de aula; e o guia do aluno, apresentando as principais funcionalidades do OA para esse tipo de perfil. Quando se trata dos requisitos de design de interface, o OA irá apresentar textos com fonte e tamanho adequados, além de possuir um contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura; o uso de imagens e outros recursos visuais deverão ser utilizados para ilustrar conceitos, situações-problema e explicações, evitando o seu uso para efeito estritamente estético. Por fim, no que se refere aos requisitos de licenciamento e direitos autorais, o OA deverá estabelecer um tipo de licença que permita a sua utilização de forma gratuita, desde que mencione a autoria e o local onde o OA está depositado.

A partir dos elementos discutidos, de acordo com a metodologia INTERA, foi criado o artefato chamado Documento de Especificação de Requisitos, disponível no apêndice K, que foi compartilhado com a equipe de desenvolvimento do OA.

7.1.2.3 Etapa de arquitetura

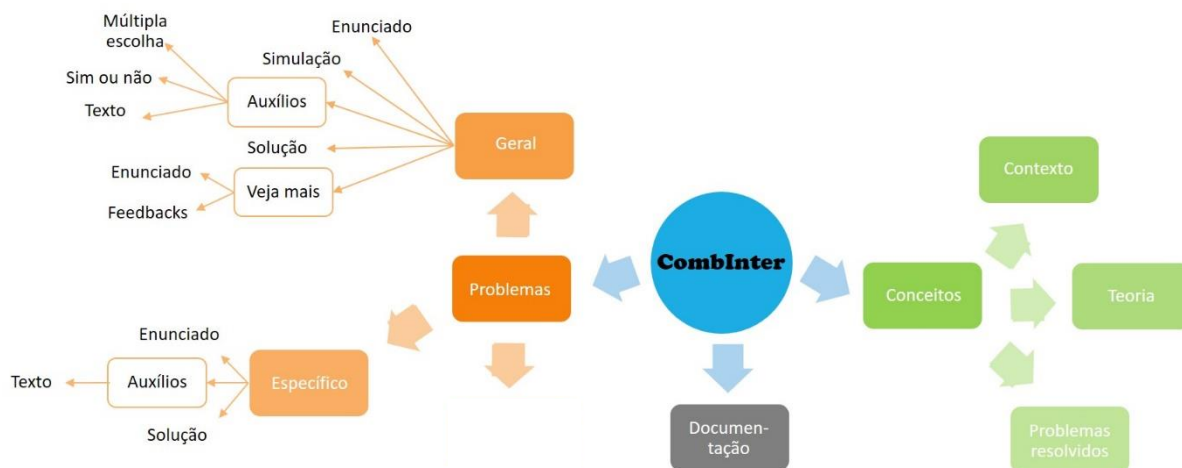
Na etapa de arquitetura, é realizada uma análise dos requisitos que resultará no esboço (ou rascunho) do OA, na definição das tecnologias mais adequadas para o seu desenvolvimento, dos padrões a serem adotados e dos componentes de reúso. Três atividades principais fazem parte desta etapa: esboço do OA, decomposição do OA e definições técnicas.

7.1.2.3.1 Esboço do OA

A partir dos dados obtidos na etapa de requisitos, é possível construir formas de representação do OA que facilitem a compreensão pela equipe de desenvolvimento, além de permitir novos ajustes a partir de uma visualização real do OA. Essas representações são chamadas de esboços do OA e, no presente trabalho, adotamos um mapa conceitual que expõe as principais funcionalidades, um mapa navegacional que tem como objetivo apresentar as dinâmicas entre as telas do OA, e um protótipo que explicita a dinâmica das funcionalidades que fazem parte do OA. O uso de protótipo é recomendado para objeto de aprendizagem do tipo software educacional e permite “que as partes interessadas façam experiências com um modelo do OA final ao invés de somente discutirem representações abstratas dos seus requisitos” (Braga; Kelly; Nishida, 2015, p. 95).

No mapa conceitual (figura 11), podemos notar que o CombInter é composto por Problemas, Conceitos e Documentação, de tal modo que são explicitadas as caracterizações dos tipos de problemas (Geral e Específico) e dos conceitos (Contexto, Teoria e Problemas resolvidos).

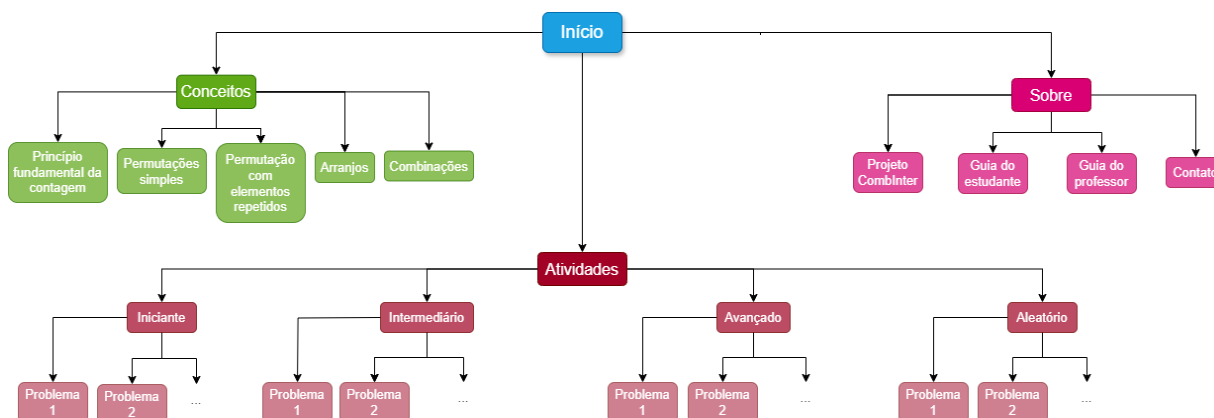
Figura 11 – Mapa conceitual do OA



Fonte: elaborado pelo autor.

No mapa navegacional abaixo (figura 12), podemos observar de modo geral as opções de navegação que o usuário irá ter ao interagir com o OA.

Figura 12 – Mapa navegacional do OA

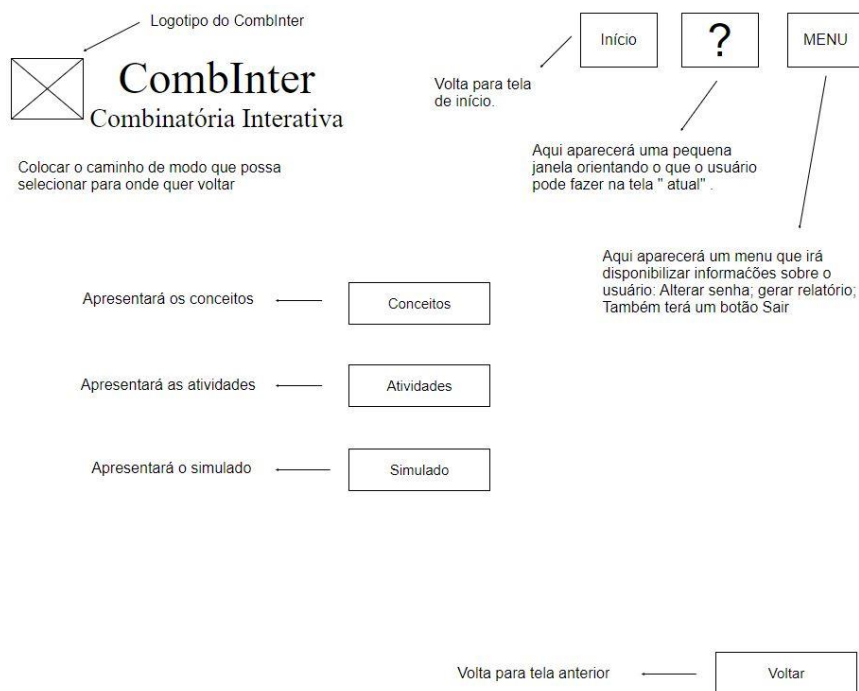


Fonte: elaborado pelo autor.

Como forma de apresentar as funcionalidades do OA para equipe de desenvolvimento, foi elaborado o protótipo do OA que foi desenvolvido a partir do software Justinmind⁵ – versão gratuita. Para fins de exemplificação de como ocorreu a prototipação, na figura 13, é exibida a tela principal do OA. A prototipação completa está disponível no apêndice M.

⁵ Justinmind é uma ferramenta de prototipagem para a criação de protótipos de alta fidelidade de aplicativos web e móveis.

Figura 13 – Protótipo do OA: tela com as principais funcionalidades



Fonte: elaborado pelo autor.

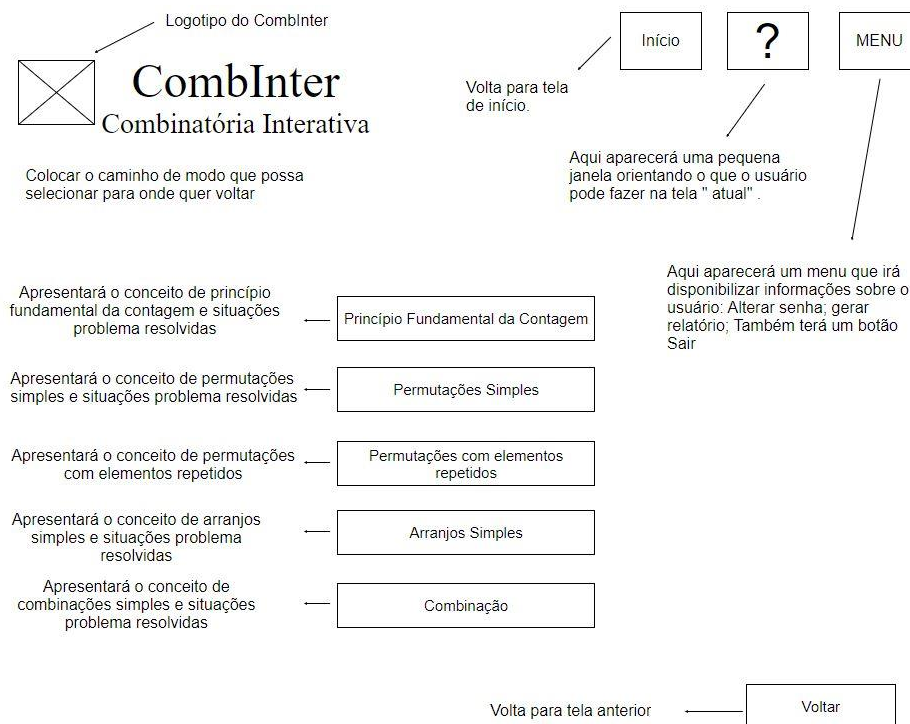
Nesta tela, são apresentados como as principais funcionalidades do sistema podem ser acionadas, definindo os botões e seus direcionamentos.

7.1.2.3.2 Decomposição do OA

A etapa de decomposição do OA “deve descrever como o OA pode ser decomposto e organizado em componentes pequenos e reutilizáveis, e como serão as interfaces (ou conexões) entre esses componentes (Braga; Kelly; Nishida, p. 97, 2015). Desse modo, para que o OA possa obedecer a tais requisitos, serão adotados os seguintes mecanismos no software:

- Serão criados botões que permitem selecionar o conceito a ser estudado, separadamente, conforme podemos observar na tela do protótipo representado na figura 14. Assim, os conceitos poderão ser estudados isoladamente ou em conjunto;

Figura 14 – Protótipo do OA: Tela dos conceitos



Fonte: elaborado pelo autor.

- Os problemas serão cadastrados de acordo com o tipo de conceito relacionado, bem como em relação ao seu nível de complexidade. Desse modo, a partir do sistema de login, o professor poderá filtrar os tipos de problemas e indicar atividades personalizadas para os estudantes, com intuito, por exemplo, de estudar apenas problemas de um referido conceito.

7.1.2.3.3 Definições técnicas

A etapa de definições técnicas refere-se a escolha das tecnologias utilizadas para o desenvolvimento do software (Braga; Kelly; Nishida, 2015). A partir da análise dos requisitos e do esboço do OA, inicialmente foram desenvolvidos protótipos de alta fidelidade com o objetivo de “validar aspectos gerais de usabilidade, bem como avaliar aspectos específicos relacionados ao design visual” (Santos, 2013). Para isso, foi utilizada a plataforma *Figma*⁶, versão gratuita, por possuir recursos que atendem ao projeto e permitir o compartilhamento do

⁶ Figma é um editor gráfico de vetor e prototipagem de projetos de design baseado principalmente no navegador web, com ferramentas offline adicionais para aplicações desktop para GNU/Linux, macOS e Windows.

desenvolvimento dos protótipos de forma online, contribuindo para interação e colaboração da equipe.

A linguagem de programação adotada foi a *TypeScript*⁷, uma vez que facilita e otimiza o desenvolvimento de aplicações web, tipo de aplicação desenvolvida neste projeto. A decisão por esse tipo de aplicação se deu por permitir o acesso por meio de vários tipos de hardware (computadores, notebooks, tablets, celulares), mínima exigência de requisitos de software (apenas navegador Web) e expertise da equipe de desenvolvimento. Nessa perspectiva, foi utilizado o *Next.js*⁸ para o desenvolvimento do *back-end*⁹ e *front-end*¹⁰ da aplicação. Para o gerenciamento do banco de dados, foi utilizado o *PostgreSQL*¹¹, devido a sua confiabilidade, robustez de recursos e desempenho. Para aumentar a produtividade durante o desenvolvimento da aplicação em seu fluxo de trabalho com banco de dados, foi utilizado o *Prisma*¹². De modo geral, a operacionalização dessas tecnologias se deu a partir da prototipação das telas do sistema; em seguida, a equipe de desenvolvimento *back-end* definia as necessidades e implementava o banco de dados, ao passo que a equipe de desenvolvimento *front-end* produzia o design das telas, implementava as funcionalidades e realizava a conexão com o banco de dados. Após a conclusão de cada funcionalidade, a equipe realizava testes para verificar a validade de cada etapa desenvolvida. Esse processo se deu até a conclusão de uma versão estável e podemos representá-lo a partir da figura 15 abaixo.

Como forma de descrever como o sistema funciona e os relacionamentos entre os componentes do sistema, foi elaborado o diagrama de classes¹³ UML¹⁴ do CombInter, conforme figura 16.

⁷ TypeScript é uma linguagem de programação de código aberto desenvolvida pela Microsoft. É um superconjunto sintático estrito de JavaScript e adiciona tipagem estática opcional à linguagem.

⁸ O Next.js é um framework de desenvolvimento web em JavaScript, baseado no React, que permite a criação de aplicações web de alto desempenho e eficientes.

⁹ Compreende-se o back-end como o lado servidor da aplicação. Ele é responsável pelo armazenamento, gerenciamento de dados, bem como regras de negócios, APIs (Alves Junior *et al.*, 2022).

¹⁰ O front-end é a camada que o usuário visualiza e interage em uma aplicação, entregando uma experiência integrada ao back-end, consumindo-o por meio de requisições e envios de dados (Alves Junior *et al.*, 2022).

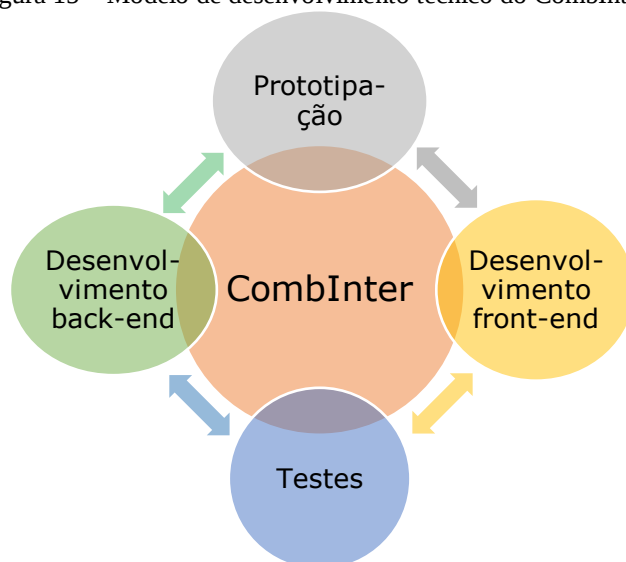
¹¹ PostgreSQL é um sistema gerenciador de banco de dados objeto relacional, desenvolvido como projeto de código aberto.

¹² O Prisma é uma ferramenta de ORM (Object-Relational Mapping) que simplifica o acesso ao banco de dados em aplicativos Node.js e TypeScript.

¹³ Diagrama de classes é uma representação da estrutura e relações das classes que servem de modelo para objetos.

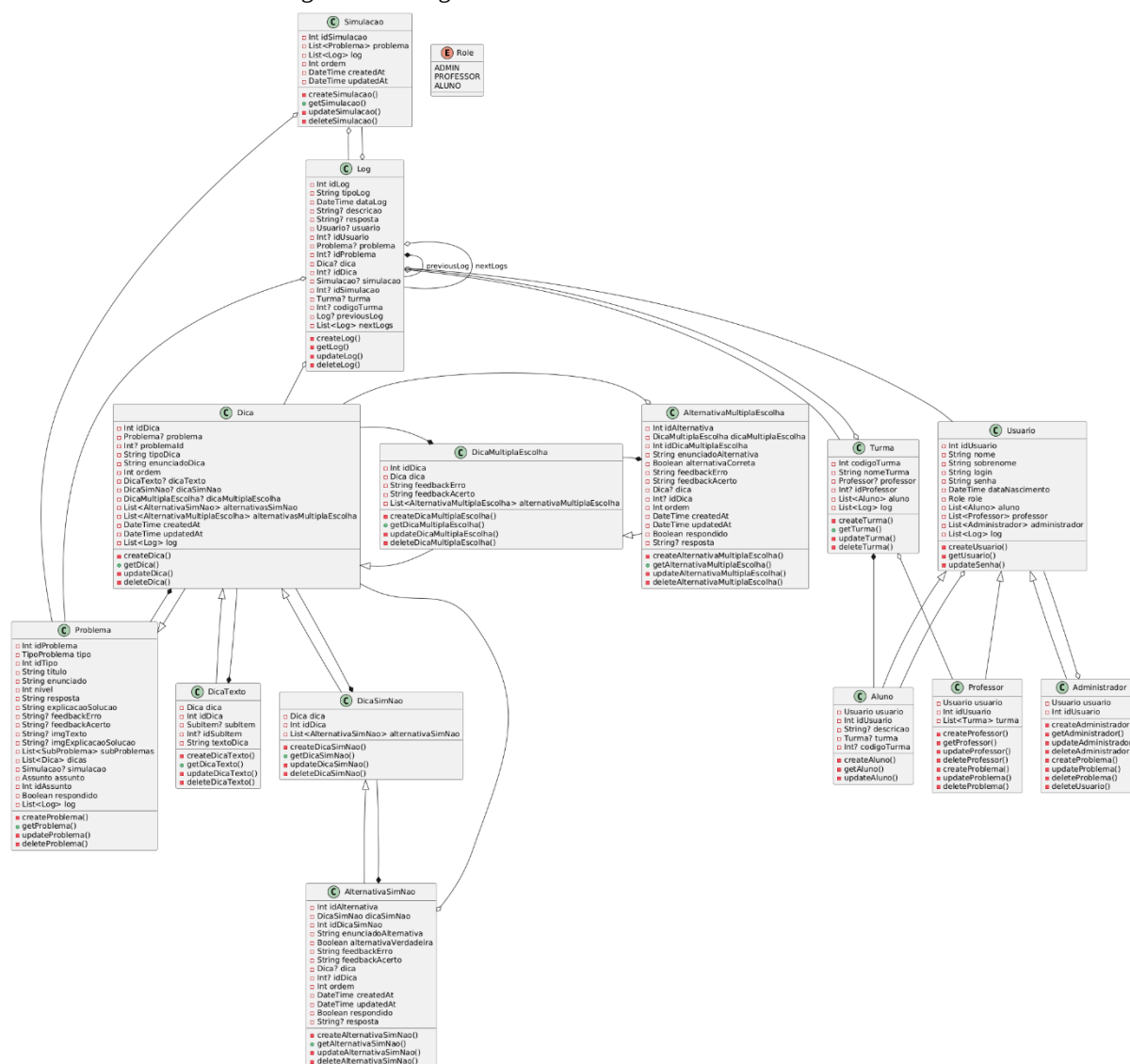
¹⁴ A UML (Unified Modeling Language) é uma linguagem-padrão para a elaboração da estrutura de projetos de software.

Figura 15 – Modelo de desenvolvimento técnico do CombInter



Fonte: elaborado pelo autor

Figura 16 – Diagrama de classes UML do CombInter

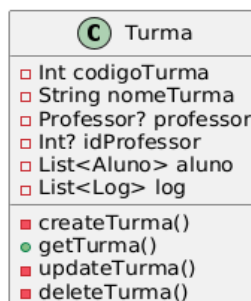


Fonte: elaborado pelo autor.

No diagrama, cada retângulo representa uma classe do sistema. As classes são organizadas de forma a demonstrar seus atributos e seus métodos. Os atributos e métodos estão separados por uma barra horizontal, sendo que os atributos são listados na parte superior e os métodos na parte inferior do retângulo.

Para melhor compreensão, tomemos a classe "Turma" como exemplo (figura 17):

Figura 17 – Classe
"Turma"



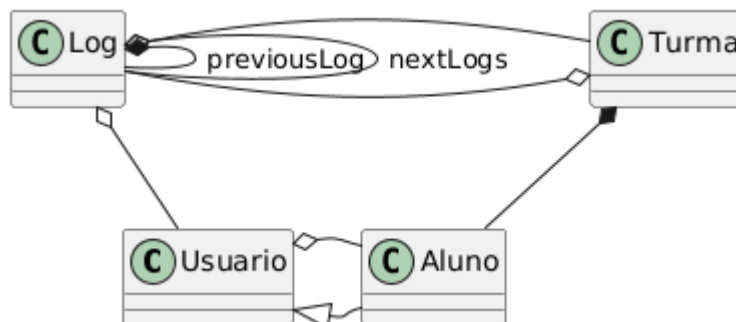
Fonte: elaborado pelo
autor.

No diagrama, a classe "Turma" é representada por um retângulo intitulado com a letra "C" à esquerda do nome, indicando que se trata de uma classe. Abaixo do nome "Turma", podemos observar uma lista de atributos, que são as propriedades que essa classe possui, como "codigoTurma" e "nomeTurma". Esses atributos são acompanhados por ícones de quadrados vazios, indicando que eles são propriedades definidas pela classe.

Na parte inferior do retângulo, estão listados os métodos, que são as operações ou funções que a classe "Turma" pode realizar no sistema, como "createTurma()", "getTurma()", "updateTurma()" e "deleteTurma()". Esses métodos estão acompanhados por ícones de quadrados preenchidos, denotando que eles são ações que a classe pode executar, com exceção do método "getTurma()", que está acompanhado de um círculo verde, indicando que qualquer classe, incluindo a classe "Turma", pode executar a ação.

Além da representação das classes em si, o diagrama também inclui suas relações, que são indicadas por setas e símbolos específicos (figura 18):

Figura 18 – Relações entre as classes



Fonte: elaborado pelo autor.

Na imagem acima, a seta com um triângulo vazio representa a relação de “Herança” e indica que uma classe herda atributos e métodos de outra. As setas com um losango vazio indicam a relação de “Agregação”, simbolizando que uma classe contém outra, mas as duas podem existir independentemente. Já as setas com um losango preenchido representam a relação de “Composição” e indica a existência de uma classe que depende da outra, implicando um vínculo mais forte. Por fim, há a “Autoassociação”, mostrada por setas conectando uma classe a si mesma, com losangos tanto preenchidos quanto vazios, indicando as relações “previousLog” e “nextLogs”. Isso reflete uma estrutura onde um “Log” pode estar conectado a outro “Log”, formando uma sequência ou cadeia, onde um log pode ser anterior ou posterior a outro em uma série de eventos.

7.1.2.4 Etapa de Desenvolvimento

Na etapa de desenvolvimento, a construção do OA é realizada a partir da contextualização, requisitos e a arquitetura abordados anteriormente. Desse modo, foi desenvolvido o objeto de aprendizagem CombInter – Combinatória Interativa.

O CombInter¹⁵ é um objeto de aprendizagem, do tipo *software* educacional, desenvolvido para auxiliar alunos e professores no estudo de análise combinatória. O CombInter disponibiliza conceitos e problemas com ênfase na diversificação de situações, invariantes e representações simbólicas relacionados aos conceitos combinatórios. Durante a interação com as situações problema, os estudantes poderão simular situações de contagem relacionadas ao enunciado do problema, bem como obter auxílios com feedbacks que

¹⁵ O CombInter pode ser acessado por meio do link: <https://sites.google.com/view/combinter/>. Para acessar o CombInter, utilize o email professor@combinter.com e senha professor123 caso deseje visualizar o perfil de professor, ou utilize o email aluno@combinter.com e senha aluno123 caso deseje visualizar o perfil de estudante.

proporcionam a compreensão do problema e o desenvolvimento de estratégias de solução. Tais elementos possibilitam ao estudante compreender os principais conceitos de análise combinatória, a saber: Princípio Fundamental da Contagem, Arranjos, Permutações e Combinações. Na figura 19, por exemplo, apresentamos a tela principal do CombInter.

Figura 19 – Tela principal



Fonte: elaborado pelo autor.

As demais telas e funcionalidades podem ser visualizadas a partir do apêndice N.

7.1.2.5 Etapa de Testes e Qualidade

Na etapa de teste e qualidade, são realizados testes durante e após o desenvolvimento do OA e antes de sua aplicação no contexto da sala de aula, com objetivo de corrigir defeitos antes de sua aplicação e contribuir para que o OA cumpra seu objetivo (Braga; Kelly, 2015b).

Durante a fase de desenvolvimento, o OA foi testado pelo demandante no que se refere ao cumprimento dos requisitos estabelecidos. Em relação ao funcionamento dos elementos da interface do OA, os testes foram realizados pelo demandante e pela equipe de desenvolvimento. Após o desenvolvimento do OA, iniciou-se a fase de aperfeiçoamento, conforme abordamos na seção 6.3.1. Nessa fase, iniciaram-se os testes com usuários para que pudéssemos experimentar o objeto desenvolvido sob a perspectiva do usuário final. Esses usuários foram definidos como testadores e foram divididos em dois grupos: um grupo de especialistas e outro grupo de estudantes, ambos com objetivo de realizar testes técnicos e de conteúdo. No quadro 49, temos representado esse plano de testes.

Quadro 49 – Plano de testes do OA

Tipo de teste	Fase	Responsável
Cumprimento dos requisitos	Durante o desenvolvimento do OA	Demandante
Funcionamento dos elementos da interface do OA	Durante e após o desenvolvimento	Demandante e equipe de desenvolvimento
Testes técnicos e de conteúdo	Após o desenvolvimento do OA	Especialistas e estudantes

Fonte: adaptado de Braga e Kelly (2015b, p. 133).

Nas seções 7.2 e 7.3, são apresentadas as análises dos testes realizados.

7.1.2.6 Etapa de Disponibilização

A etapa de disponibilização refere-se à publicação do OA e de sua documentação de uso, preferencialmente, em um repositório de OAs, de tal modo que professores e estudantes possam encontrá-lo com facilidade, proporcionando a sua reutilização. Desse modo, o OA está disponível na página <https://sites.google.com/view/combinter/> que foi criada para manter o software, seu histórico de atualizações e formas de uso; estará disponível no ambiente EaD da UFPE, juntamente com o metadado; e em algum repositório de OAs com elevado acesso de professores e estudantes.

7.1.2.7 Etapa de Avaliação

A etapa de avaliação refere-se a verificar o potencial pedagógico do OA, isto é, identificar o quanto o OA contribui para o processo de aprendizagem do conteúdo envolvido. Conforme abordado na seção 6.3.2, a avaliação do CombInter se deu no âmbito quantitativo e qualitativo. Em relação ao aspecto quantitativo, foram definidas duas turmas: uma formou o grupo experimental e a outra formou o grupo controle. No grupo experimental, o professor de matemática fez uso do CombInter durante as aulas de combinatória. No grupo controle, o CombInter não foi utilizado pelo professor. Antes do início das aulas, ambas as turmas fizeram um pré-teste (apêndice I) com problemas de análise combinatória. Após as aulas, ambas as turmas fizeram um pós-teste (apêndice J) de modo que as respostas dos estudantes pudessem ser comparadas. No aspecto qualitativo, o pesquisador observou o grupo experimental fazendo uso do CombInter. Nesse processo, foi utilizado diários de bordo e realização de entrevistas (apêndice H) para que o professor e os estudantes retratassem a experiência com a ferramenta.

Na seção 7.3, são apresentadas as análises da etapa de avaliação.

7.2 ETAPA DE APERFEIÇOAMENTO

Durante a fase de aperfeiçoamento, os dados obtidos por meio dos questionários foram analisados a partir das pontuações dadas pelos participantes em cada questão. Tais pontuações foram obtidas a partir de uma escala Likert, que indicou o grau de concordância que o avaliador teve para cada item, com os seguintes valores: 1 (discordo totalmente), 2 (discordo), 3 (nem concordo nem discordo), 4 (concordo) 5 (concordo plenamente). Para isso, foi utilizado um *Ranking* Médio (RM) vinculado ao critério e a uma questão específica dos questionários. O *ranking* foi calculado a partir do produto das respostas informadas pelos participantes pela quantidade de cada tipo de resposta dividido pelo total de participantes, conforme modelo representado no quadro 50:

Quadro 50 – Modelo de cálculo do *Ranking* Médio (RM)

Questão	Quantidade de respostas dos participantes por tipo de escala					
	DT	D	NCND	C	CP	RM
O objeto é facilmente instalável, dispensando requisitos complexos para sua execução?			1	5	7	4,46
Produto das respostas informadas pelos participantes pela quantidade de cada tipo de resposta = $7 \times 5 + 5 \times 4 + 1 \times 3 = 35 + 20 + 3 = 58$ Total de participantes = $1 + 5 + 7 = 13$ Portanto, $RM = \frac{58}{13} = 4,46$ Legenda: Discordo totalmente (DT) = 1 Discordo (D) = 2 Nem concordo nem discordo (NCND) = 3 Concordo (C) = 4 Concordo plenamente (CP) = 5						

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir desta forma de análise, foi possível avaliar o grau de concordância em diversos aspectos relacionados ao desenvolvimento do OA. Por exemplo, quanto mais próximo de 5 o *ranking* médio for, melhor avaliado será o OA no aspecto que está sendo analisado. Por outro lado, quando o *ranking* médio for mais próximo de 1, maior é o indicativo que o aspecto que está sendo avaliado do OA está ausente ou necessita de ajustes. A seguir, apresentamos as análises dos dados organizados a partir das categorias usabilidade, interface e recursos

interativos do CombInter, prover auxílio aos usuários, foco pedagógico e conteúdo matemático. Para cada categoria, são apresentadas as questões relacionadas, as opções de resposta dos grupos professores (educação básica e ensino superior), desenvolvedores e estudantes (ensino médio e licenciandos em matemática), discussões e relatos oriundos das entrevistas pertinentes de acordo com alguma questão ou tipo de resposta.

7.2.1 Usabilidade

No quadro 51 abaixo, são apresentadas as respostas dos grupos participantes relativas ao critério de “Usabilidade” resultantes do processo de interação com o CombInter.

Quadro 51 – Respostas referentes ao critério de Usabilidade

Questão	Grupos	Respostas					
		DT	D	NCND	C	CP	RM
Q1 - Pode ser facilmente disponibilizado em formatos diferenciados (tais como Web, Pendrive, CD, etc)?	Professores	0	2	3	2	4	3,72
	Desenvolvedores	0	0	1	1	3	4,4
	Estudantes	1	0	4	4	1	3,4
Q2 - O objeto explicita os softwares ou recursos necessários para o seu correto funcionamento?	Professores	0	1	0	4	6	4,36
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	2	0	6	2	3,8
Q3 - O objeto é facilmente instalável, dispensando requisitos complexos para sua execução?	Professores	0	0	1	2	8	4,63
	Desenvolvedores	0	0	1	1	3	4,4
	Estudantes	0	1	0	3	6	4,4
Q4 - Pode ser executado sem a necessidade de conexão com a Internet?	Professores	6	2	2	0	1	1,9
	Desenvolvedores	2	1	0	0	2	2,8
	Estudantes	7	2	1	0	0	1,4
Q5 - Pode ser executado a partir da Web?	Professores	0	0	0	1	10	4,9
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
	Estudantes	0	0	0	2	8	4,8
Q6 - Há compatibilidade com outras plataformas, como por exemplo, celulares e tablets?	Professores	0	0	3	2	6	4,2
	Desenvolvedores	0	0	0	3	2	4,4
	Estudantes	0	1	2	4	3	3,9
Q7 - O OA possui uma sequência de ações padronizada e de fácil entendimento?	Professores	0	0	0	0	11	5
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	0	2	8	4,8

Fonte: elaborado pelo autor

Em relação à Usabilidade do CombInter, algumas questões retrataram situações que o sistema ainda não contemplava. Por exemplo, em relação à possibilidade de o sistema ser disponibilizado em vários formatos (Q1), tornou-se inviável devido ao tempo necessário para

o desenvolvimento, bem como à exigência de uma equipe de desenvolvimento com expertise em diversas plataformas de desenvolvimento. A referida situação foi prevista durante o desenvolvimento do CombInter e, buscando atender uma diversidade de pessoas e tipos de hardware (Q7), optou-se pelo tipo de desenvolvimento em plataforma web, conforme abordado na seção 7.1.2.3. Devido a isso, no atual momento, não há uma versão do CombInter que funcione sem o acesso à internet (Q4). Em contrapartida, o fato do CombInter estar em uma plataforma web (Q5), proporcionou uma simplicidade de execução (Q3), não necessitando de exigências de softwares ou recursos necessários (Q2), apenas de um navegador web e internet. O fato de dois estudantes e um professor discordarem que o CombInter disponibilizava suas exigências de funcionamento (Q2), deveu-se ao fato dos sujeitos estarem usando o sistema de forma direta na web. Certamente, quando da disponibilidade em algum repositório, irá constar a necessidade de navegador web e internet.

Em relação às respostas neutras ou discordantes sobre a possibilidade do OA funcionar em diversas plataformas (Q7), deu-se pelo fato do CombInter, no momento dos testes, estar apenas com a versão desktop concluída, o que gerou a necessidade da função “modo computador” para que fosse possível acessar adequadamente por meio do celular. Atualmente, a versão *mobile* está concluída e foi disponibilizada na etapa de validação. Desse modo, considerando que o sistema possui uma sequência de ações padronizada e de fácil entendimento (Q7), podemos afirmar que o CombInter possui uma usabilidade satisfatória, contribuindo para uma boa adaptabilidade, acessibilidade, durabilidade e interoperabilidade discutidas na seção 3.1. De forma complementar ao item “Q7”, os sujeitos da pesquisa destacaram a facilidade de manuseio proporcionada pelo CombInter:

“Em relação à interface, qualquer um do ensino fundamental já conseguiria trabalhar com ele facilmente. Muito fácil a dinâmica ali, a tela. Não tem aquela carga demais que você fica perdido. É tudo bem colocado ali, bem fácil de você saber o que é que você quer, para onde é que você vai” (Professor 2).

“Como a plataforma é bem intuitiva, nem remete a essa necessidade dos tutoriais. [...]. Mas, tanto o aluno como o professor, certamente, vão aprender reinando na própria ferramenta. A própria ferramenta tem uma usabilidade muito boa” (Professor 3).

“Está limpo, está fluido, está bem organizado, bem distribuído” (Professor 5).

“[...] mas, o sistema é tão simples que, particularmente, se você só for clicando, você vai conseguir realizar qualquer tipo de atividade. Em pouco tempo, você vai aprender sozinho, sem nem precisar ler as dicas” (Professor 10).

“Ele é bem intuitivo, ele é bem dinâmico, [...] não é aquilo maçante. É aquilo que você, com um clique, você pode ir, você pode voltar [...]. Se eu pegasse ele, sem nenhum tipo de orientação primeira, eu conseguiria acessar, acessar todas as funcionalidades dele” (Desenvolvedor 2).

“É bem lúdico, é bem intuitivo” (Desenvolvedor 3).

“Há uma interface que é de fácil entendimento. Você entende muito fácil as coisas. O que você precisar, você vai lá e acha” (Aluno 1).

“O aplicativo em si é autoexplicativo. Tudo que você vai fazer tem uma explicação” (Aluno 4).

“Achei fácil, bastante intuitivo” (Aluno 8).

Desse modo, torna-se expressiva a potencialidade do CombInter ser um objeto de aprendizagem que proporcione uma relação com o usuário de conforto e autonomia, uma vez que é intuitivo, fácil, autoexplicativo, lúdico, organizado, fluido, bem distribuído. Tais características são fundamentais para que o CombInter possa atender professores e estudantes com diferentes perfis, de modo que seu uso seja facilitado, favorecendo a sua reutilização.

7.2.2 Interface e recursos interativos do CombInter

No quadro 52 abaixo, são apresentadas as respostas dos grupos participantes relativas ao critério de “Interface e recursos interativos” resultantes do processo de interação com o CombInter.

Quadro 52 – Respostas referentes ao critério de Interface e recursos interativos do CombInter

(continua)

Questão	Grupos	Respostas					
		DT	D	NCND	C	CP	RM
Q8 - O CombInter é claro e conciso?	Professores	0	0	0	2	9	4,81
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	0	2	8	4,8
Q9 - É fácil de usar?	Professores	0	0	0	0	11	5
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	0	4	6	4,6
Q10 - É motivador – instiga o interesse em ser manipulado?	Professores	0	0	1	2	8	4,63
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	3	4	3	4
Q11 - Tem um bom apelo visual?	Professores	0	0	1	5	5	4,36
	Desenvolvedores	0	0	0	4	1	4,2
	Estudantes	0	0	2	8	0	3,8
Q12 - As imagens são empregadas para ilustrar conceitos e explicações?	Professores	0	0	1	2	8	4,63
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	1	7	2	4,1
Q13 - O número de imagens apresentadas em cada página é adequado?	Professores	0	1	1	3	6	4,27
	Desenvolvedores	0	0	0	3	2	4,4
	Estudantes	0	0	1	7	2	4,1

(continua)

Questão		Respostas					
Q14 - Há contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura dos textos?	Professores	0	0	0	4	7	4,63
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	1	6	3	4,2
Q15 - As fontes utilizadas apresentam tamanho adequado?	Professores	0	0	0	3	8	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	2	3	5	4,3
Q16 - Há consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos)?	Professores	0	0	1	3	7	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	1	6	3	4,2
Q17 - A todo o momento é possível saber em que ponto nos encontramos no objeto de aprendizagem, através de seus rótulos e títulos?	Professores	0	0	1	5	5	4,36
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	2	4	4	4,2
Q18 - Os links para acessar outras páginas e funções do objeto de aprendizagem são facilmente reconhecíveis?	Professores	0	0	1	3	7	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	1	5	4	4,3
Q19 - Os recursos interativos empregados vão além da seleção de links e botões para avançar ou recuar na apresentação dos conteúdos	Professores	0	1	0	1	9	4,63
	Desenvolvedores	0	1	0	3	1	3,8
	Estudantes	0	0	2	6	2	4
Q20 - Os recursos interativos exploram a possibilidade do usuário alterar configurações do sistema de modo a obter respostas diferentes de acordo com suas ações?	Professores	1	0	1	4	5	4,09
	Desenvolvedores	0	0	1	0	4	4,6
	Estudantes	0	0	5	2	3	3,8
Q21 - O objeto de aprendizagem emprega recursos gráficos que melhoram o aspecto estético da interface, tornando mais aprazível sua utilização?	Professores	0	1	0	2	8	4,54
	Desenvolvedores	0	0	1	3	1	4
	Estudantes	0	0	1	5	4	4,3
Q22 - O usuário tem liberdade de navegação?	Professores	0	0	0	3	8	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	0	4	6	4,6
Q23 - O CombInter fornece diferentes níveis de dificuldade?	Professores	0	0	0	0	11	5
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
	Estudantes	0	0	0	3	7	4,7
Q24 - O usuário pode retomar ações já executadas?	Professores	0	0	0	1	10	4,9
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
	Estudantes	0	0	3	3	4	4,1
Q25 - A linguagem empregada está de acordo com o público alvo?	Professores	0	0	0	3	8	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	1	5	4	4,3
Q26 - O OA oferece a possibilidade do aluno se identificar?	Professores	0	0	0	2	9	4,81
	Desenvolvedores	0	0	1	0	4	4,6
	Estudantes	0	0	2	5	3	4,1

(conclusão)

Questão		Respostas					
Q27 - O OA fornece relatório das atividades desenvolvidas e do desempenho do usuário na forma de relatórios para o professor?	Professores	0	0	0	1	10	4,9
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
	Estudantes	0	0	0	4	6	4,6
Q28 - O OA possibilita que o usuário acompanhe seu desempenho?	Professores	0	0	1	2	8	4,63
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	1	4	5	4,4
Q29 - O OA permite ao professor configurar e incluir novas atividades?	Professores	1	2	4	1	3	3,27
	Desenvolvedores	1	1	0	1	2	3,4
	Estudantes	0	0	3	2	5	4,2
Q30 - O OA viabiliza a comunicação entre o professor e os alunos?	Professores	0	0	4	2	5	4,09
	Desenvolvedores	0	0	1	2	2	4,2
	Estudantes	0	0	2	2	6	4,4
Q31 - Dispõe de ferramentas de comunicação que permitam a interação entre os estudantes, fomentando a formação de grupo?	Professores	2	2	4	1	2	2,9
	Desenvolvedores	1	2	2	0	0	2,2
	Estudantes	1	1	2	5	1	3,4
Q32 - Todos os documentos e recursos necessários para o uso do OA são disponibilizados no próprio OA sem a necessidade de acessar links externos?	Professores	0	0	1	5	5	4,36
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	1	4	5	4,4
Q33 - O OA permite a gravação dos resultados gerados?	Professores	1	1	2	2	5	3,81
	Desenvolvedores	1	0	0	1	3	4
	Estudantes	0	0	5	3	2	3,7
Q34 - O OA disponibiliza canais de discussão entre seus usuários?	Professores	2	1	4	3	1	3
	Desenvolvedores	1	2	2	0	0	2,2
	Estudantes	0	4	4	2	0	2,8
Q35 - O OA permite ao usuário visualizar, na íntegra, as questões que acertou/errou no uso de questionários e/ou exercícios e permitir voltar e tentar novamente e/ou reiniciar?	Professores	0	0	0	2	9	4,81
	Desenvolvedores	0	0	1	0	4	4,6
	Estudantes	0	0	0	2	8	4,8

Fonte: elaborado pelo autor

No que se refere à interface e os recursos interativos do CombInter, alguns recursos não foram disponibilizados ou não foram desenvolvidos em sua plenitude, o que gerou várias respostas discordantes e neutras. Por exemplo, apesar do sistema não permitir que o professor configure e inclua novas atividades (Q29), é possível que o professor solicite o cadastro de novas atividades ao administrador do sistema, conforme discutido na seção 7.1.2.2.3. Essa restrição se deu de forma planejada, para evitar que diversos professores e alunos visualizassem atividades inseridas por vários professores, sem uma devida avaliação prévia. A respeito da possibilidade dos alunos e professores se comunicarem (Q30), houve uma restrição para que apenas durante o processo de interação com o problema do tipo “específico” fosse possível essa comunicação, conforme abordado no apêndice N, figura 48. Considerando que atualmente já

há vários canais de comunicação entre professor e aluno (presencial, email, whatsapp, classroom), optou-se pela limitação desse tipo de recurso. Algo semelhante ocorreu sobre a viabilidade de formação de grupos ou canais de discussão por meio do sistema (Q31 e Q34). Além dos motivos já mencionados – diversidade de canais de comunicação – optou-se também pela não disponibilidade deste tipo de recurso, para evitar que os estudantes optassem pelo acesso a discussões anteriores ao invés de interagir com os recursos de aprendizagem do CombInter.

Na mesma perspectiva, o sistema ainda não permite gravar alguns dados (Q33), de modo que, ao fechar o sistema e acessá-lo em outro momento, estejam disponíveis todas as informações apresentadas anteriormente, tais como, a resposta do problema, as respostas das dicas, as simulações realizadas, etc. De qualquer forma, devido ao recurso de *login*, que permite a identificação do usuário (Q26), o sistema informa que o item foi respondido, apresenta as dicas visualizadas, a simulação, a solução, e os relatórios detalhados sobre as interações dos estudantes (Q27 e Q28). Desse modo, durante a interação com o sistema, é possível visualizar as questões que errou/acertou e refazê-las (Q35), apesar de uma resposta neutra dada por um desenvolvedor. Consideramos que os recursos interativos do CombInter vão além da seleção de links ou de botões de avançar/retroceder, e que o CombInter permite alterar configurações e obter resultados diferentes a partir da ação do usuário (Q19 e Q20), uma vez são disponibilizadas dicas e simulações com que os estudantes podem interagir de diversas formas, de acordo com suas perspectivas de aprendizagem, conforme abordamos na seção 7.1.2.2 e apêndices L e M.

Dessa forma, o CombInter apresenta recursos visuais e interativos de forma satisfatória, uma vez que é claro e conciso (Q8), é fácil de usar (Q9), é motivador (Q10), tem um bom apelo visual (Q11), possui consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos) (Q16), emprega recursos gráficos que melhoram o aspecto estético da interface, tornando mais agradável sua utilização (Q21), emprega imagens para ilustrar conceitos e explicações (Q12), possui quantitativo de imagens por página adequado (Q13), possui contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura dos textos (Q14), possui fonte de tamanho adequado (Q15), permite liberdade de navegação, podendo retornar ações já executadas (Q22 e Q24), fornece diferentes níveis de dificuldade (Q23), emprega linguagem de acordo com o público alvo (Q25), permite saber em que ponto nos encontramos no objeto de aprendizagem, através de seus rótulos e títulos (Q17),

e possui links para acessar outras páginas e funções do objeto de aprendizagem fáceis de reconhecer (Q18).

Mesmo com baixa discordância ou neutralidade acerca da forma de uso e quantidade de imagens no CombInter (Q12 e Q13), foram inseridas imagens nos enunciados dos problemas que originalmente não as disponibilizavam, com o objetivo de facilitar o processo de interpretação do problema. As raras discordâncias e neutralidades apresentadas nas demais questões concentraram-se nas respostas do grupo de estudantes, uma vez que, em sua maioria, tiveram de avaliar o sistema por meio de um celular. Desse modo, considerando que estavam acessando no “modo computador” do navegador web, certamente, as formas de interação e apresentação influenciaram a maneira de avaliar o CombInter. É importante destacar, o alto grau de concordância dos grupos de avaliação em relação aos itens “O CombInter é claro e conciso”, “É fácil de usar”, “Há consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos?)”, “O CombInter fornece diferentes níveis de dificuldade?”, “A linguagem empregada está de acordo com o público alvo”. Tais itens são fundamentais para que o objeto de aprendizagem seja experimentado por professores e estudantes. Tais observações podem ser corroboradas a partir de alguns comentários realizados pelos participantes da pesquisa:

“Os problemas também de níveis diferentes. Acho que tem uma pegada muito parecida com o que você fez com os exemplos dos conceitos. Vai ao nível crescente, a um nível ali mais básico, e motiva. Não posso começar com o nível muito alto. É muito importante rotular os exemplos para ele saber se é um problema iniciante, se é um avançado, que, de repente, um aluno que tem dificuldade cai em um avançado” (Professor 1).

“Achei importante também a questão da simulação. É como se fosse uma atividade extra, vamos dizer assim, para ele. Uma atividade que eles fazem uma coisa a mais para ele desenvolver. Uma forma dele ir sozinho, ver o que ele marcou” (Professor 2).

“Também muito importante essa questão de você trabalhar as árvores de possibilidades, de você trazer figuras. Não é só o texto pelo texto. São textos direcionados. E, a partir das imagens, elas trazem uma ilustração das situações problemas. Isso também acrescenta e muito na questão da aprendizagem dos estudantes” (Professor 5).

“De modo geral, achei o conteúdo adequado ao público-alvo. O conteúdo é claro, relevante. É fácil de usar. A interface é atraente, as ilustrações estão interessantes” (Desenvolvedor 1).

“Com os relatórios, o professor consegue fazer um trabalho mais individualizado, identificando quem são os alunos que estão errando tais tipos de problemas, e pode ser percebido um padrão de onde a turma está errando. Aí, o professor pode voltar à sala e trabalhar mais tipos de problemas com aluno específico ou com a turma. Então, ele ter esse parâmetro para poder organizar suas aulas é importante” (Desenvolvedor 4).

“Achei intuitiva, simples, simples, no sentido positivo, porque dá para avançar nas telas e retornar sabendo de onde parou. Enfim, acredito que o aluno não vai se perder ali” (Desenvolvedor 5).

“Os exemplos que ele dá, as imagens que têm lá, ajudam bastante o entendimento. O cara lê o texto, depois vê a imagem, fica como que a imagem se aplica ao texto e tal. Achei bem interessante. E, foi um objeto que eu achei muito fácil de entender as coisas” (Aluno 1).

“Quando você pega o site, você vê que está ali para te ajudar mesmo, para te auxiliar nas suas dúvidas, nas reflexões que você faz, como que posso começar. Achei muito interessante isso. O site, em si, é muito interessante” (Aluno 2).

“A facilidade para mexer e acessar. Acho que tudo está muito bem explicado. A interface tem cores muito boas, tem a fonte muito boa, o nível dos problemas muito bons, começando mais fácil, depois se complicando mais. Acho que está ideal, está perfeito” (Aluno 3).

“Com os relatórios, você vê o seu progresso, você tem uma força de vontade maior de continuar. Você vê que você está conseguindo. E, vê também sua evolução e onde você está errando as questões. Porque vai mostrar quais. Acho que respondendo mais questões dá para você ter um padrão maior de autoavaliação. Achei também muito legal as imagens que representam, as ramificações das combinações” (Aluno 4).

Destacamos, entre os comentários, o do “aluno 2” que, de modo geral, expõe um sentimento afetivo proporcionado pelo CombInter, como consequência, talvez, dos vários elementos abordados pelos demais sujeitos. Essa característica torna-se relevante, principalmente pelo CombInter tratar do ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático geralmente taxado como difícil, ou, até mesmo, pelas relações fragilizadas de ensino de matemática, considerando os problemas de aprendizagem envolvidos. Somado a isso, a facilidade e a praticidade evidenciadas pelos avaliadores contribuem, por um lado, para que os professores utilizem o CombInter em suas aulas, principalmente devido ao contexto de trabalho relacionado ao ensino brasileiro (carga horária elevada) e, por outro lado, para que os estudantes tenham um envolvimento satisfatório com a ferramenta, proporcionando uma maior aprendizagem dos conceitos envolvidos.

7.2.3 Prover auxílio aos usuários

No quadro 53 abaixo, são apresentadas as respostas dos grupos participantes relativas ao critério “Prover auxílio aos usuários” resultantes do processo de interação com o CombInter.

Quadro 53 – Respostas referentes ao critério de Prover auxílio aos usuários

(continua)

Questão	Grupos	Respostas					
		DT	D	NCND	C	CP	RM
Q36 - Fornece feedback para o usuário?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
	Estudantes	0	0	0	4	6	4,6
Q37 - O CombInter fornece ajuda para navegação entre as telas do objeto?	Professores	0	0	2	2	7	4,45
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	0	5	5	4,5

(conclusão)

Questão		Respostas					
Q38 - O CombInter apresenta material complementar sobre o seu uso?	Professores	0	1	0	2	8	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	1	3	6	4,5
Q39 - Possui claras instruções de uso?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	0	3	7	4,7
Q40 - Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas?	Professores	0	0	0	2	9	4,81
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	0	0	10	5
Q41 - Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário refaça suas escolhas, não interrompendo o uso do objeto?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
	Estudantes	0	0	1	1	8	4,7
Q42 - Provê indicações claras de o que o usuário deve fazer para prosseguir para próximas etapas de uso do objeto?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	1	4	5	4,4
Q43 - O OA especifica atividades de interação entre os alunos dentre as atividades previstas para uso do Objeto?	Professores	1	2	1	1	6	3,81
	Desenvolvedores	1	1	2	0	1	2,8
	Estudantes	0	1	3	3	3	3,8

Fonte: elaborado pelo autor

Analisando as respostas, notam-se várias discordâncias no item que questiona se o CombInter especifica as atividades que possuem interação (Q43). Sobre esse aspecto, afirmamos que o CombInter faz essa especificação na página inicial, espaço em que são apresentadas as principais funcionalidades do CombInter, destacando, dentre elas, as dicas e simulações, por proporcionarem maior interatividade, conforme figura 32 do apêndice N. Ainda sobre o mesmo tema, o CombInter dispõe, a partir do botão “Sobre”, de orientações técnicas para professores e de um guia do estudante para alunos em que são especificadas e descritas as funcionalidades do sistema, entre elas, as dicas e simulações, conforme figura 47 do apêndice N.

Nos demais itens, houve uma quantidade baixíssima de respostas discordantes (apenas uma) e algumas neutras. Entretanto, o CombInter fornece feedback ao usuário (Q36), seja ao interagir com as dicas ou com as simulações, conforme figuras 38 e 39 do apêndice N; fornece ajuda para navegação entre as telas do objeto (Q37) e provê indicações claras de o que o usuário deve fazer para prosseguir para próximas etapas de uso (Q42) a partir do botão em forma de interrogação disponível em todas as telas do sistema, conforme figura 34 do apêndice N; apresenta material complementar sobre o seu uso (Q40) a partir das orientações técnicas para o perfil de professor e do guia do estudante para o perfil do aluno, conforme figura 47 do apêndice N.

N; apresenta mensagens de erro construtivas, que permitem que o usuário refaça suas escolhas, não interrompendo o uso do objeto (Q41), já que dispõe do botão “refazer” em todas as dicas e simulações com o objetivo de permitir ao estudante construir e refletir sobre o seu processo de aprendizagem, como podemos observar na figura 39 do apêndice N.

Desse modo, podemos afirmar que o CombInter tem potencial em fornecer auxílio aos usuários, uma vez que obteve alto grau de concordância nas questões, com ênfase nos itens “Fornece feedback para o usuário” (Q36), “Possui claras instruções de uso”, e “Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas” (Q40). Em relação a este último item, houve 100% de concordância entre os três grupos de avaliadores, com todos os estudantes optando pela pontuação máxima. Sobre esse aspecto, o CombInter diferencia-se dos OAs discutidos na seção 3.2, uma vez que disponibiliza feedbacks aos usuários que vão além de informar se determinada situação está certa ou errada, isto é, fornece elementos relacionados ao conceito (justificativas) que promovem aprendizagem. A conjunção desses itens torna-se fundamental para que o objeto de aprendizagem seja utilizado e cumpra com o seu principal papel que é promover a aprendizagem. Nessa perspectiva, abordamos algumas impressões tidas pelos participantes a respeito, especialmente, das orientações técnicas, simulações e dicas disponibilizadas pelo CombInter.

“As dicas forçam o aluno a uma reflexão. E essa reflexão é importante porque cada dica está tratando de um aspecto. E, esse aspecto parece estar bem interligado, mas são conceitos diferentes da mesma questão. Isso facilita bem o aprendizado. E, ele entra no confronto das próprias convicções. Ah, eu acho que já é assim, porque está errado. Aí, vai lá na dica, eita, é mesmo, não pensei nesse jeito” (Professor 3).

“Quando o estudante cometer um erro, ele tem uma noção do que fazer para corrigir o erro. Isso vai ajudá-lo a permanecer no exercício e tentar concluir. Então, ficou tipo um professor. Parece que ele está interagindo com um professor virtual” (Professor 4).

“As orientações técnicas estão bem detalhadas. Inclusive, você colocou os prints das telas. Está bastante claro” (Professor 6).

“Então, essa questão do teste, de dizer, ah, esse elemento aqui é do conjunto. Perceba que isso aqui pode ser feito. Aí, o cara coloca um errado. Isso aqui não pode. Perceba que tem que ter casos distintos. Não pode ter repetição. Para mim, é uma evolução gigantesca” (Professor 7).

“As dicas são muito boas, pois conduzem, de forma sucinta, o aluno a investigar sobre o problema, de fato a aprender os conceitos e refletir sobre” (Professor 8).

“Quando você tem uma trilha, os andaimes, né? Os degraus das dicas fazem com que você tenha microestímulos para continuar. As dicas não te dão resposta, te dão luzes no caminho” (Desenvolvedor 3).

“A simulação é importante para que ele possa particularizar as situações, as soluções, e passar a entender a configuração daquilo que ele procura. Acho que ele vai praticando ali e vai entendendo as possibilidades. De repente, ele percebe que mudar a ordem pode ou não ser importante naquela construção” (Desenvolvedor 5).

“Gostei das dicas por não dar a resposta em si. Então, você não precisa buscar a resposta porque você tem a dica. E, com a dica, você rapidamente pensa. Se tenho a dica, consigo responder o resto da questão. Tenho um caminho” (Aluno 5).

“A dica foi exposta como um questionamento. Então, aquelas dicas vão criar uma pulga atrás da orelha do aluno. Por que isso aqui vai estar certo? E, é um questionamento. Ele vai ter que responder” (Licenciando 1).

A partir do exposto, percebe-se que os recursos interativos mencionados têm a intenção de favorecer um processo reflexivo a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos, evidenciando o papel do sujeito em uma perspectiva ativa de aprendizagem para o desenvolvimento de operações mentais que abarquem as exigências do conceito envolvido. Isso tornou-se possível a partir de feedbacks personalizados de acordo com o erro e acerto implementados nas simulações e nas dicas. Sobre esse aspecto, abordaram os sujeitos:

“Além de mostrar se o item está certo ou errado, ele faz o aluno pensar, ele faz o aluno raciocinar o porquê que aquele negócio está certo, o porquê que ele está errado. E, auxilia para ele, se ele errou, auxilia um caminho. E, se ele acertou, enfatiza o porquê que ele acertou” (Professor 2).

“Esses feedbacks fazem com que o aluno não perca o vínculo com a questão. E, é importante porque não é só sobre a questão em si, ele remete a uma reflexão” (Professor 3).

“Achei os feedbacks muito explicativos, muito claros e objetivos, além de muito importantes porque reverberam, eles reforçam os conceitos abordados e não somente pensam na resposta objetiva como certo ou errado. Mas, busca justificar o porquê daquela resposta e com detalhamento rico” (Professor 8).

“É como se fosse um professor ali falando. Rapaz, oh, está aqui. É um feedback do que está acontecendo naquela questão. E, o bom que aquele feedback vai ajudar naquele exato momento da dúvida” (Professor 9).

“Vão além de ele saber se está certo ou errado. Ajuda o aluno a refletir” (Professor 11).

“O discente não vai se sentir sozinho quando ele tem esse suporte. É mais do que uma dica, é uma espécie de validação do resultado dele ali” (Desenvolvedor 5).

“Eu gosto dos feedbacks, porque aí é onde você vê como você consegue acertar e a maneira que você pode trabalhar para acertar as demais” (Aluno 4).

“Quando você erra, ele também dá um feedback. Não é bem assim que você tem que fazer isso. Do porquê você errou” (Aluno 5).

“Independente de você errar ou acertar, o feedback sempre vai mostrar o porquê de aquilo estar errado ou certo” (Aluno 8).

Dessa forma, torna-se claro que os feedbacks disponibilizados pelo CombInter vão além de informar se um item está certo ou errado, compondo-se de elementos conceituais que estimulam processos de reflexão relacionados à área do saber estudada. O CombInter, portanto, provê auxílios técnicos que contribuem para entender o funcionamento da ferramenta, mas,

principalmente, possui auxílios que tenham potencial de favorecer a aprendizagem dos conceitos.

7.2.4 Foco pedagógico

No quadro 54 abaixo, são apresentadas as respostas dos grupos participantes relativas ao critério “Foco pedagógico” resultantes do processo de interação com o CombInter.

Quadro 54 – Respostas referentes ao critério de Foco pedagógico

Questão	Grupos	Respostas					
		DT	D	NCND	C	CP	RM
Q44 - O CombInter apresenta uma contextualização inicial, descrevendo o tema/conteúdo tratado no objeto?	Professores	0	0	1	0	10	4,81
	Desenvolvedores	0	0	1	0	4	4,6
	Estudantes	0	0	0	1	9	4,9
Q45 - O CombInter apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto?	Professores	0	0	0	3	8	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
	Estudantes	0	0	0	5	5	4,5
Q46 - O CombInter apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente?	Professores	0	0	0	3	8	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
	Estudantes	-	-	-	-	-	-
Q47 - O CombInter disponibiliza algum contato para sugestões / dúvidas?	Professores	0	0	1	2	8	4,63
	Desenvolvedores	0	0	1	1	3	4,4
	Estudantes	0	0	3	2	5	4,2
Q48 - É disponibilizado material complementar para orientação do uso do CombInter?	Professores	0	1	1	2	7	4,36
	Desenvolvedores	0	0	0	3	2	4,4
	Estudantes	0	0	2	4	4	4,2
Q49 - Há alguma apresentação sobre o CombInter?	Professores	0	0	0	2	9	4,81
	Desenvolvedores	0	0	1	1	3	4,4
	Estudantes	0	0	1	5	4	4,3
Q50 - Apresenta possibilidades de uso por diferentes papéis de usuário (administrador, tutor, professor, etc.)?	Professores	0	0	2	1	8	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
	Estudantes	0	0	0	2	8	4,8

Fonte: elaborado pelo autor

Analisando as respostas, alguns sujeitos opinaram de forma neutra no que se refere à possibilidade do CombInter disponibilizar algum contato para sugestões ou dúvidas (Q47). Nesse ponto, destacamos que o CombInter possui essa opção a partir do item “Contato” que pode ser acessado por meio do botão “Sobre” (figura 50 do apêndice N). Em relação aos demais itens, houve uma baixíssima quantidade de respostas neutras. Entretanto, na página inicial e no item “Projeto CombInter” disponível a partir do botão “Sobre”, são realizadas uma apresentação inicial sobre o CombInter, uma breve contextualização, bem como traz o seu

objetivo pedagógico (Q44, Q45 e Q49), conforme podemos observar na figura 50 do apêndice N. O sistema traz algumas formas de abordar o CombInter em sala de aula (Q46) e permite o acesso a partir de três tipos de usuário: administrador, professor e aluno (Q50), conforme abordamos na seção 7.1.2.2.3 e no apêndice N, figura 33.

De modo geral, podemos afirmar que o CombInter possui uma proposta pedagógica bem definida, principalmente devido às respostas aos itens “O CombInter apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto” e “O CombInter apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente” que obtiveram 100% de concordância entre os grupos participantes. Tais elementos são fundamentais para que o OA seja utilizado pelos professores em sala de aula, uma vez que permitem ao docente perceber potenciais usos de acordo com sua vivência, isto é, possibilitam ao professor entender que os recursos disponíveis no CombInter podem contribuir de forma positiva para as suas aulas e, consecutivamente, para a aprendizagem dos estudantes. Outro aspecto de destaque é referente às opções de usuário que o CombInter oferece, a saber: administrador, professor ou aluno (Q50). A partir deste recurso, o professor pode acompanhar de forma personalizada e em tempo real como os estudantes estão interagindo com o CombInter, conforme abordamos na seção 7.1.2.2.3. Considerando o contexto atual do professor de matemática da educação básica – quantitativo elevado de alunos por sala e alta carga horária de aula do professor –, recursos como esses podem ser uma alternativa para atender a uma diversidade de estudantes. A respeito das orientações pedagógicas disponibilizadas para os professores, os avaliadores salientaram:

“São bem pertinentes. Acho que não precisa necessariamente seguir à risca. Mas que tem que ter, tem que ter, para explicar qual foi a sua ideia, qual foi a sua proposta. Pego a ideia aqui. Isso aqui eu posso agregar totalmente, utilizar totalmente. Isso aqui, de repente, no meu contexto, não funciona” (Professor 1).

“Porque está tudo bem ajustado, está tudo bem amarrado, bem direcionado” (Professor 5).

“As orientações pedagógicas são necessárias. Estão super ok. É muito mais dentro da situação. Como o professor encara a turma e o momento do conteúdo dado. Ter uma orientação pedagógica facilita” (Professor 7).

“Servem como uma ferramenta de apoio para o professor. Ver ali como abordar o conteúdo” (Desenvolvedor 1).

“Aqueles orientações são extremamente importantes. Elas dizem as possibilidades do professor se utilizar da plataforma. Elas não se esgotam ali, mas elas são norteadoras para o professor, seja para reproduzi-las, ou para criar novas possibilidades” (Desenvolvedor 2).

“Mas ele está muito conciso, está muito dentro da dosagem correta. Quem entrar em contato com a questão da parte pedagógica, vai conseguir perceber que ela tem uma maneira de ensinar que vai somar à maneira do professor ensinar” (Desenvolvedor 3).

Torna-se perceptível a importância de o professor ter acesso a orientações de como usar o CombInter em sala de aula. Seja no sentido de compreender a visão do pesquisador acerca da prática de ensino envolvendo a ferramenta, bem como se utilizar das opções ali expostas como orientação para elaboração de formas de usar a ferramenta de acordo com o contexto do professor. O fato do professor perceber que o CombInter dispõe de formas de apoio pode contribuir para que a ferramenta seja utilizada por um quantitativo maior de docentes, uma vez que entender o funcionamento e aplicação de um objeto de aprendizagem é essencial para uma prática bem-sucedida.

7.2.5 Conteúdo matemático

No quadro 55 abaixo, são apresentadas as respostas dos grupos participantes relativas ao critério “Conteúdo matemático” resultantes do processo de interação com o CombInter.

Quadro 55 – Respostas referentes ao critério de Conteúdo matemático

(continua)

Questão	Grupos	Respostas					
		DT	D	NCND	C	CP	RM
Q51 - Demonstra claramente os conceitos matemáticos esperados?	Professores	0	0	1	0	10	4,81
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
Q52 - Seu conteúdo é relevante para abordar os conceitos matemáticos esperados?	Professores	0	0	0	1	10	4,9
	Desenvolvedores	0	0	0	0	5	5
Q53 - Fornece informações precisas?	Professores	0	0	1	0	10	4,81
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
Q54 - Resume bem os conceitos matemáticos esperados?	Professores	0	0	1	2	8	4,6
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
Q55 - O conteúdo abordado no OA está pedagogicamente correto?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
Q56 - O conteúdo abrange todo o conteúdo a que ele se propôs?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
Q57 - O conteúdo do OA é adequado ao público alvo?	Professores	0	0	0	2	9	4,81
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
Q58 - O conteúdo do OA está atualizado?	Professores	0	0	0	3	8	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	1	4	4,8
Q59 - O conteúdo apresenta uma perspectiva consistente?	Professores	0	0	1	3	7	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
Q60 - Os exemplos, exercícios e feedback são realistas e adequados?	Professores	0	0	1	3	7	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6

(conclusão)

Questão		Respostas					
Q61 - A abordagem pedagógica é consistente com a teoria instrucional atual na área do conteúdo?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
Q62 - A instrução é apropriada para os aprendizes-alvo?	Professores	0	0	1	1	9	4,72
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
Q63 - As estratégias instrucionais são consistentes com os princípios de teoria instrucional?	Professores	0	1	0	2	8	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	2	3	4,6
Q64 - A quantidade de informações que represente o conteúdo específico do Objeto é adequada?	Professores	0	0	2	1	8	4,54
	Desenvolvedores	0	0	0	3	2	4,4

Fonte: elaborado pelo autor

De modo geral, a partir da análise das respostas, o CombInter apresenta o conteúdo matemático de forma clara e relevante (Q51 e Q52), está pedagogicamente correto (Q55), atualizado (Q58), consistente (Q59 e Q61), adequado ao público alvo (Q57 e Q62), preciso (Q53), completo (Q56 e Q64), com exemplos, exercícios e feedback realistas e adequados (Q60) e estratégias instrucionais consistentes (Q63). Em relação à resposta discordante (Q63) e às respostas neutras (Q51, Q53, Q54, Q55, Q56, Q59, Q60, Q61, Q62 e Q64), foram realizadas pelo mesmo professor. No campo “Considerações” relativo ao critério avaliado presente no questionário, o referido professor argumentou que o conteúdo poderia ser apresentado de uma maneira que aproveitasse o potencial digital disponível, uma vez que o conteúdo específico se assemelhava à digitalização de uma página de livro. Acreditamos que a falta de elementos interativos durante a abordagem dos conceitos específicos não interferiu nas questões abordadas no questionário referentes ao conteúdo matemático. Isso pode ser observado nas respostas dos demais sujeitos da pesquisa que sugeriram trazer elementos interativos também na discussão dos conceitos como forma de envolver o estudante. Sobre essa perspectiva, durante a discussão dos exemplos na abordagem dos conceitos, foram inseridas simulações no mesmo formato das apresentadas nas atividades do CombInter, com objetivo de envolver o estudante de forma ativa durante a aprendizagem dos conceitos. Ressaltamos, ainda, que a abordagem dos conceitos foi baseada a partir dos princípios teóricos abordados na seção 7.1.1. As colocações abaixo retratam de forma geral os principais aspectos relacionados à forma de abordagem dos conceitos combinatórios no CombInter:

“A sequência foi bem construída, partindo de um problema que o aluno consiga abordar de início, mesmo sem tanto conhecimento, até chegar numa abordagem mais complexa no fim da leitura” (Professor 1).

“Tem várias formas de tratar o mesmo conceito. Isso possibilita ao aluno modos diversos de adquirir aquele conhecimento. Porque, cada aluno tem uma velocidade, uma forma de aprender. Quanto mais

diversos forem os métodos, pode ser que eles se encaixem em algum. E, aí, você proporcionou isso com os conceitos” (Professor 3).

“Achei as situações-problema muito atuais, muito próximas da realidade. E, a mesma coisa com a forma de abordar os conceitos, quando vocês partem da situação-problema e abordam determinados conceitos” (Professor 8).

“Achei que ele consegue trazer o conteúdo de combinatória do nível fácil até o avançado numa linguagem que dá para qualquer um entender, mesmo que seja a primeira vez que você esteja vendo combinatória” (Professor 10).

“A sequência didática instiga o aluno a raciocinar, a pensar como resolver o problema” (Desenvolvedor 1).

“Eu não observei a questão de interação nesse momento dos conceitos” (Desenvolvedor 5).

“Achei muito legal as imagens que representam as ramificações das combinações” (Aluno 4).

“Fui ver melhor o assunto e deu para entender bem. Foi simples e direto. As imagens também ajudaram” (Aluno 7).

“Quando você já começa com um ponto-chave ali, já toma um interesse total pelas demais” (Licenciando 2).

Apesar de em um primeiro momento não trazer elementos interativos nos conceitos – situação mencionada pela maioria dos avaliadores – observa-se que a exposição do conteúdo abordou os principais conceitos combinatórios, de modo condizente com o público-alvo, com uma diversidade de representações simbólicas durante a discussão dos conceitos, bem como a partir de exemplos resolvidos.

Mesmo evidenciando várias características positivas relacionadas ao CombInter, os avaliadores, de modo geral, identificaram alguns aspectos que poderiam melhorar a experiência de usuário ao interagir com a ferramenta, a saber: (1) ausência de uma versão do sistema que pudesse se adaptar à tela de celulares; (2) ausência de interatividade durante a discussão dos conceitos; (3) poucas simulações presentes nas atividades; (4) ausência de imagens personalizadas em alguns problemas; (5) dificuldade para alternar entre problemas durante as atividades; (6) ausência de subtópicos relacionados a cada conceito combinatório; (7) forma confusa de deslizar o conteúdo dos conceitos.

Em relação ao item (1), foi implementada uma versão do CombInter que se adapta à tela de celulares; para o item (2), foram inseridas simulações interativas vinculadas aos exemplos discutidos nos conceitos; para o item (3), foram implementadas simulações interativas para quase o total das atividades; para o item (4), foram construídas imagens autorais compatíveis com diversos problemas presentes nas atividades; para o item (5), foi implementado um botão “filtro” para que o usuário possa escolher qual o problema deseja estudar; para o item (6), foram

criadas seções para cada tópico conceitual, de modo que o usuário tenha autonomia sobre qual parte do conceito deseja estudar; para o item (7), foi implementada uma forma de deslizar o conteúdo contínua, de modo que seja aproveitado todo o espaço de tela disponível. Todos esses ajustes foram realizados antes de iniciar a etapa de validação.

7.3 ETAPA DE VALIDAÇÃO

Durante a fase de validação, inicialmente, foram selecionadas duas turmas do segundo ano do ensino médio da instituição de ensino Instituto Federal de Alagoas, Campus Arapiraca. A escolha se deu por indicação de um dos professores que participou da fase de aperfeiçoamento e que se disponibilizou para participar desta etapa da pesquisa. O docente leciona na referida instituição e pretendia iniciar o conteúdo de análise combinatória em suas turmas. As turmas possuíam 37 e 41 estudantes e foram definidas de modo que em uma delas o professor lecionaria sem o CombInter – que serviu de base para composição do grupo de controle – e, em outra, faria o uso do CombInter – que serviu de base para composição do grupo experimental.

Considerando o caráter intervencionista desta pesquisa, o pesquisador participou do planejamento das aulas da turma que serviu de base para o grupo experimental, com o objetivo de definir uma abordagem a que o CombInter proporcionasse um maior potencial de aprendizagem, levando em consideração as experiências acadêmicas e profissionais do pesquisador e do professor. Desse modo, a conduta do professor girou em torno dos seguintes parâmetros:

- Antes de iniciar o conteúdo, houve apresentação das principais funcionalidades do CombInter para os alunos;
- As aulas se deram de forma predominantemente expositiva, adotando uma abordagem próxima dos conceitos de combinatória apresentados no CombInter;
- A exposição das aulas iniciava com exemplos / situações-problema elementares de modo que os alunos pudessem perceber a importância da análise combinatória cotidianamente, além de iniciar uma familiarização com os invariantes dos conceitos. Em seguida, o professor realizava a formalização do conceito (definições e fórmulas) e discutia situações-problema a resolver com os estudantes;
- Durante a exposição do conceito, o professor promoveu questionamentos relacionados aos invariantes dos conceitos e às situações-problema, de modo que proporcionassem

um ambiente de diálogo, em que os estudantes se sentiam convidados a participarem das discussões. Durante o processo de solução das situações-problema na lousa, foi priorizada uma solução construtiva e detalhada, com evidência dos invariantes dos conceitos relacionados ao problema. Desse modo, foi incentivado que os estudantes também priorizassem, durante o processo de resolução de situações-problema, uma solução construtiva e detalhada, destacando os invariantes dos conceitos;

- Como tarefa para casa, o professor solicitava que os estudantes, a partir do uso do CombInter, fizessem a leitura do conceito abordado em sala, bem como a leitura do novo conceito que seria abordado na aula seguinte. Além disso, especificava algumas situações-problema relacionadas ao conceito trabalhado para serem respondidas por meio do CombInter, de modo que tais atividades pudessem ser concluídas antes da discussão de um novo conceito. Como mecanismo que incentivasse o uso do CombInter, foram solicitados, pelo professor, a entrega de um resumo / *flashcards*¹⁶ / mapa mental, elaborado a partir da leitura do conceito discutido na sala de aula, bem como a resolução escrita das situações-problema indicadas. Essas últimas com o objetivo de estimular uma resolução construtiva e detalhada a partir do CombInter;
- Em alguns momentos, o professor propôs algumas atividades para serem trabalhadas com o CombInter durante as aulas, com objetivo promover a familiarização dos recursos do sistema, bem como para esclarecer dúvidas e observar como os estudantes interagem com o CombInter.

Em relação à turma que serviu de base para composição do grupo controle, o professor abordou as aulas sem o CombInter, adotando recursos que costumeiramente utilizava em suas aulas. De modo geral, as aulas possuíam a seguinte configuração:

- As aulas se deram de forma predominantemente expositiva. Em alguns momentos, partia de situações-problema elementares, discutindo os invariantes dos conceitos para, em seguida, formalizar os conceitos e fórmulas. Em outros momentos, apresentava a definição do conceito e fórmulas;
- Após a discussão inicial do conceito, o professor apresentava uma lista de situações-problema para serem discutidas em sala de aula. Alguns problemas eram resolvidos

¹⁶ Flashcards são cartões de estudo que ajudam a memorizar informações.

pelo professor e, os demais, o professor solicitava que os estudantes resolvessem em casa;

- Durante o processo de resolução, o professor priorizou uma solução construtiva e detalhada, de modo a evidenciar os invariantes do conceito. Incentivou, também, que os estudantes priorizassem um processo de resolução construtivo e detalhado, justificando passo a passo as estratégias tomadas para obter a solução do problema;
- Em algumas aulas, o professor solicitava que os estudantes resolvessem listas com alguns problemas provenientes de processos seletivos nacionais.

Em ambas as turmas, foram abordados os conceitos de princípio fundamental da contagem, permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo e combinação, os quais foram discutidos durante a oferta de 18 aulas com duração média de 50 minutos. Antes do início das aulas, em ambas as turmas, foi aplicado um pré-teste que foi composto por uma lista de questões envolvendo análise combinatória, conforme apêndice I. A lista de questões constou de 6 problemas relacionados aos conceitos de análise combinatória da educação básica, conforme modelo abaixo:

Quadro 56 – Modelo de lista de questões do pré-teste

Item	Conceito
Questão 1	Princípio fundamental da contagem
Questão 2	Permutação simples
Questão 3	Permutação com elementos repetidos
Questão 4	Arranjo
Questão 5	Combinação
Questão 6	Elaboração de problemas

Fonte: elaborado pelo autor.

Cada problema teve uma pontuação de até 3 pontos. Desse modo, quando o estudante conseguiu realizar uma interpretação inicial do problema, utilizando algum registro de representação auxiliar, mas não conseguiu obter uma expressão numérica e solucionar o problema, obteve uma pontuação igual a 1. Quando o estudante conseguiu realizar uma interpretação inicial do problema, utilizando algum registro de representação auxiliar e conseguiu obter uma expressão numérica, mas não chegou a uma resposta correta, obteve uma pontuação igual a 2. Quando o estudante conseguiu realizar uma interpretação inicial do problema, utilizando algum registro de representação auxiliar, conseguiu obter uma expressão numérica e chegou a uma resposta correta, obteve uma pontuação igual a 3. Quando o estudante

apresentou uma interpretação não condizente com o problema ou deixou a questão em branco, obteve uma pontuação igual a 0. Nos casos em que a solução esteve entre dois polos abordados anteriormente, foi acrescentado 0,5 pontos na pontuação do item, conforme quadro 57. A partir da soma das pontuações de todos os problemas, obtemos uma pontuação geral para cada estudante. Desse modo, um estudante pode ter como pontuação máxima 24 pontos, uma vez que o problema de elaboração possuía 3 itens e, para cada item, a pontuação máxima era de até 3 pontos.

Quadro 57 – Classificação e pontuação por item

Classificação	Pontuação
Incorreto	0,0
Acerto parcial I	0,5
Acerto parcial II	1,0
Acerto parcial III	1,5
Acerto parcial IV	2,0
Acerto parcial V	2,5
Acerto total	3,0

Fonte: elaborado pelo autor.

O pós-teste seguiu os mesmos parâmetros descritos anteriormente, sendo composto por questões semelhantes à do pré-teste, conforme apêndice J. Como se tratava de aula regular dos estudantes, todos os alunos de ambas as turmas puderam participar do pré-teste e pós-teste, sendo definidos os grupos controle e experimental ao final do experimento. Isso permitiu que em ambas as turmas não houvesse distinções entre os estudantes. Diante da participação no pré-teste, nas aulas e no pós-teste, os estudantes de cada turma foram emparelhados com intuito de formar os integrantes dos grupos controle e experimental, a partir das pontuações aproximadas obtidas no pré-teste. Assim, um total de 36 estudantes fizeram parte desta etapa da pesquisa, sendo 18 pertencentes ao grupo experimental e 18 pertencentes ao grupo de controle, conforme quadro 58.

Quadro 58 – Emparelhamento dos integrantes dos grupos controle e experimental

(continua)

Grupo	Pontuação		Média
GC	7	7	10,02
	19	18	

(conclusão)

Grupo	Pontuação		Média
GC	15,5	7	10,02
	5,5	12,5	
	5,5	10,5	
	14,5	13	
	11,5	8	
	7	0	
	12	7	
GE	6,5	8,5	10,77
	18	17	
	15,5	6	
	5,5	12	
	6,5	13,5	
	13,5	16	
	11,5	10	
	8,5	2	
	12,5	11	

GC: Grupo Controle; GE: Grupo Experimental

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir da realização de um teste T de amostras independentes, verificou-se, no pré-teste, que não houve diferença significativa entre os grupos controle e experimental ($t(34) = 0,482$, $p = 0,633$). Desse modo, os grupos partiram de uma mesma condição (mesmo nível em combinatória) e puderam ser equiparados ao longo das etapas da pesquisa.

7.3.1 Análises comparativas entre pré e pós-teste

No quadro 59, são apresentadas as porcentagens de acerto no pré-teste e pós-teste por grupo (controle e experimental), tipo de problema e classificação.

Quadro 59 – Porcentagens de resposta por grupo, tipo de problema, classificação, no pré-teste e no pós-teste

Grupo	Tipo de problema	Porcentagem por resposta													
		I		AP I		AP II		AP III		AP IV		AP V		AT	
		Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
GC	PFC	5,6	16,7	0	0	5,6	0	5,6	11,1	55,6	55,6	5,6	11,1	22,2	5,6
	PS	22,2	27,8	0	0	27,8	5,6	5,6	0	11,1	11,1	27,8	55,6	5,6	0
	PER	22,2	22,2	0	0	33,3	33,3	16,7	5,6	27,8	27,8	0	11,1	0	0
	A	16,7	11,1	0	0	50	11,1	0	5,6	0	5,6	5,6	22,2	27,8	44,4
	C	22,2	11,1	0	0	33,3	11,1	16,7	5,6	22,2	33,3	0	5,6	5,6	33,3
	EPa	44,4	33,3	0	0	11,1	22,2	11,1	0	27,8	22,2	0	0	5,6	22,2
	EPb	72,2	44,4	0	0	22,2	16,7	5,6	5,6	0	11,1	0	0	0	22,2
	EPc	27,8	16,7	0	0	33,3	27,8	0	0	5,6	0	5,6	27,8	27,8	27,8
GE	PFC	5,6	0	0	0	5,6	11,1	16,7	22,2	72,2	50	0	0	0	16,7
	PS	11,1	11,1	5,6	0	22,2	11,1	5,6	0	22,2	11,1	33,3	0	0	66,7
	PER	11,1	0	0	0	50	5,6	11,1	5,6	22,2	44,4	0	0	5,6	44,4
	A	11,1	5,6	0	0	33,3	5,6	0	16,7	22,2	0	33,3	33,3	0	38,9
	C	16,7	5,6	0	0	22,2	5,6	11,1	22,2	44,4	38,9	5,6	5,6	0	22,2
	EPa	33,3	27,8	0	0	16,7	22,2	16,7	0	22,2	11,1	0	0	11,1	38,9
	EPb	72,2	50	0	0	16,7	16,7	11,1	11,1	0	5,6	0	0	0	16,7
	EPc	27,8	33,3	0	0	22,2	0	0	0	0	5,6	27,8	22,2	22,2	38,9

GC: Grupo controle; GE: Grupo experimental; PFC: Princípio fundamental da contagem; PS: Permutação simples; PER: Permutação com elementos repetidos; A: Arranjo; C: Combinação; EPa: Elaboração de problemas – item a); EPb: Elaboração de problemas – item b); EPc: Elaboração de problemas – item c); I: Incorreto; AP I: Acerto parcial I; AP II: Acerto parcial II; AP III: Acertou parcial III; AP IV: Acerto parcial IV; AP V: Acerto parcial V; AT: Acerto total.

Fonte: elaborado pelo autor.

A partir do quadro 59, ao compararmos o pré-teste e o pós-teste do grupo controle, observa-se que houve um aumento de questões respondidas de forma incorreta nos tipos de problemas de princípio fundamental da contagem e permutação simples. Nos mesmos tipos de questões, nota-se também que houve uma diminuição de questões respondidas com acerto total. Quando comparamos o pré-teste e o pós-teste do grupo experimental, observa-se que não houve aumento de questões respondidas de forma incorreta em nenhum tipo problema (com exceção do problema EPc). Nota-se, também, que houve um aumento de questões respondidas com acerto total em todos os tipos de questões. Ao compararmos o pós-teste do grupo controle com o pós-teste do grupo experimental, observa-se que um quantitativo maior de estudantes do grupo controle respondeu às questões de forma incorreta. Destaca-se, ainda, que no pós-teste do grupo experimental, nenhum estudante respondeu de forma incorreta os problemas do tipo princípio fundamental da contagem e permutação com elementos repetidos. Ainda sobre a comparação dos pós-testes, nota-se que houve um quantitativo maior de estudantes do grupo experimental que respondeu as questões com acerto total. É importante mencionar, ainda, que

no pós-teste do grupo controle, nenhum estudante respondeu com acerto total os problemas do tipo permutação simples e permutação com elementos repetidos. Desse modo, infere-se que a aula com o CombInter proporcionou que um maior número de estudantes obtivesse maiores níveis de compreensão combinatória, uma vez que contribuiu para que os alunos avançassem de questões respondidas incorretas para acertos parciais, além de aumentar o número de respostas com acerto total, como podemos observar no quadro 60.

Quadro 60 - Porcentagens de resposta por grupo e classificação, no pré-teste e no pós-teste

Grupo	Porcentagem por resposta													
	I		AP I		AP II		AP III		AP IV		AP V		AT	
	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós	Pré	Pós
GC	29,2	22,9	0,0	0,0	27,1	16,0	7,6	4,2	18,8	20,8	5,6	16,7	11,8	19,4
GE	23,6	16,7	0,7	0,0	23,6	9,7	9,0	9,7	25,7	20,8	12,5	7,6	4,9	35,4

GC: Grupo controle; GE: Grupo experimental; I: Incorreto; AP I: Acerto parcial I; AP II: Acerto parcial II; AP III: Acertou parcial III; AP IV: Acerto parcial IV; AP V: Acerto parcial V; AT: Acerto total.

Fonte: elaborado pelo autor.

De forma complementar, foram analisadas as médias obtidas pelos estudantes no pré-teste e no pós-teste por tipo de problema e por grupo, conforme quadro 61.

Quadro 61 – Médias por tipo de problema no pré-teste e no pós-teste por grupo

Grupo	Tipo de problema							
	Pré-teste							
	PFC	PS	PER	A	C	EPa	EPb	EPc
GC	2,056	1,444	1,139	1,472	1,194	1,000	0,306	1,417
GE	1,750	1,611	1,278	1,611	1,417	1,194	0,333	1,583
Grupo	Pós-teste							
	PFC	PS	PER	A	C	EPa	EPb	EPc
	PFC	PS	PER	A	C	EPa	EPb	EPc
GC	1,722	1,667	1,250	2,194	2,000	1,33	1,139	1,806
GE	1,944	2,333	2,361	2,306	1,972	1,611	0,944	1,833

GC: Grupo controle; GE: Grupo experimental; PFC: Princípio fundamental da contagem; PS: Permutação simples; PER: Permutação com elementos repetidos; A: Arranjo; C: Combinação; EPa: Elaboração de problemas – item a); EPb: Elaboração de problemas – item b); EPc: Elaboração de problemas – item c).

Fonte: elaborado pelo autor.

Observando as médias do pré-teste e do pós-teste do grupo controle, pode-se verificar que apenas nos problemas de PFC não houve um aumento da média. Analisando a significância dessas variações a partir do teste T por amostras em pares, observou-se em princípio fundamental da contagem (PFCpré X PFCpós), $t(17) = 1,799$, $p = 0,090$; permutação simples (PSpré X PSpós), $t(17) = 1,254$, $p = 0,227$; permutação com elementos repetidos (PERpré X PERpós), $t(17) = 0,622$, $p = 0,542$; **arranjo (Apré X Após), $t(17) = 2,969$, $p = 0,009$;**

combinação (Cpré X Cpós), $t(17) = 3,630$, $p = 0,002$; elaboração de problemas, a) (EPapré X EPapós), $t(17) = 1,288$, $p = 0,215$; **elaboração de problemas, b) (EPbpré X EPbpós), $t(17) = 2,859$, $p = 0,011$** ; e em elaboração de problemas, c) (EPcpré X EPcpós), $t(17) = 1,279$, $p = 0,218$. Verifica-se, portanto, que, nos problemas do tipo arranjo, combinação e o item b) do problema de elaboração de problemas, houve avanços significativos no desempenho dos estudantes.

Observando as médias do pré-teste e do pós-teste do grupo experimental, pode-se verificar que em todos os tipos de problemas houve aumento da média. Analisando a significância dessas variações a partir do teste T por amostras em pares, observou-se em princípio fundamental da contagem (PFCpré X PFCpós), $t(17) = 1,441$, $p = 0,168$; **permutação simples (PSpré X PSpós), $t(17) = 3,424$, $p = 0,003$** ; **permutação com elementos repetidos (PERpré X PERpós), $t(17) = 7,1$, $p = 0,000$** ; **arranjo (Apré X Após), $t(17) = 3,079$, $p = 0,007$** ; **combinação (Cpré X Cpós), $t(17) = 3,082$, $p = 0,007$** ; elaboração de problemas, a) (EPapré X EPbpós), $t(17) = 1,532$, $p = 0,144$; **elaboração de problemas, b) (EPapré X EPbpós), $t(17) = 2,535$, $p = 0,021$** ; e em elaboração de problemas, c) (EPcpré X EPcpós), $t(17) = 1,106$, $p = 0,284$. Verifica-se, portanto, que, nos problemas do tipo permutação simples, permutação com elementos repetidos, arranjo, combinação e o item b) do problema de elaboração, houve avanços significativos no desempenho dos estudantes. Assim, podemos afirmar que a aula com o CombInter proporcionou um desempenho significativo superior no que se refere à compreensão de uma maior diversidade de raciocínios combinatórios.

Observando as médias dos pós-testes dos grupos controle e experimental, pode-se verificar que, em todos os tipos de problemas (exceto combinação e o item b) do problema de elaboração), houve uma maior média no grupo experimental. Analisando a significância dessas variações a partir do teste T por amostras independentes, observou-se em princípio fundamental da contagem (PFCpós X Ppós), $t(34) = 0,902$, $p = 0,373$; permutação simples (PSpós X PSpós), $t(34) = 1,810$, $p = 0,079$; **permutação com elementos repetidos (PERpós X PERpós), $t(34) = 4,398$, $p = 0,000$** ; arranjo (Após X Após), $t(34) = 0,348$, $p = 0,0730$; combinação (Cpós X Cpós), $t(34) = 0,94$, $p = 0,926$; elaboração de problemas, a) (EPapós X EPapós), $t(34) = 0,672$, $p = 0,506$; elaboração de problemas, b) (EPbpós X EPbpós), $t(34) = 0,489$, $p = 0,628$; e em elaboração de problemas, c) (EPcpós X EPcpós), $t(34) = 0,066$, $p = 0,948$. Verifica-se, portanto, que, nos problemas do tipo permutação com elementos repetidos, houve avanços significativos no desempenho dos estudantes do grupo experimental.

O fato das questões de combinação e item b) do problema de elaboração no grupo experimental não terem obtido uma média superior quando comparado ao grupo controle, pode estar relacionado à ausência de atividades para casa referentes ao conceito de combinação e à elaboração de problemas. Essa última também não foi abordada durante a discussão dos conceitos. Tais atividades foram sugeridas pelo pesquisador durante o planejamento das aulas, entretanto, segundo o professor, não houve tempo disponível para contemplar tais atividades devido à redução do número de aulas de matemática. Considerando que as atividades para casa eram realizadas a partir do CombInter, é possível inferir que aula expositiva não foi suficiente para que o grupo experimental obtivesse uma média superior ao grupo controle no que se refere ao conceito de combinação e ao item b) do problema de elaboração. Evidencia-se, nesse caso, a influência do CombInter no processo de aprendizagem de combinatória, uma vez que, nos demais tipos de problemas, houve uma média superior no grupo experimental. Considerando que nas aulas expositivas em ambos os grupos (controle e experimental) não houve discussão sobre problemas de elaboração, evidencia-se, também, a influência do CombInter no processo de aprendizagem de combinatória, uma vez que os itens a) e b) dos problemas de elaboração obtiveram médias superiores no grupo experimental.

Para uma análise geral das médias, apresentamos, no quadro 62, as médias obtidas no pré-teste e no pós-teste por grupo:

Quadro 62 – Médias obtidas no pré-teste e pós-teste por grupo

Grupo	Média	
	Pré-teste	Pós-teste
GC	10,028	13,111
GE	10,778	15,306

GC: Grupo controle; GE: Grupo experimental.

Fonte: elaborado pelo autor.

Observando as médias do pré-teste e do pós-teste do grupo controle, pode-se verificar que a média do pós-teste foi superior à média do pré-teste. Analisando a significância dessas variações a partir do teste T por amostras em pares, observou-se que o desempenho dos estudantes foi significativo após a intervenção sem o uso do CombInter, pois (pré X pós), $t(17) = 5,038$, $p = 0,000$. Assim, de modo geral, a aula de combinatória sem o CombInter proporcionou uma melhora significativa no desempenho dos estudantes.

Observando as médias do pré-teste e do pós-teste do grupo experimental, pode-se verificar que a média do pós-teste foi superior à média do pré-teste. Analisando a significância dessas variações a partir do teste T por amostras em pares, observou-se que o desempenho dos

estudantes foi significativo após a intervenção com o uso do CombInter, pois (pré X pós), $t(17) = 7,648$, $p = 0,000$. Assim, de modo geral, a aula de combinatória com o CombInter proporcionou uma melhora significativa no desempenho dos estudantes.

Analisando os tamanhos de efeito¹⁷ dos grupos controle e experimental utilizando como medida o delta de Glass¹⁸, observou-se, no grupo controle, um tamanho de efeito médio¹⁹ ($\Delta_{\text{glass}} = 0,63$) e, no grupo experimental, um tamanho de efeito grande ($\Delta_{\text{glass}} = 1,02$). Desse modo, a aula de combinatória com o CombInter teve um maior impacto para o desempenho dos estudantes.

Observando as médias do pós-teste do grupo controle e do pós-teste do grupo experimental, pode-se verificar que a média do pós-teste do grupo experimental foi superior à média do pós-teste do grupo controle. Analisando a significância dessas variações a partir do teste T por amostras independentes, observou-se que o avanço de desempenho dos estudantes do grupo experimental quando comparado ao grupo controle não foi significativo, pois (pós X pré), $t(34) = 1,264$, $p = 0,215$. Assim, de modo geral, a aula de combinatória com o CombInter não apresentou uma melhora significativa no desempenho dos estudantes quando comparado a uma aula sem o CombInter.

Apesar da não significância apontada, quando consideramos que uma maior quantidade de estudantes do grupo experimental migrou de respostas incorretas e acertos parciais para acertos totais, conforme os quadros 57 e 58, os desempenhos dos estudantes do grupo experimental por tipos de problemas combinatórias foram superiores significativamente em uma maior diversidade de raciocínios combinatórios quando comparado aos estudantes do grupo controle, o maior tamanho de efeito da intervenção utilizando o CombInter durante as aulas de combinatória e a maior média geral do pós-teste do grupo experimental quando comparado com o pós-teste do grupo controle, inferimos que a aula com CombInter proporcionou uma maior aprendizagem em combinatória em relação a uma aula sem o CombInter.

7.3.2 Repercussões no processo de ensino e aprendizagem

¹⁷ O tamanho do efeito mede a força da relação entre grupos diferentes ou a magnitude da diferença entre variáveis, possibilitando calcular a significância prática de um estudo.

¹⁸ O delta de Glass é uma medida de tamanho de efeito que padroniza a diferença entre médias com base no desvio-padrão do grupo controle.

¹⁹ (0,00 – 0,09) → Nulo; (0,10 – 0,19) → Muito pequeno; (0,20 – 0,49) → Pequeno; (0,50 – 0,79) → Médio; (0,80 – 1,19) → Grande; $\geq 1,20$ → Muito grande (Sawilowsky, 2009).

A partir de entrevistas realizadas com o professor e alguns estudantes do grupo experimental (conforme seção 6.3.2), foi possível identificar elementos presentes no CombInter ou na aula do professor que, para os estudantes e/ou professor, influenciaram a aprendizagem em combinatória.

7.3.2.1 CombInter e a aprendizagem em análise combinatória

Inicialmente, os entrevistados identificaram alguns aspectos nas discussões feitas sobre os **conceitos** de análise de combinatória no CombInter que influenciaram a compreensão:

“Ver exemplos resolvidos e algumas imagens deixando mais claro o que está falando, ajuda na compreensão do assunto” (Aluno 4V).

“Eu achei bom porque ele começava simples e ia aumentando um pouquinho a dificuldade ao decorrer do que você ia lendo” (Aluno 5V).

“Trazer vários exemplos em diversos contextos e responder enquanto explica ajudou bastante” (Aluno 7V).

“Com os exemplos, consegui entender melhor o assunto, porque o conteúdo pode ser o mesmo, pode ser a mesma regra, mas existem vários casos, alguns mais específicos, mais difíceis do que outros. E, você saber como resolver alguns casos ajuda, porque você pega o raciocínio para ajudar a resolver outros casos parecidos” (Aluno 9V).

“Se você lê só o texto, não consegue visualizar muito bem. Com as representações, fica melhor entender as explicações que foram feitas; ajudava a visualizar” (Aluno 10V).

“Eu gostei por ter muitas representações, porque isso ajuda a gente a compreender os exemplos que estavam no CombInter” (Aluno 11V).

A organização e a estruturação favorecem a aprendizagem, principalmente de quem está iniciando (Professor 1V).

É possível observar, a partir das falas, que, na abordagem dos conceitos, torna-se importante estabelecer uma gradação em relação ao nível dos exemplos; promover uma diversidade de representações simbólicas durante a discussão dos conceitos (enunciado dos exemplos e soluções); e disponibilizar diversos exemplos resolvidos em termos de contexto e propriedades conceituais. Tais achados vão ao encontro de Vergnaud (1986), uma vez que, segundo o autor, trabalhar com uma diversidade de situações-problema contribui para perceber as propriedades relativas ao conceito estudado, influenciando o processo de conceitualização. As representações citadas pelos alunos 10V e 11V relacionam-se ao que Duval chamou de representações intermediárias que, segundo autor, auxiliam para que o estudante identifique e interprete o cálculo numérico relacionado à situação-problema (Duval, 2012). Outro aspecto

destacado pelos sujeitos da pesquisa foi acerca da funcionalidade **Simulação** presente no CombInter. Sobre isso, argumentaram:

“A simulação conseguia fazer com que eu visse o problema. No caso, visualmente, não só na minha cabeça. Por exemplo, o problema de ordenar objetos, fazer contagem, era mais fácil eu ir à simulação e colocar, do que eu simplesmente pensar no abstrato. Escrever ajudava também, mas acho que ver e montar era mais interessante” (Aluno 2V).

“A simulação é muito interativa. Ajudava a compreender a questão” (Aluno 5V).

“Com as simulações posso testar para ver se eu compreendi realmente a lógica do assunto, se tenho ido no caminho certo e para ver se posso seguir com aquela lógica. Me ajuda a entender melhor o assunto e a resolver as questões de uma forma mais rápida, mais fácil” (Aluno 9V).

“As simulações me ajudavam em uma questão que eu achava que, por exemplo, algum determinado caso iria funcionar. E, às vezes, não funcionava. Na simulação, você conseguia ver” (Aluno 10V).

“Muitas simulações davam meio que um bizu na hora que você estava fazendo ali a simulação. Aí, você, ah, é isso! Aí, você voltava lá, fazia o cálculo e estava certa a resposta” (Aluno 11V).

“Por vezes, quando o texto é apresentado, no primeiro momento pode acontecer do aluno achar que entendeu. E, aí, uma forma dele validar o que ele fez, o que ele leu, o que ele compreendeu, é ele fazer as simulações. Inclusive, eu tive relatos de um aluno que quando leu o exemplo supostamente conseguiu entender. Quando foi para as simulações, não conseguiu acertar sempre” (Professor 1V).

Desse modo, as simulações permitiram que os estudantes testassem as opções de contagem de acordo com suas interpretações iniciais acerca do problema. Nesse processo, foi possível construir uma compreensão do problema compatível com o enunciado, uma vez que os invariantes dos conceitos eram explicitados durante a interação, estimulando um processo de tentativa e erro que proporcionava testar agrupamentos compatíveis e as possíveis relações entre esses agrupamentos. A dinâmica de tentativa e erro proporcionou o que Vergnaud (1986) chamou de conflito entre concepções. Isto é, a partir de concepções iniciais obtidas por meio da leitura da situação-problema, o estudante pode testar com as simulações e, mediante os feedbacks informados, conflitos foram gerados de tal modo que favoreceram o abandono das concepções incorretas. De forma complementar a esse processo de simulação, os sujeitos evidenciaram o papel da funcionalidade **Dicas** em seu processo de aprendizagem:

“As dicas ajudaram muito. Porque, quando eu tentava fazer os cálculos e dava errado, recorria para as dicas para ver o que pode ter ali para me ajudar a ter mais uma noção do que eu estou esquecendo, do que eu estou colocando a mais. Aí, usando as dicas, deu para tentar entender, ver se alguma coisa estava faltando” (Aluno 1V).

“A dica deixava uma interrogação na cabeça. Fazia a gente pensar. Não era como as dicas de outros sites, que davam praticamente a questão toda pronta. Ela contextualizava tal coisa e pedia até para gente fazer algumas questãozinhas. Isso fazia a gente pensar, mas, ao mesmo tempo, também, ajudava a gente a compreender melhor a questão para gente conseguir responder corretamente” (Aluno 4V).

“Muitas vezes tinha questão que eu achava que estava certa e eu viajava bastante nas possibilidades. Sem as dicas, eu não ia ter conseguido meio que voltar para a realidade do problema. Eu percebi muitas situações que eu estava me perdendo muito no que o problema realmente queria. E, as dicas me direcionavam de volta para o que o problema estava solicitando” (Aluno 5V).

“Gostei delas. Para ser sincera, tinha hora que eu fazia a dica e dava uma coisa errada. Aí, eu ficava tipo, poxa, mas como que eu errei? Aí, eu ia ler de novo, para tentar entender. Ah, eu errei isso aqui. Aí, eu olhava de novo, sabe? É uma maneira de aprender, né? Você aprende com erro também. Então, fazer as dicas ajudava tanto na compreensão da questão, para ver o que ela estava te pedindo, por mais que você errasse, quanto na compreensão da própria dica. Porque tinha dica que você pensava em uma coisa, só que se você lesse de novo, era outra” (Aluno 7V).

“As dicas se construíam. Elas se interligavam. A dica 1 podia complementar o seu pensamento ao interagir com a dica 2, e a dica 2 podia complementar o seu pensamento ao interagir com a dica 3, e, assim, sucessivamente” (Aluno 11V).

“As dicas conduzem os estudantes à construção da solução de forma autônoma. [...] o CombInter consegue desembaraçar o problema. Não só no sentido da solução propriamente dita, mas na construção das ideias” (Professor 1V).

Percebe-se, nas falas, que as dicas contribuíram para um processo reflexivo constante, a partir da relação entre os fatores conceituais relevantes para compreensão do problema e elaboração de estratégias de solução, e os condicionantes trazidos pelo problema. Além disso, permitiam aos estudantes identificar os seus erros/acertos e entendê-los de acordo com cada aspecto conceitual inerente ao problema, uma vez que a maioria das dicas era realizada em forma de **questionamento**. A esse processo de consciência acerca de suas ações ao tentar solucionar uma situação-problema, relaciona-se o desenvolvimento da capacidade metacognitiva dos estudantes (Fernandes, 1989). Sobre os questionamentos, argumentaram:

“As primeiras dicas nos dão questionamentos que fazem a gente pensar, não dão algo direto. Isso ajudou bastante a compreender melhor o assunto” (Aluno 4V).

“E, principalmente, as que eram várias perguntinhas. Porque, se eu entrasse numa dica que fosse só uma, eu ia responder, mas ia ficar meio perdida. E, com várias, quando vou respondendo, meio que vou entendendo o porquê daquela decisão” (Aluno 5V).

“A dica lhe dá um questionamento como se fosse parecido com o problema – de acordo com o problema, resolver isso – para ver se está de acordo com aquela linha de raciocínio. Foi isso que achei mais interessante do que só um texto corrido e explicando como você poderia resolver” (Aluno 9V).

“Os questionamentos faziam a gente entender, questionar. Aí, a gente ia com aquilo na mente e dizia, nossa, era isso?” (Aluno 11V).

Esse exercício do pensar comentado pelos estudantes se deu exatamente pela caracterização das dicas no CombInter, isto é, por envolverem elementos-chave relacionados ao conceito e ao problema em forma de questionamento. Tais características nos permitem entender, de certo modo, as dicas como um processo de ensino explícito de aspectos metacognitivos (Fernandes, 1989). A dinâmica proporcionada pelas dicas conduzia o estudante

a um processo de conscientização dos processos mentais que favorecesse a resolução do problema, conforme comentário acima (aluno 5V). Isso tornou-se possível devido aos **feedbacks** que foram implementados nas simulações e nas dicas que, segundo os entrevistados, exerceram funções importantes, a saber:

“E, realmente, é bem interessante a gente ter esse feedback ao acertar, ao errar, para gente ver o que a gente está fazendo de errado e conseguir corrigir isso” (Aluno 4V).

“Quando errava, aparecia, lembre-se de tal coisa. Aí, já estimulava a gente. Se aparecesse só a resposta errada, a gente nunca ia saber o porquê da gente estar errando as dicas. Aí, você se tocava do porquê daquilo estar errado. Aí, você já tinha uma ideia de como seria o certo” (Aluno 6V).

“O feedback mostra onde você está errando e onde você está acertando, e te dá meio que um caminho para você melhorar naquilo que você não compreendeu e te dá a chance de tentar novamente” (Aluno 9V).

“Esse feedback é dando a justificativa. Não eram justificativas superficiais. Eram bem detalhadas. [...] Quando colocada alguma coisa errada, o CombInter entrega para o aluno o porquê de estar errado e convida o aluno a pensar de outra maneira. E, não só isso, em dados momentos colocava mais de uma maneira de pensar” (Professor 1V).

A partir das falas, nota-se a importância de saber que houve um acerto e/ou erro e entender os motivos que levaram a isso, no sentido de conscientização dos processos mentais. E, isso não de forma generalizada (por exemplo, ao errar o problema), mas de forma específica (como nas simulações e nas dicas), uma vez que permitiu ao estudante identificar com maior critério os aspectos conceituais que o estudante havia internalizado e os que precisava aprender, conforme observado no comentário do aluno 6V. O estímulo citado pelo Aluno 6V e o entusiasmo dos demais sujeitos estão relacionados à motivação para aprendizagem e menor risco de frustração proporcionados pelos feedbacks (Sun; Wang; Chan, 2011). Como forma de relacionar/comparar/analisar as interpretações tidas durante a interação com as simulações e as dicas com um ou mais planos de solução, os estudantes puderam acessar **as soluções** dos problemas. Sobre essa experiência, relataram:

“Quando resolvi o problema, às vezes, não tinha a total dimensão de como fazer cada processo, de como realizar o cálculo do problema. E, com a descrição detalhada da solução, permitia tentar entender mais o que estava faltando, uma coisa que eu estava em dúvida, que eu, ah, tem alguma coisa errada, vou acrescentar isso para ver se dá certo. Aí, deu. Mas vou olhar na solução porque aquilo era certo” (Aluno 1V).

Na solução, estava “de acordo com a dica 1 e 2”. Aí, eu, ó, a dica ajudou a perceber que era dessa maneira. De acordo com a dica 3 e 4, faz isso e isso e isso. Então, a forma de aplicar as dicas na solução é uma forma de incentivar mais e perceber “ah, olhei a dica 1 e não consegui entender a dica 1”. Aí, lá na solução, poderia ajudar a entender como era que aquela solução ia se dar com aquela dica (Aluno 1V).

“Mesmo que o aluno tenha entendido ou acertado, a solução pode mostrar outra perspectiva de raciocínio para resolver o problema. Então, é bom para o aluno expandir os horizontes dele” (Aluno 3V).

“Se a gente saísse ainda com alguma dúvida que as dicas não conseguiram suprir, a solução supria, porque ela dava não só uma, mas várias. Então, a gente conseguia entender o problema sob diversos aspectos, diversos olhares” (Aluno 6V).

“Às vezes, você acha que compreendeu, mas, às vezes, não. Por exemplo, você vê uma questão, aí, ficava na dúvida como ela respondia. Às vezes, acabava respondendo por arranjo e dava certo, mas você não sabia porque era arranjo. Aí, a solução ajudava a entender porque foi com aquilo e não com outra coisa” (Aluno 10V).

“O acesso às soluções detalhadas possibilita aos alunos entendê-las, melhorar sua forma de argumentar, além de suprir aquelas lacunas que por vezes o professor fala de forma verbal, ou por vezes ele subentende que o discente já entendeu essa parte e não fala em sala de aula” (Professor 1V).

As soluções, desse modo, puderam explicitar e ratificar os processos conceituais apresentados nas simulações e dicas, de modo que os estudantes pudessem perceber as suas funções durante a construção de um ou mais planos de solução. Além disso, o estudante pode comparar a sua solução com a do CombInter, observando as estratégias tomadas, bem como tendo acesso a mais de uma forma de solucionar o problema. Evidencia-se, assim, a importância de disponibilizar uma solução em que são expostas justificativas para as decisões apresentadas, bem como a forma de organizá-las em uma resolução bem-sucedida (Fernandes, 1989). Em uma perspectiva de perceber a aplicação de estratégias de solução parecidas com o problema visto, o CombInter oportunizou aos estudantes um problema parecido, identificado como **Veja mais**. Ao interagirem com a funcionalidade, destacaram:

“Quando o CombInter traz um problema parecido para resolver, faz com que o aluno tenha outra lógica para resolver o problema, ou que ele reforce a lógica que ele usou anteriormente. Então, expande os horizontes do aluno e reforça os conhecimentos que ele já tem” (Aluno 3V).

“Essa inundação de restrições fazia a gente mudar um pouco a forma de resolução. E, às vezes, a gente fazia um erro na questão normal, mas que achava que tinha dado certo e, quando ia para a auxiliar, esse erro era bem evidente. Aí, a gente aprendia a mudar esse erro para não acontecer novamente” (Aluno 4V).

“Apesar de ser parecido, ele sempre tinha um complemento que desafiava e aumentava o nível de complexidade. Aí, você vinha daquele problema que já tinha entendido a base e aumentava um pouco a dificuldade, fazendo com que o seu cérebro trabalhasse mais. Para mim, isso ajudava a fixar mais a solução específica daquele conteúdo” (Aluno 5V).

“Às vezes, você acha que, ah, nesse tipo de questão, você só tem esse tipo de pergunta. Mas, quando você ia lá no Veja mais, você notava que podiam ser feitas diversas perguntas em cima daquilo. E, te ajudava a preparar para outras coisas que você fosse ver na vida, né?” (Aluno 10V).

Nota-se que o “Veja mais” contribuiu para que o estudante tivesse um novo olhar acerca do problema principal, reavaliando suas estratégias anteriores – revisitando simulações, dicas e

soluções – para que, após alguns ajustes, pudessem ser utilizadas em um novo problema. Contribuiu, também, para que o estudante tomasse a consciência de que um problema pode ser observado sob diversos aspectos e critérios, revelando diversos modos de pensar acerca do mesmo conceito. Consolida-se, assim, o conhecimento acerca do conceito, aprimora-se o repertório de estratégias para solucionar problemas e percebe-se que nenhum problema é um fim em si mesmo, podendo haver outros desdobramentos e diferentes formas de compreensão (Polya, 2006).

A interação conjunta entre as funcionalidades discutidas contribuiu para que os estudantes compreendessem alguns aspectos conceituais relacionados ao estudo de análise combinatória tidos como “difíceis” em estudos anteriores, conforme abordado na seção 2.3. Professor e estudantes argumentaram:

“Porque visualizar o problema sendo executado, por exemplo, simulado, me ajudou a entender como que funcionava o arranjo” (Aluno 2V).

“Em combinação e em permutação, por exemplo, eu consegui entender melhor o conceito dos dois vendo a solução” (Aluno 2V).

“Às vezes, a depender do enunciado da questão, você fica na dúvida, quais casos de fato fazem parte da solução. Aí, com as dicas, você consegue ver. Ah, se tiver junto, por exemplo, se tiver repetição, nesse caso, não conta, essas coisas assim. A ordem importa, a ordem não importa. Ajudava a entender isso” (Aluno 10V).

“A dica fazia com que a gente se tocasse ali de alguma coisa que a gente tinha perdido no meio da questão. Na hora de interpretar a questão, a gente achava que era uma coisa, mas era outra. E, na hora que a gente puxava na dica, aí, a gente dizia, não, não é bem esse o caminho. Vamos para outro. Aí, conseguia” (Aluno 11V).

“Eu destacaria principalmente as dicas 1 e 2, no sentido de pensar em casos particulares dos agrupamentos. Que é uma coisa que, inicialmente, entendo que, enquanto professor, os alunos não estão preocupados com isso. Estão querendo a resposta final e já pensar na ferramenta correta sem antes pensar como poder agrupar, e se esse agrupamento a ordem importa ou não importa” (Professor 1V).

Superar as dificuldades típicas desse conteúdo se deu, de alguma maneira, pelo processo de engajamento causado pelo CombInter. Nesse processo, os entrevistados destacaram as formas de auxílios disponibilizadas pelo CombInter como instrumentos que forneceram segurança e autonomia para que os estudantes se mantivessem interessados em aprender. Nessa perspectiva, comentaram:

“Ah, não consegui resolver, vou ter alguma ajuda [...] me prende ali, me incentiva a continuar tentando fazer. Então, consequentemente, eu consegui estudar mais e, tentar resolver, tentar focar mais naquilo, para tentar de fato resolver” (Aluno 1V).

“É mais atrativo do que ir para qualquer site, onde você tem uma questão e um gabarito. Não tem muito de dizer assim, olha, tem esse jeito de raciocinar, como eu tinha nas dicas. Tem esse jeito de fazer, como

eu tinha na simulação. Acho que o CombInter ganha muito nessa parte de ajudar o aluno a não desistir do problema” (Aluno 2V).

“As dicas me ajudaram a persistir no problema e a não desistir até resolver” (Aluno 9V).

“Ele te instigava a resolver. E, eu confesso que, às vezes, eu me sentia até desafiada a resolver quando eu estava com dificuldades. Não, essa aqui vou responder” (Aluno 10V).

“O CombInter também instigava a gente a fazer mais questões. A gente ficava com vontade de, entre aspas, zerar o joguinho” (Aluno 11V).

“À medida que o aluno vai interagir com o sistema, seja tentando colocar a resposta certa, buscando as dicas, ou, principalmente, a simulação, engaja o aluno a continuar, uma vez que ele não está numa situação estática sem respostas” (Professor 1V).

Os processos de reflexão proporcionados pelo CombInter contribuíram para que os estudantes manifestassem uma autonomia para saber lidar com os problemas combinatórios, numa perspectiva de, ao estar diante de um problema novo, saber identificar os elementos-chave do enunciado, os possíveis invariantes conceituais envolvidos e suas relações com os dados. Sobre isso, comentaram os estudantes:

“A simulação também ajudou muito na hora de fazer a prova que teve, que eu meio que, durante a prova, ficava fazendo algumas simulações na minha cabeça para conseguir compreender melhor as questões da prova” (Aluno 4V).

“Depois a pessoa pega uma prática, entre aspas, que o CombInter proporciona, que deixa mais claro o que cada problema pede, mesmo sem você saber o assunto específico dele. Com o tempo, parei de precisar tanto de utilizar as dicas, porque eu já sabia mais ou menos o caminho que a questão pedia” (Aluno 4V).

“Quando eu acertei a intermediária, eu não precisei das dicas, porque eu já tinha pensado” (Aluno 6V).

“Quando eu comecei a entender o nível iniciante, que eu fui passando para os outros, eu percebi que eu estava conseguindo entender o que fazer para avançar” (Aluno 9V).

“Se nas primeiras questões eu usava muitas dicas, nas outras você vai percebendo que você está usando menos, porque você conseguiu compreender melhor” (Aluno 10V).

“Muitas vezes a gente ia na primeira questão, aí, via ali, lia, com a ajuda daquela dica, a gente já conseguia responder outras questões” (Aluno 11V).

Desse modo, podemos inferir que o CombInter, a partir da explicitação de processos mentais e propriedades do conceito relacionados ao estudo de análise combinatória incorporados nas simulações, dicas e soluções, principalmente, colaborou para um reconhecimento e desenvolvimento no estudante de suas habilidades metacognitivas (Belland; Kim; Hannafin, 2013; Fernandes, 1989). Isto é, contribuiu para que o estudante reflita sobre suas ações ao interpretar o problema, de modo que haja um processo de conscientização entre a sua forma de pensar e as propriedades conceituais envolvidas.

7.3.2.2 Aula de análise combinatória com o CombInter

Para os estudantes e o professor, a forma que a aula foi conduzida e planejada também contribuiu para a aprendizagem do conteúdo. A respeito da **aula expositiva** do professor (abordada no início da seção 7.3), os sujeitos destacaram:

“Achei ótimo, porque ele discorre os problemas de uma forma que você entenda cada detalhe do problema” (Aluno 3V).

“E, a metodologia dele estava muito semelhante à do CombInter. Inicialmente, ele tentava explicar o que era e depois ele ensinava as fórmulas” (Aluno 5V).

“Foi melhor porque, assim, quem tem mais dúvidas, conseguia entender melhor. Porque você conseguia ir detalhando ali junto ao professor, não tão na pressa” (Aluno 6V).

“O jeito que ele estava fazendo facilitou mais a compreensão, tanto do conteúdo em si de análise combinatória, quanto da compreensão da questão – o que a questão estava te pedindo. Ele pegava a questão, ele aplicava nela, destrinchava ela para aplicar o conceito” (Aluno 7V).

“Acho que a turma teve muito mais momentos de discussão quando os exemplos foram apresentados primeiro e, depois, com a notação científica. Foi mais divertido assim. A gente, tipo, falava o nosso raciocínio em voz alta, a gente discutiu um pouco” (Aluno 8V).

“É uma abordagem produtiva e interessante. É bem parecida também com a abordagem do CombInter” (Aluno 9V).

“Tentar ser menos engessado e ser mais dinâmico na hora de apresentar as ferramentas da análise combinatória e, também, com relação à estruturação dos problemas, digo no sentido de convidar os alunos a pensar os casos particulares, a reduzir o problema para um caso mais simples. Então, de certa forma, se não reforçou, me convidou a fazer esse tipo de coisa durante as aulas. Acho que me influenciou nesse sentido durante as aulas” (Professor 1V).

Evidencia-se que o professor planejou sua aula a partir da abordagem conceitual apresentada pelo CombInter. A reação dos estudantes também foi positiva, elencando peculiaridades, tais como: o nível de detalhe abordado pelo professor, a discussão de exemplos evidenciando os principais invariantes do conceito, e questionamentos que proporcionavam discussões entre alunos e o professor. Além da aula expositiva, os estudantes abordaram suas impressões sobre a **dinâmica de atividades para casa** proposta pelo professor (apresentadas no início da seção 7.3)

“No meu caso, geralmente, quando vou para algum sistema, sempre ignoro a parte teórica. E, o fato do professor estar toda semana solicitando um resumo, fazia com que eu fosse ler e, em várias situações, eu realmente compreendia mais. O CombInter foi uma ferramenta essencial para eu ir complementando o meu conhecimento e aprendendo. Não chegar só na última semana e enlouquecer com vários conceitos” (Aluno 5V).

“Foi uma coisa que me ajudou bastante. Me ajudou a lembrar do conceito do conteúdo, me ajudou a fixar melhor o assunto. Gosto muito dessa abordagem” (Aluno 9V).

“Acho que engajou mais. De certa forma, a gente já conseguia compreender melhor o que era. Aí, quando chegava na aula, era só mais para aprofundar o conceito. De modo geral, ajudou mais para aprender” (Aluno 10V).

“Com a ajuda do material que já estava no CombInter, e com a pesquisa que eu fazia para fazer o mapa mental, me ajudava a responder às questões. Quando eu chegava na aula dele, já estava com a noção do que ele ia falar, e aquilo já ajudava a compreender mais o que o professor estava falando lá na frente” (Aluno 11V).

A partir das falas, nota-se que a dinâmica foi bem recebida pelos estudantes e, de certo modo, propiciou uma maior compreensão dos conceitos e um maior engajamento durante as aulas. A conjunção da dinâmica de aula proposta pelo professor e das peculiaridades do CombInter apontadas na seção 7.3.2.1 resultou em algumas mudanças comportamentais dos estudantes, a saber: formação de grupos de estudos de forma espontânea, motivação para o estudo individualizado independente, maior participação da aula e aumento de questionamentos de ordem superior ao professor. Abaixo, algumas falas que retrataram a **formação de grupos de estudos e o estudo independente**:

“Nesse básico, intermediário e avançado, por estar ali, em sequência, já facilitava mais porque, ah, eu fiz as questões de nível básico que o professor passou. Ah, mas eu consegui compreender, beleza, vou tentar fazer um intermediário para ver se o meu entendimento consegue ser além do nível básico que consegui, por exemplo” (Aluno 1V).

“Ter o aplicativo toda hora para você compartilhar respostas na sala. A gente tentar todo mundo junto quando não conseguia. A quantidade de suporte que ele tem. Você não ficava desesperanoso que vai errar ali e não vai conseguir, tipo, achar o raciocínio correto. No CombInter, eu gastava, entre aspas, o tempo, mas eu conseguia entender. Eu saía sabendo” (Aluno 6V).

“Eu podia estar fora de casa e dizer, não, espera aí, vamos responder algumas coisas e chegar lá e acessar; eu podia estar aqui mesmo [na escola] respondendo algumas coisas” (Aluno 7V).

“Eu e os meus amigos, a gente se juntava em grupinho e começava a discussão” (Aluno 8V).

“Eu sempre respondia às questões mais em grupo com o pessoal. A gente se juntava numa salinha e ficava respondendo em grupo. Aí, a gente só entrava no CombInter e começava a responder às questões” (Aluno 11V).

Nota-se que o estudo independente, isto é, ir além das atividades solicitadas pelo professor, foi potencializado pela disponibilidade de auxílios e níveis gradativos de dificuldade das atividades. Em paralelo, devido ao sistema estar sempre disponível e promover constantes reflexões, a discussão em grupos foi estimulada, uma vez que, apesar do sistema disponibilizar diversos auxílios, o papel interpretativo foi fundamental no desenvolvimento de esquemas compatíveis com as atividades. Nesse processo, as discussões em grupos foram fundamentais

para compreender como e porque determinados esquemas foram compatíveis ou não com determinados problemas combinatórios. Ainda sobre a questão comportamental, destacamos abaixo algumas falas que ressaltaram uma **maior participação dos estudantes** nas discussões em sala de aula, bem como um **aumento de questionamentos de ordem superior** acerca do conceito estudado:

“A galera da sala estava mais engajada com a matemática” (Aluno 4V).

“Percebi que os colegas participavam mais, porque a gente ficava engajado de participar ali. Muitos da turma, que não tinham muita disposição para estar estudando, ficaram com mais ânimo para estar prestando atenção na aula, não desfocar” (Aluno 11V).

“Eu vejo os alunos de forma bem participativa, bem presentes mesmo. Em alguns momentos, sentia que, em turmas passadas, estava dando aula para 5 ou 6 que de fato entendiam um pouco de combinatória. Mas, dessa vez, não. Eu senti que a maior parte estava entendendo e acompanhando, que estava querendo participar” (Professor 1V).

“Quando a gente chegava a perguntar para o professor, era uma coisa que a gente não tinha entendido de verdade, tipo, não eram coisinhas bestas que iam pegar o tempo dele” (Aluno 6V).

“A maioria das dúvidas que eu tinha eram sanadas pelo CombInter. Eu não precisava perguntar para o professor. As dúvidas que ficavam eram mais complexas mesmo” (Aluno 8V).

“O CombInter me estimulou a pensar uma coisa além das dúvidas que eu tinha. Geralmente, eu perguntava outras coisas, porque o sistema ele já me dava esse caminho mais básico” (Aluno 9V).

“Eu senti que diminuiu a quantidade de vezes que a gente ficava chamando o professor para explicar. A gente teve mais dúvidas nas avançadas, por serem avançadas” (Aluno 11V).

“Notei questionamentos mais cirúrgicos, no sentido de ajudar a desenvolver novos problemas. Eram questionamentos que tinham mais a ver com o conteúdo, não estão muito voadores assim. São perguntas mais pertinentes do que uma pergunta de alguém que não entendeu absolutamente nada. Não é uma situação de “ah, professor, não entendi”. Não entendeu o quê? Tudo? Perguntas com mais qualidade” (Professor 1V).

Nota-se que a participação dos estudantes se deu de forma ampla, seja de estudantes que tinham uma afinidade em matemática, seja de estudantes que tinham dificuldades, conforme as falas dos alunos 4V e 11V, e do professor 1V. De certo modo, a aula com o CombInter proporcionou uma democratização do saber matemático envolvido, uma vez que tal conhecimento não ficou restrito a poucos estudantes. Além da participação no sentido mais colaborativo, percebeu-se que os estudantes passaram a fazer questionamentos ao professor com maior significado – com nuances conceituais mais elaboradas –, uma vez que, o CombInter permitia sanar incompreensões relacionadas ao conceito, bem como à interpretação dos problemas, principalmente em atividades de níveis iniciante e intermediário. Não apenas no comportamento do estudante em sala de aula que o professor percebeu mudanças. A partir das avaliações do bimestre, o professor pode perceber:

“Percebi que eles estavam tentando escrever com mais riqueza de detalhes. Melhoraram muito a forma da escrita, muito claras, tentaram se aproximar do CombInter também. A impressão que tenho é de amadurecimento. A maior parte tentou escrever com as suas palavras, colocando suas ideias” (Professor 1V).

“Os alunos escreveram as ideias, não ficaram presos apenas a uma resposta. Colocaram, inclusive, nas provas, casos particulares para mostrar que entenderam de fato o problema. Também na clareza das ideias, digo no sentido da avaliação, eu consegui perceber onde é que eles estavam errando, de maneira mais clara, consegui entender o raciocínio deles, o que faltou para eles completarem o raciocínio e darem a resposta correta da questão. Também consegui comparar a questão da interação deles no sistema e o quanto que eles conseguiram desenvolver na prova. Por exemplo, alunos que interagiram mais com o sistema, eu consegui perceber que esses alunos foram muito mais claros nas suas ideias. Eles foram bem também na prova” (Professor 1V).

“Achei que melhorou principalmente as dos que tinham mais dificuldade. Acho que o sistema atendeu muito a quem tinha mais dificuldade. Acho que pouquíssimos alunos ficaram abaixo de 50% da prova. Um ou dois” (Professor 1V).

“Com o CombInter, a análise combinatória foi mais bem vista pelos alunos. Diria que saiu mais do campo abstrato e foi colocada de forma mais concreta” (Professor 1V).

A forma de expor a solução dos problemas foi algo que chamou a atenção do professor. As soluções, que antes eram marcadas apenas pela presença do cálculo numérico²⁰, passaram a trazer todo um processo construtivo, evidenciando os invariantes dos conceitos compatíveis com o enunciado do problema, justificando as operações realizadas, isto é, passou-se a priorizar uma caracterização do cálculo relacional²¹. Tal perspectiva permitiu que a maioria da turma conseguisse atingir acima de 50% de acertos da avaliação²², com destaque, principalmente, para estudantes que tinham maior dificuldade no assunto. Destaca-se a importância do CombInter nesse processo, uma vez que, na turma controle (turma que não usou o CombInter), o professor ressaltou que as soluções apresentadas pelos estudantes priorizavam o cálculo numérico, sem justificar os procedimentos adotados durante a resolução. Outros aspectos também chamaram a atenção do professor ao conduzir a aula com o CombInter:

“De otimização do trabalho e de uma melhor interação. Acho que, sobretudo, a interação entre professor e aluno, e sentir que o aluno está entendendo de fato o que estou falando. Eu me senti aliviado. A comunicação estava chegando de alguma forma” (Professor 1V).

“Achei que eles estavam mais presentes na aula. Acho que os grupos estavam se ajudando mais, principalmente em relação ao sistema, de forma colaborativa” (Professor 1V).

²⁰ O cálculo numérico envolve operações de adição, subtração, multiplicação ou divisão (Pessoa, 2002).

²¹ O cálculo relacional envolve operações de pensamento necessárias para compreender os relacionamentos envolvidos nas operações que podem solucionar um problema (Pessoa, 2002).

²² Em aulas anteriores de combinatória, o professor destacou que a maioria tirava notas baixas, com muitas notas zero.

“Conduzir o aluno para uma aprendizagem mais autônoma. E, essa autonomia também se traduzir em sala de aula, no sentido da participação, da busca, das dúvidas, de deixar o aluno mais confiante” (Professor 1V).

Fica claro que a percepção docente de que os estudantes estão engajados durante as aulas e as atividades, principalmente no sentido de demonstrar que estão aprendendo, é relevante para sua prática profissional. Nesse aspecto, o CombInter pode contribuir de forma efetiva, conforme discussões anteriores, para uma aprendizagem com maior autonomia a partir de uma diversidade de ações reflexivas.

7.4 PRINCÍPIOS TEÓRICOS

Nesta seção, serão apresentadas discussões realizadas pelos especialistas e estudantes a respeito dos princípios teóricos (abordados na seção 7.1.1) utilizados como requisitos pedagógicos do CombInter. Desse modo, são apresentadas falas que de alguma maneira ratificam a importância desses princípios para a construção do OA e aprendizagem dos conceitos, bem como refinamentos que apontam para um novo olhar acerca das construções realizadas. Além disso, são apresentados outros princípios oriundos da interação dos profissionais envolvidos na prática escolar com o CombInter.

Em relação ao princípio **Oportunizar aos estudantes a abordagem dos conceitos matemáticos**, os sujeitos da pesquisa, a partir da interação com o CombInter, puderam vivenciar algumas situações que permitiram estabelecer algumas características:

“Você parte muito da questão dos fatores do dia a dia para contextualizar. E, antes de definir cada conceito, você partiu de um problema, sai desenvolvendo esse problema e, no fim do problema, é que você define o conceito. É muito legal” (Professor 1).

“É bem detalhado. Gosto de destacar isso, porque é muito bom” (Aluno 6).

“Com a diversidade de exemplos, deu para entender melhor, porque via diversos casos. Aí, você conseguia ver em quais momentos você usava, por exemplo, o princípio fundamental da contagem” (Aluno 10V).

“Tinha bastante exemplo principalmente. Dava para entender com os exemplos” (Aluno 8V).

“Vi um detalhamento e uma forma não linear, no sentido de que não há uma única maneira de apresentar as soluções. O sistema mostrou várias formas” (Professor 1V).

“Achei as soluções bem detalhadas. Elas explicam passo a passo o que aconteceu. Por conta disso, vai ser uma combinação, por conta disso, vai ser arranjo. Então, ele deixa bem explicado o que está usando e o porquê” (Professor 10).

“Achei que essa questão dos desenhos estava muito bem representada. Tinha desenho para praticamente tudo que ele explicava, o que facilita muito a compreensão. Porque tem coisas que o pessoal não consegue entender só no texto. Então, achei que essa parte estava muito boa” (Aluno 5V).

De modo geral, conforme as falas apresentadas, os conceitos explanados foram além de definições e demonstrações, apresentando uma contextualização a partir de problemas iniciais para justificar a importância dos conceitos estudados; houve apresentação de uma diversidade de exemplos resolvidos, com a disponibilização de várias soluções de forma detalhada; e diversas representações simbólicas estavam presentes nas discussões dos conceitos, nos enunciados dos exemplos e durante as soluções. Como resultado de um processo de refinamento do princípio durante as etapas da pesquisa, algumas situações foram destacadas por alguns sujeitos, a saber:

“Você segue uma sequência que é crescente de dificuldade. É uma forma de facilitar a vida do estudante” (Professor 1).

“É uma sequência lógica bacana que dá para o aluno ir se desenvolvendo até chegar no nível máximo do conhecimento” (Professor 6).

“O que mais me chamou a atenção nessa abordagem da explicação foi de a gente poder interagir com a plataforma e fornecer simulações para resolver aquele problema antes de saber da solução de fato” (Aluno 9V).

“Quando ele [o aluno] vai para o específico, ele precisa pensar. Porque, como posso ter um problema e construir para que dê isso. Então, é importante. Além de ter o conceito que você apresenta, você também tem outra maneira de ver o problema [problema específico como exemplos resolvidos nos conceitos]” (Professor 9).

Para além dos aspectos abordados a partir dos princípios teóricos, nota-se a importância de estabelecer uma ordem crescente de dificuldade nas discussões dos conceitos e exemplos resolvidos, uma vez que facilita o processo de aprendizagem do estudante. Outros destaques dados são sobre o CombInter disponibilizar simulações durante as discussões dos conceitos, como forma do estudante interagir e realizar processos de testagens com feedbacks, conforme foi abordado na seção 7.2.5, e trazer problemas do tipo específico resolvidos, conforme abordado na seção 7.1.2.2, durante as discussões dos conceitos, oportunizando aos estudantes não só uma diversidade de problemas de acordo com os invariantes conceituais, mas também em termos de variação de estrutura do problema. Em relação ao princípio **Propiciar aos estudantes a interação com uma diversidade de situações-problema relacionadas aos conceitos estudados**, os sujeitos revelaram que:

“A quantidade de problemas é muito boa e, cada problema, aborda uma situação diferente da outra. Não são problemas iguais que sempre vão usar a mesma fórmula, sempre o mesmo conceito. Então, eles sempre vão fazer o aluno pensar um pouquinho diferente” (Professor 10).

“Foram problemas que realmente instigam o pensamento de quem está fazendo. A variedade também é muito grande” (Aluno 3).

“As questões foram tão contextualizadas que desafiavam os alunos. Os alunos se sentiam abraçados” (Professor 1V).

“Ao invés de o aluno pegar o probleminha pronto, ele [problema do tipo específico] faria o contrário. Já pegaria os dados do problema, só que o problema seria criado por ele, dando a oportunidade do aluno pensar e imaginar diversas possibilidades com aquelas informações” (Professor 6).

“Acho que [o problema do tipo específico] me fez pensar bastante e também estimulou minha criatividade para aprender o assunto” (Aluno 9V).

“De certa forma, [o problema do tipo específico] fazia a gente pensar fora da caixa” (Aluno 10V).

“Tem problema que você consegue resolver usando apenas o princípio fundamental da contagem. Tem alguns que a aplicação direta do princípio não é suficiente. Você tem que abrir em casos para usar o princípio aditivo, aditivo combinado com multiplicativo. Então, ele [o CombInter] traz, também, essa diversidade de problemas” (Professor 1).

“A mesma questão traz várias abordagens e formas de resolver. Várias representações de como a gente pode solucionar um problema” (Professor 3).

“Algumas têm várias etapas: A, B, C, que vão progredindo, fazendo com que a gente acabe refletindo sobre as diferentes abordagens, representações” (Desenvolvedor 2).

Nota-se que as situações-problema disponibilizadas pelo CombInter foram diversas, no sentido de explorar de forma balanceada os diversos conceitos combinatórios, seus invariantes e representações simbólicas; variaram-se, também, em forma de estrutura, trazendo problemas do tipo específico, conforme discutido na seção 7.1.2.2; e permitiram ser solucionadas de várias formas, oportunizando os estudantes vivenciarem várias estratégias de solução. A fala do Professor 6 evidencia o que Duval (2003) chamou de conversão entre registros de representação que, segundo o autor, é uma atividade de transformação representacional fundamental que favorece processos de compreensão. Semelhante às discussões apresentadas em relação ao princípio anterior, estudantes e professores evidenciaram a importância de estabelecer níveis de complexidade referentes aos problemas disponibilizados nas atividades do CombInter:

“Os níveis desafiam o aluno a querer, eita, resolvi aqui no iniciante. Mas vou para o médio, vou para o avançado, será que vou conseguir? Então, desafia ele. A partir do momento em que ele resolve uma questão de um nível, desafia ele a buscar outra” (Professor 2).

“Aqueles [problemas] que estão na faixa do iniciante, realmente são mais fáceis do que aqueles que estão na intermediária, que realmente são mais fáceis daqueles que estão na avançada” (Professor 1).

“Começar só no difícil, talvez faça você desistir de usar o CombInter, ou ter problemas só fáceis faria você procurar outra coisa mais difícil. Ter variações de níveis é muito importante” (Aluno 2V).

“Ter problemas mais fáceis e depois indo para os mais difíceis, faz realmente o aluno evoluir, o aluno pensar mesmo” (Aluno 3).

O CombInter, portanto, apresentou problemas compatíveis com cada nível de complexidade, o que permitiu atender diversos perfis de estudantes (com maior ou menor dificuldade para aprender, ou que estejam em estágios diferentes de aprendizagem), além de possibilitar que o estudante entenda o seu estágio de desenvolvimento, desafiando-o para interagir com atividades com outros níveis de complexidade. Sobre o princípio **Desenvolver mecanismos de interação que permitam o estudante manipular e obter respostas com feedbacks em tempo real**, o CombInter disponibilizou a funcionalidade **Simulação** como recurso de maior potencial de interatividade. A esse respeito, os sujeitos da pesquisa argumentaram:

“Muitas vezes, o aluno resolve um problema. Aí, ele pensa que a solução é aquela dali, né? E, não é. E, ele não sabe onde errou. A partir do momento em que você vai testando, você, eita, coloquei uma [possibilidade na simulação], aí, o CombInter vai indicar que aquela é certa. Você vai e tenta de novo. Se for uma parecida, o CombInter vai dizer que é uma parecida ou no caso é igual. O aluno vai testando e ele vai entendendo, vai compreendendo cada caso. Se é uma combinação, se é um arranjo ou, se é uma permutação” (Professor 5).

“Ao colocar lá [nas simulações] uma das possibilidades para o problema, o CombInter memoriza e aparece na janelinha de baixo. E, acaba incentivando o aluno a ver outras possibilidades naquele momento” (Professor 6).

“[Com a simulação] você vê ele [o problema] lhe sendo representado. No visual, fica mais fácil para você aprender” (Aluno 1).

“[As simulações] vão instigando o aluno, vão dar aquele desejo de resolver os problemas” (Desenvolvedor 1).

“Na simulação, a gente conseguia responder às dúvidas que a gente tinha na questão principal” (Aluno 11V).

“A simulação ajudou muito saber se de fato os alunos entenderam o problema. Porque, às vezes, a sensação que tenho é que eles sabem usar as ferramentas, mas não entendem o problema” (Professor 1V).

Observa-se que as simulações deram a oportunidade de, por meio de tentativa e erro, testar possibilidades de contagem que permitiram construir o entendimento acerca do problema, uma vez que favoreciam o reconhecimento dos invariantes dos conceitos envolvidos. A sensação de estar visualizando o problema por meio das simulações facilitou o entendimento do problema e a aprendizagem dos conceitos, estimulando os estudantes a solucionar outros problemas. Para os sujeitos, tais percepções se deram devido aos feedbacks que o CombInter

apresentava à medida que os estudantes acertavam ou erravam alguma possibilidade de contagem:

“Quando a pessoa erra, aparece a mensagem vermelhinha e diz: é necessário considerar tal e tal e tal. A pessoa vendo, pode já ter outra ideia” (Aluno IV).

“Se não existisse o feedback, o aluno que estivesse aprendendo pelo CombInter ficaria perdido, porque se acertasse, talvez ele não saberia o porquê acertou e, se ele errasse, ele também não iria saber o porquê de ele ter errado. O fato de ter o feedback, é como se tivesse um professor ali ao lado do aluno, é como se o software estivesse dizendo, oh, está errado por conta disso” (Professor 10).

“Se o aluno visualizasse apenas que a resposta estava errada ou que estava correta sem nenhum comentário adicional, poderia ser que o aluno chegasse à solução, mas sem entender bem o que estava fazendo ali. Ou seja, ele se equivocou no processo, mas acabou acertando o resultado sem saber exatamente o que estava fazendo. E, aí, aquele feedback auxilia bastante para entender se ele acertou realmente a questão. Porque sabia o que estava fazendo ou se foi por acaso” (Professor 6).

“Os estudantes, quando erram ou não conseguem desenvolver um dado problema, eles param. Quando você tem os feedbacks e os direcionamentos, é como se você dissesse, não rapaz, vá de novo, vamos lá, você pode ir por aqui, você pode pensar desse jeito. Você pode seguir essa linha” (Professor 5).

“Não adianta eu chegar na sala de aula, mostrar o problema e resolver. Eu tenho que provar porque aquilo ali está certo. Aquele feedback é uma forma do aluno provar que aquilo vai dar certo” (Licenciando 1).

O feedback, desse modo, influencia o estudante em alguns aspectos: compreensão dos invariantes conceituais relacionados à situação-problema; tomada de consciência dos processos mentais relacionados à resolução dos problemas, entendendo porque algumas estratégias funcionam e outras não; e o reconhecimento de estratégias corretas e/ou erradas como estímulo para continuar o processo investigativo relacionado ao problema. No que se refere ao princípio **Estabelecer questionamentos que permitam auxiliar os estudantes na resolução de problemas**, o CombInter disponibilizou, durante a interação com as atividades propostas, questionamentos relacionados às situações-problema que foram rotulados de **Dicas**. Nessa perspectiva, foi observado:

“Deixa de ser uma simples dica, porque não é só um lembrete dizendo, olha, você está se equivocando nesse ponto, o caminho seria por aqui. A dica em si instiga o aluno a pensar e a assimilar o que vem na própria dica para que volte para o problema principal, entendendo aquele conceito” (Professor 6).

“É muito importante ter as dicas, porque o aluno vai ter um motivo a mais para poder estar respondendo questões, não ficando em dúvida, como a maioria dos alunos. Eles morrem ali na cruz, mas não tiram a dúvida. Eles vão ter um apoio ali, vão conseguir entender melhor a questão” (Licenciando 2).

“Não é uma dica em que o aluno somente lê. Ele consegue interagir por meio das sub-perguntas. Se ele erra, tem um feedback. E, se ele vai acertando, vão aparecendo novas opções para que ele vá se convencendo da melhor estratégia” (Desenvolvedor 4).

“As dicas 1, 2 e 3 vão tentar abrir o seu pensamento para o que realmente está sendo pedido. Elas lhe dão uma ideia e você tem que pegar essa ideia e montar o raciocínio e responder. Chegou na 4, ela vai

explicar mais ou menos o que você tem que fazer. É como se ela estivesse lhe ensinando de maneira indireta, mais ou menos, a fazer o que está sendo pedido” (Aluno 7V).

Às vezes, o enunciado da questão não deixava claro se a ordem importava ou não. Aí, ficava aquela dúvida. Quando você ia à dica, você respondia lá e você via, ah, a ordem importa, a ordem não importa (Aluno 10V).

“As dicas conduzem a construção da solução de maneira autônoma” (Professor 1V).

Dessa maneira, as dicas caracterizaram-se como elementos que provocavam reflexões relacionadas aos invariantes dos conceitos envolvidos com a situação-problema, com objetivo de desencadear processos mentais que levassem ao desenvolvimento de estratégias de solução. Percebe-se, a partir das falas do “Professor 6”, “Licenciando 2” e “Aluno 10V”, que há uma percepção de simplificação da situação-problema, uma manutenção de direção do estudante em permanecer atento aos aspectos relevantes da situação-problema e, conseqüentemente, um menor nível de estresse durante o processo de resolução de problemas, características relacionadas, respectivamente, às funções de andaimes “redução de grau de liberdade”, “manutenção de direção” e “controle de frustração” discutidos na seção 7.1.1. Outros aspectos abordados foram acerca do estudante perceber que “não está sozinho” resolvendo um problema matemático, uma vez que, com as dicas, o estudante tinha consciência de que, a qualquer momento, poderia acioná-las, contribuindo para sanar suas dúvidas. O fato de serem questionamentos contribuiu para uma abordagem interativa, proporcionando um processo ativo, com maior autonomia, na relação estudante-CombInter.

As dicas e outros recursos do CombInter foram indicados como andaimes pelos sujeitos da pesquisa. Os andaimes, conforme discutidos nas seções 5.1 e 7.1.1, foram configurados a partir do princípio **Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações-problema**. Sobre o **andaime de compreensão**, argumentaram:

“Com a simulação, você consegue verificar se de fato aquela sequência que você está pensando está correta e, caso não esteja, você recebe um feedback de volta do porquê está errado” (Professor 10).

“A primeira dica faz tipo uma pergunta que o aluno vai marcando. Essa marcação já tem uma relação com alguma coisa que aconteceu no problema. Então, faz o aluno pensar. Na segunda dica, mostra o porquê que aquela marcação da dica 1 tinha acontecido” (Professor 2).

“Às vezes, a pessoa lê o problema e não sabe o que o problema quer. Quando você vai desenvolvendo os questionamentos das dicas, vai ficando claro. Ah, então quer dizer que posso escrever assim, existe uma restrição assim” (Professor 1).

“A primeira dica me ajudou a entender a questão, o que ela pedia, e, a segunda dica, como que eu podia resolver o problema” (Aluno 1).

“As dicas ajudam a identificar o que deve ser utilizado, perceber o que é mais importante, por exemplo, a questão de ordem, está na essência mesmo do modelo que quer se aplicar ali” (Desenvolvedor 5).

“Ajudaram a responder, só vendo a dica um e a dica dois. Às vezes, você conseguia ver se havia repetição ou se não havia, se a ordem importava ou não” (Aluno 10V).

“A dica 2 dava meio que um contexto, ou igual, ou diferente do problema. A pessoa podia ver, ah, nesse contexto isso não é aplicado, porque não é isso que está se pedindo, por exemplo” (Aluno 1V).

Destacam-se as simulações, as dicas 1 e 2 e seus respectivos feedbacks como recursos do CombInter que contribuíram para a compreensão das situações-problema, uma vez que permitiram que o estudante refletisse sobre os dados, condicionantes e a incógnita relacionados ao problema, bem como tomasse consciência dos invariantes conceituais envolvidos. A noção de compreensão do problema proporcionada pelas funcionalidades colaborou para o engajamento dos estudantes (função de engajamento discutida na seção 7.1.1). Em relação ao **andaime para formulação de um plano**, alguns elementos do CombInter foram destacados pelos sujeitos da pesquisa:

“Não somente criar estratégia, mas relembrar o conceito. Essas questões associam muito o conceito à ideia para resolver a questão. O aluno normalmente tem várias ferramentas, mas não sabe qual escolher. E, essas dicas [dicas 3 e 4] vêm para mostrar um caminho. Eita, eu lembrei dessa outra questão. E, quando ele vê uma ideia, é aí que vai criando na mente dele estratégias” (Professor 3).

“A dica 3 surge no sentido de dar uma nova visão do problema que as dicas 1 e 2 não trazem. E, na dica 4, aprofunda a ideia que tinha na dica 2, juntando com o conhecimento que você tem na dica 3. Aí, você amplia. E, já traz os conceitos. Contribuem tanto para resolver o problema quanto para entender o conceito que está sendo trabalhado naquele problema” (Professor 1).

“São vários modos de pensar [apresentados na dica 4] que confrontam o aluno a mostrar o certo. Aquilo dali vai estar trabalhando muito o pensamento do aluno” (Licenciando 1).

“À medida que ele vai passando por essas últimas dicas a cada problema, o CombInter traz um potencial de ampliar esse repertório dos alunos em relação às estratégias, em relação à capacidade de aplicar, inclusive” (Desenvolvedor 5).

“A simulação me ajudou a pensar em como eu poderia resolver aquele problema” (Aluno 9V).

“A dica 3 fazia a explicação de tudo que ela tinha associado na primeira e na segunda. Se você tivesse um pouco de facilidade entre as duas para pegar, você já conseguia responder com a terceira dica. A dica três ajudava a distinguir: às vezes eu estava pensando que era um arranjo e a dica dizia uma coisa que eu já me ligava que era combinação” (Aluno 5V).

A partir das falas, as dicas 3 e 4, as simulações e seus respectivos feedbacks foram enfatizados como recursos do CombInter que proporcionaram desenvolver planos de solução para as situações-problema, pois permitiram pensar sobre o problema, comparar modos de pensar compatíveis ou não com o enunciado do problema, de modo que fosse possível identificar e compreender os invariantes dos conceitos envolvidos, lembrar de situações-problema anteriores parecidas, analisando e entendendo se estratégias de solução anteriores

poderiam ser compatíveis, e ressignificar os dados e condicionantes das situações-problema para o estabelecimento de planos de solução. No que se refere ao **andaime para execução do plano**, as soluções disponibilizadas pelo CombInter foram destacadas pelos sujeitos da pesquisa:

“Em cada solução, o CombInter discute mais de uma forma, inclusive, com representações diferentes. No início, utiliza uma abordagem com determinado registro e, em outra, já usa um registro diferente” (Professor 1).

“As soluções têm imagens, têm exemplos, estão bem explicadas” (Desenvolvedor 4).

“Mesmo que tenha acertado a questão, porque, às vezes, você só acerta no chute, mas, saber o que você acertou, o que você pode fazer de diferente, o que você pode melhorar ou fazer de um jeito mais fácil, acho que é muito importante” (Aluno 1).

“A solução era muito detalhada. Uma coisa que eu tinha ficado em dúvida, uma coisa que eu não tinha entendido direito, e o porquê ter chegado naquele valor. Era bem explicativa” (Aluno 1V).

“Quando a gente ia ver a solução, a gente entendia o porquê que tinha dado aquela dica. Dizia, ah, essa dica foi essencial para isso. Aí, na próxima questão, a gente ia se ligar em que a dica pode ajudar para fazer a solução” (Aluno 6V).

“As dicas não estão ali de maneira aleatória. Elas têm realmente a ver com o conteúdo. Quando abre a solução, vê que as dicas estão juntas na solução. As dicas estão lá para ajudar” (Aluno 5V).

“O estudante pode pensar em uma solução que é diferente da que é apresentada no sistema. Então, convida o aluno a pensar de outras formas e não ficar apenas no certo ou errado” (Professor 1V).

A funcionalidade **Solução** permitiu aos estudantes terem acesso ao processo de construção de planos de solução compatíveis com as situações-problema, tais que: explicitavam como as dicas apresentadas pelo CombInter foram úteis para o processo de construção das soluções, evidenciando os dados, condicionantes, a incógnita, representações simbólicas e suas relações em um processo bem-sucedido de solução; e apresentavam diversas abordagens de solução, priorizando métodos construtivos, tornando explícitos os invariantes conceituais e representações simbólicas envolvidos, o que caracteriza o andaime com função de demonstração, conforme discutido na seção 7.1.1. Ao interagir com as soluções, os estudantes puderam analisar uma abordagem diferente de solução e entender o percurso e as estratégias realizadas, identificando elementos ausentes na sua solução. Ter acesso a esse tipo de solução contribuiu para que o estudante compreenda os conceitos envolvidos e desenvolva estratégias de solução a serem aplicados em problemas futuros. Além de apresentar mais de uma forma de solucionar os problemas, o CombInter disponibilizava para cada situação-problema, outra situação parecida (funcionalidade Veja mais, conforme discutida na seção 7.1.2.2). Ambas funções são relacionadas ao **andaime para o retrospecto**. Sobre ele, os sujeitos ressaltaram:

Um problema parecido com uma generalização maior (Professor 3).

É tipo uma testagem. O aluno ali vai ver, será que aprendi mesmo? (Professor 11).

É uma forma do aluno se aprofundar no conteúdo que ele está vendo, na própria resposta que ele deu, em outros problemas que por ventura ele pode ver a respeito do mesmo tema. Às vezes, enxergar outros pontos de vista vai fazer com que você tenha uma bagagem maior e que consiga resolver mais problemas também (Professor 10).

Às vezes, ele entende uma questão de uma forma e, às vezes, era totalmente ao contrário daquilo que ele pensou. Então, tem que entender o processo ali, será que aquilo é realmente assim? Porque, você pode dar até uma forma para dar certo, mas quando você vai para outra questão, não dá. Então, tem que entender todo o conceito, toda a definição, para, quando chegar na questão, não errar. Vai fazer com que ele diferencie um do outro (Licenciando 2).

À medida que o estudante, com a ajuda dos feedbacks e das dicas, consegue resolver o problema, e vai para um outro e, de repente, consegue também, certamente vai trazer contribuições positivas, tanto para o aprendizado daquilo que está se tentando como objetivo específico, como também, de um modo mais amplo, porque causa, acredito, o engajamento para a própria matemática, para o estudo dessa área (Desenvolvedor 5).

Faz a pessoa ampliar a forma de ver o problema principal. No veja mais, por ser uma derivação desse mesmo problema, abria novas possibilidades, novas formas de pensar, jeitos de resolver (Aluno 1V).

Porque, às vezes, quando você só dá um caminho para a pessoa, ela fica centrada em responder aquela questão naquele caminho. Quando você dá mais de um caminho, é melhor, porque, às vezes, você esquece alguma coisa que só poderia usar no primeiro caminho, aí, você lembra que não precisa responder isso daquele jeito. Têm outras formas que você consegue responder aquela questão, e termina que fica com mais conhecimento sobre aquele assunto (Aluno 11V).

Desse modo, a funcionalidade **Veja mais** contribuiu para que os estudantes expandissem a sua compreensão inicial obtida a partir da interação com o problema principal (dicas, simulações, feedbacks e solução), uma vez que exigiu repensar acerca dos invariantes conceituais e entender quais estratégias de solução poderiam ser úteis para solucionar o novo problema. Ao passo que, a diversidade de abordagens de solução em relação a um mesmo problema permitiu ampliar o repertório de modos de pensar do aluno ao interagir com problemas combinatórios. Em relação ao princípio **Considerar os aspectos relevantes que interferem na aprendizagem dos conceitos a serem trabalhados**, os sujeitos destacaram como as funcionalidades incorporaram os aspectos conceituais importantes para aprendizagem:

O que está exposto ali em relação ao conteúdo, à atividade, à dica, à solução no final, ao simulado, para mostrar depois o que ele realmente aprendeu do final de tudo, tudo isso favorece a compreensão e o conhecimento dos alunos (Professor 2).

As questões têm uma gama muito boa que abraça quase todas as situações que a gente trabalha em sala de aula. Esses problemas estão organizados de uma forma bem estruturada (Professor 3).

As dicas são bem pertinentes. Elas vão direto ao ponto naquele aspecto (Professor 3).

Os problemas são objetivos, as perguntas são bem claras. O CombInter aborda também uma questão muito conceitual nas dicas. É um fator interessante (Professor 1).

Toda a construção foi voltada para o que realmente é funcional. O conteúdo da plataforma é muito amplo. Vocês condensaram para dentro das problemáticas de uma forma em que o aluno vai se deparar com situações reais dentro das dicas e dos feedbacks (Desenvolvedor 3).

As dicas tinham a ver com o conteúdo e ajudavam bastante na compreensão (Aluno 5V).

Tudo que estava prescrito no CombInter, de fato, tinha a ver com o conteúdo, ajudava (Aluno 1V).

Observa-se que os aspectos conceituais combinatórios estabelecidos nas funcionalidades do CombInter (Conceitos, Atividades, Simulações, Soluções, Veja mais) foram importantes para o processo de aprendizagem, o que corrobora com a função de andaime “aspectos críticos destacados” discutida na seção 7.1.1. Estudantes e professores entenderem que o CombInter influencia no processo de ensino e aprendizagem é relevante, uma vez que indica que o sistema está próximo das necessidades reais vivenciadas pela comunidade escolar. Além das funcionalidades destacadas relacionadas aos diversos princípios teóricos listados na seção 7.1.1, a funcionalidade **Relatórios** foi bastante comentada pelos professores e desenvolvedores, uma vez que permitia que os docentes visualizassem as interações dos estudantes ao responder às atividades (situações-problema, dicas, simulação e veja mais) por meio de um *dashboard*²³, conforme apêndice N, figura 47. Em um primeiro momento, os professores argumentaram como os relatórios são essenciais para a realização de um diagnóstico sobre a interação dos estudantes no CombInter:

“O relatório mostra o que o aluno está fazendo, se o aluno está respondendo questões e o nível das questões que ele está respondendo, se ele está acertando de primeira, se ele está acertando com dica, com quantas dicas, se ele não conseguiu acertar. Então, acho que é importante para o professor estar observando o andamento da turma” (Professor 2).

“O professor não fica às cegas. Ele sabe o que está acontecendo com os alunos, com esses relatórios, com esses gráficos automáticos. Isso é importante para o professor” (Professor 3).

“Eu poderia chegar naquele gráfico e perceber como o meu aluno evoluiu, como ele cresceu com o apoio do aplicativo. Por exemplo, será que os meus alunos se saíram bem? Qual foi a questão que o meu aluno não gostou?” (Professor 9).

“Você consegue identificar até onde o aluno foi nas dicas para resolver” (Professor 11).

“Com a plataforma, principalmente aquele que errou as questões de iniciante, ou precisou chegar na dica quatro por várias vezes, isso é um feedback positivo no sentido de, opa, professor, esses alunos certamente terão grandes dificuldades com a sua disciplina” (Professor 8).

²³ Um dashboard é uma ferramenta que apresenta dados de forma visual e interativa.

Nota-se que os relatórios permitiram ao professor visualizar a quantidade de acertos, de erros e de situações-problema não respondidas, seja por turma ou de forma individual, bem como de acordo com o nível de complexidade e tipo de problema combinatório. Além disso, disponibilizaram o momento em que os estudantes acertavam o problema principal (sem auxílio, após a simulação, após a dica 1, após a dica 2, após a dica 3, após a dica 4 ou após a solução), quando acertavam os problemas referentes ao Veja mais (sem feedback, com feedback) e um comparativo de acerto entre o problema principal e o problema referente ao Veja mais (se os estudantes acertavam ambos os problemas ou se acertavam o problema principal e erravam o problema referente ao Veja mais). Esse conjunto de informações possibilita aos professores remodelarem a sua prática docente, ao argumentarem que:

“São indicativos para fazer uma assistência mais individualizada. O “fulaninho” está errando muito essas questões do nível 2, que envolve combinação simples. Será que ele está com algum problema? A gente tem indícios. Então, dá esse suporte individualizado” (Professor 7).

“Você pode pensar numa estratégia para ajudar aqueles alunos que tiveram um número maior de questões erradas, e até auxiliar os que acertaram, trazendo problemas mais interessantes, que venham a contribuir para aprendizagem, para não ficar na mesma coisa” (Professor 4).

“Esse conteúdo aqui eu não estou usando uma metodologia adequada para que os alunos atinjam esse conhecimento. Eles estão com muita dúvida nisso, eu preciso desse pré-requisito antes, eu preciso revisar tal conteúdo” (Professor 3).

“Dá para acompanhar não só a questão do acerto em si, mas também o que pode estar contribuindo para esse acerto. E, uma vez que isso estiver claro, é importante que de repente o docente enfatize aquele aspecto em sala de aula” (Desenvolvedor 5).

“Vai ter uma ideia de o que você está fazendo está funcionando” (Professor 4).

Para além do quantitativo geral de acertos e erros dos estudantes ao interagir com o CombInter, ter acesso aos dados de interação dos estudantes possibilita ao professor refletir sobre os aspectos pedagógicos relacionados às suas aulas, no sentido de identificar situações que estão contribuindo para aprendizagem dos estudantes, ao passo que, indica que, para alguns conceitos, pode exigir alguma mudança de metodologia para atender pedagogicamente estudantes que não estejam aprendendo de forma satisfatória. Por exemplo, os professores relataram de que forma os relatórios auxiliariam na sua prática escolar:

“O CombInter, a partir dos relatórios, sintetiza todo o processo que é a avaliação. Aí, é onde acho que é o maior aliado do professor, porque avaliar é um processo complexo. É um processo demorado” (Professor 1).

“Se o professor passa uma atividade usando essa ferramenta, é uma forma dele acompanhar e, se ele quiser, atribuir alguma nota depois” (Professor 6).

“Em sala de aula, a gente não consegue identificar os potenciais alunos com grandes dificuldades. Porque uma turma de 30, 40 alunos é praticamente inviável passar cadeira em cadeira e ficar perguntando se, de fato, o aluno aprendeu ou não” (Professor 8).

“Essa visão dos relatórios finais, bem individualizada, é uma coisa muito difícil de se fazer. Porque são muitos alunos para você acompanhar e o CombInter traz essa perspectiva” (Professor 1).

“Poderia passar atividade para casa na plataforma. No outro dia, eu já faria análise e já saberia quem fez o quê, quem deixou de responder” (Desenvolvedor 3).

“Isso é um comparativo. O registro das atividades realizadas pelos alunos com o dia a dia de sala de aula e com as atividades avaliativas também” (Professor 1V).

“Eu posso pedir para um aluno ler e interpretar o gráfico. Por favor, me explique. E, aí, o que você achou? Qual foi a turma que ficou no nível melhor? Qual é a turma que precisa melhorar?” (Professor 9).

“E, pode usar o programa para pesquisar a própria prática a partir desse relatório. Porque, se ele tem duas turmas, por exemplo, ele pode testar simultaneamente duas abordagens e tentar entender se isso está tendo uma influência ou não” (Desenvolvedor 5).

Observa-se que a funcionalidade “Relatórios” pode ser utilizada para facilitar o processo avaliativo dos estudantes, uma vez que os dados das interações são disponibilizados em tempo real e de forma organizada, dando oportunidade para que os professores possam, por exemplo, comparar tais dados com outras formas de avaliação, conforme abordado pelo “Professor 1V”. Além do processo avaliativo, os gráficos presentes nos relatórios podem servir de estudo por parte dos estudantes, proporcionando uma perspectiva ativa de aprendizagem, conforme abordado pelo “Professor 9”, ao passo que, podem servir de indicadores comparativos de abordagens de ensino propostas pelo professor, conforme abordado pelo “desenvolvedor 5”.

Dada a ênfase que os professores atribuíram à funcionalidade “Relatórios” e as discussões apresentadas sobre como os relatórios podem interferir no trabalho docente, caracterizamos o princípio **Desenvolver ferramentas de apresentação de dados relevantes a partir da interação dos estudantes** como significativo para o processo de desenvolvimento de objetos de aprendizagem. Desse modo, torna-se importante criar funcionalidades que permitam que o professor possa acompanhar em tempo real como os estudantes estão interagindo com o OA. A forma que esses dados são apresentados aos docentes deve ser clara e intuitiva, no sentido de trazer significados relevantes sobre o estado de aprendizagem dos estudantes. A partir dessas informações, o docente pode construir seu modelo avaliativo, bem como redirecionar sua prática docente para desenvolver soluções para situações de baixa aprendizagem e identificar e/ou reforçar aspectos que estejam contribuindo para a aprendizagem dos estudantes.

A partir das discussões realizadas na seção 3.3, observou-se que as pesquisas que orientam acerca da construção de objetos de aprendizagem que levem em consideração teorias que interferem nos processos de apreensão de conceitos matemáticos são reduzidas e, de modo geral, apresentam diretrizes pouco informativas, no sentido de explicitar elementos conceituais que favoreçam a aprendizagem em matemática. Neste estudo de tese, foi proposto um conjunto de princípios e suas caracterizações que de alguma maneira indicam como aportes teóricos relacionados ao aprender matemática e a recursos da tecnologia podem ser implementados durante o processo de desenvolvimento de objetos de aprendizagem em matemática. Tais princípios foram testados a partir do desenvolvimento do objeto de aprendizagem CombInter e aprimorados a partir das fases de aperfeiçoamento e validação em que profissionais e estudantes puderam analisar, utilizar o CombInter e contribuir com apontamentos oriundos da prática.

8 CONCLUSÕES

Conforme discutimos neste trabalho, o desempenho dos estudantes em matemática no Brasil não é satisfatório, principalmente ao final do ensino médio. Alguns conteúdos considerados complexos, como, por exemplo, análise combinatória, a situação é agravada em termos de aprendizagem. Considerando os objetos de aprendizagem como recursos promissores para amenizar os problemas de aprendizagem em combinatória, iniciaram-se investigações acerca de metodologias/diretrizes/princípios/critérios para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem em matemática, bem como sobre a existência de outros objetos de aprendizagem desenvolvidos para o ensino e aprendizagem de matemática, inclusive de análise combinatória, com objetivo de entender a forma que tais recursos são construídos e validados.

Verificou-se que apenas dois trabalhos indicaram orientações sobre como construir objetos de aprendizagem que levem em consideração teorias que contribuem para apreensão de conceitos matemáticos. As diretrizes eram pouco informativas, no sentido de explicitar elementos conceituais que favorecessem a aprendizagem em matemática. Além disso, algumas lacunas puderam ser identificadas no processo de desenvolvimento de OA para o ensino de matemática, principalmente, no que se refere à inclusão de uma abordagem teórica relacionada à matemática, bem como à falta de verificações efetivas de aprendizagem na prática real escolar.

Desse modo, foi construído um conjunto de princípios teóricos a partir das teorias dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986, 1996) e da teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2003, 2012), que nos indicaram como se dá a apreensão de conceitos matemáticos; da identificação e compreensão de quais principais dificuldades que os alunos e professores possuem ao estudar análise combinatória e que estratégias estão se mostrando promissoras, que nos permitiram construir situações compatíveis com esse contexto escolar; da metodologia de resolução de problemas e dos processos de andaimes, que nos possibilitaram criar situações de intervenção relevantes de aprendizagem; e dos aspectos importantes relacionados aos objetos de aprendizagem, que nos permitiram compreender como está se dando o desenvolvimento de OAs em matemática e quais aspectos influenciam para um maior sucesso da prática de ensino por meio dessas ferramentas.

Tais princípios foram utilizados como requisitos pedagógicos durante o desenvolvimento do objeto de aprendizagem CombInter e, a partir das etapas de aperfeiçoamento e validação, em que professores de matemática, desenvolvedores e estudantes utilizaram o CombInter, puderam vivenciar os princípios a partir das funcionalidades do

CombInter de tal modo que foi possível ratificá-los, no sentido de perceber que os princípios de fato foram utilizados no processo de desenvolvimento do OA, favorecer diferentes interpretações, bem como elaborar novos princípios oriundos da prática. Ao fim desse processo, foram desenvolvidos os princípios:

- **Oportunizar aos estudantes a abordagem dos conceitos matemáticos:** Este princípio está relacionado a como os conceitos matemáticos devem ser abordados no objeto de aprendizagem a ser desenvolvido (p. 119; p. 130; p. 197).
- **Propiciar aos estudantes a interação com uma diversidade de situações-problema relacionadas aos conceitos estudados:** Indica que características devem possuir as situações-problema a serem discutidas no OA, e como devem ser apresentadas em termos de estrutura, nível, quantidades, etc. (p. 120; p. 131; p. 198).
- **Desenvolver mecanismos de interação que permitam o estudante manipular e obter respostas com feedbacks em tempo real:** Refere-se ao desenvolvimento de recursos interativos que explicitem os invariantes conceituais relacionados a uma situação-problema com auxílio de feedbacks (p. 121; p. 132; p. 200).
- **Estabelecer questionamentos que permitam auxiliar os estudantes na resolução de problemas:** Refere-se ao desenvolvimento de recursos que tenham como base a ação de questionar, isto é, que contenham elementos que provoquem reflexões relacionadas aos invariantes dos conceitos envolvidos com a situação-problema, com objetivo de desencadear processos mentais que levem à compreensão e ao desenvolvimento de estratégias de solução (p. 121; p. 133; p. 201).
- **Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações-problema:** Está relacionado ao desenvolvimento de recursos em forma de auxílios gradativos que envolvem diferentes aspectos da resolução de situações-problema (p. 122; p. 136; p. 202). Eles podem ser: **andaimes de compreensão**, que auxiliam para que o estudante identifique e reflita sobre os dados do problema, a incógnita, a condicionante e as formas de representação (p. 122; p. 136; p. 202); **andaimes para formulação de um plano**, que são suposições que envolvem a relação entre os dados e a condicionante com os invariantes do conceito envolvido, que podem contribuir para a elaboração de um plano de solução (p. 122; p. 137; p. 203); **andaimes para execução do plano**, que se referem à apresentação da solução da situação-problema, de modo que o estudante perceba como as relações entre dados, condicionantes, incógnitas, os invariantes do conceito e formas de representação foram estabelecidos em um plano de solução bem-sucedido (p. 123; p. 137;

p. 204); **andaimes para o retrospecto**, que auxiliam o estudante a refletir sobre todos os processos envolvidos na solução do problema, tais como, o conceito envolvido e seus invariantes, as estratégias tomadas, além de perceber possíveis variações do problema (p. 123; p. 138; p. 204).

- **Considerar os aspectos relevantes que interferem na aprendizagem dos conceitos a serem trabalhados:** Refere-se ao estudo das perspectivas pedagógicas do conceito envolvido, tais como as metodologias bem-sucedidas, principais dificuldades tanto de professores como de alunos, que podem contribuir para aproximar as decisões de desenvolvimento do OA do contexto real vivenciado por alunos e professores (p. 121; p. 132; p. 205).
- **Desenvolver ferramentas de apresentação de dados relevantes a partir da interação dos estudantes:** Refere-se ao desenvolvimento de recursos que permitam que o professor possa acompanhar em tempo real como os estudantes estão interagindo com o OA, a partir de dados relevantes sobre o estado de aprendizagem dos estudantes (p. 208).

Com isso, foi possível atingir o objetivo deste trabalho, uma vez que foi elaborado um conjunto de princípios teóricos que orientam o desenvolvimento de objetos de aprendizagem para o ensino de matemática.

Como resultado prático desta pesquisa, no sentido de contemplar a comunidade de professores e estudantes com uma alternativa de recurso para o ensino e aprendizagem de análise combinatória, foi desenvolvido o objeto de aprendizagem CombInter – Combinatória Interativa. O CombInter possibilita o estudo dos principais conceitos de combinatória de uma maneira interativa, por meio de dicas, simulações e feedbacks instantâneos que proporcionam a compreensão do problema, o desenvolvimento de estratégias de solução e, consecutivamente, a aprendizagem dos conceitos.

O CombInter foi construído seguindo as etapas da metodologia de desenvolvimento de objetos de aprendizagem INTERA (Braga; Pimentel; Dotta, 2015), a saber:

- **Contextualização:** Foram definidos o público-alvo, as dificuldades envolvidas para aprendizagem do conteúdo envolvido, e de que forma o desenvolvimento do OA iria contribuir para que ocorresse uma melhor aprendizagem (p. 127).
- **Requisitos:** Foi possível entender o que deveria ser feito e como seria a caracterização do OA, de modo que alcançasse seu objetivo (p. 130). Esta etapa se subdividiu em **Requisitos didático-pedagógicos**, os quais foram estabelecidos a partir dos princípios teóricos elaborados, e tiveram o objetivo de representar os conceitos e conteúdos que seriam

abordados, bem como a metodologia e as estratégias pedagógicas em que o OA seria inserido (p. 130); **Requisitos funcionais**, que estão relacionados à definição das funcionalidades do CombInter (p. 145); e **Requisitos não funcionais**, que se referem às propriedades, restrições e qualidade do OA como um todo (p. 147).

- **Arquitetura:** Foi realizada uma análise dos requisitos que resultou no esboço do OA, na definição das tecnologias mais adequadas para o seu desenvolvimento, nos padrões que foram adotados e nos componentes de reuso (p. 148). Esta etapa se subdividiu em **esboço do OA**, que foi composto por mapa conceitual, mapa navegacional e protótipo do OA, de modo a facilitar a compreensão da equipe de desenvolvimento (p. 149); **decomposição do OA**, que está relacionada à definição de mecanismos no OA de modo que seus componentes pudessem ser reutilizáveis (p. 151); e **definições técnicas**, relacionadas à plataforma *Figma*, versão gratuita, para o desenvolvimento de protótipo de alta fidelidade, à linguagem de programação *TypeScript*, ao *Next.js*, que foi utilizado para o desenvolvimento do back-end e front-end, ao *PostgreSQL*, que foi utilizado para o gerenciamento do banco de dados e, ao *Prisma*, que foi utilizado para o aumento da produtividade durante o desenvolvimento da aplicação em seu fluxo de trabalho com banco de dados (p. 152).
- **Desenvolvimento:** A construção do OA foi realizada a partir da contextualização, requisitos e a arquitetura definidos (p. 156).
- **Testes e qualidade:** Foi definido um plano de testes, envolvendo o cumprimento dos requisitos, o funcionamento dos elementos da interface do OA e a realização de testes técnicos e de conteúdo (p. 157).
- **Disponibilização:** O OA e sua documentação foram disponibilizados na página <https://sites.google.com/view/combinter/> (p. 158).
- **Avaliação:** Foram definidas formas de avaliação qualitativas e quantitativas com objetivo de entender se e como o CombInter contribuiu para aprendizagem dos conceitos combinatórios (p. 158).

Desse modo, foi possível atingir o primeiro objetivo específico deste estudo, uma vez que foi desenvolvido um objeto de aprendizagem para o ensino de matemática que explorasse conceitos relacionados à análise combinatória.

Após o desenvolvimento do OA, um grupo de professores de matemática da educação básica e do ensino superior, desenvolvedores, estudantes do ensino médio e licenciandos em matemática realizaram testes no CombInter e puderam avaliá-lo por meio de uma escala que ia de 1 (discordância total) a 5 (concordância total), a partir de categorias que envolviam critérios

de usabilidade, interface e recursos interativos do CombInter, prover auxílio aos usuários, foco pedagógico e conteúdo matemático (p. 159). Para cada categoria, as seguintes médias foram obtidas:

- **Usabilidade:** Professores - 4,10; Desenvolvedores - 4,34; Estudantes: 3,79.
- **Interface e recursos interativos do CombInter:** Professores - 4,42; Desenvolvedores - 4,36; Estudantes - 4,19.
- **Prover auxílio aos usuários:** Professores - 4,56; Desenvolvedores - 4,50; Estudantes: 4,53.
- **Foco pedagógico:** Professores - 4,66; Desenvolvedores - 4,66; Estudantes - 4,48.
- **Conteúdo matemático:** Professores - 4,69; Desenvolvedores - 4,70.

Podemos concluir que o CombInter foi bem avaliado em relação aos aspectos técnicos, de conteúdo e, principalmente, no que se refere ao seu potencial em fornecer auxílios aos estudantes e apresentar informações sobre as características do OA, o que nos permitiu atingir o segundo objetivo específico desta pesquisa.

Após o período de testes, o CombInter foi utilizado no contexto de sala de aula de matemática. A partir dessa vivência, professor e estudantes destacaram como as funcionalidades do CombInter contribuíram para apreensão dos conceitos combinatórios:

- **Conceitos:** Modelados a partir do princípio “Oportunizar aos estudantes a abordagem dos conceitos matemáticos”, contribuiu para compreensão, uma vez que, na abordagem dos conceitos, foi estabelecida uma gradação em relação ao nível dos exemplos; promovida uma diversidade de representações simbólicas durante a discussão dos conceitos (enunciado dos exemplos e soluções); e disponibilizados exemplos resolvidos diversos em termos de contexto e propriedades conceituais (p. 186).
- **Simulações:** Modeladas a partir do princípio “Desenvolver mecanismos de interação que permitam o estudante manipular e obter respostas com feedbacks em tempo real”, permitiram que os estudantes testassem as opções de contagem de acordo com suas interpretações iniciais acerca do problema. Nesse processo, foi possível construir uma compreensão do problema compatível com o enunciado, uma vez que os invariantes dos conceitos eram explicitados durante a interação, estimulando um processo de tentativa e erro que proporcionava testar agrupamentos compatíveis e as possíveis relações entre esses agrupamentos (p. 187).
- **Dicas:** Modeladas a partir do princípio “Estabelecer questionamentos que permitam auxiliar os estudantes na resolução de problemas”, contribuíram para um processo reflexivo constante, a partir da relação entre os fatores conceituais relevantes para compreensão do

problema e elaboração de estratégias de solução, e os condicionantes trazidos pelo problema. Além disso, permitiam aos estudantes identificar os seus erros/acertos e entendê-los de acordo com cada aspecto conceitual inerente ao problema, uma vez que a maioria das dicas eram realizadas em forma de questionamento (p. 187).

- **Feedbacks:** Modelados a partir do princípio “Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações-problema”, contribuíram para saber se houve um acerto ou erro e entender os motivos que levaram a isso, no sentido de conscientização dos processos mentais. E isso de forma não generalizada (por exemplo, ao errar o problema), mas de forma específica (como nas simulações e nas dicas), uma vez que permitiu ao estudante identificar com maior critério os aspectos conceituais que o estudante havia internalizado e os que precisava aprender (p. 189).
- **Soluções:** Modeladas a partir do princípio “Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações-problema”, puderam explicitar e ratificar os processos conceituais apresentados nas simulações e dicas, de modo que os estudantes pudessem perceber as suas funções durante a construção de um ou mais planos de solução. Além disso, o estudante pode comparar a sua solução com a do CombInter, observando as estratégias tomadas, bem como tendo acesso a mais de uma forma de solucionar o problema (p. 189).
- **Veja mais:** Modelado a partir do princípio “Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações-problema”, contribuiu para que o estudante tivesse um novo olhar acerca do problema principal, reavaliando suas estratégias anteriores – revisitando simulações, dicas e soluções – para que, após alguns ajustes, pudessem ser utilizadas em um novo problema. Contribuiu, também, para que o estudante tomasse a consciência de que um problema pode ser observado sob diversos aspectos e critérios, revelando diversos modos de pensar acerca do mesmo conceito (p. 190).

Desse modo, percebe-se que os princípios teóricos foram bem-sucedidos, no sentido de proporcionar a caracterização das funcionalidades do CombInter de tal modo que favorecesse a aprendizagem dos conceitos envolvidos, o que nos possibilitou alcançar o terceiro objetivo específico deste estudo.

Além das funcionalidades enfatizadas, professor e estudantes também destacaram aspectos relacionados à abordagem de aula definida pelo professor e a mudanças comportamentais dos estudantes causados pela mediação envolvida com o CombInter, como processos que também influenciaram a compreensão dos conceitos:

- **Aula expositiva:** O professor planejou sua aula a partir da abordagem conceitual apresentada pelo CombInter. Os estudantes destacaram o nível de detalhe abordado pelo professor, a discussão de exemplos evidenciando os principais invariantes do conceito, e questionamentos que proporcionavam discussões entre alunos e o professor (p. 176; p. 193).
- **Dinâmica de atividades para casa:** Foi bem recebida pelos estudantes e, de certo modo, propiciou uma maior compreensão dos conceitos e um maior engajamento durante as aulas (p. 176; p. 193).
- **Formação de grupos de estudos:** Como o sistema estava sempre disponível e possibilitava constantes reflexões, a discussão em grupos foi estimulada, evidenciando o papel interpretativo no desenvolvimento de esquemas compatíveis com as atividades. Nesse processo, as discussões em grupos foram fundamentais para compreender como e porque determinados esquemas foram compatíveis ou não com determinados problemas combinatórios (p. 194).
- **Estudo independente:** Foi potencializado pela disponibilidade de auxílios e níveis gradativos de dificuldade das atividades (p. 194).
- **Maior participação dos estudantes:** A participação dos estudantes se deu de forma ampla, seja de estudantes que tinham uma afinidade em matemática, seja de estudantes que tinham dificuldades. A aula com CombInter proporcionou uma democratização do saber matemático envolvido, uma vez que tal conhecimento não ficou restrito a poucos estudantes (p. 195).
- **Aumento de questionamentos de ordem superior:** Os estudantes passaram a fazer questionamentos ao professor com maior significado – com nuances conceituais mais elaboradas –, uma vez que, o CombInter permitia sanar incompreensões relacionadas ao conceito, bem como à interpretação dos problemas, principalmente em atividades de níveis iniciante e intermediário (p. 195).
- **Evolução qualitativa da escrita das soluções:** As soluções, que antes eram marcadas apenas pela presença do cálculo numérico, passaram a trazer todo um processo construtivo, evidenciando os invariantes dos conceitos compatíveis com o enunciado do problema, justificando as operações realizadas, isto é, passou-se a priorizar uma caracterização do cálculo relacional (p. 196).

Além da abordagem da aula com o CombInter, a partir de comparações entre dois modelos de aula de combinatória (uma com o CombInter e outra sem o CombInter), observou-se que:

- A aula com o CombInter proporcionou que um maior número de estudantes obtivesse maiores níveis de compreensão combinatória, uma vez que contribuiu para que os alunos avançassem de questões respondidas incorretas para acertos parciais, além de aumentar o número de respostas com acerto total (p. 181);
- A aula com o CombInter proporcionou um desempenho significativo superior no que se refere à compreensão de uma maior diversidade de raciocínios combinatórios (p. 182);
- Nos problemas do tipo permutação com elementos repetidos houve avanços significativos no desempenho dos estudantes do grupo de estudantes que usou o CombInter quando comparado com os estudantes que não usaram o software (p. 183);
- As aulas de combinatória com e sem o CombInter proporcionaram uma melhora significativa no desempenho dos estudantes (p. 184);
- A partir do estudo de tamanho de efeito, a aula de combinatória com o CombInter teve um maior impacto no desempenho dos estudantes (p. 185);
- A aula de combinatória com o CombInter não apresentou uma melhora significativa no desempenho dos estudantes quando comparado a uma aula sem o CombInter (p. 185);

Apesar da não significância apontada no último item, quando consideramos que uma maior quantidade de estudantes do grupo experimental migrou de respostas incorretas e acertos parciais para acertos totais, o desempenho dos estudantes do grupo experimental foi superior significativamente em uma maior diversidade de raciocínios combinatórios quando comparado ao grupo controle, o maior tamanho de efeito da intervenção utilizando o CombInter durante as aulas de combinatória e a maior média geral do pós-teste do grupo de estudantes que teve aula com o CombInter quando comparado com o pós-teste do grupo que não utilizou o CombInter, inferimos que a aula com CombInter proporcionou uma maior aprendizagem de combinatória em relação a uma aula sem o CombInter.

Com isso, foi possível alcançar o quarto objetivo específico deste estudo, uma vez que se percebeu os aspectos que o CombInter interferiu no ensino, bem como sua influência na aprendizagem de combinatória.

A partir das discussões, comprova-se a hipótese deste estudo, uma vez que, é possível, a partir de aportes teóricos que auxiliam no processo de apreensão dos conceitos matemáticos, construir objetos de aprendizagem para o ensino de matemática eficazes para o ensino de análise combinatória, e que contribuam para uma melhora do ensino e aprendizagem.

O conjunto de princípios teóricos produzidos a partir deste estudo vem a somar com as atuais discussões acerca do desenvolvimento de objetos de aprendizagem, no sentido de

estreitar a relação entre desenvolvedores de OAs para o ensino de matemática e as teorias que podem auxiliar na apreensão de conceitos matemáticos. Foi adotada uma abordagem descritiva em que se detalha como os aspectos relevantes relacionados aos conceitos matemáticos podem ser trabalhados em uma perspectiva de fundamentar os requisitos pedagógicos de um OA, abordagem ainda ausente na literatura. Neste estudo, foi possível observar como os princípios teóricos iniciais foram construídos e foram implementados no processo de desenvolvimento do CombInter, e de que maneira tais princípios repercutiram, em forma de objeto de aprendizagem, no ensino e aprendizagem dos conceitos de combinatória.

O presente trabalho tem suas limitações, o que abre espaço para novas investigações, tais como: realizar novas avaliações do CombInter em sala de aula de matemática, com maior tempo, quantitativo maior de professores e diferentes sistemas de ensino; e desenvolver novos objetos de aprendizagem para novos conteúdos matemáticos a partir dos princípios teóricos construídos, contribuindo para o seu refinamento e surgimento de novos princípios.

É evidente que construir objetos de aprendizagem para matemática de qualidade é um desafio. O desenvolvimento de princípios teóricos relacionados às teorias que auxiliam na construção do saber matemático, como demonstrado neste estudo, é uma alternativa proveitosa que têm potencial de contribuir para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem condizentes com as características do saber envolvido e as reais necessidades de estudantes e professores, de tal modo que as chances de aprendizagem sejam potencializadas, contribuindo para que o saber matemático seja maior difundido, em especial, entre os sujeitos que possuem maiores dificuldades de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

- AGUIAR, E. V. B.; FLÔRES, M. L. P. Objetos de aprendizagem: conceitos básicos. *In*: TAROUÇO, L. M. R.; COSTA, V. M.; AVILA, B. G.; BEZ, M. R. **Objetos de aprendizagem: teoria e prática**. Porto Alegre: Evangraf, 2014. p. 12-28. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/102993>.
- AGUIAR, I. P. **O uso de técnicas de gamificação como auxílio a resolução de problemas no campo da análise combinatória**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2019. Disponível em: <http://repositorio.ufrr.br:8080/jspui/handle/prefix/333>.
- ALVES JUNIOR, A.; MEIRELES, L. S.; FIGUEIRA, L. A. R.; CARMO, V. M. M.; MARQUES-NETO, H. T.; XAVIER, L. Entendendo o engajamento das comunidades front-end e back-end nos repositórios do GitHub. *In*: XII Workshop de Visualização, Evolução e Manutenção de Software, 2022, virtual. **Anais [...]**. Virtual, 2022. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/vem/article/view/22325>.
- AMBROZI, L. **Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ucs.br/xmlui/handle/11338/3450>.
- ANDERSON, J. Mathematics Curriculum Development and the Role of Problem Solving. *In*: ACSA Conference, 2009.
- ANTONIDES, J.; BATTISTA, M. T. A learning trajectory for enumerating permutations: applying and elaborating a theory of levels of abstraction. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 68, 101010, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101010>.
- ARAÚJO, G. R.; SANTOS, J. A. F. L. Materiais manipuláveis: recurso para a resolução de problemas de produto cartesiano por uma aluna com deficiência visual. **Educação Matemática em Revista - RS**, v. 2, n. 20, p. 157–162, 2019.
- ASSIS, A. B.; PESSOA, C. A. S. Os três porquinhos e o lobo mal: literatura infantil e o ensino de combinatória. **Revista Educação Online**, v. 13, n. 28, p. 60–82, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.36556/eol.v13i28.435>.
- ÁVILA, B. G.; TAROUÇO, L. M. R. Projeto instrucional de objetos de aprendizagem. *In*: TAROUÇO, L. M. R.; COSTA, V. M.; ÁVILA, B. G.; BEZ, M. R.; SANTOS, E. F. (Orgs.). **Objetos de aprendizagem: teoria e prática**, CINTED/UFRGS, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/102993>.
- BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-based research: putting a stake in the ground. **Journal of the Learning Sciences**, v. 13, n. 1, p. 1-14, 2004. Disponível em: https://doi.org/10.1207/s15327809jls1301_1.
- BARROS, F. A. B.; JUSTULIN, A. M. Resolução de problemas do campo conceitual aditivo: uma análise das dificuldades e estratégias de alunos do 5º ano do ensino fundamental.

REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura, v. 15, p. 230-251, 2020.

Disponível em: <http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2020.n0.p230-251.id241>.

BASTOS, A. C.; LOPES, J. R.; VICTER, E. F. Reflexões acerca do ensino da análise combinatória no ensino médio. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 3, p. 330–344, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.26843/rencima.v11i3.2491>.

BASTOS, T. A. **Modelagem na educação matemática para o desenvolvimento de conceitos de análise combinatória em uma escola particular no Vale do Rio Doce em Minas Gerais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2019. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/items/ba246f46-dc0f-4ba1-9103-d6ffbbca471d>.

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial Reasoning and its Assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. B.; SEGAARD, M. (Orgs.). **The assessment challenge in statistics education**, p. 239-252, 1997.

BATISTA, M. S. **Princípio fundamental da contagem e modelagem matemática nos anos finais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/220402>.

BELLAND, B. R.; KIM, C.; HANNAFIN, M. J. A Framework for Designing Scaffolds That Improve Motivation and Cognition. **Educational Psychologist**, v. 48, n. 4, p. 243-270, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/00461520.2013.838920>.

BENNETT, S.; LOCKYER, L.; AGOSTINHO, S. Investigating how learning designs can be used as a framework to incorporate learning objects. In: ATKINSON, R.; MCBEATH, C.; JONAS-DWYER, D.; PHILLIPS, R. (Orgs.). **Beyond the comfort zone**: Proceedings of the 21st ASCILITE Conference. Perth, 5-8 December, p. 116-122, 2004. Disponível em: <https://www.ascilite.org/conferences/perth04/procs/pdf/bennett.pdf>.

BIKMAZ, F. H.; ÇELEBİ, Ö.; ATA, A.; ÖZER, E.; SOYAK, Ö.; REÇBER, H. Scaffolding Strategies Applied by Student Teachers to Teach Mathematics. **The International Journal of Research in Teacher Education**, v. 1, n. 3, p. 25-36, 2010. Disponível em: <https://dergipark.org.tr/en/pub/ijrte/issue/8556/106211>.

BORBA, M. C. Computadores, Representações Múltiplas e a Construção de Ideias Matemáticas. **Bolema**, Rio Claro/SP, v. 9, edição especial 3, p. 83-101, 1994. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10799/7174>.

BORBA, R. E. S. R. O raciocínio combinatório na educação básica. In: X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador, 2010. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/sbemrasil/index.php/anais/enem>.

BORBA, R. E. S. R. Antes que seja tarde: aprendendo combinatória desde o início da escolarização. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 7, n. 1, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/3883>.

BORBA, R. E. S. R. Crianças de Anos Iniciais Levantando Espaços Amostrais: Relações Entre Pensamentos Combinatório e Probabilístico. **JIEEM**, v. 10, n. 2, p. 86–92, 2017.

BOYLE, T. Generative learning objects (GLOs): design as the basis for reuse and repurposing. 2009.

BRAGA, J. C.; DOTTA, S.; PIMENTEL, E.; STRANSKY, B. Desafios para o desenvolvimento de objetos de aprendizagem reutilizáveis e de qualidade. In: XXXII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2012, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba, 2012.

BRAGA, J.; KELLY, R. Requisitos de um Objeto de Aprendizagem. In: BRAGA, J. (org.). **Objetos de aprendizagem**, volume 2: metodologia de desenvolvimento. Santo André: Editora da UFABC, 2015a. 163 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRAGA, J.; KELLY, R. Testes e Qualidade. In: BRAGA, J. (Org.). **Objetos de aprendizagem**, volume 2: metodologia de desenvolvimento. Santo André: Editora da UFABC, 2015b. 163 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRAGA, J.; KELLY, R.; NISHIDA, A, K. Arquitetura dos Objetos de Aprendizagem. In: BRAGA, J. (Org.). **Objetos de aprendizagem**, volume 2: metodologia de desenvolvimento. Santo André: Editora da UFABC, 2015. 163 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRAGA, J.; MENEZES, L. Introdução aos Objetos de Aprendizagem. In: BRAGA, J. (org.). **Objetos de Aprendizagem**, volume 1: introdução e fundamentos. Santo André: Editora da UFABC, 2014. 148 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v1.pdf>.

BRAGA, J.; PIMENTEL, E.; DOTTA, S. Processos e Metodologias para o Desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem. In: BRAGA, J. (org.). **Objetos de aprendizagem**, volume 2: metodologia de desenvolvimento. Santo André: Editora da UFABC, 2015. 163 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRAGA, J.; PIMENTEL, E.; MENEZES, L. Avaliação Pedagógica de um Objeto de Aprendizagem. In: BRAGA, J. (org.). **Objetos de aprendizagem**, volume 2: metodologia de desenvolvimento. Santo André: Editora da UFABC, 2015. 163 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRAGA, J.; PONCHIO, R. Contextualização: O Início da Concepção e um Novo Objeto de Aprendizagem. In: BRAGA, J. (org.). **Objetos de aprendizagem**, volume 2: metodologia de desenvolvimento. Santo André: Editora da UFABC, 2015a. 163 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRAGA, J.; PONCHIO, R. Disponibilização de um Objeto de Aprendizagem. In: BRAGA, J. (org.). **Objetos de aprendizagem**, volume 2: metodologia de desenvolvimento. Santo André: Editora da UFABC, 2015b. 163 p. Disponível em: <https://pesquisa.ufabc.edu.br/intera/wp-content/uploads/2015/12/objetos-de-aprendizagem-v2.pdf>.

BRAGA, J. B.; PIMENTEL, E.; DOTTA, S. Metodologia INTERA para o desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem. In: II Congresso Brasileiro de Informática na Educação (CBIE 2013), XXIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE 2013), 2013, Campinas. **Anais [...]**. Campinas, 2013, p. 306-315. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/sbie/article/viewFile/2509/2167>.

BRAGA, M. M. **Design de software educacional baseado na teoria dos campos conceituais**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/2616>.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática: 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Matemática: 5ª a 8ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros curriculares nacionais +**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2019.

BRASIL. **Sistema de Avaliação da Educação Básica**. Brasília: MEC, 2022.

BRASIL. Lei Nº 14.533, de 11 de janeiro de 2023. Institui a Política Nacional de Educação Digital. Brasília, DF: Diário Oficial da União, 2023. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_Ato2023-2026/2023/Lei/L14533.htm.

BRITO, C. E.; ALMEIDA, L. M. A Utilização da Gamificação na Aprendizagem de Análise Combinatória: possibilidades atreladas ao uso do H5P e do Wordwall. **Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática**, v. 6, n. 1, p. 1-25, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.34019/2594-4673.2022.v6.38185>.

BRUSH, T. A.; SAYE, J. W. A Summary of Research Exploring Hard and Soft Scaffolding for Teachers and Students Using a Multimedia Supported Learning Environment. **The Journal of Interactive Online Learning**, v. 1, n. 2, Fall 2002. Disponível em: <https://www.ncolr.org/jiol/issues/pdf/1.2.3.pdf>.

BURD, L. **Desenvolvimento de Software para Atividades Educacionais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999. Disponível em: https://web.media.mit.edu/~leob/tese_total.pdf.

CAETANO, G. A. **O uso do livro interativo multimídia na aprendizagem de matemática em uma escola primária**: impacto no desempenho dos alunos da 7ª classe. Tese (Doutorado

em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/188153>.

CAI, J.; LESTER, F. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? **Boletim GEPEM**, n. 60, p. 147-162, 2012.

CAIO, E. A. G. **A construção do jogo Kogoca na interface entre avaliação em larga escala e aprendizagem matemática**. Dissertação (Mestrado em Docência para a Educação Básica – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2017. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/entities/publication/4303198a-ca2d-4df6-8906-c551d15fb71d>.

CAMPOS, C. E.; IGLIORI, S. B. C. Teses e dissertações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória: perspectivas investigativas. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 16, p. 1–20, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2021.e79022>.

CĂPRIORĂ^A, D. Problem Solving - Purpose and Means of Learning Mathematics in School. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, n. 191, p. 1859-1864, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.04.332>.

CARNEIRO, S. O. **A metacognição associada a aprendizagem significativa**: estudo envolvendo o conteúdo de análise combinatória. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2019. Disponível em: <https://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/2993>.

CHANG, H. Y. How to augment the learning impact of computer simulations? The designs and effects of interactivity and scaffolding. **Interactive Learning Environments**, v. 8, n. 25, p. 1083–1097, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10494820.2016.1250222>.

COELHO, L. D. O.; DIAS, M. S. S. Contribuições da metodologia análise de erro para o ensino e aprendizagem da análise combinatória no ensino médio. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 13, n. 2, p. 223–249, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.51359/2177-9309.2022.253725>.

COSTA; M.; ALLEVATO, N. S. G. A escrita de (futuros) professores de matemática na resolução de um problema sobre o volume do cilindro. **Revista Educação em Questão**, Natal, v. 49, n. 35, p. 127-152, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.21680/1981-1802.2014v49n35ID5907>.

COUTO, M. A. C. **Resolução de problemas de análise combinatória e aplicação na lousa digital**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro, São Gonçalo, 2019. Disponível em: <https://www.bdt.d.uerj.br:8443/handle/1/13919>.

D’AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**. SBEM. Brasília. Ano II. n. 2, p. 15-19. 1989. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/td/article/view/2651>.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Ed.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>.

ECHEVERRÍA, M. P. P. A solução de problemas em matemática. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 43-65.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 13-42.

ESTEVAM, E. J. G.; PAULEK, C. M.; BASNIAK, M. I.; SCALDELA, D.; FELIPE, N. A. Estratégias e procedimentos emergentes na resolução de questões de análise combinatória e o ensino exploratório de matemática. **JIEEM**, v. 12, n. 2, p. 221-233, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n2p221-233>.

FARIA, R. W. S. C. Tecnologias digitais e internet: implicações na sociedade, na educação e na educação matemática. **Colloquium Humanarum**, v. 14, n. 2, p. 87-98, 2017. Disponível em: <https://journal.unoeste.br/index.php/ch/article/view/1497>.

FARMER, R. A.; HUGHES, B. A situated learning perspective on learning object design. In: Fifth IEEE International Conference on Advanced Learning Technologies (ICALT'05), Kaohsiung, Taiwan, p. 72-74, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICALT.2005.24>.

FERNANDES, A. C.; FREIRE, R. S.; SOUSA, M. F.; MEDEIROS, M. D.; FILHO, J. A. C. Modelo para Qualidade de Objetos de Aprendizagem: da sua Concepção ao Uso em Sala de Aula. In: XX Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2009, Florianópolis. **Anais [...]**. Florianópolis, 2009. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/sbie/article/viewFile/1182/1085>.

FERNANDES, D. Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática. **Educação e Matemática**, n. 3, p. 3-6, 1989.

FERREIRA, A. G.; ALMEIDA, F. E. L. Organizações matemáticas no ensino de combinatória. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 11, n. 25, p. 433-458, 2022. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/5170>.

FINO, C. N. Vygotsky e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP): três implicações pedagógicas. **Revista Portuguesa de Educação**, v. 14, n. 2, p. 273-291, 2001. Disponível: <https://www.redalyc.org/pdf/374/37414212.pdf>

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação em Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. 228p.

FLÔRES, M. L. P. **Metodologia para criar objetos de aprendizagem em matemática usando combinação de ferramentas de autoria**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/39669>.

FREITAS, J. L. M. Uma reflexão sobre crenças relativas à aprendizagem matemática. **Série-Estudos – Periódico do Mestrado em Educação da UCDB**, n. 11, p. 99-110, 2001.

FRIESEN, N. Three Objections to Learning Objects and E-learning Standards. *In*: MCGREAL, R. (org.). **Online Education Using Learning Objects**, London: Routledge, p. 59-70, 2004. Disponível em: <https://www.normfriesen.info/papers/objections.html>.

GADELHA, D. S.; BORBA, R. E. S. R.; MONTENEGRO, J. A. O uso de recursos didáticos na resolução de problemas combinatórios. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 419-441, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.18.419-441>.

GADELHA, D.; BORBA, R.; MONTENEGRO, J. A. SOFTWARE PIXTON©: uma proposta de recurso para a ilustração de possibilidades combinatórias. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 12, n. 3, p. 1-18, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.51359/2177-9309.2021.250198>.

GAROFALO, J.; LESTER, F. K. Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, n. 16, p. 163-176, 1985.

GEORGIEV, I.; ANDREEV, I. Methodical scheme for introduction of combinatorial compounds in mathematics education. **TEM Journal**, v. 10, n. 1, p. 414-420, 2021. Disponível em: <https://www.ceeol.com/search/article-detail?id=936148>.

GIESELER, L. C.; SCHNEIDER, B.; POSSAMAI, J. P.; ALLEVATO, N. S. G. A Proposição e Resolução de Problemas na aprendizagem de Matemática: possibilidades para o Ensino Superior. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 7, p. 1-18, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.35819/remat2021v7iespecialid5513>.

GONÇALVES; R. ALLEVATO, N. S. G. A Resolução de Problemas como proposta metodológica para a aprendizagem significativa das funções definidas por várias sentenças. **REPPE: Revista do Programa de Pós-Graduação em Ensino**, Cornélio Procópio, v. 2, n. 2, p. 27-47, 2018. Disponível em: <https://periodicos.uenp.edu.br/index.php/reppe/article/view/927>.

GONULAL, T.; LOEWEN, S. Scaffolding Technique. *In*: LIONTAS, J. I. (ed.). **The TESOL Encyclopedia of English Language Teaching**. 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/9781118784235.eelt0180>.

HAUGHEY, M.; MUIRHEAD, B. Evaluating learning objects for schools. **e-Journal of Instructional Science and Technology**, v. 8, n. 1, 2005. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ850358.pdf>.

HAZZAN, S. Fundamentos da matemática elementar 5: combinatória e probabilidade. *In*: IEZZI, G. **Fundamentos da matemática elementar**. São Paulo: Atual, 1977. 5 v.

HELLER, J. I.; HUNGATE, H. N. Implications for mathematics instruction of research on scientific problem solving. *In*: SILVER, E. A., **Teaching and learning mathematical**

problem solving: Multiple research perspectives, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, p. 83-112, 1985.

HERRINGTON, J.; MCKENNEY, S.; REEVES, T.; OLIVER, R. Design-based research and doctoral students: guidelines for preparing a dissertation proposal. In: MONTGOMERIE, C.; SEALE, J. (eds.). **Proceedings of World Conference on Educational Multimedia, Hypermedia and Telecommunications**, Chesapeake, VA: AACE, p. 4089-4097, 2007.

HUMMEL, H.; MANDERVELD, J.; TATTERSALL, C.; KOPER, R. Educational modelling language and learning design: new opportunities for instructional reusability and personalised learning. **International Journal of Learning Technology**, v. 1, n. 1, p. 111-126, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1504/IJLT.2004.003685>.

JACOBY, K. **O ensino de análise combinatória pautado na aprendizagem, nos trabalhos em grupo e na comunicação matemática**. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) – Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, 2019. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/3315>.

JOENK, I. K. Uma Introdução ao Pensamento de Vygotsky. **Revista Linhas**, v. 3, n. 1, 2002. Disponível em: <https://periodicos.udesc.br/index.php/linhas/article/view/1276>.

KAO, G. Yi-Ming; CHIANG, Chieh-Han; SUN, Chuen-Tsai. Customizing scaffolds for game-based learning in physics: Impacts on knowledge acquisition and game design creativity. **Computers & Education**, v. 113, p. 294-312, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.05.022>.

KAUR, B. Difficulties with problem solving in mathematics. **The Mathematics Educator**, v. 2, n. 1, p. 93-112, 1997. Disponível em: <https://repository.nie.edu.sg/server/api/core/bitstreams/e2e5008d-daec-492e-a39e-437151959a91/content>.

KEMCZINSKI, A.; COSTA, I. A.; WEHRMEISTER, M. A.; HOUNSELL, M. S.; VAHLICK, A. Metodologia para Construção de Objetos de Aprendizagem Interativos. In: 23º Simpósio Brasileiro de Informática na Educação (SBIE 2012), 2012. **Anais [...]**. 2012. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/rbie/index.php/sbie/article/view/1739>.

KENNEDY-CLARK, S. Research by design: design-based research and the higher degree research student. **Journal of Learning Design**, v. 6, n. 2, 2013. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1018597.pdf>.

KILPATRICK, J. A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. In: SILVER, E. A. **Teaching and learning mathematical problem solving:** Multiple research perspectives, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, p. 1-15, 1985.

KROLL, D. L.; MILLER, T. Insights from research on mathematical problem solving in the middle grades. In: OWENS, D. T. **Research ideas for the classroom:** Middle grades mathematics, NY: Macmillan, p. 58-77, 1993.

LAPPAN, G.; PHILLIPS, E. Teaching and learning in the Connected Mathematics Project. In: LEUTZINGER, L. (ed.), **Mathematics in the middle**. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics, p. 83-92, 1998.

LAPOLLI, F.; CRUZ, C. M.; MOTTA, C. L. R.; OLIVEIRA, C. E. T. Modelo de Desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem Baseado em Metodologias Ágeis e Scaffoldings. **Revista Brasileira de Informática na Educação**, v. 18, n. 2, p. 17-32, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.5753/rbie.2010.18.02.17>.

LARA, W. M. **Problemas de contagem no ensino fundamental**: uma experiência com tarefas exploratório-investigativas e registros de representação semiótica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/items/58b4c249-58b6-4ab8-b1c9-55e6e0fad15a>.

LEAL JUNIOR; L. C.; ONUCHIC, L. R. O Jogo da Imitação: A Resolução de Problemas na processualidade do ensino e da aprendizagem de Estatística e Matemática. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 26, p. 477-502, 2018. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/3549/5471>.

LEITE, M. D. **Design da interação de interfaces educativas para o ensino de matemática para crianças e jovens surdos**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/2667>.

LEITE, M. D.; PESSOA, C. A. S.; FERRAZ, M. C.; BORBA, R. E. S. R. Softwares educativos e objetos de aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática, 2009, Ijuí. **Anais [...]**. Ijuí, 2009. Disponível em: https://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cd_egem/fscommand/CC/CC_46.pdf.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E. MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. 1998. 2 v.

LIMA, E. T.; BORBA, R. E. S. R. Relações entre o raciocínio combinatório e o raciocínio probabilístico na EJA. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 7, n. 13, p. 33–60, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.33871/22385800.2018.7.13.33-60>.

LIMA, E. T.; BORBA, R. E. S. R. A influência da escolarização na resolução de problemas combinatórios e probabilísticos: um estudo realizado na educação de jovens e adultos. **EMR-RS**, v. 2, n. 20, p. 134-146, 2019. Disponível em: <https://www.sbemrasil.org.br/periodicos/index.php/EMR-RS/article/view/1746>.

LIMA JUNIOR, A. F. **GAMEALG** – ferramenta de apoio ao ensino introdutório da álgebra. Dissertação (Mestrado em Informática Aplicada) – Universidade de Fortaleza, Fortaleza, 2018. Disponível em: https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFOR_5de859cbe047d5cf85fb00f815dd133d.

LIMA, R. R. S. **Objeto de aprendizagem na forma de game como auxílio ao professor na promoção do ensino**. Dissertação (Mestrado em Educação Ciências e Matemática) -

Pontífica Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019. Disponível em: <https://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/8662>.

LOCKWOOD, E.; DE CHENNE, A. Reinforcing key combinatorial ideas in a computational setting: a case of encoding outcomes in computer programming. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 62, 100857, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100857>.

LOCKWOOD, E.; REED, Z. Defining and demonstrating an equivalence way of thinking in enumerative combinatorics. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 58, 100780, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100780>.

LOPES, L.; ALVES, S. Itens rotineiros e não rotineiros de análise combinatória: reflexões a partir da produção escrita de estudantes do Distrito Federal 1. In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá, 2019. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>.

LOSS, T.; SILVA, J. A. B.; MOTTA, M. S.; HUSSEIN, F. R. G. S. Tecnologias digitais e interdisciplinaridade: articulações entre matemática e arte por meio da utilização de objetos de aprendizagem. **ALEXANDRIA: R. Educ. Ci. Tec**, v. 15, n. 2, p. 147-164, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1982-5153.2022.e83009>.

LUDOVICO, F. M. **Objeto digital de ensino e aprendizagem à luz da teoria da complexidade**: outras práticas docentes na formação inicial de professores de línguas estrangeiras. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/230049>.

MAFUMIKO, F. **Micro-scale experimentation as a catalyst for improving the chemistry curriculum in Tanzania**. Doctoral thesis, University of Twente, Enschede, 2006. Disponível em: https://ris.utwente.nl/ws/files/6119658/thesis_Mafumiko.pdf.

MAGINA, S. M. P.; SANTOS, A.; MERLINI, V. L. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciênc. Educ.**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1516-73132014000200016>.

MARGOLIS, A. A. Zone of Proximal Development, Scaffolding and Teaching Practice. **Cultural-Historical Psychology**, v. 16, n. 3, p. 15-26, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.17759/chp.2020160303>.

MARTINS, G. G. **Ensino de análise combinatória**: um estudo das representações de professores de matemática do ensino médio público de São Mateus. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufes.br/items/cf79cac9-f62f-41fe-a2ef-8bc57c4a4c4d>.

MARTINS, G. V.; BORBA, R. E. S. R. Do prescrito ao apresentado: a combinatória nos currículos de anos iniciais da EJA. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 36, p. 1-22, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.46312/pem.v14i36.12324>.

MARTINS, G. V.; BORBA, R. E. S. R. Os currículos de matemática moldados, em ação e realizados: uma análise da combinatória na educação de jovens e adultos. **Revista**

Paranaense de Educação Matemática, v. 11, n. 24, p. 62–82, 2022. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6724>.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 52-67, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.24116/emd.v3n7a03>.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEBA – Educação e Contemporaneidade**, v. 23, n. 42, p. 23-36, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.21879/faeaba2358-0194.2014.v23.n42.p23-36>.

MATTAR, J.; RAMOS, D. K. **Metodologia da pesquisa em educação**: Abordagens Qualitativas, Quantitativas e Mistas. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2021.

MAULANO, F. E. **Etnoinformática na educação**: integração do objeto de aprendizagem N°SAMAT na 2ª classe do ensino básico para aprendizagem de aritmética em Moçambique. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2018. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/182558>.

MAYER, R. E. The psychology of mathematical problem solving. In: LESTER, F. K.; GAROFALO, J. **Mathematical problem solving**: Issues in research, Philadelphia: The Franklin Institute Press, p. 1-13, 1982.

MENDES, R. M.; SOUZA, V. I.; CAREGNATO, S. E. A propriedade intelectual na elaboração de objetos de aprendizagem. In: V Encontro Nacional de Ciência da Informação, 2004, Salvador. **Anais [...]**. Salvador/BA: 2004. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/548>.

MENDONÇA, M. C. Resolução de problemas pede (re)formulação. In: ABRANTES, P.; PONTE, J. P.; FONSECA, H.; BRUNHEIRA, L. **Investigações matemáticas na aula e no currículo**. Lisboa: Grupo “Matemática Para Todos – investigações na sala de aula” (CIEFCUL) e Associação dos Professores de Matemática, p. 15-33, 1999.

MENEZES, V. I. **E-numerando**: desenvolvimento e aplicação de objetos de aprendizagem digital para o ensino de números naturais. Dissertação (Mestrado Profissional em Docência para a Educação Básica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Bauru, 2022. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/entities/publication/402361f0-6bc1-42d5-856b-d7cecb24a0ca>.

MONTENEGRO, J. A. **Identificação, conversão e tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias**. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/32446>.

MONTENEGRO, J. A.; BORBA, R. E. S. R.; BITTAR, M. Representações intermediárias na aprendizagem de situações combinatórias. **Educacao & Realidade**, v. 45, n. 1, 2020. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/educacaoerealidade/article/view/87693>.

MORENO, R. Decreasing cognitive load in novice students: Effects of explanatory versus corrective feedback in discovery-based multimedia. **Instructional Science**, 32, 99e113, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/B:TRUC.0000021811.66966.1d>.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. 338 p.

MOTA, M. M. C. **O uso de objetos de aprendizagem para o ensino e aprendizagem de estatística no ensino médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/11342>.

MOURÃO, A. B. **Modelo Inclusivo de Desenvolvimento de Objetos de Aprendizagem Acessíveis**. Tese (Doutorado em Informática) – Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2019. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/7469>.

MOURÃO, A. B.; NETTO, J. F. D. M. Inclusive model application using accessible learning objects to support the teaching of mathematics. **Informatics in Education**, v. 18, n. 1, p. 213-226, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.15388/infedu.2019.10>.

NASCIMENTO, A. C. A. Objetos de aprendizagem: a distância entre a promessa e a realidade. In: PRATA, C. L.; NASCIMENTO, A. C. A. (eds.). **Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico**. Brasília: MEC, SEED, 2007. p. 135-145.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GOLDINO, J. D. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996. Disponível em: <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/RAZON.pdf>.

NESI, T. L.; KALINKE, M. A.; MOTTA, M. S.; MOCROSKY, L. F. Objetos de Aprendizagem de Matemática: um panorama do que diz em alguns estudos no Brasil. **RENOTE**, v. 17, n. 1, p. 557-566, 2019. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/96516/54169>.

NIBON, R. T. **Identificação de boas práticas no desenvolvimento de objetos de aprendizagem em empresas nacionais**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/2103>.

NUNES, C. B.; VIDAL, T. C. Resolução e formulação de problemas no desenvolvimento do raciocínio combinatório. **Com a palavra o professor**, v. 2, n. 4, p. 80–104, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.23864/cpp.v2i3.237>.

NURMI, S.; JAAKKOLA, T. Promises and pitfalls of learning objects. **Learning, Media and Technology**, v. 31, n. 3, p. 269-285, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/17439880600893325>.

ODSBRASIL. Indicadores Brasileiros para os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável. Brasília, 2023. Disponível em: <https://odsbrasil.gov.br>.

OLIVEIRA, G. F. **Ensino de análise combinatória: como classificar problemas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2017. Disponível em: <https://locus.ufv.br/items/3919089a-8e22-4d26-a53f-3f544d9ad651>.

OLIVEIRA, H.; DOMINGOS, A. Software no ensino e aprendizagem da matemática: algumas ideias para discussão. *In: Encontro de Investigação em Educação Matemática*, Vieira de Leiria/Portugal. **Arquivo de Atas Tecnologias na Educação Matemática**, 2008. p. 268-275.

OLIVEIRA, K. A.; AMARAL, M. A.; BARTHOLO, V. F. Uma experiência para definição de storyboard em metodologia de desenvolvimento colaborativo de objetos de aprendizagem. **Ciências & Cognição**, v. 15, n. 1, p. 19-32, 2010.

OLIVEIRA, M. S. **Uma proposta para o ensino-aprendizagem de análise combinatória na perspectiva de resolução de problemas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufes.br/items/10c6136f-fbac-4b01-8505-65232bcd8483>.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739/4625>.

PACHECO, E. **GAIA PDOA: processo de desenvolvimento de objetos de aprendizagem**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016. Disponível em: <https://repositorio.uel.br/items/ec3a22ec-f977-4495-9e69-156abb3d41ae>.

PASSONI, J. C.; CAMPOS, T. M. M. Revisitando problemas aditivos de Vergnaud de 1976. *In: MACHADO, S. D. A. (org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus. 2003.

PASSOS, P. C. S. J.; BEHAR, P. A. Metodologia para design de interfaces digitais para educação. **InfoDesign | Revista Brasileira de Design da Informação**, v. 9, n. 1, p. 01-09, 2012. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/104335>.

PEREIRA, E. R. S. S. **Tarefas de análise da produção escrita para o ensino de análise combinatória**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2021. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/26325>.

PEREIRA, F. H. **Um estudo sobre o ensino de geometria com o uso da FARMA**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2018. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/3441>.

PESSOA, C. A. S. Interação social: uma análise do seu papel na superação de dificuldades de resolução de problemas aditivos. *In: Reunião anual da ANPED*, 25., Caxambu, 2002. **Anais [...]**. Caxambu, 2002.

PESSOA, C. A. S. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio.** Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/4189>.

PESSOA, C.; BORBA, R. O raciocínio combinatório do início do ensino fundamental ao término do ensino médio. *In: X Encontro Nacional de Educação Matemática*, 2010, Salvador. **Anais [...]**. Salvador, 2010. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POSSAMAI, J. P.; SILVA, V. C. S. Comunicação Matemática na Resolução de Problemas. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – REMAT**, São Paulo, SP, v. 17, p. 01-15, 2020. Disponível em: <http://doi.org/10.37001/remat25269062v17id277>.

PREVEDELLO, C. F. **Design de interação e motivação nos projetos de interface para objetos de aprendizagem para EaD.** Dissertação (Mestrado em Design) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/31389>.

PROENÇA, M. C. **Resolução de Problemas: encaminhamentos para o ensino e a aprendizagem de Matemática em sala de aula.** Maringá: Eduem, 2018.

PROENÇA, M. C. Resolução de Problemas: uma proposta de organização do ensino para a aprendizagem de conceitos matemáticos. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 18, p. 1-14, e021008, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id359>.

PUHL, C. S. Números complexos: um objeto de aprendizagem para ensinar e aprender. **R. bras. Ens. Ci. Tecnol**, v. 11, n. 3, p. 312-328, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3895/rbect.v11n3.6963>.

QUEIROS, L. M. **Proposta metodológica** – processo de desenvolvimento de objetos de aprendizagem: um estudo de caso. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015. Disponível em: <http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/6261>.

QUINTANA, C.; FISHMAN, B. J. Supporting Science Learning and Teaching with Software-based Scaffolding. *In: American Educational Research Association (AERA)*, 2006. Disponível em: <https://public.websites.umich.edu/~hiceweb/papers/2006/AERA06-Scaffolding-FINAL.pdf>.

RAMOS, I. J.; AMARAL, L. H. Relações e interações dos professores de ciências e matemática com as tecnologias. **HOLOS**, v. 4, p. 226-241, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.15628/holos.2012.945>.

REATEGUI, E.; BOFF, E.; FINCO, M. D. Proposta de diretrizes para avaliação de objetos de aprendizagem considerando aspectos pedagógicos e técnicos. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 8, n. 3, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.22456/1679-1916.18066>.

ROSTIROLA, S. C. M.; SIPLE, I. Z. Materiais lúdicos como instrumentos de ensino-aprendizagem-avaliação de análise combinatória no Ciclo de Alfabetização. **Revista de Educação Matemática**, v. 17, e020016, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id258>.

ROMANATTO, M. C. Resolução de problemas nas aulas de matemática. **Revista Eletrônica de Educação**, v. 6, n. 1, p. 299-311, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.14244/19827199413>.

SALAVATINEJAD, N.; ALAMOLHODAEI, H.; RADMEHR, F. Toward a model for students' combinatorial thinking. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 61, 100823, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100823>.

SANTOSO, E. W.; SARINASTITI, W.; WULANDARI, I. Animation of mathematics learning for vocational high school about geometry transformation using participatory design. *In: International Electronics Symposium 2021: Wireless Technologies and Intelligent Systems for Better Human Lives, IES 2021 - Proceedings. Anais [...]. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2021.* Disponível em: <https://doi.org/10.1109/IES53407.2021.9593950>.

SANTOS, E. R. **Board games como atividades experimentais no aprendizado de análise combinatória e raciocínio lógico**. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/36197>.

SANTOS, E. V. **Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019. Disponível em: <https://tede.bc.uepb.edu.br/jspui/handle/tede/3410>.

SANTOS, F. S. Validação de requisitos através da prototipação de software. **CONNECTION LINE**, v. 1, n. 9, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.18312/connectionline.v0i9.68>.

SAWILOWSKY, S. S. New effect size rules of thumb. **Journal of Modern Applied Statistical Methods**, v. 8, n. 2, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.56801/10.56801/v8.i.452>.

SEMANIŠINOVÁ, I. Multiple-solution tasks in pre-service teachers course on combinatorics. **Mathematics**, v. 9, 2286, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/math9182286>.

SCHOENFELD, A. H. Beyond the purely cognitive: Belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. **Cognitive Science**, v. 7, n. 8, p. 329-363, 1983a. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0364-0213\(83\)80003-2](https://doi.org/10.1016/S0364-0213(83)80003-2).

SCHOENFELD, A. H. Theoretical and pragmatic issues in the design of mathematical “problem solving” instruction. Paper delivered at the annualmeeting of the American Educational Research Association. Montreal, 1983b. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED228045.pdf>.

SHOENFELD, A. H. **Mathematical problem solving**. New York. NY: Academic Press, 1985.

SILVA, A. C. **O uso de material manipulativo e a produção de desenhos no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação infantil**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/34277>.

SILVA, D. C.; CANTÚ, J. G.; SILVA, H. C.; BOSCARIOLI, C. Utilização de e-book interativo em aulas de matemática em um curso técnico em eletroeletrônica integrado ao ensino médio. **Educação Matemática em Revista**, v. 28, n. 78, p. 33-44, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/emr.v28i78.2983>.

SILVA, D. P.; GUERRA, E. A. A aprendizagem de análise combinatória no ensino médio: uma proposta didática por meio da resolução de problemas. **REMAT**, v. 3, n. 2, p. 40-51, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.35819/remat2017v3i2id2346>.

SILVA, J. R.; RUFINO, M. A. S.; SILVA, C. C.; SILVA, E. J. Os obstáculos epistemológicos e didáticos na combinatória: uma análise sobre a compreensão dos professores da educação básica. In: XIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2019. Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá, 2019. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/enem>

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Ensino-aprendizagem de análise combinatória via exploração, resolução e proposição de problemas no ensino médio. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 17, n. e020017, p. 1-21, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/remat25269062v17id259>.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Análise combinatória no ensino médio: episódio de sala de aula via exploração, resolução e proposição de problemas. **Educação Matemática em Revista-RS**, v. 2, n. 23, p. 242–253, 2022a. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.2.n.23.2022.D14>.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, n. 01, p. e022019, 2022b. Disponível em: <https://doi.org/10.37001/remat25269062v19id615>.

SILVEIRA, M. S.; CARNEIRO, M. L. F. Diretrizes para a avaliação da usabilidade de objetos de aprendizagem. In: XXIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, 2012, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro/RJ, 2012. Disponível em: <https://professor.ufrgs.br/mara/files/1713-2652-1-sm.pdf>.

SOTO, C. S.; VALDIVIA, F. L. P.; BACA, H. A. H. Effect of using an educational software “pequemath móvel 5” on mobile devices in the learning process of the mathematical area in children of five years. In: Proceedings - 14th Latin American Conference on Learning Technologies, LACLO 2019. **Anais [...]**. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., 2019. Disponível em: <http://doi.org/10.1109/LACLO49268.2019.00039>.

SOTO, O.; SIY, K.; HAREL, G. Promoting a set-oriented way of thinking in a U.S. High School discrete mathematics class: a case study. **ZDM - Mathematics Education**, v. 54, n. 4, p. 809-827, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01337-7>.

SOUZA, D. D. C.; CASTRO, J. B.; BARRETO, A. L. D. O. Desempenho, representações e estratégias de estudantes do 5º ano do ensino fundamental na resolução de situações de combinatória. **Vidya**, v. 40, n. 2, p. 397-416, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.37781/vidya.v40i2.3367>.

SUN, Chuen-Tsai; WANG, Dai-Yi; CHAN, Hui-Ling. How digital scaffolds in games direct problem-solving behaviors. **Computers & Education**, n. 57, p. 2118-2125, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2011.05.022>.

STACEY, K. The place of problem solving in contemporary mathematics curriculum documents. **Journal of Mathematical Behaviour**, v. 24, p. 341–350, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2005.09.004>.

STOYANOVA, E. Problem posing in mathematics classrooms. In: MCINTOSH, A.; ELLERTON, N. (eds.), **Research in Mathematics Education: a contemporary perspective**, Edith Cowan University: MASTEC, p. 164-185, 1998.

TAROUCO, L. M. R.; KONRATH, M. L. P.; CARVALHO, M. J. S.; AVILA, B. G. Formação de professores para produção e uso de objetos de aprendizagem. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 4, n. 1, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.22456/1679-1916.13886>.

TAVARES, P. C. M.; BOGUTCHI, T. F. Ensino da análise combinatória por meio de tecnologia móvel: um relato de experiência. **Abakos**, v. 7, n. 3, p. 22–34, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.5752/P.2316-9451.2019v7n3p22-34>.

TEIXEIRA, P. J. M. Práticas de professores do ensino fundamental durante a resolução de problemas de contagem. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 2, p. 81-113, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i2p081-113>.

TEZA, D. R. **O ensino do raciocínio combinatório: considerações a partir do movimento histórico e lógico**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

TOLIO, F. B.; BISOGNIN, E. Um estudo dos princípios aditivo e multiplicativo por meio de jogos. **Ciência e Natura**, v. 39, n. 3, p. 723-737, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.5902/2179460X27389>.

TORREZZAN, C. A. W. **DESIGN PEDAGÓGICO: um olhar na construção de materiais educacionais digitais**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/17252>.

TORREZZAN, C. A. W. **CONSTRUMED: METODOLOGIA PARA A CONSTRUÇÃO DE MATERIAIS EDUCACIONAIS DIGITAIS BASEADOS NO DESIGN PEDAGÓGICO**. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/106458>.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. **Quadrante**, v. 24, n. 2, 2015. Disponível em: <https://quadrante.apm.pt/article/download/22923/16989/88305>.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VERENIKINA, I. Understanding Scaffolding and the ZPD in Educational Research, 2003. Disponível em: <https://ro.uow.edu.au/edupapers/381>.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (eds.). **Acquisition of mathematics**: Concepts and processes. New York: Academic. Press, 1983.

VERGNAUD, G. Análise Psicológica, 1. In: **Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas**, p. 75–90, 1986.

VERGNAUD, G. **El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria**. México: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, J. (org.). **Didáctica das Matemáticas**. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.

VIDAL, S. C. **Criptografia como ferramenta educacional no ensino da análise combinatória**. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/97/97138/tde-28112019-172528/pt-br.php>.

VYGOTSKY, L. S. **Teoria e método em psicologia**. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

WANG, F.; HANNAFIN, M. J. Design-based Research in Design and Research of Technology-Enhanced Learning Environments. **Educational Technology Research and Development**, v. 53, p. 5-23, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02504682>.

WATSON, J. A Case Study: Developing Learning Objects with an Explicit Learning Design. **Electronic Journal of e-Learning**, v. 8, n. 1, p. 41-50, 2010. Disponível em: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ880098.pdf>.

WILEY, D. A. **Learning object design and sequencing theory**. Dissertação (Doutorado em Filosofia). Department of Instructional Psychology and Technology, faculty of Brigham Young University. 2000.

WOOD, D.; BRUNER, J.; ROSS, G. The role of tutoring in problem solving. **Journal of Child Psychology and Psychiatry**, 17, p. 89-100, 1976. Disponível em: <https://acamh.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1469-7610.1976.tb00381.x>.

ZOPPO, B. M.; B. M.; KALINKE, M. A.; MOTTA, M. S.; PANOSSIAN, M. L. Interação e motivação: o ensino da matemática com um objeto de aprendizagem. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 11, n. 6, p. 427-444, 2020.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PARA IDENTIFICAÇÃO DO GRUPO DE PESQUISA

Nome:

Você já ministrou aulas de análise combinatória? Quanto tempo? Em quais níveis de ensino? Você pode elencar os momentos em que os alunos tinham mais dificuldade? Você pode elencar a parte que você tinha mais dificuldade?

Você já utilizou algum recurso tecnológico em suas aulas de matemática?

Na sua graduação, você estudou sobre como usar algum recurso tecnológico na sala de aula ou viu algum professor utilizando?

Você fez algum curso de capacitação para aprender a utilizar algum recurso tecnológico na sala de aula ou foi oferecido pelo sistema de ensino?

Você acha que o uso das tecnologias na sala de aula de matemática pode ajudar o professor e alunos? De que maneira?

Você já ouviu falar em objetos de aprendizagem digitais?

Você já utilizou algum objeto de aprendizagem digital em suas aulas?

Você já pesquisou na Internet ou em outro meio algum recurso tecnológico para usar em suas aulas?

Você tem vontade de utilizar algum recurso tecnológico em suas aulas?

**APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO PARA TRAÇAR PERFIL DO GRUPO
PESQUISADO**

Nome:

Idade:

Formação profissional: Graduação, Especialização, Mestrado, Doutorado

Cursos de capacitação:

Vínculos empregatícios: Particular, Município, Estado

Nível de ensino: Fundamental, Médio, Superior

Tempo de docência em cada nível de ensino

APÊNDICE C – QUESTIONÁRIO PARA ESPECIALISTAS

Usabilidade					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Pode ser facilmente disponibilizado em formatos diferenciados (tais como Web, Pendrive, CD, etc)?					
O objeto explicita os softwares ou recursos necessários para o seu correto funcionamento?					
O objeto é facilmente instalável, dispensando requisitos complexos para sua execução?					
Pode ser executado sem a necessidade de conexão com a Internet?					
Pode ser executado a partir da Web?					
Há compatibilidade com outras plataformas, como por exemplo, celulares e tablets?					
O OA possui uma sequência de ações padronizada e de fácil entendimento?					

Considerações:

Interface e recursos interativos do CombInter					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombInter é claro e conciso?					
É fácil de usar?					
É motivador – instiga o interesse em ser manipulado?					
Tem um bom apelo visual?					

As imagens são empregadas para ilustrar conceitos e explicações?					
O número de imagens apresentadas em cada página é adequado?					
Há contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura dos textos?					
As fontes utilizadas apresentam tamanho adequado?					
Há consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos)?					
A todo o momento é possível saber em que ponto nos encontramos no objeto de aprendizagem, através de seus rótulos e títulos?					
Os links para acessar outras páginas e funções do objeto de aprendizagem são facilmente reconhecíveis?					
Os recursos interativos empregados vão além da seleção links e botões para avançar ou recuar na apresentação dos conteúdos?					
Os recursos interativos exploram a possibilidade do usuário alterar configurações do sistema de modo a obter respostas diferentes de acordo com suas ações?					
O objeto de aprendizagem emprega recursos gráficos que melhoram o aspecto estético da interface, tornando mais agradável sua utilização?					
O usuário tem liberdade de navegação?					
O CombInter fornece diferentes níveis de dificuldade?					
O usuário pode retomar ações já executadas?					

A linguagem empregada está de acordo com o público alvo?					
O OA oferece a possibilidade do aluno se identificar?					
O OA fornece relatório das atividades desenvolvidas e do desempenho do usuário na forma de relatórios para o professor?					
O OA possibilita que o usuário acompanhe seu desempenho?					
O OA permite ao professor configurar e incluir novas atividades?					
O OA viabiliza a comunicação entre o professor e os Alunos?					
Dispõe de ferramentas de comunicação que permitam a interação entre os estudantes, fomentando a formação de grupo?					
Todos os documentos e recursos necessários para o uso do OA são disponibilizados no próprio OA sem a necessidade de acessar links externos?					
O OA permite a gravação dos resultados gerados?					
O OA disponibiliza canais de discussão entre seus usuários?					
O OA permite ao usuário visualizar, na íntegra, as questões que acertou/errou no uso de questionários e/ou exercícios e permitir voltar e tentar novamente e/ou reiniciar?					

Considerações:

Prover auxílio aos usuários					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5

Fornece feedback para o usuário?					
O CombInter fornece ajuda para navegação entre as telas do objeto?					
O CombInter apresenta material complementar sobre o seu uso?					
Possui claras instruções de uso?					
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas?					
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário refaça suas escolhas, não interrompendo o uso do objeto?					
Provê indicações claras de o que o usuário deve fazer para prosseguir para próximas etapas de uso do objeto?					
O OA especifica atividades de interação entre os alunos dentre as atividades previstas para uso do Objeto?					

Considerações:

Foco pedagógico					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombInter apresenta uma contextualização inicial, descrevendo o tema/conteúdo tratado no objeto?					
O CombInter apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto?					
O CombInter apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente?					
O CombInter disponibiliza algum					

contato para sugestões / dúvidas?					
É disponibilizado material complementar para orientação do uso do CombInter?					
Há alguma apresentação sobre o CombInter?					
Apresenta possibilidades de uso por diferentes papéis de usuário (administrador, tutor, professor, etc.)?					

Considerações:

Conteúdo matemático					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Demonstra claramente os conceitos matemáticos esperados?					
Seu conteúdo é relevante para abordar os conceitos matemáticos esperados?					
Fornecer informações precisas?					
Resume bem os conceitos matemáticos esperados?					
O conteúdo abordado no OA está pedagogicamente correto?					
O conteúdo abrange todo o conteúdo a que ele se propôs?					
O conteúdo do OA é adequado ao público alvo?					
O conteúdo do OA está atualizado?					
O conteúdo apresenta uma perspectiva consistente?					
Os exemplos, exercícios e feedback são realistas e adequados?					
A abordagem pedagógica é consistente com a teoria instrucional atual na área do conteúdo?					
A instrução é apropriada para os aprendizes-alvo?					
As estratégias instrucionais são consistentes com os princípios de teoria instrucional?					
A quantidade de informações que represente o conteúdo específico do Objeto é adequada?					

Considerações:

APÊNDICE D – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER

(Especialistas – etapa de aperfeiçoamento)

1. O que você achou da forma de abordagem dos conceitos de combinatória no CombInter? (Diversas representações, diversidade de situações problema resolvidas, detalhamento da solução)
 - 1.1 Você acha que a organização apresentada facilita a aprendizagem dos conceitos?
 - 1.2 O que achou das diversas formas de representação e situações problema?
 - 1.3 O que achou das soluções das situações problema resolvidas?
 - 1.4 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?

2. O que você achou das situações problema apresentadas na funcionalidade Atividades? (Questões que desafiam o aluno, contextuais, situações reais?).
 - 2.1 São diversas, no sentido de explorar várias propriedades do mesmo conceito?
 - 2.2 Essa diversidade de situações, representações, estratégias de solução e níveis de complexidade facilitam a aprendizagem dos conceitos? De que forma?
 - 2.3 O que achou das situações de elaboração de problemas e conversão de registros de representação?
 - 2.3.1 Você acredita que esse modelo de problema auxilia na compreensão do conceito? Por que?

3. O que achou da funcionalidade “Simular” presente nas situações problema?
 - 3.1 O que achou da dinâmica dos feedbacks apresentados?
 - 3.2 Contribui para compreensão dos problemas e desenvolvimento de estratégias de solução?

4. O que achou da funcionalidade “Dicas” presente nas situações problema?
 - 4.1 Os questionamentos realizados nas “Dicas” são pertinentes? Interferem/auxiliam na compreensão do problema e na elaboração de estratégias de solução?
 - 4.2 O que achou dos feedbacks realizados? Eles vão além de informar se o item está certo ou errado e influenciam na compreensão e elaboração de estratégias de solução?
 - 4.3 O que achou da dinâmica/ordem dos questionamentos apresentada nas “Dicas”?
 - 4.4 Você acha que os modelos das dicas 1 e 2 (apresentar um exemplo) contribuem para compreensão do problema? Por quê?
 - 4.5 Você acha que os modelos das dicas 3 e 4 (apresentar um exemplo) contribuem elaboração de estratégias de solução? Por quê?
 - 4.6 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?
 - 4.7 Questões relacionadas às funções dos andaimes
 - 4.7.1 Você acha que as dicas (ou outro recurso do CombInter) mobilizam o interesse do aluno e a adesão aos requisitos da tarefa (Função de engajamento)?
 - 4.7.2 As dicas (ou outro recurso do CombInter) simplificam a tarefa de tal modo que o aprendiz possa reconhecer os efeitos de sua ação, permitindo o uso de feedbacks para orientação (Função de redução do grau de liberdade)?

4.7.3 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitem a manutenção de direção corresponde em manter o aprendiz direcionado aos objetivos específicos que permitem solucionar a tarefa (Função de manutenção da direção)

4.7.4 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram identificar elementos durante o processo de resolução de problemas que facilitam a aprendizagem (Função de aspectos críticos destacados)?

4.7.5 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram criar meios para que a resolução de problemas seja menos estressante (Função de controle de frustração).

5. O que achou da abordagem da solução das situações-problema?

5.1 Você acha que as soluções foram modeladas com objetivo de destacar conceitos e procedimentos relevantes que possam facilitar a compreensão dos estudantes (Função de demonstração).

5.2 Você acha importante o estudante ter acesso a uma solução detalhada? (comparar sua solução, rever aspectos relevantes, ver mais de uma solução, comparar com os auxílios)

5.3 O fato de considerar os aspectos abordados nas dicas influencia a aprendizagem do aluno?

6. O que achou da funcionalidade “Veja mais” ao final da solução de uma situação problema?

6.1 Você acha que perceber variações de um problema influencia na compreensão dos conceitos envolvidos?

7. Você acha que o conjunto dessas funcionalidades são úteis para amenizar os problemas de aprendizagem em combinatória na sala de aula? Vão contribuir de alguma forma?

7.1 Que aspectos das funcionalidades você destacaria?

7.2 Você acha vantajoso usar essa ferramenta? Em que aspectos?

8. O que achou da funcionalidade Relatórios?

8.1 Você acha importante ter os dados das interações dos alunos? Gráfico 1 e gráfico 2? Por quê? Em que aspectos pedagógicos? Autoavaliação docente? Moldar sua aula a partir desses dados? Perceber os níveis cognitivos dos alunos?

9. O objeto de aprendizagem atendeu as suas expectativas? Por quê?

10. Conhecendo o CombInter, você acha que ele pode auxiliar o professor no ensino de análise combinatória? Por quê?

11. Conhecendo o CombInter, você acha que ele pode auxiliar o aluno no estudo de análise combinatória? Por quê?

12. Como conversamos inicialmente, você acha o CombInter soluciona ou ajuda a amenizar os principais problemas no estudo de análise combinatória: interpretação do problema e definição dos agrupamentos? Quais recursos do CombInter ajuda nisso?

13. Em sua opinião, qual o nível de conhecimento requerido dos alunos para trabalhar com o CombInter? Especificar se as dicas estão razoáveis? A linguagem?
14. O CombInter desafia as habilidades do estudante? De que maneira?
15. Você utilizaria o CombInter em suas aulas? Por quais razões? Indicaria a alguém? De que maneira?
16. Qual seria nível de envolvimento dos alunos nas atividades propostas? Você acredita que eles ficariam entusiasmados? Seria uma experiência que agregaria valor ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático abordado?
17. O que você mais gostou no CombInter?
18. O que você acha que os alunos iam gostar mais no CombInter?
19. Você acredita que a realização de atividades com a utilização destes objetos pode promover um melhor entendimento, por parte dos alunos, da Matemática envolvida?
20. As orientações técnicas disponíveis são suficientes para utilizar o CombInter de forma satisfatória? Você acha necessário ter essas orientações? O que você achou dessas orientações? Acrescentaria ou mudaria alguma coisa?
21. O que você achou das orientações pedagógicas presentes no CombInter? São factíveis? Você acha necessário o CombInter ter essas orientações? Você seguiria essas orientações ou faria de outra maneira? Como você faria? Mesmo não seguindo estritamente as orientações apresentadas, elas auxiliariam na sua definição de abordar a ferramenta? O Tempo definido foi interessante?
22. Você acha que o CombInter acrescenta algo na prática docente que sem ele ficaria difícil ou impossível de executar? Traz algo novo que o ensino apenas com giz e quadro não tem como abordar? Por exemplo, a parte de simulação?
23. Você acha que a aprendizagem dos alunos de uma aula mediada com o CombInter seria melhor do que com uma abordagem tradicional?
24. Você acha que o CombInter incentiva o trabalho de análise combinatória por parte do professor?
25. O que de novo o CombInter pode acrescentar na prática de aula do professor?
26. O que você acha que poderia melhorar no CombInter? Ou o que você mudaria?

27. Você quer falar algo mais sobre essa experiência com o CombInter? Algo a acrescentar que não foi questionado?

APÊNDICE E – QUESTIONÁRIO PARA ESTUDANTES

(Fases de aperfeiçoamento e validação)

Usabilidade					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
Pode ser facilmente disponibilizado em formatos diferenciados (tais como Web, Pendrive, CD, etc)?					
O objeto explicita os softwares ou recursos necessários para o seu correto funcionamento?					
O objeto é facilmente instalável, dispensando requisitos complexos para sua execução?					
Pode ser executado sem a necessidade de conexão com a Internet?					
Pode ser executado a partir da Web?					
Há compatibilidade com outras plataformas, como por exemplo, celulares e tablets?					
O OA possui uma sequência de ações padronizada e de fácil entendimento?					

Considerações:

Interface e recursos interativos do CombInter					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombInter é claro e conciso?					
É fácil de usar?					
É motivador – instiga o interesse em ser manipulado?					
Tem um bom apelo visual?					

As imagens são empregadas para ilustrar conceitos e explicações?					
O número de imagens apresentadas em cada página é adequado?					
Há contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura dos textos?					
As fontes utilizadas apresentam tamanho adequado?					
Há consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos)?					
A todo o momento é possível saber em que ponto nos encontramos no objeto de aprendizagem, através de seus rótulos e títulos?					
Os links para acessar outras páginas e funções do objeto de aprendizagem são facilmente reconhecíveis?					
Os recursos interativos empregados vão além da seleção links e botões para avançar ou recuar na apresentação dos conteúdos?					
Os recursos interativos exploram a possibilidade do usuário alterar configurações do sistema de modo a obter respostas diferentes de acordo com suas ações?					
O objeto de aprendizagem emprega recursos gráficos que melhoram o aspecto estético da interface, tornando mais agradável sua utilização?					
O usuário tem liberdade de navegação?					
O CombInter fornece diferentes níveis de dificuldade?					
O usuário pode retomar ações já executadas?					

A linguagem empregada está de acordo com o público alvo?					
O OA oferece a possibilidade do aluno se identificar?					
O OA fornece relatório das atividades desenvolvidas e do desempenho do usuário na forma de relatórios para o professor?					
O OA possibilita que o usuário acompanhe seu desempenho?					
O OA permite ao professor configurar e incluir novas atividades?					
O OA viabiliza a comunicação entre o professor e os Alunos?					
Dispõe de ferramentas de comunicação que permitam a interação entre os estudantes, fomentando a formação de grupo?					
Todos os documentos e recursos necessários para o uso do OA são disponibilizados no próprio OA sem a necessidade de acessar links externos?					
O OA permite a gravação dos resultados gerados?					
O OA disponibiliza canais de discussão entre seus usuários?					
O OA permite ao usuário visualizar, na íntegra, as questões que acertou/errou no uso de questionários e/ou exercícios e permitir voltar e tentar novamente e/ou reiniciar?					

Considerações:

Prover auxílio aos usuários					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5

Fornece feedback para o usuário?					
O CombInter fornece ajuda para navegação entre as telas do objeto?					
O CombInter apresenta material complementar sobre o seu uso?					
Possui claras instruções de uso?					
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário aprenda a partir das mesmas?					
Apresenta mensagens de erro construtivas, que permitam que o usuário refaça suas escolhas, não interrompendo o uso do objeto?					
Provê indicações claras de o que o usuário deve fazer para prosseguir para próximas etapas de uso do objeto?					
O OA especifica atividades de interação entre os alunos dentre as atividades previstas para uso do Objeto?					

Considerações:

Foco pedagógico					
Itens	Discorda plenamente	Discorda	Nem concorda, nem discorda	Concorda	Concorda plenamente
Pontuação	1	2	3	4	5
O CombInter apresenta uma contextualização inicial, descrevendo o tema/conteúdo tratado no objeto?					
O CombInter apresenta o objetivo pedagógico relacionado ao uso do objeto?					
O CombInter apresenta como o objeto poderia ser explorado pedagogicamente?					
O CombInter disponibiliza algum					

contato para sugestões / dúvidas?					
É disponibilizado material complementar para orientação do uso do CombInter?					
Há alguma apresentação sobre o CombInter?					
Apresenta possibilidades de uso por diferentes papéis de usuário (administrador, tutor, professor, etc.)?					

Observações:

APÊNDICE F – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER

(Estudantes – Etapa de aperfeiçoamento)

1. O que você achou da forma de abordagem dos conceitos de combinatória no CombInter? (Diversas representações, diversidade de situações problema resolvidas, detalhamento da solução)
 - 1.1 O que achou das diversas formas de representação e situações problema?
 - 1.2 O que achou das soluções das situações problema resolvidas?
 - 1.3 Você acha que a organização apresentada facilita a aprendizagem dos conceitos?
 - 1.4 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?
2. O que você achou das situações problema apresentadas na funcionalidade Atividades? (Questões que desafiam o aluno, contextuais, situações reais?).
 - 2.1 O que achou das situações de elaboração de problemas e conversão de registros de representação?
3. O que achou da funcionalidade “Simular” presente nas situações problema?
 - 3.1 Você acha que esse recurso influencia na compreensão do problema?
4. O que achou da funcionalidade “Dicas” presente nas situações problema?
 - 4.1 Você acha que os questionamentos e feedbacks presentes nas dicas facilitaram a resolução do problema e aprendizagem dos conceitos?
 - 4.2 O que achou da dinâmica/ordem dos questionamentos apresentada nas “Dicas”?
 - 4.3 Você acha que os modelos das dicas 1 e 2 (apresentar um exemplo) contribuem para compreensão do problema? Por quê?
 - 4.4 Você acha que os modelos das dicas 3 e 4 (apresentar um exemplo) contribuem elaboração de estratégias de solução? Por quê?
 - 4.5 Qual dica você achou mais interessante?
 - 4.6 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?
 - 4.7 Questões relacionadas às funções dos andaimes
 - 4.7.1 Você acha que as dicas (ou outro recurso do CombInter) mobilizam o interesse do aluno e a adesão aos requisitos da tarefa (Função de engajamento)?
 - 4.7.2 As dicas (ou outro recurso do CombInter) simplificam a tarefa de tal modo que o aprendiz possa reconhecer os efeitos de sua ação, permitindo o uso de feedbacks para orientação (Função de redução do grau de liberdade)?
 - 4.7.3 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitem a manutenção de direção corresponde em manter o aprendiz direcionado aos objetivos específicos que permitem solucionar a tarefa (Função de manutenção da direção)
 - 4.7.4 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram identificar elementos durante o processo de resolução de problemas que facilitam a aprendizagem (Função de aspectos críticos destacados)?

4.7.5 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram criar meios para que a resolução de problemas seja menos estressante (Função de controle de frustração).

5. O que achou da abordagem da solução das situações-problema?

5.1 Você acha que as soluções foram modeladas com objetivo de destacar conceitos e procedimentos relevantes que possam facilitar a compreensão dos estudantes (Função de demonstração).

5.2 Você acha importante o estudante ter acesso a uma solução detalhada? (comparar sua solução, rever aspectos relevantes, ver mais de uma solução, comparar com os auxílios)

5.3 O fato de considerar os aspectos abordados nas dicas influencia a aprendizagem do aluno?

6. O que achou da funcionalidade “Veja mais” ao final da solução de uma situação problema?

6.1 Você acha que perceber variações de um problema influencia na compreensão dos conceitos envolvidos?

7. Você acha que o conjunto dessas funcionalidades são úteis para você estudar análise combinatória? Vão contribuir de alguma forma?

7.1 Quais aspectos das funcionalidades você destacaria?

7.2 Você acha vantajoso usar essa ferramenta? Em que aspectos?

8. O objeto de aprendizagem atendeu as suas expectativas? Por quê?

9. Você utilizaria o CombInter para estudar análise combinatória? Por quais razões?

10. O que você mais gostou no CombInter?

11. As orientações técnicas disponíveis são suficientes para utilizar o CombInter de forma satisfatória? O que você achou dessas orientações? Acrescentaria ou mudaria alguma coisa?

12. Você acha que caso seu professor de matemática apresentasse o CombInter e utilizasse em sala de aula, você teria um maior envolvimento durante as aulas e teria um melhor desempenho em análise combinatória?

13. Você acha que esse tipo de recurso faria você estudar análise combinatória de forma independente?

14. Você sentiu algum tipo de dificuldade ao utilizar o CombInter?

15. O que você acha que poderia melhorar no CombInter? Ou o que você mudaria?

16. Você quer falar algo mais sobre essa experiência com o CombInter? Algo a acrescentar que não foi questionado?

APÊNDICE G – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER

(Professor – fase de validação)

1. O que você achou da forma de abordagem dos conceitos de combinatória no CombInter? (Diversas representações, diversidade de situações problema resolvidas, detalhamento da solução)
 - 1.1 Você acha que a organização apresentada facilita a aprendizagem dos conceitos?
 - 1.2 O que achou das diversas formas de representação e situações problema?
 - 1.3 O que achou das soluções das situações problema resolvidas?
 - 1.4 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?

2. O que você achou das situações problema apresentadas na funcionalidade Atividades? (Questões que desafiam o aluno, contextuais, situações reais?).
 - 2.1 São diversas, no sentido de explorar várias propriedades do mesmo conceito?
 - 2.2 Essa diversidade de situações, representações, estratégias de solução e níveis de complexidade facilitam a aprendizagem dos conceitos? De que forma?
 - 2.3 O que achou das situações de elaboração de problemas e conversão de registros de representação?
 - 2.3.1 Você acredita que esse modelo de problema auxilia na compreensão do conceito? Por que?

3. O que achou da funcionalidade “Simular” presente nas situações problema?
 - 3.1 O que achou da dinâmica dos feedbacks apresentados?
 - 3.2 Contribui para compreensão dos problemas e desenvolvimento de estratégias de solução?

4. O que achou da funcionalidade “Dicas” presente nas situações problema?
 - 4.1 Os questionamentos realizados nas “Dicas” são pertinentes? Interferem/auxiliam na compreensão do problema e na elaboração de estratégias de solução?
 - 4.2 O que achou dos feedbacks realizados? Eles vão além de informar se o item está certo ou errado e influenciam na compreensão e elaboração de estratégias de solução?
 - 4.3 O que achou da dinâmica/ordem dos questionamentos apresentada nas “Dicas”?
 - 4.4 Você acha que os modelos das dicas 1 e 2 (apresentar um exemplo) contribuem para compreensão do problema? Por quê?
 - 4.5 Você acha que os modelos das dicas 3 e 4 (apresentar um exemplo) contribuem elaboração de estratégias de solução? Por quê?
 - 4.6 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?
 - 4.7 Questões relacionadas às funções dos andaimes
 - 4.7.1 Você acha que as dicas (ou outro recurso do CombInter) mobilizam o interesse do aluno e a adesão aos requisitos da tarefa (Função de engajamento)?
 - 4.7.2 As dicas (ou outro recurso do CombInter) simplificam a tarefa de tal modo que o aprendiz possa reconhecer os efeitos de sua ação, permitindo o uso de feedbacks para orientação (Função de redução do grau de liberdade)?

4.7.3 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitem a manutenção de direção corresponde em manter o aprendiz direcionado aos objetivos específicos que permitem solucionar a tarefa (Função de manutenção da direção)

4.7.4 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram identificar elementos durante o processo de resolução de problemas que facilitam a aprendizagem (Função de aspectos críticos destacados)?

4.7.5 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram criar meios para que a resolução de problemas seja menos estressante (Função de controle de frustração).

5. O que achou da abordagem da solução das situações-problema?

5.1 Você acha que as soluções foram modeladas com objetivo de destacar conceitos e procedimentos relevantes que possam facilitar a compreensão dos estudantes (Função de demonstração).

5.2 Você acha importante o estudante ter acesso a uma solução detalhada? (comparar sua solução, rever aspectos relevantes, ver mais de uma solução, comparar com os auxílios)

5.3 O fato de considerar os aspectos abordados nas dicas influencia a aprendizagem do aluno?

6. O que achou da funcionalidade “Veja mais” ao final da solução de uma situação problema?

6.1 Você acha que perceber variações de um problema influencia na compreensão dos conceitos envolvidos?

7. O que achou da funcionalidade Relatórios?

7.1 Você acha importante ter os dados das interações dos alunos? Gráfico 1 e gráfico 2? Por quê? Em que aspectos pedagógicos? Autoavaliação docente? Moldar sua aula a partir desses dados? Perceber os níveis cognitivos dos alunos?

8. Você acha que o conjunto dessas funcionalidades são úteis para amenizar os problemas de aprendizagem em combinatória na sala de aula? Vão contribuir de alguma forma?

8.1 Que aspectos das funcionalidades você destacaria?

8.2 Você acha vantajoso usar essa ferramenta? Em que aspectos?

9. O objeto de aprendizagem atendeu as suas expectativas? Por quê?

10. Conhecendo o CombInter, você acha que ele pode auxiliar o professor no ensino de análise combinatória? Por quê?

11. Conhecendo o CombInter, você acha que ele pode auxiliar o aluno no estudo de análise combinatória? Por quê?

12. Como conversamos inicialmente, você acha o CombInter soluciona ou ajuda a amenizar os principais problemas no estudo de análise combinatória: interpretação do problema e definição dos agrupamentos? Quais recursos do CombInter ajuda nisso?

13. Em sua opinião, qual o nível de conhecimento requerido dos alunos para trabalhar com o CombInter? Especificar se as dicas estão razoáveis? A linguagem?

14. O CombInter desafia as habilidades do estudante? De que maneira?

15. Você utilizaria novamente o CombInter em suas aulas? Por quais razões? Indicaria a alguém? De que maneira?

16. Qual o nível de envolvimento dos alunos nas atividades propostas? Você acredita que eles ficaram entusiasmados? Foi uma experiência que agregou valor ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo matemático abordado?

16.1 O que achou da proposta de aula com o CombInter: a dinâmica de abordar o conteúdo, pedir resumos, passar algumas questões no CombInter, usar o sistema na sala...?

16.2 Como você percebeu o comportamento dos alunos nas aulas com o CombInter?

- Na turma do CombInter, comparando com aulas anteriores? Turma fez menos barulho, se manteve melhor concentrada, mais participativa, um número maior de alunos passou a se envolver mais com a aula? As formas das perguntas na sala como fora dela?

A que você daria essa mudança de comportamento (se houve)? A mudança de sua aula (até que ponto o sistema influenciou, se foi a parte teórica, as dicas, etc.), ao sistema em si (quais elementos do sistema), enfim.

- Comportamento dos alunos na aula sem o CombInter e na aula com o CombInter?

16.3 De certo modo, mesmo que inconsciente, você mudou ambas as aulas, certo? No sentido de escrever mais no quadro, detalhar mais soluções, etc., mas fazendo uma comparação com suas aulas “no modelo antigo”, consegue destacar vantagens no modelo atual, ou desvantagens, ou questões chaves, que de fato despertou em você coisas do tipo, “ah, que interessante isso, um determinado comportamento do aluno, enfim...”.

16.4 Peculiaridades da turma que usou o CombInter: A demanda dos alunos pelo professor? Que tipo de perguntas? Percebeu alunos fazendo perguntas semelhantes ao que já estava no CombInter? Se sim, a que você acha que se deve isso? Há um “vício” do sistema tradicional, no sentido de haver necessidade “do professor” para sanar as dúvidas? Isso foi muito comum ou exceção e de modo geral houve menos requisições do professor e, as que tiveram, foi de uma faixa mais “madura” de pergunta?

16.5 O que os alunos externalizava sobre aula e/ou sobre o sistema?

- Os alunos demonstraram dificuldade em compreender o uso do sistema?

- Em relação às avaliações finais, notou algum tipo de avanço? Maior quantidade de alunos com boas notas, notas dos melhores alunos aumentaram, a escrita evoluiu, alunos que não esperava notou algum tipo de melhora? Se sim, a que você denotaria isso? Aula, o CombInter? Se for o CombInter, que elementos do sistema você sugeriria? As dicas, os conceitos, a solução, o feedback, o fato de estar disponível a todo momento, ser um “professor” ao lado?

16.6 Você notou um maior envolvimento dos alunos na aula de matemática (alunos que nem te questionava nada, e passou a questionar, etc.) e, por consequência, notou uma maior aprendizagem?

16.7 A prática de realizar questionamentos aos alunos é comum ou teve uma inspiração no sistema? Diversas representações? Ordem crescente de dificuldade?

16.8 Você consegue identificar algum tipo de falha nessa abordagem e o que faria de diferente em um segundo momento? Na sua aula em si? (não citava o CombInter nas aulas, no sentido de exemplificar para o aluno que o sistema poderia sanar aquela dúvida). (Papel do professor se destaca, no sentido de ser o detentor do saber)?

16.9 É uma prática de aula que você levaria adiante, de aplicar mais vezes ou não aplicaria ou aplicaria de forma diferente e porque?

17. O que você mais gostou no CombInter?

18. O que você acha que os alunos gostaram mais no CombInter?

19. Você acredita que a realização de atividades com a utilização destes objetos pode promover um melhor entendimento, por parte dos alunos, da Matemática envolvida?

20. As orientações técnicas disponíveis são suficientes para utilizar o CombInter de forma satisfatória? Você acha necessário ter essas orientações? O que você achou dessas orientações? Acrescentaria ou mudaria alguma coisa?

21. O que você achou das orientações pedagógicas presentes no CombInter? São factíveis? Você acha necessário o CombInter ter essas orientações? Você seguiria essas orientações ou faria de outra maneira? Como você faria? Mesmo não seguindo estritamente as orientações apresentadas, elas auxiliariam na sua definição de abordar a ferramenta? O Tempo definido foi interessante?

22. Você acha que o CombInter acrescenta algo na prática docente que sem ele ficaria difícil ou impossível de executar? Traz algo novo que o ensino apenas com giz e quadro não tem como abordar? Por exemplo, a parte de simulação?

23. Você acha que a aprendizagem dos alunos de uma aula mediada com o CombInter foi melhor do que com uma abordagem tradicional?

24. Você acha que o CombInter incentiva o trabalho de análise combinatória por parte do professor?

25. O que de novo o CombInter pode acrescentar na prática de aula do professor?

26. O que você acha que poderia melhorar no CombInter? Ou o que você mudaria?

27. Você quer falar algo mais sobre essa experiência com o CombInter? Algo a acrescentar que não foi questionado?

APÊNDICE H – ROTEIRO DE ENTREVISTA SOBRE AVALIAÇÃO DO COMBINTER

(Estudantes – Fase de validação)

1. O que você achou da forma de abordagem dos conceitos de combinatória no CombInter? (Diversas representações, diversidade de situações problema resolvidas, detalhamento da solução)
 - 1.1 O que achou das diversas formas de representação e situações problema?
 - 1.2 O que achou das soluções das situações problema resolvidas?
 - 1.3 Você acha que a organização apresentada facilita a aprendizagem dos conceitos?
 - 1.4 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?

2. O que você achou das situações problema apresentadas na funcionalidade Atividades? (Questões que desafiam o aluno, contextuais, situações reais?).
 - 2.1 O que achou das situações de elaboração de problemas e conversão de registros de representação?

3. O que achou da funcionalidade “Simular” presente nas situações problema?
 - 3.1 Você acha que esse recurso influencia na compreensão do problema?

4. O que achou da funcionalidade “Dicas” presente nas situações problema?
 - 4.1 Você acha que os questionamentos e feedbacks presentes nas dicas facilitaram a resolução do problema e aprendizagem dos conceitos?
 - 4.2 O que achou da dinâmica/ordem dos questionamentos apresentada nas “Dicas”?
 - 4.3 Quando você estava interagindo com o CombInter, qual era a sua dinâmica ao responder o problema?
 - 4.4 Você acha que os modelos das dicas 1 e 2 (apresentar um exemplo) contribuem para compreensão do problema? Por quê?
 - 4.5 Você acha que os modelos das dicas 3 e 4 (apresentar um exemplo) contribuem elaboração de estratégias de solução? Por quê?
 - 4.6 Qual dica você achou mais interessante?
 - 4.7 O que mais chamou atenção nesta funcionalidade?
 - 4.8 Questões relacionadas às funções dos andaimes
 - 4.8.1 Você acha que as dicas (ou outro recurso do CombInter) mobilizam o interesse do aluno e a adesão aos requisitos da tarefa (Função de engajamento)?
 - 4.8.2 As dicas (ou outro recurso do CombInter) simplificam a tarefa de tal modo que o aprendiz possa reconhecer os efeitos de sua ação, permitindo o uso de feedbacks para orientação (Função de redução do grau de liberdade)?
 - 4.8.3 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitem a manutenção de direção corresponde em manter o aprendiz direcionado aos objetivos específicos que permitem solucionar a tarefa (Função de manutenção da direção)
 - 4.8.4 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram identificar elementos durante o processo de resolução de problemas que facilitam a aprendizagem (Função de aspectos críticos destacados)?

4.8.5 As dicas (ou outro recurso do CombInter) permitiram criar meios para que a resolução de problemas seja menos estressante (Função de controle de frustração).

5. O que achou da abordagem da solução das situações-problema?

5.1 Você acha que as soluções foram modeladas com objetivo de destacar conceitos e procedimentos relevantes que possam facilitar a compreensão dos estudantes (Função de demonstração).

5.2 Você acha importante o estudante ter acesso a uma solução detalhada? (comparar sua solução, rever aspectos relevantes, ver mais de uma solução, comparar com os auxílios)

5.3 O fato de considerar os aspectos abordados nas dicas influencia a aprendizagem do aluno?

6. O que achou da funcionalidade “Veja mais” ao final da solução de uma situação problema?

6.1 Você acha que perceber variações de um problema influencia na compreensão dos conceitos envolvidos?

7. Você acha que o conjunto dessas funcionalidades foram úteis para você estudar análise combinatória? Contribuíram de alguma forma?

7.1 Quais aspectos das funcionalidades você destacaria?

7.2 Você acha vantajoso usar essa ferramenta? Em que aspectos?

8. O objeto de aprendizagem atendeu as suas expectativas? Por quê?

9. Supondo que você estava estudando combinatória, sem o CombInter, e você encontrou o CombInter. Você o utilizaria para estudar combinatória, mesmo que o professor não tivesse solicitado? Se você utilizaria, qual razão você destacaria que ia fazer você ficar ali estudando, sozinha?

10. O que você mais gostou no CombInter?

11. As orientações técnicas disponíveis são suficientes para utilizar o CombInter de forma satisfatória? O que você achou dessas orientações? Acrescentaria ou mudaria alguma coisa?

12. O que você achou da aula com o CombInter?

12.1 A parte expositiva?

12.2 As atividades para casa?

12.3 Houve maior participação dos alunos durante as aulas?

13. Você acha que o CombInter fez você estudar análise combinatória de forma independente?

14. Você acha que o CombInter fez você, ou até você ter visão dos seus colegas, pedir menos ajuda ao professor?

14.1 Essas dúvidas elas passaram de um estágio mais simples para um estágio mais complexo?

15. Você acha que esse tipo de recurso faria você estudar análise combinatória de forma independente?

16. Você sentiu algum tipo de dificuldade ao utilizar o CombInter?

17. O que você acha que poderia melhorar no CombInter? Ou o que você mudaria?

18. Você quer falar algo mais sobre essa experiência com o CombInter? Algo a acrescentar que não foi questionado?

APÊNDICE I – PRÉ-TESTE

1) Em um certo restaurante especializado em massas, o cliente tem as seguintes opções para compor um prato de macarrão:

Massas
Espaguete
Parafuso

Molhos
Branco
Vermelho

Acompanhamentos
Bacon
Brócolis
Calabresa
Queijo

De quantas maneiras distintas o cliente pode compor o prato escolhendo um tipo de massa, um tipo de molho e um tipo de acompanhamento?

2) De quantas maneiras diferentes um casal com 3 filhos pode ocupar um sofá com 5 lugares, de modo que o casal fique sempre junto?

3) Com 2 bandeiras vermelhas indistinguíveis, 3 azuis também indistinguíveis e 1 branca, quantos sinais diferentes podemos emitir pendurando todas elas, enfileiradas, no mastro de um navio?

4) A senha de acesso a uma rede de computadores é formada por uma sequência de quatro letras distintas seguida por dois algarismos distintos. Quantas são as possíveis senhas de acesso?

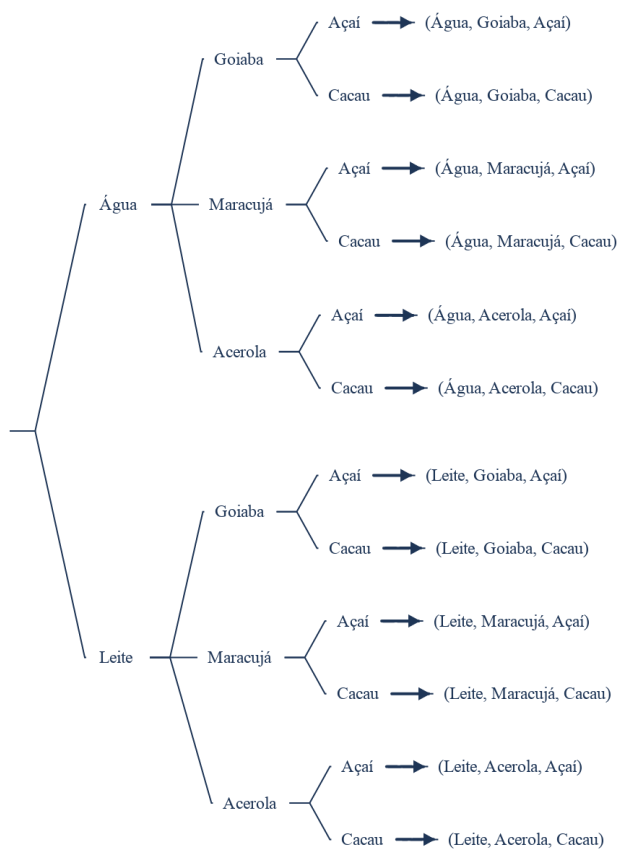
5) Dos 30 alunos de uma classe, 4 serão escolhidos como representantes da turma. Há 20 garotas e 10 garotos. Quantas equipes podem ser formadas com 2 garotas e 2 garotos?

6) Experimente gerar outras representações a partir das situações abaixo:

a) apresente um diagrama da árvore que possa deduzir a expressão $3 \cdot 2 = 6$

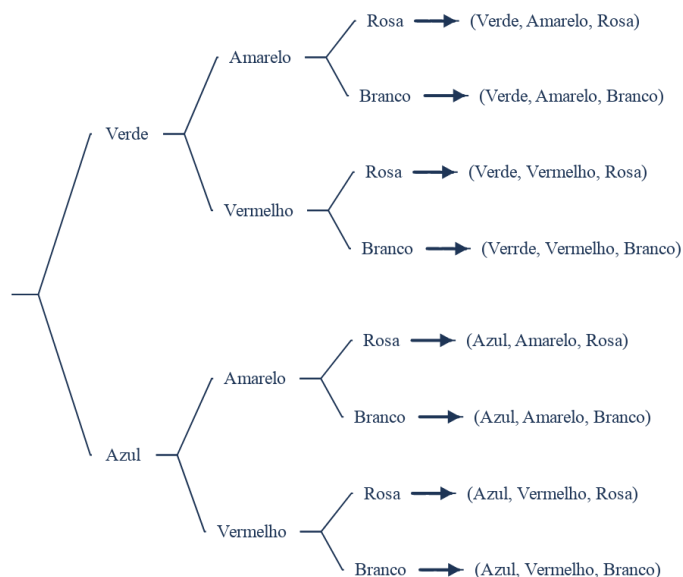
b) elabore uma situação problema que possa ser solucionada a partir da expressão $A_{4,2} = \frac{4!}{2!}$.

c) deduza uma expressão numérica do diagrama da árvore abaixo.



APÊNDICE J – PÓS-TESTE

- 1) Um shopping center tem sete acessos do térreo ao primeiro piso, quatro acessos do primeiro piso ao segundo piso e mais quatro acessos do segundo piso à praça de alimentação, que se localiza no terceiro piso. Utilizando esses acessos, de quantas maneiras distintas uma pessoa pode se deslocar do térreo para a praça de alimentação?
- 2) Uma vez por ano, dona Fátima, que mora no Recife, visita parentes em Caruaru, João Pessoa, Petrolina, Maceió e Garanhuns. De quantos modos diferentes a ordem das Cidades pode ser definida se dona Fátima pretende encerrar as visitas em Petrolina ou Caruaru?
- 3) Uma prova tem 10 questões do tipo teste, cada uma valendo 1 ponto se estiver certa ou 0 ponto se estiver errada (não há “meio certo” nas questões). De quantos modos é possível tirar nota 7 nessa prova?
- 4) Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códigos são compostos por duas partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis), e uma numérica com 5 algarismos (de 10 disponíveis). Sabendo que não há repetição de caracteres nos códigos nem livros com códigos repetidos, quantos livros essa biblioteca pode cadastrar?
- 5) Em um congresso de Educação, há 6 professores de Física e 6 de Matemática. Quantas são as possibilidades de se formar uma comissão de 5 professores com 2 professores de Matemática e 3 de Física?
- 6) Experimente gerar outras representações a partir das situações abaixo:
 - a) apresente um diagrama da árvore que possa deduzir a expressão $2 \cdot 4 = 8$.
 - b) elabore uma situação problema que possa ser solucionada a partir da expressão $A_{5,3} = \frac{5!}{2!}$.
 - c) deduza uma expressão numérica do diagrama da árvore abaixo.



APÊNDICE K – ESPECIFICAÇÃO DE REQUISITOS DO COMBINTER

Requisitos didático-pedagógicos:

Para o desenvolvimento do OA, serão adotados os princípios teóricos discutidos na seção 7.1.1 como abordagem pedagógica, a saber:

- Oportunizar aos estudantes a abordagem dos conceitos matemáticos;
- Propiciar aos estudantes a interação com uma diversidade de situações-problema relacionadas aos conceitos estudados;
- Considerar os aspectos relevantes que interferem na aprendizagem dos conceitos a serem trabalhados;
- Desenvolver mecanismos de interação que permitam o estudante manipular e obter respostas com feedbacks em tempo real;
- Estabelecer questionamentos que permitam auxiliar os estudantes na resolução de problemas;
- Estabelecer andaimes relacionados aos invariantes dos conceitos abordados nas situações problema.
 - a) Andaime de compreensão;
 - b) Andaime para formulação de um plano;
 - c) Andaime para execução do plano;
 - d) Andaime para o retrospecto.

Requisitos funcionais:

- Ao iniciar o OA, o usuário deverá ter acesso aos botões: Conceitos e Atividades;
- Ao acessar o botão Conceitos, o usuário terá acesso aos botões Princípio fundamental da contagem, Permutações simples, Permutações com elementos repetidos, Arranjos simples e Combinações;
- O conteúdo de cada conceito será composto por discussão teórica, exemplos resolvidos e recursos interativos que possam simular as situações apresentadas;
- Ao acessar o botão Atividades, o usuário terá acesso aos botões Iniciante, Intermediário, Avançado e Aleatório;
- Ao acionar os botões Iniciante, Intermediário, Avançado e Aleatório, serão apresentados problemas de modo que o usuário tenha liberdade de escolha;
- Os problemas que serão apresentados ao acionar o botão Aleatório são os problemas de nível iniciante, intermediário e avançado de forma embaralhada.
- Ao acionar algum problema contido no botão Atividades, o usuário terá acesso ao enunciado, simulação, auxílios, solução e problema auxiliar.
- A simulação poderá ser acessada a partir do botão Simular;
- Os auxílios poderão ser acessados a partir do botão Dicas;
- A solução poderá ser acessada a partir do botão Solução;
- O problema auxiliar poderá ser acessado a partir do botão Veja mais;
- Inicialmente, o usuário visualizará apenas o enunciado do problema e o espaço para responder. Caso o estudante acerte o problema, o sistema emitirá um feedback e os botões Simular, Dicas e Solução

serão apresentados. Caso o estudante erre o problema, o sistema emitirá um feedback e os botões Simular e Dicas serão apresentados;

- Ao acionar o botão Dicas, os auxílios irão aparecer à medida que forem sendo respondidos de forma correta, geralmente, na seguinte ordem: auxílio 1, auxílio 2, auxílio 3 e auxílio 4 (conforme especificações definidas nos requisitos didático-pedagógicos);
- O auxílio 1 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo múltipla escolha (com mais de uma opção podendo estar correta), irá conter um enunciado, os itens a marcar e feedbacks relacionados ao auxílio;
- O auxílio 2 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo sim ou não, irá conter um enunciado, os itens a marcar e feedbacks relacionados a cada item;
- O auxílio 3 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo texto;
- O auxílio 4 irá ter as seguintes configurações: ser do tipo sim ou não, irá conter um enunciado, os itens a marcar e feedbacks relacionados a cada item;
- No caso de o estudante errar a resposta do problema e passar por todos os auxílios, o botão Solução irá aparecer na tela do auxílio 4;
- O botão solução irá apresentar a solução do problema;
- Ao final da solução, será apresentado o botão Veja mais;
- Ao acionar o botão Veja mais, será apresentada um problema auxiliar relacionado ao problema de origem;
- O problema auxiliar terá as seguintes configurações: enunciado e feedbacks;
- Em todas as telas, deverá estar disponível um botão de ajuda que oriente o usuário sobre como funciona a dinâmica dos recursos disponíveis naquele respectivo espaço;
- Em todas as telas deverá haver botões de navegação (voltar, próximo, início, etc) que facilitem a navegação do usuário.

Requisitos não funcionais:

Requisitos de confiabilidade

- O conteúdo pedagógico do OA deverá ser elaborado a partir de fontes confiáveis, citando as referências dos documentos consultados;
- Os enunciados dos problemas, suas análises e soluções deverão ser cuidadosamente verificados de modo a evitar possíveis ambiguidades e erros;
- A forma de apresentação do conteúdo do OA deve ser clara, simples e com nível de detalhe elevado, considerando o público alvo do OA.

Requisitos de usabilidade

- O OA deverá manter uma consistência visual na apresentação de informações (títulos, formatação/disposição dos textos e recursos gráficos);
- Os botões de navegação deverão ser facilmente reconhecíveis, compreensíveis e deverão manter um padrão entre as telas do OA;

- Deve permitir que o usuário se situe durante a navegação entre as telas; em todas as telas deverá estar disponível formas de ajuda para orientar sobre como proceder de acordo com os recursos presentes na tela; além do aspecto navegacional, o OA irá permitir a interatividade (alterar configurações, testar situações, editar, etc.) por meio dos recursos interativos disponíveis ao usuário (Simular e Dicas);
- As dinâmicas do OA irão utilizar uma sequência de ações padronizada e de fácil entendimento.

Requisitos de acesso

- O OA terá três perfis diferentes: o administrador do sistema, o professor e o aluno;
- O perfil do aluno dará acesso ao conteúdo do OA e ao guia do estudante;
- O perfil do professor dará acesso ao conteúdo do OA, ao guia do professor e a uma tela de gerenciamento dos estudantes (o que foi feito, quantidade de erros, acertos, etc.);
- O perfil do administrador do sistema permitirá gerenciar professores.

Requisitos de disponibilidade

- O OA deverá estar disponível numa página Web que será criada para manter o software e seu histórico de atualizações e formas de uso;
- O OA deve ficar disponível no ambiente de EAD da instituição, juntamente com o metadado.

Requisitos de reusabilidade

- O OA apresentará os conceitos de princípio fundamental da contagem, permutações simples, permutações com elementos repetidos, arranjos simples e combinações de modo que possam ser estudados separadamente;
- O professor poderá selecionar os tipos de auxílios que os estudantes irão visualizar, de modo a priorizar a discussão de situações problema de conceitos distintos.

Requisitos de acessibilidade

- O OA poderá ser acessado por vários sistemas operacionais e diferentes dispositivos (computadores, notebooks, celulares, tablets), exigindo apenas um navegador Web compatível.

Requisitos de desempenho

- O OA será desenvolvido para que possa atender uma quantidade elevada de estudantes simultaneamente de modo que as respostas entre as ações do estudante e o software sejam rápidas e possam promover precisão dos resultados.

Requisitos de portabilidade

o OA funcionará adequadamente em diversos navegadores Web e não necessitará de instalação.

Requisitos de ajuda e documentação

- O OA irá disponibilizar o guia do professor, detalhando as principais funcionalidades do OA para esse tipo de perfil, bem como alguns cenários de uso do OA em sala de aula; e o guia do aluno, apresentando as principais funcionalidades do OA para esse tipo de perfil.

Requisitos de design de interface

- O OA irá apresentar textos com fonte e tamanho adequados, além de possuir um contraste suficiente entre fontes e fundo de tela, facilitando a leitura;
- O uso de imagens e outros recursos visuais deverão ser utilizados para ilustrar conceitos, situações problema e explicações, evitando o seu uso para efeito estritamente estético.

Requisitos de licenciamento e direitos autorais

- O OA deverá estabelecer um tipo de licença que permita a sua utilização de forma gratuita, desde que mencione a autoria e o local onde o OA está depositado.

Fonte: adaptado de Braga e Kelly (2015a).

APÊNDICE L – RELATÓRIO DE ANÁLISE DE CONTEXTO

Caracterização do OA	
Tipo de objeto de aprendizagem:	Software educacional
Objetivos pedagógicos que se desejam atingir:	Contribuir para que estudantes: • compreendam problemas combinatórios (identificar os dados, condicionantes e incógnita); • desenvolvam estratégias para solucionar problemas combinatórios; • compreendam os invariantes combinatórios; • aumentem o repertório de representações simbólicas relacionadas à análise combinatória.
Área de conhecimento:	Ciências Exatas e da Terra
Disciplina principal:	Matemática
Ementa em que o OA se encaixa:	Análise combinatória
Tópicos dentro da ementa:	Princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos e combinação
Descrição breve do OA:	Este OA disponibiliza a discussão de conceitos de análise combinatória (princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos e combinação), levando em consideração uma diversidade de situações-problema resolvidas para evidenciar diversas situações, invariantes e representações simbólicas relacionadas ao conceito; Traz diversos problemas combinatórios para resolver que, mediante dificuldades do estudante e a seu critério, pode acionar auxílios (em forma de questionamentos e feedbacks) e recursos interativos, que contribuem para compreensão do problema, a elaboração de estratégias de solução e o entendimento de soluções propostas; apresenta as soluções dos problemas propostos, priorizando soluções construtivas e evidenciando como os auxílios disponibilizados contribuíram para solucionar os problemas; disponibiliza oportunidades para o estudante elaborar problemas e/ou converter representações simbólicas.
Público alvo:	Estudantes do 2º ano do ensino médio
Conhecimento prévio do público alvo:	Matemática básica
Grau de Acessibilidade:	O OA poderá ser acessado por dispositivos móveis e computadores (online e off-line) a partir de um navegador web compatível.
Fluência tecnológica:	Informática básica
Problema atual:	Baixa aprendizagem dos conceitos relacionados à análise combinatória; Incompreensão dos invariantes combinatórios; e baixo repertório de representações simbólicas.
Solução esperada:	Espera-se, com a aplicação do OA junto aos estudantes, que eles compreendam minimamente os conceitos de análise combinatória; Aumente a compreensão dos invariantes combinatórios; e aumente o repertório de representações simbólicas.
Reusabilidade do OA	
Disciplinas nas quais o OA também poderá ser utilizado:	Matemática discreta, Probabilidade e Estatística
Tópicos dentro das disciplinas:	Princípio fundamental da contagem, permutações, arranjos e combinação

Componentes do objeto de aprendizagem:	Textos, imagens, recursos interativos
Problema pedagógico que o OA pode solucionar:	Dificuldades relacionadas a: compreender problemas combinatórios; elaborar estratégias para solucionar problemas combinatórios; e compreender os invariantes combinatórios.
Como o OA pode contribuir para a solução do problema pedagógico?	O OA irá dispor os conceitos combinatórios com situações-problema resolvidas, enfatizando aspectos como a compreensão do problema, estratégias de solução e os invariantes dos conceitos envolvidos; e de situações-problema para o estudante analisar e construir soluções que, mediante dificuldade do estudante, obterá auxílios gradativos (em forma de questionamentos e feedbacks) que permitem contribuir para compreensão do problema, a elaboração de um plano de solução e entender as soluções propostas pelo OA. Além disso, o OA irá disponibilizar recursos interativos em que os estudantes poderão experimentar as situações de contagem, conforme cada situação-problema.
Cenário de uso do OA	
Modalidade:	A distância ou presencial
Descrição do cenário:	Cenário 1: o OA pode ser utilizado durante a discussão dos conceitos de análise combinatória na sala de aula; Cenário 2: o OA pode ser utilizado após a discussão dos conceitos de combinatória em sala de aula; Cenário 3: o OA pode ser utilizado para o estudo individualizado do estudante.

Fonte: adaptado de Braga e Ponchio (2015a).

APÊNDICE M – PROTÓTIPO DO OA

Ao acessar o CombInter, será disponibilizada a tela inicial do OA (figura 20), com a identificação dos elementos da tela, com destaque para o sistema de login para o professor e o aluno. A partir do login, vai ser possível o professor obter um relatório sobre o desempenho do estudante. Além disso, o aluno poderá acompanhar o seu desempenho e emitir relatórios.

Figura 20 - Protótipo do OA: tela inicial

Logotipo do CombInter

Aqui aparecerá uma pequena janela orientando o que o usuário pode fazer na tela "atual".

CombInter
Combinatória Interativa

Vai ter uma imagem relacionada à combinatória

Sistema de login para gerar relatórios de acertos e erros; Acompanhamento do estudante.

Usuário

Senha

☐ Professor

☐ Estudante

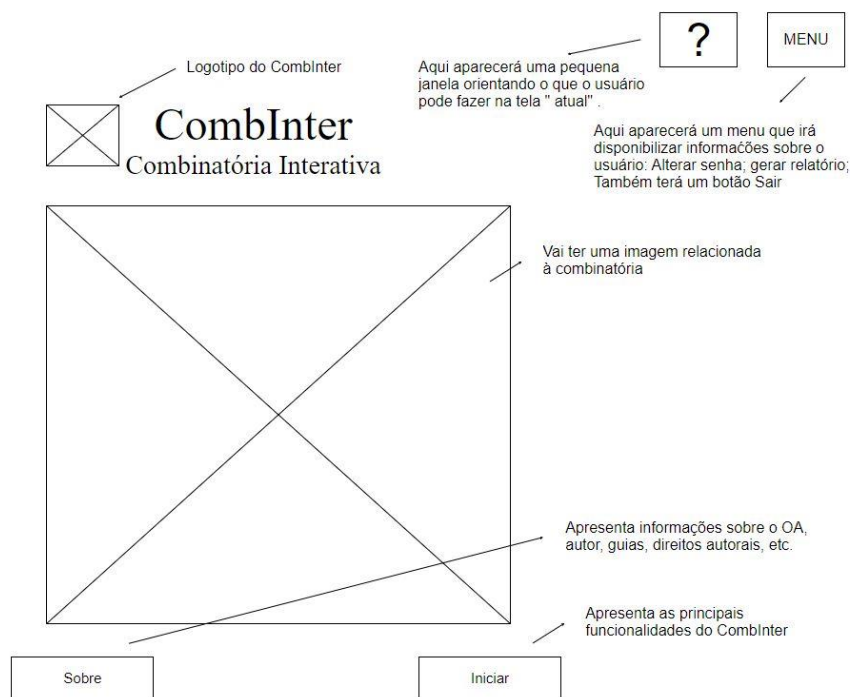
Entrar

Esqueceu a senha?

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao realizar o login (acionar o botão “Entrar”), o usuário terá acesso à tela principal do OA, na qual será possível obter informações sobre o OA, a partir do botão “Sobre”, e acessar as principais funcionalidades a partir do botão “Iniciar”, conforme figura 21.

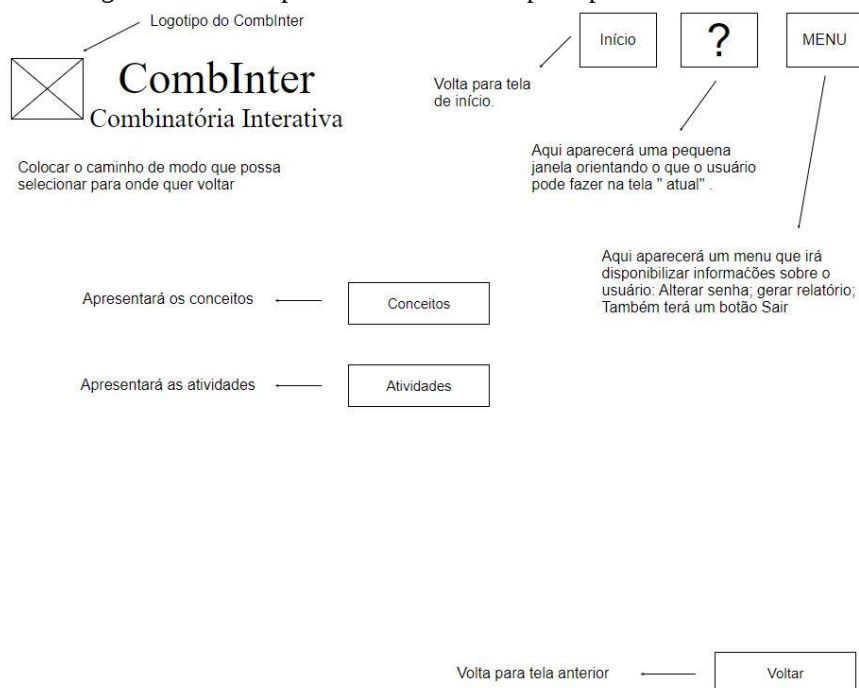
Figura 21 – Protótipo do OA: tela principal



Fonte: elaborado pelo autor.

Ao acionar o botão “Iniciar”, o usuário terá acesso às principais funcionalidades do OA, a saber: Conceitos e Atividades (figura 22).

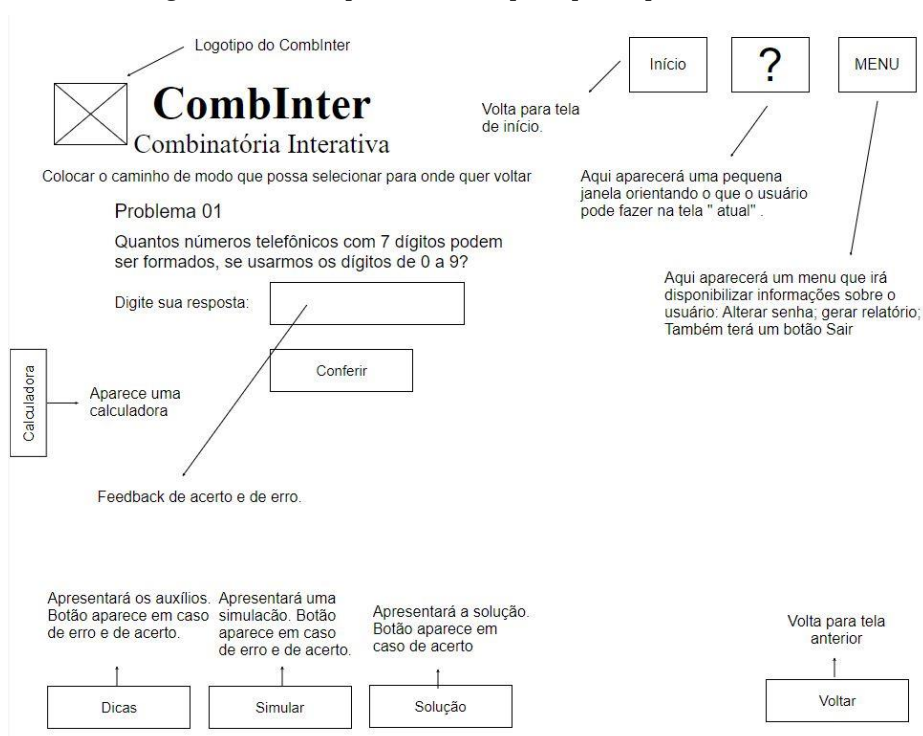
Figura 22 – Protótipo do OA: tela com as principais funcionalidades



Fonte: elaborado pelo autor.

O design da tela dos conceitos que podem ser estudados e da tela dos níveis das atividades é semelhante ao da tela da figura 22. Para fins de exemplificação no protótipo, apresentaremos as telas referentes ao problema 1. Os demais problemas seguirão o mesmo modelo de funcionalidades. Ao selecionarmos o nível iniciante e o problema 1, teremos acesso à tela que possui o enunciado do problema e algumas opções de interação, conforme a figura 23.

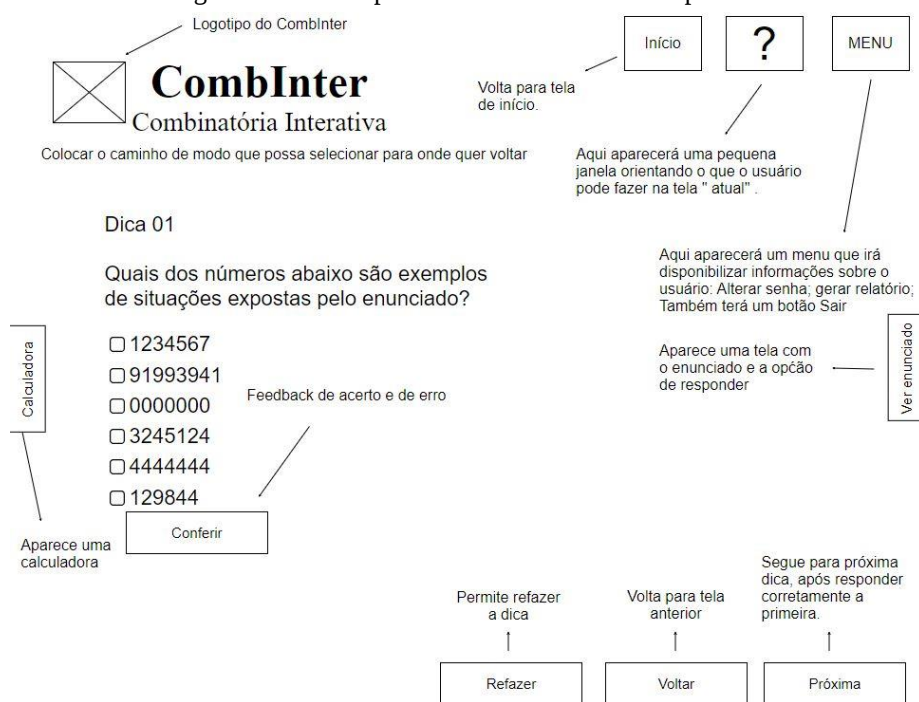
Figura 23 – Protótipo do OA: tela principal do problema 1



Fonte: elaborado pelo autor.

Ao acionar o botão “Dicas”, o usuário terá acesso à tela do primeiro auxílio (dica 1), que terá o seguinte aspecto apresentado na figura 24:

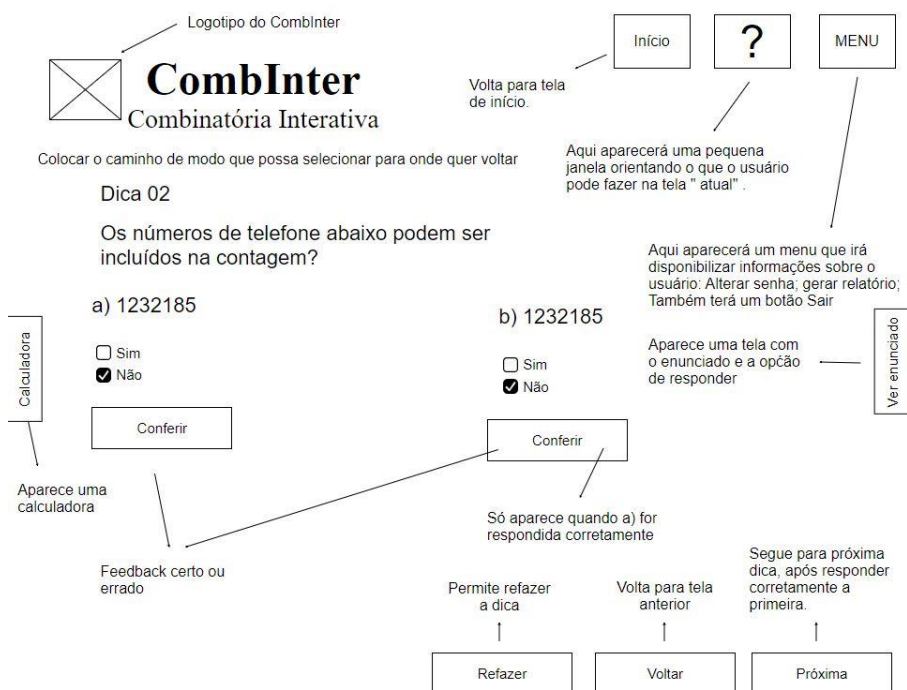
Figura 24 – Protótipo do OA: Tela da dica 1 do problema 1



Fonte: elaborado pelo autor.

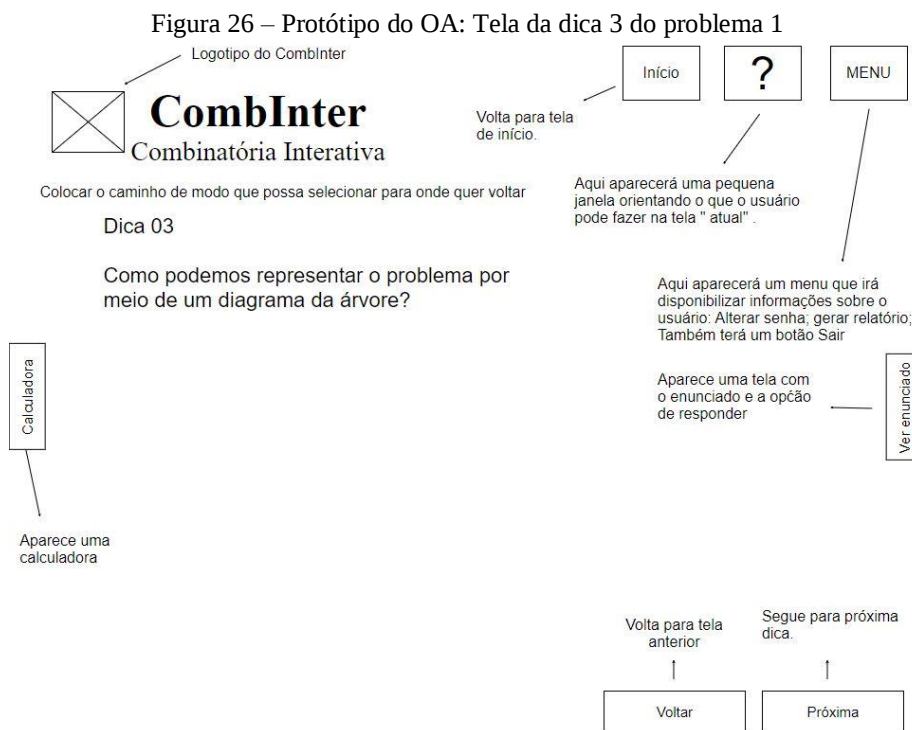
Após responder a dica 1, o usuário pode tentar responder a situação problema ou acionar uma nova dica a partir do botão “Próxima”. Ao acionar este botão, o OA irá apresentar o segundo auxílio (dica 2), que terá o seguinte aspecto apresentado na figura 25:

Figura 25 – Protótipo do OA: Tela da dica 2 do problema 1



Fonte: elaborado pelo autor.

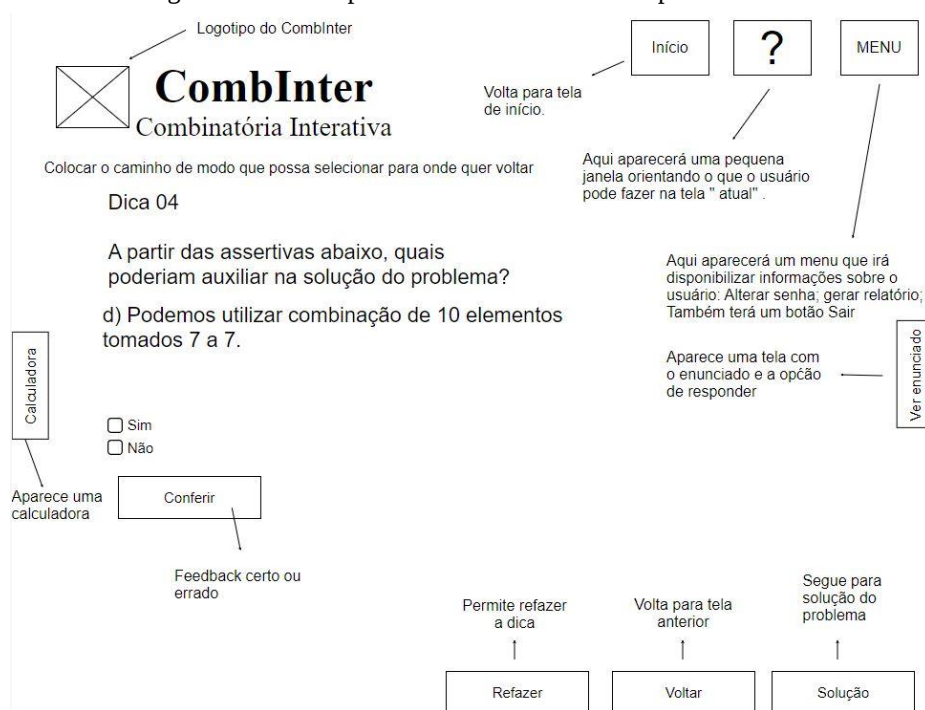
Após responder a dica 2 (que pode haver vários itens), o usuário pode tentar responder a situação problema ou acionar uma nova dica a partir do botão “Próxima”. Ao acionar este botão, o OA irá apresentar o terceiro auxílio (dica 3), que terá o seguinte aspecto apresentado na figura 26:



Fonte: elaborado pelo autor.

Após refletir sobre a dica 3 (que geralmente é em forma de texto e/ ou diagrama), o usuário pode tentar responder a situação problema ou acionar uma nova dica a partir do botão “Próxima”. Ao acionar este botão, o OA irá apresentar o quarto auxílio (dica 4), que terá o seguinte aspecto apresentado na figura 27:

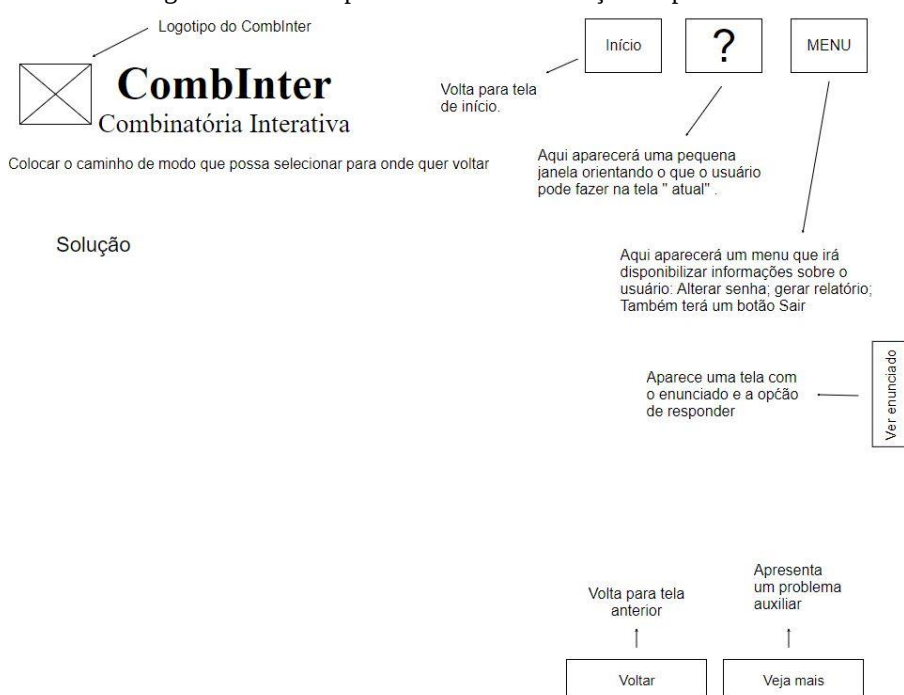
Figura 27 – Protótipo do OA: Tela da dica 4 do problema 1



Fonte: elaborado pelo autor.

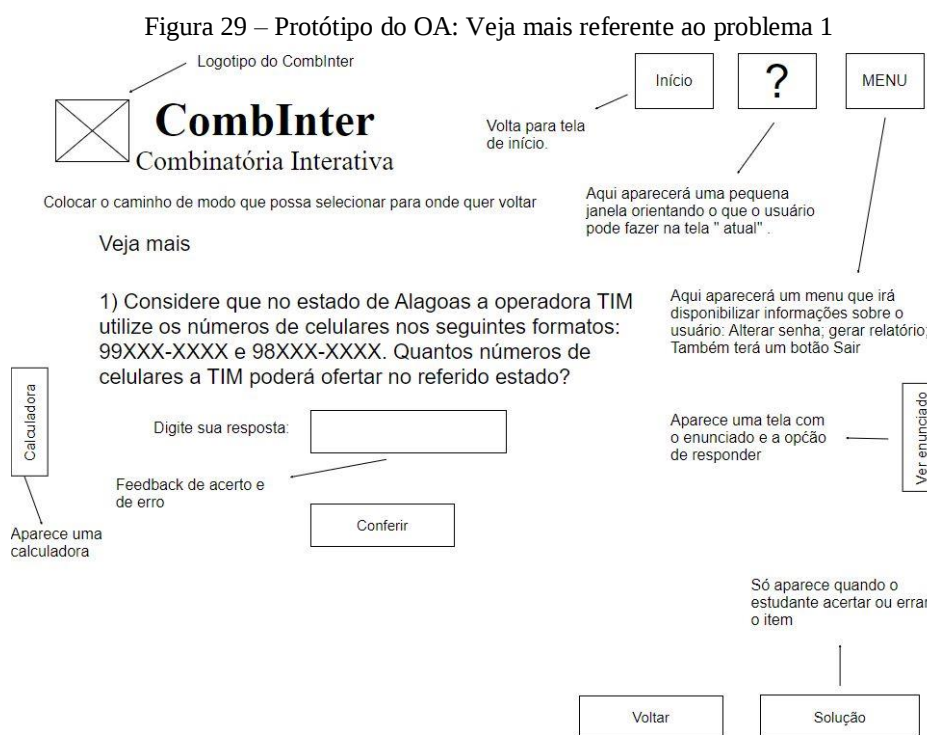
Após responder a dica 4 (que pode haver vários itens), o usuário pode tentar responder a situação problema ou acionar a solução do problema a partir do botão “Solução”. Ao acionar este botão, o OA irá apresentar a solução do problema, que terá o seguinte aspecto apresentado na figura 28:

Figura 28 – Protótipo do OA: Tela da solução do problema 1



Fonte: elaborado pelo autor.

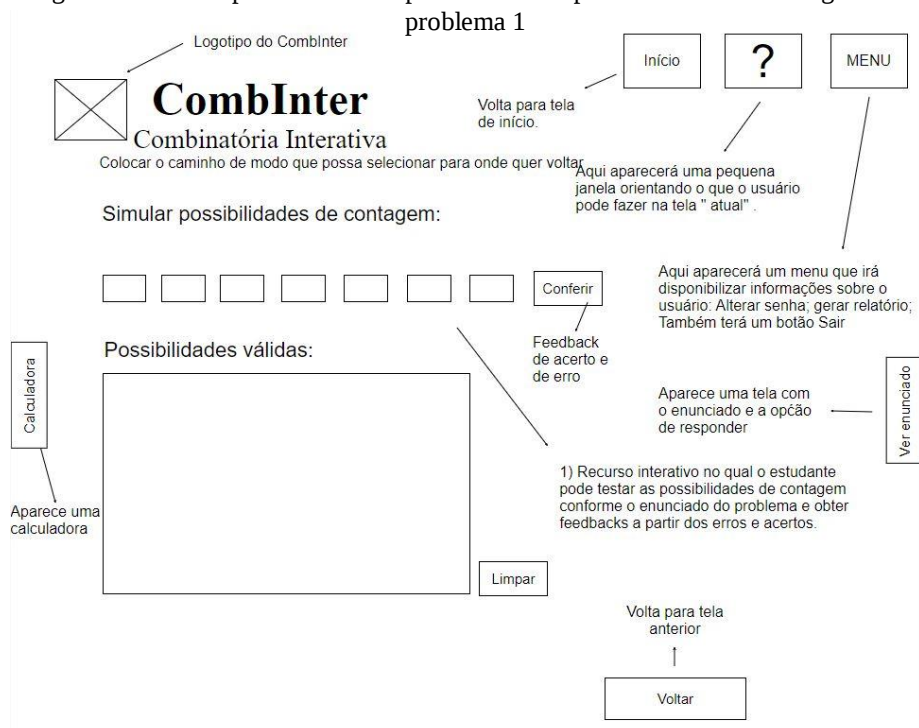
Após refletir sobre a solução da situação problema, o usuário pode analisar e responder um problema auxiliar relacionado ao problema de origem a partir do botão “Veja mais”. Ao acionar este botão, o OA irá apresentar o problema, que terá o seguinte aspecto apresentado na figura 29:



Fonte: elaborado pelo autor.

Após responder o problema auxiliar, o usuário pode visualizar e analisar a solução a partir do botão “Solução”. Ao acionar este botão, o OA irá apresentar a solução do problema, que terá o mesmo aspecto apresentado, anteriormente, na figura 28. Além do botão “Dicas”, observado na figura 23, o usuário pode acionar o botão “Simular” que permite exibir um recurso interativo em que é possível simular as situações de contagem, como podemos observar na figura 30.

Figura 30 – Protótipo do OA: Tela para simular as possibilidades de contagem do problema 1



Fonte: elaborado pelo autor.

A partir da tela principal do problema (figura 23) ainda é possível acionar o botão “Solução” que será exatamente a mesma tela apresentada na figura 28. Observe que os botões “Dicas” e “Simular” ficam disponíveis apenas quando o usuário tentar responder o problema (seja acertando ou errando) e o botão “Solução” aparece caso o usuário tenha acertado o problema. Além desse modelo geral de problema, o OA disponibilizará outro modelo envolvendo a elaboração de problemas. Para fins de exemplificação no protótipo, consideremos que tal modelo esteja presente no problema 2. Desse modo, o problema 2 terá o seguinte aspecto (figura 31):

Figura 31 – Protótipo do OA: Tela do problema 2

Logotipo do CombInter

CombInter
Combinatória Interativa

Colocar o caminho de modo que possa selecionar para onde quer voltar

Problema 02 - Experimente gerar outras representações a partir das situações abaixo:

a) elabore uma situação problema que possa ser representada a partir da tabela abaixo:

Líquido \ Fruta	Goiaba	Maracujá	Acerola
Água	(Água, Goiaba)	(Água, Maracujá)	(Água, Acerola)
Leite	(Leite, Goiaba)	(Leite, Maracujá)	(Leite, Acerola)

Espaço para o estudante digitar (textos, imagens, fórmulas, tabelas, etc.)

Salvar

O botão solução só irá aparecer quando o estudante visualizar as dicas e inserir uma resposta e clicar em salvar

Solução

Volta para tela anterior

Voltar

Segue para o próximo item

Próxima

Dicas

Dica 01

Dica 02

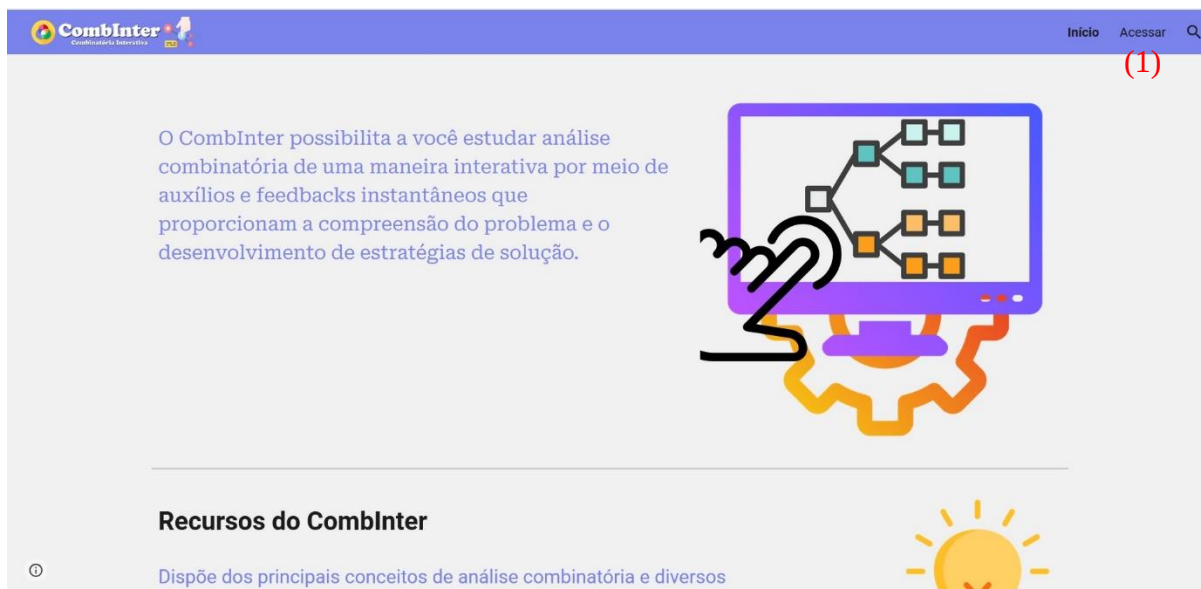
Fonte: elaborado pelo autor.

Após responder o problema, o usuário pode visualizar e analisar a solução a partir do botão “Solução”. Ao acionar este botão, o OA irá apresentar a solução do problema, que terá o mesmo aspecto apresentado, anteriormente, na figura 28.

APÊNDICE N – DESENVOLVIMENTO DO OA

Inicialmente, apresentamos a tela inicial do CombInter (figura 32).

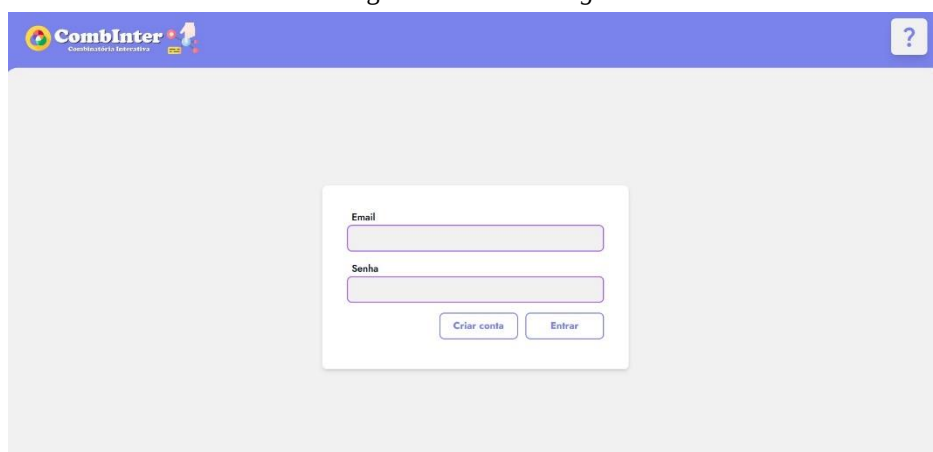
Figura 32 – Tela inicial do CombInter



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesta página, são descritos o objetivo e as principais funcionalidades do CombInter e como é possível acessá-lo. Ao acionar o botão “Acessar” (1), é disponibilizada a tela de *login* (figura 33).

Figura 33 – Tela de *login*



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesta tela, é solicitado o *login* e a senha para ter acesso às funcionalidades do sistema, bem como disponibiliza a opção de “criar conta” para que o usuário possa fazer o registro no

sistema. Devido a esta característica, três tipos de usuários são suportados pelo sistema: administrador, professor e estudante, conforme seção 7.1.2.2.3. Ao entrar no sistema, será apresentada a tela principal do CombInter (figura 34).

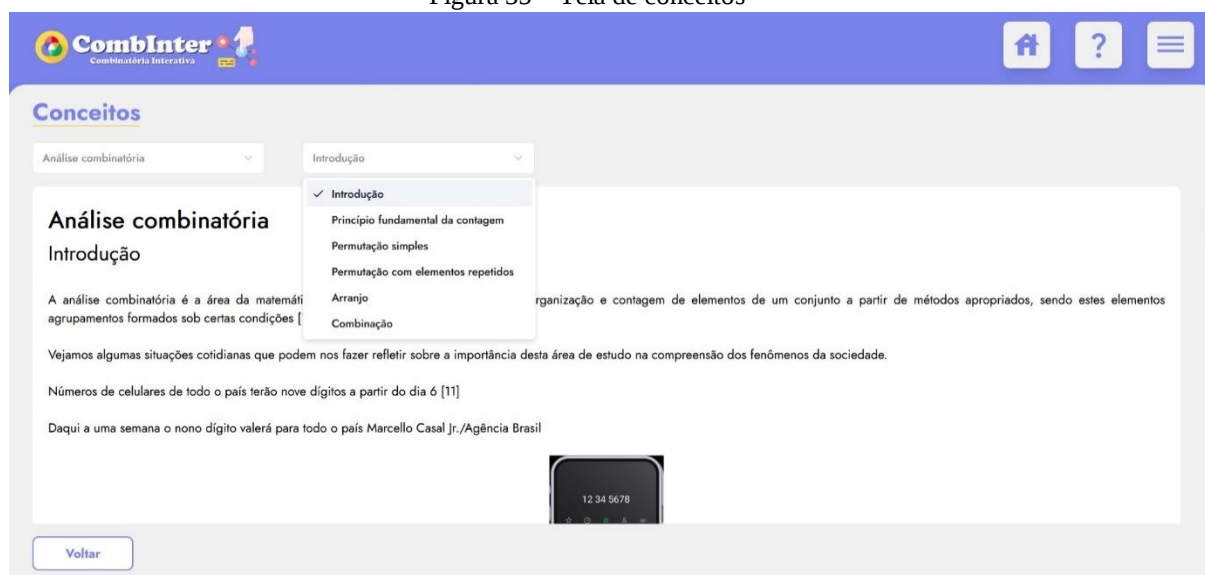
Figura 34 – Tela principal



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesta tela, estão disponíveis os principais componentes do CombInter, a saber: Conceitos, Atividades e Sobre. Na parte superior, estão disponíveis, respectivamente, os botões “página inicial”, “ajuda” e “menu principal”. O botão “página inicial” tem a função de retornar para a tela inicial; o botão “ajuda” é comum em todas as telas do CombInter e tem a função de descrever as possíveis ações que usuário pode realizar de acordo com a tela ativa; o botão “menu principal” apresenta algumas funções relacionadas ao tipo de usuário. Ao acionar a opção

Figura 35 – Tela de conceitos

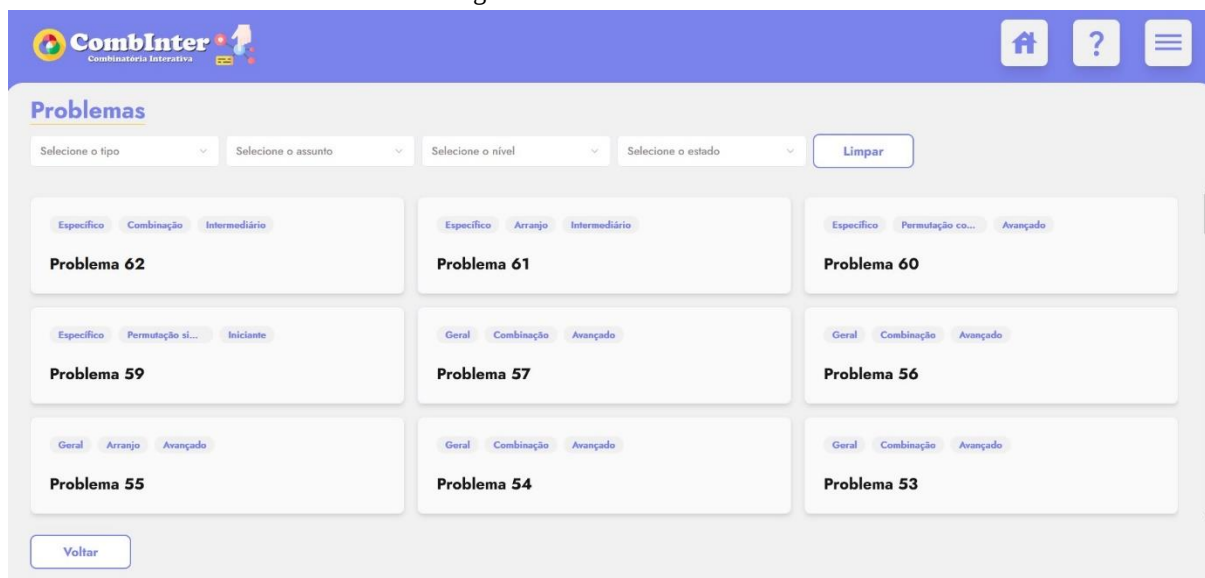


Fonte: elaborado pelo autor.

“Conceitos”, é disponibilizada a tela de Conceitos (figura 35).

Nesta tela, são disponibilizados os conteúdos de análise combinatória referentes ao ensino médio, a saber: Introdução, Princípio fundamental da contagem, Permutação simples, Permutação com elementos repetidos, Arranjo e Combinação. Ao acionar a opção “Atividades” da tela principal, é disponibilizada a tela de Atividades (figura 36).

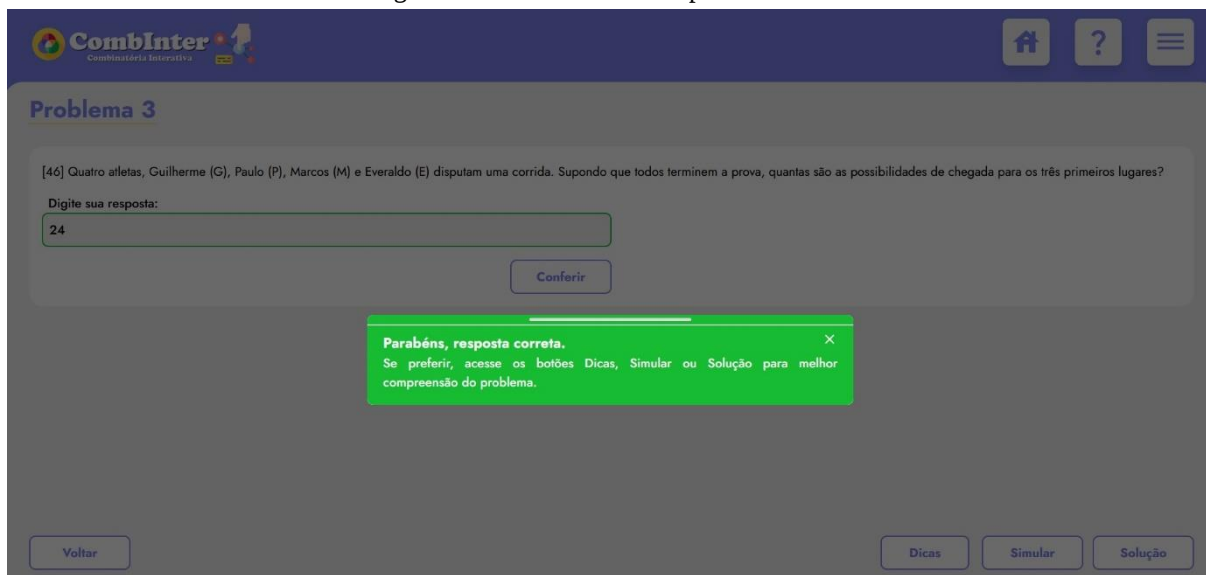
Figura 36 – Tela de atividades



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesta tela, são disponibilizados a lista de problemas que podem ser filtrados por Tipo, Assunto e Nível. Os problemas podem ser do tipo “Geral” e “Específico”, conforme caracteriza-

Figura 37 – Tela referente ao problema 3



Fonte: elaborado pelo autor.

dos na seção 7.1.2.2.1. Para fins de exemplificação de um problema do tipo “Geral”, apresentamos o problema 3 (figura 37).

Nesta tela, são apresentados o enunciado do problema, o campo de resposta e botões que aparecem de acordo com a interação do estudante. Por exemplo, ao ser informada uma resposta correta, o sistema emite um feedback informando que o usuário pode acionar os botões “Dicas”, “Simular” e “Solução” para uma melhor compreensão do problema. Caso a resposta informada esteja incorreta, apenas os botões “Dicas” e “Simular” tornam-se disponíveis. Ao acionar o botão “Simular”, é apresentada a tela de simulação referente ao problema 3 (figura 38).

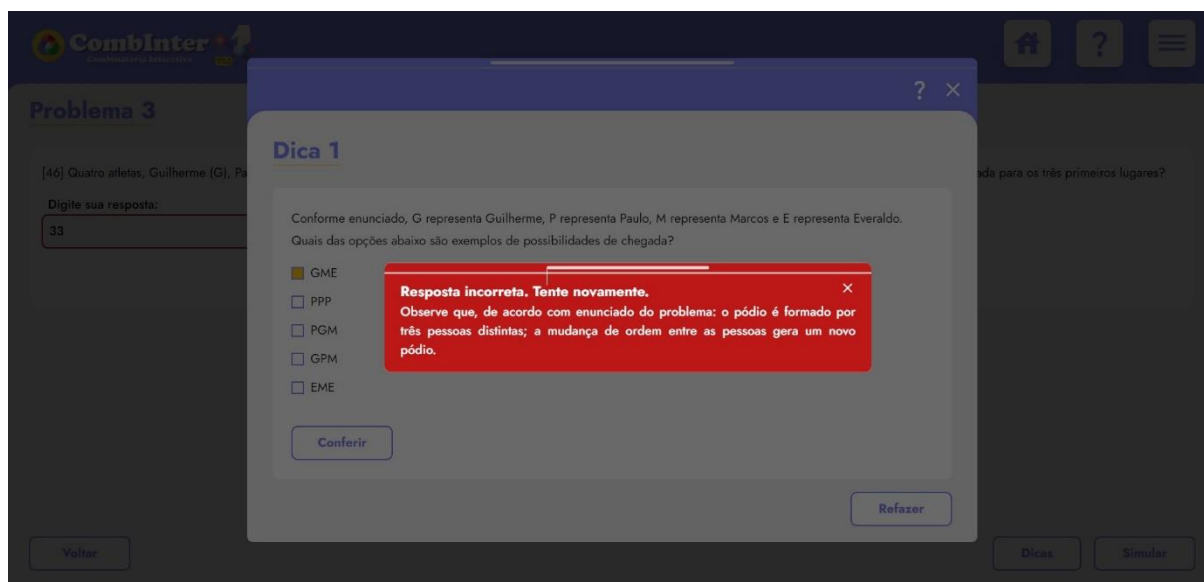
Figura 38 – Tela de simulação referente ao problema 3

Fonte: elaborado pelo autor.

Nesta tela, o usuário pode formar agrupamentos de acordo com o enunciado do problema e, ao acionar o botão “Conferir”, obter feedbacks personalizados de acordo com o agrupamento informado. Por exemplo, informamos o agrupamento “GGM” e obtemos como feedback “Pódio inválido. Note que o pódio deve possuir 3 atletas distintos”.

Caso o estudante opte por acionar as dicas, inicialmente é disponibilizada a dica 1 (figura 39). Esta dica é caracterizada por ser de múltipla escolha, questionar o estudante sobre possíveis agrupamentos compatíveis com o enunciado e ter um feedback que informa ao estudante as condições relacionadas ao enunciado do problema.

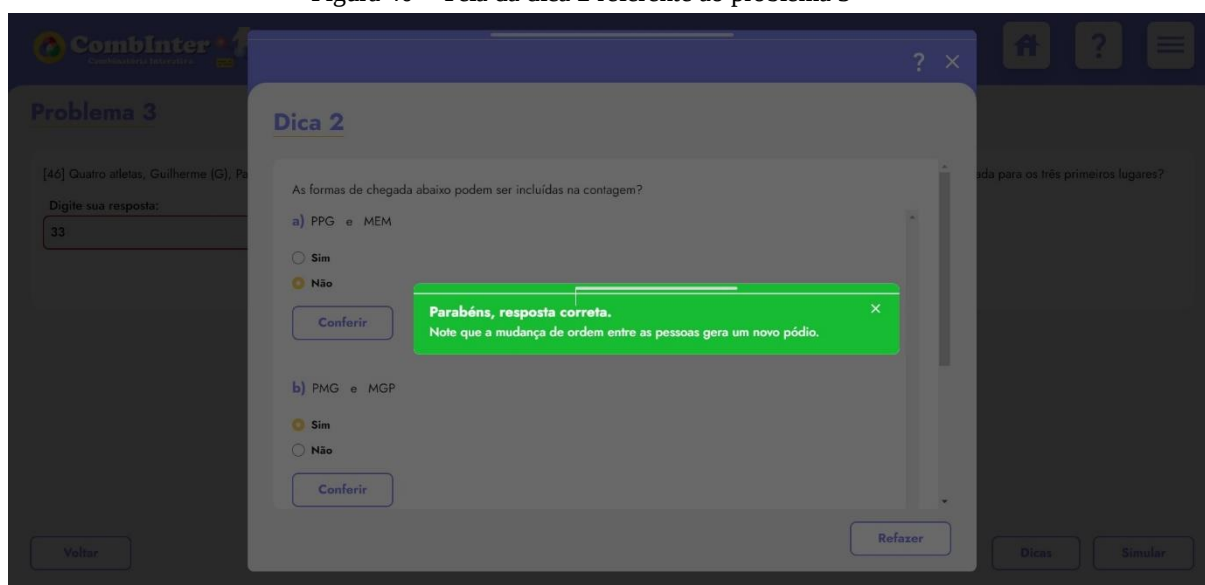
Figura 39 – Tela da dica 1 referente ao problema 3



Fonte: elaborado pelo autor.

Após o estudante responder corretamente a dica 1, a dica 2 fica disponível. Esta dica é caracterizada por ser do tipo Sim ou Não, questionar de forma individual os agrupamentos que podem ser incluídos na contagem e por trazer feedbacks referentes a cada agrupamento apresentado (figura 40).

Figura 40 – Tela da dica 2 referente ao problema 3



Fonte: elaborado pelo autor.

Após responder todos os itens da dica 2 corretamente, a dica 3 é disponibilizada. Esta dica é caracterizada por ser do tipo texto e aborda uma interpretação do problema que contribua para solucionar o problema ou traz uma representação que auxilie no processo de interpretação do problema (figura 41).

Figura 41 – Tela da dica 3 referente ao problema 3

Problema 3

[46] Quatro atletas, Guilherme (G), Pa...

Digite sua resposta:

33

Dica 3

Apresentamos, abaixo, a construção do diagrama da árvore do problema:

Ouro	Prata	Bronze	Resultados possíveis
G	P	M	GPM
		E	GPE
	M	P	GMP
		E	GME
P	G	M	PGM
		E	PGE
	M	P	PMG
		E	PME
M	G	P	MPG
		E	MPE
	P	M	MGP
		E	MGE
E	G	P	EGP
		M	EGM
	P	M	EPG
		E	EMP

A partir deste diagrama é possível entender a composição dos agrupamentos e estabelecer uma expressão numérica

Voltar Dicas Simular

Fonte: elaborado pelo autor.

Após a visualização da dica 3, a dica 4 é disponibilizada. Esta dica é caracterizada por ser do tipo Sim ou Não e abordar assertivas com feedbacks individualizados que podem contribuir para a solução do problema (figura 42).

Figura 42 – Tela da dica 4 referente ao problema 3

Problema 3

[46] Quatro atletas, Guilherme (G), Pa...

Digite sua resposta:

33

Dica 4

A partir das assertivas abaixo, quais poderiam auxiliar na solução do problema?

a) Como as formas de chegada devem possuir 3 pessoas, podemos fixar o esquema da forma __, __, __ e verificar as possibilidades da seguinte maneira: quatro atletas para o primeiro caso; quatro atletas para o segundo caso; e quatro atletas para o terceiro caso. Por fim, aplicamos o princípio fundamental da contagem.

☐ Sim

☒ Não

Conferir

Parabéns, resposta correta.

Observe que essa estratégia está considerando que a mesma pessoa ocupe mais de um pódio ao mesmo tempo, o que não é possível. Por exemplo, MMP está sendo contabilizado como um possível pódio.

b) Como temos quatro pessoas para escolhermos o pódio formado por três pessoas, podemos usar combinação de 4 elementos tomados 3 a 3.

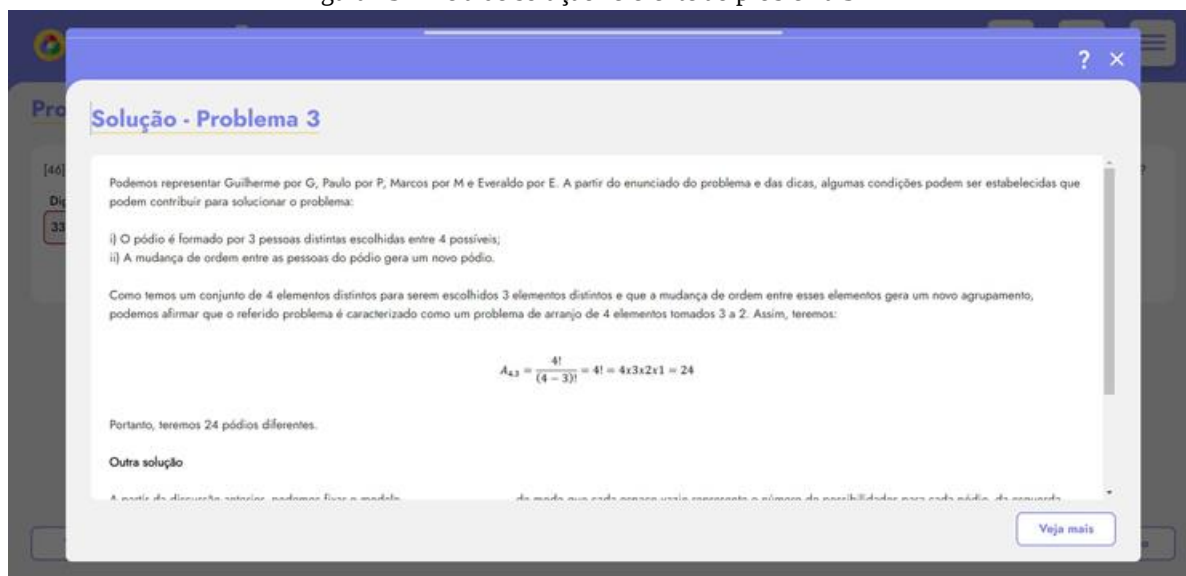
☐ Sim

Refazer Dicas Simular

Fonte: elaborado pelo autor.

Após responder corretamente a dica 4, o sistema disponibiliza a solução do problema (figura 43) que pode ser acionada a partir do botão “Solução” disponível na tela do enunciado do problema. A solução aborda como as discussões realizadas nas dicas foram utilizadas para construir uma ou mais soluções do problema. Ao final da tela de solução do problema, é disponibilizado o botão “Veja mais”.

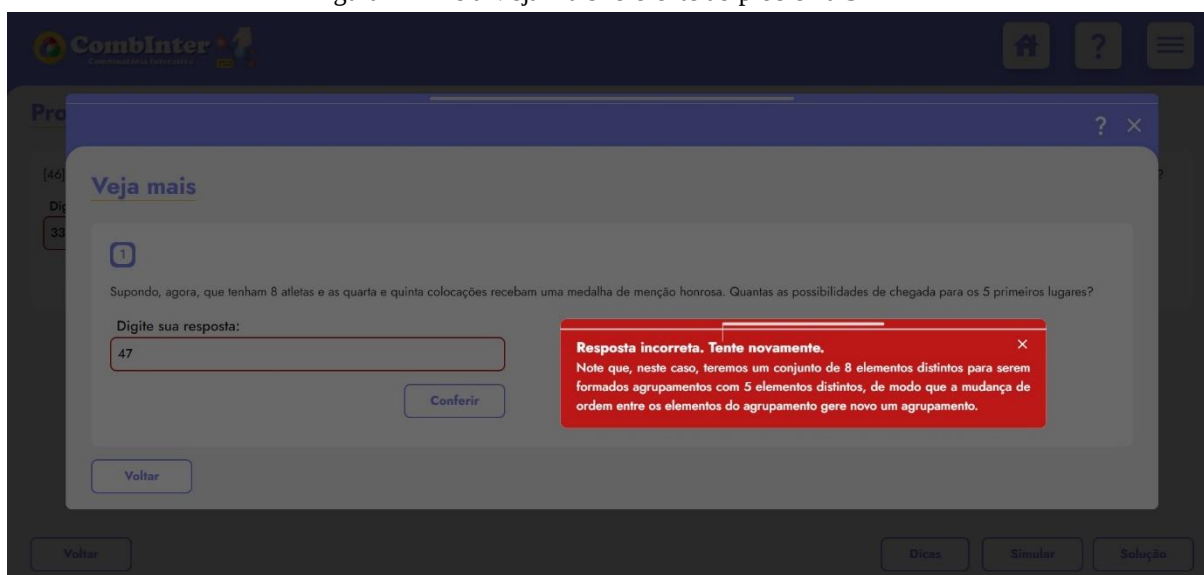
Figura 43 – Tela de solução referente ao problema 3



Fonte: elaborado pelo autor.

Ao acionar o botão “Veja mais”, é disponibilizado um ou mais problemas auxiliares relacionados ao problema de origem, de modo que as estratégias de solução utilizadas no problema de origem possam ser utilizadas nos problemas auxiliares (figura 44).

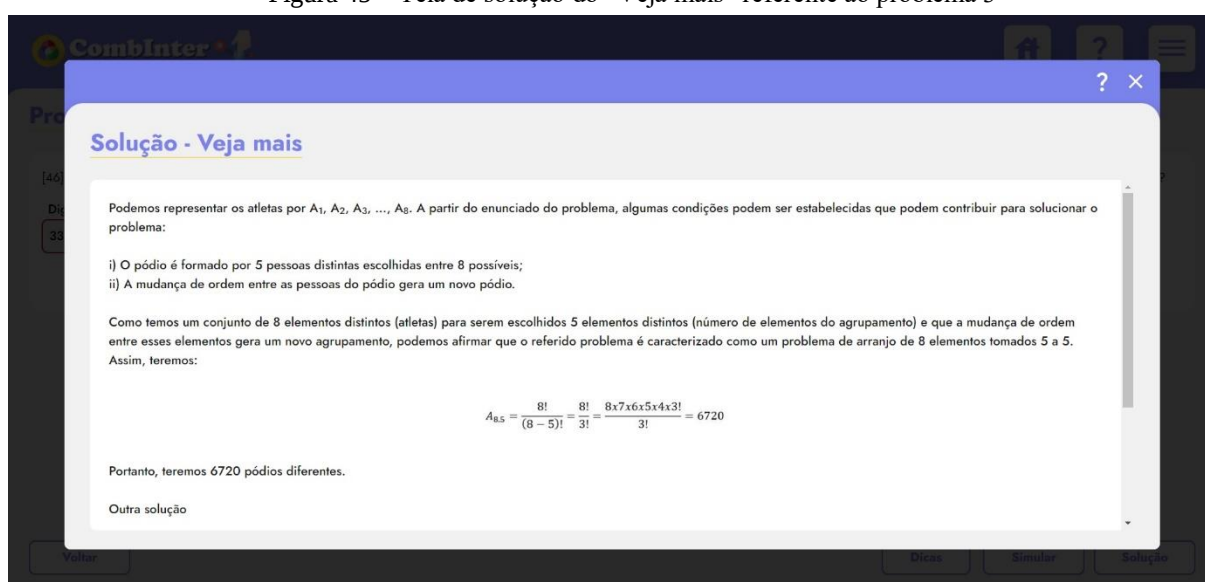
Figura 44 - Tela Veja mais referente ao problema 3



Fonte: elaborado pelo autor.

Diferentemente do problema de origem, o problema trazido no “Veja mais” não possui dicas. Entretanto, o feedback informado ao usuário ao acertar ou errar este problema indica uma estratégia de solução válida relacionada ao problema de origem. Apenas ao responder corretamente o problema trazido pelo “Veja mais” é que a solução é disponibilizada. Para acessá-la, estará disponível um botão “Solução” ao final da tela apresentada na figura 44. Ao acionar o botão “Solução”, é apresentada a solução do problema contido no Veja mais (figura 45).

Figura 45 – Tela de solução do “Veja mais” referente ao problema 3



Fonte: elaborado pelo autor.

Durante esse processo de interação com a simulação, dicas, solução e problema auxiliar, o usuário pode tentar responder o problema de origem. Além do problema de tipo “Geral”, o CombInter dispõe também do problema do tipo “Específico”. Para fins de exemplificação, selecionamos o problema 62 (figura 46).

Figura 46 – Tela de simulação referente ao problema 62

Problema 62

Experimente gerar outras representações a partir das situações abaixo:

A | B | C | D | E

a) Elabore uma situação problema que possa ser solucionada a partir da expressão abaixo:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

Digite sua resposta:

Fonte Tamanho Formatos B U I S X₂ X²

Teste com a resposta do item a) referente ao problema 62.

Comentário

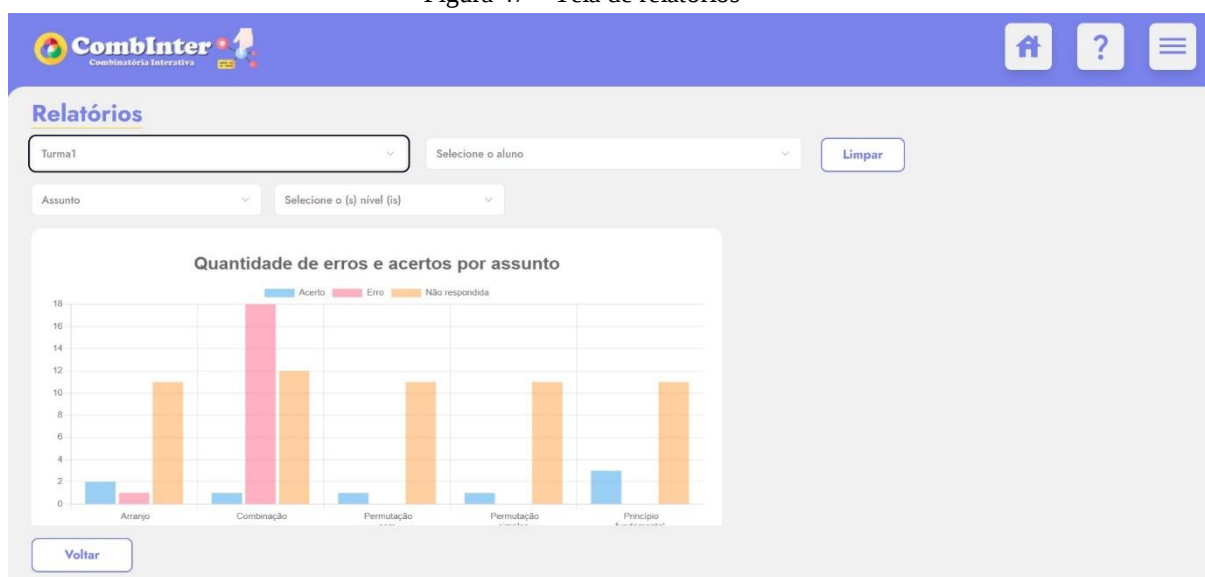
Voltar Dicas Solução

Fonte: elaborado pelo autor.

Nesta tela, que representa o início da resolução de um problema do tipo “Específico”, são apresentados, inicialmente, o enunciado, subitens, o espaço para elaborar uma resposta e as dicas. Inicialmente, apenas a dica 1 está disponível. Quando a dica 1 é visualizada, a dica 2 fica disponível e, assim, sucessivamente. Após o estudante elaborar a resposta e acionar o botão “Enviar”, é que o botão “Solução” fica disponível de modo que o estudante possa ter acesso a uma solução válida para o item.

Além dessas funcionalidades, o professor poderá acompanhar como está sendo a intera-

Figura 47 – Tela de relatórios



Fonte: elaborado pelo autor.

ção dos estudantes que responderam os problemas do tipo “Geral”. Para isso, o sistema disponibiliza gráficos que podem ser configurados para apresentar as informações por turma e por aluno (figura 47).

Em relação aos problemas do tipo “Específico”, os professores poderão visualizar as respostas enviadas pelos estudantes (figura 48).

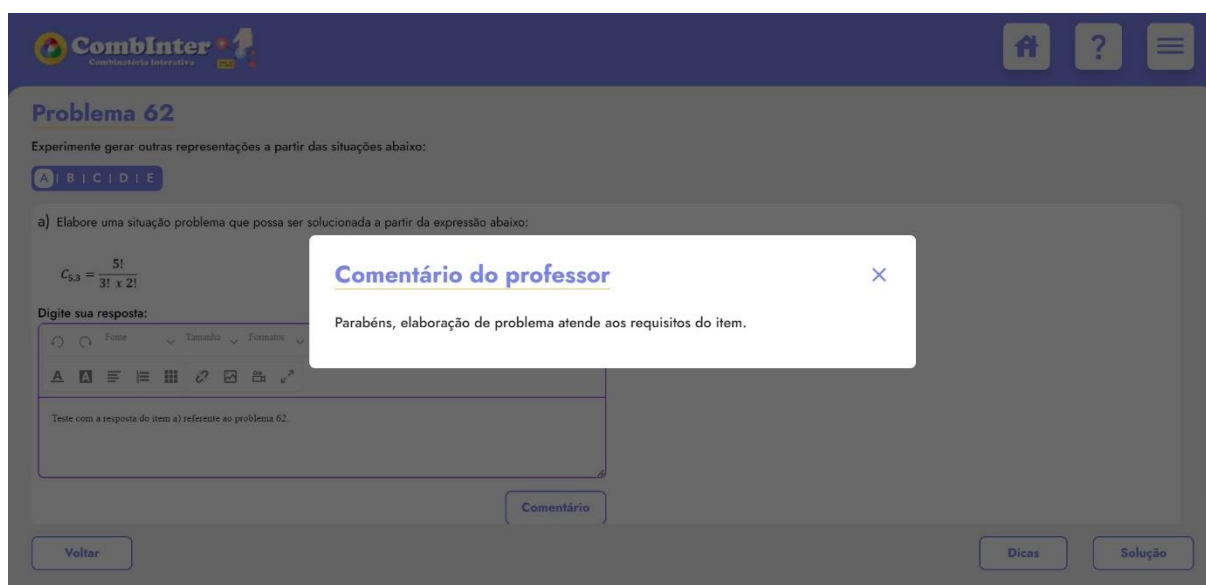
Figura 48 – Tela de respostas referente ao problema 62



Fonte: elaborado pelo autor.

Nesta tela, o professor pode visualizar a resposta do estudante (botão “Resposta do aluno”) e fazer um comentário (botão “Comentário”) para que o estudante possa ter um feedback a respeito de sua resposta ao item. Após o professor ter inserido um comentário, o es-

Figura 49 – Tela de comentário do professor referente ao item A do problema 62

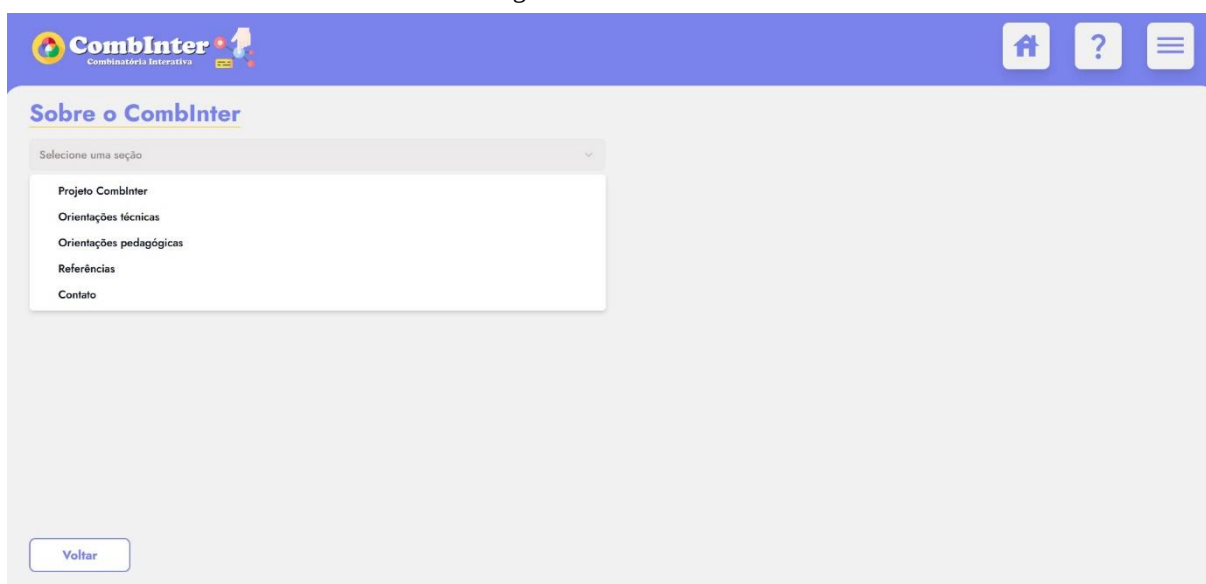


Fonte: elaborado pelo autor.

tudante poderá ter acesso, conforme figura 49.

Ao acionar a opção “Sobre” da tela principal, é disponibilizada a tela de Sobre (figura 50). Nesta tela, são disponibilizadas informações sobre o CombInter, abordando seu objetivo pedagógico, autor e equipe de desenvolvimento, as orientações técnicas e pedagógicas, as referências que trazem as fontes dos materiais que exigem direitos autorais utilizados no sistema e uma forma de contato com o autor.

Figura 50 – Tela Sobre



Fonte: elaborado pelo autor