



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE

CURSO DE LICENCIATURA EM FÍSICA

CRISTIANO ALVES DA SILVA FILHO

**CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO EM ATÉ 3
DIMENSÕES: uma análise numérica computacional**

CARUARU

2025

CRISTIANO ALVES DA SILVA FILHO

**CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO EM ATÉ 3 DIMENSÕES:
uma análise numérica computacional**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Física – Licenciatura do Campus do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciado em Física.

Área de concentração: Física Teórica e Computacional.

Orientador (a): Prof. Dr. Augusto César Lima Moreira

CARUARU

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva Filho, Cristiano Alves da.

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO EM ATÉ 3
DIMENSÕES: uma análise numérica computacional / Cristiano Alves da Silva
Filho. - Caruaru, 2025.

44 p.

Orientador(a): Augusto César Lima Moreira

(Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do
Agreste, , 2025.

Inclui referências.

1. Momento linear relativístico. 2. Análise numérica. 3. Simulação
computacional. 4. Relatividade Especial. 5. Colisões relativísticas. I. Moreira,
Augusto César Lima . (Orientação). II. Título.

530 CDD (22.ed.)

CRISTIANO ALVES DA SILVA FILHO

**CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO EM ATÉ 3
DIMENSÕES: Uma análise numérica computacional**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Coordenação do Curso
de Física-Licenciatura do Campus
Agreste da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, na modalidade de
monografia, como requisito parcial para
a obtenção do grau de licenciado em
Física.

Aprovada em: 18/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Augusto César Lima Moreira (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Heydson Henrique Brito da Silva (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^a. Dr^a. Diana Patrícia Gomes de Almeida (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho à minha mãe Maria Margarida Ramos de Moura, à Beatriz Teixeira Barboza, mãe do meu filho, e ao próprio Jorge Augusto Alves Barboza, minha família, que tanto amo.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar a conservação do momento linear relativístico em sistemas com uma, duas e três dimensões, por meio de uma abordagem teórica e computacional. Partindo das limitações da mecânica clássica em contextos de altas velocidades, próximas à velocidade da luz, desenvolveu-se um conjunto de programas em Python capazes de simular colisões entre partículas e calcular seus momentos e energias antes e depois da interação. A fundamentação teórica se baseia nos postulados da relatividade restrita e nas transformações de Lorentz, contrastando com os princípios da mecânica newtoniana e as transformações de Galileu. Os resultados obtidos mostram que o momento linear só é rigorosamente conservado quando se adota o formalismo relativístico, evidenciando as falhas do modelo clássico nesse regime. Além disso, o software desenvolvido se apresenta como uma ferramenta didática útil, facilitando a visualização e compreensão de conceitos relativísticos por parte de estudantes de física. O trabalho conclui que a conservação do momento linear relativístico é um pilar fundamental para a descrição correta de fenômenos físicos em altas velocidades, sendo essencial para o avanço da física moderna.

Palavras-chave: Momento linear relativístico; análise numérica; simulação computacional; Relatividade Especial; Colisões relativísticas.

ABSTRACT

This study aims to investigate the conservation of relativistic linear momentum in systems with one, two, and three dimensions through a theoretical and computational approach. Starting from the limitations of classical mechanics in high-speed contexts—close to the speed of light—a set of Python-based programs was developed to simulate particle collisions and compute their momenta and energies before and after interactions. The theoretical framework is grounded in the postulates of special relativity and Lorentz transformations, contrasting with Newtonian mechanics and Galilean transformations. The results show that linear momentum is only strictly conserved when the relativistic formalism is applied, exposing the shortcomings of the classical model in such regimes. Furthermore, the developed software serves as an effective educational tool, aiding students in visualizing and understanding relativistic concepts. The study concludes that the conservation of relativistic linear momentum is a fundamental principle for accurately describing physical phenomena at high velocities and is essential to the progress of modern physics.

Keywords: Relativistic linear momentum; numerical analysis; computer simulation; Special Relativity; Relativistic collisions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	8
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	9
2.1	MOMENTO LINEAR CLÁSSICO.....	10
2.2	CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR.....	12
2.3	TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU PARA AS VELOCIDADES.....	13
2.4	POSTULADOS DA RELATIVIDADE.....	14
2.5	AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ PARA AS VELOCIDADES.....	17
2.6	A TRANSFORMAÇÃO RELATIVÍSTICA DAS VELOCIDADES.....	20
2.7	O MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO.....	22
2.8	CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO PARA 1, 2 E 3 DIMENSÕES.....	25
3	METODOLOGIA.....	29
4	CONSTRUÇÃO DOS PROGRAMAS.....	31
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	34
6	CONCLUSÃO.....	42
	REFERÊNCIAS.....	44

1 INTRODUÇÃO

A Física Moderna, impulsionada pela Teoria da Relatividade Restrita de Einstein, promoveu uma revolução conceitual e matemática na compreensão do universo reformulando de maneira profunda a compreensão do espaço, do tempo e do movimento. Entre suas contribuições mais profundas, destaca-se a reformulação do princípio de conservação do momento linear para sistemas que operam em velocidades comparáveis à da luz. Enquanto a mecânica newtoniana oferece uma descrição sólida e intuitiva para baixas velocidades, sua aplicação em regimes relativísticos revela inconsistências fundamentais, especialmente no que diz respeito à invariância das leis físicas entre referenciais inerciais.

Este trabalho se propõe a analisar e demonstrar a validade da conservação do momento linear relativístico em sistemas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais, aliando fundamentação teórica à modelagem computacional. Para tanto, parte-se de uma revisão dos conceitos clássicos e relativísticos de momento linear, seguida do estudo das transformações de Galileu e de Lorentz e de suas implicações para a conservação dessa grandeza. Além disso, foram desenvolvidos programas em Python com a finalidade de simular colisões relativísticas em até 3 dimensões, oferecendo um recurso que, ao automatizar os cálculos, permite aos estudantes concentrar-se na compreensão conceitual em vez de se deter apenas em manipulações matemáticas.

Os resultados obtidos por meio dessa abordagem comparativa possibilitam evidenciar que a conservação do momento linear deixa de ser rigorosamente válida no regime clássico à medida que a velocidade se aproxima da luz, enquanto se mantém consistente no formalismo relativístico. Com isso, este estudo busca não apenas confirmar numericamente a validade da teoria da relatividade restrita, mas também fornece uma ferramenta didática que auxilie o ensino e a aprendizagem de um dos conceitos fundamentais da física moderna.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para desenvolver uma fundamentação teórica sólida sobre a conservação do momento linear em sistemas relativísticos é importante destacar como a transição da mecânica clássica para a teoria da relatividade restrita demanda uma compreensão mais aprofundada dos princípios fundamentais da física moderna. Autores renomados, como Robert Resnick, Ralph A. Llewellyn, David Halliday, David J. Griffiths, Jearl Walker e Paul A. Tipler, nos forneceram em suas obras as bases conceituais que, juntas, formam uma estrutura teórica consistente para uma abordagem rigorosa do tema deste trabalho.

Griffiths, em *introduction to electrodynamics* (1981), nos apresenta de forma detalhada o impacto das inconsistências presentes no campo do eletromagnetismo que culminaram na teoria da relatividade e reformulação das expressões matemáticas que envolvem a física em sistemas relativísticos. Ele destaca, em relação ao momento linear, que, “em qualquer sistema fechado, o momento e energia relativística são conservados” (Griffiths, 1981, p. 510, tradução nossa), vale destacar que esta lei de conservação é válida para sistemas nos quais não atuam forças externas (Tipler; Llewellyn, 2017, p.83), evidenciando que os princípios de conservação de energia e momento linear, conhecidos da mecânica clássica, permanecem válidos mesmo quando consideramos efeitos relativísticos. Essa conservação é fundamental para a consistência das leis físicas em todos os referenciais inerciais, reforçando a necessidade de uma reformulação do conceito de espaço e tempo na relatividade especial e mostrando como a eletrodinâmica se ajusta a essas novas estruturas do universo físico.

A obra *Introdução à Relatividade Especial* (1971), de Robert Resnick, em conjunto com *Fundamentos de Física: Óptica e Física Moderna* (2016), de David Halliday, Robert Resnick e Jearl Walker, *Física Moderna* (2017), de Paul A. Tipler e Ralph A. Llewellyn, formam um conjunto extremamente consistente de referências que dialogam entre si, oferecendo uma base teórica sólida e exemplos didáticos que enriquecem o estudo do momento linear no contexto da relatividade especial, enfatizando que

[...] vários observadores, em diferentes referenciais inerciais, observem uma colisão entre duas partículas. De acordo com a mecânica clássica, embora as velocidades das partículas sejam diferentes em diferentes referenciais, a lei de conservação do momento é obedecida em todos os referenciais, isto é, o momento total do sistema de partículas após a colisão é o mesmo que antes da colisão. (Halliday; Resnick; Walker, 2016, p.530).

Essa explicação evidencia a importância da conservação do momento linear como um princípio fundamental que se mantém válido independentemente do referencial adotado, reforçando sua universalidade na física clássica, fazendo uma ponte para regimes relativísticos, nos quais as partículas possuem velocidades próximas as da luz, segundo Resnick mediante o princípio de relatividade de Einstein,

[...] é impossível por meio de quaisquer medidas físicas escolher um sistema inercial como intrinsecamente estacionário ou em movimento; podemos unicamente falar do movimento relativo entre dois sistemas. Portanto nenhuma experiência física de qualquer espécie, feita inteiramente dentro de um sistema inercial, pode dizer ao observador qual é o movimento de seu sistema em relação a qualquer outro sistema inercial. (Resnick, 1971, p. 40).

Esses argumentos embora tenham embasamentos teóricos diferentes pois um destaca uma relatividade nas colisões a partir de Newton e outro por Einstein ambos evidenciam a mesma verdade de que a conservação do momento linear não depende de um referencial absoluto, sendo um conceito universal aplicável tanto na mecânica clássica quanto na relatividade especial, em outras palavras, conforme Tipler e Llewellyn (2017) devemos considerar que a relatividade do movimento entre diferentes sistemas inerciais, fica evidente que as leis físicas devem se manter invariantes, independentemente do observador.

A convergência entre esses autores ressalta como a relatividade restrita não é apenas um complemento da mecânica clássica, mas uma extensão necessária que preserva as leis fundamentais mesmo sob novas condições físicas. O estudo dessas obras evidencia a forma como os princípios da conservação de momento e energia se mantêm universais, permitindo uma análise mais completa da dinâmica de partículas em movimento. Adiante, com base no diálogo estabelecido entre esses autores em suas obras, será apresentado o aporte matemático necessário, que servirá de fundamentação para a posterior implementação das funções no programa.

2.1 MOMENTO LINEAR CLÁSSICO

A descrição do movimento, para ser completa, precisa necessariamente incluir a característica de resistência que os corpos apresentam ao terem seu estado de movimento alterado. Essa resistência, que posteriormente será formalizada na Primeira Lei de Newton, já era reconhecida por pensadores anteriores. Descartes, em sua obra *Principia Philosophiæ*, afirma:

Aqui, de fato, deve-se prestar atenção com diligência sobre em que consiste a força de cada corpo, seja para agir sobre outro, seja para resistir à ação de outro. Pois nisso reside o requisito essencial: que cada coisa tenda, tanto

quanto pode, a permanecer no movimento natural em que se encontra, conforme a lei estabelecida em primeiro lugar. Então, a resistência que um corpo opõe a outro é uma força real, usada para impedir a separação; aquilo que permanece unido tende a continuar unido; aquilo que está em repouso, mantém-se em sua quietude e resiste a tudo que possa alterá-la; aquilo que está em movimento, tende a preservar esse movimento — isto é, a manter-se na mesma velocidade e direção. Essa força depende tanto da massa do corpo em que está e da superfície através da qual esse corpo é separado por outro; quanto da velocidade do movimento, da natureza e da forma do encontro entre os corpos. (Art. XLIII, 1722, p. 34, tradução nossa).

Essa citação evidencia que, mesmo antes de Newton, já se reconhecia a tendência natural dos corpos em manter seu estado de repouso ou movimento retilíneo uniforme, o que corresponde ao conceito de inércia. Que enunciado posteriormente enunciado por Newton “A vis insita, ou força inata da matéria, é um poder de resistir, através do qual todo o corpo, no que depende dele, mantém seu estado presente, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em linha reta.” (Newton, 1687, p.40). O estudo da inércia evidenciou que, embora os corpos compartilhem de uma mesma cinemática, a forma como têm seu estado de movimento alterado difere em função da quantidade de massa que possuem. Essa massa determina a intensidade da força necessária para modificar tal estado. A força, nesse contexto, pode ser compreendida como a ação exercida sobre um corpo com o propósito de alterar sua condição de repouso ou de movimento uniforme. Esse raciocínio conduz Newton, de maneira natural, à formulação da segunda lei da dinâmica, expressa por:

$$\vec{F}_{resultante}^1 = m \cdot \vec{a} \quad (1)$$

De modo que a aceleração corresponde a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo, pode reescrever a equação (1) na forma diferencial:

$$\vec{F}_{resultante} = m \cdot \frac{\partial \vec{v}(t)}{\partial t} \quad (2)$$

Essa notação nos ajuda a utilizar propriedade da diferenciação que corresponde à linearidade da derivada que nos afirma que quando temos uma constante multiplicando a derivada de uma função é possível inserir essa constante na derivada, então obteremos:

$$\vec{F}_{resultante} = \frac{\partial m \cdot \vec{v}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \quad (3)$$

¹ A força resultante pode ser compreendida como a soma vetorial de todas as forças que atuam no corpo.

Segundo Newton, “A quantidade de movimento é a medida do mesmo, obtida conjuntamente a partir da velocidade e da quantidade de matéria” (Newton, 1687, p.40). Então o termo a ser derivado com relação ao tempo resultado do produto entre a velocidade e a massa do corpo será batizado de momento, que neste trabalho será reescrevendo a segunda lei de Newton, utilizando algumas manipulações, a partir da equação (3), temos:

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{resultante} \partial t = \int_{p_0}^p \partial \vec{p} \quad (4)$$

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} \quad (4.1)$$

A reinterpretação da Segunda Lei de Newton em termos do momento linear oferece uma perspectiva mais profunda sobre a dinâmica dos corpos. Essa visão nos permite compreender como a força, a massa e a aceleração se inter-relacionam para determinar o movimento de um objeto.

2.2 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Para compreender a dinâmica de um sistema, é necessário entender que a força resultante é a soma das forças internas e externas, sendo fundamental esclarecer a diferença entre elas. Forças externas são aquelas que atuam sobre um sistema a partir de agentes situados fora dele, como a força da gravidade sobre um corpo. Essas forças têm a capacidade de alterar o momento linear total do sistema, modificando a velocidade do seu centro de massa. Já as forças internas ocorrem entre os próprios componentes do sistema, a exemplo as interações entre partículas de um corpo. Embora possam causar acelerações locais dentro do sistema, elas não alteram o momento linear total, pois seus efeitos se cancelam mutuamente, ou seja, a força resultante é nula, em conformidade com a terceira lei de Newton. Matematicamente temos:

$$\int_{t_0}^t \vec{F}_{resultante,externa} + \vec{F}_{resultante,interna} \partial t = \int_{p_0}^p \partial \vec{p} \quad (5)$$

$$0 = \int_{p_0}^p \partial \vec{p} \quad (5.1)$$

$$0 = \Delta \vec{p} \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_{i, inicial} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_{i, final} \quad (5.3)$$

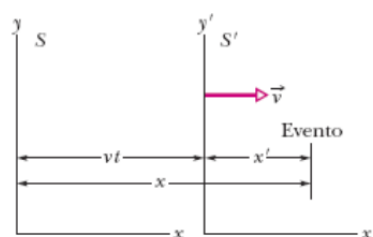
A equação (5.3) é de extrema importância, pois representa formalmente o princípio de conservação do momento linear. Vale ressaltar que essa lei de conservação é válida independentemente para cada eixo do sistema de coordenadas, desde que a partícula possua uma componente de velocidade naquela direção. Consequentemente, obtém-se uma equação de conservação distinta para cada eixo. Esta propriedade é uma consequência direta do princípio da independência dos movimentos, formulado por Galileu Galilei, o qual estabelece que os movimentos em direções perpendiculares podem ser analisados de forma independente.

2.3 TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU PARA AS VELOCIDADES

Dados dois referenciais S e S' em movimento relativo, as transformações de Galileu são um conjunto de equações que relacionam as coordenadas de um evento nesses dois sistemas de referência inerciais. Um sistema de referência inercial é um sistema de referência no qual a primeira lei de Newton é válida.

Tomando o referencial S como o qual o observador está, assumiremos que sua velocidade como igual a zero e o referencial S' está se movendo com uma velocidade relativa V para direita como mostrado na figura abaixo. Para as análises matemáticas que seguem, os referenciais estarão na posição *Standard*².

Figura 1 - Referenciais S e S'



Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2016, p. 509).

As equações que descrevem a relação entre S e S' são (Halliday; Resnick; Walker, 2016):

$$x' = x - V \cdot t \quad (6)$$

$$y' = y \quad (7)$$

$$z' = z \quad (8)$$

$$t' = t \quad (9)$$

² A posição *Standard*, conhecida também por posição padrão, se trata de quando os dois referenciais S e S' estão sobrepostos em $t_0 = 0$, ou seja, S e S' em $t_0 = 0$ possuem todas as suas coordenadas iniciais iguais a zero da seguinte forma: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ e $x'_0 = y'_0 = z'_0 = 0$ e no eixo x existe uma velocidade relativa entre os referenciais.

As transformações de velocidade entre referenciais inerciais podem ser obtidas derivando as equações de transformação de posição (6) a (8) em relação ao tempo. Obteremos, portanto:

$$v'_x = v_x - V \quad (10)$$

$$v'_y = v_y \quad (11)$$

$$v'_z = v_z \quad (12)$$

A relação entre as transformações de Galileu ³e o momento linear clássico está no fato de que essas transformações asseguram a conservação do momento linear em todos os referenciais inerciais. Isso acontece porque elas preservam a soma vetorial das velocidades das partículas de um sistema, e, como o momento linear é definido justamente pela soma vetorial das velocidades de cada partícula multiplicadas pelas suas massas, conclui-se que as transformações de Galileu mantêm inalterada essa grandeza física, garantindo, assim, a validade do princípio de conservação do momento linear em diferentes referenciais.

2.4 POSTULADOS DA RELATIVIDADE

As transformações de Galileu em essência nos mostram que independente do referencial inercial as leis da física devem se manter as mesmas, porém quando aplicadas às leis do eletromagnetismo nas transformações de um referencial para outro inconsistências apareciam, ou seja, não ficam na mesma forma. Um dos físicos que percebeu tais dificuldades em conciliar a relatividade de Galileu ao eletromagnetismo foi Hendrik Lorentz que por uma abordagem puramente matemática tentou descobrir quais eram as transformações que poderiam conciliar a esse princípio, de que as leis do eletromagnetismo fossem as mesmas independente do referencial inercial.

As mentes brilhantes de Albert Einstein e Hendrik Lorentz, em um fascinante paralelo, trilharam caminhos distintos para desvendar os mistérios da eletrodinâmica dos corpos em movimento. Lorentz, partindo das equações de Maxwell como base sólida, cuidadosamente as modificou para explicar o intrigante resultado do experimento de Michelson-Morley. Sua engenhosa solução introduziu os conceitos inovadores de "tempo local" e "contração do comprimento", abrindo portas para uma

³ Para a obtenção das transformações inversas das velocidades correspondentes ao conjunto de equações (10) a (12), procede-se à substituição do sinal negativo pelo sinal positivo.

nova compreensão do universo. No entanto, ele se apegou à ideia do éter como um referencial absoluto, uma entidade invisível que permeava todo o espaço e tempo.

Em contraste, Einstein, partiu de dois princípios fundamentais: a relatividade do movimento e a constância da velocidade da luz. Guiado por esses pilares, ele teceu uma nova narrativa do universo, onde as leis da física se aplicam igualmente a todos os observadores em movimento uniforme, independentemente de sua velocidade. A velocidade da luz, como uma constante universal, transcendia referenciais, desafiando as noções tradicionais de tempo e espaço.

Embora os caminhos divergentes, as conclusões de Einstein e Lorentz convergiram para as mesmas equações que descrevem a transformação de coordenadas entre referenciais em movimento. Ambos previram a intrigante contração do comprimento e a dilatação do tempo, distorções da realidade que desafiavam a intuição e abriam caminho para uma nova era na física.

A principal diferença reside na fundação de suas teorias. Lorentz, amparado pelo éter como um referencial absoluto, ofereceu uma explicação plausível dentro da física clássica. Já Einstein, com sua ousadia visionária, dispensou o éter e ergueu a revolucionária teoria da relatividade especial, onde o movimento e a luz assumem um papel central na dança cósmica.

Curiosamente, Einstein, em sua jornada intelectual, trilhou um caminho independente, sem conhecimento do trabalho de Lorentz. Essa notável coincidência evidencia a força das ideias que permeavam o pensamento da época, impulsionando a ciência para novos horizontes. As contribuições de ambos os físicos, entrelaçadas em um dueto de genialidade, lançaram as bases para uma compreensão mais profunda do universo e abriram caminho para desdobramentos científicos ainda mais surpreendentes.

Entretanto, a abordagem feita por Lorentz é apenas um artifício matemático, quem veio dar sentido físico a essas transformações é Einstein em seu trabalho sobre a relatividade especial, nele havia desenvolvido dois postulados.

- I. O princípio da relatividade, o primeiro postulado de Einstein (1905), enuncia que “As leis da física são as mesmas para todos os observadores situados em referenciais inerciais. Não existe um referencial absoluto.” (Halliday; Resnick; Walker, 2016, p. 475).
- II. O princípio da constância da velocidade da luz, o segundo postulado de Einstein (1905), enuncia que “A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor

c em todas as direções e em todos os referenciais inerciais” (Halliday; Resnick Walker, 2016, p. 476).

Esses dois postulados de Einstein não apenas reformularam a física teórica, mas também impuseram uma nova forma de compreender a natureza. Ao negar a existência de um referencial absoluto e estabelecer a constância da velocidade da luz, a Relatividade Especial levou a ciência a repensar noções até então consideradas fundamentais, como o espaço e o tempo. Segundo Halliday, Resnick e Walker (2016, p.486) “[...] as separações espacial e temporal estão entrelaçadas.”, essa mudança de paradigma trouxe consigo a concepção de que tais grandezas estão intimamente ligadas, formando uma entidade única denominada espaço-tempo, onde os eventos físicos são descritos de maneira relativa ao observador.

Na mecânica newtoniana, as transformações Galileu e sua relação entre espaço e tempo mostram-se invariantes, e as leis físicas mantêm a sua forma em quaisquer referenciais inerciais (Griffiths, 1999). No entanto, tais transformações não se mostram adequadas quando aplicadas a fenômenos relativísticos, especialmente no caso das ondas eletromagnéticas. Ao substituir as coordenadas transformadas nas derivadas parciais que compõem o laplaciano e o termo temporal da equação de onda, observa-se que a estrutura original não se mantém. Para fins de melhor compreensão, como demonstrado por Netto e Silva (2024) estão apresentadas a seguir, por transformações de Galileu:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0^4 \quad (13)$$

$$(\nabla'^2) \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = -\frac{v}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t' \partial x'} \quad (14)$$

Surge, então, na equação (14) um termo cruzado envolvendo as derivadas mistas em relação ao espaço e ao tempo, o que descaracteriza a forma canônica da equação de onda, descrita pela equação (13). Isso significa que, sob transformações galileanas, a equação da onda não é invariante, contrariando o segundo postulado da relatividade especial, que afirma a constância da velocidade da luz em todos os referenciais inerciais. Mediante essa incompatibilidade tornou-se necessário a implementação de novas equações que relacionassem os eventos que acontecem em

⁴ Equação de onda em função de Φ , que corresponde a uma função que tanto pode representar o campo elétrico como o campo magnético.

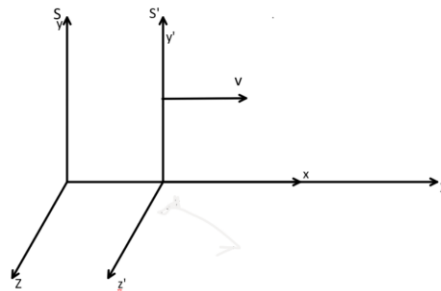
dois referenciais inerciais que se movimentam com velocidade relativa próximas à velocidade da luz, tais transformações foram, como mencionado, obtidas por Lorentz.

2.5 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ PARA AS VELOCIDADES

Na mecânica clássica de acordo com as transformações de Galileu as transformações de velocidade não estavam de acordo com os experimentos realizados para a constância da velocidade da luz, todo o trajeto até aqui tomado foi motivado a descobrirmos quais são as transformações que tornem o eletromagnetismo invariante para qualquer referencial inercial (Netto; Silva, 2024).

Para obtenção de tais transformações utilizaremos os referenciais inerciais se movimento em velocidade relativa V um ao outro na posição *standard*, conforme a figura 2, e não perda de generalidade ao utilizarmos essa configuração para obtenção das transformações de Lorentz, pois o espaço é isotrópico (Resnick, 1971), possui, portanto, as mesmas propriedades em todas as direções.

Figura 2 -Referenciais S e S'.



Fonte: Elaboração própria (2023).

Vamos considerar as seguintes funções que descrevem a relação entre as coordenadas de S e S' (Resnick, 1971):

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}t \quad (15)$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}t \quad (16)$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}t \quad (17)$$

$$t' = a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}t \quad (18)$$

Devido ao espaço e tempo serem homogêneos as equações (15) a (18) são lineares. É possível representar esse conjunto de equações de forma matricial.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

A matriz acima relaciona os vetores com linha aos vetores sem linhas, a matriz acima de 16 coeficientes nos dará as transformações de Lorentz. Vamos considerar agora a matriz dos coeficientes de A, e vamos determinar esses 16 coeficientes.

A esquematização adotada para os dois referenciais será a *Standard* então podemos afirmar que

$$y' = y \text{ e } z' = z \quad (19)$$

Isso nos permite descobrir a maior parte dos coeficientes, da matriz, como mostrado abaixo.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

A partir disso teremos o seguinte conjunto de equações para as coordenadas espaciais e temporal

$$x' = a_{11}x + a_{14}t \quad (20)$$

$$y' = y \quad (21)$$

$$z' = z \quad (22)$$

$$t' = a_{41}x + a_{44}t \quad (23)$$

Na configuração apresentada para os referenciais S e S', a relação entre as origens dos sistemas de coordenadas são $x' = 0$ e $x = vt$, utilizando da equação (6) conseguimos obter uma relação entre os coeficientes a_{11} e a_{41} .

$$0 = a_{11} \cdot (vt) + a_{14}t \quad (24)$$

$$a_{14} = -a_{11}v \quad (25)$$

Realizando a substituição dessa nova relação, obteremos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & -a_{11}v \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Inserindo os novos coeficientes na equação horaria da posição do referencial x' , temos:

$$x' = a_{11}x - a_{11}vt \quad (26)$$

Agora teremos a aplicação do segundo postulado de Einstein, que nos informa que a velocidade da luz é constante em todos os referenciais inerciais. Para essa aplicação pensemos em uma onda que em $t=0$ se propaga com velocidade c em todas

as direções do espaço, possui coordenadas expressas, em S e S' por coordenadas esféricas:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (27)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (28)$$

A partir do conjunto de equações (27) e (28) temos uma relação em coordenadas esféricas das equações (20) à (23)

$$a_{11}^2(x - v)^2 + y^2 + z^2 = c^2(a_{41}x + a_{44}t)^2 \quad (29)$$

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2)x^2 + y^2 + z^2 - 2(va_{11}^2 + c^2 a_{41}a_{44})xt = (c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2)t^2 \quad (30)$$

De posse da equação (30) podemos estabelecer condições a partir da comparação com a equação (27), listo-as abaixo:

$$(a_{11}^2 - c^2 a_{41}^2) = 1 \quad (31)$$

$$-2(va_{11}^2 + c^2 a_{41}a_{44}) = 0 \quad (32)$$

$$(c^2 a_{44}^2 - v^2 a_{11}^2) = c^2 \quad (33)$$

Podemos encontrar esses coeficientes resolvendo o sistema acima, e obteremos:

$$a_{11} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{c^2 - v^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad (34)$$

O resultado a ser obtido na equação (34), é o que chamamos de Fator de Lorentz (γ)

$$a_{11} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad (35)$$

Substituindo o coeficiente encontrado na equação (35), obteremos as transformações de Lorentz (Tipler; Llewellyn, 2017)

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (36)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad (37)$$

$$y' = y \quad (38)$$

$$z' = z \quad (39)$$

Em que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}} \quad (40)$$

Para limites onde a velocidade é muito menor que a velocidade da luz devemos resgatar as transformações de galileu, ou seja, para $v \ll c$, o fator γ tende 1.

$\gamma \rightarrow 1$, para $v \ll c$, retornamos para as transformações de Galileu.

Figura 3 - Relação por meio de conjuntos da mecânica newtoniana e relativística.



Fonte: Elaboração própria (2024).

A conclusão que chegamos acima é extremamente importante, pois podemos perceber que a mecânica newtoniana é uma extensão da relatividade especial para regimes de baixas velocidades. Essa revolução foi um grande passo para a física. Ela mostrou que a relatividade especial é uma teoria consistente e que pode ser usada para descrever o movimento de objetos com velocidades próximas à velocidade da luz. Além disso, diante do segundo postulando da relatividade a velocidade da luz é uma constante fundamental da natureza. Ela é a mesma para todos os observadores inerciais, independentemente do movimento do observador ou do objeto e agora as transformações de Lorentz nos permitem respeitar o postulando.

2.6 A TRANSFORMAÇÃO RELATIVÍSTICA DAS VELOCIDADES

Dado então dois referenciais S e S' na configuração *Standard* como mostrado na Figura 2 com uma partícula tendo um deslocamento infinitesimal no sistema de coordenadas S o desenvolvimento da nova regra de soma de velocidades para S' de posse das transformações de Lorentz pode ser obtido a partir de uma dedução em forma diferencial tomando a derivada da posição em relação ao tempo para cada coordenada espacial.

$$\delta x' = \gamma_{referencial}(\delta x - V\delta t) \quad (41)$$

$$\delta t' = \gamma_{referencial} \left(\delta t - \frac{V\delta x}{c^2} \right) \quad (42)$$

$$v'_x = \frac{\delta x'}{\delta t'} = \frac{\gamma_{referencial}(\delta x - V\delta t)}{\gamma_{referencial} \left(\delta t - \frac{V\delta x}{c^2} \right)} \quad (43)$$

$$v'_x = \frac{(\delta x - V\delta t)}{\left(\delta t - \frac{V\delta x}{c^2} \right)} \quad (44)$$

Multiplicando a equação (44) em seu numerador e denominador por um fator $\frac{1}{\delta t}$, obtemos:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \quad (45)$$

Embora os referenciais S e S' estejam na configuração *Standard*, assim como no caso clássico as coordenadas com linha e sem linha nos eixos y e z do espaço tenham seus valores inalterados isso não significa que as transformações de velocidades permanecerão as mesmas, pois agora mediante as transformações de Lorentz, equação (37), o tempo não é absoluto (Halliday; Resnick; Walker, 2016) para todos os referenciais.

Portanto as transformações de velocidade para os referenciais com e sem linha para os eixos x e y se tornam:

$$v'_y = \frac{\delta y'}{\delta t'} = \frac{\delta y'}{\gamma_{referencial} \left(\delta t - \frac{V\delta x}{c^2} \right)} \quad (46)$$

$$v'_z = \frac{\delta z'}{\delta t'} = \frac{\delta z'}{\gamma_{referencial} \left(\delta t - \frac{V\delta x}{c^2} \right)} \quad (47)$$

Agora multiplicando as equações, em seus numeradores e denominadores, pelo fator $\frac{1}{\delta t}$, obtemos então:

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \cdot \frac{1}{\gamma_{referencial}} \quad (48)$$

$$v'_z = \frac{v_z}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}} \cdot \frac{1}{\gamma_{referencial}} \quad (49)$$

As transformações do conjunto de equações (45), (48) e (49), devem respeitar a regra de transformação de referenciais das transformações de Galileu. Se em S' que se move com velocidade V em relação a S, as velocidades medidas em S' são dadas pela subtração da velocidade das partículas da velocidade relativa, ou seja, $v'_x = v_x - V$. quando se é analisado de S a velocidade das partículas para o referencial S', temos $v_x = v'_x + V$. Portanto para se transformações as velocidades de um referencial para outro deve-se então trocar o que se tem linha pelo que não se tem linha e trocar o sinal da velocidade relativa, dessa forma obteremos as transformações inversas:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \quad (50)$$

$$v_y = \frac{v'_y}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \cdot \frac{1}{\gamma_{referencial}} \quad (51)$$

$$v_z = \frac{v'_z}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \cdot \frac{1}{\gamma_{referencial}} \quad (52)$$

Tais expressões obtidas agora nos garantem que a velocidade da luz tenha valor c para qualquer referencial.

2.7 O MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO

A formulação clássica do momento linear, definida pela equação (3), mostra-se insuficiente quando aplicada a partículas que se deslocam em velocidades próximas à da luz (Halliday; Resnick; Walker, 2016), pois não assegura a conservação do momento em todos os referenciais inerciais. Essa limitação surge da própria estrutura da mecânica newtoniana, que não incorpora os postulados da relatividade especial. Para preservar a validade dos princípios de conservação e compatibilizar a descrição do movimento com a invariância das leis físicas em diferentes referenciais, torna-se necessária a adoção de uma nova expressão para o momento linear, fundamentada no conceito de tempo próprio e na introdução do fator relativístico γ . Essa reformulação garante que o momento linear relativístico seja consistente tanto em baixas quanto em altas velocidades, recuperando a forma clássica como limite para $v \ll c$.

De modo que o tempo não é absoluto para todos os referenciais então podemos admitir que para uma partícula que se move ao longo de um eixo x com velocidade v próxima de c , o tempo próprio (Δt) é descrito pela equação abaixo

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0 \quad (53)$$

Em que o termo Δt_0 , trata-se da passagem do tempo para um observador externo que observa esse movimento. Abaixo temos a demonstração de obtenção da nova expressão para o momento linear relativístico (Halliday; Resnick; Walker, 2016).

$$|\vec{p}_x| = mv_x = m \frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m \frac{\Delta x}{\frac{\Delta t}{\gamma_v}} = \gamma_v mv_x \quad (54)$$

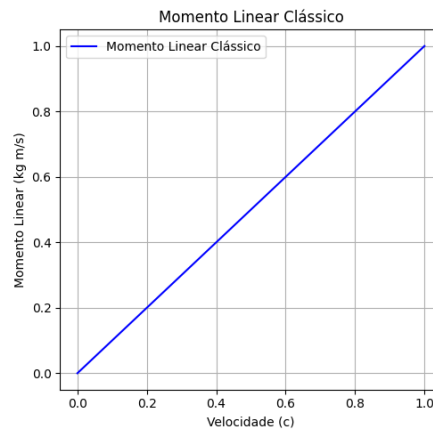
De forma que o espaço é isotrópico, sem perda de generalidade podemos definir que o momento terá a mesma expressão para cada eixo orientado, sendo assim, define-se o momento linear relativístico por

$$\vec{p}_{relativístico} \equiv \gamma_v m \vec{v} \quad (55)$$

Na equação (55), é importante destacar que a velocidade presente no fator de Lorentz se refere à velocidade da partícula em questão, e não à do referencial em que ela se move. Essa distinção é crucial para a correta aplicação da fórmula relativística do momento linear no que diz respeito às transformações relativísticas das velocidades.

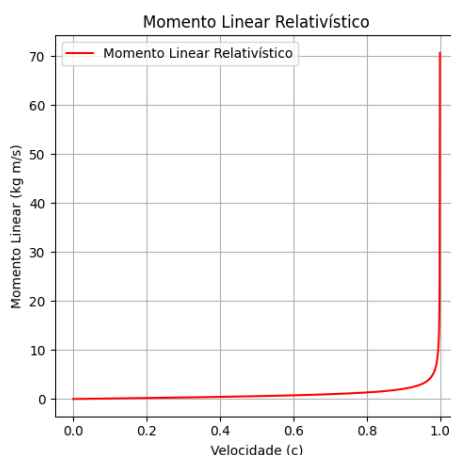
Para uma melhor análise, de acordo com a mecânica newtoniana uma partícula que está sob a ação de uma força constante que imprime uma aceleração, como mostrado no gráfico 1, não há limite superior para o valor de sua velocidade, isto é, para uma velocidade maior ou igual a da luz é possível associar um valor ao momento dessa partícula, o que é inconsistente diante o postulado da constância da velocidade da luz (Einstein, 1905), não há como nenhum objeto que contém massa atingir ou superar tal velocidade.

Gráfico 1. Momento linear clássico x Velocidade da partícula em termos da velocidade da luz.



Fonte: Elaboração própria (2024).

Com a nova definição do momento linear, surge uma assíntota vertical à medida que a velocidade da partícula se aproxima da velocidade da luz. Essa assíntota funciona como uma barreira que impede a violação dos postulados da relatividade, como a invariância da velocidade da luz e a conservação da energia. Abaixo segue a representação gráfica desta afirmação.

Gráfico 2. Momento linear relativístico x Velocidade da partícula em função de c .

Fonte: Elaboração própria (2024).

As novas definições abordadas nos parágrafos anteriores vêm de uma análise puramente matemática da expressão, porém o entendimento sobre o que impede as partículas de alcançarem a velocidade da luz é ainda mais profundo. Para entender de forma mais branda essa incapacidade de se alcançar a velocidade da luz trago um exemplo, vamos imaginar dois carros, A e B, movendo-se em linha reta, com o carro A seguindo atrás de B. Se uma pessoa no carro A deseja lançar um objeto para que ele alcance o carro B, é necessário que o objeto seja lançado com uma velocidade superior à do carro B. Caso contrário, o objeto nunca alcançará o carro B. Se o objeto for lançado exatamente à mesma velocidade do carro B, ele nunca o alcançará.

Agora, troquemos os carros por átomos e o objeto lançado por um sinal de informação que informa uma mudança de posição do átomo. Imagine que esses átomos estão alinhados horizontalmente e fazem parte de um objeto que se move para a direita com uma velocidade v . Para um observador externo, os átomos se movem para a direita.

Quando o primeiro átomo inicia seu movimento com velocidade v , ele envia um sinal informando essa mudança para o segundo átomo. Esse sinal viaja à velocidade da luz. Assim que o segundo átomo recebe o sinal, ele também inicia seu movimento com a mesma velocidade v . Esse processo de troca de informações ocorre continuamente entre os átomos à medida que o objeto se move.

Agora, suponha que o primeiro átomo pudesse atingir a velocidade da luz. Nesse caso, o sinal informando seu movimento também seria transmitido ao segundo átomo na velocidade da luz mediante o postulado da constância da velocidade da luz. Se ambos os átomos estivessem se movendo à velocidade da luz, surgiria um

paradoxo: como os átomos estariam trocando informações sobre suas posições a cada instante, se o sinal nunca poderia alcançar o outro átomo? Em outras palavras, a informação levaria um tempo infinito para chegar ao segundo átomo, impossibilitando que eles continuassem a se mover juntos à velocidade da luz.

A partir dessa nova interpretação do momento linear e todo o aporte teórico até então nos leva a considerar, assim como na mecânica clássica, em sistemas isolados a quantidade de movimento tende a permanecer constante e que o momento total desse sistema será dado pela soma vetorial de todos os momentos de cada partícula individualmente (Bondi, 1980). Esse princípio também se aplica no campo da relatividade, uma vez que teoria da relatividade é uma extensão da teoria clássica, pois em baixas velocidade, muito menores que a da luz, quais expressão relativística reduz-se ao caso clássico.

Nos problemas que serão abordados a seguir, consideraremos, para fins de simplificação, que as colisões entre as partículas são 100% elásticas. Assim, podemos afirmar que a energia antes e depois da colisão depende exclusivamente da energia cinética das partículas envolvidas sem considerar em dissipações.

2.8 CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO PARA 1, 2 E 3 DIMENSÕES

Para fins de primeira análise neste tópico os problemas que envolvem colisões (Halliday; Resnick; Walker, 2016; Resnick, 1971; Tipler; Llewellyn, 2017) serão tratados de forma analítica para que seja possível entender melhor a dependência de cada variável do problema que poderemos aplicar ao programa que nos auxiliará a calcular qualquer uma delas.

O primeiro caso a ser analisado, na figura 4, abaixo, para uma colisão unidimensional genérica entre duas partículas.

Figura 4. Exemplo de colisão frontal.



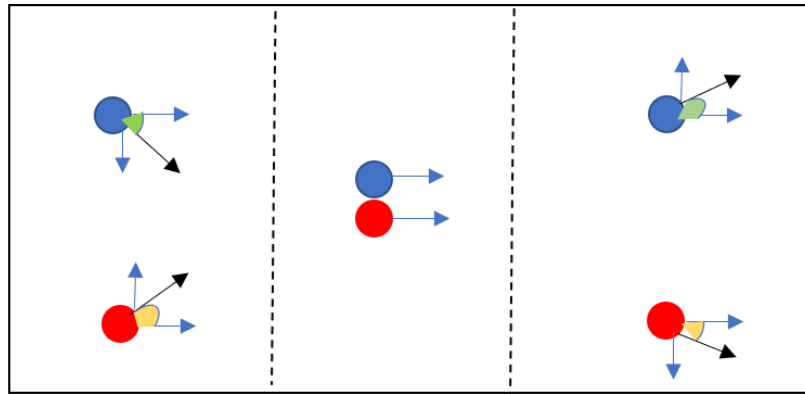
Fonte: Elaboração própria (2024).

O momento linear desse sistema pode ser aplicado na equação (5.3)⁵ e obteremos por tanto

$$\sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,i}^x|} m_n |\vec{v}_{n,i}^x| = \sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,f}^x|} m_n |\vec{v}_{n,f}^x| \quad (56)$$

O que diz respeito ao segundo caso, agora bidimensional, segue a imagem abaixo da estrutura que ele contém:

Figura 5. Exemplo de colisão 2D.



Fonte: Elaboração própria (2024).

Para a situação descrita, faz-se necessário a decomposição do vetor velocidade, representado em preto, figura 6, em duas componentes, uma em x e outra em y, expressas por:

$$|\vec{v}_{n,k}^x|^6 = |\vec{V}_{n,k}| \cos \theta_{n,k} \quad (57)$$

$$|\vec{v}_{n,k}^y| = |\vec{V}_{n,k}| \sin \theta_{n,k} \quad (58)$$

Como temos agora duas componentes a serem analisadas independentemente, isso nos oferta duas equações de conservação. Uma para o eixo x e outra para o eixo y, formuladas abaixo.

$$\sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,i}^x|} m_n |\vec{v}_{n,i}^x| = \sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,f}^x|} m_n |\vec{v}_{n,f}^x| \quad (59)$$

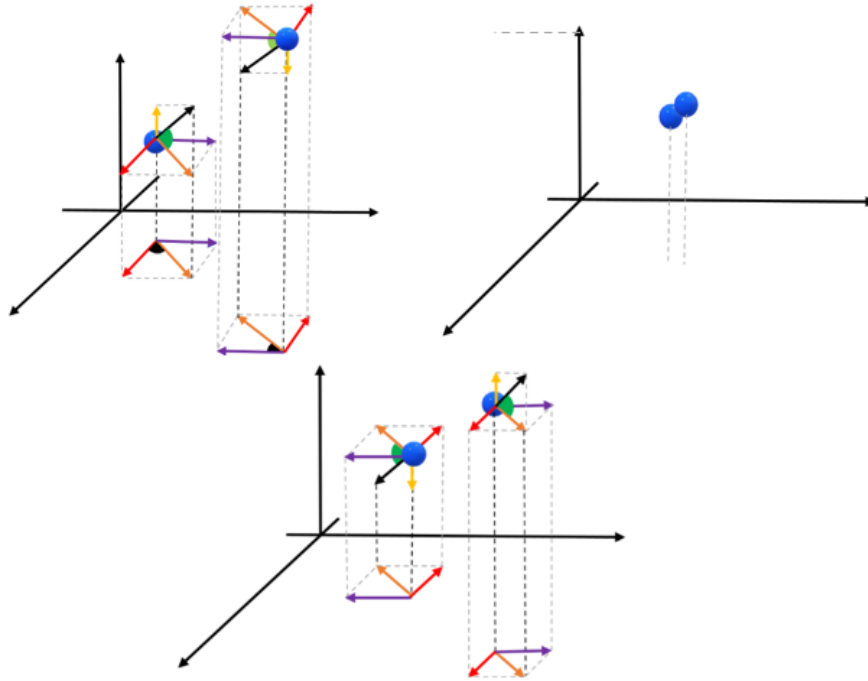
⁵ Na equação (5.3), embora unidimensional, também temos que levar em consideração o caráter vetorial da velocidade, isso justifica o uso do módulo, pois estamos nos referindo nas equações ao valor numérico deste vetor.

⁶ Tanto na equação (57) quanto na (58), como nas demais que aparecerão adiante, o subscrito n será utilizado nesse trabalho como o número ou letra respectivo à partícula, estaremos usando n=1 e j=2, já o subscrito k está relacionado ao instante antes ou depois da colisão que é representado i ou f, respectivamente, estado inicial e final, ou seja, antes e depois da colisão.

$$\sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,l}^y|} m_n |\vec{v}_{n,l}^y| = \sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,f}^y|} m_n |\vec{v}_{n,f}^y| \quad (59.1)$$

No que diz respeito a colisão de duas partículas em 3 dimensões, vamos ao seguinte caso do conjunto de figuras abaixo:

Figura 6⁷. Exemplo de colisão genérica frontal 3D.



Fonte: Elaboração própria (2024).

Diante do caso exposto temos que levar em consideração que em 3 dimensões teremos, então 3 expressões para o momento cada uma relativa a um vetor velocidade como representado na figura anterior que deve ser conservado em cada uma delas. Abaixo listo os vetores decompostos, de maneira geral, de cada velocidade associados aos ângulos que vamos precisar para organizar o problema.

$$|\vec{v}_{n,k}^x| = |\vec{V}_{n,k}| \cos \alpha_{n,k} \cos \beta_{n,k} \quad (60)$$

$$|\vec{v}_{n,k}^y| = |\vec{V}_{n,k}| \cos \alpha_{n,k} \sin \beta_{n,k} \quad (60.1)$$

$$|\vec{v}_{n,k}^z| = |\vec{V}_{n,k}| \sin \alpha_{n,k} \quad (60.2)$$

De posse desse conjunto de equações podemos aplicar a conservação do momento linear para o caso tridimensional, gerando assim 3 equações, cada uma respectiva a um eixo orientado.

⁷ O ângulo em verde será tratado nesse trabalho com a letra alfa e mostra a elevação do vetor velocidade com o eixo z e o ângulo preto será representado pela letra beta que é o ângulo contido no plano xy que será usado para calcular as componentes dos eixos x e y.

$$\sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,l}^x|} m_n |\vec{v}_{n,l}^x| = \sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,f}^x|} m_n |\vec{v}_{n,f}^x| \quad (61)$$

$$\sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,l}^y|} m_n |\vec{v}_{n,l}^y| = \sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,f}^y|} m_n |\vec{v}_{n,f}^y| \quad (61.1)$$

$$\sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,l}^z|} m_n |\vec{v}_{n,l}^z| = \sum_n^j \gamma_{|\vec{v}_{n,f}^z|} m_n |\vec{v}_{n,f}^z| \quad (61.2)$$

Um ponto que pode gerar dúvidas: todas as equações estão formuladas em um referencial inercial S. Se o referencial for alterado, a única adaptação necessária envolve as transformações de Lorentz, inserindo as componentes das velocidades transformadas pelas correções indicadas nas equações (45), (48) a (49). Já o que diz respeito aos ângulos envolvidos nos problemas é possível encontrados utilizando as seguintes equações.

$$\theta_{n,k} = \arctang \left(\pm^8 \frac{|\vec{v}_{n,k}^y|}{|\vec{v}_{n,k}^x|} \right) \quad (2 \text{ dimensões}) \quad (62)$$

$$\alpha_{n,k} = \arctang \left(\pm \frac{|\vec{v}_{n,k}^z|}{\sqrt{|\vec{v}_{n,k}^x|^2 + |\vec{v}_{n,k}^y|^2}} \right) \quad (3 \text{ dimensões}) \quad (62.1)$$

$$\beta_{n,k} = \arctang \left(\pm \frac{|\vec{v}_{n,k}^y|}{|\vec{v}_{n,k}^x|} \right) \quad (3 \text{ dimensões}) \quad (62.3)$$

Agora que todas as equações para todas as dimensões do momento linear foram devidamente apresentadas, temos, em sua completude, o embasamento teórico necessário para aplicar as equações no programa, o que nos permitirá validar a conservação do momento.

⁸ O "±" reflete a necessidade de ajustar o sinal conforme os componentes do vetor, garantindo que o ângulo resultante esteja no quadrante correto. Por exemplo, em $\theta_{n,k}$ se $|\vec{v}_{n,k}^y|$ for positivo e $|\vec{v}_{n,k}^x|$ for negativo então vamos ter que o argumento assumirá um valor negativo devido à relação entre os sinais das velocidades.

3 METODOLOGIA

A presente pesquisa caracteriza-se, quanto à sua natureza, como básica, pois não busca resolver um problema prático imediato, mas sim ampliar o conhecimento teórico e conceitual sobre a conservação do momento linear relativístico em múltiplas dimensões. De acordo com Gil (2008), a pesquisa básica tem como finalidade gerar novos conhecimentos úteis para o avanço da ciência, sem necessariamente prever aplicações práticas de curto prazo. Nesse sentido, este trabalho se insere no campo da Física Teórica, reforçando a compreensão dos fenômenos em altas velocidades.

No que diz respeito à abordagem, trata-se de uma investigação quantitativa, uma vez que se fundamenta em cálculos matemáticos, deduções algébricas e simulações computacionais. Segundo Lakatos e Marconi (2017), a pesquisa quantitativa caracteriza-se pelo emprego da mensuração e da análise estatística ou numérica, permitindo maior objetividade na interpretação dos resultados. No presente estudo, isso se manifesta pela utilização de equações relativísticas e pelo desenvolvimento de programas computacionais que calculam e comparam valores de momento linear.

Quanto aos objetivos, a pesquisa é descritiva, pois busca apresentar e sistematizar como ocorre a conservação do momento linear relativístico em diferentes dimensões, utilizando simulações para detalhar o comportamento matemático envolvido. Prodanov e Freitas (2013) ressaltam que a pesquisa descritiva procura observar, registrar, analisar e correlacionar fatos ou fenômenos, sem manipulá-los.

A metodologia iniciou-se com uma revisão bibliográfica abrangente, contemplando livros, artigos científicos e materiais digitais que abordam a conservação do momento linear, tanto sob a ótica da mecânica clássica quanto da relatividade restrita. Esse levantamento foi fundamental para mapear os limites das abordagens tradicionais e compreender de que forma a formulação relativística supera as inconsistências do modelo newtoniano em contextos de altas velocidades. A revisão permitiu consolidar os conceitos básicos e estabelecer a fundamentação necessária para a dedução das equações utilizadas ao longo do trabalho.

Na etapa seguinte, procedeu-se à modelagem matemática, com a dedução e adaptação das expressões do momento linear relativístico nos casos unidimensional, bidimensional e tridimensional. Esse processo envolveu a aplicação das transformações de Lorentz e dos postulados da relatividade especial, possibilitando identificar as relações entre massa, velocidade, energia e momento em cenários de

colisões relativísticas. A modelagem não apenas garantiu a consistência teórica do estudo, mas também forneceu um conjunto de equações passíveis de implementação computacional, preparando o terreno para a análise numérica.

Por fim, foram desenvolvidos programas em Python destinados a automatizar a resolução das equações e calcular os valores de momento e energia antes e depois das colisões. Os algoritmos criados foram testados e validados por meio da comparação entre os resultados numéricos e as soluções analíticas previstas, assegurando sua confiabilidade. Essa integração entre fundamentação teórica, modelagem matemática e simulação computacional constituiu uma estratégia eficaz para investigar a conservação do momento linear relativístico, além de oferecer um recurso pedagógico capaz de aproximar teoria e prática.

4 CONSTRUÇÃO DOS PROGRAMAS

A construção dos programas, que serão intitulados respectivamente como A e B foi realizada com o objetivo de fornecer ferramentas computacionais robustas para a análise de colisões de partículas em regimes relativísticos, abordando tanto a conservação do momento linear quanto da energia total do sistema em diferentes referenciais. Ambos os programas foram implementados em Python, aproveitando bibliotecas como NumPy e SciPy para cálculos matriciais, vetoriais e otimização numérica, e estruturados de maneira a permitir interatividade com o usuário e validação dos dados inseridos.

O programa A constitui um simulador de colisões relativísticas em 1D, 2D ou 3D, destacando-se pela capacidade de detectar automaticamente a dimensionalidade do sistema a partir das componentes de velocidade das partículas. A coleta de dados é realizada por meio de funções bem definidas, como `obter_dados_usuario()`, que utiliza *loops while*⁹ para garantir que entradas inválidas, como velocidades superiores à da luz ou massas negativas, sejam rejeitadas e que apenas dados fisicamente consistentes sejam aceitos. Cada partícula é representada como um dicionário contendo massa e vetor de velocidade, e todos os vetores são manipulados como *arrays*¹⁰ NumPy, facilitando operações vetoriais e cálculo de normas.

A detecção de dimensionalidade é implementada na função `detectar_dimensao()`, que verifica a presença de componentes não nulas nas direções y e z. A função `calcular_angulos()` calcula ângulos relativos às direções de movimento de cada partícula, adaptando o cálculo à dimensão do sistema. Essa abordagem modular garante clareza e reutilização de código.

O núcleo do programa reside em `resolver_colisao()`, onde se implementa um problema de otimização não-linear com restrições de igualdade para conservação do momento e da energia, utilizando o método SLSQP¹¹ da biblioteca SciPy. O problema é estruturado de forma a minimizar, utilizando a função *minimize* disponível dentro do submódulo `scipy.optimize` dentro da biblioteca SciPy, a soma dos quadrados das velocidades finais, garantindo que a solução encontrada seja consistente com as leis

⁹ Estrutura de repetição em programação que executa um bloco de código enquanto uma condição lógica especificada for verdadeira, sem número fixo de iterações.

¹⁰ Um array (ou vetor) é uma estrutura de dados linear que armazena uma coleção de elementos de forma sequencial em locais de memória, facilitando o acesso direto a cada elemento por meio de um índice

¹¹ *Sequential Least Squares Quadratic Programming*, trata-se, em síntese, de um algoritmo de otimização disponível dentro da biblioteca SciPy.

de conservação. Funções internas definem as restrições (*restricao_momento* e *restricao_energia*) e a função objetivo (*objetivo*), um mecanismo de geração de chutes iniciais aleatórios (*gerar_chute()*) é incorporado para aumentar a eficiência global do otimizador, prevenindo a convergência a soluções locais fisicamente inadmissíveis, evitando portanto valores com $v > c$. *Bounds*¹² de velocidade são aplicados com um limite inferior a 99% da velocidade da luz para evitar violações relativísticas.

*Loops for*¹³ e iterações¹⁴ sobre tentativas de otimização são usados para processar cada partícula e garantir que o resultado seja fisicamente válido. Ao final da simulação, a função *verificar_conservacao()* realiza uma análise detalhada do momento e energia finais, exibindo valores iniciais e finais, diferenças e normas dos vetores resultantes, além de ângulos, permitindo uma avaliação crítica da precisão numérica e da validade das soluções obtidas.

O programa B tem um enfoque complementar, voltado à comparação de transformações de velocidades e cálculos de momento entre referenciais inerciais distintos. A função *obter_dados_usuario()* coleta os parâmetros da partícula em S e a velocidade relativa do referencial S', assegurando a conversão correta para unidades naturais¹⁵. O programa calcula fatores de Lorentz (*gamma_r* e *gamma_da_particula*) para o referencial e para a partícula, com validação contra velocidades não físicas. Em seguida, são aplicadas tanto a transformação clássica de Galileu (*transformacao_velocidade_classica*) quanto a transformação relativística de Lorentz (*transformacao_velocidade_relativistica*) para cada componente de velocidade, considerando o denominador relativístico e o fator gamma correspondente.

Para cada fase da colisão (“antes” ou “depois”), os momentos lineares clássicos e relativísticos são calculados em ambos os referenciais utilizando funções dedicadas (*momento_classico*, *momento_classico_transformado*, *momento_relativistico* e *momento_relativistico_transformado*). *Loops while* permitem múltiplas entradas do usuário, acumulando os momentos totais em arrays de três componentes. Mensagens de erro são fornecidas para prevenir divisões por zero ou velocidades inválidas,

¹² Limites numéricos impostos às variáveis durante a otimização.

¹³ Estrutura de repetição em programação usada para executar um bloco de código um número pré-determinado de vezes, geralmente percorrendo uma sequência de elementos.

¹⁴ Em programação, refere-se à repetição de um conjunto de instruções, geralmente controlada por estruturas de repetição (*loops*), até que uma condição seja satisfeita ou um número definido de vezes seja alcançado.

¹⁵ Sistema de unidades utilizado em Física Teórica no qual constantes fundamentais, como a velocidade da luz no vácuo (c) e a constante de Planck reduzida ($\hbar$), são definidas como iguais a 1, simplificando equações relativísticas e quânticas.

garantindo consistência física. Ao final, os vetores de momento total são exibidos para comparação entre os referenciais S e S' , revelando diferenças entre as abordagens clássica e relativística e permitindo observações críticas sobre conservação de momento e efeitos relativísticos.

Em síntese, o programa A enfatiza a solução global de colisões de múltiplas partículas, utilizando métodos de otimização numérica com restrições, validação de dados e análise vetorial detalhada, enquanto o programa B prioriza a comparação entre transformações clássicas e relativísticas e a análise de conservação de momento em diferentes referenciais. Ambos são estruturados de maneira modular, com funções específicas para coleta de dados, cálculos cinemáticos e verificação de conservação, e empregam *loops* e estruturas de decisão para garantir, clareza e fidelidade física, configurando-se como ferramentas poderosas tanto para fins didáticos quanto para pesquisa científica.

5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Adiante neste tópico, serão apresentados os resultados obtidos a partir da execução dos programas desenvolvidos neste trabalho. Abaixo estão presentes alguns resultados de execução dos programas.

Figura 7 – Dados obtidos pelo programa A (colisão unidimensional)

```
=====
SIMULADOR DE COLISÕES RELATIVÍSTICAS 3D
=====

Velocidade da luz (c, digite 1 para unidades naturais): 1
Número de partículas: 2

--- Partícula 1 ---
Massa: 8
Velocidade (componentes x, y, z):
x: 0.6
y: 0
z: 0

--- Partícula 2 ---
Massa: 10
Velocidade (componentes x, y, z):
x: -0.7
y: 0
z: 0

Processando a colisão...

=====
RESULTADOS DA COLISÃO
=====

Partícula 1:
Velocidade inicial: [0.6]
Velocidade final: [-0.76684773]
|v| inicial: 0.600000c
|v| final: 0.766848c

Partícula 2:
Velocidade inicial: [-0.7]
Velocidade final: [0.49888265]
|v| inicial: 0.700000c
|v| final: 0.498883c

-----
VERIFICAÇÃO DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO
-----

Momento Linear Total:
Inicial: [-3.80196059]
Final: [-3.80196059]
Diferença: [7.99360578e-15] (norma: 7.99e-15)

Energia Total:
Inicial: 6.00280084
Final: 6.00280084
Diferença: 5.33e-15

Simulação concluída.
```

Fonte: Resultados obtidos pelo programa desenvolvido pelo autor (2025).

Figura 8 – Dados obtidos pelo programa do B (colisão unidimensional).

```

Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): 0.6
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): 0.4
Digite a massa da partícula (em kg): 8

gamma do referencial: 1.0910894511799618
gamma da partícula: 1.25

Velocidade em S' (clássica): vx' = 0.19999999999999996; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.26315789473684204; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 1.0365349786209639

Momento clássico em S: px = 4.8; py = 0.0; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = 1.5999999999999996; pyl = 0.0; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = 6.0; pyr = 0.0; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 2.182178902359923; pylr = 0.0; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): antes

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): -0.7
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): 0.4
Digite a massa da partícula (em kg): 10

gamma do referencial: 1.0910894511799618
gamma da partícula: 1.4002800840280099

Velocidade em S' (clássica): vx' = -1.1; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = -0.859375; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 1.9556234603268507

Momento clássico em S: px = -7.0; py = 0.0; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = -11.0; pyl = 0.0; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = -9.801960588196069; pyr = 0.0; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = -16.806139112183875; pylr = 0.0; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): antes

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): -0.76684773
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): 0.4
Digite a massa da partícula (em kg): 8

gamma do referencial: 1.0910894511799618
gamma da partícula: 1.5580472153906317

Velocidade em S' (clássica): vx' = -1.16684773; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = -0.8929462179126421; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 2.2214157921861695

Momento clássico em S: px = -6.13478184; py = 0.0; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = -9.33478184; pyl = 0.0; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = -9.558279762841016; pyr = 0.0; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = -15.868838640352445; pylr = 0.0; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): depois

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): 0.49888265
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): 0.4
Digite a massa da partícula (em kg): 10

gamma do referencial: 1.0910894511799618
gamma da partícula: 1.1538423207609532

Velocidade em S' (clássica): vx' = 0.098882649999999996; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.12353429697663652; vy' = 0.0; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 1.0077188205665892

Momento clássico em S: px = 4.9888265; py = 0.0; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = 0.98882649999999996; pyl = 0.0; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = 5.756319146633743; pyr = 0.0; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 1.2448783604881892; pylr = 0.0; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): depois

```

```

=== MOMENTO TOTAL DAS PARTÍCULAS ===
Momento total clássico ANTES da colisão (referencial S):
px = -2.2, py = 0.0, pz = 0.0

Momento total clássico DEPOIS da colisão (referencial S):
px = -1.1459553399999995, py = 0.0, pz = 0.0

Momento total clássico ANTES da colisão (referencial S' transformado clássico):
px = -9.4, py = 0.0, pz = 0.0

Momento total clássico DEPOIS da colisão (referencial S' transformado clássico):
px = -8.34595534, py = 0.0, pz = 0.0

Momento total relativístico ANTES da colisão (referencial S):
px = -3.801960588196069, py = 0.0, pz = 0.0

Momento total relativístico DEPOIS da colisão (referencial S):
px = -3.801960616207273, py = 0.0, pz = 0.0

Momento total relativístico ANTES da colisão (referencial S' transformado relativístico):
px = -14.623960209823952, py = 0.0, pz = 0.0

Momento total relativístico DEPOIS da colisão (referencial S' transformado relativístico):
px = -14.623960279864257, py = 0.0, pz = 0.0

```

Fonte: Resultados obtidos pelo programa B desenvolvido pelo autor (2025).

Figura 9 ¹⁶ – Dados obtidos pelo programa A (colisão bidimensional).

```

SIMULADOR DE COLISÕES RELATIVÍSTICAS 30
=====
Velocidade da luz (c, digite 1 para unidades naturais): 1
Número de partículas: 2

--- Partícula 1 ---
Massa: 7
Velocidade (componentes x, y, z):
x: 0.6
y: 0.5
z: 0

--- Partícula 2 ---
Massa: 9
Velocidade (componentes x, y, z):
x: -0.4
y: -0.3
z: 0

Processando a colisão...

=====
RESULTADOS DA COLISÃO
=====

Partícula 1:
Velocidade inicial: [0.6 0.5]
Velocidade final: [-0.44075266 -0.42673889]
|v| inicial: 0.781025c
|v| final: 0.613489c
Ângulo inicial: θ = 39.81°
Ângulo final: θ = -135.93°

Partícula 2:
Velocidade inicial: [-0.4 -0.3]
Velocidade final: [0.50838015 0.492216 ]
|v| inicial: 0.500000c
|v| final: 0.707621c
Ângulo inicial: θ = -143.13°
Ângulo final: θ = 44.07°

-----
VERIFICAÇÃO DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO
-----

Momento Linear Total:
Inicial: [2.56846052 2.48679393]
Final: [2.56846052 2.48679393]
Diferença: [-1.06581410e-14 2.35367281e-14] (norma: 2.58e-14)

Energia Total:
Inicial: 5.60127561
Final: 5.60127561
Diferença: 1.82e-13

Simulação concluída.

```

Fonte: Resultados obtidos pelo programa do A desenvolvido pelo autor (2025).

¹⁶ Na colisão bidimensional, o programa A permite que o usuário descubra quais são os ângulos antes e depois da colisão, mediante os dados de velocidade inseridos pelo próprio.

Figura 10 – Dados obtidos pelo programa do B (colisão bidimensional).

```

Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): 0.6
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0.5
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.5
Digite a massa da partícula (em kg): 7

gamma do referencial: 1.1547005383792517
gamma da partícula: 1.6012815380508714

Velocidade em S' (clássica): vx' = 1.1; vy' = 0.5; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.8461538461538461; vy' = 0.33308669376324557; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 2.403700850309326

Momento clássico em S: px = 4.2; py = 3.5; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = 7.700000000000001; pyl = 3.5; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = 6.72538245981366; pyr = 5.60448538317805; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 14.237305036447543; pylr = 5.604485383178047; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): antes

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): -0.4
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): -0.3
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.5
Digite a massa da partícula (em kg): 9

gamma do referencial: 1.1547005383792517
gamma da partícula: 1.1547005383792517

Velocidade em S' (clássica): vx' = 0.09999999999999998; vy' = -0.3; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.12499999999999997; vy' = -0.3247595264191644; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 1.0666666666666664

Momento clássico em S: px = -3.6; py = -2.6999999999999997; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = 0.8999999999999998; pyl = -2.6999999999999997; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = -4.156921938165307; pyr = -3.1176914536239795; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 1.1999999999999995; pylr = -3.1176914536239773; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): antes

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): -0.44075266
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): -0.42673889
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.5
Digite a massa da partícula (em kg): 7

gamma do referencial: 1.1547005383792517
gamma da partícula: 1.2662986619931986

Velocidade em S' (clássica): vx' = 0.05924733999999998; vy' = -0.42673889; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.07599479374452546; vy' = -0.47403219494704807; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 1.1399624143415528

Momento clássico em S: px = -3.08526862; py = -2.9871722299999997; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = 0.41473137999999987; pyl = -2.9871722299999997; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = -3.9068715253956023; pyr = -3.782652197992239; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 0.606418459880783; pylr = -3.782652197992238; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): depois

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): 0.50838015
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0.492216
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.5
Digite a massa da partícula (em kg): 9

gamma do referencial: 1.1547005383792517
gamma da partícula: 1.4152427722093655

Velocidade em S' (clássica): vx' = 1.00838015; vy' = 0.492216; vz' = 0.0.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.8040090334792357; vy' = 0.33987795681540633; vz' = 0.0.
gamma da partícula (linha): 2.049574332189315

Momento clássico em S: px = 4.57542135; py = 4.429944; pz = 0.0.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxl = 9.075421350000001; pyl = 4.429944; pzl = 0.0.
Momento relativístico em S: pxr = 6.475331995399918; pyr = 6.269446227292245; pzr = 0.0.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 14.83088650080643; pylr = 6.2694462272922475; pzlr = 0.0.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): depois

```

```

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): não
Encerrando o programa.

=== MOMENTO TOTAL DAS PARTÍCULAS ===
Momento total clássico ANTES da colisão (referencial S):
px = 0.6000000000000001, py = 0.8000000000000003, pz = 0.0

Momento total clássico DEPOIS da colisão (referencial S):
px = 1.4901527300000001, py = 1.4427717700000002, pz = 0.0

Momento total clássico ANTES da colisão (referencial S' transformado clássico):
px = 8.600000000000001, py = 0.8000000000000003, pz = 0.0

Momento total clássico DEPOIS da colisão (referencial S' transformado clássico):
px = 9.49015273, py = 1.4427717700000002, pz = 0.0

Momento total relativístico ANTES da colisão (referencial S):
px = 2.568460521648353, py = 2.48679392955407, pz = 0.0

Momento total relativístico DEPOIS da colisão (referencial S):
px = 2.5684604700043154, py = 2.4867940293000057, pz = 0.0

Momento total relativístico ANTES da colisão (referencial S' transformado relativístico):
px = 15.437305036447542, py = 2.4867939295540697, pz = 0.0

Momento total relativístico DEPOIS da colisão (referencial S' transformado relativístico):
px = 15.437304960687214, py = 2.4867940293000097, pz = 0.0

```

Fonte: Resultados obtidos pelo programa B desenvolvido pelo autor (2025).

Figura 10 ¹⁷– Dados obtidos pelo programa A (colisão tridimensional).

```

SIMULADOR DE COLISÕES RELATIVÍSTICAS 3D
=====
Velocidade da luz (c, digite 1 para unidades naturais): 1
Número de partículas: 2
--- Partícula 1 ---
Massa: 6
Velocidade (componentes x, y, z):
x: 0.4
y: 0.3
z: 0.2
--- Partícula 2 ---
Massa: 4
Velocidade (componentes x, y, z):
x: -0.2
y: -0.5
z: -0.6
Processando a colisão...

=====
RESULTADOS DA COLISÃO
=====

Partícula 1:
Velocidade inicial: [0.4 0.3 0.2]
Velocidade final: [ 0.33397017 -0.27779919 -0.5876961 ]
|v| inicial: 0.538516c
|v| final: 0.730818c
Ângulo inicial: α = 42.03°, β = 68.20°
Ângulo final: α = 62.81°, β = 143.53°

Partícula 2:
Velocidade inicial: [-0.2 -0.5 -0.6]
Velocidade final: [-0.28274981 0.23519357 0.49756216]
|v| inicial: 0.806226c
|v| final: 0.618734c
Ângulo inicial: α = 104.36°, β = 138.09°
Ângulo final: α = 117.19°, β = 36.47°

-----
VERIFICAÇÃO DAS LEIS DE CONSERVAÇÃO
-----

Momento Linear Total:
Inicial: [ 1.49602917 -1.24441003 -2.63260243 ]
Final: [ 1.49602917 -1.24441003 -2.63260243 ]
Diferença: [-1.39888101e-14 1.70974346e-14 7.54951657e-15] (norma: 2.33e-14)

Energia Total:
Inicial: 3.88192399
Final: 3.88192399
Diferença: 1.39e-13

```

Fonte: Resultados obtidos pelo programa do A desenvolvido pelo autor (2025).

¹⁷ Para a colisão tridimensional o programa A retorna ao usuário os ângulos de elevação (alfa) e ângulo contido no plano xy (beta)

Figura 11 – Dados obtidos pelo programa do B (colisão tridimensional).

```

Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): 0.4
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0.3
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0.2
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.8
Digite a massa da partícula (em kg): 6

gamma do referencial: 1.66666666666667
gamma da partícula: 1.1867816581938535

Velocidade em S' (clássica): vx' = 1.200000000000002; vy' = 0.3; vz' = 0.2.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.9090909090909092; vy' = 0.136363636363633; vz' = 0.09090909090909088.
gamma da partícula (linha): 2.6109196480264782

Momento clássico em S: px = 2.400000000000004; py = 1.7999999999999998; pz = 1.200000000000002.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxi = 7.200000000000001; pyi = 1.7999999999999998; pzi = 1.200000000000002.
Momento relativístico em S: pxr = 2.8482759796652486; pyr = 2.136206984748936; pzi = 1.4241379898326243.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 14.241379898326247; pylr = 2.136206984748936; pzlr = 1.424137989832624.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): antes

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): -0.2
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): -0.5
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): -0.6
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.8
Digite a massa da partícula (em kg): 4

gamma do referencial: 1.66666666666667
gamma da partícula: 1.6903085094570331

Velocidade em S' (clássica): vx' = 0.600000000000001; vy' = -0.5; vz' = -0.6.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.7142857142857144; vy' = -0.3571428571428571; vz' = -0.4285714285714285.
gamma da partícula (linha): 2.3664319132398477

Momento clássico em S: px = -0.8; py = -2.0; pz = -2.4.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxi = 2.400000000000004; pyi = -2.0; pzi = -2.4.
Momento relativístico em S: pxr = -1.3522468075656267; pyr = -3.3806170189140663; pzi = -4.05674042269688.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 6.761234037828137; pylr = -3.3806170189140663; pzlr = -4.056740422696881.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): antes

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): 0.33397017
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): -0.27779919
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): -0.5876961
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.8
Digite a massa da partícula (em kg): 6

gamma do referencial: 1.66666666666667
gamma da partícula: 1.4650464478559089

Velocidade em S' (clássica): vx' = 1.13397017; vy' = -0.27779919; vz' = -0.5876961.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.8948796759853123; vy' = -0.13153618448509036; vz' = -0.2782704392722244.
gamma da partícula (linha): 3.094119828090959

Momento clássico em S: px = 2.00382102; py = -1.6667951399999998; pz = -3.5261766000000003.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxi = 6.80382102; pyi = -1.6667951399999998; pzi = -3.5261766000000003.
Momento relativístico em S: pxr = 2.9356908674900044; pyr = -2.441932299160492; pzi = -5.166012502342626.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 16.613189695330604; pylr = -2.4419322991604906; pzlr = -5.166012502342624.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): depois

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): sim
Digite a velocidade da partícula em x (em múltiplos de c, ex.: 0.6): -0.28274981
Digite a velocidade da partícula em y (em múltiplos de c): 0.23519357
Digite a velocidade da partícula em z (em múltiplos de c): 0.49756216
Digite a velocidade do referencial (em múltiplos de c): -0.8
Digite a massa da partícula (em kg): 4

gamma do referencial: 1.66666666666667
gamma da partícula: 1.2729113237823357

Velocidade em S' (clássica): vx' = 0.51725019; vy' = 0.23519357; vz' = 0.49756216.
Velocidade em S' (relativística): vx' = 0.6684544952118335; vy' = 0.18236768451810795; vz' = 0.38580671666758726.
gamma da partícula (linha): 1.6416316263754878

Momento clássico em S: px = -1.13099924; py = 0.94077428; pz = 1.99024864.
Momento clássico em S' (clássico transformado): pxi = 2.06900076; pyi = 0.94077428; pzi = 1.99024864.
Momento relativístico em S: pxr = -1.4396617397852156; pyr = 1.1975222341351737; pzi = 2.533410030998393.
Momento relativístico em S' (relativístico transformado): pxlr = 4.389424160530432; pylr = 1.1975222341351737; pzlr = 2.533410030998393.

Os dados inseridos correspondem ao estado da partícula 'antes' ou 'depois' da colisão? (antes/depois): depois

Deseja inserir os dados de outra partícula? (sim/não): não
Encerrando o programa.

```

```

=== MOMENTO TOTAL DAS PARTÍCULAS ===
Momento total clássico ANTES da colisão (referencial S):
px = 1.6000000000000003, py = -0.20000000000000018, pz = -1.1999999999999997

Momento total clássico DEPOIS da colisão (referencial S):
px = 0.8728217800000002, py = -0.7260208599999999, pz = -1.5359279600000004

Momento total clássico ANTES da colisão (referencial S' transformado clássico):
px = 9.600000000000001, py = -0.20000000000000018, pz = -1.1999999999999997

Momento total clássico DEPOIS da colisão (referencial S' transformado clássico):
px = 8.87282178, py = -0.7260208599999999, pz = -1.5359279600000004

Momento total relativístico ANTES da colisão (referencial S):
px = 1.496029172099622, py = -1.24441003416513, pz = -2.6326024328642554

Momento total relativístico DEPOIS da colisão (referencial S):
px = 1.4960291277047888, py = -1.2444100650253183, pz = -2.6326024713442333

Momento total relativístico ANTES da colisão (referencial S' transformado relativístico):
px = 21.002613936154383, py = -1.2444100341651314, pz = -2.6326024328642568

Momento total relativístico DEPOIS da colisão (referencial S' transformado relativístico):
px = 21.002613855861036, py = -1.244410065025317, pz = -2.6326024713442306

```

Fonte: Resultados obtidos pelo programa B do desenvolvido pelo autor (2025).

O programa A, apresenta de forma mais compacta as informações principais do processo de colisão. São fornecidos pelo usuário os valores de velocidade iniciais e o programa retorna os finais das partículas, suas velocidades escalares antes e depois da colisão, bem como os ângulos α e β , no caso tridimensional, como apresentado na figura 10, no caso da figura 9 temos o ângulo θ inicial e final está sendo retornado para o usuário após o fim da execução do programa, que caracterizam a direção dos vetores velocidade no espaço tridimensional.

Além disso, o programa realiza uma verificação explícita das leis de conservação do momento linear e da energia, mostrando a diferença entre os valores iniciais e finais. Como pode ser observado, as diferenças encontradas são da ordem de 10^{-13} e 10^{-14} , o que demonstra que o algoritmo preserva as grandezas físicas fundamentais, validando o tratamento relativístico aplicado.

Já o programa B, o nível de detalhamento é maior. Além das mesmas informações já apresentadas no programa A, há uma análise completa em diferentes referenciais inerciais. Isso inclui a transformação das velocidades e momentos tanto no formalismo clássico quanto no relativístico, evidenciando como os resultados divergem entre as duas abordagens. Em particular, observa-se que, no tratamento clássico, o momento linear total não se conserva até mesmo quando os resultados são transformados para outro referencial, o que é esperado, dado que a mecânica clássica não contempla as transformações de Lorentz. Por outro lado, no formalismo

relativístico, tanto antes quanto depois da colisão, o momento linear total permanece consistente em todos os referenciais considerados, reforçando a coerência da relatividade restrita.

Outro aspecto importante mostrado no programa B é a diferença nos fatores de Lorentz (γ) das partículas e do referencial. Esses valores determinam como as quantidades físicas se transformam, e sua presença torna evidente o caráter relativístico da simulação. Além disso, o programa fornece explicitamente os componentes do momento linear (clássico e relativístico), o que permite comparar os dois modelos matemáticos e visualizar a superioridade do tratamento relativístico em cenários de altas velocidades.

Ao analisar os dois programas em conjunto, percebe-se que o programa A cumpre um papel didático, ao mostrar de forma clara e simplificada que as leis de conservação são respeitadas na colisão relativística. Já o programa B vai além, oferecendo uma ferramenta analítica mais robusta, capaz de explorar a relatividade em diferentes referenciais e evidenciar as limitações da mecânica clássica. Esse contraste entre os dois programas ajuda a consolidar a compreensão dos princípios da relatividade restrita, principalmente no que diz respeito à conservação do momento linear e da energia em colisões.

Em todos os casos analisados e conjunto de dados obtidos, o ponto central é a comprovação de que, independentemente do referencial ou da dimensionalidade do problema, a formulação relativística assegura a consistência das leis de conservação, o que não ocorre no tratamento clássico. Essa característica torna os programas valiosas ferramentas pedagógicas e de análise para o estudo das colisões relativísticas.

6 CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi possível demonstrar, por meio de uma análise teórica e computacional, a importância do uso do momento linear relativístico em situações que envolvem partículas com velocidades próximas à da luz. A comparação entre os modelos clássico e relativístico mostrou que, enquanto o primeiro falha em garantir a conservação do momento em cenários de alta energia, o segundo se mantém consistente e coerente com os postulados da relatividade especial. Isso reforça a ideia de que a física newtoniana é um caso limite da relatividade, válida apenas para baixas velocidades, enquanto a formulação de Einstein oferece uma descrição mais abrangente e precisa da realidade física.

Os programas desenvolvidos ao longo deste trabalho permitiram a automatização dos cálculos necessários para verificar a conservação do momento linear em 1D, 2D e 3D. Essa abordagem computacional não apenas confirmou os resultados teóricos esperados, como também facilitou a visualização de casos complexos que exigiriam um esforço matemático considerável se tratados manualmente. O uso de ferramentas como Python, com bibliotecas especializadas, foi essencial para tornar esse processo acessível, didático e confiável. Além disso, o caráter interativo das aplicações permite que o usuário adapte os dados e explore diferentes cenários, contribuindo para o aprendizado ativo.

Através das simulações, ficou evidente que, ao adotar o formalismo relativístico, o momento linear é rigorosamente conservado mesmo em diferentes referenciais inerciais, algo que o modelo clássico não consegue assegurar. Isso valida não só as transformações de Lorentz, mas também os postulados fundamentais da relatividade restrita, como a constância da velocidade da luz e a equivalência dos referenciais inerciais. As transformações clássicas, por outro lado, introduzem erros cada vez mais evidentes à medida que a velocidade das partículas aumenta, o que compromete a fidelidade dos resultados físicos.

Além da análise técnica, este trabalho contribui para o ensino da física moderna ao apresentar uma abordagem prática e acessível ao tema, que costuma ser um desafio para estudantes de graduação. A possibilidade de explorar a conservação do momento relativístico com o auxílio de um simulador interativo oferece um suporte importante à aprendizagem, facilitando a compreensão de conceitos abstratos e reforçando a importância da relatividade na descrição do universo físico. A iniciativa

também estimula o desenvolvimento de ferramentas didáticas que acompanham os avanços da ciência e da tecnologia, promovendo uma educação mais próxima da realidade científica atual.

Concluimos, portanto, que a conservação do momento linear relativístico é não apenas um princípio fundamental da física moderna, mas também uma ferramenta essencial para o entendimento das interações de partículas em regimes extremos. A consistência dos resultados obtidos, tanto teórica quanto numericamente, reforça a validade da teoria da relatividade especial como um modelo robusto e necessário para a descrição do mundo físico. Espera-se que este trabalho sirva de base para estudos futuros que envolvam colisões relativísticas, transformações entre referenciais e a construção de novos recursos computacionais aplicados ao ensino e à pesquisa em física.

REFERÊNCIAS

- BONDI, Hermann. **Relativity and Common Sense: A New Approach to Einstein**. New York: Dover Publications, 1980.
- DESCARTES, René. **Principia philosophiae**. 1722. Disponível em: https://archive.org/details/bub_gb_8lue9Xxbmq8C. Acesso em: 21 jul. 2025.
- FREITAS, Edson C. D.; PRODANOV, Cláudio C. **Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico**. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.
- GIL, Antonio C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.
- GRIFFITHS, David J. **Introduction to Electrodynamics**. 3. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1999.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física. v. 4: Óptica e física moderna**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi.
- MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2017.
- NETTO, José M. C.; SILVA, Henrique H. B. **A invariância da equação da onda eletromagnética sob transformações de Lorentz**. Revista do Professor de Física, Brasília, v. 8, n. 3, p. 94-105, mar. 2025. Disponível em: <https://periodicos.unb.br/index.php/rpf/article/view/48265>. Acesso em: 19 ago. 2025.
- NEWTON, Isaac. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural. Livro I**. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2016.
- PIATTELLA, O. F. **O artigo fundador da teoria da relatividade restrita**. Cadernos de Astronomia, Espírito Santo, v. 1, n. 1, p. 157-176, jul. 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufes.br/astronomia/article/view/31681>. Acesso em: 20 jul. 2025.
- RESNICK, Robert. **Introdução à relatividade especial**. 6. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1971.
- TIPLER, Paul A.; LLEWELLYN, Ralph A. **Física moderna**. 6. ed. reimpr. Rio de Janeiro: LTC, 2017. Tradução e revisão técnica de Ronaldo Sérgio de Biasi.