



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

LUCAS MARTINS VERÇOSA

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS: uma análise de livros do Ensino Superior à luz da
Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Caruaru
2025

LUCAS MARTINS VERÇOSA

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS: uma análise de livros do Ensino Superior à luz da
Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura, do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática).

Orientadora: Profa. Dra. Maria do Desterro Azevedo da Silva

Caruaru
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Verçosa, Lucas Martins.

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS: uma análise de livros do Ensino Superior à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica / Lucas Martins Verçosa. - Caruaru, 2025.

58 p. : il.

Orientador(a): Maria do Desterro Azevedo da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.

Inclui referências.

1. Sequências numéricas. 2. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 3. Livros do Ensino Superior. I. Silva, Maria do Desterro Azevedo da. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

LUCAS MARTINS VERÇOSA

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS: uma análise de livros do Ensino Superior à luz da
Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à Coordenação do Curso de Matemática-
Licenciatura, do Centro Acadêmico do Agreste
da Universidade Federal de Pernambuco, na
modalidade de monografia, como requisito
parcial para a obtenção do grau de Licenciado
em Matemática.

Aprovada em: 05/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Maria do Desterro Azevedo da Silva (Orientadora)

Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Dra. Naralina Viana Soares da Silva (Examinadora Interna)

Universidade Federal de Pernambuco

Profa. Me. Lidiane Pereira de Carvalho (Examinadora Externa)

Secretaria de Educação de Pernambuco

Dedico este trabalho a mim.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço ao “Luquinha” por ter se apaixonado pela Matemática nos primeiros anos da Educação Básica. Sem essa paixão, eu jamais teria conseguido seguir em frente.

Agradeço à minha mãe, Antônia Martins, por reconhecer o poder da educação, mesmo sem ter tido acesso a esse direito na infância, e por sempre me incentivar a permanecer no ambiente escolar.

Aos meus irmãos e irmãs — em especial, Luciano, Suely, Jéssica, Suênia e Silvânia — por me apoiarem e acompanharem de perto boa parte da minha jornada acadêmica. Também aos meus irmãos e irmãs Suelânia, Jefferson, Suedja e Suzana, por torcerem pelo meu sucesso profissional.

À minha orientadora, Maria do Desterro, por acreditar no meu potencial, mesmo quando eu constantemente duvidava dele. A senhora é minha principal fonte de inspiração no meio acadêmico. Obrigado por ter me acolhido nessa jornada!

Ao grupo de amigas e amigos que tive a sorte de conhecer ao ingressar no curso: Maria Luiza, Isabella Carvalho, Kalina Gislane, Ana Clara e José Lucivaldo. É um prazer inenarrável compartilhar tudo aquilo que jamais tive a oportunidade de compartilhar com outras pessoas. Cada um de vocês foi essencial para que eu conseguisse dar início à (re)construção da minha própria identidade, a qual foi invisibilizada e invalidada por muitos anos.

Maria Luiza, como diria a Taylor Swift: foi encantador te conhecer! Tua forma de tratar o próximo, sua empatia, sua inteligência e sua grande amizade me inspiram profundamente. Sou imensamente grato por você ser tão presente em minha vida, mesmo separados por tantos quilômetros. Obrigado por sempre ouvir tudo aquilo que tenho a dizer, independentemente de ser algo supérfluo ou mais profundo. Te amo muito!

Isabella, tua força de vontade e dedicação em tudo que te propões a fazer me inspiram constantemente. Você é, literalmente, daquelas amigas que chegam cinco minutos antes de os portões da escola de um concurso se fecharem, porque estava esperando eu chegar à tua casa para irmos juntos. É uma honra ser teu amigo e colega de estudos em quase cem por cento das disciplinas, já que não cursamos juntos apenas uma cadeira durante todo o curso. Você é gigante!

Kalina, sou imensamente grato pela tua amizade e por compartilhar comigo tantas ideias

em comum. Não sei exatamente o motivo, mas sempre me identifiquei com vários aspectos da tua personalidade. Isso, com certeza, fez com que nos tornássemos ótimos amigos. Admiro sua paixão pela Matemática, especialmente pelos assuntos de Cálculo. Você vai longe!

Ana, obrigado por contribuir imensamente para a (re)conquista da minha espontaneidade. Tua leveza e teu senso de humor com certeza me tornaram um pouco mais extrovertido. Tua amizade é extremamente valiosa para mim!

Lucivaldo, obrigado pela tua amizade, por ser o melhor capitão do time de vôlei e de queimada e por ser aquele amigo que sempre consegue suavizar o clima com seu humor “quebrado”.

Agradeço também aos professores que contribuíram significativamente para o meu desenvolvimento no curso de Matemática – Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste. Em especial, à Maria do Desterro, Luan Danilo, Lidiane Carvalho, Simone Queiroz e Naralina Viana.

À minha professora da Educação Infantil, Edvânia Xavier, por ter dado início ao preenchimento da minha “bagagem” de conhecimentos e de saberes que foram essenciais para o meu desenvolvimento como estudante.

À minha prima Valderlania Melo, por ter me ajudado a conquistar uma nota excepcional no Exame Nacional do Ensino Médio e por acreditar no meu potencial. Cada redação minha corrigida por você constituiu um degrau importante para a minha aprovação.

Por fim, agradeço a todos que participaram positivamente da minha trajetória acadêmica. Em especial, aos meus colegas de curso e de PIBID, Isaac e Jennyfer, e à minha colega de van, Maria Eduarda, por tornar mais curtas as longas viagens entre a faculdade e minha casa com nossas conversas.

*“I’m doin’ it for all of us who never got the chance” (Del Rey, *Get Free*, 2017).*

RESUMO

A aprendizagem em Matemática está fortemente vinculada ao uso de representações que expressam os objetos matemáticos. Segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval, a compreensão profunda desses objetos requer a coordenação de múltiplos registros de representação. Esse pressuposto teórico torna-se especialmente relevante no estudo de sequências numéricas no ensino superior, uma vez que elas fundamentam conceitos avançados como limites de funções, conforme enfatizado por Lima (2012). Dessa forma, este trabalho tem como objetivo analisar, sob a perspectiva da TRRS, a abordagem dos livros didáticos do Ensino Superior em relação ao conteúdo de sequências numéricas. A pesquisa, de natureza qualitativa e bibliográfica, examina três obras de referência amplamente utilizadas na graduação em Licenciatura em Matemática, buscando identificar os registros de representação empregados, além dos processos de conversão entre eles. Em especial, buscou-se também investigar o uso do registro gráfico na compreensão de teoremas. A análise revela que a apresentação dos conceitos nos livros do Ensino Superior privilegia registros linguísticos e simbólicos-algébricos, com limitações na integração de representações visuais. Embora um dos livros incorpore representações gráficas relacionadas aos teoremas, a falta de articulação explícita entre essas visualizações e os passos formais das demonstrações reduz seu potencial didático.

Palavras-chave: sequências numéricas; Teoria dos Registros de Representação Semiótica; livros do Ensino Superior.

ABSTRACT

Learning in Mathematics is intrinsically linked to the use of representations that express mathematical objects. According to the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS), proposed by Raymond Duval, a deep understanding of these objects requires the coordination of multiple representation registers. This theoretical assumption becomes particularly relevant in the study of numerical sequences in higher education, as they form the foundation for advanced concepts such as function limits, as emphasized by Lima (2012). Thus, this study aims to analyze, from the perspective of TRRS, the approach taken by higher education textbooks regarding the content of numerical sequences. The research, qualitative and bibliographic in nature, examines three widely used reference works in undergraduate Mathematics Teacher Education programs. It seeks to identify the representation registers employed, as well as the conversion processes between them. Special attention is given to investigating the use of the graphical register in understanding theorems. The analysis reveals that the presentation of concepts in higher education textbooks predominantly favors linguistic and symbolic-algebraic registers, with limited integration of visual representations. Although one of the textbooks incorporates graphical representations related to theorems, the lack of explicit connection between these visualizations and the formal steps of the proofs diminishes their didactic potential.

Keywords: numerical sequences; Theory of Semiotic Representation Registers; higher education textbooks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	–	Questão 166 do Enem 2020	24
Figura 2	–	Sequência numérica específica representada graficamente	28
Figura 3	–	Representação gráfica de uma sequência numérica ilustrando a noção de limite	29
Figura 4	–	Representação gráfica de uma sequência numérica que diverge para o infinito negativo.	30
Figura 5	–	Ilustração que evidencia visualmente a hipótese e a conclusão do Teorema do Confronto com base em sequências específicas.	33
Figura 6	–	Representação gráfica do Teorema da Sequência Monótona (caso em que a sequência é crescente)	35
Figura 7	–	Interpretação geométrica e gráfica da sequência $a_n = n/(n + 1)$	42
Figura 8	–	Interpretação geométrica do limite de uma sequência	44
Figura 9	–	Interpretação geométrica e gráfica do limite de uma sequência	44
Figura 10	–	Ilustração que evidencia visualmente a hipótese e a conclusão do Teorema do Confronto com base em sequências específicas.	49
Figura 11	–	Representação gráfica de uma sequência monótona crescente e limitada, destacando visualmente o comportamento convergente previsto no teorema.	51

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Correspondência semântica entre representações semióticas da definição de limite de sequência	23
Quadro 2 – Representações gráficas interativas das demonstrações de teoremas disponíveis no GeoGebra	35
Quadro 3 – Livros selecionados para análise	38
Quadro 4 – Categorias e Critérios de análise baseada na TRRS	39
Quadro 5 – Conceito de sequência de números reais	41
Quadro 6 – Conceito de limite de sequência	43
Quadro 7 – Conceito de limites infinitos	45
Quadro 8 – Conceitos associados à limitação de sequências	46
Quadro 9 – Conceitos referentes a monotonicidade de sequências	47
Quadro 10 – Demonstração do Teorema da Sequência Monótona - Livro 2	51

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Conv.	Conversão
Def.	Definição
Enem	Exame Nacional do Ensino Médio
PPC	Projeto Pedagógico do Curso
RF	Registro Figural
RGe	Registro Geométrico
RGr	Registro Gráfico
RLN	Registro Língua Natural
Seq.	Sequência
RRS	Registro de Representação Semiótica
RS	Registro Simbólico
RS_ReAl	Registro Simbólico na Representação Algébrica
RS_ReNm	Registro Simbólico na Representação Numérica
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA .	17
2.1	REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS	17
2.2	OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA	18
2.2.1	O fenômeno de conversão entre representações semióticas	21
2.3	A IMPORTÂNCIA DE REPRESENTAÇÕES VISUAIS	24
3	DIFERENTES REPRESENTAÇÕES RELACIONADAS ÀS SEQUÊN- CIAS NUMÉRICAS	27
3.1	PRINCIPAIS DEFINIÇÕES	27
3.2	REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO APOIO INTUITIVO À DEMONS- TRAÇÃO MATEMÁTICA	32
4	METODOLOGIA	37
4.1	CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA	37
4.2	A SELEÇÃO DOS LIVROS	38
4.3	CATEGORIAS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE DOS LIVROS	39
5	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	40
5.1	ORGANIZAÇÃO ESTRUTURAL DOS CAPÍTULOS DEDICADOS À APRE- SENTAÇÃO DO CONTEÚDO	40
5.2	ANÁLISE DAS DEFINIÇÕES SOB A PERSPECTIVA DA TRRS	41
5.3	ANÁLISE DOS REGISTROS GRÁFICOS ASSOCIADOS AOS TEOREMAS	49
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	REFERÊNCIAS	55

1 INTRODUÇÃO

Diferentemente do que acontece em outras áreas do conhecimento, como Física e Química, na Matemática os objetos de estudo não podem ser observados em sua forma “real” e/ou palpável, devido ao alto nível de abstração dos conceitos abordados. Tal aspecto dificulta o processo de ensino-aprendizagem e exige tanto do aprendiz quanto do professor a ação de buscar diferentes formas para compreender e visualizar os conteúdos.

É por meio da linguagem simbólica (numérica ou algébrica), geométrica e gráfica que os objetos matemáticos são acessados. Raymond Duval (2012) define cada linguagem supracitada como um registro de representação semiótica, e por isso a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por ele, entra em cena nesta pesquisa, com seu aporte teórico abundante em conceitos que auxiliam a compreensão de ideias matemáticas sob diferentes perspectivas.

A relevância dessa abordagem também se reflete em documentos oficiais da educação brasileira, como a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), que reconhece as diferentes representações de um mesmo objeto matemático como elementos fundamentais do processo de ensino e de aprendizagem.

Essa valorização das múltiplas representações é especialmente pertinente no ensino de sequências de números reais, conteúdo que perpassa diferentes etapas da educação básica. Elas aparecem, por exemplo, no estudo de progressões aritméticas e geométricas e na definição de potências com expoente irracional. No entanto, os objetos matemáticos relacionados às sequências numéricas ganham destaque em disciplinas como Análise Real e Cálculo Diferencial e Integral, já que, conforme Lima (2019), o conceito de limite de sequências numéricas constitui a base para a compreensão de conceitos mais sofisticados, como derivadas, integrais, sequências de funções. Dada essa presença contínua e estruturante das sequências no currículo educacional, torna-se essencial analisar como elas são apresentadas aos estudantes, especialmente nos livros, que se configuram como instrumentos fundamentais no processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Macêdo, Brandão e Nunes, (2019), existem diversos recursos didáticos que podem ser utilizados ao se ensinar Matemática, porém o principal instrumento de ensino do professor na educação básica permanece sendo o livro didático. Esse fato também pode ser observado no ensino superior, onde o livro possui grande influência no planejamento das aulas estruturado por alguns professores, além de servir como principal fonte de conhecimento para

os estudantes da graduação.

Contudo, explorar o livro sem analisá-lo criticamente pode limitar as opções de ensino e afetar negativamente a aprendizagem matemática tanto na Educação Básica quanto na Superior. Assim, uma atenção especial à forma como os conceitos são apresentados nos materiais didáticos torna-se indispensável. Como alerta Libâneo (1991): ao recorrer ao livro didático, é importante que o professor tenha senso crítico em relação à maneira como os conteúdos são apresentados nesse material. Dessa forma, a relevância do livro implica uma análise criteriosa de suas informações, tanto pelos professores e estudantes quanto por pesquisadores que buscam contribuir para o aperfeiçoamento da Educação Matemática.

Durante algumas aulas da disciplina de Análise Real, vivenciei diretamente alguns dos obstáculos mencionados anteriormente, o que influenciou de forma significativa os rumos desta pesquisa. No processo de ensino de conteúdos como conjuntos finitos e infinitos, números reais, sequências de números reais, entre outros, era comum a docente, responsável pela disciplina, afirmar: “Vamos desenhar para entender melhor”. Essa prática ganhou grande relevância durante as aulas, uma vez que os livros utilizados quase nunca exibiam representações geométricas ou gráficas.

Tais experiências me mostraram como esses recursos visuais se tornavam fundamentais sempre que fosse possível utilizá-los, já que a visualização por meio de figuras proporcionava uma aproximação concreta com objetos abstratos. Em particular, o estudo de limites de sequências na Análise Real, com o apoio do GeoGebra para visualização gráfica, foi essencial para minha aprendizagem em relação a esse tópico. Essa percepção está em sintonia com o que Duval (2012) defende: a diversidade e a articulação entre diferentes registros de representação são imprescindíveis para a aquisição do conhecimento matemático.

Enquanto as representações gráficas despertavam minha atenção, também compreendia como as sequências numéricas não apenas são importantes para a matemática avançada, mas também servem de base para conceitos fundamentais, como na definição de potências com expoentes irracionais, revelando a forte relação entre diferentes níveis do conhecimento matemático. Essa dupla perspectiva despertou, então, meu interesse pela pesquisa sobre sequências numéricas em articulação com a visualização gráfica-geométrica.

Diante desse cenário, realizei buscas no Repositório Digital da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e no Google Acadêmico por trabalhos que analisassem o conteúdo de sequências numéricas sob a ótica da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. No entanto, não foram encontrados estudos que tratassem especificamente dessa temática, o

que justifica a pertinência desta pesquisa e suscita o seguinte questionamento: como os livros do Ensino Superior abordam os aspectos propostos pela TRRS ao apresentar o conteúdo de sequências numéricas?

Dessa forma, este estudo tem como objetivo geral investigar a abordagem do conteúdo de sequências numéricas em livros do Ensino Superior, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Com base nesse direcionamento, a pesquisa delimitou-se aos seguintes objetivos específicos:

- Identificar os registros de representação semiótica utilizados na definição dos objetos matemáticos relacionados ao conteúdo de sequências numéricas;
- Analisar as conversões realizadas durante o processo de definição dos objetos matemáticos em estudo;
- Examinar a utilização do registro gráfico na abordagem dos conceitos e teoremas.

Para alcançar tais objetivos, o estudo adota uma abordagem qualitativa baseada em pesquisa bibliográfica, com análise de três livros de referência do Ensino Superior à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A metodologia estrutura-se em três eixos principais: a diversidade de registros, a conversão entre representações e o uso dos registros geométricos.

Quanto à estrutura desta pesquisa, os próximos capítulos estão organizados da seguinte forma: o Capítulo 2 desenvolve a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, explorando seus conceitos centrais. Além disso, esse capítulo destaca o papel da visualização geométrica no estudo dos objetos matemáticos em questão. O Capítulo 3 apresenta definições e teoremas relacionados às sequências numéricas, que servirão de base para investigar os registros de representação semiótica presentes nos livros do Ensino Superior. Já o Capítulo 4 detalha os procedimentos metodológicos adotados para realizar esta pesquisa, incluindo aqueles que nortearão tanto a seleção quanto a análise dos livros. No Capítulo 5, exibem-se os dados proporcionados pela análise realizada, a qual baseia-se nas categorias e critérios definidos no capítulo anterior. Por fim, o Capítulo 6 traz os resultados obtidos nesta pesquisa e sugere direções para investigações futuras, fundamentadas nas problemáticas identificadas durante a análise.

2 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Segundo Kluppel e Ponte (2012), o filósofo, psicólogo e professor Raymond Duval foi responsável por desenvolver diversas pesquisas entre os anos de 1970 e 1995, associadas à Psicologia Cognitiva. Seus estudos contribuíram significativamente para a ascensão da Educação Matemática no século XX, introduzindo novas perspectivas acerca dos objetos matemáticos.

Entre suas principais contribuições, destaca-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, elaborada para abordar um desafio central no ensino da Matemática: a alta abstração de seus conceitos, que frequentemente dificulta a compreensão integral por parte dos estudantes. Nesse contexto, a TRRS surge como ferramenta essencial, indicando estratégias para tornar tais conceitos mais acessíveis por meio do trabalho com múltiplas representações.

Assim, neste capítulo, abordam-se os principais conceitos relacionados à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma das principais contribuições de Raymond Duval à Educação Matemática.

2.1 REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

A palavra “representação” é constantemente mencionada por aqueles que estudam Matemática. Conforme Duval (2012, p. 268), isso ocorre porque “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata”, como são os objetos físicos e palpáveis. Uma expressão algébrica ou numérica, um gráfico, uma figura ou a própria linguagem natural são exemplos de como representar determinado objeto matemático. Duval denomina essas representações de “representações semióticas”.

Mas o que é semiótica? Conforme Carvalho (2017, p. 49), “a semiótica é a teoria que estuda todas as formas de signos, ou seja, todo sistema e fenômenos de significação.” Com base nisso, Catto (2000, p. 27) define as representações semióticas como “as produções constituídas pelo emprego de símbolos pertinentes a um sistema de representação imbuído de significado e funcionamento”. Ou seja, trata-se de representações que seguem regras próprias dentro de um sistema e que permitem a comunicação de ideias ou informações de forma compreensível. Dessa forma, não podemos chamar de representação semiótica aquelas representações que não transmitem significado e funcionalidade para o receptor. Um exemplo disso seria a sequência “ x y 2 z ”, que, isoladamente, não expressa nenhuma relação matemática, sendo, portanto, apenas

uma sucessão aleatória de letras e números, sem sentido comunicativo ou funcional.

Por trás de cada representação semiótica, de acordo com Duval (2012), existe um conjunto de imagens psíquicas, isto é, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre o objeto representado, denominadas de “representações mentais”. Por exemplo, ao se deparar com uma sequência de números reais representada algebricamente por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dada por $x_n = n$, o estudante pode criar em sua mente uma imagem numérica mental que representa a sequência, de modo que os termos se apresentem um após o outro, como $(1, 2, 3, \dots)$.

Por outro lado, as representações semióticas geralmente funcionam como um suporte para as representações mentais; ou seja, as representações semióticas comunicam, de forma verbal ou não verbal, as representações mentais. No entanto, para Duval, a funcionalidade de uma representação semiótica vai além da comunicação: ela possibilita determinadas atividades cognitivas, como a manipulação de expressões algébricas e a transformação de dados em um gráfico.

Assim, “de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, do outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível” (Duval, 2012, p. 266). O primeiro processo, segundo o pesquisador, é denominado como *noese*, enquanto o segundo é intitulado de *semiose*.

1. *Noese* diz respeito à absorção conceitual de um objeto;
2. *Semiose* refere-se à apreensão ou à produção de uma representação semiótica.

Isso significa que o objeto matemático, em si, é diferente da representação que se faz dele. Ademais, o teórico afirma que a *noese* é indissociável da *semiose*. Ou seja, só é possível compreender um objeto matemático por meio da criação, da apreensão e da utilização de representações semióticas.

2.2 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Um objeto matemático, como afirma Carvalho (2017), pode ser expresso de diversas formas, cada uma delas com vantagens e limitações, de acordo com as características “físicas” que as compõem. O que estabelece tais características é o sistema semiótico, ou melhor, o conjunto de signos que determina a representação.

Um sistema semiótico considera regras, mais o menos explícitas, que permitem combinar os signos entre si, de modo que a associação formada tenha também um sentido. As possibilidades de combinação são as que dão a capacidade inventiva ao sistema semiótico permitindo efetuar, no seu interior, transformações de expressão ou de representação. Essas regras determinam o funcionamento do sistema, sua sintaxe em sentido amplo [...] (Duval, 2004, p. 43 *apud* Ingar, 2014, p.42).

Contudo, alguns sistemas semióticos possuem restrições relacionadas ao modo como as representações podem ser trabalhadas. Por exemplo, o código Morse não permite manipular as representações formadas por ele, diferentemente do que ocorre com a expressão algébrica $(x + 2)^2$, a qual pode ser reescrita como $x^2 + 4x + 4$ ou $x^2 + 4(x + 1)$. Assim, dentre todas as representações possíveis, obviamente, a escolhida será aquela que melhor se enquadra no contexto apresentado pelo professor ou pelo livro. Segundo Duval (2018), essa estratégia pode contribuir para a apreensão e compreensão do objeto estudado.

Diante dessa conjuntura, Duval (2009, 2011) define *registro de representação semiótica* como um sistema semiótico que permite realizar três atividades cognitivas associadas à semiose: *formação* de representações identificáveis, *tratamento* em determinada representação e *conversão* entre representações.

1. A *formação* diz respeito à exibição de determinado objeto matemático por meio de representações semióticas, tendo como finalidade exprimir uma representação mental ou evocar um objeto real. Ressalta-se que esse processo de construção segue as regras do sistema semiótico utilizado;
2. O *tratamento*, ou transformação interna, refere-se à manipulação de representações de modo que, no final do processo, a representação ainda continue expressa no mesmo sistema semiótico;
3. A *conversão*, ou transformação externa, é a ação de transformar uma representação expressa em determinado sistema semiótico em outra representada por meio de um novo sistema, mantendo-se, porém, uma correlação entre elas. No ato de conversão, conserva-se a totalidade ou, ao menos, parte do conteúdo.

Observa-se, portanto, que não é possível classificar, por exemplo, o código Morse como registro de representação semiótica, uma vez que esse sistema semiótico não permite realizar tratamentos em suas representações. Já o sistema de signos responsável por gerar a expressão $(x + 2)^2$ permite a realização das atividades cognitivas 1, 2 e, inclusive, da terceira, uma vez que

tal expressão pode ser transcrita como “ x mais dois elevado ao quadrado”. Assim, classifica-se esse sistema como registro de representação semiótica.

Diante disso, nota-se que “o termo *registro* foi escolhido por Duval para distinguir os sistemas semióticos utilizados em matemática de outros sistemas semióticos utilizados fora da matemática” (Rezende; Abranches; Cavalcante, 2016, p. 5). Tais pesquisadores ainda ressaltam que Duval (2011, 2017) define quatro registros gerais: *Linguagem Natural* (RLN), *Simbólico* (RS), *Gráfico* (RGr) e *Figural* (RF). O RS pode ser exibido, por exemplo, na representação algébrica (RS_ReAl) ou numérica (RS_ReNm), da mesma forma que o RF pode ser expresso por meio de figuras geométricas (RGe). A seguir, são dadas algumas características dos registros observadas ao longo desta pesquisa:

- *Registro em Linguagem Natural*: é o registro verbal, em que ideias matemáticas são expressas por meio de palavras, frases e argumentações;
- *Registro Simbólico – Algébrico (RS_ReAl)*: expressa ideias matemáticas por letras, variáveis e operações formais manipuláveis;
- *Registro Geométrico*: representa conceitos por meio de figuras geométricas no plano ou no espaço, com foco em formas e relações espaciais;
- *Registro Gráfico*: representa relações matemáticas por meio de curvas ou pontos no plano cartesiano.

Os registros são categorizados, conforme Duval (2010), em multifuncionais ou monofuncionais. Nos registros multifuncionais, os tratamentos não ocorrem por meio de algoritmos, o que pode ser observado, por exemplo, na reformulação de uma oração ou palavra expressa em linguagem natural. Já nos registros monofuncionais, os tratamentos são executados predominantemente de forma algoritmizada, isto é, seguindo um passo a passo previamente determinado, como ocorre na resolução de uma equação qualquer. Ademais, destaca-se que cada uma dessas categorias determina representações discursivas ou não discursivas.

A representação é discursiva quando é um encadeamento lógico de símbolos, palavras ou gestos, por exemplo na linguagem algébrica, nos textos da língua natural, na comunicação dos surdos-mudos, nos sistemas de numeração. No caso das figuras geométricas, não existe esse encadeamento, é uma única figura representando o que se quer representar (Souza, 2007, p.64).

Para Duval (2010), tanto o registro na linguagem natural quanto o registro geométrico classificam-se como registros multifuncionais, com natureza discursiva e não discursiva, res-

pectivamente. Já o registro simbólico, tanto na representação algébrica quanto na numérica, e o registro gráfico são classificados como monofuncionais, sendo o primeiro discursivo e o segundo não discursivo. Dessa forma, cada registro oferece aos estudantes propriedades e características diferentes de um mesmo objeto matemático.

Tais registros são essenciais para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, uma vez que muitos problemas matemáticos são expressos no RLN, enquanto sua resolução, muitas vezes, ocorre no RAI ou no RNm. Segundo Duval (2012), isso acontece porque a aprendizagem matemática ocorre por meio da *coordenação*¹ entre, no mínimo, dois registros, um multifuncional e outro monofuncional. Assim, as conversões estão intrinsecamente ligadas ao processo de coordenação de registros.

Diante disso, e levando em consideração que os problemas matemáticos se fundamentam em conceitos, torna-se imprescindível verificar se o fenômeno de conversão é empregado na apresentação dos objetos associados às sequências numéricas abordados em livros de ensino superior.

2.2.1 O fenômeno de conversão entre representações semióticas

Para Cardoso (2015, p. 103), “a conversão viabiliza uma apreciação mais robusta do objeto matemático, porque não apenas um novo recorte do objeto é possível a cada novo registro de representação, mas também novas relações podem ser estabelecidas”. No entanto, conforme Duval (2012), os objetos matemáticos não devem, em hipótese alguma, ser confundidos com nenhuma de suas representações, pois nenhuma delas apresenta a totalidade do conceito. Essa distinção é necessária, pois algumas representações omitem certas informações, o que pode levar o estudante a desenvolver uma compreensão incompleta do conceito analisado.

Mas, se os objetos matemáticos são abstratos e seus estudos são possíveis apenas por meio de suas representações, como não confundi-los com suas representações? Essa imposição de condições leva a um paradoxo denominado por Duval de *paradoxo cognitivo da matemática*. Duval alega que “[...] é a possibilidade de multirrepresentação potencial de um mesmo objeto que permite contornar este paradoxo”. Esta é a condição fundamental para que o aluno saiba distinguir os objetos matemáticos de suas diferentes representações (Duval, 2012, p. 283 *apud* Rezende; Abranches; Cavalcante, 2016, p. 6).

Nesse sentido, a conversão entre representações é a principal estratégia para garantir a apreensão dos objetos matemáticos, uma vez que, além dos fatos supracitados, Duval (2012, p.

¹ “A *coordenação* é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos”(Henriques; Almouloud, 2016, p.470).

283) assegura que, ao limitar-se a apenas um registro de representação semiótica, os conhecimentos adquiridos tornam-se “pouco ou não utilizáveis em outras situações onde deveriam realmente ser utilizados”. Além disso, o teórico argumenta que essa restrição impede que o aprendiz tenha pleno domínio e controle sobre o objeto estudado, conduzindo-o a uma aprendizagem “às cegas”.

Diante disso, torna-se necessário aprofundar-se nos principais aspectos relacionados à conversão, como a correlação existente entre a representação obtida após esse fenômeno e aquela que a originou. Duval (2011, p.67) explica que para identificar se “duas representações semióticas de naturezas diferentes representam um mesmo objeto, é preciso colocar em *correspondência [semântica]* as unidades de sentido entre os conteúdos respectivos das duas representações” (Duval, 2011, p.67, grifo nosso). O teórico ainda acrescenta que

- Se a língua e as figuras geométricas são os registros utilizados, é preciso reconhecer a correspondência entre certas unidades discursivas de sentido de um enunciado (definição, teorema) e certas unidades figurais da configuração geométrica;
- Se a expressão simbólica de relações e a língua são os registros utilizados, é preciso reconhecer a correspondência entre certas unidades de sentido do enunciado e as unidades simbólicas da equação (letras, sinais de operações e de relação);
- Se a expressão simbólica de relações e os gráficos cartesianos são os registros utilizados, será preciso reconhecer a correspondência entre cada uma das unidades de sentido da equação ou inequação e os diferentes valores visuais de uma reta, de uma curva etc. (Duval, 2018, p. 9).

Desse modo, cada registro possui sua própria unidade de sentido: “a linguagem natural terá as unidades discursivas, as figuras terão as unidades figurais, os símbolos terão as unidades simbólicas e os gráficos, os valores visuais” (Batista; Merlini, 2024). No entanto, ressalta-se que converter tais unidades significantes pode não ser suficiente para garantir a apreensão de determinado objeto matemático; é preciso estabelecer uma coordenação entre elas, como afirma Duval (2018).

Como exemplo, o Quadro 1 apresenta a conversão entre duas representações que expressam o limite de uma sequência, passando da linguagem natural para a linguagem simbólico-algébrica. Além disso, esse quadro evidencia, na prática, como se dá a correspondência semântica entre as unidades de sentido.

Quadro 1 – Correspondência semântica entre representações semióticas da definição de limite de sequência

Registro em Linguagem Natural	Registro Simbólico-Algébrico
a é limite da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$	$a = \lim x_n$
quando	$\cdot \equiv \cdot$
para todo	$\forall$
ε maior que zero	$\varepsilon > 0$
existir	$\exists$
um número natural	$n_0 \in \mathbb{N}$
tal que	$;$
n maior que esse número natural	$n > n_0$
implica	$\Rightarrow$
o valor absoluto de x_n menos a	$ x_n - a $
menor que ε	$< \varepsilon$

Fonte: O autor (2025).

Conforme acima, a conversão de uma expressão em linguagem natural para a representação em linguagem algébrica exige uma substituição por símbolos algébricos e numéricos referencialmente equivalentes e que podem ser semanticamente *congruentes ou não* (Silva, 2020, p. 29, grifo nosso).

Para Duval (2009, 2011), a conversão será considerada *congruente* quando houver:

- I. *Correspondência semântica* entre as unidades de sentido que compõem as representações. Isso significa que cada unidade de sentido do registro de partida possui uma única unidade correspondente no registro de chegada;
- II. *Univocidade semântica terminal*. Isso significa que, dado um objeto matemático expresso em registros diferentes, não há ambiguidades no significado das unidade de sentido correspondentes;
- III. *Mesma ordem de apreensão* das unidades nas duas representações. Isso significa que as unidades de sentido obtidas ao final da conversão seguem a mesma sequência lógica das unidades significantes correspondentes da representação inicial.

Caso a execução de alguma das atividades cognitivas supracitadas não seja trivial, a conversão será considerada *não congruente*. Assim, algumas conversões podem apresentar grau de congruência maior ou menor, a depender da quantidade de critérios satisfeitos.

denciando relações espaciais implícitas. Segundo Bolda (1997), essa estratégia, historicamente empregada por matemáticos como Pitágoras, Euclides e Sócrates, demonstra que a conversão para o registro geométrico não só facilita a compreensão conceitual como também participa ativamente do processo demonstrativo.

Com base nas ideias de Polya (1994, p. 83–85), a pesquisadora Bolda (1997, p. 15) argumenta que a *visualização*³ geométrica desempenha um papel relevante para a resolução de problemas matemáticos, levando em consideração os seguintes aspectos:

- uma figura pode estar na nossa imaginação ou pode ser desenhada; dependendo da situação, é mais fácil imaginá-la, mas se tivermos que examinar muitos detalhes, é preferível desenhá-la;
- as figuras planas são fáceis de desenhar, podem ser construídas cuidadosamente à mão livre e com rapidez;
- podemos tratar, separar e recombinar todos os detalhes oferecidos no problema com o uso de uma figura; através da figura é muito mais fácil analisar todos os detalhes oferecidos pelo problema, uma vez que é muito mais difícil imaginar todos os detalhes simultaneamente (Bolda, 1997, p.15 *apud* Polya, 1994, p.83-85).

Esses aspectos ressaltam o papel fundamental da visualização no desenvolvimento do pensamento matemático, o que se revela particularmente relevante para a Análise Matemática, uma das áreas de estudos de sequências numéricas. Vale destacar que, antes de concretizar-se aritmeticamente, tanto a resolução de problemas quanto os métodos de investigação utilizados nesse ramo da Matemática baseavam-se, principalmente, na Geometria (Roque, 2012).

Atualmente, no entanto, a Análise é deduzida logicamente a partir de um conjunto de postulados que caracterizam o sistema dos números reais, sem necessariamente recorrer à Geometria para apresentar a demonstração dos teoremas fundamentais do Cálculo Infinitesimal (Eves, 2004). Apesar disso, as conversões continuam desempenhando um papel importantíssimo: auxiliar o processo de apreensão de conceitos e de demonstrações matemáticas.

Essa perspectiva também é defendida por um dos matemáticos mais influentes do Brasil, Lima (2014, p.73), ao argumentar que as “interpretações geométricas não devem intervir nas demonstrações, mas constituem um auxílio valiosíssimo para o entendimento dos conceitos e teoremas de Análise”. Portanto, mesmo estando fundamentadas do ponto de vista aritmético, as demonstrações matemáticas e os conceitos associados às sequências numéricas podem e devem ser analisados sob uma perspectiva geométrica.

³ "A visualização na Matemática é o processo de formação de imagens, podendo essa formação ser mental, com lápis e papel ou com a tecnologia, e usando-as com o propósito de obter uma melhor compreensão matemática, assim como, usando-as como forma de estimulação no processo de descoberta matemática"(Zimmermann; Cunningham, 1991 *apud* Mazzi, 2014, p.33).

A análise de sequências numéricas como funções de domínio natural possibilita uma rica análise visual a partir de gráficos cartesianos, ferramenta igualmente fundamental no estudo de funções reais. Conforme Duval (2004, p. 66 *apud* Ingar, 2014, p.62):

em matemática, os gráficos cartesianos são utilizados sempre em articulação com outro registro de representação e, ademais, devem permitir tratamentos qualitativos próprios a este modo de visualização. [...] Esses gráficos podem ser vistos de duas maneiras: uma pontual, que dá a indicação de um valor em um momento dado, e outra icônica, que evoca o alto e o baixo, as subidas suaves ou abruptas a partir do nível de base.

No entanto, o autor defende que a ação de identificar os pontos da função e marcá-los no gráfico, como ocorre constantemente nas aulas, não garante aos estudantes uma interpretação integral sobre o que tal visualização significa. Dessa forma,

um dos problemas específicos da aprendizagem é fazer passar os alunos de uma apreensão local e icônica a uma apreensão global qualitativa. Somente com este tipo de apreensão é que se pode fazer coordenação com o registro da escritura algébrica de relação, podendo os gráficos cartesianos funcionar como uma visualização (Ingar, 2014, p.62).

Nesse sentido, como cada registro apresenta limitações específicas, as representações gráficas apenas auxiliam o processo de apreensão do objeto. Assim, ao estabelecer, de forma coerente, uma relação entre as unidades gráficas e as unidades simbólicas ou linguísticas, torna-se mais fácil proporcionar ao aluno uma visão global e significativa do conceito.

Diante do exposto, o capítulo a seguir apresenta representações gráficas, especialmente gráficos cartesianos, que dialogam diretamente com a compreensão de conceitos e teoremas.

3 DIFERENTES REPRESENTAÇÕES RELACIONADAS ÀS SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

Este capítulo é responsável por introduzir as definições e proposições fundamentais relacionadas às sequências numéricas, que são apresentadas por meio dos seguintes registros: RLN e RS_RAI. Complementando essa abordagem, incluímos representações gráficas, permitindo uma visualização concreta desses objetos abstratos. Essa articulação entre registros visa construir uma compreensão mais sólida e multifacetada das sequências numéricas e suas propriedades.

3.1 PRINCIPAIS DEFINIÇÕES

Apresentamos as definições matemáticas centrais deste trabalho. Iniciamos pela definição de sequência numérica:

Definição 1. *Uma **sequência de números reais** é uma função x que associa a cada número natural n um único número real x_n , denominado termo geral da sequência. O elemento n é chamado de índice do termo correspondente.*

Formalmente, esta função é representada no registro simbólico-algébrico por

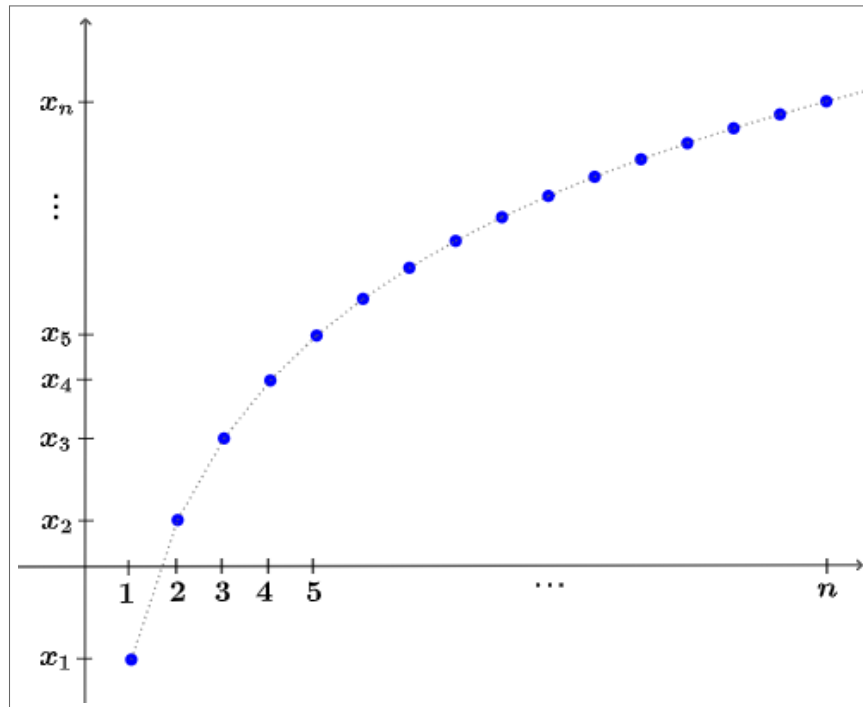
$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{com} \quad n \mapsto x(n) = x_n.$$

Sua representação canônica, que explicita os termos da sequência, pode ser expressa de três formas equivalentes:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n).$$

A figura a seguir ilustra a representação gráfica de uma sequência numérica, mostrando no plano cartesiano como cada número natural n (no eixo horizontal) está associado a um único valor real x_n (no eixo vertical).

Figura 2 – Sequência numérica específica representada graficamente



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra (2025).

A próxima definição é um marco fundamental na Análise Matemática, servindo como alicerce para diversos conceitos posteriores como limite de funções, derivadas e integrais.

Definição 2. *O limite de uma sequência (x_n) é um número real L que cumpre a seguinte propriedade: para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ maior que zero (dado arbitrariamente), existe um índice n_0 a partir do qual os termos seguintes x_n estão a uma distância menor que ε de L .*

A definição de limite admite múltiplas representações: na linguagem natural somada à simbólica, expressamos simplesmente que “ (x_n) converge para L ”, capturando a ideia intuitiva de aproximação. Já na notação simbólica-algébrica compacta, escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, forma concisa que omite os detalhes técnicos, mas pressupõe seu conhecimento. A versão formal completa, também em registro simbólico-algébrico, explicita toda a estrutura lógica:

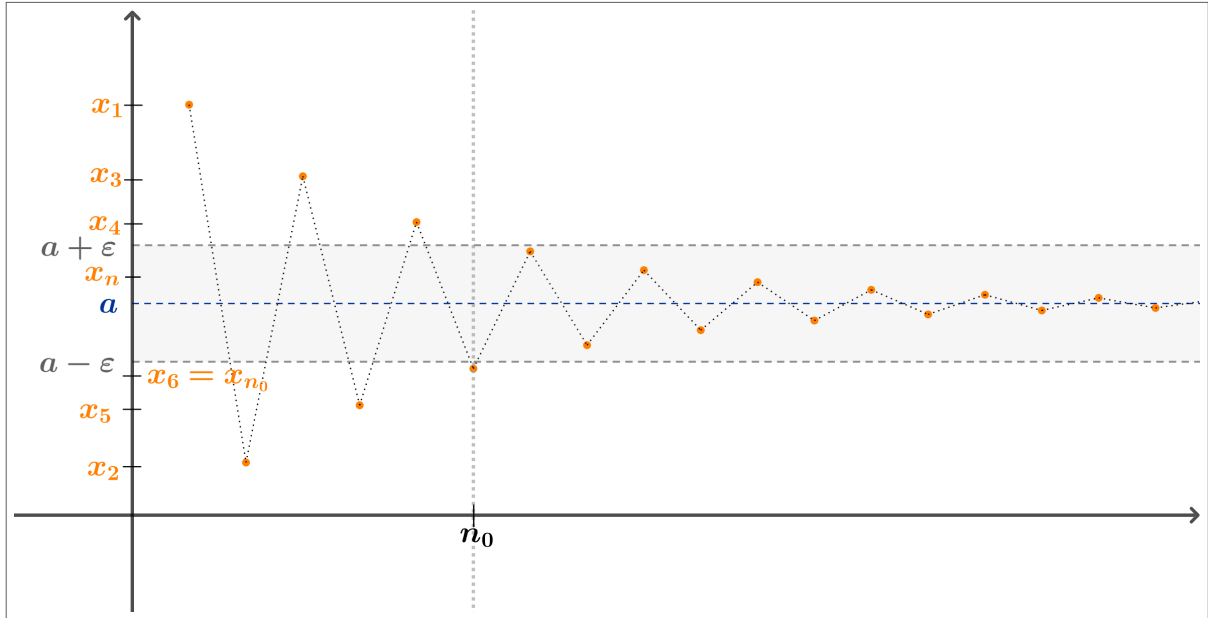
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; n > n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon.$$

Assumindo as propriedades de valor absoluto (ou módulo) como verdadeiras, a última desigualdade pode ser escrita como $L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon$ ou $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Essas três formulações (verbal intuitiva, simbólica compacta e formal completa) representam facetas diferentes do mesmo conceito matemático, cada uma útil em contextos específicos: a primeira para comunicação informal, a segunda para cálculos e manipulações, e a terceira para demonstrações rigorosas.

A Figura 3 ilustra de forma intuitiva a representação geométrica do limite de uma sequência, mostrando como os termos x_n tendem para L conforme n cresce.

Figura 3 – Representação gráfica de uma sequência numérica ilustrando a noção de limite



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra (2025).

Entre os diversos casos em que o limite de uma sequência não existe, o mais importante ocorre quando os termos da sequência tornam-se arbitrariamente grandes em valor absoluto à medida que o índice aumenta. Esses casos serão definidos a seguir.

Definição 3. Uma sequência (x_n) **diverge para o infinito positivo** quando, para todo número real positivo dado, existe um índice a partir do qual os termos seguintes da sequência são maiores do que esse número.

Na notação simbólica, escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ou $x_n \rightarrow \infty$, forma concisa que resume essa tendência. No RS_ReAl, esse conceito é representado como:

$$\forall A > 0 \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow x_n > A.$$

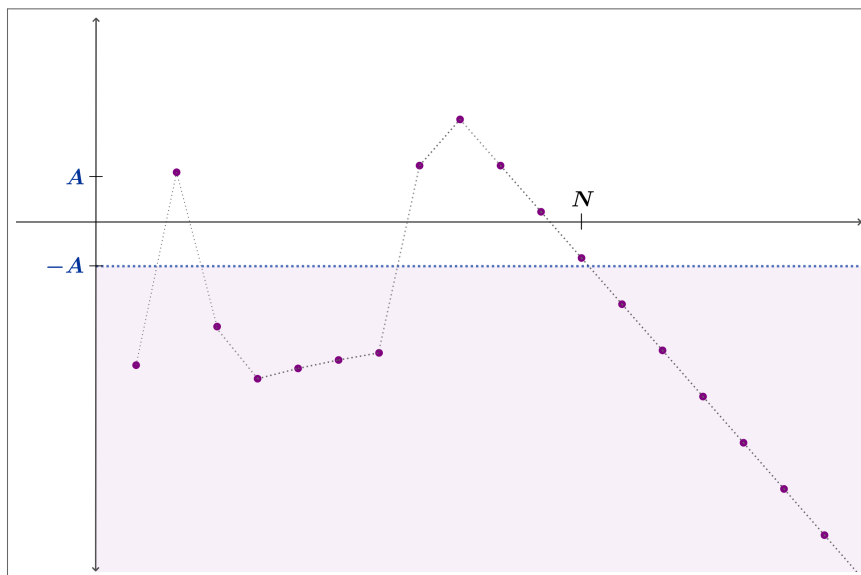
Definição 4. Uma sequência (x_n) **diverge para o infinito negativo** quando, para todo número real positivo dado, existe um índice a partir do qual os termos seguintes da sequência são menores do que o inverso aditivo desse número.

Na notação simbólica, escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ou $x_n \rightarrow -\infty$, forma concisa que resume essa tendência. No RS_ReAl, esse conceito é representado como:

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; n > N \Rightarrow x_n < -A.$$

Na Figura 2, a sequência ilustrada diverge para o infinito positivo, uma vez que para qualquer valor $A > 0$ marcado no eixo vertical, a partir do primeiro termo da sequência que ultrapassa A , todos os termos subsequentes permanecem maiores que A . No entanto, em outros casos, identificar o primeiro índice n_0 em que $x_{n_0} > A$ não garante que todos os termos seguintes serão maiores que A , pois a sequência pode oscilar (por exemplo $x_1 < x_3 < x_2$) e ainda assim divergir para o infinito positivo ou negativo. A sequência ilustrada na Figura 4, por exemplo, diverge para o infinito negativo, embora os termos $x_2, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$ e x_{12} sejam maiores que o valor de $-A$ em destaque. Essa aparente contradição resolve-se ao notar que é possível escolher outro índice N , a partir do qual todos os termos subsequentes satisfazem $x_n < -A$, conforme exige a definição de divergência.

Figura 4 – Representação gráfica de uma sequência numérica que diverge para o infinito negativo.



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra (2025).

Posteriormente, são introduzidas outras definições fundamentais para a compreensão de diferentes comportamentos das sequências numéricas.

Definição 6. Uma sequência é **limitada superiormente** quando existe um número real M que é maior ou igual que todos os termos da sequência.

Definição 7. Uma sequência (x_n) é **limitada inferiormente** quando existe um número real m que é menor ou igual que todos os termos da sequência.

No RS_ReAl, as Definições 6 e 7 são escritas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n < M \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n > m.$$

Definição 5. Uma sequência (x_n) é **limitada** quando existe um número real positivo K tal que, para todo índice, o módulo de x_n é menor ou igual a K .

A representação desse conceito no RS_ReAl é dada por:

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq K,$$

o que equivale a afirmar que $-K \leq x_n \leq K$ ou, simplesmente, que $x_n \in [-K, K]$.

Esse conceito é equivalente a dizer que a sequência é simultaneamente limitada superiormente e inferiormente, ou seja, existem dois números reais a e b tais que todos os termos da sequência estão entre eles. Em símbolos:

$$\forall n \in \mathbb{N}, a \leq x_n \leq b.$$

Como consequência, podemos tomar $K = \max\{|a|, |b|\}$, garantindo que $|x_n| \leq K$.

Outra característica importante no estudo de sequências é o seu comportamento em relação à ordem dos termos, ou seja, se crescem, decrescem ou se mantêm constantes.

Definição 8. Uma sequência (x_n) é dita **crescente** quando, para todo número natural n , o termo de índice $n + 1$ é maior que o termo de índice n .

Definição 9. Uma sequência (x_n) é dita **não decrescente** quando, para todo número natural n , o termo de índice $n + 1$ é maior ou igual que o termo de índice n .

No RS_ReAl, as Definições 8 e 9 são representadas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n < x_{n+1} \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1},$$

podendo também aparecer em formas equivalentes como

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n < \dots \quad \text{e} \quad x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$$

Definição 10. Uma sequência (x_n) é dita **decrescente** quando, para todo número natural n , o termo de índice $n + 1$ é menor que o termo de índice n .

Definição 11. Uma sequência (x_n) é dita **não crescente** quando, para todo número natural n , o termo de índice $n + 1$ é menor ou igual que o termo de índice n .

No RS_ReAl, as Definições 10 e 11 são representadas, respectivamente, da seguinte forma:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n > x_{n+1} \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq x_{n+1},$$

podendo também aparecer em formas equivalentes como

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots \quad \text{e} \quad x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq \dots$$

Definição 12. Uma sequência (x_n) é **monótona** quando for crescente, não crescente, decrescente ou não decrescente.

A Figura 2 ilustra graficamente uma sequência monótona, especificamente crescente, já que cada termo é maior que os termos que o antecede. Já no esboço do gráfico exibido na Figura 3, nota-se que os termos não seguem uma relação de ordem, o que determina uma sequência não monótona.

3.2 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COMO APOIO INTUITIVO À DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Esta seção apresenta registros gráficos que podem auxiliar na interpretação de teoremas e em suas respectivas demonstrações. De início, será apresentada a demonstração formal do teorema, que é exibida na linguagem natural-simbólica-algébrica. Em seguida, exibem-se, por meio do RGr, os principais aspectos abordados na demonstração.

Teorema 1 (Teorema do Confronto). *Se $\lim x_n = \lim y_n = L$ e existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n > n'$, então $\lim z_n = L$.*

Demonstração. Por hipótese, $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo $n > n'$. Além disso, pela definição de limite, $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n < L + \varepsilon,$$

e

$$n > n_2 \Rightarrow L - \varepsilon < y_n < L + \varepsilon.$$

Logo, escolhendo $n_0 = \max\{n', n_1, n_2\}$ tem-se:

$$n > n_0 \Rightarrow L - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < L + \varepsilon,$$

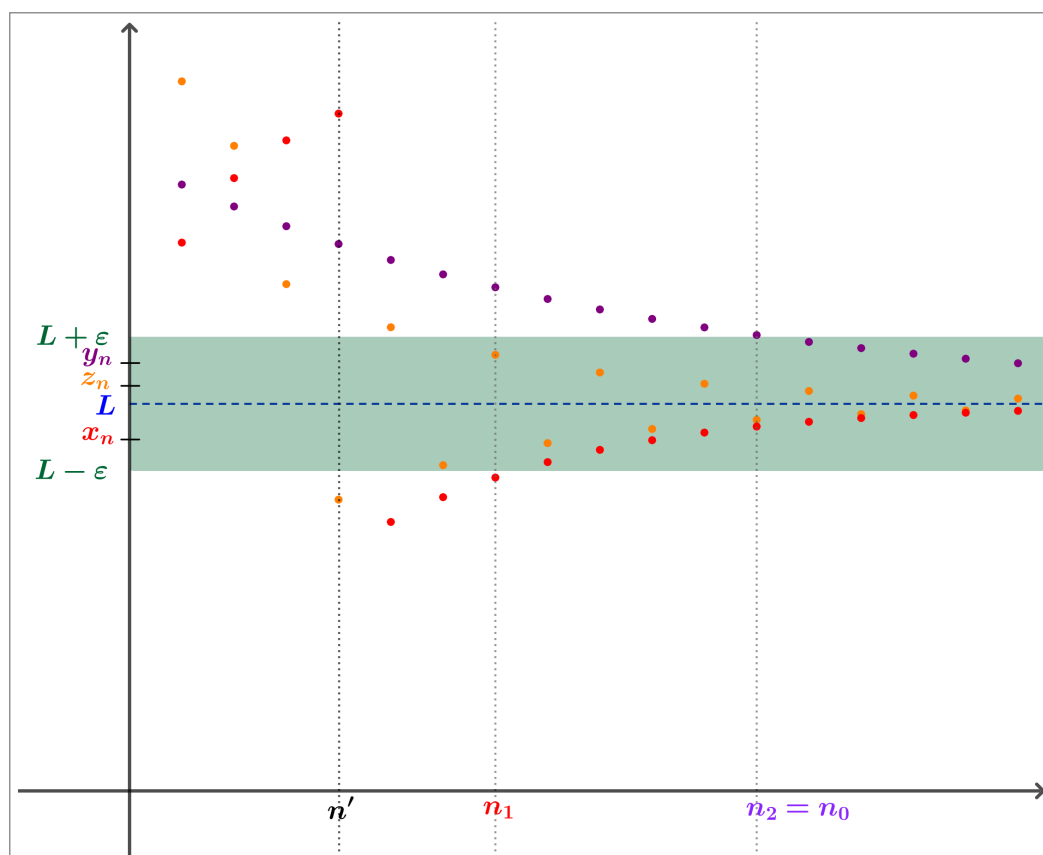
o que implica

$$L - \varepsilon < z_n < L + \varepsilon.$$

Assim, $z_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ sempre que $n > n_0$. Portanto, $\lim z_n = L$. ■

A partir de um caso particular, a Figura 5 apresenta os principais elementos da demonstração no registro gráfico. Nota-se que, à medida que n cresce, a sequência (z_n) é “mais esmagada” tanto por “cima” quanto por “baixo”, respectivamente, pelas sequências (y_n) e (x_n) que convergem para L . Consequentemente, a sequência (z_n) é “obrigada” a convergir para L também.

Figura 5 – Ilustração que evidencia visualmente a hipótese e a conclusão do Teorema do Confronto com base em seqüências específicas.



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra (2023), com base em modelo da biblioteca do software.

É relevante destacar que a compreensão da dependência dos índices n_1 e n_2 em relação ao valor de $\varepsilon > 0$ pode ser significativamente favorecida por recursos interativos. Nesse sentido, o uso de um controle deslizante no *software* GeoGebra revela-se particularmente eficaz: ao permitir a variação dinâmica de $\varepsilon > 0$, o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ se ajusta automaticamente, bem como os valores dos índices correspondentes.

Essa interatividade convida o estudante a refletir: como os índices n_1 e n_2 se comportam à medida que ε se torna menor? Ao manipular os parâmetros, o aluno visualiza não apenas uma demonstração estática, mas sim a relação funcional entre os elementos envolvidos, o que pode contribuir para uma compreensão mais profunda e conceitual do resultado matemático.

Encerrada a análise do Teorema do Confronto e seus desdobramentos gráficos, passa-se agora à apresentação de outro resultado fundamental no estudo de seqüências: o Teorema da Seqüência Monótona. Esse teorema, além de ter grande relevância teórica, também pode ser enriquecido por uma representação gráfica que favorece a compreensão intuitiva da convergência de seqüências monótonas limitadas.

Teorema 2 (Teorema da Sequência Monótona). *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração. Suponha que a sequência (x_n) seja crescente e limitada. Seja $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ o conjunto de seus termos, e seja $a = \sup X$ o supremo desse conjunto.

Queremos mostrar que $a = \lim x_n$. Para isso, tomemos um $\varepsilon > 0$. O número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X , pois $a - \varepsilon < a$. Logo, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Como a sequência é crescente, tem-se que, para todo $n > n_0$,

$$a - \varepsilon < x_{n_0} < x_n < a.$$

Por outro lado, todos os termos da sequência são menores ou iguais a a e, assim,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Assim, para todo $n > n_0$,

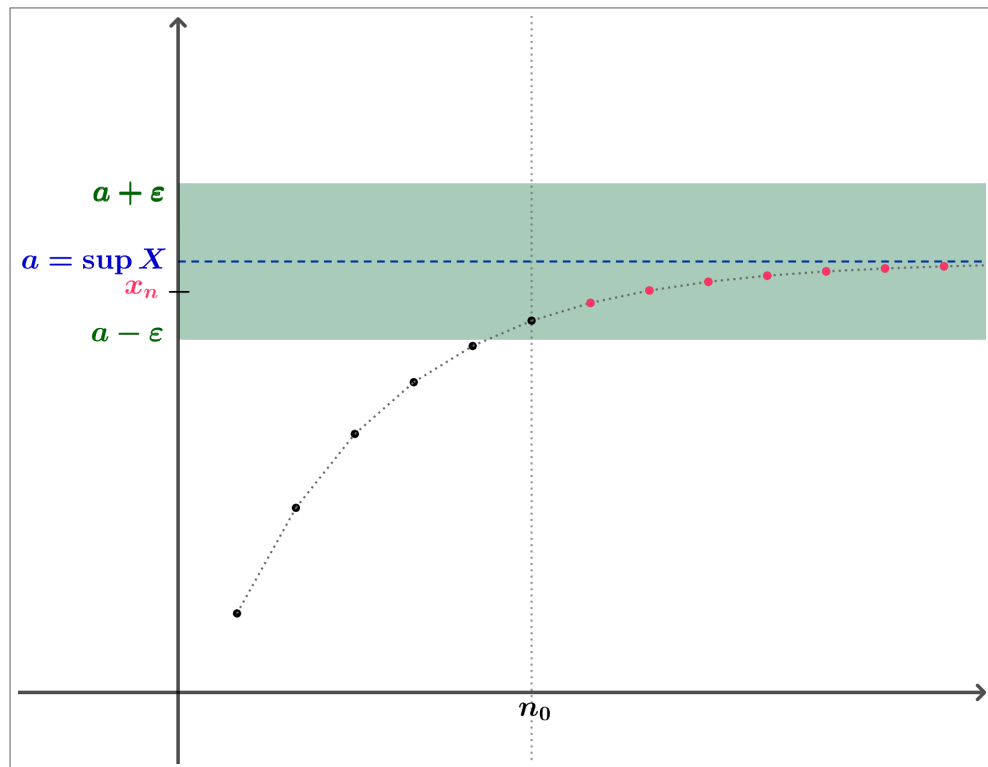
$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

o que, pela definição de limite, garante que $\lim x_n = a$.

De forma análoga, é possível provar este teorema quando a sequência (x_n) é não decrescente, decrescente, não crescente. Entretanto, nos dois últimos casos, a convergência se dá para o ínfimo do conjunto que contém os termos x_n . ■

A fim de destacar os principais aspectos dessa demonstração, a Figura 6 apresenta um registro gráfico que contribui para a compreensão do resultado. Nessa representação, observa-se que, como a sequência (x_n) é monótona crescente e limitada superiormente por $a = \sup X$, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um índice n_0 a partir do qual todos os termos da sequência estão contidos no intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Figura 6 – Representação gráfica do Teorema da Sequência Monótona (caso em que a sequência é crescente)



Fonte: Elaborado pelo autor no GeoGebra (2025), com base em modelo da biblioteca do software.

De forma análoga ao Teorema do Confronto, uma representação gráfica interativa permite visualizar que, para cada valor de $\varepsilon > 0$, é possível determinar um índice n_0 a partir do qual todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Essa dinâmica torna mais clara a relação entre ε e n_0 , favorecendo uma compreensão conceitual do comportamento da sequência em direção ao limite.

A seguir, no Quadro 2, são apresentadas indicações e links de acesso às representações gráficas interativas correspondentes às Figuras 5 e 6, bem como a outros teoremas cujas demonstrações serão omitidas neste trabalho. Esses materiais complementares foram incluídos para que o leitor possa manipular parâmetros, testar casos específicos e observar as relações entre os registros algébrico e gráfico em tempo real.

Quadro 2 – Representações gráficas interativas das demonstrações de teoremas disponíveis no GeoGebra

Teorema	Link de acesso
Se $\lim x_n = \lim y_n = a$ e $x_n \leq z_n \leq y_n$ para todo n suficientemente grande, então $\lim z_n = a$.	https://www.geogebra.org/m/c4xkaguk
Toda sequência monótona limitada é convergente.	https://www.geogebra.org/m/ezxdwtg

Uma sequência não pode convergir para dois limites distintos.	https://www.geogebra.org/m/mccsdmer
Toda sequência convergente é limitada.	https://www.geogebra.org/m/mwwbrk6j
Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada (convergente ou não), então $\lim(x_n y_n) = 0$.	https://www.geogebra.org/m/xkfahmth
Se uma sequência (x_n) possui duas subsequências (x_{n_k}) e (x_{m_k}) tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k} = b$, com $a \neq b$, então a sequência (x_n) não converge.	https://www.geogebra.org/m/dbqj6pye
Seja $\lim x_n = a$. Se $a > b$, então, para todo n suficientemente grande ($n > n_0$), tem-se $x_n > b$.	https://www.geogebra.org/m/gmmjngbx

Fonte: O autor (2025).

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, são apresentados os procedimentos metodológicos que nortearam o desenvolvimento da pesquisa, com a exposição de duas principais características. Também é detalhado o processo de seleção dos livros que compõem o *corpus* da análise, bem como as categorias e os critérios adotados para sua investigação.

4.1 CLASSIFICAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa adotou uma abordagem qualitativa de caráter descritivo-analítico para examinar como sequências numéricas são abordadas em livros do ensino superior à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Conforme Triviños (1987), estudos descritivos buscam não apenas registrar fenômenos observáveis, mas principalmente interpretá-los em seu contexto, objetivo plenamente atendido por esta investigação.

A natureza qualitativa da pesquisa, nos termos de Prodanov e Freitas (2013), revela-se na ausência de tratamento estatístico dos dados e no enfoque interpretativo aplicado ao *corpus* documental. Ao buscar compreender como os conceitos são apresentados nos materiais didáticos, a pesquisa propõe uma leitura crítica e interpretativa dos dados. Nesse sentido, a natureza qualitativa permite captar nuances e relações que dificilmente seriam reveladas por meio de métodos quantitativos.

Mais especificamente, a investigação configura-se como uma pesquisa bibliográfica, modalidade que, segundo Fonseca (2002), se desenvolve

[...] a partir do levantamento de referências teóricas já analisadas e publicadas por meios escritos e eletrônicos, como livros, artigos científicos, páginas de web sites. Qualquer trabalho científico inicia-se com uma pesquisa bibliográfica, que permite ao pesquisador conhecer o que já se estudou sobre o assunto. Existem, porém, pesquisas científicas que se baseiam unicamente na pesquisa bibliográfica, procurando referências teóricas publicadas com o objetivo de recolher informações ou conhecimentos prévios sobre o problema a respeito do qual se procura a resposta (Fonseca, 2002, p. 32).

A adoção dessa modalidade mostrou-se particularmente pertinente, considerando que os livros didáticos analisados constituem o objeto central da investigação. Tais obras representam fontes consolidadas de conhecimento matemático no ensino superior e, por isso, sua análise sistemática permite não apenas mapear os registros de representação empregados, mas também refletir criticamente sobre as práticas de ensino e aprendizagem que eles promovem. Desse

modo, o delineamento metodológico adotado revela-se coerente com o problema de pesquisa e seus objetivos.

4.2 A SELEÇÃO DOS LIVROS

A seleção dos livros de Ensino Superior analisados nesta pesquisa foi orientada por critérios previamente definidos, considerando, principalmente:

- A relevância acadêmica, mensurada pela frequência de adoção em algumas instituições federais;
- A abordagem abrangente do conteúdo de sequências numéricas;
- A atualidade editorial, priorizando obras com publicação ou edições revisadas e atualizadas na última década.

Para garantir a representatividade do conjunto de obras analisadas, optou-se por analisar as ementas contidas no Projeto Pedagógico de Curso (PPC) de Licenciatura em Matemática de instituições federais distribuídas por todos os estados do Nordeste brasileiro. Essa etapa permitiu mapear as disciplinas em que o conteúdo de sequências numéricas é abordado e identificar as obras frequentemente recomendadas.

O processo de mapeamento revelou que o conteúdo de Sequências Numéricas é predominantemente abordado em disciplinas obrigatórias, como Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real. Após um exame detalhado dos livros recomendados nessas disciplinas, foram selecionadas três obras que atendiam integralmente aos critérios estabelecidos, as quais passaram a constituir o *corpus* principal da pesquisa, conforme detalhado no Quadro 3.

Quadro 3 – Livros selecionados para análise

Código	Título	Autor	Edição (Ano)
L1	Curso de Análise (Vol. 1)	Elon Lages Lima	15ª ed. (2017)
L2	Análise Matemática para Licenciatura	Geraldo Ávila	3ª ed. (2018)
L3	Cálculo (Vol. 2)	James Stewart	9ª ed. (2022)

Fonte: O autor (2025).

4.3 CATEGORIAS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE DOS LIVROS

A análise dos livros foi estruturada com base nos princípios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, estabelecendo três categorias fundamentais para avaliação sistemática das obras. Cada categoria corresponde a um aspecto essencial da TRRS e está associada a critérios específicos de análise, conforme detalhado no Quadro 4.

Quadro 4 – Categorias e Critérios de análise baseada na TRRS

Categorias	Questões Norteadoras
Representação dos objetos matemáticos	Quais tipos de representações são utilizadas para apresentar os conceitos? Qual(is) a(s) representação(ões) mais priorizadas?
Conversão	O livro explora transformações de conversão entre diferentes registros? Quais pares de registros são mais frequentemente convertidos ($RS_RAI \rightarrow RGe$, $RGe \rightarrow RS_RAI$, $RLN \rightarrow RS_RAI$, $RLN \rightarrow RGe$, entre outros)?
Visualização	O RGe e/ou o RGr são usados para favorecer a compreensão dos conceitos, propriedades e demonstrações? Em quais momentos esses registros são empregados com maior frequência (introdução de conceitos, ilustração de teoremas, outros)? As representações gráficas relacionadas à ideia central do teorema ou à sua demonstração foram geradas por meio de uma conversão congruente?

Fonte: O autor (2025).

A escolha dessas categorias fundamenta-se na compreensão de que o domínio de um objeto matemático não se restringe à sua representação em um único registro, mas envolve a habilidade de reconhecê-lo, operá-lo e relacioná-lo em diferentes sistemas semióticos. A análise proposta busca, portanto, identificar em que medida os livros didáticos evidenciam esse processo de mobilização e articulação entre registros, condição necessária, segundo Duval (2003), para que ocorra a apreensão conceitual efetiva.

5 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Este capítulo analisa como os princípios da TRRS se manifestam nos livros selecionados, especificamente nos capítulos sobre sequências numéricas, utilizando os critérios estabelecidos na Seção 5.3. O exame foca nas representações e conversões mobilizadas nesse conteúdo.

A análise organiza-se a partir das definições, apresentadas em quadros que destacam o registro semiótico adotado e as transformações identificadas em cada caso. Cada quadro exibe a análise de um único conceito sob a perspectiva dos autores das obras: Lima entre as páginas 100 e 133; Stewart, entre as páginas 640 e 652; e Ávila, entre as páginas 45 e 58. Assim, é possível realizar um paralelo entre as definições de forma organizada e concisa. Além disso, no final do capítulo, são discutidos os registros gráficos que auxiliam na compreensão de teoremas.

5.1 ORGANIZAÇÃO ESTRUTURAL DOS CAPÍTULOS DEDICADOS À APRESENTAÇÃO DO CONTEÚDO

O Livro 1 dedica o Capítulo IV, intitulado *Sequências e Séries de Números Reais*, ao conteúdo de sequência numérica, distribuído nas seguintes seções: *Sequências*, *Limites de sequências*, *Propriedades aritméticas dos limites*, *Subsequências*, *Sequências de Cauchy* e *Limites infinitos*. Ressalta-se, porém, que foram analisados apenas os conceitos explicitados no Capítulo 3, excluindo tópicos como sequências de Cauchy, por exemplo.

O Livro 2, por sua vez, trata o tema no Capítulo II, denominado *Sequências Infinitas*, o qual divide-se em cinco seções: *Sequências Infinitas*, *Conceito de Limite e Primeiras Propriedades*, *Sequências Limitadas*, *Sequências Monótonas* e *Limites Infinitos*.

Quanto ao Livro 3, a abordagem ocorre no Capítulo 11, denominado *Sequências e Séries Infinitas*, reunindo todas as definições e teoremas relativos a sequências em uma única seção intitulada *Sequências*. Essa organização difere da estrutura dos Livros 1 e 2, que organizam os conteúdos em diferentes ramificações. Faz-se necessário destacar a quantidade reduzida de teoremas, corolários e lemas presentes no Livro 3, além da ausência da definição de subsequência nessa obra.

5.2 ANÁLISE DAS DEFINIÇÕES SOB A PERSPECTIVA DA TRRS

Nos três livros, o primeiro conceito retratado é o de **sequência de números reais**, conforme apresentado no Quadro 5.

Quadro 5 – Conceito de sequência de números reais

Seq. de números reais			
Liv.	Definição	RRS	Houve conv.?
1	I. Uma seq. de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.	RLN + RS_ReAl	Sim
	II. $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n)$	RS_ReAl	
2	I. Uma sequência numérica $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ é uma função f , definida no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}: f: n \mapsto f(n) = a_n$. O número n que aí aparece é chamado de índice, e a_n , o n -ésimo elemento da sequência, ou termo geral.	RLN + RS_ReAl	Sim
	II. $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) = (a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.	RS_ReAl	
3	I. Uma seq. pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos. Mas, geralmente, escrevemos a_n em vez da notação de função $f(n)$ para o valor da função no número n .	RLN + RS_ReAl	Sim
	II. $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} = \{a_n\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.	RS_ReAl	

Fonte: O autor (2025).

Verifica-se que, em todos os livros, a representação do conceito é convertida no sentido $RLN + RS_ReAl \rightarrow RS_ReAl$, isto é, a representação em linguagem natural-simbólica-algébrica é convertida, exclusivamente, para a linguagem simbólica-algébrica. Contudo, no L1, a representação I expressa o conceito de maneira mais precisa, uma vez que as demais representações, tanto linguísticas quanto simbólicas, não deixam explícito que os termos da sequência são números reais.

Vale observar que a definição matemática de sequências como funções pode não ser a melhor forma de explicar o conceito para os alunos. Embora tecnicamente precisa, essa abordagem acaba escondendo o aspecto mais importante das sequências: a ordem dos termos. É por isso que a representação com os termos escritos em ordem $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ é tão útil. Ela mostra claramente como os números se sucedem uns aos outros, ajudando os alunos a perceberem padrões e entenderem melhor o comportamento da sequência como um todo. Assim, na prática, o ideal é usar as duas representações juntas.

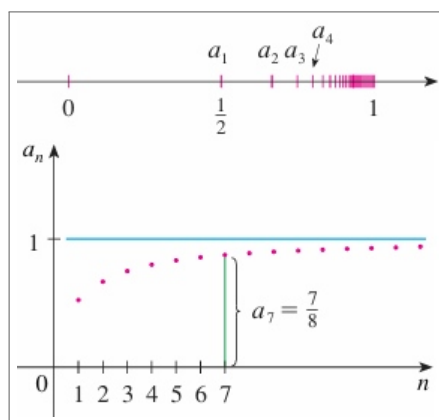
A notação utilizada para sequências no Livro 3, $\{x_1, x_2, \dots, x_n \dots\}$, merece atenção

especial, pois emprega a mesma representação simbólica do conjunto imagem da função f . Essa coincidência notacional pode levar a graves equívocos conceituais, uma vez que sequências e conjuntos possuem naturezas matemáticas distintas. Enquanto conjuntos são coleções não ordenadas, sequências dependem fundamentalmente da ordem de seus termos. Isso evidencia que pequenas modificações em representações semióticas podem alterar totalmente o seu significado.

É compreensível que os livros não representem o conceito de sequência no RGr e RGe, já que a sua representação exigirá um caso particular para ser construída. No entanto, o uso desses registros, ainda que por meio de casos particulares, enriquece significativamente as definições apresentadas no Quadro 5. Essa abordagem encontra respaldo nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002, p. 123), que destacam o valor pedagógico de múltiplas representações no ensino de conceitos matemáticos.

A terceira obra segue essa recomendação dos PCN ao esclarecer que “uma sequência pode ser visualizada marcando seus termos na reta real ou traçando seu gráfico” (Stewart, 2013, p. 625). O Livro 3 ainda usa como exemplo a sequência $a_n = n/(n + 1)$ para exibi-la tanto no RGe quanto no RGr, como ilustrado na Figura 7.

Figura 7 – Interpretação geométrica e gráfica da sequência $a_n = n/(n + 1)$



Fonte: Stewart (2013, p.625).

Apesar de ser um caso particular de sequência, as representações exibidas acima tornam ainda mais clara uma das principais características desse tipo de função: sua representação geométrica consiste em pontos isolados sobre a reta numérica, e no gráfico correspondem a pares (n, a_n) que também são coordenadas isoladas (Stewart, 2013). Isso vai de encontro ao que Polya (1994, p. 83-85 *apud* Bolda, 1997, p.15) defende: é mais fácil analisar os detalhes oferecidos pelos problemas matemáticos por meio de figuras.

Os registros geométrico e gráfico, ilustrados na Figura 7, possuem grande relevância no

L2, pois são usados para introduzir intuitivamente o conceito de limite de seqüências. Stewart (2013, p.625) argumenta que, em ambas as representações, os termos da seqüência $a_n = n/(n+1)$ se aproximam de 1 à medida que n cresce. Por isso, neste momento, é válido analisarmos como os livros apresentam formalmente a definição de **limite de seqüência**.

Quadro 6 – Conceito de limite de seqüência

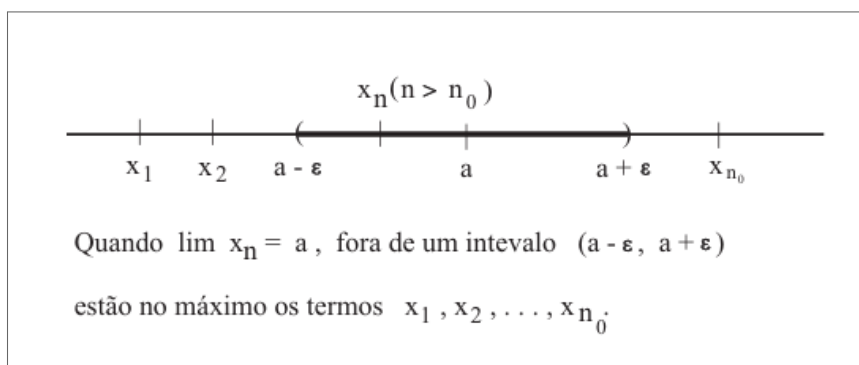
Limite de seqüências			
Liv.	Definição	RRS	Houve conv.?
1	I. Diz-se que o número real a é limite da seq. (x_n) de números reais, e escreve-se $a = \lim x_n$, ou $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ $a = \lim_n x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $ x_n - a < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$.	RLN + RS_ReAl	Sim
	II. $\lim x_n = a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow x_n - a < \varepsilon$.	RS_ReAl	
	III. $\lim x_n = a$ quer dizer (por definição) que, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que $n > n_0$ implica $ x_n - a < \varepsilon$	RLN + RS_ReAl	
	IV. Interpretação geométrica.	RGe	
2	Uma seq. (a_n) converge para o número L , ou tem limite L , se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que $n > N \Rightarrow a_n - L < \varepsilon$.	RLN + RS_ReAl	Não
3	I. Uma seq. $\{a_n\}$ tem limite L e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ ou $a_n \rightarrow L$ quando $n \rightarrow \infty$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um inteiro correspondente N tal que se $n > N$, então $ a_n - L < \varepsilon$	RLN + RS_ReAl	Sim
	II. Interpretação geométrica	RGe	
	III. Interpretação gráfica	RGr	

Fonte: O autor (2025).

No quadro acima, é possível observar que o L1 converte a representação linguística-simbólica-algébrica (I) para a representação simbólica-algébrica (II). Em seguida, ainda no L1, ocorre mais uma conversão: II é convertida para uma representação linguística-simbólica-algébrica diferente de I. Dessa forma, inicialmente, o Livro 1 exibe uma conversão no sentido $RLN + RS_ReAl \rightarrow RS_ReAl$ e outra no sentido $RS_ReAl \rightarrow RLN + RS_ReAl$. É importante ressaltar que a segunda conversão torna a interpretação do conceito mais fluida, tendo em vista que, além de estabelecer uma correspondência semântica entre as unidades simbólicas-algébricas e linguísticas, essa conversão organiza tais unidades significantes na mesma ordem, da esquerda para a direita.

Ainda sobre o L1, constatou-se uma conversão no sentido $RLN + RS_ReAl \rightarrow RGe$, a qual gera a representação geométrica ilustrada na Figura 8.

Figura 8 – Interpretação geométrica do limite de uma sequência



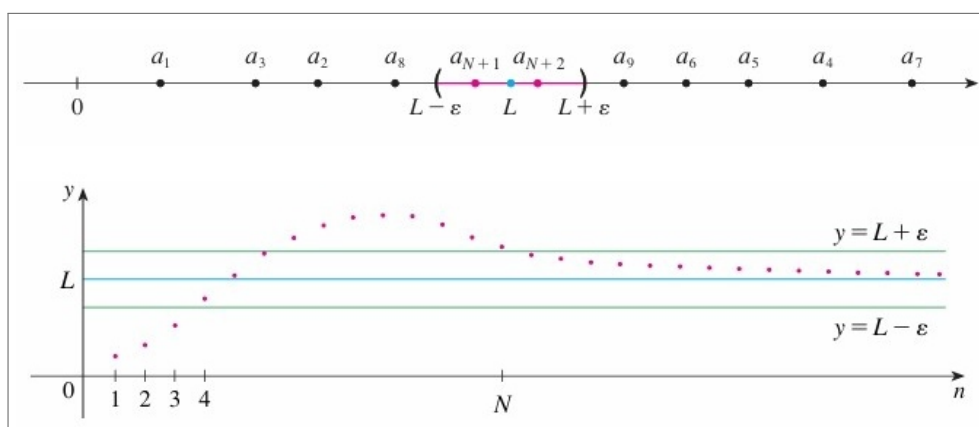
Fonte: Lima (2014, p.109).

Por meio dessa ilustração, o autor explicita que a existência do limite $\lim x_n = a$ implica uma quantidade finita de termos não pertencentes ao intervalo simétrico $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ de centro a , ou seja, existem infinitos termos nesse intervalo. Desse modo, o RGe é usado para concretizar visualmente a ideia de que o limite de uma sequência é o número real que “atrai” os termos da sequência para perto de si.

Diante do exposto, ao exibir a representação linguística, simbólica e geométrica do conceito, o L1 alinha-se ao princípio da TRRS sobre a importância de múltiplas representações: aprendizagem matemática é potencializada quando o sujeito consegue identificar determinado conceito em, pelo menos, dois sistemas de registros de representação diferentes.

Analogamente, o L3 também possibilita que o leitor realize coordenação entre diferentes registros, uma vez que o conceito de limite de sequência é expresso nos registros geométrico, gráfico (Figura 9) e linguagem natural-simbólica-algébrica. As conversões ocorrem nos sentidos $RLN + RS_ReAl \rightarrow RGe$ e $RLN + RS_ReAl \rightarrow RGr$.

Figura 9 – Interpretação geométrica e gráfica do limite de uma sequência



Fonte: Stewart (2013, p.626).

A representação geométrica indica que “os termos $a_1, a_2, a_3, \dots$ são marcados na reta real. Não importa quão pequeno seja escolhido o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um N tal que todos os termos da sequência de a_{N+1} em diante devem estar naquele intervalo” (Stewart, 2013, p.626). Já em relação à representação gráfica, “os pontos no gráfico de $\{a_n\}$ devem estar entre as linhas horizontais $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$ se $n > N$. Esse quadro deve ser válido independentemente do quão pequeno ε é escolhido, mas geralmente um ε menor exige um N maior” (Stewart, 2013, p.626).

Uma das principais vantagens dessa conversão no sentido $RLN + RS_ReAl \rightarrow RGr$ é a possibilidade de visualizar simultaneamente o domínio (os índices) e a imagem (os termos da sequência), tornando explícito o fato de N ser determinado em função de ε . Acredita-se, desse modo, que quando há maior coerência entre registros de representação, como ocorre entre $RLN + RS_ReAl$ e RGr , o processo de aprendizagem se torna mais eficaz.

Dando continuidade à análise dos conceitos, o Quadro 7 apresenta as considerações relativas a um caso particular de divergência de sequências: **limites infinitos**. Como foi discutido no Capítulo 3 desta pesquisa, existe limite infinito positivo ou negativo, porém o L3 retrata apenas o positivo.

Quadro 7 – Conceito de limites infinitos

Limite infinito negativo			
Liv.	Definição	RRS	Houve Conv.?
1	[Diz-se que o limite de uma sequência é igual a $-\infty$] quando dado arbitrariamente $A > 0$ pode-se encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $x_n < -A$.	RLN + RS_ReAl	Não
2	[A seq.] (a_n) diverge (ou tende) para $-\infty$ se, dado qualquer número negativo k , existe N tal que $n > N \Rightarrow a_n < k$.	RLN + RS_ReAl	Não
Limite infinito positivo			
1	I. Seja (x_n) uma seq. de números reais. Diremos que “ x_n tende a mais infinito” quando, para todo número real $A > 0$ dado arbitrariamente, pudermos encontrar um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $x_n > A$.	RLN + RS_ReAl	Não
	II. $[\lim x_n = +\infty$ significa que] para qualquer $A > 0$ dado, existe apenas um número finito de índices n tais que $x_n \leq A$.	RLN + RS_ReAl	
2	Diz-se que a seq. (a_n) diverge (ou tende) para $+\infty$ se, dado qualquer número positivo k , existe N tal que $n > N \Rightarrow a_n > k$.	RLN + RS_ReAl	Não
3	$\lim a_n = \infty$ significa que para cada número positivo M existe um inteiro N tal que $n > N$ implica $a_n > M$.	RLN + RS_ReAl	Não

Fonte: O autor (2025).

Observa-se que todos os conceitos exibidos no quadro acima são representados pre-

dominantemente no RLN + RS_ReAl, fato que impossibilita os estudantes de identificar tais conceitos em diferentes registros de representação semiótica. Além disso, na representação do conceito de limite infinito positivo, o L1 reformula a representação I, gerando II, mas ambas permanecem no RLN + RS_ReAl. Portanto, trata-se de uma transformação de tratamento, e não de conversão.

É possível observar uma situação análoga a essa no Quadro 7, visto que todos os conceitos referentes à **limitação de seqüências** são representados exclusivamente no RLN + RS_ReAl, como mostra o Quadro 8. Embora no L1 alguns conceitos sejam expostos por meio de duas representações, nota-se que a representação final pertence ao mesmo registro da inicial. Ou seja, nesses casos, ocorre transformação interna.

Quadro 8 – Conceitos associados à limitação de seqüências

Seq. limitada superiormente			
Liv.	Definição	RRS	Houve Conv.?
1	I. Uma seq. (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. II. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semi-reta $(-\infty, b]$.	RLN + RS_ReAl	Não
2	[Diz-se que uma seqüência é] limitada à direita, ou limitada superiormente, se existe um número B tal que $a_n \leq B$ para todo n .	RLN + RS_ReAl	Não
3	Uma seqüência $\{a_n\}$ é limitada superiormente se existir um número M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \geq 1$.	RLN + RS_ReAl	Não
Seq. limitada inferiormente			
1	I. Uma seq. (x_n) diz-se limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. II. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semi-reta $(-\infty, b]$.	RLN + RS_ReAl	Não
2	Quando a seqüência é limitada à esquerda e à direita ao mesmo tempo, dizemos simplesmente que ela é limitada. Como é fácil ver, isso equivale a afirmar que existe um número M tal que $ a_n \leq M$ para todo n .	RLN + RS_ReAl	Não
3	Ela [seqüência] é limitada inferiormente se existir um número m tal que $m \leq a_n$ para todo $n \geq 1$.	RLN + RS_ReAl	Não
Seq. limitada			
1	I. Diz-se que a seq. (x_n) é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. II. Uma seq. (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c = \max\{ a , b \} > 0$ tal que $ x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$.	RLN + RS_ReAl	Não

2	Quando a sequência é limitada à esquerda e à direita ao mesmo tempo, dizemos simplesmente que ela é limitada. Como é fácil ver, isso equivale a afirmar que existe um número M tal que $ a_n \leq M$ para todo n .	RLN + RS_ReAl	Não
3	Ela [sequência] é limitada inferiormente se existir um número m tal que $m \leq a_n$ para todo $n \geq 1$.	RLN + RS_ReAl	Não

Fonte: O autor (2025).

Já alguns conceitos relacionados à **monotonicidade de sequências**, como mostra o Quadro 9, são representados no RLN + RS_ReAl e no RS_ReAl, havendo conversões entre as representações tanto no sentido $\text{RLN} + \text{RS_ReAl} \rightarrow \text{RS_ReAl}$ quanto na direção contrária. Vale destacar que só é possível observar tais conversões nos livros 1 e 3, uma vez que o L2 exibe os conceitos exclusivamente em linguagem simbólica-algébrica. Além disso, no L3 destaca-se a ausência dos conceitos de sequência não decrescente e de sequência não crescente.

Quadro 9 – Conceitos referentes a monotonicidade de sequências

Seq. crescente			
Liv.	Definição	RRS	Houve conv.?
1	I. $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$.	RS_ReAl	Sim
	II. $[A \text{ seq. é crescente}]$ quando $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.	RLN + RS_ReAl	
2	$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$	RS_ReAl	Não
3	I. Uma seq. $\{a_n\}$ é chamada crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.	RLN + RS_ReAl	Sim
	II. $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$.	RS_ReAl	
Seq. não decrescente			
1	Se vale $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n , a seq. diz-se não decrescente.	RLN + RS_ReAl	Não
2	$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$	RS_ReAl	Não
Seq. decrescente			
1	I. $x_1 > x_2 > x_3 > \dots$	RS_ReAl	Sim
	II. Quando $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a sequência (x_n) diz-se decrescente.	RLN + RS_ReAl	
2	$a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$	RS_ReAl	Não
3	$[Uma \text{ seq.}]$ é chamada decrescente se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.	RLN + RS_ReAl	Não
Seq. não crescente			
1	A seq. é chamada não crescente quando $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.	RLN + RS_ReAl	Não
2	$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$	RS_ReAl	Não

Fonte: O autor (2025).

Embora os três livros não acrescentem registros gráficos no momento de abordar os con-

ceitos relacionados às sequências monótonas, esse tipo de registro seria particularmente útil para diferenciar os tipos de monotonicidade: enquanto uma sequência decrescente sempre “diminui”, uma não crescente pode, em alguns momentos, permanecer constante. Essa distinção fica mais evidente quando observada visualmente. Ao visualizar graficamente essas sequências, os estudantes associariam mais facilmente o nome, por exemplo, “crescente”, ao seu comportamento, como uma tendência de subida. Essa representação dinâmica e espacial ajudaria a consolidar o entendimento.

Portanto, a análise revelou que, para apresentar os conceitos relacionados às sequências numéricas, a linguagem natural-simbólica-algébrica é a mais utilizada em todas as obras examinadas, sendo a conversão $RLN + RS_{ReAl} \rightarrow RS_{ReAl}$ a mais frequente.

Especificamente, no Livro 1 observou-se um total de sete conversões:

- 1 para representação de sequência;
- 3 para limite de sequências (apenas 1 incluindo RGe - Registro Geométrico);
- 1 para sequência crescente;
- 1 para sequência decrescente.

No Livro 2 registrou-se apenas uma conversão, a qual foi executada na representação de sequência. Já no Livro 3, observaram-se quatro conversões:

- 1 para representação de sequência;
- 2 para limite de sequências (1 com RGe e 1 com RGr);
- 1 para sequência crescente.

Diante desse cenário, torna-se fundamental ressaltar que a escassa presença de conversões nas obras, especialmente nos Livros 2 e 3, pode, conforme Cardoso (2015), restringir a perspectiva dos estudantes quanto às propriedades dos conceitos abordados, uma vez que cada conversão estabelece novas relações aritméticas, algébricas e geométricas. Além disso, essa conjuntura desconsidera o fato de que os estudantes precisam coordenar, no mínimo, dois registros de um mesmo objeto matemático, implicando, de acordo com Duval (2012), possíveis dificuldades no processo de aprendizagem.

5.3 ANÁLISE DOS REGISTROS GRÁFICOS ASSOCIADOS AOS TEOREMAS

Inicialmente, faz-se necessário pontuar que apenas o livro de James Stewart (L3) apresenta representações gráficas para auxiliar na compreensão de alguns teoremas. Por esse motivo, os demais livros (L1 e L2) não foram analisados nesse aspecto.

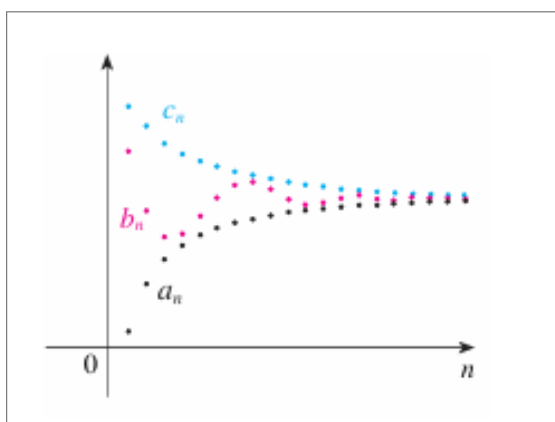
No capítulo XI do L3, três teoremas são acompanhados por uma representação gráfica, porém, dentre eles, apenas o Teorema do Confronto e o Teorema da Sequência Monótona se enquadram na análise dessa pesquisa, uma vez que o resultado não mencionado aborda conceitos que vão além do aporte teórico referente às sequências numéricas.

Daremos início à exposição dos dados discutindo o Teorema do Confronto, o qual é enunciado da seguinte forma:

$$\text{Se } a_n \leq b_n \leq c_n \text{ para } n \geq n_0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L, \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

Sua demonstração formal é omitida pelo livro e deixada como exercício, porém o autor recorre a uma visualização gráfica (Figura 10) para ilustrar, de forma intuitiva, uma sequência (b_n) que está entre as sequências (a_n) e (c_n) , as quais convergem para o mesmo valor. Essa configuração garante que os termos de b_n fiquem “aprisionados” entre os termos das outras duas sequências a partir de certo índice, e como ambas tendem ao mesmo limite, conclui-se, intuitivamente, que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Figura 10 – Ilustração que evidencia visualmente a hipótese e a conclusão do Teorema do Confronto com base em sequências específicas.



Fonte: Stewart (2013, p.627).

A representação gráfica utilizada para ilustrar o Teorema do Confronto apresenta algumas limitações em relação à correspondência com os elementos do enunciado formal. É importante

notar que o termo geral de cada sequência está posicionado próximo aos pares ordenados (n, a_n) , por exemplo, o que pode levar à interpretação equivocada de que estão fora do eixo vertical, desfocando a noção de valor da sequência em relação ao índice n . Essa disposição pode confundir leitores menos familiarizados com esboços de gráficos cartesianos, enfraquecendo a clareza visual que se espera desse tipo de representação. Além disso, as sequências utilizadas no gráfico satisfazem a desigualdade $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que pode ofuscar o entendimento de que, no enunciado do teorema, essa relação precisa ocorrer apenas a partir de certo índice. Essa escolha pode levar o leitor a interpretar de forma equivocada a abrangência da hipótese. Além disso, observa-se uma ausência de correspondência semântica entre as constantes n_0 e L e os elementos visuais presentes na representação gráfica. Dessa forma, conclui-se que a conversão entre o registro algébrico e o gráfico, nesse caso, não é congruente.

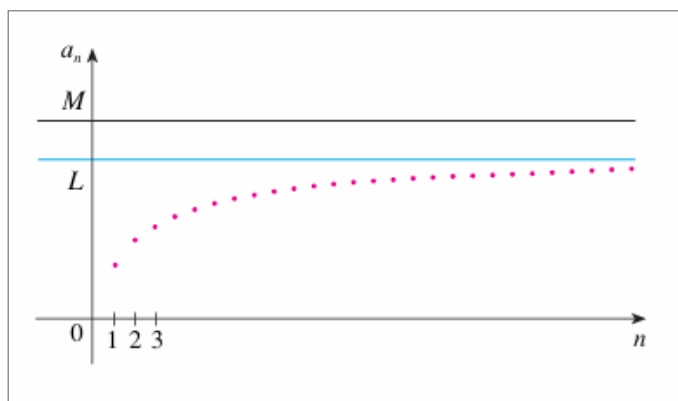
Diferentemente do que foi observado anteriormente, o registro gráfico apresentado no Capítulo 3 oferece maior riqueza visual e detalhamento dos elementos envolvidos, evidenciando, inclusive, componentes centrais da definição de limite em sua formulação simbólico-algébrica. Por isso, esse esboço gráfico mostra-se mais relevante como apoio ao desenvolvimento da demonstração, especialmente quando o leitor busca construir ou compreender o raciocínio formal associado ao teorema.

Agora, é analisado o Teorema da Sequência Monótona, o qual é enunciado da seguinte maneira:

Toda sequência monótona limitada é convergente.

Antes de apresentar sua demonstração formal, Stewart (2013, p.627) introduz uma abordagem intuitiva ao afirmar que, “se (a_n) está aumentando e $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então os termos são forçados a se aglomerar e a se aproximar de algum número L ”. Em seguida, o autor fornece uma representação gráfica (Figura 11) que representa esse comportamento da sequência.

Figura 11 – Representação gráfica de uma sequência monótona crescente e limitada, destacando visualmente o comportamento convergente previsto no teorema.



Fonte: Stewart (2013, p.627).

Nesta análise, a conversão para o registro gráfico pode ser considerada não congruente, principalmente em razão da disposição do termo a_n no eixo vertical da figura. Embora essa prática de posicionar o termo geral da sequência no final do eixo das coordenadas seja adotada por matemáticos como uma forma de indicar em qual eixo estão os valores de a_n , tal escolha pode gerar confusão no leitor. Isso ocorre porque, ao ser posicionado acima do ponto M , o símbolo a_n pode sugerir equivocadamente que há valores da sequência maiores que ele, contrariando a hipótese de que a sequência é limitada superiormente por M . Além disso, pode haver a interpretação de que o termo a_n não está diretamente associado aos pontos (n, a_n) representados no gráfico, rompendo a conexão visual esperada entre o símbolo algébrico e os dados gráficos correspondentes. Tais aspectos comprometem a clareza e a coerência da conversão.

No Livro 3 é reconhecido que o rigor matemático é indispensável no processo demonstrativo; por isso é apresentada a demonstração formal de que toda sequência monótona limitada é convergente, conforme o Quadro 10.

Quadro 10 – Demonstração do Teorema da Sequência Monótona - Livro 2

Teorema. Toda sequência monótona limitada é convergente

Demonstração. Suponha que (a_n) seja uma sequência crescente. Como (a_n) é limitada, o conjunto $S = \{a_n \mid n \geq 1\}$ possui um limitante superior. Pelo Axioma da Completude, existe um menor limitante superior L . Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não é um limitante superior para S (pois L é o limite superior mínimo). Dessa forma, $a_N > L - \varepsilon$ para algum inteiro N . Como a sequência é crescente, tem-se $a_n \geq a_N$ para todo $n > N$. Assim, se $n > N$, então $a_n > L - \varepsilon$, o que implica $0 \leq L - a_n < \varepsilon$, uma vez que $a_n \leq L$. Logo, $|L - a_n| < \varepsilon$ sempre que $n > N$ e, por conseguinte, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Uma demonstração similar (usando o maior limitante inferior) funciona se (a_n) for decrescente.

Fonte: O autor (2025).

Observa-se que o livro não estabelece uma relação entre os elementos presentes na demonstração e a representação gráfica fornecida. Ainda que a intenção do autor não seja vincular diretamente a ilustração à estrutura formal da prova, elementos como o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ e o índice N poderiam ser incorporados em um novo gráfico, à semelhança do que ocorre na Figura 6 da Seção 3.2. Com isso, a representação se tornaria mais informativa quando analisada previamente, contribuindo de forma mais eficaz para a compreensão da demonstração apresentada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As análises desenvolvidas ao longo deste trabalho foram guiadas pelos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, segundo a qual a aprendizagem matemática só se efetiva quando há apreensão e articulação entre diferentes registros semióticos. A partir dessa perspectiva, buscou-se investigar como os registros de representação se manifestam na abordagem do conteúdo de sequências de números reais em três livros utilizados no ensino superior, com foco especial nas representações empregadas em conversões e na congruência de algumas transformações.

Com base nas análises realizadas nas Seções 5.2 e 5.3, foi possível identificar diferenças significativas entre as obras analisadas, com destaque para o Livro 3, cuja abordagem se distancia notavelmente da adotada nos outros dois livros, principalmente em relação à presença de representações gráficas e geométricas.

Os Livros 1 e 3 abordam os conceitos principalmente a partir dos registros linguísticos (RLN) e simbólico-algébrico (RS_ReAl), incluindo algumas conversões e tratamentos. Ambas também destacam-se por incorporar ativamente registros geométricos e gráficos, respectivamente, no estudo de seus limites; no entanto, o L3 se sobressai ao também explorar o conceito de sequências com o apoio de recursos visuais. Já o L2 apresenta uma situação mais crítica, pois seu Capítulo II praticamente não explora transformações externas, mantendo uma representação uniforme que pode prejudicar a compreensão dos estudantes.

O ensino de demonstrações matemáticas no nível superior enfrenta um desafio pedagógico: a escassez de representações gráficas nos materiais didáticos. Os livros L1 e L2, ao abordarem teoremas sobre sequências nos registros linguístico e simbólico-algébrico, deixam de proporcionar aos alunos importantes ferramentas cognitivas, como visualizações que revelam relações estruturais e conexões entre a intuição geométrica e o formalismo matemático. É relevante pontuar que Lima (2014, p.73), embora destaque o valor das interpretações visuais para a compreensão de teoremas e conceitos de Análise Real, desenvolve seu Capítulo IV predominantemente nos registros linguístico (RLN) e simbólico-algébrico (RS_ReAl). Essa aparente contradição sugere que o autor pretende chamar atenção justamente para os registros geométrico e gráfico que estão ausentes em sua própria exposição.

O L3 demonstra um avanço nessa abordagem ao incorporar representações gráficas na exposição de dois teoremas. Contudo, essas representações gráficas mostraram-se insuficientes

para favorecer o desenvolvimento da capacidade de antecipar estratégias demonstrativas ou reconstruir argumentos matemáticos de forma autônoma, uma vez que não há articulação com os elementos que estão presentes na demonstração. Além disso, as representações carecem de dinamismo. Como sugestão para enriquecer ainda mais essa abordagem, o livro poderia incluir referências a recursos digitais interativos, como construções no GeoGebra, que permitem aos estudantes explorar dinamicamente as variações nos parâmetros das sequências e visualizar em tempo real como essas alterações impactam seu comportamento.

Os resultados sugerem que as dificuldades dos graduandos em matemática na compreensão de textos acadêmicos, em especial de demonstrações formais, podem decorrer não apenas da complexidade inerente aos conceitos, mas também de abordagens didáticas insuficientes na exploração articulada de múltiplos sistemas de representação. Uma exposição mais equilibrada entre registros, acompanhada de atividades que promovam a tradução consciente entre eles, poderia oferecer aos estudantes caminhos alternativos para a compreensão e construção de argumentos matemáticos rigorosos.

As deficiências identificadas nos materiais didáticos reforçam o papel central do professor como mediador no processo de aprendizagem. Para superar as limitações dos textos, sugere-se:

1. Complementar os materiais existentes com representações visuais que faltam nas obras originais;
2. Desenvolver atividades específicas de conversão entre diferentes registros de representação;
3. Elaborar guias de leitura que explicitam as relações entre as diversas formas de representação;
4. Incorporar tecnologias interativas para materializar conceitos abstratos presentes nos textos.

Em decorrência dessa reflexão, considera-se pertinente sugerir a seguinte linha de pesquisa para estudos futuros: a produção de representações gráficas interativas no GeoGebra que facilitem a compreensão do raciocínio lógico envolvido nas demonstrações matemáticas, com aplicação direta no ensino de sequências numéricas no nível superior. O objetivo principal é avaliar o impacto dessas ferramentas visuais na aprendizagem dos graduandos, especificamente na maturidade para compreender e reproduzir demonstrações formais.

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, G. *Análise matemática para licenciatura*. 3. ed. rev. e ampl. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2018.
- BATISTA, N.; MERLINI, V. L. *A conversão das representações semióticas da função afim e linear: um estudo diagnóstico com estudantes do ensino médio*. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 13, n. 30, p. 212–233, jan./abr. 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.33871/22838500.2024.13.30.212-233>>. Acesso em: 8 abr. 2025.
- BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). *Exame Nacional do Ensino Médio: caderno de questões – 2º dia – Prova Amarela*. Brasília: INEP, 2020. Disponível em: <https://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2020/2_dia_caderno_3_amarela_aplicacao_regulapdf>. Acesso em: 28 jul. 2025.
- BOLDA, C. R. F. *Geometria e visualização: desenvolvendo a competência heurística através da reconfiguração*. Dissertação (Mestrado em Educação) — Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1997. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203136>. Acesso em: 23 mar. 2025.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio: orientações complementares*. Brasília: MEC/SEB, 2000. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/biblioteca-de-apoio/pcn-e-pcn-ensino-medio/?utm_source=chatgpt.com>. Acesso em: 1 jun. 2025.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC, 2018.
- CARDOSO, M. C. *Conciliação de metas, relevância e registros de representação semiótica em matemática*. Tese (Doutorado em Ciências da Linguagem) – Universidade do Sul de Santa Catarina, Tubarão, 2015. Disponível em: <https://repositorio.animaeducacao.com.br/handle/ANIMA/3376>. Acesso em: 16 jul. 2025.
- CARVALHO, L. *Um estudo das concepções de estudantes do ensino médio sobre o conceito de função com base na teoria dos registros de representações semióticas*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) — Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2017. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/bitstream/123456789/27592/1/DISSERTAC%C3%83%20de%20Lidiane%20Pereira%20de%20Carvalho.pdf>>. Acesso em: 8 abr. 2025.
- CATTO, G. G. *Registros de representação e o número racional: uma abordagem em livros didáticos*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/18489>. Acesso em: 15 jan. 2025.
- DEL REY, L. *Get Free*. In: *Lust for Life*. Interscope Records, 2017. Música.
- DUVAL, R. *Como analisar a questão crucial da compreensão em matemática?* Tradução de Mércles T. Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT, Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 1–22, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2018v13n2p01>. Acesso em: 15 jul. 2025.

DUVAL, R. *How To Learn To Understand Mathematics?* JIEEM. São Paulo, v. 10, n. 2, p. 114-122, 2017.

DUVAL, R. *Los problemas Fundamentales en el Aprendizaje de la Matemáticas y las Formas Superiores en el Desarrollo Cognitivo*. Tradução de Myriam Vega Restrepo. Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, R. *Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p. 11–33, 2010. (Coleção Papirus Educação).

DUVAL, R. *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suíça: Peter Lang S.A., 1995.

DUVAL, R. *Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I)*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento*. Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 12 dez. 2024.

DUVAL, R. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica*. Tânia M. M. Campos (Org.). Tradução: Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FONSECA, J. J. *Metodologia da investigação científica da outra margem: ir em modo maratona e não em modo corrida de 100 metros*. 2. ed. Lisboa: Instituto Piaget, 2002.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. *Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple*. Ciência & Educação (Bauru), São Paulo, v. 22, n. 2, p. 465–487, abr./jun. 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1516-731320160020012>. Acesso em: 03 fev. 2025.

INGAR, K. V. *A visualização na aprendizagem dos valores máximos e mínimos locais da função de duas variáveis reais*. 2014. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014. p. 62. Disponível em: <https://ariel.pucsp.br/handle/11013>. Acesso em: 24 jun. 2025.

LIBÂNEO, J. C. *Didática*. São Paulo: Cortez, 1991.

LIMA, E. L. *Curso de análise*; v. 1. 12. ed. Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

MACÊDO, J. A.; BRANDÃO, D. P.; NUNES, D. M. *Limites e possibilidades do uso do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem*. Educação Matemática Debate, Montes Claro, v. 3, n. 7, p.68-86, jan./abr., 2019. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/journal/6001/600166634004/html/>>. Acesso em: 1 jun. 2025.

MAZZI, L. C. *Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da análise real*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2014. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/123706>. Acesso em: 19 jan. 2025

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático*. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência Ltda, 1994.

REZENDE, V.; ABRANCHES, M. M.; CAVALCANTE, T. M. M. *Registros de representação semiótica e sua articulação com o Hexágono de Durer nas aulas de matemática*. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 9, n. 2, p. 1–25, 2018. Disponível em: <https://revistas.unicentro.br/index.php/emdea/article/view/6175/6203>. Acesso em: 10 abr. 2025.

RODRIGUES, V. W. *Interpretação Teorema 9 (Teorema do Confronto)*. GeoGebra, 19 out. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/c4xkaguk>. Acesso em: 27 jul. 2025.

RODRIGUES, V. W. *Interpretação Teorema 8*. GeoGebra, 9 jul. 2021. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/ezxdtwtg>. Acesso em: 27 jul. 2025.

RODRIGUES, V. W. *Interpretação Teorema 6*. GeoGebra, 20 out. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mccsdmer>. Acesso em: 27 jul. 2025.

RODRIGUES, V. W. *Interpretação Teorema 7*. GeoGebra, 9 jul. 2021. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/mwwbrk6j>. Acesso em: 27 jul. 2025.

RODRIGUES, V. W. *Interpretação Teorema 10*. GeoGebra, 20 out. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/xkfahmth>. Acesso em: 27 jul. 2025.

RODRIGUES, V. W. *Interpretação Teorema 13*. GeoGebra, 20 out. 2020. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/dbqj6pye>. Acesso em: 27 jul. 2025.

RODRIGUES, V. W. *Interpretação Teorema 12*. GeoGebra, 29 nov. 2021. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/gmmjngbx>. Acesso em: 27 jul. 2025.

ROQUE, T. *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SILVA, M. A. *Concepções de professores de matemática sobre o conceito de função: uma abordagem baseada na teoria dos registros de representação semiótica*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/39695>>. Acesso em: 8 abr. 2025.

SOUZA, V. H. G. *O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica*. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, p. 64, 2008. Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/11294>. Acesso em: 27 jun. 2025.

STEWART, J.; CLEGG, D.; WATSON, S. *Cálculo*. 9. ed. Tradução de Francisco Magalhães Gomes. v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2022.

TRIVIÑOS, A. *Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas, 1987.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor's introduction: what is mathematical visualization? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (org.). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington: Mathematical Association of America, 1991, p. 1–8.