UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Joicy Priscila de Araújo Cruz

Equações do tipo Calabi-Simons para subvariedades tipo-espaço em produtos indefinidos e aplicações

Recife

2025

Joicy Priscila de Araújo Cruz

Equações do tipo Calabi-Simons para subvariedades tipo-espaço em produtos indefinidos e aplicações

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Matemática.

Linha de pesquisa: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos

Recife
2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Cruz, Joicy Priscila de Araújo.
Equações do tipo Calabi-Simons para subvariedades tipo-espaço em produtos indefinidos e aplicações / Joicy Priscila de Araújo Cruz. - Recife, 2025.
111 f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.
Orientação: Fábio Reis dos Santos.
Inclui referências.

1. Fórmula do tipo Simons; 2. Espaço produto semi-Riemanniano; 3. Subvariedades espaciais; 4. Hipersuperfície estocasticamente completa; 5. Hipersuperfície 2-minimal. I. Santos, Fábio Reis dos. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

JOICY PRISCILA DE ARAÚJO CRUZ

Equações do tipo Calabi-Simons para subvariedades tipo-espaço em produtos indefinidos e aplicações

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 29/07/2025

BANCA EXAMINADORA

Fábio Reis dos Santos

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

ALBUJER BROTONS ALMA LUISA - 53232182Q
Firmado digitalmente por ALBUJER BROTONS ALMA LUISA - 53232182Q
Fecha: 2025.08.04 21:30:34 +02'00'

Profa. Dra. Alma Luisa Albujer Brotons (Examinador Externo)
Universidad de Alicante

ALIAS LINARES LUIS JOSE - 27468425P
Firmado digitalmente por ALIAS LINARES LUIS JOSE - 27468425P
Fecha: 2025.07.31 23:42:05 +02'00'

Prof. Dr. Luis Jose Alías Linares (Examinador Externo)
Universidad de Múrcia

Prof. Dr. Marcio Henrique Batista da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

Sylvia F. da Silva

Profa. Dra. Sylvia Ferreira da Silva (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Aos meus pais e avós

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por tudo o que me tem permitido alcançar e por tudo o que sou hoje. Aos meus pais, Neide e Pedro, pelo constante apoio, presença, incentivo, orientação e pelo amor dedicado a mim. Aos meus irmãos, Patrícia e Eduardo, por estarem sempre presentes em minha caminhada. Ao meu sobrinho e afilhado, Danilo, por toda a alegria que trouxe a minha vida.

À Maria das Graças, um presente que Deus colocou em minha vida, a quem considero minha mãe de coração. Aos meus tios e tias, pela alegria e pelo incentivo aos meus sonhos. Aos meus primos e primas, por sempre encontrarem um jeito de arrancar boas risadas.

Aos amigos e colegas conquistados ao longo desta trajetória. Em especial, às minhas amigas e companheiras de curso e de vida, Élida e Rayza, pela partilha dos momentos de estresse, pelas longas jornadas de estudo, pelos encontros fora do ambiente acadêmico e por me permitirem participar de momentos tão significativos em suas vidas. À JP, pelo incentivo constante e pelas distrações sempre oportunas. Aos amigos que tive o prazer de conhecer durante a breve estadia em Múrcia — Bea, Lídia e Caio —, agradeço pelo acolhimento e pelas conversas memoráveis (Pikachus con bigotes, nunca los olvidaré).

Ao Prof$^{\underline{o}}$. Dr. Fábio Reis, pela paciência e dedicação demonstradas ao longo de todos esses anos, pelo aceite em me orientar, pelo direcionamento e pelo auxílio nos trabalhos, bem como pelos conselhos e oportunidades a mim concedidos.

A todos os docentes que contribuíram para a minha formação. Ao professor que, no 5$^{\underline{o}}$ ano do ensino fundamental, me revelou a beleza da Matemática. Aos professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco (DMAT-UFPE), que, desde a graduação, têm acompanhado e apoiado esta jornada acadêmica.

Aos membros da banca examinadora — Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Alma Brotons (Universidad de Alicante, Espanha), Prof$^{\underline{o}}$. Dr. Luis Alías (Universidad de Murcia, Espanha), Prof$^{\underline{o}}$. Dr. Márcio Batista (Universidade Federal de Alagoas) e Prof$^{\underline{a}}$. Dra. Sylvia (Universidade Federal Rural de Pernambuco) —, agradeço pelas valiosas sugestões e correções apresentadas.

Ao Profº. Dr. Luis Alías, pela acolhida na Universidad de Murcia, pela orientação e apoio nas pesquisas, e pelas dicas sobre a cidade e seus arredores. À Profª. Dra. Alma Brotons, pelo convite para desenvolver atividades na Universidad de Córdoba, pela calorosa recepção, pelos passeios pela cidade e pela colaboração nas pesquisas. À Profª. Dra. Sylvia, pelos questionamentos que me levaram além do óbvio, pela serenidade e pelo apoio constante.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro concedido.

RESUMO

Esta tese tem como objetivo investigar subvariedades espaciais imersas em produtos de variedades semi-Riemannianas. Para isso, desenvolvemos inicialmente uma fórmula do tipo Calabi-Simons, adaptada ao contexto de subvariedades espaciais em espaços produto semi-Riemannianos indefinidos, compostos por uma variedade de curvatura seccional constante multiplicada pela reta real (no caso riemanniano ou lorentziano). A partir dessa formulação geral, derivamos versões especializadas aplicáveis a subvariedades em classes particulares de espaços ambiente. Como primeira aplicação, estudamos subvariedades estacionárias, ou seja, aquelas com curvatura média nula. Ao analisar propriedades como o índice e a codimensão da imersão, demonstramos que tais subvariedades são necessariamente totalmente geodésicas em slices do espaço produto. Na sequência, consideramos subvariedades com vetor curvatura média paralelo. Por meio de desigualdades integrais do tipo Simons, mostramos que essas subvariedades devem ser totalmente umbílicas nas respectivos slice. No caso específico de hipersuperfícies imersas em produtos entre variedades de curvatura constante e um fator euclidiano, analisamos aquelas com curvatura média nula sob a suposição de completude estocástica. Demonstramos que tais hipersuperfícies estão contidas em slices horizontais ou em cilindros verticais, conforme o sinal da curvatura do fator base. Sob a hipótese adicional de completude métrica, obtemos uma classificação precisa das configurações geométricas possíveis. Por fim, abordamos o caso das hipersuperfícies chamadas 2-mínimas. De maneira análoga ao caso anterior, estabelecemos uma caracterização completa de slices.

Palavras-Chave: fórmula do tipo Simons, espaço produto semi-Riemanniano, subvariedades espaciais, hipersuperfície estocasticamente completa, hipersuperfície 2-minimal.

ABSTRACT

This thesis aims to investigate spacelike submanifolds immersed in products of semi-Riemannian manifolds. To this end, we first develop a Calabi–Simons–type formula tailored to the setting of spacelike submanifolds in indefinite product spaces, specifically those formed by a manifold with constant sectional curvature and either the real line or the Lorentzian line. From this general formulation, we derive specialized versions applicable to submanifolds immersed in particular ambient spaces. As a first application, we study stationary submanifolds, that is, those with vanishing mean curvature. By analyzing the geometric properties of the immersion, such as its index and codimension, we demonstrate that these submanifolds must be totally geodesic in slices of the product space. Next, we investigate submanifolds with a parallel mean curvature vector. Using integral inequalities of Simons type, we prove that such submanifolds must be totally umbilical within the corresponding slices. In the case of hypersurfaces immersed in products of constant curvature spaces with a Euclidean factor, we consider those with zero mean curvature under the assumption of stochastic completeness. We show that these hypersurfaces are necessarily contained in horizontal slices or vertical cylinders, depending on the sign of the base curvature. Assuming further that the hypersurfaces are complete, we obtain a precise classification of the possible geometric configurations. Finally, we address the case of so-called 2-minimal hypersurfaces. In analogy with the previous situation, we establish a complete characterization of the slices.

Keywords: Simons-type formula, semi-Riemannian product spaces, spacelike submanifolds, stochastically complete hypersurfaces, 2-minimal hypersurfaces.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, tem crescido significativamente o interesse — tanto do ponto de vista físico quanto matemático — pelo estudo de subvariedades imersas em variedades semi-Riemannianas. No contexto da física teórica contemporânea, esse tema assume especial relevância, sobretudo na formulação e interpretação geométrica da teoria da relatividade geral. Superfícies mínimas e subvariedades estacionárias, por exemplo, surgem naturalmente em contextos físicos regidos por princípios variacionais, como o da minimização da área. Nesse cenário, as equações de movimento de partículas e campos podem ser interpretadas geometricamente como condições de energia mínima ou de ação crítica sobre subvariedades imersas (para outras aplicações, ver (CHEN, 1973; O'NEILL, 1983)).

Sob a perspectiva matemática, o estudo dessas subvariedades é motivado, entre outros fatores, pelo comportamento geométrico notável de certas hipersuperfícies do tipo espaço com curvatura média constante não nula. Tais estruturas apresentam propriedades do tipo Bernstein e surgem como soluções de problemas variacionais, uma vez que correspondem a pontos críticos do funcional área, considerando variações que preservam o volume associado a determinada função.

Um marco fundamental nesse campo foi estabelecido por (SIMONS, 1968), no contexto de subvariedades mínimas na esfera unitária. Em 1968, Simons considerou uma subvariedade mínima Σ^n imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+p}$ e calculou o laplaciano da norma ao quadrado da segunda forma fundamental S dessa imersão. Com isso, obteve uma equação diferencial de segunda ordem envolvendo a norma de S, a dimensão n e a codimensão p. Supondo que Σ^n seja fechada (compacta e sem bordo), deduziu a famosa desigualdade integral de Simons, que impõe um intervalo restrito para o valor da norma de S: ou $S = 0$, caso em que Σ^n é totalmente geodésica, ou S é constante positiva, dependente apenas de n e p. No entanto, Simons não conseguiu caracterizar as subvariedades que realizam a igualdade nesse segundo caso. Essa lacuna foi preenchida pouco depois por (CHERN; DO CARMO; KOBAYASHI, 1970), para $p > 1$, ao demonstrarem que as únicas soluções são as superfícies de Veronese em $\mathbb{S}^4$. Independentemente, (LAWSON, 1969) investigou o caso $p = 1$ e encontrou os toros de Clifford como soluções. A abordagem introduzida por Simons revelou-se extremamente frutífera, não apenas para o estudo de subvariedades mínimas na esfera unitária, mas também para subvariedades espaciais em espaços produto semi-Riemannianos e outros contextos geométricos, conforme ilustrado em (ARAÚJO; TENENBLAT, 2011; DOS SANTOS; DA SILVA, 2021b; ERBACHER, 1972; DE LIMA; DE LIMA, 2019).

Dando ênfase ao estudo de superfícies em espaços produto via fórmulas do tipo Simons, destaca-se o trabalho de (BATISTA, 2011), no qual é apresentada a primeira fórmula desse tipo para hipersuperfícies imersas em $M^2(c) \times \mathbb{R}$. Nesse estudo, uma nova fórmula é deduzida e aplicada para caracterizar slices e cilindros verticais como as únicas superfícies completas com curvatura média constante em $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ e $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, desde que certas condições geométricas sejam satisfeitas. No contexto de subvariedades com vetor curvatura média paralelo em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, (FETCU; ROSENBERG, 2013) utilizaram uma fórmula do tipo Simons para obter resultados de umbilicidade, impondo restrições sobre o quadrado da norma da segunda forma fundamental. Ainda nesse cenário, (DOS SANTOS; DA SILVA, 2022) caracterizaram subvariedades com vetor curvatura média normalizado paralelo, segunda curvatura média constante e ângulo constante.

Ao analisarmos o índice do ambiente e a codimensão da subvariedade, identificam-se dois casos distintos: quando o índice coincide com a codimensão e quando eles diferem. No primeiro caso — isto é, quando o índice é igual à codimensão — destaca-se o trabalho de (ISHIHARA, 1988), no estudo de subvariedades espaciais máximas completas em formas espaciais semi-Riemannianas $M_p^{n+p}(c)$, com curvatura seccional constante $c = \pm 1$. Utilizando técnicas desenvolvidas por Chern, do Carmo e Kobayashi, o autor estende resultados prévios de (CHENG; YAU, 1976) e (CALABI, 1970) para esse tipo de subvariedade. No segundo caso — quando o índice difere da codimensão —, (ALÍAS; ROMERO, 1995) investigam subvariedades espaciais compactas e máximas no espaço de de Sitter $\mathbb{S}_q^{n+p}(c)$, com $q < p$, e deduzem fórmulas de divergência para certos campos vetoriais definidos na subvariedade. Demonstram, em particular, que se Σ^n é uma subvariedade compacta, máxima e do tipo espaço em $\mathbb{S}_q^{n+p}$, com curvatura de Ricci limitada inferiormente por $n-1$, então Σ^n deve ser totalmente geodésica. Por sua vez, (CHENG; ISHIKAWA, 1997) estudam subvariedades do tipo espaço, completas e máximas, imersas em variedades semi-Riemannianas de curvatura seccional constante. Nesse contexto, os autores desenvolvem uma fórmula de Simons adaptada ao ambiente indefinido e a aplicam na dedução de desigualdades integrais do tipo pinching. Sob hipóteses geométricas envolvendo as curvaturas escalar, de Ricci e seccional, demonstram resultados de rigidez que implicam que a subvariedade é, necessariamente, totalmente geodésica, um toro de Clifford ou uma superfície de Veronese.

No estudo de hipersuperfícies, (ALÍAS; GARCÍA-MARTÍNEZ, 2012) aplicaram uma versão apropriada da fórmula de Simons para investigar hipersuperfícies estocasticamente completas imersas em variedades espaciais Riemannianas. Como resultado, caracterizaram hipersuperfícies umbílicas, bem como certas classes de hipersuperfícies isoparamétricas, estendendo os resultados de (ALENCAR; DO CARMO, 1993) e (NOMIZU; SMYTH, 1969). No contexto Lorentziano, (GOMES et al., 2014) investigaram hipersuperfícies completas do tipo Weingarten imersas em um espaço Lorentziano da forma $L_1^{n+1}(c)$, com $n \geq 2$, assumindo duas curvaturas principais distintas. Como consequência, obtiveram resultados de caracterização tanto para o espaço de Sitter $\mathbb{S}_1^{n+1}$, quanto para os espaços de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+1}$ e o espaço anti-de Sitter $\mathbb{H}_1^{n+1}$. Ainda no contexto de hipersuperfícies, (CHENG; YAU, 1977) introduziram uma nova abordagem para o estudo de hipersuperfícies completas com curvatura escalar constante em variedades espaciais. Nesse trabalho, os autores propuseram um operador diferencial linear de segunda ordem, que generaliza o operador de Laplaciano. A combinação da teoria de Simons com a metodologia desenvolvida por Cheng e Yau motivou diversos trabalhos posteriores. Entre eles, destaca-se o de (DOS SANTOS, 2021), que estabeleceu uma fórmula do tipo Simons para superfícies em $M^2 \times \mathbb{R}$, demonstrando que superfícies completas com curvatura extrínseca constante são isometricamente equivalentes a cilindros verticais ou slices. Outra contribuição relevante encontra-se em (DOS SANTOS; DA SILVA; DE SOUSA, 2023), onde caracterizaram m-subvariedades de Weingarten lineares, compactas e sem bordo, em $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Essas subvariedades possuem um campo vetorial de curvatura média normalizada paralelo, função ângulo constante e satisfazem uma relação linear entre as curvaturas médias H e H_2. Outros resultados relacionados podem ser encontrados em (ALÍAS; MELÉNDEZ; PALMAS, 2018; DOS SANTOS; DA SILVA, 2021a).

Com base nas temáticas abordadas anteriormente, este trabalho tem como objetivo estudar subvariedades do tipo espaço em variedades produto semi-Riemannianas. Para isso, iniciamos relembrando definições fundamentais e estabelecendo as notações que serão utilizadas ao longo do texto, além de apresentar o espaço ambiente que nos propomos a investigar. Encerramos a parte preliminar com a apresentação de uma fórmula do tipo Simons para subvariedades espaciais em $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$, sob a condição $0 \leq q+\nu \leq p+1$. Como aplicação, obtemos uma fórmula de Simons para subvariedades com vetor curvatura média paralelo (cf. Capítulo 2). No Capítulo 3, apresentamos resultados intermediários que desempenham um papel fundamental na obtenção dos principais teoremas deste trabalho. Com base nos trabalhos de (DAJCZER, 1990) e (MENDONÇA; TOJEIRO, 2014), destacamos um resultado de redução de codimensão para subvariedades espaciais em $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$, do qual derivamos, como corolário, uma versão análoga para subvariedades paralelas em espaços produto. Além disso, discutimos uma versão do princípio do máximo, que se revela particularmente útil no desenvolvimento dos argumentos apresentados. Concluímos o capítulo com a exposição de clássicos teoremas de classificação para hipersuperfícies Riemannianas. Por fim, no Capítulo 4, apresentamos os principais resultados obtidos neste trabalho, os quais são alcançados por meio da aplicação das fórmulas de Simons, em conjunto com os resultados discutidos no Capítulo 3.

Iniciamos a exposição dos principais resultados com a análise de subvariedades estacionárias (isto é, com curvatura média nula) em $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}$, sob a condição $0 \leq q+\nu \leq p+1$. Em particular, considerando o caso em que o índice do espaço ambiente coincide com a codimensão, mostraremos de maneira análoga ao resultado clássico de (ISHIHARA, 1988) — que demonstrou que subvariedades estacionárias completas em $\mathbb{S}_p^{n+p}$ são totalmente geodésicas — que subvariedades estacionárias em $\mathbb{S}_p^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_1$ também são totalmente geodésicas. Mais precisamente (cf. Teorema 4.2):

Teorema 1.1. *Seja Σ^n uma subvariedade tipo espaço estacionária completa de $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Então, Σ^n é totalmente geodésica e está contida em uma folha do tipo $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.*

No contexto de desigualdades integrais, (ALÍAS; MELÉNDEZ, 2020) estudaram a rigidez de hipersuperfícies orientadas e compactas, com curvatura escalar constante, imersas isometricamente na esfera euclidiana unitária $\mathbb{S}^{n+1}$. Por meio de uma desigualdade integral, caracterizaram as hipersuperfícies totalmente umbilicais, bem como uma certa família de toros da forma $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^n(r)$. Posteriormente, (DOS SANTOS; DA

SILVA, 2021b) generalizaram a desigualdade integral obtida por Alías e Meléndez para subvariedades com vetor curvatura média normalizado paralelo, imersas no espaço $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$, e com segunda curvatura média constante. Após essa breve explanação a respeito de desigualdades integrais do tipo Simons, nosso próximo resultado aborda subvariedades estacionárias no caso em que o índice difere da codimensão. Mostraremos que, por meio de uma desigualdade integral do tipo Simons, é possível caracterizar as subvariedades estacionárias completas em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Sendo T a parte tangente do campo unitário ∂_t associado ao espaço produto, temos (cf. Teorema 4.4):

Teorema 1.2. *Seja Σ^n uma subvariedade tipo espaço estacionária compacta em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, com $q < p$. Então,*

$$\int_\Sigma S\left(n + |T|^2 - aS\right) \, d\Sigma \leq 0,$$

onde

$$a = \begin{cases} 1, & \textit{quando} \quad p - q = 1, \\ 3/2, & \textit{quando} \quad p - q > 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Em particular, se a igualdade ocorre, então:

i. Σ^n é uma subvariedade totalmente geodésica em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \{t_0\}$;

ii. ou $p = q + 1$, Σ^n está imersa na subvariedade espacial totalmente geodésica

$$\mathbb{S}^{n+1} \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}_q^{n+q+1} \times \mathbb{R}_1$$

e é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^k(\sqrt{n/k}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{n/(n-k)})$;

iii. ou $n = p - q = 2$, e Σ^2 é isométrica à superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4 \times \{t_0\}$.

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Ressaltamos que o teorema apresentado constitui uma extensão do Teorema 1 de (CHENG; ISHIKAWA, 1997) ao cenário de espaços produto dotados de métrica indefinida.

Ainda no contexto de desigualdades integrais do tipo Simons, agora sob a perspectiva de subvariedades com curvatura média paralela em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, obtemos a seguinte desigualdade integral envolvendo a segunda forma fundamental sem traço da imersão, denotada por ϕ, a curvatura média H, e a componente tangente do campo paralelo ∂_t. Em outras palavras (cf. Teorema 4.13),

Teorema 1.3. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial compacta, imersa com vetor curvatura média h tipo-espaço e paralelo em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, com $q < p$. Então, a seguinte desigualdade integral é válida:*

$$\int_\Sigma |\phi|^2 \, Q_a(|\phi|, |T|) \, d\Sigma \leq 0,$$

onde $Q_a(x, y)$ é uma função de duas variáveis, dada por

$$Q_a(x, y) = -ax^2 + y^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx + n(1 + H^2),$$

onde

$$a = \begin{cases} 1, & \textit{quando} \quad p - q = 1, \\ 3/2, & \textit{quando} \quad p - q > 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

Além disso, se a igualdade for atingida, então:

(i) ou Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbilica contida em $\mathbb{S}_q^{n+1} \times \{t_0\}$, com $q = 0$ ou 1;

(ii) ou $a = 1$ e Σ^n é isométrica ao toro de Clifford em $\mathbb{S}^{n+1} \times \{t_0\}$,

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Agora voltamos nosso foco para o estudo de hipersuperfícies Riemannianas em espaços produto com métrica indefinida. Como ponto de partida, apresentamos uma extensão, para dimensões superiores, do resultado obtido por (ALBUJER; ALÍAS, 2009), no qual é possível caracterizar os *slices* (cf. Teorema 4.18):

Teorema 1.4. *As únicas hipersuperfícies espaciais completas e máximas imersas em $M^n(c) \times \mathbb{R}_1$, com $c \geq 0$, são as totalmente geodésicas. Além disso, se $c > 0$, essas são os* slices.

No contexto de hipersuperfícies mínimas estocasticamente completas em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, ao se imporem certas restrições sobre S e $|T|$, é possível determinar onde essas hipersuperfícies estão localizadas. Além disso, assumindo que sejam completas, torna-se possível caracterizá-las de forma mais precisa. No caso em que $c > 0$, temos o seguinte resultado (cf. Teorema 4.19):

Teorema 1.5. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima estocasticamente completa, imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}_1$, com $c > 0$. Suponha que*

$$\sup_{\Sigma} \left(S + c(3n-1)|T|^2 \right) \leq nc.$$

Então, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um slice.

A partir deste resultado, quando Σ^n é completa, o seguinte resultado fornece uma caracterização precisa dos *slices* (cf. Corolário 4.20).

Corolário 1.6. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima completa imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, com $c > 0$. Suponha que*

$$\sup_{\Sigma} \left(S + c(3n-1)|T|^2 \right) \leq nc.$$

Então, Σ^n é um slice.

No caso em que $c < 0$, com base no resultado obtido por (BATISTA, 2011), temos que (cf. Teorema 4.21):

Teorema 1.7. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima estocasticamente completa, imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, com $c < 0$. Suponha que a seguinte igualdade ocorra:*

$$\langle A(T), T \rangle = \frac{n-1}{n} |A|^2 |T|^2,$$

e que

$$\sup_{\Sigma} \left(S - c(3n-1)\langle \eta, \partial_t \rangle^2 \right) < -c(n-1),$$

onde A denota o operador de forma de Σ^n na direção do vetor normal unitário η, e $\langle \eta, \partial_t \rangle$ denota o cosseno do ângulo entre η e o campo paralelo ∂_t. Então, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um cilindro vertical.

De modo análogo ao caso anterior, no contexto de hipersuperfícies completas, obtém-se que tais variedades são necessariamente cilindros verticais.

Ao transferirmos nosso objeto de estudo para o contexto de hipersuperfícies estocasticamente completas com curvatura média constante, assumimos que T é um campo não nulo e uma direção principal canônica, ou seja, $A(T) = \lambda T$, onde λ é uma função real. Dessa forma, definindo Σ^n_λ como a hipersuperfície para a qual T é uma direção principal canônica e λ é o autovalor associado, temos (cf. Teorema 4.28):

Teorema 1.8. *Seja Σ^n_λ uma hipersuperfície estocasticamente completa, com curvatura média constante, imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, com $c > 0$. Suponha que $\frac{H}{2} \leq \lambda \leq H$ e que*

$$\sup_{\Sigma} \left(c_n |\phi|^2 + c(n+1)|T|^2 \right) \leq 2nc,$$

onde

$$c_n = \frac{n^2 + 4n - 4}{4(n-1)} > 0.$$

Então, Σ^n_λ é isométrica a uma parte aberta de um cilindro vertical.

No caso lorentziano, consideramos hipersuperfícies espaciais do tipo hélice, isto é, aquelas cuja função ângulo $\langle \eta, \partial_t \rangle$ é constante em Σ^n, onde η é o vetor normal unitário. Com isso, obtemos a seguinte caracterização para tais hipersuperfícies (cf. Teorema 4.26):

Teorema 1.9. *Seja Σ^n uma hipersuperfície espacial completa do tipo hélice, imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}_1$, com $c > 0$ e curvatura média constante. Suponha que*

$$H^2 < \frac{8(n-1)c}{n^2}.$$

Então, Σ^n é um slice.

Finalizamos este trabalho apresentando resultados para hipersuperfícies com segunda curvatura média nula, denominadas *2-minimal*, em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, $c > 0$. Utilizando um operador diferencial de segunda ordem adequado ao nosso contexto, e assumindo a validade do princípio do máximo fraco para o hessiano, obtemos o seguinte resultado (cf. Teorema 4.41):

Teorema 1.10. *Seja Σ^n uma hipersuperfície* 2-minimal *imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, com $n \geq 3$ e $c > 0$. Suponha que o princípio do máximo fraco para o Hessiano seja válido em Σ^n e* *que a função curvatura média H não mude de sinal. Se*

$$\sup_{\Sigma}\left(2(n-2)H^2+3c|T|^2\right)\leq 2c,$$

então Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um slice.

Assumindo agora que Σ^n é completa, temos uma caracterização mais precisa dessas hipersuperfícies (cf. Corolário 4.42):

Corolário 1.11. *Seja Σ^n uma hipersuperfície 2-minimal completa, imersa em $M^n(c)\times\mathbb{R}$, com $n\geq 3$ e $c>0$. Suponha que a função curvatura média H não mude de sinal. Se*

$$\sup_{\Sigma}\left(2(n-2)H^2+3c|T|^2\right)\leq 2c,$$

então Σ^n é um slice.

Assumindo uma restrição inferior adequada sobre a curvatura gaussiana, obtemos o seguinte resultado no contexto de superfícies 2-mínimas (cf. Teorema 4.43):

Teorema 1.12. *Seja Σ^2 uma superfície 2-mínima imersa em $M^2(c)\times\mathbb{R}$, com $c>0$. Suponha que o princípio do máximo fraco para o hessiano seja válido em Σ^2. Se*

$$\inf_{\Sigma} K > \frac{c}{3},$$

então Σ^2 é isométrica a uma parte aberta de um slice.

Observemos que, no caso em que Σ^2 é completa, a hipótese $\inf_\Sigma K > \frac{c}{3}$ garante a validade do princípio do máximo de Omori sobre Σ^2. Com isso, concluímos com a seguinte consequência:

Corolário 1.13. *Seja Σ^2 uma superfície completa 2-mínima imersa em $\overline{M}_1^3(c)$, com $c>0$. Se $\inf_\Sigma K > c/3$, então Σ^2 é um slice.*

2 PRELIMINARES

Este capítulo tem como finalidade apresentar as definições e estabelecer as notações que serão adotadas ao longo deste trabalho. Além disso, revisitamos alguns resultados clássicos da literatura, cujas demonstrações serão omitidas por serem bem conhecidas. Por fim, desenvolvemos uma fórmula do tipo Calabi-Simons para subvariedades espaciais imersas em espaços produto indefinido.

2.1 Fundamentação teórica

Seja Σ^n uma subvariedade Riemanniana de dimensão n imersa na variedade indefinida $\overline{M}_r^{n+p+1}$ de dimensão $n+p+1$, com índice e codimensão satisfazendo

$$0 \leq \operatorname{ind}(\overline{M}_r^{n+p+1}) = r \leq p+1 = \operatorname{cod}(\Sigma).$$

No caso em que $r > 0$, a métrica Riemanniana indefinida de $\overline{M}_r^{n+p+1}$ induz uma métrica Riemanniana em Σ^n, e, portanto, a imersão é do tipo espaço (spacelike).

Neste contexto, escolhemos um referencial pseudo-Riemanniano ortonormal $\{e_1, \ldots, e_{n+p+1}\}$ em $\overline{M}_r^{n+p+1}$, com correferencial dual associado $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n+p+1}\}$, tal que, em cada ponto de Σ^n, os vetores $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sejam tangentes a Σ^n, enquanto $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+p+1}\}$ sejam normais a Σ^n. Adotaremos, a partir daqui, a seguinte convenção de índices:

$$1 \leq i, j, k, \ldots \leq n \quad \text{(índices tangentes)},$$

$$n+1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \ldots \leq n+p+1 \quad \text{(índices normais)},$$

$$1 \leq A, B, C, \ldots \leq n+p+1 \quad \text{(índices gerais)}.$$

Neste sentido, a métrica pseudo-Riemanniana para $\overline{M}_r^{n+p+1}$ é dada por

$$d\bar{s}^2 = \sum_A \varepsilon_A \omega_A^2,$$

onde

$$\varepsilon_A = \begin{cases} 1, & 1 \leq A \leq n+p-r+1 \\ \\ -1, & n+p-r \leq A \leq n+p+1. \end{cases}$$

Denotando por $\{\omega_{AB}\}$ as formas de conexão de $\overline{M}_r^{n+p+1}$, temos que as equações de estrutura de $\overline{M}_r^{n+p+1}$ são dadas por:

$$d\omega_A = \sum_B \varepsilon_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \tag{2.1}$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \varepsilon_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} - \frac{1}{2} \sum_{C,D} \varepsilon_C \varepsilon_D \overline{R}_{ABCD}\, \omega_C \wedge \omega_D, \tag{2.2}$$

onde $\overline{R}_{ABCD}$ denota os componentes do tensor de curvatura Riemanniano indefinido.

Em seguida, restringimos todos os tensores a Σ^n. Dessa forma,

$$\omega_\alpha = 0, \quad n+1 \leq \alpha \leq n+p+1,$$

e consequentemente, a métrica Riemanniana de Σ^n é escrita como $ds^2 = \sum_i \omega_i^2$. Uma vez que,

$$\sum_i \omega_{\alpha i} \wedge \omega_i = d\omega_\alpha = 0, \tag{2.3}$$

segue do Lema de Cartan que,

$$\omega_{\alpha i} = \sum_j h_{ij}^\alpha \omega_j \quad \text{e} \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha.$$

Definimos a segunda forma fundamental A de Σ^n em $\overline{M}_r^{n+p+1}$ por

$$A = \sum_{\alpha,i,j} \varepsilon_\alpha h_{ij}^\alpha \omega_i \otimes \omega_j \otimes e_\alpha, \quad h_{ij}^\alpha = \langle A_\alpha(e_i), e_j \rangle = \langle A(e_i, e_j), e_\alpha \rangle. \tag{2.4}$$

Com isso, o quadrado da norma da segunda forma fundamental S, o vetor curvatura média h e a função curvatura média de H de Σ^n em $\overline{M}_r^{n+p+1}$ é,

$$S = \sum_\alpha |A_\alpha|^2 = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^\alpha)^2, \quad h = \frac{1}{n} \sum_\alpha \varepsilon_\alpha tr(A_\alpha) e_\alpha \quad \text{e} \quad H = |h|,$$

onde $tr(A_\alpha) = \sum_i h_{ii}^\alpha$.

Com relação as entidades definidas acima, dizemos que a subvariedade Σ^n é:

(a) *totalmente geodésica* se a sua segunda forma fundamental A se anula identicamente;

(b) *estacionária* se ela possui curvatura média nula;

(c) *cmc* se ela possui função curvatura média constante não nula;

(d) *pmc* se ela possui vetor curvatura média paralelo, isto é, se h for paralelo com uma seção do fibrado normal de Σ^n.

Nos casos particulares em que $\overline{M}_r^{n+p+1}$ é uma variedade Riemanniana ($r = 0$) ou uma variedade Lorentziana ($r = 1$), as subvariedades estacionárias são denominadas como *mínimas* no caso Riemanniano e *maximais* no caso Lorentziano.

Além disso, não é difícil verificar que toda subvariedade *pmc* possui função curvatura média constante (i.e., *cmc*). Retornando ao contexto anterior, fixemos agora os índices

$$n+1 \leq \gamma, \gamma' \leq n+p-r+1; \quad n+p-r+2 \leq \eta, \eta' \leq n+p+1.$$

Definimos as seguintes grandezas diretamente relacionadas a S:

$$S_1 = \sum_{\gamma,i,j} (h_{ij}^\gamma)^2 \quad \text{e} \quad S_2 = \sum_{\eta,i,j} (h_{ij}^\eta)^2, \tag{2.5}$$

onde $S = S_1 + S_2$. Geometricamente, S_1 denota a soma dos quadrados das segundas formas fundamentais de Σ^n em $\overline{M}_r^{n+p+1}$ nas direções espaciais e S_2 nas direções temporais.

Das equações (2.1) e (2.2), obtêm-se as equações de estrutura de do fibrado tangente Σ^n,

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0,$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l,$$

onde R_{ijkl} são as componentes do tensor de curvatura de Σ^n. A partir das equações de estrutura, derivamos a *Equação de Gauss*

$$R_{ijkl} = \overline{R}_{ijkl} + \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta}(h_{ik}^{\beta}h_{jl}^{\beta} - h_{il}^{\beta}h_{jk}^{\beta}). \tag{2.6}$$

Agora, em relação ao fibrado normal Σ^n, as equações de estrutura são:

$$d\omega_{\alpha} = \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta}\omega_{\alpha\beta} \wedge \omega_{\beta}, \quad \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0,$$

$$d\omega_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma} \varepsilon_{\gamma}\omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma\beta} - \frac{1}{2}\sum_{k,l} R^{\perp}_{\alpha\beta kl}\omega_k \wedge \omega_l.$$

Destas, derivamos a *Equação de Ricci*,

$$R^{\perp}_{\alpha\beta ij} = \overline{R}_{\alpha\beta ij} + \sum_{k}(h_{ik}^{\alpha}h_{kj}^{\beta} - h_{kj}^{\alpha}h_{ik}^{\beta}). \tag{2.7}$$

Denotando por h_{ijk}^{α} as componentes da derivada covariante de primeira ordem de h_{ij}^{α}, temos que h_{ij}^{α} e h_{ijk}^{α} estão relacionados pela seguinte expressão:

$$\sum_{k} h_{ijk}^{\alpha}\omega_k = dh_{ij}^{\alpha} + \sum_{k} h_{ik}^{\alpha}\omega_{kj} + \sum_{k} h_{jk}^{\alpha}\omega_{ki} + \sum_{\beta} \varepsilon_{\beta}h_{ij}^{\beta}\omega_{\beta\alpha}. \tag{2.8}$$

Em particular, ao denotarmos por ∇A a derivada covariante da segunda forma fundamental A, obtemos:

$$|\nabla A|^2 = \sum_{i,j,k,\alpha} (h_{ijk}^{\alpha})^2 \tag{2.9}$$

Neste contexto, dizemos que a subvariedade Σ^n é *paralela* se o tensor ∇A se anula identicamente. À luz da igualdade (2.9), isso é equivalente a afirmar que $h_{ijk}^{\alpha} = 0$ para todos os índices α, i, j, k.

Segue de (2.3) e (2.8) que a *Equação de Codazzi* é

$$\overline{R}_{\alpha ijk} = h_{ijk}^{\alpha} - h_{ikj}^{\alpha}. \tag{2.10}$$

Observemos que a segunda derivada covariante de h_{ij}^{α}, denotada por h_{ijkl}^{α}, satisfaz a seguinte relação:

$$\sum_l h^\alpha_{ijkl}\omega_l = dh^\alpha_{ijk} + \sum_l h^\alpha_{ljk}\omega_{ki} + \sum_l h^\alpha_{ilk}\omega_{lj} + \sum_l h^\alpha_{ijl}\omega_{lk} + \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{ijk}\omega_{\beta\alpha}.$$

Portanto, ao tomarmos a derivada exterior em (2.8), obtemos a *Identidade de Ricci*:

$$h^\alpha_{ijkl} - h^\alpha_{ijlk} = \sum_m h^\alpha_{im}R_{mjkl} + \sum_m h^\alpha_{mj}R_{mikl} + \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{ij}R^\perp_{\beta\alpha kl}. \tag{2.11}$$

Por definição, sabemos que

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{\alpha ijk}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ijkk}. \tag{2.12}$$

Segue então da equação de Codazzi (2.10) e a identidade de Ricci (2.11),

$$\begin{aligned} h^\alpha_{ijkk} &= h^\alpha_{kijk} + \overline{R}_{\alpha ijkk} \\ &= h^\alpha_{kikj} + \sum_m (h^\alpha_{km}R_{mijk} + h^\alpha_{mi}R_{mkjk}) + \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{ki}R^\perp_{\beta\alpha jk} + \overline{R}_{\alpha ijkk} \\ &= h^\alpha_{kkij} + \sum_m (h^\alpha_{km}R_{mijk} + h^\alpha_{mi}R_{mkjk}) + \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{ki}R^\perp_{\beta\alpha jk} + \overline{R}_{\alpha ijkk} + \overline{R}_{\alpha kikj}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Agora, usando a primeira identidade Bianchi e a fórmula da derivada covariante de $\overline{R}_{\alpha ijk}$, chegamos à:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{\alpha ijkl} = \overline{R}_{\alpha ijk;l} &- \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{il}\overline{R}_{\alpha\beta jk} - \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{jl}\overline{R}_{\alpha i\beta k} \\ &- \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{kl}\overline{R}_{\alpha ij\beta} + \sum_m h^\alpha_{lp}\overline{R}_{mijk}, \end{aligned}$$

onde $\overline{R}_{\alpha ijk;l}$ denota a derivada covariante de $\overline{R}_{\alpha ijk}$ como um tensor em Σ^n. Portanto, os dois últimos termos de (2.13) podem ser escritos como segue

$$\begin{aligned} \overline{R}_{\alpha ijkk} + \overline{R}_{\alpha kikj} = \overline{R}_{\alpha ijk;k} + \overline{R}_{\alpha kik;j} &- \sum_\beta \varepsilon_\beta \left(-h^\beta_{kk}\overline{R}_{\alpha i\beta j} + h^\beta_{ij}\overline{R}_{\alpha k\beta k} + 3h^\beta_{kj}\overline{R}_{\alpha\beta ik}\right) \\ &+ \sum_m \left(h^\alpha_{km}\overline{R}_{mijk} + h^\alpha_{jm}\overline{R}_{mkik}\right). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por outro lado, como aplicação da equação de Gauss (2.6) e da equação de Ricci (2.7),

$$
\begin{aligned}
&\sum_m (h^\alpha_{km}R_{mijk} + h^\alpha_{mi}R_{mkjk}) + \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\alpha_{ki}R^\perp_{\beta\alpha jk}\\
&\quad = \sum_m h^\alpha_{mk}\left(\overline{R}_{mijk} + \sum_\beta \varepsilon_\beta(h^\beta_{mj}h^\beta_{ik} - h^\beta_{mk}h^\beta_{ij})\right) + \sum_{\beta,m}\varepsilon_\beta h^\beta_{ki}\left(h^\beta_{jm}h^\alpha_{mk} - h^\beta_{mk}h^\alpha_{jm}\right)\\
&\qquad + \sum_m h^\alpha_{mi}\left(\overline{R}_{mkjk} + \sum_\beta \varepsilon_\beta(h^\beta_{mj}h^\beta_{kk} - h^\beta_{mk}h^\beta_{kj})\right) + \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\beta_{ki}\overline{R}_{\beta\alpha jk}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Logo, substituindo (2.14) e (2.15) em (2.13), concluímos que:

$$
\begin{aligned}
h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ijkk} \;=\; & h^\alpha_{ij}\left(\overline{R}_{\alpha ijk;k} + \overline{R}_{\alpha kik;j}\right) - \sum_\beta \varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}\left(-h^\beta_{kk}\overline{R}_{\alpha i\beta j} + h^\beta_{ij}\overline{R}_{\alpha k\beta k}\right)\\
&+4\sum_\beta \varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}h^\beta_{ik}\overline{R}_{\alpha\beta kj} + 2\sum_m h^\alpha_{ij}\left(h^\alpha_{km}\overline{R}_{mijk} + h^\alpha_{jm}\overline{R}_{mkik}\right)\\
&+\sum_{\alpha,\beta,i,j,p}\varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}\left(2h^\alpha_{mk}h^\beta_{mj}h^\beta_{ik} + h^\alpha_{mi}h^\beta_{kk}h^\beta_{mj} - h^\alpha_{mi}h^\beta_{kj}h^\beta_{mk} - h^\alpha_{mk}h^\beta_{ij}h^\beta_{mk} - h^\alpha_{mj}h^\beta_{ik}h^\beta_{mk}\right).
\end{aligned}
$$

Assim, ao inserirmos (2.16) em (2.12), obtemos a seguinte fórmula do tipo Calabi-Simons para Σ^n em $\overline{M}^{n+p+1}_r$:

Proposição 2.1. *Se Σ^n uma subvariedade tipo-espaço de $\overline{M}^{n+p+1}_r$ com $0 \le r \le p+1$, então*

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta S = & \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2 + \sum_{\alpha,i,j,k} h^\alpha_{ij}\left(h^\alpha_{kkij} + \overline{R}_{\alpha ijk;k} + \overline{R}_{\alpha kik;j}\right) + 2\sum_{\alpha,i,j,k,p} h^\alpha_{ij}\left(h^\alpha_{mk}\overline{R}_{mijk} + h^\alpha_{mj}\overline{R}_{mkik}\right)\\
&+\sum_{\alpha,\beta,i,j,p}\varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}\left(2h^\alpha_{mk}h^\beta_{mj}h^\beta_{ik} + h^\alpha_{mi}h^\beta_{kk}h^\beta_{mj} - h^\alpha_{mi}h^\beta_{kj}h^\beta_{mk} - h^\alpha_{mk}h^\beta_{ij}h^\beta_{mk} - h^\alpha_{mj}h^\beta_{ik}h^\beta_{mk}\right).\\
&-\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}\varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}\left(h^\beta_{kk}\overline{R}_{\alpha ij\beta} + h^\beta_{ij}\overline{R}_{\alpha k\beta k} - 4h^\beta_{ki}\overline{R}_{\alpha\beta kj}\right)
\end{aligned}
$$

Encerramos esta seção relembrando dois resultados algébricos que serão fundamentais para a demonstração de nossos próximos resultados. O primeiro é devido a (SANTOS, 1994).

Lema 2.2. *Sejam $A_1, A_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicações lineares simétricos com $[A_1, A_2] = 0$ e*

$tr(A_1) = tr(A_2) = 0$, então

$$-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|A_1|^2|A_2| \leq tr(A_1^2A_2) \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|A_1|^2|A_2|.$$

Valendo a igualdade se, e somente se, $n-1$ dos autovalores x_i de $A_1 = 0$ e correspondentes y_i dos A_2 satisfazem

$$|x_i| = \frac{|A_1|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad x_i \geq 0 \quad e \quad y_i = \frac{|A_2|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

O segundo é devido à (LI; LI, 1993).

Lema 2.3. *Sejam $A_1, \ldots, A_p$, $p \geq 2$, matrizes $n \times n$. Então*

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{p} \left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2\right) \leq \frac{3}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{p} tr(A_\alpha^2)\right)^2,$$

com $N(A) = tr(AA^t)$ para alguma matriz $A = (a_{ij})$. A igualdade ocorre se, e somente se, ocorre um dos seguintes casos:

(a) $A_1 = \cdots = A_p = 0$;

(b) se apenas duas matrizes $A_{\tilde{\alpha}}$ e $A_{\tilde{\beta}}$ são matrizes $n \times n$ não nulas. Consequentemente, neste caso, $N(A_{\tilde{\alpha}}) = N(A_{\tilde{\beta}}) = L$ e existe uma matriz diagonal T tal que

$$TA_{\tilde{\alpha}}T^t = \sqrt{\frac{L}{2}}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & -1 & \mathbf{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \end{array}\right) \quad e \quad TA_{\tilde{\beta}}T^t = \sqrt{\frac{L}{2}}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{0}} & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

2.2 Fórmula do tipo-Calabi-Simons para subvariedades em $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$

Uma vez estabelecida a fórmula do tipo Simons (Proposição 2.1), nosso objetivo agora é derivá-la para o caso de subvariedades imersas em ambientes particulares. Para isso, seja $M_q^{n+p}(c)$ uma variedade semi-Riemanniana conexa, dotada do tensor métrico $\langle\, ,\, \rangle_M$, com curvatura seccional constante $c = \pm 1$ e índice constante $0 \leq q \leq p$. Seja $\mathbb{R}_\nu$ a reta real, no caso $\nu = 0$, ou a reta de Lorentz, no caso $\nu = 1$. Com isso, definimos o espaço produto indefinido $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$ como sendo a variedade diferencial $M_q^{n+p} \times \mathbb{R}_\nu$, munida da métrica semi-Riemanniana

$$\langle\,,\rangle = \pi_M^*(\langle\,,\rangle_M) + \epsilon\pi_{\mathbb{R}}^*(dt^2). \tag{2.17}$$

Aqui t denota um parâmetro global em $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}_1$), $\pi_{\mathbb{R}}$ e π_M denotam as projeções sobre os respectivos fatores do produto e $\epsilon = -1, 1$.

Observação 2.4. *Para fixar a nossa notação, note que quando $\epsilon = 1$, devemos ter $\nu = 0$ e quando $\epsilon = -1$, temos $\nu = 1$.*

É bem conhecido que, associado com o espaço produto semi-Riemanniano, o campo de vetores

$$\partial_t := (\partial/\partial_t)\big|_{(x,t)}, \quad (x,t) \in M_q^{n+p} \times \mathbb{R}_\nu$$

é paralelo e unitário, isto é,

$$\overline{\nabla}\partial_t = 0 \quad \text{e} \quad \langle\partial_t, \partial_t\rangle = \epsilon,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita da métrica Riemanniana de $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$.

Agora consideremos Σ^n uma subvariedade tipo-espaço de $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$. Note que, ao longo de Σ^n, o campo ∂_t admite a seguinte decomposição:

$$\partial_t = \partial_t^\top + \partial_t^\perp := T + N. \tag{2.18}$$

Consequentemente, de (2.17) e (2.18), temos a relação

$$\epsilon = \langle\partial_t, \partial_t\rangle = |T|^2 + \langle N, N\rangle. \tag{2.19}$$

Neste momento, convém observar que, a depender do sinal de ϵ, o vetor N pode apresentar três possíveis *caracteres causais*: espacial, temporal ou nulo. De fato, se $\epsilon = -1$, então

$$-1 = |T|^2 + \langle N, N\rangle \geq \langle N, N\rangle, \tag{2.20}$$

o que garante que, neste caso, N é sempre temporal. Por outro lado, se $\epsilon = 1$, então

$$1 = |T|^2 + \langle N, N\rangle, \tag{2.21}$$

o que permite que N seja espacial, temporal ou nulo.

Devido à escolha do referencial pseudo-ortonormal adotado, não consideraremos, em nossos resultados, o caso em que N é do tipo luz (nulo).

Observação 2.5. *Conforme a identidade* (2.18), *observamos que, se $T = 0$, então o campo ∂_t é normal à subvariedade Σ^n, o que implica que Σ^n está contida em uma slice (folha) do tipo $M_q^{n+p}(c) \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Por outro lado, quando $N = 0$ (o que pode ocorrer no caso em que $\epsilon = 1$), o campo ∂_t é tangente a Σ^n em todos os pontos. Nesse caso, Σ^n encontra-se contida em um cilindro vertical da forma $\pi_M(M^{n-1})$, onde M^{n-1} é uma subvariedade de $M^{n+p}(c)$.*

Ademais, recordemos que o tensor de curvatura do produto $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$ satisfaz a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \overline{R}_{ABCD} &= c\varepsilon_A\varepsilon_B(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{BC}\delta_{AD}) + c\epsilon\varepsilon_D\langle e_C, \partial_t\rangle(\delta_{AD}\langle e_B, \partial_t\rangle - \delta_{BD}\langle e_A, \partial_t\rangle) \\ &\quad + c\epsilon\varepsilon_C\langle e_D, \partial_t\rangle(\delta_{BC}\langle e_A, \partial_t\rangle - \delta_{AC}\langle e_B, \partial_t\rangle). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Denotando por ∇ e $\nabla^\perp$, respectivamente, as conexões de Levi-Civita tangente e normal ao longo dos fibrados tangente e normal de Σ^n, segue de (2.18),

$$\nabla_{e_i}T = \sum_{\beta,j}\varepsilon_\beta N_\beta h_{ij}^\beta e_j \quad \text{e} \quad \nabla_{e_i}^\perp N = -\sum_{\beta,j}\varepsilon_\beta T_j h_{ij}^\beta e_\beta \tag{2.23}$$

em que $T = \sum_j T_j e_j$ e $N = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha N_\alpha e_\alpha$ com $T_j = \langle T, e_j\rangle$ e $N_\alpha = \langle N, e_\alpha\rangle$. Usando esta notação, a equação de Gauss (2.6) e a equação de Codazzi (2.10), podem ser reescritas, respectivamente,

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= c\,(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il} + \epsilon(T_j\delta_{il} - T_i\delta_{jl})T_k + \epsilon(T_i\delta_{jk} - T_j\delta_{ik})T_l) \\ &\quad + \sum_\beta \varepsilon_\beta(h_{ik}^\beta h_{jl}^\beta - h_{il}^\beta h_{jk}^\beta), \end{aligned} \tag{2.24}$$

e

$$h_{ijk}^{\alpha} - h_{ikj}^{\alpha} = c\epsilon N_{\alpha}\left(T_j\delta_{ik} - T_k\delta_{ij}\right). \tag{2.25}$$

Além disso, as componentes R_{ij} do tensor de Ricci são dadas por

$$R_{ij} = c(n-1)(1-\epsilon|T|^2)\delta_{ij} + \sum_{k,\beta}\varepsilon_\beta(h_{ij}^{\beta}h_{kk}^{\beta} - h_{ik}^{\beta}h_{kj}^{\beta}). \tag{2.26}$$

Como aplicação das equações anteriores, obtemos a seguinte fórmula do tipo Calabi-Simons, válida para subvariedades tipo-espaço em $M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu$, a qual é derivada diretamente da Proposição 2.1:

Teorema 2.6. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial de $M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu$ com índice $0\le q+\nu\le p+1$. Então, vale que*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S = &\sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^{\alpha})^2 + \sum_{\alpha,i,j,k}h_{ij}^{\alpha}h_{kkij}^{\alpha} + c(n-\epsilon|T|^2)S - 2nc\epsilon\sum_{\alpha}|A_\alpha(T)|^2 - cn^2H^2\\ &+ 3c\epsilon\sum_{\alpha}tr(A_\alpha)\langle A_\alpha(T),T\rangle - cn\epsilon\langle N,h\rangle\sum_{\alpha,i}h_{ii}^{\alpha}N_\alpha + cn\epsilon\sum_{\alpha,\beta,i,j}\varepsilon_\beta h_{ij}^{\alpha}h_{ij}^{\beta}N_\alpha N_\beta\\ &+ \sum_{\alpha,\beta}\varepsilon_\beta tr(A_\beta)tr(A_\alpha^2A_\beta) - \Gamma_A,\end{aligned}$$

onde

$$\Gamma_A = \sum_{\alpha,\beta}\varepsilon_\beta\left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2\right). \tag{2.27}$$

Demonstração: Primeiramente, como $M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu$ é uma variedade localmente simétrica, de (2.22) tem-se

$$\overline{R}_{\alpha ikj;k} = \overline{R}_{\alpha kki;j} = \overline{R}_{\alpha\beta kj} = 0, \quad \text{for all} \quad \alpha,\beta,j,k. \tag{2.28}$$

Usando a equação de Gauss (2.24), um cálculo direto mostra que

$$\begin{aligned}2\sum_{\alpha,i,j,k,p}h_{ij}^{\alpha}\left(h_{mk}^{\alpha}\overline{R}_{pijk} + h_{mj}^{\alpha}\overline{R}_{mkik}\right) = &\ 2c(n-\epsilon|T|^2)S - 2cn\epsilon\sum_{\alpha}|A_\alpha(T)|^2\\ &- 2cn^2H^2 - 4c\epsilon\sum_{\alpha}tr(A_\alpha)\langle A_\alpha(T),T\rangle\end{aligned} \tag{2.29}$$

Por outro lado, de (2.22), é fácil ver que

$$\overline{R}_{\alpha i\beta j} = c\epsilon\varepsilon_\alpha\left(\epsilon\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \varepsilon_\alpha N_\alpha N_\beta\delta_{ij} - T_iT_j\delta_{\alpha\beta}\right),$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta,i,j,k}\varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}(h^\beta_{kk}\overline{R}_{\alpha ij\beta} - h^\beta_{ij}\overline{R}_{\alpha k\beta k}) = c(n-\epsilon|T|^2)S - c\epsilon\sum_\alpha tr(A_\alpha)\langle A_\alpha(T),T\rangle - cn^2H^2\\ - n\epsilon\langle N,h\rangle\sum_{\alpha,i}h^\alpha_{ii}N_\alpha + cn\epsilon\sum_{\alpha,\beta,i,j}\varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}N_\alpha N_\beta.\end{aligned} \tag{2.30}$$

Por fim, aplicando algumas manipulações matriciais, de (2.4), vemos que

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha,\beta,i,j,p}\varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}\left(2h^\alpha_{mk}h^\beta_{mj}h^\beta_{ik} - h^\alpha_{im}h^\beta_{kj}h^\beta_{mk} - h^\alpha_{mk}h^\beta_{ij}h^\beta_{mk} - h^\alpha_{mj}h^\beta_{ik}h^\beta_{mk}\right)\\ = \sum_{\alpha,\beta}\varepsilon_\beta tr(A_\beta)tr(A^2_\alpha A_\beta) - \Gamma_A,\end{aligned} \tag{2.31}$$

onde Γ_A está definido em (2.27).

Portanto, inserindo (2.28), (2.29), (2.30) e (2.31) na Proposição 2.1, obtemos o Teorema 2.6. ■

Para o estudo de subvariedades com vetor curvatura média paralelo (*pmc*), faz-se necessário o uso do seguinte tensor simétrico:

$$\phi = \sum_{\alpha,i,j}\phi^\alpha_{ij}\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha \quad \text{com} \quad \phi^\alpha_{ij} = h^\alpha_{ij} - \frac{1}{n}tr(A_\alpha)\delta_{ij}. \tag{2.32}$$

Observe que $tr(\phi_\alpha) = 0$, e que vale a seguinte identidade

$$|\phi|^2 = S - nH^2 \geq 0,$$

com igualdade se e somente se Σ^n é totalmente umbílica. Usando (2.5) definimos

$$|\phi_1|^2 = \sum_{\gamma,i,j}(\phi^\gamma_{ij})^2 = S_1 - nH^2_\gamma \quad \text{e} \quad |\phi_2|^2 = \sum_{\eta,i,j}(\phi^\eta_{ij})^2 = S_2 - nH^2_\eta, \tag{2.33}$$

com $|\phi|^2 = |\phi_1|^2 + |\phi_2|^2$, onde

$$H_\gamma^2 = \sum_\gamma tr(A_\gamma)^2 \quad \text{e} \quad H_\eta^2 = \sum_\eta tr(A_\eta)^2.$$

Usando esta notação, temos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} c(n-\varepsilon|T|^2)S - 2cn\varepsilon\sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 + 3c\varepsilon\sum_\alpha tr(A_\alpha)\langle A_\alpha(T),T\rangle - cn^2H^2 \\ = c(n-\varepsilon|T|^2)|\phi|^2 - 2cn\varepsilon\sum_\alpha|\phi_\alpha(T)|^2 \\ - c\varepsilon\sum_\alpha tr(A_\alpha)\langle\phi_\alpha(T),T\rangle \end{aligned} \tag{2.34}$$

e

$$cn\varepsilon\sum_{\alpha,\beta,i,j}\varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta - cn\varepsilon\langle N,h\rangle\sum_{\alpha,i}h_{ii}^\alpha N_\alpha = cn\varepsilon\sum_{\alpha,\beta,i,j}\varepsilon_\beta\phi_{ij}^\alpha\phi_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta. \tag{2.35}$$

Além disso, um cálculo direto mostra que

$$\Gamma_A = \Gamma_\phi - n|\phi|^2\sum_\beta\varepsilon_\beta\langle h,e_\beta\rangle^2, \tag{2.36}$$

onde

$$\Gamma_\phi = \sum_{\alpha,\beta}\varepsilon_\beta\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\mathrm{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right). \tag{2.37}$$

Assim, substituindo (2.34), (2.35) e (2.36) em (2.6), obtemos:

Corolário 2.7. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial de $M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu$ com $q \le p$. Então, vale que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 = \sum_{\alpha,i,j,k}(h_{ijk}^\alpha)^2 + \sum_{\alpha,i,j,k}h_{ij}^\alpha h_{kkij}^\alpha - 2cn\varepsilon\sum_\alpha|\phi_\alpha(T)|^2 - c\varepsilon\sum_\alpha\mathrm{tr}(A_\alpha)\langle\phi_\alpha(T),T\rangle \\ + cn\varepsilon\sum_{\alpha,\beta,i,j}\varepsilon_\beta\phi_{ij}^\alpha\phi_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta + c(n-\varepsilon|T|^2)|\phi|^2 + n|\phi|^2\sum_\beta\varepsilon_\beta\langle h,e_\beta\rangle^2 \\ + \sum_\alpha\varepsilon_\beta\mathrm{tr}(A_\beta)\mathrm{tr}(\phi_\alpha^2\phi_\beta) - \Gamma_\phi, \end{aligned}$$

onde Γ_ϕ está definido em (2.37).

3 ALGUNS RESULTADOS AUXILIARES

Neste capítulo, apresentamos resultados de grande importância para o desenvolvimento deste trabalho. Entre eles, destacam-se o resultado de redução de codimensão para subvariedades estacionárias e princípios do máximo aplicados ao operador laplaciano. Concluímos com a exposição de teoremas clássicos voltados à caracterização de hipersuperfícies Riemannianas.

3.1 Lemas algébricos

A seguir, apresentamos dois resultados algébricos que serão importantes para a obtenção dos resultados principais. O primeiro trata de uma estimativa para os autovalores de um operador simétrico.

Lema 3.1. *Seja Σ^n, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana produto e considere $\Psi : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ um operador linear simétrico sem traço em Σ^n.*

(a) Se μ_i são os autovalores de Ψ, então

$$|\mu_i| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Psi|, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Em particular, a igualdade vale para algum $i = 1, \ldots, n$ se e só se $\mu_j = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\Psi|$, para todo $j \neq i$. Em particular, a igualdade sempre ocorre para $n = 2$.

(b) Se Σ^n é uma hipersuperfície $M^n(c) \times \mathbb{R}$, então

$$|\langle \Psi(T), T \rangle| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Psi||T|^2. \tag{3.1}$$

Além disso, a igualdade é válida se e somente se Ψ é nulo ou, Σ^n está contido em um slice ou T é uma direção principal com autovalor associado $\mu = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Psi|$.

Demonstração: Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal (local) em Σ^n tal que $\Psi(e_i) = \mu_i e_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Fixamos um índice i. Levando em conta que Ψ é sem traço, temos que

$$0 = \sum_j \mu_j = \sum_{j \neq i} \mu_j + \mu_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i \neq j} \mu_j = -\mu_i.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\mu_i^2 = \left(\sum_{j \neq i} \mu_j \right)^2 \leq (n-1) \sum_{j \neq i} \mu_j^2 = (n-1)|\Psi|^2 - (n-1)\mu_i^2. \tag{3.2}$$

Consequentemente,

$$(n-1)|\Psi|^2 \geq n\mu_i^2, \tag{3.3}$$

isso é $|\mu_i| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Psi|$. Em particular, a igualdade ocorre em (3.3) se e somente se a igualdade ocorre em (3.2),o que significa que $\mu_j = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\Psi|$ para todo $j \neq i$.

Agora vamos provar (b). Primeiramente escrevemos $T = \sum_i a_i e_i$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é o mesmo referencial ortonormal tal que $\Psi(e_i) = \mu_i e_i$. Então,

$$\Psi(T) = \sum_i a_i \Psi(e_i) = \sum_i a_i \mu_i e_i,$$

e consequentemente de (a) segue,

$$|\langle \Psi(T), T \rangle| = \left| \sum_i a_i^2 \mu_i \right| \leq \sum_i a_i^2 |\mu_i| \leq \sqrt{\frac{n-1}{n}} |\Psi||T|^2.$$

Se a igualdade ocorre, então temos os seguintes casos: ou $\mu_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e $\Psi = 0$, ou $a_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e Σ^n está contido em um slice de $M^n(c) \times \mathbb{R}$, ou $a_i = 0$ para $n-1$ termos, o que implica que T é uma direção principal de Ψ, e portanto, de (a), $\Psi(T) = \mu T$ com $\mu = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\Psi|$. ∎

Como estamos lidando com subvariedades imersas em um espaço produto com métrica indefinida, alguns termos presentes na fórmula do tipo-Simons da Teorema 2.6 exigem uma atenção especial para serem devidamente analisados. Nesse contexto, temos:

Lema 3.2. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial de $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$ com $q + \nu \leq p + 1$ e*

$\nu = 0, 1$. *Então,*

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta = \delta |A_N|^2, \tag{3.4}$$

onde

$$\delta = \begin{cases} 1, & se \quad N \text{ é espacial;} \\ \\ -1, & se \quad N \text{ é temporal,} \end{cases}$$

com A_N definido por:

$$|A_N|^2 = \sum_{i,j} (h_{ij}^N)^2, \qquad h_{ij}^N = \langle A(e_i, e_j), N \rangle.$$

Demonstração: Consideremos o caso em que N é temporal. Escolhendo um referencial ortonormal $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+p+1}\}$ em $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ tal que e_{n+p+1} está na mesma direção de N, para que $N = |N| e_{n+p+1}$; assim temos

$$N_{n+p+1} = -|N| \quad \text{e} \quad N_\alpha = \langle N, e_\alpha \rangle = 0, \qquad \alpha = n+1, \ldots, n+p. \tag{3.5}$$

Com isso, um cálculo direto fornece que

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta &= \sum_{\alpha,\gamma,i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\gamma N_\alpha N_\gamma - \sum_{\alpha,\eta,i,j} h_{ij}^\alpha h_{ij}^\eta N_\alpha N_\eta \\ &= \sum_{\gamma,\gamma',i,j} h_{ij}^{\gamma'} h_{ij}^\gamma N_{\gamma'} N_\gamma + \sum_{\gamma,\eta,i,j} h_{ij}^\eta h_{ij}^\gamma N_\eta N_\gamma \\ &\quad - \sum_{\gamma,\eta,i,j} h_{ij}^\gamma h_{ij}^\eta N_\gamma N_\eta - \sum_{\eta',\eta,i,j} h_{ij}^{\eta'} h_{ij}^\eta N_{\eta'} N_\eta \\ &= -\sum_{i,j} (h_{ij}^{n+p+1})^2 N_{n+p+1}^2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A_N(e_i) &= \sum_j \langle A_N(e_i), e_j \rangle e_j = \sum_{\alpha,j} N_\alpha \langle A_\alpha(e_i), e_j \rangle e_j \\ &= \sum_j N_{n+p+1} \langle A_{n+p+1}(e_i), e_j \rangle e_j = \sum_j N_{n+p+1} h_{ij}^{n+p+1} e_j \end{aligned}$$

e assim

$$|A_N|^2 = \sum_{i,j} N_{n+p+1}^2 (h_{ij}^{n+p+1})^2. \tag{3.7}$$

Portanto, de (3.6) e (3.7),

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta = -|A_N|^2.$$

Para o caso em que N é espacial, escolhemos $e_{n+1} = N/|N|$. E, similarmente

$$N_{n+1} = |N| \quad \text{e} \quad N_\alpha = 0, \qquad \alpha = n+2, \ldots, n+p+1.$$

E usando um raciocínio semelhante, segue que

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta = |A_N|^2,$$

O que conclui a prova. ■

3.2 Resultados de caracterização para hipersuperfícies Riemannianas

Seja $\mathbb{R}^{n+p}$, com $n \geq 2$ e $p \geq 1$, o espaço Euclidiano de dimensão $(n+p)$, munido com a métrica canônica. Consideremos $\mathbb{Q}^{n+p}(c)$ como sendo a variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa e de curvatura seccional constante c. A esta variedade $\mathbb{Q}^{n+p}(c)$, damos o nome de *forma espacial Riemanniana.*

De acordo com o sinal de c, podemos caracterizar a forma de $\mathbb{Q}^{n+p}$ (cf. por exemplo, o Teorema 4.1 de (DO CARMO, 2008)) da seguinte maneira:

(a) o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+p}$ se $c = 0$;

(b) a esfera Euclidiana $\mathbb{S}^{n+p}(c)$ se $c > 0$;

(c) o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+p}(c)$ se $c < 0$.

Levando em conta o Teorema 4 de (ABE; KOIKE; YAMAGUCHI, 1987) (veja também os clássicos resultados sobre hipersuperfícies isoparamétricas em uma forma espacial de

Cartan (CARTAN, 1938), Levi-Civita (LEVI-CIVITA, 1937) e Segre (SEGRE, 1938)), enunciamos o seguinte resultado de classificação:

Teorema 3.3. *Seja Σ^n uma hipersuperfície Riemanniana imersa em uma forma espacial Riemanniana $\mathbb{Q}^{n+p}(c)$ de curvatura seccional constante c. Suponha que Σ^n admite no máximo duas curvaturas principais distintas e constantes. Então, a menos de isometrias, Σ^n é uma subvariedade aberta de uma das seguintes formas:*

(i) $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{R}^{n-k}$, *onde* $c_1 > 0$, *quando* $c = 0$;

(ii) $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{S}^{n-k}(c_2)$, *onde* $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *e* $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c}$, *quando* $c > 0$;

(iii) $\mathbb{S}^k(c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(c_2)$, *onde* $c_1 > 0$, $c_2 < 0$ *e* $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c}$, *quando* $c < 0$;

onde $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

O próximo resultado de caracterização, devido a (LI; LI, 1993), estabelece uma desigualdade integral para subvariedades fechadas e mínimas na esfera. A ocorrência da igualdade implica que a subvariedade é, necessariamente, totalmente geodésica ou coincide, a menos de isometria, com a superfície de Veronese — uma imersão mínima da esfera $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ em $\mathbb{S}^4(1)$.

Teorema 3.4. *Seja Σ^n uma subvariedade mínima compacta de dimensão n imersa na esfera unitária $\mathbb{S}^{n+p}$, com $p \geq 2$. Então,*

$$\int_\Sigma S\left(\frac{2n}{3} - S\right) dM \leq 0.$$

Em particular, se a igualdade ocorre, então Σ^n é ou uma subvariedade totalmente geodésica, ou uma superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4$.

No que tange a imersões em espaços produtos, destacamos alguns resultados de caracterização, o primeiro deles caracteriza hipersuperfícies totalmente geodésicas em $\mathbb{Q}^n(c)\times\mathbb{R}$ devido à (VAN DER VEKEN; VRANCKEN, 2008; VAN DER VEKEN; CALVARUSO; KOWALCZYK, 2010)

Teorema 3.5. *Seja Σ^n uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathbb{Q}^n(c) \times \mathbb{R}$. Então, Σ^n é uma parte aberta de uma hipersuperfície do tipo $\mathbb{Q}^n(c) \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, ou de uma hipersuperfície $\mathbb{Q}^{n-1}(c) \times \mathbb{R}$.*

O último resultado de caracterização diz respeito a imersões rotacionais em $\mathbb{Q}^n(c)\times\mathbb{R}$ e é devido à (VAN DER VEKEN; DILLEN; FASTENAKELS, 2009):

Teorema 3.6. *Considere $n \geq 3$ e seja $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{Q}^n(c)\times\mathbb{R}$, com $c=-1$ ou $c=1$, uma hipersuperfície cujo operador de forma é dado por:*

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & & \mathbf{0} & \\ \hline & \mu & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & \mu \end{array}\right),$$

onde $\lambda \neq \mu$. Suponha que $A(T)=\lambda T$ para algum vetor T e que existe uma relação funcional $\lambda=\lambda(\mu)$. Então, Σ^n é uma parte aberta de uma hipersuperfície de rotação.

3.3 Resultado de redução de codimensão

Em virtude da complexidade envolvida no estudo de subvariedades com codimensão superior a um, apresentamos a seguir um resultado de redução de codimensão aplicável a subvariedades imersas em espaços produto. Iniciaremos com a seguinte definição:

Definição 3.7. *Dizemos que uma subvariedade espacial Σ^n do espaço produto $M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu$, de dimensão $(n+p+1)$ e índice $q+\nu \leq p+1$, admite redução de codimensão para l se Σ^n está contida em uma subvariedade totalmente geodésica do tipo $M_r^{n+l-1}(c)\times\mathbb{R}_\nu$, contida em $M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu$, com índice satisfazendo $r+\nu \leq n+l$. Em outras palavras,*

$$\Sigma^n \hookrightarrow_{\textit{subvariedade}} M_r^{n+l-1}(c)\times\mathbb{R}_\nu \hookrightarrow_{\textit{totalmente geodésica}} M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu.$$

No estudo de resultados de *redução de codimensão*, o primeiro subespaço normal desempenha um papel essencial. Recordemos que o *primeiro subespaço normal* de Σ^n em um ponto $x\in\Sigma^n$ é definido como o subespaço do espaço normal $T_x\Sigma^\perp$ gerado pelos valores da segunda forma fundamental A no ponto x, ou seja (DAJCZER, 1990):

$$N_1(x) = \operatorname{span}\left\{A(X,Y) \mid X,Y \in T_x\Sigma\right\}.$$

Um outro conceito que será providencial para o nosso estudo é a definição de *subespaço* *normal paralelo.* Antes de apresentar esta definição, introduziremos algumas notações úteis. Seja L um subespaço de $T\Sigma^{\perp}$. O conjunto $\nabla^{\perp}L$ é definido como o conjunto das derivadas covariantes normais dos vetores normais pertencentes ao subespaço L, isto é,

$$\nabla^{\perp}L = \left\{\nabla^{\perp}_{X}\xi \mid \xi \in L \quad \text{e} \quad X \in T\Sigma\right\}.$$

Nesta configuração, dizemos que L é um *subespaço normal paralelo* se a sua derivada covariante normal for identicamente nula em todas as direções tangentes da variedade Σ^n, ou seja:

$$\nabla^{\perp}_{X}\xi = 0, \quad \text{para todos} \quad X \in T\Sigma \quad \text{e} \quad \xi \in L.$$

Geometricamente, isso significa que os vetores normais em L não variam ao longo de direções tangentes em Σ^n, ou seja, eles permanecem paralelos uns aos outros quando transportados ao longo de curvas em Σ^n.

A partir das ferramentas acima, estamos prontos para apresentar nosso resultado de redução de codimensão.

Proposição 3.8. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial de $M_q^{n+p}(c)\times\mathbb{R}_\nu$ com índice $q+\nu \leq p+1$ e $\nu = 0, 1$. Então, a função real Γ_A definida em (2.27) satisfaz,*

$$\Gamma_A \leq aS^2 \quad \textit{onde} \quad a = \begin{cases} 1, & \textit{quando} \quad p-q=\nu, \\ \dfrac{3}{2}, & \textit{quando} \quad p-q>1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Além disso, se ocorre a igualdade, então necessariamente $S = 0$ ou $S_2 = 0$. Em particular, suponha que $L = N_1 + \mathrm{span}\{N\}$ seja um subespaço de $T\Sigma^{\perp}$, de posto $l \leq p+1$ e índice $i \leq l$, e que $\nabla^{\perp}N_1 \subset L$. Nessas condições, a codimensão de Σ^n pode ser reduzida para l.

Demonstração: Inicialmente mostremos o primeiro item. Para isso, considerando que $p = q+\nu$, de (2.5), escrevendo (2.27) como segue

$$\begin{aligned}\Gamma_A &= [tr(A_{n+1}^2)]^2 - \sum_{\alpha,\beta\geq n+2}\left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2\right)\\ &= S_1^2 - \sum_{\alpha,\beta\geq n+2}\left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2\right).\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\sum_{\alpha,\beta} N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) \geq 0, \tag{3.9}$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha$, segue de (2.5) que

$$\Gamma_A \leq S_1^2 - \sum_{\alpha\geq n+2} [tr(A_\alpha^2)]^2 = (S - S_2)^2 - \sum_{\alpha\geq n+2} [tr(A_\alpha^2)]^2 \leq S^2,$$

onde a igualdade é válida se, e somente se, $S_2 = 0$. Agora consideremos o caso em que $p - q > 1$. Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \Gamma_A = & \sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p-q-\nu+1} \left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2\right) \\ & - \sum_{\alpha,\beta=n+p-q-\nu+2}^{n+p+1} \left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2\right). \end{aligned} \tag{3.10}$$

Aplicando o Lema 2.3 chegamos à

$$\sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p-\nu-q+1} \left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2\right) \leq \frac{3}{2}(S - S_2)^2. \tag{3.11}$$

Portanto, inserindo (3.9) e (3.11) em (3.10) concluímos

$$\Gamma_A \leq \frac{3}{2}(S - S_2)^2 - \sum_{\alpha=n+p-q+2}^{n+p+1} [\mathrm{tr}(A_\alpha^2)]^2 \leq \frac{3}{2} S^2,$$

Assim como no primeiro caso, a igualdade ocorre se, e somente se, $S_2 = 0$. Isso mostra a parte da desigualdade.

Passemos agora à análise do caso de igualdade em (4.35). Se essa igualdade ocorre, então ou $S = 0$, e Σ^n é totalmente geodésica, ou $S_2 = 0$. Note que, se $S = 0$, então o primeiro subespaço normal N_1 é trivial, ou seja, $N_1 = \{0\}$, e portanto $\dim(N_1) = 0$. Agora, suponha que $S \neq 0$. Então, necessariamente, $S_2 = 0$. A condição $S_2 = 0$ implica que $A_\xi = 0$ para todas as direções temporais $\xi \in T\Sigma^\perp$. No caso em que $p = q + \nu$, temos que $N_1(x) = \mathrm{span}\{e_{n+1}\}$ e, consequentemente, $\dim(N_1) = 1$. Por outro lado, se $p - q > 1$, a igualdade (4.35) implica a validade da igualdade (3.11), que por sua vez leva à igualdade no Lema 2.3. Esta, por sua vez, garante que existam apenas duas direções normais (reordenando os vetores, se necessário), e_{n+1} e e_{n+2}, tais que $A_{n+1} \neq 0$ e $A_{n+2} \neq 0$. Assim, nesse caso, $N_1(x) = \text{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$ e, portanto, $\dim(N_1) = 2$.

Logo, podemos assumir que $\dim(N_1) = t$, onde t é um número inteiro tal que $t \in \{0, 1, 2\}$. Deve-se notar que, em todos os casos, o subespaço N_1 possui índice zero. Nesse contexto, o subespaço L de $T\Sigma^\perp$ tem dimensão $l \leq t + 1$ e índice ν. Assumindo que $\nabla^\perp N_1 \subset L$, segue que L é um subespaço paralelo. Seja $L^\perp$ o complemento ortogonal de L em $T\Sigma^\perp$, isto é,

$$T\Sigma^\perp = L \oplus L^\perp.$$

Afirmação 3.9. *Uma vez que L é paralelo, $L^\perp$ também é paralelo em $T\Sigma^\perp$.*

Antes de demonstrar esta afirmação, fixamos algumas notações. Primeiro, consideramos as seguintes imersões:

$$\Sigma^n \hookrightarrow M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu \hookrightarrow \mathbb{R}_b^{n+p+2},$$

onde $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$ denota o espaço semi-Euclidiano de dimensão $n + p + 2$ e índice b, com

$$b = \begin{cases} q + \nu, & \text{se } c \geq 0, \\ \\ q + \nu + 1, & \text{se } c < 0. \end{cases}$$

Note que, como $L^\perp = (N_1 + \text{span}\{N\})^\perp = N_1^\perp \cap \{N\}^\perp$, tomemos $\eta \in L^\perp$. Denotando por $\widetilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita de $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$, temos, para todo $X \in T\Sigma$:

$$\widetilde{\nabla}_X^\perp \eta = \nabla_X^\perp \eta - \varepsilon_\eta \varepsilon_{\partial_t} \langle X, T \rangle \langle \eta, N \rangle = \nabla_X^\perp \eta \in L^\perp.$$

Assim, $L^\perp$ é um subfibrado paralelo de $\widetilde{T\Sigma}^\perp$, onde $\widetilde{T\Sigma}^\perp$ denota o fibrado normal de Σ^n em $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$.

Agora, considere

$$\widetilde{N}_1 = \text{span}\{\widetilde{A}(X, Y);\ X, Y \in T\Sigma\},$$

o primeiro subespaço normal de Σ^n em $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$. Devemos ter que $L^\perp \subset \widetilde{N}_1$. De fato, seja $\eta \in L^\perp$. Como $\eta \in N_1^\perp \cap \{N\}^\perp$, segue que $A_\eta = 0$. Portanto, $\tilde{A}_\eta = 0$, onde $\tilde{A}_\eta$ denota o operador de forma de Σ^n associado à direção η e à segunda forma fundamental de Σ^n em $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$. Logo,

$$\langle \widetilde{A}(X,Y), \eta \rangle = \langle \tilde{A}_\eta(X), Y \rangle = 0,$$

para todos $X, Y \in T\Sigma$. Assim,

$$\eta \in \Big(\text{span}\{\widetilde{A}(X,Y); X, Y \in T\Sigma\} \Big)^\perp = \widetilde{N}_1^\perp,$$

o que mostra a afirmativa.

Aplicando agora a fórmula de Weingarten, temos:

$$\widetilde{\nabla}_X \eta = -\tilde{A}_\eta(X) + \widetilde{\nabla}_X^\perp \eta = \widetilde{\nabla}_X^\perp \eta \in L^\perp,$$

uma vez que $L^\perp$ é um subfibrado paralelo de $\widetilde{T\Sigma}^\perp$.

Em particular, $L^\perp$ é um subfibrado paralelo em $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$. Pode-se também verificar que $L^\perp$ é um subespaço linear de dimensão $(p - l + 1)$ e índice q em $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$.

Para concluir, seja K o complemento ortogonal de $L^\perp$ em $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$. Então, K é também um subespaço linear de $\mathbb{R}_b^{n+p+2}$, com dimensão $n + l + 1$ e índice $b - q$. Portanto,

$$\Sigma^n \subset \big(M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu \big) \cap K = M_r^{n+l-1}(c) \times \mathbb{R}_\nu.$$

■

No caso específico em que Σ^n é uma subvariedade paralela de $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$, decorre imediatamente o seguinte resultado:

Corolário 3.10. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial paralela não totalmente geodésica de $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$ e assuma que a igualdade ocorra na Proposição 3.8. Se ocorrer uma das duas situações*

(a) N é temporal;

(b) $T = 0$ e N é espacial,

então Σ^n é uma subvariedade espacial de $M_r^{n+l-1}(c) \times \mathbb{R}_\nu$ com $l \in \{1, 2, 3\}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$.

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que a soma $L = N_1 + \text{span}\{N\}$ é, na verdade, uma soma direta. De fato, suponha que $\xi \in N_1 \cap \text{span}\{N\}$. Então, existem funções reais f e g tais que $\xi = fA(e_i, e_j)$, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, e também $\xi = gN$. Como ocorre a igualdade na Proposição 3.8, temos que, se $S \neq 0$, então $S_2 = 0$, o que garante que N_1 é um subespaço espacial. Assim, se N é uma direção temporal, então $\xi = 0$ e, portanto, $N_1 \cap \text{span}\{N\} = \{0\}$, o que demonstra o item (a).

Para o item (b), suponha que N seja uma direção espacial e que $T = 0$. Então, para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, um cálculo direto a partir de (2.23) mostra que

$$\sum_{\beta} \varepsilon_\beta h^\beta_{ij} N_\beta = 0, \quad \text{para todo } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Assim,

$$\langle \xi, \xi \rangle = fg\langle A(e_i, e_j), N \rangle = fg \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta h^\alpha_{ij} N_\beta \varepsilon_\beta \delta_{\alpha\beta} = \sum_{\beta} \varepsilon_\beta h^\beta_{ij} N_\beta = 0.$$

Portanto, $\xi = 0$ e, consequentemente, $N_1 \cap \text{span}\{N\} = \{0\}$, o que prova que $L = N_1 \oplus \text{span}\{N\}$.

Por outro lado, como a segunda forma fundamental A é paralela, da teoria tensorial clássica, temos:

$$\nabla^\perp A(e_i, e_j, e_k) = \nabla^\perp_{e_k} A(e_i, e_j) = 0,$$

para todos i, j, k. Portanto, pela linearidade, segue que o primeiro subespaço normal de Σ^n é paralelo. Em particular, $\nabla^\perp N_1 \subset L$. Assim, pela Proposição 3.8, concluímos que Σ^n é uma subvariedade de $M^{n+l-1}_r(c) \times \mathbb{R}_\nu$ com $l \in \{1, 2, 3\}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$. ■

3.4 Princípios do máximo do tipo Omori-Yau

No contexto da geometria diferencial, é amplamente conhecido que muitas das técnicas empregadas para a obtenção de resultados em variedades Riemannianas compactas não podem ser diretamente estendidas ao caso de variedades completas e não compactas. Uma das principais dificuldades reside no fato de que, nesse cenário, não se pode assegurar a existência de pontos elípticos, os quais frequentemente desempenham um papel central em argumentos de máxima ou mínima. Diante dessa limitação, ferramentas do tipo Omori-Yau surgem como estratégias eficazes, oferecendo uma abordagem alternativa viável para a condução das demonstrações e para a obtenção de resultados significativos nesse contexto mais geral.

De acordo com (ALÍAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016), dizemos que em uma variedade Riemanniana Σ^m vale o *Princípio do Máximo de Omori-Yau* se, para qualquer função $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ com $u^* = \sup_\Sigma u < +\infty$, existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^m$ (denominada sequência *maximizante*) com as seguintes propriedades:

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad \Delta u(p_k) < \frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Equivalentemente, para qualquer função $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ com $u_* = \inf_\Sigma u > -\infty$, existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^m$ (denominada sequência *minimizante*) com as seguintes propriedades:

$$u(p_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad \Delta u(p_k) > -\frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. O teorema clássico de (OMORI, 1967; YAU, 1974) garante a validade do princípio do máximo de Omori-Yau em qualquer variedade Riemanniana completa cuja curvatura de Ricci seja limitada inferiormente.

Apresentaremos a seguir duas aplicações do princípio do máximo de Omori-Yau para o operador Laplaciano, formuladas de maneira a serem particularmente úteis para os propósitos deste trabalho.

Antes de apresentá-las, relembremos que, se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave e $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$, então as derivadas da função $g = \varphi \circ u$ são dadas por:

$$\nabla g = \varphi'(u)\nabla u \quad \text{e} \quad \operatorname{Hess} g = \varphi'(u) \operatorname{Hess} u + \varphi''(u)\, \nabla u \otimes \nabla u.$$

Consequentemente,

$$\Delta g = \varphi'(u)\Delta u + \varphi''(u)|\nabla u|^2 = \varphi'(u)\Delta u + \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)^2}|\nabla g|^2. \tag{3.12}$$

Agora, se escolhermos φ como a função estritamente decrescente

$$\varphi(t) = \frac{1}{(1+t)^{\alpha}}, \quad \text{com } \alpha > 0, \tag{3.13}$$

temos que suas derivadas são dadas por

$$\varphi'(t) = -\frac{\alpha}{(1+t)^{\alpha+1}} = -\alpha\,\varphi(t)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}, \quad \text{e} \quad \frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)^2} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\frac{1}{\varphi(t)}. \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) em (3.12), obtemos

$$\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)|\nabla g|^2 - \varphi(u)\Delta g = \alpha\,\varphi(u)^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}\Delta u.$$

Em termos de g, temos

$$\alpha\, g^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}}\Delta u = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)|\nabla g|^2 - g\,\Delta g. \tag{3.15}$$

Como aplicação do princípio do máximo de Omori-Yau, aliada à digressão acima, obtemos o seguinte caso particular do Teorema 1.1 de (SUNG, 2010).

Teorema 3.11. *Suponha que, em $(\Sigma^n, \langle\, ,\, \rangle)$, vale o princípio do máximo de Omori-Yau para o operador Laplaciano. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ uma função limitada inferiormente que satisfaz a desigualdade diferencial*

$$\Delta u \geq f(u),$$

onde $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. Se

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{\nu}} > 0,$$

para algum $\nu > 1$, então u é limitada. Além disso, temos $f(u^*) \leq 0$ nesse caso.

Demonstração: Seja $\alpha = \frac{\beta-1}{2} > 0$, onde $\beta > 1$. Sendo u é limitada inferiormente, segue que a $1+u > 0$. Observando que

$$g = \varphi(u) = (1+u)^{-\alpha},$$

segue de (3.12) e da identidade (3.15) que

$$\frac{\alpha f(u)}{(1+u)^{\beta}} \leq -g\Delta g + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)|\nabla g|^2. \tag{3.16}$$

Novamente usando que u é limitada inferiormente, segue da definição de (3.13) que g também é limitada inferiormente. Uma vez que estamos supondo que o princípio do máximo de Omori-Yau vale em Σ^n, existe uma sequência $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ tal que:

$$g(p_k) < g_* + \frac{1}{k}, \quad |\nabla g(p_k)| < \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad \Delta g(p_k) > -\frac{1}{k}. \tag{3.17}$$

Substituindo na desigualdade (3.16), obtemos:

$$\frac{\alpha f(u(p_k))}{(1+u(p_k))^{\beta}} \leq \frac{1}{k}\left(g_* + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right). \tag{3.18}$$

Por outro lado, observemos que a hipótese $\liminf_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^{\nu}} > 0$ para algum $\nu > 1$, garante que a função u é limitada superiormente. De fato, suponhamos, por contradição, que $u^* = \infty$. Então, para $\beta < \nu$, temos que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(u(p_k))}{(1+u(p_k))^{\beta}} = +\infty,$$

enquanto

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\frac{1}{k}\left(g_* + \frac{1}{k}\right) + \frac{1}{k}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\right] = 0,$$

chegando a uma contradição. Portanto, $u^* < +\infty$.

Assim, fazendo $k \to \infty$ na desigualdade (3.18), obtemos:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(u(p_k))}{(1+u(p_k))^{\beta}} \leq 0,$$

e portanto,

$$\lim_{k\to\infty} f(u(p_k)) \leq 0.$$

Como φ é estritamente decrescente e $\lim_{k\to\infty} g(p_k) = g_*$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = u^*.$$

Logo, pela continuidade de f, temos $f(u^*) \leq 0$. ■

Em particular, se f é não negativa, a seguinte consequência é imediata:

Corolário 3.12. *Nas condições do Teorema 3.11, se $f(u)$ é não negativa, então $f(u^*) = 0$.*

Agora, considerando funções da forma $f(t) = at$, onde a é uma constante positiva, e assumindo que $0 \leq u \leq u^* < +\infty$, temos o seguinte resultado do tipo Liouville (cf. (SUH, 1994)).

Teorema 3.13. *Suponha que, em $(\Sigma^n, \langle\, ,\rangle)$, o princípio do máximo de Omori-Yau para o operador Laplaciano seja válido. Seja $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ uma solução não negativa e limitada superiormente da desigualdade diferencial*

$$\Delta u \geq au, \tag{3.19}$$

com $a > 0$. Então $u \equiv 0$.

Demonstração: Fazendo $\alpha = \frac{1}{2}$ na identidade (3.15), temos:

$$g^4 \Delta u = 6|\nabla g|^2 - 2g\Delta g. \tag{3.20}$$

Sendo u é limitada superiormente, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1+A}} \leq g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+u(x)}} \leq 1,$$

ou seja, g é limitada e $g \geq \varepsilon > 0$. Logo, existe uma sequência minimizante $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ para g satisfazendo (3.17). Substituindo na identidade (3.20),

$$\lim_{k\to\infty} g(p_k)^4 \Delta u(p_k) = 0.$$

Como $g(p_k)$ é limitada inferiormente por $\varepsilon > 0$, segue que $\lim_{k\to\infty} \Delta u(p_k) = 0$. Usando (3.19), deduzimos:

$$\lim_{k\to\infty} u(p_k) = 0.$$

Uma vez que φ é estritamente decrescente, segue que:

$$u^* = \lim_{k \to +\infty} u(p_k) = 0,$$

e portanto $u \equiv 0$. ■

Passamos agora a outro conceito intimamente relacionado aos princípios do máximo do tipo Omori-Yau: a completude estocástica. Em termos gerais, trata-se de uma propriedade analítica das variedades Riemannianas, que garante a conservação da massa pelo fluxo de calor ao longo do tempo. Em outras palavras

Definição 3.14. *Dizemos que uma variedade Riemanniana Σ^n é estocasticamente completa se, para algum (e, portanto, qualquer) $(x,t) \in \Sigma^n \times (0,+\infty)$, temos:*

$$\int_\Sigma p(x,y,t)\, d\sigma(y) = 1, \tag{3.21}$$

onde $p(x,y,t)$ é o núcleo de calor positivo (mínimo) do operador de Laplace-Beltrami Δ.

Do ponto de vista probabilístico, a completude estocástica está relacionada à propriedade de um processo estocástico possuir um tempo de vida infinito (intrínseco). Além disso, para o movimento Browniano numa variedade, a propriedade de conservação expressa em (3.21) implica que a probabilidade total de encontrar a partícula dentro do espaço de estados permanece constantemente igual a um (cf. (EMERY, 1989; GRIGOR'YAN, 1988, 1999; STROOCK, 2000)).

Por outro lado, dizemos que o *princípio do máximo fraco de Omori-Yau* é válido em uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa) Σ^n se, para qualquer função suave $\mathcal{C}^2$, $u : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, tal que $u^* = \sup_\Sigma u < +\infty$, existe uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ com as propriedades (ver (ALÍAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016, Definição 2.3)):

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \Delta u(p_k) < \frac{1}{k}.$$

O seguinte resultado, de (PIGOLA; RIGOLI; SETTI, 2005) (ver também (ALÍAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016, Teorema 2.8)), surpreendentemente liga as duas ideias acima:

Lema 3.15. *A propriedade de completude estocástica de uma variedade Riemanniana é equivalente à validade do princípio do máximo fraco de Omori-Yau sobre ela.*

Seja u uma função $\mathcal{C}^2$ em Σ^n tal que $u^* < +\infty$ e que satisfaz a seguinte desigualdade diferencial de segunda ordem:

$$\Delta u \geq f(u),$$

para alguma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Assumindo que Σ^n é estocasticamente completa, o Lema 3.15 garante a existência de uma sequência de pontos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ tal que:

$$\frac{1}{k} > \Delta u(p_k) \geq f(u(p_k)).$$

Fazendo $k \to \infty$, segue por continuidade que $f(u^*) \leq 0$. Em particular, se $f(u)$ é não-negativa, provamos a seguinte consequência:

Corolário 3.16. *Seja Σ^n uma variedade estocasticamente completa e $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ tal que $u^* = \sup_\Sigma u < +\infty$. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua com $f(u) \geq 0$ satisfazendo a desigualdade diferencial $\Delta u \geq f(u)$, então:*

$$f(u^*) = 0.$$

4 APLICAÇÕES DA FÓRMULA DE CALABI-SIMONS

Neste capítulo, estudamos tanto subvariedades espaciais estacionárias como subvariedades com vetor curvatura média paralelo não-nulo, imersas em espaços produto indefinindo do tipo $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$. O interesse por esse tipo de subvariedade decorre de sua relevância tanto do ponto de vista geométrico quanto físico. Para conduzir essa análise, empregaremos a fórmula do tipo Calabi-Simons obtida no Capítulo 2. A abordagem adotada neste capítulo segue, em parte, linhas desenvolvidas anteriormente na literatura, com as devidas adaptações ao contexto semi-Riemanniano e às particularidades geométricas do problema considerado.

4.1 SUBVARIEDADES

4.1.1 Subvariedades espaciais estacionárias

Como evidencia o título, o nosso interesse é estudar as subvariedades com curvatura média zero (estacionárias). Para isso, necessitaremos do seguinte caso particular do Teorema 2.6:

Corolário 4.1. *Seja Σ^n uma subvariedade estacionáriaa de $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_\nu$ com índice $0 \leq q+\nu \leq p+1$. Então, vale que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S = &\sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + c(n-\epsilon|T|^2)S - 2cn\epsilon \sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 \\ &+ cn\epsilon \sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta - \Gamma_A, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

$$\Gamma_A = \sum_{\alpha,\beta} \varepsilon_\beta \left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [tr(A_\alpha A_\beta)]^2 \right),$$

com $N(A) = tr(AA^t)$ para alguma matriz $A = (a_{ij})$.

Ao final da década de 1980, (ISHIHARA, 1988) demonstrou que toda subvariedade espacial completa, imersa com curvatura média zero em $\mathbb{S}_p^{n+p}$, deve ser totalmente geodésica.

Com isso, estabeleceu que a classe de subvariedades com curvatura média nula é extremamente restrita quando o índice do ambiente coincide com a codimensão da subvariedade. Surpreendentemente, um fenômeno análogo ocorre para subvariedades estacionárias em $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Esse fato motiva a análise das condições geométricas sob as quais subvariedades estacionárias em espaços produto semi-Riemannianos apresentam rigidez semelhante. A seguir, apresentamos um resultado que formaliza esse comportamento.

Teorema 4.2. *Seja Σ^n uma subvariedade estacionária completa de $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Então, Σ^n é totalmente geodésica e está contida em um slice do tipo $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que, se $p = q$ e $\nu = 1$, então

$$\operatorname{ind}(M_p^{n+p}(c) \times \mathbb{R}_1) = \operatorname{cod}(\Sigma^n) = p + 1.$$

Portanto, $\varepsilon_\beta = -1$ para todo $\beta \in \{n+1, \ldots, n+p+1\}$. Assim, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$(p+1) \sum_{\alpha,\beta} [\operatorname{tr}(A_\alpha A_\beta)]^2 \geq (p+1) \sum_{\alpha} \left[\operatorname{tr}(A_\alpha^2)\right]^2 \geq \left(\sum_{\alpha} |A_\alpha|^2 \right)^2 = S^2. \tag{4.2}$$

Segue de (3.9) e (4.2) que

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= - \sum_{\alpha,\beta} \left(N(A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha) + [\operatorname{tr}(A_\alpha A_\beta)]^2 \right) \\ &\leq - \sum_{\alpha,\beta} [\operatorname{tr}(A_\alpha A_\beta)]^2 \leq -\frac{1}{p+1} S^2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Inserindo (4.3) no Corolário 4.1, com $\varepsilon = -1$ e $c = 1$, chegamos à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S \geq& \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + (n + |T|^2)S + 2n \sum_{\alpha} |A_\alpha(T)|^2 \\ &- n \sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta + \frac{1}{p+1} S^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Agora, utilizando o Lema 3.2 na desigualdade (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &\geq \sum_{\alpha,i,j,k}(h^\alpha_{ijk})^2 + (n+|T|^2)S + n|A_N|^2 + 2n\sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 + \frac{1}{p+1}S^2 \\ &\geq S\left(\frac{1}{p+1}S + |T|^2 + n\right).\end{aligned} \tag{4.5}$$

Por outro lado, da equação (2.26), vemos que o tensor de curvatura de Ricci de Σ^n satisfaz

$$R_{ii} = (n-1)(1+|T|^2) + \sum_{\alpha,k}(h^\alpha_{ik})^2 \geq (n-1)(1+|T|^2) \geq n-1.$$

Portanto, pelo Teorema de Bonnet–Myers, Σ^n é compacta. Além disso, aplicando o Teorema da Divergência à desigualdade (4.5), obtemos:

$$0 = \int_\Sigma S\left(\frac{1}{p+1}S + |T|^2 + n\right)d\Sigma.$$

Daí segue que $S = 0$, ou seja, Σ^n é uma subvariedade espacial totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n+p}_p \times \mathbb{R}$. Como $h^\alpha_{ij} = 0$ para todo α, i, j, segue de (2.23) que $|T|$ e $|N|$ são constantes ao longo de Σ^n. Consequentemente, a equação de Codazzi (2.25), implica que

$$0 = N_\alpha(T_j\delta_{ik} - T_k\delta_{ij}) \quad \text{para todos } \alpha, i, j, k. \tag{4.6}$$

Como N e os vetores e_α são temporais, temos $N_\alpha < 0$, e portanto (4.6) implica que $T = 0$. Assim, concluímos que Σ^n é uma subvariedade totalmente geodésica contida em $\mathbb{S}^{n+p}_p \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+p}_p \times \mathbb{R}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exemplo 4.3. *Quando a codimensão difere do índice do ambiente, é possível encontrar subvariedades estacionárias completas que não são totalmente geodésicas. De fato, seja Σ^n uma subvariedade mínima completa na esfera $\mathbb{S}^m$, com $m > n$. Mergulhando $\mathbb{S}^m$ como uma subvariedade espacial totalmente geodésica em $\mathbb{S}^{m+q}_q$, e considerando a imersão natural $\mathbb{S}^{m+q}_q \hookrightarrow \mathbb{S}^{m+q}_q \times \mathbb{R}_1$, temos que, tomando $p = m-n+q > q \geq 0$, a subvariedade Σ^n pode ser vista como uma subvariedade estacionária completa em $\mathbb{S}^{n+p}_q \times \mathbb{R}_1$. Isso mostra que a classe de subvariedades estacionárias completas é significativamente ampla.*

Nosso próximo resultado consiste em uma desigualdade integral do tipo Simons, que estende o teorema apresentado em (CHENG; ISHIKAWA, 1997, Teorema 1) para o contexto de subvariedades estacionárias em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, no caso em que $q < p$.

Teorema 4.4. *Seja Σ^n uma subvariedade estacionária compacta em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$ com $q < p$. Então*

$$\int_\Sigma S\left(n + |T|^2 - aS\right) d\Sigma \leq 0,$$

onde

$$a = \begin{cases} 1, & \text{quando} \quad p - q = 1, \\ 3/2, & \text{quando} \quad p - q > 1. \end{cases} \tag{4.7}$$

Em particular, se ocorre a igualdade, então

i. ou Σ^n é uma subvariedade totalmente geodésica em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \{t_0\}$,

ii. ou $p - q = 1$, Σ^n esta imersa na subvariedade espacial totalmente geodésica

$$\mathbb{S}^{n+1} \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}_q^{n+q+1} \times \mathbb{R}_1$$

e é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^k(n/k) \times \mathbb{S}^{n-k}(n/(n-k))$,

iii. ou $n = p - q = 2$ e Σ^2 é isométrica a superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4 \times \{t_0\}$.

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sendo $\epsilon = -1$, segue da equação (2.20) que N é temporal. Portanto, pelo Lema 3.2, a equação (4.1) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + |A_N|^2 + (n + |T|^2)S + 2n \sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 - \Gamma_A.$$

Pela Proposição 3.8, obtém-se a seguinte estimativa:

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + (n + |T|^2)S - aS^2, \tag{4.8}$$

em que a igualdade ocorre se, e somente se, $|A_N|^2 = \sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 = 0$. Assim, aplicando o teorema da divergência, conclui-se que

$$\int_{\Sigma} S\left(n + |T|^2 - aS\right) d\Sigma \leq 0. \tag{4.9}$$

Se a desigualdade (4.9) se torna uma igualdade, então todas as desigualdades utilizadas ao longo da demonstração também se transformam em igualdades. Em particular, $h^{\alpha}_{ijk} = 0$ para todo α, i, j, k, o que implica que Σ^n é uma subvariedade paralela e, consequentemente, a função S é constante. Assim, pela igualdade (4.9), obtemos $S = 0$, o que mostra que Σ^n é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}^{n+p}_q \times \mathbb{R}_1$.

Por outro lado, se a igualdade em (4.8) é satisfeita, então ela garante que a igualdade da Proposição 3.8 também se verifica, o que implica $S_2 = 0$. Em particular, como $|A_N|^2 = 0$, segue da equação (3.7) que $h^{n+p+1}_{ij} = 0$ para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Assim, a partir das equações (2.23) e (3.5), temos:

$$\nabla_{e_i} T = \sum_{\beta,j} \varepsilon_\beta N_\beta h^{\beta}_{ij} e_j = \sum_{\gamma,j} N_\gamma h^{\gamma}_{ij} e_j - \sum_{\eta,j} N_\eta h^{\eta}_{ij} e_j = -\sum_{j} N_{n+p+1} h^{n+p+1}_{ij} e_j = 0,$$

o que mostra que $|T|^2$ é constante. Como Σ^n é paralela, pela equação de Codazzi (2.25), concluímos que $T = 0$.

Dessa forma, podemos aplicar o Corolário 3.10 para concluir que Σ^n está contida em uma subvariedade estacionária paralela de

$$\mathbb{S}^{n+l-1}_r \times \mathbb{R}_1 \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+p}_q \times \mathbb{R}_1,$$

para algum $l \in \{2, 3\}$ e $r \in \{0, 1, 2\}$. Vamos então analisar os casos $l = 2$ e $l = 3$. No caso $l = 2$, temos que Σ^n está contida em

$$(i) \quad \mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{R}_1 \qquad (ii) \quad \mathbb{S}^{n+1}_1 \times \mathbb{R}_1.$$

Observemos que o caso (ii) não pode ocorrer, pois contradiz o Teorema 4.2. Logo, vale (i), e como $T = 0$, concluímos que Σ^n é uma hipersuperfície mínima em

$$\mathbb{S}^{n+1} \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \times \mathbb{R}_1,$$

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\int_\Sigma S(n-S)\,d\Sigma = 0.$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.3 para concluir que Σ^n é isométrica ao toro de Clifford

$$\mathbb{S}^k\left(\frac{n}{k}\right) \times \mathbb{S}^{n-k}\left(\frac{n}{n-k}\right), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

com $S = n$.

Por outro lado, se $l = 3$, então Σ^n está contida em um dos seguintes espaços:

$$(i) \quad \mathbb{S}^{n+2} \times \mathbb{R}_1 \qquad (ii) \quad \mathbb{S}_1^{n+2} \times \mathbb{R}_1 \qquad (iii) \quad \mathbb{S}_2^{n+2} \times \mathbb{R}_1.$$

Como no caso anterior, a situação (iii) não pode ocorrer. Agora, suponha que ocorra o caso (ii). Como $S_2 = 0$, segue que todas as segundas formas fundamentais nas direções temporais se anulam identicamente. Sendo a codimensão de Σ^n em $\mathbb{S}_1^{n+2} \times \mathbb{R}_1$ igual a três, o fibrado normal de Σ^n é gerado por três vetores, dos quais dois são temporais. Logo, a segunda forma fundamental nas direções temporais deve ser nula, o que contradiz o Lema 2.3, item (b), que garante que apenas duas dessas formas não se anulam. Portanto, o caso que ocorre é o (i) e, como $T = 0$, temos que Σ^n é uma subvariedade mínima compacta de

$$\mathbb{S}^{n+2} \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+2} \times \mathbb{R}_1,$$

para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\int_\Sigma S\left(n - \frac{3}{2}S\right)\,d\Sigma = 0.$$

Portanto, podemos aplicar o Teorema 3.4 para concluir que $n = 2$ e que Σ^2 é isométrica a uma superfície de Veronese em $\mathbb{S}^4 \times \{t_0\}$, com $S = \frac{4}{3}$. ■

Como observado em (2.21), se ∂_t é um vetor espacial, o campo vetorial N pode assumir três diferentes caracteres causais. Suponha que N seja temporal. Nesse caso, não existem subvariedades espaciais totalmente geodésicas em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}$.

De fato, suponha por contradição que existam tais subvariedades. Então, pela equação de Codazzi (2.25), temos

$$0 = h^\alpha_{ijk} - h^\alpha_{ikj} = N_\alpha(T_j\delta_{ik} - T_k\delta_{ij}),$$

para todo α, i, j, k. Como N é temporal, segue que $N_\alpha \neq 0$ para algum α, e portanto $T = 0$. Substituindo essa informação em (2.18), obtemos:

$$1 = |T|^2 + \langle N, N\rangle = \langle N, N\rangle < 0,$$

o que é um absurdo. Portanto, se Σ^n é totalmente geodésica em $\mathbb{S}^{n+p}_q \times \mathbb{R}$, o campo vetorial N não pode ser temporal.

Além disso, ao impor condições adequadas sobre S e $|T|$, podemos estender esse raciocínio e concluir que o mesmo resultado é válido para subvariedades espaciais estacionárias. Em outras palavras, a hipótese de que N seja temporal é incompatível também com a existência de tais subvariedades.

Teorema 4.5. *Não existe subvariedade espacial estacionária completa imersa em $\mathbb{S}^{n+p}_q \times \mathbb{R}$, com $q \leq p$, que satisfaça*

$$\sup_\Sigma \left(aS + (3n-1)|T|^2\right) < 2n, \tag{4.10}$$

com

$$a = \begin{cases} 1, & \textit{quando} \quad p = q, \\ 3/2, & \textit{quando} \quad p - q > 1. \end{cases} \tag{4.11}$$

e tal que o campo vetorial N seja temporal.

Demonstração: De fato, suponha que exista uma subvariedade estacionária espacial $\Sigma^n \subset \mathbb{S}^{n+p}_q \times \mathbb{R}$ satisfazendo a desigualdade em (4.10) e tal que o campo vetorial N seja temporal. Pelo Corolário 4.1 e pela Proposição 3.8, obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq (n - |T|^2)S - 2n\sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 + n\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h^\alpha_{ij}h^\beta_{ij}N_\alpha N_\beta - aS^2. \tag{4.12}$$

Como N é temporal, temos $N = |N|e_{n+p+1}$, e portanto $\langle N, e_{n+p+1}\rangle^2 = -\langle N, N\rangle$. Assim, pela definição de A_N em (3.4), podemos escrever:

$$|A_N|^2 = \sum_{i,j} N_{n+p+1}^2 (h_{ij}^{n+p+1})^2 = -\langle N, N\rangle \sum_{i,j} (h_{ij}^{n+p+1})^2.$$

Além disso, a função S pode ser escrita como:

$$S = \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2 = \sum_{\alpha \neq n+p+1} (h_{ij}^{\alpha})^2 + \sum_{i,j} (h_{ij}^{n+p+1})^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} -\langle N, N\rangle S &= -\langle N, N\rangle \sum_{\alpha \neq n+p+1} (h_{ij}^{\alpha})^2 - \langle N, N\rangle \sum_{i,j} (h_{ij}^{n+p+1})^2 \\ &\geq -\langle N, N\rangle \sum_{i,j} (h_{ij}^{n+p+1})^2 = |A_N|^2, \end{aligned} \tag{4.13}$$

com igualdade se, e somente se, $\sum_{\alpha \neq n+p+1} (h_{ij}^{\alpha})^2 = 0$.

Substituindo (4.13) no Lema 3.2, obtemos:

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^{\alpha} h_{ij}^{\beta} N_\alpha N_\beta = -|A_N|^2 \geq \langle N, N\rangle S. \tag{4.14}$$

Agora, estimaremos $|A_\alpha(T)|^2$. Para isso, consideremos um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots, e_n\}$ em Σ^n tal que $A_\alpha(e_i) = \lambda_i^{\alpha} e_i$. Fixemos $n+1 \leq \alpha \leq n+p+1$ e $1 \leq i \leq n$. Como Σ^n é estacionária,

$$\sum_i \lambda_i^{\alpha} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_i^{\alpha} + \sum_{j \neq i} \lambda_j^{\alpha} = 0, \quad \text{para } j \neq i.$$

Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$(\lambda_i^{\alpha})^2 = \left(\sum_{j \neq i} \lambda_j^{\alpha} \right)^2 \leq (n-1) \sum_{j \neq i} (\lambda_j^{\alpha})^2 = (n-1)S - (n-1)(\lambda_i^{\alpha})^2.$$

Logo,

$$(\lambda_i^{\alpha})^2 \leq \frac{n-1}{n} S.$$

Consequentemente, como $T = \sum_i T_i e_i$, temos:

$$\sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 = \sum_\alpha \langle A_\alpha^2(T), T\rangle \leq \frac{n-1}{n}|T|^2 \sum_\alpha |A_\alpha|^2 = \frac{n-1}{n}|T|^2 S. \tag{4.15}$$

Portanto, inserindo (4.14) e (4.15) em (4.12), obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq (n - |T|^2)S - 2(n-1)|T|^2 S + n\langle N, N\rangle S - aS^2.$$

Agora, usando (2.19), temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &\geq (n - |T|^2)S - 2(n-1)|T|^2 S + n(1 - |T|^2)S - aS^2\\ &= \big(2n - (3n-1)|T|^2 - aS\big)\, S.\end{aligned}$$

Definindo $d/2 := -\sup_\Sigma (aS + (3n-1)|T|^2) + 2n > 0$, obtemos:

$$\Delta S \geq dS.$$

Por outro lado, de (2.26) e (2.5), observamos que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente, pois:

$$R_{ii} = (n-1)(1 + 2|T|^2) - \sup_\Sigma \big(aS + (3n-1)|T|^2\big) > -\infty. \tag{4.16}$$

Como Σ^n é completa, o princípio do máximo de Omori–Yau é válido sobre Σ^n. Além disso, de (4.10), não é difícil ver que $\sup_\Sigma S < +\infty$. Portanto, pelo Teorema 3.13, conclui-se que $S = 0$, ou seja, Σ^n é uma subvariedade totalmente geodésica de $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}$, o que contradiz a hipótese de que N é um campo vetorial temporal. ■

Uma subvariedade espacial Σ^n de $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}$ é dita um *cilindro vertical* sobre a subvariedade espacial $\mathbb{P}^{n-1} \subset M_q^{n+p}(c)$ se $\Sigma^n = \pi_M^{-1}(\mathbb{P}^{n-1})$, onde π_M denota a projeção sobre o primeiro fator. Os cilindros verticais são caracterizados pelo fato de que o vetor ∂_t é sempre tangente a Σ^n. Em particular, um cálculo direto mostra que Σ^n é um cilindro vertical espacial estacionário em $M_q^{n+p}(c) \times \mathbb{R}$ se, e somente se, $\mathbb{P}^{n-1}$ é uma subvariedade espacial estacionária de $M_q^{n+p}(c)$.

Observe que, se o campo vetorial N é espacial e nulo, então Σ^n deve ser um cilindro vertical. Assim, no caso em que N é um campo vetorial espacial não nulo, temos:

Teorema 4.6. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial estacionária imersa no espaço produto indefinido $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}$, com $q < p$. Suponha que N seja um campo vetorial não nulo e que*

$$\sup_{\Sigma} \left(aS + (2n-1)|T|^2 \right) < n, \tag{4.17}$$

com

$$a = \begin{cases} 1, & \textit{quando} \quad p - q = 1, \\ 3/2, & \textit{quando} \quad p - q > 1. \end{cases} \tag{4.18}$$

então Σ^n é uma subvariedade totalmente geodésica contida em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Como N é um campo vetorial espacial não nulo, segue do Lema 3.2 que

$$n \sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta h_{ij}^\alpha h_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta = n|A_N|^2 \geq 0.$$

Assim, utilizando o Corolário 4.1 e a Proposição 3.8, obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq (n - |T|^2)S - 2n \sum_\alpha |A_\alpha(T)|^2 - aS^2.$$

Agora, pela estimativa dada em (4.15), temos:

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq \left(n - (2n-1)|T|^2 - aS \right) S.$$

Definindo $\frac{d}{2} := -\sup_\Sigma \left(aS + (2n-1)|T|^2 \right) + n > 0$, segue que

$$\Delta S \geq dS.$$

Seguindo os mesmos passos da estimativa em (4.16), a partir da hipótese (4.17), concluímos que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente. Além disso, como S é limitado superiormente, pelo Teorema 3.13, obtemos que $S = 0$.

Portanto, como N é um campo vetorial espacial não nulo, a equação de Codazzi (2.25) implica que Σ^n é uma subvariedade totalmente geodésica, contida em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, como desejado. ■

Observação 4.7. *No caso particular em que $q = 0$, ou seja, quando o fator esférico $\mathbb{S}_q^{n+p}$ é uma esfera Euclidiana, a estimativa apresentada em* (4.17) *proporciona uma condição mais restritiva (e, portanto, mais forte) do que a hipótese assumida na Proposição 4.2 de (FETCU; ROSENBERG, 2013), permitindo obter a mesma conclusão sob uma limitação mais suave sobre S e $|T|^2$.*

4.1.2 Desigualdades integrais para subvariedades espaciais *pmc* em $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$

Nesta seção, consideramos subvariedades espaciais com vetor curvatura média não nulo e paralelo, imersas no produto semi-Riemanniano $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Como aplicação do Corolário 2.7, derivamos duas desigualdades integrais que fornecem critérios para a classificação e caracterização dessas subvariedades sob as hipóteses mencionadas, com a restrição $q \leq p$.

O resultado auxiliar apresentado a seguir consiste em uma versão adequada do Lema 3.2, adaptada ao contexto de subvariedades cujo vetor curvatura média é não nulo.

Lema 4.8. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial de $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, com vetor curvatura média não nulo e $q \leq p$. Então,*

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta \, \phi_{ij}^\alpha \phi_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta = -|\phi_N|^2,$$

onde

$$|\phi_N|^2 = \sum_{i,j} (\phi_{ij}^N)^2, \qquad \phi_{ij}^N = h_{ij}^N - \langle N, h \rangle \delta_{ij}.$$

Demonstração: Como N é temporal, tomemos um referencial ortonormal $e_{n+1}, \ldots, e_{n+p+1}$ em $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ tal que e_{n+p+1} esteja na mesma direção de N, de modo que $N = |N| e_{n+p+1}$.

Assim, temos:

$$N_{n+p+1} = -|N| \quad \text{e} \quad N_\alpha = \langle N, e_\alpha \rangle = 0, \qquad \alpha = n+1, \ldots, n+p.$$

Com isso, um cálculo direto fornece:

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta \phi_{ij}^\alpha \phi_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta &= \sum_{\gamma,\gamma',i,j} \phi_{ij}^{\gamma'} \phi_{ij}^{\gamma} N_{\gamma'} N_\gamma + \sum_{\gamma,\eta,i,j} \phi_{ij}^{\eta} \phi_{ij}^{\gamma} N_\eta N_\gamma \\
&\quad - \sum_{\gamma,\eta,i,j} \phi_{ij}^{\gamma} \phi_{ij}^{\eta} N_\gamma N_\eta - \sum_{\eta',\eta,i,j} \phi_{ij}^{\eta'} \phi_{ij}^{\eta} N_{\eta'} N_\eta \\
&= -\sum_{i,j} (\phi_{ij}^{n+p+1})^2 N_{n+p+1}^2.
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$|\phi_N|^2 = \sum_{i,j} N_{n+p+1}^2 (\phi_{ij}^{n+p+1})^2.$$

Donde se conclui o resultado. ■

De agora em diante, vamos lidar com subvariedades tipo-espaço possuindo vetor curvatura média paralelo (pmc) em $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Convém recordar que toda subvariedade pmc possui curvatura média constante. Dessa forma, temos a seguinte consequência:

Corolário 4.9. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial pmc de $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$ com $q \leq p$. Então, vale que*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= \sum_{\alpha,i,j,k} (h_{ijk}^\alpha)^2 + 2n \sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 + \sum_\alpha \operatorname{tr}(A_\alpha) \langle \phi_\alpha(T), T \rangle \\
&\quad - n \sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta \phi_{ij}^\alpha \phi_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta + (n + |T|^2)|\phi|^2 + n|\phi|^2 \sum_\beta \varepsilon_\beta \langle h, e_\beta \rangle^2 \\
&\quad + \sum_\alpha \varepsilon_\beta \operatorname{tr}(A_\beta) \operatorname{tr}(\phi_\alpha^2 \phi_\beta) - \Gamma_\phi,
\end{aligned}$$

onde Γ_ϕ está definido em (2.37).

Como aplicação dos resultados anteriores, apresentamos a nossa primeira desigualdade integral, no caso em que $p = q$.

Teorema 4.10. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial pmc compacta de $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Então, a seguinte desigualdade integral é válida:*

$$\int_\Sigma |\phi|^2 Q(|\phi|, |T|)\, d\Sigma \leq 0,$$

onde $Q(x, y)$ é a função de duas variáveis dada por:

$$Q(x,y) = \frac{1}{p+1}x^2 + y^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Hx + n(1 - H^2). \tag{4.19}$$

Além disso, se a igualdade for atingida, então Σ^n é uma subvariedade totalmente umbílica contida em $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sendo $p = q$, temos que o índice de $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$ é igual à codimensão de Σ^n nesse espaço produto. Portanto, o fibrado normal de Σ^n é gerado por vetores temporais. Assim, h e N são temporais.

Escolhendo um referencial ortonormal $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+p}, e_{n+p+1}\}$ no fibrado normal de Σ^n tal que $N = |N|e_{n+p}$ e $h = He_{n+p+1}$, temos:

$$\operatorname{tr}(A_{n+p+1}) = -nH, \quad N_{n+p} = -|N|, \quad \text{e} \quad \operatorname{tr}(A_\alpha) = N_\beta = 0, \tag{4.20}$$

para todo $\alpha \neq n + p + 1$ e $\beta \neq n + p$. Dessa forma, h é ortogonal a N.

Como h é paralelo, segue que e_{n+p+1} também é paralelo. Assim,

$$0 = X\langle e_{n+p+1}, N\rangle = \langle \nabla^\perp_X e_{n+p+1}, N\rangle + \langle e_{n+p+1}, \nabla^\perp_X N\rangle = -\langle A_{e_{n+p+1}}(T), X\rangle, \tag{4.21}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Além disso, de (2.32) e (4.20), temos:

$$\phi_{n+p+1} = A_{n+p+1} + HI, \quad \text{e} \quad \phi_\alpha = A_\alpha, \qquad \alpha = n+1, \ldots, n+p.$$

Portanto, de (4.21), segue que $\phi_{n+p+1}(T) = HT$. Logo,

$$\begin{aligned}
2n\sum_{\alpha}|\phi_\alpha(T)|^2 + \sum_{\alpha}\mathrm{tr}(A_\alpha)\langle\phi_\alpha(T), T\rangle \\
&= 2n\sum_{\alpha\neq n+p+1}|\phi_\alpha(T)|^2 + 2n\langle\phi_{n+p+1}(T), \phi_{n+p+1}(T)\rangle \\
&\quad - nH\langle\phi_{n+p+1}(T), T\rangle \qquad (4.22)\\
&= 2n\sum_{\alpha\neq n+p+1}|\phi_\alpha(T)|^2 + 2nH^2|T|^2 - nH^2|T|^2 \\
&= 2n\sum_{\alpha\neq n+p+1}|\phi_\alpha(T)|^2 + nH^2|T|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Além disso, do Lema 4.8,

$$\sum_{\alpha,\beta,i,j}\varepsilon_\beta\phi_{ij}^\alpha\phi_{ij}^\beta N_\alpha N_\beta = -\sum_{i,j}(\phi_{ij}^{n+p+1})^2N_{n+p+1}^2 = -|\phi_N|^2.$$

Portanto,

$$n|\phi|^2\sum_{\beta}\varepsilon_\beta\langle h, e_\beta\rangle^2 = n|\phi|^2\varepsilon_{n+p+1}\langle h, e_{n+p+1}\rangle^2 = -n|\phi|^2H^2.$$

Assim, da Corolário 4.9, obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq \sum_{\alpha,i,j,k}(\phi_{ijk}^\alpha)^2 + |\phi_N|^2 + (n + |T|^2 - nH^2)|\phi|^2 + nH\sum_{\alpha}\mathrm{tr}(\phi_\alpha^2\phi_{n+p+1}) - \Gamma_\phi.$$

Usando novamente que h é paralelo, da equação de Ricci (2.7), temos que $[\phi_\alpha, \phi_h] = 0$, para todo $\alpha \neq n+p+1$. Como $\mathrm{tr}(\phi_\alpha) = \mathrm{tr}(\phi_h) = 0$, aplicando o Lema 2.2 para ϕ_α e ϕ_h, temos:

$$nH\sum_{\alpha}\mathrm{tr}(\phi_\alpha^2\phi_{n+p+1}) \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^2|\phi_{n+p+1}| \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3, \qquad (4.23)$$

onde:

$$|\phi|^2 = \sum_{\alpha\neq n+p+1}|\phi_\alpha|^2 + |\phi_{n+p+1}|^2 \geq |\phi_{n+p+1}|^2. \qquad (4.24)$$

Como $\varepsilon_\beta = -1$ para todo $\beta \geq n+1$, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que:

$$(p+1)\sum_{\alpha,\beta}[\mathrm{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2 \geq (p+1)\sum_{\alpha}[\mathrm{tr}(\phi_\alpha^2)]^2 \geq \left(\sum_\alpha |\phi_\alpha|^2\right)^2 = |\phi|^4. \tag{4.25}$$

Dessa forma, inserindo em (2.37), obtemos:

$$\Gamma_\phi = -\sum_{\alpha,\beta}\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\mathrm{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right) \leq -\frac{1}{p+1}|\phi|^4, \tag{4.26}$$

desde que $N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) \geq 0$.

Logo,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq \sum_{\alpha,i,j,k}(\phi_{ijk}^\alpha)^2 + |\phi_N|^2 + Q(|\phi|,|T|) \geq Q(|\phi|,|T|), \tag{4.27}$$

onde $Q(x,y)$ está definido em (4.19), e a igualdade na última desigualdade ocorre se, e somente se, $\phi_{ijk}^\alpha = 0$ para todo α, i, j, k e $|\phi_N| = 0$.

Pelo teorema da Divergência, aplicando (4.27), obtemos:

$$0 \geq \int_\Sigma |\phi|^2 Q(|\phi|,|T|)\, d\Sigma. \tag{4.28}$$

Além disso, se ocorre a igualdade em (4.28), todas as desigualdades ao longo da prova tornam-se igualdades. Em particular, a igualdade em (4.27) implica $\phi_{ijk}^\alpha = 0$ para todo α, i, j, k. Como h é paralelo, então $h_{ijk}^\alpha = 0$, implicando que Σ^n é uma subvariedade paralela. Logo, $|\phi|$ é constante.

Se $|\phi| = 0$, então Σ^n é totalmente umbílica em $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$. Como Σ^n é paralela e $\langle N, N\rangle < 0$, segue de (2.25) que $T = 0$, e portanto, Σ^n está contida em uma subvariedade espacial com curvatura média constante de $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \{t_0\} \hookrightarrow \mathbb{S}_p^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Suponhamos agora que $|\phi| > 0$. A igualdade em (4.22) implica que $T = 0$, dado que $H \neq 0$. Portanto, Σ^n está contida em $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \{t_0\}$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Com isso, as igualdades em (4.24) e (4.26) tornam-se:

$$|\phi|^2 = |\phi_{n+p+1}|^2, \quad \text{e} \quad \phi_\alpha = 0, \quad \text{para } \alpha \neq n+p+1.$$

Inserindo em (4.25), obtemos:

$$|\phi|^4 = (p+1)\sum_{\alpha}[\mathrm{tr}(\phi_\alpha^2)]^2 = (p+1)\sum_{\alpha\neq n+p+1}[\mathrm{tr}(\phi_\alpha^2)]^2 + (p+1)[\mathrm{tr}(\phi_{n+p+1}^2)]^2 = (p+1)|\phi|^4.$$

Como $|\phi| > 0$, segue que $p = 0$. Portanto, Σ^n é isométrica a um slice $\mathbb{S}^n \times \{t_0\}$, o que leva a uma contradição, pois tais slices são subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}_1$.

Concluímos, assim, que Σ^n é uma subvariedade totalmente umbílica de $\mathbb{S}_p^{n+p} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. ■

Para obter uma desigualdade integral semelhante no caso em que o índice difere da codimensão, utilizaremos a Proposição 4.11, que nos fornece um resultado de redução de codimensão. Em outras palavras,

Proposição 4.11. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial de $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, com índice $q < p$, e vetor curvatura média espacial h. Então, a função real Γ_ϕ definida em* (2.37) *satisfaz,*

$$\Gamma_\phi \leq a|\phi|^4 \quad \text{onde} \quad a = \begin{cases} 1, & \text{quando} \quad p - q = 1, \\ \dfrac{3}{2}, & \text{quando} \quad p - q > 1. \end{cases} \tag{4.29}$$

Portanto, se a igualdade em (4.29) *ocorre, então $|\phi|^2 = 0$ ou $|\phi_2|^2 = 0$.*

Em particular, suponha que $L = N_1 + \mathrm{span}\{N\}$ seja um subfibrado de $T\Sigma^\perp$, de posto $l \leq p+1$ e índice $i \leq l$, tal que $\nabla^\perp N_1 \subset L$. Então, a codimensão de Σ^n pode ser reduzida para l.

Demonstração: Primeiramente, como h é um campo vetorial espacial, consideremos um referencial ortonormal $\{e_{n+1}, \ldots, e_{n+p+1}\}$ em $\mathfrak{X}(\Sigma)^\perp$ tal que $h = He_{n+1}$. Com isso, temos:

$$\phi_{n+1} = A_{n+1} - HI \quad \text{e} \quad \phi_\alpha = A_\alpha, \quad \text{para } \alpha \geq n+2. \tag{4.30}$$

Supondo inicialmente que $p = q + 1$, pela equação (2.33), podemos reescrever (2.37) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Gamma_\phi &= \left[\operatorname{tr}(\phi_{n+1}^2)\right]^2 - \sum_{\alpha,\beta\geq n+2}\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right)\\ &= |\phi_1|^4 - \sum_{\alpha,\beta\geq n+2}\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right).\end{aligned}$$

Mais uma vez, pela equação (2.33), obtemos:

$$\Gamma_\phi \leq |\phi_1|^4 - \sum_{\alpha\geq n+2}\left[\operatorname{tr}(\phi_\alpha^2)\right]^2 = \left(|\phi|^2 - |\phi_2|^2\right)^2 - \sum_{\alpha\geq n+2}\left[\operatorname{tr}(\phi_\alpha^2)\right]^2 \leq |\phi|^4,$$

com igualdade se, e somente se, $|\phi_2|^2 = 0$.

Agora, considerando o caso em que $p - q > 1$, temos:

$$\begin{aligned}\Gamma_\phi = &\sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p-q-\nu+1}\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right)\\ &- \sum_{\alpha,\beta=n+p-q-\nu+2}^{n+p+1}\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Aplicando o Lema 2.3, obtemos:

$$\sum_{\alpha,\beta=n+1}^{n+p-q+1}\left(N(\phi_\alpha\phi_\beta - \phi_\beta\phi_\alpha) + [\operatorname{tr}(\phi_\alpha\phi_\beta)]^2\right) \leq \frac{3}{2}\left(|\phi|^2 - |\phi_2|^2\right)^2. \tag{4.32}$$

Portanto, inserindo (4.32) em (4.31), segue que:

$$\Gamma_\phi \leq \frac{3}{2}\left(|\phi|^2 - |\phi_2|^2\right)^2 - \sum_{\alpha=n+p-q+2}^{n+p+1}\left[\operatorname{tr}(\phi_\alpha^2)\right]^2 \leq \frac{3}{2}|\phi|^4,$$

com igualdade se, e somente se, $|\phi_2|^2 = 0$. Isso conclui a demonstração da desigualdade.

Se a igualdade ocorre, então ou $|\phi|^2 = 0$, e Σ^n é totalmente umbílica, ou $|\phi_2|^2 = 0$. Observe que, no primeiro caso, da equação (4.30), o primeiro subespaço normal N_1 é gerado por e_{n+1}, e portanto $\dim(N_1) = 1$.

Suponha agora que $|\phi|^2 \neq 0$, então necessariamente $|\phi_2|^2 = 0$, o que significa que $\phi_\xi = 0$ para todo vetor normal temporal $\xi \in T\Sigma^\perp$. Como $\phi_\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \geq n+2$, segue que:

(i) No caso $p = q + 1$, temos $N_1(x) = \text{span}\{e_{n+1}\}$, ou seja, $\dim(N_1) = 1$;

(ii) No caso $p - q > 1$, a igualdade (4.29) implica a validade de (4.32), e, portanto, a igualdade no Lema 2.3.

Essa última implica que apenas dois vetores normais (que podemos reorganizar como e_{n+1} e e_{n+2}) satisfazem $\phi_{n+1} \neq 0$ e $\phi_{n+2} \neq 0$. Como $\phi_{n+1} = A_{n+1} - HI$ e $\phi_{n+2} = A_{n+2}$, então $A_{n+1} \neq 0$ e $A_{n+2} \neq 0$, o que implica $N_1(x) = \text{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$, ou seja, $\dim(N_1) = 2$.

Neste ponto, podemos proceder como na Proposição 3.8, assumindo que $\dim(N_1) = t$, com $t \in \{1, 2\}$, e concluir que a codimensão de Σ^n pode ser reduzida a l. ■

Seja Σ^n uma subvariedade espacial paralela. Temos, então, a seguinte consequência da Proposição 4.11 e do Corolário 3.10:

Corolário 4.12. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial paralela de $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, com índice $q < p$ e vetor curvatura média espacial h. Suponha que a igualdade na Proposição 4.11 seja verificada. Então, Σ^n está contida em uma subvariedade espacial de $\mathbb{S}_u^{n+l-1} \times \mathbb{R}_1$, para algum $l \in \{2, 3\}$ e $u \in \{0, 1, 2\}$.*

Com isso, estamos em posição de enunciar e demonstrar nosso último resultado referente ao caso $q < p$.

Teorema 4.13. *Seja Σ^n uma subvariedade espacial pmc compacta de $\mathbb{S}_q^{n+p} \times \mathbb{R}_1$, com $q < p$, e suponha que h seja um campo vetorial espacial. Então, a seguinte desigualdade integral é válida:*

$$\int_\Sigma |\phi|^2 Q_a(|\phi|, |T|)\, d\Sigma \leq 0, \tag{4.33}$$

onde $Q_a(x, y)$ é uma função de duas variáveis, dada por:

$$Q_a(x, y) = -ax^2 + y^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} Hx + n(1 + H^2) \tag{4.34}$$

onde,

$$a = \begin{cases} 1, & \textit{quando} \quad p - q = 1, \\ 3/2, & \textit{quando} \quad p - q > 1. \end{cases} \tag{4.35}$$

Além disso, se a igualdade for atingida, então ou Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbílica contida em $\mathbb{S}^{n+1}_q \times \{t_0\}$, com $q = 0$ ou 1, ou $a = 1$ e Σ^n é isométrica ao toro de Clifford em $\mathbb{S}^{n+1} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Supondo que h seja espacial, escolhemos um referencial ortonormal no fibrado normal de Σ^n tal que $h = He_{n+1}$ e $N = |N|e_{n+p}$. Nesse referencial, temos que $\operatorname{tr}(A_{n+1}) = nH$ e:

$$\phi_{n+1} = A_{n+1} - HI, \qquad \phi_\alpha = A_\alpha, \quad \alpha \geq n+2. \tag{4.36}$$

De modo análogo a (4.22), segue de (4.21) e (4.36) que:

$$\begin{aligned}
2n\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 &+ \sum_\alpha \operatorname{tr}(A_\alpha)\langle \phi_\alpha(T), T\rangle - n\sum_{\alpha,\beta,i,j} \varepsilon_\beta \phi^\alpha_{ij}\phi^\beta_{ij} N_\alpha N_\beta \\
&= 2n\sum_\alpha |\phi_\alpha(T)|^2 - nH\langle \phi_{n+1}(T), T\rangle + n|\phi_N|^2 \\
&= 2n\sum_{\alpha\neq n+1} |\phi_\alpha(T)|^2 + nH^2|T|^2 + n|\phi_N|^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Inserindo (4.23), (4.29) e (4.37) no Corolário 4.9, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq &\sum_{\alpha,i,j,k} (\phi^\alpha_{ijk})^2 + (n + |T|^2)|\phi|^2 - a|\phi|^4 \\
&- \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\phi|^3 + n|\phi|^2 \sum_\beta \varepsilon_\beta \langle h, e_\beta\rangle^2,
\end{aligned} \tag{4.38}$$

onde $a \in \{1, 3/2\}$. Além disso, como h é espacial

$$n|\phi|^2 \sum_\beta \varepsilon_\beta \langle h, e_\beta\rangle^2 = nH^2|\phi|^2.$$

Com isso, da inequação (4.38), segue que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq (n + |T|^2 + nH^2)|\phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}} H|\phi|^3 - a|\phi|^4, \tag{4.39}$$

com igualdade se, e somente se, $\phi^\alpha_{ijk} = 0$ para todo α, i, j, k. Portanto,

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\phi|^2 Q_a(|\phi|, |T|), \tag{4.40}$$

onde Q_a é a função definida em (4.34). Integrando ambos os lados de (4.40), obtemos (4.33).

Se ocorre a igualdade em (4.33), então (4.39) também se torna igualdade, isto é, $\phi^\alpha_{ijk} = 0$ para todo α, i, j, k, e portanto $|\phi|^2$ é constante. Se $|\phi|^2 = 0$, então Σ^n é uma subvariedade totalmente umbílica de $\mathbb{S}^{n+p}_q \times \mathbb{R}_1$. Caso contrário, $|\phi| > 0$, e das igualdades (4.23) e (4.24), temos que $\phi_\alpha = 0$ para todo $\alpha \geq n+2$. Pela equação (4.36), temos $A_\alpha = \phi_\alpha = 0$ para $\alpha \geq n+2$, e e_{n+1} é um campo vetorial espacial. Assim, $|\phi_2|^2 = 0$, e $N_1(x) = \text{span}\{e_{n+1}\}$ é um subespaço espacial. Como N é temporal, segue do Corolário 4.12 que a codimensão de Σ^n se reduz a 2, isto é, Σ^n está imersa em uma hipersuperfície paralela de $\mathbb{S}^{n+1}_q \times \mathbb{R}_1$, com $q = 0$ ou 1.

Como $H > 0$, a igualdade em (4.37) garante que $T = 0$, ou seja, $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1}_q \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Se $q = 1$, então Σ^n seria uma hipersuperfície espacial paralela compacta de $\mathbb{S}^{n+1}_1 \times \{t_0\}$, o que não é possível, pois as únicas hipersuperfícies paralelas (não totalmente umbilicais) de $\mathbb{S}^{n+1}_1$ são os cilindros hiperbólicos $\mathbb{S}^{n-1}(c_1) \times \mathbb{H}^1(c_2)$, que não são compactos (ABE; KOIKE; YAMAGUCHI, 1987, Teorema 5.1). Portanto, $q = 0$, e Σ^n é uma hipersuperfície espacial paralela de $\mathbb{S}^{n+1} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Finalmente, da igualdade em (4.24), vemos que o caso $p - q > 1$ não pode ocorrer, pois contradiz a conclusão de igualdade do Lema 2.3. Assim, $p = q + 1$ e, consequentemente, $a = 1$.

Aplicando o Teorema 3.3, concluímos que Σ^n é isométrica ao toro de Clifford $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \times \mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+p} \times \{t_0\}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. ■

4.2 HIPERSUPERFÍCIES ESTOCASTICAMENTE COMPLETAS

Nesta seção, exploraremos a fórmula de Calabi–Simons no contexto de hipersuperfícies Riemannianas imersas em ambientes Lorentzianos e Riemannianos. Aqui apresentaremos uma abordagem diferente da exposta na Seção de subvariedades seguindo as ideias desenvolvidas por (NOMIZU; SMYTH, 1969). Nesse sentido, para tornar esta exposição mais clara e coesa, introduziremos algumas notações e definições específicas para esta abordagem.

Seja $\overline{M}^{n+1}$ uma variedade semi-Riemanniana conexa, munida de uma métrica $\overline{g} = \langle \, , \rangle$ de índice $\nu \leq 1$ e da correspondente conexão de Levi-Civita semi-Riemanniana $\overline{\nabla}$. Para um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(\overline{M})$, definimos $\varepsilon_X = \langle X, X \rangle$. Dizemos que X é unitário se $\varepsilon_X = \pm 1$ e temporal se $\varepsilon_X = -1$.

Considere agora $(M^n(c), \langle , \rangle_M)$ uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 2$ e curvatura seccional constante $c = 0$, -1 ou 1. Definimos o produto suave

$$\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c) = \varepsilon \mathbb{R} \times M^n(c),$$

onde $\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$ é uma variedade semi-Riemanniana dotada da métrica descrita em (2.17).

A partir daqui, consideraremos imersões Riemannianas $x : \Sigma^n \to \overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$, isto é, imersões de uma variedade diferenciável orientável n-dimensional conexa Σ^n em $\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$, tal que a métrica induzida $g = x^*(\overline{g})$ transforma Σ^n em uma variedade Riemanniana. No caso Lorentziano ($\varepsilon = -1$), referimo-nos a (Σ^n, g) como uma *hipersuperfície espacial* de $\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$, com conexão de Levi-Civita denotada por ∇. Orientamos Σ^n pela escolha de um campo vetorial normal unitário η. Então as fórmulas de Gauss e Weingarten para tais hipersuperfícies são dadas por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \varepsilon_\eta \langle A(X), Y \rangle \eta \quad \text{e} \quad A(X) = -\overline{\nabla}_X \eta, \tag{4.41}$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Observação 4.14. *Paralelamente ao que foi exposto na Observação 2.5 para o caso de subvariedades, no contexto de hipersuperfícies consideramos duas funções naturalmente associadas à imersão: a função altura, definida por $\zeta = (\pi_{\mathbb{R}})|_{\Sigma}$, e a função suporte, dada por $\langle \eta, \partial_t \rangle$. Em particular, quando ζ é constante, dizemos que Σ^n é isometricamente equivalente a uma slice $M^n \times \{t_0\}$ de $\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Por outro lado, quando $\langle \eta, \partial_t \rangle = 0$, dizemos que Σ^n é isométrica a um cilindro vertical da forma $\pi_M(M^{n-1})$, onde M^{n-1} é uma hipersuperfície de $M^n(c)$. Observe que esse último caso não pode ocorrer quando $\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$ é uma variedade Lorentziana, pois tanto η quanto ∂_t são campos vetoriais* *de tipo temporal. Nesse cenário, existe um único número $\varphi \geq 0$, denominado ângulo hiperbólico entre η e ∂_t, tal que*

$$\langle \eta, \partial_t \rangle = \cosh(\varphi).$$

Esse número φ mede a separação causal entre os campos vetoriais unitários temporais η e ∂_t e está bem definido no caso Lorentziano, uma vez que ambos pertencem ao cone temporal futuro e satisfazem $\langle \eta, \eta \rangle = \langle \partial_t, \partial_t \rangle = -1$. Assim, a função $\varphi : \Sigma \to [0, +\infty)$ é suave e pode ser utilizada como um parâmetro geométrico adicional para descrever a inclinação da hipersuperfície em relação à direção temporal do espaço produto. A função suporte, portanto, pode ser expressa como

$$\langle \eta, \partial_t \rangle = \cosh(\varphi),$$

e, inversamente, temos

$$\varphi = \cosh^{-1}(\langle \eta, \partial_t \rangle).$$

Um cálculo direto a partir de (2.18) mostra que

$$\partial_t = T + \varepsilon \langle \eta, \partial_t \rangle \eta.$$

Consequentemente, a norma de T satisfaz:

$$|T|^2 = \varepsilon \left(1 - \langle \eta, \partial_t \rangle^2\right), \tag{4.42}$$

onde $| \cdot |$ denota a norma induzida na variedade Σ^n.

Além disso, das fórmulas de Gauss e Weingarten (4.41), temos

$$\nabla_X T = \langle \eta, \partial_t \rangle A(X) \quad \text{e} \quad X\langle \eta, \partial_t \rangle = -\varepsilon \langle A(T), X \rangle, \tag{4.43}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Considerando $\{e_1, \dots e_n\}$ um referencial ortonormal local em Σ^n, e fazendo $X = \sum_i X_i e_i$, $Y = \sum_j Y_j e_j$ e $Z = \sum_k Z_k e_k$ campos tangentes à Σ^n, segue de (2.24) a *equação* *de Gauss* para hipersuperfícies:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = c(\langle X,Z\rangle Y - \langle Y,Z\rangle X) + \varepsilon c\langle Z,T\rangle(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y) \\ - \varepsilon c(\langle X,Z\rangle\langle Y,T\rangle - \langle Y,Z\rangle\langle X,T\rangle)T \\ + \varepsilon\left[\langle A(X),Z\rangle A(Y) - \langle A(Y),Z\rangle A(X)\right], \end{aligned} \tag{4.44}$$

Além desta, temos a *equação de Codazzi*

$$\nabla A(Y,X) - \nabla A(X,Y) = c\langle N,\partial_t\rangle(\langle Y,T\rangle X - \langle X,T\rangle Y), \tag{4.45}$$

onde $\nabla A : \mathfrak{X}(\Sigma)\times\mathfrak{X}(\Sigma) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ denota o diferencial covariante de A,

$$\nabla A(X,Y) = (\nabla_Y A)(X) = \nabla_Y A(X) - A(\nabla_Y X), \quad \text{for all} \quad X,Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Como decorrencia da equação de Gauss (4.44), as curvaturas de Ricci e escalar são dadas por

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}(X,Y) = c\left(n-1-\varepsilon|T|^2\right)\langle X,Y\rangle - \varepsilon(n-2)c\langle X,T\rangle\langle Y,T\rangle \\ + \varepsilon\left(\mathrm{tr}(A)\langle A(X),Y\rangle - \langle A^2(X),Y\rangle\right) \end{aligned} \tag{4.46}$$

e

$$n(n-1)R = c(n-1)\left(n-2\varepsilon|T|^2\right) + \varepsilon(n^2H^2 - S), \tag{4.47}$$

Definimos por H e S, a função curvatura média e o quadrado da norma da segunda forma fundamental A, respectivamente, pelas expressões:

$$H = \frac{\varepsilon}{n}\mathrm{tr}(A) \quad \text{e} \quad S = \mathrm{tr}(A^2).$$

É bem conhecido que, no contexto de imersões nas formas espaciais Riemanniana ou Lorentziana, o operador de forma é um tensor que satisfaz a equação de Codazzi. No caso em que o espaço ambiente é a variedade produto $\overline{M}_\varepsilon^{n+1}(c)$, o resultado a seguir estabelece simetrias importantes para o operador de forma.

Lema 4.15. *Seja Σ^n uma hipersuperfície Riemanniana orientável, imersa no produto semi-Riemanniano $\overline{M}_\varepsilon^{n+1}(c)$, e seja ζ a função altura. Então, valem as seguintes identi-*

dades:

(a) A segunda derivada da equação de Codazzi é dada por:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(Y,X,Z) + c\langle N,\partial_t\rangle^2 \left(\langle A(Z),X\rangle Y - \langle A(Z),Y\rangle X\right) \\ - \varepsilon c\langle A(T),Z\rangle \left(\langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X\right).\end{aligned} \tag{4.48}$$

(b) A fórmula de Ricci é:

$$\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(X,Z,Y) + R(Y,Z)A(X) - A(R(Y,Z)X), \tag{4.49}$$

onde $\nabla^2 A(X,Y,Z) := (\nabla_Z \nabla A)(X,Y)$, *para todo* $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Demonstração: O item (b) é bem conhecido. Provaremos o item (a). A partir da equação de Codazzi (4.45), um cálculo direto nos fornece:

$$\begin{aligned}\nabla^2 A(X,Y,Z) = \nabla^2 A(Y,X,Z) + cZ\langle N,\partial_t\rangle \left(\langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X\right) \\ + c\langle N,\partial_t\rangle \left(\langle X,\nabla_Z T\rangle Y - \langle Y,\nabla_Z T\rangle X\right).\end{aligned} \tag{4.50}$$

Por outro lado, utilizando (4.43), vemos que os dois últimos termos de (4.50) podem ser reescritos da seguinte forma:

$$Z\langle N,\partial_t\rangle \left(\langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X\right) = -\varepsilon\langle A(T),Z\rangle \left(\langle X,T\rangle Y - \langle Y,T\rangle X\right), \tag{4.51}$$

e

$$\langle N,\partial_t\rangle \left(\langle X,\nabla_Z T\rangle Y - \langle Y,\nabla_Z T\rangle X\right) = \langle N,\partial_t\rangle^2 \left(\langle A(Z),X\rangle Y - \langle A(Z),Y\rangle X\right). \tag{4.52}$$

Portanto, substituindo (4.51) e (4.52) em (4.50), obtemos a equação (4.48). ■

Como aplicação das equações estabelecidas acima, temos a seguinte fórmula do tipo Simons:

Teorema 4.16. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície Riemanniana orientável imersa em um es-*

paço produto semi-Riemanniano $\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$. Então,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= |\nabla A|^2 + n\operatorname{tr}(A\circ \operatorname{Hess}\operatorname{tr}(A)) + nc\left(2-\varepsilon|T|^2\right)(nS-\operatorname{tr}(A)^2) - \varepsilon S^2\\ &\quad - \varepsilon c\left(2n\langle A^2(T),T\rangle - 3\operatorname{tr}(A)\langle A(T),T\rangle + |T|^2 S\right) + \varepsilon\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^3).\end{aligned}$$

Demonstração: Primeiramente, relembremos a seguinte fórmula de Weitzenböck:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= |\nabla A|^2 + \langle \Delta A, A\rangle\\ &= |\nabla A|^2 + \sum_{i,j}\langle \operatorname{tr}(\nabla^2 A(e_j,e_i,e_i)), A(e_j)\rangle,\end{aligned} \tag{4.53}$$

onde $\Delta A : \mathfrak{X}(\Sigma)\to\mathfrak{X}(\Sigma)$ é o Laplaciano da segunda forma fundamental, isto é,

$$\Delta A(X) = \operatorname{tr}\left(\nabla^2 A(X,\cdot,\cdot)\right) = \sum_{i=1}^{n}\nabla^2 A(X,e_i,e_i), \tag{4.54}$$

com $\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal local em $\mathfrak{X}(\Sigma)$.

Tomando $Y = Z = e_i$ em (4.48) e tomando o traço, obtemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\nabla^2 A(X,\cdot,\cdot)) &= \operatorname{tr}(\nabla^2 A(\cdot,X,\cdot)) + c\langle N,\partial_t\rangle^2\left(A(X)-\operatorname{tr}(A)X\right)\\ &\quad - \varepsilon c\left(\langle X,T\rangle A(T) - \langle A(T),T\rangle X\right).\end{aligned} \tag{4.55}$$

Por outro lado, pela equação (4.49):

$$\nabla^2 A(e_i,X,e_i) = \nabla^2 A(e_i,e_i,X) + R(X,e_i)A(e_i) - A(R(X,e_i)e_i). \tag{4.56}$$

Pela equação de Gauss (4.44), temos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} R(X,e_i)A(e_i) &= c\left(A(X)-\operatorname{tr}(A)X\right) + \varepsilon\left(A^3(X) - SA(X)\right)\\ &\quad + \varepsilon c\left(\operatorname{tr}(A)\langle X,T\rangle - \langle A(T),X\rangle\right)T\\ &\quad + \varepsilon c\left(\langle A(T),T\rangle X - \langle X,T\rangle A(T)\right),\end{aligned} \tag{4.57}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} A(R(X,e_i)e_i) &= -c(n-1)A(X) + \varepsilon\left(A^3(X) - \operatorname{tr}(A)A^2(X)\right)\\ &\quad + \varepsilon c\left(|T|^2A(X) + (n-2)\langle X,T\rangle A(T)\right).\end{aligned} \tag{4.58}$$

Substituindo (4.57) e (4.58) em (4.56) e tomando o traço, obtemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\nabla^2A(\cdot,X,\cdot)) &= \operatorname{tr}(\nabla^2A(\cdot,\cdot,X)) + c(nA(X) - \operatorname{tr}(A)X) + \varepsilon\operatorname{tr}(A)A^2(X)\\ &\quad + \varepsilon c\left(\langle A(T),T\rangle X - (n-1)\langle X,T\rangle A(T) - |T|^2A(X)\right)\\ &\quad + \varepsilon c\left(\operatorname{tr}(A)\langle X,T\rangle - \langle A(T),X\rangle\right)T - \varepsilon SA(X).\end{aligned} \tag{4.59}$$

Como o traço comuta com a conexão de Levi-Civita, temos:

$$\operatorname{tr}\left(\nabla^2A(\cdot,\cdot,X)\right) = \nabla_X\left(\operatorname{tr}(\nabla A)\right).$$

Afirmamos que:

$$\operatorname{tr}(\nabla A) = \nabla\operatorname{tr}(A) + c(n-1)\langle N,\partial_t\rangle T. \tag{4.60}$$

De fato, pela equação de Codazzi (4.45):

$$\begin{aligned}\langle\nabla A(e_i,e_i),X\rangle &= \langle(\nabla_{e_i}A)(e_i),X\rangle = \langle e_i,(\nabla_{e_i}A)(X)\rangle = \langle e_i,\nabla A(X,e_i)\rangle\\ &= \langle e_i,\nabla A(e_i,X)\rangle + c\langle N,\partial_t\rangle\left(\langle X,T\rangle\langle e_i,e_i\rangle - \langle X,e_i\rangle\langle T,e_i\rangle\right),\end{aligned}$$

o que implica que:

$$\langle\operatorname{tr}(\nabla A),X\rangle = \langle\nabla\operatorname{tr}(A),X\rangle + c(n-1)\langle N,\partial_t\rangle\langle X,T\rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, o que prova a afirmação.

Usando agora (4.43) e (4.60), obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla_X\left(\operatorname{tr}(\nabla A)\right) &= \nabla_X\nabla\operatorname{tr}(A) - \varepsilon(n-1)c\langle X,A(T)\rangle T\\ &\quad + c(n-1)\langle N,\partial_t\rangle^2A(X).\end{aligned} \tag{4.61}$$

Substituindo (4.55), (4.59) e (4.61) em (4.54), temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\nabla^2 A(X,\cdot,\cdot)) = {} & \nabla_X \nabla \operatorname{tr}(A) + c(2-\varepsilon|T|^2)(nA(X) - \operatorname{tr}(A)X) \\ & - \varepsilon c\,(n\langle A(T),X\rangle T - 2\langle A(T),T\rangle X + \langle X,T\rangle A(T)) \\ & - \varepsilon c\left(|T|^2 A(X) - \operatorname{tr}(A)\langle X,T\rangle T\right) \\ & + \varepsilon\left(\operatorname{tr}(A)A^2(X) - SA(X)\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\langle \Delta A, A\rangle = {} & \operatorname{tr}(A\circ \operatorname{Hess}\operatorname{tr}(A)) + c(2-\varepsilon|T|^2)(nS - \operatorname{tr}(A)^2) \\ & - \varepsilon c\left(2n\langle A^2(T),T\rangle - 3\operatorname{tr}(A)\langle A(T),T\rangle + |T|^2 S\right) \\ & + \varepsilon\left(\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^3) - S^2\right).\end{aligned} \tag{4.62}$$

Finalmente, inserindo (4.62) em (4.53), concluímos a demonstração. ∎

Observação 4.17. *Vejamos que a fórmula de Simons obtida no Teorema 4.16 é uma consequência do Teorema 2.6 derivada no contexto de subvariedades. De fato, como a codimensão é* 1*, o fibrado normal é gerado pelo vetor normal* $\eta := e_{n+1}$*. Tomando* $\alpha = \beta = n+1$ *no Teorema 2.6, definindo* $A := A_{n+1}$ *e* $h_{ij} := h_{ij}^{n+1}$*, obtemos:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S = {} & \sum_{i,j,k}(h_{ijk})^2 + \sum_{i,j,k} h_{ij}h_{kkij} + c(n-\epsilon|T|^2)S - 2nc\epsilon|A(T)|^2 - cn^2H^2 \\ & + 3c\epsilon\operatorname{tr}(A)\langle A(T),T\rangle - cn\epsilon\langle N,h\rangle N_{n+1}\sum_i h_{ii} - \varepsilon_{n+1}S \\ & + cn\epsilon\varepsilon_{n+1}N_{n+1}^2\sum_{i,j}(h_{ij})^2 + \varepsilon_{n+1}\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^3),\end{aligned} \tag{4.63}$$

Como $h = \varepsilon_{n+1}H\eta$ *e* $N = \epsilon\langle \eta, \partial_t\rangle\eta$*, segue que:*

$$N_{n+1} = \langle N, e_{n+1}\rangle = \epsilon\varepsilon_{n+1}\langle \eta, \partial_t\rangle \quad e \quad \langle h, N\rangle = \epsilon\varepsilon_{n+1}H\langle \eta,\partial_t\rangle$$

Logo, pela equação (4.42), *juntamente com o fato de que* $\varepsilon_{n+1} = \epsilon$, *temos:*

$$\begin{aligned} -cn\epsilon\langle N, h\rangle N_{n+1}\sum_i h_{ii} + cn\epsilon\varepsilon_{n+1}N_{n+1}^2\sum_{i,j}(h_{ij})^2 &= -cn\left(1-\epsilon|T|^2\right)(nH^2 - S) \\ &= -cn^2H^2 + cn^2\epsilon|T|^2H^2 \\ &\quad + cnS - cn\epsilon|T|^2S. \end{aligned} \tag{4.64}$$

Portanto, substituindo as expressões da equação (4.64) *em* (4.63), *obtemos o resultado desejado.*

4.2.1 Hipersuperfícies de curvatura média zero em $\overline{M}_{\varepsilon}^{n+1}(c)$

Nesta seção, aplicaremos o Teorema 4.16 no estudo de hipersuperfícies Riemannianas em espaços produto Lorentzianos e Riemannianos.

Os autores em (ALBUJER; ALÍAS, 2009) demonstraram que uma superfície tipo-espaço completa em um produto do tipo $-I \times M^2$, onde M^2 é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional não negativa, deve ser totalmente geodésica. Em particular, quando a curvatura seccional de M^2 é estritamente positiva, esta superfície é um *slice* em $-I \times M^2$.

Como primeira aplicação, apresentamos uma extensão para dimensões mais altas do Teorema 3.3 de (ALBUJER; ALÍAS, 2009), considerando o caso de $\overline{M}_{-1}^{n+1}(c)$, com $c > 0$, e no contexto de imersões estocasticamente completas. Essa generalização permite obter uma caracterização clara dos *slices* em variedades de dimensão superior. Dessa forma, nossa aplicação inicial proporciona uma descrição precisa dos *slices* em $\overline{M}_{-1}^{n+1}(c)$, ampliando os resultados obtidos em dimensões mais baixas.

Teorema 4.18. *As únicas hipersuperfícies espaciais completas e máximas imersas em* $\overline{M}_{-1}^{n+1}(c)$, *com* $c \geq 0$, *são as totalmente geodésicas. Além disso, se* $c > 0$, *essas são os* slices.

Demonstração: Seja Σ^n uma hipersuperfície espacial maximal completa em $\overline{M}_{-1}^{n+1}(c)$. Pelo Teorema 4.16, temos que

$$\frac{1}{2}\Delta S = |\nabla A|^2 + \left(2nc + c(n+1)|T|^2 + S\right)S + 2nc\langle A^2(T), T\rangle. \tag{4.65}$$

Note que a expressão em (4.65) pode ser estimada como segue:

$$\frac{1}{2}\Delta S \geq \left(2nc + c(n+1)|T|^2 + S\right) S \geq (2nc + S)\, S,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $\nabla A = 0$ e $A(T) = 0$. Assim, concluímos que:

$$\Delta S \geq 2S^2.$$

Por outro lado, de (4.46), temos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,X) &= c\left(n - 1 + |T|^2\right)|X|^2 + c(n-2)\langle X, T\rangle^2 + \langle A^2(X), X\rangle \\ &\geq c(n-1)|X|^2,\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Isso implica que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente. Como Σ^n é completa, segue que o princípio do máximo de Omori-Yau vale em Σ^n. Logo, aplicando o Corolário 3.12 para $f(t) = 2t^2$ e $\nu = 2$, seque que $S = 0$, isto é, Σ^n é totalmente geodésica.

Assumindo $c > 0$ e sabendo que $A = 0$, um cálculo direto a partir de (4.43) mostra que $|T|^2$ e $\langle \eta, \partial_t\rangle$ são constantes. Consequentemente, pela equação de Codazzi (4.45), temos que $\langle \eta, \partial_t\rangle = 0$ ou $T = 0$. Finalmente, como $\langle \eta, \partial_t\rangle < 0$, segue que $|T|^2 = 0$, ou seja, Σ^n é um *slice*. ■

Assumindo que Σ^n é estocasticamente completa, quando o espaço ambiente é $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 4.19. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima estocasticamente completa imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ com $c > 0$. Assuma que*

$$\sup_{\Sigma}\left(S + c(3n-1)|T|^2\right) \leq nc. \tag{4.66}$$

Então Σ^n está contida em um slice.

Demonstração: Como Σ^n é mínima, o Teorema 4.16 fornece que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= |\nabla A|^2 + nc(2-|T|^2)S - S^2 - c\left(2n\langle A^2(T),T\rangle + |T|^2 S\right)\\ &= |\nabla A|^2 + \left(2nc - c(n+1)|T|^2 - S\right)S - 2nc\langle A^2(T),T\rangle.\end{aligned} \tag{4.67}$$

Sendo $c>0$, podemos usar o Lema 3.1 para estimar o último termo acima da seguinte forma:

$$-2nc\langle A^2(T),T\rangle \geq -2(n-1)cS|T|^2. \tag{4.68}$$

Portanto, substituindo (4.68) em (4.67) e utilizando (4.66), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &\geq |\nabla A|^2 + \left(2nc - c(3n-1)|T|^2 - S\right)S\\ &\geq |\nabla A|^2 + ncS\\ &\geq ncS,\end{aligned}$$

onde a última desigualdade é uma igualdade se, e somente se, $\nabla A = 0$.

Note que (4.66) garante que $\sup_\Sigma S < +\infty$, segue do Corolário 3.16 que $S=0$, e, portanto, Σ^n é totalmente geodésica. Assim, a equação (4.43) garante que as funções $\langle N,\partial_t\rangle$ e $|T|$ são constantes em Σ^n.

Consequentemente, pela equação de Codazzi (4.45), temos que ou $\langle N,\partial_t\rangle = 0$ ou $|T|^2=0$. No primeiro caso, pela equação (4.42), temos $|T|^2=1$, o que contradiz (4.66). Logo, concluímos que $|T|^2=0$ e, portanto, Σ^n está contida em um *slice*. ■

No caso em que Σ^n é uma variedade Riemanniana completa, (YAU, 1978) mostrou que uma limitação inferior para a curvatura de Ricci constitui uma condição suficiente para que o movimento browniano sobre Σ^n tenha tempo de vida infinito — ou seja, para que Σ^n seja estocasticamente completa. Nesse contexto, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.20. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima completa imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ com $c>0$. Assuma que*

$$\sup_\Sigma\left(S + c(3n-1)|T|^2\right) \leq nc. \tag{4.69}$$

Então Σ^n é um slice.

Demonstração: É suficiente provar que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente. De (4.46) e (4.69), obtemos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(X,X) &\geq c(n-1)(1-|T|^2)|X|^2 - \langle A^2X, X\rangle \\
&= \big(c(n-1)(1-|T|^2) - S\big)\,|X|^2 \\
&\geq \big(-c(n-1)|T|^2 - S\big)\,|X|^2 \\
&= \big(-c(3n-1)|T|^2 - S + 2nc|T|^2\big)\,|X|^2 \\
&\geq \left(-\sup_{\Sigma}\big(S + c(3n-1)|T|^2\big) + 2nc|T|^2\right)|X|^2 \\
&\geq -nc|X|^2,
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Portanto, como Σ^n é completa, segue que Σ^n é estocasticamente completa. Logo, pelo Teorema 4.19, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de uma *slice*. Sendo Σ^n completa, segue que Σ^n é uma *slice* de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. ■

Em dimensão 2, a igualdade (3.1) no Lema 3.1 é sempre verdadeira. Assumindo a validade disso, nosso próximo resultado é uma extensão do Teorema 4.1 de (BATISTA, 2011) para dimensão arbitrária.

Teorema 4.21. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima estocasticamente completa imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ com $c < 0$. Assuma que a igualdade ocorre em* (3.1) *e*

$$\sup_{\Sigma}\big(S - c(3n-1)\langle N, \partial_t\rangle^2\big) < -c(n-1). \tag{4.70}$$

Então, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um cilindro vertical.

Demonstração: Como a igualdade (3.1) é válida, temos

$$\langle A^2(T), T\rangle = \frac{n-1}{n}S|T|^2.$$

Além disso, desde que $H = 0$ e $\varepsilon = 1$, o Teorema 4.16 fornece:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta S &= |\nabla A|^2 + nc(2 - |T|^2)S - S^2 - c\left(2(n-1)S|T|^2 + |T|^2 S\right) \\ &= |\nabla A|^2 + \left(2nc - c(3n-1)|T|^2 - S\right) S \\ &\geq \left(-c(n-1) + c(3n-1)\langle N, \partial_t\rangle^2 - S\right) S,\end{aligned} \tag{4.71}$$

onde, na última desigualdade, usamos (4.42).

Sendo $c < 0$, definimos

$$\frac{d}{2} := -\sup_{\Sigma}\left(S - c(3n-1)\langle N, \partial_t\rangle^2\right) - c(n-1) > 0.$$

Assim, a desigualdade (4.71) torna-se:

$$\Delta S \geq dS.$$

Por (4.70),

$$S \leq S - c(3n-1)\langle N, \partial_t\rangle^2 \leq \sup_{\Sigma}\left(S - c(3n-1)\langle N, \partial_t\rangle^2\right) < -c(n-1)$$

segue que $\sup_\Sigma S < +\infty$. Logo podemos aplicar o Corolário 3.16 para concluir que $S = 0$, o que implica que Σ^n é totalmente geodésica. Substituindo esse fato na equação de Codazzi (4.45), temos que ou $\langle N, \partial_t\rangle = 0$ ou $|T|^2 = 0$. Note que, se $|T|^2 = 0$, da equação (4.42) segue que $\langle N, \partial_t\rangle^2 = 1$, o que contradiz (4.70). Portanto, concluímos que $\langle N, \partial_t\rangle^2 = 0$. Então, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um cilindro vertical. ■

Raciocinando de forma analógica a demonstração do Corolário 4.20, temos

Corolário 4.22. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima completa imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ com $c < 0$. Assuma que a igualdade é verdadeira em* (3.1) *e*

$$\sup_{\Sigma}\left(S - c(3n-1)\langle N, \partial_t\rangle^2\right) < -c(n-1). \tag{4.72}$$

Então Σ^n é um cilindro vertical.

Demonstração: Verifiquemos que a curvatura de Ricci é limitada inferiormente. De (4.46) e (4.72), segue que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,X) &= c\big((n-1)(1-|T|^2)|X|^2 - \langle A^2X,X\rangle\big)\\ &\geq c(n-1)|X|^2 - S|X|^2\\ &= \big(c(n-1)+c(3n-1)\langle N,\partial_t\rangle^2 - c(3n-1)\langle N,\partial_t\rangle^2 - S\big)\,|X|^2\\ &\geq \left(c(n-1) - \sup_\Sigma\big(S - c(3n-1)\langle N,\partial_t\rangle^2\big)\right)|X|^2\\ &\geq 2c(n-1)|X|^2,\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Portanto, aplica-se o princípio clássico do máximo de Omori–Yau, e o resultado segue diretamente do Teorema 4.21. ■

Em virtude do Teorema 3.5 e do Corolário 4.22, segue imediatamente a seguinte consequência:

Corolário 4.23. *Seja* Σ^n *uma hipersuperfície mínima completa imersa em* $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. *Assuma que a igualdade ocorre em* (3.1) *e*

$$\sup_\Sigma\big(S + (3n-1)\langle N,\partial_t\rangle^2\big) < n-1.$$

Então Σ^n *é isométrica a* $\mathbb{H}^{n-1}\times\mathbb{R}$.

4.2.2 Hipersuperfície com curvatura média constante em $\overline{M}^{n+1}_\varepsilon(c)$

Nosso objetivo é estudar hipersuperfícies orientáveis com curvatura média constante, imersas no espaço produto $M^n(c)\times\varepsilon\mathbb{R}$. Como a função curvatura média H é constante, fixamos a orientação de Σ^n de modo que $H \geq 0$.

Em seguida, consideramos a parte sem traço do operador da segunda forma fundamental A, definida por

$$\phi = A - \varepsilon H I \tag{4.73}$$

onde I denota o operador identidade em $\mathfrak{X}(\Sigma)$. Assim, temos $\mathrm{tr}(\phi) = 0$, e vale a identidade

$$|\phi|^2 = S - nH^2 \geq 0, \tag{4.74}$$

com igualdade em um ponto $p \in \Sigma^n$ se, e somente se, p é um ponto umbílico.

A partir das definições em (4.73) e (4.74), obtemos a seguinte igualdade:

$$\phi^3 = A^3 - \frac{3}{n}\,\mathrm{tr}(A)A^2 + \frac{3}{n^2}\,\mathrm{tr}(A^2)A - \frac{1}{n^3}\,\mathrm{tr}(A)^3 I,$$

e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\phi^3) &= \mathrm{tr}(A^3) - \frac{3}{n}\,\mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(A^2) + \frac{3}{n^2}\,\mathrm{tr}(A^2)\,\mathrm{tr}(A) - \frac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A)^3 \\ &= \mathrm{tr}(A^3) - \varepsilon 3H|\phi|^2 - \varepsilon nH^3. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Além disso, temos:

$$|\phi|^4 = S^2 + n^2H^4 - 2nH^2|\phi|^2. \tag{4.76}$$

A partir das equações (4.75) e (4.76), segue que:

$$\varepsilon nH\ \mathrm{tr}(A^3) - S^2 = -|\phi|^4 + \varepsilon nH\ \mathrm{tr}(\phi^3) + nH^2|\phi|^2. \tag{4.77}$$

Por outro lado, também temos:

$$\begin{aligned} &2n\langle A^2(T), T\rangle - 3nH\langle A(T), T\rangle + |T|^2 S \\ &\quad = 2n\langle \phi^2(T), T\rangle + 4nH\langle \phi(T), T\rangle + 2nH^2|T|^2 \\ &\qquad - 3nH\langle \phi(T), T\rangle - 3nH^2|T|^2 + |T|^2 S \\ &\quad = 2n\langle \phi^2(T), T\rangle + \mathrm{tr}(A)\langle \phi(T), T\rangle + |T|^2|\phi|^2. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Portanto, como H é constante, ao substituir (4.77) e (4.78) no Teorema 4.16, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &= |\nabla\phi|^2 + nc\left(2 - \varepsilon|T|^2\right)|\phi|^2 + nH\,\mathrm{tr}(\phi^3) - \varepsilon|\phi|^4 + \varepsilon nH^2|\phi|^2 \\ &\quad - \varepsilon c\left(2n\langle \phi^2(T), T\rangle + \mathrm{tr}(A)\langle \phi(T), T\rangle + |T|^2|\phi|^2\right). \end{aligned} \tag{4.79}$$

Quando $n = 2$, é imediato que $\operatorname{tr}(\phi^3) = 0$. Para $n \geq 3$, como ϕ é sem traço, podemos aplicar o Lema 2.2 para $A_1 = A_2 = \phi$ a fim de obter

$$|\operatorname{tr}(\phi^3)| \leq \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|^3,$$

com igualdade em um ponto $p \in \Sigma^n$ se, e somente se, ϕ é diagonalizável em p com $(n-1)$ autovalores iguais a a e um autovalor igual a $-(n-1)a$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$$nH\operatorname{tr}(\phi^3) \geq -nH|\operatorname{tr}(\phi^3)| \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3. \tag{4.80}$$

Substituindo (4.80) em (4.79), obtemos a estimativa:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq{} & |\nabla\phi|^2 + nc(2 - \varepsilon|T|^2)|\phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H||\phi|^3 \\
& - \varepsilon|\phi|^4 + \varepsilon nH^2|\phi|^2 \\
& - \varepsilon c\left(2n\langle\phi^2(T), T\rangle + \varepsilon nH\langle\phi(T), T\rangle + |T|^2|\phi|^2\right) \\
={} & |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 P_{H,c,\varepsilon}(|\phi|) + c(n - \varepsilon(n+1)|T|^2)|\phi|^2 \\
& - \varepsilon nc\left(2\langle\phi^2(T), T\rangle + \varepsilon H\langle\phi(T), T\rangle\right),
\end{aligned}$$

onde $P_{H,c,\varepsilon}(x)$ é o polinômio introduzido por (ALENCAR; DO CARMO, 1993), dado por:

$$P_{H,c,\varepsilon}(x) = -\varepsilon x^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|x + n(c + \varepsilon H^2). \tag{4.81}$$

Portanto, provamos uma estimativa inferior para o laplaciano do quadrado da norma do operador sem traço.

Proposição 4.24. *Seja Σ^n uma hipersuperfície com curvatura média constante, imersa em $\overline{M}_\varepsilon^{n+1}(c)$. Então, vale a desigualdade:*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq{} & |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 P_{H,c,\varepsilon}(|\phi|) + c(n - \varepsilon(n+1)|T|^2)|\phi|^2 \\
& - \varepsilon nc\left(2\langle\phi^2(T), T\rangle + \varepsilon H\langle\phi(T), T\rangle\right),
\end{aligned}$$

onde $P_{H,c,\varepsilon}(x)$ é o polinômio definido em (4.81).

Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, ϕ é identicamente nulo ou, em *cada ponto $p \in \Sigma^n$, a hipersuperfície Σ^n possui exatamente duas curvaturas principais distintas, sendo uma delas de multiplicidade um.*

Observação 4.25. *De maneira análoga ao raciocínio desenvolvido na Observação 4.17, a identidade* (4.79) *pode ser estabelecida como uma consequência direta — e, de fato, uma aplicação imediata — do Corolário 2.7, evidenciando a consistência estrutural entre os resultados previamente obtidos.*

Agora, apresentamos algumas aplicações da Proposição 4.24 para o caso em que o espaço ambiente é $\overline{M}^{n+1}_{-1}(c)$. Inicialmente, trataremos de hipersuperfícies do tipo-hélice, também conhecidas como hipersuperfícies com ângulo constante. Dizemos que uma hipersuperfície espacial de $\overline{M}^{n+1}_{-1}(c)$ é do *tipo-hélice* se a função ângulo $\langle N, \partial_t \rangle$ é constante em Σ^n. Nesse caso, a equação (4.43) implica que $A(T) = 0$ é sempre válida e, portanto, o tensor sem traço satisfaz $\phi(T) = HT$. Com isso, temos:

Teorema 4.26. *Seja Σ^n uma hipersuperfície espacial completa do tipo hélice, imersa em $\overline{M}^{n+1}_{-1}(c)$, com $c > 0$, e com curvatura média constante. Se*

$$H^2 < \frac{8(n-1)c}{n^2},$$

então Σ^n é um slice.

Demonstração: Como $\phi(T) = HT$, temos

$$-H\langle \phi(T), T\rangle + 2\langle \phi^2(T), T\rangle = \langle \phi^2(T), T\rangle. \tag{4.82}$$

Assim, pela Proposição 4.24 e pela equação (4.82), segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 P_{H,c,-1}(|\phi|) + c(n + (n+1)|T|^2)|\phi|^2 + nc\langle \phi^2(T), T\rangle \\ &\geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 \mathcal{P}_{H,c,-1}(|\phi|) \\ &\geq |\phi|^2 \mathcal{P}_{H,c,-1}(|\phi|), \end{aligned} \tag{4.83}$$

onde

$$\mathcal{P}_{H,c,\varepsilon}(x) = x^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|x + n(2c - H^2).$$

Para aplicarmos o Teorema 3.11 à função $|\phi|^2$, é necessário verificar que suas condições estão satisfeitas. Primeiramente, observemos que a hipótese $H^2 < \frac{4c(n-1)}{n^2}$, garante que $\mathcal{P}_{H,c,-1}(t) > 0$, para todo $t \geq 0$, uma vez que que o discriminante de $\mathcal{P}_{H,c,-1}(t)$,

$$D = \frac{n(n-2)^2}{n-1}H^2 - 4n(2c - H^2) = n\left(\frac{n^2H^2}{n-1} - 8c\right)$$

é estritamente negativo.

Definindo $u = |\phi|^2$, de (4.83), temos que u satisfaz a seguinte desigualdade diferencial:

$$\Delta u \geq f(u),$$

onde f é a função real dada por

$$f(t) = t^2\mathcal{P}_{H,c,-1}(t) = t^4 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}Ht^3 + n(2c - H^2)t^2.$$

Dessa forma,

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t^2} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^2\mathcal{P}_{H,c,-1}(t)}{t^2} = \lim_{t\to+\infty}\mathcal{P}_{H,c,-1}(t) = +\infty.$$

Por outro lado, uma vez que a curvature média H é constant, temos que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente, isto é:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,X) &= c(n-1)(1+|T|^2)|X|^2 + nH\langle A(X), X\rangle + |A(X)|^2 \\
&\geq \left|\left(A + \frac{nH}{2}I\right)X\right|^2 - \frac{n^2H^2}{4}|X|^2 \\
&\geq -\frac{n^2H^2}{4}|X|^2,
\end{aligned} \tag{4.84}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Sendo Σ^n completa, segue que o Princípio do Máximo de Omori-Yau é válido sobre Σ^n. Com tudo isso, estamos em condições para aplicar a Teorema 3.11, para $\nu = 2$, a fim de concluir que

$$0 \geq f\left(\sup_\Sigma|\phi|^2\right) = \sup_\Sigma|\phi|^2\mathcal{P}_{H,c,-1}(\sup_\Sigma|\phi|).$$

Consequentemente, ou $|\phi| = 0$, e Σ^n é totalmente umbilical, ou $\mathcal{P}_{H,c,-1}(\sup_\Sigma |\phi|) \leq 0$. Uma vez que $\mathcal{P}_{H,c,-1}(t) > 0$, segue que Σ^n é uma hipersuperfície totalmente umbilical de $\overline{M}^{n+1}_{-1}(\kappa)$. Como Σ^n é uma hélice, temos $HT = \phi(T) = 0$, e, portanto, pela equação de Codazzi, Σ^n é um *slice*. ∎

No caso limite em que $H^2 = \frac{8(n-1)c}{n^2}$, obtém-se uma estimativa superior para a norma quadrada da segunda forma fundamental da hipersuperfície Σ^n.

Proposição 4.27. *Seja Σ^n uma hipersuperfície espacial completa do tipo hélice, imersa em $\overline{M}^{n+1}_{-1}(c)$, com $c > 0$. Se*

$$H^2 = \frac{8(n-1)c}{n^2}, \tag{4.85}$$

então $S \leq 2cn$.

Demonstração: Primeiramente, assumamos que $n \geq 3$. Da equação (4.83), obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\phi|^2 \mathcal{P}_{H,c,-1}(|\phi|),$$

onde, usando a hipótese (4.85), o polinômio $\mathcal{P}_{H,c,-1}(x)$ é dado por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{H,c,-1}(x) &= x^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|x + n(2c - H^2) \\
&= x^2 - \frac{2(n-2)\sqrt{2c}}{\sqrt{n}}x + \frac{2c(n-2)^2}{n} \\
&= \left(x - \frac{(n-2)\sqrt{2c}}{\sqrt{n}}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Da equação (4.84), concluímos que a curvatura de Ricci de Σ^n é limitada inferiormente. Assim, raciocinando como no Teorema 4.26, podemos aplicar o Teorema 3.11 e obtemos:

$$\left(\sup_\Sigma |\phi|^2\right) \mathcal{P}_{H,c}\left(\sup_\Sigma |\phi|\right) \leq 0.$$

Portanto, ou $|\phi|^2 = 0$, ou $\mathcal{P}_{H,c}(\sup_\Sigma |\phi|) = 0$. Se $|\phi| = 0$, como Σ^n é do tipo hélice, temos $HT = \phi(T) = 0$, e, portanto, ou $H = 0$ ou $T = 0$. Em qualquer dos casos, $H = 0$, o que contradiz a hipótese $H^2 = \dfrac{8c(n-1)}{n^2}$. Logo, deve ocorrer

$$\sup_{\Sigma} |\phi|^2 = \frac{2(n-2)^2 c}{n}.$$

Substituindo esse valor na equação (4.74), obtemos:

$$\sup_{\Sigma} S = \frac{2(n-2)^2 c}{n} + \frac{8(n-1)c}{n} = 2nc,$$

e, portanto, $S \leq 2nc$.

Finalmente, no caso em que $n = 2$, da equação (4.74) temos $S = 4c$, pois $|\phi|^2 \geq 0$ e $H^2 = 4c$, o que implica a igualdade. ■

Agora, faremos algumas aplicações da Proposição 4.24 para o caso em que o espaço ambiente é $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Antes disso, recordemos que uma hipersuperfície de um espaço produto diz-se possuir uma *direção principal canônica* se o vetor T for diferente de zero e uma direção principal, ou seja, existe uma função real λ tal que $A(T) = \lambda T$. Geometricamente, uma hipersuperfície Σ^n de um espaço produto $M^n(c) \times \mathbb{R}$ possui uma direção principal canônica se o fibrado normal de Σ^n é flat quando esta é vista como uma subvariedade do espaço euclidiano $(n+2)$-dimensional $\mathbb{R}^{n+2}$ (ver (TOJEIRO, 2010)).

Nesse contexto, observamos que, se $T \neq 0$ e $A(T) = \lambda T$, então

$$\phi(T) = (\lambda - H)T,$$

ou seja, T é um autovetor de ϕ associado ao autovalor $\lambda - H$. A partir disso, um cálculo direto mostra que

$$2\langle \phi^2(T), T\rangle + H\langle \phi(T), T\rangle = |T|^2 Q_H(\lambda), \tag{4.86}$$

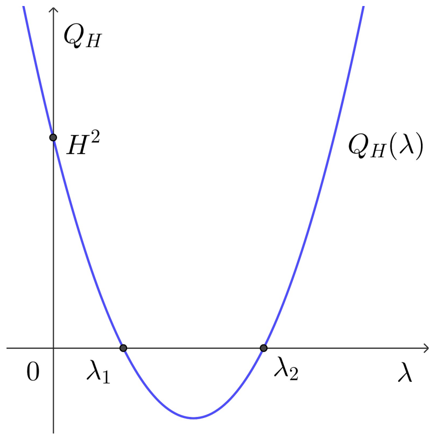
onde Q_H é o polinômio definido por:

$$Q_H(\lambda) = 2\lambda^2 - 3H\lambda + H^2. \tag{4.87}$$

Podemos observar que as raízes de $Q_H(\lambda) = 0$ são não negativas, a saber:

$$\lambda_1 = \frac{H}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = H.$$

Figure 1: Comportamento do polinômio $Q_H(x)$



Doravante, denotaremos por Σ^n_λ a hipersuperfície Σ^n tal que T é uma direção principal canônica, com λ representando o autovalor associado. Com isso, temos o resultado:

Teorema 4.28. *Seja Σ^n_λ uma hipersuperfície estocasticamente completa, com curvatura média constante, imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, com $c > 0$. Suponha que $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ e que*

$$\sup_\Sigma \left(c_n|\phi|^2 + c(n+1)|T|^2 \right) \leq 2nc, \tag{4.88}$$

onde

$$c_n = \frac{n^2 + 4n - 4}{4(n-1)} > 0. \tag{4.89}$$

Então, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um cilindro vertical.

Demonstração: Substituindo a equação (4.86) na Proposição 4.24, obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 P_{H,c}(|\phi|) + c(n - (n+1)|T|^2)|\phi|^2 - nc\,Q_H(\lambda)|T|^2, \tag{4.90}$$

onde $P_{H,c}(x)$ está definido em (4.81) e $Q_H(\lambda)$ em (4.87).

Por outro lado, usando a desigualdade de δ-Young, $2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$, para $\delta > 0$ e

$$a = \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H \quad \text{e} \quad b = |\phi|,$$

temos:

$$\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| \leq \frac{n(n-2)^2\delta}{2(n-1)}H^2 + \frac{1}{2\delta}|\phi|^2. \tag{4.91}$$

Consequentemente, tomando $\delta = \dfrac{2(n-1)}{(n-2)^2} > 0$, a desigualdade (4.91) torna-se:

$$\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi| \leq nH^2 + \frac{(n-2)^2}{4(n-1)}|\phi|^2. \tag{4.92}$$

Assim, da equação (4.92), podemos estimar $P_{H,c}(x)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P_{H,c}(|\phi|) &\geq -|\phi|^2 - nH^2 - \frac{(n-2)^2}{4(n-1)}|\phi|^2 + nc + nH^2 \\ &= -\left(1 + \frac{(n-2)^2}{4(n-1)}\right)|\phi|^2 + nc \\ &= (1-c_n)|\phi|^2 + nc, \end{aligned} \tag{4.93}$$

onde c_n está definido em (4.89). Substituindo (4.93) em (4.90) e usando a hipótese (4.88), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 &\geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\left(2nc - c_n|\phi|^2 - c(n+1)|T|^2 + |\phi|^2\right) - nc\,Q_H(\lambda)|T|^2 \\ &\geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2\left(2nc - \sup_\Sigma(c_n|\phi|^2 + c(n+1)|T|^2) + |\phi|^2\right) - nc\,Q_H(\lambda)|T|^2 \\ &\geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 - nc\,Q_H(\lambda)|T|^2. \end{aligned}$$

Como $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, temos $Q_H(\lambda) \leq 0$ (ver Figura 1). Assim, segue que

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^4 \geq |\phi|^4,$$

onde a última desigualdade é uma igualdade se, e somente se, $\nabla\phi = 0$.

Portanto, como $\sup_\Sigma |\phi|^2 < +\infty$, aplicando o Corolário 3.16, obtemos que $|\phi|^2 = 0$, ou seja, Σ^n_λ é uma hipersuperfície totalmente umbílica de $M^n(c) \times \mathbb{R}$. Isso implica que todas as desigualdades usadas ao longo da prova tornam-se igualdades. Em particular, a igualdade na desigualdade de δ-Young (4.92) nos fornece:

$$nH^2 = \frac{(n-2)^2}{4(n-1)}|\phi|^2 = 0,$$

o que implica $H = 0$ e, consequentemente, $A = 0$. Portanto, como $|T|^2 \neq 0$, pela equação de Codazzi, devemos ter $\langle N, \partial_t \rangle = 0$, ou seja, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um cilindro vertical. ■

No caso em que Σ^n_λ é uma hipersuperfície completa, obtemos a seguinte caracterização:

Corolário 4.29. *Seja Σ^n_λ uma hipersuperfície completa com curvatura média constante imersa em $M^n(c) \times \mathbb{R}$, $c > 0$. Assuma que $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ e*

$$\sup_\Sigma (c_n|\phi|^2 + c(n+1)|T|^2) \leq 2nc,$$

onde

$$c_n = \frac{n^2 + 4n - 4}{4(n-1)} > 0.$$

Então Σ^n é um cilindro vertical.

Demonstração: Usando sucessivamente a desigualdade de Cauchy–Schwarz, segue de (4.46) que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,X) &= c(n-1)(1-|T|^2)|X|^2 + nH\langle AX, X\rangle - \langle AX, AX\rangle \\
&\geq c(n-1)(1-|T|^2)|X|^2 + nH\langle \phi X, X\rangle + nH^2|X|^2 - \langle AX, X\rangle^2 \\
&\geq c(n-1)(1-|T|^2)|X|^2 - nH|\phi||X|^2 - |\phi|^2|X|^2.
\end{aligned}$$

Aplicando agora a desigualdade de δ-Young com $a = nH$, $b = |\phi|$ e $\delta = \dfrac{2(n-1)}{n^2} > 0$, obtemos:

$$nH|\phi| \leq (n-1)H^2 + \frac{n^2}{4(n-1)}|\phi|^2.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(X,X) &\geq c(n-1)(1-|T|^2)|X|^2 - \left(\frac{n^2+4n-4}{4(n-1)}\right)|\phi|^2|X|^2 \\
&\quad - (n-1)H^2|X|^2 \\
&\geq \left[c(n-1+2|T|^2) - \sup_{\Sigma}\left(c_n|\phi|^2 + c(n+1)|T|^2\right) - (n-1)H^2\right]|X|^2 \\
&\geq -\left(c(n+1)+(n-1)H^2\right)|X|^2 > -\infty.
\end{aligned}
$$

Assim, a curvatura de Ricci de Σ_λ^n é limitada inferiormente, aplicando o clássico principio do máximo de Omori-Yau, o resultado segue do Teorema 4.28. ■

Considerando o caso em que $M^n(c) \equiv \mathbb{S}^n$, do Corolário 4.29 em conjunto com o Teorema 3.5, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 4.30. *Seja Σ_λ^n uma hipersuperfície completa, com curvatura média constante, imersa em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. Suponha que $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ e que*

$$\sup_{\Sigma}\left(c_n|\phi|^2 + (n+1)|T|^2\right) < 2n,$$

onde c_n é a constante definida em (4.89). *Então, Σ^n é isométrica a $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$.*

4.2.3 Caracterização de hipersuperfícies rotacionais em $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$

Em (CATINO, 2016), Catino apresentou uma caracterização de hipersuperfícies compactas com curvatura média constante que satisfazem uma condição de pinçamento integral em $|\phi|$, aprimorando, assim, o resultado principal de (ALENCAR; DO CARMO, 1993).

A aplicação da equação de Simons que destacamos é uma desigualdade integral envolvendo o tensor sem traço da segunda forma fundamental e o gradiente da função altura. Inicialmente, recordemos que, para $f, g \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$, a desigualdade

$$\Delta f \geq g \tag{4.94}$$

vale no sentido das distribuições, se

$$\int_\Sigma f\Delta\varphi\, d\Sigma \geq \int_\Sigma \varphi g\, d\Sigma, \tag{4.95}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$. Em particular, se f é Lipschitz e Σ^n é compacta, então (4.95) é sempre verdadeira. De fato, tomemos $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ e suponhamos que $\varphi \geq 0$. Assim, multiplicando (4.94) por φ, obtemos

$$\varphi\Delta f \geq \varphi g.$$

Observemos que, tomando a integral e usando a primeira identidade de Green, temos

$$\int_\Sigma \varphi\Delta f\, d\Sigma = -\int_\Sigma \langle\nabla\varphi, \nabla f\rangle\, d\Sigma. \tag{4.96}$$

Como f é Lipschitz, ela é diferenciável quase em todo lugar (*a.e.*). Logo, sua derivada coincide com sua derivada fraca em $H^1(\Sigma)$ (cf. (EVANS; GARIEPY, 1992)). Por outro lado, a derivada fraca em $H^1(\Sigma)$ é dada por

$$-\int_\Sigma \langle\nabla\varphi, \nabla f\rangle\, d\Sigma = \int_\Sigma f\Delta\varphi\, d\Sigma, \tag{4.97}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Sigma)$ com $\varphi \geq 0$. Portanto, a partir de (4.96) e (4.97), obtemos (4.95).

Agora, podemos provar o seguinte resultado.

Teorema 4.31. *Seja Σ^n, com $n \geq 3$, uma hipersuperfície compacta imersa em $\mathbb{S}^n(c)\times\mathbb{R}$ com curvatura média constante. Então,*

$$\int_\Sigma \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|)\, d\Sigma \leq 0,$$

onde $\mathcal{Q}_H(x,y)$ é a função de duas variáveis definida por

$$\mathcal{Q}_H(x,y) = \left(P_{H,2c}(x) - c(3n-1)y^2\right)x - \sqrt{n(n-1)}Hy^2. \tag{4.98}$$

Se a igualdade ocorre, então Σ^n é isométrica a um slice ou a uma hipersuperfície rotacional de $\mathbb{S}^n\times\mathbb{R}$.

Demonstração: Primeiramente, recordemos a desigualdade apresentada na Proposição 4.24:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|^2 P_{H,c}(|\phi|) + c(n-(n+1)|T|^2)|\phi|^2 \\ - nc\left(2\langle\phi^2(T),T\rangle + H\langle\phi(T),T\rangle\right),\end{aligned} \tag{4.99}$$

onde $P_{H,1}(x)$ está definido em (4.81).

Por outro lado, pelo Lema 3.1, tem-se:

$$\begin{aligned}&- c\left(2n\langle\phi^2(T),T\rangle + nH\langle\phi(T),T\rangle\right) + c(n-(n+1)|T|^2)|\phi|^2 \\ &\geq c|\phi|\left(|\phi|(n-(3n-1)|T|^2) - \sqrt{n(n-1)}H|T|^2\right).\end{aligned}$$

Substituindo a estimativa acima na desigualdade (4.99), obtemos:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla\phi|^2 + |\phi|\,\mathcal{Q}_H(|\phi|,|T|), \tag{4.100}$$

onde $\mathcal{Q}_H(x,y)$ está definida em (4.98).

Além disso, pela desigualdade clássica de Kato:

$$|\nabla\phi|^2 \geq |\nabla|\phi||^2,$$

concluímos que (4.100) implica:

$$\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 \geq |\nabla|\phi||^2 + |\phi|\,\mathcal{Q}_H(|\phi|,|T|), \tag{4.101}$$

no sentido das distribuições.

Agora, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, definimos o conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{p \in \Sigma^n\ ;\ |\phi|(p) \geq \varepsilon\},$$

e a função regularizada:

$$f_\varepsilon(p) = \begin{cases} |\phi|(p), & \text{se } p \in \Omega_\varepsilon, \\ \varepsilon, & \text{se } p \in \Sigma^n \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (4.101) por f_ε^{-1} e integrando em Σ^n, obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \int_\Sigma \left(-\frac{1}{2}\Delta|\phi|^2 + |\nabla|\phi||^2\right) f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma + \int_\Sigma |\phi|\, \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|) f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma \\
&= \frac{1}{2}\int_\Sigma \langle \nabla|\phi|^2, \nabla f_\varepsilon^{-1}\rangle\, d\Sigma + \int_\Sigma |\nabla|\phi||^2 f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma + \int_\Sigma |\phi|\, \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|) f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma \\
&= -\int_\Sigma \langle \nabla|\phi|, \nabla f_\varepsilon\rangle |\phi| f_\varepsilon^{-2}\, d\Sigma + \int_\Sigma |\nabla|\phi||^2 f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma + \int_\Sigma |\phi|\, \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|) f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma \\
&= -\int_\Sigma |\nabla f_\varepsilon|^2 f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma + \int_\Sigma |\nabla|\phi||^2 f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma + \int_\Sigma |\phi|\, \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|) f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
\begin{aligned}
0 &\geq \int_{\Sigma\setminus\Omega_\varepsilon} |\nabla|\phi||^2 f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma + \int_\Sigma |\phi|\, \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|) f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma \\
&\geq \int_\Sigma |\phi|\, \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|) f_\varepsilon^{-1}\, d\Sigma.
\end{aligned}
$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \to 0$, chegamos à

$$
\int_\Sigma \mathcal{Q}_H(|\phi|, |T|)\, d\Sigma \leq 0. \tag{4.102}
$$

Se a igualdade ocorre em (4.102), então todas as desigualdades que conduzem a (4.99) tornam-se igualdades. Portanto, em cada ponto de Σ^n, ou ϕ é identicamente nulo — isto é, Σ^n é totalmente umbílica — ou ϕ possui apenas dois autovalores distintos: um de multiplicidade $(n-1)$ e outro de multiplicidade 1.

No primeiro caso, como H é constante, a hipersuperfície é paralela. Da equação de Codazzi, segue que Σ^n é um slice de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. No segundo caso, pelo Lema 3.1, T é um autovetor de A. Como A tem exatamente duas curvaturas principais, segue do Teorema 3.6 que Σ^n é isométrica a uma hipersuperfície rotacional de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. ■

4.3 HIPERSUPERFÍCIES 2-MÍNIMAS

Na última parte desta tese, voltamos nossa atenção para o estudo de hipersuperfícies orientáveis cuja segunda curvatura média é identicamente nula, às quais chamaremos de hipersuperfícies 2-*mínimas*.

É interessante notar que, no caso bidimensional, as 2-mínimas coincidem exatamente com as superfícies cuja curvatura extrínseca é nula. Nesse sentido, as hipersuperfícies 2-mínimas podem ser interpretadas como uma generalização natural das superfícies de curvatura extrínseca zero para dimensões mais altas.

Assim como anteriormente, consideremos Σ^n uma hipersuperfície orientável com orientação dada por η, imersa isometricamente no espaço produto $\overline{M}_1^{n+1}(c) = M^n(c) \times \mathbb{R}$, com operador de forma A e curvatura média H.

Denotemos por P a primeira transformação de Newton associada ao operador de forma A, isto é, $P : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o tensor do tipo $(1, 1)$ definido por

$$P = nHI - A.$$

Por ser um polinômio em A, o tensor P também é autoadjunto, comuta com A, e seu traço é dado em termos da curvatura média, ou seja, $\operatorname{tr}(P) = n(n-1)H$.

Neste ponto, introduzimos a seguinte definição:

Definição 4.32. *Seja Σ^n uma hipersuperfície orientável imersa isometricamente no espaço produto $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Definimos a* segunda curvatura média H_2 *de Σ^n por*

$$H_2 = \frac{1}{n(n-1)} \operatorname{tr}(A \circ P). \tag{4.103}$$

Em particular, dizemos que Σ^n é 2-mínima *se $H_2 = 0$.*

Observe que, no contexto em que Σ^n é uma hipersuperfície imersa em uma forma espacial, H_2 coincide, a menos de uma constante, com a curvatura escalar da imersão Σ^n. Nessa configuração, é bem conhecido que o operador L surge como o operador linearizado da curvatura escalar em relação a variações normais da hipersuperfície (veja (ALENCAR; DO CARMO; COLARES, 1993)).

Uma vez definido o tensor P, para cada $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$, definimos o operador linear $L : \mathcal{C}^2(\Sigma) \to \mathcal{C}^2(\Sigma)$ por

$$L(u) = \operatorname{tr}(P \circ \operatorname{Hess} u). \tag{4.104}$$

Assim, L define um operador diferencial de segunda ordem que, em geral, *não é elíptico* nem está no formato divergente. É claro, pela definição, que L é elíptico (ou semi-elíptico) se, e somente se, P é definido positivo (ou positivo semidefinido). Note que

$$L(uv) = uL(v) + vL(u) + 2\langle P(\nabla u), \nabla v\rangle,$$

para todos $u, v \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$.

Como subproduto da discussão anterior, obtemos a seguinte fórmula do tipo Simons para o operador L atuando na função curvatura média de uma hipersuperfície 2-mínima Σ^n:

Proposição 4.33. *Seja Σ^n uma hipersuperfície orientável 2-mínima imersa isometricamente no espaço produto $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Então,*

$$\begin{aligned} L(nH) = {} & |\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 + n^2(n-1)c\left(2 - |T|^2\right)H^2 - S^2 \\ & - c\left(2n\langle A^2(T), T\rangle - 3nH\langle A(T), T\rangle + |T|^2 S\right) + nH\,\mathrm{tr}(A^3). \end{aligned}$$

Demonstração: De fato, observemos que, pela definição de P,

$$0 = H_2 = \frac{1}{n(n-1)}\left(n^2H^2 - S\right). \tag{4.105}$$

Logo, fazendo $u = nH$ em (4.104), e usando (4.105), obtemos:

$$\begin{aligned} L(nH) &= n\,\mathrm{tr}(P \circ \mathrm{Hess}\, H) \\ &= nH\,\Delta(nH) - n\,\mathrm{tr}(A \circ \mathrm{Hess}\, H) \\ &= \frac{1}{2}\Delta(n^2H^2) - n^2|\nabla H|^2 - n\,\mathrm{tr}(A \circ \mathrm{Hess}\, H) \\ &= \frac{1}{2}\Delta S - n^2|\nabla H|^2 - n\,\mathrm{tr}(A \circ \mathrm{Hess}\, H). \end{aligned} \tag{4.106}$$

Substituindo a expressão da fórmula de Simons para $\frac{1}{2}\Delta S$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta S = {} & |\nabla A|^2 + \mathrm{tr}(A \circ \mathrm{Hess}\,\mathrm{tr}(A)) + c\left(2 - |T|^2\right)\left(nS - \mathrm{tr}(A)^2\right) - S^2 \\ & - c\left(2n\langle A^2(T), T\rangle - 3\mathrm{tr}(A)\langle A(T), T\rangle + |T|^2 S\right) + \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(A^3), \end{aligned}$$

em (4.106), obtemos a fórmula desejada. ■

4.3.1 Lemas Auxiliares

Iniciamos esta seção com uma observação sobre o sinal da curvatura média em hipersuperfícies 2-mínimas.

Observação 4.34. *Seja Σ^n uma hipersuperfície 2-mínima imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Então,*

$$n^2H^2 = S + n(n-1)H_2 \geq 0,$$

o que mostra que a função curvatura média H tem sinal constante em Σ^n. Assim, sem perda de generalidade, podemos escolher a orientação de Σ^n de modo que $H \geq 0$ em toda a hipersuperfície.

À luz da Observação 4.34, assumiremos, de agora em diante, que a orientação de Σ^n é tal que $H \geq 0$ em toda a hipersuperfície.

O próximo resultado é um caso particular do Lema 2.1 de (DOS SANTOS; DA SILVA, 2021b), adaptado ao contexto de hipersuperfícies.

Lema 4.35. *Seja Σ^n uma hipersuperfície orientada 2-mínima em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Então:*

(i) A primeira transformação de Newton de A, denotada por P, é positiva semidefinida e, portanto, o operador L é semielíptico;

(ii) A derivada covariante da segunda forma fundamental A e a função curvatura média H de Σ^n satisfazem a seguinte desigualdade:

$$|\nabla A|^2 \geq n^2|\nabla H|^2.$$

Demonstração: Iniciemos com a demonstração do item (i). Seja $\{e_i\}_{i=1}^n$ um referencial ortonormal local em Σ^n que diagonaliza o operador forma segunda A, isto é, $A(e_i) = \lambda_i e_i$ para cada $1 \leq i \leq n$. Como $P = nH - A$, segue que $P(e_i) = \mu_i e_i$, onde $\mu_i = nH - \lambda_i$ são os autovalores de P.

Supondo que $H_2 = 0$, temos, a partir de (4.103), que:

$$0 = n(n-1)H_2 = nH\sum_i \langle A(e_i), e_i\rangle - \sum_i \langle A(e_i), A(e_i)\rangle = n^2H^2 - \sum_i \lambda_i^2. \qquad (4.107)$$

Como estamos assumindo $H \geq 0$, segue da equação acima que:

$$-nH \leq \lambda_i \leq nH, \quad \text{para todo } i.$$

Consequentemente, para cada i tem-se:

$$0 \leq \mu_i = nH - \lambda_i \leq 2nH.$$

Isso mostra, em particular, que todos os autovalores do operador P são não negativos. Assim, P é um operador positivo semidefinido. Como consequência, o operador L é semielíptico.

Passemos agora à demonstração do item (ii). Note que, derivando ambos os lados da equação (4.107), obtemos:

$$n^2H|\nabla H| = |A|\,|\nabla|A||.$$

Aplicando a desigualdade clássica de Kato, temos:

$$n^4H^2|\nabla H|^2 \leq S|\nabla A|^2.$$

Além disso, usando novamente a equação (4.107), podemos reescrever:

$$S|\nabla A|^2 \geq n^4H^2|\nabla H|^2 = n^2S|\nabla H|^2 \geq 0.$$

Portanto, conclui-se que:

$$S\left(|\nabla A|^2 - n^2H^2\right) \geq 0.$$

Dessa forma, ou $S = 0$ e consequentemente $|\nabla A|^2 = n^2H^2 = 0$, ou então

$$|\nabla A|^2 - n^2H^2 \geq 0,$$

como se queria demonstrar. ■

No que segue, derivaremos um princípio do máximo adequado ao nosso estudo. Inicialmente, dizemos que o *princípio do máximo para o Hessiano* é válido em Σ^n se, para toda função $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma^n)$ tal que $u^* = \sup_M u < +\infty$, existe uma sequência de pontos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ satisfazendo (veja (ALÍAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016)):

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad |\nabla u(p_k)| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \mathrm{Hess}(u)(x_k) < \frac{1}{k}\langle\, ,\rangle$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, dizemos que o *princípio do máximo fraco para o Hessiano* é válido sobre Σ^n se apenas as condições

$$u(p_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \mathrm{Hess}(u)(x_k) < \frac{1}{k}\langle\, ,\rangle,$$

são satisfeitas.

Nesse contexto, seja $\mathcal{L} : \mathcal{C}^2(\Sigma) \to \mathcal{C}^2(\Sigma)$ o operador semielíptico definido por

$$\mathcal{L}(u) = \mathrm{tr}(\mathcal{P} \circ \mathrm{Hess}\, u), \tag{4.108}$$

onde $\mathcal{P} : T\Sigma \to T\Sigma$ é um tensor simétrico positivo semidefinido. Note que o operador $\mathcal{L}$ é uma extensão natural do operador Laplaciano, pois, se $\mathcal{P} = I$, então $\mathcal{L} = \Delta$.

O resultado a seguir consiste em uma aplicação do princípio do máximo fraco para operadores do tipo (4.108).

Proposição 4.36. *Seja Σ^n uma variedade Riemanniana (não necessariamente completa) na qual o princípio do máximo fraco para o Hessiano é válido, e seja $\mathcal{L}$ um operador semielíptico como em* (4.108), *com* $\sup_\Sigma \mathrm{tr}(\mathcal{P}) < +\infty$.

Se $u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ satisfaz $u^* = \sup_\Sigma u < +\infty$, e $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, não negativa, tal que

$$\mathcal{L}(u) \geq f(u) \quad em \quad \Sigma^n,$$

então $f(u^*) = 0$.

Demonstração: Como o princípio do máximo fraco para o Hessiano é válido em Σ^n, e

$u \in \mathcal{C}^2(\Sigma)$ tal que $u^* < +\infty$, então, existe uma sequência $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \Sigma^n$ satisfazendo

$$u(x_k) > u^* - \frac{1}{k} \quad \text{and} \quad \operatorname{Hess} u(x_k) < \frac{1}{k}\langle\, ,\, \rangle.$$

Considere $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset T_{x_k}\Sigma$ uma base ortonormal consistindo de autovetores de $P(x_k)$, com correspondente aos autovalores $\mu_i(x_k) = \langle P(x_k)e_i, e_i\rangle$. Então, para cada $1 \leq i \leq n$, temos

$$\langle (P \circ \operatorname{Hess} u(x_k))e_i, e_i\rangle = \mu_i(x_k) \operatorname{Hess} u(x_k)(e_i, e_i).$$

Como $P(x_k)$ é positivo semi-definido $\sup_\Sigma \operatorname{tr}(P) < +\infty$, segue que

$$0 \leq \mu_i(x_k) \leq \sup_\Sigma \operatorname{tr}(P) < +\infty, \quad \text{for all } 1 \leq i \leq n.$$

Portanto, pela desigualdade (2.17), obtemos

$$\mathcal{L}(u(x_k)) = \sum_{i=1}^{n} \langle (P \circ \operatorname{Hess} u(x_k))e_i, e_i\rangle < \frac{C}{k},$$

onde $C = n \sup\limits_\Sigma \operatorname{tr}(P)$.

Por outro lado, como u satisfaz a desigualdade diferencial de segunda ordem

$$\mathcal{L}(u) \geq f(u),$$

para alguma função $f : \Sigma^n \to \mathbb{R}$, tem-se que

$$\frac{C}{k} > \mathcal{L}(u(x_k)) \geq f(u(x_k)).$$

Tomando o limite $k \to +\infty$ e pela continuidade de f, concluímos que

$$f(u^*) \leq 0.$$

Em particular, se f é não negativa, obtém-se o resultado. ■

Sob a suposição de que a variedade Σ^n é completa e admite uma função que controla o decaimento de sua curvatura seccional, o seguinte resultado foi demonstrado em (DOS SANTOS; DA SILVA, 2021a):

Lema 4.37. *Seja* $(\Sigma^n, \langle\,,\rangle)$ *uma variedade Riemanniana completa, não compacta, de dimensão* n*; seja* $o \in \Sigma^n$ *um ponto de referência e denote por* $r(x)$ *a função distância Riemanniana a partir de* o*. Suponha que a curvatura seccional de* Σ^n *satisfaça*

$$K_M(x) \geq -G^2(r(x)),$$

onde $G \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$ *satisfaz as seguintes condições:*

$$G(0) > 0, \quad G'(t) \geq 0 \quad \text{e} \quad G(t)^{-1} \notin L^1(+\infty)$$

Se seja $\mathcal{L}$ *um operador semielíptico como em* (4.108)*, com* $\sup_\Sigma \operatorname{tr}(\mathcal{P}) < +\infty$*, e* $f \in C^2(\Sigma)$ *uma função não negativa tal que*

$$\mathcal{L}(f) \geq af^\beta,$$

para algum $a > 0$ *e* $\beta > 1$*, então* $f \equiv 0$*.*

Observação 4.38. *Na seção 4.2, vimos que uma condição necessária e suficiente para que o princípio do máximo fraco seja válido em* Σ^n *é que essa variedade seja estocasticamente completa. A seguir, discutiremos algumas distinções relevantes na aplicabilidade dos princípios do máximo fraco quando considerados em relação ao Laplaciano e ao operador Hessiano.*

Uma diferença notável é destacada na Proposição 2.4*, encontrada em (ALÍAS; MASTROLIA; RIGOLI, 2016), a qual estabelece que toda variedade Riemanniana que satisfaz o princípio do máximo fraco para o Hessiano deve ser* não extensível *— isto é, não pode ser isometricamente imersa como subconjunto aberto próprio de outra variedade Riemanniana conexa.*

Outro exemplo importante é que, para qualquer variedade Riemanniana Σ^n *e ponto* $p \in \Sigma^n$*, a variedade com o ponto removido,* $\Sigma^n \setminus \{p\}$*,* não *satisfaz o princípio do máximo fraco para o operador Hessiano.*

4.3.2 Resultados de caracterização

Iniciaremos esta seção com a seguinte estimativa inferior para o operador L aplicado à curvatura média H. Esta estimativa reflete a interação entre a geometria da hipersuperfície e a estrutura do ambiente $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Em outras palavras,

Proposição 4.39. *Seja Σ^n, com $n \geq 2$, uma hipersuperfície 2-mínima orientada e isometricamente imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Então, a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$L(|\phi|^2) \geq 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi|F(|\phi|, |T|). \tag{4.109}$$

onde $F(x,t)$ é a função de duas variáveis dada por

$$\begin{aligned} F(x,t) = &-\frac{2(n-2)}{n-1}x^4 + c(2n-(n+1)t^2)x^2 \\ &- \frac{c\sqrt{n(n-1)}}{n-1}x\langle\phi(T),T\rangle - 2nc\langle\phi^2(T),T\rangle. \end{aligned} \tag{4.110}$$

Demonstração: Primeiramente, observamos pela Proposição 4.33 que:

$$\begin{aligned} L(nH) = &|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 + nc(2-|T|^2)|\phi|^2 + nH\operatorname{tr}(\phi^3) - |\phi|^4 + n|\phi|^2H^2 \\ &- c\left(2n\langle\phi^2(T),T\rangle + nH\langle\phi(T),T\rangle + |T|^2|\phi|^2\right). \end{aligned} \tag{4.111}$$

Por outro lado, como $H_2 = 0$, pelo Lema 4.35 temos

$$|\nabla A|^2 - n^2|\nabla H|^2 \geq 0. \tag{4.112}$$

Além disso, no caso em que $n = 2$, é imediato que $\operatorname{tr}(\phi^3) = 0$. Por outro lado, se $n \geq 3$, segue de (4.80),

$$nH\operatorname{tr}(\phi^3) \geq -nH|\operatorname{tr}(\phi^3)| \geq -\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3. \tag{4.113}$$

Substituindo as estimativas (4.112) e (4.113) em (4.111), obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) \geq &\, nc(2-|T|^2)|\phi|^2 - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H|\phi|^3 - |\phi|^4 + n|\phi|^2H^2 \\ &- c\left(2n\langle\phi^2(T),T\rangle + nH\langle\phi(T),T\rangle + |T|^2|\phi|^2\right). \end{aligned} \tag{4.114}$$

Além disso, da equação para hipersuperfícies 2-mínimas (cf. (4.103)), segue que:

$$H^2 = \frac{1}{n(n-1)}|\phi|^2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi|, \tag{4.115}$$

uma vez que assumimos $H \geq 0$.

Logo, substituindo (4.115) em (4.114), obtemos

$$\begin{aligned} L(nH) \geq & -\frac{2(n-2)}{n-1}|\phi|^4 + c(2n-(n+1)|T|^2)|\phi|^2 \\ & - \frac{c\sqrt{n(n-1)}}{n-1}\langle \phi(T), T\rangle |\phi| - 2nc\langle \phi^2(T), T\rangle. \end{aligned} \tag{4.116}$$

Por outro lado, de (4.103) e (4.115),

$$\begin{aligned} L(|\phi|^2) &= 2n(n-1)HL(H) + 2n(n-1)\langle P(\nabla H), \nabla H\rangle \\ &\geq 2\sqrt{\frac{n-1}{n}}|\phi| L(nH). \end{aligned} \tag{4.117}$$

Portanto, inserindo (4.117) em (4.116) obtemos a desigualdade (4.109). ■

Lema 4.40. *Seja Σ^n uma hipersuperfície 2-mínima orientável de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Então, a seguinte desigualdade é válida:*

$$-\frac{(n-1)^2}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi||T|^2 \leq \langle \phi(T), T\rangle \leq \frac{(n-1)}{\sqrt{n(n-1)}}|\phi||T|^2.$$

Demonstração: Inicialmente, como

$$\phi = A - HI \quad \text{e} \quad P = nHI - A,$$

a primeira transformação de Newton P e a segunda forma fundamental sem traço ϕ estão relacionadas pela identidade:

$$P = (n-1)HI - \phi.$$

Além disso, como P é positivo semi-definido, vale:

$$0 \leq \langle P(T), T\rangle \leq \mathrm{tr}(P)\,|T|^2.$$

Uma vez que $\operatorname{tr}(P) = n(n-1)H$, obtemos:

$$-(n-1)^2 H\,|T|^2 \leq \langle \phi(T), T\rangle \leq (n-1)H\,|T|^2.$$

Como $H_2 = 0$, essa desigualdade segue diretamente de (4.115). ■

A seguir, apresentamos os principais resultados relacionados à caracterização de slices.

Teorema 4.41. *Seja Σ^n, com $n \geq 3$, uma hipersuperfície 2-mínima imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$, com $c > 0$. Suponha que o princípio do máximo fraco para o hessiano seja válido em Σ^n. Se*

$$\sup_{\Sigma}\left(2(n-2)H^2 + 3c|T|^2\right) \leq 2c, \tag{4.118}$$

Então Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um slice.

Demonstração: Inicialmente, usando o Lema 3.1, podemos estimar

$$2n\langle \phi^2(T), T\rangle \leq 2(n-1)|\phi|^2|T|^2. \tag{4.119}$$

Assim, pelo Lema 4.40, tem-se

$$\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-1}|\phi|\langle \phi(T), T\rangle \geq |\phi|^2|T|^2. \tag{4.120}$$

Portanto, de (4.120) e (4.119), obtemos

$$-\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n-1}|\phi|\langle \phi(T), T\rangle - 2n\langle \phi^2(T), T\rangle \geq -(2n-1)|\phi|^2|T|^2. \tag{4.121}$$

Como $c > 0$, de (4.110) e (4.121), segue que

$$F(|\phi|, |T|) \geq \frac{1}{n-1}|\phi|^2\left(-2(n-2)|\phi|^2 + 2cn(n-1) - 3cn(n-1)|T|^2\right). \tag{4.122}$$

De (4.103), a equação (4.122) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$F(|\phi|, |T|) \geq n|\phi|^2\left(-2(n-2)H^2 + 2c - 3c|T|^2\right).$$

Tomando

$$\beta := 2c - \sup_{\Sigma}\big(2(n-2)H^2 + 3c|T|^2\big) > 0,$$

segue da hipótese (4.118) que $\beta > 0$. Portanto,

$$L(|\phi|^2) \geq f(|\phi|^2),$$

onde $f(x) = 2n\sqrt{\dfrac{n-1}{n}}\beta x^{5/2}$.

Uma vez que vale a hipótese (4.118), temos que $\sup_\Sigma H < +\infty$ e, consequentemente,

$$\sup_{\Sigma}\operatorname{tr}(P) < +\infty \quad \text{e} \quad \sup_{\Sigma}|\phi|^2 < +\infty,$$

onde, na última estimativa, foi usada a equação (4.115).

Como estamos supondo que o princípio do máximo fraco para o Hessiano vale em Σ^n, segue da Proposição 4.36 que $|\phi| = 0$. Sendo $H_2 = 0$, devemos ter $A = 0$, isto é, Σ^n é uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\overline{M}_1^{n+1}(c)$. Assim, a equação (4.43) garante que as funções $\langle \eta, \partial_t\rangle$ e $|T|$ são constantes em Σ^n.

Dessa forma, a equação de Codazzi (4.45) implica que $\langle \eta, \partial_t\rangle = 0$ ou $|T|^2 = 0$. Se ocorre o primeiro caso, então, de (4.42), $|T|^2 = 1$, o que contradiz (4.118). Consequentemente, devemos ter $|T|^2 = 0$, isto é, Σ^n é isométrica a uma parte aberta de um *slice*. ■

No caso em que Σ^n é completa, obtemos a seguinte caracterização:

Corolário 4.42. *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa 2-minimal imersa em $\overline{M}_1^{n+1}(c)$ com $c > 0$. Se*

$$\sup_{\Sigma}\big(2(n-2)H^2 + 3c|T|^2\big) \leq 2c.$$

Então Σ^n é um slice.

Demonstração: Inicialmente, verifiquemos que Σ^n satisfaz as hipóteses do Lema 4.37. De fato, como $H_2 = 0$, da equação (4.103) temos

$$S = n^2H^2 - n(n-1)H_2 = n^2H^2,$$

o que implica

$$-nH \leq \sqrt{S} \leq nH.$$

Logo, segue da equação (4.44) que a curvatura seccional de Σ^n satisfaz

$$K(e_i, e_j) = 1 - 2|T|^2 + n^2H^2 - S \geq -1 - 2n^2 \sup_{\Sigma} H^2 > -\infty.$$

Isso mostra que a curvatura seccional de Σ^n é limitada inferiormente por uma constante negativa. Assim, a função

$$G(t) := \left(1 + 2n^2 \sup_{\Sigma} H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

está bem definida e finita.

Uma vez que Σ^n é completa, podemos aplicar o Lema 4.37, e o resultado segue diretamente do Teorema 4.41. ■

Finalizamos este capítulo com dois resultados que tratam especificamente do caso de superfícies. Note que, por se tratar de uma superfície, a curvatura escalar R da imersão coincide com a curvatura de Gauss K da superfície, pois neste caso $R = 2K$, e a normalização adotada implica $R = K$.

Teorema 4.43. *Seja Σ^2 uma superfície 2-mínima imersa em $\overline{M}^3_1(c)$, com $c > 0$. Suponha que o princípio do máximo fraco para o hessiano seja válido em Σ^2. Se $\inf_\Sigma K > c/3$, então Σ^2 é isométrica a uma parte aberta de um slice.*

Demonstração: Uma vez que $H_2 = 0$, segue de (4.47) que

$$K = c\langle \eta, \partial_t \rangle^2.$$

Por outro lado, usando (4.42) na desigualdade (4.110), temos

$$F(|\phi|, |T|) \geq 2c|\phi|^2 \left(-1 + 3\langle \eta, \partial_t \rangle^2\right) = 2c|\phi|^2 \left(-1 + 3cK\right).$$

Escolhendo

$$\beta = -c + 3 \inf_{\Sigma} K > 0,$$

segue que $F(|\phi|,|T|) \geq 2c\beta|\phi|^2$ e, consequentemente,

$$L(|\phi|^2) \geq f(|\phi|^2),$$

em que $f(x) = 2c\beta\sqrt{2}\,x^{3/2}$.

Portanto, da Proposição 4.36, segue que $|\phi| = 0$ e, como antes, ou $|T| = 0$ ou $\langle \eta, \partial_t \rangle = 0$. Observe que $\langle \eta, \partial_t \rangle = 0$ contradiz a hipótese sobre a curvatura gaussiana. Logo, $|T| = 0$ e Σ^2 é isométrica a uma parte aberta de um slice. ■

Concluímos com o seguinte resultado, válido no caso em que Σ^n é completo.

Corolário 4.44. *Seja Σ^2 uma superfície completa 2-mínima imersa em $\overline{M}^3_1(c)$, com $c > 0$. Se $\inf_\Sigma K > c/3$, então Σ^2 é um slice.*

REFERENCES

ABE, N.; KOIKE, N.; YAMAGUCHI, S. Congruence theorems for proper semi-Riemannian hypersurfaces in a real space form. **Yokohama Math. J.**, p. 123–136, 1987.

ALBUJER, A.L.; ALÍAS, L.J. Calabi-Bernstein results for maximal surfaces in Lorentzian product spaces. **Journal of Geometry and Physics**, n. 5, p. 620–631, 2009.

ALENCAR, H.; DO CARMO, M. Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres. **Proceedings of the American Mathematical Society**, n. 4, p. 1223–1229, 1993.

ALENCAR, H.; DO CARMO, M.; COLARES, A.G. Stable hypersurfaces with constant scalar curvature. **Mathematische Zeitschrift**, p. 117–131, 1993.

ALÍAS, L.J.; GARCÍA-MARTÍNEZ, S.C. On the scalar curvature of constant mean curvature hypersurfaces in space forms. **J. Math. Anal. App**, n. 2, p. 257–271, 2012.

ALÍAS, L.J.; MASTROLIA, P.; RIGOLI, M. Maximum Principles and Geometric Applications. **Springer**, 2016.

ALÍAS, L.J.; MELÉNDEZ, J. Integral inequalities for compact hypersurfaces with constant scalar curvature in the Euclidean sphere. **Mediterr. J. Math.**, 2020.

ALÍAS, L.J.; MELÉNDEZ, J.; PALMAS, O. Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms. **Differential Geometry and its Applications**, p. 65–82, 2018.

ALÍAS, L.J.; ROMERO, A. Integral formulas for compact spacelike n-submanifolds in de Sitter spaces. Applications to the parallel mean curvature vector case. **Manuscripta Mathematica**, n. 4, p. 409–416, 1995.

ARAÚJO, K.O.; TENENBLAT, K. On submanifolds with parallel mean curvature vector. **Mathematische Nachrichten**, n. 17-18, p. 2131–2143, 2011.

BATISTA, M. Simons type equation in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ and applications. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, p. 1299–1322, 2011.

CALABI, E. Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations. **Proceedings of Symposia in Pure Mathematics**, p. 223–230, 1970.

CARTAN, E. Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces a courbure constante. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, p. 177–191, 1938.

CATINO, G. A remark on compact hypersurfaces with constant mean curvature in space forms. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, p. 901–907, 2016.

CHEN, B-Y. **Geometry of Submanifolds**. [S.l.]: Marcel Dekker, 1973. (Pure and Applied Mathematics).

CHENG, Q-M; ISHIKAWA, s. Complete maximal spacelike submanifolds. **Kodai Mathematical Journal**, n. 3, p. 208–217, 1997.

CHENG, S-Y; YAU, S-T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 225, p. 195–204, 1977.

________. Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski space. **Annals of Mathematics**, n. 3, p. 407–419, 1976.

CHERN, S.S.; DO CARMO, M.; KOBAYASHI, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. **Functional Analysis and Related Fields**, v. 1, n. 1, p. 59–75, 1970.

DAJCZER, M. **Submanifolds and Isometric Immersions**. [S.l.]: Publish or Perish, 1990. (Mathematics and its Applications).

DE LIMA, E.L.; DE LIMA, H.F. Complete Weingarten hypersurfaces satisfying an Okumura type inequality. **Journal of the Australian Mathematical Society**, n. 1, p. 1–16, 2019.

DO CARMO, M. **Geometria Riemanniana**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

DOS SANTOS, F.R. Rigidity of surfaces with constant extrinsic curvature in Riemannian product spaces. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, n. 2, p. 307–326, 2021.

DOS SANTOS, F.R.; DA SILVA, S.F. A Simons type integral inequality for closed submanifolds in the product space $S^n \times \mathbb{R}$. **Nonlinear Analysis**, 2021.

________. A Simons type integral inequality for closed submanifolds in the product space $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. **Nonlinear Analysis**, 2021.

________. On complete submanifolds with parallel normalized mean curvature in product spaces. **Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics**, n. 2, p. 331–355, 2022.

DOS SANTOS, F.R.; DA SILVA, S.F.; DE SOUSA, A.F. Integral inequalities for closed linear Weingarten submanifolds in the product spaces. **Anais da Academia Brasileira de Ciências**, n. 3, p. 331–355, 2023.

EMERY, M. Stochastic Calculus on Manifolds. **Springer-Verlag**, 1989.

ERBACHER, J. Isometric immersions of constant mean curvature and triviality of the normal connection. **Nagoya Mathematical Journal**, p. 139–165, 1972.

EVANS, L.C.; GARIEPY, R.F. **Measure Theory and Fine Properties of Functions**. [S.l.]: CRC Press, 1992.

FETCU, D.; ROSENBERG, H. On complete submanifolds with parallel mean curvature in product spaces. **Revista Matemática Iberoamericana**, n. 4, p. 1283–1306, 2013.

GOMES, J.N. et al. On the complete spacelike hypersurfaces with two distinct principal curvatures in Lorentzian space forms. **J. Math. Anal. Appl.**, p. 248–263, 2014.

GRIGOR'YAN, A.A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. **Bulletin of the American Mathematical Society (New Series)**, n. 2, p. 135–249, 1999.

________. Stochastically complete manifolds and summable harmonic functions. **Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat**, p. 1102–1108, 1988.

ISHIHARA, T. Maximal spacelike submanifolds of a pseudoriemannian space of constant curvature. **Michigan Mathematical Journal**, p. 345–352, 1988.

LAWSON, H.B. Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces. **Annals of Mathematics**, n. 1, p. 187–197, 1969.

LEVI-CIVITA. Famiglia di superfici isoparametriche nell'ordinario spazio Euclideo. **Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend.**, p. 355–362, 1937.

LI, A.M.; LI, J.M. An intrinsic rigidity theorem for minimal submanifolds in a sphere. **Archiv der Mathematik**, p. 556–564, 1993.

MENDONÇA, B.; TOJEIRO, R. Umbilical submanifolds in $S^n \times \mathbb{R}$. **Canadian Journal of Mathematics**, n. 2, p. 403–420, 2014.

NOMIZU, K.; SMYTH, B. A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature. **Journal of Differential Geometry**, p. 367–377, 1969.

O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity**. [S.l.]: Academic Press, 1983.

OMORI, H. **Isometric immersions of Riemannian manifolds**. [S.l.]: The Mathematical Society of Japan, 1967. P. 205–214.

PIGOLA, S.; RIGOLI, M.; SETTI, A.G. Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications. **Memoirs of the American Mathematical Society**, 2005.

SANTOS, W. Submanifolds with parallel mean curvature vector in spheres. **Tohoku Math. J.**, p. 403–415, 1994.

SEGRE, B. Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni. **Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend.**, p. 203–207, 1938.

SIMONS, J. Minimal varieties in Riemannian manifolds. **Annals of Mathematics**, v. 88, n. 1, p. 62–105, 1968.

STROOCK, D.W. **An Introduction to the Analysis of Paths on a Riemannian Manifold**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2000. P. 135–249. (Mathematical Surveys and Monographs).

SUH, Y.J. On A Kaehler Manifold Whose Totally Real Bisectional Curvature Is Bounded From Below. **Nihonkai Math. J.**, p. 13–32, 1994.

SUNG, C. Liouville-Type Theorems and Applications to Geometry on Complete Riemannian Manifolds. **Journal of Geometric Analysis**, 2010.

TOJEIRO, R. On a class of hypersurfaces in $S^n \times \mathbb{R}$ and $H^n \times \mathbb{R}$. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, n. 2, p. 199–209, 2010.

VAN DER VEKEN, J.; CALVARUSO, G.; KOWALCZYK, D. On extrinsically symmetric hypersurfaces of $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Bulletin of the Australian Mathematical Society**, n. 3, p. 390–400, 2010.

VAN DER VEKEN, J.; DILLEN, F.; FASTENAKELS, J. Rotation hypersurfaces in $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^n \times \mathbb{R}$. **Note di Matematica**, v. 29, n. 1, p. 41–54, 2009.

VAN DER VEKEN, J.; VRANCKEN, L. Parallel and semi-parallel hypersurfaces of $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$. **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series**, n. 3, p. 355–370, 2008.

YAU, S-T. Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. **Communications on Pure and Applied Mathematics**, v. 27, n. 2, p. 201–228, 1974.

________. On the heat kernel of a complete Riemannian manifold. **J. Math. Pures Appl.**, v. 57, n. 9, p. 191–201, 1978.