



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

MARIA LUIZA SOUZA SILVESTRE BARBOSA

ANÁLISE COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO:
um estudo à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Caruaru
2025

MARIA LUIZA SOUZA SILVESTRE BARBOSA

ANÁLISE COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO:

um estudo à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Matemática -
Licenciatura do Campus Agreste da
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE,
na modalidade de monografia, como requisito
parcial para a obtenção do grau de licenciada
em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática).

Orientador (a): Profª. Dra. Ewellen Tenório de Lima

Caruaru

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Barbosa, Maria Luiza Souza Silvestre.

Análise Combinatória em Livros Didáticos do Ensino Médio: um estudo à luz da Teoria dos Campos Conceituais / Maria Luiza Souza Silvestre Barbosa. - Caruaru, 2025.

78 p.

Orientador(a): Ewellen Tenório de Lima

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.

Inclui referências.

1. Teoria dos Campos Conceituais. 2. Combinatória. 3. Livros Didáticos. 4. Estruturas Multiplicativas. 5. Ensino Médio. I. Lima, Ewellen Tenório de. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

MARIA LUIZA SOUZA SILVESTRE BARBOSA

ANÁLISE COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO:
um estudo à luz da Teoria dos Campos Conceituais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Matemática -
Licenciatura do Campus Agreste da
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE,
na modalidade de monografia, como requisito
parcial para a obtenção do grau de licenciada
em Matemática.

Aprovada em: 22/07/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Ewellen Tenório de Lima (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco - CAA

Prof^ª. Dr^ª. Cristiane de Arimatéa Rocha (Examinadora Interno)
Universidade Federal de Pernambuco - CAA

Prof^ª. Dr^ª. Ana Paula Barbosa de Lima (Examinadora Externa)
Colégio de Aplicação - Universidade Federal de Pernambuco

Dedico esse trabalho *in memoriam* do meu pai, Maurício Silvestre Barbosa, que a pé, sob o sol, me fez chegar até aqui na sombra.

AGRADECIMENTOS

Ao meu Senhor, Deus uno e trino, sentido, centro e amor da minha vida, Os Teus sonhos ao se encontrarem com os meus me fazem viver uma felicidade plena. Obrigada por me dar um futuro e uma esperança, conforme me prometestes e está escrito em Jeremias 29, 11, “‘Porque sou eu que conheço os planos que tenho para vocês’, diz o Senhor, ‘planos de fazê-los prosperar e não de lhes causar dano, planos de dar-lhes esperança e um futuro...’”.

Ao meu pai, Maurício Barbosa (*in memoriam*), a quem eu amo de maneira mais profunda, dedico não só as linhas desta pesquisa, mas todo o meu caminho e história acadêmica. Meu pai me acompanhou durante todos os momentos da minha vida escolar, sempre esteve presente quando eu precisei e sempre sonhou por mim, sempre me incentivou e sempre segurou a minha mão. Essa conquista é nossa, papai.

À minha mãe, Edilene Barbosa, que através de sua intercessão me fez seguir firme e de pé por toda a graduação. Eu te amo com tudo o que eu sou, a senhora sempre foi sinônimo de apoio, coragem e fé. Obrigada por acreditar por nós duas, por orar por nós duas e por sempre, sem exceção, estar presente em cada passo que eu dou. Se eu cheguei onde estou é porque a tive sempre me cuidando e me incentivando a ir mais longe.

À minha irmã, Maryenne Barbosa, por acreditar em mim desde o primeiro momento que mencionei a escolha do curso, por me incentivar e torcer por mim. Você é meu exemplo de força e resistência, e eu admiro tudo o que você é.

À minha família, por me apoiarem e me incentivarem a buscar os meus sonhos. Em especial, minha madrinha, prima, irmã e segunda mãe, Erika Cristina (*in memoriam*) que estava ao meu lado no momento em que o resultado da minha aprovação saiu, que comemorou, chorou e me abraçou. Obrigada por tudo, eu te amo para sempre.

À minha orientadora, Profa. Dra. Ewellen Lima, por aceitar embarcar comigo nessa pesquisa e se fazer tão presente durante todo o processo. Nossa querida Taylor Swift em Invisible String aponta que “And isn't it just so pretty to think / All along there was some / Invisible string / Tying you to me?”, acredito que essa linha nos envolvia e fez com que nos encontrássemos nesse caminho e pudéssemos criar um laço que vai além das linhas dessa pesquisa. Admiro-a muito! MUITO obrigada.

Ao curso de Matemática - Licenciatura do Campus do Agreste, onde vivi alguns dos melhores anos da minha vida e me proporcionou realizar sonhos que nem eu mesma sabia que poderia sonhar. Você foi a minha melhor escolha e o escolheria mais mil vezes.

À minha banca avaliadora do TCC, Profa. Dra. Ana Paula Lima, Profa. Dra. Cristiane Rocha e a Profa. Dra. Ewellen Lima. É um prazer ter em minha banca mulheres tão inspiradoras, obrigada por todas as contribuições e palavras.

A todos os professores que contribuíram e marcaram minha trajetória acadêmica dentro do curso de Matemática - Licenciatura no CAA: Ewellen Lima, Maria do Desterro, Cristiane Rocha, Simone Mendes, Luan Danilo, Jamille Oliveira, Naralina Vieira, Jaqueline Lixandrão, Lidiane Carvalho, Luciana Cavalcanti, Girleide Lemos, Luana Rafaela e Janielly Siqueira. Sou imensamente grata por ter tido o privilégio de ser aluna de vocês e ter aprendido tanto com cada um.

Ao “MALLIK”, Anna Clara, Lucas Martins, Lucivaldo Silva, Isabella Carvalho e Kalina Gouveia, meus melhores amigos dentro da graduação. Eu jamais saberei expressar em palavras o que vocês significam para mim, a nossa cumplicidade, fidelidade e amizade trouxeram para a minha vida uma leveza e me fez aguentar muitas dificuldades durante o curso, pois algo sempre foi certo, o “MALLIK” sempre esteve, está e estará comigo. Muito obrigada, eu amo vocês.

Anna Clara, admiro sua força e resiliência. Você é alguém que traz graça e descontração para os momentos mais difíceis, uma amiga leal. Desejo todo sucesso do mundo para você e sou imensamente grata por tudo que vivemos durante o curso. Obrigada!!

Lucas, nem se eu tentasse eu conseguiria resumir tudo o que você significa para mim, não seria possível te agradecer por tudo o que você fez por mim. Você me deu força nos momentos que eu pensava que não aguentaria e segurou a minha mão quando achei que mais ninguém o faria. Você sempre esteve ao meu lado e eu amo você. Dividir esses anos com você foi a melhor coisa que poderia ter me acontecido, obrigada por tudo, pra sempre a alma será eu e você.

Lucivaldo, você é alívio para os dias ansiosos e agitados, sempre sabendo como tirar algo bom dos momentos e sempre nos tirando as melhores risadas, que sorte o nosso grupo tem de ter você por perto. Obrigada, Luci!

Isabella, a minha dupla, companheira e gêmea em todas as situações. Esses anos foram muito mais especiais porque puderam ser divididos com você. Sou muito grata pela sua amizade e por podermos partilhar nossas vidas pessoais, acadêmicas e profissionais. Você sempre esteve ao meu lado e isso faz com que a vida seja muito mais leve e boa de ser vivida. Te admiro demais e torço muito por você. Te amo, amiga. Estaremos sempre juntas!

Kalina, sou imensamente grata por aquele dia, antes mesmo das aulas começarem que recebi sua mensagem e ali começamos a nossa amizade. Admiro a pessoa que és e a tua

excelência em tudo que faz, que sorte a minha ter te tido como primeira amiga no curso, sou grata por tudo que vivemos e por você ter permanecido. Obrigada, k!

À minha turma 2021.1, por toda parceria durante todo o curso. Vocês fizeram um diferencial enorme na minha trajetória e sou grata por tudo que construímos durante o curso, nossos estudos online e as nossas resenhas leves para as agitações da rotina. Agradeço especialmente, para além dos já mencionados, à Jennyfer Nunes, José Warlyson, Malcolm Sedícias, Elisângela Fernanda e Rayanne Lima. Vocês são muito especiais para mim!

À Jennyfer Nunes e Isaac Emmanuel, pela amizade e companheirismo nas nossas tardes na UFPE, pelos jantares em Tia Sol, pelas brincadeiras e risadas, por trazerem aos meus dias leveza e alegria. Estar com vocês é sinônimo de sorriso, conversas e descanso. Amo vocês!

Ao Laboratório de Ensino de Matemática do Agreste Pernambucano (LEMAPE), ao qual tive o prazer de ser monitora e me proporcionou as melhores experiências dentro da Universidade. O LEMAPE é o coração pulsante do nosso curso, sou eternamente grata por todas as tardes estudando, jogando e partilhando da rotina com os outros monitores, o laboratório me marcou profundamente e levarei isso comigo.

Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) pela maravilhosa oportunidade de experienciar o cotidiano da sala de aula da Educação Básica. Em especial, à Janaína Vieira, professora supervisora, acompanhá-la e vê-la em atuação contribuíram demais para a minha formação. E ao meu querido “pibid na sexta” que tornaram essa experiência muito mais divertida: Isabella Carvalho, José Warlyson e Malcolm Sedícias.

À Edna Andrade, minha professora de matemática do Ensino Médio, a quem nutro profunda admiração e inspiração. Obrigada por ter acreditado em mim, por ter me incentivado e por sempre, sem exceção, torcer por mim. A senhora sonhou esse sonho antes mesmo que eu pudesse imaginar e sempre esteve ao meu lado em todos os momentos. Obrigada! Foi um privilégio ser a sua aluna e descobrir o meu amor pela matemática em suas aulas.

À Escola de Referência em Ensino Médio Arnaldo Assunção, que por três anos foi a minha casa e me preparou para tudo o que vivo hoje. Em especial, aos professores que influenciaram a minha escolha: Edna Andrade, Andresa Sales, Marcos Antônio, Liana Raquel, Rafaella Lima, Maylson Marckeson e Gisely Peixoto. Vocês me mostraram, através de suas aulas, o poder que há na educação. Muito obrigada!

Aos meus amigos do Ensino Médio, Maria Iasmim, Cecília Alana, Marcos André e Fabrício Manuel. Sou muito grata por ter vivido o integral com vocês e poder compartilhar tanto da vida e das nossas histórias. Guardo-os no coração, para sempre!

Ao meu querido e amado “vraau”, minhas amigas do Ensino Fundamental, Camilly Oliveira, Fabricya Santos e Maria Alice Freire. Vocês me acompanharam em várias fases da minha vida e sempre estiveram ao meu lado, e dessa vez não seria diferente. Tenho orgulho e imensa gratidão por tudo o que construímos durante esses mais de dez anos de amizade, agradeço a paciência e compreensão com a minha ausência, obrigada por me apoiarem desde o início. Eu amo muito vocês!

A todos os meus amigos e amigas que torcem por mim, que me acompanham (de perto ou de longe) e sempre comemoram juntos à mim todas as minhas conquistas, vocês fazem a diferença na minha vida. Em especial, Anna Letícia, que estava comigo no primeiro dia de aula da UFPE e me ouviu falar sobre tudo que eu estava vivendo e sentindo e continua comigo hoje, me ouvindo contar de todas as experiências e momentos vividos até aqui. Muito obrigada por ter permanecido ao meu lado todos esses anos!

À Comunidade Católica Manain, por ser o meu lugar seguro, a minha segunda casa e minha família, por rezarem por mim e serem sinônimo do carinho de Deus em minha vida. Menciono especialmente, as minhas melhores amigas, Clara Capitulino, Jamilly Barbosa e Rayane Barbosa, ter vocês ao meu lado é uma das maiores graças que o Senhor já me proporcionou. Louvo e agradeço a Deus pela vida de vocês e por eu ter a sorte de tê-las comigo. Amo muito vocês!

Ao Galo da Redação, em especial a pessoa de Pedro e Paulo Júnior, que acreditaram em mim e me deram a honra de fazer parte do rancho. Eu jamais esquecerei a ajuda, apoio e incentivo de vocês.

Aos meus alunos, aos que já foram, aos que são e aos que serão. Ao escolher a licenciatura eu já sonhava com vocês, já os imaginava em minha mente, mas jamais imaginaria que seria tão feliz como sou hoje, por conta de vocês. Sou um mosaico de todos os alunos que já tive, que tenho e que terei. Sou grata porque aprendo com vocês e posso os ver crescer e se encontrar nessa vida. Contem comigo, vocês me fazem a professora que sou.

Por fim, agradeço a mim mesma, pela persistência na escolha, pela dedicação ao que sempre acreditou. Sou imensamente feliz e grata pelo curso que ganhou meu coração e continua me fazendo amar a Matemática e a Licenciatura. Me sinto realizada e viva, pois, como bem retrata Rubens Alves (1994, p.3) “Ensinar é um exercício de imortalidade. De alguma forma continuamos a viver naqueles cujos olhos aprenderam a ver o mundo pela magia da nossa palavra. O professor assim, não morre jamais”.

Para sempre, meu muito obrigada!

“I gave my blood, sweat, and tears for this.”
(You’re on your own, kid, Taylor Swift, 2022).

RESUMO

O presente trabalho investiga como a Combinatória é abordada em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio. A justificativa para essa pesquisa reside na importância de entender os processos de ensino e de aprendizagem, destacando o papel dos livros didáticos na sala de aula em relação à Matemática e, conseqüentemente, à Combinatória. A pesquisa tem por objetivo geral analisar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, a forma como a Combinatória é apresentada nesses materiais didáticos tão presentes nas salas de aula. Os principais referenciais que fundamentam esta pesquisa incluem a Teoria dos Campos Conceituais como uma ferramenta para entender a articulação de conceitos e o desenvolvimento do raciocínio matemático, as Estruturas Multiplicativas e suas aplicações e a discussão da importância de problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação) no currículo escolar. A pesquisa teve caráter qualitativo e foi realizada por meio da análise de três coleções de livros didáticos utilizados em escolas públicas, visando analisar os problemas combinatórios identificados nessas coleções, classificando-os de acordo com as situações abordadas e levando em consideração seus invariantes e as representações simbólicas apresentadas e/ou solicitadas, permitindo uma coleta de dados abrangente que contempla diferentes perspectivas sobre o ensino da Combinatória. Os resultados revelam a predominância das situações de Permutação, Arranjo e Combinação, como também, problemas com foco em fórmulas e procedimentos algébricos, com pouca variedade de representações simbólicas. Observa-se ainda uma tendência à formalização, o que pode limitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes que possam não ter tido um contato com situações e representações simbólicas combinatórias variadas em momentos anteriores da sua escolarização. A pesquisa visa contribuir para a melhoria das práticas pedagógicas no ensino da Matemática, oferecendo uma visão crítica sobre a abordagem da Combinatória nos livros didáticos e sua relevância para a formação dos estudantes do Ensino Médio.

Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais; Combinatória; Livros Didáticos; Estruturas Multiplicativas; Ensino Médio.

ABSTRACT

This study investigates how Combinatorics is addressed in High School mathematics textbooks. The motivation for this research lies in the importance of understanding teaching and learning processes, emphasizing the role of textbooks in the classroom, particularly in relation to Mathematics and, consequently, Combinatorics. The general objective of the research is to analyze how Combinatorics is presented in these widely used educational resources, based on the Theory of Conceptual Fields. The main theoretical foundations include the Theory of Conceptual Fields as a tool to understand the articulation of concepts and the development of mathematical reasoning, Multiplicative Structures and their applications, and the relevance of combinatorial problems (Cartesian product, arrangement, combination and permutation) in the school curriculum. This is a qualitative study carried out through the analysis of three textbook series used in public schools. The research focuses on the identification and classification of combinatorial problems in these textbooks, considering the types of situations presented and the symbolic representations used. This approach allows for a comprehensive data collection process that encompasses different perspectives on the teaching of Combinatorics. The results reveal a predominance of Permutation, Arrangement, and Combination situations, as well as problems focused on formulas and algebraic procedures, with little variety in symbolic representations. A tendency toward formalization is also observed, which may limit the development of students' combinatorial reasoning, especially for those who may not have previously encountered a variety of combinatorial situations and symbolic representations during their schooling. The study aims to contribute to the improvement of pedagogical practices in mathematics education, offering a critical view of how Combinatorics is approached in textbooks and its relevance to student learning.

Keywords: Theory of Conceptual Fields; Combinatorics; Textbooks; Multiplicative Structures; High School.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Diferentes tipos de situações multiplicativas propostas por Vergnaud	35
Quadro 2 –	Representação em quadro da resolução do problema 1	42

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Princípio Fundamental da Contagem (problema 2)	43
Figura 2 –	Princípio Fundamental da Contagem (problema 3)	44
Figura 3 –	Árvore de possibilidades do problema 4	45
Figura 4 –	Utilização exclusiva de fórmula em problemas propostos (Arranjo)	57
Figura 5 –	Utilização exclusiva da parte algébrica no problema resolvido (Fatorial)	57
Figura 6 –	Problema de elaboração (Coleção C1)	59
Figura 7 –	Problema de elaboração (Coleção C2)	60
Figura 8 –	Problema proposto de Produto de Medidas com casos específicos	60
Figura 9 –	Problema proposto de Permutação com repetição	61
Figura 10 –	Problema proposto de Arranjo composto	62
Figura 11 –	Problema proposto de Combinação com restrição	63
Figura 12 –	Exemplo de problema utilizando a representação Apenas Enunciado (Arranjo)	64
Figura 13 –	Exemplo de problema utilizando a representação Ilustração (Arranjo)	65
Figura 14 –	Exemplo de problema utilizando a representação Tabela (Produto de Medidas)	66
Figura 15 –	Exemplo de problema utilizando a representação Árvore de Possibilidades (Produto de Medidas - elaboração)	67
Figura 16 –	Exemplo de problema utilizando a representação PFC (Permutação)	68
Figura 17 –	Exemplo de problema utilizando a representação Fórmula (Fatorial)	68
Figura 18 –	Problema resolvido envolvendo Combinação	70
Figura 19 –	Problema envolvendo múltiplas representações (Permutação)	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Classificação dos problemas combinatórios (por tipos)	55
Tabela 2 –	Número de tipos de representações apresentadas pelos problemas	63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	16
2	A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS.....	23
2.1	O DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL E OS CAMPOS CONCEITUAIS.....	23
2.2	CONCEITUALIZ(AÇÃO): ESQUEMAS, TEOREMAS-EM-AÇÃO E CONCEITOS-EM-AÇÃO.....	26
3	O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS.....	31
3.1	CONCEITOS BÁSICOS E SIGNIFICADOS DA MULTIPLICAÇÃO.....	31
3.2	AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS: CONCEITOS E CLASSIFICAÇÕES.....	32
3.3	CLASSIFICAÇÃO DE VERGNAUD.....	35
4	O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO.....	38
4.1	CONCEITOS E DEFINIÇÕES ATRELADOS AO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO.....	38
4.2	SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS.....	39
4.3	REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS E PROBLEMAS COMBINATÓRIOS.....	42
5	O LIVRO DIDÁTICO: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA.....	47
5.1	LIVRO DIDÁTICO COMO UM MATERIAL DIDÁTICO DENTRO DA SALA DE AULA.....	47
5.2	A COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS.....	49
6	ASPECTOS METODOLÓGICOS.....	52
7	ANÁLISE DOS RESULTADOS.....	54
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	73
	REFERÊNCIAS.....	75

1 INTRODUÇÃO

A Combinatória é uma das áreas fundamentais da Matemática, essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico e para a resolução de problemas em diversas disciplinas e no cotidiano. Este ramo da Matemática se preocupa com a contagem e a disposição de objetos, permitindo aos alunos compreenderem conceitos de organizações como produto cartesiano, permutações, combinações e arranjos. Com isso, “a Combinatória estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir de certas transformações que originam mudanças na estrutura da composição dos elementos desses conjuntos.” (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1996, p. 17, tradução nossa).

Sendo assim, defende-se que a forma como a Combinatória é abordada nos livros didáticos pode influenciar significativamente a compreensão e o aprendizado dos estudantes, pois livros didáticos têm um papel central na educação, sendo frequentemente a principal fonte de conteúdo para os alunos, bem como um guia para o professor. Portanto, é crucial que esses materiais apresentem uma estrutura clara e coerente, além de abordagens que estimulem o interesse e a participação dos estudantes.

Ao longo da história, a Combinatória foi definida de diferentes formas por diversos estudiosos. Bernoulli, no início do século XVIII, descreveu essa área da Matemática como o estudo das maneiras possíveis de combinar um conjunto de objetos sem que nenhuma possibilidade fosse ignorada. No século XIX, Nicholson ampliou essa visão ao afirmar que a Combinatória se dedica a identificar e apresentar todas as formas pelas quais um grupo de elementos pode ser associado e reorganizado. Posteriormente, Hart (1991), citado por Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997), sintetizou essa ideia ao definir a Combinatória simplesmente como a matemática da contagem. De forma semelhante, Rosa (2004) destaca que a Combinatória se ocupa da escolha e organização de elementos dentro de um conjunto, estudando técnicas de contagem que permitem determinar os agrupamentos possíveis desses elementos (Pessoa, 2009, p. 71).

Diante dessas definições, percebe-se que a Combinatória evoluiu de uma abordagem voltada à simples enumeração de possibilidades para um campo estruturado da Matemática que sistematiza a contagem de agrupamentos e possui importantes aplicações na Matemática e em outras ciências. Dessa maneira, seu propósito fundamental é quantificar conjuntos e subconjuntos sem a necessidade de listar todas as possibilidades individualmente, o que a torna

uma ferramenta essencial na resolução de problemas que envolvem organização e distribuição de elementos. Ao fornecer métodos e estratégias para determinar o número de agrupamentos possíveis em diferentes contextos, a Combinatória não apenas facilita a contagem, mas também amplia suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, garantindo eficiência e precisão na análise de diferentes situações.

Nesse contexto, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud (1996) se mostra uma ferramenta valiosa para investigar a maneira como os conceitos de Combinatória são apresentados e assimilados. Essa teoria propõe que o aprendizado ocorre por meio da construção de campos de significados, nos quais os alunos relacionam conceitos e operações.

É sabido que a teoria se insere dentro da tradição construtivista da aprendizagem, cujas raízes remontam às ideias de Jean Piaget. Assim, o construtivismo, como perspectiva epistemológica, defende que o conhecimento não é simplesmente transposto ao aprendiz, mas construído ativamente e gradativamente por ele por meio da interação com o meio e da reorganização de esquemas cognitivos. Dessa forma, a “teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista neopiagetiana que pretende oferecer um referencial mais frutífero do que o piagetiano ao estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas” (Moreira, 2002, p. 8). Dentro dessa vertente, Vergnaud aprofunda a compreensão sobre como os indivíduos desenvolvem conhecimentos matemáticos ao longo do tempo, enfatizando que a aprendizagem não ocorre de maneira linear ou isolada, mas sim dentro de estruturas conceituais inter-relacionadas.

Com essa abordagem, Vergnaud amplia a visão sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, fornecendo um arcabouço teórico que permite compreender tanto as dificuldades enfrentadas pelos alunos quanto os caminhos que favorecem uma aprendizagem significativa. A TCC, ao considerar a complexidade da aquisição do conhecimento, destaca a importância de situações-problema no desenvolvimento dos campos conceituais, favorecendo uma visão mais dinâmica e integrada da aprendizagem matemática.

Assim, a análise dos livros didáticos sob essa perspectiva pode revelar se os materiais favorecem ou dificultam a construção do conhecimento por parte dos alunos. Sobre o currículo apresentado, que inclui esse material didático, Sacristán (2000), afirma que:

Existe uma série de meios, [...], que costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, realizando uma interpretação deste. As prescrições costumam ser muito genéricas e, nessa mesma medida, não são

suficientes para orientar a atividade educativa nas aulas. [...] O papel mais decisivo neste sentido é desempenhado, por exemplo, pelos livros-texto (p. 104-105).

Nesse sentido, reconhecendo a importância do livro didático em sala de aula e para o professor, enxergamos que ele não deve ser visto apenas como um repositório de informações, mas como um instrumento mediador do ensino, que influencia tanto o conteúdo quanto a abordagem adotada pelo professor. Dessa forma, entendemos que a maneira como os conceitos de Combinatória são apresentados nesses materiais pode impactar significativamente o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes, seja promovendo uma aprendizagem significativa ou limitando-a a procedimentos mecânicos.

Além disso, a análise dos livros didáticos pode evidenciar de que maneira os professores podem utilizá-los de forma mais eficaz, garantindo que os alunos não apenas memorizem fórmulas e técnicas, mas compreendam as relações entre os diferentes conceitos combinatórios. Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, a aprendizagem ocorre quando os estudantes conseguem mobilizar e articular conceitos e representações para resolver problemas dentro de um determinado campo conceitual. Assim, defende-se que um material didático bem estruturado deve apresentar problemas variados, contextualizados e que estimulem diferentes estratégias de resolução (utilizando diferentes representações simbólicas), permitindo que os alunos construam significados progressivamente.

Portanto, ao investigar a abordagem combinatória nos livros didáticos, torna-se possível avaliar se esses materiais oferecem suporte adequado para o desenvolvimento cognitivo dos alunos e como podem ser utilizados pelos professores para promover um ensino que vá além da mera aplicação de regras e fórmulas, favorecendo um aprendizado mais profundo e conceitualmente fundamentado.

A escolha por realizar uma pesquisa relacionada ao ensino e à aprendizagem de Combinatória está atrelada a diferentes aspectos: pessoais, acadêmicos e sociais/profissionais. Do ponto de vista pessoal, a escolha do tema está profundamente conectada à minha trajetória acadêmica e às minhas experiências com o ensino de Matemática. Desde o início da minha formação, sempre tive uma curiosidade natural sobre como os conceitos matemáticos são ensinados e assimilados pelos estudantes. Ao mesmo tempo, durante minha vivência escolar e acadêmica, observei que esse conteúdo costuma ser desafiador para muitos estudantes, o que reforçou meu desejo de compreendê-lo de maneira mais profunda e investigá-lo sob uma perspectiva didática. Durante minha jornada como estudante de Licenciatura em Matemática,

enfrentei dificuldades ao me deparar com a Análise Combinatória, principalmente por sua natureza abstrata e pela multiplicidade de métodos envolvidos na resolução de problemas dessa área. Essa experiência pessoal me fez refletir sobre como esse conteúdo é apresentado nos livros didáticos e como ele poderia ser ensinado de maneira mais clara e acessível, despertando o interesse dos alunos ao invés de gerar bloqueios na aprendizagem. Sendo assim, acredito que muitos estudantes enfrentam obstáculos semelhantes, o que me motivou a análise de materiais didáticos quanto ao suporte oferecido ao ensino e à aprendizagem da Combinatória.

Do ponto de vista acadêmico, a escolha de analisar a Combinatória sob a perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais reflete um interesse profundo nas formas como os conceitos matemáticos são estruturados e assimilados pelos estudantes. A teoria desenvolvida por Gérard Vergnaud oferece um referencial teórico que permite investigar o desenvolvimento cognitivo em Matemática, especialmente por abordar a aprendizagem como um processo dinâmico e contextualizado, no qual os conceitos se inter-relacionam em redes conceituais. Ao aplicar essa teoria no estudo da Análise Combinatória, foi possível olhar para as diferentes situações-problemas que envolvem esse conteúdo, bem como os conceitos e representações simbólicas que os estudantes utilizam para resolvê-los, o que evidenciou possíveis lacunas na compreensão e no domínio das técnicas combinatórias. Além disso, a pesquisa permitiu uma análise crítica dos materiais didáticos utilizados, trazendo uma reflexão sobre o papel do livro didático no ensino de Matemática, considerado um dos principais recursos disponíveis para professores e alunos, visto que evidenciou se esses livros contemplam a diversidade de representações e de situações-problema necessárias para uma compreensão profunda da Análise Combinatória. Desse modo, o trabalho visou contribuir não só para a compreensão dos processos de ensino e de aprendizagem de Combinatória, mas também para o campo da Didática da Matemática, oferecendo subsídios para futuras pesquisas e práticas pedagógicas mais eficazes.

Profissionalmente e socialmente, a escolha do tema se justifica pela relevância do ensino desse conteúdo no contexto da formação dos estudantes e pela sua importância no desenvolvimento de competências matemáticas mais amplas. Como futura professora de Matemática, reconheço a centralidade da Análise Combinatória no currículo escolar, especialmente no Ensino Médio, onde ela desempenha um papel crucial na formação de habilidades que vão além da sala de aula, como o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a capacidade de tomada de decisões. Como profissional em formação, considero essencial analisar criticamente os recursos didáticos para identificar possíveis lacunas e oportunidades de

melhoria, visando uma prática pedagógica mais eficaz e alinhada às necessidades dos alunos. Por fim, ao realizar este estudo, também espero contribuir para o campo da Educação Matemática, proporcionando uma análise aprofundada de um aspecto crucial do ensino de Matemática que poderá ser útil para outros educadores e pesquisadores.

O objetivo desta pesquisa é investigar a apresentação da Combinatória em livros didáticos do Ensino Médio, examinando suas abordagens à luz da Teoria dos Campos Conceituais. De forma específica, categorizar as questões presentes nos livros didáticos que tratam de Combinatória, levando em conta as situações abordadas e os elementos invariantes que as caracterizam. Além disso, busca-se identificar as formas de representação simbólica empregadas nos materiais didáticos para o ensino de Combinatória, bem como aquelas exigidas como apoio à resolução de diferentes problemas combinatórios. Por fim, pretende-se examinar a organização das situações combinatórias nesses livros, com destaque para o desenvolvimento das estruturas multiplicativas e sua relação com a resolução de variados problemas de contagem.

Para isso, foram selecionadas três coleções de livros didáticos, amplamente adotadas em escolas públicas estaduais, visando uma análise abrangente e representativa. Além de apontar potencialidades e lacunas nas abordagens sobre Combinatória a partir desse estudo, espera-se que essa investigação contribua para uma reflexão crítica acerca dos materiais didáticos utilizados no ensino, uma vez que “uma análise de LD descortina ao pesquisador diversas paisagens que podem ir desde o estudo da cultura escolar em uma dada época à identificação de possíveis razões de dificuldades de aprendizagem...” (Bittar, 2017, p. 3).

Dessa forma, a pesquisa buscou responder à pergunta: como a Combinatória é apresentada nos livros didáticos do Ensino Médio à luz da Teoria dos Campos Conceituais? Ao explorar essa questão, o estudo pretendeu oferecer percepções que possam enriquecer o ensino da Combinatória e promover uma Educação Matemática mais significativa e contextualizada.

No Capítulo 2, é iniciada a apresentação dos aportes teóricos que consolidam esta pesquisa. Nesse capítulo é evidenciada a discussão da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986; 1990; 1996), principal aporte teórico adotado. Com base nessa teoria, os conceitos combinatórios serão explorados à luz do tripé composto pelas situações que o atribuem sentido, pelos invariantes que caracterizam essas situações e pelas representações simbólicas utilizadas para representá-los.

No Capítulo 3, é apresentado, em específico, o campo conceitual das estruturas multiplicativas, que engloba conceitos relacionados aos diferentes significados da multiplicação, da divisão ou de uma união dessas duas operações e, conseqüentemente, à Combinatória.

No Capítulo 4, é abordado o raciocínio combinatório e, especificamente, a classificação adotada para as situações combinatórias com base em Borba (2010), que toma por base os invariantes de ordem, de escolha e de esgotamento de tais situações para classificá-las em produtos de medidas, arranjos, combinações e permutações. Ainda, são discutidas diferentes representações simbólicas tipicamente utilizadas para representar e resolver problemas combinatórios, tais como a listagem, a árvore de possibilidades, o Princípio Fundamental da Contagem e as fórmulas específicas.

No Capítulo 5, são apresentadas discussões acerca do livro didático como uma ferramenta de ensino para a Combinatória, contextualizando o papel desse material didático e uma evolução do mesmo no Brasil e no contexto do Novo Ensino Médio. Tal contextualização evidencia a importância de voltar o olhar para como essa temática é abordada nos livros presentes nas salas de aula brasileiras.

No Capítulo 6, é apresentada a metodologia adotada para a realização da pesquisa, descrevendo os procedimentos de seleção, categorização e análise das atividades presentes no livro didático analisado. São explicitados os critérios utilizados à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e da classificação proposta por Borba (2010), o que permite compreender o percurso metodológico seguido para atingir os objetivos do estudo.

No Capítulo 7, são discutidos os resultados obtidos a partir da análise das atividades de Combinatória nas coleções de livros didáticos selecionadas. A análise evidencia os tipos de representações simbólicas presentes, os níveis de formalização exigidos dos estudantes e a frequência com que aparecem situações que favorecem a construção de significados conceituais. A partir desses elementos, é possível perceber tendências e lacunas no tratamento da Combinatória no material analisado.

Por fim, no Capítulo 8, são apresentadas as Considerações Finais do trabalho, retomando os objetivos propostos e refletindo sobre as contribuições da pesquisa para a compreensão do uso do livro didático no ensino da Combinatória. O capítulo também aponta limitações do estudo e possibilidades para futuras investigações, especialmente no que se refere ao

desenvolvimento de propostas didáticas que favoreçam a construção de significados e a articulação entre os diferentes conceitos atrelados ao desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Nesse sentido, defendemos que, para compreender a apresentação da Análise Combinatória em livros didáticos do Ensino Médio, é fundamental estabelecer um embasamento teórico que integre a teoria matemática e as abordagens pedagógicas pertinentes. A partir dessas perspectivas, busca-se explorar como a interconexão entre conceitos e práticas pedagógicas pode enriquecer os processos de ensino e de aprendizagem. Com isso, os três aspectos destacados a seguir à luz da Teoria dos Campos Conceituais, interligados, fornecem uma base sólida para a pesquisa. A análise das relações entre esses elementos permitirá uma investigação aprofundada das metodologias presentes na abordagem da Combinatória em livros didáticos do Ensino Médio, evidenciando a importância de um trabalho que promova um aprendizado significativo e contextualizado.

2 A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), formulada por Gérard Vergnaud, oferece uma compreensão profunda do processo de aprendizagem matemática, enfatizando a interconexão entre conceitos e situações práticas. Vergnaud (1996, p. 18) define “os campos conceituais como sistemas de situações que envolvem a utilização de um mesmo conceito, possibilitando que os alunos construam conhecimentos de forma integrada”. Essa visão ressalta a importância de um ensino que promova conexões entre o novo conhecimento e as experiências prévias dos alunos, tornando o aprendizado mais significativo.

2.1 O DESENVOLVIMENTO CONCEITUAL E OS CAMPOS CONCEITUAIS

Gérard Vergnaud (1933–2021) foi um importante psicólogo, matemático e epistemólogo francês, amplamente reconhecido por suas contribuições ao campo da Didática da Matemática. Sua principal teoria, conhecida como Teoria dos Campos Conceituais, propõe que a aprendizagem de conceitos não ocorre de forma isolada, mas por meio de situações variadas que envolvem diferentes representações e operações cognitivas. Essa teoria tem sido fundamental para compreender como os alunos desenvolvem conhecimentos matemáticos, especialmente em conteúdos como a Combinatória, pois destaca a importância do contexto e da diversidade de situações para a construção de significados. Seus estudos são amplamente utilizados em pesquisas que investigam os processos de ensino e aprendizagem da matemática, sendo referência central em estudos que analisam a relação entre pensamento conceitual e resolução de problemas.

Assim, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria desenvolvimentista do processo de conceitualização, que permite identificar e analisar tanto as permanências quanto as rupturas nos conhecimentos, a partir da perspectiva de seus conteúdos conceituais. Criada por Gérard Vergnaud, a TCC vem como ampliação e redirecionamento do enfoque piagetiano, que se fazia centrado nas operações lógicas e nas estruturas gerais do pensamento, direcionando-o para a análise do funcionamento cognitivo do *sujeito-em-situação* (Moreira, 2002).

Segundo Vergnaud, Piaget não reconheceu plenamente o quanto o desenvolvimento cognitivo está vinculado às situações específicas e às conceitualizações exigidas por elas (1998, p. 181 *apud* Moreira, 2002, p.7). Ele também argumenta a tentativa piagetiana de reduzir a complexidade conceitual progressivamente construída pelas crianças a uma forma de

complexidade lógica geral, considerada por ele como uma abordagem limitada e inadequada (1994, p. 41 *apud* Moreira, 2002, p.7). Embora reconheça a relevância das contribuições de Piaget para a educação, Vergnaud ressalta que este não atuou diretamente no contexto da sala de aula, ensinando matemática ou ciências. Por isso, defende que, ao voltarmos nosso olhar para o que efetivamente ocorre no ambiente escolar, torna-se indispensável considerar o conteúdo específico do conhecimento (1996, p. 10).

Com isso, os processos de ensino e aprendizagem podem ser examinados à luz desse referencial teórico, considerando-se, prioritariamente, a natureza dos conceitos mobilizados e suas especificidades. Sendo assim,

A teoria dos campos conceituais privilegia modelos que atribuem um papel essencial aos próprios conceitos matemáticos. [...] Relativamente a uma psicologia cognitiva centrada nas estruturas lógicas como é a de Piaget, a teoria dos campos conceituais aparece antes como uma psicologia dos conceitos (Vergnaud, 1996, p. 167).

Ainda, no que se refere especificamente à Matemática, Vergnaud “foi obrigado a se interessar muito mais do que Piaget por questões como as estruturas aditivas e as estruturas multiplicativas para estudar as dificuldades dos alunos nessas áreas” (Moreira, 2002, p. 7). Dessa forma, embora sua investigação sobre as estruturas aditivas e multiplicativas o tenha levado a um envolvimento profundo com conteúdos matemáticos, tal dedicação não delimita o escopo de sua teoria. Ao contrário, evidencia a força de um referencial que, mesmo nascido da análise de domínios específicos, oferece ferramentas conceituais potentes para compreender a aprendizagem em sua dimensão mais ampla - situada, contextualizada e atravessada por diferentes saberes.

Uma das principais contribuições da teoria é a noção de que o aprendizado se dá por meio da resolução de problemas contextualizados. Moreira (2002, p. 10) destaca que “a teoria dos campos conceituais proporciona um entendimento sobre como o conhecimento se articula em situações práticas, favorecendo a construção de significados”. Dessa forma, quando os alunos se deparam com problemas que se relacionam com suas experiências e vivências, eles não apenas compreendem melhor os conceitos matemáticos, mas também conseguem articular esses conceitos de maneira mais eficaz em diferentes contextos. Assim, essa abordagem não só facilita a compreensão, mas também estimula o pensamento crítico e a capacidade dos estudantes aplicarem o que aprenderam em novas situações, formando uma base sólida para um aprendizado duradouro.

A progressão da aprendizagem é um aspecto central na abordagem de Vergnaud. Ele argumenta que “os alunos desenvolvem seus conceitos de maneira gradual, enfrentando diferentes situações-problema que desafiam suas habilidades e promovem a reflexão” (Vergnaud, 1996, p. 34). Isso é corroborado por Moreira (2002, p. 22), que enfatiza que “o processo de aprendizagem deve ser dinâmico e guiado por desafios que estimulem o raciocínio crítico dos alunos”. Sendo assim, os educadores são encorajados a criar um ambiente de aprendizagem que não apenas apresente dificuldades, mas também permita que os alunos explorem, questionem e construam seu conhecimento ativamente. Essa perspectiva é crucial para o desenvolvimento de competências que vão além da memorização, preparando os alunos para aplicarem suas habilidades em contextos variados e em situações do cotidiano.

A Teoria dos Campos Conceituais também aborda a importância das representações na aprendizagem matemática. Vergnaud (1996, p. 56) afirma que “a utilização de representações diversas, como gráficos, tabelas e diagramas, enriquece o processo de ensino-aprendizagem, possibilitando que os alunos visualizem e compreendam os conceitos de forma mais ampla”. Moreira (2002, p. 30) aponta que essa diversidade de representações ajuda os alunos a desenvolverem uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Ou seja, ao explorarem diferentes representações, os alunos podem encontrar soluções alternativas para problemas. Com isso, a utilização de múltiplas representações se torna uma estratégia pedagógica poderosa, contribuindo para uma educação matemática mais rica e significativa.

Ainda, a aplicação da Teoria dos Campos Conceituais no ambiente escolar promove uma prática pedagógica que valoriza a investigação e a colaboração. Moreira (2002, p. 20) observa que “a implementação dessa teoria em sala de aula transforma o papel do professor, que passa a ser um mediador e facilitador do processo de aprendizagem”. Com isso, a transformação do papel do educador é crucial para criar um ambiente onde a troca de ideias e a construção coletiva do conhecimento sejam estimuladas de forma que o estudante obtenha uma aprendizagem profunda.

Há tempos suas contribuições têm auxiliado pesquisadores a compreender como os alunos constroem e desenvolvem conceitos matemáticos em áreas diversas, por meio da análise das estratégias que utilizam ao agir em diferentes situações. Diante disso, a teoria ganha grande destaque sendo uma das principais teorias que sustentam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática (Magina, 2006). Isso evidencia como a teoria contribui de forma

concreta para orientar o ensino da Matemática, buscando torná-lo mais conectado às experiências dos alunos e aos seus processos de compreensão.

Para além, a proposta de Vergnaud oferece subsídios teóricos valiosos para compreender como se dá a aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse sentido, é importante destacar que

Para Vergnaud (1990) os conceitos envolvem um conjunto de situações-problema, que lhes dão significado psicológico; um conjunto de invariantes, que são propriedades lógico-operatórias, as quais permitem generalização e transferência de aprendizagem; e um conjunto de símbolos utilizados na representação do conceito. Esses aspectos de cada conceito formam um tripé (significados, invariantes e representações) [...] (Vergnaud, 1990 *apud* Pessoa, 2009, p. 38).

Ou seja, esses elementos estão interligados entre si e com outros conceitos, uma vez que nenhum conceito se desenvolve isoladamente. A interação entre os diferentes tipos de problemas, contextos e simbolismos contribui para a capacidade de identificar relações entre situações diversas, favorecendo o desenvolvimento conceitual.

A utilização da Teoria dos Campos Conceituais é, portanto, um caminho promissor para o ensino de Matemática, oferecendo um arcabouço que possibilita uma aprendizagem significativa e duradoura. Vergnaud e seus estudos inspiram educadores a repensar suas práticas, promovendo um ambiente onde os alunos possam construir seu conhecimento de maneira ativa e contextualizada.

2.2 CONCEITUALIZ(AÇÃO): ESQUEMAS, TEOREMAS-EM-AÇÃO E CONCEITOS-EM-AÇÃO

A Teoria dos Campos Conceituais se faz ampla e estruturada, assim, como citado por Moreira (2002, p. 9): “Os conceitos-chave da teoria dos campos conceituais são, além do próprio conceito de campo conceitual, os conceitos de esquema (a grande herança piagetiana de Vergnaud), situação, invariante operatório (teorema-em-ação ou conceito-em-ação), e a sua concepção de conceito”. Esses elementos constituem a base teórica que permite compreender como os sujeitos constroem conhecimentos em diferentes domínios, evidenciando a complexidade dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem.

Os esquemas, segundo Pessoa (2009, p. 39), são definidos por Vergnaud como uma organização invariante da conduta frente a uma classe de situações, ressaltando que o sujeito age conforme as concepções que constrói sobre a situação enfrentada. Na Teoria dos Campos

Conceituais, os esquemas têm um papel fundamental na compreensão dos processos de aprendizagem, pois correspondem às estruturas invariantes de ação utilizadas para enfrentar uma determinada classe de situações. Essa organização, como é definida pelo autor da teoria, envolve não apenas comportamentos observáveis, mas também elementos cognitivos como metas, regras de ação e modos de inferência que o sujeito utiliza para resolver um problema.

Assim, a partir da Teoria dos Campos Conceituais, entende-se que o raciocínio matemático dos alunos é guiado por esquemas que se estruturam a partir das experiências vividas em situações-problema. Esses esquemas incluem componentes implícitos, como os teoremas-em-ação, que representam aquilo que o sujeito acredita ser verdadeiro sobre a situação. Com isso,

Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001) afirmam que na Matemática, pode-se dizer que esses teoremas-em-ação se referem às relações matemáticas que são levadas em consideração pelos alunos quando estes escolhem uma operação, ou uma sequência de operações, para resolver o problema (Pessoa, 2009, p. 42-43).

No contexto da sala de aula, esses conceitos se materializam nas estratégias que os estudantes utilizam, muitas vezes de forma implícita, ao selecionar operações, generalizar procedimentos ou interpretar enunciados.

No âmbito da Matemática, a ativação de esquemas se manifesta na aplicação consistente de procedimentos ou estratégias para resolver tipos semelhantes de problemas, como a utilização de algoritmos para cálculo, o reconhecimento de padrões em sequências ou a escolha de operações adequadas em problemas de contagem. Dessa forma, os esquemas não apenas facilitam a generalização e a transferência do conhecimento, mas também revelam a profundidade da compreensão do aluno sobre o conceito em estudo.

Além disso, a noção de invariantes operatórios é fundamental para compreender como os alunos generalizam procedimentos matemáticos. Em atividades envolvendo proporcionalidade, por exemplo, muitos estudantes desenvolvem esquemas baseados na multiplicação cruzada, sem necessariamente compreender os significados envolvidos na razão ou na equivalência entre frações. A multiplicação cruzada, nesse caso, torna-se um invariante operatório acionado automaticamente em contextos que o aluno reconhece como ‘problemas de regra de três’, o que revela como certos procedimentos se estabilizam cognitivamente mesmo quando seu uso não é conceitualmente adequado.

Assim, “os invariantes operatórios, cujas categorias principais são os teoremas-em-ação e os conceitos-em-ação são a base conceitual implícita que permite obter informações e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes” (Vergnaud, 1996, p. 201 *apud* Pessoa, 2009, p. 41). Esses invariantes permitem que o sujeito, a partir das informações disponíveis e dos objetivos a serem alcançados, infira quais ações são mais adequadas para resolver a situação. Dessa forma, evidencia-se o papel central dos esquemas de ação na mobilização do conhecimento, uma vez que é por meio deles que o aprendiz opera cognitivamente diante das exigências do meio, revelando não apenas o que sabe, mas como esse saber é utilizado na prática.

Os *conceitos-em-ação* podem, portanto

[...] ser ponto de partida para o avanço da compreensão de conceitos, pois, embora os sujeitos façam uso dos invariantes em ação sem consciência plena dos mesmos, pode-se aproveitar estas aproximações do conceito para levar alunos a reflexões e discussões explícitas das relações e propriedades envolvidas nas situações (Pessoa, 2009, p. 42).

No contexto do ensino de Matemática, esse entendimento é especialmente relevante, pois permite ao professor observar e interpretar como os alunos estão compreendendo determinado conteúdo por meio das estratégias que utilizam. Por exemplo, ao resolver uma situação de Combinatória, um aluno pode aplicar corretamente a ideia de permutação sem saber nomeá-la formalmente - isso indica a presença de um conceito-em-ação. Ao identificar esse uso, o professor pode propor intervenções que conduzam à explicitação do raciocínio, incentivando o aluno a articular suas ações com os conceitos matemáticos formais, como arranjos, combinações ou o Princípio Fundamental da Contagem (também chamado de Princípio Multiplicativo).

Para Vergnaud (1996), um *teorema-em-ação*, por sua vez, é uma proposição tida como verdadeira sobre o real. Os teoremas-em-ação podem ser definidos, segundo Magina, Campos, Nunes e Gitirana (2001), no contexto da Matemática, como as relações matemáticas que os alunos levam em consideração ao selecionar uma operação ou uma sequência de procedimentos para resolver um problema. Esses teoremas estão implícitos na ação e, muitas vezes, não são verbalizados pelos sujeitos, apresentando uma validade limitada em comparação aos teoremas formais da Matemática, pois geralmente se aplicam apenas a um conjunto restrito de situações. Dessa forma, os teoremas-em-ação não devem ser vistos como erros ou equívocos, mas como expressões parciais do conhecimento do aluno que, quando exploradas de maneira adequada, podem ser transformadas em oportunidades de aprendizagem.

De acordo com Gitirana *et al.* (2014), o conhecimento conceitual não é construído de forma imediata, mas sim a partir da vivência e da resolução de uma variedade de problemas ao longo do tempo. Um único conceito matemático exige múltiplas abordagens e contextos para ser verdadeiramente compreendido, o que implica na necessidade de expô-lo a diferentes situações, tanto práticas quanto teóricas. Isso porque cada situação ativa diferentes aspectos e significados associados ao conceito, ampliando a rede de relações cognitivas do aprendiz. Nesse sentido, o ensino que busca promover a compreensão conceitual deve considerar a diversidade de contextos como estratégia didática, permitindo que os alunos articulem, confrontem e reestruturam seus conhecimentos. Essa multiplicidade de experiências favorece não apenas a apropriação dos conceitos em níveis mais profundos, mas também sua mobilização em novos contextos.

Nesse sentido, para além desses elementos (esquemas, conceitos e teoremas em ação), a TCC chama atenção para um tripé relacionado à conceitualização, destacando o papel das situações no desenvolvimento dos conceitos. A aprendizagem matemática significativa ocorre quando o aluno é exposto a uma variedade de situações que exigem o uso do mesmo conceito sob diferentes perspectivas. Isso é particularmente relevante em temas como Combinatória, onde a diversidade de contextos, como por exemplo, jogos, organização de senhas ou organização de objetos, que permite ao estudante reconhecer regularidades e desenvolver esquemas mais estruturados. Assim, o ensino orientado pela teoria não apenas valoriza a resolução de problemas, mas também promove a construção ativa de significados por meio da variação de situações e da reflexão sobre os próprios modos de pensar.

Tais situações possuem propriedades invariantes, características imutáveis que permanecem constantes mesmo diante de variações superficiais nos enunciados, nos dados envolvidos ou no contexto de apresentação. Esses invariantes são fundamentais na Teoria dos Campos Conceituais, pois permitem classificar e distinguir diferentes tipos de situação, orientando o sujeito na escolha de esquemas de ação apropriados, assim como afirma Moreira (2002), “O conceito de invariante é central, pois é a presença desses elementos constantes que permite identificar um tipo de situação e, portanto, escolher o esquema adequado para sua resolução.” (p. 6-7). Assim, a identificação dos invariantes é um passo central no processo de construção de significados conceituais e no desenvolvimento de competências para resolver problemas de forma flexível e fundamentada.

Por fim, a Teoria dos Campos Conceituais aborda as representações simbólicas que desempenham um papel fundamental na construção e na comunicação dos conceitos matemáticos. Vergnaud (1990) destaca que os conceitos são sempre mediados por sistemas de símbolos que possibilitam a formulação, manipulação e generalização das ideias matemáticas. Essas representações podem assumir diferentes formas, como linguagem natural, notação algébrica, gráficos, desenhos ou símbolos específicos, e são essenciais para que o aluno consiga conectar situações-problema concretas ao pensamento abstrato. No ensino da Matemática, trabalhar com representações variadas favorece a compreensão mais profunda, pois permite ao estudante interpretar e expressar um mesmo conceito sob diversas perspectivas, explorando seus invariantes e enriquecendo seu processo de aprendizagem e ampliando sua capacidade de transferir o conhecimento para novas situações.

Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais oferece uma perspectiva potente para compreender e atuar sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, valorizando tanto a ação quanto a reflexão sobre ela. Especificamente, a temática foco do presente trabalho, a Combinatória, está inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas, discutido na seção a seguir.

3 O CAMPO CONCEITUAL DAS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS

Para Vergnaud (1991), "o campo conceitual das estruturas multiplicativas consiste em todas as situações que podem ser analisadas como proporções simples e múltiplas, as quais podem ser resolvidas por multiplicação e/ou divisão" (*apud* Pessoa, 2009, p. 57). Assim, tal campo pode ser relacionado a outras situações de diferentes conceitos matemáticos. A partir disso, será discutido o campo conceitual das estruturas multiplicativas enfatizando as classificações dos problemas feita por Gitirana *et al.* (2014).

3.1 CONCEITOS BÁSICOS E SIGNIFICADOS DA MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação é uma das quatro operações fundamentais da aritmética, sendo, geralmente, introduzida na Educação Básica como uma forma de representar adições de parcelas iguais. Assim, é necessário enfatizar a multiplicação como uma relação quaternária, ou seja, uma operação que envolve a relação entre quatro grandezas, duas a duas da mesma espécie. No entanto, sua compreensão vai muito além dessa definição inicial, assim como afirma Gitirana *et al.* (2014, p. 24) “[...] há uma clara continuidade entre a adição e a multiplicação, em termos de estruturas. No entanto, em relação aos significados, há uma descontinuidade entre os problemas de adição e multiplicação”, uma vez que envolve múltiplos significados que variam de acordo com o contexto da situação-problema em que está inserida.

Assim, antes de abordar as estruturas multiplicativas em profundidade, é necessário compreender os conceitos fundamentais que sustentam essa operação. Lima (2014), define a função “somar m ” que é dada por $f_m(p) = p + m$.

A partir disso,

multiplicar um número m por 1 não o altera. Multiplicar m por um número maior do que 1, ou seja, por um número da forma $n+1$, é iterar n -vezes a operação de somar m , começando com m . Assim, $m \cdot 2 = (f_m)^2(m) = m + m$, $m \cdot 3 = (f_m)^3(m) = m + m + m$ (Lima, 2014, p. 38).

Em outras palavras, o autor define “o produto $m \cdot n$ como a soma de n parcelas iguais a m , ou melhor, o resultado que se obtêm quando se adiciona a m , $n - 1$ vezes, o mesmo número m ” (Lima, 2014, p. 37). Ainda, essa operação possui algumas propriedades. São elas:

- Associatividade: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;
- Comutatividade $m \cdot n = n \cdot m$;
- Lei do corte: $m \cdot p = n \cdot p \Rightarrow m = n$;

- Distributividade: $m(n + p) = m \cdot n + m \cdot p$;
- Monotonicidade: $m < n \Rightarrow m \cdot p < n \cdot p$.

A partir de tais propriedades, Gitirana *et al.* (2014) discute a realidade de que propriedades como a comutatividade nem sempre são compreendidas facilmente, o aluno precisa dominar conceitos mais sofisticados para compreender amplamente a estruturação das propriedades multiplicativas. No entanto, as autoras destacam que, no campo da combinatória é bem simples a visualização da comutatividade, por exemplo, uma vez que “se parte de duas grandezas de naturezas diferentes para formar pares e produzir outra grandeza” (Gitirana *et al.*, 2014, p. 35). É importante destacar que nesse caso mencionado, as autoras se referem a combinatória de forma análoga a Vergnaud, como apenas um produto de medidas. No presente trabalho outras situações combinatórias são consideradas, as mesmas são discutidas no próximo capítulo (seção 4.2).

Com isso, temos que “compreender o raciocínio multiplicativo, implica uma transformação muito importante no pensamento das crianças, apesar de muitas vezes as operações multiplicação e divisão serem consideradas relativamente simples do ponto de vista matemático” (Carvalho; Gonçalves, 2003, p. 24), uma vez que estas operações assumem um elevado nível de complexidade do ponto de vista cognitivo quando consideradas enquanto instrumentos de modelagem de situações, e não apenas sob a perspectiva do cálculo, pois envolvem a atribuição de novos significados aos números e a construção de diferentes tipos de relações entre eles, que precisam ser devidamente exploradas no processo de ensino.

Essas operações (multiplicação e divisão) são centrais no campo conceitual das estruturas multiplicativas, discutido na seção a seguir.

3.2 AS ESTRUTURAS MULTIPLICATIVAS: CONCEITOS E CLASSIFICAÇÕES

Vergnaud define o campo conceitual das estruturas multiplicativas como “o conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações” (Vergnaud, 1996, p. 167). As estruturas multiplicativas desempenham um papel crucial no entendimento das operações matemáticas, especialmente na formação de conceitos fundamentais no ensino. Gitirana *et al.* (2014, p. 22) afirmam que “a multiplicação é uma operação que deve ser compreendida não apenas como uma ação mecânica, mas como uma relação entre quantidades”. Essa visão amplia a percepção dos alunos sobre a multiplicação, permitindo que vejam suas aplicações em contextos variados, desde situações cotidianas até

problemas matemáticos complexos. As autoras destacam que “o aprendizado da multiplicação envolve a construção de conexões entre diferentes representações e contextos” (Gitirana *et al.*, 2014, p. 45). Essa abordagem ajuda a criar uma compreensão mais profunda, promovendo a capacidade de resolver problemas de forma mais eficaz.

À luz da Teoria dos Campos Conceituais, Gitirana *et al.* (2014) também discutem a importância de representar a multiplicação de maneiras diversas, utilizando modelos como tabelas de multiplicação, diagramas, e manipulação de objetos concretos. Elas afirmam que “a utilização de diferentes representações permite que os alunos explorem as propriedades da multiplicação de maneira mais abrangente” (p. 56). Essa abordagem é fundamental para que os alunos adquiram flexibilidade em suas formas de pensar e consigam utilizar a multiplicação de maneira adequada em diferentes contextos.

Além disso, as autoras ressaltam que a multiplicação não deve ser ensinada isoladamente, mas sim integrada a outras operações e conceitos matemáticos. “A inter-relação entre a multiplicação e outras áreas da matemática é crucial para o desenvolvimento de um raciocínio matemático completo” (Gitirana *et al.*, 2014, p. 73). Dessa forma, essa abordagem não apenas facilita a resolução de problemas complexos, mas também ajuda os alunos a se tornarem mais competentes e confiantes em suas habilidades matemáticas, reconhecendo a multiplicação como uma ferramenta valiosa em um amplo espectro de contextos. A defesa das autoras está diretamente articulada ao conceito de campo conceitual das estruturas multiplicativas, conforme defendido por Vergnaud. Vergnaud, que define o campo conceitual das estruturas multiplicativas como “o conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações” (Vergnaud, 1996, p. 167).

A proposta de atividades que incentivem a exploração e a reflexão é um ponto chave na abordagem feita pelas autoras. Elas sugerem que “atividades que desafiem os alunos a investigar e discutir as propriedades da multiplicação podem levar a uma compreensão mais sólida e duradoura” (Gitirana *et al.*, p. 89). Através de situações problemáticas que envolvam a multiplicação, os educadores podem estimular a curiosidade e o pensamento crítico dos alunos, promovendo um ambiente de aprendizagem colaborativo e dinâmico. As autoras ainda destacam a importância de um ensino que valorize a prática reflexiva. “Os alunos devem ser encorajados a pensar sobre suas próprias estratégias e a compartilhar suas soluções, criando um espaço onde a troca de ideias seja valorizada” (p. 95). Essa prática não só fortalece a

aprendizagem, mas também promove habilidades sociais e comunicativas, fundamentais no ambiente escolar e na vida cotidiana.

Por fim, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), já recomendavam a exploração das situações que envolvam as estruturas multiplicativas desde os primeiros anos da escolarização e ao longo de toda a trajetória escolar. Esses documentos enfatizavam a importância de propor problemas progressivamente mais complexos, que façam sentido aos alunos, evitando práticas centradas na memorização e repetição mecânica de cálculos (Brasil, 1998).

Nesse caso, o professor, enquanto mediador do ensino e da aprendizagem, elabora um conjunto de tarefas (situações) para que haja reflexão sobre as condições de resolvê-las, isto é, proporcionar caminhos para aprendizagem de novos conhecimentos; e a ruptura é alcançada à medida que o aluno compreende que a adição de parcelas iguais não é suficiente para resolver algumas situações-problema que envolvam as Estruturas Multiplicativas (Couto; Lima; Santana, 2021, p. 335 *apud* Silva; Silva, 2023, p. 6).

De maneira análoga, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atualmente em vigor, também enfatiza o desenvolvimento do pensamento multiplicativo de forma contínua e progressiva ao longo da Educação Básica. O documento propõe que os alunos sejam expostos, desde os anos iniciais até o Ensino Médio, a diferentes tipos de situações-problema e representações, como a utilização de registros verbais, pictóricos, algébricos e esquemáticos, promovendo uma aprendizagem que vá além da mecanização e que favoreça a compreensão conceitual das estruturas multiplicativas em distintos contextos.

Assim, defende-se que para que haja um melhor entendimento e significado das situações multiplicativas, a multiplicação e a divisão “devem ser apresentados numa grande variedade de situações dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas, para que ele [o estudante] seja capaz de associar os novos conhecimentos aos conhecimentos que ele já dispõe, resultados de experiências anteriores” (Silva; Silva, 2023, p. 6-7). É justamente a articulação entre os diferentes saberes que possibilita ao estudante mobilizar competências para enfrentar novas situações, atribuindo significado aos conceitos e procedimentos envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem.

Dentro do campo conceitual das estruturas multiplicativas, Vergnaud (1988) propõe uma classificação das diferentes situações que atribuem sentido às operações aqui discutidas. Tal classificação é apresentada e discutida a seguir.

3.3 CLASSIFICAÇÃO DE VERGNAUD

Nos estudos desenvolvidos por Vergnaud (1988) sobre as estruturas multiplicativas, o autor propõe uma sistematização dos diferentes tipos de problemas, levando em consideração não apenas as estruturas matemáticas subjacentes, mas também os níveis de complexidade envolvidos e os tipos de raciocínio exigidos dos alunos para a sua resolução. Essa classificação visa compreender como os sujeitos mobilizam conhecimentos conceituais e operatórios diante de diferentes situações multiplicativas, contribuindo para uma análise mais aprofundada dos desafios cognitivos presentes nesse campo (Gitirana *et al.*, 2014).

No Quadro 1, apresentam-se os tipos de problemas multiplicativos propostos por Vergnaud (1988), conforme a organização sistematizada por Montenegro (2018), com base na obra de Gitirana, Campos, Magina e Spinillo (2014). Essa classificação e os exemplos apresentados permitem visualizar de forma didática as diferentes estruturas envolvidas nos problemas multiplicativos, bem como as relações entre elas e os significados atribuídos à multiplicação em contextos diversos.

Quadro 1 - Diferentes tipos de situações multiplicativas propostas por Vergnaud

		Multiplicação	Divisão
Isomorfismo de medidas (Quaternárias)	Proporção simples	<u>Um para muitos</u>: A receita de brigadeiro de Maria leva 1 lata de leite condensado para 5 colheres de chocolate. Ela vai fazer brigadeiros com 4 latas de leite condensado. Quantas colheres de chocolate ela usará? <u>Muitos para muitos (quarta proporcional)</u>: Dona Benta usa 15 ovos para fazer 3 bolos. Quantos ovos ela precisa para fazer 6 bolos?	<u>Partição</u>: O médico mandou Marta tomar 24 comprimidos em 8 dias. Ela tem que tomar a mesma quantidade de comprimidos todos os dias. Quantos comprimidos ela tomará por dia? <u>Quotição</u>: Para ficar boa de uma doença, Ana tomou 32 comprimidos. O médico mandou Ana tomar 4 comprimidos por dia. Quantos dias esse tratamento durou?

	Proporção Múltipla	A receita da massa de pastel do “seu” Manoel é assim: para cada copo de leite ele usa 3 ovos, e para cada ovo, 2 xícaras de farinha. Para fazer a massa usando 2 copos de leite, quantas xícaras de farinha vai precisar?	
Produto de medidas (Ternárias)	Comparação multiplicativa	<u>Referido desconhecido:</u> Uma loja do shopping vende tudo 3 vezes mais caro que a lojinha da esquina. Uma sandália custa R\$6,00 na lojinha da esquina. Quanto custa a mesma sandália na loja do shopping?	<u>Referente desconhecido:</u> A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho? <u>Relação desconhecida:</u> Mário ganhou 18 bolas e Rosa ganhou 6 bolas. A quantidade de bolas que Rosa ganhou é quantas vezes menor que a de Mário? <u>Relação desconhecida:</u> Comprei uma boneca por R\$21,00 e uma bola por R\$3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola?
	Combinatória	<u>Produto cartesiano:</u> Em uma sorveteria, o sorvete de uma bola pode ser servido em casquinho ou copinho. Tem 4 sabores diferentes (menta, baunilha, chocolate, morango). Maria quer um sorvete de uma bola. Quantas maneiras diferentes ela tem para escolher? <u>Área:</u> A sala de aula da Escola Divertida tem formato retangular com 3 metros de largura e 5 metros de extensão. Qual é a área da sala de aula?	<u>Produto cartesiano inverso:</u> Uma loja vende bola de cores diferentes e em 2 tamanhos (pequeno e grande). Para cada cor tem bolsas dos dois tamanhos. No total são 12 bolas diferentes. Quantas cores diferentes poder ser as bolas?

Fonte: Montenegro, 2018, p. 60.

A partir da classificação proposta por Vergnaud (1988) e do respectivo quadro de organização dos campos conceituais, observa-se que a Combinatória é abordada como um dos significados possíveis da multiplicação, sendo exemplificada de maneira bastante específica, a partir de situações que envolvem o produto de medidas (nomeado no quadro como Produto Cartesiano - e também apresentado na versão inversa, associada à divisão). No entanto, ao se

olhar mais atentamente para a Combinatória como um campo próprio de investigação, outros pesquisadores têm ampliado essa discussão, descrevendo uma variedade maior de situações combinatórias específicas com base na identificação de diferentes invariantes e na análise das representações simbólicas envolvidas. Um exemplo dessa ampliação pode ser encontrado na proposta de classificação de Borba (2010), que será apresentada a seguir, e que contribui para uma compreensão mais refinada e didaticamente relevante da diversidade de problemas combinatórios. Tal classificação é adotada no presente trabalho e se refere a um caminho para o amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório de estudantes de diferentes etapas da escolarização.

4 O RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

A Combinatória é um ramo da Matemática que se ocupa do estudo das contagens e organizações possíveis de elementos em conjuntos. Segundo Borba (2010, p. 12), “a Combinatória pode ser vista como a arte de contar, envolvendo não apenas a contagem direta, mas também a organização e a análise de diferentes formas de agrupar elementos”. Essa temática é essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico e é frequentemente aplicada em diversas áreas, como a Probabilidade, a Estatística e a teoria dos grafos.

4.1 CONCEITOS E DEFINIÇÕES ATRELADOS AO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Rute Borba (2010) enfatiza a importância de contextualizar o ensino da Combinatória, destacando que “a introdução de problemas reais é fundamental para que os alunos compreendam a aplicabilidade da Combinatória” (p. 45). Ao apresentar situações do cotidiano, os educadores podem tornar o aprendizado mais significativo e acessível, facilitando a construção de conceitos e habilidades. Isso é especialmente relevante em um cenário educacional que busca conectar a teoria à prática.

Em sua pesquisa, Borba apresenta uma análise sobre como o raciocínio combinatório pode ser desenvolvido ao longo da Educação Básica, enfatizando a importância de práticas pedagógicas que incentivem a investigação. Ela observa que “o ensino da Combinatória deve ser visto como um processo contínuo, que se inicia nos Anos Iniciais e se desenvolve ao longo do Ensino Fundamental e Médio” (Borba, 2010, p. 98). Essa continuidade é destacada como fundamental para a formação de um raciocínio matemático sólido e coerente.

Além disso, Borba sugere que o uso de representações visuais, como diagramas e árvores de possibilidades, pode facilitar a visualização dos problemas combinatórios. Ela afirma que “o uso de representações diversas ajuda os alunos a estruturarem suas ideias e a encontrar soluções mais eficazes” (Borba, 2010, p. 67). Essa variedade de ferramentas pode transformar a maneira como os alunos abordam problemas, permitindo que desenvolvam diferentes estratégias de resolução. Assim,

Pessoa e Borba (2009), a partir da concepção de articulação de conceitos apresentada por Vergnaud (1986), defendem que os distintos tipos de problemas combinatórios se desenvolvem desde os anos iniciais de escolarização. Assim, estas autoras [...] argumentam que se deve trabalhar em todos os níveis e modalidades de ensino com problemas de produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação.

Elas argumentam que é essencial trabalhar com problemas de produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação. Essa classificação está relacionada com o tripé advindo da Teoria dos Campos Conceituais (situações, invariantes e representações simbólicas) e é aprofundada na seção a seguir. As autoras defendem que explorar esses diferentes tipos de situações combinatórias em sala de aula é fundamental, pois permite que os alunos desenvolvam uma compreensão mais profunda das operações combinatórias, além de fortalecer sua capacidade de resolução de problemas. Ao integrar esses conceitos ao currículo, os educadores não apenas aprofundam o conhecimento matemático dos alunos, mas também os preparam para situações práticas que exigem o uso dessas habilidades em contextos variados.

Por fim, compreende-se que essa abordagem articulada contribui para uma aprendizagem mais ampla e com maior significado para os estudantes, essencial para a formação matemática dos estudantes. A autora defende que “a interação entre os alunos durante a resolução de problemas combinatórios pode enriquecer a aprendizagem e fomentar a troca de ideias” (Borba, 2010, p. 89). Essa dinâmica não só estimula a construção coletiva do conhecimento, mas também encoraja a argumentação e a reflexão crítica sobre as soluções apresentadas.

4.2 SITUAÇÕES COMBINATÓRIAS

Complementando classificações anteriores e tendo em vista apontar as diferentes situações relacionadas aos conceitos combinatórios, Borba (2010) classifica os problemas combinatórios em: produto de medidas, arranjos, combinações e permutações.

De acordo com a classificação proposta, os problemas combinatórios se diferenciam em função de seus invariantes de ordem e de escolha. Uma situação que aborda o produto de medidas é aquela em que os problemas possuem mais de um conjunto e um elemento de cada conjunto deve ser escolhido. Dessa forma, sua solução é a multiplicação direta do número de elementos de cada conjunto, pois a ordenação dos elementos escolhidos não forma possibilidades distintas. Além disso, tem-se a situação de arranjo como aquela na qual a partir de um conjunto maior são escolhidos alguns elementos cuja ordenação gera possibilidades distintas. A combinação se assemelha ao arranjo, com a diferença de que a ordem dos elementos não gera possibilidades distintas. Por fim, a situação de permutação é tida quando todos os elementos do conjunto são utilizados simultaneamente, variando-se apenas a ordem de apresentação dos mesmos para determinar as diferentes possibilidades (Borba, 2010).

Para exemplificar esses tipos de situações combinatórias, serão apresentados quatro problemas contextualizados para o Ensino Médio, cada um representando uma das situações propostas por Borba (2010): produto de medidas, arranjo, permutação e combinação. Para cada situação, discute-se também os invariantes que as caracterizam, conforme a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

O Problema 1 consiste no seguinte: *Uma startup de design digital oferece 6 modelos (A, B, C, D, E e F) diferentes de capas para celular. Cada modelo pode ser personalizado com 8 cores distintas (Azul, Rosa, Roxo, Amarelo, Verde, Vermelho, Preto e Branco). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar uma capa personalizada, escolhendo um modelo e uma estampa?* A questão é determinar quantas variações diferentes de capa personalizada podem ser formadas a partir dessas opções, tratando-se de um problema do tipo produto de medidas, no qual o número total de possibilidades resulta da multiplicação entre dois conjuntos de escolhas independentes (modelos e cores). O conceito de multiplicação é mobilizado como operador fundamental da contagem, presentes a ideia de independência entre as escolhas (modelo e cor), o que leva à aplicação direta do produto de medidas. Ainda, está implícito que, ao se combinar duas variáveis independentes, basta multiplicar suas quantidades para obter o total de combinações. A inferência essencial consiste em perceber que não há sobreposição nem restrição entre os critérios de escolha e que nesse tipo de problema, a ordem não determina possibilidades distintas (a capa de modelo A vermelha é igual à capa vermelha de modelo A, por exemplo).

No Problema 2, temos: *10 alunos estão participando de uma competição de dança em um evento da escola. Ao fim da competição, serão premiados os três primeiros colocados (1º, 2º e 3º lugares). De quantas formas distintas esse pódio pode ser composto?* Trata-se de um problema do tipo arranjo simples, pois envolve a seleção de um subconjunto com elementos distintos e com importância da ordem. Os sujeitos devem reconhecer que não estão apenas escolhendo três alunos, mas atribuindo a cada um uma posição específica. Os invariantes incluem o entendimento de que a ordem altera o resultado, bem como o reconhecimento de que o número total de possibilidades é obtido pela multiplicação de escolhas sucessivas, decrescentes. É evidente a utilização da fórmula dos arranjos simples, ou sua aplicação intuitiva via etapas de escolha (via PFC). A inferência fundamental é a distinção entre a simples seleção e a ordenação dos elementos selecionados.

O Problema 3 propõe a seguinte questão: *De quantas maneiras diferentes é possível organizar 5 livros distintos em uma prateleira?* Neste caso, trata-se de uma permutação simples, pois envolve a ordenação de todos os elementos disponíveis, sem repetição e com importância da ordem. O conceito central ativado é o de organização sequencial, em que a troca de posição entre dois ou mais elementos gera uma nova configuração. Como invariantes, os sujeitos devem mobilizar, durante a resolução de problemas dessa natureza, a noção de que o número de possibilidades diminui a cada nova escolha (5, depois 4, depois 3, e assim por diante), bem como a ideia de que o total de possibilidades corresponde ao fatorial do número de elementos. A inferência envolvida é a de que todas as posições são distintas e relevantes, o que distingue essa situação de outras formas de contagem.

Por fim, o Problema 4 apresenta a seguinte situação: *Em uma turma, um grupo de 6 amigos (Ana (A), Bruno (B), Clara (C), Daniel (D), Erika (E) e Felipe (F)) vai realizar um trabalho em duplas. Eles decidiram fazer um sorteio para formar a dupla que se apresentará primeiro. Quantas duplas distintas podem ser formadas com esses amigos?* Trata-se de uma situação clássica de combinação simples, na qual a ordem dos elementos não altera o resultado final. O conceito de subconjunto é central nesse tipo de problema, exigindo que o sujeito reconheça que todas as seleções de dois amigos são equivalentes, independentemente da ordem em que forem feitas. Destaca-se assim a percepção da irrelevância da ordem, o uso da fórmula como meio de resolução, e a inferência de que a contagem correta requer a eliminação de duplicidades geradas por permutações internas dos mesmos elementos escolhidos (a dupla composta por Ana e Bruno, AB, é a mesma dupla representada por BA, por exemplo).

Com isso, tais classificações auxiliam na construção do raciocínio combinatório a fim de ajudar, no contexto da presente pesquisa, no que é entendido para a análise das situações problemas presentes nos livros didáticos. Dado que “as concepções dos alunos são formadas pelas situações que eles tenham encontrado” (Vergnaud, 1986, p. 2) é importante que os livros didáticos proporcionem o contato do estudante com as situações, bem como com diferentes representações simbólicas, contribuindo para além da sala de aula, visto que elas são úteis no cotidiano e em outras áreas do conhecimento.

Ainda, as representações simbólicas tipicamente utilizadas para representar e resolver problemas combinatórios são discutidas a seguir.

4.3 REPRESENTAÇÕES SIMBÓLICAS E PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

Os problemas combinatórios podem ser abordados por meio de diversas formas de representação, como esquemas gráficos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas ou fórmulas matemáticas. Essas representações simbólicas aparecem tanto nas soluções elaboradas pelos estudantes quanto na formulação dos enunciados. De acordo com Vergnaud (1990, p. 45)

R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas (apud Moreira, 2002, p. 10).

Assim, entende-se como procedimentos formais aqueles de natureza algorítmica, ou seja, constituídos por uma sequência organizada de passos necessários para realizar uma tarefa. No caso da Combinatória, as fórmulas são consideradas algoritmos que, quando aplicados corretamente e de forma adequada ao problema, podem oferecer uma resolução mais eficaz (Pessoa, 2009). No entanto, uma fórmula isoladamente não garante a solução se for usada de maneira incorreta ou fora de contexto.

Com isso, enxergamos que as fórmulas “são um ponto de chegada e não um ponto de partida” (Pessoa, 2009, p. 80), ou seja, é fundamental que, antes de recorrer à formalização, o estudante percorra um caminho de compreensão que envolva a análise e interpretação da situação-problema por meio de diversas estratégias, buscando entender exatamente o que está sendo solicitado e estabelecendo relações significativas entre os dados do problema. Tal identificação está atrelada à compreensão dos invariantes que permitem que as diferentes situações combinatórias sejam diferenciadas entre si, para eleger as representações simbólicas adequadas, isto é, completando o tripé defendido por Vergnaud em sua Teoria dos Campos Conceituais.

Retomando os problemas apresentados na seção anterior, por exemplo, temos que, ao resolver a situação de produto cartesiano (Problema 1) proposta é possível utilizar diferentes representações, tais como: Princípio Fundamental da Contagem (PFC), ao multiplicar o número de opções disponíveis: $6 \times 8 = 48$, e quadros ou diagramas cartesianos, que organizam graficamente as associações entre os dois conjuntos, como apresentado abaixo.

Quadro 2 - Representação em quadro da resolução do problema 1

COR	AZUL	ROSA	ROXO	AMARELO	VERMELHO	VERDE	PRETO	BRANCO
MODELO								
A	A-AZ	A-RS	A-RX	A-AM	A-VM	A-VD	A-PR	A-BR
B	B-AZ	B-RS	B-RX	B-AM	B-VM	B-VD	B-PR	B-BR
C	C-AZ	C-RS	C-RX	C-AM	C-VM	C-VD	C-PR	C-BR
D	D-AZ	D-RS	D-RX	D-AM	D-VM	D-VD	D-PR	D-BR
E	E-AZ	E-RS	E-RX	E-AM	E-VM	E-VD	E-PR	E-BR
F	F-AZ	F-RS	F-RX	F-AM	F-VM	F-VD	F-PR	F-BR

Fonte: A autora, 2025.

A combinação entre estratégias algébricas e representações visuais amplia as possibilidades de compreensão e permite que os estudantes identifiquem com mais clareza os invariantes que distinguem essa situação de outras formas de contagem.

Por sua vez, o problema de arranjo (Problema 2), pode ser resolvido pela fórmula de arranjo, $A(10,3)$, tendo-se assim,

$$A(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

A resolução pode ser explorada também por meio do PFC, representação na qual o número de escolhas decresce conforme as escolhas são feitas em cada etapa. A diferença está no fato de que nem todos os elementos do conjunto inicial são utilizados, o que exige que o estudante compreenda a noção de seleção com ordem parcial.

Figura 1 - Princípio Fundamental da Contagem - (problema 2)

$$\begin{array}{c} \frac{10}{\text{possibilidades}} \\ \text{1}^\circ \\ \text{escolha} \end{array} \times \begin{array}{c} \frac{9}{\text{possibilidades}} \\ \text{2}^\circ \\ \text{escolha} \end{array} \times \begin{array}{c} \frac{8}{\text{possibilidades}} \\ \text{3}^\circ \\ \text{escolha} \end{array} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

Fonte: A autora, 2025.

Essas representações visuais tornam mais evidente a ideia de independência entre as escolhas e reforçam o conceito de multiplicação como operador de contagem, além de facilitar a identificação de possíveis erros ou repetições.

Já o problema de permutação (Problema 3) pode ser solucionado a partir do uso de diferentes representações, como a aplicação da fórmula do fatorial, que coincide com a fórmula da permutação simples, tendo assim

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

Essa abordagem pode ser complementada por esquemas que mostrem o número de possibilidades decrescentes a cada nova escolha (5 opções para o primeiro livro, 4 para o segundo, e assim por diante), o que pode ser evidenciado por meio do PFC (Figura 2). Outra possibilidade seria o uso da árvore de possibilidades, visto que ainda que a representação em árvore se torne extensa nesse caso, sua construção parcial pode contribuir para a compreensão do processo envolvido e reforçar a importância da ordem nas permutações.

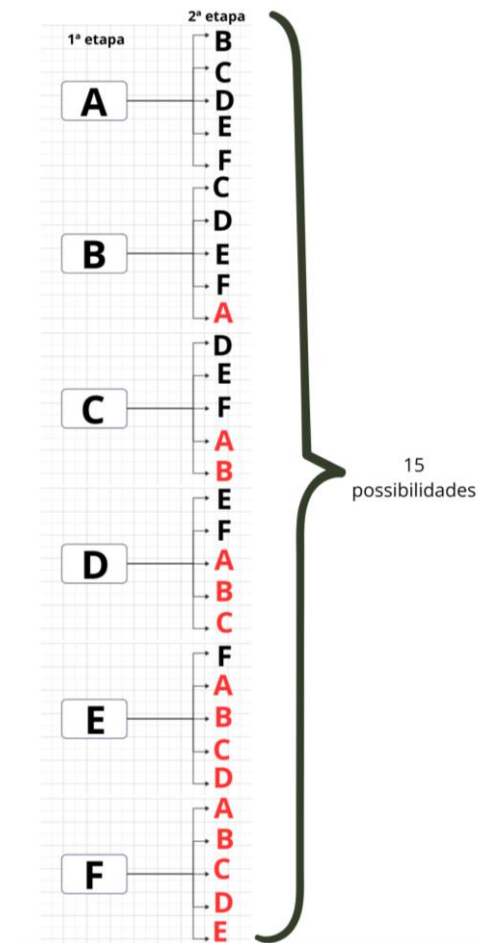
Figura 2 - Princípio Fundamental da Contagem (problema 3)

$$\begin{array}{c} 5 \\ \text{possibilidades} \\ \hline 1^\circ \\ \text{escolha} \end{array} \times \begin{array}{c} 4 \\ \text{possibilidades} \\ \hline 2^\circ \\ \text{escolha} \end{array} \times \begin{array}{c} 3 \\ \text{possibilidades} \\ \hline 3^\circ \\ \text{escolha} \end{array} \times \begin{array}{c} 2 \\ \text{possibilidades} \\ \hline 4^\circ \\ \text{escolha} \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \text{possibilidade} \\ \hline 5^\circ \\ \text{escolha} \end{array} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Fonte: A autora, 2025.

Por fim, o problema de combinação (Problema 4), possibilita as representações que destaquem a irrelevância da ordem na determinação de possibilidades diferentes são essenciais para diferenciar a situação de um arranjo, exemplos disso são a utilização de listagens ou árvore de possibilidades, como apresentado abaixo.

Figura 3 - Árvore de possibilidades do problema 4



Fonte: A autora, 2025.

A representação por meio da árvore de possibilidades permite visualizar, de forma sistemática, todas as duplas que podem ser formadas a partir de um grupo de seis estudantes. Nessa estrutura, os ramos destacados em vermelho correspondem a casos de repetição, ou seja, pares compostos pelos mesmos elementos, mas dispostos em ordens diferentes. Essas repetições decorrem do fato de que a árvore considera a escolha sequencial dos integrantes, como se a ordem fosse relevante. No entanto, no contexto da combinação simples, a ordem dos elementos não altera o agrupamento, de modo que a dupla (Ana, Bruno) é indistinta da dupla (Bruno, Ana). Visualmente, essa representação evidencia a necessidade de eliminar essas duplicidades na contagem, reforçando a ideia de que, ao se tratar de combinações, é preciso considerar apenas os subconjuntos distintos formados, independentemente da ordem dos elementos.

Essa necessidade de desconsiderar as repetições está incorporada na própria fórmula da combinação, a qual ajusta a contagem total ao dividir o número de agrupamentos possíveis pela

quantidade de maneiras de permutar os elementos dentro de cada grupo. Logo, o problema 4 pode ser resolvido, também, através do uso da fórmula da combinação simples:

$$C(6,2) = \frac{6!}{2! \times (6-2)!} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15.$$

É válido ressaltar que essas diferentes representações devem ser aprendidas, de forma contínua e adequada a cada etapa da escolarização, de maneira a garantir o desenvolvimento de um amplo repertório de estratégias de resolução de problemas de contagem por parte dos estudantes. Dessa forma, os mesmos poderão construir conceitos e desenvolver esquemas e teoremas-em-ação adequados a diferentes classes de problemas dessa temática (situações).

No presente trabalho, o ensino e a aprendizagem da Combinatória são objetos de estudo à luz de tais referenciais, especificamente a partir da análise de um importante material didático que dá suporte a tais processos: os livros didáticos.

5 O LIVRO DIDÁTICO: UMA FERRAMENTA PARA O ENSINO DE COMBINATÓRIA

Neste capítulo, abordamos o livro didático (LD), desde suas origens até sua consolidação como um importante recurso pedagógico. Ao longo do tempo, diversos registros foram feitos sobre o surgimento e a consolidação do LD como ferramenta utilizada no ambiente escolar. É importante destacar que o livro didático passou por diversas transformações até alcançar a forma atual e manter sua relevância, mesmo diante da crescente oferta de recursos tecnológicos voltados ao apoio docente. Ainda hoje, o LD continua sendo amplamente empregado no ensino das mais variadas áreas do conhecimento, incluindo a Matemática e, consequentemente, a Combinatória.

5.1 LIVRO DIDÁTICO COMO UM MATERIAL DIDÁTICO DENTRO DA SALA DE AULA

Considerando que o livro didático constitui o principal objeto de análise desta pesquisa, torna-se essencial discutir o processo de sua consolidação, uma vez que é amplamente reconhecido que cabe à escola, especialmente ao professor, a responsabilidade de garantir o processo de ensino e de acompanhar o desenvolvimento da aprendizagem dos estudantes. Como destaca Junior (2007), o LD se firma como meio de registro e transmissão do conhecimento matemático no contexto escolar, desempenhando um papel fundamental na comunicação de saberes entre diferentes gerações.

Em relação à definição de livro didático (LD), temos que

o livro didático é uma literatura destinada a uma sala de aula, ou seja, um manual de uso, tanto por parte de professores, quanto por parte de alunos, apresentando os conteúdos de forma organizada, sugestões didáticas, com a finalidade de auxiliar o professor em sua prática docente e os alunos no desenvolvimento de sua aprendizagem (Rossini, 2003 *apud* Antunes *et al.*, 2019, p. 5).

Dessa forma, entende-se que o livro didático, na atualidade, configura-se como um material impresso estruturado, com a intenção explícita de favorecer e qualificar os processos de ensino e de aprendizagem. Sabendo-se que o livro didático não é o único recurso utilizado em sala de aula, ele é o mais empregado, como afirmam Macêdo, Brandão e Nunes (2019, p. 71-72), ao abordarem que

existem diversos recursos didáticos que podem ser utilizados ao se ensinar uma temática na educação básica, como a aplicação de jogos, desafios matemáticos, recursos tecnológicos, entre outros. Porém, o principal instrumento de ensino do professor na educação básica permanece sendo o livro didático.

Nesse contexto, muitos educadores conferem ao livro didático um papel de destaque entre os recursos disponíveis para apoiar o trabalho docente (Carvalho *et al.*, 2010, p. 15). Essa valorização se justifica pelo fato de o LD oferecer ao professor uma base mais segura tanto para a preparação quanto para a condução de suas aulas. Isso ocorre porque o livro didático insere um novo elemento no processo educativo: a figura do autor. Este, por meio do texto, estabelece um diálogo com o professor e com o aluno, fazendo escolhas importantes sobre os conteúdos a serem trabalhados como, por exemplo, os saberes matemáticos, os métodos mais eficazes para sua aprendizagem, e a forma como esses conteúdos são organizados ao longo da trajetória escolar (Carvalho; Lima, 2010, p. 15). Esse apoio oferecido pelo LD é especialmente relevante diante de lacunas que, por vezes, ainda existem na formação inicial de professores, sobretudo no que diz respeito ao domínio dos conteúdos que compõem o currículo da Educação Básica.

Contudo, para compreender o papel do LD no cenário educacional nacional, é necessário retomar brevemente seu percurso histórico. O livro didático consolidou-se no Brasil ao longo do século XX como um dos principais instrumentos de mediação do conhecimento escolar, assumindo progressivamente uma função central no currículo, especialmente após a institucionalização de políticas públicas voltadas para sua produção, avaliação e distribuição, como o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) (Bittencourt, 2004). Com a criação do PNLD em 1985 o Estado passou a regulamentar criteriosamente os materiais utilizados em sala de aula, garantindo critérios mínimos de qualidade pedagógica, inclusão, diversidade e alinhamento com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). Como destaca o próprio Guia do PNLD 2021 – Objeto 1, os livros devem “favorecer a aprendizagem ativa dos estudantes e o desenvolvimento de competências e habilidades previstas na BNCC, com ênfase no protagonismo juvenil e na interdisciplinaridade” (Brasil, 2020, p. 10).

Com isso, destaca-se a importância da análise desse material didático tão presente nas salas de aula brasileiras, principalmente no contexto atual, onde recentes reformas curriculares influenciam sua forma e conteúdo.

Com a promulgação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a implementação do Novo Ensino Médio, o livro didático — enquanto instrumento estruturante do trabalho pedagógico — passou por um processo de reformulação para alinhar-se às novas diretrizes curriculares. Essas transformações respondem à necessidade de reorganização dos conteúdos escolares, da valorização das competências e habilidades, bem como da promoção de aprendizagens mais significativas, contextualizadas e interdisciplinares, conforme preconiza o

novo modelo formativo. Como observa Bittar (2021), as mudanças curriculares demandam não apenas alterações nos conteúdos, mas também nos suportes didáticos e na forma como o conhecimento é estruturado e apresentado aos estudantes e professores.

Nesse novo contexto, os livros didáticos passaram a ser organizados em volumes por áreas do conhecimento, em consonância com os blocos temáticos estabelecidos pela BNCC. Essa divisão busca favorecer o trabalho integrado entre os componentes curriculares e atender às exigências do ensino por competências. No caso específico da área de Matemática e suas Tecnologias, por exemplo, os conteúdos agora são agrupados de forma a promover uma progressão coerente entre os objetos do conhecimento e os desdobramentos das habilidades previstas no documento.

Outra alteração significativa refere-se à configuração do manual do professor, que tradicionalmente vinha incorporado ao final do livro do professor ou em volumes separados. Atualmente, muitas coleções adotam o chamado ‘formato em U’, no qual o manual envolve fisicamente o livro do professor, permanecendo constantemente acessível durante o uso em sala de aula. Esse novo formato busca fortalecer o papel formativo do livro didático, oferecendo subsídios práticos, pedagógicos e conceituais para o trabalho cotidiano. Além de orientações didáticas, o manual apresenta de forma explícita os objetos de conhecimento, as habilidades da BNCC trabalhadas em cada unidade, sugestões metodológicas, recursos complementares e indicações de avaliação, promovendo maior alinhamento entre o material e as competências estabelecidas pelas políticas educacionais vigentes.

Essas mudanças reforçam a concepção do livro didático como um artefato pedagógico em constante transformação, que precisa responder às exigências contemporâneas da Educação Básica. A materialidade do livro didático deve assim acompanhar as mudanças que ocorrem nas concepções de ensino e de aprendizagem, pois ele é um material que direciona, organiza e influencia o trabalho do professor, bem como a experiência do aluno em sala de aula (Soares, 2018).

A seguir, serão apresentados alguns estudos, que contribuem para o aprofundamento da reflexão sobre a abordagem da Combinatória nos livros didáticos de diferentes etapas da escolarização básica.

5.2 A COMBINATÓRIA EM LIVROS DIDÁTICOS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) destaca a importância do desenvolvimento de competências relacionadas à resolução de problemas e ao raciocínio

lógico-matemático desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio (Brasil, 2018). Nesse contexto, a Combinatória é um dos conteúdos matemáticos que permeiam as habilidades curriculares, configurando-se como um campo fundamental para a formação do pensamento estruturado e da capacidade de analisar situações envolvendo contagem, organização e agrupamentos. O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), por sua vez, orienta a seleção e a avaliação dos materiais escolares de acordo com essas diretrizes, assegurando que os livros didáticos utilizados nas escolas públicas traduzam, de forma coerente e acessível, os objetivos de aprendizagem propostos pela BNCC (Brasil, 2021).

Assim, a abordagem da Combinatória nos livros didáticos deve estar alinhada às habilidades previstas, como a compreensão e aplicação de estratégias de contagem, o uso de representações variadas e a resolução de problemas que envolvam produtos de medidas, permutações, arranjos e combinações, contribuindo para a construção de conhecimentos significativos. Estudos indicam que a presença e a forma como a Combinatória é apresentada nos livros escolares refletem a mediação curricular estabelecida pelos documentos oficiais e influenciam diretamente o processo de ensino e de aprendizagem (Borba, 2010).

Dessa forma, este subtópico tem como objetivo apresentar um levantamento de estudos que investigaram a presença e abordagem da Combinatória em livros didáticos, destacando os principais resultados encontrados em cada trabalho. Com o fim de evidenciar a importância dessa pesquisa como complemento aos resultados já existentes na literatura.

Barreto e Borba (2010), em seu trabalho intitulado *Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais*, analisaram livros didáticos e manuais do professor dos 2º a 5º anos da escolarização básica, dentre as cinco coleções analisadas, as autoras concluíram que as situações combinatórias presentes nos livros de Matemática foram a Combinação e o Produto Cartesiano (Produto de Medidas). Para além, foram analisadas as representações simbólicas apresentadas, indicando-se um destaque para a utilização de desenho e de questões sem sugestão de representação, e propostas, onde houve maior frequência de questões sem sugestão de representações simbólicas.

Na pesquisa de Silva (2015), *Análise de problemas combinatórios em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental*, foram analisadas duas coleções de livros didáticos do PNLD 2014. O autor concluiu, a partir dos resultados da análise, que a situação com a maior frequência é a do Produto Cartesiano (Produto de Medidas) e que a maioria das questões

analisadas não apresentaram sugestão de representação simbólica que auxiliasse na resolução, porém, o autor ainda destaca que as questões que sugeriram o uso de representações específicas tinham foco em árvore de possibilidades, desenho e tabela.

Silva (2016), em sua pesquisa intitulada como *A Combinatória: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental*, analisou os livros didáticos aprovados no PNLD 2013, dos anos iniciais e PNLD 2014, dos anos finais do Ensino Fundamental. Com a análise dos livros didáticos, a autora ressalta a importante relação da abordagem da Combinatória com os documentos oficiais que norteiam a Educação Básica, como também, o trabalho com os diferentes significados que estão envolvidos nos conceitos de Combinatória. Para além, Silva (2016) aponta uma necessidade de maior atenção na abordagem combinatória nos anos iniciais, onde há uma lacuna entre os significados dos conceitos e a relação com o tratamento da informação.

Rocha e Borba (2017), analisam em sua pesquisa que tem como título *Combinatória no Ensino Médio: influências do guia do Programa Nacional do Livro Didático brasileiro*, os livros didáticos do Ensino Médio do PNLD 2012. As autoras analisaram dois livros didáticos da mesma editora e concluíram que em ambos predominava a presença de situações envolvendo Combinação e Permutação, seguidas das situações de Arranjo, destaca-se também o número reduzido de problemas que envolvam o Produto de Medidas. Para além, foram analisadas as representações encontradas nos problemas propostos e resolvidos do livro didático, chegando-se à conclusão da presença crescente do uso das fórmulas e do Princípio Fundamental da Contagem em ambos os livros didáticos. Com isso, dadas as novas orientações curriculares e novas formas de organização dos livros é de suma importância atualizar essa análise de livros didáticos do Ensino Médio.

Os aportes teóricos anteriormente discutidos, bem como os achados dos estudos anteriores aqui mencionados serão base para a realização das análises e discussões da presente pesquisa, cujos procedimentos metodológicos são apresentados na próxima seção.

6 ASPECTOS METODOLÓGICOS

O presente trabalho consiste em uma pesquisa de natureza qualitativa e quantitativa, pois busca compreender fenômenos educacionais a partir da análise detalhada de documentos, utilizando a abordagem qualitativa para interpretar os significados e contextos dos dados, e a quantitativa para mensurar a frequência e distribuição de determinados padrões nos livros didáticos. Segundo Creswell (2007),

A combinação de métodos qualitativos e quantitativos permite que o pesquisador explore um problema de pesquisa de maneira mais completa, utilizando os pontos fortes de cada abordagem. A pesquisa quantitativa oferece dados generalizáveis e mensuráveis, enquanto a qualitativa aprofunda a compreensão do contexto e das experiências individuais (Creswell, 2007, p. 4).

Através dessa perspectiva, investigou-se como a Combinatória é abordada em livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, considerando o contexto e as particularidades dessa abordagem nos materiais selecionados.

A pesquisa adotou uma abordagem exploratória para investigar o tema, buscando identificar lacunas e tendências na forma como a Combinatória é apresentada nos livros didáticos, à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Além disso, os objetivos traçados¹ são descritivos, com foco em detalhar o tratamento dos conceitos combinatórios, das metodologias e dos exercícios propostos nos livros, identificando aproximações ou distanciamentos em relação à teoria mencionada.

Quanto aos procedimentos técnicos, a pesquisa adota a análise documental como método central. Foram analisadas três coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, selecionados com base em critérios como a sua recomendação pelo Programa Nacional do Livro e Material Didático (PNLD 2021) e a ampla adoção a nível estadual. A análise foi conduzida por meio de uma leitura criteriosa dos capítulos e seções que abordam a Combinatória, buscando identificar como os conceitos são apresentados, os tipos de problemas propostos (situações) e as abordagens metodológicas adotadas (representações simbólicas).

¹ *Objetivo Geral:* Investigar a apresentação da Combinatória em livros didáticos do Ensino Médio, examinando suas abordagens à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

Objetivos Específicos: 1. Categorizar as questões presentes nos livros didáticos que tratam de Combinatória, levando em conta as situações abordadas e os elementos invariantes que as caracterizam; 2. Identificar as formas de representação simbólica empregadas nos materiais didáticos para o ensino de Combinatória, bem como aquelas exigidas como apoio à resolução de diferentes problemas combinatórios; 3. Examinar a organização das situações combinatórias nesses livros, com destaque para o desenvolvimento das estruturas multiplicativas e sua relação com a resolução de variados problemas de contagem.

As coleções analisadas foram: *Matemática em Contextos*, especificamente o volume *Análise Combinatória, Probabilidade e Computação* (Dante e Viana, 2020); *Diálogo: Matemática e suas Tecnologias*, especialmente o volume *Estatística e Probabilidade* (Teixeira, 2020) e *Prisma Matemática*, especificamente o volume *Estatística, Combinatória e Probabilidade* (Bonjorno, Júnior e Sousa, 2020). As coleções irão ser apresentadas, respectivamente, como C1, C2 e C3.

Em cada volume supracitado, foram selecionados capítulos específicos que abordam os conceitos combinatórios. A saber, na coleção *Matemática em Contextos* (C1), foi selecionado o capítulo 1, intitulado *Análise Combinatória*. Na coleção *Diálogos* (C2), foram selecionados os capítulos 1, 3 e 4, intitulados respectivamente, *Princípio Aditivo*, *Multiplicativo* e *Arranjos; Permutações; Combinação Simples e Binômio de Newton*. Por fim, na coleção *Prisma* (C3), foi selecionado o capítulo 3, intitulado *Combinatória*.

A classificação foi conduzida considerando cada item separadamente, dado que uma única questão pode abranger problemas de naturezas distintas. Além disso, com base nos princípios da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1986; 1996), foram analisadas, ainda, as representações simbólicas empregadas e exigidas dos estudantes no contexto das questões propostas.

A análise dos resultados obtidos é apresentada na seção que segue.

7 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Com base nos referenciais teóricos e critérios de análise estabelecidos nas seções anteriores, este capítulo apresenta como a Combinatória é abordada em problemas resolvidos, propostos e de vestibulares presentes nos livros didáticos do Ensino Médio analisados na presente pesquisa, tanto na classificação das situações, quanto nas representações utilizadas e propostas para a resolução dos problemas combinatórios.

De maneira geral, os capítulos analisados são compostos por uma apresentação sequencial dos conteúdos teóricos, entremeada por problemas resolvidos que buscam ilustrar ou aplicar os conceitos (e representações simbólicas) em alguns contextos. Posteriormente, os problemas propostos aparecem como uma seção destinada à retomada e ampliação das ideias trabalhadas, permitindo que os alunos mobilizem diferentes representações e inferências operatórias diante de novas situações.

Nas coleções C1 e C3, há ainda uma seção exclusiva com questões de vestibulares ao final dos capítulos, o que pode provocar a ativação de esquemas voltados à resolução de problemas em contextos avaliativos, mais próximos dos que os alunos podem encontrar fora do ambiente escolar. Tal estrutura favorece, portanto, a construção progressiva de conceitos em diferentes situações, embora a predominância de problemas com enunciados fechados e objetivos possa limitar a diversidade de esquemas mobilizados pelos estudantes durante suas resoluções. Nesse sentido, a presença de problemas contextualizados é essencial para que os estudantes de fato explorem os invariantes das diferentes situações combinatórias e possam ter seus raciocínios combinatórios estimulados a partir da resolução dos mesmos.

Por sua vez, a coleção C2 não possui a mesma estruturação em relação às questões de vestibulares: tais problemas estão dispostos no capítulo junto das atividades propostas, sem uma separação explícita. Essa organização pode dificultar a identificação, por parte dos estudantes, do tipo de situação enfrentada, bem como dos esquemas mais adequados para resolvê-la, uma vez que problemas de naturezas distintas (escolares e avaliativos) são apresentados de forma indistinta. As questões de vestibulares costumam ser de múltipla escolha, possuindo diferentes alternativas que exploram representações específicas. Isso pode influenciar na maneira como os alunos interpretam os invariantes envolvidos e acionam seus conhecimentos, tornando menos evidentes as exigências específicas de cada tipo de problema.

A Tabela 1 apresenta os resultados referentes à classificação dos problemas combinatórios presentes nas três coleções de livros didáticos analisadas. Foi identificado um total de 437 problemas, que foram classificados em função do tipo de situação combinatória

abordada, conforme Borba (2010), tendo assim: Produto de Medidas (PM), Permutação (P), Arranjo (A) e Combinação (C).

Tabela 1 - Classificação dos problemas combinatórios (por tipos)

SITUAÇÕES	PM	P	A	C	F*	TOTAL
COLEÇÕES						
C1	21	55	66	41	7	190
C2	24	38	37	47	16	162
C3	16	32	12	17	8	85
TOTAL	61	125	115	105	31	437

F* → Fatorial

Fonte: A autora, 2025.

Com base na análise geral, observa-se uma maior concentração de problemas relacionados às situações de Permutação (28,6%) e Arranjo (26,4%), o que revela uma ênfase significativa em questões que envolvem os invariantes de ordem e de seleção de determinados elementos de um conjunto, dentro de contextos específicos. Em seguida, as situações de Combinação aparecem em 24% dos casos analisados. Já os problemas classificados como Produto de Medidas (14%) e os que envolvem o uso de fatoriais (7%) ocorrem de forma bastante limitada.

Cabe destacar que o fatorial foi considerado, nesta análise, como uma categoria complementar, pois não se refere diretamente a um tipo específico de situação combinatória contextualizada, mas sim à manipulação matemática de números naturais por meio de uma operação definida pelo produto sucessivo de um número por seus antecessores até chegar ao número 1. Apesar de ser uma ferramenta frequentemente empregada na resolução de problemas combinatórios mais complexos, dada sua aplicação nos algoritmos específicos das fórmulas de arranjos, permutações e combinações, sua presença isolada em exercícios tende a enfatizar apenas o aspecto algébrico ou aritmético do conceito. Vale lembrar que o uso de fórmulas, representações simbólicas comumente valorizadas no Ensino Médio devido ao processo de formalização característico dessa etapa da escolarização, nem sempre contribui para a construção de significados pelos estudantes. Em níveis anteriores, o uso de diferentes formas de representação, menos centradas na formalização, pode favorecer a compreensão conceitual e o desenvolvimento do raciocínio combinatório (Borba, 2010), e a presença dessas representações em livros didáticos foi destacada por Barreto e Borba (2010) e Silva (2015).

Percebe-se que, diferente do que foi analisado por Barreto e Borba (2010), cuja investigação sobre livros didáticos voltados aos Anos Iniciais apontou maior presença dos significados de Combinação e Produto Cartesiano (Produto de Medidas), nos materiais voltados ao Ensino Médio, a ênfase recai sobre os problemas classificados como Arranjo e Permutação (com exceção da coleção C2). Essa mudança de foco revela uma valorização de situações que mobilizam invariantes relacionados à ordem e à escolha de elementos, como é defendido por Borba (2010), enquanto os significados de Combinação e, principalmente, de Produto de Medidas aparecem em proporções menores de maneira geral. Tal cenário sugere não apenas uma diferença no tratamento dos conteúdos combinatórios ao longo da escolarização, mas também possíveis lacunas na continuidade da aprendizagem, especialmente quando se considera a importância de expor os estudantes a uma variedade de significados e representações.

Um possível motivo para essa ênfase está relacionado à busca por uma preparação mais direta para exames seletivos, como vestibulares e o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que historicamente cobram situações com maior apelo à aplicação de fórmulas e à distinção entre casos com ou sem ordem, como nos arranjos e permutações. Soma-se a isso o caráter mais formal e conteudista atribuído ao Ensino Médio, que tende a valorizar procedimentos algébricos e técnicas resolutivas, em detrimento da problematização dos conceitos. Enquanto nos Anos Iniciais é comum o uso de representações visuais e atividades contextualizadas que favorecem a construção de significados, no Ensino Médio predomina uma abordagem que pode levar à mecanização, reduzindo as possibilidades de os estudantes mobilizarem diferentes esquemas e desenvolverem uma compreensão mais ampla do campo combinatório, como também observado por Rocha e Borba (2017).

Corroborando com o que é trazido, têm-se questões propostas que utilizam apenas do uso de fórmulas para a resolução do problema, a questão 37 da C1, apresentada abaixo, é apenas um dos muitos exemplos de problemas que envolvam esse tipo de resolução que se baseia apenas no mecanismo algébrico (uso das fórmulas específicas sem contexto que demande a interpretação de uma situação-problema). É válido ressaltar que questões dessa natureza se distanciam da ideia de problema conforme Vergnaud (1996), pois nesses casos, os estudantes já sabem de imediato o que fazer para chegar à resposta esperada: aplicar o algoritmo específico referente ao Arranjo Simples, por exemplo.

Figura 4 - Utilização exclusiva de fórmula em problemas propostos (Arranjo)

37. Calcule:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} A_{4,2} & 12 & \text{c)} A_{8,2} & 56 \\ \text{b)} A_{6,3} & 120 & \text{d)} A_{4,4} & 24 \\ \text{e)} A_{5,1} & 5 & \text{f)} A_{7,0} & 1 \\ \text{g)} A_{8,5} & 6720 & \text{h)} A_{n,0} & 1 \end{array}$$

Fonte: Dante e Viana, 2020, p. 33.

As questões resolvidas não fogem muito desse padrão, como é ilustrado na questão resolvida 3 da C3, onde o próprio material didático expressa a utilização apenas da parte algébrica, mecanizando assim o processo de resolução e afastando-se da exploração de conceitos combinatórios atrelados a contextos que valorizem a interpretação por parte dos estudantes.

Figura 5 - Utilização exclusiva da parte algébrica no problema resolvido (Fatorial)

3. Resolva a equação $(n - 4)! = 120$

Resolução

$$(n - 4)! = 120 \Rightarrow (n - 4)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow (n - 4)! = 5! \Rightarrow n - 4 = 5 \Rightarrow n = 9$$

O conjunto solução da equação é: $S = \{9\}$.

Fonte: Bonjorno; Giovanni e Sousa, 2020, p. 86.

Os resultados da presente análise, que indicam uma concentração expressiva de problemas relacionados às situações de Arranjo e Permutação e uma presença reduzida de questões envolvendo Produto de Medidas, contrastam, ainda, com os achados de Silva (2015), em sua investigação de livros didáticos voltados aos Anos Finais do Ensino Fundamental. O autor identificou que, nesse segmento, a situação com maior frequência foi justamente a de Produto de Medidas, ou seja, problemas em que a ordem dos elementos não interfere na contagem e que se resolvem pela ideia de escolha independente de um elemento de cada conjunto envolvido no problema. No Produto de Medidas, ainda, a resolução do problema está diretamente relacionada à multiplicação direta do número de elementos de cada conjunto, sendo naturalmente uma situação amplamente utilizada para o trabalho com essa operação. Assim, no Ensino Médio, prioriza-se problemas combinatórios mais complexos: cuja resolução não é obtida pela mera multiplicação de valores presentes nos enunciados.

Essa mudança de perfil entre os Anos Finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio pode ser explicada por fatores ligados à própria organização do currículo e às exigências que marcam cada etapa da escolarização, como é bem mencionado por Lima e Borba (2020, p. 9) que afirmam que

no Ensino Médio, percebe-se uma maior valorização da linguagem algébrica e da resolução de exercícios pautados em procedimentos e fórmulas, o que pode ser reflexo da preparação para avaliações externas e da própria concepção de currículo que orienta essa etapa como uma fase de consolidação dos conhecimentos escolares.

Além disso, como afirmam as autoras, o Ensino Médio é frequentemente concebido como uma etapa de sistematização dos conteúdos, o que se traduz em uma valorização da linguagem simbólica e da formalização. Essa abordagem, no entanto, pode comprometer a aprendizagem significativa, na medida em que privilegia a técnica em detrimento da compreensão conceitual. À luz da Teoria dos Campos Conceituais, tal prática pode dificultar a mobilização de esquemas variados e o desenvolvimento de um raciocínio combinatório mais flexível, já que os estudantes são expostos a uma gama restrita de situações e representações. É válido ressaltar, portanto, a importância de que o raciocínio combinatório venha sendo progressivamente desenvolvido desde os Anos Iniciais, para que, de fato, os estudantes cheguem ao Ensino Médio preparados para tal formalização.

Na análise aqui desenvolvida, observa-se igualmente uma baixa incidência de problemas de Produtos de Medidas, o que se assemelha aos resultados obtidos por Rocha e Borba (2017), reforçando assim a tendência de um tratamento limitado desse significado combinatório ao longo das coleções voltadas a esse nível da escolarização básica. No entanto, os dados revelam uma ênfase maior nas situações de Arranjo e Permutação, com a Combinação aparecendo em terceiro lugar em frequência, as autoras em suas pesquisa concluíram que as situações que predominavam eram Permutação e Combinação, seguida de Arranjo. Essa diferença pode estar relacionada à seleção específica das coleções analisadas e, também, às possíveis mudanças nas orientações curriculares e editoriais ocorridas entre os ciclos do PNLD. Ainda assim, tanto esta pesquisa quanto a de Rocha e Borba (2017) evidenciam um padrão de abordagem que valoriza certos significados da Combinatória em detrimento de outros, bem como a priorização de representações simbólicas (apresentadas e solicitadas) mais formalizadas.

A predominância de problemas envolvendo Arranjos e Permutações, em detrimento de significados como o Produto de Medidas, pode estar relacionada a diversos fatores estruturais do Ensino Médio, como a valorização da formalização e a preparação para exames seletivos, como já mencionado anteriormente e citado por Lima e Borba (2020). Situações que envolvem ordem e o uso direto de fórmulas aparecem como mais ‘resolúveis’ dentro da lógica dos vestibulares e do ENEM, o que influencia diretamente a seleção e organização dos conteúdos nos livros didáticos. Além disso, os próprios documentos curriculares e os critérios de avaliação

do PNLD, ao exigirem a presença de certos conteúdos de maneira sistematizada, contribuem para que as coleções adotem abordagens mais procedimentais e tecnicistas. Essa orientação pode favorecer a aplicação mecânica de fórmulas, mas tende a limitar o contato dos estudantes com outros significados fundamentais da Combinatória, afetando a diversidade de situações que poderiam mobilizar esquemas distintos e contribuir para uma aprendizagem mais conceitual e flexível.

Nesse contexto, é importante destacar que o modo como os problemas são apresentados nos livros didáticos influencia diretamente os esquemas que os alunos tendem a acionar na resolução. Segundo a Teoria dos Campos Conceituais, um mesmo conceito pode ser mobilizado por diferentes esquemas, dependendo da situação proposta, das representações envolvidas e das inferências operatórias exigidas. Nos livros analisados, observa-se que muitos problemas conduzem o estudante a utilizar esquemas baseados na aplicação direta de fórmulas previamente ensinadas (por vezes em seções específicas), especialmente nas situações de Arranjo e Permutação.

A forma padronizada desses enunciados, que são frequentemente descontextualizados e com dados organizados de maneira que sugere imediatamente o uso de uma técnica específica, restringe a necessidade de interpretar a situação, explorar diferentes estratégias ou construir representações pessoais. Com isso, os estudantes são pouco estimulados a desenvolver esquemas mais elaborados e conceitualmente ricos, o que pode comprometer a consolidação do raciocínio combinatório em sua totalidade.

Dentre as questões analisadas, destaca-se a presença pontual de questões que propõem ao estudante a elaboração ou criação de problemas, movimento que, embora ainda pouco frequente, é altamente significativo do ponto de vista didático e formativo. Como é apresentada pela questão 43 da C1, que faz referência a uma questão de PM apresentada anteriormente, exemplificada a seguir.

Figura 6 - Problema de elaboração (Coleção C1)

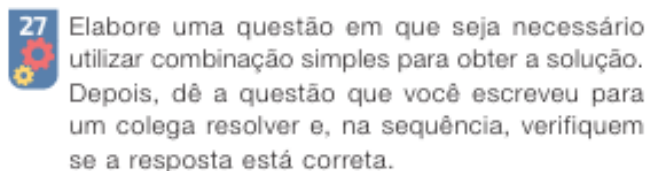
- 46.** Considere as regiões de um continente, um país ou um estado do mapa-múndi. Em seguida, elabore um problema como o anterior que use essas regiões. Depois troque com um colega e resolva o problema dele.

Fonte: Dante e Viana, 2020, p. 33.

Esse tipo de proposta está em consonância com a competência geral 5 da BNCC (2018), que orienta o desenvolvimento da capacidade de argumentar com base em dados e evidências, bem como com as competências específicas da área de Matemática, que incentivam os alunos a formular, interpretar e resolver problemas em diversos contextos. Assim, na coleção C3 não

foi identificado nenhum problema desse tipo, mas questões com essa natureza se fazem presentes, além da C1, na coleção C2, como mostra a Figura 7.

Figura 7 - Problema de elaboração (Coleção C2)



Fonte: Teixeira, 2020, p. 52.

Do ponto de vista teórico, Borba (2010) defende que a elaboração de problemas por parte dos estudantes favorece a construção de significados e amplia a compreensão conceitual, na medida em que exige que o sujeito mobilize conhecimentos de forma ativa, refletindo sobre as estruturas e relações envolvidas nas situações combinatórias. Ao criar um problema, o aluno não apenas utiliza esquemas já adquiridos, mas também os reorganiza, amplia e ressignifica, contribuindo para o desenvolvimento de uma postura investigativa e para a consolidação do raciocínio combinatório em sua dimensão mais autônoma e crítica.

Além de apresentar situações introdutórias e problemas mais diretos, é importante que os livros didáticos do Ensino Médio avancem para a proposição de problemas mais complexos, que desafiem os estudantes a mobilizar diferentes tipos de raciocínio e a lidar com restrições, casos particulares e condições específicas. Um exemplo dessa abordagem pode ser observado na atividade da Figura 8, apresentada a seguir.

Figura 8 - Problema proposto de Produto de Medidas com casos específicos

1. Existem 2 vias de locomoção para ir de uma cidade A para uma cidade B e 3 vias de locomoção de uma cidade B a uma cidade C. De quantas maneiras distintas podemos ir de A a C passando por B?
De 6 maneiras distintas.

Fonte: Dante e Viana, 2020, p. 17.

Nesse contexto, problemas com restrições ampliam o repertório de situações que os estudantes enfrentam, exigindo a adaptação ou construção de novos esquemas de resolução. Assim, um aluno que domina um conceito simples de determinada situação combinatória pode precisar adaptar seu esquema ao lidar com situações que envolvam restrições. Dessa forma, a atividade não apenas reforça o conteúdo, mas também contribui para o enriquecimento do campo conceitual da Combinatória.

O problema proposto 14 (Figura 9) da coleção C2 trata-se de uma questão composta, que pode ser classificada como Permutação com repetição, já que cada símbolo do sistema

Braille é composto por 6 posições, cada uma podendo estar em dois estados: marcada ou não marcada, com a condição de que pelo menos uma esteja marcada.

Figura 9 - Problema proposto de Permutação com repetição

14 (Enem, 2005) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra A é representada por:



A quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é:

- | | | |
|-------|-------|--------|
| a) 12 | c) 36 | e) 720 |
| b) 31 | d) 63 | |

Fonte: Teixeira, 2020, p. 43.

Tal questão ativa um esquema que envolve a identificação do total de possibilidades de variações de elementos sob uma regra específica (exclusão de um caso), exigindo que o estudante mobilize conceitos como o princípio multiplicativo e o raciocínio lógico necessário para excluir o único caso inválido (onde nenhum ponto é destacado). Esse processo demanda um nível mais elaborado de abstração, comum no Ensino Médio, ao requerer a articulação de diferentes representações mentais (numérica, combinatória e lógica).

Estudos como o de Souza (2016), ao apontarem uma lacuna nos Anos Iniciais entre os significados construídos sobre conceitos combinatórios e sua relação com o tratamento da informação, ajudam a compreender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes em etapas posteriores à escolarização. A questão 14, por exemplo, exige que o aluno articule ideias como total de casos possíveis, exclusão de casos inválidos e representação binária, competências que se desenvolvem ao longo do tempo, mas que precisam de uma base conceitual sólida desde os primeiros anos. A ausência dessa base pode comprometer a construção de esquemas adequados, resultando em estratégias incompletas ou na aplicação mecânica de fórmulas, como frequentemente se observa nesse tipo de problema. Outra possível abordagem levaria à resolução do problema por casos, sendo preciso calcular seis permutações com repetição e somar os diferentes resultados obtidos (permutação com 6 pontos destacados; com 5 destacados e 1 não; com 4 destacados e 2 não; com 3 destacados e 3 não; com 2 destacados e 4 não; e com 1 destacado e 5 não).

Conforme discutido por autores como Borba (2010), a introdução de restrições nos problemas é um elemento que amplia a complexidade cognitiva das questões, favorecendo a elaboração de esquemas mais sofisticados. No Ensino Médio é mais comum essa construção de esquemas mais complexos do que em outras etapas da Educação Básica, como é trazido no problema da coleção C3 de Arranjo composto (Figura 10). Nesse tipo de problema, estão envolvidos mais de um arranjo simples ou com repetição: nesse caso temos um Arranjo($A_{26,3}$) referente à escolha das letras e outro arranjo referente à escolha dos algarismos.

Figura 10 - Problema proposto de Arranjo composto

1. De acordo com o segundo texto, considere a placa do sistema Renavam, na qual há três letras do alfabeto (de um total de 26) e quatro algarismos (de 0 a 9), e determine:
 - a) a quantidade de placas que podem ser criadas; 175 760 000 placas
 - b) a quantidade de placas que podem ser criadas de modo a não ter nenhum número e nenhuma letra repetidos; 78 624 000 placas
 - c) a quantidade de placas que podem ser criadas com as três letras iniciais do seu nome. Resposta pessoal.

Fonte: Bonjorno; Giovanni e Sousa, 2020, p. 103.

Além do que já foi mencionado anteriormente, o aluno ao enfrentar problemas com casos e exceções, é levado a refletir sobre propriedades fundamentais das estruturas combinatórias (por exemplo, o papel da ordem, da escolha, da exclusão). Esses tipos de situações quando abordadas nos livros didáticos favorecem a formação de conceitos mais refinados, como por exemplo, o aluno compreender que a presença de restrições (como exemplificada pela alternativa B da Figura 10) altera o total de possibilidades.

Esse tipo de situação, envolvendo problemas com casos e restrições, está presente também na questão 13 (Figura 11), que será analisada a seguir.

Figura 11 - Problema proposto de Combinação com restrição

- 13 Sobre uma circunferência são indicados 6 pontos distintos, conforme a figura.



RONALDO INACIO

- a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?
- b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?

Fonte: Teixeira, 2020, p. 50.

Na referida questão, onde se é abordado o conceito de Combinação com restrições às situações apresentadas pela questão, é possível perceber a mobilização de esquemas que exigem que o aluno tenha conhecimentos das representações e visualização da situação de diferentes formas, dependendo da condição dada pela questão (nesse caso, considerar apenas segmentos que possam formar um triângulo). Nesse contexto, é favorecida a flexibilidade cognitiva e o desenvolvimento de esquemas que articulam diferentes representações.

As análises realizadas até aqui evidenciam não apenas a predominância de certos tipos de situações combinatórias nos livros didáticos do Ensino Médio, como também uma tendência à formalização dos conteúdos por meio do uso sistemático de algumas representações específicas. Portanto, para compreender de forma mais ampla como o raciocínio combinatório é trabalhado nesse material, é necessário observar também as representações simbólicas presentes nas situações propostas.

Ao observar a Tabela 2 que mostra o número dos tipos de representações presentes nos problemas resolvidos e propostos pelas coleções analisadas, pode-se perceber que há uma diversificação dos tipos de representações simbólicas utilizadas ao longo das três coleções.

Tabela 2 - Número de tipos de representações apresentadas pelos problemas

	Apenas Enunciado	Fórmulas	Ilustrações	PFC	Quadro de possibilidades	Árvore de possibilidades
C1	147	29	21	8	3	1
C2	75	72	18	4	3	3
C3	61	17	3	4	1	2
Total	283	118	42	16	7	6

Fonte: A autora, 2025.

Silva (2015) destaca em sua pesquisa com foco nos Anos Finais que a maioria das questões analisadas não traziam sugestões de representação simbólica, e quando havia, eram propostas baseadas em árvores de possibilidades, desenhos e tabelas, estratégias que favorecem a construção de significados e a visualização das estruturas combinatórias. Em contraste, os livros do Ensino Médio analisados apresentam uma tendência à formalização através do grande número de problemas com apenas enunciado, mantendo o foco na aplicação direta de fórmulas e na resolução de problemas com apelo mais algébrico e técnico, o que limita a diversidade de significados e representações mobilizadas pelos estudantes. Nesse sentido, a questão 35 da coleção C2 (Figura 12) mostra-se como um ótimo exemplo de problema proposto onde só é

composto pelo enunciado, a grande maioria dos problemas analisados se classificam dentro deste tipo, conforme mostra a Tabela 2.

Figura 12 - Exemplo de problema utilizando a representação Apenas Enunciado (Arranjo)

- 35** Para desativar certo artefato explosivo, um policial treinado deve digitar uma senha composta de 4 algarismos distintos, dentre os 10 disponíveis. Considerando que, ao digitar incorretamente uma possível senha, o artefato não explode e que, em média, cada tentativa de acertar a senha dure cerca de 5 s, responda aos itens.
- a) Se não forem digitadas senhas repetidas, em quantos minutos, no máximo, o policial desativará o artefato explosivo?
 - b) Caso o policial saiba que os algarismos 0 e 7 fazem parte da senha correta, na pior das hipóteses ele conseguirá desativar o artefato explosivo em 30 min? Justifique sua resposta.

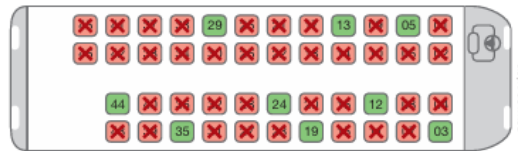
Fonte: Teixeira, 2020, p. 37.

Nesse contexto, problemas como o trazido acima, exigem do aluno maior abstração e autonomia na mobilização de esquemas, podendo favorecer estudantes com esquemas já construídos, mas dificultar o acesso de quem ainda está em processo de compreensão, uma vez que os processos de aprendizagens são individuais de cada aluno. Ainda, tais questões permitem observar se o aluno reconhece os invariantes de ordem e de escolha apenas pela leitura do contexto. Por outro lado, se o livro não oferece outras representações em conjunto, isso pode tornar a atividade excludente para alguns estudantes, tem-se assim que a ausência de representações pode limitar o papel do livro como mediador da aprendizagem (Borba, 2010).

Outra representação presente nas três coleções analisadas é a ilustração: sabe-se bem que ao ser utilizada de forma efetiva e articulada com o raciocínio matemático, pode ajudar na contextualização e no engajamento. No entanto, sua presença nos livros nem sempre garante função pedagógica: em alguns casos, as imagens são meramente decorativas, não colaborando com o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Um exemplo positivo de uso significativo desse recurso pode ser observado na questão 20 (Figura 13) da coleção C2, apresentada a seguir, em que a ilustração está integrada ao enunciado de forma a reforçar as informações relevantes para a resolução e permitir ao estudante visualizar melhor a situação descrita.

Figura 13 - Exemplo de problema utilizando a representação Ilustração (Arranjo)

20 Um grupo de sete amigos decidiu passar o fim de ano no litoral. Ao consultar um aplicativo que comercializa passagens rodoviárias, eles perceberam que quase não havia mais assentos disponíveis para a data escolhida.



Na figura, disponibilizada pelo aplicativo, os assentos ocupados estão marcados com um X e os disponíveis são os mostrados em verde.

Qual é a quantidade de maneiras distintas para acomodar o grupo de amigos nesse ônibus?

- a) $\frac{9!}{2!}$ c) $7! \cdot \frac{9!}{2!}$ e) $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$
 b) $7!$ d) $5! \cdot 4!$

Fonte: Teixeira, 2020, p. 51.

Estudos anteriores, como o de Barreto e Borba (2010) demonstram que uma das representações que mais se destacava nos Anos Iniciais eram os desenhos, frequentemente utilizado como recurso auxiliar para a compreensão dos enunciados, especialmente em contextos lúdicos ou do cotidiano infantil. Nesses materiais, o desenho desempenha um papel de mediação entre o enunciado verbal e o raciocínio matemático, apoiando a leitura e favorecendo o envolvimento do aluno com a situação proposta. Ao observar os livros do Ensino Médio analisados neste estudo, nota-se que a presença da ilustração persiste, mas ainda não é a representação mais frequente, podendo assim ser mais bem explorada dentro do ensino e da aprendizagem dos alunos do Ensino Médio.

Partindo para a representação do quadro de possibilidades, que favorece a noção de esgotamento e ajuda a visualizar a totalidade dos casos possíveis, ajudando o aluno no momento da construção dos esquemas para a resolução do problema. A questão 14 (Figura 14) da coleção C1, faz a utilização de tabela em sua composição, onde se traz uma listagem organizada daquilo que a questão aborda, auxiliando o estudante na sua organização conceitual para a resolução.

Figura 14 - Exemplo de problema utilizando a representação Tabela (Produto de Medidas)

- 14. (Enem)** Numa cidade, cinco escolas de samba (I, II, III, IV e V) participaram do desfile de Carnaval. Quatro quesitos são julgados, cada um por dois jurados, que podem atribuir somente uma dentre as notas 6, 7, 8, 9 ou 10. A campeã será a escola que obtiver mais pontuação na soma de todas as notas emitidas. Em caso de empate, a campeã será a que alcançar a maior soma das notas atribuídas pelos jurados no quesito Enredo e Harmonia. A tabela mostra as notas do desfile desse ano no momento em que faltava somente a divulgação das notas do jurado B no quesito Bateria.

Quesitos	1. Fantasia e Alegoria		2. Evolução e Conjunto		3. Enredo e Harmonia		4. Bateria		Total
Jurado	A	B	A	B	A	B	A	B	
Escola I	6	7	8	8	9	9	8		55
Escola II	9	8	10	9	10	10	10		66
Escola III	8	8	7	8	6	7	6		50
Escola IV	9	10	10	10	9	10	10		68
Escola V	8	7	9	8	6	8	8		54

Quantas configurações distintas das notas a serem atribuídas pelo jurado B no quesito Bateria tornariam campeã a Escola II? **Alternativa c.**

a) 21

b) 90

c) 750

d) 1 250

e) 3 125

Fonte: Dante e Viana, 2020, p. 48.

O uso de tabelas representa uma relação com a Estatística e a possibilidade de uso de dados reais, nesse caso, permite ao aluno perceber as possibilidades de preenchimento dos campos em branco e analisar repetições e que permitirão identificar padrões (como a importância da ordem ou da não repetição), porém ainda é uma das representações mais escassas presentes nos livros didáticos do Ensino Médio, resultando também encontrado na presente pesquisa, corroborando com outros estudos como o de Rocha e Borba (2017) que apontam a ausência ou uso pontual dessa representação mesmo em situações em que poderia favorecer a visualização do raciocínio envolvido. Sua baixa frequência limita o desenvolvimento de estratégias exploratórias por parte dos estudantes, especialmente aqueles que ainda não consolidaram os esquemas necessários para o uso direto de fórmulas ou do princípio multiplicativo. Dessa forma, destaca-se a importância de maior valorização do quadro de possibilidades como ferramenta de apoio à compreensão e generalização em Combinatória.

Sendo assim, chegou-se à conclusão de que a representação da árvore de possibilidades, assim como o Quadro, aparece de forma muito escassa nas três coleções de livros analisadas. Mesmo sabendo que a utilização de tal representação ajuda a visualizar o encadeamento das escolhas, sendo muito útil para trabalhar com o princípio multiplicativo, combinação e entre outras situações combinatórias, destacando as etapas da escolha e como o número de opções vai se reduzindo ou se combinando, os materiais didáticos não exploram muito essa representação.

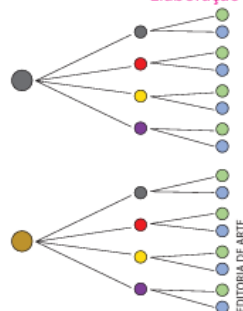
A questão 8 (Figura 15) da coleção C2, é uma das poucas questões que trabalha com a utilização da árvore de possibilidades, além disso, propõe ao aluno que ele construa a árvore de

possibilidades e crie uma problemática para ela, exigindo que haja um domínio dos conceitos que estão sendo exigidos pelo problema.

Figura 15 - Exemplo de problema utilizando a representação Árvore de Possibilidades
(Produto de Medidas - elaboração)

8. Observe o diagrama de árvore a seguir e crie uma situação-problema de contagem que envolva a ideia de agrupamento de pessoas. Imagine você e alguns de seus colegas de classe envolvidos nessa situação. Utilize o princípio multiplicativo para resolvê-la.

Elaboração do estudante.



Fonte: Bonjorno; Giovanni e Sousa, 2020, p. 87.

Assim, a análise das representações presentes nas questões evidencia como os livros didáticos mobilizam diferentes recursos para apoiar o raciocínio combinatório dos estudantes, porém é necessário que haja uma maior presença desses problemas, para que dê ao aluno uma melhor visualização dos conceitos combinatórios. Tal conclusão difere do que foi analisado por Silva (2015) nos Anos Finais, uma vez que a árvore de possibilidades era uma das representações mais presentes nos livros didáticos dessa etapa da Educação Básica.

Para além, nota-se que a representação do PFC não é tão frequente nas coleções de livros analisadas. O PFC mostra como a contagem pode ser feita por multiplicação de possibilidades sucessivas e permite a generalização de situações sem a necessidade de listar todos os casos. A questão resolvida 8 da coleção C1 (Figura 16) é um bom exemplo de como a utilização do PFC auxiliaram nas resoluções dos problemas e permite ao estudante uma melhor compreensão do raciocínio envolvido.

Figura 16 - Exemplo de problema utilizando a representação PFC (Permutação)

8. Responda aos itens no caderno.

- a) Quantas palavras (que pertencem à língua portuguesa ou não) de 4 letras distintas podemos formar com as letras da palavra CONTAGEM?
- b) Quantas dessas palavras começam com **E**?
- c) Quantas terminam com **TA**?
- d) Quantas contêm a letra **M**?
- e) Quantas não contêm a letra **M**?

Resolução

- a) 1ª maneira: usando o princípio fundamental da contagem.

Temos 8 possibilidades para a 1ª letra, 7 para a 2ª, 6 para a 3ª e 5 para a 4ª letra.

Assim, temos: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1\,680$.

São 1 680 palavras.

Fonte: Dante e Viana, 2020, p. 31.

Contrariamente ao que foi encontrado, Rocha e Borba (2017) em sua pesquisa também no Ensino Médio mostram que uma das representações mais crescentes é o PFC, isso mostra que apesar de sua ampla presença em outros materiais analisados, o uso do PFC ainda não é uma tendência consolidada em todas as coleções, revelando divergências na seleção e valorização das representações pelos diferentes autores. Essa variação aponta para a necessidade de discussões mais aprofundadas sobre quais representações devem ser priorizadas no ensino da Combinatória, considerando seu potencial de favorecer a compreensão dos invariantes envolvidos nas contagens.

Dentro dessa perspectiva, no Ensino Médio, é desejável que os problemas propostos conduzam os alunos a um nível de abstração que permita a transição do entendimento mais intuitivo para uma abordagem formal, o que constitui um dos principais objetivos dessa etapa escolar. A formalização, nesse contexto, corresponde ao momento em que o estudante consegue organizar e estruturar o conhecimento por meio de esquemas mais elaborados, como o uso de fórmulas. Assim, se torna comum que questões como a exemplificada a seguir (Figura 17) sejam cada vez mais frequentes nos livros didáticos.

Figura 17 - Exemplo de problema utilizando a representação Fórmula (Fatorial)

10. Simplifique as expressões:

$$\text{a) } \frac{n!}{(n-1)!} \quad n \qquad \text{b) } \frac{(3n)! + (3n-1)!}{(3n+1)!} \quad \frac{1}{3n}$$

Fonte: Bonjorno; Giovanni e Sousa, 2020, p. 87.

Estudos anteriores, como o de Rocha e Borba (2017) já demonstravam a grande presença das fórmulas nessa etapa de ensino, indicando uma ênfase nos procedimentos algorítmicos em detrimento da compreensão conceitual. Essa tendência também foi observada na presente

pesquisa, em que muitas questões priorizam a aplicação direta de fórmulas, sem que haja espaço para explorar os significados envolvidos ou os invariantes que justificam seu uso. Contudo, é válido destacar que a predominância dessa representação pode contribuir para uma aprendizagem mecânica, dificultando que o estudante compreenda as estruturas combinatórias e desenvolva autonomia na escolha de estratégias adequadas para resolver diferentes tipos de problemas.

Partindo para outro viés, trazendo agora as questões resolvidas que são uma ferramenta eficaz para evidenciar os invariantes presentes nas situações combinatórias, possibilitando ao estudante reconhecer a estrutura do problema e compreender os critérios que o definem. Essa abordagem favorece a construção de esquemas conceituais mais sólidos e contribui para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa, especialmente quando as resoluções não apenas apresentam a aplicação de fórmulas, mas explicam os motivos que levam a tais escolhas. Um exemplo disso é a questão a seguir, presente na coleção C3 (Figura 18), que envolve a formação de uma comissão com restrições quanto à participação de determinados estudantes.

Figura 18 - Problema resolvido envolvendo Combinação

8. Uma classe tem dez estudantes do sexo feminino e cinco estudantes do sexo masculino. Formam-se comissões de quatro estudantes do sexo feminino e dois estudantes do sexo masculino. Determine o número de comissões em que participa a estudante X e não participa o estudante Y.

Resolução

A comissão deve ter seis pessoas.



- Como a estudante X faz parte da comissão, restam nove estudantes do sexo feminino, dentre os quais devemos escolher três, isto é, $C_{9,3}$.
- Como o estudante Y não faz parte da comissão, restam quatro estudantes do sexo masculino, dentre os quais devemos escolher dois, isto é, $C_{4,2}$.

Então, pelo princípio fundamental da contagem, o número de comissões é dado por:

$$C_{9,3} \cdot C_{4,2} = \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{4!}{2!2!} \Rightarrow C_{9,3} \cdot C_{4,2} = 504$$

Portanto, serão 504 comissões.

Fonte: Bonjorno; Giovanni e Sousa, 2020, p. 96.

Nesse contexto, a explicitação dos invariantes de ordem e de escolha torna-se fundamental. Na resolução apresentada, observa-se que a ordem dos elementos escolhidos não altera o resultado, ou seja, trata-se de uma situação em que a ordem não é relevante, um invariante central na Combinação. Já o invariante da escolha está diretamente relacionado à quantidade de elementos disponíveis após a imposição das restrições. Assim, o problema evidencia como as condições impostas afetam o número de possibilidades e destaca a importância de reconhecer esses aspectos estruturais na resolução. A formulação e explicitação desses invariantes contribui para que os estudantes desenvolvam não apenas procedimentos técnicos, mas também uma compreensão conceitual das diferentes situações combinatórias (Borba, 2010).

Para além, ao propor questões que envolvem múltiplas representações e exigem diferentes formas de análise, como ocorre frequentemente no estudo da Combinatória, os livros didáticos podem favorecer a consolidação dos aprendizados e preparar os alunos para uma

utilização mais sistemática e formal do raciocínio matemático. Um exemplo claro disso é a questão resolvida 2 (Figura 19) da coleção C1, que ilustra bem o emprego da possibilidade de utilização de várias representações (listagem, árvore de possibilidades e PFC, respectivamente) na resolução de um problema.

Figura 19 - Problema envolvendo múltiplas representações (Permutação)

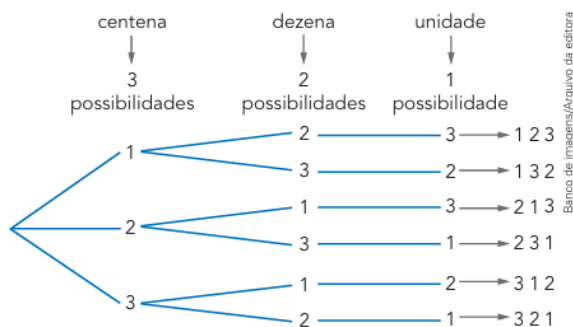
2. Quantos números diferentes de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3?

Resolução

1ª maneira: resolução por tentativa.

Temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Concluímos, então, que são 6 os números procurados.

2ª maneira: árvore de possibilidades.



3ª maneira: princípio fundamental da contagem.

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

É possível formar 6 números diferentes com algarismos distintos.

Observe que a ordem dos algarismos é muito importante. Todos os números diferem entre si pela ordem dos algarismos.

Fonte: Dante e Viana, 2020, p. 22.

Nesta situação, observa-se com clareza a atuação dos invariantes de ordem e de escolha. O invariante da ordem é determinante: a troca de posição entre os algarismos gera números diferentes, caracterizando uma situação de permutação. Já o invariante da escolha se expressa na exigência de que os algarismos sejam distintos, o que restringe o uso de todos os algarismos considerados sem repetição e justifica a redução progressiva do número de possibilidades. A apresentação das três estratégias de resolução, especialmente a árvore de possibilidades, contribui para tornar visíveis esses invariantes em diferentes representações simbólicas, ampliando a compreensão do estudante sobre a estrutura da contagem envolvida. Ao evidenciar a relevância da ordem na diferenciação dos resultados e conectar isso à fundamentação combinatória, a questão permite que o aluno não apenas identifique o tipo de situação, mas compreenda com mais profundidade porque se trata de uma permutação e o que a distingue de outras estruturas combinatórias, fortalecendo sua capacidade de generalização e análise em contextos diversos.

A análise dos três livros didáticos evidenciou tanto permanências quanto variações significativas nas abordagens da Combinatória ao longo das coleções, especialmente no que diz

respeito à diversidade de representações, à presença de questões contextualizadas e à explicitação dos invariantes que definem os diferentes tipos de situações combinatórias. Quando comparados a estudos anteriores que percorrem pelo caminho da Educação Básica, desde os Anos Iniciais ao Ensino Médio, observa-se que, embora haja avanços pontuais na explicitação conceitual e na variedade de estratégias apresentadas, ainda persistem limitações quanto à problematização dos significados envolvidos e a escassez na variação das representações presentes nos problemas propostos.

Assim, essa constatação reforça a importância de uma análise crítica do livro didático como instrumento de ensino e aprendizagem, destacando sua centralidade nas práticas escolares, mas também seus limites enquanto único recurso formativo. Diante disso, a seção a seguir, trará as considerações finais do presente trabalho, buscando retomar as contribuições deste estudo à luz dos referenciais teóricos mobilizados e refletindo sobre seus desdobramentos para o ensino da Combinatória.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo investigar a apresentação da Combinatória em livros didáticos do Ensino Médio, analisando suas abordagens à luz da Teoria dos Campos Conceituais. De forma mais específica, buscou-se categorizar os tipos de questões presentes nesses materiais, identificar os invariantes envolvidos nas situações combinatórias e analisar as diferentes formas de representações simbólicas utilizadas nos enunciados e nas questões resolvidas. Também se examinou como essas situações estão organizadas ao longo das coleções, com atenção ao papel das estruturas multiplicativas na resolução de problemas de contagem.

A análise das três coleções evidenciou tanto as potencialidades quanto as limitações da abordagem adotada na exploração do tema de Combinatória. A distribuição das questões mostrou uma ênfase significativa nos conceitos de Permutação, Arranjo e Combinação, enquanto situações como Produto de Medidas e Fatorial não estão tão presentes nos livros didáticos em questão. Conclui-se que por mais que algumas situações problemas abordem contextualizações, a maioria ainda se apoia na utilização apenas de estruturas formais e fórmulas. Nesse contexto, tal distribuição de situações combinatórias nos livros didáticos analisados sugere uma tentativa dos livros de propor questões mais complexas, que explorem outras estruturas combinatórias. No entanto, esse afastamento também requer um cuidado maior para garantir que os estudantes compreendam os fundamentos conceituais envolvidos, especialmente os esquemas multiplicativos essenciais para a construção do campo conceitual da Combinatória e, conseqüentemente, para o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

As representações simbólicas também desempenham um papel central nessa configuração. Observou-se que há um predomínio marcante das representações algébricas e numéricas, sobretudo em exercícios que exigem a aplicação direta de fórmulas. As representações como árvore de possibilidades, quadros e PFC não são devidamente exploradas dentro dos problemas presentes nos livros didáticos. Essa concentração e foco em questões que apenas utilizem representações algébricas, não havendo assim uma distribuição satisfatória, reflete uma visão restrita dos conceitos combinatórios, o que pode impactar negativamente a formação de esquemas conceituais mais amplos e integrados especialmente para estudantes que não consolidaram o uso de outras representações em etapas anteriores da escolarização.

Para além, tivemos a presença de problemas que direcionassem ao estudante qual a situação combinatória ou representação que deveria ser utilizada na resolução. O direcionamento das representações nas questões pode ser compreendido como um recurso pedagógico valioso, na medida em que contribui para que os alunos estabeleçam relações entre os conceitos matemáticos e sua linguagem formal. Longe de representar uma limitação, esse direcionamento pode funcionar como um apoio didático que favorece o desenvolvimento de um raciocínio matemático mais estruturado, estimulando a familiarização com diferentes formas de representação e sua adequação ao nível de ensino em que os estudantes se encontram.

Nesse sentido, a inclusão desse aspecto nos livros didáticos pode, assim, servir como um suporte ao trabalho docente, auxiliando os professores a promover entre os alunos a construção de um repertório de representações simbólicas eficazes para a resolução de problemas combinatórios em distintas situações. Partindo para o direcionamento quanto à situação combinatória, pode significar a limitação da flexibilidade cognitiva necessária para a escolha e adaptação de estratégias de resolução. Além disso, os invariantes, como a noção de esgotamento, a consideração da ordem, o número de etapas de escolha e a possibilidade de repetição, aparecem de forma fragmentada, dificultando que o aluno os identifique e os generalize como parte de um campo conceitual.

Espera-se que este trabalho contribua para o debate sobre a importância de um ensino de Combinatória que vá além da aplicação mecânica de fórmulas, valorizando o papel das representações e dos invariantes como elementos centrais para a aprendizagem e para a reflexão do papel do livro didático nesse cenário, enquanto material didático que representa o currículo apresentado. Pesquisas futuras podem investigar como esses materiais são mobilizados por professores em sala de aula, bem como explorar estratégias didáticas que potencializem o desenvolvimento conceitual dos estudantes a partir de problemas combinatórios mais abertos, contextualizados e com múltiplas possibilidades de representação e resolução.

REFERÊNCIAS

- ALVES, R. *A alegria de ensinar*. São Paulo: Ars Poética, 1994.
- BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis. 1996.
- BATANERO, C.; NAVARRO-PELAYO, V. & GODINO, J. *Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils*. Educational Studies in Mathematics 32, 1997, pp.181-199.
- BITTAR, Marisa. *Livro didático e reformas educacionais: entre políticas públicas e práticas escolares*. São Paulo: Cortez, 2021.
- BITTENCOURT, C. M. F. *Livro didático e conhecimento histórico: uma história de sua constituição*. São Paulo: Contexto, 2004.
- BONJORNO, J. R., GIOVANNI, J. R., SOUSA, P. R. C. *Prisma Matemática: Estatística, Combinatória e Probabilidade*. Área do Conhecimento: Matemática e suas tecnologias. Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2020.
- BORBA, R. *O Raciocínio Combinatório na Educação Básica*. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC, 2017 (homologada 2017–2018). Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/>.
- BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- CARVALHO, A.; GONÇALVES, H. Multiplicação e divisão: conceitos em construção. *Educação e Matemática*, n. 75, p. 23-25, nov./dez. 2003.
- CARVALHO, J. B. P.; LIMA, P. F. *Explorando o Ensino. Matemática*. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica (org.). *Coleção Explorando o Ensino: Matemática*. Brasília, DF: MEC/SEB, 2010. v. 17, p. 15–25.
- DANTE, L. R.; VIANA, F. *Matemática em Contextos: Análise Combinatória, Probabilidade e Computação*. São Paulo: Ática, 2020.
- GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. *Repensando multiplicação e divisão: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*. São Paulo: Proem Editora, 2014.
- CRESWELL, J. W. *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- JUNIOR SILVA, C. G. *O Livro Didático de Matemática e o Tempo*. Revista de Iniciação Científica da FFC, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.
- LIMA, E. L. *Análise real: volume 1: Funções de uma variável*. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. Série Coleção Matemática Universitária.

LIMA, Ewellen Tenório de; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. *A articulação entre combinatória e probabilidade nas diferentes instâncias do currículo: um levantamento da produção nacional*. Revista Paranaense de Educação Matemática, v. 8, n. 17, p. 546–566, dez. 2020.

MACÊDO, Josué Antunes de; BRANDÃO, Daniel Pereira; NUNES, Daniel Martins. *Limites e possibilidades do uso do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem*. Educação Matemática Debate, Montes Claros, v. 3, n. 7, p. 68-86, jan./abr. 2019.

MAGINA, S. *A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente*. Revista Diálogo Educacional, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 435-450, set./dez. 2006.

MAGINA, S.; CAMPOS, T; NUNES, T. & GITIRANA, V. *Repensando Adição e Subtração*. São Paulo: Ed. PROEM, 2001.

MOREIRA, M. A. *A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS DE VERGNAUD, O ENSINO DE CIÊNCIAS E A PESQUISA NESTA ÁREA*. Investigações em Ensino de Ciências, v. 7, n. 1, pp. 7-29, 2002.

NASCIMENTO, M.; BRANDT, F. *Maria, Maria*. Intérprete: Milton Nascimento. Rio de Janeiro: EMI, 1978. Disco de vinil.

PESSOA, C. A. S. *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio*. Recife: O Autor, 2009.

ROCHA, C. A.; BORBA, R. Combinatória no Ensino Médio: influências do guia do Programa Nacional do Livro Didático brasileiro. *CIVEOS – Congreso Iberoamericano de Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Universidad de Granada, 2017.

ROSSINI, S. T. C. M. *A importância do livro didático na produção textual*. 2003. 139f. Monografia (Especialização em Língua Portuguesa e Textualidade). Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma.

SACRISTÁN, J. G. *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2000.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do trabalho científico*. 23. ed. rev. e atual. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, J. J. Análise dos problemas combinatórios em livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental. Caruaru: O Autor, 2015.

SILVA, L. C. da; SILVA, L. A. da. *Construção do conceito de multiplicação e divisão à luz da Teoria dos campos conceituais e Obstáculos Epistemológicos*. Caderno Amazonense de Pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática, [S. l.], v. 3, n. 1, p. e202301, 2023.

SOARES, Magda Becker. *O livro didático como instrumento pedagógico: entre a prescrição e a mediação*. In: SILVA, Vera Lucia Trevisan de; OLIVEIRA, Maria Auxiliadora Cabral de. *Livro didático: política, produção e usos*. Campinas: Mercado de Letras, 2018.

SWIFT, Taylor. *You're on your own, kid*. In: *Midnights*. [S. l.]: Republic Records, 2022. 1 disco. Faixa 5, 3 min 14 s.

TEIXEIRA, L. A. (org.). *Diálogo – Matemática e suas Tecnologias: Estatística e Probabilidade*. São Paulo: Moderna, 2020.

VERGNAUD, G. *A teoria dos campos conceituais: um modelo para a compreensão da aprendizagem*. In: Fundamentos da Didática da Matemática. 1986.

VERGNAUD, G. *La théorie de champs conceptuels. Recherches en Didactique de Mathématiques*, vol 10, n°2.3, Pensée Sauvage: Grenoble, França. 1990, pp. 133-170.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais e os conceitos matemáticos. In: GOUIN, Denis; DUBRAY, Pierre (Org.) *Didática e Matemática: Ensino e Aprendizagem*. São Paulo: Editora Ática, 1991.

VERGNAUD, G. *Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e Didático das Matemáticas*. 1996.