



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

KALINA GISLANE GOUVEIA DE ARAÚJO

**A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL EM
LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO SUPERIOR:** uma análise à luz da teoria dos registros
de representação semiótica

Caruaru
2025

KALINA GISLANE GOUVEIA DE ARAÚJO

**A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL EM
LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO SUPERIOR:** uma análise à luz da teoria dos registros
de representação semiótica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Matemática –
Licenciatura do Campus Acadêmico do
Agreste da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, na modalidade de
monografia, como requisito parcial para a
obtenção do grau de licenciada em
Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Naralina Viana Soares da Silva Oliveira

Caruaru

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Araújo, Kalina Gislane Gouveia de.

A abordagem de limite de função de uma variável real em livros didáticos do ensino superior: uma análise à luz da teoria dos registros de representação semiótica / Kalina Gislane Gouveia de Araújo. - Caruaru, 2025.

59 p. : il., tab.

Orientador(a): Naralina Viana Soares da Silva Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.

Inclui referências.

1. Cálculo Diferencial e Integral I. 2. Limite de Função de uma Variável Real. 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. 4. Livros Didáticos. 5. Educação Matemática. I. Oliveira, Naralina Viana Soares da Silva. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

KALINA GISLANE GOUVEIA DE ARAÚJO

**A ABORDAGEM DE LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL EM
LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO SUPERIOR: uma análise à luz da teoria dos registros
de representação semiótica**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Matemática –
Licenciatura do Campus Acadêmico do
Agreste da Universidade Federal de
Pernambuco – UFPE, na modalidade de
monografia, como requisito parcial para a
obtenção do grau de licenciada em
Matemática.

Aprovada em: 12/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof^ª. Dr^ª. Naralina Viana Soares da Silva Oliveira (Orientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^ª. Dr^ª. Simone Moura Queiroz (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof^ª. Mr^ª. Lidianne Pereira de Carvalho (Examinadora Externa)
Secretaria de Educação de Pernambuco

Dedico este trabalho aos meus pais e à minha irmã, que estiveram ao meu lado em todos os momentos. Com o apoio necessário e suficiente que sempre me ofereceram, o infinito torna-se o único limite possível para os meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus pela dádiva da vida e pela proteção até aqui.

À minha família, por todo amor e apoio constante. Em especial, à minha mãe, Irani, pelas orações e cuidados incansáveis. Ao meu pai, Gilson, por não medir esforços para tornar possíveis os meus sonhos. À minha irmã, Karla, pela presença e pelo carinho mesmo nos silêncios. Ao meu avô paterno, Balbino, que me ensinou desde muito cedo a acreditar no poder transformador da educação. E à memória da minha avó materna, Maria das Dores, que permanece como um exemplo de força, de generosidade e de afeto. Obrigada por me incentivarem e por acreditarem em mim. Essa conquista é nossa.

À minha orientadora, Naralina, por partilhar seus ensinamentos com tanta serenidade e gentileza. Admiro a grande profissional que é e esse ser humano ímpar que se revela a cada gesto. Obrigada por toda troca neste processo de escrita e por tudo que aprendi com você.

À minha banca examinadora, professoras Naralina Viana, Simone Queiroz e Lidianne Carvalho, pelo aceite ao meu convite e pelas valiosas contribuições neste trabalho e ao longo da minha formação. Suas trajetórias me inspiram e me atravessam grandemente.

Aos docentes, do ensino básico ao superior, que deixaram marcas em meu processo formativo: Maria Selma, José Manoel, Jorge Luís, Marta, Maria Brasil, Aparecida, Josilene, Dalvany, Naralina, Simone, Lidianne, Maria do Desterro, Luan Danilo, Cristiane, Jaqueline, Janiely e Luana. Obrigada a cada um por me fazer acreditar ainda mais no papel que desejo ocupar. Espero, um dia, transformar a vida das minhas alunas e dos meus alunos com a mesma grandeza com que transformaram a minha.

À Universidade Federal de Pernambuco, em especial ao Centro Acadêmico do Agreste, expresso meu reconhecimento por ter sido o espaço que acolheu minha formação e despertou ainda mais o meu desejo em seguir como docente e pesquisadora.

Ao “MALLIK”, Maria Luiza, Ana Clara, Lucas Martins, José Lucivaldo e Isabella Carvalho, meus amigos e parceiros de graduação desde o primeiro trabalho realizado. Ter vocês ao meu lado nessa caminhada tornou tudo mais leve, bonito e, acima de tudo, possível. Obrigada por toda parceria, pelas risadas, pelo aconchego emocional e pelo privilégio do encontro. Acredito fortemente em cada um de vocês. Este é só o começo daquilo que, um dia, haveremos de nos tornar.

À minha turma de Matemática - Licenciatura 2021.1, em especial, para além dos citados anteriormente, agradeço a Gustavo Henrique, Malcolm Sedícias, José Warlyson e Jennyfer Nunes, pela amizade genuína, pelas boas conversas e por tantos bons momentos ao

longo desse percurso acadêmico. Vocês são especiais. Desejo a todos muito sucesso e dias tranquilos.

À Maria Adrielly, pela cumplicidade e por ter sido também a minha rede de apoio durante os dois últimos anos de graduação e da vida. Obrigada por acreditar em mim, muitas vezes mais do que eu mesma. Você transformou a forma como eu enxergo o mundo e os desafios que ele impõe. Você me inspira. Te admiro à beça.

À Marília e à Mariana, por todos os abraços e os risos, por toda amizade dentro e fora da universidade. A nossa convivência e as incontáveis trocas deixaram o processo mais alegre e cheio de sentido. Acredito em vocês com a mesma certeza com que nunca duvidaram de mim.

À minha amiga de vida, para além da faculdade, Larissa Andrade, que celebra minhas conquistas com grandes sorrisos e presença contínua. Obrigada por todo companheirismo e pelo afeto que construímos desde o momento em que me tornei sua vizinha. Amo sua vida e a alegria que sua presença traz à minha.

À Maria Lívia Fernandes, minha melhor amiga de infância, e à Mariana Sales, minha irmã gêmea de alma. Mesmo de longe, vocês se fizeram presentes, transformando esta caminhada em um lugar mais acolhedor, especial e pleno de significado. Obrigada por essa amizade que transcende o tempo e o espaço.

A todos que, de forma direta ou indireta, contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional, dedico esta etapa concluída, que é também coletiva. Deixo, assim, o meu mais sincero e singelo agradecimento. Muito obrigada.

Liberdade é não saber
Graça é se perguntar
Como é bom sonhar
E a verdade ninguém vê
Que a felicidade é mistério
(Anavitória, 2017).

RESUMO

No ensino superior, o estudo de limite de função de uma variável real é o ponto de partida para a organização dos demais conteúdos do Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I), como continuidade, derivadas e integrais. Por esse motivo, dificuldades em compreender esse conteúdo inicial podem gerar mais desafios ao longo do desenvolvimento da disciplina. De acordo com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993, 2009, 2011, 2012), a compreensão dos objetos matemáticos — como o de limite — é estabelecida quando se realiza a articulação entre diferentes registros de representação. Diante disso, revela-se a importância de investigar de que forma o livro didático, um dos recursos mais utilizados nos cursos de graduação, pode influenciar nesse processo. Nesse contexto, este estudo tem como objetivo geral analisar como os livros didáticos, adotados no componente curricular da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, exploram as transformações entre diferentes tipos de representações semióticas na abordagem de limite. A metodologia desta pesquisa bibliográfica é de abordagem qualitativa descritiva, com base na TRRS, por meio da análise de três livros didáticos: Guidorizzi (2001), Stewart (2013) e Leithold (1994). O foco da análise concentrou-se no uso dos registros de representações e das transformações de tratamento e conversão entre eles. Os resultados evidenciam que nos três livros há uma predominância do registro simbólico-algébrico. Além disso, em relação às transformações, há diferenças na ênfase dada por cada obra. O livro de Stewart foi o que mais incentivou a conversão entre os registros, seguido do livro de Leithold. O livro de Guidorizzi, por sua vez, priorizou os tratamentos dentro do registro simbólico-algébrico. A conversão mais recorrente nos três livros foi do registro simbólico-algébrico para o registro em língua natural. Desse modo, espera-se que os resultados obtidos contribuam para a reflexão sobre as práticas do ensino de limite e, por conseguinte, do Cálculo I, especialmente no que se refere à utilização e à mediação didática dos livros.

Palavras-chave: Cálculo I; Limite de Função; Representação Semiótica; Transformações de Registros; Livros Didáticos.

ABSTRACT

In higher education, the study of the limit of a real-valued function of one variable is the starting point for organizing the other topics in Differential and Integral Calculus I (Calculus I), such as continuity, derivatives, and integrals. For this reason, difficulties in understanding this initial content can lead to further challenges throughout the development of the course. According to Duval's Theory of Semiotic Representation Registers (1993, 2009, 2011, 2012), the understanding of mathematical objects — such as the concept of limit — is established when different representation registers are coordinated. In this context, it becomes important to investigate how the textbook, one of the most widely used resources in undergraduate courses, can influence this process. This study, therefore, aims to analyze how textbooks adopted in the Differential and Integral Calculus I course of the Mathematics Teaching Degree program at the Federal University of Pernambuco explore transformations between different types of semiotic representations in their treatment of limits. The methodology of this bibliographic research follows a descriptive qualitative approach based on the Theory of Semiotic Representation Registers, through the analysis of three textbooks: Guidorizzi (2001), Stewart (2013), and Leithold (1994). The focus of the analysis was on the use of representation registers and the transformations of treatment and conversion between them. The results show that all three books predominantly use the symbolic-algebraic register. Furthermore, with regard to the transformations, there are differences in the emphasis given by each textbook. Stewart's book was the one that most encouraged conversion between registers, followed by Leithold's book. Guidorizzi's book, on the other hand, prioritized treatments within the symbolic-algebraic register. The most frequent conversion found in all three books was from the symbolic-algebraic register to the natural language register. Thus, it is expected that the results obtained will contribute to reflections on the teaching practices of limits and, consequently, of Calculus I, especially with regard to the use and didactic mediation of textbooks.

Keywords: Calculus I; Limit of a Function; Registers of Semiotic Representation; Register Transformations; Textbooks.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Representação gráfica da definição de limite.....	23
Figura 2 –	Registros na apresentação da noção intuitiva de limite.....	37
Figura 3 –	RSA, RNT e RGr em exemplo resolvido.....	38
Figura 4 –	RSA e RGr em exemplo resolvido.....	39
Figura 5 –	RSA em exemplo resolvido.....	39
Figura 6 –	RSA em exemplo resolvido 2.....	40
Figura 7 –	Registros na apresentação da noção intuitiva de limite 2.....	41
Figura 8 –	RLN, RSA, RNT e RGr em exemplo resolvido.....	41
Figura 9 –	RLN e RSA na definição precisa de limite.....	42
Figura 10 –	Interpretação por diagrama da definição de limite.....	42
Figura 11 –	Interpretação gráfica da definição de limite.....	42
Figura 12 –	RLN, RSA e RGr em exemplo resolvido.....	43
Figura 13 –	RNT e RLN na abordagem de limite.....	44
Figura 14 –	RSA na abordagem de limite.....	44
Figura 15 –	RGr na abordagem de limite.....	45
Figura 16 –	RGr, RLN e RSA na introdução da definição de limite.....	47
Figura 17 –	RLN, RSA e RGr na definição precisa de limite.....	48
Figura 18 –	Tratamento do RSA em exemplo resolvido.....	49
Figura 19 –	Tratamento e conversão em exemplo resolvido.....	49
Figura 20 –	Conversão em exemplo resolvido.....	50
Figura 21 –	RSA, RLN e RGr na definição precisa de limite.....	51
Figura 22 –	Tratamento e conversão em exemplo resolvido 2.....	51
Figura 23 –	Conversão e tratamento em exemplo resolvido.....	52
Figura 24 –	Quantidade de cada tipo de conversão entre registros nos exemplos de cada livro.....	53

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática).....	27
Quadro 2 –	Classificação dos tipos de registros no conteúdo de limite.....	28
Quadro 3 –	Exemplo de formação no conteúdo de limite.....	29
Quadro 4 –	Exemplo de tratamento no conteúdo de limite.....	29
Quadro 5 –	Exemplo de conversão no conteúdo de limite.....	30
Quadro 6 –	Categorias, variáveis e critérios de análise.....	35
Quadro 7 –	Abreviaturas, registros e descrições dos registros.....	36

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 –	Frequência de uso dos registros nos exemplos.....	46
Tabela 2 –	Frequência de tratamentos e conversões dos registros nos exemplos.....	52

LISTA DE ABREVIATURA E SIGLAS

CAA	Centro Acadêmico do Agreste
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
LD	Livro Didático
RGr	Registro Gráfico
RLN	Registro Língua Natural
RNT	Registro Numérico-Tabular
RSA	Registro Simbólico-Algébrico
TRRS	Teoria dos Registros de Representação Semiótica
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
2	O CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL.....	19
2.1	ASPECTOS HISTÓRICOS.....	19
2.1.1	Contribuições de Newton de Leibniz para o Cálculo.....	19
2.1.2	Limite nas perspectivas de Cauchy e de Weierstrass.....	21
2.2	DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE LIMITE.....	24
3	TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS).....	26
4	O LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE LIMITE.....	31
5	PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	34
5.1	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA.....	34
5.2	SELEÇÃO DOS LIVROS.....	34
5.3	CATEGORIAS DA TRRS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE.....	35
6	ANÁLISES E DISCUSSÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS.....	37
6.1	ANÁLISE E MAPEAMENTO DOS REGISTROS MOBILIZADOS.....	37
6.2	ANÁLISE E MAPEAMENTO DAS TRANSFORMAÇÕES ENTRE OS REGISTROS.....	46
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	54
	REFERÊNCIAS.....	56

1 INTRODUÇÃO

Na formação matemática universitária, o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) têm sido temas debatidos em diversos estudos relevantes, sobretudo, em razão das dificuldades relacionadas à compreensão dos conceitos neles envolvidos. Nesse contexto, o conceito de *Limite de Função de Uma Variável Real* (limite) destaca-se como um dos pilares do CDI I, constituindo, de acordo com Anton (2000) e Vianna (1998), a base fundamental sobre a qual se estruturam todos os demais conteúdos do Cálculo I, como continuidade, derivada e integral de uma função.

Compreender a definição de limite, segundo Cornu (1991), envolve um grau elevado de complexidade, fator que costuma gerar dificuldades de ordem cognitiva entre os discentes. O motivo dessa complexidade pode estar associado a diversas definições, simbolismos e concepções que, usualmente, são introduzidos em um curto espaço de tempo e de forma desarticulada, dificultando, assim, a construção de uma compreensão integrada e expressiva do conteúdo. Ainda, de acordo com esse autor, as dificuldades referentes ao conceito não podem ser atribuídas unicamente aos estudantes, mas também aos professores, aos livros e aos currículos, que muitas vezes organizam o ensino de maneira fragmentada.

Posto isto, Duval (2012) argumenta que a principal dificuldade na aprendizagem matemática não reside propriamente na complexidade dos objetos matemáticos, mas sim na exigência de que o estudante seja capaz de articular e transitar entre os diferentes *registros* de representação semiótica. Nesse sentido, a compreensão de uma definição matemática está intrinsecamente ligada ao fato de o aluno operar não apenas em um único registro de representação, seja ele o algébrico, o gráfico ou o verbal, mas realizar *conversões* entre esses registros, criando conexões que favoreçam a construção do significado e a compreensão integral de um objeto matemático — neste estudo, o limite.

A presença e a articulação desses diversos registros de representações no processo de ensino e aprendizagem podem ser identificadas por meio da análise de livros didáticos, uma vez que esse recurso possibilita analisar a maneira como os autores escolhem estruturar e apresentar os conteúdos. O livro de CDI I, por sua vez, exerce uma função importante, compondo um relevante referencial tanto para o professor quanto para o aluno. Com base nas ideias de Kuhn (2005), os livros didáticos ocupam uma posição central, visto que funcionam como instrumentos na disseminação do conhecimento considerado consensual dentro de um campo científico. É por meio desses materiais que os universitários, futuros profissionais, têm acesso aos paradigmas consolidados que orientam a prática e o pensamento científico em

determinada área. Assim, por serem elementos estruturantes do ensino, a maneira como esses materiais realizam a abordagem de limite pode impactar diretamente a compreensão dos estudantes.

Desse modo, o presente trabalho adota como aporte teórico a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Raymond Duval para buscar responder o seguinte problema de pesquisa: *como os livros didáticos, adotados no componente curricular da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, exploram as transformações entre diferentes tipos de representações semióticas na abordagem de limite de função de uma variável real?*

A motivação deste estudo surgiu ao longo da minha¹ formação enquanto aluna do curso de Matemática-Licenciatura, em particular ao cursar as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I) e Análise Real. Em Cálculo I, iniciei meu contato com o conteúdo de limite, por meio de uma abordagem mais intuitiva e baseada no uso de propriedades. Devido ao tempo disponível, assim como à abordagem adotada pela docente, o limite em sua definição formal não foi apresentado. Foi somente ao estudar a disciplina de Análise Real e retomar conteúdos já vistos em Cálculo I, dessa vez com mais rigor lógico, que fui apresentada à definição formal de limite e, nessa ocasião, enfrentei dificuldades em compreendê-la, principalmente para articular a noção intuitiva com sua formalização.

Durante o meu percurso acadêmico, diante das dúvidas que surgiam, uma das minhas estratégias era recorrer a desenhos (como gráficos ou figuras geométricas) para visualizar os problemas ou tentar compreender melhor as expressões algébricas envolvidas. Esse hábito tornou-se também recorrente na disciplina de Cálculo I. Inicialmente, o conceito de limite só passou a fazer mais sentido para mim quando eu o visualizava ou o representava graficamente, mesmo que por meio de simples esboços. Atrelado a isso, no período seguinte, atuei como monitora da disciplina e, durante essa vivência, a prática de “desenhar”, além de me auxiliar durante as explicações, também facilitava o entendimento das dúvidas apontadas pelos alunos.

Ainda, a utilização do livro didático como maior referência por parte dos docentes fez com que este recurso também se tornasse a principal fonte de estudo entre os discentes. Assim, era frequente consultar o livro de Cálculo I para a revisão de determinados conteúdos apresentados em aula, principalmente para analisar os exemplos resolvidos presentes no

¹ Em determinados momentos, será utilizada a primeira pessoa do singular para apresentar reflexões pessoais da autora desta pesquisa.

próprio material, com o intuito de encontrar neles modelos que pudessem ser aplicados na resolução das atividades propostas.

Considerando que este estudo fundamenta-se na Teoria de Registros de Representação Semiótica, ele mostra-se relevante para o campo da Educação Matemática ao buscar entender como os livros de Cálculo I incentivam, ou negligenciam, a conexão entre os diferentes registros de representação, aspecto fundamental destacado por Duval (2012) para a qualidade da aprendizagem. Tendo em vista o uso ainda massivo desses livros por docentes e discentes, analisar suas formas de apresentar o conteúdo pode contribuir com reflexões importantes sobre o ensino e a aprendizagem de limite. Além disso, os resultados desta pesquisa podem servir como subsídio para professores na escolha e mediação de livros didáticos, contribuindo para práticas pedagógicas mais eficazes no ensino de Cálculo I.

Diante do exposto, delimitamos como objetivo geral deste trabalho:

- Analisar como os livros didáticos, adotados no componente curricular da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco, exploram as transformações entre diferentes tipos de representações semióticas na abordagem de limite de função de uma variável real.

Para isso, foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as diferentes representações semióticas presentes na abordagem de limite, considerando a exposição teórica e as exemplificações;
- Analisar como ocorrem as transformações (tratamento e conversão) entre as representações semióticas na abordagem de limite, considerando a exposição teórica e as exemplificações.

Trata-se de uma pesquisa qualitativa que utiliza a análise bibliográfica, com foco em livros didáticos. A opção por esses materiais se deve ao seu papel fundamental na estruturação do conteúdo e na orientação das práticas pedagógicas em universidades, sobretudo em disciplinas como Cálculo I. Os livros analisados foram selecionados com base na sua adoção no componente curricular da disciplina de Cálculo I do curso de Matemática-Licenciatura da UFPE/CAA. E sua análise será conduzida à luz da TRRS, observando os principais registros de representações utilizados, bem como as transformações entre os registros, com ênfase na conversão, na abordagem de limite.

Este trabalho está estruturado em sete capítulos, que objetivam organizar uma sequência lógica para apresentar a investigação de maneira clara. A presente seção corresponde ao primeiro capítulo, no qual descrevemos a introdução do estudo. O segundo capítulo apresenta, brevemente, os aspectos históricos da construção da ideia e definição de

limite, trazendo tanto as contribuições de grandes matemáticos para a criação do CDI, quanto as abordagens desse objeto matemático ao decorrer do tempo. Além disso, o segundo capítulo discute algumas considerações de autores sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem do conteúdo de limite.

No terceiro capítulo, será apresentada a base teórica que norteará a análise deste estudo: a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, do autor Raymond Duval, destacando as conceituações centrais desse referencial, com ênfase nos registros de representação e nas transformações entre eles, como o tratamento e a conversão. No quarto capítulo, expomos a importância do livro didático, que constitui nosso objeto de análise, e a sua utilização no ensino e na aprendizagem de limite.

O quinto capítulo aborda os procedimentos metodológicos para a análise de dados, mencionando os livros selecionados para a investigação, assim como os critérios de análise, sendo esta realizada no capítulo seguinte (sexto capítulo). Por fim, o sétimo e último capítulo é destinado às considerações finais, nas quais apontamos um conjunto de comparação de respostas obtidas do estudo no capítulo anterior.

2 O CONCEITO DE LIMITE DE FUNÇÃO DE UMA VARIÁVEL REAL

Este capítulo introduz, de maneira breve, o processo histórico sobre a origem do conceito de limite, apresentando desde as contribuições de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716) para o Cálculo Diferencial e Integral, até a construção da definição de limite por Cauchy (1789-1857) e a formalização rigorosa de Weierstrass (1815-1897). Além disso, serão apresentadas contribuições de outros autores em pesquisas anteriores sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem de limite.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

2.1.1 Contribuições de Newton e Leibniz para o Cálculo

O Cálculo Diferencial e Integral, da forma como se conhece hoje, é resultado do trabalho de diversos estudiosos ao longo dos séculos. Nomes como René Descartes (1596 - 1650), Pierre Fermat (1601 - 1665), John Wallis (1616 - 1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) merecem destaque. Em seus estudos, discutiam alguns problemas da época, como o traçado de tangentes às curvas, as quadraturas e as séries infinitas (Garbi, 2009). Contudo, a unificação e generalização desses procedimentos só vieram a ser estabelecidas, posteriormente, por Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Newton e Leibniz foram, sem dúvidas, os maiores contribuidores para o desenvolvimento do CDI, sendo reconhecidos por muitos matemáticos como seus “inventores”. No século XVII, desenvolveram procedimentos algorítmicos que, com o tempo, deram origem aos conceitos de derivada e integral (Rezende, 2003). É importante ressaltar que ambos realizaram seus estudos de maneira independente. Segundo Baron e Bos (1985, p. 5 *apud* Rezende, 2003, p. 188):

Ainda que o Cálculo não tenha nem começado e nem terminado com estes dois homens [Newton e Leibniz], cabe a eles um grande mérito. Newton estendeu e unificou os vários processos de cálculo e Leibniz ligou-os através de uma notação eficaz e de um novo cálculo operacional.

Os trabalhos de Newton que fundamentaram o desenvolvimento do Cálculo incluem, principalmente, o seu método fluxional e o estudo das séries infinitas (Rezende, 2003). Segundo Rachidi *et al.* (2020), Newton, em sua obra *O método de fluxões e sequências infinitas*, estabeleceu a ligação entre os aspectos diferencial e integral, reconhecendo-os como operações inversas. Ou seja, a operação de derivar uma integral resulta na própria função que está sendo integrada, conforme indicam os símbolos utilizados atualmente:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x).$$

Rachidi *et al.* (2020, p. 64) destacam que Newton expressou essa concepção utilizando termos cinéticos: “*Movimentos das variáveis* (“fluentes”)² e *velocidades desses deslocamentos* (“fluxões”)³”. De acordo com Zuchi (2005), Newton observou, ao estudar os movimentos dos planetas, que eles se movem de tal forma que, em cada ponto da sua trajetória, a direção da velocidade coincide com a direção da reta tangente naquele ponto e, com isso, constatou que seria possível descrever o movimento planetário localmente por meio de várias tangentes. Foi essa análise que o levou à formulação das *fluxões*.

Embora as pesquisas de Newton tenham sido decisivas para o desenvolvimento do Cálculo, ainda não incorporavam formalmente o conceito de limite. Zuchi (2005, p. 45-46) destaca esse ponto:

Newton, em quase todos os seus trabalhos, relacionado ao cálculo, não reconheceu o papel fundamental do limite. Para a série infinita, Newton raciocinou meramente por analogia. Ele calculou o que chamou de fluxos às curvas e o processo que usou para esses cálculos era muito similar ao de Fermat. Porém Newton, como Fermat, não utilizou o limite. Por outro lado, em seu *Principia Mathematica*, seu maior trabalho em Matemática e Ciência, ele foi o primeiro a reconhecer a necessidade do limite. No começo do livro I do *Principia*, Newton tentou dar uma formulação precisa do conceito de limite.

Desse modo, mesmo que Newton não tenha definido um conceito preciso de limite, empenhou-se em introduzir essa noção em seu trabalho, reconhecendo a importância que ela teria na área do CDI (Batista, 2019). Alguns autores, entre eles Zuchi (2005) e Bardi (2010), afirmam que Newton não tinha interesse em divulgar suas descobertas sobre o cálculo diferencial, sendo Leibniz o primeiro a publicar seus feitos. Esse fato acabou gerando uma disputa pela autoria da descoberta.

Ao contrário de Newton, que atentou-se às questões relacionadas ao movimento mecânico, Leibniz desenvolveu sua abordagem a partir de uma perspectiva metafísica, introduzindo a ideia de quantidades infinitamente pequenas (Zuchi, 2005). Foi Leibniz o primeiro a empregar o termo “Cálculo” e a desenvolver símbolos matemáticos e regras que o transformaram em um poderoso instrumento matemático. O papel de Leibniz revelou-se determinante na introdução das simbologias que são amplamente utilizadas até hoje no ensino de CDI. Como, por exemplo:

² Os fluentes (ou seja, algo que flui, ou varia) representavam as grandezas em constante variação.

³ As fluxões correspondiam à taxa de variação das grandezas fluentes, o que hoje podemos entender como derivadas.

$$dx, dy, \frac{dy}{dx}, \int dx.$$

Essas notações foram fundamentais para sistematizar os procedimentos de diferenciação e integração. Leibniz concebeu dx como sendo um pedaço extremamente pequeno e infinitesimal da variável x , o que lhe permitiu desenvolver regras algébricas para o tratamento de quantidades variáveis e infinitesimais, dando ao Cálculo um forte caráter operacional. Nesse contexto histórico, é possível destacar as diferenças entre os dois grandes nomes associados à criação do Cálculo. Como destacam Rachidi *et al.* (2020, p. 66):

Diferentes estudos mostram que a inspiração em Newton é mais cinemática e geométrica. Para Leibniz, essa inspiração é mais formal e algébrica. Por outro lado, a invenção das notações está mais presente em Leibniz do que em Newton. Finalmente, podemos dizer que os conceitos básicos de Newton são as fluxões e o uso fundamental da noção de limite.

Assim, é inegável que as contribuições desses dois estudiosos foram essenciais para a construção do CDI. Newton, com suas ideias pioneiras, e Leibniz, com a criação da simbologia que emprega-se ainda hoje. Seus métodos estabeleceram as bases para sua evolução subsequente. As ideias de Newton e Leibniz inauguraram um novo modo de pensar a variação e o infinito, porém careciam de uma base lógica sólida. Essa estrutura começaria a ser construída apenas no século XIX, sobretudo com os trabalhos de Cauchy e, depois, Weierstrass, cuja formalização do conceito de limite redefiniria os alicerces do Cálculo.

2.1.2 Limite nas perspectivas de Cauchy e de Weierstrass

No século XIX, Augustin-Louis Cauchy trabalhou as ideias de Newton e Leibniz e, em suas pesquisas, estabeleceu fundamentos teóricos que conferiram uma base sólida ao Cálculo, principalmente pela formulação da definição de limite. De acordo com Rachidi *et al.* (2020, p. 68), o “impacto do trabalho de Cauchy foi decisivo”. Desde os primeiros estudos, o expoente reconheceu a importância da definição de limite e de continuidade, sendo o pioneiro a utilizar definições baseadas em aproximações. A partir dessas noções, desenvolveu uma teoria consistente para funções diferenciáveis e integráveis de uma variável real e, consequentemente, estruturou o CDI de forma sistemática, com base nesses fundamentos. (Rachidi *et al.*, 2020).

A definição de limite descrita por Cauchy é a seguinte: “Quando os valores sucessivamente atribuídos à mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de modo a acabar diferindo tão pouco quanto você quer, o último é chamado o *limite* de todos os outros.” (Cauchy, 1823, p. 1 *apud* Rachidi *et al.*, 2020, p. 69). A partir dessa definição de

limite, muito próxima da que utilizamos atualmente, o matemático estabeleceu definições precisas para continuidade, derivada e integral.

O conceito de limite, para Cauchy, era dinâmico e, em alguns casos, ele admitia que uma variável ou sequência pudesse ter mais do que um limite, o que diverge da concepção atual, uma vez que, quando existe o limite, este é único. Embora a maneira de Cauchy em definir limite não estivesse completamente consolidada em termos rigorosos, ele já operava com desigualdades e épsilons e deltas de forma bem próxima à abordagem moderna (Baroni e Otero-Garcia, 2014). Nesse sentido, como destaca Reis (2001, p. 59):

[...] talvez, a maior contribuição de Cauchy não esteja no rigor da definição de limite. A diferença fundamental em relação a muitos matemáticos anteriores é que estes concebiam o infinitésimo enquanto um número fixo, ao passo que Cauchy define-o claramente como uma variável dependente.

Desse modo, o problema da imprecisão associada aos termos “infinitamente grande” ou “infinitamente pequeno”, recorrentes nas formulações antes de Cauchy, começa a ser discutido com seus trabalhos, embora ele ainda fizesse uso dessas expressões. Garbi (2010) aponta que a definição de Cauchy ainda utilizava formulações imprecisas, como “aproximar-se indefinidamente”, sendo apenas com Weierstrass que a definição de limite foi refinada.

Apesar dos avanços trazidos por Cauchy, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass criticou o caráter intuitivo presente em sua definição de limite, principalmente o uso de ideias relacionadas ao movimento contínuo em sua expressão (Rezende, 2003). Para corrigir essas imprecisões, ele reformulou a definição em termos aritméticos estritos, usando a linguagem épsilon e delta, baseada em valores absolutos e desigualdades (Zuchi, 2005).

Weierstrass foi o responsável por formular a definição de limite, utilizando uma notação precisa com os símbolos ε (épsilon) e δ (delta) tal como é ensinada nos dias atuais. Assim, dizer que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

significa, formalmente, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

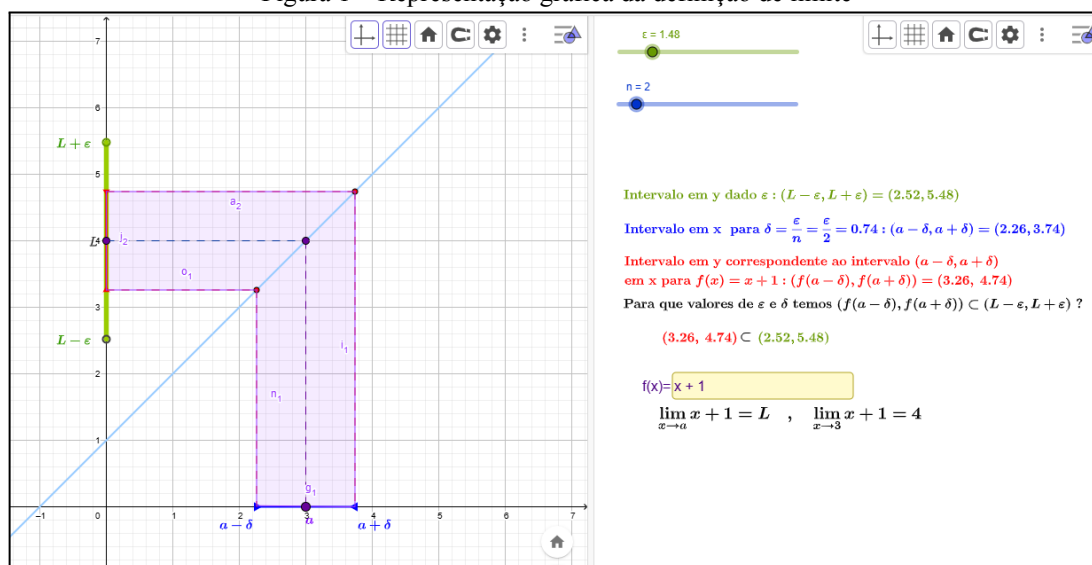
E lê-se assim: “Para todo número real positivo épsilon (ε) (por menor que ele seja), existe um número real positivo delta (δ) tal que, sempre que a distância entre x e a for menor que δ (mas diferente de zero), então a distância entre $f(x)$ e L será menor que ε ”.

Essa definição substitui a ideia de movimento ou aproximação física por uma relação puramente lógica entre desigualdades. Como menciona Rezende (2003, p. 251-252):

Na teoria de limites de Weierstrass o conceito de limite não está associado a qualquer ideia de movimento contínuo, mas, ao contrário, é definido a partir de uma relação lógica entre duas desigualdades. O seu conceito de variável não representa uma passagem progressiva através de todos os valores de um intervalo, mas a suposição disjunta de qualquer um dos valores do intervalo. [...] não faz sentido perguntar na teoria de limites de Weierstrass “se uma variável alcança, ou não, o seu valor limite”, mesmo porque a questão que se coloca agora é “se o limite de uma função é, ou não, **igual** a L .” O conceito de limite de Weierstrass não envolve a ideia de aproximação, mas é tão somente um estado de coisas estáticas.

Assim, a definição desenvolvida por Weierstrass pode ser ilustrada pelo gráfico da Figura 1, no qual expressa a relação entre os valores de ε e δ .

Figura 1 – Representação gráfica da definição de limite



Fonte: A autora (2025), adaptado de Wallace (2016).

Na Figura 1⁴, observa-se que, para todo ε positivo, existe um δ positivo tal que, sempre que x estiver no intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, mas diferente de a , os valores de $f(x)$ permanecem dentro do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Apesar do rigor na formalização do limite de Weierstrass ter superado a definição de Cauchy, os aspectos mais intuitivos e com ideia de movimento continuam sendo amplamente usados no ensino atual. A linguagem dinâmica das expressões “aproximar-se”, “tender a” pode ajudar na criação de um entendimento inicial mais acessível aos discentes. Desse modo, mesmo com a importância do formalismo matemático, ainda é pertinente e necessário usar métodos que misturam intuição e rigor, principalmente no início do estudo do Cálculo.

⁴ Para acessar a criação disponível em versão interativa, com controle dos parâmetros ε e δ , visite o site GeoGebra: <https://www.geogebra.org/m/bxcvhqmm>

Portanto, entender como a ideia de limite se desenvolveu, partindo das primeiras noções até a definição precisa que se tem hoje, é fundamental tanto para valorizar a história do Cálculo quanto para buscar refletir sobre as dificuldades que os estudantes encontram ao estudar esse conteúdo nos dias atuais.

2.2 DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE LIMITE

Diversas pesquisas voltadas para a formação matemática dos estudantes têm mostrado que as dificuldades ao trabalhar com limites vão além do próprio conteúdo. Essas dificuldades geralmente estão relacionadas à maneira como esse conteúdo é apresentado tanto nas salas de aula quanto em livros didáticos, muitas vezes de maneira excessivamente formal ou desconectada das ideias mais intuitivas e visuais. Este subcapítulo discute essas dificuldades, apoiando-se em diferentes autores que analisam tanto os aspectos didáticos quanto os cognitivos envolvidos na compreensão do conceito de limite.

Segundo Cornu (1991) e Sierpinska (1985), citados por D’Avoglio (2002, p. 12):

A grande dificuldade do ensino e aprendizagem do conceito de limite, que se radica não somente em sua riqueza e complexidade, mas também no fato de que os aspectos cognitivos implicados não podem ser gerados simplesmente a partir da definição matemática, que pode ser memorizada. A primeira noção que se tem de limite é uma noção dinâmica de aproximação e a maneira que se utiliza o conceito para resolver problemas está relacionada não somente com a definição, mas com propriedades de um aspecto intuitivo do conceito. Isso explica por que muitos alunos acreditam compreender o conceito de limite sem haver adquirido as implicações do conceito formal.

Complementando essa linha, Cornu (1983) afirma que a aquisição do conceito de limite requer a formação de uma representação mental construída por meio de imagens, desenhos, exemplos e conexões, que não coincidem com os elementos utilizados na apropriação da definição formal do limite. Segundo o autor, mesmo que a definição de limite em épsilon (ϵ) e delta (δ) contenha matematicamente toda a ideia e formalização do conceito, ainda persiste uma lacuna entre compreender o limite enquanto conceito, associado a um entendimento dinâmico, como “tender para” ou “aproximar-se de”, e simplesmente entender sua definição formal, de natureza estática, sem a ideia de movimento. Ou seja, para compreensão de limite, é preciso unir intuição com rigor.

Diante disso, Tall (1996) observou que estudantes com menor desempenho tendem a apresentar uma compreensão mais superficial dos conceitos matemáticos, apoiando-se em interpretações intuitivas de ideias como limite, continuidade, máximo e supremo. No entanto, tais interpretações, embora sirvam de suporte aos enunciados dos teoremas, geralmente não se

articulam ao significado formal das definições, o que compromete a compreensão das demonstrações.

Esse distanciamento entre a linguagem formal e a compreensão significativa também foi observado por outros pesquisadores. Santos (2013), por exemplo, observou em seu trabalho que os alunos possuem dificuldades em interpretar a linguagem simbólica para além da simples identificação de cada elemento que está presente na definição matemática de limite. Em relação à definição formal de limite e a toda simbologia que a acompanha, Zuchi (2005) destaca que, embora a linguagem matemática tenha sido desenvolvida para facilitar o entendimento do conhecimento matemático, o uso excessivo de simbologias sem a devida preocupação com sua compreensão, ou seja, a apresentação de forma inadequada desses símbolos, acaba por gerar obstáculos no processo de aprendizagem dos estudantes.

Além disso, a maneira como o ensino de Cálculo frequentemente negligencia a diversidade de representações possíveis pode configurar-se como mais um desafio para a aprendizagem. Segundo Alvarenga e Sampaio (2016, p. 134), um dos obstáculos didáticos, dado algumas falhas no ensino de CDI, decorre da “não representação de diversas formas como esses objetos aritméticos, algébricos e geométricos podem vir apresentados”. Mongelli (2020), por sua vez, afirma que o fato de os professores darem mais ênfase à parte procedimental no conceito formal de limite, embora essa abordagem seja importante, não é suficiente para a compreensão e, por esse motivo, os estudantes podem apresentar dificuldades. Ainda, segundo a autora, no processo de aprendizagem do conceito, os aspectos visuais, verbais e as manipulações algébricas ligadas à definição do limite são complementares. Por isso, a utilização de diferentes formas de representar, além da simbólica, é indispensável para o aprendizado.

À luz desses autores, fica claro que compreender o conceito de limite vai muito além de simplesmente memorizar fórmulas e definições. É preciso criar um entendimento que una a percepção intuitiva à linguagem matemática, assim como estabelecer a conexão entre as diversas formas de representá-lo, como a simbólico-algébrica, a gráfica, a numérica e a língua natural. Entender como essas diferentes representações aparecem no ensino é necessário, uma vez que a capacidade de realizar a articulação entre elas é aspecto central para a aprendizagem significativa. É nessa perspectiva que se insere a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval, que será discutida no próximo capítulo como referencial teórico deste estudo.

3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA (TRRS)

Raymond Duval (1993, 2009, 2011, 2012), filósofo, psicólogo de formação e professor francês, desenvolveu, no século XX, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), a qual tem sido respaldado de diversas pesquisas, principalmente na Educação Matemática. A teoria analisa o funcionamento cognitivo vinculado à aprendizagem matemática e defende que, para a compreensão de um objeto matemático, faz-se necessário o uso de diferentes representações semióticas e da conversão entre as formas de representá-lo.

Segundo Duval (2012), a utilização de representações é condição necessária, uma vez que os objetos matemáticos não existem fisicamente e, por isso, não são diretamente acessíveis à percepção direta ou à intuição imediata. Por esse motivo, a atribuição de representantes a esses objetos é fundamental para que a realização da atividade matemática seja possível. Um único objeto matemático pode ser representado de várias formas, dependendo da finalidade ou do contexto em que é utilizado. A exemplo disso, o valor numérico meio pode apresentar-se como a fração “ $1/2$ ”, a porcentagem “50%” ou até mesmo como o seno de 30 graus “ $\sin(30^\circ)$ ”. Todas essas expressões, ao final, representam o mesmo número “0,5”, embora cada uma surja em situações distintas, oferecendo abordagens e maneiras próprias de interpretação.

Duval (2012, p. 269), portanto, define as representações semióticas como:

produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes.

Além disso, para o autor, um ponto relevante é diferenciar as representações semióticas das representações mentais. Ele descreve as representações mentais como sendo “o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado” (Duval, 2012, p. 269). Ou seja, enquanto as representações semióticas são externas, visíveis e manipuláveis, as representações mentais são internas, subjetivas e formadas no pensamento.

Nesse contexto, segundo Duval (2012), surge o paradoxo cognitivo do pensamento matemático, pois, por um lado, a matemática exige que o aluno desenvolva uma compreensão conceitual dos objetos abstratos, mas, por outro, eles só podem interagir com os objetos por meio das representações semióticas. E esse paradoxo se torna ainda mais forte quando se assume que a atividade matemática é apenas conceitual, tratando as representações semióticas como algo secundário ou meramente ilustrativo. Isso passa despercebido no ensino, pois

costuma-se dar mais ênfase às representações mentais do que às representações semióticas (Duval, 2012).

Essa distinção é importante para o ensino e a aprendizagem matemática, posto que a atividade matemática não ocorre apenas no plano mental, mas depende fortemente das manipulações das representações. Isso significa que, para compreender um conceito matemático de fato, não basta apenas "pensá-lo" de forma abstrata (noesis⁵), é necessário expressá-lo e manipulá-lo por meio de representações semióticas (semiose⁶). Como destaca o autor, “a noesis é inseparável da semiose” (Duval, 2012, p. 270), ou seja, a compreensão conceitual de um objeto matemático depende diretamente de sua representação semiótica e, mais ainda, da capacidade cognitiva de transitar entre diferentes representações.

Para nomear os diferentes tipos de representação, Duval (2011) utiliza o termo “registros” de representação, que correspondem ao sistema de signos. O autor classifica os registros em quatro categorias de acordo com suas representações, como apresentados no quadro abaixo:

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: - Argumentação a partir de observações, de crenças...; - Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou perspectivas (configurações em dimensão 0,1 ,2 ou 3). - Apreensão operatória e não somente perceptiva; - Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: - Númericas (binária, decimal. Fracionária...) - Algébricas; - Simbólicas (línguas formais. Cálculo	Gráficos cartesianos. - Mudanças de sistema de coordenadas; - Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2011, p. 14).

Desse modo, conforme mostrado no Quadro 1, os registros discursivos fazem uso da língua natural, tanto na forma oral quanto escrita, assim como outras simbologias matemáticas, como a notação algébrica. Por outro lado, os registros não discursivos são representados por elementos visuais, como gráficos e figuras geométricas. Quanto à funcionalidade dos registros, aqueles classificados como multifuncionais envolvem

⁵ Noesis (νόησις): segundo Duval (2012, p. 270) a noesis é “a apreensão conceitual de um objeto”, ou seja, trata-se de um processo de conhecimento que se dá exclusivamente no intelecto.

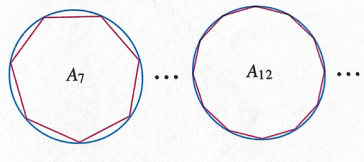
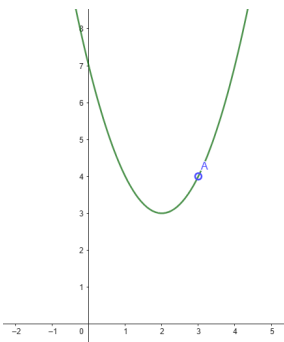
⁶ Semiose (σημειων): termo para indicar o processo de significação e a produção de significados, entendido como “a apreensão ou a produção de uma representação semiótica” (Duval, 2012, p. 270).

tratamentos que não podem ser expressos por meio de algoritmos, enquanto os registros monofuncionais permitem transformações algoritmizáveis, como ocorre na escrita algébrica.

Assim, um determinado objeto do saber matemático pode ser representado em diferentes registros e esse “recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações” (Duval, 2012, p. 270). O autor defende, portanto, o uso de múltiplos registros de representação para compreender e trabalhar o saber matemático. Isso significa que, ao explorar diferentes registros em um mesmo conteúdo, como língua natural, algébrico, gráfico ou figural, é possível promover aos estudantes um entendimento mais amplo do objeto de estudo.

Dentre os diversos temas matemáticos analisados com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, destaca-se, neste estudo, o de limite. Com base na categorização de Duval apresentada no Quadro 1, o Quadro 2 sistematiza os tipos de registros semióticos possíveis de mobilização para a compreensão do objeto matemático: limite de função.

Quadro 2 – Classificação dos tipos de registros no conteúdo de limite

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA										
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:	Quando x se aproxima de um valor a , o valor da função $f(x)$ se aproxima de um número L , independentemente de como x se aproxima de a . Se isso ocorrer, dizemos que o limite da função $f(x)$, quando x tende a a , é L .											
REGISTROS MONOFUNCIONAIS	$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 4x + 7) = 4$<table><tr><td>$x$</td><td>$f(x)$</td></tr><tr><td>2,99</td><td>3,9801</td></tr><tr><td>2,999</td><td>3,998001</td></tr><tr><td>3,001</td><td>4,002001</td></tr><tr><td>3,01</td><td>4,0201</td></tr></table>	x	$f(x)$	2,99	3,9801	2,999	3,998001	3,001	4,002001	3,01	4,0201	
x	$f(x)$											
2,99	3,9801											
2,999	3,998001											
3,001	4,002001											
3,01	4,0201											

Fonte: A autora (2025).

Nesta teoria, um sistema semiótico, para ser considerado um registro de representação, deve satisfazer as três seguintes atividades cognitivas fundamentais: a *formação*, o *tratamento* e a *conversão* (Duval, 2009).

A *formação* de uma representação identificável consiste na atividade que possibilita a expressão de um determinado conhecimento por meio de um sistema semiótico, seja ele um enunciado em língua natural, uma fórmula matemática, uma figura. Além disso,

Esta formação deve respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entaves de construção para as figuras...). A função destas regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos. São regras de conformidade, não são regras de produção efetiva por um sujeito. Isto quer dizer que o conhecimento de regras de conformidade não está relacionado a competência para formar representações, mas somente para reconhecê-las. (Duval, 2012, p. 271-272).

A exemplo desse tipo de atividade cognitiva, podemos citar a situação em que o estudante consegue representar a ideia de que, para uma determinada função $f(x)$, quando o x se aproxima de 2, o limite é igual a 4. Seja por meio do registro simbólico-algébrico, do gráfico ou da língua natural. No quadro 3, temos um caso da formação de uma representação no registro simbólico algébrico.

Quadro 3 – Exemplo de formação no conteúdo de limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Fonte: A autora (2025).

O *tratamento* de uma representação é uma transformação interna, ou seja, acontece dentro de um mesmo registro. O cálculo é o tipo de tratamento mais recorrente, seja ele numérico ou algébrico. Nesses casos, podemos realizar operações e manipulações sem que seu registro de representação seja alterado.

Quadro 4 – Exemplo de tratamento no conteúdo de limite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x + 2$$

Fonte: A autora (2025).

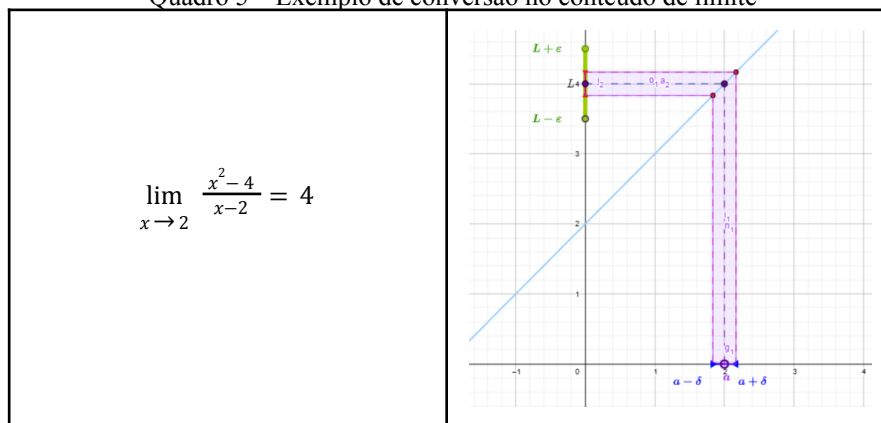
No quadro acima, é possível observar uma transformação de tratamento, uma vez que o registro simbólico-algébrico é mantido, ou seja, as manipulações ocorrem dentro do mesmo sistema. Já quando há uma mudança de um registro para outro, tem-se a *conversão*.

A conversão de uma representação é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conservação é uma transformação externa ao

registro de início (o registro da representação a converter) (Duval, 1993, p. 42, tradução da autora)⁷.

Uma representação do registro da língua natural pode ser convertida em uma representação figural, o que é denominado de *ilustração*. A *tradução* ocorre quando uma representação linguística, expressa em uma determinada língua, é convertida para uma outra representação linguística em uma língua diferente. Já a *descrição* refere-se à conversão de uma representação não verbal, como figura, gráfico, esquema, em uma forma linguística (Duval, 2012).

Quadro 5 – Exemplo de conversão no conteúdo de limite



Fonte: A autora (2025).

Neste caso, observa-se que o limite em seu registro simbólico-algébrico pode ser convertido para o registro gráfico e vice-versa. Conforme Duval (2012), a conversão difere cognitivamente do tratamento, sendo a mais relevante para o desenvolvimento das aprendizagens intelectuais. O autor completa: “A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão” (p. 282).

Desse modo, a compreensão de limite e de outros objetos matemáticos exige a capacidade cognitiva de *reconhecer*, *tratar* e *transitar* em seus diferentes registros, garantindo que o saber não seja restringido apenas a formas isoladas de representação ou ainda, evitar que o objeto matemático seja confundido com suas representações. Portanto, a ausência de recursos didáticos que promovam intencionalmente a articulação entre diferentes formas de representações pode ser considerada um obstáculo didático relevante na aprendizagem do conteúdo de limite.

⁷ La conversion d’une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d’une autre registre en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. La conversion est une transformation externe au registre de départ (le registre de la représentation à convertir).

4 O LIVRO DIDÁTICO NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DE LIMITE

Ao longo da história, o livro didático tem se consolidado como um dos materiais de ensino mais utilizados em diferentes etapas da educação. Este recurso está sempre presente nas salas de aula e assume funções importantes como fonte de conhecimento para os discentes e de organização do conteúdo para os professores. Como afirma Silva (1996, p. 8) em seu trabalho, “não é à toa que a imagem estilizada do professor apresenta-o com um livro nas mãos, dando a entender que o ensino, o livro e o conhecimento são elementos inseparáveis, indicotomizáveis”.

Nesse contexto, Amaral *et al.* (2022, p. 30) reconhecem o livro didático como:

material, impresso ou digital, concebido e editado com o objetivo de contribuir para os processos educacionais de ensino e de aprendizagem, composto por saberes de certo componente curricular ou área de conhecimento, propostos a partir das prescrições curriculares oficiais em vigência no momento de sua elaboração. Tais saberes são dispostos nos LD a partir de ideias e conceitos, bem como por meio de atividades, as quais se espera que possibilitem aos alunos aplicações dos tópicos discutidos previamente (ou não) e também envolvimento em vivências de investigações que vão além do sugerido no material.

Dessa forma, o livro didático, como recurso pedagógico construído com base em prescrições curriculares, ainda é considerado a principal ferramenta para o ensino, visando a aprendizagem por parte dos discentes. Como ressaltam Santos e Martins (2011, p. 30):

o livro didático é compreendido ainda por muitos autores como único e melhor instrumento didático presente em sala de aula, além de ser um grande disseminador de conhecimentos e informações capazes de uniformizar diferentes culturas e por esta razão requer uma atenção especial de todos quanto a sua construção, avaliação e utilização.

A partir dessa perspectiva, Bittar (2017) complementa a discussão ao considerar que o livro didático, como objeto de estudo, revela ao pesquisador um universo multifacetado, permitindo investigar desde a cultura escolar de uma época até identificar possíveis causas de dificuldades de aprendizagem. Nesse sentido, Schubring (2003) destaca a necessidade de conduzir pesquisas voltadas para a avaliação desses materiais didáticos, especificamente dos livros de matemática, a fim de compreender quais concepções de ensino e de ciência estão sendo transmitidas por meio deles. Desse modo,

se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o livro didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas. Não é a única, porém, como o LD é o principal material utilizado pelo professor no preparo de suas aulas, seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor (Bittar, 2017, p. 365-366).

Considerando a importância de se analisar livros didáticos, sobretudo no contexto do ensino de limite, Mateus (2006) defende que alguns dos elementos que influenciam a forma como o Cálculo Diferencial e Integral é ensinado e aprendido estão intrinsecamente ligados à maneira como os livros didáticos de Cálculo são estruturados em termos de didática. A organização dos conteúdos, os exemplos escolhidos, a presença (ou ausência) de múltiplos registros de representação e a forma como os conceitos são articulados ao longo dos capítulos impactam diretamente na construção do conhecimento pelos estudantes. Para Silva (2012), analisar a relevância desses materiais no ensino superior é necessário, uma vez que em disciplinas como CDI, esses materiais constituem um dos principais e, por vezes, os únicos recursos de aprendizado tanto para alunos quanto para professores.

Com a TRRS, é possível compreender que a aprendizagem de conteúdos matemáticos, neste caso, limite, exige a coordenação entre os diferentes tipos de representações. Essa coordenação é relevante, porque, como destaca Mateus (2006, p. 42), “o tratamento do Cálculo Diferencial e Integral exige uma combinação adequada entre o visual-geométrico e o algébrico.” Nessa perspectiva, os livros didáticos de ensino superior não são meros transmissores de informação, eles constroem entendimentos por meio dos elementos, como as representações que utilizam e a forma como essas representações se articulam. Optar por certos tipos de representações em detrimento de outras, ou a falta de tarefas que incentivem a conversão entre representações, pode ter um efeito considerável no aprendizado. Lajolo (1996, p. 5) argumenta em seu trabalho:

A expectativa do livro didático é que, a partir dos textos informativos, das ilustrações, diagramas e tabelas, seja possível a resolução dos exercícios e atividades cuja realização deve favorecer a *aprendizagem*. [...] Como um livro não se constitui apenas de linguagem verbal, é preciso que todas as linguagens de que ele se vale sejam igualmente eficientes. [...] que suas ilustrações, diagramas e tabelas devem refinar, matizar e requintar o significado dos conteúdos e atitudes que essas linguagens ilustram, diagramam e tabelam.

Assim, a qualidade e a intencionalidade dessas representações visuais contribuem não apenas para a estética do livro, mas principalmente para a eficácia pedagógica do material, tornando-se elementos indispensáveis para a compreensão de conceitos matemáticos. Nesse cenário, precisamos enxergar os livros de CDI I como ferramentas ativas no processo de ensino-aprendizagem. A maneira como os conteúdos são apresentados, desenvolvidos e exemplificados pode facilitar ou dificultar a assimilação dos saberes matemáticos pelos alunos.

Assim, analisar de maneira crítica o livro didático como objeto de pesquisa é fundamental para compreender as concepções de conhecimento, ensino e aprendizagem que

ele mobiliza, especialmente com base em teorias como a TRRS, que nos ajuda a entender como o livro funciona como um mediador e quais os desafios que os alunos enfrentam para entender conceitos mais abstratos, como o de limite. Portanto, buscamos com esta pesquisa evidenciar as representações semióticas na abordagem de limite presentes nos livros didáticos e como as mobilizações entre essas representações influenciam no ensino e aprendizagem, a fim de reconhecer quais materiais podem contribuir para um aprendizado mais significativo e quais sugestões podem ser feitas em próximas edições.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste segmento, apresentamos os procedimentos metodológicos utilizados na realização desta pesquisa. Assim, dividido em seções, este capítulo organiza-se da seguinte forma: caracterização da pesquisa, seleção dos livros, categorias da TRRS e critérios de análise.

5.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Para atingir os objetivos desta pesquisa, foi necessário adotar procedimentos condizentes. Nesse sentido, com relação à natureza, esta pesquisa caracteriza-se como básica, dado que a finalidade é ampliar o conhecimento no campo científico sobre um determinado assunto. Além disso, trata-se, quanto à abordagem, de uma pesquisa qualitativa, uma vez que “não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc.” (Gerhardt e Silveira, 2009, p. 33).

Dessa forma, esta pesquisa classifica-se como descritiva, por ter como objetivo observar e descrever as características de determinada população ou fatos/fenômenos específicos (Gil, 2002), objetivando a “compreensão ampla do fenômeno que está sendo estudado, considera que todos os dados da realidade são importantes e devem ser examinados.” (Godoy, 1995, p. 62). Do ponto de vista dos procedimentos técnicos, refere-se a uma pesquisa bibliográfica, por buscar analisar e discutir um tema ou problema com base em diversas fontes publicadas, como livros, artigos, periódicos e outros materiais (Martins e Theóphilo, 2016).

Assim, procura-se compreender o objeto deste estudo, os livros didáticos, a partir de todas as etapas metodológicas adotadas, a fim de responder ao problema de pesquisa em questão.

5.2 SELEÇÃO DOS LIVROS

Para a análise, foram selecionados três livros didáticos utilizados na disciplina de Cálculo I, identificados ao longo deste trabalho como LD1, LD2 e LD3:

- LD1: GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- LD2: STEWART, James. *Cálculo*. v. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- LD3: LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*, v. 1. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

A escolha desses livros didáticos baseou-se nas bibliografias básicas recomendadas na ementa da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), do Centro Acadêmico do Agreste (CAA). Além disso, no Campus Recife, o curso de Licenciatura em Matemática também adota o LD1 e o LD2 em suas referências básicas.

Cabe destacar que O LD2 citado na bibliografia básica do CAA é a 5ª edição da obra de Stewart, porém neste trabalho optou-se por utilizar a 7ª edição, que é a mesma adotada no Campus Recife e também está disponível nas bibliotecas de ambos os campi. Essa escolha se justifica pela atualidade e ampla circulação dessa edição entre os estudantes, considerando que a ementa do CAA encontra-se desatualizada.

Dessa forma, assegura-se que a análise realizada neste trabalho baseia-se em obras efetivamente utilizadas no cenário acadêmico dos dois campi da UFPE, o que contribui para a relevância da investigação e aplicabilidade dos resultados.

5.3 CATEGORIAS DA TRRS E CRITÉRIOS DE ANÁLISE

Conforme já mencionado, adotou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval como referencial teórico deste estudo. Dessa forma, a análise dos livros foi orientada pela identificação dos diferentes tipos de registros de representação e a verificação de como ocorrem as transformações (tratamento e conversão) entre esses registros nos seguintes aspectos: exposição teórica e exemplificação. As categorias, variáveis e critérios de análise são apresentados a seguir.

Quadro 6 – Categorias, variáveis e critérios de análise

Categorias	Variáveis	Critérios (questionamentos)
Representações na abordagem da noção intuitiva e da definição de limite.	• Registro simbólico-algébrico • Registro gráfico • Registro língua natural • Registro numérico-tabular	Quais os tipos de representações os livros apresentam? Como são abordadas? Qual(is) a(s) representação(ões) são mais enfatizadas?
Transformações entre os diferentes tipos de representações na abordagem da noção intuitiva e da definição de limite.	• Tratamento • Conversão	A transformação de tratamento é enfatizada no LD? Qual(is) representação(ões) apresentam maior índice de tratamentos? A conversão é apresentada no LD? Quais representações são realizadas nesse tipo de transformação?

Fonte: A autora (2025), adaptado de Silva (2020).

Para classificar os registros de representação e facilitar as análises subsequentes, criaram-se abreviaturas para os registros apresentados no Quadro 7.

Quadro 7 – Abreviaturas, registros e descrições dos registros

Abreviatura	Registro	Descrição
RSA	Simbólico-Algébrico	Fórmulas ou expressões simbólicas/algébricas para representar relações matemática
RLN	Língua Natural	Escritas em linguagem verbal comum, utilizadas para descrever, explicar ou interpretar
RGr	Gráfico	Gráficos, diagramas ou curvas em um sistema de coordenadas
RNT	Numérico-Tabular	Valores numéricos organizados em tabelas, listas ou no decorrer do texto

Fonte: A autora (2025).

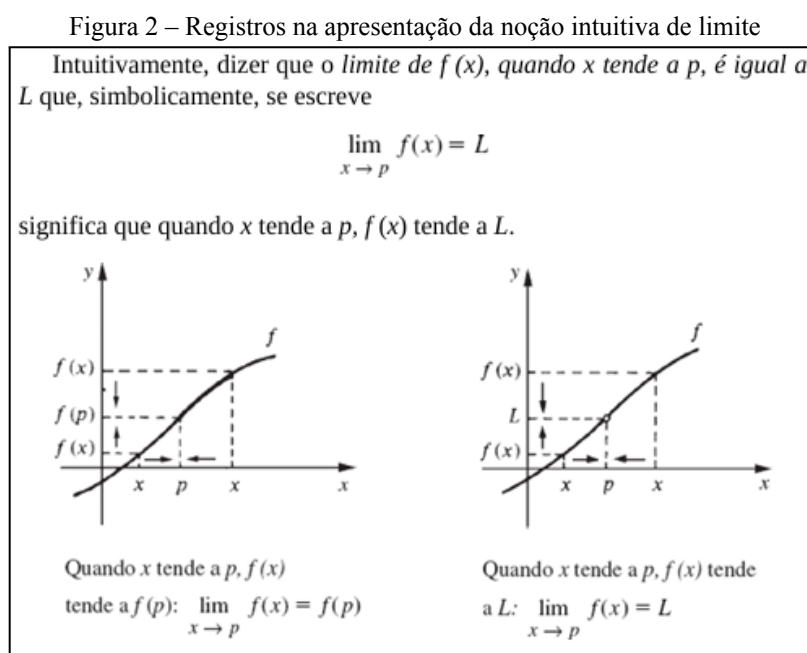
6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, apresentamos as análises dos três livros didáticos selecionados de Cálculo I, com relação à abordagem da noção intuitiva e da definição formal de limite, considerando tanto a parte teórica quanto os exemplos resolvidos. As análises foram conduzidas com base nos critérios da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval apresentados anteriormente. Para organizar e facilitar, este capítulo foi subdividido em dois aspectos principais: análise e mapeamento dos registros mobilizados, e análise e mapeamento das transformações entre os registros.

6.1 ANÁLISE E MAPEAMENTO DOS REGISTROS MOBILIZADOS

A análise inicia com a obra *Um curso de Cálculo, Volume 1*, de Guidorizzi (2001) — LD1. A abordagem de limite é apresentada no segundo capítulo, nomeado “Limite e Continuidade”. Inicialmente, o autor descreve a noção de continuidade como gráfico sem “saltos”, exemplificando com o registro gráfico de uma função contínua e outra descontínua. Em seguida, o limite é definido, intuitivamente, como o valor que a função “tende a assumir” próximo de certo ponto, mesmo que não esteja definida nele.

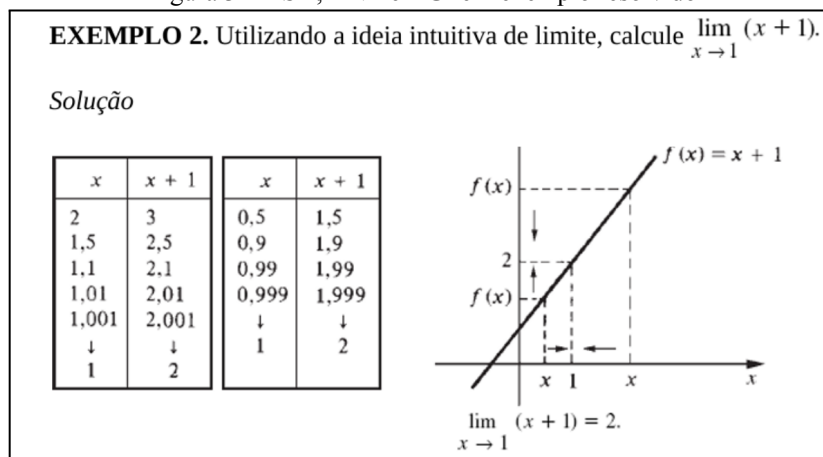
Nesse primeiro momento, para apresentar a noção intuitiva de limite, o autor mobiliza o registro de língua natural (RLN), o registro gráfico (RGr) e o registro simbólico-algébrico (RSA). Ver Figura 2.



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 55).

Depois dessa introdução, um de seus exemplos resolvidos para calcular intuitivamente o limite de $f(x) = x + 1$ quando $x \rightarrow 1$, emprega o registro numérico-tabular (RNT), relacionando os valores de x e $f(x)$ à medida que x se aproxima de 1 pela esquerda e pela direita por meio de uma tabela, juntamente com o RGr e o RSA (Figura 3). Entretanto, vale ressaltar que o RNT organizado em tabela aparece apenas nessa ocasião em todo o capítulo.

Figura 3 – RSA, RNT e RGr em exemplo resolvido



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 54-55).

Em seis páginas, Guidorizzi (2001) aborda a noção intuitiva de limite, relacionando-a à ideia de continuidade, por meio de uma breve introdução, conforme a Figura 2, seguida de exemplos resolvidos. O autor, ainda nessas páginas, já antecipa a relação entre limite e derivada, ao mencionar que este último conteúdo será posteriormente definido a partir das propriedades de limite. Fazer essa ligação entre conceitos pode ser uma estratégia interessante para o aluno perceber influências de um conceito em outro, todavia, fazer isso em um espaço relativamente pequeno e introdutório pode dificultar a construção da noção de limite.

Dentre os seis exemplos apresentados, ao excluir os quatro que abordam entre os tópicos de continuidade e de derivada, restam apenas dois diretamente relacionados ao cálculo de limite. Um desses exemplos, exibido na Figura 3, faz uso do RSA, do RNT e do RGr, enquanto o outro utiliza o RSA com o RGr, conforme a Figura 4. O autor traz uma quantidade reduzida de exemplos nesse momento introdutório, mas tanto a ideia intuitiva de limite quanto os exemplos fazem o uso de diferentes tipos de registros de representação, sendo o RSA e o RGr os mais mobilizados nesse processo.

Figura 4 – RSA e RGr em exemplo resolvido

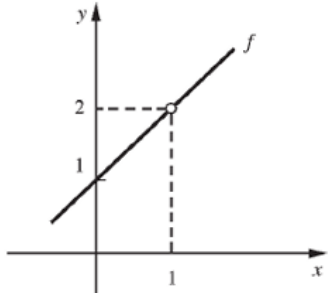
EXEMPLO 3. Utilizando a ideia intuitiva de limite, calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Solução

Seja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $x \neq 1$; f não está definida em $x = 1$.

Para $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2.$$


Fonte: Guidorizzi (2001, p. 56).

Depois de estabelecer a ideia de limite, o LD1 dedica uma seção à definição de função contínua, definindo em termos de épsilons e deltas, preparando a estrutura para, na seção seguinte, abordar a definição formal de limite. Essa ordem parece intencional, uma vez que o autor busca relacionar, desde o início, o estudo de limite com o de continuidade. Na seção que trata da definição formal, com exceção da introdução, que apresenta alguns RGr, predominam os RSA e RLN, sendo o RSA o mais explorado nos exemplos resolvidos. Veja as Figuras 5 e 6.

Figura 5 – RSA em exemplo resolvido

EXEMPLO 10. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$.

Solução

$$x - 2 = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}).$$

Assim

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}} \text{ para } x \neq 2.$$

Segue

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}.$$

Fonte: Guidorizzi (2001, p. 77).

Dos 18 exemplos inseridos nesta seção, 12 são relacionados ao cálculo de limite, como na Figura 5, ou à aplicação da definição formal, conforme Figura 6. Dentre esses, em

todos predominam o uso do RSA. O RLN é utilizado para explicações intermediárias, como apresenta a Figura 5. O RGr e o RNT, por sua vez, são deixados de lado, o que evidencia uma redução na diversidade representacional comparada à abordagem da noção intuitiva de limite.

Figura 6 – RSA em exemplo resolvido 2

EXEMPLO 16. Prove que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = 0.$$

Solução

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \epsilon \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - 0| < \epsilon \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = 0. \end{aligned}$$

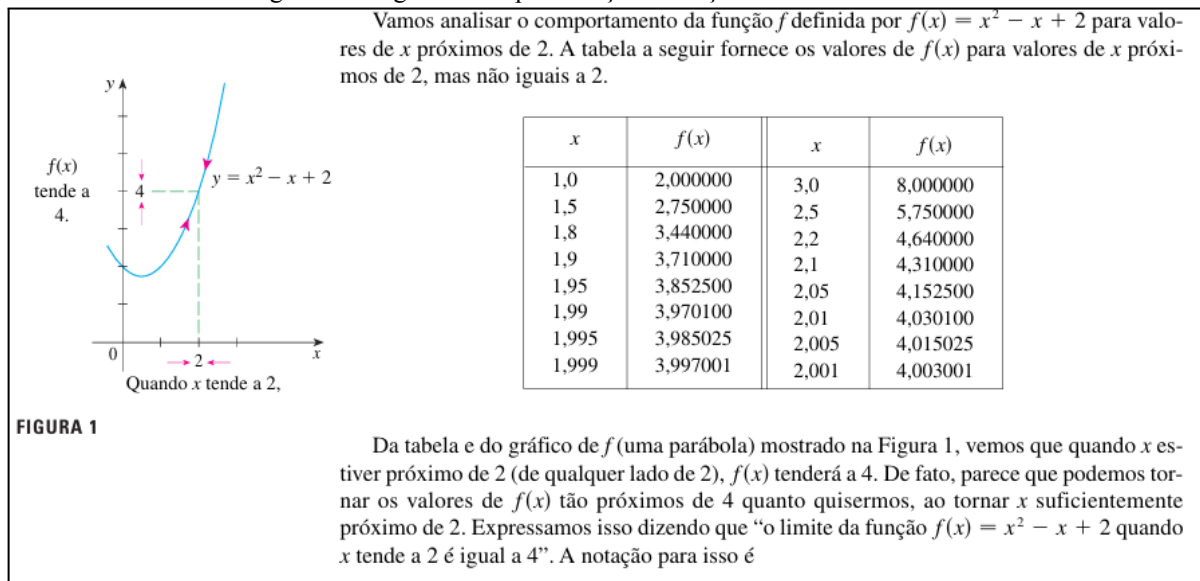
Fonte: Guidorizzi (2001, p.77).

Em síntese, a maneira como o LD1 conduz a abordagem de limite revela que, embora comece com explicações que abrangem diferentes registros, no decorrer do capítulo, conforme o conteúdo se desenvolve, o livro começa a favorecer mais o RSA. Assim, o livro exhibe uma transição de uma abordagem mais intuitiva e visual para uma condução essencialmente simbólica e técnica, focada no RSA.

O livro de Stewart (2013) intitulado *Cálculo, Volume 1 — LD2 —*, por outro lado, demonstra um maior equilíbrio e uma abrangência quanto ao uso dos registros. Em seu prefácio, o autor já afirma que a filosofia do livro é baseada na “Regra dos quatro”, que consiste em apresentar os tópicos em suas formas geométricas, numéricas, algébricas e descritiva/verbal. Diferentemente do LD1, analisado anteriormente, este organiza o conteúdo de forma mais objetiva, o foco inicial é dado ao estudo exclusivo de limite.

No segundo capítulo do LD2, intitulado “Limites e Derivadas”, o autor inicia contextualizando os problemas da tangente e da velocidade. Nesse contexto, ele faz a associação de como o termo “limite” surge na tentativa de encontrar a tangente de uma curva ou a velocidade instantânea de um objeto. Na seção seguinte, o LD2 foca no estudo de limite e nos métodos para seu cálculo. A Figura 7 ilustra os registros mobilizados nessa introdução.

Figura 7 – Registros na apresentação da noção intuitiva de limite 2



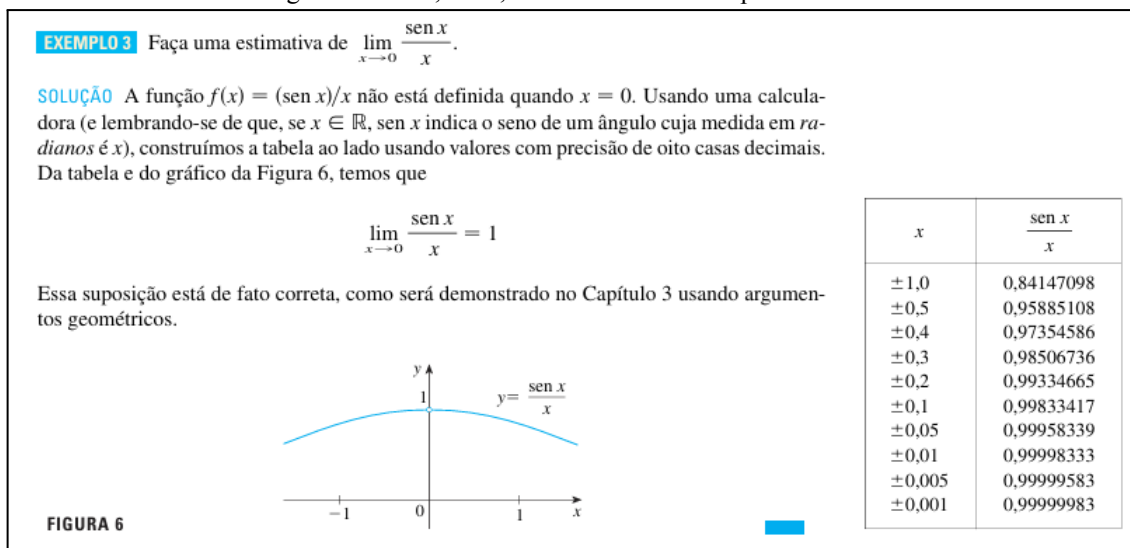
Fonte: Stewart (2013, p. 80).

Por meio de diferentes registros de representação como o RLN, o RSA, o RNT e o RGr, o autor desenvolve um raciocínio de forma indutiva, que parte de um caso específico para um caso geral. Para chegar à notação de limite usando RLN, Stewart (2013) descreve que $f(x)$ se aproxima de 4 quando x se aproxima de 2 e, em seguida, utiliza o RSA ao expressar:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4.$$

A partir desse caso, ele define a noção de limite, mobilizando o RSA e utilizando-se também do RLN para descrevê-lo. A sequência didática avança com seis exemplos voltados para a construção intuitiva de limite, em que todos mobilizam diferentes registros. Como apresentado a seguir:

Figura 8 – RLN, RSA, RNT e RGr em exemplo resolvido



Fonte: Stewart (2013, p. 83).

Na seção destinada à definição formal de limite, o autor começa destacando que a ideia de aproximação é imprecisa e inadequada para alguns propósitos. Assim, semelhante à sua maneira de abordar a noção intuitiva, Stewart (2013) parte de um caso particular, desta vez utilizando o RSA, o RLN e RGr, para então formular o caso geral e chegar à definição formal de limite.

Figura 9 – RLN e RSA na definição precisa de limite

2 Definição Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o **limite de $f(x)$ quando x tende a a é L** , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

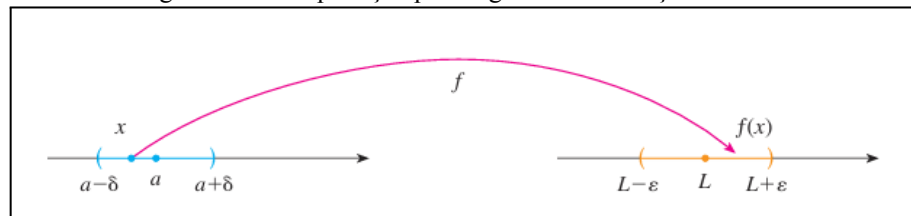
se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - a| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Fonte: Stewart (2013, p. 101).

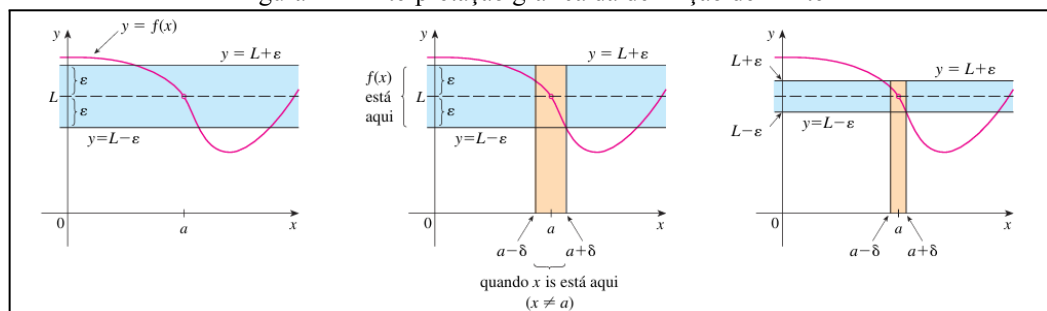
Após definir limite em termos de ε e δ , utilizando RSA e RLN para expressar essa definição em palavras, o autor oferece dois recursos visuais, observáveis nas Figuras 10 e 11, os quais abrangem o RGr.

Figura 10 – Interpretação por diagrama da definição de limite



Fonte: Stewart (2013, p. 102).

Figura 11 – Interpretação gráfica da definição de limite



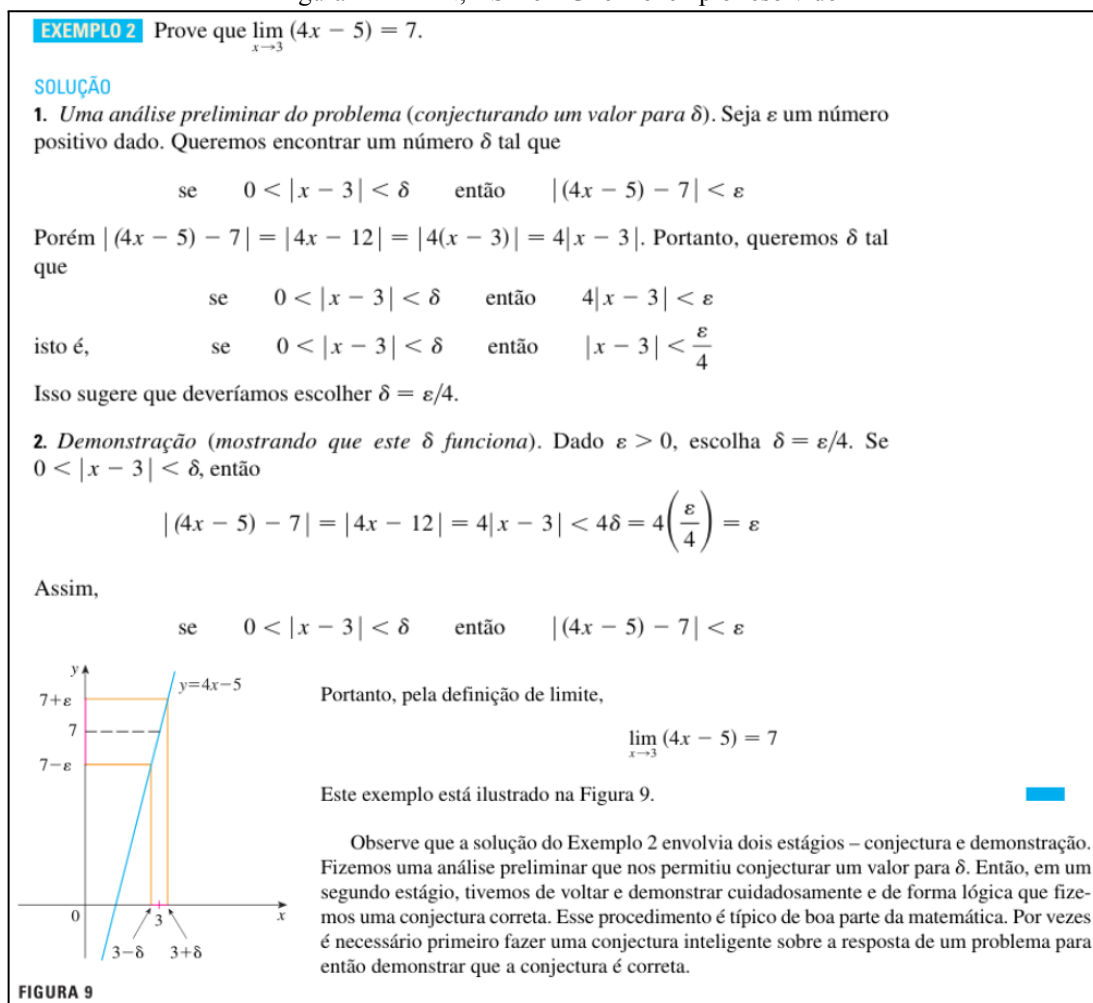
Fonte: Stewart (2013, p. 102).

Essa disposição de diferentes registros pode facilitar a interpretação do formalismo presente na definição algébrica de limite, corroborando com os resultados encontrados por Vaz (2010), onde concluiu que “o uso de várias representações semióticas em interação constante proporcionou: 1. condições de diferentes interpretações, 2. possibilidade de melhor

compreensão conceitual” (p. 153). Desse modo, a abordagem de Stewart (2013) demonstra uma preocupação didática ao fazer a mobilização de diferentes registros.

Analizando os exemplos resolvidos utilizando a definição de limite da Figura 9, todos fazem o uso do RSA para manipulação das desigualdades, do RLN para complementar e do RGr, ao final, para ilustrar o resultado, conforme ilustra a Figura 12.

Figura 12 – RLN, RSA e RGr em exemplo resolvido



Fonte: Stewart (2013, p. 103-104).

Desse modo, observa-se que o livro de Stewart (2013) procura evidenciar os vários registros de representação do objeto limite tanto na noção intuitiva quanto na definição de maneira equilibrada, sem priorizar apenas um em detrimento dos demais. Essa abordagem pode contribuir para uma compreensão mais completa das diferentes formas de tratar o conteúdo. Além disso, ao usar os mesmos registros nas duas abordagens (intuitiva e formal), há uma maior possibilidade de o aluno conseguir realizar associações entre elas.

De maneira análoga, a obra *O Cálculo com Geometria Analítica* de Leithold (1994) — LD3 — também apresenta os quatro registros: RSA, RLN, RGr e RNT. Porém, com maior

ênfase no RSA, seguido do RLN. A esse respeito, Duval (2012, p. 179) afirma que “as relações entre objetos podem ser representadas de maneira mais rápida e mais simples para compreender por fórmulas literais do que por frases”. Em relação à estrutura do livro, o LD3 difere dos dois primeiros livros analisados que separam a noção intuitiva de limite de sua definição em seções distintas. Desde o início do estudo de limite, Leithold (1994) já combina o conceito intuitivo à definição formal, usando o mesmo exemplo de função e realizando o uso de diferentes registros. Para iniciar a abordagem intuitiva, o autor faz uso do RNT ao atribuir valores a x e observar os valores de $f(x)$. Em seguida, por meio do RLN, ele faz as interpretações dos dados numéricos das tabelas e, depois, estabelece uma ligação com ideias que já apontam para a definição formal. Veja a Figura 13.

Figura 13 – RNT e RLN na abordagem de limite

Tabela 2		$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
x		
2	7	1, $f(x)$ será 0,002 inferior a 5. Mais ainda, quando $x = 0,9999$, $f(x) = 0,49998$, isto é, quando x for 0,0001 inferior a 1, $f(x)$ será 0,0002 inferior a 5. A Tabela 2 mostra que quando $x = 1,1$, $f(x) = 5,2$, isto é, quando x for 0,1 superior a 1, $f(x)$ será 0,2 superior a 5. Quando $x = 1,001$, $f(x) = 5,002$, isto é, quando x for 0,001 superior a 1, $f(x)$ será 0,002 superior a 5. Quando $x = 1,0001$, $f(x) = 5,0002$, isto é, quando x for 0,0001 superior a 1, $f(x)$ será 0,0002 superior a 5. Logo, vemos que quando x difere de 1 de $\pm 0,001$ (isto é, $x = 0,999$ ou $x = 1,001$), $f(x)$ difere de 5 de $\pm 0,002$, isto é, $f(x) = 4,998$ ou $f(x) = 5,002$. E quando x difere de 1 de $\pm 0,0001$, $f(x)$ difere de 5 de $\pm 0,0002$. Agora, analisando a situação de outra maneira, consideraremos os valores de $f(x)$ primeiro. Vemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1. Outra maneira de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $f(x) - 5$ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando $x - 1$ suficientemente pequeno. Mas tenha em mente que $f(x)$ nunca assume o valor 5.
1,75	6,5	
1,5	6,0	
1,25	5,5	
1,1	5,2	
1,01	5,02	
1,001	5,002	
1,0001	5,0002	
1,00001	5,00002	

Fonte: Leithold (1994, p. 57).

Com base nessas interpretações iniciais, conduz-se, então, ao resultado em termos da definição formal, expressa por meio do RSA apresentado na Figura 14.

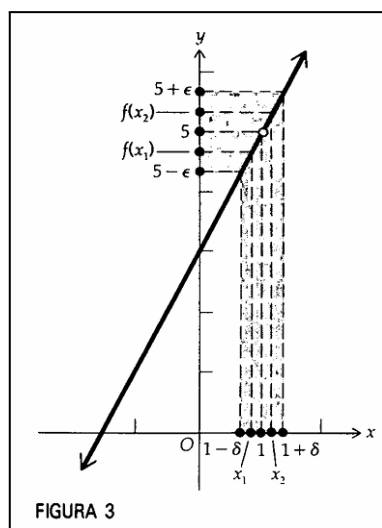
Figura 14 – RSA na abordagem de limite

$$\text{se } 0 < |x - 1| < \delta \text{ então } |f(x) - 5| < \epsilon$$

Fonte: Leithold (1994, p. 57).

O RGr, ilustrado na Figura 15, é mobilizado em sequência para representar graficamente a solução utilizando a linguagem de épsilon e delta. A partir desse exemplo, Leithold (1994) define o limite de uma função em geral.

Figura 15 – RGr na abordagem de limite



Fonte: Leithold (1994, p. 58).

O autor estabelece uma relação entre a noção intuitiva de limite e sua definição formal, indicando desde o início essa associação por meio da mobilização de diferentes tipos de registros, o que pode ser considerado positivo, uma vez que a coordenação de muitos registros favorece a apreensão conceitual dos objetos (Duval, 2012), promovendo a construção de conexões entre as formas de tratar o conteúdo.

Por outro lado, essa antecipação imediata pode gerar uma carga conceitual para os discentes em fase inicial de compreensão. Nessa linha, Reis (2001) constatou, em seu trabalho, que o processo de rigor conceitual não deve ser iniciado antes da etapa de intuicionalização no ensino de limite. Assim, o livro introduz formalismos antes mesmo de amadurecer a intuição do aluno quanto à noção, o que pode resultar em obstáculos na aprendizagem.

Quanto aos exemplos resolvidos, nota-se um esforço em combinar em sua resolução procedimentos algébricos com visualização gráfica, sendo ainda o RSA e o RLN os mais utilizados, enquanto o RGr aparece de forma complementar em alguns casos. Dos quatro exemplos analisados, todos fazem o uso do RSA e do RLN, e desses, dois utilizam o RGr. Em suma, tanto a definição quanto os exemplos dão ênfase ao RLN, isso se deve ao fato descrito no próprio prefácio do livro, em que Leithold (1994) afirma que procura dispor das “explicações passo a passo”.

De maneira geral, os três livros não deixam de mobilizar nenhum dos registros de representação, porém a utilização destes ocorre de maneira desequilibrada, principalmente no LD1 e, em menor grau, no LD3. Estes priorizam, em ordem, o registro simbólico-algébrico, língua natural, gráfico e numérico-tabular. Já o LD2 se destaca por uma abordagem mais

equilibrada, sua filosofia sustentada na “Regra dos Quatro” é perceptível tanto na apresentação do conteúdo quanto nos exemplos.

A Tabela 1 sintetiza a frequência dos diferentes tipos de registros de representação empregados nos exemplos relacionados às seções que abordam a noção intuitiva e a definição formal de limite. Foram apenas considerados aqueles que envolvem diretamente o cálculo intuitivo de limite ou a aplicação de sua definição.

Tabela 1 – Frequência de uso dos registros nos exemplos

Registro	Guidorizzi (LD1)	Stewart (LD2)	Leithold (LD3)
RSA	14	9	4
RGr	2	7	2
RLN	8	9	4
RNT	1	4	2
Total de exemplos	14	9	4

Fonte: A autora (2025).

A soma dos registros utilizados nos livros ultrapassa o total de exemplos, uma vez que alguns deles fazem o uso de mais de um tipo de registro. De acordo com a Tabela 1, observa-se que todos os exemplos, em todos os livros analisados, utilizam o RSA. O RLN aparece como o segundo mais utilizado. Nos LD2 e LD3, o RLN está presente em todos os exemplos e, em mais da metade dos exemplos do LD1. Os RGr e RNT são os menos utilizados de maneira geral, com exceção do LD2 que enfatiza o RGr e menos o RNT, com presença do RGr em 7 dos 9 exemplos analisados, e presença do RNT em 4 dos 9. No LD3, tanto o RGr quanto o RNT aparecem em 2 dos 4 exemplos. Já o LD1 faz uso limitado desses dois registros, apenas 2 de 14 exemplos utilizam o RGr e apenas 1 de 14 utiliza o RNT.

6.2 ANÁLISE E MAPEAMENTO DAS TRANSFORMAÇÕES ENTRE OS REGISTROS

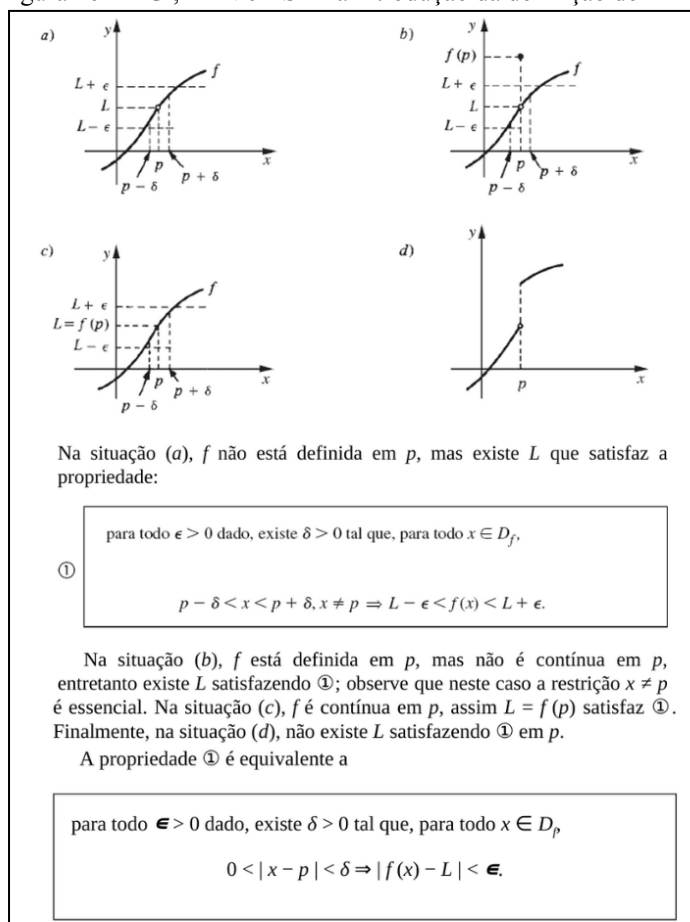
No LD1, ao observarmos o início das duas abordagens de limite, a intuitiva e a formal, é possível identificar a presença de transformações do tipo conversão entre os registros. Na introdução da noção intuitiva, conforme a Figura 2, temos a passagem do registro língua natural para o registro simbólico-algébrico ($RLN \rightarrow RSA$), que, por sua vez, é convertido para o RGr ($RSA \rightarrow RGr$), ou seja, o limite de uma função, inicialmente expresso em RLN, é apresentado simbolicamente e, depois, passa a ser representado graficamente.

Nos dois exemplos resolvidos em relação à noção intuitiva, observável nas Figuras 3 e 4, o autor traz a ideia de conversão, ao resolvê-las com uso de mais de um registro. No primeiro exemplo, observa-se uma conversão do $RSA \rightarrow RNT \rightarrow RGr$, e no segundo exemplo, a passagem do $RSA \rightarrow RGr$. Essas conversões, embora não sejam indicadas explicitamente pelo autor, a disposição lado a lado das representações na resolução permite que o estudante realize

associações importantes entre elas, como perceber no gráfico o mesmo comportamento sugerido pelos dados da tabela.

O autor, quando vai abordar a definição formal de limite, inicia com a análise gráfica de situações diferentes, que mostram o comportamento de funções nas proximidades do ponto p . Depois é descrita cada situação gráfica, ou seja, há uma conversão do RGr→RLN. Além disso, há também uma outra conversão do RGr→RSA, em que os gráficos são formalizados pela linguagem simbólica, conforme a Figura 16.

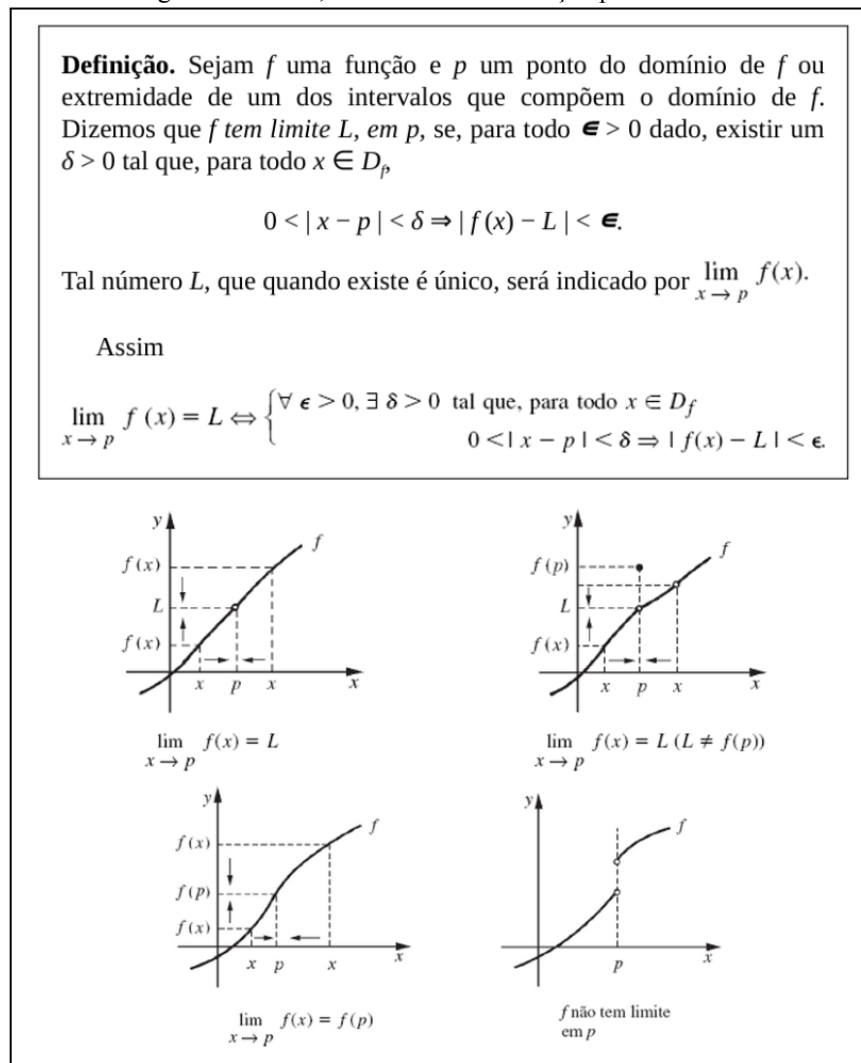
Figura 16 – RGr, RLN e RSA na introdução da definição de limite



Fonte: Guidorizzi (2001, p. 71).

Após a introdução realizada na Figura 16, Guidorizzi (2001) apresenta a demonstração da unicidade do limite por meio de um tratamento no RSA, mostrando que, quando o limite existe, ele é único, para depois apresentar sua definição formal, apresentada na Figura 17.

Figura 17 – RLN, RSA e RGr na definição precisa limite



Fonte: Guidorizzi (2001, p.72-73).

No momento em que o autor define limite, ele dispõe logo em seguida os gráficos que parecem ter por objetivo estabelecer uma conexão entre a noção intuitiva e a definição formal por meio da conversão do RSA→RGr. Porém, não é estabelecida nenhuma conexão, ele apenas dispõe os gráficos, deixando essas inferências entre os registros a cargo do leitor.

No decorrer da seção voltada à definição formal, a transformação mais enfatizada nos exemplos resolvidos é o tratamento com o RSA. Os exemplos não incluem situações em que haja a conversão entre os registros, apenas manipulação simbólica-algébrica e a aplicação direta de propriedades e definição. Ainda que o RLN esteja presente, ele aparece como justificativas intermediárias, como ilustrado nas Figuras 5 e 18. Os exemplos que utilizam a definição formal são apresentados envolvendo casos mais gerais, não se emprega, portanto, nenhum exemplo específico que destaque a ligação entre a noção intuitiva e a sua definição.

Figura 18 – Tratamento do RSA em exemplo resolvido

EXEMPLO 4. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ em que $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Solução

Para $x \neq 1$; $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$; assim

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \neq f(1)$$

(Observe que $f(1) = 3$.) Pelo fato de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ segue que f não é contínua em 1. ■

Fonte: Guidorizzi (2001, p. 74).

Neste exemplo da Figura 18, poderia ser útil a conversão do RSA para o RGr, a fim de mostrar graficamente o limite em um ponto de descontinuidade, mas faltam representações visuais para reforçar esse aspecto. Exemplos como estes que propõem o tratamento são importantes para o aprendizado de manipulações algébricas, no entanto, a ausência de registros visuais, bem como a inexistência de conversão de forma explícita, pode comprometer a construção de sentido para muitos estudantes. Nessa perspectiva, Santos (2013) argumenta que, na ausência de mudanças de registros, ou seja, sem a realização da conversão, o discente está sujeito a desenvolver um entendimento fragmentado do estudo de limite de função. Isso porque, sem esse tipo de transformação, dominar um registro não garante o domínio de outro.

Diferentemente, o LD2 apresenta um exemplo bem semelhante ao discutido no LD1 da Figura 18. No entanto, ao contrário do que ocorre no LD1, no LD2 o uso de diferentes tipos de registros promove conversões entre os registros, observável na Figura 19.

Figura 19 – Tratamento e conversão em exemplo resolvido

EXEMPLO 1 Estime o valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

SOLUÇÃO Observe que a função $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ não está definida quando $x = 1$, mas isso não importa, pois a definição de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ diz que devemos considerar valores de x que estão próximos de a , mas não são iguais a a .

As tabelas à esquerda na próxima página dão os valores de $f(x)$ (com precisão de seis casas decimais) para os valores de x que tendem a 1 (mas não são iguais a 1). Com base nesses valores, podemos conjecturar que

$x < 1$	$f(x)$
0,5	0,666667
0,9	0,526316
0,99	0,502513
0,999	0,500250
0,9999	0,500025

$x > 1$	$f(x)$
1,5	0,400000
1,1	0,476190
1,01	0,497512
1,001	0,499750
1,0001	0,499975

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0,5$$

O Exemplo 1 está ilustrado pelo gráfico de f na Figura 3. Agora, vamos mudar ligeiramente f definindo seu valor como 2 quando $x = 1$ e chamando a função resultante de g :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Essa nova função g tem o mesmo limite quando x tende a 1 (veja a Figura 4).

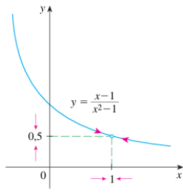
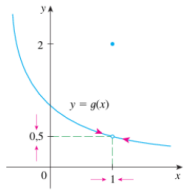



FIGURA 3 **FIGURA 4**

Fonte: Stewart (2013, p. 81-82).

Neste exemplo da Figura 19, podemos observar a disposição dos quatro registros, com ocorrência tanto de tratamento quanto de conversão (não explícita) entre os diferentes registros. O tratamento é realizado no RNT, com a organização dos valores nas tabelas. Entre as conversões que podemos inferir, destaca-se inicialmente a passagem do RSA, representado pela função $f(x)$, para o RNT, por meio do cálculo dos valores de $f(x)$ quando $x \rightarrow 1$ (RSA $\rightarrow$ RNT). Em seguida, ocorre uma nova conversão, agora do RNT $\rightarrow$ RSA, para formular, a partir dos valores observados na tabela, o limite da função simbolicamente, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0,5.$$

A expressão acima é traduzida em um gráfico, havendo outra conversão: RSA $\rightarrow$ RGr. O autor faz uma pequena alteração na função original e a chama de $g(x)$, representando-a graficamente para mostrar que, mesmo que o ponto quando $x = 1$ esteja definido, em que o valor da função nesse ponto seja diferente do limite, essa nova função mantém o mesmo comportamento dos demais valores de x , ou seja, mesmo com $g(1) = 2$, o limite ainda permanece o mesmo quando $x \rightarrow 1$.

Quanto à seção da definição formal, tanto a apresentação da definição, quanto os exemplos trazem transformações de tratamento e conversão. Isso pode ser verificado na passagem da Figura 9 para as Figuras 10 e 11, onde a definição simbólica-algébrica de limite é convertida para representações geométricas (RSA $\rightarrow$ RGr). Além disso, no exemplo da Figura 12, há a transformação de tratamento no RSA, com a manipulação das desigualdades e a conversão do RSA $\rightarrow$ RGr para ilustrar em gráfico o resultado da demonstração.

Figura 20 – Conversão em exemplo resolvido

EXEMPLO 1	Use um gráfico para encontrar um número δ tal que
se $ x - 1 < \delta$	então $ (x^3 - 5x + 6) - 2 < 0,2$
Em outras palavras, encontre um número δ que corresponda a $\varepsilon = 0,2$ na definição de um limite para a função $f(x) = x^3 - 5x + 6$ com $a = 1$ e $L = 2$.	

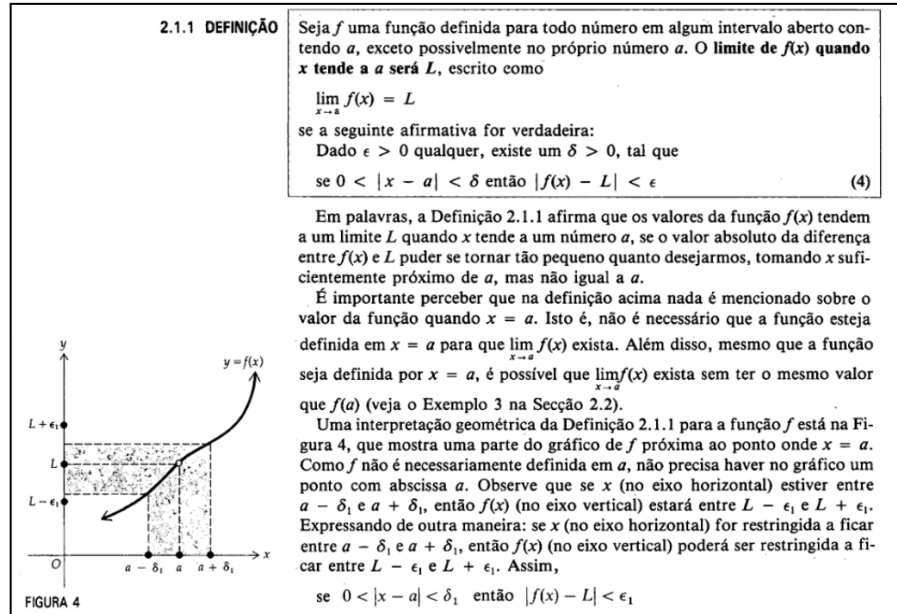
Fonte: Stewart (2013, p. 102).

Neste exemplo da Figura 20, é solicitada a conversão de forma explícita do RSA $\rightarrow$ RGr. Além disso, o exemplo promove a conversão do RGr $\rightarrow$ RSA, pois o estudante deve interpretar visualmente o gráfico para deduzir um valor aproximado de δ .

No LD3, o autor inicia a parte teórica, relacionando a noção intuitiva com a definição formal, a partir de um exemplo. Nesse percurso, o livro faz as seguintes conversões: RNT $\rightarrow$ RLN, RLN $\rightarrow$ RSA, RSA $\rightarrow$ RGr. Essas conversões podem ser vistas, respectivamente, nas Figuras 13 a 15 da seção anterior. Já na formalização da definição, Leithold (1994) recorre aos

registros RSA, RLN e RGr, realizando conversões entre eles, como RSA→RLN, RSA→RGr e RGr→RLN, as quais podem ser observadas na Figura 21.

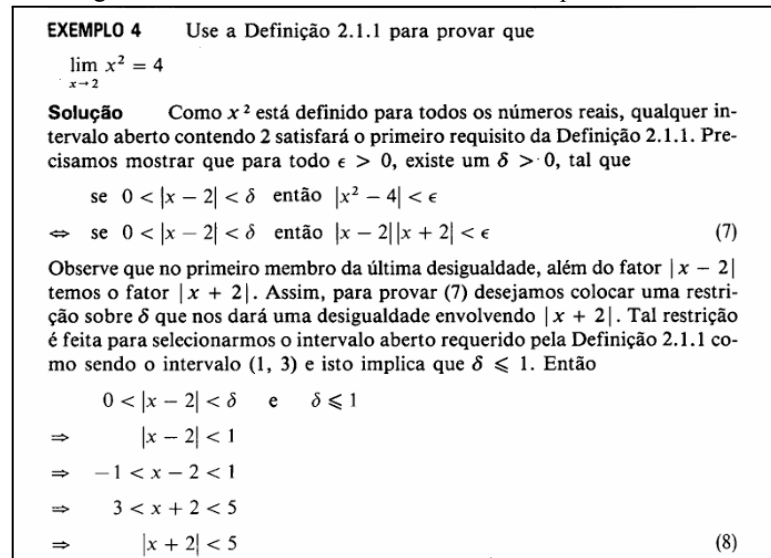
Figura 21 – RSA, RLN e RGr na definição precisa de limite



Fonte: Leithold (1994, p. 58-59).

Dos quatro exemplos propostos, dois realizam a conversão do RSA→RLN e o tratamento no RSA, conforme a Figura 22.

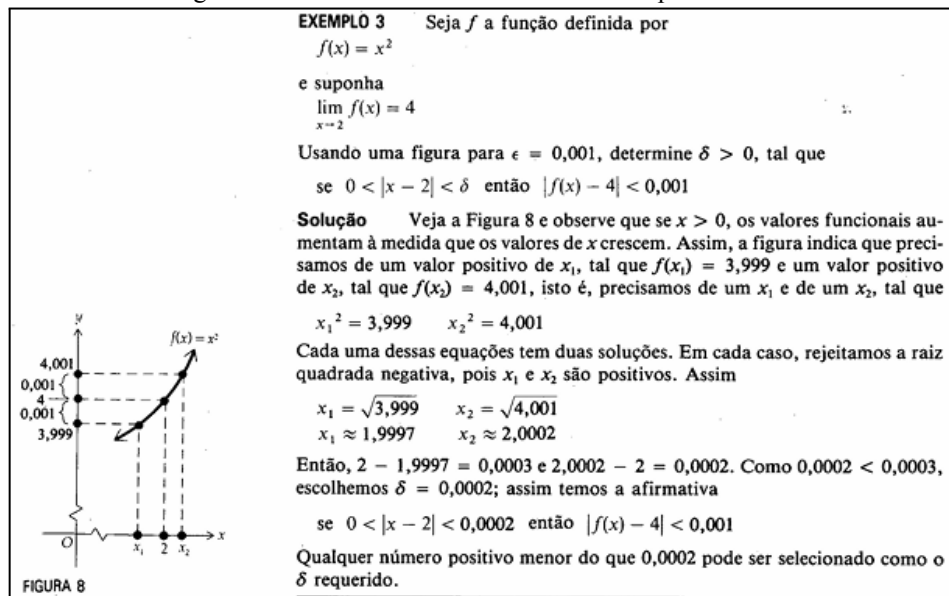
Figura 22 – Tratamento e conversão em exemplo resolvido 2



Fonte: Leithold (1994, p. 62).

Os outros dois exemplos, além de transformações do mesmo tipo que foram realizadas no exemplo da Figura 22, promovem conversões do RSA→RGr (explícita no enunciado) e do RGr→RLN, observável na Figura 23.

Figura 23 – Conversão e tratamento em exemplo resolvido



Fonte: Leithold (1994, p. 61).

Vemos, na Figura 23, que o enunciado do exemplo fornece a função em RSA, solicita suposição do limite dessa função em RSA e é solicitado que, utilizando uma figura com $\epsilon = 0,001$, se determine δ a partir da condição dada. Para a solução, o exemplo realiza a conversão do RSA→RGr (a expressão de $f(x)$ e a definição de limite com $\epsilon = 0,001$ são convertidas para a ilustração gráfica). Além disso, podemos observar uma conversão implícita do RGr→RLN na interpretação do gráfico. Depois, dentro do RSA, é realizado um tratamento para calcular x_1 e x_2 e, assim, encontrar δ .

Desse modo, observou-se que Leithold (1994) mobiliza diferentes tipos de registros, convertendo-os entre si, com mais ênfase nas definições do que nas exemplificações. As conversões mais observadas foram: RSA→RLN na apresentação teórica, seguido do RSA→RGr, nos exemplos.

Abaixo, a Tabela 2 apresenta a compilação da frequência de transformações de conversão e tratamento presentes nos exemplos analisados nesta seção. No total, foram considerados 14 exemplos do LD1, 9 do LD2 e 4 do LD3.

Tabela 2 – Frequência de tratamentos e conversões dos registros nos exemplos

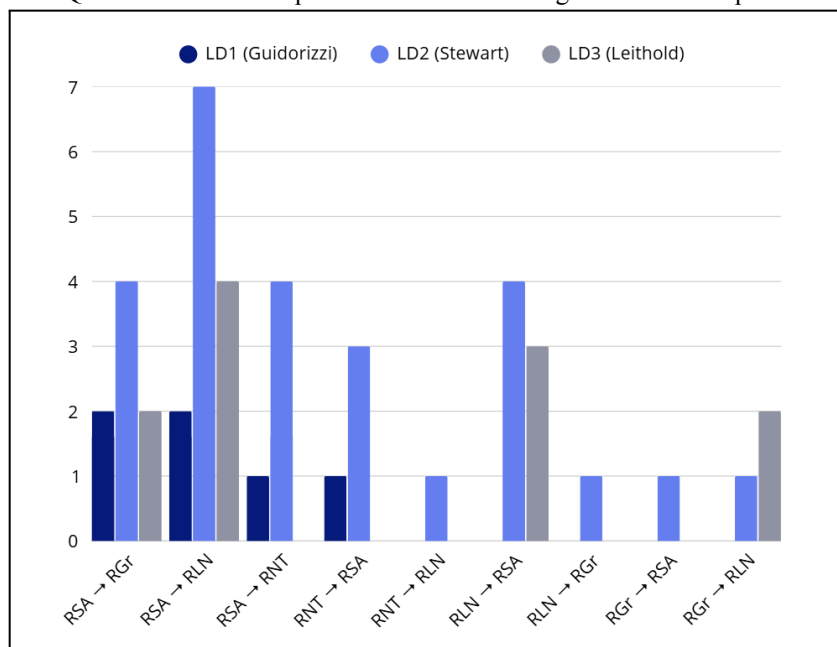
Transformação	Guidorizzi (LD1)	Stewart (LD2)	Leithold (LD3)
Tratamento	14	9	4
Conversão	6	26	11

Fonte: A autora (2025).

A frequência dessas transformações, observável na Tabela 2, foi contabilizada em relação à quantidade de vezes que elas aparecem nos exemplos, assim, pode haver casos em que um só exemplo apresenta tanto tratamento quanto conversão, ou ainda conter duas ou

mais conversões. A seguir, o gráfico da Figura 24 apresenta os tipos de conversão entre os registros apresentados nos exemplos dos livros didáticos analisados.

Figura 24 – Quantidade de cada tipo de conversão entre registros nos exemplos de cada livro



Fonte: A autora (2025).

Dos três livros analisados, observa-se que o LD2 é o que mais promove a transformação de conversão, totalizando 26 conversões em 9 exemplos. O LD3, por sua vez, destaca-se também ao realizar mais conversões do que tratamentos, em apenas 4 exemplos ocorreram 11 conversões. Já o LD1 foi o que menos deu ênfase à conversão, com ocorrência de 6 vezes em um total de 14 exemplos, dando maior relevância ao tratamento. Os dados mostram que, embora os três livros utilizem os dois tipos de transformação, o LD2 se destaca, por ser o que mais deu ênfase na articulação entre os registros, seguido do LD3, enquanto o LD1 tende a priorizar processos dentro de um mesmo tipo de registro, o RSA.

As conversões que ocorreram em comum em todos os livros foram a do RSA→RLN e a do RSA→RGr. Vale ressaltar que muitas dessas conversões foram apresentadas de maneira não explícita, com exceção de poucas que traziam em seu enunciado o comando para realizar a conversão. A presença de múltiplos registros nos livros não garante, por si só, uma aprendizagem conceitual sólida. Por isso, destaca-se a importância do docente mediador no uso dos livros didáticos, uma vez que o professor atua como sujeito ativo no processo pedagógico, sendo responsável pela mediação dos instrumentos e signos a serem apropriados pelos discentes (Moura, 2014). Dessa forma, observa-se que, mesmo que os livros utilizem diferentes registros semióticos na abordagem de limite, carecem de uma maior e real articulação entre eles.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, buscamos identificar quais são os principais registros de representação utilizados nos livros didáticos, adotados no componente curricular da disciplina de Cálculo I do curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco — LD1 (Guidorizzi, 2001), LD2 (Stewart, 2013) e LD3 (Leithold, 1994) —, assim como investigar quais as transformações (tratamento e conversão) entre os registros são apresentadas e como elas ocorrem na abordagem intuitiva e na definição formal de limite.

Com os resultados obtidos na análise, foi possível observar que os três livros mobilizam os quatro registros de representação. Entretanto, constatamos que existem notáveis diferenças tanto na ênfase que dão a cada registro, quanto em como articulam as transformações entre eles ao longo da abordagem. As transformações do tipo conversão são pouco incentivadas e, quando presentes, na maioria das vezes não são explicitamente detalhadas pelos autores, o que pode levar o estudante a uma visão fragmentada do objeto de estudo.

O LD1 apresenta a menor diversidade de registros de representação, principalmente nos exemplos resolvidos, sendo o RSA o mais enfatizado. Este autor adota uma abordagem mais sucinta e técnica. Sua linguagem formalizada, como aponta Santos (2013), é a que mais se aproxima daquela utilizada por especialistas, o que pode dificultar o acesso dos estudantes em seu processo de aprendizagem. Já o LD2 se destaca por apresentar uma abordagem mais equilibrada em relação ao uso dos registros, condizente com sua “Regra dos Quatro” e com os princípios estabelecidos pela TRRS. O LD3, por sua vez, também se sobressai positivamente, por mobilizar diferentes registros, especialmente o RLN e o RSA. É esperado que o RSA predomine, levando em consideração a natureza do conteúdo abordado. Contudo, os LD2 e LD3 conseguiram melhor atender aos princípios da TRRS, ao proporem um diálogo mais equilibrado entre os diferentes registros.

Com relação às transformações, o LD1 apresenta poucas alternativas quanto à possibilidade de conversões entre os registros, principalmente nos exemplos, predominando os tratamentos no próprio RSA. Por outro lado, o LD1 destaca-se pela utilização do RGr próximo ao RSA nas abordagens teóricas ao introduzir o conteúdo de limite. No LD2, as conversões são mais estimuladas do que os tratamentos, ocorrendo tanto de forma implícita quanto explícita nas definições e nos exemplos, possibilitando uma abordagem mais completa e articulada. No LD3, observou-se também um uso equilibrado das transformações, o livro deu ênfase tanto nos tratamentos quanto nas conversões, estas apresentadas de maneira mais

detalhada. Dentre as conversões mais exploradas nos três livros analisados, destaca-se a que ocorre do RSA para o RLN.

O livro didático, embora seja um recurso importante e específico, não é a única possibilidade disponível no processo de ensino e aprendizagem formal, ainda assim, ele exerce influência na qualidade do aprendizado, podendo atuar de forma decisiva nesse processo (Lajolo, 1996). Seu papel ainda permanece central, sendo amplamente utilizado no contexto educacional, especialmente em nível superior. Por esse motivo, é fundamental que ele favoreça a compreensão, com uma linguagem acessível e abordagens que incentivem o uso de diferentes tipos de registros de representação e a conversão entre eles.

Durante o desenvolvimento deste estudo surgiram algumas indagações que podem ser temas de outras pesquisas, como por exemplo, *será que os exercícios propostos nos livros didáticos incentivam a conversão?* Ou, ainda, *de que maneira professores de Cálculo I trabalham o conteúdo de limite, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica?* *Será que esses profissionais articulam diferentes tipos de registros de representação durante a explicação e os registros presentes nos livros adotados por eles?* Sugere-se ainda o desenvolvimento de propostas didáticas que incluam o uso de softwares ou outras tecnologias para trabalhar os diferentes registros de representação simultaneamente do conteúdo de limite e demais assuntos do Cálculo.

Por fim, acreditamos que a análise, além de revelar aspectos importantes sobre como os registros de representação no conteúdo de limite são tratados nos livros didáticos de Cálculo I, também amplia discussões sobre o papel e a qualidade dessas ferramentas no processo de ensino e aprendizagem. Ao observar as potencialidades e as lacunas na abordagem de limite, evidencia-se a importância de ter uma visão mais crítica sobre o livro didático, reconhecendo-o como um recurso que pode facilitar ou limitar a aprendizagem.

Assim, espera-se que este trabalho possa contribuir para a criação de novas pesquisas e reflexões que auxiliem professores, formadores e pesquisadores na escolha e mediação dos livros didáticos, assim como a reavaliação de estratégias didáticas para um ensino de limite e, por conseguinte, de Cálculo I, mais articulado e acessível.

REFERÊNCIAS

- ALVARENGA, K. B.; SAMPAIO, M. M. Obstáculos referentes às relações de representação aritmética e algébrica de grandezas. In: FONSECA, L. (org.). *Didática do cálculo: epistemologia, ensino e aprendizagem*. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. p. 131-144.
- AMARAL, R. B. et al. *O livro didático de matemática: compreensões e reflexões no âmbito da Educação Matemática*. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2022.
- ANAVITÓRIA. *Mistério*. [S.l.]: YouTube, 11 out. 2017. Disponível em: <https://youtu.be/c5Iv6V66MC8?si=mWE6NgW7HCD1p4Tm>. Acesso em: 07 ago. 2025.
- ANTON, H. *Cálculo: um novo horizonte*. Tradução de Cyro de Carvalho Patarra e Márcia Tamanaha. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- BATISTA, L. A. L. *Limites de funções de uma variável real: análise das praxeologias matemáticas e didáticas propostas em livros didáticos*. 2019. 144f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Caruaru, 2019.
- BARDI, J. S. *A Guerra do Cálculo*. 2. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.
- BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014. ePDF. Disponível em: <https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/0115e5b3-cefa-4a11-9032-25b88c57c781/content>. Acesso em: 28 mar. 2025. ISBN 978-85-7983-601-5.
- BITTAR, M. A teoria antropológica do didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 25, n. 3, p. 364–387, 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648640>. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640>. Acesso em: 7 mar. 2025.
- CORNU, B. Limits. In: TALL, D. (org.). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1991. v. 11, p. 153-166.
- CORNU, B. *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. 1983. 169f. Tese (Doutorado em Matemática) – Université Scientifique et Médicale de Grenoble. Grenoble, 1983.
- D'AVOGLIO, A. R. *Derivada de uma função num ponto: uma forma significativa de introduzir o conceito*. 2002. 92f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.
- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Strasbourg: IREM - ULP, p. 37-64, 1993.
- _____. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mérciles Thadeu Moretti. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.) *Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, p.11-33, 2011.

_____. *Semiósis e pensamento humano*. Tradução: Lênio Abreu Farias; Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. (Coleção Contextos da Ciência).

_____. *Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo: LF Editora, 2010.

GARBI, G. G. *O Romance das Equações Algébricas*. 3 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (org.). *Métodos de pesquisa*. Coordenação: Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS; Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 2002.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. *Revista de Administração de Empresas*, São Paulo, v. 35, n. 2, p. 57-63, mar./abr. 1995. DOI: <https://doi.org/10.1590/S0034-75901995000200008>. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rae/a/wf9CgwXVjpLFVgpwNkCgnnC/?lang=pt>. Acesso em: 02 abr. 2025.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo*. v. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KUHN, T. S. *A estrutura das revoluções científicas*. 9. ed. São Paulo: Perspectiva, 2005.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual do usuário. *Em Aberto*, Brasília, v.16, n. 69, p. 3-9, jan./mar. 1996. ISSN 0104-1037.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*, v. 1. 3.ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

MARTINS, G. de A.; THEÓPHILO, C. R. *Metodologia da investigação científica para ciências sociais aplicadas*. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2016.

MATEUS, P. *Cálculo diferencial e integral nos livros didáticos: uma análise do ponto de vista da organização praxeológica*. 2006. 188f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2006.

MONGELLI, M. C. J. G. Discussão de duas definições formais de limite de funções de uma variável real num ponto A com o GeoGebra. In: RACHIDI, M.; FREITAS, J. L. M.; MONGELLI, M. C. J. G. (org.). *Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações*. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2020. Disponível em: <https://repositorio.ufms.br/handle/123456789/3548>. Acesso em: 30 jul. 2025.

MOURA, C. E. B. S. *Mediação e prática docente: o papel do professor*. 2014. 23f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Naturais) – Faculdade UnB Planaltina, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

RACHIDI, M.; FREITAS, J. L. M.; MONGELLI, M. C. J. G. *Limite de funções de uma variável real com valores reais e generalizações*. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2020. Disponível em:

https://www.academia.edu/86750022/Limite_de_fun%C3%A7%C3%B5es_de_uma_vari%C3%A1vel_real_com_valores_reais_e_generaliza%C3%A7%C3%B5es. Acesso em: 18 jun. 2025. ISBN 978-65-86943-18-4.

REIS, F. S. *A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos*. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de Campinas. Campinas, 2001.

REZENDE, W. M. *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. 2003. 468f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS, M. B. S. *Um olhar para o conceito de limite: constituição, apresentação e percepção de professores e alunos sobre o seu ensino e aprendizado*. 2013. 388f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

SANTOS, V. A.; MARTINS, L. A importância do livro didático. *Candombá – Revista Virtual*, Salvador, v. 7, n. 1, p. 20–33, jan.–dez. 2011. Disponível em: <https://publicacoes.unijorge.com.br/candomba/article/view/665/604>. Acesso em: 5 jun. 2025.

SCHUBRING, G. *Análise histórica de livros de matemática: notas de aula*. Campinas, SP: Autores Associados, 2003.

SILVA, A. S. *Registros de representação semiótica e função quadrática: um olhar sobre o ensino e a abordagem no livro didático*. 2020. 122 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, 2020.

SILVA, E. T. Livro didático: do ritual de passagem à ultrapassagem. *Em Aberto*, Brasília, v.16, n. 69, p. 11-15, jan./mar. 1996. ISSN 0104-1037.

SILVA, M. A. A fetichização do livro didático no Brasil. *Educação & Realidade*, Porto Alegre, v. 37, n. 3, p. 803-821, set./dez. 2012. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/edreal/a/wNOB9SzJFYhbLVr6pqvp4wg/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 5 mar. 2025.

STEWART, J. *Cálculo*. v. 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

TALL, D. Advanced Mathematical Thinking and the Computer. In: *20th University Mathematics Teaching Conference*. 1996. Nottingham. Proceedings.

VIANNA, C. C. S. *Students' understanding of the fundamental theorem of calculus: an exploration of definitions, theorems and visual imagery*. 1998. 285 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Institute of Education, University of London, Londres, 1998.

WALLACE, M. *Definição formal de limite*. GeoGebra, 2016. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/G9gvdPXh>. Acesso em: 15 jun. 2025.

ZUCHI, I. *A abordagem do conceito de limite via sequência didática: do ambiente lápis papel ao ambiente computacional*. 2005. 254 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.