



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE FÍSICA-LICENCIATURA

YASMIN GABRIELA DE MELO SILVA

**LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: MODELAGEM E VERIFICAÇÃO
EXPERIMENTAL PARA MAIS DE UMA TROCA DE CALOR**

CARUARU
2025

YASMIN GABRIELA DE MELO SILVA

**LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: MODELAGEM E VERIFICAÇÃO
EXPERIMENTAL PARA MAIS DE UMA TROCA DE CALOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Física-Licenciatura
do Centro Acadêmico Agreste (CAA) da Uni-
versidade Federal de Pernambuco (UFPE), na
modalidade de monografia, como requisito par-
cial para a obtenção do grau de Licenciada em
Física.

Área de concentração: Modelagem

Orientador: Prof. Dr. Sérgio de Lemos Campello

CARUARU
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Melo Silva, Yasmin Gabriela de .

Lei de Resfriamento de Newton: modelagem e verificação experimental para
mais de uma troca de calor / Yasmin Gabriela de Melo Silva. - Caruaru, 2025.
37p. : il., tab.

Orientador(a): Sérgio de Lemos Campello

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de
Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Física - Licenciatura, 2025.
10.

Inclui referências.

1. Modelagem matemática. 2. Termodinâmica. 3. Lei de resfriamento de
Newton. I. Lemos Campello, Sérgio de. (Orientação). II. Título.

530 CDD (22.ed.)

YASMIN GABRIELA DE MELO SILVA

**LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: MODELAGEM E VERIFICAÇÃO
EXPERIMENTAL PARA MAIS DE UMA TROCA DE CALOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Coordenação do Curso de Física-Licenciatura
do Centro Acadêmico Agreste (CAA) da Uni-
versidade Federal de Pernambuco (UFPE), na
modalidade de monografia, como requisito par-
cial para a obtenção do grau de Licenciada em
Física.

Aprovado em: 14/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Sérgio de Lemos Campello (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Augusto César Lima Moreira (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Gustavo Camelo Neto (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho aos meus familiares, em especial vovô Antônio (*in memoriam*), o primeiro Físico Experimental sem formação que conheci, cujo trabalho me inspira diariamente a seguir adiante.

AGRADECIMENTOS

À Deus, Aquele que me concede forças e dá sentido a tudo em minha vida.

À minha mãe Soninha e à minha avó Amara, amo-as incondicionalmente, são uma parte de mim. Reconheço que jamais conseguirei colocar em palavras tudo o que elas significam para mim.

Ao meu pai Josivan, por se fazer presente à sua maneira. Nossa distância física me ensinou a ser corajosa e não ter medo de conhecer o novo.

À Anthony, meu namorado, por todo seu apoio e por me permitir dividir as angústias e felicidades da vida. Que Deus continue nos proporcionando caminhadas juntos.

À minha prima Marianne, primeira pessoa graduada da família, que sempre me incentivou a estudar. Foi ela quem me ensinou que eu poderia conquistar qualquer coisa que almejasse. Que minha singela conquista possa lembrá-la que ela também pode ir além.

À minha madrinha Ione, por acreditar no meu potencial e por todas as oportunidades que me proporcionou. Seus valores são um exemplo para mim, obrigada por ter me acolhido.

Ao meu orientador Sérgio Campello, pelo respeito, cuidado e bom humor não apenas na orientação desse trabalho, mas também nas cinco disciplinas a qual pude ser sua aluna. Sua maneira de ser e os conhecimentos passados serão lembranças carregadas de afeto durante minha jornada pessoal e acadêmica.

Ao Técnico do Laboratório de Física da UFPE CAA Allan Jhones, pela grande ajuda na instrumentação dessa pesquisa, principalmente pela construção e programação do Termopar utilizado na coleta de dados.

Aos amigos que a graduação me presenteou, em especial a Maria Thamires, minha companheira de transporte, sua amizade me proporcionou os melhores momentos nessa jornada. Também gostaria de agradecer ao meu amigo José Medeiros, sua ajuda e apoio foram essenciais para mim, que o chamado da nossa amizade seja atendido com a alegria de sempre.

Aos meus colegas de turma: Adonias, Gabriel, Vagner, Pedro, Renata e Alex, por me ensinar, acolher e dividir um pouco de suas vidas pessoais comigo. Jamais esquecerei da alegria que é estar na companhia de vocês.

Aos professores que tive durante minha vida, de modo especial a Rosimere Nascimento, Lidiane Melo, Natália Nunes, Jáder Tavares, Ana Carla, Wilson Pacheco, Wichor Hugo e Felipe Camargo. Eles me ensinaram sobre o poder transformador da educação, serei eternamente grata por tê-los como inspiração. Foi por ter tido professores muito bons que eu decidi me tornar uma.

À todas essas pessoas, meus sinceros agradecimentos.

“O teatro está cheio, as luzes brilham e iluminam todo o cenário. Sobem ao palco as bailarinas. O espetáculo começa e você não acredita nos seus olhos: elas parecem voar! No dia seguinte, você vai para a sua aula de balé com a decisão a fazer igual, mas mal sai do chão. A professora vê você triste e fala: ‘você ainda vai aprender a enganar a gravidade. . .’ O que ela quis dizer com isso?”

Carolina Andries Gigliotti

RESUMO

A modelagem matemática é uma ferramenta capaz de transformar problemas empíricos em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem da experiência sensorial. Em 1701, Isaac Newton propôs um modelo para o resfriamento de objetos, conhecido como Lei de Resfriamento, a qual se refere à existência de uma proporcionalidade entre a variação da temperatura em relação ao tempo e a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente. Este trabalho buscou propor uma modelagem para um sistema termodinâmico, baseado na Lei de Resfriamento de Newton, porém considerando um sistema com mais de uma troca de calor. O experimento clássico, usado em disciplinas de Física experimental, parte de um determinado volume de água, inicialmente aquecida e colocada em um calorímetro, cuja temperatura é medida em função do tempo. Nesse trabalho, a coleta de dados foi realizada com um termopar e um dispositivo arduino, programado para ler a temperatura a cada 10 segundos. Dessa maneira, foram registradas as temperaturas em função do tempo (50 minutos) dos sistemas com o calorímetro fechado e com calorímetro aberto nas seguintes configurações: sem peça; com peça de alumínio e com peça de chumbo. As peças metálicas trazem a possibilidade de verificar experimentalmente mais de uma troca de calor: água-ambiente e água-metal. Os dados obtidos foram submetidos a um ajuste de curva com o modelo matemático partindo de uma soma de duas exponenciais. A partir da análise dos parâmetros físicos, os quais envolvem a lei de resfriamento de Newton, a expressão multiexponencial resultante foi testada e validada. Os resultados obtidos mostram que o modelo e a interpretação física dos parâmetros são muito promissores para descrever o sistema com duas trocas de calor.

Palavras-chave: lei de resfriamento de Newton; física experimental; modelagem matemática.

ABSTRACT

Mathematical modeling is a tool capable of transforming empirical problems into mathematical ones and solving them by interpreting their solutions in the language of sensory experience. In 1701, Isaac Newton proposed a model for the cooling of objects, known as the Law of Cooling, which refers to the existence of a proportionality between the variation in temperature over time and the difference between the object's temperature and the ambient temperature. This work sought to propose a model for a thermodynamic system, based on Newton's Law of Cooling, but considering a system with more than one heat exchange. The classic experiment, used in experimental physics courses, begins with a certain volume of water, initially heated and placed in a calorimeter, whose temperature is measured as a function of time. In this work, data collection was performed with a thermocouple and an Arduino device programmed to read the temperature every 10 seconds. Thus, temperatures were recorded as a function of time (50 minutes) for the systems with the calorimeter closed and with the calorimeter open in the following configurations: without a part; with an aluminum part; and with a lead part. Metal parts allow for the experimental verification of more than one heat exchange: water-to-ambient and water-to-metal. The data obtained were subjected to curve fitting using the mathematical model based on a sum of two exponentials. Based on the analysis of the physical parameters, which involve Newton's law of cooling, the resulting multiexponential expression was tested and validated. The results show that the model and the physical interpretation of the parameters are very promising for describing the system with two heat exchanges.

Keywords: Newton's law of cooling; experimental physics; mathematical modeling.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Gráfico da força elástica pela deformidade da mola.	16
Figura 2.2 – Esquematização de uma modelagem.	17
Figura 4.1 – Aparatos experimentais: a) calorímetro; b) termômetro digital culinário; c) balança digital; d) régua de 30 cm; e) peça cilíndrica de alumínio; f) peça de chumbo.	24
Figura 4.2 – Procedimento experimental 1.	25
Figura 4.3 – a) gráfico em escala monolog da diferença entre a temperatura medida e a temperatura ambiente; b) gráfico da diferença entre temperatura medida e a temperatura ambiente dividida pela temperatura máxima.	26
Figura 4.4 – Procedimento experimental 3 - utilizando um termopar.	28
Figura 5.1 – Gráfico da temperatura em função do tempo para os sistemas analisados.	30

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Tabela de trabalhos analisados sobre resfriamento de Newton.	22
Tabela 5.1 – Dimensões e massa das peças e objetos utilizados.	29
Tabela 5.2 – Valores obtidos a partir do ajuste dos gráficos das temperaturas em função do tempo (decaimento com uma exponencial).	30
Tabela 5.3 – Valores obtidos a partir do ajuste dos gráficos das temperaturas em função do tempo (decaimento com duas exponenciais).	31
Tabela 5.4 – Coeficientes de resfriamento obtidos pelo ajuste do <i>Origin</i> para os sistemas sem peças metálicas.	32
Tabela 5.5 – Tabela de coeficientes de resfriamento obtidos pelo ajuste do <i>Origin</i> para sistemas com peças metálicas.	32
Tabela 5.6 – Valores teóricos dos coeficientes de resfriamento dos sistemas CFSP, CASP, CFCA E CACA.	33

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CA	calorímetro aberto
CAC1A	calorímetro aberto com uma peça de alumínio
CACA	calorímetro aberto com três peça de alumínio
CACC	calorímetro aberto com chumbo
CASP	calorímetro aberto sem peça
CF	calorímetro fechado
CFC1A	calorímetro fechado com uma peça de alumínio
CFCA	calorímetro fechado com três peças de alumínio
CFCC	calorímetro fechado com chumbo
CFSP	calorímetro fechado sem peça
LRN	Lei de Resfriamento de Newton
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	15
3	LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON	19
3.1	COEFICIENTE DE RESFRIAMENTO	20
3.2	APLICAÇÕES	21
4	METODOLOGIA	24
4.1	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	24
5	RESULTADOS E DISCUSSÃO	29
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	35
	REFERÊNCIAS	36

1 INTRODUÇÃO

A Revolução Científica do século XVII foi marcada pelo período onde os conhecimentos produzidos buscavam responder a algumas perguntas específicas sobre os fenômenos da natureza (Zaterka, 2004). Nesse contexto, alguns historiadores e filósofos relacionam a atividade científica da época com o caráter de experiência, entendendo-o como evidência empírica dos objetos de desenvolvimento (BARBOSA, 2011). Sob esse viés, Isaac Newton (1643-1727), na Inglaterra pré-vitoriana, desenvolveu a lei de resfriamento e mostrou a constância necessária ao pensamento científico que, posteriormente, foi aplicado à modelagem matemática.

Em 1701, Newton propôs um modelo para o resfriamento de objetos conhecido como Lei de Resfriamento. Tal modelo descreve a variação de temperatura do corpo, considerando apenas uma troca de calor em um reservatório térmico e é de fundamental importância para o controle de processos que envolvem transferências de calor, tornando-o uma relevante ferramenta em diversas áreas.

O presente trabalho visa propor um modelo matemático para um sistema termodinâmico com mais de uma troca de calor a partir de um experimento envolvendo calorímetro e peças metálicas, para que, assim, os coeficientes de resfriamento dos sistemas sejam analisados. Analisaremos dados teóricos referente à modelagem, o desenvolvimento da Lei de Resfriamento de Newton e também dados experimentais.

A motivação para a escrita deste trabalho partiu do contato com um experimento proposto na disciplina de Física Experimental II (FISC0096) do curso de Física - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Durante a prática experimental proposta na disciplina, percebeu-se que, para além da verificação, este era um conteúdo que ao ser associado a prática se mostra um excelente objeto para investigação, dada sua vasta aplicabilidade.

Os dados experimentais da pesquisa foram coletados em três momentos distintos, os quais, chamaremos de baterias. Cada bateria carrega modificações que visaram não só o aprimoramento da coleta de dados, como também novas configurações de sistemas termodinâmicos que serviram como lastro para a modelagem.

Com relação à estrutura, este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) está dividido em 6 capítulos. O primeiro referente a esta introdução. No Capítulo 2, abordamos a modelagem matemática como uma metodologia de pesquisa explicitando sua importância, desafios e os processos que a envolvem. No Capítulo 3, abordamos a Lei de Resfriamento de Newton. Durante a coleta de dados teóricos para construção desse trabalho, percebeu-se que este conteúdo é negligenciado em livros didáticos utilizados nos cursos de Física-Licenciatura, bacharelados de Engenharia Civil e de Engenharia de Produção do CAA da UFPE. Sendo assim, este capítulo tem o intuito de desenvolver e apresentar a Lei de Resfriamento de Newton, os parâmetros envolvidos e apresentar

uma discussão sobre suas aplicações de uma maneira prática, a fim de que o leitor sinta-se confortável para acompanhar, posteriormente, a modelagem proposta.

Avançando para o Capítulo 4, a metodologia é apresentada bem como as justificativas para a realização das três baterias realizadas. No Capítulo 5, os resultados experimentais são apresentados, seguido de sua discussão e a apresentação do modelo matemático adquirido. Por fim, no Capítulo 6, concluiremos discutindo sobre a validação do modelo obtido e a relevância dos resultados para o estudo da Termodinâmica apresentando novas perspectivas com potencial para continuidade dessa pesquisa.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é uma ferramenta que surge como uma consequência da matemática aplicada e, posteriormente, ganha espaço em diversas áreas do conhecimento. Em Bertone (2019) diz-se que "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Sobre essa perspectiva, é razoável compreender a modelagem matemática como um método científico que busca interpretações matemáticas de problemas, cujos modelos matemáticos expressam o funcionamento de um fenômeno observado.

Nesse contexto, sabe-se que a formulação de modelos matemáticos é uma prática antiga, afinal ela é utilizada desde os primeiros indícios de ciência, como dito por Bertone (2019): "a atividade de aplicar a matemática é tão antiga quanto a própria matemática. É sabido que muitas ideias em matemática surgiram a partir de problemas práticos". Foi com tal conhecimento que a Matemática e a Física se desenvolveram. Como exemplo, é possível citar uma entre as várias modelagens propostas pelo Físico Isaac Newton, aquela em que a força gravitacional entre dois corpos é proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, nomeada lei da gravitação universal, cujo módulo está representado na equação 2.1.

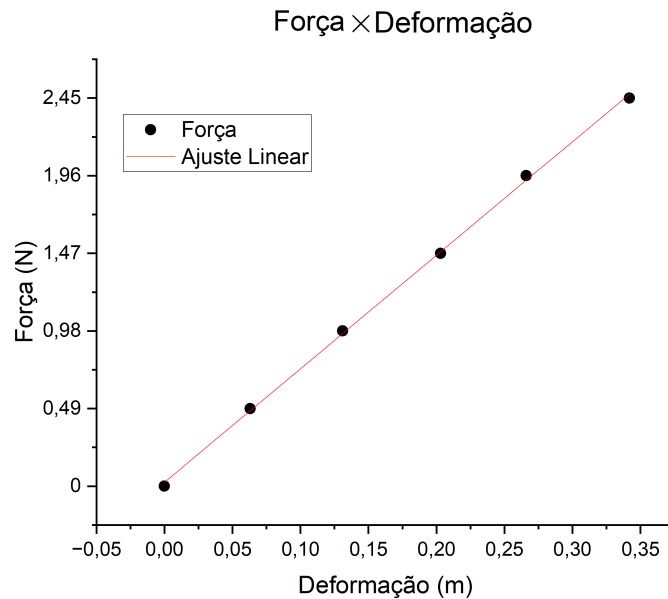
$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

A equação 2.1 descreve em linguagem matemática a relação entre as massas de dois corpos, a distância entre elas e a força gravitacional que surge dessa interação. Destaca-se aqui a praticidade do formalismo matemático para se estudar a lei mencionada. Outro exemplo interessante é a modelagem para a lei de Hooke. Nela, o módulo da força elástica aplicada é relacionada de maneira linear com a deformidade resultante na mola ou elástico, como é possível ver na equação 2.2:

$$F = k.x, \quad (2.2)$$

Para essa lei, o sistema massa-mola permite que haja uma verificação a partir da determinação da constante elástica k , através da análise de gráficos da força elástica em função da variação da deformação de diferentes sistemas de associação de molas. O esboço gráfico evidencia a relação linear entre a chamada força restauradora (aquela responsável pela mola deformada voltar ao seu tamanho original) e a deformação, tal comportamento pode ser notado no gráfico da força elástica em função da variação do comprimento do sistema de associação de molas em série, representado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Gráfico da força elástica pela deformidade da mola.

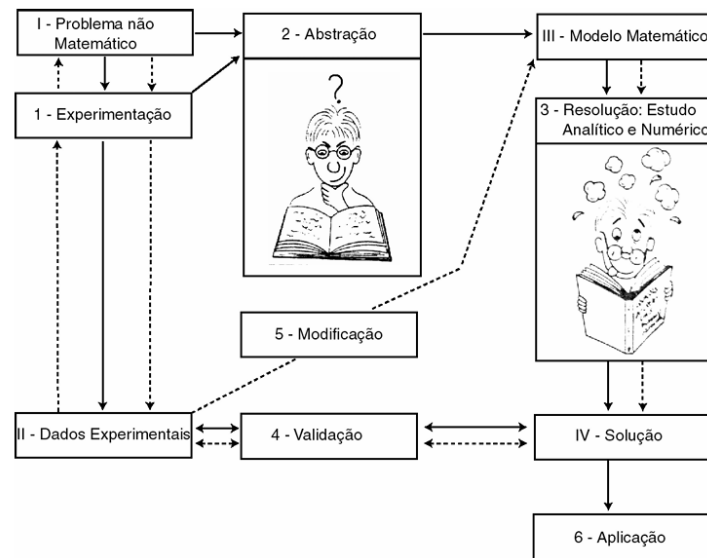


Fonte: a autora (2021).

Na Figura 2.1, fica evidente a relação de linearidade entre as grandezas físicas que envolvem esse sistema. Tal exemplo torna-se ainda mais interessante ao reconhecer a possibilidade de relacionar um modelo matemático com dados obtidos de um experimento. É nessa vantagem e viabilidade que está a importância de modelos matemáticos.

Nesse ponto, é válido destacar as diferenças entre modelo e modelagem matemática, termos que serão muito usados neste trabalho. O termo "modelo" pode ser associado a algo que tem uma forma ideal ou apenas a uma representação. Em alguns trabalhos são apresentados os chamados "objeto modelo" e os "modelo teórico". O objeto modelo trata-se da representação através de desenhos, esquemas, mapas, objeto ou de uma fórmula matemática e é caracterizado pela estabilidade e a homogeneidade das variáveis. O produto do objeto modelo é o modelo teórico. Este será construído com um código de interpretação e está vinculado a uma teoria geral existente (Bassanezi, 2002). Em outras palavras, o modelo matemático é uma representação através de relações matemáticas, símbolos ou esquemas que descrevem uma problemática, um fenômeno ou um objeto de estudo. A modelagem matemática, por sua vez, consiste no processo de construção desse modelo para que o mesmo seja viável e aplicável. Sua formulação deve seguir algumas etapas esquematizadas por (Bassanezi, 2002) na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Esquemática de uma modelagem.



Fonte: (Bassanezi, 2002).

Na Figura 2.2, há alguns passos que compõem o processo de modelagem: as setas contínuas indicam a aproximação com a prática e os números dispostos de 1 a 6 indicam os passos a serem realizados; já as setas pontilhadas indicam o processo dinâmico da formulação de um modelo matemático e os números romanos de I a IV são sequências apresentadas como resultados dos passos.

A experimentação corresponde a uma etapa importante no processo de construção de um modelo. Seu objetivo é obter dados para que, a partir deles, seja possível trabalhar as relações que compreendem o fenômeno observado. A abstração é a etapa onde as variáveis serão selecionadas, na lei de Hooke, por exemplo, a deformação da mola. A problematização será verificada e estabelecida a partir dos dados coletados e assim as hipóteses serão amadurecidas. O terceiro passo indicado na Figura 2.2, a resolução, corresponde a etapa onde a linguagem tradicional que formula as hipóteses são substituídas por uma linguagem matemática que esteja de acordo com a situação em questão. Retomando ao exemplo da lei de Hooke tem-se a força relacionada à deformação da mola multiplicada por uma constante elástica que se mostra através da fórmula matemática da equação 2.2. Neste trabalho, esta etapa e essa substituição serão descritas no Capítulo 5.

A validação e modificação são momentos que compreendem a verificação da funcionalidade do modelo e a adequação a partir de alguma questão observada. Por exemplo, se foi identificado que alguns dados foram obtidos de maneira incorreta. É nessa etapa que o trabalho é refeito ou sua metodologia é reformulada se necessário. Antes de seguir para a etapa 6, destacam-se as setas pontilhadas que indicam caminhos que ligam as etapas descritas. A indicação da seta nas duas extremidades representam muito bem a dinamicidade do processo de formulação de um modelo

e os cuidados e avaliações que devem ser tomadas em cada etapa. E, só assim, é chegada a etapa 6, onde o modelo pode ser aplicado, ou seja, experimentos podem ser realizados e com os dados obtidos o modelo seja verificado.

3 LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON

A lei de resfriamento de Newton se refere à existência de uma proporcionalidade entre a variação da temperatura em relação ao tempo e a diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente (Boyce; DiPrima, 2010). Matematicamente, temos:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{amb}), \quad (3.1)$$

onde T , a temperatura do corpo, é dependente do tempo t , k é a constante de proporcionalidade e T_{amb} é a temperatura ambiente. Para que esse modelo seja validado, é necessário tomar as seguintes hipóteses: (i) $T = T(t)$ dependa do tempo e seja a mesma em todos os pontos do objeto observado; (ii) temperatura do ambiente permaneça constante no decorrer do processo; (iii) taxa de variação da temperatura no decorrer do tempo obedecer à condição da lei de resfriamento (Pereira *et al.*, 2019).

Podemos classificar facilmente a Equação 3.1 como uma equação diferencial ordinária de primeira ordem de variável separável. Desse modo, vamos apresentar a sua resolução através do método da separação de variáveis. Assim, a Equação 3.1 pode ser reescrita como:

$$\frac{dT}{T - T_{amb}} = -k dt. \quad (3.2)$$

Integrando ambos os lados da Equação 3.2 com relação ao tempo, tem-se:

$$\int \frac{dT}{T - T_{amb}} = \int -k dt. \quad (3.3)$$

Resolvendo a integral, ficamos com:

$$\ln|T - T_{amb}| = -kt + A. \quad (3.4)$$

Tomando a exponencial em ambos os lados da expressão, obtemos:

$$T - T_{amb} = e^{-kt} e^A. \quad (3.5)$$

Sabendo que e^A é constante, seguimos com:

$$T(t) = C e^{-kt} + T_{amb}. \quad (3.6)$$

Com a Equação 3.6, chegamos à solução geral do modelo matemático expresso pela Equação 3.1, onde C é uma constante real. Na ocasião onde a temperatura inicial T_0 é conhecida (como a que será abordada neste trabalho), essa constante C é obtida considerando $T_0 = T_{amb} + C \implies C = T_0 - T_{amb}$ e, assim, a solução analítica para a Equação 3.1 será:

$$T(t) = T_{amb} + (T_0 - T_{amb})e^{-kt}. \quad (3.7)$$

Neste ponto, é preciso destacar que para o valor de $k < 0$, a constante de proporcionalidade indica que a temperatura do objeto observado está aumentando o tempo, tratando-se de um caso de resfriamento. Assim, a aplicabilidade do modelo é um destaque, já que é cabível a exemplos não só de resfriamento de corpos, mas também de aquecimento.

3.1 COEFICIENTE DE RESFRIAMENTO

A partir desta seção, chamaremos a constante de proporcionalidade k de coeficiente de resfriamento. Essa mudança é realizada pois é sabido que o coeficiente de resfriamento irá variar a depender do material do objeto em estudo e, em termos matemáticos, pode ser representado através de uma relação expressa na Equação 3.8 (Ortega; Rosales, 2018),

$$k = \frac{\alpha S}{mc}, \quad (3.8)$$

onde α é o coeficiente de transferência de calor para convecção, S é a área da superfície de transferência de calor, m é a massa do corpo e c é o calor específico do material.

Em Árpád (2024) é apresentado uma nova roupagem para a lei de resfriamento de Newton cuja área de superfície específica do volume é uma variável importante no sistema onde a taxa de variação de temperatura também será dependente dela. No artigo, o autor investiga o processo de aquecimento de objetos através da LRN, analisando que "a taxa de diminuição da temperatura de um objeto depende adicionalmente da área da superfície específica do volume do objeto". Para isso, foi proposto um modelo teórico onde algumas observações foram apresentadas levando a elaboração de hipóteses referente aos parâmetros possuírem uma relação de dependência com a taxa da variação de temperatura. Dentre esses parâmetros é destacado a dimensão do objeto, que influenciará a área da superfície específica do volume. Essa influência é discutida ao longo do trabalho, resultando na apresentação de uma nova expressão para a equação geral da lei de resfriamento de Newton, Equação 3.6, a ela será agregada uma expressão idêntica a Equação 3.8, resultando na Equação 3.9. Nessa nova formulação, $\Theta(\tau)$ é o desvio da temperatura ambiente do objeto no momento τ , $\Theta(0)$ é o desvio da temperatura ambiente do objeto no instante $\tau = 0$, h^* é o coeficiente de transferência de calor por convecção corrigido com a capacidade térmica específica do volume e ω é a área de superfície específica do volume do objeto,

$$\Theta(\tau) = \Theta(0)e(-)h^{*\omega\cdot\tau}. \quad (3.9)$$

A Equação 3.9 é importante para os estudos envolvendo a lei de resfriamento de Newton, pois traz a evidência do coeficiente de resfriamento como uma variável a ser considerada e estudada com cuidado em sistemas termodinâmicos. É nessa perspectiva que nossa metodologia foi elaborada, para que a análise desse importante parâmetro seja bem realizada.

3.2 APLICAÇÕES

O estudo da LRN também está associado a investigações de caráter experimental, posto que sua base é utilizada em diversas áreas como a engenharia, forense, matemática, entre outras (Bassanezi, 2002). A vasta aplicabilidade da lei em discussão é sua principal característica, pois, a partir da análise de artigos e de outros trabalhos de conclusão de curso (Duarte A.A., 2019; PESCADOR, A.; OLIVEIRA, Z. R. Q. 2016; PEREIRA, I. M. d. N., 2019 e SANTOS, P. M. E., 2019) foi visto que, além das diferentes esferas de publicação como um indicativo de sua relação com múltiplas áreas, também destaca-se o aspecto de aplicação trazido por esses artigos - aspecto esse que será discutido ainda nesta seção.

No trabalho de conclusão de curso de Duarte (2019) intitulado "Resolução de problemas modelados pela Lei de Resfriamento de Newton", ela apresenta três aplicações modeladas pela lei em questão e as verifica, sendo elas o resfriamento de uma xícara de café, o resfriamento de uma barra de metal e a determinação do instante da morte de um corpo. Em suas considerações finais, a autora conclui que "...o modelo estudado atendeu às expectativas, descrevendo sistemas de pequena e grande complexidade com eficiência...".

Em um artigo publicado na Revista Produção e Desenvolvimento, os autores Pescador e Oliveira (2016) buscam analisar a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem, utilizando três métodos matemáticos: separação de variáveis, método de Euler e o método de Runge-Kutta. Em suas comparações, foi discutido o processo de resfriamento de um cadáver e o processo de resfriamento de uma xícara de café, escolhendo este último para o cálculo da solução analítica e o teste de comparação entre os métodos. Na conclusão, os autores destacam que os três resultados se mostram eficazes e que sua utilização deve ser alinhada ao objetivo do pesquisador que irá utilizá-la.

No trabalho intitulado "Modelagem matemática na lei de resfriamento de Newton: experiência com garrafas térmicas", publicado no *South American Journal of Basic Education Technical and Technological* por Santos *et al.* (2019), destaca-se a utilização do modelo de resfriamento de Newton para comparar a eficácia entre uma garrafa térmica de pressão e uma garrafa térmica de rosca. Durante a coleta de dados, os autores comparam os resultados obtidos a partir da lei de resfriamento de Newton. Ao final do artigo, os autores concluem que, apesar dos erros associados à coleta

de dados, a conservação de líquidos quentes e frios ocorre de maneiras diferentes nos modelos de garrafas térmicas. Com isso, a garrafa de rosca apresenta resultados mais satisfatórios com os líquidos quentes, enquanto a garrafa de pressão tem melhor eficácia com líquidos frios.

Em outro trabalho de conclusão de curso, a autora Pereira (2019) aborda aspectos envolvendo teoria e prática na Lei de Resfriamento de Newton. Ela discute algumas aplicações, entre elas estão: o resfriamento de materiais biológicos para preservação, o exame pericial de cadáveres e o resfriamento de uma xícara de café. Este último é mais detalhado, pois pauta a prática proposta pela autora.

Na descrição dos quatro trabalhos escolhidos, destacam-se dois aspectos a serem discutidos: o primeiro a respeito do objetivo dos autores e o segundo com relação aos exemplos de aplicações escolhidas. Para fins comparativos, os trabalhos escolhidos foram dispostos na Tabela 3.1. A organização do quadro tem como objetivo ajudar o leitor a relacionar o conteúdo em comum entre esses trabalhos.

AUTORES	TÍTULO	APLICAÇÃO ABORDADA
Adrieli Aline Duarte, PESCADOR, A.; OLIVEIRA, Z. R. Q.	Resolução de problemas modelados pela lei do resfriamento de Newton.	Resfriamento de uma xícara de café; resfriamento de uma barra de metal; determinação da causa de morte.
A. Pescador; Z. R. Q. Oliveira, Revista Produção e Desenvolvimento, 2019.	Resolução numérica da equação diferencial de resfriamento de Newton pelos métodos de Euler e Runge-Kutta	Resfriamento de uma xícara de café; resfriamento de um cadáver.
Aline W. Reculiano Fagundes, Priscila M. Engelhardt Santos, Claudemir M. Barboza, Juliano A. de Deus, SAJEBTT - UFAC, 2019.	Modelagem matemática na lei de resfriamento de Newton: experiência com garrafas térmicas	Lei de Resfriamento de Newton na garrafa de rosca e garrafa de pressão.
Ivaneide Magali Do Nascimento Pereira, Instituto Federal De Educação, Ciência E Tecnologia De Rondônia, 2019.	Teoria e prática na lei de resfriamento de Newton	Mudança de temperatura em peças de aço; Resfriamento de materiais biológicos para preservação; Resfriamento de leite cru; Exame pericial de cadáveres; Verificação com xícara de café.

Tabela 3.1 – Tabela de trabalhos analisados sobre resfriamento de Newton.

Com auxílio da Tabela 3.1, fica notório que há duas aplicações mais recorrentes entre os trabalhos selecionados: o resfriamento de uma xícara de café e o resfriamento de um cadáver. Esses exemplos são encontrados em três das quatro pesquisas selecionadas. A recorrência desses exemplos reforçam o caráter de validação do modelo matemático, indicando que, através de experimentos com sistema simples, como uma xícara de café, até sistemas complexos, como um cadáver, essa lei pode ser verificada. A sua verificação também é um fator recorrente nos trabalhos analisados.

Esse Trabalho de Conclusão de Curso, por sua vez, trata-se não só da verificação experimental da lei em discussão, como traz a proposta de um modelo matemático

para uma aplicação referente ao resfriamento da água e de peças metálicas inseridos em um calorímetro, sendo um diferencial desta pesquisa.

4 METODOLOGIA

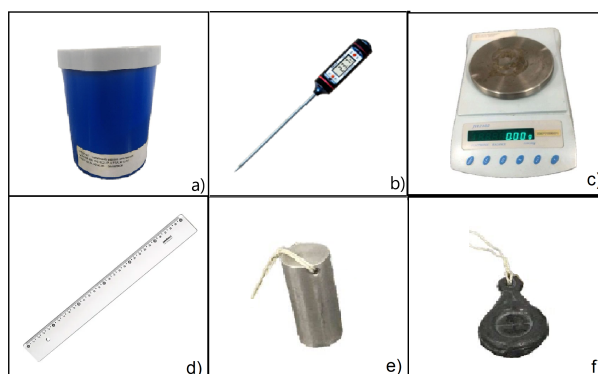
Entender a lei de resfriamento de Newton é de fundamental importância para o controle de processos que envolvem transferências de calor, tornando-a uma relevante ferramenta em diversas áreas e fazendo com que estudá-la seja imprescindível. Esta pesquisa, de caráter quantitativo e exploratório, busca, a partir do procedimento experimental desenvolvido, ampliar a verificação desejada e propor uma modelagem adequada a partir dos dados obtidos.

Este trabalho partiu de um experimento inicial envolvendo um calorímetro, termômetro digital e peças metálicas. Tal procedimento foi proposto na disciplina de Física Experimental II (FISC0096) do curso de Física - Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Nele, era possível observar a troca de calor entre um sistema finito e um reservatório térmico (sala) através do processo de convecção e, assim, verificar a modelagem proposta por Newton. Como foi visto no Capítulo 3, a lei de resfriamento de Newton contempla sistemas com uma única troca de calor. Com isso em mente, o experimento executado na disciplina fez com que surgisse o questionamento sobre a possibilidade de verificar experimentalmente mais de uma troca de calor em um sistema e propor, a partir disso, um modelo matemático descritor, sendo este o objetivo do trabalho.

4.1 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Para a realização da sequência de experimentos, utilizou-se os materiais da Figura 4.1, os quais consistem em um calorímetro (AZEHEB IND. DE EQUIP. LTDA), um termômetro digital culinário (TP01 e 0,01 °C de incerteza associada), balança digital (Jh2102 e 0,01g de incerteza associada), régua de 30 cm (0,0005m de incerteza associada), três peças cilíndricas de alumínio e três peças de chumbo.

Figura 4.1 – Aparatos experimentais: a) calorímetro; b) termômetro digital culinário; c) balança digital; d) régua de 30 cm; e) peça cilíndrica de alumínio; f) peça de chumbo.



Fonte: a autora (2025).

A realização da primeira sequência de experimentos teve como objetivo aprender, verificar as previsões teóricas e estudar a modelagem matemática para a lei de resfriamento de Newton. Primeiro, utilizando régua e balança, foram coletadas as medidas das dimensões e da massa do calorímetro e das peças metálicas utilizadas. Posteriormente, uma quantidade de água aquecida à $96\text{ }^{\circ}\text{C}$ foi acrescentada ao calorímetro até a altura de 8cm e, em seguida, o termômetro foi inserido na água, como mostra a Figura 4.2.

Figura 4.2 – Procedimento experimental 1.



Fonte: a autora (2025).

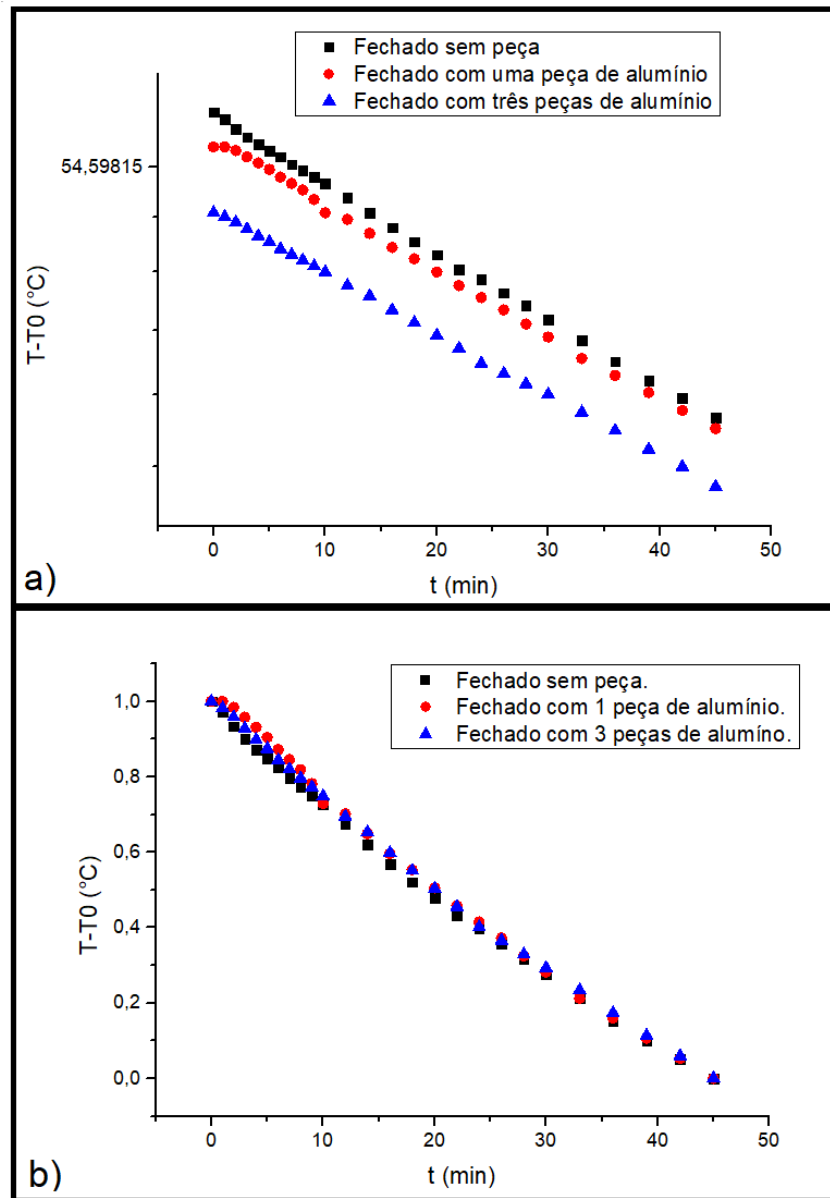
Foram coletadas visualmente as medidas da temperatura da água em função do tempo em intervalos de 1 minuto até completar 10 minutos e depois em intervalos de 5 minutos até os 45 minutos finais. De cada medida coletada, foi subtraída a temperatura ambiente. Esse mesmo procedimento foi repetido para o CACA, CFSP CFCA. A siglas contemplam as iniciais dos elementos que compõem os sistemas, todas elas estão descritas na Lista de Abreviaturas e Siglas na página 10.

Para a atividade experimental descrita acima, alguns cuidados de caráter procedimental foram tomados, como o de realizar os experimentos em um local com temperatura ambiente estável, descartar a água utilizada em cada experimento e iniciar um outro com água à temperatura ambiente. Ainda, é necessário resfriar o calorímetro e as peças utilizadas após cada experimento para que tais objetos estejam em temperatura ambiente antes do experimento seguinte.

Na segunda bateria de experimentos realizados, repetiu-se o primeiro passo da bateria anterior, isto é, o da coleta das dimensões e da massa dos objetos utilizados. Depois, o mesmo procedimento de coleta das temperaturas em função do tempo foi replicado para os seguintes sistemas: CFSP, CFC1A E CFCA. Com este conjunto de

dados, foi possível fazer uma análise dos gráficos da temperatura em função do tempo, obtidos com auxílio do *software Origin*.

Figura 4.3 – a) gráfico em escala monolog da diferença entre a temperatura medida e a temperatura ambiente; b) gráfico da diferença entre temperatura medida e a temperatura ambiente dividida pela temperatura máxima.



Fonte: a autora (2025).

No gráfico a) da Figura 4.3 tem-se da diferença entre a temperatura medida e a temperatura ambiente, em escala monolog. É válido destacar que a curva para o sistema fechado sem a peça metálica, diferentes dos outros dois sistemas, traça uma reta. Esse ajuste de curvas foi realizado primeiro para função decaimento para 1 exponencial (chamada pelo *origin* de expdec 1), como mostra a equação 4.1, onde y é a temperatura em função do tempo, y_0 a temperatura ambiente, A_1 para a função

decaimento com uma exponencial, é a diferença entre temperatura inicial e final, $1/t_1$ é o inverso do coeficiente de resfriamento e x o tempo,

$$y = y_0 + A_1 e^{-x/t_1}. \quad (4.1)$$

No gráfico b) da Figura 4.3, tem-se a diferença entre a temperatura medida e a temperatura ambiente dividida pela temperatura máxima. Assim, a curva foi melhor ajustada a fim de observar as três curvas saindo do mesmo ponto. Com esse gráfico também é notório os diferentes comportamentos entre as três curvas. Após a constatação disso para cada sistema, decidiu-se fazer o ajuste de curva dos dados a partir da função decaimento para duas exponenciais (chamada pelo *origin* de expdec 2), como mostra a equação 4.2,

$$y = y_0 + A_1 e^{-x/t_1} + A_2 e^{-x/t_2}. \quad (4.2)$$

Ao comparar as equações 4.1 e 4.2 com a equação da temperatura em função do tempo, quando a temperatura do objeto é igualada à temperatura nota-se as semelhanças em suas estruturas.

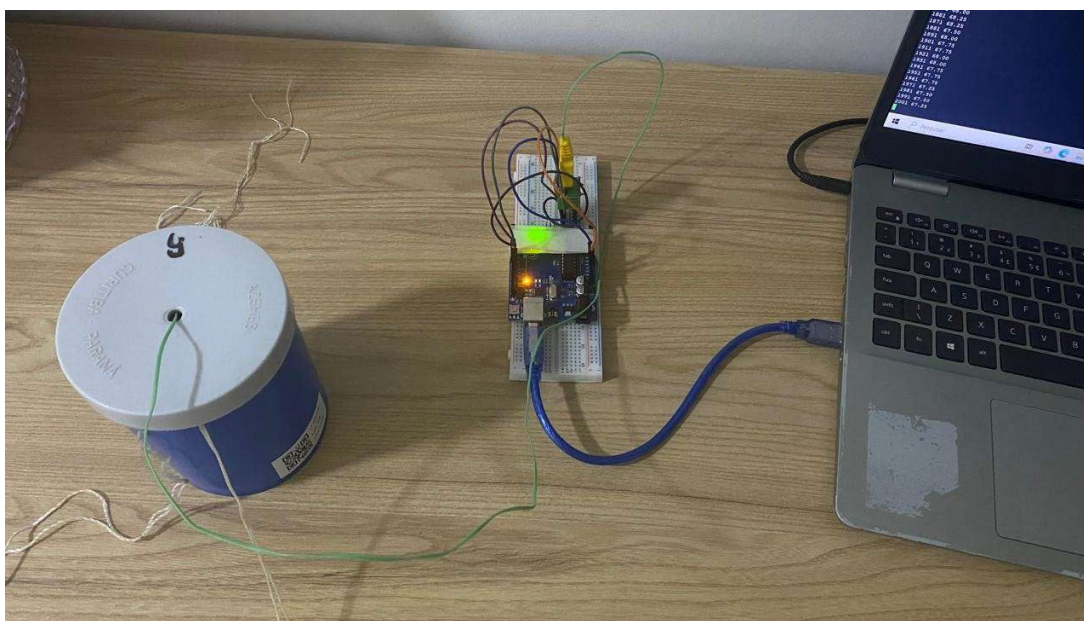
Desse modo, ao analisar os valores obtidos para os parâmetros das Equações 4.1 e 4.2, foi observado os valores dos coeficientes de resfriamento para cada sistema obtidos a partir da expdec 1 e da expdec 2. Nas equações que denotam as curvas encontradas, aparecem, como se suspeitava, o valores de t_1 iguais a t_2 para o sistema CFSP, já que esse sistema se refere a troca de calor entre o calorímetro e água, descrito através da modelagem proposta por Newton. Nos outros dois sistemas, eram esperados diferentes valores de t_1 e t_2 que explicitassem duas exponenciais referentes ao coeficiente de resfriamento. Ou seja, fisicamente ficaria evidente que no sistema termodinâmico há mais uma troca de calor que deve ser considerada. Ao tratar os dados do CFC1A E CFCA, a situação descrita não acontece em decorrência de algum erro procedimental não identificado.

Levando em consideração que os resultados, apesar de animadores, ainda apresentavam incertezas consideráveis, começou-se a pensar, a partir desse momento, no aprimoramento da coleta de dados e dos sistemas propostos. A proposta de um modelo matemático que descrevesse tais sistemas exigiria resultados mais precisos e configurações que permitissem observações mais diretas, onde os processos com mais de uma troca de calor ficassem fisicamente mais evidentes.

Com efeito, foi realizada a terceira bateria de experimentos, a principal para este trabalho. Nela, a coleta de dados e também os sistemas foram remodelados. Com isso, foi utilizado um termopar e um dispositivo arduino programado para ler a temperatura a cada 10 segundos, como mostrado na Figura 4.4. Com essa ferramenta, bastava aquecer a água com auxílio de um ebulidor elétrico e colocá-la dentro do calorímetro até que atingisse 7.5cm (altura que permite às peças inseridas ficarem imersas). Assim,

ao colocar a extremidade do termopar na água, foram registrados por 50 minutos a temperatura em função do tempo dos seguintes sistemas: CASP, CFSP, CACA, CFCA, CACC, CFCC.

Figura 4.4 – Procedimento experimental 3 - utilizando um termopar.



Fonte: a autora.

É válido destacar aqui nossa intenção ao coletar dados de sistemas para o calorímetro aberto. Suspeitava-se que para esses sistemas abertos, haveria uma mudança nos expoentes da Equação 4.2, a qual estaria relacionada ao aumento da área de contato em comparação ao sistema fechado. Essa suspeita será melhor discutida no Capítulo 5, a partir da apresentação de alguns dados coletados.

5 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A primeira etapa de coleta de dados consistiu na determinação das dimensões e das massas das peças e objetos utilizados. Ambas as medidas estão descritas na Tabela 5.1, onde considera-se m_{cal} como a massa do calorímetro, m_{ag} como a massa de água contida no calorímetro, m_a como a massa de uma peça metálica, m_c como a massa do chumbo, h_{cal} como a altura interna do calorímetro, d_{cal} como o diâmetro interno do calorímetro, h_a como a altura da peça de alumínio, d_a como o diâmetro das peças de alumínio, h_c como a espessura da peça de chumbo, d_c como o diâmetro da peça de chumbo, bem como suas incertezas associadas.

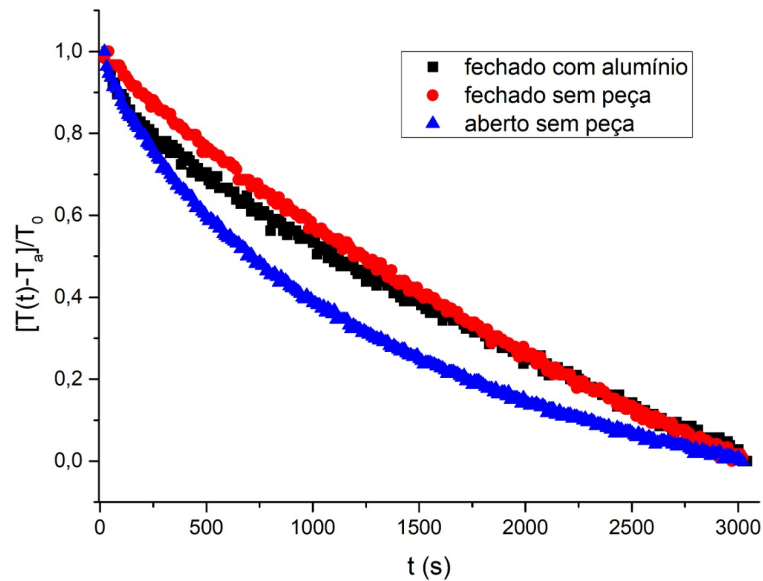
Tabela 5.1 – Dimensões e massa das peças e objetos utilizados.

Unidades	Medidas coletadas
$(m_{cal} \pm \Delta m_{cal})g$	$123,58 g \pm 0,01 g$
$(m_{ag} \pm \Delta m_{ag})g$	$128,87 g \pm 0,01 g$
$(m_a \pm \Delta m_a)g$	$30,67 g \pm 0,01 g$
$(m_c \pm \Delta m_c)g$	$95,11 g \pm 0,01 g$
$(h_{cal} \pm \Delta h_{cal})cm$	$0,09 m \pm 0,05 m$
$(d_{cal} \pm \Delta d_{cal})cm$	$0,077 m \pm 0,005 m$
$(h_a \pm \Delta h_a)m$	$0,037 m \pm 0,005 m$
$(d_a \pm \Delta d_a)m$	$0,015 m \pm 0,005 m$
$(h_c \pm \Delta h_c)m$	$0,012 m \pm 0,005 m$
$(d_c \pm \Delta d_c)m$	$0,032 m \pm 0,005 m$

Fonte: a autora (2025).

Posteriormente, a partir dos dados coletados para temperatura em função do tempo nos diferentes sistemas, foi possível plotar os gráficos da diferença entre a temperatura medida e a temperatura ambiente em função do tempo com ajuda do *software Origin*. Um dos exemplos encontra-se na Figura 5.1.

Figura 5.1 – Gráfico da temperatura em função do tempo para os sistemas analisados.



Fonte: a autora (2025)

Cada gráfico foi submetido a um ajuste de curva não linear para uma exponencial a partir da Equação 4.1. Os valores dos parâmetros encontrados estão na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Valores obtidos a partir do ajuste dos gráficos das temperaturas em função do tempo (decaimento com uma exponencial).

Sistemas	Função	y_0	A_1	t_1
CASP-1	<i>expdec1</i>	8,31702	55,64724	1317,9011
CASP-2	<i>expdec1</i>	10,58811	56,22292	1294,59653
CFSP-1	<i>expdec1</i>	18,60584	47,51919	3905,89847
CFSP-2	<i>expdec1</i>	11,72908	54,14429	3962,56598
CACA-1	<i>expdec1</i>	4,31702	52,9592	1779,47936
CACA-2	<i>expdec1</i>	8,67041	49,14057	1445,08837
CFCA-1	<i>expdec1</i>	-6,15386	63,57067	7138,58891
CFCA-2	<i>expdec1</i>	17,20494	31,78534	3696,90259
CACC-1	<i>expdec1</i>	3,89236	53,00712	1327,4035
CACC-2	<i>expdec1</i>	9,43654	51,9406	1363,68144
CFCC-1	<i>expdec1</i>	6,73682	54,54132	4766,632
CFCC-2	<i>expdec1</i>	16,29104	46,80058	3343,50637

Fonte: autora (2025).

Os dados coletados também foram ajustados para a Equação 4.2 para que os coeficientes de resfriamento das trocas de calor em cada sistema fossem obtidos. Seus valores estão na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Valores obtidos a partir do ajuste dos gráficos das temperaturas em função do tempo (decaimento com duas exponenciais).

Sistemas	Função	y_0	A_1	t_1	A_2	t_2
CASP-1	<i>expdec2</i>	4,11604	54,33444	1697,37645	8,614	230,79228
CASP-2	<i>expdec2</i>	4,4742	11,35085	298,41291	53,96958	1870,02816
CFSP-1	<i>expdec2</i>	18,60584	23,75959	3905,89847	23,75959	3905,89864
CFSP-2	<i>expdec2</i>	11,72908	27,07214	3962,56598	27,07214	3962,56427
CACA-1	<i>expdec2</i>	4,31702	26,4796	1779,47936	26,4796	1778,4793
CACA-2	<i>expdec2</i>	6,62384	11,20964	52,13779	49,36023	1634,07992
CFCA-1	<i>expdec2</i>	-6,15387	31,78534	7138,40484	31,78534	7138,77547
CFCA-2	<i>expdec2</i>	6,21024	4,41058	94,48426	51,38921	5295,64494
CACC-1	<i>expdec2</i>	-1,53731	10,25808	322,78735	50,72797	1882,40897
CACC-2	<i>expdec2</i>	3,56152	10,09528	306,58234	50,47192	1964,02819
CFCC-1	<i>expdec2</i>	6,73682	27,27071	4766,64031	27,27071	4766,62369
CFCC-2	<i>expdec2</i>	16,29104	23,35029	3343,50616	23,35029	3343,50665

Fonte: autora (2025).

Antes de compararmos os valores encontrados para os parâmetros nos sistemas analisados, vamos apontar algumas observações que facilitaram nossa modelagem. A primeira delas é referente aos sistemas fechados envolvendo peças de chumbo. É possível observar que os valores dos seus parâmetros eram praticamente os mesmos nas duas funções decaimento que eles foram submetidos. Isso, porém, não foi observado para os sistemas fechados envolvendo as peças de alumínio, por exemplo, onde houve uma diferença significativa entre as medidas. Tal evidência é justificada pelos valores que correspondem ao calor específico dos distintos materiais: $900 J/kgK$ para o alumínio e $218 J/kgK$ para o chumbo (Halliday; Resnick; Walker, 2000). É notório que o chumbo precisa de menos energia para mudar sua temperatura em $1^\circ C$, de modo que este material requer maior sensibilidade na coleta de dados para que, no sistema fechado, expresse variações consideráveis entre os valores dos seus coeficientes de transferência de calor. Já no sistema envolvendo as peças de alumínio, esta diferença pode ser notada com o método de coleta escolhido. Portanto, para análise de dados considerando o modelo proposto para duas exponenciais, os sistemas que envolveram peças de chumbo foram descartados.

Um parâmetro importante de ser analisado é o coeficiente de resfriamento e os valores obtidos para cada sistema observado, pois a diferença entre os valores obtidos caracteriza a evidência de mais de uma troca de calor nos sistemas estudados. Com isso em mente, tomaremos o coeficiente de resfriamento como o inverso de t_1 e t_2 , já descrito nas Tabelas 5.2 e 5.3. Seus respectivos valores estão dispostos na Tabela 5.4 e Tabela 5.5, onde k é o coeficiente de resfriamento obtido pela função decaimento

para uma exponencial e k_1 e k_2 são os coeficientes de resfriamento obtidos através da função decaimento para duas exponenciais.

Tabela 5.4 – Coeficientes de resfriamento obtidos pelo ajuste do *Origin* para os sistemas sem peças metálicas.

Sistemas	Função decaimento	k	k_1	k_2
CFSP-1	expdec1	0,0002560	-	-
	expdec2	-	0,0002560	0,0002560
CFSP-2	expdec1	0,0002523	-	-
	expdec2	-	0,0002523	0,0002523
CASP-1	expdec1	0,0007587	-	-
	expdec2	-	0,0005890	0,00433
CASP-2	expdec1	0,00077244	-	-
	expdec2	-	0,00053475	0,00335

Fonte: a autora (2025).

Tabela 5.5 – Tabela de coeficientes de resfriamento obtidos pelo ajuste do *Origin* para sistemas com peças metálicas.

Sistemas	Função decaimento	k	k_1	k_2
CFCA-1	expdec1	0,000140084	-	-
	expdec2	-	0,000140084	0,000140084
CFCA-2	expdec1	0,000270497	-	-
	expdec2	-	0,000188834	0,01058
CACA-1	expdec1	0,000561962	-	-
	expdec2	-	0,000561962	0,000561962
CACA-2	expdec1	0,000691999	-	-
	expdec2	-	0,000611965	0,01918

Fonte: a autora (2025).

Nos sistemas CFCA-1 e CACA-1, os coeficientes k , k_1 e k_2 foram os mesmo em cada sistema. Este comportamento deve-se a um erro na coleta de dados ou à sensibilidade ainda não atingida na coleta de dados dos sistemas analisados.

A fim de ampliar a discussão sobre os parâmetros que compõem o modelo matemático em proposição, foram obtidos os coeficientes de resfriamento através da Equação 3.8, que reconheceremos como os valores teóricos para tal quantidade. Ao aplicar a Equação 3.8 para ambos sistemas sem as peças metálicas (CASP e CFSP), tomamos o coeficiente de troca de calor por convecção como $\alpha = 500 \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ (Silva *et al.*, 2018), a massa de água contida no calorímetro como $m = 0,128 \text{ kg}$ e $c = 4186 \text{ J}/\text{kg K}$ como o calor específico da água (Halliday; Resnick; Walker, 2000). Com relação à área de transferência de calor entre calorímetro-ambiente, foram tomados valores diferentes para cada sistemas: $S_f = 0,00002826 \text{ m}^2$ refere-se a área de transferência do CFSP e $S_a = 0,0046654265 \text{ m}^2$ refere-se a área de transferência do CASP.

Também foram obtidos os valores teóricos para os coeficientes dos sistemas com as peças metálicas. A análise para esses sistemas, que envolvem o conjunto de peças de alumínio, leva a uma consideração importante referente as mais de uma troca de calor presentes neles. É razoável afirmar que o coeficiente de resfriamento do sistema água-alumínio deve ser semelhante ao sistema alumínio-água, uma vez que compreende-se que o calor transferido do sistema água-alumínio é o mesmo calor transferido do sistema alumínio-água. Sendo assim, nos cálculos para o CFCA, foram utilizados parâmetros referente ao alumínio, ou seja, foram utilizados o coeficiente de troca de calor por convecção, $\alpha = 500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ (Silva *et al.*, 2018); a massa das peças metálicas, $m = 0,0921 \text{ kg}$; o calor específico do alumínio, $c = 903 \text{ J}/\text{kgK}$; e a área de transferência de calor, isto é, a área de contato entre as peças e a água, $S = 0,00628785 \text{ m}^2$.

Para obter o valor teórico do coeficiente de resfriamento do sistema CACA, utilizamos os parâmetros tomando a transferência de calor do sistema água-ambiente como referência: $\alpha = 500 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ como o coeficiente de troca de calor por convecção (Silva *et al.*, 2018); $m = 0,128 \text{ kg}$ como a massa de água contida no calorímetro; $c = 4186 \text{ J}/\text{kgK}$ como o calor específico da água (Halliday; Resnick; Walker, 2000); e $S = 0,004654265 \text{ m}^2$ como a área de transferência de calor desse sistema.

Os valores teóricos obtidos para os coeficientes de resfriamento para os sistemas descritos nos parágrafos acima estão dispostos na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Valores teóricos dos coeficientes de resfriamento dos sistemas CFSP, CASP, CFCA E CACA.

Sistemas	Valores teóricos de k (k_t)
CFSP	0,00002
CASP	0,004
CFCA	0,037
CACA	0,004

Fonte: a autora (2025).

Com os valores teóricos e os valores experimentais em mãos, podemos avançar através de comparações entre as Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6.

O primeiro ponto a se destacar é o valor teórico do coeficiente de resfriamento para o CACA referente a troca de calor água-ambiente ($k_t = 0,004$), e que pode ser comparado ao valor teórico para o CFCA ($k_t = 0,03$), sendo este último a troca de calor entre o sistema água-alumínio. A partir desses dados, é notório que a troca de calor entre alumínio-água é mais eficiente e, portanto, possui um valor maior de k_t comparado ao valor do coeficiente de resfriamento do sistema com o calorímetro aberto. Esta constatação também é verificada com os ajustes do *Origin* através da função decaimento com duas exponenciais (expdec2), onde, para o CACA, foi obtido

$k_1 = 0,0006$ e, para o CFCA, $k_1 = 0,0001$. Estes coeficientes indicam a troca de calor entre água-ambiente em ambos os sistemas. Para $k_2 = 0,01$ e $k_2 = 0,01058$ têm-se a troca de calor com o ambiente para o CACA e CFCA. Percebe-se que troca de calor com ambiente em ambos os sistemas é menos eficiente, enquanto a troca de calor entre água-alumínio é mais rápida. Isso é destacado pela diferença entre os valores dos coeficientes de resfriamento: o valor maior indica que o sistema é capaz de mover mais calor do ambiente com a mesma quantidade de energia consumida.

Com relação aos sistemas sem as peças metálicas, a análise parte do CFSP. Nele, o valor teórico do coeficiente de resfriamento ($k_t = 0,00002$) teve uma casa decimal a mais que o valor experimental obtido através da função decaimento com uma exponencial ($k = 0,0002$). A utilização da função com uma exponencial deve-se ao fato de que, para o sistema fechado, não foi identificado mais de uma troca de calor. Para o CASP, o valor teórico para o coeficiente de resfriamento do sistema água-ambiente ($k_t = 0,004$) foi semelhantes ao valor obtido através do ajuste com o *software* ($k_2 = 0,004$). O que se destaca é o fato de que, no ajuste com o *Origin*, obteve-se valores diferentes entre k_1 e k_2 , com $k_2 = 0,0005$. Este valores distintos são um indicativo de que, no sistema em questão, mais uma troca de calor foi considerada - a troca de calor entre água e as próprias paredes do calorímetro. O calorímetro possui uma estrutura onde suas paredes funcionam como um isolante térmico. Contudo, como nesse sistema o calorímetro estava aberto, é possível que suas paredes também sofreram um processo de resfriamento não tão eficiente quanto o da água inserida nele.

Os coeficientes de resfriamento discutidos indicam a importância desse parâmetro no estudo dos resfriamentos dos corpos, evidenciando sua relevância em descrever o comportamento dos sistemas em questão. Com isso, podemos retomar a Equação 4.2 organizando sua estrutura e expandindo o coeficiente de resfriamento com a utilização da Equação 3.8. O modelo matemático para resfriamento de sistemas envolvendo mais uma troca de calor está expresso na Equação 5.1, onde $T(t)$ é a temperatura do sistema em função do tempo, T_{amb} é a temperatura ambiente, A_1 e A_2 são constantes referentes as trocas envolvidas, α é o coeficiente de transferência de calor por convecção, S_1 é a superfície de transferência de calor entre sistema-ambiente, S_2 é a superfície de transferência de calor entre água-alumínio, m é a massa da água, c é o calor específico da água e t é o tempo,

$$T(t) = T_{amb} + A_1 e^{-\left(\frac{\alpha S_1}{mc}\right)t} + A_2 e^{-\left(\frac{\alpha S_2}{mc}\right)t}. \quad (5.1)$$

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho, foi demonstrado a importância da modelagem matemática e da análise de dados experimentais para a compreensão da Lei de Resfriamento de Newton em contextos mais complexos, considerando mais de uma troca de calor. Através da modelagem matemática e da verificação experimental, propomos um modelo matemático que agrega ao estudo do resfriamento dos corpos.

O método de coleta de dados utilizado, o termopar associado ao calorímetro, se mostrou eficiente já que, para além de termos práticos de coleta, se obteve um vasto número de dados experimentais. Através da análise dos coeficientes de resfriamento, obtidos com auxílio do *software Origin* utilizado, constatou-se como a diferença entre os valores obtidos são um indicador da presença de mais de uma troca de calor nos sistemas estudados. Embora alguns dados tenham sido descartados devido a erros aleatórios, na maioria dos sistemas obteve-se uma concordância satisfatória entre aqueles onde acreditava-se haver mais de uma troca de calor e aqueles onde não.

Embora este trabalho tenha se concentrado na análise do coeficiente de resfriamento, uma perspectiva futura interessante seria investigar as constantes A_1 e A_2 presentes no modelo proposto. Essas constantes podem estar associadas às propriedades dos materiais que envolvem as trocas de calor dos sistema, e seu estudo poderia levar a avanços significativos na modelagem e previsão de fenômenos térmicos.

Em resumo, os resultados obtidos destacam a eficiência do método utilizado e as vantagens de considerar mais de uma troca de calor no estudo da termodinâmica, além de apontar para futuras direções de pesquisa que podem levar a avanços significativos na área.

REFERÊNCIAS

- ARAGÃO, M. d. F. A.; BARBOSA, J. L. d. C. A história da Modelagem Matemática: Uma perspectiva de didática no Ensino Básico. **IX EPBEM–Encontro Paraibano de Educação Matemática, Campina Grande**, 2016.
- BARBOSA, M. R. Alexandre Koyré e a Revolução Científica do século XVII: formulação de um novo conceito para a ciência experimental. **Anais do XXVI Simpósio Nacional de História–ANPUH, São Paulo**, 2011.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Editora Contexto, 2002.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. LTC Rio de Janeiro, 2010.
- DENG, J. *et al.* The adsorption heat of methane on coal: Comparison of theoretical and calorimetric heat and model of heat flow by microcalorimeter. **Fuel**, v. 237, p. 81–90, 2019.
- FRAGA SANT’ANA, M. de; SANT’ANA, A. A. MODELOS MATEMÁTICOS A PARTIR DA CONSTRUÇÃO DE UM TERMÔMETRO DE ÁGUA. **VIDYA**, v. 34, n. 1, p. 15–15, 2014.
- GOMES, M.; LOBO, T.; SILVA, M. A lei do resfriamento de Newton no cálculo do calor específico de metais: o uso do Arduino e os sensores Lm35 e Ds18b20.. **Revista do Professor de Física**, v. 4, n. 3, p. 73–83, 2020.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas E Termodinâmica. Vol. 2** .. Grupo Gen-LTC, 2000.
- HÜLSENDEGER, M. J. A História da Ciência no ensino da Termodinâmica: um outro olhar sobre o ensino de Física. **Ensaio Pesquisa em Educação em Ciências (Belo Horizonte)**, v. 9, n. 02, p. 222–237, 2007.
- OLIVEIRA, M. J. de **Termodinâmica**. Editora Livraria da Física, 2005.
- ORTEGA, A.; ROSALES, J. J. Newton’s law of cooling with fractional conformable derivative. **Revista mexicana de física**, v. 64, n. 2, p. 172–175, 2018.
- PEREIRA, I. M. d. N. *et al.* Teoria e prática na lei de resfriamento de Newton. , 2019.
- PESCADOR, A.; OLIVEIRA, Z. R. Q. Resolução Numérica da equação diferencial de resfriamento de newton pelos métodos de EULER e RUNGE-KUTTA. **Revista Produção e Desenvolvimento**, v. 2, n. 1, p. 10–25, 2016.

SANTOS, P. M. E. *et al.* MODELAGEM MATEMÁTICA NA LEI DE RESFRIAMENTO DE NEWTON: EXPERIÊNCIA COM GARRAFAS TÉRMICAS. **South American Journal of Basic Education, Technical and Technological**, v. 6, n. 2, p. 21–39, 2019.

SILVA, L. N. *et al.* **Determinação do Coeficiente de Transferência de Calor por Convecção Natural e Forçada em um Corpo de Alumínio**. [S.I.]: CONAPESC, 2018.

ZATERKA, L. **Filosofia experimental na Inglaterra do séc. XVII**, A. Editora Humanitas, 2004.