



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE FÍSICA-LICENCIATURA

JOSÉ MEDEIROS DA COSTA NETTO

**UM MODELO TERMODINÂMICO PARA ENERGIA ESCURA INCLUINDO
PROCESSOS DE CRIAÇÃO OU DESTRUIÇÃO DE PARTÍCULAS**

CARUARU
2025

JOSÉ MEDEIROS DA COSTA NETTO

**UM MODELO TERMODINÂMICO PARA ENERGIA ESCURA INCLUINDO
PROCESSOS DE CRIAÇÃO OU DESTRUIÇÃO DE PARTÍCULAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Física-Licenciatura do Centro Acadêmico Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Área de concentração: Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Heydson Henrique Brito da Silva

CARUARU
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Costa Netto, José Medeiros da.

Um modelo termodinâmico para energia escura incluindo processos de criação ou destruição de partículas / José Medeiros da Costa Netto. - Caruaru, 2025.
68 p. : il.

Orientador(a): Heydson Henrique Brito da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Física - Licenciatura, 2025.

Inclui referências, apêndices.

1. Energia escura. 2. Termodinâmica. 3. Criação de partículas. 4. Destruição de partículas. I. Silva, Heydson Henrique Brito da. (Orientação). II. Título.

530 CDD (22.ed.)

JOSÉ MEDEIROS DA COSTA NETTO

**UM MODELO TERMODINÂMICO PARA ENERGIA ESCURA INCLUINDO
PROCESSOS DE CRIAÇÃO OU DESTRUIÇÃO DE PARTÍCULAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à coordenação do curso de Física-Licenciatura do Centro Acadêmico Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Física.

Aprovado em: 04/08/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Heydson Henrique Brito da Silva (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Javier Ernesto Gonzalez Sanchez (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Profa. Dra. Priscila Valdênia dos Santos (Examinadora Interna)
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Esta é a última parte que escrevo deste trabalho. Definitivamente, a mais difícil. Não me entendam errado: sei muito bem a quem desejo dedicar o capítulo de agradecimentos, mas a forma é mais importante do que o conteúdo. De todo modo, cá estou para fazer isso. Então deixemos de meias palavras e vamos às vias de fato!

Gostaria de começar agradecendo à minha mãe, Prycilla, pelo apoio incondicional tanto na vida pessoal quanto na carreira acadêmica. Se não fosse pelo enorme incentivo dado pela minha mãe desde minha infância, tenho certeza de que não seria quem sou hoje. Mais: tenho plena consciência de que este trabalho que você, leitor - a quem também agradeço -, está contemplando, não sairia do mundo das ideias. Sou uma pessoa de extrema sorte pela mãe que tenho e pelo amor que ela nutre por mim. Amo-a na mesma intensidade. Ainda dentro do núcleo familiar, agradeço ao meu tio Neto, (quase) xará que carinhosamente chamo de “Pato” devido aos bons tempos em que jogamos *videogame* durante minha infância, adolescência e adultícia. Por mais que nunca tenhamos tido conversas sobre assuntos sérios, ele se fez uma figura paterna muito presente em minha vida e me ajudou, mesmo sem saber, em diversas situações. Graças à sua pessoa, o amor pelo vermelho e o negro (não o francês de Stendhal, mas sim o pernambucano de Guilherme de Aquino) floresceu em meu coração.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Heydson, por todos os ensinamentos compartilhados comigo desde que começamos a trabalhar juntos no longínquo ano de 2021. Foi sua confiança em meu potencial que me fez alçar voos que jamais imaginaria. Levando em consideração que este trabalho é uma continuação direta da tese de doutorado de meu orientador, tenha certeza literal de que ele também foi imprescindível para seu nascimento. Também agradeço ao professor Javier Gonzalez, da Universidade Federal de Sergipe (UFS), membro da banca, pela disponibilidade e colaboração na expansão do trabalho. Sou grato à professora Priscila, do Centro Acadêmico do Agreste (CAA) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), por ter aceitado gastar o seu final de semana analisando o conteúdo aqui posto em prol de poder participar, de última hora, de minha defesa.

Foram vários os colegas com que tive contato durante a graduação. Em particular, gostaria de agradecer à minha amiga Yasmin por estar ao meu lado. Simples, mas sincero. A sua amizade foi e é um enorme porto seguro para mim. Desde as brincadeiras e as piadas internas até os momentos mais sérios e as reuniões de estudo, todo tempo passado ao seu lado foi e é especial. Que o chamado da nossa amizade continue a ser atendido.

Por fim, agradeço à Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (FACEPE) pela bolsa de iniciação científica concedida à mim, José Medeiros, entre março de 2023 e julho de 2024.

“O que as coisas em si possam ser, não o sei, nem necessito sabê-lo, porque uma coisa jamais pode aparecer-me de outro modo a não ser no fenômeno.”

Immanuel Kant

RESUMO

Análises termodinâmicas da energia escura enquanto um fluido relativístico indicam que essa misteriosa componente do universo mimetiza uma pressão viscosa volumar quando o parâmetro de sua equação de estado barotrópica varia no tempo, sendo este um efeito *à posteriori* que a tira do limite adiabático. Como em cosmologia viscosidade volumar e criação ou destruição de matéria são processos intimamente relacionados, propomos neste trabalho um breve estudo termodinâmico da energia escura considerando que partículas podem ser criadas ou destruídas no fluido. Realizamos, dessa forma, uma generalização primitiva dos modelos propostos até aqui. Derivamos novas expressões para grandezas como densidade de partículas, densidade de entropia etc. que se mostraram sensíveis a esse novo ingrediente. Também obtivemos vínculos termodinâmicos inéditos e os comparamos com aqueles onde o número de partículas é conservado. Em particular, verificamos que quando há processos de destruição de partículas, a energia escura tende à constante cosmológica com o passar do tempo independentemente do sinal do seu potencial químico e sem violar as leis da termodinâmica.

Palavras-chave: criação de partículas; destruição de partículas; energia escura; termodinâmica.

ABSTRACT

Thermodynamic analyses of dark energy as a relativistic fluid indicate that this mysterious component of the universe mimics a bulk viscous pressure when the parameter of its barotropic equation of state varies in time, which is an *a posteriori* effect that takes it out of the adiabatic limit. Since in cosmology bulk viscosity and creation or destruction of matter are closely linked processes, we propose in this work a brief thermodynamic study of dark energy considering that particles can be created or destroyed in the fluid. In this way, we perform a primitive generalization of the models proposed so far. We derive new expressions for quantities such as particle density, entropy density etc. that have proven to be sensitive to this new ingredient. We also obtain new thermodynamic constraints and compare them with those where the number of particles is conserved. In particular, we found that when there are processes of particle destruction, dark energy tends towards the cosmological constant over time regardless of the sign of its chemical potential and without violating the laws of thermodynamics.

Keywords: dark energy; particle creation; particle destruction; thermodynamics.

LISTA DE FIGURAS

<p>Figura 1 – Na esquerda, temos uma representação esquemática de um universo com curvatura positiva (uma esfera), onde $\alpha + \beta + \gamma > \pi$; no meio, temos uma representação esquemática de um universo com curvatura nula (um plano), onde $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; na direita, temos uma representação esquemática de um universo com curvatura negativa (uma sela), onde $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.</p>	17
<p>Figura 2 – Plote da velocidade radial (eixo das ordenadas) em função da distância (eixo das abscissas) para um certo conjunto de nebulosas. Nitidamente $v \propto d$.</p>	22
<p>Figura 3 – A imagem de cima mostra o diagrama de Hubble para amostras de SNe Ia a baixos e altos <i>redshifts</i> com distâncias medidas através do método MLCS, que utiliza a forma de curvas de luz multicoloridas para realizar medições. Como podemos ver, o melhor <i>fit</i> ocorre para modelos de universo com $\Omega_M = 0.24$ e $\Omega_\Lambda = 0.76$. A imagem de baixo mostra a disparidade entre os dados e cosmologias com $\Omega_M = 0.20$ e $\Omega_\Lambda = 0.00$.</p>	24
<p>Figura 4 – Em (a), temos o diagrama de Hubble para 60 SNe Ia, 42 com alto z e 18 com baixo z, obtidos pelo <i>Calán/Tololo Supernova Survey</i>. Em (b), temos a magnitude residual para seis tipos de cosmologias planas, com o melhor <i>fit</i> sendo aquele onde $\Omega_M = 0.28$ e $\Omega_\Lambda = 0.72$. Em (c), temos os resíduos normalizados pela incerteza do cenário que melhor descreve os dados.</p>	25
<p>Figura 5 – Composição atual do universo.</p>	27
<p>Figura 6 – Gráfico do fator de escala $a(t)$ em função do tempo t para dez valores distintos de ω.</p>	29
<p>Figura 7 – Representação esquemática dos intervalos possíveis para $\omega(a)$ para cada valor de potencial químico. Note que para $\mu = 0$ a constante cosmológica é recuperada e para $\mu < 0$ o regime <i>phantom</i> é permitido.</p>	41
<p>Figura 8 – Representação dos vínculos das Eqs.(3.59, 3.60, 3.61) no espaço paramétrico $\omega_0 - \omega_a$ para os três cenários de potencial químico: $\mu > 0$ (esquerda), $\mu = 0$ (direita) e $\mu < 0$ (esquerda).</p>	42
<p>Figura 9 – Representação do comportamento do vínculo da Eq.(5.23) para $\mu > 0$, $\mu = 0$ e $\mu < 0$ quando $\Gamma = constante > 0$. As linhas pontilhadas indicam os valores constantes de $\omega(a)_{min}$ quando não há criação de partículas no fluido.</p>	52

Figura 10 – Representação do comportamento do vínculo da Eq.(5.23) para $\mu > 0$, $\mu = 0$ e $\mu < 0$ quando $\Gamma = constante < 0$. As linhas pontilhadas indicam os valores constantes de $\omega(a)_{min}$ quando não há destruição de partículas no fluido.	52
Figura 11 – Esquema comparativo para o intervalo de $\omega(a)$ quando $\Gamma = 0$ (parte contínua) e $\Gamma > 0$ (parte hachurada) para um dado instante de tempo. A presença de uma fonte de partículas faz com que $\omega(a)$ se afaste da barreira Λ independente do sinal do potencial químico.	53
Figura 12 – Esquema comparativo para o intervalo de $\omega(a)$ quando $\Gamma = 0$ (parte contínua) e $\Gamma < 0$ (parte hachurada) para um dado instante de tempo. A presença de um sumidouro de partículas faz com que $\omega(a)$ se aproxime da barreira Λ independente do sinal do potencial químico.	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BAO	<i>baryon acoustic oscillations</i>
CDM	<i>cold dark matter</i>
CMB	<i>cosmic microwave background</i>
CPL	Chevallier-Polarski-Linder
DESI	<i>Dark Energy Spectroscopic Instrument</i>
EoS	<i>equation of state</i>
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker
HSST	<i>High-z Supernova Search Team</i>
HST	<i>Hubble Space Telescope</i>
SCP	<i>Supernova Cosmology Project</i>
SNe Ia	supernovas tipo Ia
TCC	Trabalho de Conclusão de Curso
TQC	Teoria Quântica de Campos
TRG	Teoria da Relatividade Geral

LISTA DE CONVENÇÕES, NOTAÇÕES E SÍMBOLOS

Assinatura métrica: (+, -, -, -).

Adotamos unidades em que $8\pi G = c = 1$.

$1 pc = 3.0857 \times 10^{16} m$.

$1 M_{\odot} = 1.9891 \times 10^{30} kg$.

Derivada temporal: $\dot{f} \equiv df/dt$.

Derivada parcial: $\phi_{,\mu} \equiv \partial\phi/\partial x^{\mu}$.

Símbolo de Christoffel: $\Gamma^{\xi}_{\mu\nu}$.

Derivada covariante de tensor $\binom{0}{1}$: $p_{\mu;\nu} = p_{\mu,\nu} - p_{\xi}\Gamma^{\xi}_{\mu\nu}$.

Derivada covariante de tensor $\binom{1}{0}$: $V^{\mu}_{;\nu} = V^{\mu}_{,\nu} + V^{\xi}\Gamma^{\mu}_{\nu\xi}$.

Derivada covariante de tensor $\binom{2}{0}$: $T^{\mu\nu}_{;\alpha} = T^{\mu\nu}_{,\alpha} + T^{\xi\nu}\Gamma^{\mu}_{\alpha\xi} + T^{\mu\xi}\Gamma^{\nu}_{\alpha\xi}$.

Estrangeirismo em *itálico*.

Índices gregos variam de 0 a 3; índices latinos variam de 1 a 3.

Índices repetidos obedecem à convenção de Einstein.

Subscrito 0 indica medições no tempo presente $t = t_0$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	16
2.1	DINÂMICA DO COSMOS	16
2.2	O UNIVERSO ESTÁ EM EXPANSÃO	20
2.3	O UNIVERSO ESTÁ EM EXPANSÃO ACELERADA	23
2.3.1	O PROBLEMA DA CONSTANTE COSMOLÓGICA	26
2.4	MODELOS ALTERNATIVOS	28
3	TERMODINÂMICA DA ENERGIA ESCURA SEM CRIAÇÃO OU DESTRUÍÇÃO DE PARTÍCULAS	31
3.1	MODELO I	31
3.2	MODELO II	36
3.3	MODELO III	37
4	VISCOSIDADE VOLUMAR EM COSMOLOGIA	44
5	TERMODINÂMICA DA ENERGIA ESCURA COM CRIAÇÃO OU DESTRUÍÇÃO DE PARTÍCULAS	47
5.1	EQUAÇÕES BÁSICAS	47
5.2	NOVOS VÍNCULOS TERMODINÂMICOS	52
6	CONCLUSÕES	57
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE GENERALIZADA	64
	APÊNDICE B – O PROBLEMA DO POTENCIAL QUÍMICO	67

1 INTRODUÇÃO

A cosmologia é uma ciência megalomaníaca. Ao se propor a estudar o universo como um todo, a cosmologia se coloca numa espécie de patamar de soberba em relação às outras áreas da física. Porém, por mais que esse objetivo aparente ser uma tarefa árdua de se atingir, a cosmologia consegue transformar a megalomania em realidade: em largas escalas o universo é homogêneo e isotrópico (Weinberg, 1972, 2008). É devido à esse princípio, chamado de princípio cosmológico, que podemos tratar o universo não como uma coleção aleatória de estruturas, mas sim como uma entidade única.

Em 1929, Edwin Hubble (1889-1953), usando dados de *redshift* de galáxias distantes, pôde concluir que há uma relação de proporcionalidade entre a velocidade de recessão desses objetos e sua distância até a Terra (Hubble, 1929). Segundo o astrônomo estadunidense, essas duas quantidades eram tais que, quanto mais distante a galáxia estiver, maior sua velocidade radial. Isso, no entanto, não era novidade para o padre e físico belga Georges Lemaître (1894-1966), que havia chegado a essa mesma realização de maneira independente em 1927 (Lemaître, 1927). Ora, uma vez que as galáxias distantes de nós estão se afastando cada vez mais e levando em consideração que, pelo princípio cosmológico, não há lugares privilegiados no cosmos, a conclusão de que o universo está em expansão torna-se imediata. Essa quebra de paradigma em relação ao modelo corrente de universo estático causou um grande desconforto na comunidade acadêmica. Porém, os anos foram passando e os dados, que se tornaram mais refinados e precisos, não mentiam: estamos num universo que se expande (Aghanim *et al.*, 2020).

Não só isso, mas estamos num universo que se expande aceleradamente. Desde 1998, graças aos esforços independentes dos projetos *High-z Supernova Search Team* (HSST) e *Supernova Cosmology Project* (SCP), sabemos que há uma fonte extra de energia preenchendo cerca de 70% do universo e que torna sua expansão acelerada (Perlmutter *et al.*, 1999; Riess *et al.*, 1998). Essa nova componente não interage com a luz, tendo sido detectada indiretamente a partir de seus efeitos sobre o brilho de supernovas tipo Ia (SNe Ia). Se a expansão do universo foi um choque para os cientistas quando descoberta, a aceleração cósmica foi uma descarga elétrica completa no mundo científico. Até hoje descrevê-la é um dos maiores mistérios da cosmologia, o que torna o seu estudo atual, relevante e de alto impacto não só para a ciência, mas também para a humanidade como um todo.

Apesar de ser uma área com pouco mais de 25 anos, o estudo da aceleração cósmica tem sido motivo de intriga entre muitos cosmólogos. Enquanto alguns sustentam que a Teoria da Relatividade Geral (TRG) está correta e devemos, portanto, buscar respostas dentro dela, outros afirmam que a teoria einsteiniana da gravidade possui

lacunas e precisa de modificações em ordem de preenchê-las. Nós, neste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), partimos da perspectiva que a TRG é uma teoria completa, de tal modo que ela deve ser suficiente para nos dar uma descrição adequada de um universo em expansão acelerada.

Nas equações de campo de Einstein, expressões fundamentadoras da TRG, foi introduzido um termo Λ , a constante cosmológica, associado à energia do vácuo, para tentar possibilitar, segundo o cientista alemão, universos estacionários (Schutz, 2022). Porém, o que ele não previa era que Λ atuava como uma espécie de impulsadora da expansão do universo, acelerando-a. Porém, haviam problemas: o valor da densidade de energia do vácuo previsto pela Teoria Quântica de Campos (TQC) diferia em 120 ordens de grandeza do valor observado (Kolb; Turner, 1990; Weinberg, 2008). Claro que existiam outros empecilhos, mas o famoso problema da constante cosmológica possivelmente foi o principal motivador para buscar-se alternativas ao modelo padrão da cosmologia em ordem de justificar a aceleração cósmica. Dentre eles, os que se destacam pela afinidade com a TRG são os modelos de energia escura.

Considerando que a energia escura é a responsável pela aceleração do universo, as equações dinâmicas da cosmologia exigem que ela tenha pressão negativa e possua a constante cosmológica como caso particular (Carroll, 2001; Peebles; Ratra, 2003). Podemos estudá-la também dentro de duas perspectivas: ou analisando-a enquanto um fluido relativístico ou associando-a a um campo escalar de quintessência. Neste trabalho, como o título adianta, propomos um modelo para a energia escura tratando-a como um fluido relativístico e aplicando toda base da termodinâmica em sua descrição.

Isto posto, este TCC se estrutura da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentaremos os fundamentos básicos essenciais para um bom entendimento da cosmologia padrão. Veremos de forma mais detalhada os processos que levaram Hubble e Lemaître a concluir que o universo está em expansão, bem como trataremos das equações que descrevem a dinâmica do cosmos - e que já previam teoricamente um universo expandindo (Weinberg, 1972, 2008). A partir das equações de Einstein com o termo de constante cosmológica, mostraremos como é possível concluir que Λ é a componente que causa a aceleração cósmica, justificando o seu uso para explicá-la.

Avançando, no Capítulo 3 discutiremos três modelos termodinâmicos de energia escura. O primeiro deles é um trabalho pioneiro que descreve a energia escura enquanto um fluido relativístico perfeito com equação de estado (do inglês *equation of state*, cuja sigla é EoS) barotrópica constante e com potencial químico nulo (Lima; Alcaniz, 2004). Apesar de obter resultados impactantes (como o fato da componente escura esquentar enquanto expande), esse modelo carece de explicar o regime *phantom* do fluido (que ocorre quando o parâmetro da EoS rompe a barreira da constante cosmológica) sem apelar à considerações como temperaturas absolutas negativas. Porém, quando introduz-se um potencial químico não nulo, verifica-se que a energia

escura pode entrar no regime *phantom* e ainda apresentar temperaturas absolutas positivas desde que o seu potencial químico seja negativo (Lima; Pereira, 2008; Pereira; Lima, 2008). O último modelo que estudaremos generaliza os dois anteriores ao tomar uma EoS variável (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012). Nesse cenário, a energia escura sai do limite adiabático e passa a gerar entropia, comportando-se como um fluido imperfeito sofrendo com o processo dissipativo da viscosidade volumar.

A viscosidade volumar é o processo fora do equilíbrio mais favorecido pelas simetrias exigidas pelo princípio cosmológico. Por mais que não saibamos muito sobre esse fenômeno, é possível mostrar, fenomenologicamente, que ele é decorrente das diferentes taxas de resfriamento em um modelo de universo formado por dois fluidos (Zimdahl, 1996a). No Capítulo 4, veremos de maneira simplificada cosmologias que sofrem com pressões viscosas volumares e como elas estão intimamente relacionadas à criação ou destruição de matéria no cosmos (Calvão; Lima; Waga, 1992; Lima; Germano, 1992; Lima; Germano; Abramo, 1996; Zimdahl, 1996b; Zimdahl; Pavón, 1993). A partir disso, abrimos alas para a inédita análise termodinâmica de energia escura feita neste TCC.

A contribuição dada por este trabalho se concentra no Capítulo 5. Nele, descreveremos um modelo termodinâmico de energia escura que generaliza os anteriores ao incluir processos de criação ou destruição de partículas (Costa Netto; Silva, 2025). Derivaremos novas equações fundamentais que caracterizam o fluido e que se mostrarão sensíveis à introdução de uma fonte ou sumidouro. Posteriormente, veremos que esse novo ingrediente transforma o valor mínimo do parâmetro da EoS em uma função exponencial do tempo quando a taxa com a qual partículas são criadas ou destruídas é constante. Em particular, quando há destruição de partículas, nossos resultados indicam que a energia escura tende à constante cosmológica independentemente do sinal do potencial químico e sem quebrar nenhuma lei da termodinâmica, uma previsão que está de acordo com o que se espera dessa exótica componente.

Por fim, concluiremos discutindo a relevância de nosso trabalho enquanto propo- sitor de resultados inéditos para o ramo da cosmologia, bem como traremos perspecti- vas futuras a partir deles, propondo questionamentos inerentes à própria análise. Além disso, destacaremos alguns resultados observacionais importantíssimos divulgados no início de 2025 e que indicam um rompimento com o modelo padrão da cosmologia em favorecimento à modelos de energia escura dinâmica - e mais: com o fluido *phantom* também sendo favorecido (Adame *et al.*, 2025).

2 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

A cosmologia se sustenta, como já vimos, no princípio cosmológico, isto é, no universo aparentar ser homogêneo e isotrópico em escalas a partir de $100 Mpc$. Assim, é possível tratá-lo como uma entidade única e, portanto, compreendê-lo mais facilmente. Neste capítulo, apresentaremos a base teórica do modelo cosmológico padrão, discutindo principalmente as equações que descrevem a dinâmica do cosmos e como elas preveem um universo em expansão. Veremos como as observações evidenciam não só isso, mas também que a expansão é acelerada. Por fim, tratando de modelos alternativos, entenderemos sua necessidade para explicar de maneira consistente a aceleração cósmica.

2.1 DINÂMICA DO COSMOS

As equações de campo de Einstein são um sistema de dez equações diferenciais parciais acopladas e não lineares dadas, em notação tensorial (que é a que utilizaremos no decorrer deste TCC), por (Schutz, 2022):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, $R = R^\mu{}_\mu$ é o escalar de Ricci e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Todo o lado esquerdo da Eq.(2.1) é responsável pelo conteúdo geométrico do espaço-tempo trabalhado, formando o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (2.2)$$

O lado direito das equações de campo, onde $T_{\mu\nu}$ reina sozinho, descreve o conteúdo energético-material do sistema, sendo comumente resguardado como a fonte de campo gravitacional. Quando nos são fornecidas informações sobre a forma do tensor métrico e do tensor energia-momento, podemos solucionar as equações de campo de Einstein e obter equações que descrevem a dinâmica do sistema considerado.

Em cosmologia, tratamos o universo como um fluido perfeito de densidade de energia ρ e pressão p , de modo que (Weinberg, 1972, 2008)

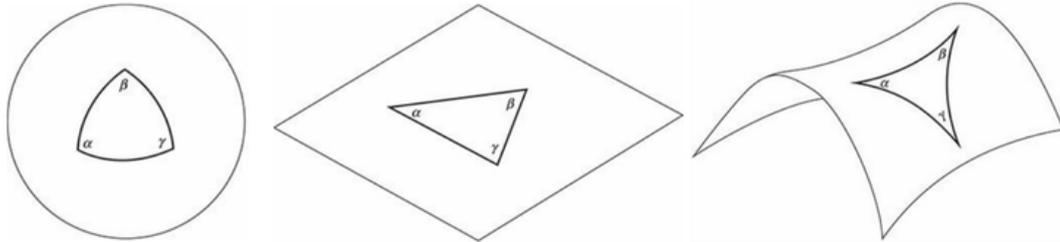
$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

é o seu tensor energia-momento, em que

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \rightarrow (1, 0, 0, 0) \quad (2.4)$$

é a quadrivelocidade, com τ sendo o tempo próprio. Além disso, para medir distâncias e tempos em um universo homogêneo e isotrópico, nos valem da métrica de Friedmann-

Figura 1 – Na esquerda, temos uma representação esquemática de um universo com curvatura positiva (uma esfera), onde $\alpha + \beta + \gamma > \pi$; no meio, temos uma representação esquemática de um universo com curvatura nula (um plano), onde $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; na direita, temos uma representação esquemática de um universo com curvatura negativa (uma sela), onde $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.



Fonte: Ryden (2017).

Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cujo elemento de linha em coordenadas esféricas é dado por (Weinberg, 1972, 2008):

$$ds^2 = dt^2 - a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2 \right], \quad (2.5)$$

em que $a = a(t)$ é o fator de escala, uma espécie de “raio do universo”, e k é o parâmetro de curvatura, sendo $k > 0$ para um universo aberto, $k = 0$ para um universo plano e $k < 0$ para um universo fechado. Veja a Figura 1 para ter uma melhor ideia da forma de cada um desses casos. As evidências observacionais disponíveis apontam para um universo espacialmente plano (Adame *et al.*, 2025; Aghanim *et al.*, 2020). Para nossa sorte, isso simplifica bastante as coisas, pois trabalharemos com a Eq.(2.5) tomando $k = 0$:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2]. \quad (2.6)$$

Podemos substituir as Eqs.(2.3, 2.6) na Eq.(2.1) e, com bastante paciência, chegar a duas equações independentes (Weinberg, 1972, 2008):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\rho}{3}, \quad (2.7)$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -p. \quad (2.8)$$

A primeira dessas equações é a famosa equação de Friedmann, nomeada em homenagem ao cosmólogo russo Alexander Friedmann (1888-1925) que as derivou em 1922, possivelmente a expressão matemática mais importante da cosmologia padrão por possibilitar a descrição de diferentes modelos de universo. Em todos eles, como $\rho > 0$, nota-se que $\dot{a}^2 > 0$, o que possibilita - ao menos do ponto de vista teórico - tanto soluções em expansão ($\dot{a} > 0$) quanto soluções em contração ($\dot{a} < 0$). Podemos ainda

combinar a Eq.(2.7) com a Eq.(2.8) para escrever uma expressão mais prática para a aceleração do cosmos em termos de sua densidade de energia e pressão:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p). \quad (2.9)$$

Perceba que, quando

$$p < -\frac{1}{3}\rho, \quad (2.10)$$

temos $\ddot{a} > 0$. Em outras palavras, se houver uma componente que tenha pressão negativa segundo a Eq.(2.10) e que seja abundante o suficiente, então, teoricamente, o universo, além de expandir, terá sua expansão ocorrendo em um regime acelerado.

A equação de Friedmann em conjunto com a Eq.(2.8) forma, como dito, um sistema de duas equações independentes, mas que contém três incógnitas: $a(t)$, ρ e p . Precisamos de uma terceira equação independente que relacione a densidade de energia e a pressão do fluido cosmológico para podermos solucionar o sistema de forma única. Não podemos utilizar a Eq.(2.9), pois ela depende das outras duas equações mencionadas. É aqui que introduzimos uma equação de estado. Em cosmologia, utiliza-se com frequência uma EoS barotrópica (Weinberg, 1972, 2008),

$$p = \omega\rho, \quad (2.11)$$

em que ω , o parâmetro da EoS, caracteriza o conteúdo preenchendo o modelo de universo: $\omega = 1/3$ representa radiação (matéria relativística); $\omega = 0$ representa matéria não relativística; $\omega < -1/3$ representa, segundo a Eq.(2.10), uma componente que gera soluções aceleradas.

As identidades de Bianchi são um conjunto de igualdades consequentes das simetrias do tensor métrico que podem ser escritas, em sua forma contraída, em termos da diferenciação covariante do tensor de Einstein (Schutz, 2022):

$$G^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2.12)$$

Isso implica, pela Eq.(2.1), em $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, a manifestação relativística da conservação da energia e do momento. Projetando-a na direção da quadri-velocidade,

$$U_\mu T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0, \quad (2.13)$$

consequimos determinar a equação da continuidade na cosmologia, uma outra relação matemática de relevância ímpar para a dinâmica do universo. Usando a Eq.(2.3),

$$U_\mu T^{\mu\nu}_{;\mu} = U_\mu [(\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}]_{;\nu} = 0,$$

$$U_\mu [(\rho + p)_{;\nu}U^\mu U^\nu + (\rho + p)(U^\mu U^\nu)_{;\nu} - (pg^{\mu\nu})_{;\nu}] = 0,$$

$$U_\mu [(\rho_{;v} + p_{;v})U^\mu U^\nu + (\rho + p)(U^\mu_{;v}U^\nu + U^\mu U^\nu_{;v}) - p_{;v}g^{\mu\nu} - pg^{\mu\nu}_{;v}] = 0.$$

Pelo teorema da planicidade local, $g^{\mu\nu}_{;v} = 0$ (Schutz, 2022). (Esse é um dos resultados, inclusive, que tornam os referenciais localmente inerciais possíveis na TRG). Assim,

$$U_\mu [(\rho_{;v} + p_{;v})U^\mu U^\nu + (\rho + p)(U^\mu_{;v}U^\nu + U^\mu U^\nu_{;v}) - p_{;v}g^{\mu\nu} - 0] = 0,$$

$$U_\mu [\rho_{;v}U^\mu U^\nu + p_{;v}U^\mu U^\nu - p_{;v}g^{\mu\nu} + (\rho + p)(U^\mu_{;v}U^\nu + U^\mu U^\nu_{;v})] = 0,$$

$$\rho_{;v}U_\mu U^\mu U^\nu + p_{;v}U_\mu U^\mu U^\nu - p_{;v}U_\mu g^{\mu\nu} + (\rho + p)U_\mu(U^\mu_{;v}U^\nu + U^\mu U^\nu_{;v}) = 0,$$

$$\rho_{;v}U_\mu U^\mu U^\nu + p_{;v}U_\mu U^\mu U^\nu - p_{;v}U^\nu + (\rho + p)(U_\mu U^\mu_{;v}U^\nu + U_\mu U^\mu U^\nu_{;v}) = 0.$$

Sabemos que $U^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$. Não só isso, mas dada a definição da quadrivelocidade, Eq.(2.4), temos $U_\mu U^\mu = 1$ e $U_\mu U^\mu_{;v} = 0$. Logo,

$$\rho_{;v}U^\nu + p_{;v}U^\nu - p_{;v}U^\nu + (\rho + p)(0 + U^\nu_{;v}) = 0,$$

$$\rho_{;0}U^0 + (\rho + p)U^\nu_{;v} = \dot{\rho} + (\rho + p)U^\nu_{;v} = 0,$$

$$\dot{\rho} + (\rho + p)\Theta = 0, \tag{2.14}$$

em que $\Theta = U^\nu_{;v}$ é a taxa de expansão do fluido. Para um universo homogêneo e isotrópico, $\Theta = 3\dot{a}/a$ (Weinberg, 1972, 2008). Ficamos, desse modo, com:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \tag{2.15}$$

Essa é a expressão da equação da continuidade na cosmologia. Solucionando-a para $\rho = \rho(a)$, obtemos

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}. \tag{2.16}$$

No início dos tempos, logo após o *Big Bang*, a radiação preenchia o universo quase em sua totalidade. O regime dinâmico, com isso, era tal que $\rho_{rad} \propto a^{-4}$. Após isso, o universo passou por uma fase em que a matéria não relativística dominava, o que nos mostra que $\rho_{mat} \propto a^{-3}$. Para cenários dominados por uma componente descrita por $\omega < -1/3$, a Eq.(2.16) revela um cosmos onde a densidade de energia decresce mais lentamente com o fator de escala em comparação às outras duas situações.

2.2 O UNIVERSO ESTÁ EM EXPANSÃO

Consideremos a Eq.(2.6) para um raio de luz viajando radialmente em direção à Terra, de modo que $d\theta = d\phi = 0$. Como tais perturbações são caracterizadas por $ds^2 = 0$, temos (Weinberg, 1972, 2008):

$$0 = dt^2 - a^2 [dr^2 + 0 + 0] = dt^2 - a^2 dr^2,$$

$$dt = \pm a(t) dr. \quad (2.17)$$

Levando em consideração que r diminui conforme o tempo passa, escolhemos o sinal de $-$ na Eq.(2.17):

$$dt = -a(t) dr. \quad (2.18)$$

Vamos assumir que o sinal luminoso deixa a fonte emissora localizada em $r = r_1$ em $t = t_1$, sendo detectado no instante $t = t_0$ por um observador em $r = r_0 = 0$. Com isso,

$$dt = -adr \Rightarrow \frac{dt}{a(t)} = -dr \Rightarrow \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_{r_1}^0 dr = \int_0^{r_1} = r_1,$$

$$r_1 = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.19)$$

Seja δt_1 o intervalo de tempo durante o qual cristas de onda são sucessivamente emitidas pela fonte em $r = r_1$. Analogamente, seja δt_0 o intervalo de tempo durante o qual essas cristas chegam à Terra, em $r = 0$. O fato de coordenadas comóveis serem independentes do tempo nos permite usar a Eq.(2.19) para escrever (Weinberg, 1972, 2008)

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)}. \quad (2.20)$$

Ou ainda, de forma mais conveniente,

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.21)$$

Dadas as unidades utilizadas neste TCC, podemos identificar $\delta t = \lambda$, em que λ é o comprimento de onda. Assim, chegamos a:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.22)$$

O lado esquerdo da Eq.(2.22) é familiar. De fato,

$$z = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 \quad (2.23)$$

é a mudança fracionária no comprimento de onda (Weinberg, 1972, 2008). Em outras palavras, z mede o desvio do comprimento de onda da luz detectada em relação ao comprimento de onda da luz emitida. Sendo assim, a Eq.(2.22) pode ser reescrita como:

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (2.24)$$

Caso $z > 0$, temos um *redshift*, desvio para o vermelho. Isso implica em $a(t_0) > a(t_1)$ e, portanto, em um $a(t)$ crescente: o universo expande. Por outro lado, observamos um desvio para o azul, *blueshift*, se $z < 0$, de modo que, pela Eq.(2.24), temos um $a(t)$ decrescente: o universo contrai. Também podemos, claro, ter um universo estático: basta que a luz detectada não sofra desvio em relação a luz emitida.

Uma vez que $t = t_0$ é o tempo presente, vamos expandir $a(t)$ em uma série de Taylor em torno desse instante:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) + \frac{1}{1!} \dot{a}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ a(t) &= a(t_0) \left[1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0)^2 + \dots \right] \\ z &= \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para fontes de luz próximas (no sentido cosmológico da palavra), podemos dispensar termos de segunda ordem em diante, ficando apenas com:

$$z = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0). \quad (2.26)$$

Uma vez que $d = t - t_0$ é a distância do emissor até nós, estabelecemos

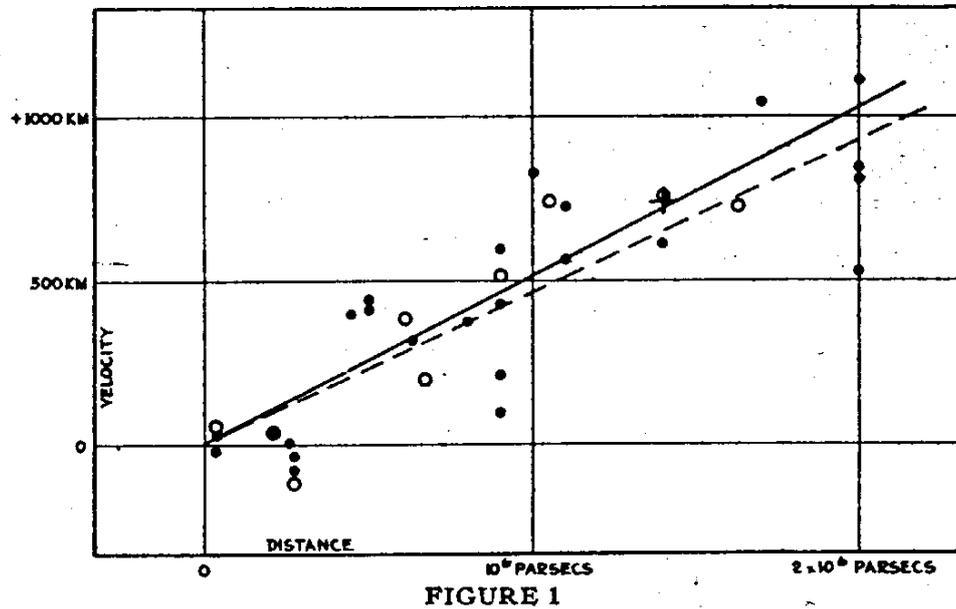
$$z = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} d. \quad (2.27)$$

Levando em consideração que $\delta t_0 - \delta t_1 = v \delta t_1$, com v sendo a velocidade da fonte em relação ao detector, é fácil ver que $v = z$, de modo que podemos ainda expressar a Eq.(2.27) por meio de:

$$v = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} d. \quad (2.28)$$

Em 1912, o astrônomo estadunidense Vesto Slipher (1875-1969) observou que as linhas espectrais da galáxia de Andrômeda mostravam um enorme desvio para o azul, indicando que ela estaria se aproximando da nossa localização a uma velocidade média que ele calculou ser próxima de 300 km s^{-1} (Slipher, 1913). Essa, porém, é a galáxia mais próxima da Via Láctea, estando a cerca de 780 kpc de distância. Lembremos que as escalas cosmológicas começam somente a partir de 100 Mpc .

Figura 2 – Plote da velocidade radial (eixo das ordenadas) em função da distância (eixo das abscissas) para um certo conjunto de nebulosas. Nitidamente $v \propto d$.



Fonte: Hubble (1929).

Em 1927, o padre e físico belga Georges Lemaître (1894-1966), usando dados de velocidades radiais de um conjunto de nebulosas, mostrou que essa quantidade era diretamente proporcional às suas distâncias até nosso planeta (Lemaître, 1927). Isto é, quanto mais distante estivessem as nebulosas, maior sua velocidade de recessão. Tal comportamento também foi observado em 1929 pelo astrônomo estadunidense Edwin Hubble (1889-1953), que munido dos valores de *redshift* de galáxias distantes, construiu o gráfico visto na Figura 2, onde compara-se a velocidade de recessão dessas estruturas com a distância medida em relação à Terra (Hubble, 1929). Como podemos ver, o que Lemaître havia previsto em 1927 foi reiterado dois anos depois por Hubble. Dada a sua homogeneidade e isotropia, a conclusão de que o universo está em expansão foi imediata. Estabeleceu-se, dessa forma, uma relação entre v e d :

$$v = H_0 d. \quad (2.29)$$

Essa é a famosa lei de Hubble-Lemaître, com H_0 sendo a constante de Hubble, a taxa de expansão do cosmos. Comparando a Eq.(2.29) com a Eq.(2.28), identificamos:

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (2.30)$$

O primeiro valor medido para H_0 foi feito por Lemaître em 1927 (Lemaître, 1927):

$$H_0 = 625 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.31)$$

Posteriormente, em 1929, Hubble também mediu um valor para a constante que leva seu nome (Hubble, 1929):

$$H_0 = 500 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.32)$$

Com o refinamento das técnicas, valores mais precisos para a constante de Hubble foram obtidos ao longo dos anos. A depender do método utilizado para a medição, porém, esses valores poderão diferir consideravelmente entre si. Em 2018, a missão Planck, usando dados obtidos a partir do espectro da radiação cósmica de fundo em micro-ondas (cuja sigla inglesa é CMB, de *cosmic microwave background*), determinou (Aghanim *et al.*, 2020)

$$H_0 = 67.66 \pm 0.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.33)$$

No ano de 2019, o grupo por trás do *Hubble Space Telescope* (HST) mediu H_0 a partir de observações de várias Cefeidas (estrelas que possuem brilho variável) de longo período (Riess *et al.*, 2019). O seguinte valor foi conseguido:

$$H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.34)$$

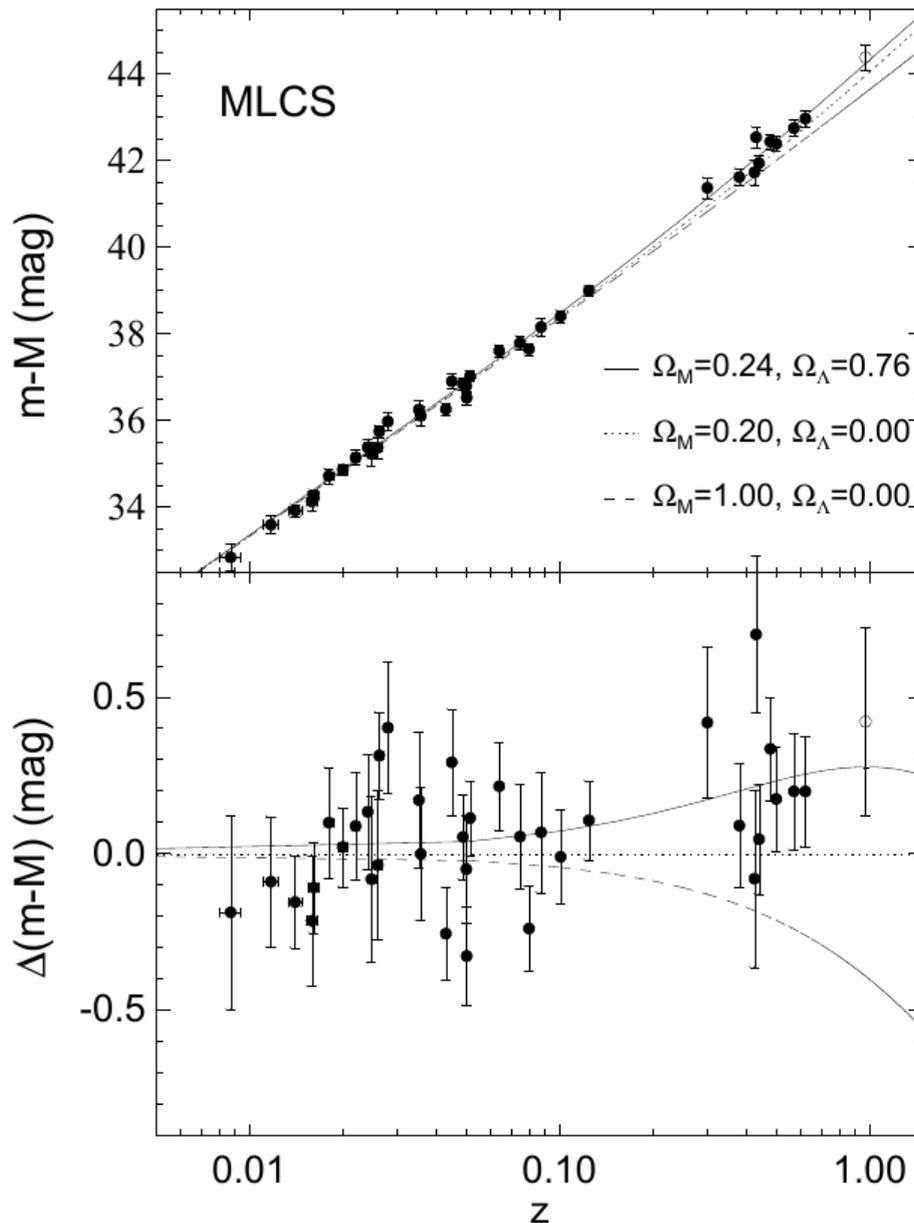
Claramente esses valores estão em tensão. Esse cenário persiste nas medidas que são divulgadas mais recentemente e que se valem de outras técnicas - ou até mesmo das mesmas! A essa discrepância gritante entre os valores de H_0 damos o nome de tensão de Hubble, sendo ela um dos problemas em aberto mais quentes da cosmologia. Há várias propostas na tentativa de aliviá-la, mas isso vai além do escopo deste TCC.

2.3 O UNIVERSO ESTÁ EM EXPANSÃO ACELERADA

As supernovas tipo Ia (SNe Ia) são explosões altamente violentas resultantes de um sistema de estrelas binárias em que uma anã branca (um dos estágios finais do ciclo de vida estelar) acreta massa de sua companheira até atingir o limite de Chandrasekhar, valor próximo de $1.4M_{\odot}$ que representa o máximo que tal astro pode suportar (Weinberg, 1972, 2008). O brilho liberado nessa explosão é intenso o suficiente ao ponto de servir como indicador de distâncias muito além da Via Láctea. Logo, podemos usar as SNe Ia como velas padrão e testar modelos cosmológicos, medindo parâmetros cosmológicos que possuem a potencialidade de indicar as componentes que estão presentes no nosso universo.

Nos anos de 1998 e 1999, cerca de 70 anos depois da descoberta da expansão do universo, dois projetos independentes, *High-z Supernova Search Team* (HSST) e *Supernova Cosmology Project* (SCP), respectivamente, usando dados de SNe Ia, mudaram para sempre a nossa compreensão do universo ao por luz sob o que somente os sentidos não nos fariam compreender.

Figura 3 – A imagem de cima mostra o diagrama de Hubble para amostras de SNe Ia a baixos e altos *redshifts* com distâncias medidas através do método MLCS, que utiliza a forma de curvas de luz multicoloridas para realizar medições. Como podemos ver, o melhor *fit* ocorre para modelos de universo com $\Omega_M = 0.24$ e $\Omega_\Lambda = 0.76$. A imagem de baixo mostra a disparidade entre os dados e cosmologias com $\Omega_M = 0.20$ e $\Omega_\Lambda = 0.00$.

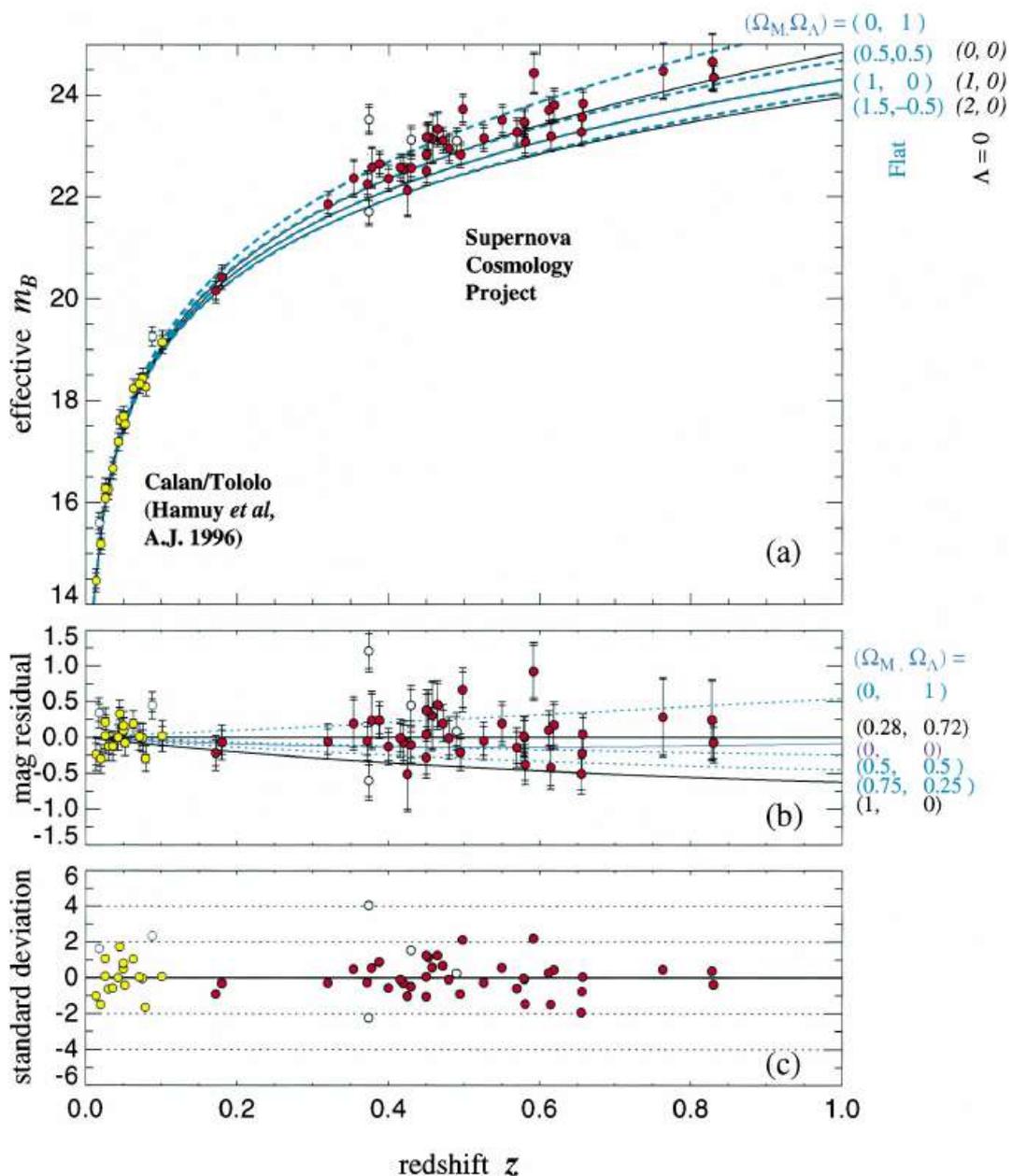


Fonte: Riess *et al.* (1998).

O gráfico da Figura 3 nos mostra, na parte superior, a diferença entre a magnitude aparente m (medida associada ao brilho aparente de um astro, sendo dependente da distância) e a magnitude absoluta M (magnitude aparente a uma distância fixa de $10 pc$) em função do *redshift* z para um conjunto de SNe Ia (Riess *et al.*, 1998). Esses dados observacionais são confrontados com três tipos de cenários: $\Omega_M = 0.24$

e $\Omega_\Lambda = 0.76$; $\Omega_M = 0.20$ e $\Omega_\Lambda = 0.00$; $\Omega_M = 1.00$ e $\Omega_\Lambda = 0.00$. As quantidades Ω_M e Ω_Λ são os parâmetros de densidade de matéria e de uma componente misteriosa Λ , respectivamente, e representam a proporção dessas duas componentes em um universo plano. Levando em consideração que o cosmos que apresenta menores barras de erro é aquele onde $\Omega_M = 0.24$ e $\Omega_\Lambda = 0.76$, concluímos que essa tal Λ domina sobre os demais constituintes.

Figura 4 – Em (a), temos o diagrama de Hubble para 60 SNe Ia, 42 com alto z e 18 com baixo z , obtidos pelo *Calán/Tololo Supernova Survey*. Em (b), temos a magnitude residual para seis tipos de cosmologias planas, com o melhor *fit* sendo aquele onde $\Omega_M = 0.28$ e $\Omega_\Lambda = 0.72$. Em (c), temos os resíduos normalizados pela incerteza do cenário que melhor descreve os dados.



Fonte: Perlmutter *et al.* (1999).

Também podemos chegar a essa mesma conclusão analisando o gráfico mostrado na Figura 4. Olhando especificamente para a imagem do meio, notamos que a curva que melhor ajusta os dados observacionais é aquela onde a matéria ocupa 28% do universo, com os 72% restantes sendo preenchidos por Λ (Perlmutter *et al.*, 1999).

Surge a pergunta: o que é Λ ? O que significa estarmos em um universo dominado por essa componente?

A resposta para a primeira dessas perguntas é simples: Λ é a constante cosmológica! Ela foi introduzida por Einstein em suas equações de campo para contornar a possibilidade de um universo em expansão (Schutz, 2022):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Popularizou-se dizer que quando foi confrontado com os resultados de Hubble e Lemaître, Einstein enfatizou que esse foi seu maior erro. Ele estava equivocado, porém, não na adição de Λ , mas sim na sua razão de ser, pois ela não é responsável por frear a expansão. Muito pelo contrário, como mostra a Eq.(2.9) corrigida:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.36)$$

Para matéria não relativística, $p = 0$, ficamos com:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{\rho}{6} + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{1}{6} \frac{m}{V} + \frac{\Lambda}{3} = -\frac{1}{6} \frac{m}{(4/3)\pi a^3} + \frac{\Lambda}{3}, \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{m}{8\pi a^3} + \frac{\Lambda}{3}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

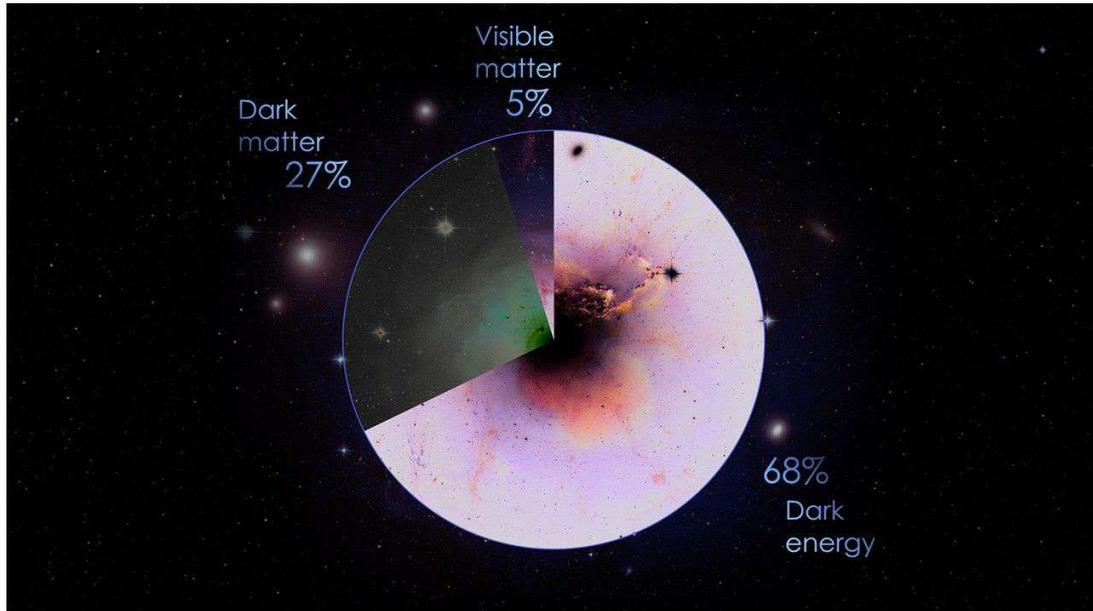
A Eq.(2.37) é uma espécie de “segunda lei de Newton” da cosmologia. O primeiro termo representa a atração gravitacional causada por massas, freando a expansão do universo. O termo de constante cosmológica está associado, podemos pensar, a uma “força” de caráter repulsivo responsável por fazer o cosmos expandir cada vez mais.

Vimos nas Figuras 3 e 4 que o modelo cosmológico que melhor ajusta as observações é aquele composto por cerca de 30% de matéria e 70% de Λ . Ora, tendo em mente que Λ domina sobre as demais componentes, podemos concluir que a expansão do universo é acelerada e o mecanismo por trás da aceleração cósmica é explicado pela constante cosmológica. Partiu-se, portanto, dada essa realização paradigmática, ao estudo do que era e como se comportava Λ .

2.3.1 O PROBLEMA DA CONSTANTE COSMOLÓGICA

O modelo Λ CDM é o modelo padrão da cosmologia, onde o universo é um fluido perfeito composto majoritariamente de Λ e matéria escura fria (do inglês *cold dark matter*, por isso a sigla CDM), com uma pequena porcentagem de matéria bariônica. A constante cosmológica, como vimos, é a candidata mais favorecida observacionalmente

Figura 5 – Composição atual do universo.



Fonte: NASA's Goddard Space Flight Center (2016).

para explicar a aceleração cósmica (Aghanim *et al.*, 2020). A matéria escura, detectada indiretamente na década de 1970, resolve o problema das curvas de rotação de galáxias espirais (Rubin *et al.*, 1976a; Rubin *et al.*, 1976b; Rubin; Ford Jr, 1970).

Segundo a TQC, a constante cosmológica é a contribuição do vácuo quântico para os campos de matéria presentes no cosmos (Zel'Dovich, 1967, 1968). Assim, podemos pensar em Λ , de certa forma, como uma espécie de energia do vácuo. Pode-se mostrar que o valor limite para a densidade dessa energia do vácuo ρ_Λ é (Kolb; Turner, 1990):

$$\rho_\Lambda^{TQC} \sim 10^{73} \text{ GeV}^4. \quad (2.38)$$

Entretanto, observações apontam que (Weinberg, 2008)

$$\rho_\Lambda^{obs.} \sim 10^{-47} \text{ GeV}^4. \quad (2.39)$$

Há uma diferença de incríveis 120 ordens de grandeza entre a medida prevista teoricamente pela TQC e o valor observado previsto pelo modelo Λ CDM. Temos em mãos o problema da constante cosmológica, que ainda continua em aberto.

Cosmólogos vem, desde 1998, buscando outras alternativas para justificar a aceleração do universo. Há alguns que afirmam que a TRG é uma teoria incompleta e precisa de modificações sensíveis em ordem de preencher essas lacunas, surgindo assim as teorias de gravidade modificada. Por outro lado, uma boa parcela dos físicos baseia-se na teoria einsteiniana da gravidade para analisar o problema. Segundo estes

últimos, a fonte de energia extra compondo quase 70% do universo é a energia escura, sendo a constante cosmológica um caso particular.

Dentro da perspectiva de uma energia escura, podemos estudá-la ou enquanto um fluido relativístico, usando a termodinâmica para descrevê-la, ou associando-a a um campo escalar de quintessência e aplicando toda a base da teoria de campos. Como já dito, neste TCC consideramos a energia escura um fluido relativístico exótico com EoS barotrópica dada pela Eq.(2.11),

$$p_x = \omega \rho_x, \quad (2.40)$$

em que $\omega < -1/3$ de acordo com a Eq.(2.10), e onde Λ ocorre para $\omega = -1$ (Carroll, 2001; Peebles; Ratra, 2003). A partir disso, introduzimos os modelos ω CDM para descrever um universo composto de energia e matéria escuras.

2.4 MODELOS ALTERNATIVOS

Os modelos ω CDM são alternativas ao modelo padrão. Essas cosmologias tratam a energia escura como um fluido relativístico exótico de pressão negativa que obedece a Eq.(2.40), com $\omega < -1/3$ pelas equações de Friedmann, e que recupera a constante cosmológica e, portanto, o modelo Λ CDM para $\omega = -1$.

A densidade de energia escura é dada pela Eq.(2.16):

$$\rho_x = \rho_{x,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (2.41)$$

em que $\rho_{x,0} = \rho_x(t_0)$ e $a_0 = a(t_0)$. É comum normalizarmos o fator de escala medido no tempo presente, de modo que $a_0 = 1$ e ficamos simplesmente com:

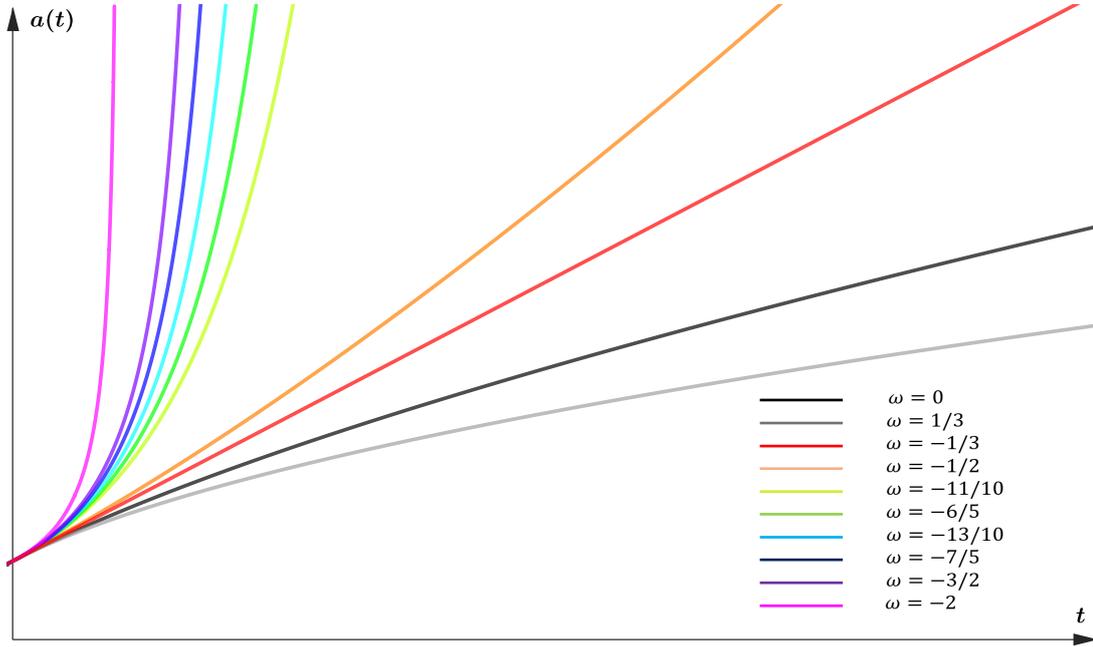
$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.42)$$

Substituindo isso na Eq.(2.7),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{\rho_x}{3} = \frac{\rho_{x,0}}{3} a^{-3(1+\omega)}, \\ \frac{\dot{a}}{a} &= \sqrt{\frac{\rho_{x,0}}{3} a^{-3(1+\omega)}} = \sqrt{\frac{\rho_{x,0}}{3}} a^{-3(1+\omega)/2}, \\ \frac{da}{dt} &= \sqrt{\frac{\rho_{x,0}}{3}} a^{-3(1+\omega)/2} a = \sqrt{\frac{\rho_{x,0}}{3}} a^{1-3(1+\omega)/2}, \\ \frac{da}{a^{1-3(1+\omega)/2}} &= \sqrt{\frac{\rho_{x,0}}{3}} dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Solucionando essa equação diferencial, chegamos a:

Figura 6 – Gráfico do fator de escala $a(t)$ em função do tempo t para dez valores distintos de ω .



Fonte: O autor (2025).

$$a(t) = \left[1 + \frac{3(1+\omega)}{2} \sqrt{\frac{\rho_{x,0}}{3}} (t - t_0) \right]^{2/3(1+\omega)}. \quad (2.44)$$

Essa relação evidencia a dependência de $a(t)$ com ω . Note que ela não é válida para $\omega = -1$, que é justamente o caso da constante cosmológica. Para esse cenário, temos $\rho_x = \rho_\Lambda = \text{constante}$ pela Eq.(2.42), o que implica em $a(t) \propto e^{t-t_0}$.

Na Figura 6 temos um gráfico que ilustra o comportamento de $a(t)$ para alguns valores de ω . Para $\omega = -1/3$ notamos que o fator de escala varia linearmente com o tempo. Isso era esperado, pois esse ω produz, pela Eq.(2.9), soluções estáticas, $\ddot{a} = 0$. Quando $\omega < -1$, a energia escura cruza a barreira da constante cosmológica e entra no regime *phantom*, cenário em que $a(t)$ diverge muito rapidamente para tempos finitos (Caldwell, 2002; Caldwell; Kamionkowski; Weinberg, 2003). Ora, isso significa que o fluido fantasma irá dominar sobre as outras componentes até um determinado instante $t = t_{rip}$, chamado de *Big Rip*, onde a expansão abrupta será tal que a atração gravitacional não conseguirá manter unidas as grandes estruturas do cosmos e elas se romperão, fazendo com que o universo chegue ao seu fim.

Por fim, devemos destacar que é interessante também considerarmos cenários em que o parâmetro da EoS da energia escura é variável, $\omega = \omega(a)$. Expandindo-o em uma série de potências em torno de $a(t_0) = 1$,

$$\omega(a) = \omega(a=1) + \left. \frac{d\omega}{da} \right|_{a=1} f(a) + \dots$$

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a f(a) + \dots$$

Em que $\omega_0 = \omega(a = 1)$ e $\omega_a = (d\omega/da)|_{a=1}$ são constantes e $f(a)$ é uma função de parametrização. Tendo em que $\omega = -1$ ainda é (ou era? Vá ao Capítulo 6 para saber mais) o caso mais favorecido observacionalmente (Aghanim *et al.*, 2020), devemos truncar a série até o termo de primeira ordem, de modo que nos sobra

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a f(a). \quad (2.45)$$

Algumas das parametrizações mais populares são a linear, $f(a) = (1 - a)/a$ (Astier, 2001; Cooray; Huterer, 1999; Weller; Albrecht, 2002); a logarítmica, $f(a) = -\ln(a)$ (Efstathiou, 1999); a de Chevallier-Polarski-Linder (CPL), $f(a) = 1 - a$ (Chevallier; Polarski, 2001; Linder, 2003); e a de Barboza-Alcaniz (BA), $f(a) = (1 - a)/(2a^2 - 2a + 1)$ (Barboza Jr. Alcaniz, 2008). Durante muito tempo após o descobrimento da aceleração cósmica, o aparato tecnológico só nos permitia testar modelos de energia escura com EoS constante. Porém, atualmente não há nada que nos impeça, em se tratando de limitação técnica, considerar análises a partir da Eq.(2.45).

3 TERMODINÂMICA DA ENERGIA ESCURA SEM CRIAÇÃO OU DESTRUIÇÃO DE PARTÍCULAS

A energia escura é, segundo a teoria da relatividade geral, a responsável pela aceleração cósmica. Essa estranha componente de pressão negativa preenche quase 70% do cosmos e possui a constante cosmológica como caso particular - como tinha de ser, pois Λ é, segundo as observações, a melhor explicação para a expansão do universo ser acelerada. Vamos, neste capítulo, destrinchar três dos principais modelos termodinâmicos de energia escura que a tomam por um fluido relativístico, discutindo seus resultados e limitações em ordem de estarmos hábeis a propor um novo modelo.

3.1 MODELO I

O primeiro modelo que veremos foi proposto em 2004 por José Ademir Sales de Lima e Jaílson Souza de Alcaniz (Lima; Alcaniz, 2004). Eles analisaram o comportamento termodinâmico da energia escura a considerando um fluido relativístico perfeito de potencial químico nulo e com EoS barotrópica dada pela Eq.(2.40),

$$p_x = \omega \rho_x, \quad (3.1)$$

em que, lembremos, $\omega < -1/3$ pela Eq.(2.10) e $\omega = -1$ recupera a constante cosmológica (Carroll, 2001; Peebles; Ratra, 2003). O fluido em questão é descrito pelos tensores energia-momento $T^{\mu\nu}$, corrente de partículas N^μ e corrente de entropia S^μ :

$$T^{\mu\nu} = (\rho_x + p_x)U^\mu U^\nu - p_x g^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

$$N^\mu = nU^\mu, \quad (3.3)$$

$$S^\mu = sU^\mu = n\sigma U^\mu, \quad (3.4)$$

em que n é a densidade de partículas e $s = n\sigma$ é a densidade de entropia, com σ sendo a entropia por partícula.

A equação da continuidade, Eq.(2.15), continua valendo:

$$\dot{\rho}_x + 3(\rho_x + p_x)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (3.5)$$

Sua solução é dada pela Eq.(2.42):

$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3(1+\omega)}. \quad (3.6)$$

Assumimos que não há criação ou destruição de partículas no fluido de energia escura, de modo que:

$$N^\mu{}_{;\mu} = 0, \quad (3.7)$$

$$(nU^\mu)_{;\mu} = n_{;\mu}U^\mu + nU^\mu{}_{;\mu} = n_{;0}U^0 + n\Theta = \dot{n} + n\Theta = 0,$$

$$\dot{n} + 3n\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (3.8)$$

Solucionando essa equação diferencial, temos

$$n = n_0 a^{-3}, \quad (3.9)$$

em que $n_0 = n(t_0)$. Além disso, estamos no limite adiabático, o que nos leva a expressões análogas as Eq.(3.8, 3.9) para a entropia:

$$S^\mu{}_{;\mu} = \dot{s} + 3s\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (3.10)$$

\therefore

$$s = s_0 a^{-3}, \quad (3.11)$$

em que $s_0 = s(t_0)$. Fazendo $s = n\sigma$ na Eq.(3.10),

$$\dot{s} + 3s\frac{\dot{a}}{a} = (\dot{n}\sigma) + 3n\sigma\frac{\dot{a}}{a} = 0,$$

$$\dot{n}\sigma + n\dot{\sigma} + 3n\sigma\frac{\dot{a}}{a} = 0.$$

Se usarmos a Eq.(3.8), teremos:

$$-3n\sigma\frac{\dot{a}}{a} + n\dot{\sigma} + 3n\sigma\frac{\dot{a}}{a} = n\dot{\sigma} = 0,$$

$$\dot{\sigma} = 0, \quad (3.12)$$

como era de se esperar, já que a geração de entropia em fluidos perfeitos é nula.

Para conseguirmos um tratamento termodinâmico completo para a energia escura, precisamos de uma lei de evolução da temperatura. Começemos esse processo escrevendo a lei de Gibbs localmente (Reichl, 2016):

$$nTd\sigma = d\rho_x - (\rho_x + p_x)\frac{dn}{n}. \quad (3.13)$$

Tomando a diferencial exata de ρ_x considerando que n e T são nossas variáveis independentes, chegamos a seguinte expressão para $d\sigma$ a partir da Eq.(3.13):

$$nTd\sigma = \left(\frac{\partial\rho_x}{\partial n}\right)_T dn + \left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n dT - (\rho_x + p_x)\frac{dn}{n},$$

$$nT d\sigma = \left[\left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T - \left(\frac{\rho_x + p_x}{n} \right) \right] dn + \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n dT,$$

$$d\sigma = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T - \left(\frac{\rho_x + p_x}{n} \right) \right] \frac{dn}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n \frac{dT}{T}. \quad (3.14)$$

Uma vez que a entropia é uma função de estado, a condição de integrabilidade,

$$\left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial n} \right)_T \right]_n = \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_n \right]_T, \quad (3.15)$$

pode ser dada por:

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{nT} \left[\left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T - \left(\frac{\rho_x + p_x}{n} \right) \right] \right\} \right)_n = \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{nT} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n \right] \right\}_T,$$

$$\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T - \left(\frac{\rho_x + p_x}{n} \right) \right] + \frac{1}{T} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T \right]_n - \frac{1}{n} \left[\left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n + \left(\frac{\partial p_x}{\partial T} \right)_n \right] \right\} \right) =$$

$$\frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n + \frac{1}{n} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n \right]_T \right\},$$

$$\frac{1}{nT} \left\{ -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T + \left(\frac{\rho_x + p_x}{nT} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T \right]_n - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial p_x}{\partial T} \right)_n \right\} =$$

$$\frac{1}{nT} \left\{ -\frac{1}{n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n + \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n \right]_T \right\},$$

$$-\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T + \left(\frac{\rho_x + p_x}{nT} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T \right]_n - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial p_x}{\partial T} \right)_n =$$

$$-\frac{1}{n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n + \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n \right]_T,$$

$$-\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T + \left(\frac{\rho_x + p_x}{nT} \right) + \left[\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T \right]_n - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial p_x}{\partial T} \right)_n = \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T} \right)_n \right]_T.$$

Ora, sendo a densidade de energia uma diferencial exata ela própria, podemos cancelar as derivadas cruzadas. Ficamos com:

$$-\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T + \left(\frac{\rho_x + p_x}{nT} \right) - \frac{1}{n} \left(\frac{\partial p_x}{\partial T} \right)_n = 0,$$

Ou, melhorando,

$$\rho_x + p_x = n \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n} \right)_T + T \left(\frac{\partial p_x}{\partial T} \right)_n. \quad (3.16)$$

Temos em mãos a condição de integrabilidade para a entropia específica da energia escura. Como não especificamos a forma de ρ_x e n , a Eq.(3.16) é válida para todo

e qualquer modelo termodinâmico que tome a componente escura como um fluido relativístico. Com isso em mente, para finalmente chegarmos a uma lei de evolução da temperatura, vamos tornar explícita a diferencial exata de $\rho_x = \rho_x(n, T)$:

$$d\rho_x = \left(\frac{\partial\rho_x}{\partial n}\right)_T dn + \left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n dT. \quad (3.17)$$

Convenientemente,

$$\dot{\rho}_x = \left(\frac{\partial\rho_x}{\partial n}\right)_T \dot{n} + \left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T}, \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} = \dot{\rho}_x - \left(\frac{\partial\rho_x}{\partial n}\right)_T \dot{n}. \quad (3.19)$$

Conhecendo as expressões para $\dot{\rho}_x$ e \dot{n} para o modelo analisado, chegamos a (Lima; Alcaniz, 2004):

$$\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_x + p_x) - n\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial n}\right)_T \left(-3\frac{\dot{a}}{a}\right),$$

$$\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_x + p_x) + 3n\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial n}\right)_T \frac{\dot{a}}{a},$$

$$\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} = -3\left[(\rho_x + p_x) - n\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial n}\right)_T\right] \frac{\dot{a}}{a}.$$

Da condição de integrabilidade, Eq.(3.16):

$$\left(\frac{\partial\rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} = -3T\left(\frac{\partial p_x}{\partial T}\right)_n \frac{\dot{a}}{a},$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3\frac{(\partial p_x/\partial T)_n \dot{a}}{(\partial\rho_x/\partial T)_n a},$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3\left(\frac{\partial p_x}{\partial\rho_x}\right)_n \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.20)$$

Essa é a lei de evolução da temperatura para descrições onde o fluido de energia escura está no limite adiabático, obedecendo as Eqs.(3.5, 3.8).

Especificando a EoS, Eq.(3.1), a Eq.(3.20) torna-se:

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3\omega\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.21)$$

A solução é imediata (Lima; Alcaniz, 2004):

$$T = T_0 a^{-3\omega}, \quad (3.22)$$

em que $T_0 = T(t_0)$. Vamos reescrever a Eq.(3.22) somente como uma relação de proporcionalidade:

$$T^{-1/\omega} \propto a^3. \quad (3.23)$$

O volume comóvel em cosmologia é dado por $V = V_0 a^3$, em que $V_0 = V(t_0)$ (Weinberg, 1972, 2008). Assim,

$$T^{-1/\omega} \propto V. \quad (3.24)$$

Ora, uma vez que o parâmetro da EoS da energia escura é necessariamente negativo (para ser mais específico, $\omega < -1/3$ pela Eq.(2.10)), a Eq.(3.24) nos mostra que o fluido esquenta durante a expansão cósmica adiabática (Lima; Alcaniz, 2004). Levando em consideração que as outras componentes do universo são tais que $\omega > 0$, esse comportamento exótico é característico do mecanismo por trás da aceleração cósmica.

A relação de Euler da termodinâmica (Reichl, 2016),

$$T(n\sigma) = \rho_x + p_x - \mu n, \quad (3.25)$$

nos fornece uma boa maneira de determinarmos a entropia da energia escura, em que μ é o potencial químico. Como aqui $\mu = 0$ (Lima; Alcaniz, 2004),

$$\sigma = \frac{\rho_x}{nT}(1 + \omega). \quad (3.26)$$

Desse modo, usando as expressões disponíveis para ρ_x , n e T , ficamos com:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\rho_{x,0} a^{-3(1+\omega)}}{n_0 T_0 a^{-3} a^{-3\omega}}(1 + \omega), \\ \sigma &= \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0}(1 + \omega). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Fazendo $\sigma = S/N$, onde $N = nV$ é o número de partículas do fluido, teremos:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} N(1 + \omega) = \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} nV(1 + \omega) = \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} n_0 V_0 a^{-3} a^3(1 + \omega), \\ S &= \rho_{x,0}(1 + \omega) \frac{V_0}{T_0}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Notamos que tanto σ quanto S são constantes, como era de se esperar.

Impondo a condição da positividade da entropia, $S \geq 0$, a Eq.(3.28), chegamos ao único vínculo termodinâmico desse modelo (Lima; Alcaniz, 2004):

$$\omega \geq \omega_{min} = -1. \quad (3.29)$$

Portanto, a energia escura não pode entrar no regime *phantom* sem quebrar a positividade da entropia. A única forma disso acontecer no cenário trabalhado é se considerarmos temperaturas absolutas negativas (Babichev; Dokuchaev; Eroshenko,

2004; González-Díaz, 2003; González-Díaz; Sigüenza, 2004, 2004; Myung, 2009; Sami; Toporensky, 2004; Saridakis; González-Díaz; Sigüenza, 2009) - veja também Cline, Jeon e Moore (2004), Nojiri e Odintsov (2003, 2003) e Samart e Gumjudpai (2007). Porém, nem tudo está perdido: o próximo modelo permite que o fluido fantasma se manifeste sem apelar a $T < 0$ e mantendo $S \geq 0$.

3.2 MODELO II

Se considerarmos que o potencial químico do fluido de energia escura pode ser não nulo, então a Eq.(3.25) nos dará (Lima; Pereira, 2008; Pereira; Lima, 2008):

$$\mu = \frac{\rho_x + p_x}{n} - \frac{Ts}{n}. \quad (3.30)$$

Pelas Eqs.(3.1, 3.6, 3.9) e Eqs.(3.11, 3.22),

$$\mu = \frac{\rho_x}{n}(1 + \omega) - \frac{Ts}{n} = \frac{\rho_{x,0} a^{-3(1+\omega)}}{n_0 a^{-3}}(1 + \omega) - \frac{T_0 s_0 a^{-3\omega} a^{-3}}{n_0 a^{-3}},$$

$$\mu = \frac{\rho_{x,0}(1 + \omega)}{n_0} a^{-3\omega} - \frac{T_0 s_0}{n_0} a^{-3\omega},$$

$$\mu = \left[\frac{\rho_{x,0}(1 + \omega) - T_0 s_0}{n_0} \right] a^{-3\omega}, \quad (3.31)$$

$$\mu = \mu_0 a^{-3\omega}, \quad (3.32)$$

em que

$$\mu_0 = \mu(t_0) = \frac{\rho_{x,0}(1 + \omega) - T_0 s_0}{n_0}. \quad (3.33)$$

Podemos ainda expressar a Eq.(3.32) da seguinte forma:

$$\frac{\mu}{T} = \frac{\mu_0}{T_0}. \quad (3.34)$$

Isso nos mostra que a razão μ/T é constante durante toda a evolução do universo (Lima; Pereira, 2008; Pereira; Lima, 2008). Sendo assim, reescrevemos a Eq.(3.27) simplesmente como:

$$\sigma = \frac{\rho_{x,0}(1 + \omega)}{n_0 T_0} - \frac{\mu_0}{T_0}. \quad (3.35)$$

A partir disso, o mesmo desenvolvimento que nos levou a Eq.(3.28) nos levará a:

$$S = [\rho_{x,0}(1 + \omega) - \mu_0 n_0] \frac{V_0}{T_0}. \quad (3.36)$$

Como podemos ver, as Eqs.(3.35, 3.36) retomam as Eqs.(3.27, 3.28) quando zeramos o potencial químico.

Da positividade da entropia,

$$\omega \geq \omega_{min} = -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}}. \quad (3.37)$$

Se $\mu > 0$, então $\omega_{min} > -1$ e não temos nem regime *phantom* nem constante cosmológica; se $\mu = 0$, então $\omega_{min} = -1$, como na Eq.(3.29), e recuperamos Λ ; se $\mu < 0$, então $\omega_{min} < -1$ e a energia escura pode se comportar como um fluido fantasma sem quebrar a positividade da entropia (Lima; Pereira, 2008; Pereira; Lima, 2008). O potencial químico tem, portanto, o papel de determinar o intervalo em que o valor mínimo do parâmetro da EoS da energia escura estará. Essa é a grande novidade trazida pelo modelo proposto em 2008 por José Ademir Sales de Lima em conjunto com o pós-doutorando Saulo Henrique Pereira.

3.3 MODELO III

O terceiro e último modelo que veremos foi publicado entre 2012 e 2013 como parte da tese de doutorado de Heydson Henrique Brito da Silva, defendida em 2014, em colaboração com seu orientador, Raimundo Silva Júnior, e Rodrigo de Sousa Gonçalves, Zong-Hong Zhu e Jaílson Souza de Alcaniz (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012). Nessa análise, é proposta uma EoS barotrópica variável,

$$p_x = \omega(a)\rho_x, \quad (3.38)$$

em que $\omega(a)$ é dado pela Eq.(2.45) (Barboza Jr. Alcaniz, 2008):

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a f(a). \quad (3.39)$$

Uma EoS variável em nada afeta, *à priori*, os tensores básicos da energia escura, de modo que eles continuam sendo dados pelas Eqs.(3.2, 3.3, 3.4). Sabendo disso, nada mais justo que a equação da continuidade, Eq.(3.5), permaneça uma igualdade verdadeira. Vamos substituir nela a nossa nova EoS e ver o que isso nos dá:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_x + 3(\rho_x + p_x)\frac{\dot{a}}{a} &= \dot{\rho}_x + 3(\rho_x + \omega(a)\rho_x)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \\ \dot{\rho}_x + 3\rho_x(1 + \omega(a))\frac{\dot{a}}{a} &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

É mais vantajoso reescrevermos a Eq.(3.40):

$$\dot{\rho}_x + 3(\rho_x + \omega_0\rho_x + \omega_a f(a)\rho_x)\frac{\dot{a}}{a} = 0,$$

$$\dot{\rho}_x + 3(\rho_x + \omega_0 \rho_x) \frac{\dot{a}}{a} = -3\omega_a f(a) \rho_x \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.41)$$

Intuitivamente, $p_{eq} \equiv \omega_0 \rho_x$ é a pressão de equilíbrio. Além disso, o termo $\omega_a f(a) \rho_x$ representa uma pressão fora de equilíbrio que identificamos como uma pressão viscosa volumar (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012):

$$\Pi = \omega_a f(a) \rho_x. \quad (3.42)$$

Desse modo, passamos a expressar a Eq.(3.41) como:

$$\dot{\rho}_x + 3(\rho_x + p_{eq}) \frac{\dot{a}}{a} = -3\Pi \frac{\dot{a}}{a}, \quad (3.43)$$

em que a pressão total da componente passa a ser

$$p_x = p_{eq} + \Pi. \quad (3.44)$$

No Apêndice A, ao derivarmos a equação da continuidade generalizada, mostraremos como identificar que o termo $\omega_a f(a) \rho_x$ é, de fato, uma pressão viscosa volumar. Antes disso, todavia, faremos, no Capítulo 4, uma rápida apresentação da fenomenologia por trás da viscosidade volumar. Então, espere só mais um pouco!

Olhando para a Eq.(3.43), concluímos que a energia escura sai do limite adiabático, deixando de ser um fluido perfeito e passando a se comportar como um fluido imperfeito graças ao processo da viscosidade volumar, um efeito *à posteriori* de uma EoS variável. Ora, como sabemos, fluidos fora do regime adiabático sofrem com geração de entropia. No modelo analisado (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012),

$$S^\mu{}_{;\mu} = \dot{s} + 3s \frac{\dot{a}}{a} = (\dot{n}\sigma) + 3n\sigma \frac{\dot{a}}{a},$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = \dot{n}\sigma + n\dot{\sigma} + 3n\sigma \frac{\dot{a}}{a}.$$

Considerando que não há criação ou destruição de partículas, as Eqs.(3.7, 3.8, 3.9) permanecem válidas. Assim,

$$S^\mu{}_{;\mu} = -3n\sigma \frac{\dot{a}}{a} + n\dot{\sigma} + 3n\sigma \frac{\dot{a}}{a},$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = n\dot{\sigma} \geq 0, \quad (3.45)$$

em que usamos a segunda lei da termodinâmica no último passo (Reichl, 2016).

Solucionando a Eq.(3.40) (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012):

$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3} \exp\left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da\right). \quad (3.46)$$

No limite de $\omega(a) \rightarrow \omega_0$, a Eq.(3.46) torna-se a Eq.(3.6). Além disso, como já foi dito, a Eq.(3.9) continua valendo:

$$n = n_0 a^{-3}. \quad (3.47)$$

Somos tentados a querer solucionar a Eq.(3.45) logo de cara e determinar $s = s(a)$ tal qual fizemos nos dois modelos anteriores. Porém, já que há uma fonte de entropia não nula em jogo, precisamos inicialmente de uma expressão para $\dot{\sigma}$. Para isso, é necessário, como podemos ver na relação de Euler da termodinâmica, Eq.(3.25), uma expressão para a temperatura da energia escura. Partindo da Eq.(3.19),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= \dot{\rho}_x - \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T \dot{n}, \\ \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_x + p_x) - n \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T \left(-3\frac{\dot{a}}{a}\right), \\ \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_x + p_x) + 3n \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T \frac{\dot{a}}{a}, \\ \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3 \left[(\rho_x + p_x) - n \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T \right] \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned}$$

Pela condição de integrabilidade, Eq.(3.16),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3T \left(\frac{\partial p_x}{\partial T}\right)_n \frac{\dot{a}}{a}, \\ \frac{\dot{T}}{T} &= -3 \frac{(\partial p_x / \partial T)_n \dot{a}}{(\partial \rho_x / \partial T)_n \dot{a}}, \\ \frac{\dot{T}}{T} &= -3 \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x}\right)_n \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Essa é precisamente a mesma lei de evolução da temperatura da Eq.(3.20). Isso era de se esperar, pois a equação da continuidade mantém sua forma desde que a EoS da Eq.(3.38) não seja especificada. Quando ela é, temos, pela Eq.(3.44):

$$\begin{aligned} \frac{\dot{T}}{T} &= -3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_x}\right)_n \frac{\dot{a}}{a} - 3 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \rho_x}\right)_n \frac{\dot{a}}{a}, \\ \frac{\dot{T}}{T} &= -3\omega_0 \frac{\dot{a}}{a} - 3\omega_a f(a) \frac{\dot{a}}{a} = -3(\omega_0 + \omega_a f(a)) \frac{\dot{a}}{a}, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3\omega(a) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.50)$$

Solucionando a equação diferencial acima, chegamos a expressão da temperatura da energia escura para modelos fora do equilíbrio que conservam número de partículas (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012):

$$T = T_0 \exp\left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da\right) \quad (3.51)$$

Caso $\omega_a \rightarrow 0$, a Eq.(3.22) é recuperada.

Podemos agora, finalmente, determinar uma expressão para a entropia específica em função do fator de escala. Isolando σ na Eq.(3.25),

$$\sigma = \frac{\rho_x}{nT}(1 + \omega(a)) - \frac{\mu}{T}. \quad (3.52)$$

Pelas Eqs.(3.9, 3.46, 3.51) e considerando que a relação estabelecida na Eq.(3.34) independe do modelo utilizado, ficamos com:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} (1 + \omega(a)) a^{-3} \frac{1}{a^{-3}} \exp\left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da\right) \exp\left(3 \int \frac{\omega(a)}{a} da\right) - \frac{\mu_0}{T_0}, \\ \sigma &= \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} (1 + \omega(a)) - \frac{\mu_0}{T_0}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Logo:

$$\dot{\sigma} = \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} \dot{\omega}(a). \quad (3.54)$$

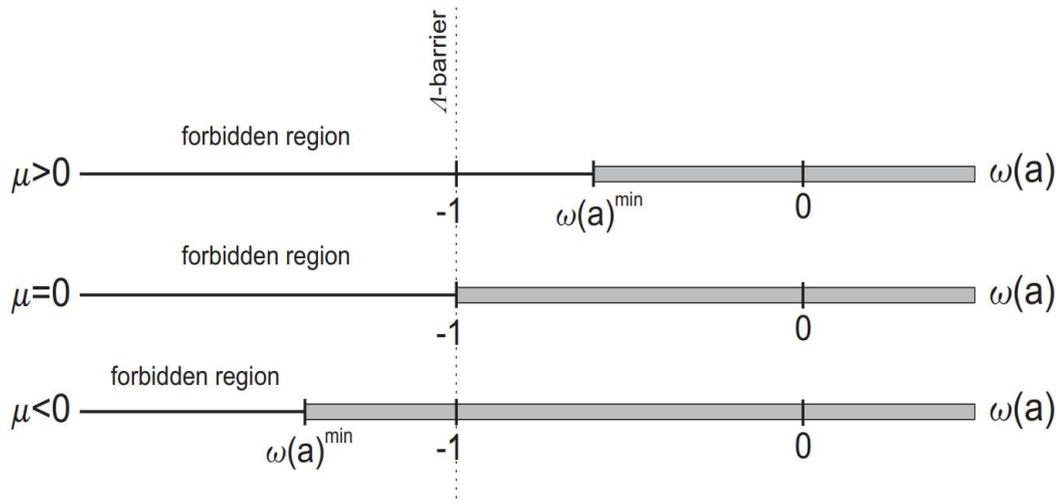
Para uma discussão mais detalhada sobre o potencial químico em modelos termodinâmicos de energia escura fora do limite adiabático, vá ao Apêndice B. Também é interessante notar que, dada a Eq.(3.45), $\dot{\omega}(a) \geq 0$ pela segunda lei da termodinâmica (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012).

Substituindo a Eq.(3.54) na Eq.(3.45) lembrando que $S^\mu = sU^\mu$, chegamos a:

$$\begin{aligned} S^\mu{}_{;\mu} &= \dot{s} + 3s \frac{\dot{a}}{a} = n\dot{\sigma}, \\ \dot{s} + 3s \frac{\dot{a}}{a} &= n \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} \dot{\omega}(a) = \frac{\rho_{x,0}}{T_0} a^{-3} \dot{\omega}(a), \\ \frac{ds}{da} \frac{da}{dt} + \frac{3s}{a} \frac{da}{dt} &= \frac{\rho_{x,0}}{T_0} a^{-3} \frac{d\omega}{da} \frac{da}{dt}, \\ \frac{ds}{da} + \frac{3s}{a} &= \frac{\rho_{x,0}}{T_0} a^{-3} \frac{d\omega}{da}, \\ \frac{ds}{da} a^3 + s(3a^2) &= \frac{d}{da}(sa^3) = \frac{\rho_{x,0}}{T_0} \frac{d\omega}{da}, \\ d(sa^3) &= \frac{\rho_{x,0}}{T_0} d\omega. \end{aligned} \quad (3.55)$$

A solução dessa equação diferencial é (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014):

Figura 7 – Representação esquemática dos intervalos possíveis para $\omega(a)$ para cada valor de potencial químico. Note que para $\mu = 0$ a constante cosmológica é recuperada e para $\mu < 0$ o regime *phantom* é permitido.



Fonte: Silva *et al.* (2013).

$$s = \left[s_0 + \frac{\rho_{x,0}}{T_0} (\omega(a) - \omega_0) \right] a^{-3}. \quad (3.56)$$

Quando $\omega(a) \rightarrow \omega_0$, a expressão para a densidade de entropia do Modelo III retorna às expressões vistas nos Modelos I e II. Da Eq.(3.53), obtemos a entropia total:

$$S = [\rho_{x,0}(1 + \omega(a)) - \mu_0 n_0] \frac{V_0}{T_0}. \quad (3.57)$$

Impondo $S \geq 0$ a Eq.(3.57), obtemos (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014):

$$\omega(a) \geq \omega(a)_{min} = -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}}. \quad (3.58)$$

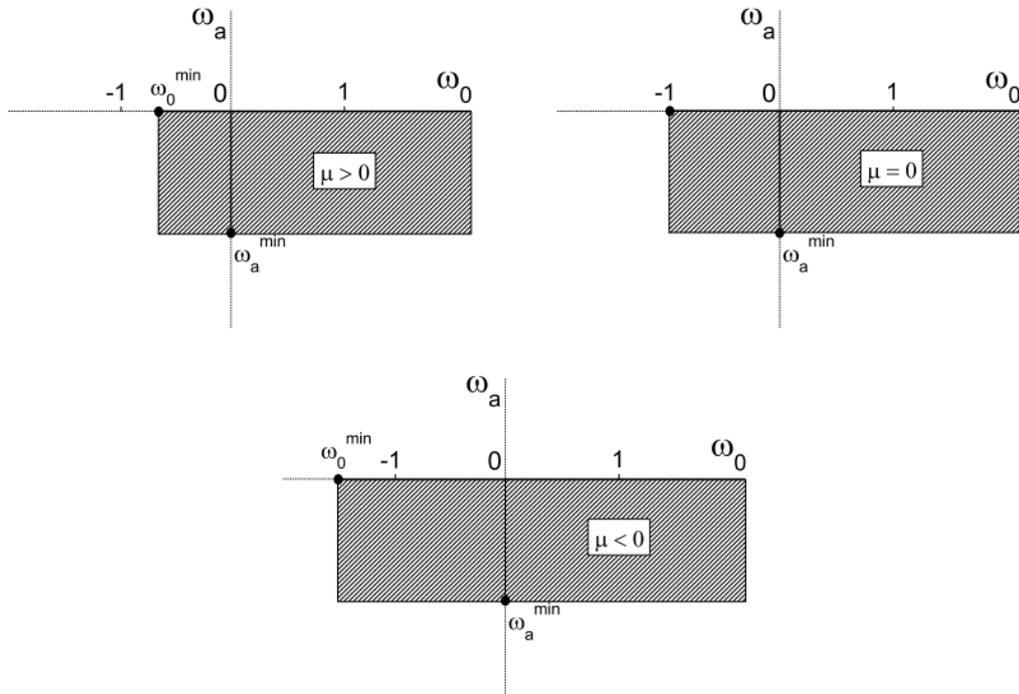
Na Figura 7 temos uma representação esquemática do vínculo termodinâmico da Eq.(3.58) para os diferentes intervalos de valores de μ . Notamos, como era de se esperar, que potenciais químicos nulos fazem com que a energia escura se comporte como Λ e potenciais químicos negativos a colocam no regime *phantom*.

É útil determinarmos vínculos específicos para ω_0 , o parâmetro associado à parte constante da EoS, e para ω_a , o parâmetro associado à parte da EoS que foge do equilíbrio. Abrindo $\omega(a)$ usando a Eq.(3.39) na Eq.(3.58) (Silva, 2014),

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a f(a) \geq -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}},$$

$$\omega_a f(a) \geq -1 - \omega_0 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} = -\frac{1}{\rho_{x,0}} [\rho_{x,0}(1 + \omega_0) - \mu_0 n_0],$$

Figura 8 – Representação dos vínculos das Eqs.(3.59, 3.60, 3.61) no espaço paramétrico $\omega_0 - \omega_a$ para os três cenários de potencial químico: $\mu > 0$ (esquerda), $\mu = 0$ (direita) e $\mu < 0$ (esquerda).



Fonte: Silva (2014).

$$\omega_a \geq -\frac{1}{\rho_{x,0}f(a)} [\rho_{x,0}(1 + \omega_0) - \mu_0 n_0].$$

Ora, se avaliarmos a Eq.(3.53) em $t = t_0$, obtemos $T_0 n_0 \sigma_0 = T_0 s_0 = \rho_{x,0}(1 + \omega_0) - \mu_0 n_0$. Com isso,

$$\omega_a \geq \omega_{a_{min}} = -\frac{T_0 s_0}{\rho_{x,0}f(a)}. \quad (3.59)$$

Perceba que $\omega_{a_{min}}$ independe do potencial químico, tendo o mesmo valor em qualquer um dos três cenários mostrados na Figura 7. Logo, a dependência com μ deve vir em ω_0 . De fato, impondo o limite $\omega_a \rightarrow 0$ a Eq.(3.59), notamos que:

$$\omega_a = 0 \geq -\frac{T_0 s_0}{\rho_{x,0}f(a)} \Rightarrow T_0 s_0 \geq 0,$$

$$\rho_{x,0}(1 + \omega_0) - \mu_0 n_0 \geq 0 \Rightarrow 1 + \omega_0 \geq \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}},$$

$$\omega_0 \geq \omega_{0_{min}} = -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}}. \quad (3.60)$$

Além disso, como observado que, pelas Eqs.(3.45, 3.54), temos $\dot{\omega}(a) \geq 0$, então obtemos um vínculo extra para ω_a (Silva, 2014):

$$\dot{\omega}(a) = \frac{d\omega}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d}{da} (\omega_0 + \omega_a f(a)) \dot{a} > 0,$$

$$\omega_a f'(a) \dot{a} \geq 0.$$

Trabalhando dentro de intervalos do fator de escala em que $f'(a) < 0$, concluímos que a segunda lei da termodinâmica impõe que ω_a sempre deve ser não positivo:

$$\omega_a \leq \omega_{a_{max}} = 0. \quad (3.61)$$

Na Figura 8 temos uma representação dos vínculos específicos para ω_0 e ω_a no espaço paramétrico $\omega_0 - \omega_a$ para potenciais químicos positivos, nulos e negativos. Como podemos ver, assim como na Figura 7, o regime *phantom* da energia escura ocorre para $\mu < 0$, com isso sendo refletido pelo gráfico transpondo o ponto $(1, 0)$. Além disso, também enxergamos a recuperação da constante cosmológica para $\mu = 0$ e, para $\mu > 0$, nenhum desses dois cenários sendo atingido.

4 VISCOSIDADE VOLUMAR EM COSMOLOGIA

A viscosidade volumar é o processo gerador de entropia mais favorecido na cosmologia por ser compatível com as simetrias exigidas em um universo plano, homogêneo e isotrópico. Apesar disso, pouco conhecemos esse efeito. Na verdade, a melhor resposta que temos para a pergunta “o que é?” vem da análise de modelos de universo compostos por dois fluidos perfeitos e interagentes (Zimdahl, 1996a). Nela, as diferentes taxas de resfriamento para os dois fluidos é suficiente para justificar a existência de uma viscosidade volumar não nula. O que nos interessa, porém, é a relação entre esse fenômeno e a presença de fontes ou sumidouros de partículas no cosmos: é bem estabelecido que processos de criação ou destruição de matéria em um universo em expansão podem ser fenomenologicamente descritos por pressões viscosas volumares efetivas (Calvão; Lima; Waga, 1992; Lima; Germano, 1992; Lima; Germano; Abramo, 1996; Zimdahl, 1996b; Zimdahl; Pavón, 1993).

Em modelos cosmológicos viscosos, a pressão total é dada por (Zimdahl, 1996b):

$$\tilde{p} = p + \Pi, \quad (4.1)$$

em que p é a pressão de equilíbrio e Π é a pressão viscosa volumar. Podemos deixar isso explícito na forma do tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = [\rho + (p + \Pi)] U^\mu U^\nu - (p + \Pi) g^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

Ora, essa é, essencialmente, a mesma forma de $T^{\mu\nu}$ que demos no Capítulo 2 ao tomar o fluido cosmológico dentro do limite adiabático. Levando em consideração que Π é um termo fora do equilíbrio, a Eq.(4.2) não estaria incorreta? Na verdade, não! De acordo com as abordagens de Eckart e de Landau-Lifshitz, as abordagens termodinâmicas mais usadas em cosmologia, é adotada a condição de que os gradientes de espaço-tempo em fluidos fora do equilíbrio são suficientemente pequenos para que as variáveis primitivas só possuam termos fora do limite adiabático até primeira ordem (Eckart, 1940; Landau; Lifshitz, 1987). Se quisermos dar um passo anterior na escrita da Eq.(4.2), podemos tomar

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu} \quad (4.3)$$

e a partir daí identificar $\Delta T^{\mu\nu} = -\Pi(g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu)$ (Silva; Lima; Calvão, 2002). Para essa demonstração, vá ao Apêndice A.

Abrindo um breve parêntese, cabe uma discussão interessante sobre como atua o efeito da viscosidade volumar em modelos de universo e em modelos de energia escura. Enquanto nos primeiros a introdução de um termo de pressão viscosa volumar é feita *à priori*, nos segundos ele surge como um efeito *à posteriori*, fruto de uma EoS variável (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012). Não tinha como sabermos

de antemão que, ao considerar a Eq.(3.38), a energia escura sairia do limite adiabático e passaria a gerar entropia devido a Π . Por causa disso, talvez, os propositores do Modelo III não consideraram fontes ou sumidouros de partículas no fluido.

Isto posto, não há nenhum motivo para que a corrente de partículas e a corrente de entropia sejam alteradas, de modo que (Zimdahl, 1996b):

$$N^\mu = nU^\mu, \quad (4.4)$$

$$S^\mu = sU^\mu = n\sigma U^\mu. \quad (4.5)$$

Por mais que, dada a forma da Eq.(4.3), ainda tenhamos $U_\mu T^{\mu\nu}_{; \nu} = 0$ e, portanto,

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = -3\Pi\frac{\dot{a}}{a}, \quad (4.6)$$

a equação para o balanço de partículas passa a ser

$$N^\mu_{; \mu} = \dot{n} + 3n\frac{\dot{a}}{a} = \psi, \quad (4.7)$$

em que ψ é o termo de fonte ($\psi > 0$) ou sumidouro ($\psi < 0$) de partículas (Calvão; Lima; Waga, 1992). Desse modo, ao tomarmos a divergência do tensor S^μ , chegamos a:

$$S^\mu_{; \mu} = (n\sigma U^\mu)_{; \mu},$$

$$S^\mu_{; \mu} = (n\sigma)_{; \mu}U^\mu + n\sigma U^\mu_{; \mu} = (n_{; \mu}\sigma + n\sigma_{; \mu})U^\mu + n\sigma\Theta,$$

$$S^\mu_{; \mu} = \dot{n}\sigma + n\dot{\sigma} + 3n\sigma\frac{\dot{a}}{a} = n\dot{\sigma} + \left(\dot{n} + 3n\frac{\dot{a}}{a}\right)\sigma.$$

Pela Eq.(4.7),

$$S^\mu_{; \mu} = n\dot{\sigma} + \psi\sigma. \quad (4.8)$$

Em ordem de visualizarmos a relação entre Π e ψ , vamos determinar uma expressão para a derivada temporal da entropia específica e depois para o fluxo de entropia. Partindo da Eq.(3.13), escrevemos:

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{nT}\dot{\rho} - \left(\frac{\rho + p}{nT}\right)\frac{\dot{n}}{n}, \quad (4.9)$$

Substituindo as Eqs.(4.6, 4.7) na Eq.(4.9), ficamos com:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{1}{nT} \left[-3(\rho + p + \Pi)\frac{\dot{a}}{a} \right] - \left(\frac{\rho + p}{nT}\right) \left(\frac{\psi}{n} - 3\frac{\dot{a}}{a}\right), \\ \dot{\sigma} &= -3\left(\frac{\rho + p}{nT}\right)\frac{\dot{a}}{a} - \frac{3\Pi}{nT}\frac{\dot{a}}{a} - \left(\frac{\rho + p}{nT}\right)\frac{\psi}{n} + 3\left(\frac{\rho + p}{nT}\right)\frac{\dot{a}}{a}, \end{aligned}$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{3\Pi}{nT} \frac{\dot{a}}{a} - \left(\frac{\rho+p}{nT}\right) \frac{\psi}{n}. \quad (4.10)$$

Com isso, o fluxo de entropia passa a ser:

$$S^\mu{}_{;\mu} = n\dot{\sigma} + \psi\sigma,$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = -\frac{3\Pi}{T} \frac{\dot{a}}{a} - \left(\frac{\rho+p}{nT}\right) \psi + \psi\sigma,$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = -\frac{3\Pi}{T} \frac{\dot{a}}{a} - \left(\frac{\rho+p}{nT} + \sigma\right) \psi.$$

Usando a Eq.(3.25):

$$S^\mu{}_{;\mu} = -\frac{3\Pi}{T} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\mu\psi}{T}. \quad (4.11)$$

Aplicando a segunda lei da termodinâmica à expressão para a fonte de entropia dada na Eq.(4.8) (Calvão; Lima; Waga, 1992),

$$S^\mu{}_{;\mu} = n\dot{\sigma} + \psi\sigma \geq 0,$$

$$\psi \geq -\frac{n\dot{\sigma}}{\sigma}. \quad (4.12)$$

Como a expansão do universo é adiabática, temos $\dot{\sigma} = 0$ e, portanto, segundo a Eq.(4.12), $\psi \geq 0$. Isso implica na exclusividade de processos de criação de matéria no cosmos em que vivemos (Gunzig; Geheñiau; Prigogine, 1987; Prigogine, 1989; Prigogine *et al.*, 1988). Nesse caso, de acordo com a Eq.(4.10), a viscosidade volumar e a criação de partículas tornam-se processos equivalentes:

$$\Pi = -(\rho+p) \frac{\psi}{3n(\dot{a}/a)}. \quad (4.13)$$

Apesar disso, a Eq.(4.12) não é termodinamicamente incompatível como um sumidouro de partículas: basta que $\dot{\sigma} > 0$ e matéria poderá ser destruída no fluido em questão.

5 TERMODINÂMICA DA ENERGIA ESCURA COM CRIAÇÃO OU DESTRUÇÃO DE PARTÍCULAS

No capítulo anterior, vimos que há uma relação íntima entre viscosidade volumar e processos de criação ou destruição de matéria em cosmologia. Dado o caráter adiabático da expansão do universo, mostramos que o único cenário possível, de acordo com a segunda lei da termodinâmica, é o de partículas serem criadas. Ora, como a energia escura mimetiza uma pressão viscosa volumar quando sua equação de estado varia no tempo e como isso a tira do limite adiabático, nada mais justo que nela possa haver uma fonte ou um sumidouro de partículas. Neste capítulo, descreveremos um modelo termodinâmico inédito para a energia escura levando em consideração esse novo ingrediente fora do equilíbrio, argumentando que, diferentemente do que se poderia pensar vide a exclusividade da produção de partículas no fluido cosmológico, é mais provável que haja destruição de partículas no fluido de energia escura - e isso sem quebrar nenhuma lei da termodinâmica.

5.1 EQUAÇÕES BÁSICAS

Continuamos descrevendo a energia escura como um fluido relativístico exótico de tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, corrente de partículas N^μ e corrente de entropia S^μ dados por, respectivamente,

$$T^{\mu\nu} = (\rho_x + p_x)U^\mu U^\nu - p_x g^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

$$N^\mu = nU^\mu, \quad (5.2)$$

$$S^\mu = sU^\mu = n\sigma U^\mu. \quad (5.3)$$

Além disso, tomamos a mesma EoS barotrópica variável da Eq.(3.38),

$$p_x = \omega(a)\rho_x, \quad (5.4)$$

em que $\omega(a)$, assim como no Modelo III, é dado pela (3.39).

Como a forma do tensor energia-momento não muda mesmo com a inclusão de processos de criação ou destruição de partículas, a equação da continuidade continua sendo dada pela Eq.(3.43):

$$U_\mu T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \dot{\rho}_x + 3(\rho_x + p_{eq})\frac{\dot{a}}{a} = -3\Pi\frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.5)$$

em que, lembremos, $p_x = p_{eq} + \Pi$ é a pressão total, com $p_{eq} = \omega_0\rho_x$ sendo a pressão de equilíbrio e $\Pi = \omega(a)f(a)\rho_x$ sendo a pressão viscosa volumar (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012). Isso evidencia, como discutimos ao tratar do Modelo III, a

saída da energia escura do limite adiabático e a sua caracterização enquanto um fluido imperfeito sofrendo com processos que geram entropia.

Para a equação do balanço de partículas, é óbvio que o novo ingrediente introduzido nesta análise irá modificá-la, assumindo a forma da Eq.(4.7). Vamos, porém, considerar que a fonte ou sumidouro de partículas depende de n somente até primeira ordem (Costa Netto; Silva, 2025):

$$N^\mu{}_{;\mu} = \dot{n} + 3n\frac{\dot{a}}{a} = \psi = n\Gamma, \quad (5.6)$$

em que $\Gamma > 0$ implica em partículas sendo criadas e $\Gamma < 0$ implica em partículas sendo destruídas. O fator Γ pode ser constante ou depender de a de alguma forma. Apesar disso, não consideramos neste TCC uma forma específica para Γ , o que torna nosso trabalho, ainda que inédito, uma espécie de “primeira abordagem” a um modelo mais geral onde Γ é bem definido.

A divergência de S^μ passa a ser, segundo a Eq.(4.8):

$$S^\mu{}_{;\mu} = n\dot{\sigma} + n\sigma\Gamma \geq 0. \quad (5.7)$$

Antes de continuarmos, é necessário discutir se aqui os processos de criação ou destruição de partículas são adiabáticos ou não. Nos trabalhos citados no capítulo anterior, a análise visava descrever o fluido cosmológico como um todo e considerava, por razões de simetria que cabem em um universo que se expande adiabaticamente e que obedece ao princípio cosmológico, $\dot{\sigma} = 0$. Isso implica que apenas processos de criação de matéria podem ocorrer sem quebrar a segunda lei da termodinâmica (Gunzig; Geheniau; Prigogine, 1987; Prigogine, 1989; Prigogine *et al.*, 1988). No entanto, pela Eq.(3.45), essa consideração levaria à conservação da corrente de entropia, o que é uma contradição direta à conclusão de que há uma pressão viscosa volumar sendo mimetizada pelo fluido de energia escura (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012). Em nosso trabalho, tomamos $\dot{\sigma} \neq 0$ e, por isso, não nos restringimos apenas à criação de partículas: a destruição também é possível e isso não quebra nenhuma lei da termodinâmica, como podemos ver na Eq.(4.12). Na verdade, veremos logo mais que é mais provável que partículas sejam destruídas nessa exótica componente do cosmos (Costa Netto; Silva, 2025).

Uma vez que a Eq.(5.5) tem o mesmo formato da Eq.(3.43), a sua solução continua sendo dada pela Eq.(3.46):

$$\rho_x = \rho_{x,0} a^{-3} \exp\left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da\right). \quad (5.8)$$

Já para a Eq.(5.6), temos (Costa Netto; Silva, 2025):

$$n = n_0 a^{-3} \exp\left(\int \Gamma dt\right). \quad (5.9)$$

No caso simples de $\Gamma = \text{constante}$, a densidade de partículas do fluido de energia escura passa a ser uma função exponencial do tempo: quando $\Gamma = \text{constante} > 0$, temos um crescimento exponencial, de modo que $n \rightarrow \infty$ conforme $t \rightarrow \infty$; quando $\Gamma = \text{constante} < 0$, temos um decaimento exponencial, de modo que $n \rightarrow 0$ conforme $t \rightarrow \infty$. Quando $\Gamma = 0$, retomamos a Eq.(3.9).

Precisamos agora, antes de trabalharmos com a Eq.(5.7), de uma nova lei de evolução da temperatura levando em consideração a ocorrência de processos de criação ou destruição de partículas na energia escura. Substituindo as expressões para a densidade de energia escura e densidade de partículas na Eq.(3.19),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_x + p_x) - n \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T \left(\Gamma - 3 \frac{\dot{a}}{a}\right), \\ \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho_x + p_x) - n \Gamma \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T + 3n \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T \frac{\dot{a}}{a}, \\ \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3 \left[(\rho_x + p_x) - n \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T \right] \frac{\dot{a}}{a} - n \Gamma \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T. \end{aligned}$$

Da condição de integrabilidade, Eq.(3.16):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial T}\right)_n \dot{T} &= -3T \left(\frac{\partial p_x}{\partial T}\right)_n \frac{\dot{a}}{a} - n \Gamma \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial n}\right)_T, \\ \frac{\dot{T}}{T} &= -3 \frac{(\partial p_x / \partial T)_n \dot{a}}{(\partial \rho_x / \partial T)_n a} - \frac{n \Gamma (\partial \rho_x / \partial n)_T}{T (\partial \rho_x / \partial T)_n}, \\ \frac{\dot{T}}{T} &= -3 \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x}\right)_n \frac{\dot{a}}{a} - \frac{n \Gamma (\partial \rho_x / \partial n)_T}{T (\partial \rho_x / \partial T)_n}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A Eq.(5.10) pode ser melhorada para uma forma mais simples. Usando novamente a condição de integrabilidade para a entropia específica, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{(\rho_x + p_x)}{(\partial \rho_x / \partial T)_n} &= n \frac{(\partial \rho_x / \partial n)_T}{(\partial \rho_x / \partial T)_n} + T \frac{(\partial p_x / \partial T)_n}{(\partial \rho_x / \partial T)_n} \Rightarrow n \frac{(\partial \rho_x / \partial n)_T}{(\partial \rho_x / \partial T)_n} = \frac{(\rho_x + p_x)}{(\partial \rho_x / \partial T)_n} - T \frac{(\partial p_x / \partial T)_n}{(\partial \rho_x / \partial T)_n}, \\ n \frac{(\partial \rho_x / \partial n)_T}{(\partial \rho_x / \partial T)_n} &= \frac{(\rho_x + p_x)}{(\partial \rho_x / \partial t)_n (\partial t / \partial T)_n} - T \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x}\right)_n = \frac{(\rho_x + p_x)}{\dot{\rho}_x / \dot{T}} - T \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x}\right)_n, \\ n \frac{(\partial \rho_x / \partial n)_T}{(\partial \rho_x / \partial T)_n} &= -\dot{T} \frac{(\rho_x + p_x)}{3(\dot{a}/a)(\rho_x + p_x)} - T \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x}\right)_n, \\ \frac{n \Gamma (\partial \rho_x / \partial n)_T}{T (\partial \rho_x / \partial T)_n} &= -\frac{\Gamma \dot{T}}{3\dot{a}/a T} - \Gamma \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x}\right)_n. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Portanto, Eq.(5.10) torna-se:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{T}}{T} &= -3 \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x} \right)_n \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\Gamma}{3\dot{a}/a} \frac{\dot{T}}{T} + \Gamma \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x} \right)_n, \\ \frac{\dot{T}}{T} - \frac{\Gamma}{3\dot{a}/a} \frac{\dot{T}}{T} &= \left(1 - \frac{\Gamma}{3\dot{a}/a} \right) \frac{\dot{T}}{T} = -3 \left(1 - \frac{\Gamma}{3\dot{a}/a} \right) \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x} \right)_n \frac{\dot{a}}{a}, \\ \frac{\dot{T}}{T} &= -3 \left(\frac{\partial p_x}{\partial \rho_x} \right)_n \frac{\dot{a}}{a}.\end{aligned}\quad (5.12)$$

Curioso! O formato básico da lei de evolução da temperatura da energia escura não mudou mesmo quando o fluido passou de perfeito a imperfeito, hajam ou não partículas sendo criadas ou destruídas. Porém, quando tornamos explícita a pressão total segundo a Eq.(3.44), chegamos a mesma expressão das Eqs.(3.49, 3.50):

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3 \left(\frac{\partial p_0}{\partial \rho_x} \right)_n \frac{\dot{a}}{a} - 3 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \rho_x} \right)_n \frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.13)$$

∴

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3\omega(a) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (5.14)$$

Solucionando a Eq.(5.14), notamos que a temperatura do fluido não é sensível a Γ (Costa Netto; Silva, 2025):

$$T = T_0 \exp \left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da \right). \quad (5.15)$$

Feito isso, tomemos a Eq.(3.52):

$$\sigma = \frac{\rho_x}{nT} (1 + \omega(a)) - \frac{\mu}{T}. \quad (5.16)$$

Como dito na análise do Modelo III, vamos continuar assumindo que μ/T é constante segundo a Eq.(3.34) independentemente do modelo utilizado (Lima; Pereira, 2008; Pereira; Lima, 2008). Reiteramos, inclusive, que vá ao Apêndice B para analisar o tratamento do potencial químico tanto no Modelo III quanto no modelo aqui proposto. Pelas Eqs.(5.8, 5.9, 5.15), temos:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} (1 + \omega(a)) a^{-3} a^3 \exp \left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da \right) \exp \left(3 \int \frac{\omega(a)}{a} da \right) \exp \left(- \int \Gamma dt \right) - \frac{\mu_0}{T_0}, \\ \sigma &= \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} (1 + \omega(a)) \exp \left(- \int \Gamma dt \right) - \frac{\mu_0}{T_0}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Logo,

$$\dot{\sigma} = \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} \frac{d}{dt} \left[(1 + \omega(a)) \exp \left(- \int \Gamma dt \right) \right],$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} \left[\dot{\omega}(a) \exp\left(-\int \Gamma dt\right) - (1 + \omega(a))\Gamma \exp\left(-\int \Gamma dt\right) \right],$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} [\dot{\omega}(a) - (1 + \omega(a))\Gamma] \exp\left(-\int \Gamma dt\right). \quad (5.18)$$

Enxergamos que tanto a Eq.(5.17) quanto a Eq.(5.18) recaem ao Modelo III para $\Gamma = 0$. Além disso, diferentemente do Modelo III, não necessariamente a entropia específica é uma função crescente do tempo.

Ao substituírmos as Eqs.(5.17, 5.18) na Eq.(5.7) sabendo que n varia segundo a Eq.(5.9), chegamos a:

$$S^\mu{}_{;\mu} = n\dot{\sigma} + n\sigma\Gamma,$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = n_0 \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} a^{-3} \dot{\omega}(a) \exp\left(-\int \Gamma dt\right) \exp\left(\int \Gamma dt\right) - n_0 \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} a^{-3} (1 + \omega(a))\Gamma \exp\left(-\int \Gamma dt\right) \exp\left(\int \Gamma dt\right) + n_0 \frac{\rho_{x,0}}{n_0 T_0} a^{-3} (1 + \omega(a))\Gamma \exp\left(-\int \Gamma dt\right) \exp\left(\int \Gamma dt\right) - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} a^{-3} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right),$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = \frac{\rho_{x,0}}{T_0} a^{-3} \dot{\omega}(a) - \frac{\rho_{x,0}}{T_0} a^{-3} (1 + \omega(a))\Gamma + \frac{\rho_{x,0}}{T_0} a^{-3} (1 + \omega(a))\Gamma - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} a^{-3} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right),$$

$$S^\mu{}_{;\mu} = \left[\frac{\rho_{x,0}}{T_0} \dot{\omega}(a) - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] a^{-3}. \quad (5.19)$$

Uma vez que $S^\mu = sU^\mu$, podemos (e já fizemos isso anteriormente) usar a Eq.(5.19) para determinar a densidade de entropia da energia escura:

$$\dot{s} + 3s \frac{\dot{a}}{a} = \left[\frac{\rho_{x,0}}{T_0} \dot{\omega}(a) - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] a^{-3},$$

$$\dot{s} a^3 + s(3a^2)\dot{a} = \frac{ds}{dt} a^3 + s(3a^2) \frac{da}{dt} = \frac{\rho_{x,0}}{T_0} \frac{d\omega}{dt} - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right),$$

$$ds a^3 + s(3a^2) da = \frac{\rho_{x,0}}{T_0} d\omega - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) dt,$$

$$\frac{ds}{da} a^3 + s(3a^2) = \frac{d(sa^3)}{da} = \frac{\rho_{x,0}}{T_0} \frac{d\omega}{da} - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) \frac{dt}{da},$$

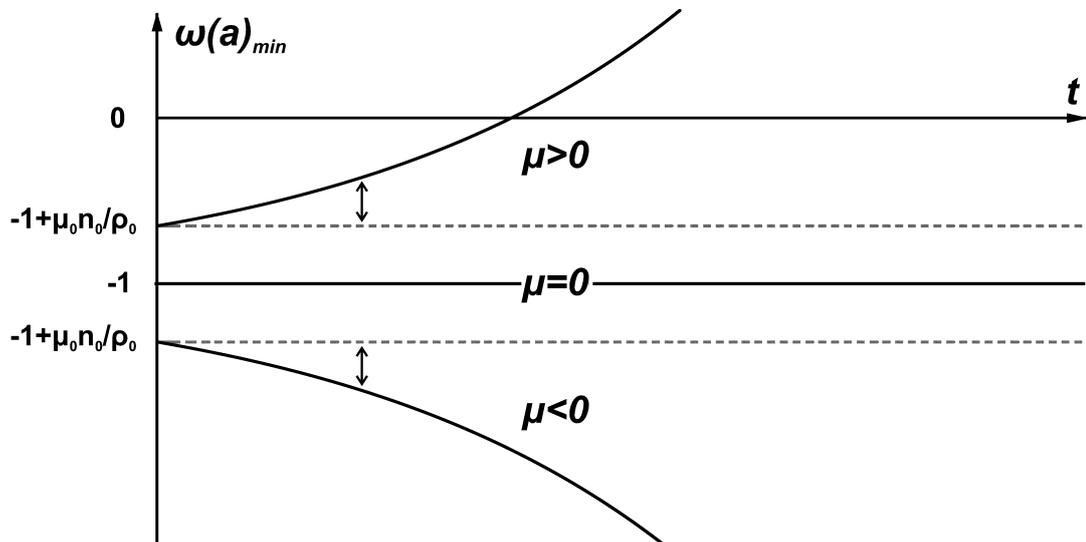
$$d(sa^3) = \frac{\rho_{x,0}}{T_0} d\omega - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) dt. \quad (5.20)$$

A solução dessa equação diferencial é (Costa Netto; Silva, 2025):

$$s = \left\{ s_0 + \frac{\rho_{x,0}}{T_0} (\omega(a) - \omega_0) - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \left[\int \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) dt \right] \right\} a^{-3}. \quad (5.21)$$

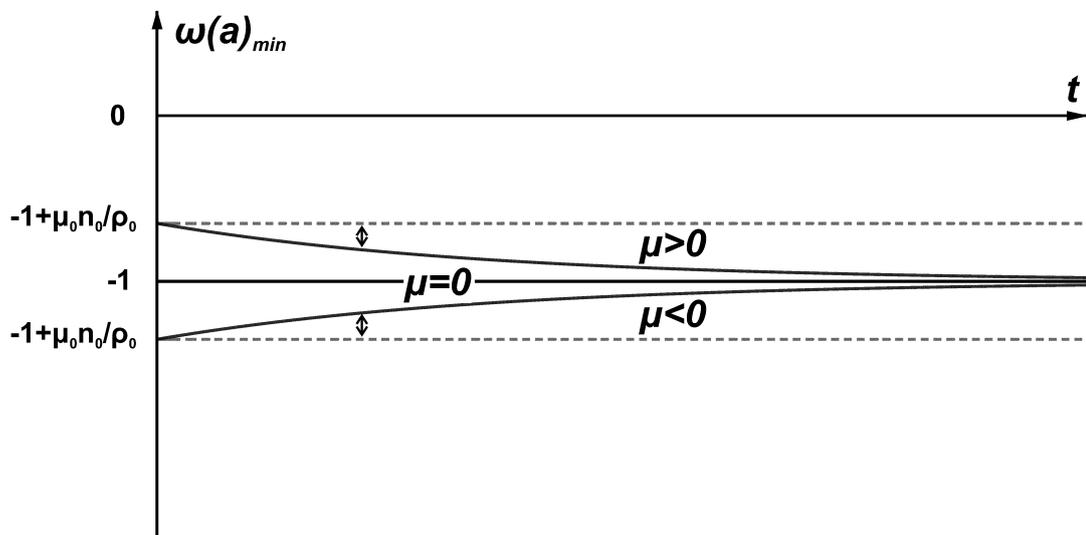
Para $\Gamma = 0$, recuperamos a Eq.(3.56). Combinado a isso, para $\omega(a) \rightarrow \omega_0$ voltamos aos Modelos I e II.

Figura 9 – Representação do comportamento do vínculo da Eq.(5.23) para $\mu > 0$, $\mu = 0$ e $\mu < 0$ quando $\Gamma = constante > 0$. As linhas pontilhadas indicam os valores constantes de $\omega(a)_{min}$ quando não há criação de partículas no fluido.



Fonte: Costa Netto e Silva (2025).

Figura 10 – Representação do comportamento do vínculo da Eq.(5.23) para $\mu > 0$, $\mu = 0$ e $\mu < 0$ quando $\Gamma = constante < 0$. As linhas pontilhadas indicam os valores constantes de $\omega(a)_{min}$ quando não há destruição de partículas no fluido.



Fonte: Costa Netto e Silva (2025).

5.2 NOVOS VÍNCULOS TERMODINÂMICOS

Uma vez que $S = (n\sigma)V$ é a entropia total da energia escura, a sua nova expressão em nosso modelo é (Costa Netto; Silva, 2025):

$$S = \left[\rho_{x,0}(1 + \omega(a)) - \mu_0 n_0 \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] \frac{V_0}{T_0}. \quad (5.22)$$

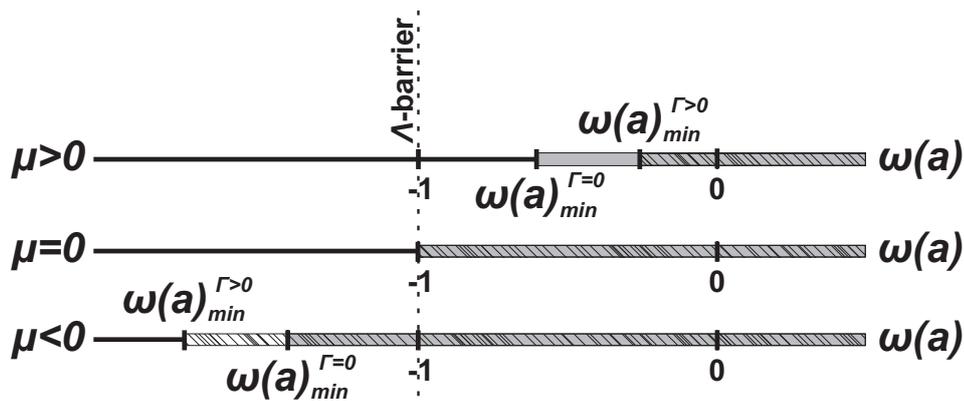
Aplicando a positividade da entropia, chegamos a um vínculo termodinâmico inédito:

$$\omega(a) \geq \omega(a)_{min} = -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} \exp\left(\int \Gamma dt\right). \quad (5.23)$$

O potencial químico continua a desempenhar o papel fundamental na determinação do intervalo de valores possíveis para o parâmetro da EoS. Quando constante, o papel desempenhado pelo termo Γ é tornar o valor mínimo de $\omega(a)$ uma função exponencial do tempo: se a energia escura tem uma fonte constante de partículas, $\Gamma = constante > 0$, $\omega(a)_{min}$ é um crescimento exponencial, divergindo de -1 conforme $t \rightarrow \infty$; se a energia escura tem um sumidouro constante de partículas, $\Gamma = constante < 0$, $\omega(a)_{min}$ é um decaimento exponencial, convergindo para -1 conforme $t \rightarrow \infty$. Esses comportamentos são representados nos gráficos teóricos das Figuras 9 e 10, respectivamente.

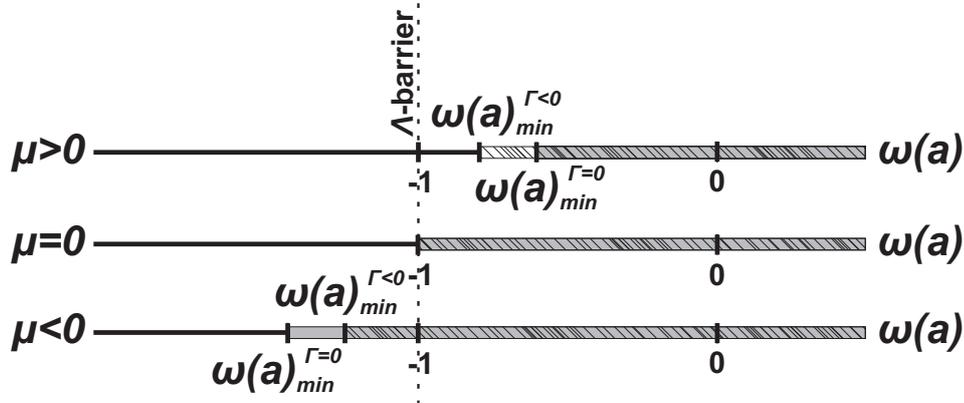
Se no fluido de energia escura partículas são criadas, então os valores de $\omega(a)_{min}$ aumentarão gradualmente. Caso $\mu > 0$, eles se tornarão mais positivos; caso $\mu < 0$ (regime *phantom*), eles se tornarão mais negativos. Também é possível que não haja mudança nenhuma: basta que $\mu = 0$. Nesse contexto, não importa o que ocorra, a constante cosmológica é recuperada. Para um determinado instante de tempo, a Figura 11 compara o antigo intervalo de valores para o parâmetro da EoS com o novo após a inclusão de $\Gamma > 0$. Visualizamos que uma fonte de partículas faz com que a energia escura se distancie da constante cosmológica independentemente do sinal do potencial químico. Por outro lado, se há um sumidouro, o valor mínimo do parâmetro da EoS diminuirá gradualmente, mas com uma assíntota em $\omega(a)_{min} = -1$. Desse modo, quando a energia escura sofre com processos de destruição de partículas, ela tende à constante cosmológica independente do sinal do potencial químico, esteja ou não no regime *phantom*. Na Figura 12 temos um esquema análogo à Figura 11 para $\Gamma < 0$.

Figura 11 – Esquema comparativo para o intervalo de $\omega(a)$ quando $\Gamma = 0$ (parte contínua) e $\Gamma > 0$ (parte hachurada) para um dado instante de tempo. A presença de uma fonte de partículas faz com que $\omega(a)$ se afaste da barreira Λ independente do sinal do potencial químico.



Fonte: Costa Netto e Silva (2025).

Figura 12 – Esquema comparativo para o intervalo de $\omega(a)$ quando $\Gamma = 0$ (parte contínua) e $\Gamma < 0$ (parte hachurada) para um dado instante de tempo. A presença de um sumidouro de partículas faz com que $\omega(a)$ se aproxime da barreira Λ independente do sinal do potencial químico.



Fonte: Costa Netto e Silva (2025).

O modelo termodinâmico por nós proposto nos leva a concluir que é mais provável encontrarmos um sumidouro de partículas do que uma fonte no fluido de energia escura (Costa Netto; Silva, 2025), pois, lembremos, Λ ainda é a melhor explicação para a aceleração cósmica segundo as observações (Aghanim *et al.*, 2020). Essa conclusão, como nosso desenvolvimento mostrou, não quebra nem a segunda lei da termodinâmica nem nenhuma outra.

Isto posto, vamos abrir o vínculo da Eq.(5.22) por meio da Eq.(3.39):

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a f(a) \geq -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} \exp\left(\int \Gamma dt\right),$$

$$\omega_a f(a) \geq -(1 + \omega_0) + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} \exp\left(\int \Gamma dt\right),$$

$$\omega_a \geq -\frac{1}{\rho_{x,0} f(a)} \left[\rho_{x,0} (1 + \omega_0) - \mu_0 n_0 \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right].$$

Fazendo $t = t_0$ na Eq.(5.17), podemos escrever $T_0 n_0 \sigma_0 = T_0 s_0 = \rho_{x,0} (1 + \omega_0) - \mu_0 n_0$. Dessa forma, a expressão anterior torna-se:

$$\omega_a \geq -\frac{1}{\rho_{x,0} f(a)} \left[T_0 s_0 + \mu_0 n_0 - \mu_0 n_0 \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right],$$

$$\omega_a \geq \omega_{a_{min}} = -\frac{T_0 s_0}{\rho_{x,0} f(a)} \left\{ 1 + \frac{\mu_0 n_0}{T_0 s_0} \left[1 - \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] \right\}. \quad (5.24)$$

Diferentemente do que vimos no Modelo III, o valor mínimo de ω_a depende do potencial químico, assumindo diferentes valores a depender do cenário em que estamos. Não só isso, mas também, no caso de $\Gamma = \text{constante}$, passa a ser uma função exponencial do tempo, perdendo seu caráter constante. Todavia, caso a energia escura sofra

com processos de destruição de partículas, $\Gamma = \text{constante} < 0$, então teremos um decaimento exponencial na Eq.(5.24) que zera conforme $t \rightarrow \infty$. Sendo assim,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{a_{min}}(\Gamma = \text{constante} < 0) = -\frac{T_0 s_0}{\rho_{x,0} f(a)} \left(1 + \frac{\mu_0 n_0}{T_0 s_0}\right). \quad (5.25)$$

Vemos que $\omega_{a_{min}}$ perde sua dependência temporal, mas a dependência com relação ao potencial químico continua intacta, revelando um efeito inédito trazido pelo nosso modelo como consequência de $N^\mu_{;\mu} \neq 0$. Além disso, conseguimos outro vínculo para ω_a aplicando a segunda lei da termodinâmica a Eq.(5.19):

$$S^\mu_{;\mu} \geq 0 \Rightarrow \left[\frac{\rho_{x,0}}{T_0} \dot{\omega}(a) - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] a^{-3} \geq 0, \quad (5.26)$$

$$\dot{\omega}(a) \geq \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right).$$

A derivada temporal de $\omega(a)$ não é necessariamente positiva, dependendo do sinal do potencial químico e da presença de fontes ou sumidouros de partículas no fluido. Por exemplo, obtemos $\dot{\omega}(a) > 0$ para $\mu > 0$ e $\Gamma > 0$ ou $\mu < 0$ e $\Gamma < 0$ (um cenário *phantom* com destruição de partículas, convergindo para a constante cosmológica com $t \rightarrow \infty$). Por outro lado, obtemos $\dot{\omega}(a) < 0$ para $\mu > 0$ e $\Gamma < 0$ ou $\mu < 0$ e $\Gamma > 0$ (um cenário *phantom* com criação de partículas, divergindo da constante cosmológica para $t \rightarrow \infty$). É claro que obtemos $\dot{\omega}(a) = 0$ para $\mu = 0$ ou $\Gamma = 0$, como era de se esperar. Sabendo disso, ao tornarmos explícita a expressão para o parâmetro da EoS na Eq.(5.26) e trabalhando em intervalos de a em que $f'(a) < 0$, chegamos a:

$$\frac{d\omega}{da} \frac{da}{dt} = \frac{d}{da} (\omega_0 + \omega_a f(a)) \dot{a} \geq \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right),$$

$$\omega_a f'(a) \dot{a} \geq \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right),$$

$$\omega_a \leq \omega_{a_{max}} = \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0} f'(a)} \frac{\Gamma}{\dot{a}} \exp\left(\int \Gamma dt\right). \quad (5.27)$$

Isso mostra que o valor máximo de ω_a , além de depender da parametrização escolhida, tem a possibilidade de ser diferente de zero. No entanto, para $\Gamma = 0$ (ou, de forma equivalente, $\mu = 0$), retornamos a Eq.(3.61).

No limite de $\omega_a \rightarrow 0$, a Eq.(5.24) passa a fornecer um vínculo para ω_0 :

$$0 \geq -\frac{T_0 s_0}{\rho_{x,0} f(a)} \left\{ 1 + \frac{\mu_0 n_0}{T_0 s_0} \left[1 - \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] \right\} \Rightarrow 1 + \frac{\mu_0 n_0}{T_0 s_0} \left[1 - \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] \geq 0,$$

$$T_0 s_0 + \mu_0 n_0 \left[1 - \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] \geq 0,$$

$$\rho_{x,0}(1 + \omega_0) - \mu_0 n_0 + \mu_0 n_0 \left[1 - \exp\left(\int \Gamma dt\right) \right] \geq 0.$$

Ou, melhorando,

$$\omega_0 \geq \omega_{0_{min}} = -1 + \frac{\mu_0 n_0}{\rho_{x,0}} \exp\left(\int \Gamma dt\right). \quad (5.28)$$

Da mesma forma que aconteceu com o valor mínimo de ω_a , o valor mínimo de ω_0 também transforma-se numa função exponencial do tempo para $\Gamma = \text{constante}$. A dependência do potencial químico, por outro lado, já era esperada vide a Eq.(3.60). Novamente, caso haja um sumidouro constante de partículas no fluido de energia escura, $\Gamma = \text{constante} < 0$, a exponencial da expressão anterior zera para tempos muito grandes e voltamos ao caso de $\omega_{0_{min}}$ não só puramente constante, mas recuperando a constante cosmológica (e perdendo, portanto, a dependência com μ):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{0_{min}}(\Gamma = \text{constante} < 0) = -1. \quad (5.29)$$

Tudo isso contribui, enfatizamos, para a conclusão de que é mais seguro apostar na presença de processos de destruição de partículas nessa exótica componente do universo que almejamos modelar.

6 CONCLUSÕES

Neste TCC, propomos um novo modelo termodinâmico para energia escura que generaliza o discutido em Silva *et al.* (2013), Silva (2014) e Silva *et al.* (2012) ao incluir na análise processos de criação ou destruição de partículas. Isso é justificado devido ao fato da viscosidade volumar mimetizada pela energia escura quando sua EoS varia no tempo ser, em cosmologia, um processo intimamente relacionado com matéria ser criada ou destruída (Calvão; Lima; Waga, 1992; Lima; Germano, 1992; Lima; Germano; Abramo, 1996; Zimdahl, 1996b; Zimdahl; Pavón, 1993). Apesar da evolução da densidade de energia e da lei de evolução da temperatura não mudarem, derivamos novas expressões para a evolução da densidade de partículas e para a evolução da densidade de entropia que se mostraram sensíveis à introdução de Γ . Também obtivemos vínculos termodinâmicos inéditos que evidenciam que $\omega(a)_{min}$ começa a ser uma função exponencial do tempo na presença de uma fonte ou sumidouro constante de partículas, com esse comportamento sendo representado nas Figuras 9 e 10. Em particular, notamos que se a energia escura sofre com processos de destruição de partículas, então o fluido eventualmente se comportará como a constante cosmológica independentemente do sinal de seu potencial químico (Costa Netto; Silva, 2025). Ao contrário do que se poderia esperar, nossos argumentos não vão contra o que as leis da termodinâmica dizem (Gunzig; Gehehiau; Prigogine, 1987; Prigogine, 1989; Prigogine *et al.*, 1988).

Outro resultado interessante vem quando impomos a segunda lei da termodinâmica à expressão para a divergência da corrente de entropia: diferentemente do Modelo III, obtivemos que $\dot{\omega}(a)$ não precisa ser necessariamente positivo, podendo assumir valores negativos, inclusive, a depender da disposição de sinais do potencial químico e de Γ - por mais que, dadas as conclusões que nosso modelo nos leva, isso não seja tão provável. A partir disso, chegamos a um vínculo para o valor máximo de ω_a que, em nosso caso, também não se restringe a valores exclusivamente negativos. Quando explicitamos a expressão da EoS vista na Eq.(2.45) no vínculo termodinâmico geral para $\omega(a)$, conseguimos restrições para $\omega_{a_{min}}$ e $\omega_{0_{min}}$ isoladamente. Em ambas, notamos que seu valor mínimo passa a depender do potencial químico e transforma-se, no caso de $\Gamma = constante$, numa função exponencial do tempo, retomando seu caráter constante conforme o tempo passa em um cenário de destruição constante de partículas. Enquanto para ω_a ainda há, nesse contexto, dependência do potencial químico, ω_0 a perde totalmente, retomando a constante cosmológica.

Algumas questões podem emergir a partir desta análise primitiva. Para nós, a mais imediata trata-se da natureza das partículas criadas ou destruídas no fluido de energia escura. Ora, como a natureza dessa exótica componente em si não é bem conhecida até o momento, é difícil dar uma resposta direta. Pode-se procurar

justificativas geométricas (Biswas; Shaw; Misra, 2002) ou uma possível interação com a matéria escura - alguns modelos de universo consideram um cosmos sofrendo com criação de partículas de matéria escura para justificar a aceleração cósmica (Cárdenas *et al.*, 2020; Cárdenas; Cruz; Lepe, 2020; Ema; Nakayama; Tang, 2018; Herring; Boyanovsky, 2020). Não só isso, mas é de fundamental importância dar uma forma definida ao termo Γ : se for constante, teremos um crescimento exponencial típico para $\Gamma = \text{constante} > 0$ ou um decaimento exponencial típico para $\Gamma = \text{constante} < 0$, o que é um cenário simples e fácil de se trabalhar, como vimos; se depender do fator de escala em alguma ordem, nossa vida enquanto cosmólogos torna-se menos trivial. Finalmente, é necessário confrontar este estudo com os dados observacionais mais recentes para verificar se nossas previsões teóricas são consistentes com o que é observado na imensidão do universo. Nesse sentido, esperamos evoluir este modelo inicial para um mais completo e (tentar) elaborar respostas suficientemente boas para essas questões, levantando outras no processo e fazendo, com esse desenvolvimento, a ciência avançar.

Durante este trabalho, destacamos inúmeras vezes que Λ é a melhor explicação para a aceleração cósmica segundo as observações. Entretanto, esse pode não ser mais o caso. No começo de 2025, dados do *Dark Energy Spectroscopic Instrument* (DESI), obtidos a partir de medidas de oscilações acústicas de bárions (cuja sigla inglesa é BAO, de *baryon acoustic oscillations*) combinadas com outros catálogos de CMB e SNe Ia, indicaram que há uma preferência para uma energia escura dinâmica, isto é, uma energia escura com EoS variável (Adame *et al.*, 2025). E não para por aí: $\omega(a) < -1$, o regime *phantom*, também é favorecido por esses dados observacionais. Esse resultado é bastante impactante, pois vai contra o modelo Λ CDM, formado, como já vimos, por constante cosmológica e matéria escura fria. Além disso, também implica que, em algum momento, num futuro muito distante, o *Big Rip* poderá ocorrer! Tudo isso põe o estudo e análise da energia escura em evidência na comunidade acadêmica, de modo que se abre um enorme leque de possibilidades para mais e mais trabalhos serem concebidos. Em certa medida, os modelos de energia escura voltam a ser uma das meninas dos olhos da cosmologia.

REFERÊNCIAS

- ADAME, A. *et al.* DESI 2024 VI: Cosmological constraints from the measurements of baryon acoustic oscillations. **J. Cosmol. Astropart. Phys.**, v. 2025, n. 2, p. 71, 2025.
- AGHANIM, N. *et al.* Planck 2018 results-VI. Cosmological parameters. **Astron. Astrophys.**, v. 641, p. A6, 2020.
- ASTIER, P. Can luminosity distance measurements probe the equation of state of dark energy?. **Phys. Lett. B**, v. 500, n. 1-2, p. 8–15, 2001.
- BABICHEV, E.; DOKUCHAEV, V.; EROSHENKO, Y. Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion. **Phys. Rev. Lett.**, v. 93, n. 2, p. 021102, 2004.
- BARBOZA JR., E. M.; ALCANIZ, J. S. A parametric model for dark energy. **Physics Letters B**, v. 666, n. 5, p. 415–419, 2008.
- BISWAS, S.; SHAW, A.; MISRA, P. Particle production in expanding spacetime. **Gen. Relativ. Gravit.**, v. 34, p. 665–678, 2002.
- CALDWELL, R. R. A phantom menace? Cosmological consequences of a dark energy component with super-negative equation of state. **Phys. Lett. B**, v. 545, p. 23–29, 2002.
- CALDWELL, R. R.; KAMIONKOWSKI, M.; WEINBERG, N. N. Phantom energy: dark energy with $\omega < -1$ causes a cosmic doomsday. **Phys. Rev. Lett.**, v. 91, n. 7, p. 071301, 2003.
- CALVÃO, M. O.; LIMA, J. A. S.; WAGA, I. On the thermodynamics of matter creation in cosmology. **Phys. Lett. A**, v. 162, p. 223–226, 1992.
- CÁRDENAS, V. H. *et al.* Challenging matter creation models in the phantom divide. **Phys. Rev. D**, v. 101, p. 083530, 2020.
- CÁRDENAS, V. H.; CRUZ, M.; LEPE, S. Cosmic expansion with matter creation and bulk viscosity. **Phys. Rev. D**, v. 102, p. 123543, 2020.
- CARROLL, S. M. The cosmological constant. **Living Rev. Relativ.**, v. 4, p. 1–56, 2001.
- CHEVALLIER, M.; POLARSKI, D. Accelerating universes with scaling dark matter. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 10, n. 02, p. 213–223, 2001.
- CLINE, J. M.; JEON, S.; MOORE, G. D. The phantom menaced: Constraints on low-energy effective ghosts. **Phys. Rev. D**, v. 70, p. 043543, 2004.
- COORAY, A. R.; HUTERER, D. Gravitational lensing as a probe of quintessence. **Astrophys. J.**, v. 513, n. 2, p. L95–L98, 1999.

- COSTA NETTO, J. M.; SILVA, H. H. B. A thermodynamic model for dark energy including particle creation or destruction processes. **Chin. J. Phys.**, v. 94, p. 684–689, 2025.
- ECKART, C. The thermodynamics of irreversible processes III. Relativistic theory of the simple fluid. **Phys. Rev.**, v. 58, n. 10, p. 919, 1940.
- EFSTATHIOU, G. Constraining the equation of state of the universe from distant type Ia supernovae and cosmic microwave background anisotropies. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 310, n. 3, p. 842–850, 1999.
- EMA, Y.; NAKAYAMA, K.; TANG, Y. Production of purely gravitational dark matter. **J. High Energy Phys.**, v. 2018, p. 1–20, 2018.
- GONZÁLEZ-DÍAZ, P. F. You need not be afraid of phantom energy. **Phys. Rev. D**, v. 68, p. 021303, 2003.
- GONZÁLEZ-DÍAZ, P. F.; SIGÜENZA, C. L. Phantom thermodynamics. **Nucl. Phys. B**, v. 697, p. 363–386, 2004b.
- GONZÁLEZ-DÍAZ, P. F.; SIGÜENZA, C. L. The fate of black holes in an accelerating universe. **Phys. Lett. B**, v. 589, p. 78–82, 2004a.
- GUNZIG, E.; GEHENIAU, J.; PRIGOGINE, I. Entropy and cosmology. **Nature**, v. 330, p. 621–624, 1987.
- HERRING, N.; BOYANOVSKY, D. Gravitational production of nearly thermal fermionic dark matter. **Phys. Rev. D**, v. 101, p. 123522, 2020.
- HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Proc. Natl. Acad. Sci. USA**, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929.
- KOLB, E. W.; TURNER, M. S. **The early universe**. 1 ed. Redwood City: Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Fluid Mechanics: Volume 6**. Oxford: Pergamon Press, 1987.
- LEMAÎTRE, G. Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. **Ann. Soc. Sci. Brux.**, v. 47, p. 49–59, 1927.
- LIMA, J. A. S.; GERMANO, A. S. M. On the equivalence of bulk viscosity and matter creation. **Phys. Lett. A**, v. 170, p. 373–378, 1992.

- LIMA, J. A. S.; GERMANO, A. S. M.; ABRAMO, L. R. W. FRW-type cosmologies with adiabatic matter creation. **Phys. Rev. D**, v. 53, p. 4287, 1996.
- LIMA, J. A. S.; PEREIRA, S. H. Chemical potential and the nature of dark energy: The case of a phantom field. **Phys. Rev. D**, v. 78, p. 083504, 2008.
- LIMA, J. A. S.; ALCANIZ, J. S. Thermodynamics, spectral distribution and the nature of dark energy. **Phys. Lett. B**, v. 600, p. 191–196, 2004.
- LINDER, E. V. Exploring the expansion history of the universe. **Phys. Rev. Lett.**, v. 90, n. 9, p. 091301, 2003.
- MYUNG, Y. S. On phantom thermodynamics with negative temperature. **Phys. Lett. B**, v. 671, p. 216–218, 2009.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Effective equation of state and energy conditions in phantom/tachyon inflationary cosmology perturbed by quantum effects. **Phys. Lett. B**, v. 571, p. 1–10, 2003b.
- NOJIRI, S.; ODINTSOV, S. D. Quantum de Sitter cosmology and phantom matter. **Phys. Lett. B**, v. 562, p. 147–152, 2003a.
- PEEBLES, P. J. E.; RATRA, B. The cosmological constant and dark energy. **Rev. Mod. Phys.**, v. 75, p. 559, 2003.
- PEREIRA, S. H.; LIMA, J. A. S. On phantom thermodynamics. **Phys. Lett. B**, v. 669, p. 266–270, 2008.
- PERLMUTTER, S. *et al.* Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. **Astrophys. J.**, v. 517, n. 2, p. 565, 1999.
- PRIGOGINE, I. Thermodynamics and cosmology. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 28, p. 927–933, 1989.
- PRIGOGINE, I. *et al.* Thermodynamics of cosmological matter creation. **Proc. Natl. Acad. Sci. USA**, v. 85, p. 7428–7432, 1988.
- REICHL, L. **A modern course in statistical physics**. 4 ed. New York: John Wiley & Sons, 2016.
- RIESS, A. G. *et al.* Large Magellanic Cloud Cepheid standards provide a 1% foundation for the determination of the Hubble constant and stronger evidence for physics beyond Λ CDM. **Astrophys. J.**, v. 876, n. 1, p. 85, 2019.
- RIESS, A. G. *et al.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **Astron. J.**, v. 116, p. 1009, 1998.

- RUBIN, V. C. *et al.* Motion of the Galaxy and the local group determined from the velocity anisotropy of distant SC I galaxies. I-The data. **Astron. J.**, v. 81, p. 687–718, 1976a.
- RUBIN, V. C. *et al.* Motion of the Galaxy and the local group determined from the velocity anisotropy of distant SC I galaxies. II-The analysis for the motion. **Astron. J.**, v. 81, p. 719–737, 1976b.
- RUBIN, V. C.; FORD JR, W. K. Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. **Astrophys. J.**, v. 159, p. 379, 1970.
- RYDEN, B. **Introduction to cosmology**. 2 ed. New York: Cambridge University Press, 2017.
- SAMART, D.; GUMJUDPAI, B. Phantom field dynamics in loop quantum cosmology. **Phys. Rev. D**, v. 76, p. 043514, 2007.
- SAMI, M.; TOPORENSKY, A. Phantom field and the fate of the universe. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 19, p. 1509–1517, 2004.
- SARIDAKIS, E. N.; GONZÁLEZ-DÍAZ, P. F.; SIGÜENZA, C. L. Unified dark energy thermodynamics: varying ω and the -1 -crossing. **Class. Quantum Gravity**, v. 26, p. 165003, 2009.
- SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. 3 ed. New York: Cambridge University Press, 2022.
- SILVA, H. H. B. *et al.* General treatment for dark energy thermodynamics. **Phys. Rev. D**, v. 88, p. 127302, 2013.
- SILVA, H. H. B. **Setor escuro do universo: uma análise termodinâmica**. 2014. 116 f. Tese (Doutorado em Física) – Departamento de Física, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.
- SILVA, R. *et al.* Thermodynamics and dark energy. **Astron. Astrophys.**, v. 537, p. A11, 2012.
- SILVA, R.; LIMA, J. A. S.; CALVÃO, M. O. Temperature evolution law of imperfect relativistic fluids. **Gen. Relativ. Gravit.**, v. 34, p. 865–875, 2002.
- SLIPHER, V. M. The radial velocity of the Andromeda Nebula. **Lowell Obs. Bull.**, v. 2, p. 56–57, 1913.
- WEINBERG, S. **Cosmology**. 1 ed. New York: OUP Oxford, 2008.

WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity**. 1 ed. New York: John Wiley e Sons, 1972.

WELLER, J.; ALBRECHT, A. Future supernovae observations as a probe of dark energy. **Phys. Rev. D**, v. 65, n. 10, p. 103512, 2002.

ZEL'DOVICH, Y. B. Cosmological constant and elementary particles. **JETP Lett.**, v. 6, p. 883–884, 1967.

ZEL'DOVICH, Y. B. The cosmological constant and the theory of elementary particles. **Sov. Phys. Uspekhi**, v. 11, n. 3, p. 381–393, 1968.

ZIMDAHL, W. “Understanding” cosmological bulk viscosity. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 280, n. 4, p. 1239–1243, 1996a.

ZIMDAHL, W. Bulk viscous cosmology. **Phys. Rev. D**, v. 53, p. 5483, 1996b.

ZIMDAHL, W.; PAVÓN, D. Cosmology with adiabatic matter creation. **Phys. Lett. A**, v. 176, p. 57–61, 1993.

APÊNDICE A – EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE GENERALIZADA

Quando tratamos de fluidos relativísticos fora do equilíbrio em cosmologia, duas abordagens se destacam: a de Eckart e a de Landau-Lifshitz. Enquanto na primeira U^μ é definida como a quadrivelocidade do transporte de partículas (Eckart, 1940), na segunda U^μ é a quadrivelocidade do transporte de energia (Landau; Lifshitz, 1987). Apesar disso, em ambas as abordagens considera-se que os gradientes de espaço-tempo são pequenos o suficiente para que as variáveis primitivas que descrevem o fluido desviem do equilíbrio somente até primeira ordem. Sendo assim, o tensor energia-momento torna-se (Silva; Lima; Calvão, 2002):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu} + \Delta T^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

em que

$$\Delta T^{\mu\nu} = -(\Pi + p_c)(g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) + q^\mu U^\nu + q^\nu U^\mu + \Pi^{\mu\nu}, \quad (\text{A.2})$$

em que Π e p_c , os termos escalares, são a pressão viscosa volumar e a pressão de criação, respectivamente. Os termos tensoriais, q^μ e $\Pi^{\mu\nu}$, são o fluxo de calor e a tensão viscosa, respectivamente, e obedecem a

$$U^\mu q_\mu = U^\mu \Pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \Pi^{\mu\nu} = \Pi_{\mu\nu} - \Pi_{\nu\mu} = 0. \quad (\text{A.3})$$

A pressão de criação p_c está associada aos processos adiabáticos de criação de matéria (Gunzig; Geheniau; Prigogine, 1987; Prigogine, 1989; Prigogine *et al.*, 1988). Considerando que, em cosmologia, podemos relacionar a criação ou destruição de partículas à viscosidade volumar (Calvão; Lima; Waga, 1992; Lima; Germano, 1992; Lima; Germano; Abramo, 1996; Zimdahl, 1996b; Zimdahl; Pavón, 1993), o termo p_c torna-se, em certa medida, redundante. Assim, sem perda de generalidade, podemos usar

$$\Delta T^{\mu\nu} = -\Pi(g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) + q^\mu U^\nu + q^\nu U^\mu + \Pi^{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

Isto posto, vamos finalmente determinar a equação da continuidade generalizada para um fluido imperfeito:

$$U_\mu T^{\mu\nu}_{; \nu} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$U_\mu [(\rho + p)U^\mu U^\nu - pg^{\mu\nu}]_{; \nu} = -U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{; \nu}. \quad (\text{A.6})$$

O lado esquerdo da Eq.(A.6) é igual ao lado esquerdo da equação da continuidade de um fluido perfeito (Silva; Lima; Calvão, 2002):

$$U_\mu [(\rho + p)U^\mu U^\nu - p g^{\mu\nu}]_{;v} = \dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (\text{A.7})$$

O lado direito da Eq.(A.6), por sua vez, é:

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = U_\mu [-\Pi(g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) + q^\mu U^\nu + q^\nu U^\mu + \Pi^{\mu\nu}]_{;v},$$

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = U_\mu \left\{ [-\Pi(g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu)]_{;v} + (q^\mu U^\nu)_{;v} + (q^\nu U^\mu)_{;v} + \Pi^{\mu\nu}_{;v} \right\},$$

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = U_\mu \left[-\Pi_{;v}(g^{\mu\nu} - U^\mu U^\nu) - \Pi(g^{\mu\nu}_{;v} - U^\mu_{;v} U^\nu - U^\mu U^\nu_{;v}) + q^\mu_{;v} U^\nu + q^\mu U^\nu_{;v} + \right. \\ \left. + q^\nu_{;v} U^\mu + q^\nu U^\mu_{;v} + \Pi^{\mu\nu}_{;v} \right],$$

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = -\Pi_{;v} U_\mu g^{\mu\nu} + \Pi_{;v} U_\mu U^\mu U^\nu - \Pi U_\mu g^{\mu\nu}_{;v} + \Pi U_\mu U^\mu_{;v} U^\nu + \Pi U_\mu U^\mu U^\nu_{;v} + q^\mu_{;v} U_\mu U^\nu + \\ + q^\mu U_\mu U^\nu_{;v} + q^\nu_{;v} U_\mu U^\mu + q^\nu U_\mu U^\mu_{;v} + U_\mu \Pi^{\mu\nu}_{;v}.$$

Pelo teorema da planicidade local, $g^{\mu\nu}_{;v} = 0$ (Schutz, 2022). Também sabemos que $U^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$. Não só isso, mas dada a definição da quadrivelocidade, temos $U_\mu U^\mu = 1$ e $U_\mu U^\mu_{;v} = 0$ (Weinberg, 1972, 2008). Logo,

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = -\Pi_{;v} U^\nu + \Pi_{;v} U^\nu - 0 + 0 + \Pi U^\nu_{;v} + q^\mu_{;v} U_\mu U^\nu + q^\mu U_\mu U^\nu_{;v} + q^\nu_{;v} + 0 + U_\mu \Pi^{\mu\nu}_{;v},$$

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = \Pi \Theta + q^\mu_{;v} U_\mu U^\nu + q^\mu U_\mu \Theta + q^\nu_{;v} + U_\mu \Pi^{\mu\nu}_{;v},$$

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = 3\Pi \frac{\dot{a}}{a} + q^\mu_{;v} U_\mu U^\nu + 3q^\mu U_\mu \frac{\dot{a}}{a} + q^\nu_{;v} + U_\mu \Pi^{\mu\nu}_{;v}.$$

Usando os vínculos da Eq.(A.3),

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = 3\Pi \frac{\dot{a}}{a} + q^\mu_{;v} U_\mu U^\nu + 0 + q^\nu_{;v} + U_\mu \Pi^{\mu\nu}_{;v},$$

$$U_\mu \Delta T^{\mu\nu}_{;v} = 3\Pi \frac{\dot{a}}{a} + q^\mu_{;v} U_\mu U^\nu + q^\nu_{;v} + U_\mu \Pi^{\mu\nu}_{;v}. \quad (\text{A.8})$$

Substituindo as Eqs.(A.7, A.8) na Eq.(A.6), chegamos a equação da continuidade generalizada:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = -3\Pi \frac{\dot{a}}{a} - q^\mu_{;v} U_\mu U^\nu - q^\nu_{;v} - U_\mu \Pi^{\mu\nu}_{;v}. \quad (\text{A.9})$$

Essa expressão é válida para qualquer fluido relativístico que sofram com processos fora do equilíbrio até primeira ordem. Tendo em mente que os casos de interesse para

a cosmologia fogem do equilíbrio somente até, justamente, primeira ordem, usamos a expressão acima com frequência ao estudarmos sistemas fora do limite adiabático.

Comparando a Eq.(A.9) com a Eq.(3.41),

$$\dot{\rho}_x + 3(\rho_x + \omega_0 \rho_x) \frac{\dot{a}}{a} = -3\omega_a f(a) \rho_x \frac{\dot{a}}{a}, \quad (\text{A.10})$$

em que $p_{eq} = \omega_0 \rho_x$ é a pressão de equilíbrio, notamos que as divergências dos campos tensoriais se anulam e que

$$\Pi = \omega_a f(a) \rho_x \quad (\text{A.11})$$

é a expressão para a pressão viscosa volumar mimetizada pela energia escura do Modelo III (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014; Silva *et al.*, 2012).

APÊNDICE B – O PROBLEMA DO POTENCIAL QUÍMICO

No Capítulo 3 deste TCC, ao analisarmos o Modelo II, vimos que (Lima; Pereira, 2008; Pereira; Lima, 2008)

$$\frac{\mu}{T} = \frac{\mu_0}{T_0}. \quad (\text{B.1})$$

Impomos que essa importantíssima relação continua válida independente do modelo termodinâmico de energia escura, desde que, claro, haja a possibilidade do potencial químico ser diferente de zero. Vamos agora discutir um pouco mais essa consideração usando a Eq.(3.30),

$$\mu = \frac{\rho_x + p_x}{n} - \frac{T s}{n}, \quad (\text{B.2})$$

para determinar a evolução do potencial químico para os modelos fora do equilíbrio.

Para o Modelo III, temos (Silva *et al.*, 2013; Silva, 2014):

$$\mu_{III} = \frac{\rho_{x,0}}{n_0} (1 + \omega(a)) a^3 a^{-3} \exp\left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da\right) - \frac{T}{n_0} \left[s_0 + \frac{\rho_{x,0}}{T_0} (\omega(a) - \omega_0) \right] a^{-3} a^3,$$

$$\mu_{III} = \frac{\rho_{x,0}}{n_0} \frac{T}{T_0} (1 + \omega(a)) - \frac{T_0 s_0}{n_0} \frac{T}{T_0} - \frac{\rho_{x,0}}{n_0} \frac{T}{T_0} (\omega(a) - \omega_0),$$

$$\mu_{III} = \left[\frac{\rho_{x,0}}{n_0} (1 + \omega_0) - \frac{T_0 s_0}{n_0} \right] \frac{T}{T_0},$$

$$\mu_{III} = \mu_0 \frac{T}{T_0}, \quad (\text{B.3})$$

em que no passo anterior a Eq.(B.3) fizemos a correspondência do termo entre colchetes com a Eq.(3.33). Como podemos ver, μ_{III}/T continua constante.

Vamos agora determinar o potencial químico para o modelo descrito neste TCC. Usando as Eqs.(5.8, 5.9, 5.10, 5.21), chegamos a:

$$\begin{aligned} \mu_{TCC} = & \frac{\rho_{x,0}}{n_0} (1 + \omega(a)) a^3 a^{-3} \exp\left(-3 \int \frac{\omega(a)}{a} da\right) \exp\left(-\int \Gamma dt\right) - \frac{T}{n_0} \left\{ s_0 + \right. \\ & \left. + \frac{\rho_{x,0}}{T_0} (\omega(a) - \omega_0) - \frac{\mu_0 n_0}{T_0} \left[\int \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) dt \right] \right\} a^{-3} a^3 \exp\left(-\int \Gamma dt\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_{TCC} = & \frac{\rho_{x,0}}{n_0} \frac{T}{T_0} (1 + \omega(a)) \exp\left(-\int \Gamma dt\right) - \left\{ \frac{T_0 s_0}{n_0} \frac{T}{T_0} + \frac{\rho_{x,0}}{n_0} \frac{T}{T_0} (\omega(a) - \omega_0) + \right. \\ & \left. - \mu_0 \frac{T}{T_0} \left[\int \Gamma \exp\left(\int \Gamma dt\right) dt \right] \right\} \exp\left(-\int \Gamma dt\right), \end{aligned}$$

$$\mu_{TCC} = \left\{ \frac{\rho_{x,0}}{n_0} \frac{T}{T_0} (1 + \omega(a)) - \frac{T_0 s_0}{n_0} \frac{T}{T_0} - \frac{\rho_{x,0}}{n_0} \frac{T}{T_0} (\omega(a) - \omega_0) + \right. \\ \left. + \mu_0 \frac{T}{T_0} \left[\int \Gamma \exp \left(\int \Gamma dt \right) dt \right] \right\} \exp \left(- \int \Gamma dt \right),$$

$$\mu_{TCC} = \left\{ \left[\frac{\rho_{x,0}}{n_0} (1 + \omega_0) - \frac{T_0 s_0}{n_0} \right] \frac{T}{T_0} + \mu_0 \frac{T}{T_0} \left[\int \Gamma \exp \left(\int \Gamma dt \right) dt \right] \right\} \exp \left(- \int \Gamma dt \right).$$

Pela Eq.(3.33),

$$\mu_{TCC} = \left\{ \mu_0 \frac{T}{T_0} + \mu_0 \frac{T}{T_0} \left[\int \Gamma \exp \left(\int \Gamma dt \right) dt \right] \right\} \exp \left(- \int \Gamma dt \right),$$

$$\mu_{TCC} = \mu_0 \frac{T}{T_0} \left[1 + \int \Gamma \exp \left(\int \Gamma dt \right) dt \right] \exp \left(- \int \Gamma dt \right). \quad (\text{B.4})$$

Quando $\Gamma = 0$ e não ocorrem processos de criação ou destruição de partículas, então $\mu_{TCC} = \mu_{III}$, como era de se esperar. No entanto, quando $\Gamma \neq 0$, não recuperamos a relação da Eq.(B.1), o que é, à primeira vista, um problema! Partindo do mesmo espírito daqueles que se depararam com o problema da constante cosmológica, podemos dizer que temos em mãos o problema do potencial químico.

Até o presente momento, não conseguimos obter uma solução satisfatória para esse empecilho. Porém, levando em consideração que assumir que μ/T é constante durante toda a evolução cósmica fez com que obtivéssemos bons resultados teóricos que se reduziam aos já estabelecidos pelo Modelo III para $\Gamma = 0$, deve haver uma maneira de contorná-lo que não estamos enxergando atualmente. O máximo que podemos dizer por hora é que μ_{TCC}/T de fato torna-se constante quando $t = t_0$.

Encorajamos o leitor a tentar buscar possíveis alternativas para o desenvolvimento feito neste apêndice que façam com que μ_{TCC}/T seja sempre constante.