



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCEN
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

FERROFLUIDOS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW DE ESPAÇAMENTO VARIÁVEL: O PAPEL DO CAMPO MAGNÉTICO E DOS ESTRESSES VISCOSOS

por

Rafael Menezes de Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora:

Prof. José Américo de Miranda Neto (Orientador-UFPE)
Prof. Sérgio Galvão Coutinho (Co-orientador – DF - UFPE)
Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo (DF - UFPE)
Prof. Eduardo Shirlippe Goes Leandro (DM – UFPE)

Recife - PE, Brasil
Fevereiro - 2007

Oliveira, Rafael Menezes de
Ferrofluidos em células de Hele-Shaw de
espaçamento variável: o papel do campo magnético e
dos estresses viscosos / Rafael Menezes de Oliveira –
Recife : O autor, 2007.
xiii, 104 folhas : il., fig.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de
Pernambuco. CCEN. Departamento de Física, 2007.

Inclui bibliografia.

1. Mecânica dos fluidos. 2. Instabilidades hidrodinâmicas.
3. Formação de padrões. 4. Ferrofluidos. 5. Células de Hele-
Shaw. 6. Estresses viscosos. I. Título.



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física – CCEN
Programa de Pós-Graduação em Física
Cidade Universitária - 50670-901 Recife PE Brasil
Fone (++ 55 81) 2126-8449/2126-8450 - Fax (++ 55 81) 3271-0359
<http://www.df.ufpe.br/pg> e-mail: posgrad@df.ufpe.br

Parecer da Banca Examinadora de Defesa de Dissertação de Mestrado

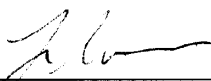
Rafael Menezes de Oliveira

FERROFLUIDOS EM CÉLULAS DE HELE-SHAW DE ESPAÇAMENTO VARIÁVEL: O PAPEL DO CAMPO MAGNÉTICO E DOS ESTRESSES VISCOSOS

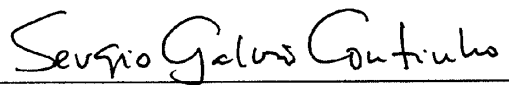
A Banca Examinadora composta pelos Professores José Américo de Miranda Neto (Presidente e Orientador), Sérgio Galvão Coutinho, Co-orientador, Ernesto Carneiro Pessoa Raposo, todos da Universidade Federal de Pernambuco e Eduardo Shirlippe Goes Leandro, do departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, consideram o candidato:

(☒) Aprovado com Distinção (☐) Aprovado (☐) Reprovado

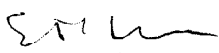
Secretaria do Programa de Pós-Graduação em Física do Departamento de Física do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco em vinte e sete de fevereiro de 2007.



Prof. José Américo de Miranda Neto
Presidente e Orientador



Prof. Sérgio Galvão Coutinho
Co-orientador



Prof. Ernesto Carneiro Pessoa Raposo



Prof. Eduardo Shirlippe Goes Leandro

A Deus e às pessoas de minha vida.

Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a meu orientador e amigo, Américo. Sem seu apoio, sua confiança e nosso trabalho duro, nada disso, essa dissertação e nossas publicações, existiria. Estou certo de que a maior parte do pouco de física que vivenciei até agora devo a essa intensa e prazerosa relação. Agradeço também ao Prof. Sérgio, que em pouco tempo de colaboração como co-orientador me fez deslumbrar novos modelos e geometrias.

A minha mãe, que, apesar de quase nunca entender, está sempre disposta a tentar ouvir qualquer coisa que eu tenha a dizer sobre essas coisas. Saiba que diversas vezes isso ajudou a me expressar melhor e a explicar de uma forma mais didática um pouco do que aqui fazemos. A meu pai e sua eterna preocupação, que me ensinaram a procurar fazer tudo sempre da melhor forma possível. E a Lilinha, minha irmã, cada vez mais próxima, que adoro tanto.

A Hermes, por nossas conversas, discussões e coincidências, porque é incrível como as coisas aconteceram sempre da mesma forma e na mesma época para nós dois, independentemente, durante os anos de graduação de mestrado. A Fernando, por sua amizade, nossas corridas, pedaladas, braçadas e, claro, física também. E a Roberto e nossos vinhos, apesar de poucos, ainda, espero. E a Amanda, que por muito tempo, desviou minha atenção dos estudos para cinema, festas e viagens.

Devo agradecer também a toda a galera que cursou as disciplinas comigo e às noites perdidas no departamento com listas de exercícios, habib's e hambúrgueres do raul. Entre eles, Priscila, Karlla, Cioba, Marion, Leo, Erms, Bernardo, Eroni, Danievertton, Lincoln, Renato, Sérgio (Cubano), Gabriel, André (Zangado). Sei que tem mais, mas minha memória não permite lembrar todos ao mesmo tempo.

Aos membros da banca Eduardo Shirlippe e Ernesto Raposo, por suas leituras, comentários e sugestões para o melhoramento deste trabalho. Ao Prof. Fernando Moraes, por sua amizade e apoio, principalmente no início de nossa graduação. E aos professores do Departamento de Física, em especial os das disciplinas, claro, Flávio, Sérgio e Rita, aos funcionários e ao CNPq. Foi divertido.

Qualquer caminho é apenas um caminho e não constitui insulto algum - para si mesmo ou para os outros - abandoná-lo quando assim ordena o seu coração. Olhe cada caminho com cuidado e atenção. Tente-o tantas vezes quantas julgar necessárias... Então, faça a si mesmo e apenas a si mesmo uma pergunta: possui esse caminho um coração? Em caso afirmativo, o caminho é bom. Caso contrário, esse caminho não possui importância alguma.

—CARLOS CASTAÑEDA (Os Ensinaamentos de Don Juan)

Resumo

Neste trabalho de dissertação, exploramos analiticamente o fluxo de um ferrofluido newtoniano confinado entre duas placas planas e paralelas. Analisamos o desenvolvimento de instabilidades de interface quando a placa superior é levantada, sob a ação de um campo magnético aplicado. Obtivemos uma equação diferencial de modos acoplados para o sistema, cuja solução descreve as amplitudes de perturbação da interface, e a utilizamos para descrever os regimes linear e não-linear do fluxo confinado. Diferentemente do usual, consideramos o efeito de estresses viscosos oriundos de gradientes normais da velocidade na interface do ferrofluido. A inclusão desses estresses normais é feita a partir de uma modificação na condição de contorno de pressão de Young-Laplace, que também inclui a contribuição de trações magnéticas normais. Estudamos a maneira pela qual as propriedades de estabilidade da interface e a forma dos padrões respondem à ação combinada dos estresses normais e do campo magnético, tanto na presença quanto na ausência de tensão superficial. Neste contexto, mostramos que a inclusão dos estresses viscosos introduz uma sensibilidade do problema em uma de suas condições iniciais básicas: o espaçamento inicial entre as placas. Isto indica que, caso esses estresses não estejam presentes, o número de estruturas (dedos) formados que é estimado pela teoria linear é maior que o número de dedos obtido com a presença deles. No regime linear, os estresses viscosos regularizam o sistema atuando como uma tensão superficial efetiva e, no regime fracamente não-linear, reduzem a competição entre os dedos. Por outro lado, esta competição pode ser totalmente eliminada com a aplicação adequada do campo magnético azimuthal. Na situação em que a tensão superficial e o campo magnético são nulos, as instabilidades de interface são tamanhas que a gota quebra-se em partes. A supressão da competição pela ação do campo azimuthal indica que esta configuração de campo pode ser usada para controlar este comportamento singular (quebra das gotas). Mostramos, ainda, que a tração magnética introduz uma contribuição puramente não-linear ao problema, revelando o papel fundamental da susceptibilidade magnética no controle do mecanismo de competição entre os dedos viscosos.

Palavras-chave: Formação de padrões, ferrofluido, célula de Hele-Shaw, estresses viscosos.

Abstract

An analytical investigation is presented for the stretch flow of a viscous Newtonian ferrofluid highly confined between parallel plates. We focus on the development of interfacial instabilities when the upper plate is lifted at a described rate, under the action of an applied magnetic field. We derive the mode-coupling differential equation for the interface perturbation amplitudes and study both linear and nonlinear flow regimes. In contrast to the great majority of works in stretch flow we take into account stresses originated from velocity gradients normal to the ferrofluid interface. The impact of such normal stresses is accounted for through a modified Young-Laplace pressure jump interfacial boundary condition, which also includes the contribution from magnetic normal traction. We study how the stability properties of the interface and the shape of the emerging patterns respond to the combined action of normal stresses and magnetic field, both in the presence and absence of surface tension. We show that the inclusion of normal viscous stresses introduces a pertinent dependence on the initial aspect ratio, indicating that the number of fingers formed would be overestimated if such stresses are not taken into account. At early linear stages it is found that such stresses regularize the system, acting as an effective interfacial tension. At weakly nonlinear stages we verified that normal stresses reduce finger competition, which can be completely suppressed with the assistance of an azimuthal magnetic field. When the surface tension and applied magnetic field are zero, interfacial instabilities develop and the droplet breaks. The suppression of finger competition by magnetic means suggest that the magnetic field can be used as a controllable parameter to discipline singular behavior. We have also found that the magnetic normal traction introduces a purely nonlinear contribution to the problem, revealing the key role played by the magnetic susceptibility in the control of finger competition. Besides all, this lifting Hele-Shaw cell system is intimately related with the practical problem of adhesion.

Keywords: Pattern Formation, ferrofluid, Hele-Shaw cell, viscous stresses.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Ferrofluidos	1
1.2	Formação de padrões em fluidos confinados	4
1.2.1	Fluidos não-magnéticos	4
1.2.2	Fluidos magnéticos	6
1.3	Célula de Hele-Shaw de espaçamento variável	9
1.4	Esboço da dissertação	15
2	Célula de Hele-Shaw de espaçamento variável com ferrofluidos	17
2.1	Equação básica: lei de Darcy generalizada	17
2.2	Condições de contorno	19
2.3	Equação de movimento da interface	21
3	Estágios linear e fracamente não-linear do problema magnético	24
3.1	Análise de estabilidade linear	24
3.1.1	Caso não-magnético com estresses: comparação com experimentos	27
3.2	Dinâmica fracamente não-linear	37
4	Conclusões e perspectivas	46
A	Dedução da equação de movimento da interface	49
B	Stretching of a confined ferrofluid: Influence of viscous stresses and magnetic field [Phys. Rev. E 73, 036309 (2006)]	51
C	Magnetic fluid in a time-dependent gap Hele-Shaw cell [J. Mag. Mag. Mat. 289, 360 (2005)]	52
D	Adhesion phenomena in ferrofluids [Phys. Rev. E 70, 036311 (2004)]	53

E Time-dependent gap Hele-Shaw cell with a ferrofluid: Evidence for an interfacial singularity inhibition by a magnetic field [Phys. Rev. E 69, 066312 (2004)]	54
Referências Bibliográficas	55

Lista de Figuras

1.1	Alinhamento de um ferrofluido às linhas de campo magnético.	1
1.2	Representação esquemática de um ferrofluido surfactado em três escalas de comprimento. Na escala macroscópica (esquerda), o ferrofluido aparece como um fluido comum. Na escala coloidal (meio), o fluido aparece com uma dispersão coloidal de diversas partículas sólidas. Na direita, mostramos o revestimento das partículas. A colisão entre partículas é elástica. Figura tirada da Ref. [3].	2
1.3	Gota de ferrofluido sujeita a ação de sete ímãs.	3
1.4	Construção artística com ferrofluidos.	3
1.5	Representação esquemática (vista de cima) da formação de dedos viscosos numa célula de Hele-Shaw retangular. O fluido menos viscoso é empurrado pela esquerda contra o fluido mais viscoso.	4
1.6	Evolução temporal do padrão formado em experimentos numa célula de Hele-Shaw com geometria radial. Tirada da Ref. [7].	5
1.7	Simulação computacional mostrando a evolução da interface no fluxo radial da célula de Hele-Shaw com injeção quando a tensão superficial é nula [10]. Em (a), a célula está parada e, em (b), girando. Note que a presença da rotação elimina a formação de singularidades de cúspide.	5
1.8	Evolução temporal dos padrões obtidos numa célula de Hele-Shaw com ferrofluido sob a ação de um campo magnético perpendicular ao plano da célula. Figura tirada da Ref. [12].	6
1.9	Instabilidades labirínticas formadas na célula de Hele-Shaw vertical em resposta a um campo uniforme perpendicular ao plano da página. A gravidade atua para baixo. Figura tirada da Ref. [1].	7
1.10	Padrões labirínticos em organismos vivos.	8
1.11	Espumas magnéticas e favos de mel.	8

- 1.12 Padrões em forma de espirais e protozoários são obtidos ao se superpor os campos perpendicular e girante [14]. 9
- 1.13 Célula de Hele-Shaw girante com um campo magnético azimuthal. Forças centrífugas e magnéticas competem para determinar a forma da interface do ferrofluido. A figura mostra apenas o círculo inicial e o padrão final obtido nas simulações da Ref. [16]. 10
- 1.14 Representação diagramática de uma célula de Hele-Shaw em que a placa superior é levantada. 11
- 1.15 Evolução temporal dos padrões obtidos numa célula de Hele-Shaw de espaçamento variável com fluidos não-magnéticos. À esquerda, experimento realizado por Derks *et al.* tirado da Ref. [32]. À direita, simulações numéricas realizadas por Shelley *et al.* tiradas da Ref. [21]. 12
- 1.16 Evolução temporal dos padrões obtidos numa célula de Hele-Shaw de espaçamento variável com fluidos não-magnéticos. A situação em que a tensão superficial entre os fluidos é nula está representada pelas curvas tracejadas. Note que quando a tensão superficial não está presente, a gota parte-se em duas partes como mostrado na curva tracejada que corresponde a $t = 0.76$. As curvas contínuas representam simulações com tensão superficial pequena, mas não-nula. Figura tirada da Ref. [21]. 13
- 2.1 Representação diagramática do fluxo de um ferrofluido confinado entre placas paralelas em $t = 0$ (esquerda) e em $t > 0$ (direita). O campo magnético azimuthal é produzido por um fio retilíneo longo com corrente elétrica I . 17
- 3.1 Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ como função do modo n , para $t = 0.2$, $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$ e três valores diferentes de N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} e (c) 7.0×10^{-3} . As cores correspondem a valores distintos de δ e q : $\delta = 0$ (preto), $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $\delta = 1$, $q = 50$ (cinza claro). 25

- 3.2 n_{max} como função do tempo adimensional t , para levantamento com velocidade constante $\dot{b} = 1$, $\sigma \approx 1.592 \times 10^{-6}$ e $N_B = 0$. Esses parâmetros correspondem aos valores experimentais apresentados nas Refs. [39, 40]. Plotamos os dados *experimentais* tirados da Fig. 4 da Ref. [40] (círculos abertos) e os resultados correspondentes de nossa análise de estabilidade linear quando $\delta = 0$ (curva preta) e quando $\delta = 1$ com $q = 80$ (curva cinza). Note que a previsão teórica para o número típico de dedos é consideravelmente melhorado quando os estresses viscosos são considerados (curva cinza). 27
- 3.3 Gráfico log-log que representa como o número típico de dedos n_{max} no instante $t = 0$ varia com o espaçamento inicial entre as placas b_0 ($0.1 \text{ mm} \leq b_0 \leq 1.0 \text{ mm}$). Os demais parâmetros são os mesmo usados na Fig. 3.2. Plotamos os *dados experimentais* da Fig. 3 da Ref. [40] (círculos abertos) junto com resultados de nossa análise de estabilidade linear quando $\delta = 0$ (pontos pretos) e quando $\delta = 1$ (pontos cinza). 29
- 3.4 Evolução linear da interface usando a Eq. (2.11) para $n = 2$, $\delta = 0$ e $0 \leq t \leq 2$ em intervalos de 0.25 considerando $\delta = 0$ quando (a) $N_B = 0$ e (b) $N_B = 2.5 \times 10^{-5}$. 31
- 3.5 Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ como função do modo n , para $t = 0.2$, $\sigma = 0$ e dois diferentes valores de N_B : (a) 0 e (b) 7.0×10^{-3} . O rótulo das cores referem-se a valores distintos de δ e q : $\delta = 0$ (preto), $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $\delta = 1$, $q = 50$ (cinza claro). 32
- 3.6 n_{max} como função da razão de aspecto inicial q , para $t = 0.2$, $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$, $\delta = 1$ e três valores diferentes de N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} e (c) 7.0×10^{-3} . Esses parâmetros são os mesmos usados na Fig. 3.1. 33
- 3.7 n_{max} como função da razão de aspecto inicial q , para $t = 0.2$, $\sigma = 0$, $\delta = 1$ e três valores diferentes de N_B : 0, 3.5×10^{-3} e 7.0×10^{-3} . Note que, escondidas nesta simples curva pontilhada, há de fato três curvas (uma para cada valor de N_B). Esses parâmetros são os mesmos da Fig. 3.5. 34
- 3.8 Gráfico log-linear do diagrama de fases, de estabilidade linear que mostra as zonas (sombreadas) do modo que tem crescimento mais rápido n^* de acordo com a Eq. (3.3). Os parâmetros físicos são exatamente os mesmos usados na Fig. 3.1. 35

- 3.9 Largura da banda de modos instáveis Δn_c como função do número magnético N_B quando $\sigma \neq 0$: $\delta = 0$ (preto), $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $\delta = 1$, $q = 50$ (cinza claro). Os demais parâmetros são os mesmos da Fig. 3.1. 36
- 3.10 Largura da banda de modos instáveis Δn_c como função do número magnético N_B quando $\sigma = 0$: $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $q = 50$ (cinza claro). Os demais parâmetros são os mesmos da Fig. 3.5. Não há curva preta ($\delta = 0$) uma vez que neste caso $\Delta n_c \rightarrow \infty$. 37
- 3.11 $C(n)$ como função do tempo para os modos $n = 16$ e $n = 20$ para o caso em que a tensão superficial é diferente de zero ($\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$). As curvas pretas (cinza) referem-se a $\delta = 0$ ($\delta = 1$). O número magnético é $N_B = 0$ ($N_B = 2.0 \times 10^{-4}$) para as curvas contínuas (tracejadas), $q = 50$ (curvas cinza claro) e $q = 100$ (curvas cinza escuro). A susceptibilidade magnética é $\chi = 5$. Note que a razão de aspecto inicial q só está presente quando $\delta = 1$. 39
- 3.12 $C(n)$ como função do tempo para os modos $n = 16$ e $n = 20$ quando a tensão superficial é zero. As curvas pretas (cinza) referem-se a $\delta = 0$ ($\delta = 1$). O número magnético é $N_B = 0$ ($N_B = 2.0 \times 10^{-4}$) para as curvas contínuas (tracejadas), $q = 50$ (curvas cinza claro) e $q = 100$ (curvas cinza escuro). A susceptibilidade magnética $\chi = 5$. Note que a razão de aspecto inicial q só está presente quando $\delta = 1$. 41
- 3.13 Tempo adimensional τ^* para o qual a intensidade da competição é máxima (na ausência de campo magnético) como função do modo n , quando (a) $\sigma = 0$ (veja Fig. 3.12), (b) $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$ (veja Fig 3.11). Consideramos que $q = 100$ (cinza escuro) e $q = 50$ (cinza claro). 42
- 3.14 Tempo adimensional τ para o qual $C(n) = 0$ como função da susceptibilidade magnética χ ($1 \leq \chi \leq 10$), quando (a) $\sigma = 0$, (b) $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$, para $n = 30$, $N_B = 2.0 \times 10^{-4}$ e $\delta = 0$. Os demais parâmetros são os mesmos das Figs. 3.11 e 3.12. 43

CAPÍTULO 1

Introdução

1.1 Ferrofluidos

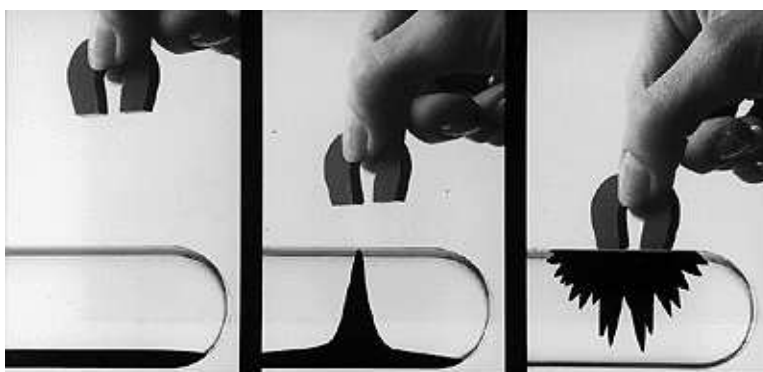


Figura 1.1 Alinhamento de um ferrofluido às linhas de campo magnético.

Um ferrofluido, ou fluido magnético, é um material sintetizado que combina propriedades de dinâmica de fluidos com magnetismo, isto é, ele possui a fluidez de um líquido comum mas pode ser facilmente e convenientemente manipulado, sem contato físico direto, através da ação de um campo magnético externo (veja Figura 1.1). Microscopicamente, consistem de uma dispersão coloidal de pequenas esferas duras e dipolares, em um líquido portador [1, 2]. Estas partículas comportam-se como minúsculos ímãs permanentes, com pólos norte e sul, que apontam em direções aleatórias até que um campo magnético externo cause um eventual alinhamento ao longo de sua direção. É natural pensar que, sob a ação de um campo de força (gravitacional ou magnético) essas pequenas partículas possam aglomerar-se, ou então, que haja sedimentação. Para evitar a formação de grandes gradientes de concentração e para que o ferrofluido possa gozar as propriedades de um meio contínuo da mesma forma que um fluido newtoniano convencional, é necessário que as partículas magnéticas sejam nanométricas (tipicamente entre 3 e 15 nm) para que a agitação térmica, através do movimento browniano, as mantenha em suspensão [1]. Para evitar aglomerações via atração magnética, é necessário

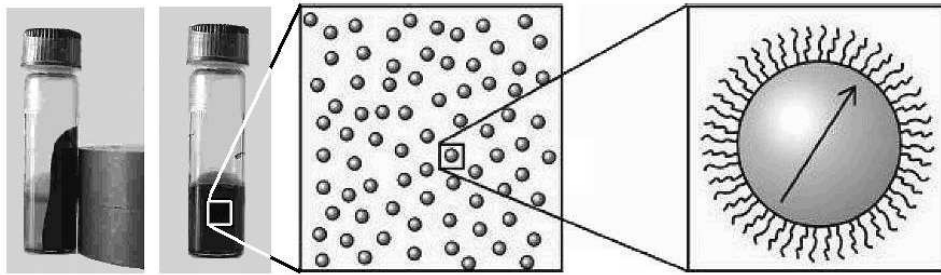


Figura 1.2 Representação esquemática de um ferrofluido surfactado em três escalas de comprimento. Na escala macroscópica (esquerda), o ferrofluido aparece como um fluido comum. Na escala coloidal (meio), o fluido aparece com uma dispersão coloidal de diversas partículas sólidas. Na direita, mostramos o revestimento das partículas. A colisão entre partículas é elástica. Figura tirada da Ref. [3].

que os pequenos dipolos sejam revestidos por uma camada de um surfactante. Este revestimento mecânico limita a proximidade entre os dipolos através de colisões elásticas impedindo a aglomeração dessas partículas (veja Fig. 1.2). Nos ferrofluidos ditos iônicos, tal aglomeração também pode ser evitada através de repulsão eletrostática [4]. Em função disso, os ferrofluidos são materiais extremamente estáveis e mantêm sua fluidez mesmo quando submetidos aos mais intensos campos magnéticos. Possuem ainda comportamento superparamagnético e são opacos à luz visível.

A ferrohodinâmica, ciência que lida com a interação entre campos magnéticos e fluidos, começou a se desenvolver em meados da década de 1960, motivada inicialmente pela conversão de calor em trabalho sem o uso de componentes mecânicos [1]. Esta junção entre duas áreas da física básica (magnetismo e fluidos), que independentes são de suma importância para o desenvolvimento científico e tecnológico, faz da ferrohodinâmica uma ciência bastante atraente a diversos problemas científicos fundamentais, além de abrir uma lista enorme e crescente de aplicações. Como exemplo de algumas aplicações do uso dos ferrofluidos [1, 2] podemos citar a construção de selos herméticos em torno de peças mecânicas de rápido movimento e a movimentação de medicamentos/drogas na corrente sanguínea. São usados também como propulsores de foguetes em naves espaciais e na refrigeração e amortecimento de vibrações mecânicas em poderosos alto-falantes. Além disso, ferrofluidos miscíveis podem oferecer novas ferramentas para a engenharia ambiental e para a segurança e manipulação de substâncias em laboratórios, onde é necessário manipular fluidos, corrosivos ou tóxicos, sem bombeamento ou contato direto. Além de seu controle à distância, as fortes características magnéticas dos ferrofluidos permitem que funcionem como rastreadores de imagem, fazendo com que sensores

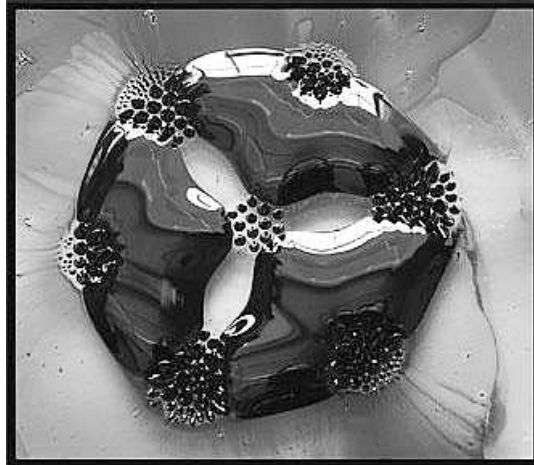


Figura 1.3 Gota de ferrofluido sujeita a ação de sete ímãs.

localizados na superfície da Terra construam imagens precisas do movimento subterrâneo de fluidos, os quais são difíceis de visualizar por outros métodos. Para enriquecer ainda mais as possibilidades de uso, os interesses acadêmicos, científicos e tecnológicos dos ferrofluidos muitas vezes se misturam com um caráter artístico, intrínseco desses materiais, que está condicionado as diferentes configurações de campo magnético a que são submetidos. Por exemplo, a Figura 1.3 mostra uma gota de ferrofluido em repouso sobre uma placa de vidro embaixo da qual há uma folha de papel colorido e sete ímãs. A forma como os ímãs foram dispostos em relação à gota é que proporciona este visual agradável. Outras construções artísticas com



Figura 1.4 Construção artística com ferrofluidos.

ferrofluidos, que são verdadeiras “esculturas líquidas” talhadas por campo magnético, podem ser vistas na Figura 1.4.

1.2 Formação de padrões em fluidos confinados

Apesar de serem materiais conceitualmente simples, compreender a fundo as propriedades hidrodinâmicas e termodinâmicas dos ferrofluidos permanece na fronteira da pesquisa científica atual. Abordaremos a situação física em que os fluidos magnéticos estão “espacialmente confinados”, num dispositivo conhecido como “célula de Hele-Shaw”. Este dispositivo é bastante simples, sendo composto por duas placas de vidro planas e paralelas, separadas por uma pequena distância, dentro da qual se dá o escoamento dos fluidos.

1.2.1 Fluidos não-magnéticos

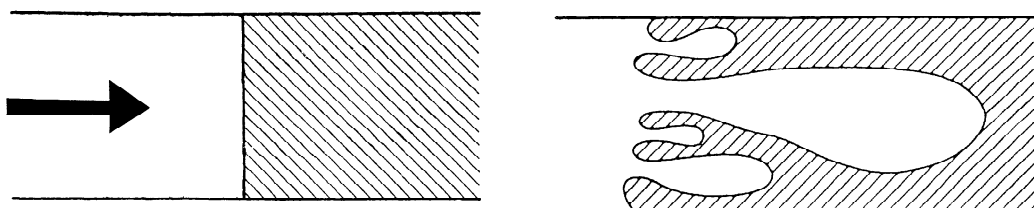


Figura 1.5 Representação esquemática (vista de cima) da formação de dedos viscosos numa célula de Hele-Shaw retangular. O fluido menos viscoso é empurrado pela esquerda contra o fluido mais viscoso.

Começamos definindo o fluxo de dois fluidos newtonianos, *não-magnéticos*, imiscíveis e de diferentes viscosidades numa célula de Hele-Shaw como o problema de Saffman-Taylor, um arquétipo da mecânica de fluidos. Nele, quando um fluido menos viscoso pressiona um mais viscoso, a interface entre os dois se torna instável e começa a se deformar. A competição dinâmica entre as estruturas viscosas, ou “dedos viscosos”, que começam a surgir levam eventualmente à formação de diversos padrões de interface [5, 6, 7]. Neste caso, os dedos competem de tal modo que um deles se sobressai em relação aos demais, suprimindo-os, e formando, no final da evolução, um padrão estacionário estável e suave que compõe aproximadamente metade da célula de Hele-Shaw. A Fig. 1.5 mostra o instante inicial (antes da formação das instabilidades) e um estágio intermediário, em que uma das estruturas começa a se destacar. Outra possibi-

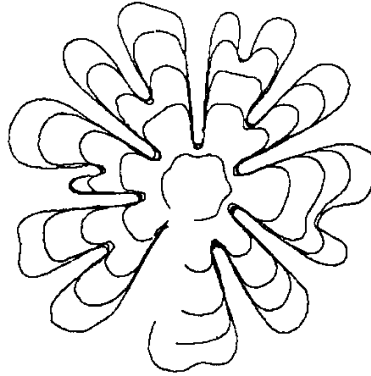


Figura 1.6 Evolução temporal do padrão formado em experimentos numa célula de Hele-Shaw com geometria radial. Tirada da Ref. [7].

lidade é fazer um pequeno furo no centro da placa superior e por ele injetar o fluido menos viscoso formando padrões com muitas ramificações [6, 7, 8, 9] (Fig. 1.6). Outra característica interessante em fluxos confinados é a formação de singularidades de cúspide e quebra da gota na interface entre os fluidos quando consideramos que a tensão superficial é nula (isso pode ser feito usando dois fluidos miscíveis, por exemplo). Em um trabalho relativamente recente realizado por Magdaleno e outros [10] acerca do fluxo radial em Hele-Shaw com injeção, estuda-se a possibilidade de prevenir a formação de singularidades de cúspide usando uma célula girante (Fig. 1.7). Eles mostraram que, para um subconjunto de soluções exatas, existe uma rotação

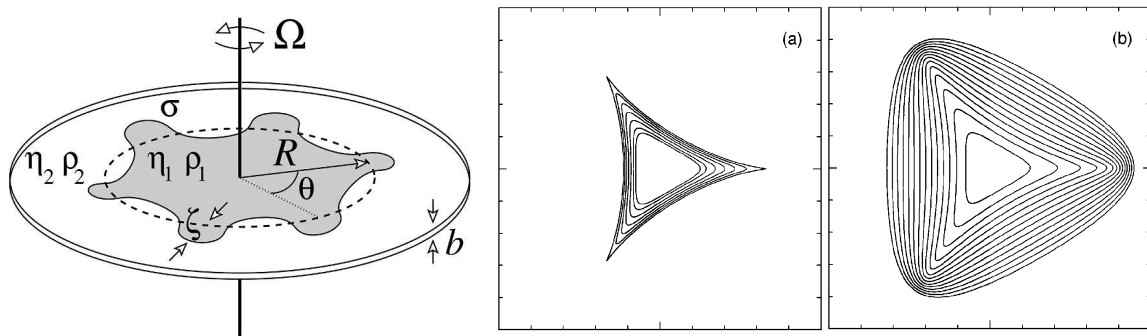


Figura 1.7 Simulação computacional mostrando a evolução da interface no fluxo radial da célula de Hele-Shaw com injeção quando a tensão superficial é nula [10]. Em (a), a célula está parada e, em (b), girando. Note que a presença da rotação elimina a formação de singularidades de cúspide.

crítica acima da qual a formação de cúspides é eliminada. Mostraram ainda que este valor crítico para a rotação pode ser calculado através da análise de estabilidade linear. Esses resultados abrem a possibilidade de que existam semelhantes mecanismos de controle da formação de singularidades em tempo finito em outros importantes sistemas de fluxo confinado.

Todos esses problemas de instabilidades de interface são processos de crescimento fora do equilíbrio e pertencem à conhecida família de fenômenos que tem crescimento laplaciano (ou seja, as grandezas envolvidas, tais como, a pressão e o potencial de velocidade, satisfazem a equação de Laplace). Além da formação de dedos viscosos na célula de Hele-Shaw, outros fenômenos com crescimento laplaciano incluem processos de agregação por difusão (mais conhecido em inglês por *diffusion limited aggregation* ou DLA), crescimentos dendríticos (*dendritic growth*) e descargas elétricas (*dielectric breakdown*) [11].

1.2.2 Fluidos magnéticos

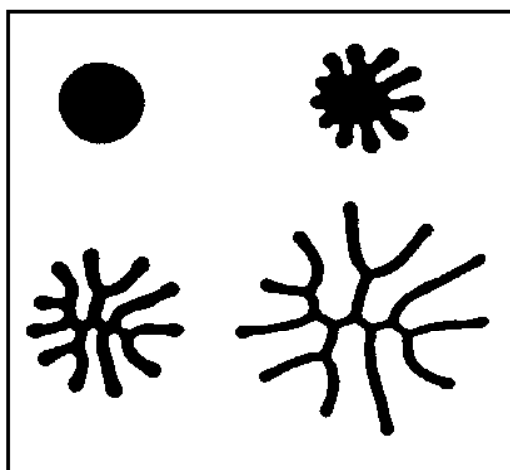


Figura 1.8 Evolução temporal dos padrões obtidos numa célula de Hele-Shaw com ferrofluido sob a ação de um campo magnético perpendicular ao plano da célula. Figura tirada da Ref. [12].

Ao considerarmos fluxos em Hele-Shaw com fluidos magnéticos, uma enorme diversidade de novos padrões e novas fenomenologias aparecem a nossa disposição. Neste caso, forças de natureza magnética acoplam com a forma do material fluido como um todo, resultando em instabilidades hidrodinâmicas complexas e de grande beleza [12]. Por exemplo, confinemos uma gota de ferrofluido numa célula de Hele-Shaw plana e apliquemos um campo magnético perpendicular ao plano da célula. O fluido polariza-se imediatamente, gerando uma intensa

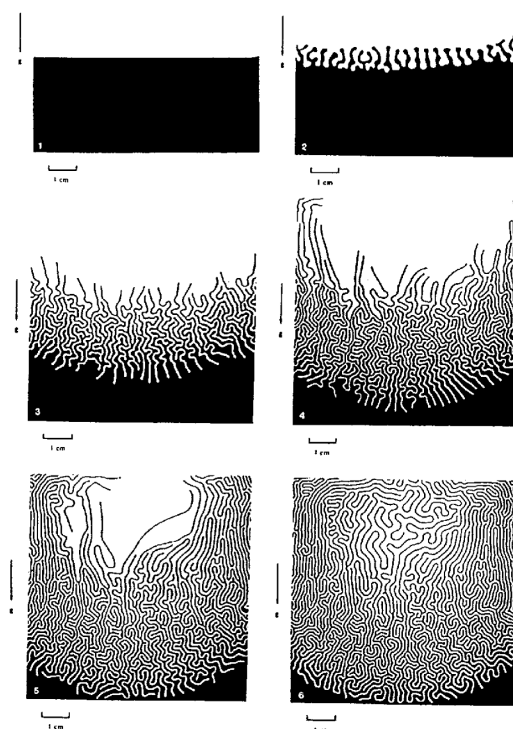


Figura 1.9 Instabilidades labirínticas formadas na célula de Hele-Shaw vertical em resposta a um campo uniforme perpendicular ao plano da página. A gravidade atua para baixo. Figura tirada da Ref. [1].

auto-repulsão interna. A tensão superficial tenta manter a topologia de uma única gota circular, mas o perímetro deforma-se de maneira impressionante, levando à formação de incríveis padrões em forma de labirinto [12] (Figura 1.8). Estes padrões labirínticos tornam-se mais intrincados à medida que aumentamos a intensidade do campo aplicado. Podemos ainda dispor a célula de Hele-Shaw na direção vertical de modo a permitir que a gravidade atue juntamente com o campo magnético uniforme. O resultado da combinação desses efeitos pode ser visto na Figura 1.9. O curioso é que esses padrões labirínticos aparecem na natureza em diversos outros sistemas, que aparentemente não trazem relação alguma com a dinâmica de interface de fluidos confinados, como, por exemplo, na superfície de peixes e em corais (Fig. 1.10).

Outra forma de se obter padrões tão incríveis quanto esses labirintos é fazer uma pequena modificação na configuração do campo magnético aplicado. Se, ao invés de considerarmos um campo magnético uniforme, usarmos um campo magnético oscilante, mas ainda aplicado perpendicularmente ao plano horizontal da célula de Hele-Shaw, encontraremos padrões semelhantes a favos de mel (Fig. 1.11). Esses padrões são conhecidos como espumas magnéti-

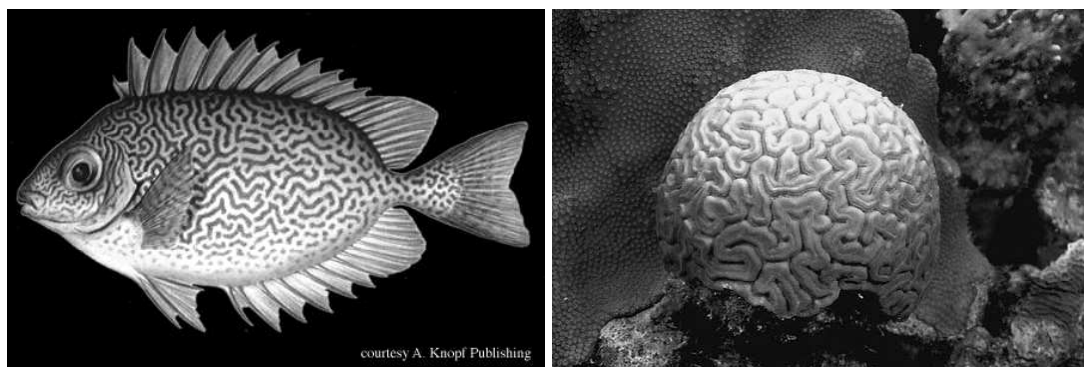


Figura 1.10 Padrões labirínticos em organismos vivos.

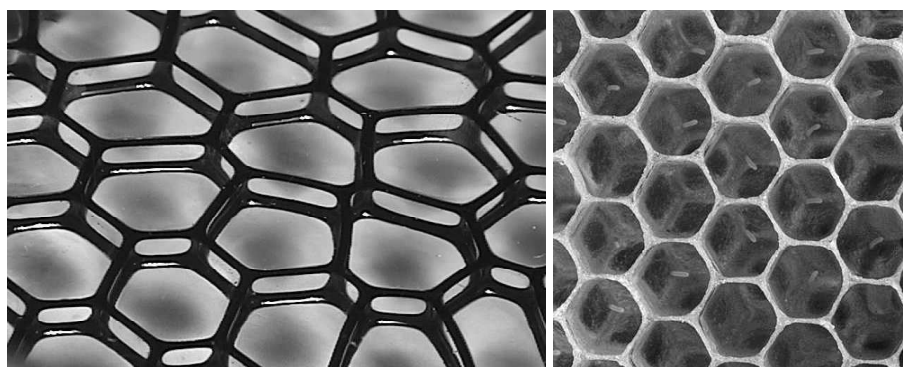


Figura 1.11 Espumas magnéticas e favos de mel.

cas [13].

Podemos ainda considerar a superposição de diferentes configurações de campo na determinação dos padrões. Por exemplo, a Figura 1.12 mostra padrões em espirais gerados ao se aplicar inicialmente um campo magnético uniforme perpendicular ao plano da célula de Hele-Shaw e superpondo este campo, depois de algum tempo, com um campo girante aplicado no plano da célula. Porém, se invertermos a ordem de aplicação desses campos, o padrão resultante será totalmente diferente, semelhante a um protozoário [14] (Fig. 1.12). Esta diversidade de padrões obtidos mostra um pouco da riqueza desse sistema, e de como é possível obter resultados distintos acerca de fenômenos diferentes ao considerarmos mudanças na configuração do campo magnético aplicado ao ferrofluido. No entanto, os fenômenos com os quais lidamos e os tratamentos, analítico e numérico, destinados ao sistema, muitas vezes mudam completamente ao considerarmos esta - talvez aparentemente pequena - modificação.

Diferentemente dos casos acima, se considerarmos um campo magnético aplicado tangente

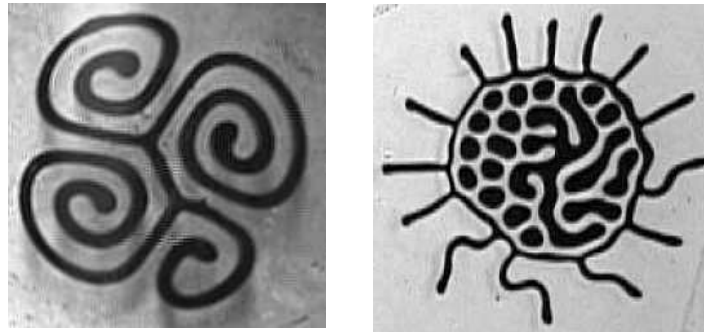


Figura 1.12 Padrões em forma de espirais e protozoários são obtidos ao se superpor os campos perpendicular e girante [14].

à célula de Hele-Shaw, gerado por um longo fio retilíneo passando pelo centro da gota de ferrofluido, o efeito será de estabilizar as perturbações da interface [15]. Para que possamos ver o efeito estabilizante desta configuração de campo, a formação das instabilidades será impulsionada por termos centrífugos relacionados à diferença de densidade entre os fluidos. Isso deverá acontecer quando o fluido de dentro (ferrofluido) for mais denso que o fluido externo não-magnético. Veja na Figura 1.13 que, quanto maior for o efeito centrífugo (maior N_Ω), maior o número de “dedos” na interface. Note também que, à medida que aumentamos a intensidade do campo magnético aplicado (número ao lado de cada padrão), os dedos passam a diminuir gradativamente e uma maior quantidade de ferrofluido começa a se concentrar no centro da célula [16].

1.3 Célula de Hele-Shaw de espaçamento variável

Uma forma alternativa de produzir padrões de dedos viscosos é confinando uma fina camada de um fluido viscoso entre duas placas paralelas, planas e horizontais, e levantando a placa superior enquanto a inferior permanece em repouso. À medida que as placas se separam, o fluido externo, menos viscoso, entra no sistema e o fluido interno, mais viscoso, se move de modo a conservar volume. Como resultado, a interface entre os fluidos se deforma, gerando padrões incríveis. Nesta versão com levantamento do clássico problema de Saffman-Taylor, a placa de cima pode ser levantada por um dos lados [17, 18, 19, 20] ou se manter sempre paralela à placa de baixo, como mostrado na Fig. 1.14 [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Esta última situação é um pouco mais simples, uma vez que ela induz um fluxo mais uniforme em que a

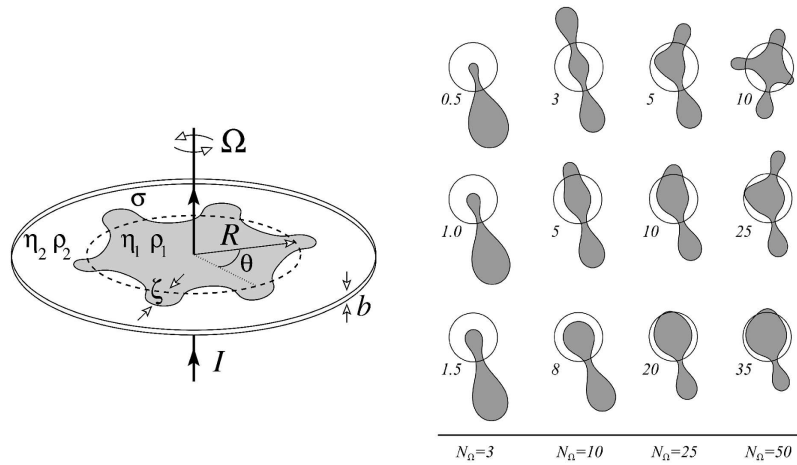


Figura 1.13 Célula de Hele-Shaw girante com um campo magnético azimutal. Forças centrífugas e magnéticas competem para determinar a forma da interface do ferrofluido. A figura mostra apenas o círculo inicial e o padrão final obtido nas simulações da Ref. [16].

separação entre as placas é dependente do tempo apenas. Note que, dentre as variações do problema de Saffman-Taylor discutidos até agora, esta versão com levantamento é a única em que o fluxo deixa de ser laplaciano, e é a única também em que não há conservação de matéria, devido a entrada constante de ar por todos os lados da célula de Hele-Shaw. Isso dá um sabor a mais ao problema, tornando-o academicamente ainda mais interessante.

Nos últimos anos, uma busca por novas morfologias e diferentes padrões levou a diversas investigações experimentais e teóricas acerca do fluxo em células de Hele-Shaw com espaçamento variável [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40]. Se os fluidos forem imiscíveis e newtonianos [21, 32, 33, 34, 38, 39, 40], a gota inicialmente circular do fluido mais viscoso sofre um processo de desestabilização devido à penetração de diversos dedos do fluido externo menos viscoso. Com o passar do tempo esses dedos que entram se tornam progressivamente mais espessos enquanto que os dedos do fluido mais viscoso se tornam mais finos. Neste estágio, o comportamento da interface é caracterizado por uma forte competição entre os dedos do fluido invasor menos viscoso, que avançam em direção ao centro da gota. Ao mesmo tempo, também se observa que a interface pára de encolher, indicando que a competição entre os dedos finos do fluido mais viscoso é suprimida. Seguindo este período de intensa instabilidade e ramificação, surge uma segunda etapa na qual o número de dedos da estrutura diminui. Em um estágio final, próximo a um total descolamento entre as placas, a

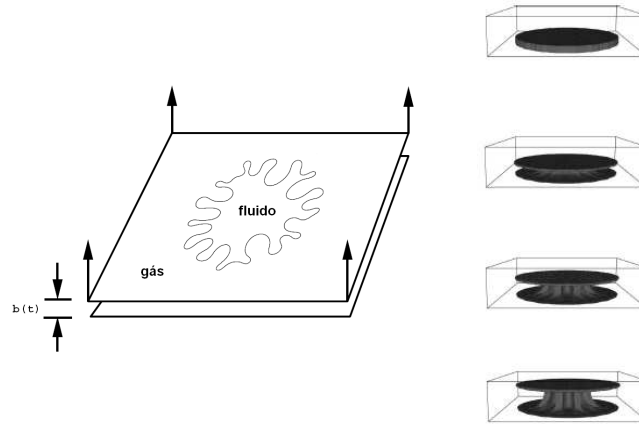


Figura 1.14 Representação diagramática de uma célula de Hele-Shaw em que a placa superior é levantada.

gota tende a encolher e a voltar à forma circular inicial, mas claro que, agora, com um menor raio. A evolução desses padrões pode ser vista nos experimentos de Derks *et al.*, na Ref. [32], e nas simulações numéricas de M. Shelley *et al.*, na Ref. [21], aqui reproduzidos lado a lado na Fig. 1.15. Se os fluidos forem imiscíveis e não-newtonianos [22, 23, 24, 25, 26, 32, 35], várias outras particularidades morfológicas podem surgir, inclusive a formação de estruturas muito mais ramificadas. Outras modificações interessantes consideram o sistema com fluidos miscíveis [28] ou magnéticos [27, 29, 30, 37].

Quando os fluidos são newtonianos e imiscíveis, simulações numéricas do problema de levantamento com o espaçamento entre as placas dependente apenas do tempo [21] mostram que, para valores cada vez menores da tensão superficial, a interface é cada vez mais ramificada, e que isso resulta em um processo de recircularização cada vez mais atrasado. Também foi verificado que, quando a tensão superficial não está presente, os dedos que entram competem tão intensamente que há formação de singularidades topológicas e a gota quebra-se em partes. Para que possamos visualizar este acontecimento, reproduzimos algumas simulações da Ref. [21] na Fig. 1.16. Nela, a curva tracejada mostra a situação em que a tensão superficial entre os fluidos é zero. Note que a fissão da gota acontece na figura que corresponde a $t = 0.76$.

Alguns aspectos interessantes relacionados à formação dessas singularidades podem ser investigados ao se considerar que os dois fluidos são miscíveis (situação em que a tensão superficial é nula). Este problema da célula de Hele-Shaw com levantamento considerando fluidos miscíveis foi abordado através de simulações numéricas bastante precisas [28]. Eles mostraram

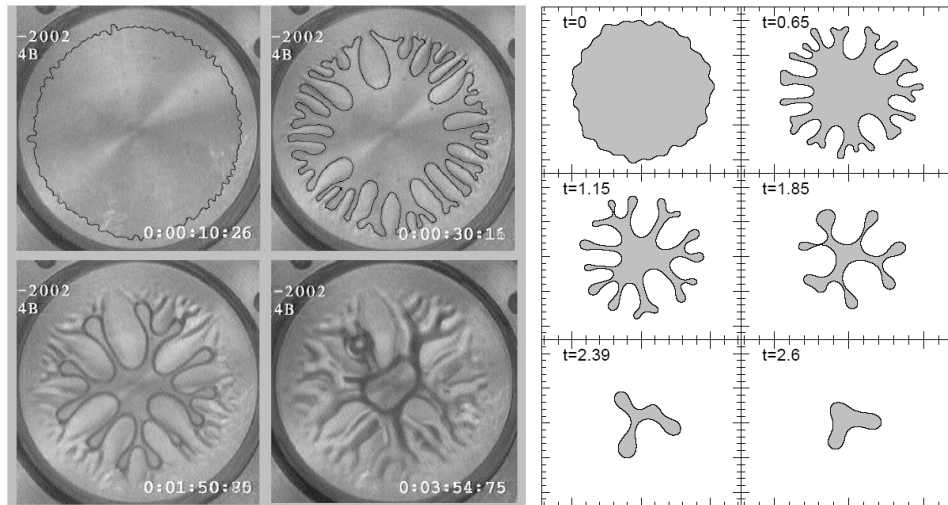


Figura 1.15 Evolução temporal dos padrões obtidos numa célula de Hele-Shaw de espaçamento variável com fluidos não-magnéticos. À esquerda, experimento realizado por Derks *et al.* tirado da Ref. [32]. À direita, simulações numéricas realizadas por Shelley *et al.* tiradas da Ref. [21].

que a inclusão de estresses oriundos de gradientes de concentração na interface difusa podem levar a efeitos semelhantes aos existentes quando a tensão superficial está presente. Esses estresses (conhecidos como estresses de Korteweg [41]) afetam significativamente o comportamento da interface difusa, introduzindo importantes efeitos estabilizantes.

Além de ser intrinsicamente um importante problema acadêmico, o sistema da célula de Hele-Shaw com levantamento está intimamente relacionado com problemas de adesão [24, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Um parâmetro comum usado para avaliar a adesividade de um material é o tempo para o qual as duas superfícies separadas pelo adesivo pode resistir ao avanço dos dedos viscosos, quando as placas são separadas a uma força constante [24]. Outra possibilidade é calcular a força e a energia necessárias para separar as duas placas quando afastadas a uma taxa constante [31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Há evidências [24, 33, 38, 39] de que, em ambos os casos (puxar com força constante ou separar com velocidade constante), a presença de instabilidades (dedos) podem influenciar a adesão entre as placas. O trabalho de Thamida e outros [24] indica que a adesividade de um fluido confinado é fortemente reduzida (diminuição de 50 % em relação ao caso sem perturbações) quando as placas são puxadas a uma força constante, onde as instabilidades atuam facilitando o processo de separação. Em experimentos em que a velocidade de separação é constante [33, 38, 39], a redução na adesão é menos intensa, mas ainda notavelmente presente quando o espaçamento inicial entre as placas

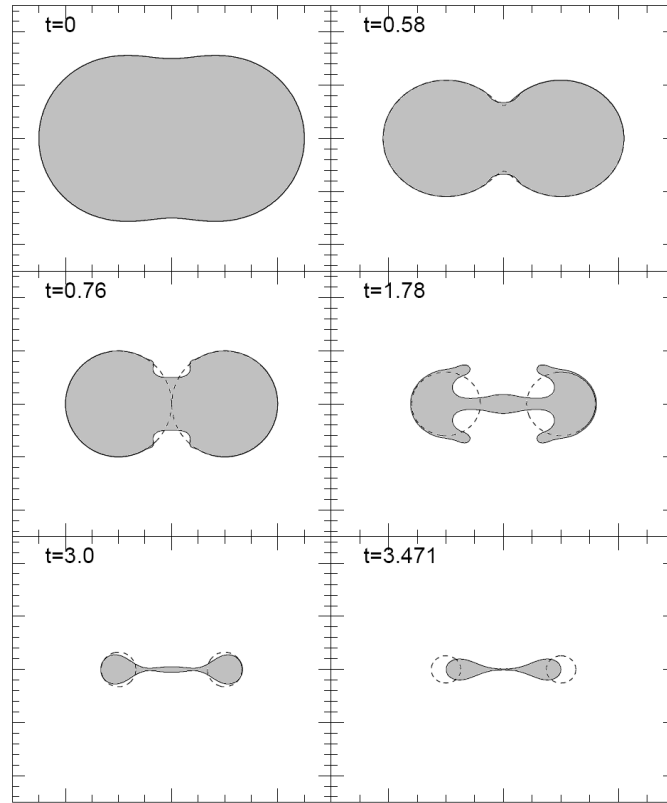


Figura 1.16 Evolução temporal dos padrões obtidos numa célula de Hele-Shaw de espaçamento variável com fluidos não-magnéticos. A situação em que a tensão superficial entre os fluidos é nula está representada pelas curvas tracejadas. Note que quando a tensão superficial não está presente, a gota parte-se em duas partes como mostrado na curva tracejada que corresponde a $t = 0.76$. As curvas contínuas representam simulações com tensão superficial pequena, mas não-nula. Figura tirada da Ref. [21].

é pequena.

Em um trabalho anterior que não considera a influência das instabilidades de interface [37] [Phys. Rev. E **70**, 036311 (2004), reproduzido no Apêndice C], nós abordamos o problema da adesão considerando um ferrofluido como material adesivo e estudamos a influência de diversas configurações de campo magnético na adesividade destes materiais. Mostramos que, dependendo da configuração de campo considerada, a adesão pode ser tanto aumentada quanto diminuída em relação ao caso em que não há campo aplicado. Mais especificamente, mostramos que a força adesiva de um ferrofluido é reduzida se o campo magnético aplicado for perpendicular às placas ou se o campo aplicado estiver no plano delas e exibir simetria azimutal. Por outro lado, a força adesiva pode ser tanto aumentada quanto diminuída se o campo aplicado es-

tiver no plano e apresentar simetria radial apontando para fora da célula. Mostramos, portanto, que é possível controlar a adesividade desses materiais por meios magnéticos.

Outros trabalhos experimentais e teóricos recentes que lidam com Hele-Shaw com levantamento a taxa constante [39, 40] informam que o número de dedos predito pela análise linear ordinária (baseada na lei de Darcy e em condições de contorno usuais) é maior que o número de dedos obtido em experimentos [39, 40]. O motivo desta discrepância é uma questão interessante que ainda está em aberto (e que aqui discutiremos).

Baseado nesta discussão, vê-se a importância e a necessidade de se obter um bom entendimento da formação dos padrões de uma célula de Hele-Shaw de espaçamento variável, e de se estudar diferentes formas de controlar as perturbações de interface. Com a intenção de examinar alguns mecanismos de controle dessas perturbações, nós consideramos a influência de um fator fundamental que até então foi descartado: o efeito de estresses que atuam no plano da célula, perpendicularmente à interface entre os fluidos. De fato, há poucos trabalhos na literatura que consideram o efeito de estresses hidrodinâmicos em problemas em células de Hele-Shaw com fluidos imiscíveis. Apenas recentemente, foi mostrado [42, 43] que numa célula de Hele-Shaw (com separação constante entre as placas) girante [44, 45], a incorporação de estresses viscosos na condição de contorno de Young-Laplace leva a mudanças importantes no comportamento da interface quando se permite variar o espaçamento entre as placas. Isto significa que propriedades lineares e não-lineares fundamentais que determinam tanto o número médio de dedos que surgem nos padrões, como a dinâmica de competição entre esses dedos, podem ser significativamente afetados se permitirmos modificar o espaçamento entre as placas. Evidentemente, este efeito deve ser ainda mais relevante em fluxos em que a célula de Hele-Shaw é levantada, uma vez que o próprio movimento da interface é determinado por este mecanismo de separação. Apesar de parecer um pouco óbvio que os estresses viscosos devem ser considerados para uma correta descrição da formação dos padrões de interface em fluxos na célula de Hele-Shaw com levantamento, uma investigação extensiva desta questão ainda precisa ser abordada. Este é um dos propósitos deste trabalho.

Para investigar os efeitos dos estresses viscosos, assumimos que o fluido interno é magnético, ou um ferrofluido [1, 2]. Como apresentamos ao longo deste capítulo, esses fluidos tem comportamento superparamagnético. Isto significa que, ao aplicarmos um campo magnético, os pequenos dipolos alinham-se rapidamente à direção do campo. Além disso, na ausência de um campo aplicado, os dipolos estão aleatoriamente distribuídos e o ferrofluido não manifesta suas propriedades magnéticas já que sua magnetização líquida total é zero. Mais especifica-

mente, a característica superparamagnética desses materiais reside no fato deles apresentarem comportamento semelhante ao paramagnético mesmo a temperaturas abaixo da temperatura de Curie. Usualmente, é esta a temperatura crítica que, para diversos materiais, regula a transição entre os comportamentos ferromagnético e paramagnético. Assim, devido ao comportamento superparamagnético, os ferrofluidos podem ser facilmente manipulados através de campos magnéticos externos que atuam tanto estabilizando quanto desestabilizando a interface entre os fluidos. Agora, nós investigaremos o caso em que a gota de ferrofluido evolui sob a ação de um campo magnético estabilizante [15, 16]. Realizaremos então um estudo sistemático investigando a ação conjunta dos estresses interfaciais (viscosos e magnéticos) com o campo magnético no controle das instabilidades e singularidades da interface. Os primeiros resultados desse trabalho foram inicialmente publicados no *Journal of Magnetism and Magnetic Material* [29] [*J. Mag. Mag. Mat.* **289** 360-363 (2005), reproduzido no Apêndice B] e posteriormente, com um estudo mais detalhado e sistemático no *Physical Review E* [30] [*Phys. Rev. E* **73**, 036309 (2006), Apêndice A]. Analisaremos ainda os resultados de outro trabalho nosso também publicado [27] [*Phys. Rev. E* **69**, 066312 (2004), Apêndice D] que discute a possibilidade de se inibir a formação de singularidades na situação limite em que a tensão superficial entre os fluidos é zero, e que ignora completamente a presença dos estresses viscosos e magnéticos.

1.4 Esboço da dissertação

Neste capítulo introdutório, nós apresentamos um fluido magnético, discutindo brevemente sua estrutura molecular e mostrando como o ferrofluido responde à ação de diversas configurações de campo magnético. Seguimos, focalizando na dinâmica de interfaces de fluidos newtonianos confinados na geometria quasi-bidimensional da célula de Hele-Shaw, definindo o problema de Saffman-Taylor, mostrando os padrões obtidos em tal fluxo, e apresentando diversos outros padrões obtidos ao se considerar variações desse problema. Mais especificamente, apresentamos algumas propriedades dos fluxos com simetria radial e fluxos com efeitos centrífugos. Dentre os fluxos confinados com fluidos magnéticos, vimos alguns padrões obtidos ao se aplicar campos perpendiculares e paralelos à célula de Hele-Shaw e como esses padrões estão relacionados a padrões na natureza. Apresentamos, então, o problema da célula de Hele-Shaw de espaçamento variável motivando seus interesses acadêmicos e práticos.

Nosso objetivo principal é realizar uma investigação teórica acerca das instabilidades de

interface geradas em fluxos em que o espaçamento da célula de Hele-Shaw varia com o tempo usando ferrofluidos, e considerando a ação conjunta de um campo magnético estabilizante com estresses interfaciais, magnéticos e viscosos, na presença e na ausência de tensão superficial. Os efeitos estabilizantes do campo magnético e dos estresses serão fundamentais no controle das instabilidades e singularidades da interface. Como já antecipamos, os estresses viscosos são naturalmente relevantes ao se considerar variações na espessura da célula de Hele-Shaw, mas um estudo sistemático dos efeitos desses estresses ainda faltava ser abordado. Além disso, a presença dos estresses magnéticos no problema revelará o papel fundamental da susceptibilidade magnética em etapas não-lineares da dinâmica.

Os próximos capítulos estão organizados da seguinte maneira: no capítulo 2 apresentamos o formalismo teórico básico e obtemos as equações fracamente não-lineares que descrevem o movimento da interface no fluxo do ferrofluido na célula de Hele-Shaw com levantamento. Estudamos o desenvolvimento dos padrões da interface considerando a influência dos estresses viscosos e magnéticos, além da ação do campo magnético aplicado. No capítulo 3, na seção 3.1, discutimos nossos resultados de estabilidade linear. Descobrimos nesta etapa linear do problema que a inclusão dos estresses viscosos normais introduzem uma dependência na separação inicial entre as placas, indicando que o número de dedos formados estaria sobrestimado caso esses estresses não estivessem presentes. No capítulo 3, seção 3.2, mostramos que algumas características morfológicas importantes da interface, como, por exemplo, a competição entre os dedos, podem ser preditas e melhor exploradas quantitativamente com nossa abordagem analítica de modos acoplados de segunda ordem. Encontramos que a inclusão de uma contribuição magnética à condição de contorno de pressão acrescenta um efeito puramente não-linear ao problema, revelando o papel importante da susceptibilidade magnética na dinâmica dos dedos em etapas fracamente não lineares da evolução. Verificamos, enfim, que a interação entre os estresses normais e o campo magnético azimuthal podem modificar profundamente a evolução dos padrões, fornecendo mecanismos efetivos de controle do comportamento da interface. Nossas conclusões finais e as perspectivas de trabalhos futuros encontram-se no capítulo 4.

Célula de Hele-Shaw de espaçamento variável com ferrofluidos

2.1 Equação básica: lei de Darcy generalizada

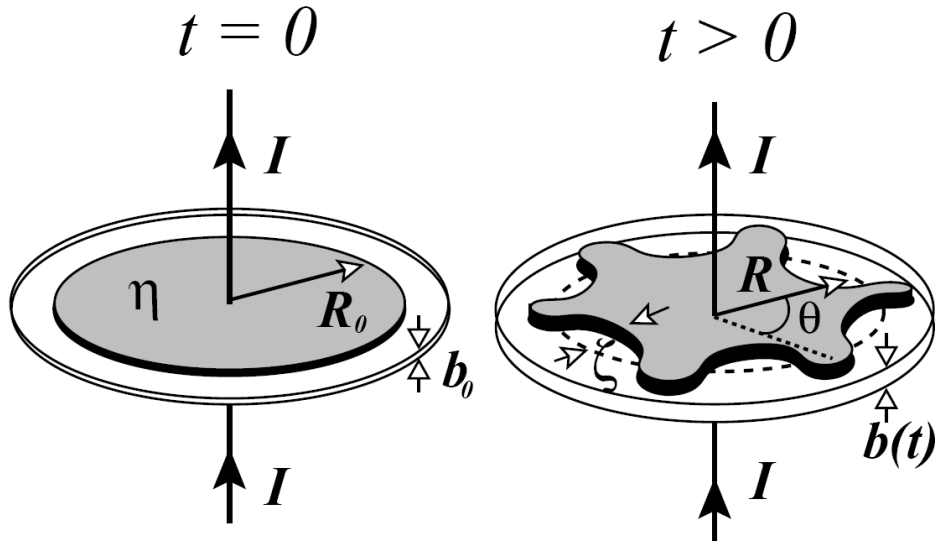


Figura 2.1 Representação diagramática do fluxo de um ferrofluido confinado entre placas paralelas em $t = 0$ (esquerda) e em $t > 0$ (direita). O campo magnético azimutal é produzido por um fio retilíneo longo com corrente elétrica I .

A geometria da célula de Hele-Shaw com espaçamento variável pode ser vista na Fig. 2.1. Considere um ferrofluido incompressível de viscosidade η confinado entre duas placas planas e paralelas. O fluido externo é não-magnético e de viscosidade desprezível. No instante $t = 0$ a gota é circular e tem raio inicial R_0 . O espaçamento inicial entre as placas é representado por b_0 . Num dado instante posterior $t > 0$, a distância entre as placas é denotada por $b = b(t)$ e a

gota tem sua forma perturbada dada por

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t), \quad (2.1)$$

onde

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta) \quad (2.2)$$

representa a perturbação total da interface com amplitudes de Fourier $\zeta_n(t)$ e número de onda azimutal n . $R = R(t)$ é o raio não perturbado dependente do tempo da interface do ferrofluido.

Consideramos um fio com corrente, longo e retilíneo, e de raio desprezível direcionado ao longo do eixo perpendicular às placas de modo que a conservação do volume do ferrofluido resulta na importante relação $R^2 b = R_0^2 b_0$. Note que $R = R(t)$ representa o raio da interface não perturbada (circular), o qual diminui durante o levantamento da placa superior. Pela lei de Ampère, o campo magnético produzido é $\mathbf{H} = I/(2\pi r)\hat{\mathbf{e}}_\theta$, onde r é a distância ao fio, I representa a corrente elétrica e $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ é um vetor unitário na direção azimutal. Note que a simetria azimutal e o gradiente radial do campo magnético resultarão numa força magnética radial que aponta em direção ao fio. Esta é uma das formas que usamos para estabilizar a interface perturbada devido à entrada do fluido externo no sistema durante o levantamento da placa superior.

Para estudar a hidrodinâmica do sistema, a equação de Navier-Stokes usual é modificada de modo a incluir termos que representam os efeitos magnéticos

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 M \nabla H. \quad (2.3)$$

Nós seguimos as aproximações padrão de Rosensweig [1] e outros [2, 46, 47, 48] e assumimos que o ferrofluido é magnetizado de modo que sua magnetização $\mathbf{M}$ é colinear com o campo aplicado. Quando isto é verdade, a força magnética é dada por $\mu_0 M \nabla H$, onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo e H é o campo magnético *local*. O campo magnético local pode incluir tanto contribuições do campo aplicado quanto do campo de demagnetização. Porém, como consideramos apenas efeitos de baixa ordem das interações magnéticas que influenciam no movimento do fluido, e usando a configuração de campo azimutal em questão, podemos considerar apenas o campo aplicado na determinação da magnetização do ferrofluido $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, onde χ é uma constante que representa a susceptibilidade magnética. Ainda na equação de Navier-Stokes, ρ é a densidade do ferrofluido, $\mathbf{u}$ é sua velocidade tridimensional e p é a pressão hidrodinâmica.

Para a geometria quase bidimensional da célula de Hele-Shaw, reduzimos o fluxo tridimensional (3D) para um equivalente bidimensional ao calcular uma média na direção perpendicular

às placas. Usando condições de contorno de não deslizamento [$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = 0$ em $z = 0$ e em $z = b(t)$, onde z é a coordenada perpendicular ao plano da célula] e considerando que as taxas do fluxo de velocidade são baixas, podemos desprezar os termos inerciais [lado esquerdo da Eq. (2.3) igual a zero] para, então, derivar uma lei de Darcy modificada, escrita em coordenadas polares (r, θ) e dada por [48, 49]

$$\mathbf{v} = -\frac{b^2}{12\eta} \left\{ \nabla p - \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \mu_0 M \nabla H dz \right\} = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla \Pi, \quad (2.4)$$

onde ∇ representa o gradiente bidimensional. A pressão generalizada $\Pi = p - \Psi$ contém, além da pressão hidrodinâmica p , uma pressão magnética representada pelo potencial escalar $\Psi = \mu_0 \chi H^2 / 2$. Como as quantidades observáveis (por exemplo, a velocidade $\mathbf{v}$ do fluido) são determinadas por gradientes em Π , podemos, sem perda de generalidade, assumir que a pressão generalizada do fluido externo é zero.

Ao impor a incompressibilidade do fluxo tridimensional $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ e tirar a média sobre a direção transversal

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{b} \int_0^{b(t)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + (u_z|_{z=b(t)} - u_z|_{z=0})/b(t) \\ &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\dot{b}(t)}{b(t)} \end{aligned}$$

obtemos uma condição de incompressibilidade modificada [18, 21]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}, \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ e o ponto denota derivada total em relação ao tempo. A equação (2.5) nos mostra que a equação do potencial de velocidade ϕ ($\mathbf{v} = -\nabla \phi$) difere da equação de Laplace, válida para o caso usual de espaçamento fixo entre as placas, de modo que agora o potencial de velocidade não é mais uma função harmônica. No entanto, já que o espaçamento entre as placas é uma função do tempo apenas, a solução da equação de Poisson para ϕ pode ser convenientemente expressa em termos de duas contribuições, $\phi = \phi_0 + \bar{\phi}$, onde $\bar{\phi} = \dot{b}r^2/(4b)$ é a solução particular, e ϕ_0 satisfaz a equação de Laplace [8, 9].

2.2 Condições de contorno

Além dos efeitos considerados acima, ainda temos de incluir outras contribuições importantes resultantes da ação dos estresses magnéticos e viscosos. Para isso, consideramos uma modi-

ificação na condição de contorno de pressão de Young-Laplace na interface, que expressa o equilíbrio da componente normal do tensor de estresses através da interface fluido-fluido [1, 2, 42, 43, 50, 51, 52]

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{n} = -\gamma\kappa + \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2, \quad (2.6)$$

onde

$$\pi_{ik} = -p\delta_{ik} + \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \quad (2.7)$$

inclui um termo de cisalhamento viscoso proporcional a η . δ_{ik} é a função delta de Kronecker e v_i representa a componente i do vetor velocidade do ferrofluido. O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.6) representa a contribuição usual relacionada a tensão superficial e a curvatura da interface κ [5, 6, 7, 8, 9], onde $\mathbf{n} = \nabla[r - \mathcal{R}(\theta, t)]/|\nabla[r - \mathcal{R}(\theta, t)]|$ é o vetor unitário normal à interface. Um fato a destacar na Eq. (2.6) é a inclusão de uma contribuição magnética ao equilíbrio dos estresses na interface (segundo termo do lado direito), a tração magnética normal (*magnetic normal traction*) [1, 2], que considera a influência da componente normal da magnetização na interface.

Ao reescrever a Eq. (2.7) em coordenadas polares (r, θ) e substituir a expressão resultante na condição de equilíbrio, Eq. (2.6), obtemos a condição de contorno de Young-Laplace do salto da pressão na interface

$$p = \gamma\kappa - \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 - 2\delta\eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}. \quad (2.8)$$

Para a configuração de campo azimutal em questão, a contribuição de mais baixa ordem do termo da tração magnética é dada por $[\mu_0\chi^2 I^2/8\pi^2 R^4](\frac{\partial \zeta}{\partial \theta})^2$. Note que este termo magnético é de segunda ordem na perturbação ζ , sendo legitimamente não-linear e portanto não influenciando em estágios lineares da evolução da interface. O terceiro termo do lado direito da Eq. (2.8) leva em consideração estresses viscosos oriundos de gradientes normais da velocidade e bastante relevantes para qualquer fluxo em Hele-Shaw com simetria radial. A Equação (2.8) nos diz que, se os estresses viscosos e as interações magnéticas forem consideradas, a curvatura será balanceada não apenas pela diferença de pressão, mas também por componentes normais dos estresses viscosos ($\sim \partial v_r/\partial r$) e pela magnetização. Note que “normal” significa normal à interface fluido-fluido e não normal à superfície que separa o ferrofluido da placa superior. Para nosso caso de um forte confinamento entre as placas (espaçamento entre as placas pequeno comparado com qualquer dimensão no plano da célula), o fluxo entre as placas é prioritariamente horizontal e radial, de modo que a abordagem da lei de Darcy (para fluidos newtonianos incompressíveis e imiscíveis) se aplica e os estresses viscosos das direções transversal

($\sim \partial v_z / \partial z$) e tangencial podem ser desprezados. O parâmetro δ [$\delta = 1$ ($\delta = 0$) se os estresses normais são (não são) considerados] é usado para rastrear as contribuições oriundas deste novo termo na Eq. (2.8) em nosso modelo de modos acoplados. Como será verificado abaixo, a inclusão desses estresses na Eq. (2.8) introduz uma dependência no espaçamento inicial entre as placas tanto a nível linear como em níveis fracamente não-lineares [Eqs. (2.11)-(2.16)].

A segunda condição de contorno que usaremos para a descrição do problema é a condição de contorno cinemática. Esta condição está relacionada com o modo como o movimento da interface está acoplado com o movimento dos fluidos. Podemos expressar esta relação afirmando que a derivada temporal da posição da interface $I(r, \theta, t) = r - \mathcal{R}(\theta, t) = 0$ é igual à velocidade de cada fluido na interface. Usando o potencial de velocidade $\mathbf{v} = -\nabla\phi$, podemos escrever a condição de contorno cinemática de uma forma bastante conveniente, porque relaciona o potencial de velocidade ϕ com a perturbação da interface ζ ,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{r=\mathcal{R}} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=\mathcal{R}}. \quad (2.9)$$

Como $\mathbf{n} = \nabla I / |\nabla I|$, a Eq. (A.8) expressa o fato que a componente normal da velocidade dos fluidos é contínua através da interface

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2, \quad (2.10)$$

onde o índice 1 (2) refere-se ao fluido interno (externo). As componentes tangenciais, no entanto, são descontínuas e dão origem a uma folha de vorticidade (*vortex sheet strength*) na interface, na qual uma concentração de vórtices pode ser encontrada. Apesar do formalismo das folhas de vorticidade ser uma ferramenta alternativa para descrever dinâmicas de interface em células de Hele-Shaw, a descontinuidade da componente tangencial da velocidade não atua diretamente na determinação da condição de contorno de pressão (2.8) em nosso problema. Aqui o fluxo se dá principalmente ao longo da direção radial.

2.3 Equação de movimento da interface

Nós adaptamos a teoria fracamente não linear originalmente desenvolvida para estudar o problema de Hele-Shaw com espaçamento fixo ($\dot{b} = 0$) com fluidos não-magnéticos ($M = 0$) [9] para esta situação de espaçamento variável com ferrofluidos. Como mostrado em mais detalhes no Apêndice A, definimos expansões de Fourier para os potenciais de velocidade [que obedecem a Eq. (2.5)] e usamos as condições de contorno para expressar ϕ em termos de ζ_n . Depois de

alguma álgebra, obtemos a equação de modos acoplados *adimensional* para o sistema (para $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n) \zeta_n + \sum_{n' \neq 0} \left[F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} \right], \quad (2.11)$$

onde

$$\lambda(n) = \frac{1}{J(n)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} [|n| - J(n)] - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n|(n^2 - 1) - |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \right\} \quad (2.12)$$

representa a taxa de crescimento linear, com

$$J(n) = \left[1 + \delta \frac{|n|(|n| - 1)b^2}{6q^2 R^2} \right], \quad (2.13)$$

onde

$$q = \frac{2R_0}{b_0} \quad (2.14)$$

é a razão de aspecto inicial (tradução literal do inglês “*initial aspect ratio*”) e representa a razão do diâmetro inicial da gota circular pelo espaçamento inicial entre as placas. Além disso,

$$\begin{aligned} F(n, n') = & \frac{1}{RJ(n)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} \left[|n| \left(\text{sgn}(nn') - \frac{1}{2} \right) - 1 + [J(n) - 1] \left[\frac{3|n'| - n'^2 - 2}{|n| - 1} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right] \right] - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n| \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] + \frac{3}{2} |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \left[1 + \frac{\chi}{3} n' (n' - n) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

e

$$G(n, n') = \frac{1}{RJ(n)} \left\{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] - 1 + [J(n) - 1] \left[\frac{3|n'| - n'^2 - 2}{|n| - 1} + |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right] \right\} \quad (2.16)$$

representam termos de acoplamento de segunda ordem. A função sgn é ± 1 de acordo com o sinal de seu argumento. Na Eq. (2.11), comprimentos no plano, $b(t)$ e o tempo são reescalados por $L_0 = 2R_0$, b_0 , e o tempo característico $T = b_0/|\dot{b}(0)|$, respectivamente. O parâmetro $\sigma = \gamma b_0^3/[12\eta|\dot{b}(0)|L_0^3]$ representa a tensão superficial adimensional e

$$N_B = \mu_0 \chi I^2 b_0^3/[48\pi^2 \eta |\dot{b}(0)|L_0^4]$$

denota o número magnético adimensional (“*magnetic Bond number*”).

Como dito anteriormente, o parâmetro $\delta = 1$ [ou equivalentemente, a função $J(n)$] corresponde aos estresses extras originados na Eq. (2.8). Ele introduz uma importante dependência

da taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ e também dos termos de acoplamento $F(n, n')$ e $G(n, n')$ na razão de aspecto inicial q . Note a presença do termo de campo magnético N_B tanto em $\lambda(n)$ quanto em $F(n, n')$. Note ainda que a contribuição da tração magnética normal aparece em $F(n, n')$ no termo que inclui a susceptibilidade magnética χ . Entre outras coisas, estas dependências em δ e em N_B são necessárias para uma descrição mais precisa dos mecanismos de competição entre os dedos num fluxo em uma célula de Hele-Shaw com espaçamento variável. De agora em diante, trabalharemos com as versões adimensionais das equações.

Gostaríamos de chamar a atenção para um requisito importante do formalismo da lei de Darcy empregado neste trabalho: como é comum em sistemas de Hele-Shaw [28], consideramos que durante todo o processo de levantamento o sistema se mantém com uma alta razão de aspecto, isto é, o espaçamento entre as placas b é sempre muito menor que qualquer outro comprimento característico no plano da célula, que nós tomamos como sendo o raio R , então $R/b \gg 1$. Claro que há outras abordagens teóricas para dinâmica de fluidos em Hele-Shaw que são livres desta restrição. Por exemplo, em circunstâncias mais gerais (não limitadas a restrição de alta razão de aspecto), a solução da equação de Stokes tridimensional [52] ou o modelo de Brinkman [53, 54, 55] são provavelmente mais apropriados e precisos ao descrever os padrões que surgem durante o levantamento. No entanto, note que tal descrição mais geral envolveria um problema de superfície livre tridimensional. Então, não há dúvidas que este seria um problema mais difícil de ser tratado e consideravelmente desafiador [40, 54]. Portanto, o modelo de Darcy que empregamos é muito bem-vindo. Ele é uma ferramenta útil para explorar o problema de Hele-Shaw de espaçamento variável, ao menos para razões de aspecto suficientemente grandes.

Finalmente, há um segundo ponto que gostaria de chamar a atenção. Note que, ao assumir uma razão de aspecto grande ($R/b \gg 1$), as correções consideradas nas Eqs. (2.6) e (2.7) devido aos estresses viscosos e à tração magnética normal são de fato pequenas se comparadas ao primeiro termo da Eq. (2.8) (que envolve a tensão superficial e a curvatura da interface). Por outro lado, sabe-se que a adição de pequenas correções em condições de contorno podem ser extremamente importantes (veja por exemplo as Refs. [42, 50]). Isto é confirmado pelos resultados que aqui apresentamos, onde o número de dedos e a dinâmica da competição entre eles são significativamente afetados por essas pequenas correções adicionadas à condição de contorno generalizada de pressão [Eq. (2.8)].

Estágios linear e fracamente não-linear do problema magnético

3.1 Análise de estabilidade linear

Começamos nossa análise estudando a Eq. (2.11) para examinar como o desenvolvimento de instabilidades de interface em estágios iniciais da evolução dos padrões podem ser modificados pela influência dos estresses viscosos e do campo magnético externo. Enfatizamos que a contribuição dos estresses magnéticos (ou, como mais comumente conhecido, tração magnética normal, tradução de “*magnetic normal traction*”) aparece apenas no estágio não-linear da evolução, e portanto, não aparecerá na análise de estabilidade linear do problema. Consideraremos a dinâmica desestabilizante $\dot{b}(t) > 0$ e, como nas Refs. [21, 26, 28], assumimos que o levantamento entre as placas é feito exponencialmente $b(t) = e^t$, de modo que $[\dot{b}(t)/b(t)] = 1$. Esta é precisamente a forma ideal de separação usada em problemas de adesão [35], uma vez que ela promove uma cinemática mais uniforme devido a existência de uma “taxa de distensão” (*strain rate*), relacionada com a razão entre a velocidade de levantamento e o espaçamento entre as placas, constante. Para tempo pequeno temos $b \approx 1 + t$ que corresponde ao caso de levantamento com velocidade constante em que $\dot{b} = 1$.

Podemos ganhar mais intuição acerca do papel do levantamento, dos estresses viscosos, do campo magnético e da tensão superficial na formação das instabilidades de interface analisando a Eq. (2.12) para a taxa de crescimento $\lambda(n)$. Como de costume, o termo de tensão superficial atua estabilizando os modos n grandes, isto é, se torna cada vez mais negativo ao aumentarmos o valor de n . A Eq. (2.12) também nos mostra que a contribuição do campo magnético azimutal N_B é de estabilizar a interface. Mas, diferentemente desses dois, o termo de levantamento, proporcional a $\dot{b}/b$ atua basicamente desestabilizando o sistema.

Através da Eq. (2.12) podemos obter algumas consequências da dependência da taxa de crescimento linear com n . Por exemplo, o modo $n = 0$, que corresponde a uma expansão uniforme da gota circular, decai $[\lambda(0) = -1]$ para $\dot{b}(t) > 0$ como consequência da conservação

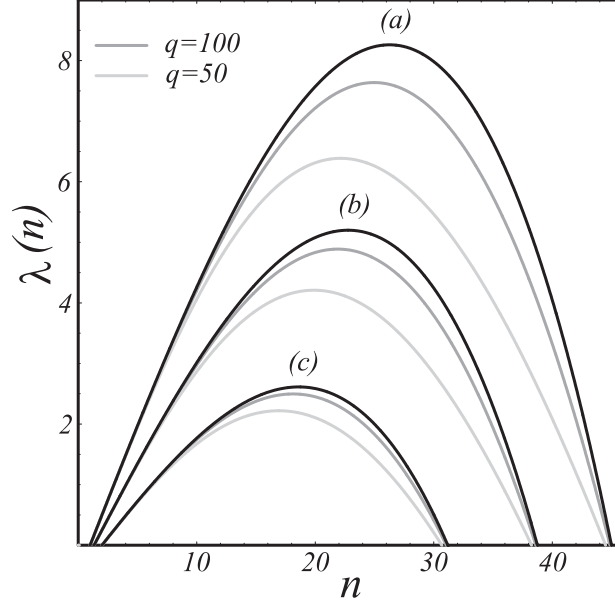


Figura 3.1 Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ como função do modo n , para $t = 0.2$, $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$ e três valores diferentes de N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} e (c) 7.0×10^{-3} . As cores correspondem a valores distintos de δ e q : $\delta = 0$ (preto), $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $\delta = 1$, $q = 50$ (cinza claro).

da massa e da contração da gota, e é marginal [$\lambda(0) = 0$] para $\dot{b}(t) = 0$. O modo $n = 1$, que corresponde a uma translação da interface circular, é determinado apenas pelo termo magnético, e decai se $N_B > 0$, sendo marginal quando $N_B = 0$. Isso faz todo sentido, uma vez que o campo magnético azimuthal tende a atrair o ferrofluido em direção ao fio, e, conseqüentemente, a prender a gota no centro da célula. A estabilidade dos modos $n \geq 2$ depende do balanço dos três termos que aparecem na Eq. (2.12).

Uma característica incomum na Eq. (2.12) é a presença do fator $J(n)$ [Eq. (2.13)], que introduz uma dependência na razão de aspecto inicial q . Este termo aparece tanto como um prefator geral quanto em um termo multiplicando $\dot{b}(t)$, o que o torna inerentemente relacionado com o processo de levantamento. Da Eq. (2.13) vemos que, se $n \gg 1$ a correção introduzida pelo termo $J(n)$ é mais importante quando $nb/qR \sim 1$. Claro que esta dependência em q desaparece completamente se os efeitos dos estresses normais não forem considerados. Neste caso, $\delta = 0$ e $J(n) = 1$.

A Figura 3.1 mostra $\lambda(n)$ como função do modo n para um valor não nulo do parâmetro da tensão superficial σ ($\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$), no instante $t = 0.2$, para três valores distintos de N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} e (c) 7.0×10^{-3} . As curvas pretas correspondem ao caso em que os estresses

viscosos são desconsiderados ($\delta = 0$) e as curvas em cinza referem-se aos casos em que esses estresses são levados em consideração ($\delta = 1$). Os diferentes tons de cinza referem-se aos seguintes valores da razão de aspecto inicial: $q = 100$ (cinza escuro) e $q = 50$ (cinza claro). A não ser quando dito o contrário, estes serão os rótulos para os tons de cinza ao longo desta dissertação.

As curvas da taxa de crescimento ilustradas na Fig. 3.1 são caracterizadas por uma banda de modos instáveis de largura

$$\Delta n_c = n_{c>} - n_{c<}, \quad (3.1)$$

onde o modo crítico $n_{c>}$ ($n_{c<}$) é a solução de uma equação cúbica, definido como o maior (menor) número de onda quando $\lambda(n) = 0$. Aqui, diferentemente do clássico problema de formação de dedos num fluxo radial com injeção [8, 9] e do problema da célula de Hele-Shaw girante [44, 45] em que a força motora é um termo centrífugo, a banda de instabilidade encolhe pelas duas extremidades ($n_{c>}$ e $n_{c<}$) devido a ação dos efeitos estabilizantes.

Outra característica comum a este tipo de curva é a presença de um máximo em $n = n_{max}$, obtido ao fazer $d\lambda(n)/dn = 0$. Uma quantidade que está bem relacionada a n_{max} é o modo de maior crescimento n^* , definido como o modo (inteiro) que produz a maior taxa de crescimento. Um dado modo n será o de maior crescimento quando $\lambda(n) > \lambda(n-1)$ e $\lambda(n) > \lambda(n+1)$. Este é o modo que tende a dominar durante os primeiros estágios do processo de formação do padrão e é o modo que talvez determine o número de dedos em estágios mais avançados da evolução.

Olhando a Fig. 3.1 podemos examinar como o campo magnético e os estresses viscosos influenciam a taxa de crescimento linear quando σ é diferente de zero. Uma primeira e imediata característica é que maiores valores de N_B diminuem a banda de modos instáveis Δn_c , e reduzem o valor de n_{max} . Em contrapartida, para um dado valor de N_B , mudanças em q levam a um menor valor da taxa de crescimento do modo n_{max} , levando-o inclusive a menores valores do número de onda azimutal. Como n_{max} determina o número típico de dedos formados no início da instabilidade, esta dependência em q significa que confinamentos espaciais iniciais maiores (ou equivalentemente, menores b_0 ou maiores valores de q) resultam em padrões com um maior número de dedos. Esta é uma importante consequência da inclusão dos estresses viscosos normais na Eq. (2.8). Então, para $\sigma \neq 0$, as instabilidades de interface serão mais efetivamente suprimidas para maiores valores de N_B e menores valores de q . Porém, é importante frisar que, caso os estresses viscosos não estejam presentes (curvas pretas na Fig. 3.1) os valores de n_{max} e $\lambda(n_{max})$ tornam-se sobrestimados.

3.1.1 Caso não-magnético com estresses: comparação com experimentos

Como dito no capítulo 1, o número de dedos observados em experimentos (com fluidos não magnéticos) em que a taxa de levantamento é constante é consideravelmente menor que o previsto pela análise linear tradicional que desconsidera os estresses viscosos normais e utiliza condições de contorno usuais [39, 40]. No entanto, foi mostrado recentemente [40] que a concordância entre os experimentos e a teoria linear pode ser melhorada, principalmente para grandes $b(t)$, se efeitos tridimensionais forem considerados. Essas correções 3D são introduzidas ao se considerar a influência do “molhamento” das paredes [50, 51], que considera a existência de um filme fino de espessura variável entre os dedos e as placas. Porém, também foi verificado na Ref. [40] que, para $b(t)$ pequeno, uma discrepância importante entre teoria e experimentos ainda permanece apesar da inclusão dos efeitos 3D.

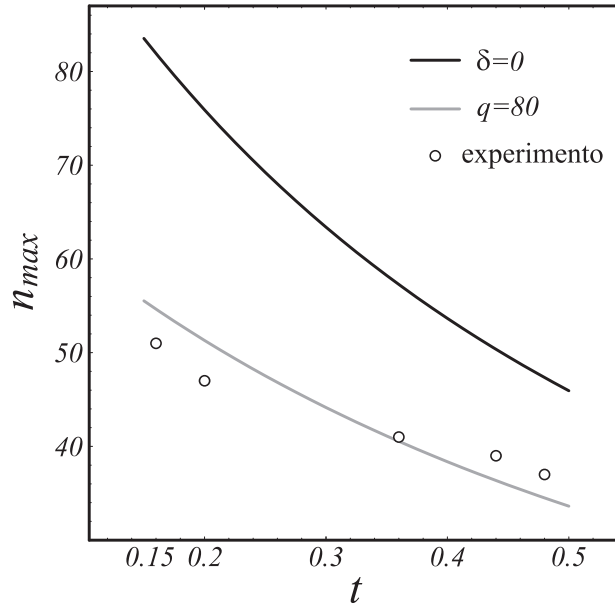


Figura 3.2 n_{max} como função do tempo adimensional t , para levantamento com velocidade constante $\dot{b} = 1$, $\sigma \approx 1.592 \times 10^{-6}$ e $N_B = 0$. Esses parâmetros correspondem aos valores experimentais apresentados nas Refs. [39, 40]. Plotamos os dados *experimentais* tirados da Fig. 4 da Ref. [40] (círculos abertos) e os resultados correspondentes de nossa análise de estabilidade linear quando $\delta = 0$ (curva preta) e quando $\delta = 1$ com $q = 80$ (curva cinza). Note que a previsão teórica para o número típico de dedos é consideravelmente melhorado quando os estresses viscosos são considerados (curva cinza).

Neste ponto, nós sugerimos que uma possível explicação para a diminuição do número de dedos quando $b(t)$ é pequeno pode ser dada ao se considerar os efeitos dos estresses vis-

cosos normais. Como discutido ao longo deste capítulo, os efeitos desses estresses são mais importantes para $b(t)$ pequeno, ou equivalentemente para instantes iniciais. Nesses instantes iniciais, a instabilidade acaba de se estabelecer e nossa análise de estabilidade linear (que agora considera os estresses viscosos) deve se aplicar e ser suficientemente precisa. Uma informação mais quantitativa deste fato pode ser vista na Fig. 3.2, que plota a evolução temporal de n_{max} considerando as condições experimentais usadas nas Refs. [39, 40], isto é, $R_0 = 20$ mm, $b_0 = 0.5$ mm, velocidade de levantamento constante $V = \dot{b} = 20 \times 10^{-6}$ m/s, viscosidade do fluido não-magnético $\eta = 92$ Pa s, e tensão superficial $\gamma = 18 \times 10^{-3}$ N/m. Usando essas quantidades físicas, fizemos nossa Fig. 3.2 considerando os correspondentes parâmetros adimensionais: $\dot{b} = 1$ e $\sigma = \gamma b_0^3 / [12\eta |\dot{b}| (2R_0)^3] \approx 1.592 \times 10^{-6}$. Consideramos também que não há campo magnético aplicado ($N_B = 0$), além de um intervalo de tempo adimensional no início da dinâmica $0.15 \leq t \leq 0.50$ (note que aqui o tempo característico é $T = b_0 / |\dot{b}| = 25$). A curva preta representa a situação em que os estresses viscosos são desprezados ($\delta = 0$) enquanto que a curva cinza considera o efeito desses estresses ($\delta = 1$) para o valor exato da razão de aspecto inicial usado na Ref. [40], $q = (2R_0/b_0) = 80$. Em outras palavras, o valor de q utilizado é determinado pelas condições iniciais dos experimentos da Ref. [40]. Os círculos abertos representam os valores *experimentais* da Fig. 4 da Ref. [40]. Ao se comparar as curvas preta e cinza na Fig. 3.2 fica evidente que os estresses viscosos (curva cinza) reduzem a previsão do número de dedos substancialmente, principalmente em instantes iniciais [ou menores $b(t)$]. Isso mostra que o número típico de dedos fica de fato *sobrestimado* caso os estresses viscosos não sejam considerados (curva preta). Além disso, a Fig. 3.2 nos mostra ainda que a concordância entre o número de dedos observado experimentalmente e o previsto pela teoria linear é consideravelmente melhorada quando os estresses viscosos são utilizados.

Para examinar este fato mais detalhadamente, na Fig. 3.3 temos o gráfico do número típico de dedos n_{max} para diferentes valores do espaçamento inicial entre as placas b_0 . Da mesma forma que na Ref. [40], nossos resultados teóricos foram calculados considerando o instante inicial $t = 0$. Note que a Fig. 3.3 usa o mesmo conjunto de parâmetros físicos da Fig. 3.2 (que foi feita assumindo $b_0 = 0.5$ mm fixo), mas agora o tempo é que é fixo ($t = 0$) e $0.1 \text{ mm} \leq b_0 \leq 1.0$ mm. Os valores representados pelos pontos pretos (cinza) assumem $\delta = 0$ ($\delta = 1$) e os círculos abertos são os valores *experimentais* tirados da Fig. 3 da Ref. [40]. Ao olhar para a Fig. 3.3 é fácil notar que os pontos em cinza ($\delta = 1$) estão sempre abaixo dos pontos pretos ($\delta = 0$). Isto indica que a inclusão dos estresses viscosos levam a resultados teóricos que estão mais próximos dos dados experimentais para todos os valores de b_0 medidos. A Fig. 3.3

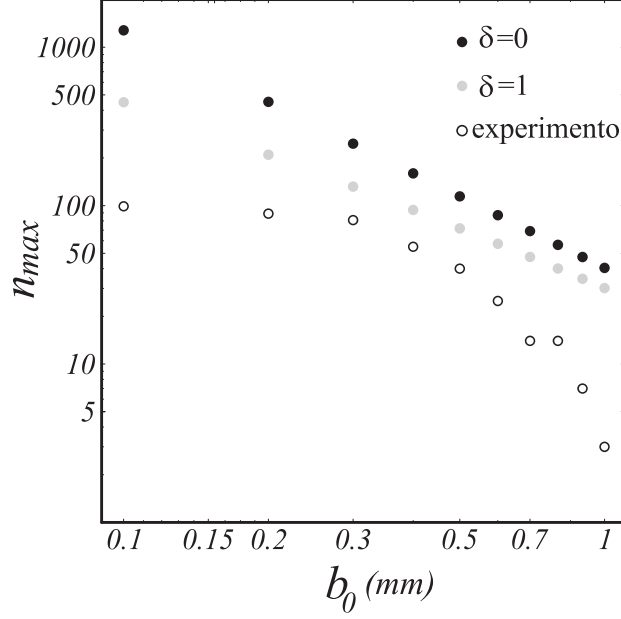


Figura 3.3 Gráfico log-log que representa como o número típico de dedos n_{max} no instante $t = 0$ varia com o espaçamento inicial entre as placas b_0 ($0.1 \text{ mm} \leq b_0 \leq 1.0 \text{ mm}$). Os demais parâmetros são os mesmo usados na Fig. 3.2. Plotamos os *dados experimentais* da Fig. 3 da Ref. [40] (círculos abertos) junto com resultados de nossa análise de estabilidade linear quando $\delta = 0$ (pontos pretos) e quando $\delta = 1$ (pontos cinza).

mostra ainda que uma melhor concordância entre teoria incluindo estresses (pontos cinza) e experimento (círculos abertos) é encontrada dentro do intervalo $0.2 \text{ mm} \leq b_0 \leq 0.6 \text{ mm}$. Os desvios observados para maiores b_0 são de certa forma esperados devido aos resultados da Ref. [40] (efeitos 3-D). Apesar de ainda não entendermos a discrepância persistente quando a separação entre as placas é bastante pequena ($0.1 \text{ mm} \leq b_0 \leq 0.2 \text{ mm}$), ela pode estar relacionada a imprecisões inerentes relacionadas às medidas experimentais do número de dedos em instantes muito iniciais da evolução (note que neste caso consideramos $t = 0$). Um melhor acordo entre teoria e experimentos seria obtido caso os dados experimentais fossem calculados considerando um valor de t pequeno, porém diferente de zero. Em suma, da análise das Figs. 3.2 e 3.3 temos que, para melhorar a concordância entre a teoria linear e os dados experimentais [39, 40] é necessário incluir não apenas efeitos tridimensionais [mais relevantes para maiores $b(t)$], mas também os estresses viscosos normais [necessários para valores pequenos e intermediários de $b(t)$]. Desta forma, a inclusão dos estresses normais que propomos neste trabalho acrescentam um elemento importante na discussão das discrepâncias observadas nas

Refs. [39, 40].

Voltando a considerar a presença do campo magnético, e como rapidamente discutido na seção 1.3 do capítulo 1, sabe-se que há formação de singularidades de cúspide e quebra da gota na interface entre os fluidos ao se considerar fluxos confinados na ausência de tensão superficial. Um exemplo deste acontecimento na célula de Hele-Shaw com espaçamento variável é mostrado nas simulações numéricas da Ref. [21] com fluidos não-magnéticos. A Fig. 1.16 mostrou parte dos resultados da Ref. [21] e nela vemos claramente que uma gota com forma de haltere quebra-se em duas partes.

Também vimos no capítulo 1 que Magdaleno *et al.* [10] mostraram que é possível, devido a efeitos centrífugos, prevenir a formação de singularidades de cúspide em fluxos radiais na célula de Hele-Shaw girante com espaçamento constante quando a tensão superficial é zero.

Motivados pela idéia de que é possível controlar os mecanismos de formação de singularidades em tempo finito para nosso sistema de Hele-Shaw com levantamento, vamos buscar evidências teóricas de que o efeito estabilizante do campo magnético azimutal pode ser usado como um parâmetro externo para inibir singularidades e a quebra da gota em fluxos quando a tensão superficial é zero. Note que, especialmente para esta análise, que corresponde aos resultados de nosso artigo do Physical Review E **69**, 066312 (2004), estaremos considerando os efeitos estabilizantes do campo magnético apenas, isto é, o efeito dos estresses viscosos não serão levados em consideração na análise da inibição de singularidades.

Como antecipado na seção 2.1 do capítulo 2, esta configuração de campo azimutal gera uma força magnética radial que aponta em direção ao fio e portanto atua atraindo o ferrofluido para o centro da célula de Hele-Shaw estabilizando as perturbações de interface. Este mecanismo estabilizante por si só já sugere a possibilidade de se obter uma evolução não-trivial da interface instável, mas que não necessariamente desenvolva singularidades e fissão da gota neste limite em que $\sigma = 0$.

Para ilustrar o efeito do campo magnético na formação de singularidades em tempo finito, mostramos na Fig. 3.4 a superposição de gráficos em diferentes instantes de tempo que mostram a evolução da interface *linear*, obtida integrando o primeiro termo do lado direito da Eq. (2.11) para $n = 2$, $\delta = 0$ e $0 \leq t \leq 2$, com intervalos de tempo igualmente espaçados de 0.25. Evoluímos do raio inicial circular $R_0 = 0.5$ com $|\zeta_n(0)| = R_0/10$. Com a intenção de tornar a figura mais clara, pintamos a forma final da gota. A Figura 3.4(a) representa a evolução da interface na ausência de campo magnético ($N_B = 0$). Nela, a interface inicialmente circular evolui para um padrão com a forma de um haltere que tende a se partir em dois círculos como predito pela

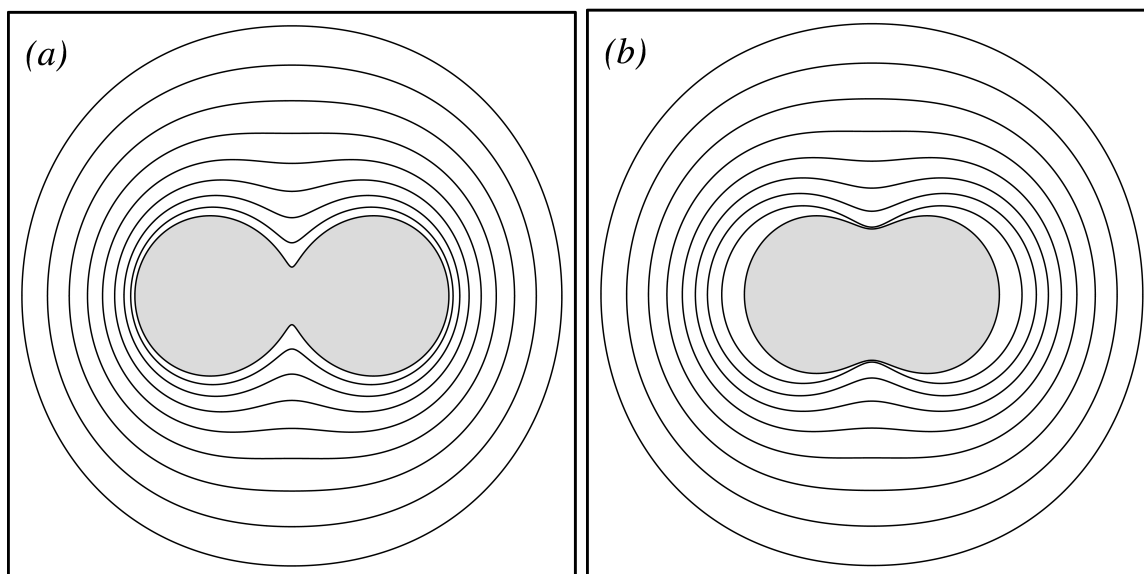


Figura 3.4 Evolução linear da interface usando a Eq. (2.11) para $n = 2$, $\delta = 0$ e $0 \leq t \leq 2$ em intervalos de 0.25 considerando $\delta = 0$ quando (a) $N_B = 0$ e (b) $N_B = 2.5 \times 10^{-5}$.

Ref. [21]. Apesar de termos interrompido a evolução antes do processo da quebra, há uma clara evidência de que uma singularidade tende a ocorrer quando $N_B = 0$. Note que não poderíamos avançar ainda mais na evolução uma vez que qualquer modelo perturbativo se torna *quantitativamente* impreciso quando as perturbações crescem demais. No entanto, como discutido em detalhes por Gingras e Rácz [57], a teoria linear é ainda válida desde que os padrões da interface não se interceptem. Nas Figuras 3.4(a) e 3.4(b) nós respeitamos esse critério de validade.

A Figura 3.4(b) representa a evolução da interface para o mesmo conjunto de parâmetros da Figura 3.4(a), mas agora considerando a presença do campo magnético com $N_B = 2.5 \times 10^{-5}$. É evidente que o campo magnético muda consideravelmente o movimento da interface, principalmente sua forma final. Recordamos que os termos magnéticos na equação de movimento da interface [Eq. (2.11)] crescem exponencialmente no tempo. Além de crescer com o tempo, na taxa de crescimento linear, o termo de campo tem efeito estabilizante atraindo a gota de ferrofluido para o centro da célula de Hele-Shaw. Neste sentido, podemos afirmar que os termos magnéticos “imitam” a tendência intrínseca de voltar a uma forma circular no final da evolução como acontece no fluxo com levantamento quando a tensão superficial é não-nula [21]. O fato mais notável na Fig. 3.4(b) é a ausência de uma fissão iminente na região central da gota. Isto reforça a possibilidade de se inibir a formação de singularidades devido a ação do campo magnético azimuthal.

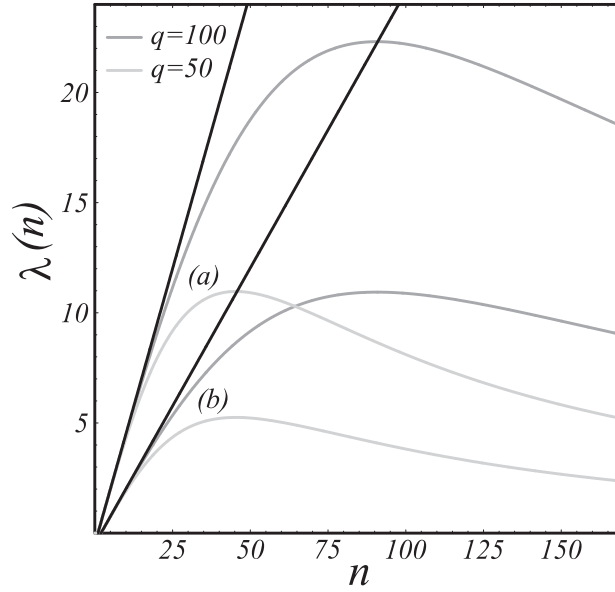


Figura 3.5 Taxa de crescimento linear $\lambda(n)$ como função do modo n , para $t = 0.2$, $\sigma = 0$ e dois diferentes valores de N_B : (a) 0 e (b) 7.0×10^{-3} . O rótulo das cores referem-se a valores distintos de δ e q : $\delta = 0$ (preto), $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $\delta = 1$, $q = 50$ (cinza claro).

Continuemos agora com a análise de estabilidade linear, voltando a considerar os efeitos dos estresses viscosos e analisando a taxa de crescimento quando o parâmetro de tensão superficial é zero (veja Fig. 3.5). Ao longo deste trabalho, o limite de tensão superficial zero será particularmente útil, uma vez que ele dessensibiliza o sistema com relação a σ e permite um melhor esclarecimento dos papéis dos estresses viscosos e do campo magnético. A Fig. 3.5 mostra como a taxa de crescimento linear varia com o modo de Fourier n quando $\sigma = 0$, $t = 0.2$ e N_B : (a) 0 e (b) 7.0×10^{-3} . O valor dos demais parâmetros e o rótulo das cores seguem exatamente os utilizados na Fig. 3.1. Quando os estresses viscosos são desprezados [retas pretas em (a) e em (b)] $\lambda(n)$ cresce linearmente com n e o sistema é mal definido [$\lambda(n)$ cresce indefinidamente quando $n \rightarrow \infty$] independente do valor de N_B considerado. De outra forma, apesar da inclinação da reta ser reduzida para maiores valores de N_B , a curva da taxa de crescimento não irá nunca apresentar um máximo bem definido para um n finito quando $\delta = 0$. Então, o efeito magnético por si só não é suficiente para regularizar o sistema a nível linear, e N_B não tem influência alguma na determinação de n_{max} quando $\sigma = 0$ e $\delta = 0$.

Um panorama completamente diferente surge quando os estresses viscosos são introduzidos: quando $\delta = 1$ [curvas cinza na Fig. 3.5(a) e na Fig. 3.5(b)] há a estabilização de modos

grandes e as curvas apresentam um n_{max} finito bem definido e um Δn_c largo, porém finito também. Note também que, para um dado N_B , menores valores de q (curvas cinza claro) correspondem a menores valores de n_{max} e de Δn_c . Um fato interessante é que a posição (ao longo do eixo n) do máximo nas curvas cinza que tem o mesmo q é sempre a mesma. Como dito anteriormente, o valor de n_{max} não depende de N_B , mas apenas de q . Isso justifica o fato da posição de n_{max} não variar com o aumento de N_B . Assim, a existência de um máximo nas curvas cinza da Fig. 3.5 é devido exclusivamente a ação dos estresses viscosos. É neste sentido que podemos afirmar que a inclusão dos estresses normais ($\delta = 1$) na condição de contorno de pressão modificada Eq. (2.8) introduz uma tensão superficial efetiva ao sistema. Daí, no âmbito da teoria linear, concluímos que a ação conjunta do campo magnético com os estresses viscosos normais pode ser usada como parâmetro para disciplinar o surgimento das instabilidades de interface.

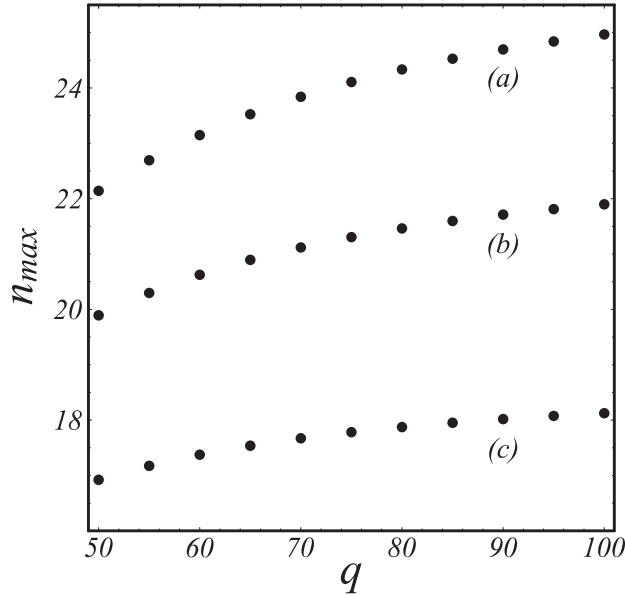


Figura 3.6 n_{max} como função da razão de aspecto inicial q , para $t = 0.2$, $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$, $\delta = 1$ e três valores diferentes de N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} e (c) 7.0×10^{-3} . Esses parâmetros são os mesmos usados na Fig. 3.1.

Para investigar mais detalhadamente a ação combinada do campo magnético com os estresses viscosos no modo de maior crescimento, mostramos na Fig. 3.6 o gráfico de n_{max} como função de q para três valores distintos de N_B , $\delta = 1$, $t = 0.2$ e $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$. Os valores de N_B são os mesmos usados na Fig. 3.1. Ao examinar a Fig. 3.6 vemos que n_{max} é mais sensível a mudanças em q para menores valores de N_B . Ao aumentar q na Fig. 3.6, o número típico de dedos aumenta de aproximadamente três unidades em (a) para $N_B = 0$, duas unidades em (b)

para $N_B = 3.5 \times 10^{-3}$ e uma unidade em (c) para $N_B = 7.0 \times 10^{-3}$. De fato, isto acontece para qualquer instante t . Verificamos ainda que n_{max} é uma função decrescente do tempo e decai mais rapidamente para menores valores de q e maiores valores de N_B .

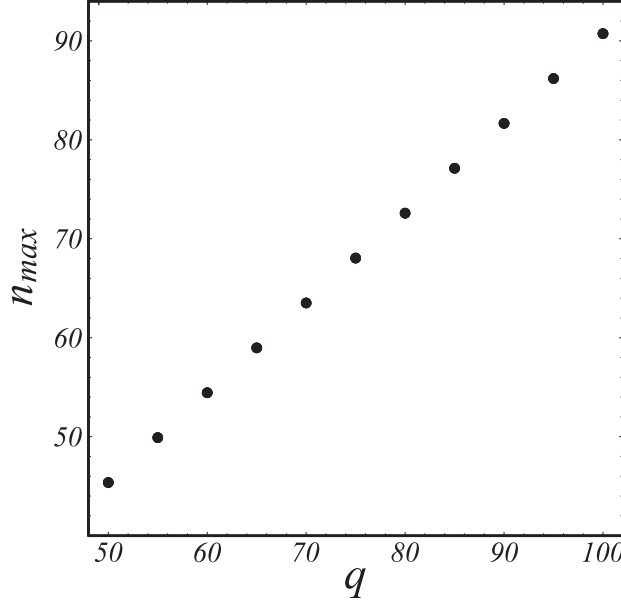


Figura 3.7 n_{max} como função da razão de aspecto inicial q , para $t = 0.2$, $\sigma = 0$, $\delta = 1$ e três valores diferentes de N_B : 0, 3.5×10^{-3} e 7.0×10^{-3} . Note que, escondidas nesta simples curva pontilhada, há de fato três curvas (uma para cada valor de N_B). Esses parâmetros são os mesmos da Fig. 3.5.

Também observamos que, se diminuirmos σ , n_{max} varia muito mais dramaticamente com q e, no limite em que $\sigma \rightarrow 0$, as três curvas pontilhadas da Fig. 3.6 coincidem, como pode ser visto na Fig. 3.7. Esta figura mostra n_{max} como função de q , quando $\sigma = 0$ e $\delta = 1$. Note que, escondidas na linha reta pontilhada da Fig. 3.7, há de fato três curvas pontilhadas, duas delas escondidas. Isto reforça nossa afirmação (veja discussão da Fig. 3.5) de que N_B não tem influência alguma na determinação de n_{max} quando $\sigma = 0$. De fato, se fizermos $\sigma = 0$ e calcularmos $d\lambda(n)/dn = 0$, os termos que dependem de N_B se cancelam e encontramos que

$$n_{max} = \sqrt{\frac{6}{\delta}} \frac{R}{b} q. \quad (3.2)$$

Na Eq. (3.2) vemos que n_{max} varia linearmente com q e, como esperado, tende a infinito quando $\delta \rightarrow 0$, uma vez que neste limite $\lambda(n)$ é ilimitado. No entanto, se $\delta = 1$, n_{max} é uma função decrescente do tempo. Isto indica que, devido aos estresses viscosos, a gota tenderia a uma recircularização mesmo quando σ e N_B são ambos nulos.

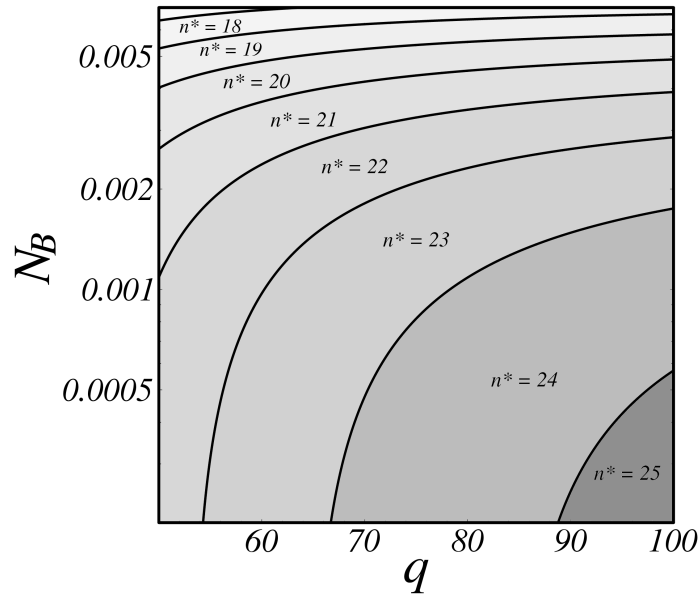


Figura 3.8 Gráfico log-linear do diagrama de fases, de estabilidade linear que mostra as zonas (sombreadas) do modo que tem crescimento mais rápido n^* de acordo com a Eq. (3.3). Os parâmetros físicos são exatamente os mesmos usados na Fig. 3.1.

Informação complementar pode ser obtida examinando a Fig. 3.8 que usa os mesmos parâmetros da Fig. 3.6 mas retrata um “diagrama de fases”, no espaço dos parâmetros N_B - q para o sistema linearizado. As curvas que separam cada uma das regiões sombreadas são determinadas pela condição

$$\lambda(n) = \lambda(n \pm 1). \quad (3.3)$$

Elas separam zonas dentro das quais um dado modo é o de maior crescimento. Essas zonas são rotuladas por n^* no gráfico. Como um exemplo de como podemos usar este gráfico, considere o caso em que $N_B = 3.5 \times 10^{-3}$ é mantido fixo. Quando a razão de aspecto inicial aumenta de $q = 50$ a $q = 100$, o modo de maior crescimento também aumenta, variando de $n^* = 20$ a $n^* = 22$. Além disso, note que, à medida que N_B aumenta, as regiões sombreadas tornam-se mais estreitas e horizontais, indicando que a influência de q diminui à medida que aumentamos o valor do parâmetro N_B . Por outro lado, se q é fixado (por exemplo, $q = 100$), à medida que aumentamos N_B , temos que o modo de crescimento mais rápido diminui, variando de $n^* = 25$ a $n^* = 18$. Estas constatações estão em perfeito acordo com o que encontramos na Fig. 3.6 para três valores distintos de N_B . Verificamos também que, enquanto diminuimos o valor de σ , as regiões para cada n^* tornam-se cada vez mais estreitas e verticais de modo que, quando $\sigma \rightarrow 0$,

vê-se mais uma vez que mudanças em N_B não trazem influência alguma na determinação de n^* , confirmando assim o colapso das curvas na Fig. 3.7.

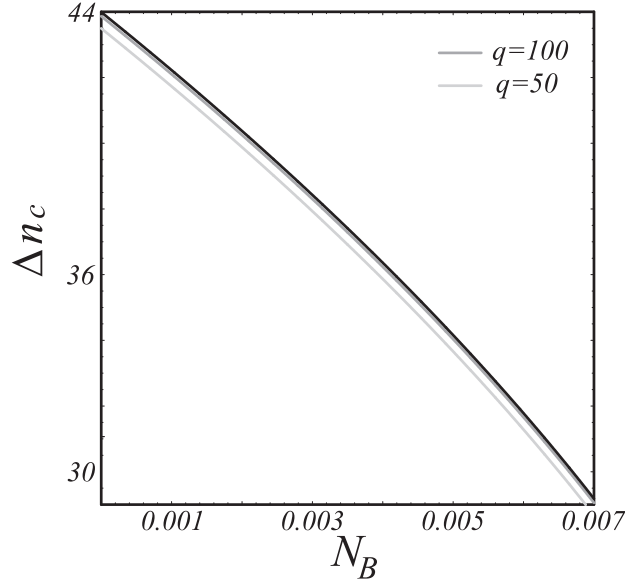


Figura 3.9 Largura da banda de modos instáveis Δn_c como função do número magnético N_B quando $\sigma \neq 0$: $\delta = 0$ (preto), $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $\delta = 1$, $q = 50$ (cinza claro). Os demais parâmetros são os mesmos da Fig. 3.1.

Apesar de termos obtido fortes evidências de que o modo de maior crescimento n^* (ou, n_{max}) depende fortemente de q e de N_B quando $\sigma \neq 0$, como indicado nas Figs. 3.1 e 3.6, a banda de modos instáveis Δn_c diminui com o aumento de N_B , mas, para um dado N_B , é pouquíssimo influenciado por mudanças no espaçamento inicial entre as placas, isto é, por mudanças em q . Este fato pode ser facilmente verificado na Fig. 3.9, que mostra como Δn_c varia com N_B , quando $q = 100$ (curva cinza escura), $q = 50$ (curva cinza clara) e quando $\delta = 0$ (curva preta). Encontramos um comportamento diferente quando a tensão superficial é zero mas $\delta = 1$ (veja Fig. 3.10). Neste caso, a banda de modos instáveis é muito mais sensível a variações em q . Além disso, Δn_c varia mais fortemente com N_B para maiores valores de q . Mais uma vez, no limite em que a tensão superficial é nula, temos acesso a mais uma importante quantidade física, o valor crítico do número magnético que estabiliza todos os modos

$$N_{Bc} = \frac{R^4 \dot{b}}{2b^3} \left[1 - \sqrt{\frac{\delta}{6} \frac{b}{qR}} \right]^2. \quad (3.4)$$

Da Eq. (3.4), vemos que, quando os estresses viscosos são considerados ($\delta = 1$) e q é pequeno,

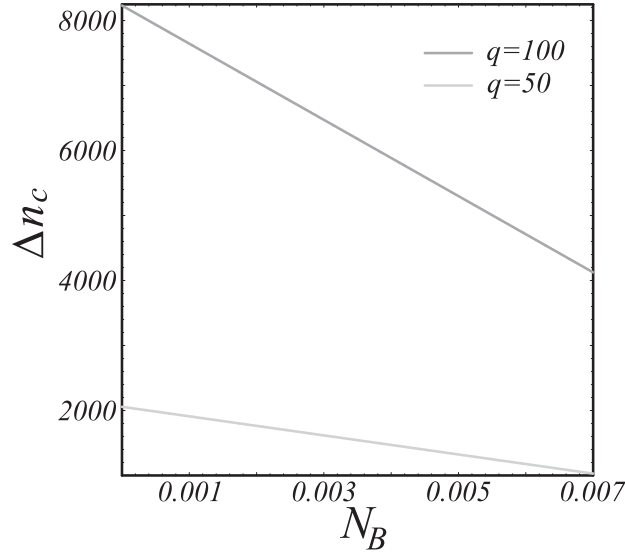


Figura 3.10 Largura da banda de modos instáveis Δn_c como função do número magnético N_B quando $\sigma = 0$: $\delta = 1$, $q = 100$ (cinza escuro) e $q = 50$ (cinza claro). Os demais parâmetros são os mesmos da Fig. 3.5. Não há curva preta ($\delta = 0$) uma vez que neste caso $\Delta n_c \rightarrow \infty$.

um menor N_{B_c} é necessário para que todos os modos sejam estabilizados. Note também que N_{B_c} é uma função decrescente do tempo. Isso sugere que, com o passar do tempo, mesmo quando $\sigma = 0$, um processo de recircularização da gota seria favorecido.

3.2 Dinâmica fracamente não-linear

Na seção anterior, vimos que a análise linear pode ser útil para determinar aspectos importantes relacionados à estabilidade da interface fluido-fluido, principalmente aqueles relacionados ao número típico de dedos formados e ao campo magnético crítico necessário para estabilizar todos os modos. Nesta seção, nossa atenção estará voltada para a parte fracamente não-linear, estágios intermediários da evolução dos padrões. Agora, não estamos interessados apenas em questões de estabilidade da interface, mas também em acessar importantes características morfológicas dos padrões formados na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável.

Como discutido na seção 1.3 do capítulo 1, o aspecto morfológico mais notável da formação de padrões em fluxos na célula de Hele-Shaw de espaçamento variável é a forte competição existente entre os dedos que entram na estrutura, enquanto que a competição entre os dedos do

fluido mais viscoso (que saem) é consideravelmente menos intensa. Nosso objetivo principal é obter informações analíticas a respeito deste processo de competição nas situações em que a tensão superficial é nula e é diferente de zero, ao considerar a ação conjunta dos estresses viscosos normais e do campo magnético. Também analisaremos os efeitos puramente não-lineares introduzidos pela tração magnética normal $[\mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2]/2$ [segundo termo do lado direito da Eq. (2.8)].

O modelo perturbativo de modos acoplados de segunda ordem que utilizamos descreve com boa precisão os mecanismos de competição de fluxos radiais em células de Hele-Shaw com injeção [9] e também em fluxos na célula de Hele-Shaw girante [43]. Resultados numéricos recentes [56] confirmam essas previsões analíticas da Ref. [43] fornecendo assim uma boa evidência do poder da descrição fracamente não-linear. Dentro de nossa abordagem fracamente não-linear, a competição entre os dedos está relacionada à influência do modo fundamental n , assumindo que n é par, no crescimento de seu modo sub-harmônico $n/2$ [9, 43]. É precisamente o acoplamento entre esses dois modos que descreve a variabilidade do comprimento relativo dos dedos, fazendo assim uma descrição precisa do fenômeno da competição. Para simplificar nossa discussão, é conveniente reescrever a perturbação total ζ em termos dos modos cosseno $[a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}]$ e seno $[b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})]$. Sem perda de generalidade, podemos escolher a fase do modo fundamental de maneira que $a_n > 0$ e $b_n = 0$. Considerando apenas esses dois modos e usando a Eq. (2.11) obtemos as equações de movimento dos modos sub-harmônicos

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n) a_n\} a_{n/2} \quad (3.5)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n) a_n\} b_{n/2}, \quad (3.6)$$

onde a função

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2) G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \quad (3.7)$$

regula o comportamento competitivo.

Na Fig. 3.11, plotamos $C(n)$ como função do tempo para dois valores de n , quando $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$. As curvas contínuas (tracejadas) descrevem o comportamento de $C(n)$ na ausência (presença) de campo magnético. Quando o campo é diferente de zero $N_B = 2.0 \times 10^{-4}$ e $\chi = 5$. As curvas pretas (cinza) consideram que o parâmetro dos estresses normais $\delta = 0$ ($\delta = 1$). As curvas cinza claro (escuro) referem-se a $q = 50$ ($q = 100$). É evidente da Fig. 3.11 que $C(n) \leq 0$. Das Eqs. (3.5) e (3.6) vemos que $C(n)$ negativo aumenta o crescimento do modo sub-harmônico seno $b_{n/2}$, enquanto que o crescimento do modo sub-harmônico cosseno $a_{n/2}$ é desfavorecido. O resultado é uma maior variabilidade no comprimento dos dedos do fluido

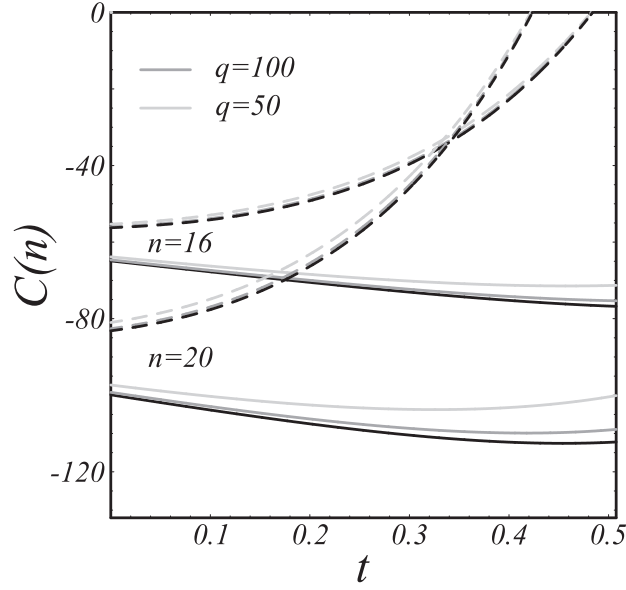


Figura 3.11 $C(n)$ como função do tempo para os modos $n = 16$ e $n = 20$ para o caso em que a tensão superficial é diferente de zero ($\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$). As curvas pretas (cinza) referem-se a $\delta = 0$ ($\delta = 1$). O número magnético é $N_B = 0$ ($N_B = 2.0 \times 10^{-4}$) para as curvas contínuas (tracejadas), $q = 50$ (curvas cinza claro) e $q = 100$ (curvas cinza escuro). A susceptibilidade magnética é $\chi = 5$. Note que a razão de aspecto inicial q só está presente quando $\delta = 1$.

externo que entram no ferrofluido. É este efeito da diferença de comprimento entre os dedos que entram que descreve a competição desses dedos. Isto está de acordo com o que é observado tanto em experimentos [32, 33, 34, 38, 39] quanto em simulações computacionais [21] do problema do fluxo com levantamento considerando fluidos não-magnéticos.

É de se perguntar se, em estágios intermediários da evolução dos padrões, os estresses viscosos tem um papel importante na dinâmica de competição entre os dedos. Para investigar este fato, analisemos primeiro a situação em que não há campo magnético aplicado (curvas contínuas na Fig. 3.11). Se $N_B = 0$ vemos que as curvas que representam $C(n)$ se comportam do modo diferente caso os estresses viscosos sejam levados em consideração. Por exemplo, para um dado n , vemos que uma curva relacionada ao menor q está acima das outras duas. Isso indica que a competição é menos intensa para menores valores da razão de aspecto inicial q . Então, quanto maior o confinamento espacial dos fluidos em $t = 0$, maior a competição em instantes posteriores. Estes resultados teóricos estão de acordo os com experimentos em fluxos com levantamento de fluidos newtonianos imiscíveis e não-magnéticos das Refs. [32, 39, 40].

Nesses experimentos, poucos (muitos) dedos e pouca (muita) competição aparecem para uma grande (pequena) separação inicial entre as placas. A dependência da dinâmica de competição entre os dedos viscosos em q é outra importante consequência da inclusão dos estresses normais na Eq. (2.8) e no problema da célula de Hele-Shaw com levantamento.

Apesar da importante relação da competição com q como discutido nos últimos parágrafos, note que, a ação conjunta dos estresses normais com a tensão superficial não é suficiente para fazer com que $C(n) \rightarrow 0$ dentro da escala de tempo na qual nossa teoria é quantitativamente precisa. Um comportamento totalmente oposto pode ser observado quando consideramos que o campo magnético é não nulo (curvas tracejadas na Fig. 3.11): $C(n)$ é negativo e aumenta com o avanço temporal. Eventualmente, $C(n)$ se torna zero, isto indica que não há mais competição, e isto é devido a ação do campo magnético. Apesar dos estresses viscosos contribuírem com a diminuição da intensidade da competição dos dedos que entram quando $N_B \neq 0$, eles não têm grande influência na determinação do tempo para o qual esta competição será nula. Isto pode se visto pelo fato de que, para um dado n , todas as curvas tracejadas tendem a coincidir quando $C(n) \rightarrow 0$. Outro fato digno de nota é que a competição para o modo $n = 20$ vai a zero antes do modo $n = 16$. Isto faz com que as curvas tracejadas se cruzem antes de alcançarem a reta $C(n) = 0$.

Na Fig. 3.12, mostramos $C(n)$ como função de t , mas agora assumimos que $\sigma = 0$. Todos os demais parâmetros são os mesmos usados na Fig. 3.11. Ao examinar a Fig. 3.12 vemos que quando $N_B = 0$ (curvas contínuas), $C(n)$ é uma função sempre decrescente do tempo. Ao se comparar as curvas contínuas das Fig. 3.11 e Fig. 3.12, vê-se claramente que é a ausência de tensão superficial o fator responsável por este comportamento. Isto favorece uma competição cada vez maior entre os dedos que entram. No entanto, é importante notar que, apesar da tensão superficial estar completamente ausente na Fig. 3.12, os estresses normais ainda atuam tentando diminuir a intensidade da competição (quanto menor q mais altas estão as curvas contínuas). Entretanto, a redução na intensidade da competição proporcionada pelos estresses viscosos não são suficientes para transformar as curvas contínuas de funções decrescentes no tempo (que favorecem uma competição cada vez maior entre os dedos) para funções crescentes no tempo (que diminuem efetivamente a intensidade da competição fazendo com que as curvas interceptem a reta $C(n) = 0$, mostrando assim que a competição foi suprimida).

Estes resultados estão de acordo com as simulações numéricas da Ref. [21] para $\sigma = 0$ e mostradas na Fig. 1.16. Nela, vemos que à medida que a interface se propaga, os dedos que entram competem e a interface começa a se afinar. A partir deste ponto, a formação de

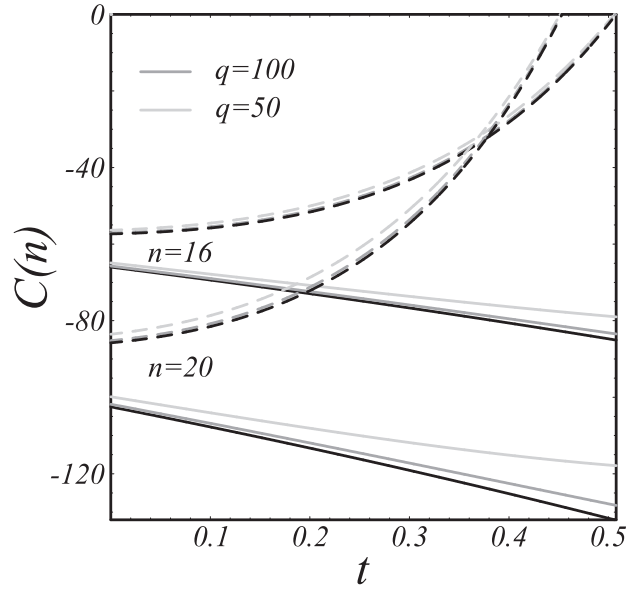


Figura 3.12 $C(n)$ como função do tempo para os modos $n = 16$ e $n = 20$ quando a tensão superficial é zero. As curvas pretas (cinza) referem-se a $\delta = 0$ ($\delta = 1$). O número magnético é $N_B = 0$ ($N_B = 2.0 \times 10^{-4}$) para as curvas contínuas (tracejadas), $q = 50$ (curvas cinza claro) e $q = 100$ (curvas cinza escuro). A susceptibilidade magnética $\chi = 5$. Note que a razão de aspecto inicial q só está presente quando $\delta = 1$.

singularidades é esperada. A colisão entre duas frentes da interface vindas de direções opostas resultaria na singularidade topológica produzindo a quebra da gota.

Semelhantemente ao que ocorre no caso ilustrado na Fig. 3.11 em que a tensão superficial é diferente de zero, a situação é completamente modificada quando um campo magnético externo é aplicado. Ao observarmos as curvas tracejadas da Fig. 3.12 vemos que, devido a ação do campo magnético, essas curvas tornam-se funções crescentes do tempo, fazendo com que a competição vá a zero num dado instante, indicando que a competição se anula, apesar do fato de $\sigma = 0$. Como esperado, ao se comparar as Figs. 3.11 e 3.12 concluímos que o tempo necessário para conter a competição é menor quando a tensão superficial é não-nula. Isto é verificado ao se notar que os pontos em que $C(n) = 0$ nas curvas tracejadas são transladados um pouco para a esquerda na Fig. 3.11.

É necessário que algumas palavras sejam ditas para corroborar nossos resultados lineares e fracamente não-lineares acerca de estágios muito avançados da evolução dos padrões, como por exemplo, na formação de singularidades. Foi mostrado [9, 58, 59] que previsões fraca-

mente não-lineares do problema de Saffman-Taylor em segunda ordem apresentam uma boa concordância com soluções exatas em ambos os casos de tensão superficial nula e diferente de zero. Além disso, também foi mostrado que esta concordância também é obtida mesmo quando a evolução fracamente não-linear é descrita por acoplamentos de poucos modos de Fourier [9, 58, 59]. A inclusão de mais modos certamente resultaria numa descrição mais precisa da forma da interface, mas os mecanismos de crescimento básicos dos dedos viscosos (bifurcação e competição) podem ser bem reproduzidos usando apenas o acoplamento dos modos de Fourier relevantes. No caso dos mecanismos de competição, como antecipamos, os modos relevantes são n e $n/2$.

Contudo, podemos afirmar que nossa análise de segunda ordem sugere que o campo magnético azimuthal atua reduzindo a competição entre os dedos que entram prevenindo o surgimento de singularidades de interface. Essas observações são consistentes com nossos resultados de primeira ordem (Fig. 3.4) com relação ao papel estabilizante do campo magnético aplicado. Agora, portanto, além de disciplinar as perturbações de interface, o campo magnético parece ser capaz de inibir a formação de singularidades.

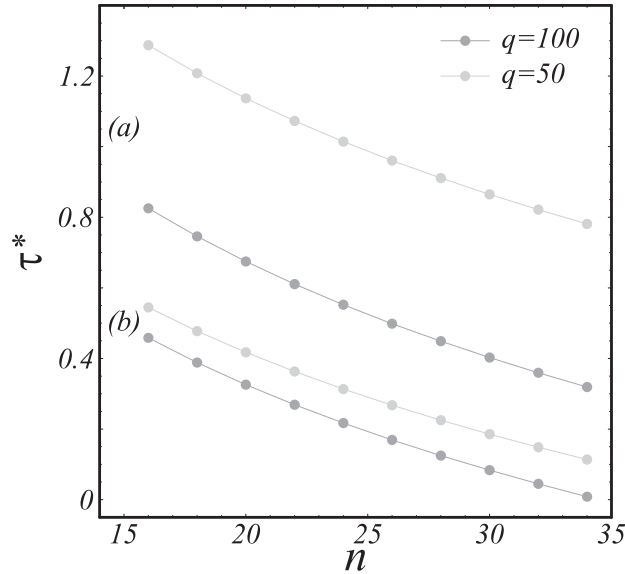


Figura 3.13 Tempo adimensional τ^* para o qual a intensidade da competição é máxima (na ausência de campo magnético) como função do modo n , quando (a) $\sigma = 0$ (veja Fig. 3.12), (b) $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$ (veja Fig 3.11). Consideramos que $q = 100$ (cinza escuro) e $q = 50$ (cinza claro).

Para analisar em mais detalhes outros aspectos relevantes da dinâmica de competição entre os dedos viscosos na célula de Hele-Shaw com levantamento, concluímos esta seção analisando

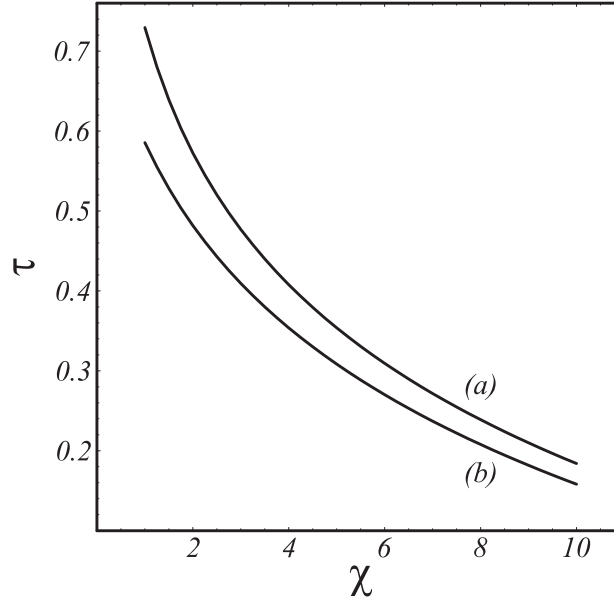


Figura 3.14 Tempo adimensional τ para o qual $C(n) = 0$ como função da susceptibilidade magnética χ ($1 \leq \chi \leq 10$), quando (a) $\sigma = 0$, (b) $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$, para $n = 30$, $N_B = 2.0 \times 10^{-4}$ e $\delta = 0$. Os demais parâmetros são os mesmos das Figs. 3.11 e 3.12.

as Figs. 3.13 e 3.14. A Fig. 3.13 apresenta a influência dos estresses viscosos na competição entre os dedos tanto na ausência (a) quanto na presença (b) de tensão superficial. Para os dois valores de tensão superficial, consideramos dois valores distintos da razão de aspecto inicial: $q = 100$ (cinza escuro) e $q = 50$ (cinza claro). Focalizamos no caso em que $N_B = 0$ e plotamos o tempo adimensional τ^* para o qual a função competição $C(n)$ assume seu valor máximo (mínimo das curvas cinza contínuas nas Figs. 3.11 e 3.12) como função do modo n . De fato, verificamos que a função competição é significativamente afetada pela ação dos estresses viscosos. Quando a tensão superficial é zero [Fig. 3.13(a)], para um dado n , τ^* é menor para um maior confinamento inicial (maior q). Fica evidente, então, que esse sistema com levantamento é extremamente dependente das condições iniciais, no sentido que mudanças em q levam a importantes variações na dinâmica da competição entre os dedos viscosos. Vemos também que τ^* é uma função decrescente do modo n , indicando que a competição é mais forte em estágios relativamente iniciais do processo de levantamento, quando modos n maiores são ativos, isto é, instáveis. Isso concorda com o que discutimos anteriormente, na análise linear, uma vez que no início do processo evolutivo da interface temos mais modos ativos (instáveis) participando da dinâmica e esses modos vão deixando de estar presentes, tornando-se estáveis, com o passar

do tempo. Em estágios lineares, quem nos confirma essa informação é o fato de que tanto n_{max} quanto N_{Bc} serem funções decrescentes do tempo. Estas observações acerca da competição também são válidas para o caso em que a tensão superficial é diferente de zero [Fig. 3.13(b)], mas como neste caso as curvas para diferentes q são mais próximas umas das outras, fica óbvio que a existência de tensão superficial (que estabiliza modos n grande) diminui a sensibilidade do sistema com relação a mudanças em q .

Seguimos examinando agora a Fig. 3.14. Aqui nós queremos investigar a influência da contribuição puramente não linear que surge da tração magnética normal [segundo termo do lado direito da Eq. (2.8)], que introduziu uma dependência explícita do termo de acoplamento $F(n, n')$ na susceptibilidade magnética χ [último termo da Eq. (2.15)]. A figura 3.14 mostra o tempo τ para o qual a competição é nula [zeros de $C(n)$ quando $N_B \neq 0$] como função da susceptibilidade magnética χ , considerando tensão superficial (a) zero e (b) diferente de zero ($\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$). Sem perda de generalidade, assumimos $n = 30$ e $N_B = 2.0 \times 10^{-4}$ e usamos os mesmos parâmetros físicos empregados nas Figs. 3.11 and 3.12. Como a influência dos estresses normais viscosos é desprezível na determinação de τ , a Fig. 3.14 foi feita considerando $\delta = 0$.

A figura 3.14 ilustra claramente que, independente do valor de σ , o tempo τ necessário para suprimir completamente a competição depende fortemente do valor da susceptibilidade magnética, e este tempo é cada vez menor à medida que aumentamos o valor de χ . Num primeiro momento, esta dependência pode parecer um pouco óbvia, no entanto, note que o valor do número magnético N_B usado ao longo desta seção fracamente não-linear 3.2 é uma ordem de grandeza menor que os valores típicos de N_B usados durante a análise linear da seção 3.1. Isto é possível devido a inclusão da tração magnética normal na Eq. (2.8). Agora é possível usar um valor consideravelmente menor de N_B e ainda assim suprimir completamente a competição escolhendo para tanto o valor adequado da susceptibilidade magnética. Em outras palavras, mesmo se N_B for mantido constante, é possível determinar o tempo para o qual a competição será nula ao selecionar apropriadamente o valor de χ . Podemos obter mais informações acerca disto analisando a expressão do número magnético que é necessário para suprimir a competição completamente (por simplicidade, assumimos $\sigma = 0$ e $\delta = 0$)

$$\bar{N}_B = \left(\frac{4n+2}{\chi n^2 + 4n + 10} \right) N_{Bc}, \quad (3.8)$$

obtido da Eq. (3.7) fazendo $C(n) = 0$. Na Eq. (3.8) N_{Bc} denota no número magnético crítico necessário para estabilizar todos os modos em etapas lineares [veja Eq. (3.4)], enquanto que $\bar{N}_B$ é um conceito legitimamente não-linear. A partir da Eq. (3.8) é fácil notar que o número

magnético $\bar{N}_B$ que inibe a competição completamente pode ser significativamente menor que o número magnético crítico (linear) N_{B_c} , principalmente para grandes valores de χ e n . Esta dependência de $\bar{N}_B$ em χ é uma consequência direta e importante da introdução do termo de tração magnética normal na condição de contorno generalizada de Young-Laplace [Eq. (2.8)]. Esta contribuição puramente não-linear proporciona um apoio adicional à idéia de controlar convenientemente instabilidades e singularidades de interface em células de Hele-Shaw com levantamento por meios magnéticos [27, 37].

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, estudamos vários aspectos relacionados à formação de padrões em células de Hele-Shaw com levantamento tanto em estágios puramente lineares quanto em estágios não-lineares (intermediários) da evolução da interface. Nossa abordagem analítica incorpora a ação combinada de três parâmetros importantes para o problema, os estresses viscosos (que aparecem sempre quando $\delta = 1$), o campo magnético aplicado (N_B) e a tensão superficial (σ). Em particular, exploramos o fato da inclusão dos estresses viscosos no problema levar o sistema a depender de uma de suas condições iniciais, o espaçamento inicial entre as placas, ou a razão de aspecto inicial q . Esta dependência surge tanto em estágios lineares quanto em etapas não-lineares da evolução. Em níveis puramente não-lineares, um quarto importante parâmetro (a susceptibilidade magnética χ) surge no problema como resultado de estresses magnéticos - a tração magnética normal - na interface.

Em estágios lineares, se $\sigma = 0$, verificamos que os estresses viscosos regularizam o sistema, atuando como uma tensão superficial efetiva. Neste caso, a razão de aspecto inicial q influencia tanto o número típico de dedos formados n_{max} quanto a banda de modos instáveis Δn_c . Δn_c varia mais significativamente com N_B para maiores valores de q , e n_{max} não depende de N_B , apenas de q . Se $\sigma \neq 0$, verificamos que o número típico de dedos continua sendo influenciado por q , no entanto Δn_c não varia muito com mudanças nesse parâmetro. Quando os estresses viscosos radiais são considerados, encontramos que o número típico de dedos encontrado é consideravelmente menor que o predito pela análise de estabilidade tradicional que não considerava o efeito desses estresses. Este resultado teórico é apoiado por resultados experimentais de fluxos em Hele-Shaw com levantamento considerando fluidos não-magnéticos [32, 40]. Isso indica que a inclusão dos estresses viscosos acrescenta um elemento importante para esclarecer discrepâncias recentes entre outros modelos teóricos (que desprezam os estresses viscosos) e experimentos acerca do número típico de dedos encontrado [39, 40].

Em estágios fracamente não-lineares, focalizamos na influência de δ e N_B na competição entre os dedos viscosos. Encontramos que os estresses viscosos afetam significativamente a dinâmica de competição levando a uma interessante relação entre a razão de aspecto inicial

e a intensidade da competição. Se o sistema é fortemente confinado em $t = 0$ (grande q), espera-se que a competição em instantes posteriores seja também maior. Fica mostrado, portanto, que a inclusão dos estresses viscosos é de considerável importância para uma descrição precisa do problema de levantamento. Identificamos também os papéis específicos de N_B e de δ : enquanto os estresses viscosos atuam reduzindo a intensidade da competição, o campo magnético pode suprimi-lo completamente. O efeito intrinsecamente não-linear introduzido pela tração magnética normal na condição de contorno generalizada de pressão [Eq. (2.8)] também foi examinado. Ele revelou o papel fundamental da susceptibilidade magnética χ no controle dos mecanismos de competição. Verificamos que, ao se escolher apropriadamente um ferrofluido, isto é, ao selecionar χ , é possível controlar convenientemente o desenvolvimento dos dedos viscosos usando números magnéticos (intensidades de campo) bem menores que aqueles tipicamente preditos pela teoria linear. Neste sentido, a ação conjunta dos estresses viscosos normais, da tração magnética normal e do campo magnético, conspiram para inibir a formação de instabilidades de interface quando $\sigma \neq 0$, e para prevenir a formação de singularidades de interface quando $\sigma = 0$.

O fato de os estresses normais (viscosos e magnéticos) junto ao campo magnético azimuthal atuarem reduzindo a formação dos dedos em fluxos com levantamento podem ter implicações importantes no cálculo da adesividade de materiais adesivos líquidos. Mostramos recentemente [Phys. Rev. E **70**, 036311 (2004), Apêndice C] que, em condições em que a separação das placas é realizada com velocidade constante, e desprezando os efeitos das instabilidades da interface, o campo magnético azimuthal atua reduzindo a adesão entre as duas placas. Uma extensão natural deste trabalho seria investigar o papel dos estresses normais, do campo magnético e das instabilidades de dedos viscosos em propriedades adesivas de fluidos confinados em duas circunstâncias: em que a separação é feita puxando a placa de cima com uma força constante [24] e quando a separação entre as superfícies é feita a uma taxa constante [31, 32, 33, 34, 38, 39].

Pretendemos também analisar o fluxo de ferrofluidos confinados em células de Hele-Shaw de espaçamento constante considerando a influência de um campo magnético externo que atua desestabilizando a interface inicialmente circular da gota. Esta nova configuração de campo magnético tem simetria radial e sua intensidade cresce linearmente com o raio. Pode ser obtido ao colocarmos os pólos norte de dois ímãs longos próximos um do outro. E tem ainda a grande vantagem de ser de fácil tratamento analítico se comparado a outros campos desestabilizantes, como por exemplo os campos perpendiculares.

Em termos de estudos teóricos, o acesso aos detalhes morfológicos dos padrões de interface

é geralmente feito através de simulações numéricas, ou métodos perturbativos. Por outro lado, e surpreendentemente, sabe-se que soluções exatas da dinâmica completamente não-linear (e não local) em células de Hele-Shaw podem ser representadas por equações locais relativamente simples, mesmo para casos não estacionários. A solução deste aparente paradoxo e a possibilidade de calcularmos tais soluções exatas são proporcionados pelo método da “*vortex-sheet*” [60], que leva em consideração a descontinuidade da componente tangencial da velocidade na interface que separa os dois fluidos. Um dos nossos principais objetivos será usar tal método para tentar revelar simetrias “escondidas” nos padrões que não são acessíveis por análises perturbativas ou puramente numéricas. As soluções exata de um problema, apesar de não serem exatamente idênticas aos padrões obtido por complicadas simulações numéricas, apresentam suas características morfológicas básicas, tornando-se assim muito mais que simples curiosidades matemáticas, sendo potencialmente importantes no entendimento completo e estudo da validade das estruturas (padrões) obtidas por outros métodos teóricos.

É justamente esta possibilidade que planejamos explorar após a conclusão desta dissertação, analisando ferrofluidos submetidos a um campo magnético radial. Estaremos interessados em obter as soluções exatas que descrevem a forma dos padrões de interface gerados em estágios completamente não-lineares da dinâmica do sistema. Afim de encontrarmos tais soluções exatas, usaremos o método da *vortex-sheet*, dentro do qual as soluções exatas correspondem a impor uma condição de vorticidade nula na interface que separa os fluidos [61]. Em termos práticos, tal condição corresponde à forma da interface que resulta do equilíbrio perfeito entre as diversas forças atuantes no problema. No caso do campo magnético radial, teremos o equilíbrio entre as forças magnéticas e as de capilaridade (devida a tensão superficial). Em geral, obtém-se uma equação diferencial ordinária (de caráter local) que pode ser resolvida analiticamente, ou por métodos numéricos. Além da busca das soluções exatas citadas acima, pretendemos utilizar os métodos analíticos de estabilidade linear e análise fracamente não-linear que foram tão úteis nesta análise de sistemas de fluidos magnéticos confinados sob a ação de campo magnético azimuthal [27, 29, 30] para um melhor entendimento e descrição das propriedades dos padrões gerados pelo campo radial.

Dedução da equação de movimento da interface

Para deduzir a equação diferencial de modos acoplados que descreve o movimento da interface, reescrevemos a equação de Darcy em termos do potencial de velocidade, e subtraímos $\eta_i \phi_i$, onde $i = 1$ ($i = 2$) para o fluido interno (externo), avaliados na interface, para obter

$$A \left(\frac{\phi_2|_{\mathcal{R}} + \phi_1|_{\mathcal{R}}}{2} \right) - \left(\frac{\phi_1|_{\mathcal{R}} - \phi_2|_{\mathcal{R}}}{2} \right) = -\frac{b^2}{12(\eta_1 + \eta_2)} \left[(p_1 - p_2)|_{\mathcal{R}} - \frac{\mu_0 \chi I^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2}|_{\mathcal{R}} \right], \quad (\text{A.1})$$

onde

$$A = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}. \quad (\text{A.2})$$

Ao longo da dissertação, consideramos que o fluido externo é o ar, e portanto, assumimos $\eta_2 = 0$, de modo que $A = -1$. No entanto, para a generalidade da dedução, manteremos η_2 presente.

Como mostrado no Cap. 2, a diferença de pressão entre os dois fluidos é dada por

$$p_1 - p_2 - 2\delta \left(\eta_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial r^2} - \eta_2 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r^2} \right) = \gamma \kappa - \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2. \quad (\text{A.3})$$

Devido a geometria radial, temos que a expressão da curvatura da interface no plano da célula de Hele-Shaw é dada por

$$\kappa = \frac{\left[r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 - r \frac{\partial^2 r}{\partial \theta^2} \right]}{\left[r^2 + \frac{\partial r}{\partial \theta}^2 \right]^{3/2}}. \quad (\text{A.4})$$

A curvatura na direção perpendicular às placas é praticamente constante (seu gradiente sendo próximo de zero), de tal modo ela não influencia o movimento em nosso problema.

Desta forma, mantendo apenas termos de segunda ordem na amplitude perturbação ζ , reescrevemos a curvatura da interface como

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2} \left(\zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{R^3} \left[\zeta^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right)^2 + 2\zeta \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Como em nossa descrição fracamente não-linear estamos interessados em contribuições de segunda ordem da amplitude de perturbação, todas as quantidades na Eq. A.1 devem ser avaliadas

na interface perturbada $\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$ e não simplesmente na posição da interface circular $R(t)$ como é comumente feito ao se linearizar o problema.

Da solução da equação de Poisson para o potencial de velocidade encontramos

$$\phi_1 = a_1 + \frac{\dot{b}}{2b} r^2 + \sum_{n \neq 0} \phi_{1n}(t) \left(\frac{r}{R} \right)^n e^{in\theta} \quad (\text{A.6})$$

e

$$\phi_2 = a_2 + \frac{\dot{b}}{2b} r^2 + \sum_{n \neq 0} \phi_{2n}(t) \left(\frac{R}{r} \right)^n e^{in\theta}. \quad (\text{A.7})$$

onde a_i , $i = 1, 2$ independe de r e θ . Para calcular a equação diferencial de modos acoplados para o sistema, substituímos as expansões (A.6) e (A.7) na equação de movimento (A.1), mantemos os termos até a segunda ordem da perturbação e calculamos a transformada de Fourier da equação. No entanto, para que tenhamos a equação final para as amplitudes de perturbação ζ_n , é necessário expressar o potencial de velocidade ϕ_i em termos das amplitudes de perturbação ζ . Isso é possível através da condição de contorno cinemática:

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{r=\mathcal{R}} - \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=\mathcal{R}}. \quad (\text{A.8})$$

Expanda esta condição de contorno até segunda ordem em ζ e depois calcule a transformada de Fourier. A partir daí, será possível resolver a equação para ϕ_{in} e, conseqüentemente, obter

$$\begin{aligned} \phi_{1n}(t) &= -\frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n - \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} \frac{R}{|n|} \zeta_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[\text{sgn}(nn') - \frac{1}{|n|} \right] \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + \frac{\dot{b}}{2b} \sum_{n' \neq 0} \left[\text{sgn}(n) - \frac{1}{|n|} \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

e

$$\begin{aligned} \phi_{2n}(t) &= +\frac{R}{|n|} \dot{\zeta}_n + \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} \frac{R}{|n|} \zeta_n \\ &+ \sum_{n' \neq 0} \left[\text{sgn}(nn') + \frac{1}{|n|} \right] \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'} + \frac{\dot{b}}{2b} \sum_{n' \neq 0} \left[\text{sgn}(n) + \frac{1}{|n|} \right] \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Podemos usar as relações (A.9) e (A.10) para substituir os potenciais de velocidade ϕ_i pela perturbação ζ e sua derivada temporal $\dot{\zeta}$ na equação de movimento (A.1). Com isso, mantendo apenas os termos quadráticos na amplitude de perturbação, chegamos, finalmente à equação diferencial de modos acoplados para as amplitudes de perturbação ζ_n , Eqs. [(2.11)-(2.16)].

APÊNDICE B

**Stretching of a confined ferrofluid: Influence of
viscous stresses and magnetic field [Phys. Rev. E
73, 036309 (2006)]**

Stretching of a confined ferrofluid: Influence of viscous stresses and magnetic field

Rafael M. Oliveira

Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901 Brazil

José A. Miranda*

Department of Physics, University of Florida, P. O. Box 118440, Gainesville, Florida 32611-8440, USA

(Received 19 July 2005; revised manuscript received 6 February 2006; published 21 March 2006)

An analytical investigation is presented for the stretch flow of a viscous Newtonian ferrofluid highly confined between parallel plates. We focus on the development of interfacial instabilities when the upper plate is lifted at a described rate, under the action of an applied magnetic field. We derive the mode-coupling differential equation for the interface perturbation amplitudes and study both linear and nonlinear flow regimes. In contrast to the great majority of works in stretch flow we take into account stresses originated from velocity gradients normal to the ferrofluid interface. The impact of such normal stresses is accounted for through a modified Young-Laplace pressure jump interfacial boundary condition, which also includes the contribution from magnetic normal traction. We study how the stability properties of the interface and the shape of the emerging patterns respond to the combined action of normal stresses and magnetic field, both in the presence and absence of surface tension. We show that the inclusion of normal viscous stresses introduces a pertinent dependence on the initial aspect ratio, indicating that the number of fingers formed would be overestimated if such stresses are not taken into account. At early linear stages it is found that such stresses regularize the system, acting as an effective interfacial tension. At weakly nonlinear stages we verified that normal stresses reduce finger competition, which can be completely suppressed with the assistance of an azimuthal magnetic field. We have also found that the magnetic normal traction introduces a purely nonlinear contribution to the problem, revealing the key role played by the magnetic susceptibility in the control of finger competition.

DOI: [10.1103/PhysRevE.73.036309](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.73.036309)

PACS number(s): 47.54.-r, 47.20.Ma, 75.50.Mm, 68.35.Np

I. INTRODUCTION

Among nonequilibrium growth processes, the viscous fingering in Hele-Shaw cell has attracted much attention since its discovery by Saffman and Taylor [1]. The Saffman-Taylor instability occurs when a less viscous fluid pushes a more viscous one in pressure driven flow, resulting in the complex evolution of the fluid-fluid interface, and producing a wide range of interfacial patterns [2]. Stable smooth fingers are produced if the less viscous fluid is pumped from one side of a long rectangular channel [1,2]. Highly branched, fractal-like fronts are obtained if injection is performed through a hole at the center of the upper plate [2–4]. This famous interfacial instability belongs to the well-known family of Laplacian growth phenomena which includes diffusion limited aggregation, dendritic growth, and dielectric breakdown [5].

An alternative way for producing viscous fingering patterns is to stretch a very thin layer of a viscous fluid, sandwiched between two parallel plates, by lifting the upper plate while the lower one remains at rest. As the plates separate the outer less viscous fluid enters the system, and the more viscous inner fluid moves inward to conserve volume. As a result, the fluid-fluid interface deforms, forming visually striking patterns. In such a lifting version of the classic

Saffman-Taylor problem the upper plate can be lifted from one end [6–9], or kept always parallel to the lower plate [10–17]. This last situation is somewhat simpler, in the sense that it induces a more uniform stretching where the plate spacing is just time dependent.

In recent years, the quest for other interesting pattern morphologies and even richer phenomenology resulted in a number of experimental and theoretical investigations of the uniform stretch flow in lifting Hele-Shaw cells [10–27]. If the fluids are immiscible and Newtonian [10,19–21,25–27] it is found that the initially circular droplet of the more viscous fluid undergoes a destabilization process via the penetration of multiple fingers of the outer, less viscous fluid. As time progresses these inward fingers become progressively thicker, while the left over branches of the more viscous fluid tend to form narrower fingers. At this stage, the interface behavior is markedly characterized by the competition among the fingers of the invading less viscous fluid, which advance towards the center of the droplet. At the same time, it is also observed that the outermost limit of the interface ceases to shrink, indicating that the competition among the narrower fingering structures of the more viscous fluid is suppressed. Following this period of intense instability and ramification, a second stage arises in which the number of fingered structures diminishes. In a final stage, near to the complete debonding of the plates, the droplet tends to shrink and recircularize. If the fluids are immiscible and non-Newtonian [11–15,19,22] various other morphological features may arise including the formation of highly ramified tree-like structures. Another interesting modifications assume

*On leave from Departamento de Física, LFTC, UFPE, Brazil.
Email address: jme@df.ufpe.br

that the system involves miscible [17] or magnetic fluids [16,24].

When the fluids are Newtonian and immiscible numerical simulations of the lifting problem in time-dependent gap [10] show that increasingly smaller values of surface tension lead to stronger interface ramification, resulting in a delayed recircularization process. It has been also verified that when surface tension is absent, the penetrating fingers compete strongly, producing the incipient breakup of the contracting droplet, and ultimately leading to the formation of a topological singularity. Some important issues related to such singularity formation can be conveniently investigated by considering that the two fluids are miscible (zero interfacial tension situation). Highly accurate numerical simulations for miscible displacement in a time-dependent gap Hele-Shaw cell [17] show that the introduction of stresses arising as a result of concentration gradients at the diffusing interface may lead to dynamic surface tension-like effects. Such stresses (known as Korteweg stresses [28]) significantly affect the behavior of the mixing interface, introducing important stabilizing effects. In fact, it has been shown that singularity formation can be prevented by the action of stronger interfacial stresses.

In addition of being an intrinsically important academic problem, the lifting Hele-Shaw cell system is intimately related with the practical problem of adhesion [13,18–26]. A common parameter used for evaluating the effectiveness of an adhesive material is the time for which two plates separated by an adhesive can withstand the advance of viscous fingers, under constant load conditions [13]. Another possibility is to compute the force or energy required to pull one of the plates from the other, with constant drive speed [18–26]. There are recent evidence [13,20,25,26] that in both cases (constant pulling force or constant lifting velocity) the presence of the fingering instability may influence the adhesion between separating plates. The work by Thamida *et al.* [13] indicates that the adhesiveness of a confined fluid is strongly reduced (decrease of 50% relative to the case with no fingering) under constant load conditions, where the fingering instability tends to accelerate immediately to failure. In constant drive speed experiments [20,25,26] this reduction in adhesion is comparatively less intense, but still present notably for small initial plate separations. Other recent experimental and theoretical work at constant separation velocity [26,27] have found that the number of fingers predicted by ordinary linear analysis (based on Darcy’s law and standard boundary conditions) is larger than the number obtained in the actual experiment [26,27]. The reason for this discrepancy is still an open and interesting question.

Based on our previous discussion, it is clear that it is very important to understand pattern formation in lifting Hele-Shaw cells, and study different ways of controlling emerging interfacial perturbations when the confined fluid is stretched. In order to examine possible ways of implementing effective controlling mechanisms in stretch flow, we consider the influence of a key factor that so far has been neglected: the effect of stresses acting normal to the contracting fluid-fluid interface. In fact, there is little consideration within the literature for the effect of hydrodynamic stresses in Hele-Shaw-type problems with immiscible fluids. Only very re-

cently it has been shown [29,30], in the context of a constant gap-width rotating Hele-Shaw cell [31,32], that the incorporation of viscous stresses into the Young-Laplace pressure boundary condition results in important changes in the interface behavior as the gap spacing is allowed to vary. It means that key linear and nonlinear properties which determine the average number of emerging fingers, and finger competition dynamics are significantly affected as the gap spacing is modified. Evidently, this effect must be even more relevant in lifting Hele-Shaw flows, where the interface motion itself is driven by a gap-varying mechanism. Even though it seems obvious that viscous stresses should be taken into account in the description of pattern formation in variable-gap Hele-Shaw flows, a thorough investigation of this issue is lacking and still needs to be addressed. This is one of the main purposes of this work.

On the top of the effects of viscous stresses, we assume that the inner fluid is magnetic, or a ferrofluid [33,34]. These fluids behave superparamagnetically and can easily be manipulated with external magnetic fields that can act to either stabilize or destabilize the fluid interface. Here we investigate the situation in which the ferrofluid droplet evolves under the influence of a simple stabilizing magnetic field [35,36]. In an earlier work [16], restricted to the zero surface tension limit, and which completely ignored the effects of viscous and magnetic stresses, we have found theoretical evidence indicating that a magnetic field could be used to inhibit the emergence of cusp singularities in time-dependent gap Hele-Shaw flow. In this work, we go further and present a systematic study which investigates the combined role of interfacial stresses (both viscous and magnetic) and magnetic field in possibly controlling interfacial instabilities and singularities.

The paper is organized as follows: In Sec. II we introduce the formalism and obtain the weakly nonlinear equations describing flow of a ferrofluid in a variable-gap Hele-Shaw cell. The development of interfacial patterns is studied considering the influence of viscous and magnetic stresses, and the applied magnetic field. Section III discusses our linear stability results. At linear level we found that the inclusion of normal viscous stresses introduces a pertinent dependence on the gap width, indicating that the number of fingers formed would be overestimated if such stresses are not taken into account. In Sec. IV we show that some important morphological features of the interface like finger competition, can indeed be predicted and more quantitatively explained by our analytical, second-order mode-coupling approach. It is found that the magnetic contribution to the pressure jump boundary condition introduces a purely nonlinear effect into the problem, unveiling the important role played by the magnetic susceptibility in determining fingering dynamics at weakly nonlinear stages. It is verified that the interplay between normal stresses and azimuthal magnetic field may profoundly modify pattern evolution, providing effective mechanisms to control interfacial behavior in stretch flows. Our conclusions are summarized in Sec. V.

II. THEORETICAL APPROACH AND GOVERNING EQUATIONS

The geometry of the lifting cell problem is sketched in Fig. 1. Consider an incompressible ferrofluid of viscosity η

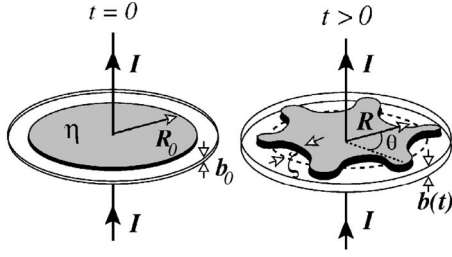


FIG. 1. Diagrammatic representation of the stretch flow of a ferrofluid (gray fluid) confined between parallel plates at $t=0$ (left) and $t>0$ (right). The azimuthal magnetic field is produced by a long, straight wire carrying an electric current I .

located between two narrowly spaced flat plates. The outer fluid is nonmagnetic, and of negligible viscosity. At time $t=0$ the droplet is circular and has initial radius R_0 . The initial plate spacing is represented by b_0 . At a given time $t>0$ the plate-plate distance is denoted by $b=b(t)$, and the droplet has a perturbed shape described as

$$\mathcal{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t), \quad (1)$$

where

$$\zeta(\theta, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta_n(t) \exp(in\theta) \quad (2)$$

represents the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$, and discrete azimuthal wave numbers n . $R=R(t)$ is the time-dependent unperturbed radius of the shrinking ferrofluid interface. Conservation of ferrofluid volume leads to the useful relation $R^2 b = R_0^2 b_0$.

A long straight current-carrying wire of negligible radius is directed along the axis perpendicular to (coaxial with) the plates. The magnetic field produced is $\mathbf{H} = I/(2\pi r) \hat{\mathbf{e}}_\theta$, where r is the distance from the wire, I represents the electric current, and $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ is a unit vector in the azimuthal direction. Note that the azimuthal symmetry and radial gradient of the magnetic field will result in a magnetic force directed radially inward [35,36]. This is one of the ways we use to stabilize the perturbed contracting interface.

To study the hydrodynamics of the system, the usual Navier-Stokes equation is modified through the inclusion of terms representing the magnetic effects. We follow the standard approximations used by Rosensweig [33] and others [34,37–39] and assume that the ferrofluid is magnetized such that its magnetization $\mathbf{M}$ is collinear with the applied field. When this is the case, the magnetic body force is given by $\mu_0 \mathbf{M} \nabla H$, where μ_0 is the magnetic permeability of free space and H is the local magnetic field. The local magnetic field can include contributions from the applied field as well as the demagnetizing field. We consider only the lowest order effect of the magnetic interactions that would result in fluid motion. Thus, in the azimuthal field situation, we consider only the applied field in determining the magnetization $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$, where χ is a constant magnetic susceptibility.

For the quasi-two-dimensional geometry of the Hele-Shaw cell, we reduce the three-dimensional (3D) flow to an equivalent two-dimensional one by averaging over the direc-

tion perpendicular to the plates. Using no-slip boundary conditions and neglecting inertial terms, one derives a modified Darcy's law as [39,40]

$$\mathbf{v} = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla \Pi, \quad (3)$$

where ∇ denotes the two-dimensional gradient operator in polar coordinates (r, θ) . The generalized pressure $\Pi = p - \Psi$ contains both the hydrodynamic pressure p and a magnetic pressure represented by a scalar potential $\Psi = \mu_0 \chi H^2/2$. Since the observable quantities (like fluid velocity $\mathbf{v}$) are determined from gradients in Π , we take, without loss of generality, the generalized pressure of the outer fluid to be zero.

We now impose the incompressibility of the full three-dimensional flow, and take its average over the transversal direction to obtain a modified incompressibility condition [7]

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{\dot{b}(t)}{b(t)}, \quad (4)$$

where the overdot denotes total time derivative. From Eq. (4) it can be verified that the equation satisfied by the velocity potential ϕ ($\mathbf{v} = -\nabla \phi$) differs from Laplace equation valid in the usual case of constant gap, so that here the velocity potential is not a harmonic function. However, since the gap is only time dependent, the solution of the Poisson equation for ϕ can be conveniently expressed in terms of two contributions, namely $\phi = \phi_0 + \bar{\phi}$, where $\bar{\phi} = \dot{b}r^2/(4b)$ is the radial particular solution, and ϕ_0 satisfies the Laplace equation [3,4].

In addition to the effects considered above, we still have to include other important contributions which result from the action of viscous and magnetic stresses. In order to do that, we consider a generalized Young-Laplace pressure jump boundary condition at the interface, which expresses the equilibrium condition on the normal component of the local stress tensor across the fluid-fluid interface [29,30,33,34,41–43]

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{n} = -\gamma \kappa + \frac{1}{2} \mu_0 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2, \quad (5)$$

where

$$\pi_{ik} = -p \delta_{ik} + \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right] \quad (6)$$

includes a viscous friction term proportional to η , δ_{ik} denotes the Kronecker delta function, and v_i represents the i th component of the ferrofluids' velocity vector. The first term at the right-hand side of Eq. (5) represents the usual contribution related to surface tension and interfacial curvature κ [1–4], with $\mathbf{n} = \nabla[r - \mathcal{R}(\theta, t)]/|\nabla[r - \mathcal{R}(\theta, t)]|$ denoting the unit normal vector at the interface. A noteworthy feature of Eq. (5) is the inclusion of a magnetic contribution to the interfacial stress balance (second term at the right hand side), the so-called magnetic normal traction [33,34], which considers the influence of the normal component of the magnetization at the interface.

By rewriting Eq. (6) in polar coordinates (r, θ) , and substituting the resulting expression into the equilibrium condi-

tion Eq. (5), we obtain the pressure jump boundary condition at the interface

$$p = \gamma\kappa - \frac{1}{2}\mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2 - 2\delta\eta\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}. \quad (7)$$

For the current azimuthal field configuration the lowest order contribution of the magnetic normal traction term is given by $[\mu_0\chi^2 I^2/8\pi^2 R^4](\partial\zeta/\partial\theta)^2$. Note that this magnetic piece is of second order in the interface perturbation ζ , being legitimately nonlinear and therefore of no influence at purely linear stages of interfacial evolution. The third term at the right-hand side of Eq. (7) takes into account viscous stresses originated from normal velocity gradients which are nonzero and of relevance to any radially symmetric Hele-Shaw flow. Equation (7) expresses that, if viscous stresses and magnetic interactions are accounted, the curvature term is balanced not only by pressure difference, but also by the normal components of the viscous stress ($\sim\partial v_r/\partial r$) and magnetization. Note that by “normal,” we mean normal to the fluid-fluid interface, and *not* normal to the surface separating the ferrofluid and the upper plate. In the present high aspect ratio case (thin gap compared to any in-plane dimension), the flow between the plates is mostly horizontal and radial, such that the Darcy’s law approach (for incompressible and immiscible Newtonian fluids) applies and viscous stresses acting along the transversal ($\sim\partial v_z/\partial z$) and tangential directions can be neglected. The parameter δ [$\delta=1$ ($\delta=0$) if normal stresses are (not) considered] is used to keep track of the contributions coming from the new term in Eq. (7) in our mode-coupling description. As we will verify below the addition of extra stresses in Eq.(7) introduces a pertinent dependence on the initial aspect ratio at both linear and weakly nonlinear stages [Eqs. (8)–(13)].

The problem is then specified by the generalized pressure jump boundary condition Eq. (7), plus the kinematic boundary condition, which states that the normal components of each fluid’s velocity $\mathbf{v}_n = -\mathbf{n} \cdot \nabla\phi$ are continuous at the interface. The tangential components, however, are discontinuous and give rise to a vortex sheet strength at the interface, where vorticity is concentrated. Even though the so-called vortex sheet formalism [44] is an useful alternative tool to describe interfacial dynamics in Hele-Shaw cells, the tangential velocity discontinuity plays no direct role in determining the pressure boundary condition (7) in our current problem. Here the strongest shear flow is along the radial direction. We define Fourier expansions for the velocity potentials, and use the boundary conditions to express ϕ in terms of ζ_n to obtain the *dimensionless* mode-coupling equation for the system (for $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} [F(n, n')\zeta_{n'}\zeta_{n-n'} + G(n, n')\dot{\zeta}_{n'}\zeta_{n-n'}], \quad (8)$$

where

$$\lambda(n) = \frac{1}{J(n)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} [|n| - J(n)] - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n|(n^2 - 1) - |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \right\} \quad (9)$$

denotes the linear growth rate, with

$$J(n) = \left[1 + \delta \frac{|n|(|n|-1)b^2}{6q^2 R^2} \right], \quad (10)$$

where

$$q = \frac{2R_0}{b_0} \quad (11)$$

is the initial aspect ratio, and

$$F(n, n') = \frac{1}{RJ(n)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} \left[|n| \left(\text{sgn}(nn') - \frac{1}{2} \right) - 1 + [J(n) - 1] \right] \times \left[\frac{3|n'| - n'^2 - 2}{|n| - 1} + |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right] - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n| \left[1 - \frac{n'}{2}(3n' + n) \right] + \frac{3}{2} |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \left[1 + \frac{\chi}{3} n'(n' - n) \right] \right\}, \quad (12)$$

$$G(n, n') = \frac{1}{RJ(n)} \left\{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] - 1 + [J(n) - 1] \times \left[\frac{3|n'| - n'^2 - 2}{|n| - 1} + |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right] \right\} \quad (13)$$

represent second-order mode-coupling terms. The sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. In Eq. (8) in-plane lengths, $b(t)$, and time are rescaled by $L_0 = 2R_0$, b_0 , and the characteristic time $T = b_0/|\dot{b}(0)|$, respectively. The parameter $\sigma = \gamma b_0^3/[12\eta|\dot{b}(0)|L_0^3]$ denotes the dimensionless surface tension, and $N_B = \mu_0\chi I^2 b_0^3/[48\pi^2\eta|\dot{b}(0)|L_0^4]$ represents the dimensionless magnetic Bond number.

As mentioned earlier, note that the extra stress parameter $\delta=1$ [or equivalently, the function $J(n)$], originated from Eq. (7), introduces an important additional dependence of the linear growth rate $\lambda(n)$, and also of the mode-coupling terms $F(n, n')$ and $G(n, n')$ on the initial aspect ratio q . Note the presence of the magnetic field term N_B in both $\lambda(n)$ and $F(n, n')$, where the contribution from the magnetic normal traction appears in $F(n, n')$ as the term including the magnetic susceptibility χ . Among other things, this dependence on δ and N_B is required to an accurate description of the finger competition mechanisms in lifting Hele-Shaw flows. From now on, we work with the dimensionless version of the equations.

We close this section by pointing out an important requirement of the Darcy’s law formulation we employed in this work: as is common in Hele-Shaw systems [17], we consider that during the lifting process the system remains of large aspect ratio: the gap width b is always far smaller than a characteristic length scale in the plane of the cell, which we

take as the droplet radius R , so that $R/b \gg 1$. Of course there are other theoretical approaches for the dynamics of fluids in the Hele-Shaw geometry which are free from such restriction. For example, under more general circumstances (not limited to the large aspect ratio requirement) the solution of full three-dimensional Stokes equations [43] or the Brinkman model [45–47] are probably more appropriate and accurate to describe patterns occurring in debonding. However, it is worth noting that such a more general description would involve a three-dimensional free boundary problem, where the interface position itself is an unknown which is part of the dynamics. So, there is no doubt that it would be a considerably challenging and difficult physical problem [27,46]. Therefore, the Darcy's model is still a very welcome and useful tool for exploring the current time-dependent gap Hele-Shaw problem, at least for sufficiently high aspect ratio.

Finally, we would like to call the reader's attention to another noteworthy point: note that, within the large aspect ratio assumption ($R/b \gg 1$), the corrections considered in Eqs. (5) and (6) due to viscous stresses and normal magnetic traction are indeed small compared to the first term in Eq. (7) (which involves surface tension and interfacial curvature). On the other hand, it is also well known that the addition of small corrections into boundary conditions can be extremely important (see for instance Refs. [29,41]). This is reinforced by the results we present here, where the typical number of fingers and the finger competition dynamics are significantly affected by the small corrections added into the generalized pressure jump boundary condition [Eq. (7)].

III. LINEAR STABILITY ANALYSIS

We begin our study by using Eq. (8) to examine how the development of interfacial instabilities at early stages of the pattern evolution could be modified by the influence of both viscous stresses and external magnetic field. We emphasize that the contribution from magnetic stresses (magnetic normal traction) is intrinsically a nonlinear concern, and is not required in the linear stability analysis of the problem. Unless otherwise stated, we consider a destabilizing driving $\dot{b}(t) > 0$, and as in Refs. [10,15,17] we assume an exponentially increasing gap width $b(t) = \exp t$, such that $[\dot{b}(t)/b(t)] = 1$. This is precisely the ideal plate separation profile used in related adhesion probe-tack tests [22], since it provides a more uniform kinematics and nearly constant strain rate. At short times we have that $b \approx 1+t$ which corresponds to the constant lifting velocity case with $\dot{b} = 1$.

Inspecting Eq. (9) for the linear growth rate $\lambda(n)$ we can gain further insight about the role of lifting, viscous stresses, magnetic field, and surface tension in determining the interface instability. As usual, the contribution coming from the surface tension term has a stabilizing nature (σ stabilizes modes of large n). It is also evident that the azimuthal magnetic field contribution N_B always tends to stabilize the interface. On the other hand, the lifting term proportional to $\dot{b}/b$ basically plays a destabilizing role.

From Eq. (9) we can also obtain some direct consequences on the n dependence of the linear growth rate.

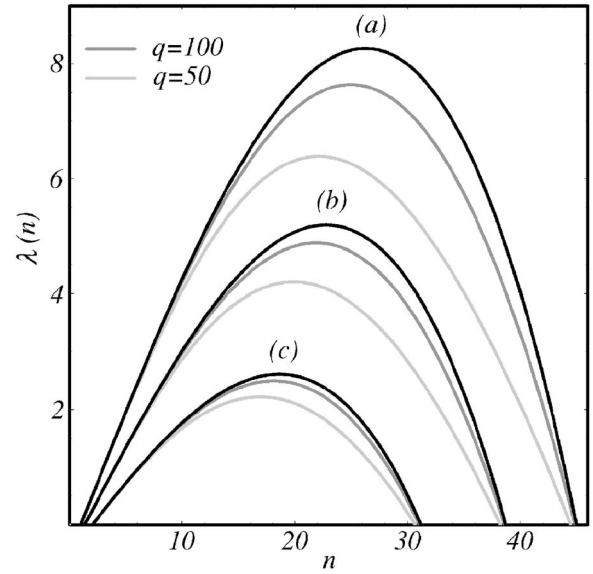


FIG. 2. Linear growth rate $\lambda(n)$ as a function of mode n , for $t = 0.2$, $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$, and three different values of N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} , and (c) 7.0×10^{-3} . The color labeling refers to distinct values of δ and q : $\delta=0$ (black), $\delta=1$, $q=100$ (dark gray), and $\delta=1$, $q=50$ (light gray).

For example, it can be verified that the mode $n=0$, that corresponds to a uniform expansion of the circle, decays [$\lambda(0) = -1$] for $\dot{b}(t) > 0$ as a consequence of mass conservation, and is marginal [$\lambda(0) = 0$] for $\dot{b}(t) = 0$. In addition, the stability of mode $n=1$, which corresponds to a rigid translation of the circular interface, is given solely by the magnetic term, so that it decays if $N_B > 0$, and is marginal if $N_B = 0$. This makes perfect sense, since the azimuthal magnetic field tends to attract the ferrofluid towards the current carrying wire, keeping the droplet pinned down at the center of the cell. For modes $n \geq 2$ the stability depends on the interplay of the three terms appearing in Eq. (9).

The unusual feature of Eq. (9) is the presence of the factor $J(n)$ [Eq. (10)], that introduces a dependency on the initial aspect ratio q . We recall that $J(n)$ arises directly from the inclusion of viscous stresses into the generalized pressure boundary condition [Eq. (7)]. However, the most interesting aspect of Eq. (9) is the fact that $J(n)$ appears as an overall prefactor, as well as a term multiplied by $\dot{b}(t)$, being inherently connected to the lifting itself. From Eq. (10) we see that, if $n \gg 1$ the correction incorporated by the term $J(n)$ is more important when $nb/qR \sim 1$. Of course, this explicit dependence with q completely disappears if the effect of normal stresses is not taken into account, so that $\delta=0$, and $J(n)=1$.

Figure 2 plots $\lambda(n)$ as a function of mode number n for a nonzero value of the surface tension parameter σ ($\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$), $t = 0.2$, and for three different values of N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} , and (c) 7.0×10^{-3} . The black curves correspond to the case in which normal viscous stresses are neglected ($\delta=0$), and the gray curves refer to the cases in which such stresses are taken into account ($\delta=1$). The gray color shading refers to the following values of the initial aspect ratio: q

$=100$ (dark gray), and $q=50$ (light gray). Unless otherwise stated this will be the color labeling used throughout this work.

The growth rate curves illustrated in Fig. 2 are characterized by a band of unstable modes of width

$$\Delta n_c = n_{c>} - n_{c<}, \quad (14)$$

where the critical mode $n_{c>}$ ($n_{c<}$) is the solution of a cubic equation, defined as the largest (smallest) wave number for which $\lambda(n)=0$. We point out that unlike the classical fingering problem in outward radial flow [3,4] and the centrifugally-driven problem in rotating Hele-Shaw cells [31,32], here the band of unstable modes shrinks from both ends ($n_{c>}$ and $n_{c<}$) due to the action of stabilizing effects.

Another common feature of such curves is the presence of a maximum at $n=n_{max}$, obtained by setting $d\lambda(n)/dn=0$. A quantity closely related to n_{max} is the so-called fastest growing mode n^* , defined as the *integer* mode that produces the largest growth rate. A given mode n is only the fastest growing when $\lambda(n) > \lambda(n-1)$ and $\lambda(n) > \lambda(n+1)$. This is the mode that will tend to dominate during the early stages of the pattern formation process and will perhaps determine the number of fingers in later stages.

By inspecting Fig. 2, we can examine how the magnetic field and the viscous stresses influence the linear growth rate when σ is nonzero: it is clear that increasingly larger values of N_B decrease the band of unstable modes Δn_c , and reduce the value of n_{max} . On the other hand, for a given value of N_B , changes in q do not affect Δn_c significantly. However, smaller values of q lead to a decreased growth rate of the mode n_{max} , shifting it toward lower values of azimuthal wave numbers. Since n_{max} determines the typical number of fingers formed at the onset of the instability, this means that small initial gaps (or equivalently, larger values of q) result in patterns with a larger number of fingers. This is an important consequence of the inclusion of normal viscous stresses in Eq. (7). So, if $\sigma \neq 0$ the emerging interfacial instabilities would be more effectively suppressed for larger values of N_B and smaller values of q . It is worth mentioning that if viscous stresses are neglected (black curves in Fig. 2) the values of n_{max} and $\lambda(n_{max})$ would be *overestimated*.

As commented in Sec. I, the number of fingers observed in experiments (with nonmagnetic fluids) at constant lifting velocity is considerably smaller than that predicted by traditional linear analysis which neglects normal viscous stresses and consider standard boundary conditions [26,27]. Recently, it has been shown [27] that the agreement between experiment and linear theory is improved, specially for large $b(t)$, if three-dimensional effects are taken into account. These 3D corrections are introduced considering the influence of wall wetting effects [41,42], which take into account the existence of a thin film of variable thickness separating the fingers from the plates. However, it has also been verified in Ref. [27] that for small $b(t)$ an important discrepancy still remains, despite the inclusion of 3D effects.

At this point, we suggest that a possible explanation for the decrease of the numbers of fingers when $b(t)$ is small found in Ref. [27], can be offered if we consider the effects

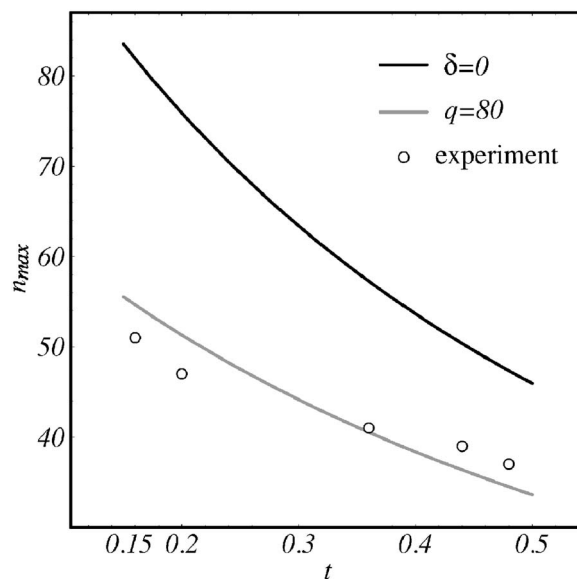


FIG. 3. n_{max} as a function of dimensionless time t , for lifting with constant velocity $\dot{b}=1$, $\sigma \approx 1.592 \times 10^{-6}$, and $N_B=0$. These parameters match the experimental values presented in Refs. [19,27]. We plot the experimental data taken from Fig. 4 of Ref. [27] (open circles), and our corresponding linear stability results when $\delta=0$ (black curve), and $\delta=1$ with $q=80$ (gray curve). Note that the theoretical prediction for the typical number of fingers is considerably improved when viscous stresses are taken into account (gray curve).

of normal viscous stresses. As discussed throughout this section, the effects of these stresses are indeed more important for small $b(t)$, or equivalently for earlier times. At such early times, the instability has just set in, and our linear stability analysis (which now considers the effect of viscous stresses) should apply and be sufficiently accurate. A more quantitative account for this fact is depicted in Fig. 3, which plots the time evolution of n_{max} considering the typical experimental conditions used in Refs. [19,27], i.e., $R_0=20$ mm, $b_0=0.5$ mm, constant lifting velocity $V=\dot{b}=20 \times 10^{-6}$ m/s, fluid viscosity $\eta=92$ Pa s, and surface tension $\gamma=18 \times 10^{-3}$ N/m. By using these physical quantities we plot our Fig. 3 considering the corresponding dimensionless parameters: $\dot{b}=1$ and $\sigma=\gamma b_0^3/[12\eta|\dot{b}|(2R_0)^3] \approx 1.592 \times 10^{-6}$. We also assume that there is no magnetic field applied ($N_B=0$), and consider earlier dimensionless times $0.15 \leq t \leq 0.50$ (note that here the characteristic time $T=b_0/|\dot{b}|=25$). The black curve represents the situation in which viscous stresses are neglected ($\delta=0$), while the gray curve considers the effects of such stresses ($\delta=1$) for the exact value of the initial aspect ratio used in Ref. [27], i.e., $q=(2R_0/b_0)=80$. The open circles represent the experimental values obtained in Fig. 4 of Ref. [27]. By comparing the black and gray curves in Fig. 3 it is evident that viscous stresses (gray curve) reduce the number of fingers significantly, mostly at shorter times [or, for smaller $b(t)$]. It is also clear that the typical number of fingers is indeed *overestimated* if viscous stresses are *not* taken into account (black curve). In addition, by inspecting Fig. 3 we verify that the agreement between the experimen-

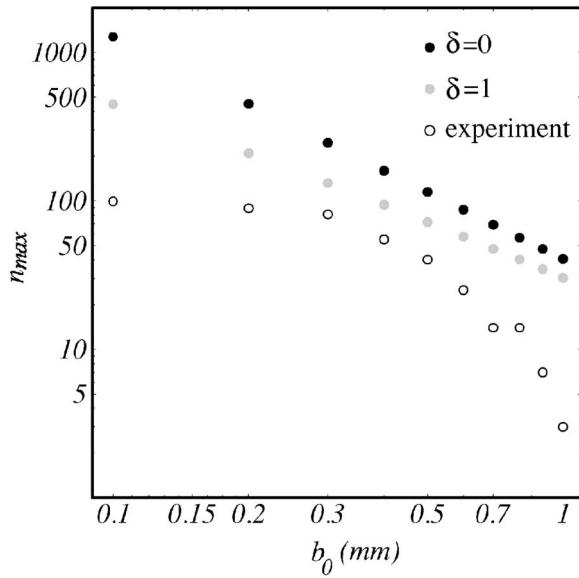


FIG. 4. Log-log plot depicting how the typical number of fingers n_{max} at time $t=0$ varies with initial plate spacing b_0 ($0.1 \text{ mm} \leq b_0 \leq 1.0 \text{ mm}$). The physical parameters are the same as the ones used in Fig. 3. We plot the experimental data taken from Fig. 3 of Ref. [27] (open circles), and our corresponding linear stability results when $\delta=0$ (black dots), and $\delta=1$ (gray dots).

tally observed number of fingers with the linear theoretical prediction is considerably improved when the effects of viscous stresses are considered.

To examine this issue a bit more systematically, in Fig. 4 we plot the typical number of fingers n_{max} at early times, for different values of the initial plate spacing b_0 . As in Ref. [27] our theoretical data are calculated by assuming that $t=0$. Note that Fig. 4 uses the same set of physical parameters used in Fig. 3 (which was plotted for fixed $b_0=0.5 \text{ mm}$), but now the time is fixed ($t=0$), and $0.1 \text{ mm} \leq b_0 \leq 1.0 \text{ mm}$. The data represented by the black (gray) dots assume that $\delta=0$ ($\delta=1$), and the open circles are the experimental data taken from Fig. 3 of Ref. [27]. By inspecting Fig. 4 we note that the gray dots ($\delta=1$) are always located below the black ones ($\delta=0$), indicating that the inclusion of viscous stresses leads to theoretical results which are closer to the experimental data for all measured values of b_0 . Similarly to what we have already observed in Fig. 3, the effects of viscous stresses are indeed more relevant for smaller values of b_0 . It can be seen that a better agreement between the theory including stress (gray dots) and the experiment (open circles) is obtained within the interval $0.2 \text{ mm} \leq b_0 \leq 0.6 \text{ mm}$. The deviation observed for larger b_0 is somewhat expected from the results of Ref. [27] (3D effects). Although we do not fully understand the persisting disagreement for very small plate spacings ($0.1 \text{ mm} \leq b_0 \leq 0.2 \text{ mm}$), it could be possibly originated from the inherent inaccuracy related to the experimental measurement of the number of fingers at very early times (here taken as $t=0$). We point out that an improved agreement between theory and experiment would be achieved, if the theoretical data would have been calculated by considering a small, but nonzero t . In summary, from the analysis of Figs. 3 and 4 it seems that in order to improve the agreement

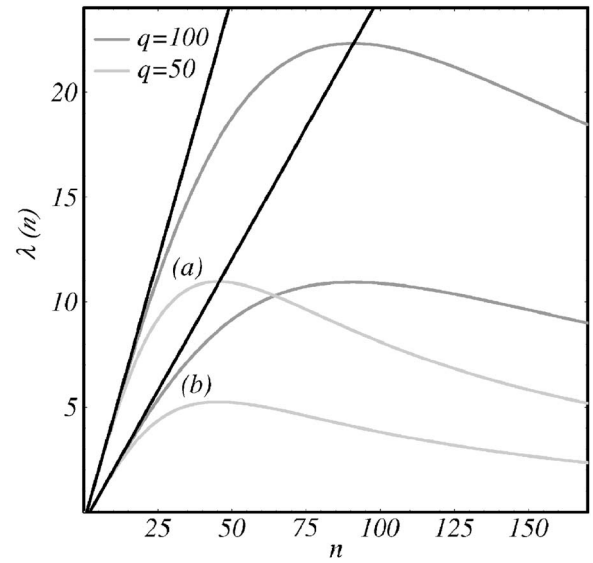


FIG. 5. Linear growth rate $\lambda(n)$ as a function of mode n , for $t=0.2$, $\sigma=0$, and two different values of N_B : (a) 0, and (b) 7.0×10^{-3} . The color labeling refers to distinct values of δ and q : $\delta=0$ (black), $\delta=1$, $q=100$ (dark gray), and $\delta=1$, $q=50$ (light gray).

between linear theory and experiments [26,27] it is necessary to include not only three-dimensional effects [more relevant for larger $b(t)$], but also the effects of normal viscous stresses [important for intermediate and small $b(t)$]. In this sense, the inclusion of normal stresses we propose in this work add an important element into the discussion about the discrepancies observed in Refs. [26,27].

Now we analyze the growth rate considering the situation in which the surface tension parameter is set to zero (see Fig. 5). Throughout this work, the zero surface tension limit will be particularly useful, since it desensitizes the system with respect to σ , and allows a clearer elucidation of the role played by viscous stresses and magnetic field. Figure 5 plots the linear growth rate as a function of mode number, when $\sigma=0$, $t=0.2$, N_B : (a) 0, and (b) 7.0×10^{-3} . The value of the other physical parameters and the color coding are exactly the same as the ones employed in Fig. 2. When viscous stresses are neglected [back straight lines in both (a) and (b)] we notice that $\lambda(n)$ scales with n , and the system is ill posed [$\lambda(n)$ is unbounded for $n \rightarrow \infty$], regardless of the value of N_B . In other words, even though the slope of the straight lines are reduced for larger values of N_B , the growth rate curves will never present a well defined, finite peak (maximum) at a finite n if $\delta=0$. So, the magnetic effect alone is not enough to fully regularize the system at the linear stage, and N_B would not have any influence in determining n_{max} if $\sigma=0$ and $\delta=0$.

A completely different scenario is revealed when the effect of viscous stresses is taken into account: when $\delta=1$ [gray curves in both Figs. 5(a) and 5(b)], higher modes are stabilized, such that the curves present a well defined, finite n_{max} and a wide (but finite) Δn_c . Notice that, for a given N_B , smaller values of q (light gray curves) lead to lower values of both n_{max} and Δn_c . Interestingly, the position (along the n axis) of the peaks of the gray curves having the same q seem

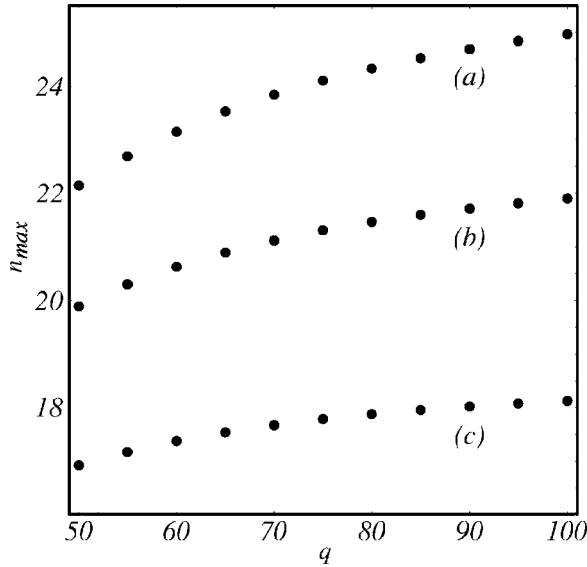


FIG. 6. n_{max} as a function of the initial aspect ratio q , for $t = 0.2$, $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$, $\delta = 1$, and three different values of N_B : (a) 0, (b) 3.5×10^{-3} , and (c) 7.0×10^{-3} . These physical parameters are the same as the ones used in Fig. 2.

to coincide. As we have anticipated, the value of n_{max} does not seem to depend on N_B , but solely on q . Therefore, the existence of a peak in the gray curves of Fig. 5 is due exclusively to the action of viscous stresses. In this sense, the inclusion of normal stresses ($\delta = 1$) in the modified pressure boundary condition Eq. (7) introduces an effective surface tension into the system. Hence, within the scope of the linear theory, we conclude that the combined action of magnetic field and normal viscous stresses could be used as control parameters to discipline the emergence of interfacial instabilities.

To investigate more closely the combined influence of the magnetic field and viscous stresses on the mode of largest growth rate, in Fig. 6 we plot n_{max} as a function of q , for three different values of N_B , $\delta = 1$, $t = 0.2$, and $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$. The values of N_B are exactly the same ones as those used in Fig. 2. By examining Fig. 6 we observe that n_{max} is more sensitive to changes in q for smaller values of N_B . By increasing q in Fig. 6, the typical number of fingers increases by approximately three units in (a) for $N_B = 0$, two units in (b) for $N_B = 3.5 \times 10^{-3}$, and roughly by one unit in (c) for $N_B = 7.0 \times 10^{-3}$. Actually, this is the trend for any time t : we have verified that n_{max} is a decreasing function of time, decaying more rapidly for smaller values of q , and larger values of N_B .

We have also observed that, if σ is decreased, n_{max} varies much more dramatically with q while the three different dotted curves originally shown in Fig. 6 tend to coincide when $\sigma \rightarrow 0$. With respect to this last point, observe Fig. 7 which plots n_{max} as a function of q , when $\sigma = 0$ and $\delta = 1$: we note that hidden in the dotted straight line depicted in Fig. 7 there are in fact three dotted lines (two other indistinguishable dotted lines lie hidden). This reinforces our claim (see discussion of Fig. 5) that N_B has no influence in determining n_{max} as σ is set to zero. Indeed, if $\sigma = 0$ and we calculate

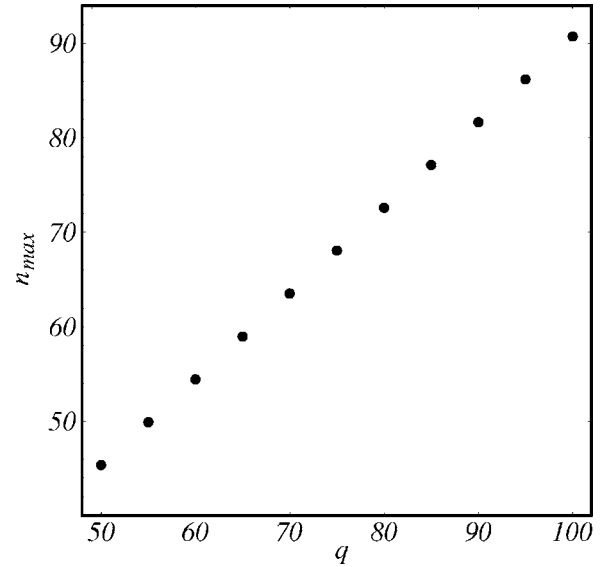


FIG. 7. n_{max} as a function of the initial aspect ratio q , for $t = 0.2$, $\sigma = 0$, $\delta = 1$, and three different values of N_B : 0, 3.5×10^{-3} , and 7.0×10^{-3} . Note that hidden in the simple dotted line there are in fact three lines (one for each value of N_B). These physical parameters are the same as the ones used in Fig. 5.

$d\lambda(n)/dn = 0$, the terms involving N_B cancel out, and it can be shown that

$$n_{max} = \sqrt{\frac{6R}{\delta b}} q. \quad (15)$$

From Eq. (15) we see that n_{max} varies linearly with q , and as expected, tends to infinity when $\delta \rightarrow 0$ since in this limit $\lambda(n)$ is unbounded. However, if $\delta = 1$, n_{max} is a decreasing function of time, indicating that, due to viscous stresses, the droplet would tend to recircularize even if both σ and N_B are zero.

Complementary information can be obtained by examining Fig. 8 which uses the same physical parameters as the ones utilized in Fig. 6, but depicts a “phase diagram” in N_B - q parameter space for the linearized system. The curves that encompass the various shaded regions, determined from the condition

$$\lambda(n) = \lambda(n \pm 1), \quad (16)$$

denote zones where a particular mode is the fastest growing. These zones are labeled by n^* on the graph. As an example of how one might use this graph, consider the case where $N_B = 3.5 \times 10^{-3}$ is held fixed. When the initial aspect ratio increases from $q = 50$ to $q = 100$, the fastest growing mode also increases, varying from $n^* = 20$ to $n^* = 22$. In addition, notice that as N_B is increased the shaded regions narrow and become more horizontally oriented, indicating that the influence of q is weak for higher magnetic Bond numbers. On the other hand, if q is held fixed (for example, $q = 100$), as N_B is increased, we see that the fastest growing mode decreases, changing from $n^* = 25$ to $n^* = 18$. These findings are in perfect agreement with what we have observed in Fig. 6 for three particular values of N_B . We have also verified that when $\sigma \rightarrow 0$ the boundary regions for each n^* become very narrow

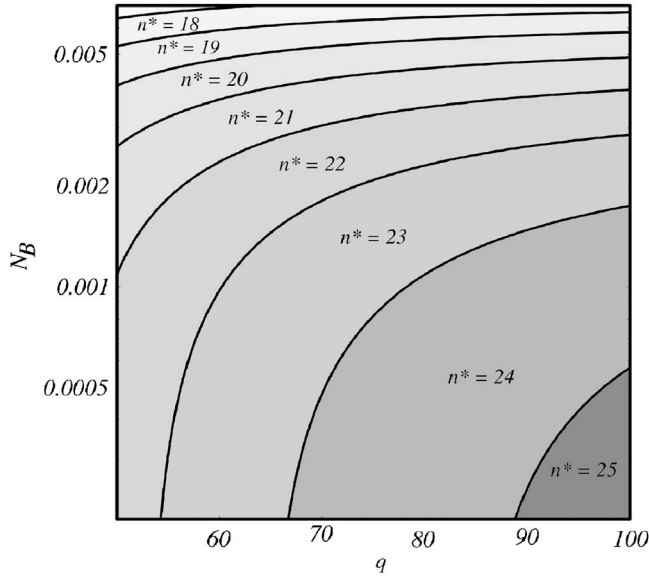


FIG. 8. Log-linear plot of the linear stability phase diagram showing zones (shaded) of fastest growing mode n^* as given by Eq. (16). The physical parameters are exactly the same as the ones used in Fig. 2.

stripes directed along the vertical axis (or, along the N_B axis), in such a way that changes in N_B have no influence whatsoever in the values of n^* , confirming the collapse of curves we have detected in Fig. 7.

Interestingly, despite the evident dependence of the fastest growing mode n^* (or, n_{max}) on both q and N_B when $\sigma \neq 0$, as indicated in Figs. 2 and 6, it can be observed that the band of unstable modes Δn_c decreases for increasing N_B , but for a given N_B , is very weakly influenced by changes in the initial gap spacing (or, by changes in q). This fact can be very clearly verified in Fig. 9, which depicts how Δn_c changes with N_B , for $q=100$ (dark gray curve), $q=50$ (light gray curve), and when $\delta=0$ (black curve). In contrast, when surface tension is zero and $\delta=1$ (see Fig. 10), the band of unstable modes is much more sensitive to changes in q . Moreover, it can be verified that Δn_c changes more significantly with N_B for larger values of q . Again, in the zero surface tension limit we can have analytical access to another important quantity, namely the critical value of the magnetic Bond number required to stabilize all modes

$$N_{Bc} = \frac{R^4 b}{2b^3} \left[1 - \sqrt{\frac{\delta}{6} \frac{b}{qR}} \right]^2. \quad (17)$$

From Eq. (17) it is clear that when viscous stresses are considered ($\delta=1$) and q is small, a smaller N_{Bc} is required to stabilize all the modes. It is also worth noting that N_{Bc} is a decreasing function of time. This suggests that, as time progresses, droplet recircularization would be favored, even if $\sigma=0$.

IV. WEAKLY NONLINEAR DYNAMICS

In the previous section, we have verified that the linear analysis can be very useful in describing important aspects

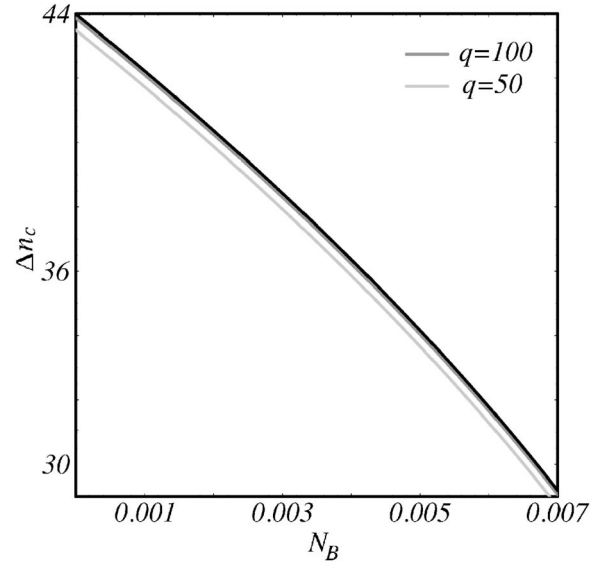


FIG. 9. Width of the band of unstable modes Δn_c as a function of the magnetic Bond number N_B when $\sigma \neq 0$: $\delta=0$ (black), $\delta=1$, $q=100$ (dark gray), and $\delta=1$, $q=50$ (light gray). The physical parameters are exactly the same as the ones used in Fig. 2.

related to the stability of the fluid-fluid interface, mainly the ones related to the typical number of fingers formed, and the critical magnetic field needed to stabilize all interfacial modes. In this section, we turn our attention to the weakly nonlinear, intermediate stages of pattern evolution. Now we are not only interested in interface stability issues, but also to access important morphological features of the patterns formed in lifting Hele-Shaw cells.

As discussed in the Introduction of this paper (Sec. I), the most noteworthy morphological aspect for pattern formation in lifting Hele-Shaw flow is the strong competition among

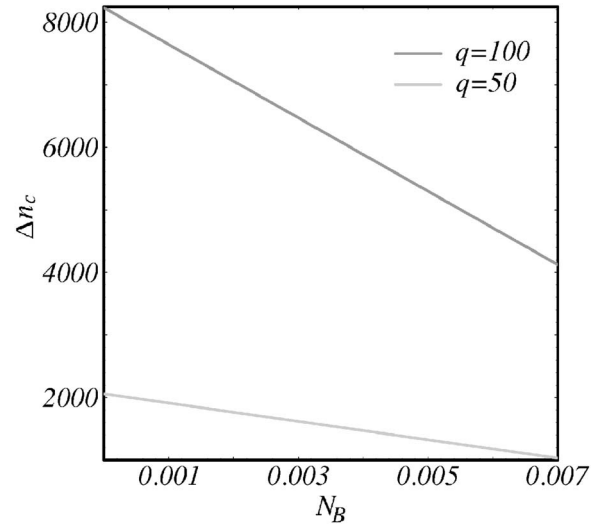


FIG. 10. Width of the band of unstable modes Δn_c as a function of the magnetic Bond number N_B when $\sigma=0$: $\delta=1$, $q=100$ (dark gray), and $q=50$ (light gray). The physical parameters are exactly the same as the ones used in Fig. 5. There is no black curve ($\delta=0$) since in this case $\Delta n_c \rightarrow \infty$.

the penetrating fingering structures, while the competition among the fingers of the more viscous fluid is considerably less intense. Our main goal is to get analytical insight about such finger competition process both in zero and nonzero surface tension circumstances, when the combined action of normal stresses and magnetic field are considered. The purely nonlinear effects introduced by the magnetic normal traction $[\mu_0(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2]/2$ [second term on the right hand side of Eq. (7)] are also examined.

The second order mode-coupling approach executed here has been quite successful in accurately describing finger competition mechanisms arising in radial Hele-Shaw cells with injection [4] and also in rotating Hele-Shaw flow [30]. Recent numerical results [48] substantiate the analytical predictions of Ref. [30], providing a convincing evidence of the usefulness of the weakly nonlinear description. Within our weakly nonlinear approach, finger competition is related to the influence of a fundamental mode n , assuming n is even, on the growth of its subharmonic mode $n/2$ [4,30]. To simplify our discussion it is convenient to rewrite the net perturbation ζ in terms of cosine $[a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}]$ and sine $[b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})]$ modes. Without loss of generality we may choose the phase of the fundamental mode so that $a_n > 0$ and $b_n = 0$. From Eq. (8) we obtain the equations of motion for the subharmonic mode

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n)a_n\}a_{n/2}, \quad (18)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n)a_n\}b_{n/2}, \quad (19)$$

where the function

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2)G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \quad (20)$$

regulates finger competition behavior.

In Fig. 11 we plot $C(n)$ as a function of time for two values of n , when $\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$. The solid (dashed) curves describe the behavior of $C(n)$ in the absence (presence) of the magnetic field. The nonzero $N_B = 2.0 \times 10^{-4}$ and $\chi = 5$. The black (gray) curves assume that the normal stress parameter $\delta = 0$ ($\delta = 1$). Light (dark) gray curves refer to $q = 50$ ($q = 100$). It is clear from Fig. 11 that $C(n) \leq 0$. From Eqs. (18) and (19) we verify that a negative $C(n)$ increases the growth of the sine subharmonic $b_{n/2}$, while inhibiting growth of its cosine subharmonic $a_{n/2}$. The result is an increased variability among the lengths of fingers of the outer fluid penetrating into the ferrofluid. This effect describes the competition of inward fingers. We stress this is in line with what is observed in experiments [19–21,25,26] and numerical simulations [10] of the lifting flow problem with nonmagnetic fluids.

At intermediate stages of pattern evolution, the question arises as whether viscous stresses play a relevant role in the finger competition dynamics. To examine this issue, first we focus on the situation in which there is no applied magnetic field (solid curves in Fig. 11). If $N_B = 0$ we see that the curves representing $C(n)$ behave differently if the influence of viscous stresses is taken into account: for a given n , we see that the curve associated to smaller q lies on the top of the other two. This indicates that finger competition would be less

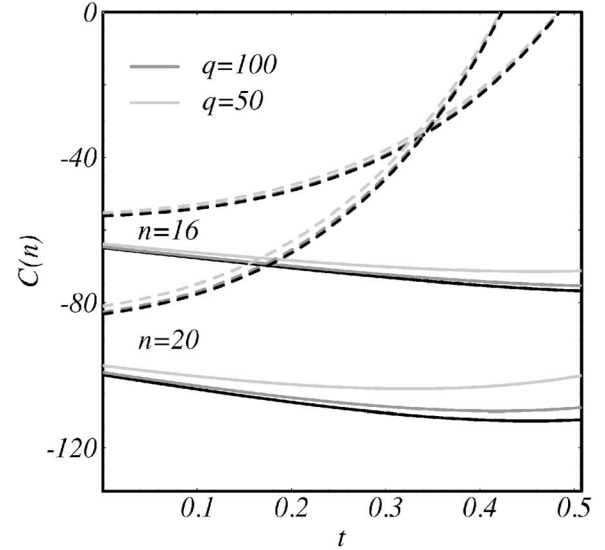


FIG. 11. $C(n)$ as a function of time for modes $n=16$ and $n=20$ in the nonzero surface tension case ($\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$). The black (gray) curves refer to $\delta=0$ ($\delta=1$). The magnetic Bond number is $N_B=0$ ($N_B=2.0 \times 10^{-4}$) for the solid (dashed) curves, $q=50$ (light gray curves), and $q=100$ (dark gray curves). The magnetic susceptibility $\chi=5$. Note that the initial aspect ratio q comes into play only when $\delta=1$.

intense for lower values of the initial aspect ratio q . So, the harder the spatial confinement set at $t=0$, the harder the competition at later times. This theoretical finding is in agreement with the experimental observations for stretch-flow of immiscible (nonmagnetic) Newtonian fluids [19,26,27]. In such experiments, little (strong) fingering and competition are observed for large (small) initial plate spacing. The dependence of the finger competition dynamics on q is another important consequence of the introduction of normal stresses into the lifting Hele-Shaw cell problem.

Despite the important connection between finger competition and q discussed in the previous paragraph, it is worth noting that, the combined effect of normal stresses and surface tension is not quite enough to make $C(n) \rightarrow 0$ within the typical time scales for which our theory is quantitatively accurate. A distinct behavior is observed when the magnetic field is nonzero (dashed curves in Fig. 11): $C(n)$ is negative and increases as time advances. Eventually, $C(n)$ vanishes meaning that the competition ceases due to the action of the magnetic field. Although normal stresses may contribute to restrain competition of inward fingers when $N_B \neq 0$, they do not have a major role in setting the time for which competition vanishes. This can be verified by the fact that, for a given n , all dashed curves tend to coincide when $C(n) \rightarrow 0$. It is also interesting to observe that competition goes to zero first for mode $n=20$, making the dashed curves for $n=16$ and $n=20$ to cross one another before they reach the $C(n)=0$ line.

In Fig. 12 we plot $C(n)$ as a function of t , but now we assume that $\sigma=0$. All remaining physical parameters are identical to those used in Fig. 11. By inspecting Fig. 12 we note that when $N_B=0$ (solid curves), $C(n)$ is a monotonically decreasing function of time. By comparing the solid curves

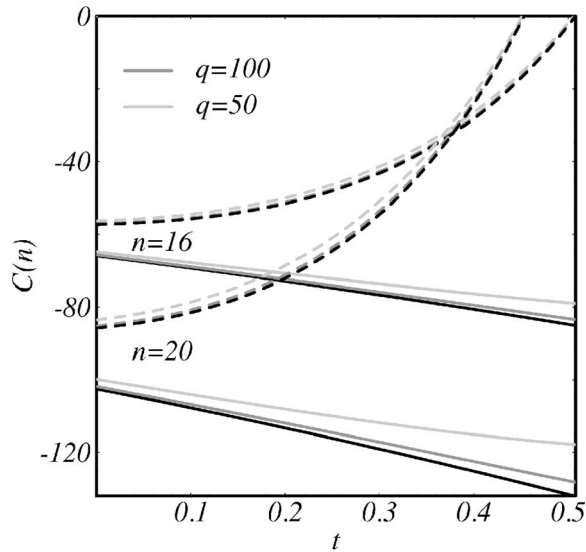


FIG. 12. $C(n)$ as a function of time for modes $n=16$ and $n=20$ in the zero surface tension case. The black (gray) curves refer to $\delta=0$ ($\delta=1$). The magnetic Bond number is $N_B=0$ ($N_B=2.0 \times 10^{-4}$) for the solid (dashed) curves, $q=50$ (light gray curves), and $q=100$ (dark gray curves). The magnetic susceptibility $\chi=5$. Note that the initial aspect ratio q comes into play only when $\delta=1$.

plotted in Figs. 11 and 12, one clearly observes that the absence of surface tension is responsible for such a behavior. This would favor an ever increasing competition among the inward fingers. However, it is important to point out that, although surface tension is completely absent in Fig. 12, normal stresses still act to decrease the intensity of the finger competition (solid curves move upwards for smaller q).

Similarly to the nonzero surface tension case illustrated in Fig. 11, the situation is changed when an external magnetic field is applied. By observing the dashed curves in Fig. 12 we see that they go to zero at a given time, indicating that competition vanishes, despite the fact that $\sigma=0$. As expected, by comparing Figs. 11 and 12 we conclude that the required time to suppress competition is smaller when surface tension is nonzero. This is clearly verified by noting that the zeros of the dashed $C(n)$ curves are shifted to the left in Fig. 11.

In order to analyze in greater detail other relevant aspects of the finger competition dynamics in the lifting Hele-Shaw setup, we conclude this section by analyzing Figs. 13 and 14. Figure 13 summarizes the influence of viscous stresses on finger competition both in the absence (a) and presence (b) of surface tension. For both values of surface tension, we consider two different values of the initial aspect ratio: $q=100$ (dark gray) and $q=50$ (light gray). We focus on the case in which $N_B=0$, and plot the dimensionless time τ^* at which the finger competition function $C(n)$ assumes its largest magnitude (minima of the solid gray curves in Figs. 11 and 12), as a function of mode n . Indeed, we verify that finger competition can be significantly affected by the sole action of viscous stresses. When surface tension is zero [Fig. 13(a)] we note that, for a given n , τ^* is smaller for higher initial confinement (larger q). It is evident that, the lifting system is strongly dependent on the initial conditions, in the sense that changes in q lead to important variations in the finger com-

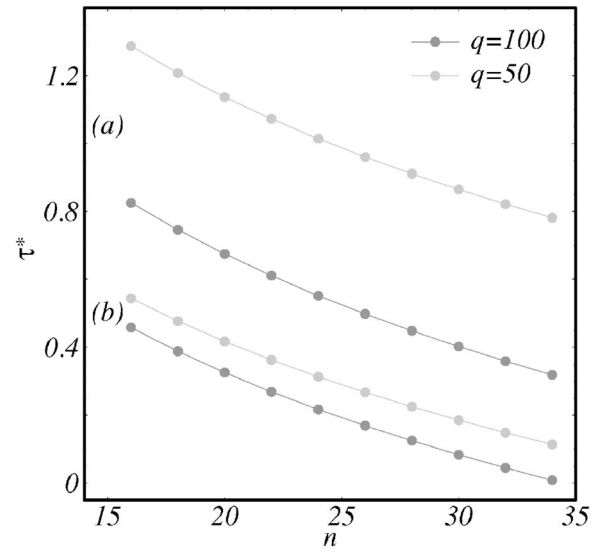


FIG. 13. Dimensionless time τ^* for which the strength of finger competition is largest (in the absence of a magnetic field) as a function of mode n , when (a) $\sigma=0$ (see Fig. 12), (b) $\sigma=1.5 \times 10^{-5}$ (see Fig. 11). We consider that $q=100$ (dark gray) and $q=50$ (light gray).

petition dynamics. It is also observed that τ^* is a decreasing function of mode n , indicating that finger competition is stronger at relatively early stages of the lifting process, when higher modes n are manifestly unstable. All these remarks are also valid for the nonzero surface tension case [Fig. 13(b)], but from the fact that curves for different q are closer to each other, it is obvious that the existence of interfacial tension (which stabilizes modes of large n) decreases the

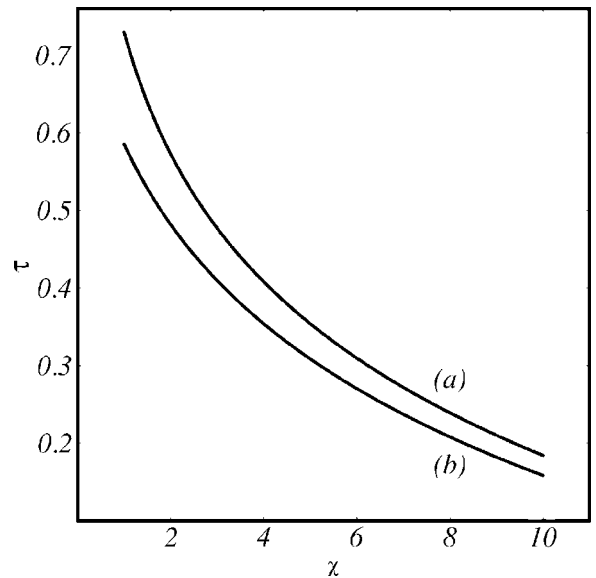


FIG. 14. Dimensionless time τ for which $C(n)=0$, as a function of magnetic susceptibility χ ($1 \leq \chi \leq 10$), when (a) $\sigma=0$, (b) $\sigma=1.5 \times 10^{-5}$, for $n=30$, $N_B=2.0 \times 10^{-4}$, and $\delta=0$. The remaining physical parameters are the same as the ones used in Figs. 11 and 12.

sensitivity of the system with respect to changes in q .

We proceed by examining Fig. 14. Here we intend to investigate a bit more closely the influence of the purely nonlinear contribution coming from the magnetic normal traction [second term on the right hand side of Eq. (7)], which introduced an explicit dependence of the mode-coupling term $F(n, n')$ on the magnetic susceptibility χ [last term in Eq. (12)]. Figure 14 depicts the time τ at which all finger competition is suppressed [zeros of $C(n)$ for $N_B \neq 0$] as a function of magnetic susceptibility χ , for both (a) zero and (b) nonzero surface tension ($\sigma = 1.5 \times 10^{-5}$) cases. Without loss of generality we assume that $n=30$ and $N_B=2.0 \times 10^{-4}$, and use the same physical parameters employed in Figs. 11 and 12. Since the influence of normal viscous stresses is negligible to determine τ , Fig. 14 is plotted by assuming that $\delta=0$.

Figure 14 clearly illustrates that, regardless the value of σ , the time τ required to completely suppress finger competition is strongly dependent on the value of the magnetic susceptibility, becoming significantly smaller as χ is increased. At first, this dependence may seem too obvious. However, we note in passing that the value of the magnetic Bond number used throughout this weakly nonlinear Sec. IV is one order of magnitude smaller than the typical values of N_B utilized in the linear study carried out in Sec. III. This is possible due to the inclusion of the magnetic normal traction in Eq. (7). Now one can afford using a considerably lower value of N_B and still completely restrain finger competition by tuning the value of the magnetic susceptibility. In other words, even if N_B is kept fixed, one might determine the typical time for which finger competition should be suppressed, by appropriately selecting the value of χ . We can gain additional insight about this last point by analyzing the expression of the magnetic Bond number which is required to suppress finger competition entirely (for simplicity we assume that $\sigma=0$ and $\delta=0$)

$$\bar{N}_B = \left(\frac{4n+2}{\chi n^2 + 4n + 10} \right) N_{Bc}, \quad (21)$$

obtained from Eq. (20) by setting $C(n)=0$. In Eq. (21) N_{Bc} denotes the critical magnetic Bond number required to stabilize all interfacial modes at *linear* stages [see Eq. (17)], while $\bar{N}_B$ is a legitimately *nonlinear* concept. From Eq. (21) we notice that the magnetic Bond number $\bar{N}_B$ at which competition is fully suppressed can be indeed significantly smaller than the critical (linear) Bond number N_{Bc} , mainly for larger values of χ and n . This dependence of $\bar{N}_B$ on χ is a direct and important consequence of the introduction of the magnetic normal traction term in the generalized Young-Laplace pressure jump boundary condition [Eq. (7)]. This purely nonlinear magnetic contribution provides an additional support to the idea of conveniently controlling interfacial instabilities and singularities in lifting Hele-Shaw cells by magnetic means [16,24].

V. CONCLUDING REMARKS

In this work we studied various aspects related to pattern formation in lifting Hele-Shaw cells both in the purely linear,

and during intermediate nonlinear stages of interface evolution. Our analytical approach incorporates the combined role of three relevant parameters for the problem, namely the viscous stresses (accounted when $\delta=1$), the applied magnetic field (N_B), and the surface tension (σ). In particular, we have explored the fact that the inclusion of viscous stresses into the problem leads to a pertinent dependence of the system on the initial aspect ratio q at both linear and nonlinear stages. At the nonlinear level, a fourth relevant parameter (the magnetic susceptibility χ) is revealed, resulting from the action of magnetic stresses (magnetic normal traction) at the interface.

At the linear stage, if $\sigma=0$ it is verified that viscous stresses regularize the system, working as an effective surface tension. In this case the initial aspect ratio q influences both the typical number of fingers n_{max} and the band of unstable modes Δn_c : Δn_c changes more significantly with N_B for larger q , but n_{max} does not depend on N_B , but solely on q . If $\sigma \neq 0$, we have shown that the typical number of fingers is quite influenced by q , while Δn_c does not change as much. When radial viscous stresses are considered we find the number of emerging fingers to be considerably smaller than the predicted by usual linear stability analyses which neglect such stresses. This last theoretical finding is supported by experimental results in lifting Hele-Shaw flows with non-magnetic fluids [19,27]. This indicates that the inclusion of viscous stresses add an important element to elucidate recent discrepancies between other theoretical models (which neglect viscous stresses) and experiments on the typical number of fingers [26,27].

At the weakly nonlinear stage, we focus on the influence of δ and N_B on the competition among fingering structures. We have found that normal stresses significantly affect finger competition dynamics, leading to an interesting connection between the initial aspect ratio and the strength of the competition: if the system is highly confined at $t=0$ (larger q) the competition at later times is expected to be quite strong as well. Therefore, we have shown that the inclusion of viscous stresses is of considerable importance for an accurate description of the lifting problem. We have also identified the specific role played by N_B and δ : while viscous stresses act to restrain or delay the occurrence of finger competition, the magnetic field is able to suppress it completely. The intrinsically nonlinear effect introduced by the magnetic normal traction in the generalized pressure boundary condition [Eq. (7)] has also been examined. It revealed the key role played by the magnetic susceptibility χ in the control mechanism of the finger competition dynamics. We have found that by choosing an appropriate ferrofluid (that is, by tuning χ), one can presumably control the fingering development by using magnetic Bond numbers which are far smaller in magnitude than those typically predicted by linear stability theory. In this context, the combined action of normal viscous stresses, magnetic normal traction, and magnetic field conspire to inhibit the formation of interfacial instabilities if $\sigma \neq 0$, and to prevent interfacial singularities when $\sigma=0$.

The fact that normal (viscous and magnetic) stresses and azimuthal magnetic field restrain fingering formation in stretch flow may have important implications on the evaluation of adhesiveness and peel-off forces of a given liquid adhesive material. It has been recently shown [24], under constant drive speed conditions and by neglecting effects of fingering, that the net effect of an azimuthal magnetic field would be to reduce adhesion. A natural extension of the current work is to investigate the role of normal stresses, magnetic field, and fingering in possibly influencing the adhesion properties of confined fluids both under constant load [13]

and constant lifting velocity [18–21,25,26] circumstances.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank CNPq (Brazilian Research Council) for financial support of this research through the CNPq/FAPESQ Pronex program. J.A.M. thanks CNPq for financial support (PDE Proceeding No. 200045/2005-9). We acknowledge useful discussions with Enrique Alvarez-Lacalle and Jaume Casademunt. We thank Daniel Bonn and Martine Ben Amar for kindly supplying the experimental data of Ref. [27].

-
- [1] P. G. Saffman and G. I. Taylor, Proc. R. Soc. London, Ser. A **245**, 312 (1958).
 - [2] G. M. Homsy, Annu. Rev. Fluid Mech. **19**, 271 (1987) K. V. McCloud and J. V. Maher, Phys. Rep. **260**, 139 (1995).
 - [3] L. Paterson, J. Fluid Mech. **113**, 513 (1981).
 - [4] J. A. Miranda and M. Widom, Physica D **120**, 315 (1998).
 - [5] T. Vicsek, *Fractal Growth Processes* (World Scientific, Singapore, 1989).
 - [6] E. Ben-Jacob, R. Godbey, N. D. Goldenfeld, J. Koplik, H. Levine, T. Mueller, and L. M. Sander, Phys. Rev. Lett. **55**, 1315 (1985).
 - [7] H. La Roche, J. F. Fernández, M. Octavio, A. G. Loeser, and C. J. Lobb, Phys. Rev. A **44**, R6185 (1991).
 - [8] A. A. Sonin and R. Bartolino, Nuovo Cimento D **15**, 1 (1993).
 - [9] S.-Z. Zhang, E. Louis, O. Pla, and F. Guinea, Eur. Phys. J. B **1**, 123 (1998).
 - [10] M. J. Shelley, F.-R. Tian, and K. Wlodarski, Nonlinearity **10**, 1471 (1997).
 - [11] J. Bohr, S. Brunak, and T. Norretranders, Europhys. Lett. **25**, 245 (1994).
 - [12] S. Roy and S. Tarafdar, Phys. Rev. E **54**, 6495 (1996).
 - [13] S. K. Thamida, P. V. Takhistov, and H.-C. Chang, Phys. Fluids **13**, 2190 (2001).
 - [14] S. Sinha, S. K. Kabiraj, T. Dutta, and S. Tarafdar, Eur. Phys. J. B **36**, 297 (2003).
 - [15] S. K. Kabiraj and S. Tarafdar, Physica A **328**, 305 (2003).
 - [16] J. A. Miranda and R. M. Oliveira, Phys. Rev. E **69**, 066312 (2004).
 - [17] C.-Y. Chen, C.-H. Chen, and J. A. Miranda, Phys. Rev. E **71**, 056304 (2005).
 - [18] B. A. Francis and R. G. Horn, J. Appl. Phys. **89**, 4167 (2005).
 - [19] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, and D. Bonn, J. Appl. Phys. **93**, 1557 (2003).
 - [20] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, and P. Fabre, Europhys. Lett. **62**, 244 (2003).
 - [21] M. Tirumkudulu, W. B. Russel, and T. J. Huang, Phys. Fluids **15**, 1588 (2003).
 - [22] R. D. Welsh, M.Sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
 - [23] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **69**, 016311 (2004).
 - [24] J. A. Miranda, R. M. Oliveira, and D. P. Jackson, Phys. Rev. E **70**, 036311 (2004).
 - [25] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, J. Teisseire, and P. Fabre, Eur. Phys. J. E **15**, 97 (2004).
 - [26] A. Lindner, D. Derks, and M. J. Shelley, Phys. Fluids **17**, 072107 (2005).
 - [27] M. Ben Amar and D. Bonn, Physica D **209**, 1 (2005).
 - [28] D. Korteweg, Arch. Neerl. Sci. Exactes Nat. Ser. II **6**, 1 (1901).
 - [29] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, and J. Casademunt, Phys. Fluids **16**, 908 (2004).
 - [30] H. Gadêlha and J. A. Miranda, Phys. Rev. E **70**, 066308 (2004).
 - [31] L. W. Schwartz, Phys. Fluids A **1**, 167 (1989).
 - [32] L. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt, and J. Ortín, Phys. Rev. E **54**, 6260 (1996).
 - [33] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985), and references therein.
 - [34] E. Blums, A. Cebers, and M. M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (de Gruyter, New York, 1997), and references therein.
 - [35] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **62**, 2985 (2000).
 - [36] D. P. Jackson and J. A. Miranda, Phys. Rev. E **67**, 017301 (2003).
 - [37] A. O. Tsebers and M. M. Maiorov, Magnetohydrodynamics (N.Y.) **16**, 21 (1980).
 - [38] S. A. Langer, R. E. Goldstein, and D. P. Jackson, Phys. Rev. A **46**, 4894 (1992).
 - [39] D. P. Jackson, R. E. Goldstein, and A. O. Cebers, Phys. Rev. E **50**, 298 (1994).
 - [40] A. O. Cebers, Magnetohydrodynamics (N.Y.) **17**, 113 (1981).
 - [41] C.-W. Park and G. M. Homsy, J. Fluid Mech. **139**, 291 (1984).
 - [42] D. A. Reinelt, J. Fluid Mech. **183**, 219 (1987).
 - [43] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Mechanics: Fluid Mechanics*, Vol. 6 (Pergamon Press, New York, 1959).
 - [44] G. Tryggvason and H. Aref, J. Fluid Mech. **136**, 1 (1983).
 - [45] H. C. Brinkman, Appl. Sci. Res., Sect. A **1**, 27 (1947).
 - [46] J. Fernandez, P. Kurowski, P. Petitjeans, and E. Meiburg, J. Fluid Mech. **451**, 239 (2002).
 - [47] J. Zeng and Y. C. Yortsos, Phys. Fluids **15**, 3829 (2003).
 - [48] J. A. Miranda and E. Alvarez-Lacalle, Phys. Rev. E **72**, 026306 (2005).

APÊNDICE C

Magnetic fluid in a time-dependent gap Hele-Shaw cell [J. Mag. Mag. Mat. 289, 360 (2005)]



ELSEVIER

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Journal of Magnetism and Magnetic Materials 289 (2005) 360–363

Journal of
magnetism
and
magnetic
materials

www.elsevier.com/locate/jmmm

Magnetic fluid in a time-dependent gap Hele–Shaw cell

Rafael M. Oliveira, José A. Miranda*

Departamento de Física—LFTC, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE 50670-901 PE, Brazil

Available online 28 November 2004

Abstract

The traditional Saffman–Taylor problem addresses the flow of non-magnetic fluids in a fixed gap Hele–Shaw cell. Under such circumstances interfacial singularities arise if the surface tension between the fluids is zero. In this work, we study a variant of this interesting hydrodynamic situation and consider the flow of a magnetic fluid in a Hele–Shaw cell with a time-dependent gap spacing. We focus on the zero surface tension limit and investigate the possibility of controlling interfacial singularities with an appropriate magnetic field. Our analytical mode-coupling approach shows evidence that the action of an azimuthal magnetic field and plus the inclusion of stresses originated from normal velocity gradients conspire to singularity inhibition.

© 2004 Elsevier B.V. All rights reserved.

PACS: 47.65.+a; 75.50.Mm; 47.20.Ma

Keywords: Magnetic fluids; Ferrohydrodynamics; Interfacial instability

When a viscous fluid is displaced by a less viscous one in the narrow space of a Hele–Shaw cell the Saffman–Taylor instability [1] arises, leading to the formation of beautiful fingering patterns. A couple of years ago, Shelley et al. [2] studied a variant of the traditional fixed gap Saffman–Taylor problem and examined the dynamical evolution of a fluid drop in a Hele–Shaw cell with a variable gap-width. In such a cell the pressure gradient within the fluid is due to the lifting of the upper plate. This system is not only intrinsically interesting, but also of considerable importance to adhesion-related problems [3]. Due to the practical and academic relevance of the lifting cell problem it is of interest to study ways of controlling emerging interfacial instabilities and singularities.

In this work, we study the evolution of a fluid droplet in a time-dependent gap Hele–Shaw cell and consider

the case in which the fluid used is ferrofluid [4]. The ferrofluid droplet evolves under the influence of a magnetic field presenting azimuthal symmetry. We perform a weakly nonlinear analysis of the problem, and find theoretical evidence indicating that the magnetic field could be used to inhibit the emergence of interfacial instabilities when surface tension is non-zero, and hydrodynamic singularities and in the zero surface tension limit.

Consider an incompressible ferrofluid of viscosity η located between two narrowly spaced flat plates (Fig. 1). The outer fluid is non-magnetic, has negligible viscosity, and its hydrodynamic pressure is set to zero. The time-dependent plate spacing is represented by $b = b(t)$, and $b(t = 0) = b_0$. A long straight current-carrying wire is directed along the axis perpendicular to the plates, producing the magnetic field $\mathbf{H} = I/(2\pi r)\hat{\mathbf{e}}_\theta$, where r is the distance from the wire, I represents the electric current, and $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ is a unit vector in the azimuthal direction. We describe the perturbed droplet shape as $\mathfrak{R}(\theta, t) = R(t) + \zeta(\theta, t)$, where $\zeta(\theta, t) = \sum \zeta_n(t) \exp(in\theta)$

*Corresponding author. Tel.: +55 81 21267610,

Fax: +55 81 32710359.

E-mail address: jme@df.ufpe.br (J.A. Miranda).

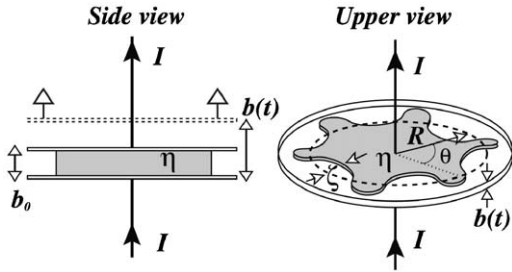


Fig. 1. Sketch of a time-dependent gap Hele-Shaw cell with a magnetic fluid.

represents the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$, and discrete azimuthal wave numbers n . The unperturbed ferrofluid interface has initial and final radii defined as R_0 and $R = R(t)$, respectively. The wire has negligible radius so that conservation of ferrofluid volume leads to the useful relation $R^2 b = R_0^2 b_0$.

As in the traditional Hele-Shaw problem, the flow in the ferrofluid is potential, $\mathbf{v} = -\nabla\phi$, but now with a velocity potential given by $\phi = (b^2/12\eta)[p - \psi]$ [5], where p is the hydrodynamic pressure in the ferrofluid, $\psi = \mu_0\chi H^2/2$ is a scalar potential containing the magnetic contribution, χ is the magnetic susceptibility, and μ_0 is the free-space permeability. To account for the lifting of the upper plate we consider a modified incompressibility condition of the ferrofluid, $\nabla \cdot \mathbf{v} = -\dot{b}(t)/b(t)$ [2], where the overdot denotes total time derivative. As a consequence of the latter, and in contrast to the usual Darcy's law case, the velocity potential is no longer Laplacian. The problem is then specified by two boundary conditions: (i) a *generalized* Young-Laplace pressure jump boundary condition at the interface [6]

$$p = \gamma\kappa - 2\delta\eta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}, \quad (1)$$

(ii) the kinematic boundary condition, which states that the normal components of each fluid's velocity $v_n = -\mathbf{n} \cdot \nabla\phi$ are continuous at the interface. The first term at the right-hand side of Eq. (1) expresses the usual contribution related to the surface tension γ and interfacial curvature κ [1]. The second term takes into account stresses originated from normal velocity gradients. The parameter δ ($\delta = 1$ ($\delta = 0$) if the normal stresses are (not) considered) is used to keep track of the contributions coming from the new term in Eq. (1) in our mode-coupling description.

We tackle the problem by adapting a weakly nonlinear approach originally developed to study the regular Hele-Shaw problem ($\dot{b} = 0$) [7], to the time-dependent gap situation. We define Fourier expansions for the velocity potentials and use the boundary

conditions to express ϕ in terms of ζ_n . After some manipulation, the *dimensionless* mode-coupling equation for the system is obtained (for $n \neq 0$):

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} [F(n, n') \zeta_{n'} \zeta_{n-n'} + G(n, n') \dot{\zeta}_{n'} \zeta_{n-n'}], \quad (2)$$

where

$$\lambda(n) = \frac{1}{J(n)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} [n] - J(n) \right. \\ \left. - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n|(n^2 - 1) - |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \right\}, \quad (3)$$

denotes the linear growth rate with

$$J(n) = \left[1 + \delta \frac{|n|(|n| - 1)b^2}{6q^2 R^2} \right], \quad (4)$$

where $q = 2R_0/b_0$ is the initial aspect ratio, and

$$F(n, n') = \frac{1}{RJ(n)} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} \left[|n| \left(\text{sgn}(nn') - \frac{1}{2} \right) - 1 \right. \right. \\ \left. \left. + [J(n) - 1] \left[\frac{3|n'| - n'^2 - 2}{|n| - 1} + |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right] \right] \right. \\ \left. - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n| \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] + \frac{3}{2} |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \right\}, \quad (5)$$

$$G(n, n') = \frac{1}{RJ(n)} \left\{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] - 1 \right. \\ \left. + [J(n) - 1] \left[\frac{3|n'| - n'^2 - 2}{|n| - 1} \right. \right. \\ \left. \left. + |n| \text{sgn}(nn') - 1 \right] \right\} \quad (6)$$

represent second-order mode-coupling terms. The sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument, and $J(n) = 1$ if $\delta = 0$. In Eq. (2) in-plane lengths, $b(t)$, and time are rescaled by $L_0 = 2R_0, b_0$, and the characteristic time $T = b_0/|\dot{b}(0)|$, respectively. The parameter $\sigma = \gamma [12\eta|\dot{b}(0)|L_0^3]$ denotes the dimensionless surface tension, and $N_B = \mu_0\chi I^2 b_0^3/[48\pi^2\eta|\dot{b}(0)|L_0^4]$ represents the dimensionless magnetic Bond number. Eqs. (3)–(6) agree with the results obtained in Ref. [8] if normal stresses are not taken into account ($\delta = 0$).

Although singular effects are essentially nonlinear, some interesting information may be extracted already at the linear level: from the linear growth rate Eq. (3) we notice that the magnetic term is always stabilizing. Another stabilizing factor is introduced by the term $J(n)$, related to normal stresses. These findings indicate that N_B and $J(n)$ may affect interfacial stability significantly, and could be effective in regularizing the system, even in the absence of surface tension. This peculiar stabilizing

mechanism suggests that it is conceivable to have a non-trivial evolution starting from an unstable interface in the zero surface tension limit, but not necessarily developing finite-time singularities.

To investigate the suggestive possibility of inhibiting singularity formation by magnetic means, we turn our attention to the weakly nonlinear terms in Eq. (2), and focus on the zero surface tension limit. The numerical simulations performed in Ref. [2] for $\sigma = 0$ indicate that as the interface propagates inwards, the penetrating fingers compete and the interface begins to sharpen. During this process the formation of interfacial singularities takes place. We use our weakly nonlinear analysis to describe the competition process in lifting cells, and study the role played by the magnetic field and normal stresses in possible avoiding the collision of the opposing interfaces. Within our approach, finger competition is described by the influence of a fundamental mode n , assuming n is even, on the growth of its sub-harmonic mode $n/2$ [7]. We rewrite Eq. (2) in terms of cosine [$a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}$] and sine [$b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})$] modes, and without loss of generality choose that $a_n > 0$ and $b_n = 0$ to obtain the equations of motion for the sub-harmonic mode:

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n)a_n\}a_{n/2}, \quad (7)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n)a_n\}b_{n/2}, \quad (8)$$

where the function

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2)G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \quad (9)$$

regulates finger competition behavior.

In Fig. 2 we plot $C(n)$ as a function of time for two values of n . As in Refs. [2,8] we assume an exponentially increasing gap spacing $b(t) = e^t$. The solid (dashed) curves describe the behavior of $C(n)$ in the absence (presence) of the magnetic field. The black (gray) curves assume that the normal stress parameter $\delta = 0$ ($\delta = 1$). Light (dark) gray curves refer to $q = 125$ (175). It is evident from Fig. 2 that $C(n) \leq 0$. A negative $C(n)$ implies growth of the sine sub-harmonic $b_{n/2}$, and inhibition of growth of its cosine sub-harmonic $a_{n/2}$ (see Eqs. (7) and (8)). The result is an increased variability among the lengths of fingers of the outer fluid penetrating into the ferrofluid. This mechanism describes the competition of inward fingers.

When the magnetic field is absent (solid curves in Fig. 2), $C(n)$ is a decreasing function of time, regardless the value of δ . This effect favors an increasing competition among the inward fingers, that eventually would collide resulting in a topological instability, in agreement with the numerical predictions of Ref. [2]. An entirely distinct behavior is observed when the magnetic field is non-zero (dashed curves): initially $C(n)$ decreases with increasing t , reaches a minimum value, and subsequently increases as time advances. Eventually, $C(n)$ vanishes which

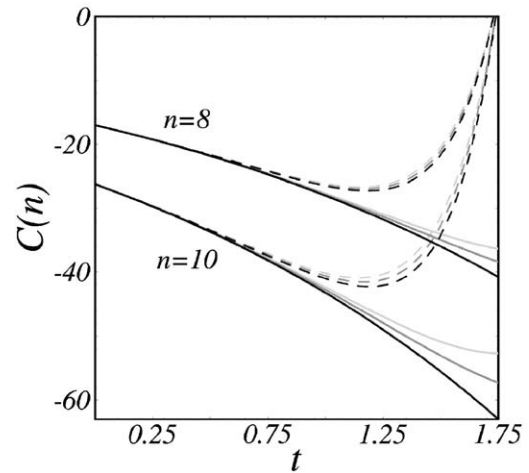


Fig. 2. $C(n)$ as a function of time for modes $n = 8$ and $n = 10$. The black (gray) curves refer to $\delta = 0$ ($\delta = 1$). The magnetic Bond number is $N_B = 0$ ($N_B = 2.5 \times 10^{-5}$) for the solid (dashed) curves, and $q = 125$ (light gray curves), $q = 175$ (dark gray curves). Note that the initial aspect ratio q comes into play only when $\delta = 1$. We assume that $b(t) = e^t$.

means that the competition ceases due to the action of the magnetic field. We also point out the role of the parameter δ when $N_B \neq 0$. It is clear from Fig. 2 that the inclusion of normal stresses into the problem reduces competition even further, and that this effect is more relevant for increasingly larger (smaller) values of $n(q)$. Note that $C(n)$ shows an explicit dependence on the initial aspect ratio q only if $\delta = 1$. However, within the scope of our current theory (effectively 2-D flow with large values of q at the onset of nonlinear effects) it is the magnetic field that governs suppression of finger competition, ultimately preventing the occurrence of interfacial singularities. These nonlinear observations confirm our first-order predictions. In summary, we have found evidence that in addition to disciplining regular perturbations at the interface when $\sigma \neq 0$, the azimuthal magnetic field seems to be able to inhibit the formation of interfacial singularities in the zero surface tension limit.

This work was supported by CNPq, FACEPE, and UFPE (Propesq/Proplan).

References

- [1] P.G. Saffman, G.I. Taylor, Proc. R. Soc. London Ser. A 245 (1958) 312.
- [2] M.J. Shelley, F.-R. Tian, K. Wlodarski, Nonlinearity 10 (1997) 1471.
- [3] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, D. Bonn, J. Appl. Phys. 93 (2003) 1557.

- [4] R.E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* Cambridge, University Press, Cambridge, 1985.
- [5] J.A. Miranda, *Phys. Rev. E* 62 (2000) 2985.
- [6] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín, J. Casademunt, *Phys. Fluids* 16 (2004) 908.
- [7] J.A. Miranda, M. Widom, *Physica D* 120 (1998) 315.
- [8] J.A. Miranda, R.M. Oliveira, *Phys. Rev. E* 69 (2004) 066312.

APÊNDICE D

**Adhesion phenomena in ferrofluids [Phys. Rev. E
70, 036311 (2004)]**

Adhesion phenomena in ferrofluids

José A. Miranda* and Rafael M. Oliveira

Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil

David P. Jackson

Department of Physics and Astronomy, Dickinson College, Carlisle, Pennsylvania 17013, USA

(Received 4 March 2004; published 21 September 2004)

One efficient way of determining the bond strength of adhesives is to measure the force or the work required to separate two surfaces bonded by a thin adhesive film. We consider the case in which the thin film is not a conventional adhesive material but a high viscosity ferrofluid confined between two narrowly spaced parallel flat plates subjected to an external magnetic field. Our theoretical results demonstrate that both the peak adhesive force and the separation energy are significantly influenced by the action and symmetry properties of the applied field. Specifically, we show that the adhesive strength of a ferrofluid is reduced if the applied magnetic field is perpendicular to the plates or if the applied field is in plane and exhibits azimuthal symmetry. Conversely, the adhesive strength can be either enhanced or reduced if the applied field is in plane and is directed radially outward. This establishes an interesting connection between adhesion and ferrohydrodynamic phenomena, allowing the control of important adhesive properties by magnetic means.

DOI: 10.1103/PhysRevE.70.036311

PACS number(s): 47.65.+a, 75.50.Mm, 68.35.Np

I. INTRODUCTION

The study of adhesive materials is vastly multidisciplinary and its basic scientific research involves a broad spectrum of areas ranging from interfacial science and rheology to pattern formation and chemistry [1,2]. On the practical side, the phenomenon of adhesion is part of our everyday lives, and adhesive tape industries are among the most active and profitable [3].

One key aspect on both scientific and practical levels is to precisely evaluate, characterize, and hopefully *control*, the bond strength of adhesives. One efficient and relatively simple way to study important adhesive properties is provided by the so-called probe-tack test [4,5], which measures the force required to separate two surfaces bonded by a thin adhesive film. The result of such a test is a force-distance curve, that describes the behavior of the adhesive film under tension. Good adhesives typically present highly nonlinear force-distance curves, in which the force increases sharply, reaches a maximum value, and then drops abruptly, defining a plateau, before it eventually vanishes. From these curves the separation energy (work done during the entire separation process), as well as the peak adhesive force, can be determined.

Recently, several groups began investigating the fundamentals of adhesion in viscous liquids [6–10]. By dealing with simpler Newtonian and non-Newtonian fluids, these interesting studies tried to gain more insight into the relation between the complicated rheological properties of conventional adhesives and the force-distance curves. Some noteworthy findings include the appearance of a cavitation-induced force plateau for high separation velocities in very

viscous fluids [7], and the important verification of a modest influence of fingering instabilities on the shape of the curves [8]. As systematically proposed by Francis and Horn [6], all these works [6–10] take into account the significant dependence of the force-distance curves on the compliance of the measurement apparatus.

In this paper we consider the case in which the fluid used in the adhesion probe-tack test is a magnetic liquid called a *ferrofluid*. The field of ferrofluid research is also highly interdisciplinary, bringing physicists, chemists, engineers, and even physicians together [11,12]. Ferrofluids are colloidal suspensions of nanometer-sized magnetic particles suspended in a nonmagnetic carrier fluid. These fluids behave superparamagnetically and can easily be manipulated with external magnetic fields that can act to either stabilize or destabilize the fluid interface. As a result of the ferrofluid interaction with the external field in confined geometries, the usual viscous fingering instability (Saffman-Taylor instability [13]) is supplemented by a magnetic fluid instability [11,12], resulting in a variety of interesting interfacial behaviors. Depending on the applied field direction, one observes highly branched, labyrinthine structures [14–17], patterns showing an ordered line of peaks [18], or even the suppression of viscosity-driven [19] and centrifugally induced [20,21] interfacial instabilities in thin ferrofluid films.

We stress that although these ferrofluids are viscous and magnetic, they are not, rigorously speaking, “true” (non-Newtonian) adhesives. However, in certain situations these fluids have properties that are quite similar to regular adhesives. Here we show that, in contrast to conventional adhesive materials, the adhesive properties of a ferrofluid can be enhanced or reduced by varying the intensity of an externally applied magnetic field. This effect could be used to design versatile adhesive materials with highly flexible properties that vary with magnetic field, in which the bonding between surfaces could be manipulated in a nondestructive way. The

*Email address: jme@df.ufpe.br

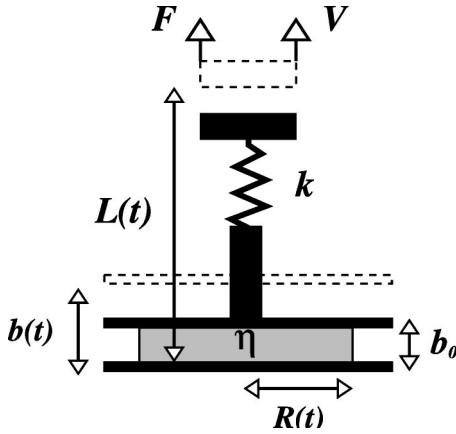


FIG. 1. Schematic diagram for the plate-plate geometry and lifting apparatus of the adhesion measurement system with ferrofluids.

simplicity and potential usefulness of such a regulatory mechanism could be of great value in many applications.

This paper is organized as follows: Sec. II formulates our theoretical approach and derives the adhesion force between two flat plates due to the presence of a ferrofluid subjected to an external magnetic field. We study three different magnetic field configurations: (i) *perpendicular*, when a uniform field is normal to the plates of the apparatus, (ii) *azimuthal*, for an in-plane field produced by a long current-carrying wire oriented perpendicular to the plates, and (iii) *radial*, for a cylindrically radial magnetic field pointing away from the cylinder's symmetry axis and decreasing linearly with radial distance. Initially, the probe-tack apparatus is considered to be perfectly rigid, and we focus on the derivation of the adhesive force under the influence of magnetic interactions. Section III discusses the effects of the three magnetic field arrangements on the force-distance curves for the ferrofluid sample. We find that the adhesive strength of the ferrofluid is decreased in the perpendicular and azimuthal configurations and can be either increased or decreased in the radial case. The influence of the magnetic forces on the separation energy is also investigated. Section IV studies the combined effects of the apparatus' intrinsic compliance and the magnetic forces, and discusses their role in determining the force-distance profiles. Our chief conclusions and perspectives are summarized in Sec. V. Last, an alternative method for determining the magnetic forces is discussed in the Appendix.

II. ADHESION FORCE: DARCY'S LAW FORMULATION

Figure 1 sketches the geometry of the system under study. We consider a Newtonian, incompressible ferrofluid of high viscosity η located between two narrowly spaced circular, flat plates. The outer fluid is nonmagnetic, and of negligible viscosity. As in Refs. [6–10] we consider that the apparatus has a spring constant denoted by k . One end of the lifting apparatus moves at a specified constant velocity V , subjecting the upper plate to a pulling force F . The lower plate is held fixed at $z=0$, where the z axis points in the direction perpendicular to the plates. The initial plate-plate distance is

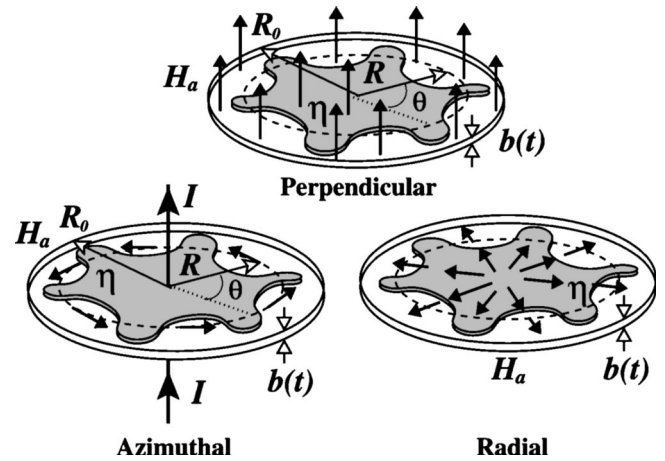


FIG. 2. Schematic diagrams for the different magnetic field configurations considered in this paper.

represented by b_0 and the initial ferrofluid radius by R_0 . At a given time t the plate spacing is $b=b(t)$, while the deformation due to the stretching of the apparatus is $L-b$, where $L=b_0+Vt$. We stress that due to the compliance of the measurement apparatus, the actual plate spacing b is not necessarily equivalent to L . Of course, in the case of a completely rigid apparatus we have $b=L$ and $\dot{b}=V$, where $\dot{b}=db/dt$. The perpendicular, azimuthal, and radial magnetic field configurations are schematically illustrated in Fig. 2.

Our initial task is to calculate the pulling force F as a function of displacement L , taking into account both hydrodynamic and magnetic contributions. We follow Derks *et al.* [8] and derive F assuming that the ferrofluid interface remains circular during the entire lifting process, with time-dependent radius defined as $R=R(t)$. This approach is justified in Ref. [8], where it has been found that experiments showing strong fingering instabilities are very well described by theoretical force-distance curves which assume an exact circularity of the evolving interface. In the perpendicular magnetic field configuration conservation of ferrofluid volume leads to the useful relation $R^2b=R_0^2b_0$. This expression can be trivially modified in order to account for the radius of the current-carrying wire or the cylindrical magnet in the azimuthal and radial field cases.

To study the hydrodynamics of the system, the usual Navier-Stokes equation is modified through the inclusion of terms representing the magnetic effects. We follow the standard approximations used by Rosensweig [11] and others [12,14–16] and assume that the ferrofluid is magnetized such that its magnetization $\mathbf{M}$ is collinear with the applied field $\mathbf{H}_a$. When this is the case, the magnetic body force is given by $\mu_0 \mathbf{M} \nabla H$, where μ_0 is the magnetic permeability of free space and H is the *local* magnetic field. The local magnetic field can include contributions from the applied field as well as the demagnetizing field. We consider only the lowest order effect of the magnetic interactions that would result in fluid motion. Thus, in the azimuthal and radial situations, we consider only the applied field in determining the magnetization. However, in the perpendicular situation, we include the demagnetizing field produced by the uniform magnetization resulting from the applied field.

For the quasi-two-dimensional plate-plate geometry, we employ the lubrication approximation and reduce the three-dimensional flow to an equivalent two-dimensional flow $\mathbf{U}(r, \theta)$ by averaging over the direction perpendicular to the plates (z axis), where (r, θ) denote polar coordinates. Using no-slip boundary conditions and neglecting inertial terms, one derives a modified Darcy's law as [16,22]

$$\mathbf{U} = -\frac{b^2}{12\eta} \nabla \Pi_j. \quad (1)$$

The generalized pressure $\Pi_j = p - \Psi_j$ in Eq. (1) contains both the hydrodynamic pressure p and a magnetic pressure represented by a scalar potential Ψ_j . The subscript $j=1, 2, 3$ indicates the perpendicular, azimuthal, and radial magnetic field configurations, respectively.

We can exploit the irrotational nature of the flow to obtain the two-dimensional flow field by z averaging the full three-dimensional incompressibility condition $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. This yields $\mathbf{U}(r) = -(\dot{b}r/2b)\hat{\mathbf{e}}_r$, where $\hat{\mathbf{e}}_r$ is a unit vector in the radial direction. This allows us to integrate Eq. (1) to obtain the pressure field

$$\Pi_j(r) = \frac{3\eta\dot{b}}{b^3}(r^2 - R^2) + \Pi_j(R), \quad (2)$$

where $\Pi_j(R)$ is the value of the generalized pressure at the ferrofluid droplet boundary. To determine $\Pi_j(R)$ we use the facts that $\Psi_j=0$ in the nonmagnetic fluid and the pressure jump at the interface of a magnetic fluid given by [11,12]

$$\Delta p = \sigma\kappa - \frac{1}{2}\mu_0 M_n^2. \quad (3)$$

Here, σ is the surface tension, κ is the curvature of the interface, and M_n represents the normal component of the magnetization at the interface. In the present case, M_n is given by the radial component evaluated at $r=R$, namely, $M_n = M_r(R)$. These boundary conditions result in a pressure field given by

$$\Pi_j(r) = \frac{3\eta\dot{b}}{b^3}(r^2 - R^2) + p_0 - \Psi_j(R) - \frac{1}{2}\mu_0 M_{jr}^2(R), \quad (4)$$

where p_0 denotes the atmospheric pressure outside the ferrofluid droplet. As is common in this type of adhesion phenomena [6–10], we have neglected the surface tension term in Eq. (4).

In the nonmagnetic case, the inward viscous flow induced by traction is accompanied by a pressure gradient pointing outward. Therefore in the absence of an applied magnetic field the border of the ferrofluid droplet is at atmospheric pressure p_0 while the interior of the sample is at a lower pressure. From Eq. (4) we see that the purely viscous, non-magnetic contribution to the pressure in the sample is negative. In other words, when the upper plate is lifted, the pressure gradient causes an inward viscous shearing flow in the plane of the adhesive film, producing a downward adhesive force normal to the upper plate. When a magnetic field is applied, the magnetic contributions in Eq. (4) can modify

this scenario significantly. In fact, as we now show, additional magnetic terms come into play when calculating the adhesion force.

Since it is the generalized pressure Π_j that results in fluid motion according to Eq. (1), the force exerted by the lifting machine on the upper plate is calculated by integrating the generalized pressure difference above and below the upper plate, taking into account the pressure jump condition (3) across the magnetic fluid surface in contact with the upper plate. The net force of separation (adhesion force) is then given by

$$F_j = \int dA \left\{ \frac{3\eta\dot{b}}{b^3}(R^2 - r^2) + [\Psi_j(R) - \Psi_j(r)] + \frac{1}{2}\mu_0[M_{jr}^2(R) - M_{jr}^2(r)] \right\}, \quad (5)$$

where the integration is carried out over the cross sectional area of the ferrofluid drop $\mathcal{A}$. In the perpendicular case, this is simply a circle of radius R . But in the azimuthal and radial situations, this is an annulus of outer radius R and inner radius a . The term $M_{jr}^2(r)$ denotes the normal component of the magnetization evaluated at the boundary $z=b$. An alternative way of calculating the magnetic terms appearing in the adhesion force Eq. (5) is presented and discussed in the Appendix.

We can gain some physical insight into the adhesion force equation simply by looking at the sign of the magnetic terms. Positive magnetic terms in Eq. (5) lead to increased adhesion while negative terms lead to decreased adhesion. In particular, any radial magnetization at the boundary of the domain will tend to increase adhesion while magnetization normal to the plates will tend to decrease adhesion. This can be understood qualitatively by noting that the effect of the normal component of the magnetization at the fluid interface $r=R$ is to “push” outward on the interface. Thus magnetization that pushes outward at the boundary of the domain leads to the fluid attempting to “spread out” in the plane of the sample. This results in a downward force on the upper plate and an increase in adhesion. Conversely, magnetization that pushes upward on the upper surface $z=b$ will exert an upward force on the plate, resulting in decreased adhesion. The effect of the other magnetic terms in Eq. (5) will depend on the form of the scalar potential.

Equation (5) is one of the central results of this work. The remainder of this paper looks into the details of how the magnetic effects alter the adhesion force for three different magnetic field configurations.

A. Perpendicular magnetic field

First, we consider the perpendicular field case ($j=1$) in which a uniform magnetic field $\mathbf{H}_a = H_0\hat{\mathbf{e}}_z$ is applied normal to the plates. This situation was studied in Refs. [15,23] by assuming the ferrofluid has a uniform magnetization $M_0 = M(H_0)$. Here, $M(H)$ gives the (possibly nonlinear) relationship between the magnetization and the applied field. This configuration is then equivalent to a uniformly charged

parallel-plate capacitor and a scalar potential can be written in a number of equivalent forms [16]. However, in contrast to the situation studied in Refs. [15,16,23], which only required the magnetic pressure at the *interface* of a fingered droplet, we are interested in calculating Ψ_1 for an *arbitrary point* $\mathbf{r}$ of a circular magnetic domain ($0 \leq r \leq R$). In particular, since we are interested in points *within* as well as *on* the domain boundary, it is essential to choose a form for Ψ_1 that is *continuous* at the boundary. If we describe the ferrofluid boundary by a simple closed curve C parametrized by arclength s , then a convenient way of writing the scalar potential is (see Ref. [16])

$$\Psi_1 = \frac{\mu_0 M^2}{2\pi b} \left\{ \oint_C ds' \hat{\mathbf{D}} \times \hat{\mathbf{t}}(s') + \oint_C dx' \ln[(y-y') + \sqrt{D^2 + b^2}] \right\}, \quad (6)$$

where $x=x(s)$, $x'=x(s')$, etc., $\hat{\mathbf{t}}(s')$ is the unit tangent vector at arclength s' , and $\hat{\mathbf{D}}=\mathbf{D}/D$ is the unit difference vector pointing from the point $\mathbf{r}=(x,y)$ to the point $\mathbf{r}'=(x',y')$.

Unfortunately, even though we assume the ferrofluid sample maintains a circular shape during the lifting of the upper plate, the evaluation of Eq. (6) for arbitrary points located inside the sample does not result in a simple closed-form expression. Substituting Eq. (6) into Eq. (5) results in a *dimensionless* force

$$F_1 = \frac{\dot{b}}{b^5} + N_B^\perp \left\{ \frac{2}{R_0^2} \int_0^R \mathcal{I}(r) r dr - \left(\frac{b_0}{b} \right) \left[\mathcal{I}(R) + \frac{\pi}{2} \right] \right\}, \quad (7)$$

where

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(r) = & \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\zeta Q + P^2 \sin^2 \omega}{\sqrt{Q^2 + P^2 \sin^2 \omega}} \right) d\omega \\ & + \frac{1}{2} \int_0^\pi \ln \left[\sqrt{1 + Q^2 + P^2 \sin^2 \omega} - \frac{1}{2} \zeta \sin 2\omega \right] \\ & \times \zeta \sin 2\omega d\omega, \end{aligned} \quad (8)$$

$\zeta=2R/b$, $Q=(R-r)/b$, $P^2=4rR/b^2$, and $N_B^\perp=\mu_0 M^2 R_0^2/k\delta$ is the magnetic Bond number for the perpendicular magnetic field configuration. Similar to what is done in Refs. [6,8,10], in Eq. (7) lengths have been re-scaled by $\delta=(3\pi\eta R_0^4 b_0^2 V/2k)^{1/6}$ and velocities by V . It is worth mentioning again that since we are dealing with the noncompliant situation, we have $b=L$ and hence $\dot{b}=1$. Equation (7) shows $\dot{b}$ explicitly in anticipation of our analysis of the compliant apparatus situation.

B. Azimuthal magnetic field

For the azimuthal field case ($j=2$) we consider a long straight current-carrying wire that is perpendicular to (coaxial with) the plates (see Fig. 2). This may present an experimental challenge because the hole necessary for the wire could result in leakage. The magnetic field produced by this

wire is $\mathbf{H}_a=I/(2\pi r)\hat{\mathbf{e}}_\theta=(H_0 a/r)\hat{\mathbf{e}}_\theta$, where I represents the electric current, a is the radius of the current-carrying wire, and $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ is a unit vector in the azimuthal direction. The magnetization is collinear with the magnetic field and is written $\mathbf{M}=(M_0 a/r)\hat{\mathbf{e}}_\theta$, where $M_0=M(H_0)$. Here again, $M(H)$ gives the (possibly nonlinear) relationship between the magnetization and the applied field. In this case, the scalar potential can be simply written as [20]

$$\Psi_2(r) = \frac{\mu_0 M_0 H_0 a^2}{2r^2}. \quad (9)$$

We note that the magnetization in this configuration is everywhere tangential to the interface, and also to the upper surface of the ferrofluid sample. Thus there are no “surface” contributions to the adhesion force. Furthermore, we note that $[\Psi_2(R)-\Psi_2(r)]$ will always be negative so that the magnetic contribution in the azimuthal case tends to reduce the bond strength of the ferrofluid. This makes good physical sense because the radial gradient results in a magnetic force directed radially inward leading to an increased pressure that pushes upward on the upper surface.

Under such circumstances, the evaluation of Eq. (5) for the azimuthal field case leads to the *dimensionless* force

$$\begin{aligned} F_2 = & \frac{\dot{b}}{b^5} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right)^2 - N_B^{\text{azi}} \left\{ \ln \left[1 + (\gamma-1) \frac{b_0}{b} \right] \right. \\ & \left. - \left[\frac{(\gamma-1)}{\frac{b}{b_0} + (\gamma-1)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

where $\gamma=(R_0/a)^2$ and $N_B^{\text{azi}}=(\pi\mu_0 M_0 H_0 a^2)/(2k\delta)$ is a magnetic Bond number for the azimuthal magnetic field configuration. In the case of a linear relationship $M=\chi H$, the Bond number can be written $N_B^{\text{azi}}=(\mu_0 \chi I^2)/(8\pi k\delta)$. As in the perpendicular field case, lengths and velocities in Eq. (10) have been re-scaled by δ and V , respectively, and $\dot{b}=1$.

C. Radial magnetic field

Last, we consider a cylindrically radial magnetic field configuration ($j=3$) [24–26] such that $\mathbf{H}_a=(H_0 a/r)\hat{\mathbf{e}}_r$. The experimental conditions required to obtain such a radial magnetic field are discussed in Ref. [24]. Roughly speaking, the radial field is produced by shaping the poles of a permanent magnet into concentric cylinders. As before, we assume the magnetization is collinear with the applied field so that $\mathbf{M}=(M_0 a/r)\hat{\mathbf{e}}_r$, where $M_0=M(H_0)$. In this case, the scalar potential can be written as

$$\Psi_3(r) = \frac{\mu_0 M_0 H_0 a^2}{2r^2}. \quad (11)$$

Note that the scalar potential in this situation is exactly the same as in the azimuthal field configuration. Thus we already know that the force resulting from this potential will tend to decrease the adhesion force. However, unlike the azimuthal case, the radial magnetization will lead to a “surface” force

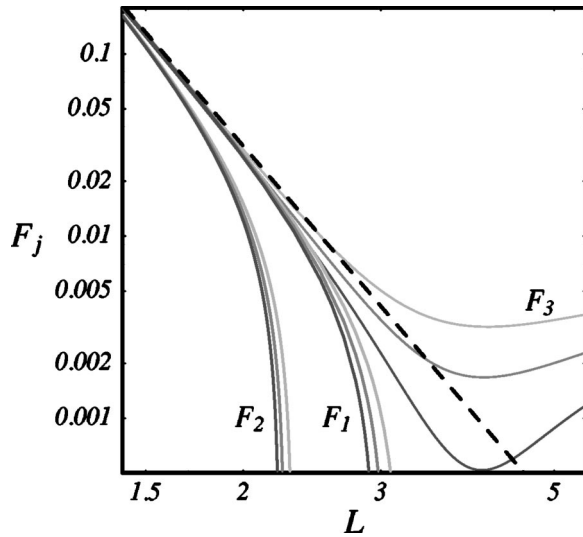


FIG. 3. Pulling force F_j as a function of L for the purely rigid case described by Eqs. (7), (10), and (12). The dashed line shows the nonmagnetic case and the solid curves show the magnetic situations with $N_B^\perp = 5.0 \times 10^{-2}$, $N_B^{\text{azi}} = 5.0 \times 10^{-3}$, and $N_B^{\text{rad}} = 5.0 \times 10^{-3}$. The solid curves are plotted in hues of gray for $b_0 = 1.2$ (light), $b_0 = 1.7$ (medium), and $b_0 = 2.2$ (dark).

term that will tend to *increase* adhesion. Under such circumstances, the evaluation of Eq. (5) for the radial field case leads to a *dimensionless* force

$$F_3 = \frac{\dot{b}}{b^5} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^2 - N_B^{\text{rad}} \left\{ \ln \left[1 + (\gamma - 1) \frac{b_0}{b} \right] - \left(1 + \frac{M_0}{H_0} \right) \times \left[\frac{(\gamma - 1)}{\frac{b}{b_0} + (\gamma - 1)} \right] \right\}, \quad (12)$$

where $\gamma = (R_0/a)^2$ and $N_B^{\text{rad}} = (\pi \mu_0 M_0 H_0 a^2) / (2k\delta)$ is a magnetic Bond number for the radial magnetic field configuration. In the case of a linear relationship $M = \chi H$, the Bond number can be written $N_B^{\text{rad}} = (\pi \mu_0 \chi H_0^2) / (2k\delta)$. As in the other cases, lengths and velocities in Eq. (12) have been re-scaled by δ and V , respectively, and $\dot{b} = 1$.

We note in passing that by taking the limit $a \rightarrow 0$ and eliminating the magnetic terms (by simply dropping the terms involving the magnetic Bond numbers), all three force equations (7), (10), and (12) reduce to the equivalent expression derived in Ref. [8] for nonmagnetic viscous fluids. As we will see in the remaining sections, the magnetic terms appearing in these force expressions enrich the physics involved considerably, establishing an interesting link between adhesion and magnetic phenomena.

III. NONCOMPLIANT APPARATUS CASE

Before turning our attention to the complete force-distance curves including compliance and magnetic effects, let us analyze Eqs. (7), (10), and (12) in greater detail and

explore the relevant aspects coming from the magnetic contribution. Figure 3 is a log-log plot that depicts the pulling force F_j for the rigid apparatus case where $b = L$ (and $\dot{b} = 1$). Along with the usual nonmagnetic case (dashed line), we have plotted three sets of curves: (1) the perpendicular case given by Eq. (7) with $N_B^\perp = 5.0 \times 10^{-2}$, (2) the azimuthal case given by Eq. (10) with $N_B^{\text{azi}} = 5.0 \times 10^{-3}$, and (3) the radial case given by Eq. (12) with $N_B^{\text{rad}} = 5.0 \times 10^{-3}$. The shading represents different initial plate spacings given by $b_0 = 1.2$ (light gray), $b_0 = 1.7$ (medium gray), and $b_0 = 2.2$ (dark gray). In addition, we have set the parameters $R_0 = 100$, $\gamma = 100$, and $M_0/H_0 = 3.0$.

It is clear from Fig. 3 that the presence of magnetic forces can alter the adhesion force in markedly different ways. For relatively small separation L the curves are quite similar to the nonmagnetic case for all magnetic field configurations. However, as L is increased, the magnetic cases depart more and more from the nonmagnetic situation. Eventually, each magnetic case is split further depending on the initial plate spacing b_0 .

We note that the behavior of the perpendicular and azimuthal field configurations is qualitatively similar. In both cases, the adhesion force is decreased (compared to a nonmagnetic liquid) throughout the entire range of L . The azimuthal case leads to a much more dramatic decrease than the perpendicular case but the perpendicular case appears to be more sensitive to the initial plate spacing.

Interestingly, the adhesion force in the perpendicular and azimuthal magnetic field configurations becomes negative and then falls asymptotically to zero as L increases. This is in stark contrast to a nonmagnetic liquid in which the adhesion force is always positive and drops smoothly to zero as $1/L^5$. Thus, in these two magnetic field configurations, this force will cease to be an *adhesion* force and will instead become a sort of *separation* force. Thus, instead of pulling on the plates, one would need to start pushing to keep the plate velocity constant. Thus it may be possible to create a ferrofluid adhesive such that the adhesive force can be completely eliminated simply by bringing a small hand magnet up close.

The situation is even more interesting in the radial field configuration. Here, we have the possibility of increased or decreased adhesion compared to a nonmagnetic liquid. This configuration is also much more sensitive to the initial plate spacing than the other configurations, with smaller initial plate spacings leading to more increased adhesion. However, unlike the perpendicular and azimuthal cases, the adhesion in the radial case may or may not become negative as L increases. This depends on the value of the parameter M_0/H_0 (the magnetic susceptibility χ in the linear case). In addition, by taking the large b limit of Eq. (12), we see that $F_3 \sim 1/L$ so that for large enough L , the adhesion force in the radial case will always end up larger than the adhesion force in the nonmagnetic case. Thus, in the radial case, there are two possibilities. Either the adhesion force remains an adhesion force throughout the entire plate separation process, or the adhesion force first becomes a separation force and then returns to being an adhesion force as the plates are separated.

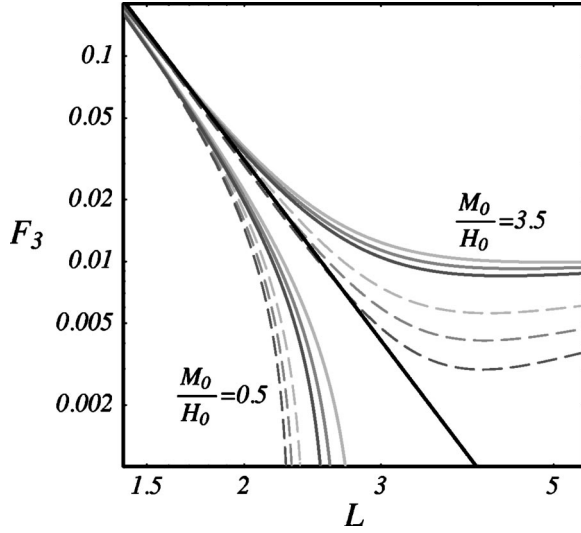


FIG. 4. Pulling force F_3 for radial magnetic field case described by Eq. (12). The solid black line denotes a nonmagnetic fluid while the dashed (solid) gray curves have $\gamma=100$ ($\gamma=25$). The curves with $M_0/H_0=0.5$ lead to decreased adhesion while those with $M_0/H_0=3.5$ lead to increased adhesion for small plate spacings.

Figure 4 examines the radial situation further by varying both γ and M_0/H_0 . As in Fig. 3, $N_B^{\text{rad}}=5.0 \times 10^{-3}$ and the shading represents the same initial plate spacings $b_0=1.2$ (light gray), $b_0=1.7$ (medium gray), and $b_0=2.2$ (dark gray). The solid black line is the nonmagnetic case and the dashed (solid) curves have $\gamma=100$ ($\gamma=25$) and M_0/H_0 is either 0.5 or 3.5 as labeled in the figure. The most obvious feature of Fig. 4 is that the value of M_0/H_0 determines whether adhesion is increased or decreased for small plate spacings. Of course, for large enough plate spacing, we have already seen that adhesion will be increased relative to a nonmagnetic liquid. As a practical matter, there is a point at which the fluid film will rupture or the lubrication approximation will no longer be valid. Selecting M_0/H_0 can therefore effectively result in a magnetic liquid that either increases or decreases adhesion throughout the useful range of b .

Another relevant physical quantity of interest is the work of separation given by

$$W_j = \int_{b_0}^{L_f} F_j dL. \quad (13)$$

For a nonmagnetic liquid and for the perpendicular and azimuthal situations, the upper limit of integration can safely be taken to be $L_f=\infty$ with no problems. However, in the radial magnetic field configuration, the large L force varies as $1/L$ so the work of separation diverges logarithmically. This causes some difficulty in trying to calculate the work of separation as there is no obvious termination point for this integral. We follow the approach adopted in Ref. [6], and integrate Eq. (13) to a finite end point. Consistently with the restrictions imposed by the lubrication approximation, we take $L_f=\beta$, where $\beta \gg b_0$. Using $\beta=100$, Fig. 5 illustrates how the work of separation W_3 varies with initial plate spacing b_0 for a nonmagnetic liquid (dashed) and for a magnetic

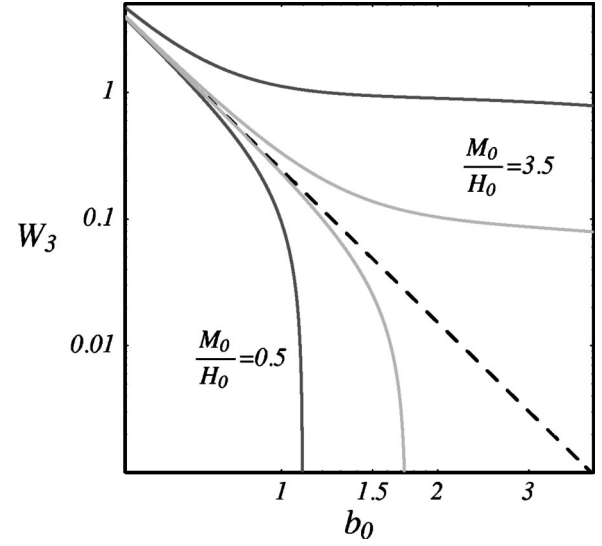


FIG. 5. Work of separation W_3 as a function of b_0 for the purely rigid case for a nonmagnetic (dashed) and a magnetic liquid in the radial field configuration (solid). Two values of M_0/H_0 are used and the light (dark) gray curves have $N_B^{\text{rad}}=5.0 \times 10^{-4}$ ($N_B^{\text{rad}}=5.0 \times 10^{-3}$).

liquid in the radial field configuration (solid). As in Fig. 4, we take M_0/H_0 as either 0.5 or 3.5 and use two different magnetic Bond numbers, $N_B^{\text{rad}}=5.0 \times 10^{-4}$ (light gray) and $N_B^{\text{rad}}=5.0 \times 10^{-3}$ (dark gray). The results for the azimuthal and perpendicular cases are qualitatively similar to the $M_0/H_0=0.5$ results in the radial case and are therefore not shown.

IV. COMPLIANT APPARATUS CASE

As briefly discussed at the beginning of this work, typical force-distance curves increase sharply during the initial stages of the plate separation process. This effect is not described by the ferrohydrodynamic forces within the ferrofluid, but is a result of the elasticity of the apparatus [6,8]. Now we examine the complete form of the force-distance curves, including the magnetic properties of the ferrofluid and the intrinsic flexibility of the lifting machine. To accomplish this, we adapt a method originally developed by Francis and Horn [6] for their sphere-plate geometry with nonmagnetic fluids.

It is assumed that, during the entire separation process, there is a perfect balance between the viscous, ferrohydrodynamic force and the spring restoring force $L-b$ which results from the deflection of the apparatus. By equating Eqs. (7), (10), and (12), to $L-b$, we obtain nonlinear first order differential equations for $b=b(t)$. Then, using the relation $L=b_0+t$ we can write $\dot{b}=db/dL$ so that

$$F_j(b, b') = L - b, \quad (14)$$

where the prime denotes differentiation with respect to L . We utilize differential equations (14) to obtain the complete force-distance profiles. We solve them numerically for $b(L)$ and find the force curves from $F_j=L-b(L)$.

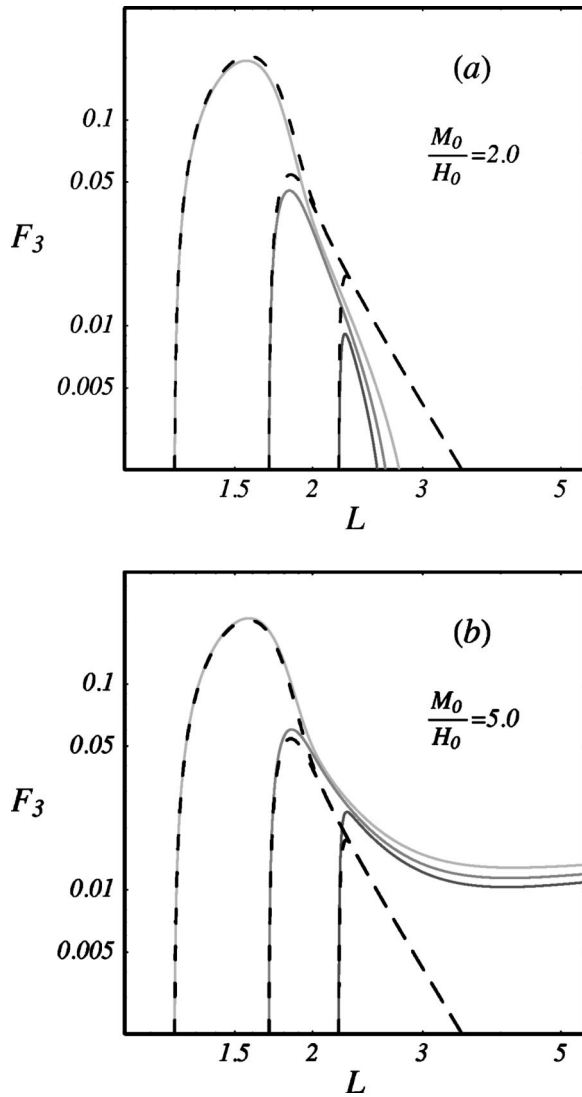


FIG. 6. Force $F_3 = L - b(L)$ as a function of displacement L for the flexible apparatus case for three initial plate spacings b_0 . The curves are obtained by numerically solving Eq. (14) with F_j given by Eq. (12). The black dashed curves are for zero magnetic field and the gray solid curves have $N_B^{\text{rad}} = 5.0 \times 10^{-3}$, $\gamma = 100$, and $b_0 = 1.2$ (light), $b_0 = 1.7$ (medium), and $b_0 = 2.2$ (dark).

Figure 6 presents the complete force-distance curves for thin layers of ferrofluid obtained by numerically solving Eq. (14) with F_3 given by Eq. (12). It compares the curves in the absence of magnetic field (black dashed curves) with those calculated for nonzero applied field (gray solid curves). We use $N_B^{\text{rad}} = 5.0 \times 10^{-3}$, $\gamma = 100$, and two values of M_0/H_0 . As in Figs. 3 and 4, the gray hues indicate the initial plate spacing with $b_0 = 1.2$ (light gray), $b_0 = 1.7$ (medium gray), and $b_0 = 2.2$ (dark gray). The perpendicular and azimuthal field results are again qualitatively similar to the radial case with $M_0/H_0 = 2.0$ and are therefore not shown.

By inspecting Figs. 6(a) and 6(b), we conclude that during the beginning of the plate separation process the system is dominated by the elastic force regardless of the nature (perpendicular, azimuthal, or radial) of the applied magnetic field. We also note that the peak adhesive force decreases

considerably in the perpendicular and azimuthal cases but can be either decreased or increased in the radial case depending on M_0/H_0 . In all field configurations, this increase or decrease in the peak force is more pronounced for larger b_0 .

Towards the end of the lifting process the contribution from the ferrohydrodynamic force becomes much more important. One can see from Figs. 6(a) and 6(b) that the behavior of the force can be “controlled” in some sense depending on the type of ferrofluid and the field configuration. When the applied field is zero, there is no magnetic force and all cases converge to the same $1/L^5$ behavior that was seen in Fig. 3. In the perpendicular and azimuthal magnetic field cases, the magnetic forces decrease adhesion and the force curves all drop off more rapidly than in the nonmagnetic case, separated slightly based on the initial plate spacing. In the radial case, the situation is a little different. Here, the magnetic force can increase or decrease adhesion during the initial stages of the pulling process. However, at some point all of the radial force curves will drop off as $1/L$, much less rapidly than in the nonmagnetic case. By choosing an appropriate ferrofluid (that is, by tuning M_0/H_0), one can presumably control when the force curves cross over from reducing adhesion to increasing adhesion.

Finally, observe that for a given b_0 , the area below the gray solid curves in Fig. 6(a) [Fig. 6(b)] are considerably smaller (larger) than the corresponding area under the black dashed curves. This implies that the magnetic forces can reduce (enhance) the energy of separation as anticipated by the rigid case results depicted in Fig. 5. From Fig. 6 we conclude that both the peak adhesive force and the separation energy are significantly influenced by magnetic forces.

V. CONCLUSION

In this paper, we have shown that the introduction of a ferrofluid plus the action of an appropriate magnetic field configuration in a modified adhesion measurement system permits the adhesive strength to be opportunely controlled by magnetic means. Our analytical and numerical results show that the adhesive strength of a ferrofluid is reduced if the magnetic field is perpendicular to the plates or applied in-plane with azimuthal symmetry. Additionally, we have shown that the adhesive strength can be enhanced or reduced if the external field is in plane and pointing radially outward. So, having a bond strength adaptable to different applications, a magnetic fluid can perform different functions: it could either reduce adhesion when mechanical, nondestructive removal is needed, or increase adhesion when a high-shear strength, tough structural adhesive is necessary.

The ferrofluid thus acts as a sort of adjustable “magnetic glue,” for which the adhesion strength is regulated by an applied magnetic field. This important and suggestive controlling mechanism is not only intrinsically interesting, but may allow the development of technological applications overlapping the fields of adhesion and ferrofluid research. Possible future applications may include the development of adhesive products in which adhesion could be switched on and off by a suitable magnetic field. In particular, removing

the adhesive force via a small hand-held magnet seems like a very useful possibility. Recent interesting studies have demonstrated that the adhesive properties of some solid/polymer interfaces can indeed be tuned by temperature [27,28]. The magnetically monitored adhesive process we present here would certainly add a welcome versatility to adhesion technology, even possibly allowing the emergence of a systematic way of controlling the reversibility of adherence using magnetic fields.

Our theoretical work makes specific predictions that have not yet been subjected to experimental check. It would be of interest to examine the relationship between adhesion and magnetic phenomena by performing probe-tack measurements with ferrofluids subjected to perpendicular, azimuthal, and in particular, radial magnetic field configurations [24,29,30]; these might even include such configurations as rotating [31–33] magnetic fields. A natural extension of the current work would be the investigation of the influence of magnetic forces on the adhesive properties of more complex magnetic fluids, such as magnetorheological suspensions [34], in which other important effects like elasticity, plasticity, shear thinning, and shear thickening could be monitored by external magnetic fields. In summary, we hope this work will instigate further theoretical and experimental studies on this rich topic.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank the Brazilian Research Council/CNPq (J.A.M. and R.M.O.) and Dickinson College (D.P.J.) for financial support of this research. We gratefully acknowledge useful communications and stimulating discussions with Anke Lindner, Cyprien Gay, José Bico, Michael Widom, Raymond Goldstein, and Alexandre Rosas. We are greatly indebted to Andrejs Cebers for important discussions and useful suggestions.

APPENDIX: CALCULATION OF MAGNETIC FORCES USING AN ENERGY APPROACH

In this work, the magnetic effects were taken into account via a modified Darcy's law given by Eq. (1). This presupposes that one can write the magnetic forces in terms of a scalar potential Ψ_j . Indeed, the azimuthal and radial configurations both led to relatively simple scalar potentials and the magnetic forces could be calculated in closed form as shown in Eqs. (10) and (12). However, in the perpendicular configuration the scalar potential is a more complicated integral expression given by Eqs. (6) and (8) that leads to an even more complex expression for the force via Eq. (7). Because of the difficulties involved in calculating the forces in the perpendicular situation, we wondered whether there was an alternative method for calculating this force.

Because most of our difficulties involved integrating rather complicated expressions, it seemed appropriate to try to find the force using a differentiation process. Specifically, for a ferrofluid droplet whose magnetic energy is given as a function of height by $\mathcal{E}_m(b)$, the force exerted by the ferrofluid is given by

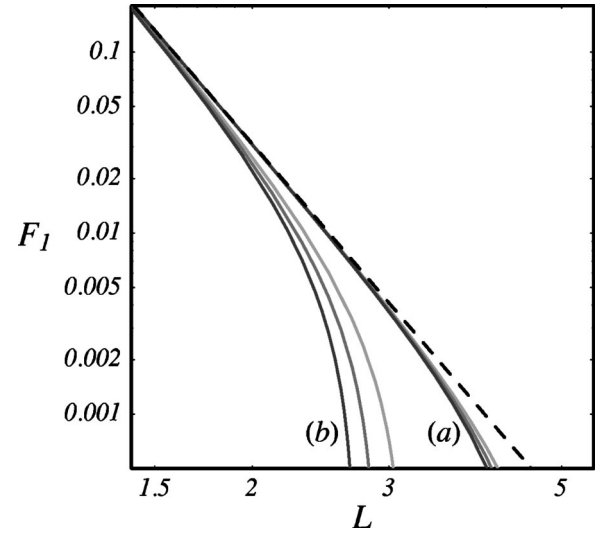


FIG. 7. Adhesion force for the perpendicular field configuration with the magnetic terms calculated via (a) the Darcy approach using Eq. (7), and (b) the energy approach using Eq. (A7). We have set $N_B^+ = 5.0 \times 10^{-3}$, $R_0 = 100$, and used the same initial plate spacings as before, $b_0 = 1.2$ (light gray), $b_0 = 1.7$ (medium gray), and $b_0 = 2.2$ (dark gray). The black dashed line shows the nonmagnetic situation.

$$F_m = - \frac{d\mathcal{E}_m}{db}. \quad (\text{A1})$$

Now, the change in magnetic energy obtained by introducing a volume of magnetic fluid into a static magnetic field in free space is [11,12]

$$\mathcal{E}_m = - \frac{1}{2} \int \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}_0 d\mathcal{V}, \quad (\text{A2})$$

where $\mathbf{M}$ is the magnetization of the ferrofluid, $\mathbf{B}_0$ is the field that would be present in the absence of the ferrofluid, and the integration is taken over the volume of the ferrofluid $\mathcal{V}$. For example, in the azimuthal situation, we have a ferrofluid cylindrical annulus of height b and inner (outer) radius a (R). To be consistent with the approximations used in the Darcy approach, we assume the applied magnetic field given by $\mathbf{H}_a = (H_0 a/r) \hat{\mathbf{e}}_\theta$ and magnetization given by $\mathbf{M} = (M_0 a/r) \hat{\mathbf{e}}_\theta$. Equation (A2) then gives

$$\mathcal{E}_m^{\text{azi}} = - \pi \mu_0 M_0 H_0 a^2 b \ln \left(\frac{R}{a} \right). \quad (\text{A3})$$

Using volume conservation and performing the required differentiation, we obtain a magnetic force (scaled by $k\delta$) of

$$F_m^{\text{azi}} = N_B^{\text{azi}} \left\{ \ln \left[1 + (\gamma - 1) \frac{b_0}{b} \right] - \frac{(\gamma - 1)}{\frac{b}{b_0} + (\gamma - 1)} \right\}, \quad (\text{A4})$$

where γ and N_B^{azi} are as previously defined. Equation (A4) indicates an upward force and is exactly the same as the magnetic force given in Eq. (10) as expected. Note that the minus sign difference between Eq. (A4) and the correspond-

ing terms in Eq. (10) is due to our choice of coordinate system in describing the adhesion force.

Let us now try the same approach with the radial field configuration. In this case we have an applied field given by $\mathbf{H}_a = (H_0 a/r)\hat{\mathbf{e}}_r$ and a magnetization given by $\mathbf{M} = (M_0 a/r)\hat{\mathbf{e}}_r$. Carrying out the energy and force calculations, we find that the magnetic force in the radial case is exactly the same as in the azimuthal case given by Eq. (A4). At first this might seem strange since the radial and azimuthal magnetic fields point in different directions. However, since it is the *gradient* of the field magnitude that determines the force and the spatial dependence is identical in both situations, this should not be too surprising. What is surprising is the fact that in the radial situation, the magnetic force calculated from the energy as given by Eq. (A4) does not equal the magnetic force calculated from the Darcy approach as given in Eq. (12). The difference between the two approaches can be traced to the “surface” force term that comes from the boundary condition (3). This means that if we want to use the energy method, we must augment the force by inclusion of these surface terms. Specifically, Eq. (A1) should be replaced by

$$F_m = -\frac{d\mathcal{E}_m}{db} + \frac{1}{2}\mu_0 \int dA [M_{jz}^2(r) - M_{jr}^2(R)]. \quad (\text{A5})$$

Here, as in Sec. II, the integration is taken over the cross sectional area $\mathcal{A}$ of the ferrofluid surface in contact with the upper plate.

Although Eq. (A5) is not quite as simple as Eq. (A1), it is still potentially much easier to use in some situations than Eq. (5). As an example, let us now consider the perpendicular field configuration. In this case, the ferrofluid droplet is in the shape of a cylinder of height b and radius R . The energy of this configuration, is, apart from a constant term proportional to the volume, given by [14,15]

$$\mathcal{E}_m^\perp = \frac{4}{3}\mu_0 M^2 R^3 \{1 - q^{-3}[(2q^2 - 1)E(q) + (1 - q^2)K(q)]\}, \quad (\text{A6})$$

where K and E are, respectively, complete elliptic integrals of the first and second kind, and $q^2 = \zeta^2/(1 + \zeta^2)$ (recall that

$\zeta = 2R/b$). Again, using volume conservation and performing the differentiation, Eq. (A5) gives a dimensionless force of

$$F_m^\perp = N_B^\perp \left(\frac{b_0}{b}\right) \left\{ \frac{q^3 - (2 - q^2)E(q) + 2(1 - q^2)K(q)}{q^2 \sqrt{1 - q^2}} + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (\text{A7})$$

where $N_B^\perp$ is defined as before.

Equation (A7) gives a closed form expression for the magnetic contribution to the adhesion force in the perpendicular field configuration. But this information is supposedly contained in Eq. (7) as well. Figure 7 shows the adhesion force as calculated using both (a) the Darcy approach and (b) the energy approach. Although qualitatively similar, these two forces are clearly *not* the same. The energy approach shows a dramatically decreased adhesion force. But why? It turns out that when using the Darcy approximation in the perpendicular field configuration, one uses only the lowest nonvanishing component of the magnetic field [16], whereas in the energy calculation, the entire demagnetizing field is taken into account. Thus it seems as though the energy approach in this case should provide a more accurate approximation to the magnetic force. Additionally, the energy approach gives a closed form expression for the magnetic force and is therefore much simpler to use in calculations.

We find it a bit surprising that there is such a large difference between the Darcy approach and the energy approach in the perpendicular configuration. This suggests that the radial component of the demagnetizing field may play an important role in determining the evolution of a ferrofluid drop. Of course, the results reported in Ref. [16] show excellent agreement with experiments suggesting that the radial component is not a relevant factor in determining the final state patterns. Clearly, this is an unresolved issue. It would be very interesting to know exactly what role (if any) the radial component plays in these ferrofluid evolutions.

-
- [1] C. Gay and L. Leibler, *Phys. Today* **52**(11), 48 (1999).
 - [2] D. W. Aubrey, *Aspects of Adhesion*, edited by K. W. Allen (Elsevier, New York, 1988).
 - [3] D. J. Yarusso, *Adhesion Science and Engineering—The Mechanics of Adhesion*, edited by D. A. Dillard and A. V. Pocius (Elsevier, Amsterdam, 2002).
 - [4] A. Zosel, *Colloid Polym. Sci.* **263**, 541 (1985).
 - [5] H. Lakrout, P. Sergot, and C. Creton, *J. Adhes.* **69**, 307 (1999).
 - [6] B. A. Francis and R. G. Horn, *J. Appl. Phys.* **89**, 4167 (2001).
 - [7] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, and P. Fabre, *Europhys. Lett.* **62**, 244 (2003).
 - [8] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, and D. Bonn, *J. Appl. Phys.* **93**, 1557 (2003).

- [9] M. Tirumkudulu, W. B. Russel, and T. J. Huang, *Phys. Fluids* **15**, 1588 (2003).
- [10] J. A. Miranda, *Phys. Rev. E* **69**, 016311 (2004).
- [11] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985), and references therein.
- [12] E. Blums, A. Cebers, and M. M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (de Gruyter, New York, 1997), and references therein.
- [13] P. G. Saffman and G. I. Taylor, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **245**, 312 (1958).
- [14] A. O. Tsebers and M. M. Maiorov, *Magnetohydrodynamics* (N.Y.) **16**, 21 (1980).
- [15] S. A. Langer, R. E. Goldstein, and D. P. Jackson, *Phys. Rev. A* **46**, 4894 (1992).

- [16] D. P. Jackson, R. E. Goldstein, and A. O. Cebers, Phys. Rev. E **50**, 298 (1994).
- [17] G. Pacitto, C. Flament, J.-C. Bacri, and M. Widom, Phys. Rev. E **62**, 7941 (2000).
- [18] C. Flament, S. Lacis, J.-C. Bacri, A. Cebers, S. Neveu, and R. Perzynski, Phys. Rev. E **53**, 4801 (1996).
- [19] M. Zahn and R. E. Rosensweig, IEEE Trans. Magn. **16**, 275 (1980).
- [20] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **62**, 2985 (2000).
- [21] D. P. Jackson and J. A. Miranda, Phys. Rev. E **67**, 017301 (2003).
- [22] A. O. Cebers, Magnetohydrodynamics (N.Y.) **17**, 113 (1981).
- [23] A. O. Cebers, Magnetohydrodynamics (N.Y.) **21**, 142 (1985).
- [24] W. H. Heiser and J. A. Shercliff, J. Fluid Mech. **22**, 701 (1965).
- [25] P. Ramamoorthy, Phys. Fluids **4**, 1444 (1961).
- [26] S. Y. Molokov and J. E. Allen, J. Phys. D **25**, 393 (1992).
- [27] G. de Crevoisier, P. Fabre, J.-M. Corpart, and L. Leibler, Science **285**, 1246 (1999).
- [28] S. Khongtong and G. S. Ferguson, J. Am. Chem. Soc. **124**, 7254 (2002).
- [29] D. R. Ohlsen and P. B. Rhines, J. Fluid Mech. **338**, 35 (1997).
- [30] R. E. Rosensweig, J. Browaeys, J.-C. Bacri, A. Zebib, and R. Perzynski, Phys. Rev. Lett. **83**, 4904 (1999).
- [31] J.-C. Bacri, A. O. Cebers, and R. Perzynski, Phys. Rev. Lett. **72**, 2705 (1994).
- [32] A. Cebers, Phys. Rev. E **66**, 061402 (2002).
- [33] C. Lorenz and M. Zahn, Phys. Fluids **15**, S4 (2003).
- [34] See, for instance, A. Kawai *et al.* in *Proceedings of the Eighth International Conference on Electro-Rheological and Magneto-Rheological Suspensions*, edited by G. Bossis (World Scientific, Singapore, 2002).

APÊNDICE E

Time-dependent gap Hele-Shaw cell with a ferrofluid: Evidence for an interfacial singularity inhibition by a magnetic field [Phys. Rev. E 69, 066312 (2004)]

Time-dependent gap Hele-Shaw cell with a ferrofluid: Evidence for an interfacial singularity inhibition by a magnetic field

José A. Miranda* and Rafael M. Oliveira

Laboratório de Física Teórica e Computacional, Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Pernambuco 50670-901, Brazil

(Received 19 November 2003; revised manuscript received 18 March 2004; published 17 June 2004)

We consider the flow of a ferrofluid droplet in a Hele-Shaw cell with a time-dependent gap width. When the surface tension and applied magnetic field are zero, interfacial instabilities develop and the droplet breaks. We execute a mode-coupling approach to the problem and focus on understanding how the development of singularities is affected by the action of an external field. Our analytical results indicate that the introduction of an azimuthal magnetic field profoundly modifies pattern formation, allowing the inhibition of interfacial singularities. We suggest the magnetic field can be used as a controllable parameter to discipline singular behavior.

DOI: 10.1103/PhysRevE.69.066312

PACS number(s): 47.20.Ma, 47.54.+r, 68.35.Np, 75.50.Mm

I. INTRODUCTION

The development of finite-time singularities is of fundamental importance to a broad class of hydrodynamic problems, such as the ones related to distributions of vorticity evolving under Euler's equation [1], jet breakup [2], and droplet fission/snap-off [3]. Within this group of problems, the dynamics of the interface between viscous fluids confined in a Hele-Shaw cell (Saffman-Taylor problem) has received much attention [4–7]. In the absence of surface tension, these constrained flows are known to form cusp singularities and droplet fission at the fluid-fluid interface. Recently, an interesting work by Magdaleno *et al.* [6] studied the possibility of preventing cusp singularities for zero surface tension flows in a rotating Hele-Shaw cell. They have shown that for a subclass of exact solutions there is a critical rotation rate above which cusp formation is suppressed. Interestingly, it has been found in Ref. [6] that such a critical value for the rotation rate can be predicted by linear stability calculations. These results open up the possibility of the existence of similar types of control parameters which could inhibit the formation of finite-time singularities in other important confined flow systems.

A couple of years ago, Shelley and collaborators [7] studied another variant of the traditional Saffman-Taylor problem, and examined the dynamical evolution of a fluid drop in a Hele-Shaw cell with a time-dependent gap width. In such a cell the pressure gradient within the fluid is due to the lifting of the upper plate, leading to the formation of visually striking fingering patterns. The sophisticated numerical simulations performed in Ref. [7] revealed that, in the absence of surface tension, a dumbbell-shaped droplet would fission into two, characterizing a fissioning instability. The fluid flow in lifting Hele-Shaw cells is not only intrinsically interesting, but also of considerable importance to adhesion related problems [8–11]. Due to the practical and academic relevance of the lifting cell problem it is of interest to study

ways of controlling emerging interfacial singularities.

In this work we study the evolution of a fluid droplet in a time-dependent gap Hele-Shaw cell, and consider the case in which the fluid used is a *ferrofluid* [12,13]. Ferrofluids are colloidal suspensions of nanometer-sized magnetic particles suspended in a nonmagnetic carrier fluid. These fluids are typically Newtonian and behave superparamagnetically. We investigate the situation in which the ferrofluid droplet evolves under the influence of a simple magnetic field configuration exhibiting azimuthal symmetry, produced by a current-carrying wire perpendicular to the cell plates. We perform a weakly nonlinear analysis of the problem, and find theoretical evidence indicating that the azimuthal magnetic field could be used to inhibit the emergence of interfacial singularities, even when surface tension is zero. One must exercise caution in using a weakly nonlinear approach to deal with the zero surface tension case, which presents subtle singular effects [14]. On the other hand, the present weakly nonlinear analysis serves as an alternative analytical tool to tackle the problem, being nonperturbative in surface tension. Remarkably, it has been shown recently that weakly nonlinear predictions of the Saffman-Taylor problem at low orders are compared satisfactorily to exact solutions for zero and nonzero surface tension cases [15]. The magnetically monitored process we present here certainly add a welcome versatility to usual singularity formation problems in nonmagnetic fluids, allowing the emergence of a systematic way of controlling singular behavior using ferrofluids and appropriate magnetic fields.

The layout of the rest of the paper is as follows: Section II formulates our theoretical approach. We perform a Fourier decomposition of the interface shape, and from a modified form of Darcy's law study the influence of an azimuthal magnetic field on the development of interfacial patterns in a time-dependent gap Hele-Shaw cell. Coupled, nonlinear, ordinary differential equations governing the time evolution of Fourier amplitudes are derived in both nonzero and zero surface tension cases. Section III discusses linear and weakly nonlinear dynamics, focusing on the zero surface tension limit. Section III A briefly discusses our linear stability re-

*Email address: jme@df.ufpe.br

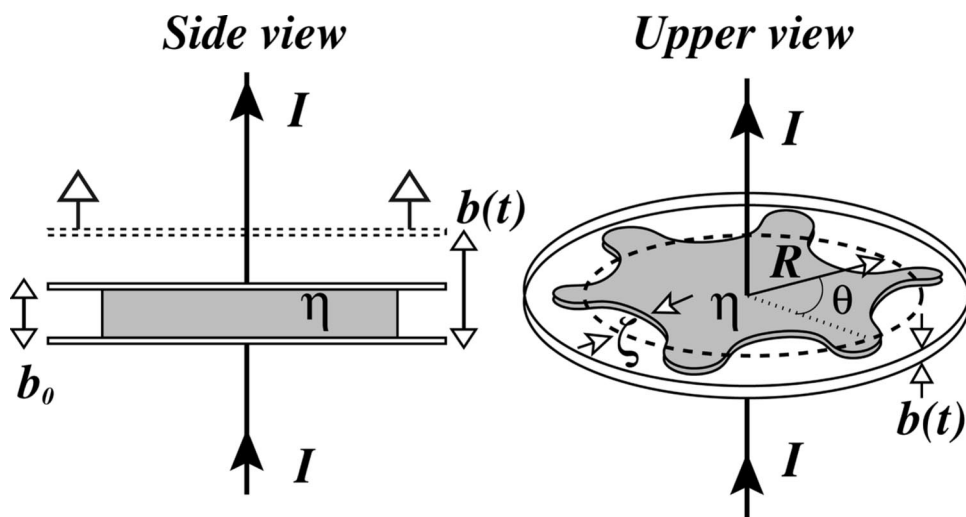


FIG. 1. Schematic representation of a time-dependent gap Hele-Shaw cell with a ferrofluid. The azimuthal magnetic field is produced by a long, straight wire carrying an electric current I .

sults, which suggest control of interfacial singularities by magnetic means. In Sec. III B we show that some important interfacial features can indeed be predicted and more quantitatively explained by our analytical mode-coupling approach. At second order we describe a finger competition phenomenon, and use it to propose a mechanism responsible for the inhibition of interfacial singularities by an azimuthal magnetic field. Our conclusions are summarized in Sec. IV.

II. THE MODE-COUPLING EQUATION

Figure 1 sketches the geometry of the lifting cell problem. Consider an incompressible ferrofluid of viscosity η located between two narrowly spaced flat plates. The outer fluid is nonmagnetic, and of negligible viscosity. The initial plate spacing is represented by b_0 , and at a given time t the plate-plate distance is denoted by $b=b(t)$. A long, straight current-carrying wire is directed along the axis perpendicular to the plates. The magnetic field produced is $\mathbf{H}=I/(2\pi r)\hat{\mathbf{e}}_\theta$, where r is the distance from the wire, I represents the electric current, and $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ is a unit vector in the azimuthal direction.

To investigate the dynamical evolution of the interface in a time-dependent gap Hele-Shaw cell, we describe its perturbed shape as $\mathcal{R}(\theta,t)=R(t)+\zeta(\theta,t)$, where $\zeta(\theta,t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\zeta_n(t)\exp(in\theta)$, represents the net interface perturbation with Fourier amplitudes $\zeta_n(t)$, and discrete azimuthal wave numbers $n=0,\pm 1,\pm 2,\dots$. The unperturbed ferrofluid interface has initial and final radii defined as R_0 and $R=R(t)$, respectively. We consider a current-carrying wire of negligible radius, so that the conservation of ferrofluid volume leads to the useful relation $R^2b=R_0^2b_0$, where both R and b are time dependent. Notice that the Fourier expansion ζ includes the $n=0$ mode, with $\zeta_0=-(1/2R)\sum_{n\neq 0}|\zeta_n(t)|^2$.

For the quasi-two-dimensional geometry of the Hele-Shaw cell, we employ the lubrication approximation and reduce the three-dimensional flow to an equivalent two-dimensional one by averaging over the direction perpendicular to the plates. We assume that the ferrofluid is uniformly magnetized and that its magnetization is collinear with the external field $\mathbf{M}=\chi\mathbf{H}$ [16,17], where χ is the constant magnetic susceptibility. This amounts to neglecting the

demagnetizing field relative to the applied field and can be justified for low magnetic susceptibility of the ferrofluid, or for large applied fields that saturate the ferrofluid magnetization. It can also be justified for very thin ferrofluid films when the field is parallel to the plane of the cell.

As in the traditional Hele-Shaw problem, the flow in the ferrofluid is potential, $\mathbf{v}=-\nabla\phi$, but now with a velocity potential given by a modified Darcy's law [18]

$$\phi = \frac{b^2}{12\eta}[p - \Psi], \quad (1)$$

where p is the hydrodynamic pressure in the ferrofluid, $\Psi = \mu_0\chi H^2/2$ is a scalar potential containing the magnetic contribution, and μ_0 is the free-space permeability. In addition to the inclusion of the magnetic term in Eq. (1), we still have to consider a modified incompressibility condition of the ferrofluid, to account for the lifting of the upper plate [7] $\nabla\cdot\mathbf{v} = -\dot{b}(t)/b(t)$, where the overdot denotes total time derivative. So, in contrast to the usual Darcy's law case, the velocity potential (1) is no longer Laplacian and satisfies a Poisson equation

$$\nabla^2\phi = \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}, \quad (2)$$

where its right-hand side depends only on time. As a consequence of the latter, the solution of Eq. (2) differs from being harmonic by only the simple particular solution $\phi = br^2/(4b)$. The problem is then specified by two boundary conditions: (i) $p|_{\mathcal{R}} = \gamma\kappa$, which expresses the pressure jump at the interface, where κ denotes the interface curvature, and γ is the surface tension; and (ii) the kinematic boundary condition, which states that the normal components of each fluid's velocity $\mathbf{v}_n = -\hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\phi$ are continuous at the interface, where $\hat{\mathbf{n}}$ is the unit normal pointing outward.

We adapt a weakly nonlinear approach originally developed to study the traditional fixed-gap Hele-Shaw problem ($\dot{b}=0$) with nonmagnetic fluids ($M=0$) [19], to the current time-dependent gap situation with ferrofluids. We define Fourier expansions for the velocity potentials obeying Eq.

(2), and use the boundary conditions to express ϕ in terms of ζ_n . After some lengthy algebra, we obtain the *dimensionless* mode-coupling equation for the system (for $n \neq 0$)

$$\dot{\zeta}_n = \lambda(n)\zeta_n + \sum_{n' \neq 0} [F(n, n')\zeta_{n'}\zeta_{n-n'} + G(n, n')\dot{\zeta}_{n'}\zeta_{n-n'}], \quad (3)$$

where

$$\lambda(n) = \left[\frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} (|n| - 1) - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n|(n^2 - 1) - |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \right] \quad (4)$$

denotes the linear growth rate, and

$$F(n, n') = \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\dot{b}}{b} \left[|n| \left(\text{sgn}(nn') - \frac{1}{2} \right) - 1 \right] - \frac{\sigma b^2}{R^3} |n| \left[1 - \frac{n'}{2} (3n' + n) \right] + \frac{3}{2} |n| N_B \frac{b^2}{R^4} \right\}, \quad (5)$$

$$G(n, n') = \frac{1}{R} \{ |n| [\text{sgn}(nn') - 1] - 1 \} \quad (6)$$

represent second-order mode-coupling terms. The sgn function equals ± 1 according to the sign of its argument. In Eq. (3) in-plane lengths, $b(t)$, and time are rescaled by $L_0 = 2R_0$, b_0 , and the characteristic time $T = b_0 / |\dot{b}(0)|$, respectively. The parameter $\sigma = \gamma b_0^3 / [12\eta |\dot{b}(0)| L_0^3]$ denotes the dimensionless surface tension, and $N_B = \mu_0 \chi I^2 b_0^3 / [48\pi^2 \eta |\dot{b}(0)| L_0^4]$ represents the dimensionless magnetic Bond number. From now on, we work with the dimensionless version of the equations. We use Eq. (3) to examine how the scenario of finite-time singularities could be modified by the presence of an external magnetic field.

III. DISCUSSION

A. First order (linear stage)

Although at the level of purely linear analysis we do not expect to fully explain or understand the development of cusp singularities and droplet fissioning, some useful information may still be extracted from the linear growth rate (4). Hereinafter we assume that $\sigma = 0$ and consider a destabilizing driving $\dot{b}(t) > 0$. As in Ref. [7] we assume an exponentially increasing gap width $b(t) = \exp t$. This is precisely the ideal plate separation profile used in related adhesion probe-tack tests [10], since it provides a more uniform kinematics and nearly constant strain rate.

By inspecting Eq. (4) we notice that, in the absence of the magnetic field ($N_B = 0$) we have the traditional ill-posedness associated to an unregularized Saffman-Taylor instability. However, if $N_B \neq 0$ we observe that the magnetic term is always stabilizing. As time progresses the magnetic term increases [$\sim b^4(t)$] and eventually stabilizes the system. Note that the azimuthal symmetry and radial gradient of the magnetic field will result in a magnetic force directed radially inward [18]. This force tends to stabilize the fingering insta-

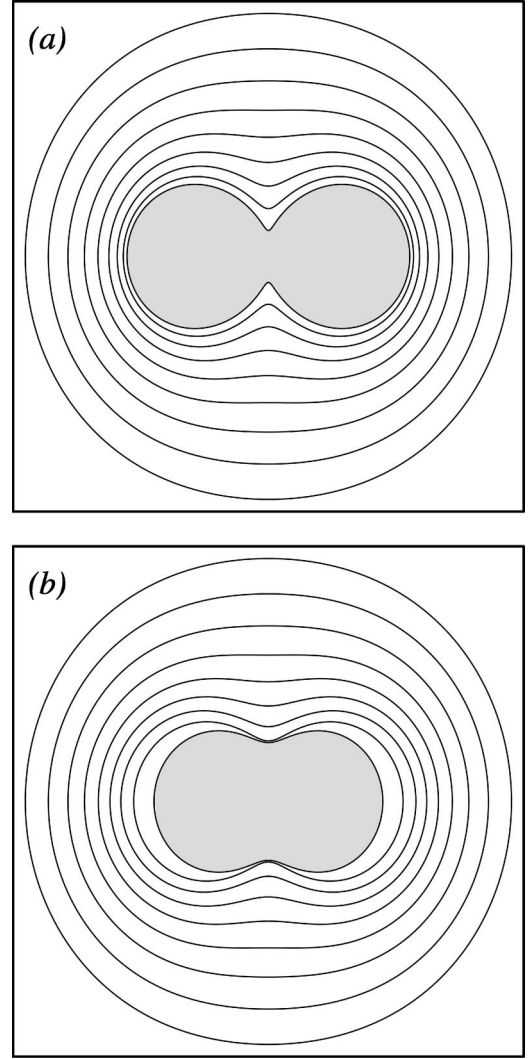


FIG. 2. Linear evolution of the interface using Eq. (3) for $n=2$ and $0 \leq t \leq 2$ in intervals of 0.25 when (a) $N_B=0$ and (b) $N_B=2.5 \times 10^{-5}$.

bilities arising at the ferrofluid interface, as the outer fluid enters into the system during the lifting of the upper plate. This peculiar magnetically induced stabilizing mechanism suggests that it is conceivable to have a nontrivial evolution starting from an unstable interface, but not necessarily developing finite-time singularities.

To illustrate the overall effect of the magnetic field on the formation of finite-time singularities, we show in Fig. 2 time overlaid plots of the linear interface evolution, obtained by integrating the first term on the right-hand side of Eq. (3), for $n=2$, and $0 \leq t \leq 2$, with equally spaced time steps of 0.25. We evolve from the initial radius $R_0 = 0.5$ with $|\zeta_n(0)| = R_0/10$. For clarity, the final droplet shape has been shaded. Figure 2(a) depicts the interface evolution in the absence of the magnetic field ($N_B=0$). The initial circular interface evolves to a dumbbell-like shape, and tends to fission into two separate circles as described by Ref. [7]. Even though we stopped showing the evolution before the complicated pinch-off process, there is a clear evidence that a fissioning singularity tends to occur when $N_B=0$. Note that the inter-

face deformation grows sufficiently large that *quantitative* accuracy of any perturbative approach is doubtful. However, as discussed in detail by Gingras and R  cz [20] the linear theory is still valid as long as the pattern interfaces do not overlap. In plotting Figures 2(a) and 2(b) we have respected such validity criterion.

Figure 2(b) depicts the interface evolution for the same set of parameters used to plot Fig. 2(a), but now considering the presence of a magnetic field with $N_B = 2.5 \times 10^{-5}$. It is evident that the magnetic field changes considerably the ultimate motion of the interface. We recall that the magnetic terms in Eq. (3) grow exponentially with time, mimicking the intrinsic tendency towards circularization exhibited in the usual time-dependent gap Hele-Shaw flows with nonzero surface tension [7]. The most noteworthy feature in Fig. 2(b) is the absence of an imminent fission at the central droplet region. This reinforces the possibility of inhibiting fissioning instability formation with the external azimuthal magnetic field.

B. Second order (weakly nonlinear stage)

To further investigate the suggestive possibility of inhibiting singularity formation by magnetic means, we turn our attention to the weakly nonlinear terms in the mode-coupling equation (3). The numerical simulations performed in Ref. [7] for $\sigma=0$ indicate that as the interface propagates inwards, the penetrating fingers compete and the interface begins to sharpen. During this process, the formation of interfacial cusps are expected. The collision of the opposing interfaces would result in a topological singularity, producing the incipient breakup of the contracting droplet. Obviously, this competition effect is intrinsically nonlinear and could not be properly addressed by a purely linear stability analysis. To get analytical insight about this situation, we use our weakly nonlinear analysis to describe the competition process in lifting cells, and study the role played by the magnetic field in possibly avoiding the collision of the opposing interfaces.

Within our approach, finger competition is related to the influence of a fundamental mode n , assuming n is even, on the growth of its subharmonic mode $n/2$ [19]. As we have pointed out at the beginning of this work, it has been shown [15,19] that weakly nonlinear predictions of the Saffman-Taylor problem at second-order show good agreement with exact solutions for both zero and nonzero surface tension cases. Moreover, it has also been found that this agreement is obtained even when the weakly nonlinear evolution is described by the coupling of a small number of Fourier modes [15,19]. The inclusion of additional modes would certainly result in a more accurate description of the interface shape, but the basic growth mechanisms of the viscous fingering process (spreading, splitting, and competition) can be fairly well reproduced by using only a couple of relevant Fourier modes. For the purposes of the finger competition mechanism we propose in this work, the relevant modes are precisely n and $n/2$.

To simplify our discussion it is convenient to rewrite the net perturbation ζ in terms of cosine $[a_n = \zeta_n + \zeta_{-n}]$ and sine $[b_n = i(\zeta_n - \zeta_{-n})]$ modes. Without loss of generality we may

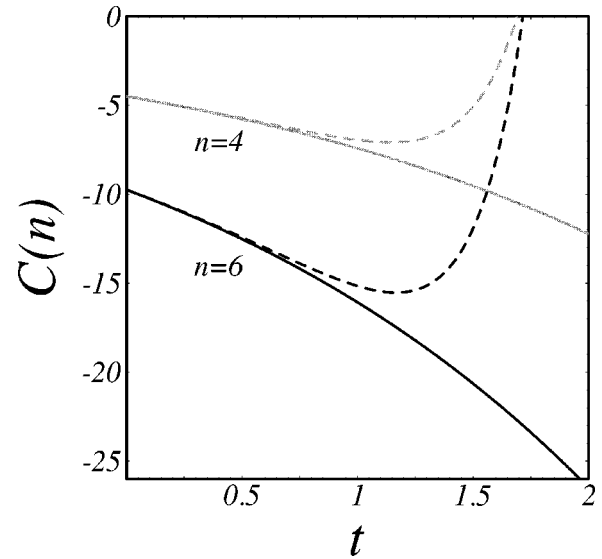


FIG. 3. $C(n)$ as a function of time for modes $n=6$ (black curves) and $n=4$ (gray curves). The magnetic Bond number is $N_B=0$ ($N_B = 2.5 \times 10^{-5}$) for the solid (dashed) curves.

choose the phase of the fundamental mode so that $a_n > 0$ and $b_n = 0$. From Eq. (3) we obtain the equations of motion for the subharmonic mode

$$\dot{a}_{n/2} = \{\lambda(n/2) + C(n)a_n\}a_{n/2}, \quad (7)$$

$$\dot{b}_{n/2} = \{\lambda(n/2) - C(n)a_n\}b_{n/2}, \quad (8)$$

where the function

$$C(n) = \frac{1}{2} \left[F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right) + \lambda(n/2)G\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right) \right] \quad (9)$$

disciplines finger competition.

In Fig. 3 we plot $C(n)$ as a function of time for two values of n . The solid (dashed) curves describe the behavior of $C(n)$ in the absence (presence) of the magnetic field. It is clear from Fig. 3 that $C(n) \leq 0$. From Eqs. (7) and (8) we verify that a negative $C(n)$ increases the growth of the sine subharmonic $b_{n/2}$ while inhibiting growth of its cosine subharmonic $a_{n/2}$. The result is an increased variability among the lengths of fingers of the outer fluid penetrating into the ferrofluid. This effect describes the competition of inward fingers.

When the magnetic field is absent (solid curves in Fig. 3), $C(n)$ is a monotonically decreasing function of time, favoring an ever increasing competition among the inward fingers, that eventually would collide resulting in a topological instability, in agreement with the numerical predictions of Ref. [7]. A completely different scenario is observed when the magnetic field is nonzero (dashed curves): initially $C(n)$ decreases with increasing t , reaches a minimum value, and subsequently increases as time advances. Eventually, $C(n)$ vanishes, meaning that the competition ceases due to the action of the magnetic field. We have verified this behavior for all values of $n \geq 4$. Our second-order findings suggest that the azimuthal magnetic field acts to reduce the competition

among inward fingers, ultimately preventing the occurrence of interfacial singularities. These nonlinear observations are consistent with our first-order predictions (Sec. III A), regarding the stabilizing role of the applied magnetic field. Now, in addition to disciplining regular interfacial perturbations, the magnetic field seems to be able to inhibit the formation of singularities.

IV. CONCLUDING REMARKS

By employing a mode-coupling approach, we have found analytic evidence that the introduction of a ferrofluid into a lifting Hele-Shaw cell, subjected to an azimuthal applied field, may provide a magnetically induced way to inhibiting the formation of cusp and fissioning singularities in zero surface tension flows. This field-regulated behavior is predicted by our linear stability analysis, and reinforced by our weakly nonlinear results.

We point out that the controlling mechanism we suggest, and the specific predictions of our theoretical work, have not yet been checked experimentally. Considering the fundamental importance of singularity formation to many problems in fluid dynamics, we believe it would be of interest to experimentalists to study the role of magnetic fields in disciplining singular behavior in ferrofluids. An interesting possibility in this direction would involve the development of experiments

in the time-dependent gap Hele-Shaw cell using *phase-separated* ferrofluids [21–23], which are magnetic liquids consisting of a phase rich in magnetic particles in suspension in another phase poor in such particles. For these magnetic fluids, it is known that near the critical point the surface tension between the two coexisting phases can be very small, tending precisely to zero at the critical point. Another possibility would be performing lifting Hele-Shaw cell experiments using *miscible* magnetic and nonmagnetic fluids [24,25].

On the theoretical side, a quantitative test of our chief results to fully nonlinear stages of interface evolution would require the calculation of exact solutions, or the elaboration of sophisticated numerical simulations capable of describing non-Laplacian flows [7,26–28]. Of course, these theoretical approaches should be appropriately adapted to characterize accurately the behavior of a ferrofluid droplet under applied magnetic field, in the zero surface tension limit. In conclusion, we hope the present work will impel further (experimental and theoretical) studies on this fruitful research topic, which would allow the check of the predictions made by our linear and weakly nonlinear analyses.

ACKNOWLEDGMENT

We thank CNPq (Brazilian Research Council) for financial support of this research.

-
- [1] A. Pumir and E. D. Siggia, Phys. Rev. Lett. **68**, 1511 (1992).
 - [2] J. Eggers, Rev. Mod. Phys. **69**, 865 (1997).
 - [3] Y. Amarouchene, D. Bonn, J. Meunier, and H. Kellay, Phys. Rev. Lett. **86**, 3558 (2001).
 - [4] R. E. Goldstein, A. I. Pesci, and M. J. Shelley, Phys. Rev. Lett. **70**, 3043 (1993); **75**, 3665 (1995).
 - [5] R. Almgren, Phys. Fluids **8**, 344 (1996); R. Almgren, A. Bertozzi, and M. Brenner, *ibid.* **8**, 1356 (1996).
 - [6] F. X. Magdaleno, A. Rocco, and J. Casademunt, Phys. Rev. E **62**, R5887 (2000).
 - [7] M. J. Shelley, F.-R. Tian, and K. Wlodarski, Nonlinearity **10**, 1471 (1997).
 - [8] D. Derks, A. Lindner, C. Creton, and D. Bonn, J. Appl. Phys. **93**, 1557 (2003).
 - [9] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, and P. Fabre, Europhys. Lett. **62**, 244 (2003).
 - [10] R. D. Welsh, M.Sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
 - [11] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **69**, 016311 (2004).
 - [12] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985), and references therein.
 - [13] E. Blums, A. Cebers, and M. M. Maiorov, *Magnetic Fluids* (de Gruyter, New York, 1997), and references therein.
 - [14] E. Pauné, M. Siegel, and J. Casademunt, Phys. Rev. E **66**, 046205 (2002); E. Pauné, F. X. Magdaleno, and J. Casademunt, *ibid.* **65**, 056213 (2002).
 - [15] E. Alvarez-Lacalle, J. Casademunt, and J. Ortín, Phys. Rev. E **64**, 016302 (2001); E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt, and J. Ortín, *ibid.* **68**, 026308 (2003).
 - [16] A. O. Tsebers and M. M. Maiorov, Magnetohydrodynamics (N.Y.) **16**, 21 (1980).
 - [17] S. A. Langer, R. E. Goldstein, and D. P. Jackson, Phys. Rev. A **46**, 4894 (1992).
 - [18] J. A. Miranda, Phys. Rev. E **62**, 2985 (2000).
 - [19] J. A. Miranda and M. Widom, Physica D **120**, 315 (1998).
 - [20] M. J. P. Gingras and Z. Rácz, Phys. Rev. A **40**, 5960 (1989).
 - [21] J.-C. Bacri, D. Salin, R. Perzynski, V. Cabuil, and R. Massart, J. Colloid Interface Sci. **132**, 43 (1989).
 - [22] J.-C. Bacri, A. Cebers, and R. Perzynski, Phys. Rev. Lett. **72**, 2705 (1994).
 - [23] O. Sandre, J. Browaeys, R. Perzynski, J.-C. Bacri, V. Cabuil, and R. E. Rosensweig, Phys. Rev. E **59**, 1736 (1999).
 - [24] M. Igonin and A. Cebers, Phys. Fluids **15**, 1734 (2003).
 - [25] C. Y. Chen, Phys. Fluids **15**, 1086 (2003).
 - [26] L. Kondic, M. J. Shelley, and P. Palffy-Muhoray, Phys. Rev. Lett. **80**, 1433 (1998).
 - [27] P. Fast, L. Kondic, M. J. Shelley, and P. Palffy-Muhoray, Phys. Fluids **13**, 1191 (2001).
 - [28] P. Fast and M. J. Shelley, J. Comput. Phys. **195**, 117 (2004).

Referências Bibliográficas

- [1] R. E. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985) e as referências nele citadas.
- [2] E. Blums, A. Cebers e M. M. Maiorov, *Magnetic fluids* (Walter de Gruyter, New York, 1997) e as referências nele citadas.
- [3] G. A. Ewijk, *Phase behavior of mixtures of magnetic colloids and non-adsorbing polymer*, Ph.D. thesis, Universiteit Utrecht, Netherlands, 2001.
- [4] J. -C. Bacri, R. Perzynski e D. Salin, *Magnetic liquids*, Endeavour, New Series, **12**, 76 (1988).
- [5] P. G. Saffman e G. I. Taylor, *The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid*, Proc. R. Soc. London Ser. A **245**, 312 (1958).
- [6] G. M. Homsy, *Viscous Fingering in Porous Media*, Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 271 (1987).
- [7] K. V. McCloud e J. V. Maher, *Experimental perturbations to Saffman-Taylor flow*, Phys. Rep. **260**, 139 (1995).
- [8] L. Paterson, *Radial fingering in a Hele Shaw cell*, J. Fluid Mech. **113**, 513 (1981).
- [9] J. A. Miranda e M. Widom, *Radial fingering in a Hele-Shaw cell: a weakly nonlinear analysis*, Physica D **120**, 315 (1998).
- [10] F. X. Magdaleno, A. Rocco e J. Casademunt, *Interface dynamics in Hele-Shaw flows with centrifugal forces: Preventing cusp singularities with rotation*, Phys. Rev. E **62**, R5887 (2000).
- [11] T. Vicsek, *Fractal Growth Processes* (World Scientific, Singapore, 1989).
- [12] A. J. Dickstein, S. Eramilli, R. E. Goldstein, D. P. Jackson e S. A. Langer, *Labyrinthine pattern-formation in magnetic fluids*, Science **261**, 1012 (1993).

- [13] F. Elias, C. Flament, J. -C. Bacri, O. Cardoso e F. Graner, *Two-dimensional magnetic liquid froth: Coarsening and topological correlations*, Phys. Rev. E **56**, 3310 (1997).
- [14] S. Elborai, D. -K. Kim, X. He, S. -H Lee, S. Rhodes e M. Zahn, *Self-forming, quasi-two-dimensional, magnetic-fluid patterns with applied in-plane-rotating and dc-axial magnetic fields*, J. Appl. Phys. **97** 10Q303 (2005).
- [15] J. A. Miranda, *Rotating Hele-Shaw cells with ferrofluids*, Phys. Rev. E **62**, 2985 (2000).
- [16] D. P. Jackson e J. A. Miranda, *Controlling fingering instabilities in rotating ferrofluids*, Phys. Rev. E **67**, 017301 (2003).
- [17] E. Ben-Jacob, R. Godbey, N. D. Goldenfeld, J. Koplik, H. Levine, T. Mueller e L. M. Sander, *Experimental Demonstration of the Role of Anisotropy in Interfacial Pattern Formation*, Phys. Rev. Lett. **55**, 1315 (1985).
- [18] H. La Roche, J. F. Fernández e M. Octavio, *Diffusion-limited-aggregation model for Poisson growth*, Phys. Rev A **44**, R6185 (1991).
- [19] A. A. Sonin e R. Bartolino, *Air viscous fingers in isotropic fluid and liquid crystals obtained in lifting hele-shaw cell geometry*, Nuovo Cimento D **15**, 1 (1993).
- [20] S.-Z. Zhang, E. Louis, O. Pla e F. Guinea, *Linear stability analysis of the Hele-Shaw cell with lifting plates*, Eur. Phys. J. B **1**, 123 (1998).
- [21] M. J. Shelley, F-R. Tian e K. Wlodarski, *HeleShaw flow and pattern formation in a time-dependent gap*, Nonlinearity **10**, 1471 (1997).
- [22] J. Bohr, S. Brunak e T. Norretranders, *Viscous trees and Voronoi-structure formation in expanding systems*, Europhys. Lett. **25**, 245 (1994).
- [23] S. Roy e S. Tarafdar, *Patterns in the variable Hele-Shaw cell for different viscosity ratios: Similarity to river network geometry*, Phys. Rev E **54**, 6495 (1996).
- [24] S. K. Thamida, P. V. Takhistov e H. -C. Chang, *Fractal dewetting of a viscous adhesive film between separating parallel plates*, Phys. Fluids **13**, 2190 (2001).
- [25] S. Sinha, S. K. Kabiraj, T. Dutta e S. Tarafdar, *Radially interrupted viscous fingers in a lifting Hele-Shaw cell*, Eur. Phys. J. B **36**, 297 (2003).

- [26] S. K. Kabiraj e S. Tarafdar, *Finger velocities in the lifting HeleShaw cell*, Physica A **328**, 305 (2003).
- [27] J. A. Miranda e R. M. Oliveira, *Time-dependent gap Hele-Shaw cell with a ferrofluid: Evidence for an interfacial singularity inhibition by a magnetic field*, Phys. Rev. E **69**, 066312 (2004).
- [28] C.-Y. Chen, C.-H. Chen e J. A. Miranda, *Numerical study of miscible fingering in a time-dependent gap Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. E **71**, 056304 (2005).
- [29] R. M. Oliveira e J. A. Miranda, *Magnetic fluid in a time-dependent gap Hele-Shaw cell*, J. Mag. Mag. Mat. **289**, 360 (2005).
- [30] R. M. Oliveira e J. A. Miranda, *Stretching of a confined ferrofluid: Influence of viscous stresses and magnetic field*, Phys. Rev. E **73**, 036309 (2006).
- [31] B. A. Francis e R. G. Horn, *Apparatus-specific analysis of fluid adhesion measurements*, J. Appl. Phys. **89**, 4167 (2005).
- [32] D. Derks, A. Lindner, C. Creton e D. Bonn, *Cohesive failure of thin layers of soft model adhesives under tension*, J. Appl. Phys. **93**, 1557 (2003).
- [33] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay e P. Fabre, *Cavitation-induced force transition in confined viscous liquids under traction*, Europhys. Lett. **62**, 244 (2003).
- [34] M. Tirumkudulu, W. B. Russel e T. J. Huang, *On the measurement of “tack” for adhesives*, Phys. Fluids **15**, 1588 (2003).
- [35] R. D. Welsh, *Viscoelastic free surface instabilities during exponential stretching*, M.Sc. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2001.
- [36] J. A. Miranda, *Shear-induced effects in confined non-Newtonian fluids under tension*, Phys. Rev. E **69**, 016311 (2004).
- [37] J. A. Miranda, R. M. Oliveira e D. P. Jackson, *Adhesion phenomena in ferrofluids*, Phys. Rev. E **70**, 036311 (2004).
- [38] S. Poivet, F. Nallet, C. Gay, J. Teisseire e P. Fabre, *Force response of a viscous liquid in a probe-tack geometry: Fingering versus cavitation*, Eur. Phys. J. E **15**, 97 (2004).

- [39] A. Lindner, D. Derks e M. J. Shelley, *Stretch flow of thin layers of Newtonian liquids: Fingering patterns and lifting forces*, Phys. Fluids **17**, 072107 (2005).
- [40] M. Ben Amar e D. Bonn, *Fingering instabilities in adhesive failure*, Physica D **209**, 1 (2005).
- [41] D. Korteweg, *Sur la forme que prennent les équations du mouvement des fluides si l'on tient compte des forces capillaires causées par des variations de densité*, Arch. Neel. Sci. Ex. Nat. **II**, 6 (1901).
- [42] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, *Low viscosity contrast fingering in a rotating Hele-Shaw cell*, Phys. Fluids **16**, 908 (2004).
- [43] H. Gadêlha e J. A. Miranda, *Finger competition dynamics in rotating Hele-Shaw cells*, Phys. Rev. E **70**, 066308 (2004).
- [44] L. W. Schwartz, *Instability and fingering in a rotating HeleShaw cell or porous medium*, Phys. Fluids A **1**, 167 (1989).
- [45] Ll. Carrillo, F. X. Magdaleno, J. Casademunt e J. Ortín, *Experiments in a rotating Hele-Shaw cell*, Phys. Rev. E **54**, 6260 (1996).
- [46] A. O. Tsebers e M. M. Maiorov, *Magnetostatic instabilities in plane layers of magnetizable fluids*, Magnetohydrodynamics **16**, 21 (1980).
- [47] S. A. Langer, R. E. Goldstein e D. P. Jackson, *Dynamics of labyrinthine pattern formation in magnetic fluids*, Phys. Rev. A **46**, 4894 (1992).
- [48] D. P. Jackson, R. E. Goldstein and A. O. Cebers, *Hydrodynamics of fingering instabilities in dipolar fluids* Phys. Rev. E **50**, 298 (1994).
- [49] A. O. Cebers, *Dynamics of magnetostatic instabilities*, Magnetohydrodynamics **17**, 113 (1981).
- [50] C. -W. Park e G. M. Homsy, *Two-phase displacement in Hele Shaw cells: theory*, J. Fluid Mech. **139**, 291 (1984).
- [51] D. A. Reinelt, *Interface conditions for two-phase displacement in Hele-Shaw cells*, J. Fluid Mech. **183**, 219 (1987).

- [52] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Mechanics: Fluid Mechanics*, Vol. 6 (Pergamon Press, 1959).
- [53] H. C. Brinkman, *A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles*, Appl. Sci. Res., Sect. A **1**, 27 (1947).
- [54] J. Fernandez, P. Kurowski, P. Petitjeans e E. Meiburg, *Density-driven unstable flows of miscible fluids in a Hele-Shaw cell*, J. Fluid Mech. **451**, 239 (2002).
- [55] J. Zeng e Y. C. Yortsos, *On the Brinkman correction in unidirectional Hele-Shaw flows*, Phys. Fluids **15**, 3829 (2003).
- [56] J. A. Miranda e E. Alvarez-Lacalle, *Viscosity contrast effects on fingering formation in rotating Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E **72**, 026306 (2005).
- [57] M. J. P. Gingras e Z. Rácz, *Noise and the linear stability analysis of viscous fingering*, Phys. Rev. A **40**, 5960 (1989).
- [58] E. Alvarez-Lacalle, J. Casademunt e J. Ortín, *Systematic weakly nonlinear analysis of interfacial instabilities in Hele-Shaw flows*, Phys. Rev. E, **64**, 016302 (2001).
- [59] E. Alvarez-Lacalle, E. Pauné, J. Casademunt e J. Ortín, *Systematic weakly nonlinear analysis of radial viscous fingering*, Phys. Rev. E, **68**, 026308 (2003).
- [60] G. Tryggvason e H. Aref, *Numerical experiments on Hele-Shaw flow with a sharp interface*, J. Fluid Mech. **70**, 1 (1983);
- [61] E. Alvarez-Lacalle, J. Ortín e J. Casademunt, *Nonlinear Saffman-Taylor instability*, Phys. Rev. Lett. **92**, 054501 (2004).