



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CAMPUS AGRESTE
NÚCLEO DE TECNOLOGIA
CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO**

LUÍS MIGUEL FERNANDES DE OLIVEIRA

**APROXIMAÇÕES DE BAIXO CUSTO EM DISPOSITIVOS DE INTERNET DAS
COISAS PARA CONTROLE DE QUALIDADE**

Caruaru
2025

LUÍS MIGUEL FERNANDES DE OLIVEIRA

**APROXIMAÇÕES DE BAIXO CUSTO EM DISPOSITIVOS DE INTERNET DAS
COISAS PARA CONTROLE DE QUALIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia de Produção do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Produção.

Área de concentração: Pesquisa Operacional.

Orientador: Renato José de Sobral Cintra

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Oliveira , Luís Miguel Fernandes de.

Aproximações de baixo custo em dispositivos de Internet das Coisas para controle de qualidade / Luís Miguel Fernandes de Oliveira . - Caruaru, 2025. 155p. : il., tab.

Orientador(a): R. J. Cintra

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Engenharia de Produção, 2025. 10.

Inclui referências, apêndices.

1. Aproximação . 2. Método de busca. 3. Escalamento Matricial . 4. JPEG. 5. DCT. I. Cintra, R. J.. (Orientação). II. Título.

620 CDD (22.ed.)

LUÍS MIGUEL FERNANDES DE OLIVEIRA

**APROXIMAÇÕES DE BAIXO CUSTO EM DISPOSITIVOS DE INTERNET DAS
COISAS PARA CONTROLE DE QUALIDADE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Engenharia de Produção do Campus Agreste da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de bacharel em Engenharia de Produção.

Aprovado em: 14/08/2025

Banca Examinadora

Prof. Dr. Renato José de Sobral Cintra
(Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Augusto José da Silva Rodrigues
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Ramon Swell Gomes Rodrigues Casado
Universidade Federal de Pernambuco

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por me sustentar em todos os momentos desta jornada. De forma especial, agradeço àqueles que nunca desistiram de mim: meus amados pais, pelo amor incondicional — sendo Clécia pelo cuidado e carinho constantes, e Edgar pela retidão, conselhos e apoio inabalável. Aos meus irmãos, João e Pedro, por estarem sempre presentes e por me auxiliarem em todas as etapas dessa caminhada.

Àquela que sempre esteve ao meu lado nos momentos mais desafiadores, minha amada Gabriela, por seu apoio, compreensão e presença constante.

Agradeço também aos colegas que contribuíram para o meu crescimento acadêmico, profissional e humano: Lanielson, Matheus, Priscila e Enia. Cada um deixou uma marca importante no meu percurso.

A todos os professores que, de maneira direta ou indireta, participaram da minha formação e em especial: ao Prof. Dr. Walton, pelas palavras de incentivo e leveza nos corredores; ao Prof. Dr. Isaac, pelas conversas e reflexões valiosas; ao Prof. Dr. Osmar, pelos diálogos sempre construtivos; à Profa. Dra. Cristina, pelos conselhos e conversas que tanto me ajudaram; e ao Prof. Dr. Washington, por momentos de reflexões e aprendizados.

Aos colegas e associados ao grupo de pesquisa *Signal Processing Group*, em especial Aleixo e José Maria, pelas discussões técnicas e de vida. Ao Dr. D. F. G. Coelho, por ter desbravado o caminho de pesquisa que optei por seguir. Ao meu orientador e mentor, Prof. Dr. R. J. Cintra, expresso minha mais profunda gratidão pelo acompanhamento dedicado, pelas discussões técnicas valiosas e pelo incentivo constante ao longo de todo o desenvolvimento deste trabalho.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro que viabilizou a realização desta pesquisa.

”Veni, vidi, vici.”

— Júlio César

RESUMO

Este trabalho apresenta uma abordagem para o desenvolvimento de aproximações da Transformada Discreta do Cosseno (*Discrete Cosine Transform*, DCT), com foco na compressão de imagens em dispositivos de baixo custo computacional. A motivação é obter: (i) aproximações de baixa complexidade em sistemas embarcados, (ii) estruturas de escalamentos e (iii) aproximações de tamanho grande, permitindo monitoramento contínuo e processamento em tempo real. Determinar aproximações para $N = 4$ por meio de uma busca exaustiva em espaços de matrizes com multiplicações triviais, resultando nas melhores matrizes de baixa complexidade. Em seguida, essas aproximações foram estendidas para comprimentos maiores comumente adotados em padrões industriais ($N = 8, 16$ e 32), por meio de técnicas de escalamento matricial. Além disso, também foi realizada uma busca por novas estruturas de escalamento, o que resultou em três métodos adicionais propostos. As aproximações obtidas foram avaliadas por métricas clássicas, como Erro Total de Energia ($\epsilon(\cdot)$), Erro Médio Quadrático ($MSE(\cdot)$), Ganho de Codificação ($C_g^*(\cdot)$) e Eficiência de Transformação ($\eta(\cdot)$), permitindo a comparação com métodos alternativos descritos em (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008), (Lengwehasatit e Ortega, 2004) e (Oliveira *et al.*, 2018). Os experimentos computacionais de compressão de imagens naturais foram realizados utilizando *Python* e *Julia* em um computador com processador i5 de 10ª geração e 8 GB de RAM, no ambiente *Visual Studio Code*, considerando restrições de espaço de busca e tempo de execução. Um experimento de compressão de imagem tipo-JPEG foi simulado, retendo 25% dos coeficientes iniciais, e avaliado por figuras de mérito como MSE, Relação Sinal-Ruído de Pico (PSNR), Índice de Qualidade Universal (UQI) e Índice de Similaridade Estrutural (SSIM), evidenciando favorável desempenho. Dessa forma, o estudo contribui para o avanço do conhecimento sobre transformadas de baixo custo, oferecendo técnicas de busca e de escalamento para aproximações da DCT que apresentem desempenho competitivo em relação à literatura e aplicações práticas para compressão de imagens em tempo real e implementação em sistemas embarcados de baixo custo.

Palavras-chave: Aproximação; Método de busca; Escalamento Matricial; JPEG; DCT.

ABSTRACT

This work presents an approach for the development of approximations of the Discrete Cosine Transform (DCT), focusing on image compression in low-cost computational devices. The motivation of is: (i) low-complexity approximations for embedded systems, (ii) efficient scaling structures, and (iii) large-dimension approximations, enabling continuous monitoring and real-time processing. Approximations for $N = 4$ were determined through a exhaustive search in matrix spaces of trivial multiplications, resulting in capture low-complexity metrics. Such approximations were then extended to larger lengths commonly adopted in industrial standards ($N = 8, 16$, and 32), using matrix scaling techniques. In addition, a search for new scaling structures was also carried out, which resulted in three additional proposed methods. The obtained approximations were evaluated according to classical metrics such as Total Energy Error ($\epsilon(\cdot)$), Mean Squared Error ($\text{MSE}(\cdot)$), Coding Gain ($C_g^*(\cdot)$), and Transform Efficiency ($\eta(\cdot)$), allowing comparisons with alternative methods described in (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008), (Lengwehasatit e Ortega, 2004), and (Oliveira *et al.*, 2018). Computational experiments on natural image compression were performed using *Python* and *Julia* on a 10th-generation i5 processor and 8 GB of RAM, within the *Visual Studio Code* environment, considering search space and runtime constraints. Image compression experiments was simulated in JPEG-like set up, retaining 25% of the initial coefficients, and evaluated using figures of merit such as MSE, Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR), Universal Quality Index (UQI), and Structural Similarity Index (SSIM), showing favorite performance. This study contributes to the advance of knowledge on low-cost transforms by offering search and scaling techniques for DCT approximations, which present competitive performance compared to the literature and practical applications in real-time image compression and implementation in low-cost embedded systems.

Keywords: Approximation; Search Method; Matrix Scaling; JPEG; DCT.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxo metodológico adotado no trabalho.	36
Figura 2 – Processo iterativo de escalamento matriz de baixa complexidade.	44
Figura 3 – Fluxo recursivo do processo de escalamento matricial.	44
Figura 4 – Diagrama de fluxo de sinal para a matriz $\mathbf{T}_{4-1}$	47
Figura 5 – Diagrama de fluxo de sinal para a matriz $\mathbf{T}_{4-2}$	47
Figura 6 – Extração bloco por bloco de tamanho $N \times N$	66
Figura 7 – Reconstrução bloco por bloco de tamanho $N \times N$	67
Figura 8 – Padrão de leitura Zig-Zag completo.	67
Figura 9 – Padrão de leitura Zig-Zag com descarte.	68
Figura 10 – Diagrama do experimento computacional.	70
Figura 11 – Compressão por blocos de $N = 4$	70
Figura 12 – Compressão por blocos de $N = 8$	72
Figura 13 – Compressão por blocos de $N = 16$ mediante a matrizes nativas.	73
Figura 14 – Compressão por blocos com $N = 16$ por métodos escalados através do Método S_c -VI.	74
Figura 15 – Compressão por blocos com $N = 16$ por matrizes escalados através do Método I.	75
Figura 16 – Compressão por blocos de $N = 32$ mediante matrizes nativas.	76
Figura 17 – Compressão por blocos com $N = 32$ por matrizes escaladas através do Método S_c -VI.	77
Figura 18 – Compressão por blocos com $N = 32$ por matrizes escaladas através do Método I.	78
Figura 19 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^{S_c\text{-VI}}$	132
Figura 20 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^I$	132
Figura 21 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-2}}^{S_c\text{-VI}}$	133
Figura 22 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8-2}^I$	133
Figura 23 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16-1}^{S_c\text{-VI}}$	134
Figura 24 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-1}}^I$	135
Figura 25 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-2}}^{S_c\text{-VI}}$	136
Figura 26 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-2}}^I$	137
Figura 27 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-LO}}^{S_c\text{-VI}}$	138
Figura 28 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-LO}}^I$	139
Figura 29 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-BAS-2008b}}^{S_c\text{-VI}}$	140
Figura 30 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-BAS-2008b}}^I$	141
Figura 31 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-OCBSML}_1}^{S_c\text{-VI}}$	142
Figura 32 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-OCBSML}_1}^I$	143
Figura 33 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-1}}^{S_c\text{-VI}}$	144
Figura 34 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-1}}^I$	145

Figura 35 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-2}}^{S_c\text{-VI}}$	146
Figura 36 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-2}}^I$	147
Figura 37 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-LO}}^{S_cI}$	148
Figura 38 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-LO}}^I$	149
Figura 39 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-BAS-2008b}}^{S_c\text{-VI}}$	150
Figura 40 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-BAS-2008b}}^I$	151
Figura 41 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-OCBSML}_1}^{S_c\text{-VI}}$	152
Figura 42 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-OCBSML}_1}^I$	153
Figura 43 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-SBCKMK}}^{S_c\text{-VI}}$	154
Figura 44 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-SBCKMK}}^I$	155

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Complexidade aritmética para $N = 8$	30
Tabela 2 – Casos de Aproximações Utilizadas para o Escalamento.	35
Tabela 3 – Desempenho das aproximações para os comprimento $N = 8, 16$ e 32	35
Tabela 4 – Aproximações das quantidades de matrizes candidatas por espaços de busca.	37
Tabela 5 – Tabela de vetores candidatos para o conjunto do espaço $\mathcal{P}_2^N$	38
Tabela 6 – Aproximações das quantidades de vetores candidatos por espaços de busca.	38
Tabela 7 – Vetores candidatos para os parâmetros.	42
Tabela 8 – Aproximações das quantidades do para de parâmetros candidatos por N	42
Tabela 9 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 4$	45
Tabela 10 – Comparação de complexidade computacional para $N = 4$	46
Tabela 11 – Casos de Aproximações Obtidos para o Escalamento.	48
Tabela 12 – Desempenho das aproximações para os comprimento $N = 8, 16$ e 32	48
Tabela 13 – Equivalência com Método S_c -VI.	55
Tabela 14 – Equivalência com Método I.	55
Tabela 15 – Equivalência com Método II.	55
Tabela 16 – Equivalência com Método III.	55
Tabela 17 – Matriz de $N = 4$ escaladas por S_c - VI.	56
Tabela 18 – Matriz de $N = 8$ escaladas por S_c - VI.	57
Tabela 19 – Matriz de $N = 16$ escaladas por S_c - VI.	57
Tabela 20 – Matriz de $N = 4$ escalada pelo Método I.	58
Tabela 21 – Matriz de $N = 8$ escaladas pelo Método I.	58
Tabela 22 – Matriz de $N = 16$ escaladas pelo Método I.	59
Tabela 23 – Comparação entre resultados de método de escalamento para $N = 8$	59
Tabela 24 – Comparação entre resultados de método de escalamento para $N = 16$	60
Tabela 25 – Comparação entre resultados de método de escalamento para $N = 32$	61
Tabela 26 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 4$	61
Tabela 27 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 8$	62
Tabela 28 – Comparação de complexidade computacional para $N = 8$	63
Tabela 29 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 16$	63
Tabela 30 – Comparação de complexidade computacional para $N = 16$	64
Tabela 31 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 32$	65
Tabela 32 – Comparação de complexidade computacional para $N = 32$	65

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CEQ	Controle Estatístico da Qualidade
DCT	<i>Discrete Cosine Transform</i> – Transformada Discreta do Cosseno
DCT-II	<i>Discrete Cosine Transform Type II</i> – DCT do Tipo II
DCT-IV	<i>Discrete Cosine Transform Type IV</i> – DCT do Tipo IV
DST-IV	<i>Discrete Sine Transform Type IV</i> – DST do Tipo IV
IoT	<i>Internet of Things</i> – Internet das Coisas
JPEG	<i>Joint Photographic Experts Group</i> – Padrão de Compressão de Imagens JPEG
KLT	<i>Karhunen–Loève Transform</i> – Transformada de Karhunen–Loève
MSE	<i>Mean Squared Error</i> – Erro Quadrático Médio
PCA	<i>Principal Component Analysis</i> – Análise de Componentes Principais
PDCA	<i>Plan-Do-Check-Act</i> – Ciclo Planejar-Fazer-Verificar-Agir
PSNR	<i>Peak Signal-to-Noise Ratio</i> – Razão Sinal-Ruído de Pico
SSIM	<i>Structural Similarity Index Measure</i> – Índice de Similaridade Estrutural
UQI	<i>Universal Quality Index</i> – Índice Universal de Qualidade
BCEM	Bayer-Cintra-Edirisuriya-Madanayake
SDCT	Signal Discrete Cosine Transform
RDCT	Rounded Discrete Cosine Transform
MRDCT	Modified Rounded Discrete Cosine Transform
WHT	Walsh-Hadamard Transform
BAS	Bouguezel-Ahmad-Swamy
TCB	Tablada-Cintra-Bayer
LO	Lengwehasatit-Ortega

LISTA DE SÍMBOLOS

ε	Erro total de energia
MSE	<i>Mean Squared Error</i> – Erro Quadrático Médio
PSNR	<i>Peak Signal-to-Noise Ratio</i> – Razão Sinal-Ruído de Pico
SSIM	<i>Structural Similarity Index Measure</i> – Índice de Similaridade Estrutural
UQI	<i>Universal Quality Index</i> – Índice Universal de Qualidade
C_g^*	Ganho de codificação
η	Eficiência de transformação
C_N	Matriz DCT exata de ordem N
$\hat{C}_N$	Aproximação da DCT de ordem N
S_N	Matriz de normalização
N	Ordem ou comprimento da matriz
B'	Bloco com coeficientes truncados
λ_i	Autovalores da matriz de covariância
ρ	Coefficiente de correlação de primeira ordem
Sc-I	Método de Escalamento I proposto em (Coelho <i>et al.</i> , 2021)
Sc-II	Método de Escalamento II em (Coelho <i>et al.</i> , 2021)
Sc-III	Método de Escalamento III em (Coelho <i>et al.</i> , 2021)
Sc-IV	Método de Escalamento IV em (Coelho <i>et al.</i> , 2021)
Sc-V	Método de Escalamento V em (Coelho <i>et al.</i> , 2021)
Sc-VI	Método de Escalamento VI em (Coelho <i>et al.</i> , 2021)
SGQ	Sistema de Gestão da Qualidade em (Coelho <i>et al.</i> , 2021)
$\hat{C}_{\text{OCBSML}_1}$	Método proposto em (Oliveira <i>et al.</i> , 2018)
$\hat{C}_{\text{OCBSML}_2}$	Método proposto em (Oliveira <i>et al.</i> , 2018)
$\hat{C}_{\text{LO}}$	Método proposto em (Lengwehasatit e Ortega, 2004)
$\hat{C}_{\text{SDCT}}$	Método proposto em (Haweel, 2001)
$\hat{C}_{\text{RDCT}}$	Método proposto em (Cintra e Bayer, 2011)
$\hat{C}_{\text{MRDCT}}$	Método proposto em (Bayer e Cintra, 2012)
$\hat{C}_{\text{BAS-2008a}}$	Método proposto em (Bouguezal, Ahmad e Swamy, 2008)
$\hat{C}_{\text{BAS-2008b}}$	Método proposto em (Bouguezal, Ahmad e Swamy, 2008)
$\hat{C}_{\text{TCB}_3}$	Método proposto em (Tablada, Cintra e Bayer, 2014)
$\hat{C}_{\text{TCB}_4}$	Método proposto em (Tablada, Cintra e Bayer, 2014)
$\hat{C}_{\text{TCB}_5}$	Método proposto em (Tablada, Cintra e Bayer, 2014)
$\hat{C}_{\text{TCB}_6}$	Método proposto em (Tablada, Cintra e Bayer, 2014)
$\hat{C}_{\text{SBCKMK}}$	Método proposto em (Silveira <i>et al.</i> , 2016)
$\hat{C}_{\text{BAS-2010}}$	Método proposto em (Bouguezal, Ahmad e Swamy, 2010)
$\hat{C}_{\text{WHT}}$	Método proposto em (Yarlagadda e Hershey, 1997)
$\hat{C}_{\text{BCEM}}$	Método proposto em (Bayer <i>et al.</i> , 2012)

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	MOTIVAÇÃO	16
1.2	ESTADO DA ARTE	19
1.3	OBJETIVO	20
1.3.1	Objetivo Geral	20
1.3.2	Objetivos Específicos	20
1.4	ESTRUTURA DO DOCUMENTO	20
2	CONTROLE DA QUALIDADE	22
2.1	SISTEMA DE GESTÃO DA QUALIDADE	22
2.2	EVOLUÇÃO DO CONTROLE QUALIDADE	22
2.3	MONITORAMENTO CONTÍNUO DA QUALIDADE	23
3	TRANSFORMADA	24
3.1	TRANSFORMADAS DE KARHUNEN-LOÈVE	24
3.1.1	Definição da KLT	24
3.1.2	KLT para Sinais Markovianos de Primeira Ordem	25
3.2	TRANSFORMADA DISCRETA DO COSSENO	26
3.2.1	Bidimensionalidade	26
3.2.2	DCT-II	27
3.2.2.1	Definição da DCT-II	27
3.2.2.2	DCT como aproximação assintótica para KLT	27
3.2.3	DCT-IV	29
3.3	TRANSFORMADA DISCRETA DO SENO	29
3.4	COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL	29
3.4.1	Definição	29
3.4.2	Complexidade Aritmética e Multiplicativa	29
3.4.3	Algoritmos Rápidos	30
3.4.4	Estado da Arte em Algoritmos Rápidos	30
3.5	APROXIMAÇÕES	30
3.5.1	Aproximações Ortogonais	31
3.5.2	Aproximações Não-Ortogonais	31
3.6	ESCALAMENTO MATRICIAL	31
3.6.1	Método de Chen, Smith e Fralick	32
3.6.2	Método de Coelho <i>et al.</i>	33
3.6.3	Método de Jridi, Alfalou e Meher	34
4	METODOLOGIA	36
4.1	BUSCA POR APROXIMAÇÕES	36
4.1.1	Definição da Estrutura de Busca	37
4.1.2	Método Dividir-para-Conquistar	37

4.1.2.1	Estrutura	38
4.1.2.2	Espaço de Busca Vetorial	38
4.1.2.3	Algoritmo	39
4.1.3	Figuras de Mérito Matriciais	39
4.1.3.1	Erro médio quadrático	40
4.1.3.2	Erro total de energia	40
4.1.3.3	Ganho de codificação	40
4.1.3.4	Eficiência de transformação	40
4.1.4	Método de Seleção Baseado em Métricas de Desempenho	41
4.2	BUSCA POR ESTRUTURA DE ESCALAMENTO	41
4.2.1	Busca Diádica	42
4.3	ESCALAMENTO MATRICIAL	43
4.3.1	Escalamento Iterado	44
5	RESULTADOS	45
5.1	BUSCA POR APROXIMAÇÕES	45
5.2	VARIAÇÕES DE ESCALAMENTO	46
5.2.1	Estruturas Propostas	46
5.2.2	Condição de Igualdade	47
5.2.2.1	Condição 1	48
5.2.2.2	Condição 2	49
5.2.2.3	Condição 3	50
5.2.2.4	Condição 4	51
5.2.2.5	Condição 5	52
5.2.2.6	Condição 6	53
5.2.2.7	Discussões entre condições de igualdade	54
5.2.2.8	Condição 7	56
5.3	ESCALAMENTO	56
5.3.1	Método de Escalamento S_c-VI	56
5.3.2	Método de Escalamento I	58
5.3.3	Discussão Sobre Método de Escalamento	59
5.4	ESTADO DA ARTE E APROXIMAÇÕES PROPOSTAS	60
5.4.1	Comparativo em $N = 4$	60
5.4.2	Comparativo em $N = 8$	61
5.4.3	Comparativo em $N = 16$	62
5.4.4	Comparativo em $N = 32$	62
5.5	EXPERIMENTO COMPUTACIONAL	64
5.5.1	Compressão Tipo-JPEG	64
5.5.2	Figuras de Mérito da Compressão	68
5.5.2.1	MSE	68

5.5.2.2	PSNR	69
5.5.2.3	UQI	69
5.5.2.4	SSIM	69
5.5.3	Resultado do Experimento Computacional	69
5.5.3.1	Compressão em blocos de $N = 4$	69
5.5.3.2	Compressão em blocos de $N = 8$	71
5.5.3.3	Compressão em blocos de $N = 16$	71
5.5.3.4	Compressão em blocos de $N = 32$	71
5.5.4	Discussão Sobre Experimento Computacional	73
5.6	LIMITAÇÕES	74
6	CONCLUSÕES	79
	REFERÊNCIAS.....	80
	APÊNDICE A - APROXIMAÇÕES ESCALADAS.....	86
	APÊNDICE B - ALGORITMOS RÁPIDOS	102
	APÊNDICE C - DIAGRAMAS DE FLUXOS	132

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

A qualidade pode ser definida como o conjunto de características do produto que atendam às necessidades do cliente, promovendo sua satisfação (Juran, 1999). Outra definição para a qualidade é a conformidade com os requisitos dos consumidores (Crosby, 1979). Essas perspectivas se complementam e sustentam a abordagem sistêmica da Gestão da Qualidade Total (*TQM, Total Quality Management*), que coloca o cliente no centro do processo e busca a melhoria contínua em todas as etapas da cadeia produtiva (Oakland, 2003).

Historicamente, o controle de qualidade surgiu com inspeções finais, destinadas a separar produtos conformes e não conformes após a produção, mas logo evoluiu para o Controle Estatístico de Qualidade (CEQ), com as cartas de Shewhart e mais tarde para o Six Sigma (Shewhart, 1931). A adoção de ciclos iterativos de melhoria, como o PDCA proposto por Deming (2018), juntamente com a cultura da Qualidade Total, consolidou a compreensão de que a qualidade não é um evento isolado, mas uma prática contínua e integrada a todos os níveis da organização.

Para aplicar os princípios da qualidade total, foram desenvolvidas diversas ferramentas que apoiam a análise, o controle e a tomada de decisões nos processos (McDermott *et al.*, 2023). Entre as principais ferramentas estão os histogramas, que mostram a distribuição dos dados, o diagrama de Pareto, que evidencia as causas mais frequentes de problemas, e as cartas de controle, usadas no monitoramento estatístico da variabilidade. Métodos de análise de causa raiz, como os “5 Porquês” e o Diagrama de Ishikawa, também são amplamente utilizados para investigar as não conformidades (McDermott *et al.*, 2023).

Essas ferramentas atuam em conjunto, fornecendo dados objetivos para a adoção de ações corretivas e preventivas, alinhadas aos objetivos organizacionais. No entanto, todas elas dependem da amostragem ou medições pontuais, o que pode dificultar a identificação de picos de variabilidade ou falhas de curta duração, justamente os tipos de evento que mais comprometem a confiabilidade (Garvin, 1987) e a conformidade dos produtos.

Diante dessas limitações, surge a necessidade de um controle de qualidade contínuo, capaz de identificar desvios em tempo real e minimizar o tempo entre a ocorrência de falhas e sua correção (Okuyelu e Adaji, 2024). Esse modelo supera o controle tradicional por lotes ao permitir o monitoramento constante de parâmetros críticos, promovendo respostas proativas e contribuindo para a redução de retrabalhos; paradas não programadas; e custos associados a recalls (Einabadi, Baboli e Ebrahimi, 2019). Nesse contexto, o avanço tecnológico tem desempenhado um papel essencial na viabilização de sistemas de monitoramento contínuo, especialmente por meio de soluções baseadas em conectividade e automação (Zhang *et al.*, 2016).

Em diversos cenários, tecnologias emergentes, como a *Internet of Things (IoT, ou Internet das Coisas)* e as redes de sensores sem fio têm se tornado cada vez mais evidentes em sistemas

de monitoramento de processos (Goecks *et al.*, 2024). Tais avanços têm impulsionado a modernização da gestão da qualidade contínua, permitindo não apenas a coleta de dados em tempo real, mas também uma análise mais eficiente e proativa de falhas e variabilidades no desempenho de processos industriais (He *et al.*, 2017).

O monitoramento contínuo de processos pode trazer benefícios significativos para o desempenho organizacional, tais como: (i) coleta automatizada de dados, (ii) predição antecipada de falhas e (iii) controle em tempo real dos parâmetros do processo (He *et al.*, 2017). Entretanto, o monitoramento contínuo nem sempre constitui a alternativa mais adequada. A decisão entre realizar inspeções contínuas ou periódicas depende diretamente do objetivo da análise e da dinâmica de degradação do equipamento (Jardine, Lin e Banjevic, 2006). Quando o critério de decisão é a minimização do custo total, a inspeção contínua pode não ser viável ou necessária, uma vez que, em determinados cenários, estratégias convencionais de manutenção já são suficientes para alcançar níveis satisfatórios de desempenho e de prevenção de falhas (Mobley, 2002). Mas, em casos contrário o monitoramento contínuo é uma abordagem para coleta de dados. Mas o caso de inspeção periódica não está no escopo deste trabalho.

O grande volume de dados gerado e processado por esses sistemas é frequentemente armazenado em estruturas de *Big Data*, caracterizadas pelos quatro V's: (i) Volume, (ii) Variedade, (iii) Velocidade e (iv) Veracidade (Goecks *et al.*, 2024). Essa alta produção de informações pode comprometer a velocidade de transmissão e gerar custos operacionais adicionais para a indústria (Dautov e Distefano, 2017), especialmente em sistemas com restrições energéticas e computacionais, como os baseados em sensores remotos ou dispositivos embarcados.

Diante desses desafios, a redução de dimensionalidade surge como uma técnica fundamental para otimizar o uso de recursos computacionais (Gorban *et al.*, 2008). Estratégias baseadas nessa abordagem não apenas diminuem a quantidade de dados a serem processados e transmitidos, mas também contribuem para a economia de energia em dispositivos com capacidade limitada, sem comprometer significativamente a qualidade da informação original (Gorban *et al.*, 2008). No caso específico de imagens, amplamente utilizadas em aplicações de monitoramento contínuo, a compressão baseada em transformações é uma solução eficaz para representar a informação de forma mais compacta. Essas técnicas exploram a redundância espacial dos dados por meio da decorrelação, aumentando a eficiência do armazenamento e da transmissão (Gonzalez e Woods, 2018).

No contexto de visão computacional ou processamento de sinais, a decorrelação de dados é uma das principais abordagens utilizadas para compressão (Dunteman, 1989). A transformada de Karhunen-Loève (KLT, *Karhunen-Loève Transform*) é uma técnica clássica e reconhecida por sua capacidade ótima de compactação de energia. A KLT possui as seguintes propriedades: (i) concentra a energia em poucos coeficientes, (ii) decorrelaciona os dados de forma eficiente e (iii) minimiza o erro médio quadrático (Britanak, Yip e Rao, 2007). Contudo, a KLT depende diretamente das características estatísticas do sinal de entrada em tempo real, o que pode tornar sua implementação exigida inviável em aplicações com imagens ou vídeos, devido ao alto custo computacional (Radunz *et al.*; Britanak, Yip e Rao, 2024, 2007).

Imagens naturais, são frequentemente modeladas como processos markovianos do tipo I e apresentam elevados coeficientes de correlação (Britanak, Yip e Rao, 2007). Nesses contextos, a KLT se aproxima da transformada discreta do cosseno (DCT, *Discrete Cosine Transform*), que passa a ser utilizada como alternativa prática para a compressão (Britanak, Yip e Rao, 2007).

Apesar de ser mais eficiente que a KLT, a DCT ainda pode ter alto custo em sistemas embarcados ou com restrições computacionais (Oliveira *et al.*, 2018). Se calculada por sua definição, essa transformação linear possui complexidade computacional em $O(N^2)$, sendo N o comprimento da matriz quadrada que possui dimensão $N \times N$ (Blahut, 2010). Essa complexidade pode ser reduzida para $O(N \log(N))$ por meio de algoritmos rápidos para a DCT (Blahut, 2010), o que contribui para maior viabilidade em aplicações em tempo real, porém, algoritmos rápidos possuem um elevado custo computacional em sistemas embarcados.

Uma abordagem para contornar o elevado custo dos algoritmos rápidos em sistema de sensores é o uso de aproximações matriciais que buscam preservar as propriedades de decorrelação da DCT, mas com custo computacional reduzido (Bayer *et al.*, 2012). As aproximações visam construir matrizes que: (i) mantenham a capacidade de decorrelacionar os dados de maneira eficiente e (ii) utilizem multiplicandos simples, compostos por elementos de baixa complexidade computacional (Silveira *et al.*, 2016). Tais características tornam a abordagem por aproximações especialmente atrativa para cenários em que o equilíbrio entre desempenho e simplicidade de implementação é essencial.

A busca por aproximações eficientes da DCT é formulada como um problema de otimização combinatória, no qual se exploram diferentes configurações matriciais sujeitas a restrições estruturais e numéricas. O objetivo é identificar matrizes que melhor reproduzam a DCT original, segundo métricas adotadas na literatura, como erro de aproximação e energia de codificação. Para construir uma matriz aproximada da DCT de tamanho N consiste em resolver esse problema de otimização com N^2 variáveis e restrições previamente definidas (Tablada, Cintra e Bayer, 2014). Devido à natureza discreta do problema, é possível realizar buscas exaustivas em domínios de pequeno comprimento. No entanto, à medida que o comprimento aumenta, a complexidade cresce, tornando tais buscas inviáveis. Nesse contexto, técnicas de escalonamento matricial se apresentam como uma abordagem promissora para viabilizar a construção de aproximações em comprimentos maiores.

Os comprimentos $N = 4, 8, 16$ e 32 são considerados padrões industriais devido ao seu uso frequente em aplicações de visão computacional, integrando blocos de codificadores de imagens e vídeos amplamente utilizados, como JPEG (Wallace, 1992), MPEG (Gall, 1992), H.264/AVC (Puri, Chen e Luthra, 2004) e HEVC (Pourazad *et al.*, 2012). Embora existam aproximações disponíveis, ainda é necessário desenvolver métodos mais eficientes capazes de atender às demandas industriais.

Para comprimentos em que o espaço de busca é reduzido, como $N = 4$ e $N = 8$, métodos de busca por força bruta ou exaustão denotam resultados competitivos (Oliveira *et al.*, 2018), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2011), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2010) e (Tablada, Cintra e Bayer, 2014). No entanto, para comprimentos maiores, como $N = 16$ e $N = 32$, esses métodos

tornam-se ineficientes em termos de tempo e recursos computacionais (Coelho *et al.*, 2021). Nesse contexto, técnicas de escalonamento matricial são empregadas, permitindo a construção de matrizes de maior ordem a partir de matrizes menores, viabilizando a obtenção de soluções de forma mais eficiente (Coelho *et al.*, 2021), (Jridi, Alfalou e Meher, 2015) e (Tablada *et al.*, 2017).

Coelho *et al.* (2021) propõem um método de escalonamento baseado em aproximações da DCT-II, diferenciando-se de abordagens como a de Chen, Smith e Fralick (1977), em que a DCT-II, amplamente adotada pela indústria, é combinada com a DCT-IV para processos de decorrelação de dados. No entanto, a proposta de Coelho *et al.* (2021) apresenta uma estruturação em que as escolhas são fundamentadas nas relações da matriz exata, sem, contudo, explorar de forma abrangente o espaço de alternativas que possam representar variações promissoras do escalamento.

Este estudo contribui para o avanço aproximações de baixo custo, oferecendo novas técnicas de busca e métodos de escalamento matricial. O tema foi escolhido devido à necessidade de reduzir o custo computacional e permitir o uso eficiente de dispositivos embarcados para o monitoramento contínuo.

1.2 ESTADO DA ARTE

Após a introdução da DCT em (Ahmed, Natarajan e Rao, 1974), diversos algoritmos rápidos foram propostos com o objetivo de reduzir o alto custo computacional da implementação exata da transformada (Vetterli e Nussbaumer, 1984), (Loeffler, Ligtenberg e Moschytz, 1989), (Chen, Smith e Fralick, 1977), (Feig e Winograd, 1992), (Suehiro e Hatori, 1986), (Lee, 1984) e (Hou, 1987). Esses algoritmos exploram simetrias e decomposições para diminuir a quantidade de operações aritméticas necessárias. No entanto, mesmo as versões rápidas ainda demandam um número considerável de multiplicações e somas, o que pode impactar negativamente o consumo de energia e o desempenho em dispositivos com recursos limitados, como sistemas embarcados (Qiu *et al.*, 2020).

Nesse contexto, aproximações matriciais surgem como uma alternativa eficiente para a implementação da DCT. Essas aproximações substituem a transformada original por matrizes de coeficientes simples, com o objetivo de eliminar multiplicações e reduzir a complexidade computacional. A primeira proposta de aproximação de comprimento $N = 8$ relevante nessa linha foi a *SDCT*, apresentada por Haweel (2001), que utiliza apenas operações aditivas e mudanças de sinal.

Posteriormente, foram desenvolvidas aproximações multiparmétricas, que permitem o ajuste de parâmetros internos para balancear complexidade e desempenho de forma flexível (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2011), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2010) e (Canterle *et al.*, 2020). Outra vertente de pesquisa envolve derivações baseadas em propriedades matemáticas específicas da DCT, como as transformadas propostas em (Tablada, Cintra e Bayer, 2014) e (Tablada *et al.*, 2017) e modelos gerados por meio de equações analíticas, como o método escalável

e de complexidade variável apresentado por Lengwehasatit e Ortega (2004).

A extensão de aproximações matriciais para comprimentos maiores, como $N = 16$, também tem sido objeto de estudo. Dentre essas propostas, destacam-se as apresentadas em (Silveira *et al.*, 2014), (Silveira *et al.*, 2016), (Oliveira *et al.*, 2018) e (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008), que exploram estratégias como escalamento de matrizes, decomposição estrutural e combinações de transformadas menores para obter aproximações mais eficientes. Adicionalmente, a abordagem BCEM (Bayer *et al.*, 2012) também oferece uma alternativa promissora para comprimentos maiores, permitindo um bom equilíbrio entre desempenho e simplicidade computacional.

1.3 OBJETIVO

1.3.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um algoritmo rápido de baixo custo computacional e que apresente desempenho competitivo em métricas de avaliação voltadas à computação e compressão de imagens. O algoritmo rápido a ser proposto tem como finalidade reduzir os custos computacionais referentes a armazenamento e envio de dados oriundos de sensores sem fio.

1.3.2 Objetivos Específicos

São estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

1. Efetuar a geração de aproximações matriciais;
2. Realizar uma busca sistemática na estrutura de escalamento apresentada por Coelho *et al.* (2021);
3. Projetar aproximações maiores a partir de aproximações menores por meio do escalamento;
4. Avaliar matrizes de baixa complexidade de acordo figuras de mérito clássicas;
5. Desenvolver um algoritmo rápido para a implementação das aproximações propostas;
6. Avaliar o desempenho da compressão baseada no padrão JPEG e obter aproximações para os comprimentos típicos utilizados na indústria.

1.4 ESTRUTURA DO DOCUMENTO

O documento é estruturado em seis capítulos, que se desenvolvem de forma progressiva e lógica. O primeiro capítulo apresenta o tema, demonstra a motivação que orienta a pesquisa e apresenta o estado da arte e estabelecendo os objetivos geral e específicos do estudo. O segundo capítulo conduz os principais conceitos temas ao controle da qualidade com ênfase nas práticas atuais como o monitoramento contínuo auxiliado por tecnologias da Indústria 4.0.

No terceiro capítulo, são abordadas as transformadas utilizadas na compressão de imagens com foco para a transformada de Karhunen–Loève e a discreta do cosseno além de suas variações, abrangendo desde sua bidimensionalidade até os aspectos de complexidade computacional envolvidos bem como técnicas de aproximações e estratégias de escalamento matricial para redução da complexidade. O quarto capítulo descreve a metodologia desenvolvida incluindo os processos de busca por aproximações e parâmetros de escalamento utilizados no processo de escalamento iterado e os critérios adotados para a seleção das aproximações que dominam as métricas.

No quinto capítulo, são apresentados os resultados obtidos, comparando com os resultados da literatura e efetuando o experimentos computacionais analisando o desempenho das aproximações propostas na compressão padrão tipo JPEG. Por fim, o sexto capítulo apresenta as conclusões do trabalho destacando as principais contribuições.

2 CONTROLE DA QUALIDADE

Este capítulo aborda os fundamentos e a evolução do controle da qualidade nas organizações, iniciando com a conceituação do termo segundo autores clássicos, como Juran e Crosby, e avançando para perspectivas sistêmicas, como a Gestão da Qualidade Total (TQM). São destacados os Sistemas de Gestão da Qualidade (SGQ), especialmente aqueles estruturados segundo a norma ISO 9001, que introduzem princípios como foco no cliente, melhoria contínua e abordagem por processos, promovendo o alinhamento estratégico e a competitividade organizacional.

Também é apresentada a evolução do controle da qualidade, desde as inspeções manuais até a aplicação de métodos estatísticos. Entre eles, destacam-se o ciclo PDCA e o Six Sigma. É enfatizado o papel do monitoramento contínuo no contexto da Indústria 4.0, com o uso de sensores e tecnologias inteligentes que possibilitam o acompanhamento em tempo real, tornando o controle da qualidade uma prática preditiva e estratégica.

2.1 SISTEMA DE GESTÃO DA QUALIDADE

A qualidade é um conceito que evoluiu, ganhando destaque nas empresas por seu foco em satisfazer as necessidades dos clientes. Pode ser definida como as características do produto que suprem essas necessidades (Juran, 1999), ou como a conformidade com requisitos de normas, padrões e demandas dos consumidores (Crosby, 1979).

Os avanços da qualidade trouxeram como pauta principal a implementação de sistemas de gestão integrados, com foco na melhoria contínua e na satisfação dos clientes (Oakland, 2003). Em algumas empresas, esse sistema passou a ser descrito como Gestão da Qualidade Total (TQM – *Total Quality Management*), uma filosofia com ênfase na qualidade (Oakland, 2003).

A norma ISO 9001 (Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2015), reconhecida internacionalmente, padroniza sistemas de qualidade baseados em princípios como foco no cliente, liderança, processos e melhoria contínua. A implementação de um Sistema de Gestão da Qualidade (SGQ) conforme essa norma favorece o alinhamento estratégico, o controle de riscos e a competitividade (Hoyle, 2009).

2.2 EVOLUÇÃO DO CONTROLE QUALIDADE

O controle da qualidade tradicionalmente baseia-se na separação de produtos que divergem dos padrões estabelecidos, sendo comumente realizado após a produção. Essa abordagem pode ser ineficaz ou gerar altos prejuízos (Garvin, 1987).

A introdução das cartas de controle permitiram o monitoramento e gerenciamento da variabilidade dos processos, além da previsão de possíveis anomalias. Essa prática passou a ser conhecida como Controle Estatístico da Qualidade (CEQ) (Shewhart, 1931).

Novas metodologias, como o ciclo PDCA (Deming, 2018) e o Six Sigma (Pyzdek, 2024) foram incorporadas ao controle da qualidade, voltadas à redução da variabilidade e à eliminação

de defeitos com base na análise de dados. Com isso, a qualidade passou a ser tratada como uma métrica mensurável do produto.

2.3 MONITORAMENTO CONTÍNUO DA QUALIDADE

As ferramentas tradicionais da qualidade, conhecidas como as sete ferramentas da qualidade, são essenciais para promover a padronização e identificar pontos de melhoria com base em dados. Entre elas estão: diagrama de Pareto, diagrama de causa e efeito (Ishikawa), histograma, folha de verificação, diagrama de dispersão, fluxograma e cartas de controle (McDermott *et al.*, 2023).

No entanto, falhas intermitentes ou eventos de curta duração muitas vezes passam despercebidos por esses métodos (Garvin, 1987). Uma alternativa a essa limitação é o controle e monitoramento contínuo da qualidade, que permite a captação de dados em tempo real (Okuyelu e Adaji, 2024). Apesar do custo elevado, especialmente em relação à instrumentação e à implementação, esses sistemas são estratégicos em ambientes produtivos, nos quais a qualidade constitui um fator decisivo (Kumar, Singh e Dwivedi, 2020).

As tecnologias da informação e da automação possibilitam a aplicação de sensores, sistemas sem fio e softwares para o acompanhamento das mensurações nas operações de qualidade (Noor-A-Rahim *et al.*, 2022). Os dados coletados são integrados a sistemas de prevenção e detecção de falhas, permitindo a observação em tempo real e a prevenção de avarias (Einabadi, Baboli e Ebrahimi, 2019).

A Indústria 4.0 intensifica o uso desses sistemas, promovendo a conectividade e a análise digital de dados físicos (Einabadi, Baboli e Ebrahimi, 2019). A definição da conformidade do produto contribui para reduzir retrabalhos, aumentar a confiabilidade e diminuir custos por avarias (Khadim *et al.*, 2023).

A automação aliada à conectividade transforma o controle da qualidade em uma prática estratégica e preditiva, superando os limites dos modelos baseados em lotes (Zhang *et al.*, 2016).

3 TRANSFORMADA

Este capítulo apresenta os fundamentos teóricos fundamentais sobre transformadas matriciais e suas aproximações. Inicialmente, é discutido a transformada de Karhunen–Loève (KLT), reconhecida como solução ótima em termos de concentração de energia e decorrelação, e sua realização prática para a transformada cosseno discreta do tipo II (DCT-II), dentro de um conjunto de transformadas da família trigonométrica. Em seguida é abordada a complexidade computacional associada à aplicação da DCT em ambientes com restrições de recursos, fator que motiva o surgimento de aproximações com menor custo computacional. Essas aproximações buscam preservar a eficácia da DCT empregando operações de menor custo, como multiplicações triviais. Em continuidade, é explorado o conceito de escalamento matricial como ferramenta para gerar transformadas maiores a partir de versões menores.

3.1 TRANSFORMADAS DE KARHUNEN-LOÈVE

Em 1947-1948 Karhunen (Karhunen, 1947) e Loève (Loève, 1948) desenvolveram uma transformada contínua conhecida como a Transformada de Karhunen-Loève (KLT, *Karhunen-Loève Transform*) descrita em (Karhunen, 1947) e (Loève, 1948). A KLT trata-se de uma transformada com capacidade de diagonalizar a matriz de correlação de qualquer sinal de entrada.

A abordagem apresentada por Hotelling (1933) foi previamente utilizada em Análise de Componentes Principais (PCA, *Principal Component Analysis*) (Dunteman, 1989) como uma aproximação para a KLT. A transformada é capaz de extrair de um sinal aleatório sua representação em série. Sua base é formada pelos autovetores da matriz de correlação, obtidos por meio de funções de base ortogonais.

A KLT é uma ferramenta eficaz na decorrelação de dados, é especialmente útil quando há elevada correlação entre elementos, resultando em forte redundância de dados. As propriedades da KLT podem ser classificadas como: (i) concentração da variância em poucos coeficientes, (ii) decorrelação dos dados de forma eficiente e (iii) minimização do erro médio quadrático (Britanak, Yip e Rao, 2007).

3.1.1 Definição da KLT

Um sinal de entrada aleatório $\mathbf{x}$ é denotado por $\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1}]^\top$ e a sua matriz de covariância é dada por (Unser, 1984):

$$\mathbf{R}_x = E\{(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})(\mathbf{x} - E\{\mathbf{x}\})^\top\}, \quad (3.1)$$

em que $E\{\cdot\}$ é operador esperança (Kay, 2012).

O sinal decorrelacionado $\mathbf{y} = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{N-1}]^\top$ é obtido através do operador linear $\mathbf{K}_N$ (Britanak, Yip e Rao, 2007), conforme descrito a seguir:

$$\mathbf{X} = \mathbf{K}_N \cdot \mathbf{x}, \quad (3.2)$$

em que $\mathbf{K}_N$ é a matriz da KLT de comprimento N , cujo os elementos são dados pelos autovetores ortonormais da matriz de covariância $\mathbf{R}_x$, alocados de forma que diagonalizem $\mathbf{R}_x$.

A matriz de correlação obtida a partir de $\mathbf{y}$ é uma matriz diagonal e seus valores correspondem aos autovalores da matriz $\mathbf{R}_x$ (Britanak, Yip e Rao, 2007), conforme apresentado a seguir:

$$\mathbf{R}_y = E\{(\mathbf{y} - E\{\mathbf{y}\})(\mathbf{y} - E\{\mathbf{y}\})^\top\} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

em que os elementos da diagonal de $\mathbf{R}_y$, λ_m são as variâncias dos componentes transformados do vetor $\mathbf{y}$.

3.1.2 KLT para Sinais Markovianos de Primeira Ordem

A matriz da KLT não possui uma forma fechada por ter dependência do sinal de entrada, conforme é apresentando na Equação 3.2.

A derivação da KLT proposta por Ray e Driver (1970) é aplicada a sinais markovianos de primeira ordem, como em imagens naturais (Britanak, Yip e Rao, 2007). Ao utilizar um sinal real como entrada, por exemplo uma imagem natural denotada por $\mathbf{x}$ é obtida a seguinte matriz de correlação:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & \rho^1 & \rho^2 & \dots & \rho^{N-1} \\ \rho^1 & 1 & \rho^1 & \dots & \rho^{N-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho^{N-2} & \dots & \rho^1 & 1 & \rho^1 \\ \rho^{N-1} & \dots & \rho^2 & \rho^1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

o coeficiente de correlação é denotado por ρ . Em sinais Markovianos de primeira ordem, o coeficiente de correlação geralmente assume valores na faixa de $0.95 \leq \rho \leq 0.99$ (Britanak, Yip e Rao, 2007). Portanto, a matriz de transformação linear $\mathbf{K}_N$ tem seus elementos definidos por (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$k_{m,n}^\rho = \sqrt{\frac{2}{N + \lambda_m}} \cdot \sin\left(\omega_m \left(n + 1 - \frac{N-1}{2}\right) + \frac{(m+2)\pi}{2}\right), \text{ para } m, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.5)$$

Os autovalores definidos pela matriz de covariância do sinal de entrada são obtidos por meio da expressão a seguir (Radunz *et al.*, 2024):

$$\lambda_m = \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\omega_m) + \rho^2}. \quad (3.6)$$

Os termos ω_m são as raízes reais positivas da seguinte equação transcendental (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$\tan(N\omega_m) = -\frac{(1 - \rho^2) \sin(\omega_m)}{(1 + \rho^2) \cos(\omega_m) - 2\rho}. \quad (3.7)$$

Como a matriz de transformação linear depende da matriz de correlação do sinal de entrada, ela pode ser representada pela notação $\mathbf{K}_N^{(\rho)}$. Para fins de ilustração, é apresentada a matriz correspondente ao caso em que $\rho = 0.95$ e $N = 4$, conforme é apresentado na matriz

$$\mathbf{K}_4^{(0.95)} = \begin{bmatrix} 0.4937 & 0.5062 & 0.5062 & 0.4937 \\ 0.6516 & 0.2747 & -0.2747 & -0.6516 \\ 0.5062 & -0.4937 & -0.4937 & 0.5062 \\ 0.2747 & -0.6516 & 0.6516 & -0.2747 \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

3.2 TRANSFORMADA DISCRETA DO COSSENO

A transformada discreta do cosseno (DCT, *Discrete Cosine Transform*) foi introduzida pelos engenheiros K. R. Rao, N. Ahmed e T. Natarajan como uma transformada que visa reduzir o custo da KLT (Ahmed, Natarajan e Rao, 1974). A DCT possui as propriedades: (i) concentrar a energia nos coeficientes iniciais, (ii) descorrelacionar os dados reduzindo as redundâncias presentes e (iii) proporcionar a menor estimativa em termos de erro quadrático médio (Britanak, Yip e Rao, 2007).

A DCT constitui um conjunto de vetores ortogonais (Strang, 1999). Suas quatro variações resultam de combinações específicas entre condições de contorno, como Dirichlet ou Neumann (Britanak, Yip e Rao, 2007), e da disposição dos pontos de amostragem, que podem ser (i) pontos da grade ou (ii) pontos médios deslocados em um domínio discreto (Strang, 1999). As variações são denominadas de DCT do tipo I (DCT-I), do tipo II (DCT-II), do tipo III (DCT-III) e tipo IV (DCT-IV).

Neste trabalho, o foco está na transformada DCT-II, amplamente utilizada em aplicações de visão computacional. A DCT-IV, em particular, será empregada na definição do escalamento para a DCT-II.

3.2.1 Bidimensionalidade

A descorrelação de dados unidimensionais, como séries temporais e sinais de áudio, pode ser realizada por meio de uma operação linear baseada em transformadas (Ahmed, Natarajan e Rao, 1974). Seja $\mathbf{x}$ um sinal de entrada e $\mathbf{X}$ o sinal de saída, cuja os elementos são obtidos por meio da matriz de transformação linear $\mathbf{C}_N$ (Gonzalez e Woods, 2018), descrita a seguir:

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}_N \cdot \mathbf{x}. \quad (3.9)$$

Quando os dados são bidimensionais, como em imagens capturadas por sensores e câmeras industriais, a descorrelação é realizada por meio da mesma operação linear, aplicada sequencialmente nas duas dimensões, primeiro nas linhas e, em seguida, nas colunas. A operação de descorrelação em imagens ou dados bidimensionais é descrita da seguinte forma:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_N \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}_N^T, \quad (3.10)$$

em que a matriz de entrada é representada por $\mathbf{A}$ e a matriz de saída por $\mathbf{B}$.

3.2.2 DCT-II

Das quatro variações, a DCT-II é amplamente utilizada das transformadas do cosseno discreta, especialmente em aplicações de compressão de imagens, como no padrão JPEG (Gonzalez e Woods, 2018). Sua principal vantagem é a capacidade de concentrar a maior parte da energia do sinal nos coeficientes iniciais, facilitando a eliminação de redundâncias (Britanak, Yip e Rao, 2007).

3.2.2.1 Definição da DCT-II

Os elementos da matriz exata podem ser obtidos a partir da expressão a seguir (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$c_{m,n}^{\text{II}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \alpha_m \cdot \cos\left(\frac{(2n+1)m\pi}{2N}\right), \text{ para } m, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.11)$$

em que $\alpha_0 = 1/\sqrt{2}$ e $\alpha_m = 1$ para $m \neq 0$. Para fins de ilustração será gerado a DCT-II exata para $N = 4$:

$$\mathbf{C}_4^{\text{II}} = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.65 & 0.27 & -0.27 & -0.65 \\ 0.50 & -0.50 & -0.50 & 0.50 \\ 0.27 & -0.65 & 0.65 & -0.27 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

A DCT-II é uma matriz com independência linear, tal qual o produto interno entre linhas distintas é nulo e a norma das linhas é um (Britanak, Yip e Rao, 2007).

3.2.2.2 DCT como aproximação assintótica para KLT

Em (Clarke, 1981), é estabelecida a relação entre a DCT-II e a KLT para sinais modelados como processos markovianos de primeira ordem, especialmente quando o coeficiente de correlação entre os elementos é superior ou igual a 0.95.

Quando a Equação 3.7 é aplicada a um sinal de entrada real com alto coeficiente de correlação, de modo que $\rho \approx 1$, ela pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\tan(N\omega_m) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \frac{-(1-\rho^2)\sin(\omega_m)}{(1+\rho^2)\cos(\omega_m) - 2\rho} = 0. \quad (3.13)$$

A condição $\tan(N\omega_m) = 0$ implica que o argumento da tangente deve ser um múltiplo inteiro de π , pois

$$\tan x = 0 \iff x = m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

Aplicando isso ao termo $x = N\omega_m$, é obtida a seguinte expressão:

$$N\omega_m = m\pi \implies \omega_m = \frac{m\pi}{N}. \quad (3.15)$$

É objetivado obter as raízes reais positivas, portanto, o conjunto de soluções é dado por:

$$\omega_m = \frac{m\pi}{N}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.16)$$

Ao aplicar os valores obtidos da Equação 3.16 na Equação 3.6, observa-se que $\lambda_m = 0$ para $m \neq 0$.

Sabe-se que o operador traço ($\text{tr}(\cdot)$) (Britanak, Yip e Rao, 2007) da matriz $\mathbf{R}_x$ é definido por:

$$\text{tr}(\mathbf{R}_x) = \sum_{m=0}^{N-1} [\mathbf{R}_x]_{m,m}, \quad (3.17)$$

e é equivalente à soma de todos os autovalores da matriz (Strang, 1980). Portanto, para um sinal real, tem-se:

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} \text{tr}(\mathbf{R}_x) = \lim_{\rho \rightarrow 1} \sum_{m=0}^{N-1} [\mathbf{R}_x]_{m,m} = \lim_{\rho \rightarrow 1} \sum_{m=0}^{N-1} \lambda_m = \lambda_0. \quad (3.18)$$

Observa-se que a diagonal principal da matriz $\mathbf{R}_x$ é igual a 1 para $m = 0, 1, \dots, N-1$, o que leva à obtenção de $\lambda_0 = \sum_{m=0}^{N-1} 1 = N$. Aplicando os valores de ω_m obtidos na Equação 3.5, tem-se a seguinte expressão:

$$k_{m,n}^{(0.95)} \approx \sqrt{\frac{2}{N + \lambda_m}} \cdot \sin \left(\frac{m\pi}{N} \left(n + 1 - \frac{N-1}{2} \right) + \frac{(m+2)\pi}{2} \right), \quad (3.19)$$

em que os elementos $k_{m,n}^{(0.95)}$ da matriz $\mathbf{K}_N^{(0.95)}$, e portanto:

$$k_{m,n}^{(0.95)} \approx \sqrt{\frac{2}{N + \lambda_m}} \cdot \cos \left(\frac{(2n+1)m\pi}{2N} \right). \quad (3.20)$$

Com a aplicação dos autovalores λ_m , obtêm-se dois casos distintos:

$$c_{m,n}^{\text{II}} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \alpha_m \cdot \cos \left(\frac{(2n+1)m\pi}{2N} \right) \begin{cases} \alpha_m = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{se } m = 0, \\ \alpha_m = 1, & \text{se } m \neq 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Ao comparar as matrizes de comprimento $N = 4$ para $\mathbf{K}_4^{(0.95)}$ e para a DCT exata, observa-se o seguinte:

$$\mathbf{K}_4^{(0.95)} = \begin{bmatrix} 0.4937 & 0.5062 & 0.5062 & 0.4937 \\ 0.6516 & 0.2747 & -0.2747 & -0.6516 \\ 0.5062 & -0.4937 & -0.4937 & 0.5062 \\ 0.2747 & -0.6516 & 0.6516 & -0.2747 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0.6533 & 0.2706 & -0.2706 & -0.6533 \\ 0.5000 & -0.5000 & -0.5000 & 0.5000 \\ 0.2706 & -0.6533 & 0.6533 & -0.2706 \end{bmatrix} = \mathbf{C}_4^{\text{II}}. \quad (3.22)$$

Portanto, pode-se assumir que, em aplicações de visão computacional envolvendo sinais reais, a KLT tende a se aproximar da DCT, resultando em uma equivalência prática entre ambas.

3.2.3 DCT-IV

A matriz da DCT-IV de comprimento N pode ser construída elemento a elemento a partir da expressão descrita por (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$c_{m,n}^{IV} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \cos\left(\frac{(2m+1)(2n+1)\pi}{4N}\right), \text{ para } m, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.23)$$

3.3 TRANSFORMADA DISCRETA DO SENO

A construção da matriz exata da DST-IV tem seus elementos descritos conforme a definição a seguir (Britanak, Yip e Rao, 2007) :

$$s_{m,n}^{IV} = \sqrt{\frac{2}{N}} \cdot \sin\left(\frac{(2m+1)(2n+1)\pi}{4N}\right), \text{ para } m, n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.24)$$

3.4 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

3.4.1 Definição

A complexidade computacional de um algoritmo quantifica o custo necessário para sua execução conforme a entrada em termos de operações básicas. Uma operação básica é uma operação elementar e representativa do custo computacional de um algoritmo (Levitin, 2012). Para mensurar o custo computacional, contabilizado o número de multiplicações e somas exigidas para computar um dado de tamanho N (Levitin, 2012). A complexidade computacional atua como parâmetro de projeto relevante para avaliar a aplicabilidade de uma transformada à implementação em sistemas embarcados, onde recursos computacionais, energético e físicos são limitados (Blahut, 2010).

3.4.2 Complexidade Aritmética e Multiplicativa

Os algoritmos de baixa complexidade possuem o objetivo de ser mais eficientes pela sua redução de operações aritméticas, implicando uma redução da complexidade de hardware e economia de recursos energéticos em dispositivos embarcados (Blahut, 2010).

As operações aritméticas elementares são conhecidas como soma, multiplicação, subtração e divisão. A complexidade da subtração e da soma são iguais e ambas são consideravelmente menor que a multiplicação.

A complexidade aritmética é obtida através de uma função que relaciona sua complexidade multiplicativa e com a aditiva e deslocamento de bits (CANTERLE, 2017). A expressão logo a seguir ilustra a função que obtém a complexidade aritmética.

A função $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ relaciona as complexidades. A complexidade multiplicativa é denotada por $C_{\mathcal{M}}$, a aditiva por $C_{\mathcal{A}}$ e a de deslocamento de bits por $C_{\mathcal{B}}$, conforme é apresentado a seguir:

$$\text{Complexidade aritmética} = f(C_{\mathcal{M}}, C_{\mathcal{A}}, C_{\mathcal{B}}). \quad (3.25)$$

Tabela 1 – Complexidade aritmética para $N = 8$.

Método	Multiplicações	Adições
Ahmed, Natarajan e Rao (1974).	64	56
Feig e Winograd (1992).	22	28
Chen, Smith e Fralick (1977).	16	26
Suehiro e Hatori (1986).	13	29
Wang (1984).	13	29
Lee (1984).	12	29
Vetterli e Nussbaumer (1984).	12	29
Hou (1987).	12	29
Loeffler, Ligtenberg e Moschytz (1989).	11	29

Fonte: O autor (2025).

3.4.3 Algoritmos Rápidos

A DCT-II possui N^2 multiplicações e $N(N - 1)$ adições, sendo esta a cota superior de complexidade aritmética para a DCT-II (Heideman, 1988) na operação de transformação linear conforme é apresentado na Equação 3.9. Para fins de exemplificação a DCT exata com comprimento de $N = 8$ possui a complexidade de 64 multiplicações e 56 adições.

A busca por métodos eficientes de menor complexidade impulsionou o desenvolvimento da Transformada Rápida do Cosseno (FCT, *Fast Cosine Transform*) (Britanak, Yip e Rao, 2007). A FCT constitui uma classe de algoritmos que exploram as simetrias e estruturas recursivas da DCT que podem reduzir significativamente seu custo computacional (Britanak, Yip e Rao, 2007).

A FCT permitiu o uso eficiente da DCT em tempo real e em dispositivos com restrições de processamento, especialmente em compressão de imagens e vídeos (Oppenheim e Schaffer, 2010). Com isso, algoritmos rápidos conseguem reduzir a complexidade de $O(N^2)$ para $O(N \log(N))$ (Blahut, 2010).

3.4.4 Estado da Arte em Algoritmos Rápidos

A literatura técnica apresenta diversos algoritmos rápidos voltados ao cálculo da DCT exata. Entre as contribuições mais relevantes que propõem arquiteturas otimizadas com menor número de multiplicações e adições conforme descrito em (Chen, Smith e Fralick, 1977), (Vetterli e Nussbaumer, 1984), (Loeffler, Ligtenberg e Moschytz, 1989), (Feig e Winograd, 1992), (Suehiro e Hatori, 1986), (Lee, 1984), (Hou, 1987) e (Wang, 1984), podem ser visualizadas na Tabela 1.

3.5 APROXIMAÇÕES

Aproximações da DCT foram propostas anteriormente em (Haweel, 2001), com o intuito de (i) promover a decorrelação dos dados com desempenho próximo ao da DCT exata (Ahmed,

Natarajan e Rao, 1974) e (ii) reduzir a complexidade computacional, utilizando multiplicando triviais (Blahut, 2010). A operação de descorrelação de dados por meio de uma DCT aproximada é preferível por apresentar resultados similares aos da DCT exata, com menor custo computacional.

3.5.1 Aproximações Ortogonais

Para obter uma aproximação matricial ortogonal com baixa complexidade computacional, é construída uma matriz $\mathbf{T}_N$ objetivando a sua similaridade com a DCT exata. A matriz $\mathbf{T}_N$ é uma matriz ortogonal, permitindo o processo de ortogonalização (Tablada, Cintra e Bayer, 2014). O conceito de ortogonalidade é apresentado a seguir.

Definição 1 (Matriz Ortogonal). *Uma matriz $\mathbf{T}_N$ é ortogonal se ela satisfaz a seguinte condição $\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top = \mathbf{L}_N$, em que $\mathbf{L}_N$ é uma matriz diagonal.*

Se $\mathbf{T}_N$ for uma matriz ortogonal, o processo para matrizes ortogonais de baixa complexidade é definido por:

$$\hat{\mathbf{C}}_N = \mathbf{S}_N \cdot \mathbf{T}_N, \quad (3.26)$$

em que $\hat{\mathbf{C}}_N$ é a matriz aproximada e $\mathbf{S}_N$ uma matriz de normalização. A matriz $\mathbf{S}_N$ obtida por:

$$\mathbf{S}_N = \sqrt{(\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top)^{-1}}, \quad (3.27)$$

e em que $\sqrt{\cdot}$ a raiz quadrada matricial (Seber, 2008).

3.5.2 Aproximações Não-Ortogonais

No caso das aproximações não-ortogonais, ocorre o processo de quase-ortogonalização (Tablada, Cintra e Bayer, 2014). A quase-ortogonalização é aplicada em uma matriz $\mathbf{T}_N$ não-ortogonal, sendo este processo uma variação na operação de ortogonalização, conforme apresentado em seguida:

$$\hat{\mathbf{C}}_N = \hat{\mathbf{S}}_N \cdot \mathbf{T}_N, \quad (3.28)$$

em que o símbolo $\hat{\mathbf{C}}_N$ representa uma aproximação não-ortogonal. A matriz $\hat{\mathbf{S}}_N$ é uma versão diagonal da matriz $\mathbf{S}_N$, definida por:

$$\hat{\mathbf{S}}_N = \sqrt{(\text{diag}(\mathbf{T}_N \cdot \mathbf{T}_N^\top))^{-1}}, \quad (3.29)$$

em que a operação $\text{diag}(\cdot)$ monta uma matriz apenas com os elementos da diagonal principal da matriz argumento (Tablada, Cintra e Bayer, 2014).

3.6 ESCALAMENTO MATRICIAL

O procedimento de escalamento matricial consiste na construção de uma matriz de dimensão maior, usualmente de ordem $2N$, a partir de uma matriz de comprimento N (Coelho *et al.*, 2021).

e a matriz $\mathbf{B}_N$:

$$\mathbf{B}_{2N} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \bar{\mathbf{I}}_N \\ \bar{\mathbf{I}}_N & -\mathbf{I}_N \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

em que $\mathbf{I}_N$ descreve a matriz identidade.

3.6.2 Método de Coelho *et al.*

O escalamento proposto por Coelho *et al.* (2021) tem origem a partir de Chen, Smith e Fralick (1977). A relação entre a DCT-IV e a DCT-II é evidenciada pela seguinte equação (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$\mathbf{C}_N^{\text{IV}} = \mathbf{A}_N \cdot \mathbf{C}_N^{\text{II}} \cdot \mathbf{J}_N. \quad (3.35)$$

As Equações 3.30 e 3.35 podem ser reorganizadas para se obter a equação a seguir.:

$$\mathbf{C}_{2N}^{\text{II}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathbf{P}_{2N} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \\ & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_N^{\text{II}} & \\ & \mathbf{C}_N^{\text{II}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \\ & \mathbf{J}_N \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{2N}. \quad (3.36)$$

A matriz $\mathbf{J}_N$ é uma matriz construída a partir da expressão apresentada a seguir:

$$\mathbf{J}_N = \text{diag} \left(\left\{ 2 \cos \left(\frac{(2n+1)\pi}{4N} \right) \right\}_{n=0}^{N-1} \right), \quad (3.37)$$

e a matriz $\mathbf{A}_N$ é descrita por:

$$\mathbf{A}_N = \mathbf{D}_N \cdot \text{tril} \left(\mathbf{u}_N \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ & \mathbf{u}_{N-1}^\top \end{bmatrix} \right) \cdot \mathbf{D}_N. \quad (3.38)$$

A matriz $\mathbf{D}_N = \text{diag} \left(\{(-1)^n\}_{n=0}^{N-1} \right)$ é uma matriz diagonal de sinal alternado. O vetor coluna de uns é denotado por $\mathbf{u}_N$ e a função $\text{tril}(\cdot)$ retorna o triângulo inferior do argumento (Shores, 2018).

A relação da DST-IV e DCT-IV é apresentada em (Plonka e Tasche, 2005) é outro passo fundamental para definição de mais um dos casos do escalamento, sendo descrito da seguinte forma:

$$\mathbf{C}_N^{\text{IV}} \cdot \bar{\mathbf{I}}_N = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{S}_N^{\text{IV}}. \quad (3.39)$$

Em (Wang, 1984), é descrita a relação da DCT-IV com a DST-IV:

$$\mathbf{S}_N^{\text{IV}} = \bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{C}_N^{\text{IV}} \cdot \mathbf{D}_N. \quad (3.40)$$

As Equações 3.39 e 3.40 são manuseadas algebricamente para assim conseguir obter a equação a seguir:

$$\mathbf{C}_N^{\text{IV}} \cdot \bar{\mathbf{I}}_N = \mathbf{D}_N \cdot \bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{C}_N^{\text{IV}} \cdot \mathbf{D}_N. \quad (3.41)$$

Aplicando a Equação 3.34 na Equação 3.40, é obtida a próxima expressão:

$$\mathbf{C}_N^{\text{IV}} \cdot \bar{\mathbf{I}}_N = \mathbf{D}_N \cdot \bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{A}_N \cdot \mathbf{C}_N^{\text{II}} \cdot \mathbf{J}_N \cdot \mathbf{D}_N, \quad (3.42)$$

desta forma é possível relacionar a DCT-II, DCT-IV e DST-IV.

Denotando a matriz $\mathbf{H}_N = \mathbf{D}_N \cdot \bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{A}_N$ e a matriz $\mathbf{G}_N = \mathbf{J}_N \cdot \mathbf{D}_N$, é obtida a expressão a seguir:

$$\mathbf{C}_{2N}^{\text{II}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathbf{P}_{2N} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \\ & \mathbf{H}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{C}_N^{\text{II}} & \\ & \mathbf{C}_N^{\text{II}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \\ & \mathbf{G}_N \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{2N}. \quad (3.43)$$

A matriz $\mathbf{H}_4$ e $\mathbf{G}_4$, ilustram exemplos das matrizes $\mathbf{H}_N$ e $\mathbf{G}_N$ para o comprimento $N = 4$, conforme é mostrado a seguir:

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1 & -1 & 1 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1 & -1 & 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 1 & 0 & 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{G}_4 = 2 \cdot \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{16}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\left(\frac{3\pi}{16}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{5\pi}{16}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\left(\frac{7\pi}{16}\right) \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Quando o parâmetros do escalamento $\hat{\mathbf{H}}_N$ e $\hat{\mathbf{G}}_N$ são aproximados é alcançado o seguinte mapeamento:

$$S_{(\hat{\mathbf{H}}_N, \hat{\mathbf{G}}_N)}: \mathbb{R}^{N^2} \rightarrow \mathbb{R}^{(2N)^2} \quad (3.45)$$

$$\mathbf{T}_N^{\text{II}} \mapsto \mathbf{T}_{2N}^{\text{II}},$$

dado uma matriz $\mathbf{T}_N^{\text{II}}$ e as matrizes laterais, retorna a matriz $\mathbf{T}_{2N}^{\text{II}}$ como:

$$\mathbf{T}_N^{\text{II}} \mapsto \mathbf{T}_{2N}^{\text{II}} := S(\mathbf{T}_N^{\text{II}}, \hat{\mathbf{H}}_N, \hat{\mathbf{G}}_N) = \mathbf{P}_{2N} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \\ & \hat{\mathbf{H}}_N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_N^{\text{II}} & \\ & \mathbf{T}_N^{\text{II}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \\ & \hat{\mathbf{G}}_N \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{2N}, \quad (3.46)$$

em que $\hat{\mathbf{H}}_N \approx \mathbf{H}_N$ e $\hat{\mathbf{G}}_N \approx \mathbf{G}_N$.

Na Tabela 2, são exibidos os parâmetros aproximados de $\hat{\mathbf{H}}_N$ e $\hat{\mathbf{G}}_N$ selecionados, em que a matriz $\mathbf{Z}_N$ é expressa da seguinte forma $\mathbf{Z}_N = \text{diag}([1/2 \ \mathbf{u}_N])$. A Tabela 3 denota o desempenho das aproximações mediante ao resultado obtido na equação a seguir:

$$\|\hat{\mathbf{C}}_{2N}^{\text{II}} - \mathbf{C}_{2N}^{\text{II}}\|_{\mathbf{F}}^2, \quad (3.47)$$

em que $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$ é a norma de Frobenius (Watkins, 2010).

As matrizes a seguir representam $-\bar{\mathbf{I}}_4 \cdot \mathbf{D}_4$ e $-\bar{\mathbf{I}}_4 \cdot \mathbf{Z}_N \cdot \mathbf{D}_4$, que são os parâmetros aproximados:

$$-\bar{\mathbf{I}}_4 \cdot \mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad -\bar{\mathbf{I}}_4 \cdot \mathbf{Z}_N \cdot \mathbf{D}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

3.6.3 Método de Jridi, Alfalou e Meher

O escalamento matricial desenvolvido em (Coelho *et al.*, 2021) discerne que o escalamento proposto por Jridi, Alfalou e Meher (2015) é uma caso particular de seleção dos parâmetros presente no mapeamento do escalamento, quando $\hat{\mathbf{H}}_N = \hat{\mathbf{G}}_N = \mathbf{I}_N$.

Tabela 2 – Casos de Aproximações Utilizadas para o Escalamento.

Caso	$\widehat{\mathbf{H}}_N$	$\widehat{\mathbf{G}}_N$	Ortogonal?
S _c -JAM	$\mathbf{I}_N$	$\mathbf{I}_N$	Sim
S _c -I	$\bar{\mathbf{I}}_N$	$\mathbf{I}_N$	Sim
S _c -II	$-\bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{D}_N$	$\mathbf{I}_N$	Sim
S _c -III	$-\bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{Z}_N \cdot \mathbf{D}_N$	$\mathbf{I}_N$	Sim
S _c -IV	$\mathbf{I}_N$	$\mathbf{D}_N$	Sim
S _c -V	$\bar{\mathbf{I}}_N$	$\mathbf{D}_N$	Sim
S _c -VI	$-\bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{D}_N$	$\mathbf{D}_N$	Sim
S _c -VII	$-\bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{Z}_N \cdot \mathbf{D}_N$	$\mathbf{D}_N$	Sim

Fonte: O autor (2025).

Tabela 3 – Desempenho das aproximações para os comprimento $N = 8, 16$ e 32 .

Caso	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$
S _c -JAM	3.994	5.653	7.997
S _c -I	3.826	5.533	7.912
S _c -II	4.001	5.657	8.000
S _c -III	4.001	5.657	8.000
S _c -IV	3.826	5.533	7.912
S _c -V	4.006	5.661	8.003
S _c -VI	1.954	3.033	4.515
S _c -VII	1.954	3.033	4.515

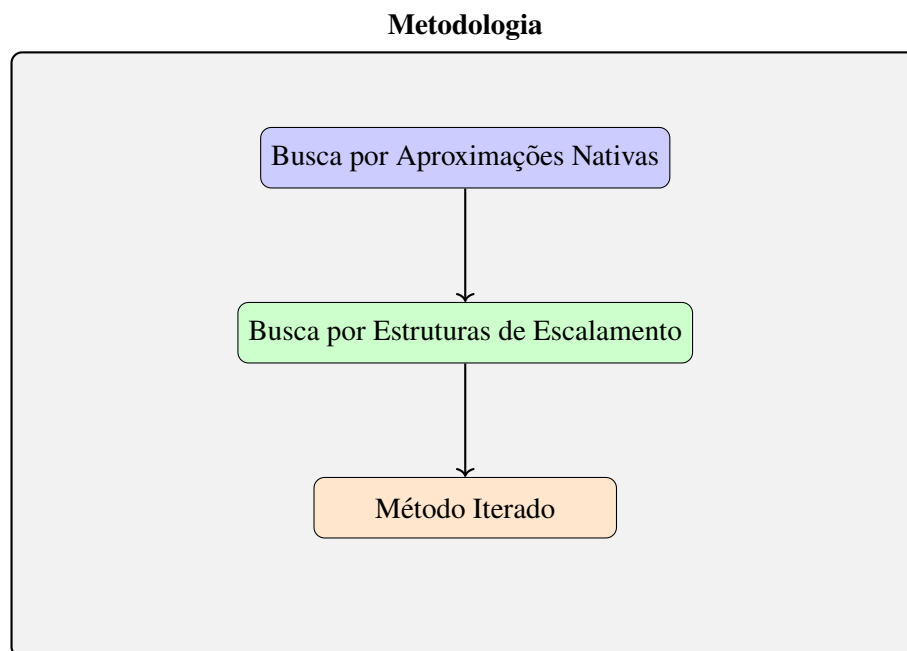
Fonte: O autor (2025).

$$\mathbf{T}_{2N}^{\Pi} = \mathbf{P}_{2N} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_N^{\Pi} \\ \mathbf{T}_N^{\Pi} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{2N}. \quad (3.49)$$

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, é apresentada a metodologia adotada para a condução deste trabalho, detalhando os procedimentos utilizados para a obtenção de aproximações da DCT. Inicialmente, são descritas as estratégias de busca exaustiva por aproximações nativas, que permitem identificar matrizes ótimas com base em critérios de desempenho clássicos. Em seguida, é abordado uma busca por métodos de escalamento matricial inéditos, capazes de viabilizar a construção de matrizes de maior dimensão de baixa complexidade, incluindo o processo iterativo utilizado para a obtenção de matrizes de comprimento N elevado. Além disso, o capítulo contempla a fundamentação teórica relativa as figuras de mérito matricial das aproximações, oferecendo suporte para a análise e interpretação dos resultados obtidos. A Figura 1 ilustra o fluxo metodológico, destacando a progressão das etapas desde a busca nativa até as aproximações de maior dimensão.

Figura 1 – Fluxo metodológico adotado no trabalho.



4.1 BUSCA POR APROXIMAÇÕES

Nesta seção, é apresentado um método de busca por aproximações da DCT, visando identificar matrizes de baixo custo computacional e alta eficiência na descorrelação de dados. Descreve-se a formulação do problema como uma otimização combinatória, as estratégias de busca exaustiva e os critérios de avaliação utilizados para selecionar matrizes sementes para aproximações maiores mediante ao escalamento, contemplando o primeiro item dos objetivos específicos.

Tabela 4 – Aproximações das quantidades de matrizes candidatas por espaços de busca.

N	$\#\mathcal{S}_1$	$\#\mathcal{S}_2$
4	$\approx 4.3 \cdot 10^7$	$\approx 1.5 \cdot 10^{11}$
8	$\approx 3.4 \cdot 10^{30}$	$\approx 5.4 \cdot 10^{44}$
16	$\approx 1.4 \cdot 10^{122}$	$\approx 8.5 \cdot 10^{178}$
32	$\approx 5.7 \cdot 10^{488}$	$\approx 5 \cdot 10^{715}$
64	$\approx 5.9 \cdot 10^{1953}$	$\approx 1.9 \cdot 10^{2863}$

Fonte: O autor (2025).

4.1.1 Definição da Estrutura de Busca

A matriz exata da DCT-II de comprimento N possui N^2 elementos (Britanak, Yip e Rao, 2007). Considerando o espaço de busca $\mathcal{S}$, o qual deve conter matrizes candidatas de mesma dimensão. A construção da matriz aproximada utiliza apenas elementos do conjunto $\mathcal{P}$, o qual é constituído de multiplicadores triviais. Os conjuntos de coeficientes são definidos da seguinte forma: $\mathcal{P}_1 = \{0, \pm 1\}$ e $\mathcal{P}_2 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

O espaço de busca $\mathcal{S}_k$ é definido com base no conjunto $\mathcal{P}_k$ que descreve os elementos das matrizes candidatas. O espaço de busca de matrizes candidatas presentes pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathcal{S}_k = \{\mathbf{T}_N \in M_{\mathcal{P}_k}(N)\}, \quad (4.1)$$

em que a quantidade de matrizes presentes é descrita por:

$$\#\mathcal{S}_k = (\#\mathcal{P}_k)^{N^2}. \quad (4.2)$$

A determinação dos dois conjuntos resulta em dois espaços de busca distintos:

1. Para o primeiro espaço, $\mathcal{S}_1$, definido a partir do conjunto $\mathcal{P}_1 = \{0, \pm 1\}$, o número total de matrizes possíveis é caracterizado por $\mathcal{S}_1 = 3^{N \times N}$.
2. Para o segundo espaço de busca, baseado no conjunto $\mathcal{P}_2 = \{0, \pm 1, \pm 2\}$, o número de matrizes candidatas é significativamente maior, podendo ser descrito por $\mathcal{S}_2 = 5^{N \times N}$ possibilidades.

Ambos os casos depende de N , porém, o primeiro caso tem tamanho reduzido em comparativo com o segundo e para algoritmos de busca por força bruta esse espaço pode ser impraticável. A Tabela 4 ilustra a quantidade de matrizes candidatas por espaço.

4.1.2 Método Dividir-para-Conquistar

Para evitar a construção de matrizes não-ortogonais, utiliza-se uma estrutura que combina as linhas ortogonais, conforme apresentado por Oliveira *et al.* (2018).

Tabela 5 – Tabela de vetores candidatos para o conjunto do espaço $\mathcal{P}_2^N$.

l	$\mathbf{v}_l$
1	$[-2 - 2 \quad \dots \quad -2 - 2]$
2	$[-2 - 2 \quad \dots \quad -2 - 1]$
$\vdots$	$\vdots$
$\frac{5^N - 1}{2}$	$[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]$
$\vdots$	$\vdots$
$5^N - 2$	$[2 \quad 2 \quad \dots \quad 2 \quad 1]$
$5^N - 1$	$[2 \quad 2 \quad \dots \quad 2 \quad 2]$

Fonte: O autor (2025).

Tabela 6 – Aproximações das quantidades de vetores candidatos por espaços de busca.

N	$\#\mathcal{P}_1^N$	$\#\mathcal{P}_2^N$
4	80	624
8	6560	$\approx 3.9 \cdot 10^5$
16	$\approx 4.3 \cdot 10^7$	$\approx 1.5 \cdot 10^{11}$
32	$\approx 1.8 \cdot 10^{15}$	$\approx 2.3 \cdot 10^{22}$
64	$\approx 3.4 \cdot 10^{30}$	$\approx 5.4 \cdot 10^{44}$

Fonte: O autor (2025).

4.1.2.1 Estrutura

Considerando uma matriz $\mathbf{C}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$, deseja-se obter a aproximação $\mathbf{T}_N \in \mathbb{Z}^{N \times N}$ de mesma dimensão. Denotando $\mathbf{c}_l$ como a l -ésima linha de $\mathbf{C}_N$, admite-se que esta possa ser aproximada por uma linha $\mathbf{t}_k$, sendo $\mathbf{t}_k$ a k -ésima linha de $\mathbf{T}_N$. Essa abordagem permite reformular o problema de aproximação de matrizes para um problema de seleção de linhas, reduzindo a complexidade do espaço de busca.

4.1.2.2 Espaço de Busca Vetorial

Para obter um vetor $\mathbf{t}_k$ de baixa complexidade, seus elementos devem pertencer a conjuntos previamente definidos. O espaço de busca $\mathcal{P}_k^N$ é constituído por todos os vetores gerados a partir das combinações possíveis dos elementos do conjunto $\mathcal{P}_k$, com exceção do vetor nulo. A cardinalidade do espaço de vetores é dado pela seguinte equação:

$$(\#\mathcal{P}_k)^N - 1. \quad (4.3)$$

A Tabela 5 ilustra a estrutura dos vetores candidatos e espaço de busca $\mathcal{P}_k$ e Tabela 6 ilustra o cardinalidade de do espaços de vetores por comprimento.

Para a construção da matriz $\mathbf{T}_N$, considera-se a seleção de N vetores candidatos. Utilizando arranjo com repetição, é obtido $\#\mathcal{P}_k^{N-1 \times N-1}$ matrizes distintas, incluindo tanto configurações ortogonais quanto não ortogonais. No entanto, ao impor a restrição de não repetição de linhas

e retirar a importância da ordem de linhas, o espaço de busca é significativamente reduzido, resultando em cerca de $\binom{\mathcal{P}_k^N - 1}{N}$ combinações.

Adicionalmente, ao considerar apenas combinações de vetores mutuamente ortogonais, os potenciais resultados são reduzidos. Após a seleção das combinações ortogonais, aplica-se permutação às linhas de cada matriz ortogonal, explorando todas as $N!$ permutações. Como a ortogonalidade é preservada por permutação de linhas, não é necessário reavaliar essa propriedade, evitando a geração redundante de matrizes não ortogonais. Essa estratégia contribui para a otimização computacional do processo de construção de matrizes candidatas.

Algoritmo 1: Busca por todas as matrizes ortogonais construídas a partir dos vetores do espaço $\mathcal{P}_k^N$.

Entrada: Conjunto de vetores $\mathcal{P}_k$ de tamanho N

```

1  $\mathcal{Q} \leftarrow$  Combinações de quatro vetores distintos do espaço  $\mathcal{P}_k^N$ 
2  $\mathcal{M} \leftarrow$  lista vazia
3  $\mathcal{C} \leftarrow$  lista vazia
4 para  $l \leftarrow 1$  até  $|\mathcal{Q}|$  faça
5    $x \leftarrow \mathcal{Q}[l] \cdot \mathcal{Q}[l]^\top$ 
6   se  $\forall p \neq q : x[p][q] = 0$  então
7     adicionar  $\mathcal{Q}[l]$  a  $\mathcal{C}$ 
8   fim
9 fim
10  $\pi \leftarrow$  Permutações( $\{1, \dots, n\}$ )
11 para  $j \leftarrow 1$  até  $|\mathcal{C}|$  faça
12    $x \leftarrow$  aplicar permutação  $\pi$  às linhas de  $\mathcal{C}[j]$ 
13   adicionar  $x$  a  $\mathcal{M}$ 
14 fim
15 retorna  $\mathcal{M}$ 

```

Saída: Todas as matrizes ortogonais do espaço gerado pelos vetores de $\mathcal{P}_k^N$

Fonte: O autor (2025).

4.1.2.3 Algoritmo

O Algoritmo 1 busca identificar todas as matrizes ortogonais possíveis a partir da combinações de N vetores candidatos do espaço de busca $\mathcal{P}_k^N$, evitando o custo elevado da geração exaustiva de combinações. A estratégia consiste em filtrar previamente um subconjunto de vetores ortogonais, eliminando a construção de matrizes não-ortogonais e reduzindo a quantidade de operações a serem efetuadas, possibilitando a busca exaustiva com uma menor quantidade de operações.

4.1.3 Figuras de Mérito Matriciais

A avaliação da matriz aproximada é realizada por meio de figuras de mérito que mensuram seu desempenho em relação à matriz exata da DCT. As figuras de mérito selecionadas se dividem em métricas de similaridade e métricas de codificação. As métricas de similaridade

consistem em medidas que comparam diretamente a aproximação com a DCT exata, sendo representadas pelo erro médio quadrático ($\text{MSE}(\cdot)$) (Britanak, Yip e Rao, 2007) e pela energia total do erro ($\varepsilon(\cdot)$) (Cintra e Bayer, 2011). Já as métricas de codificação avaliam a capacidade da matriz aproximada em promover a decorrelação e compressão dos dados, sendo representadas pelo ganho de codificação ($C_g^*(\cdot)$) e pela eficiência de transformação ($\eta(\cdot)$) (Britanak, Yip e Rao, 2007).

4.1.3.1 Erro médio quadrático

O erro médio quadrático ($\text{MSE}(\cdot)$) é descrito da seguinte forma (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$\text{MSE}(\hat{\mathbf{C}}) = \frac{1}{N} \cdot \text{tr} \left((\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}}) \cdot \mathbf{R}_x \cdot (\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}})^\top \right). \quad (4.4)$$

4.1.3.2 Erro total de energia

A expressão do erro total de energia é dada por (Cintra e Bayer, 2011):

$$\varepsilon(\hat{\mathbf{C}}) = \pi \cdot \|\mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}}\|_{\mathbf{F}}^2, \quad (4.5)$$

a norma de Frobenius é representada por $\|\cdot\|_{\mathbf{F}}$ (Oliveira *et al.*, 2018).

4.1.3.3 Ganho de codificação

O ganho de codificação é demonstrado pela seguinte equação (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$C_g^*(\hat{\mathbf{C}}) = 10 \cdot \log_{10} \left\{ \prod_{m=1}^N \frac{1}{\sqrt{N \mathbf{A}_m \cdot \mathbf{B}_m}} \right\}. \quad (4.6)$$

A quantidade $\mathbf{A}_m$ é calculada por $\text{su}[(\hat{\mathbf{c}}_m \cdot \hat{\mathbf{c}}_m^\top) \odot \mathbf{R}_x]$, onde $\text{su}(\cdot)$ representa a soma de todos os elementos da matriz argumento, $\odot$ indica a multiplicação elemento a elemento, e $\hat{\mathbf{c}}_m^\top$ refere-se à m -ésima linha da matriz $\hat{\mathbf{C}}$. Por sua vez, $\mathbf{B}_m = \|\hat{\mathbf{g}}_m\|^2$ expressa a norma ℓ_2 da m -ésima linha da matriz inversa $\hat{\mathbf{C}}^{-1}$, denotada por $\hat{\mathbf{g}}_m^\top$.

4.1.3.4 Eficiência de transformação

A fórmula que define a Eficiência da Transformação é dada por (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$\eta(\hat{\mathbf{C}}) = \frac{\sum_{m=1}^N |r_{m,m}|}{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N |r_{m,n}|} \cdot 100, \quad (4.7)$$

o termo $r_{m,n}$ corresponde a um elemento da matriz $\hat{\mathbf{R}}_y$, sendo $m, n = 1, 2, \dots, 8$. A matriz $\hat{\mathbf{R}}_y$ é obtida pela equação $\hat{\mathbf{R}}_y = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{R}_x \cdot \hat{\mathbf{C}}^\top$ (Britanak, Yip e Rao, 2007).

4.1.4 Método de Seleção Baseado em Métricas de Desempenho

A busca exaustiva gerará inúmeras matrizes e, para a determinação dos pontos de dominância de cada conjunto, serão utilizadas quatro funções objetivo, propondo-se um mecanismo de seleção das matrizes mais promissoras dentro do conjunto geral. Cada matriz será avaliada segundo um conjunto de métricas de desempenho e para cada métrica, seleciona-se a matriz candidata com o melhor desempenho, considerando a natureza da função objetivo.

$$\begin{aligned} f_1(\hat{\mathbf{C}}_N) &= \varepsilon(\hat{\mathbf{C}}_N), & f_2(\hat{\mathbf{C}}_N) &= \text{MSE}(\hat{\mathbf{C}}_N), \\ f_3(\hat{\mathbf{C}}_N) &= C_g^*(\hat{\mathbf{C}}_N), & f_4(\hat{\mathbf{C}}_N) &= \eta(\hat{\mathbf{C}}_N). \end{aligned} \quad (4.8)$$

As métricas f_1 e f_2 , relacionadas aos erros energético e quadrático médio, são funções a serem minimizadas, enquanto f_3 e f_4 , relativas à complexidade de codificação e eficiência de compressão, são funções a serem maximizadas. Para cada métrica m , selecionam-se as matrizes que melhor atendem ao critério:

$$\hat{\mathbf{C}}_N^{(m)} = \begin{cases} \arg \min_{\hat{\mathbf{C}}_N \in \mathcal{S}_N} f_m(\hat{\mathbf{C}}_N), & m = 1, 2, \\ \arg \max_{\hat{\mathbf{C}}_N \in \mathcal{S}_N} f_m(\hat{\mathbf{C}}_N), & m = 3, 4. \end{cases} \quad (4.9)$$

4.2 BUSCA POR ESTRUTURA DE ESCALAMENTO

Na estrutura proposta por Coelho *et al.* (2021), os parâmetros aproximados são representados por matrizes derivadas das matrizes fundamentais que descrevem as transformações entre diferentes variantes da DCT. Nessa seção é contemplado o segundo item dos objetivos específicos. Essas aproximações assumem a forma de matrizes estritamente diagonais ou contra-diagonais, sendo esta última caracterizada pela presença exclusiva de elementos distintos de zero na diagonal secundária. Este formalismo permite a introdução de variações dessas matrizes laterais que possam apresentar um desempenho equivalente ou superior àquelas previamente reportadas na literatura especializada.

Considera-se o conjunto $\mathcal{P}_1^* = \{\pm 1\}$ como o domínio dos possíveis valores atribuídos aos elementos das diagonais principais ou secundárias das matrizes. Essa configuração é aplicável em seis dos oito casos estudados. Cada vetor $\mathbf{v}_k \in \mathcal{P}_1^{*N}$, conforme ilustrado na Tabela 7.

Assim, define-se o espaço matricial de busca $\mathcal{D}_1^{*N}$, associado ao espaço vetorial $\mathcal{V}_1^*$, como

$$\mathcal{D}_1^{*N} = \{\text{diag}(\mathbf{v}_k), \text{antidiag}(\mathbf{v}_k) \mid \mathbf{v}_k \in \mathcal{P}_1^{*N}\}, \quad (4.10)$$

em que a operação *antidiag* efetua a geração matrizes com valores na diagonal secundária. A cardinalidade do espaço é descrito da seguinte forma:

$$\#\mathcal{D}_1^{*N} = 2 \cdot \#\mathcal{P}_1^{*N}. \quad (4.11)$$

O desempenho das aproximações é avaliado com base em pares de parâmetros, de modo que a tarefa de busca concentra-se na identificação de combinações que otimizem (neste caso,

Tabela 7 – Vetores candidatos para os parâmetros.

k	$\mathcal{P}_1^{*N}$
1	$[-1 \dots -1]$
2	$[-1 \dots 1]$
$\vdots$	$\vdots$
$2^M - 1$	$[1 \dots -1]$
2^M	$[1 \dots 1]$

Fonte: O autor (2025).

Tabela 8 – Aproximações das quantidades do para de parâmetros candidatos por N .

N	$\#\mathcal{D}_1^{*N \times N}$
4	1024
8	$\approx 2.6 \cdot 10^5$
16	$\approx 1.7 \cdot 10^{10}$
32	$\approx 3.4 \cdot 10^{19}$
64	$\approx 1.4 \cdot 10^{39}$

Fonte: O autor (2025).

minimizem) a função de custo definida na Equação 3.47. Dessa forma, o espaço de busca total $\mathcal{D}_1^{*N \times N}$ corresponde ao conjunto de todos os pares ordenados de elementos do espaço $\mathcal{D}_1^{*N}$, caracterizando um problema de otimização combinatória de alta complexidade. O espaço pode ser formalmente expresso como um arranjo com repetição, conforme apresentado a seguir:

$$\mathcal{D}_1^{*N \times N} = \{ \{M_{P_k}(N), M_{P_k}(N)\} \mid M_{P_k}(N) \in \mathcal{D}_1^{*N} \}, \quad (4.12)$$

e sua cardinalidade é expressa da seguinte forma:

$$\#\mathcal{D}_1^{*N \times N} = (2 \cdot \#\mathcal{D}_1^{*N})^2 = 4 \cdot \#\mathcal{D}_1^{*2N}. \quad (4.13)$$

Para os comprimentos pequenos os espaços podem ser explorados integralmente por técnicas de busca por força bruta. No entanto, para N grande, o espaço torna-se proibitivamente grande, inviabilizando a busca exaustiva e exigindo, portanto, a utilização de estratégias de otimização mais sofisticadas. A Tabela 8 ilustra a quantidade de pares de candidatos para os parâmetros por comprimento.

4.2.1 Busca Diádica

Dada a impossibilidade prática de explorar o espaço completo $\mathcal{D}_N$ via busca exaustiva para N grande, é adotado uma estratégia de otimização baseada na construção de um subespaço restrito $\hat{\mathcal{D}}_N \subset \mathcal{D}_N$. Este subespaço é definido com base em propriedades estruturais da DCT exata (Britanak, Yip e Rao, 2007), as quais são utilizadas como diretriz para restringir o conjunto de candidatos. O processo de construção das matrizes candidatas segue a forma descrita na

equação a seguir:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{D}} = \{A \in M_{P_k}(N) : & A = (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_k^\top) \otimes \mathbf{I}_p \\ \vee & A = (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_k^\top) \otimes \bar{\mathbf{I}}_p \\ \vee & A = (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_k^\top) \otimes \mathbf{D}_p \\ \vee & A = (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_k^\top) \otimes (-\mathbf{D}_p) \\ \vee & A = (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_k^\top) \otimes (\mathbf{D}_p \cdot \bar{\mathbf{I}}_p) \\ \vee & A = (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_k^\top) \otimes [(-\mathbf{D}_p) \cdot \bar{\mathbf{I}}_p] \\ \wedge & \mathbf{v}_k^\top \in \mathcal{V}_1^{*N}\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

em que $\mathbf{u}_j$ é um vetor de uns de comprimento o , $\mathbf{v}_k^\top$ é um vetor transposto do conjunto $\mathcal{P}_1^{*N}$, $\mathbf{I}_p$ é a matriz identidade de comprimento p , a matriz $\bar{\mathbf{I}}_p$ é a matriz contra-identidade de comprimento p e a matriz diagonal de sinal alternado é denotada por $\mathbf{D}_p$ de comprimento p . O operador $\otimes$ representa o produto de Kronecker e $\odot$ denota a multiplicação elemento a elemento (Strang, 1980). Os comprimentos j e p são definidos de modo a satisfazer a condição:

$$N = j \cdot p \quad \text{com} \quad j, p \in \mathbb{Z}. \quad (4.16)$$

Esta construção visa não apenas reduzir a dimensionalidade do espaço de busca, mas também preservar propriedades estruturais benéficas à implementação e desempenho. A definição do subespaço $\widehat{\mathcal{D}}_N$ permite tratar o problema como uma otimização restrita sobre um subconjunto viável do domínio original. Busca-se, nesse contexto, identificar os pares de matrizes candidatas que, quando combinados, resultem na menor distância, entre a matriz exata da DCT e sua versão aproximada gerada por meio de uma estrutura de escalonamento. Essa distância é minimizada de acordo com a seguinte expressão:

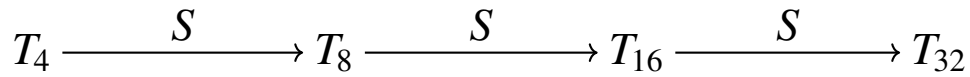
$$\min_{(\widehat{\mathbf{H}}_N, \widehat{\mathbf{G}}_N)} \left\| \widehat{\mathbf{C}}_{2N}^\Pi - \mathbf{C}_{2N}^\Pi \right\|_{\mathbf{F}}^2 \quad (4.17)$$

Nessa formulação, considera-se que a matriz base $\mathbf{T}_N$ é a própria DCT exata ($\mathbf{T}_N = \mathbf{C}_N$), utilizada como ponto de partida para gerar a versão aproximada escalonada $\widehat{\mathbf{C}}_{2N}^\Pi$. A abordagem proposta, estruturada em subespaços e baseada na análise combinatória de candidatos, viabiliza uma otimização eficiente.

4.3 ESCALAMENTO MATRICIAL

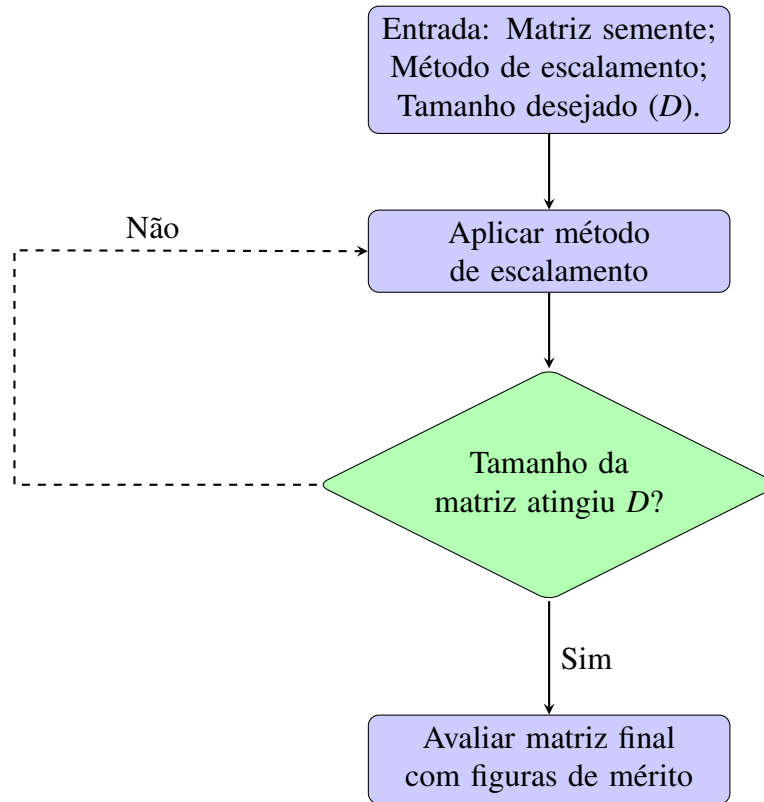
As matrizes obtidas serão submetidas a processos de escalamento, conforme descrito em (Coelho *et al.*, 2021), bem como a possíveis variações decorrentes da busca diádica. O objetivo central do escalamento é possibilitar a obtenção de aproximações para dimensões industriais ($N = 4, 8, 16$ e 32), de forma a avaliar seu desempenho computacional e operacional em diferentes comprimentos de aplicação. Esta seção contempla os itens quatro, cinco e seis dos objetivos específicos.

Figura 2 – Processo iterativo de escalamento matriz de baixa complexidade.



Fonte: O autor (2025).

Figura 3 – Fluxo recursivo do processo de escalamento matricial.



Fonte: O autor (2025).

4.3.1 Escalamento Iterado

A operação de escalonamento é aplicada de forma iterativa, iniciando em N pequeno, que possui um espaço de busca é reduzido em comparação aos comprimentos maiores. O processo avança até M grande que seja um padrão industrial, incorporando as matrizes previamente reportadas na literatura a cada etapa iterativa, até o comprimento final. As matrizes submetidas ao escalamento matricial incluem tanto as propostas neste trabalho quanto algumas previamente estabelecidas na literatura. A Figura 2 ilustra o processo iterativo em curso, no qual todos os parâmetros são submetidos à operação de escalonamento, incluindo matrizes de baixa complexidade, como as estruturas escalares. Já a Figura 3 ilustra o processo de escalamento e as avaliações de desempenhos das matrizes obtidas.

5 RESULTADOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados da busca para o espaço de comprimento $N = 4$, segundo o Algoritmo 1. Também são descritos os resultados da busca diádica para obtenção das estruturas de escalamento que sejam pontos ótimos, variando de $N = 8$ até $N = 32$, com destaque para os melhores desempenhos nos comprimentos industriais $N = 8$ e $N = 16$.

É apresentado o processo de escalamento baseado no método já descrito na literatura, conforme proposto por Coelho *et al.* (2021) e os métodos propostos neste trabalho. A operação de escalamento utiliza como entrada as aproximações descritas em (Oliveira *et al.*, 2018), (Tablada, Cintra e Bayer, 2014), (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) e (Bayer e Cintra, 2010), bem como as aproximações resultantes da busca para $N = 4$.

Ao final do capítulo, discute-se os resultados obtidos, das abordagens desenvolvidas e das já presentes neste trabalho. Por fim, realiza-se um experimento computacional de compressão do tipo JPEG para validação prática das estruturas geradas.

5.1 BUSCA POR APROXIMAÇÕES

Considerando a busca descrita na metodologia e adotando o comprimento $N = 4$ para ambos os conjuntos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, com $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$, é possível realizar a busca em todo o espaço de $\mathcal{P}_2$ e, assim, identificar a matriz dominante para cada conjunto.

Foram gerados aproximadamente 624 vetores candidatos com a remoção do vetor nulo, e com isso foram obtidas $\binom{624}{4} \approx 6.25 \cdot 10^9$ matrizes candidatas, das quais restaram apenas $600 \cdot 10^3$ aproximações ortogonais. Os pontos de dominância dos conjuntos são definidos pelas melhores métricas obtidas em cada conjunto, representadas pelas matrizes $\mathbf{T}_{4-1}$ e $\mathbf{T}_{4-2}$, para $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, respectivamente:

$$\mathbf{T}_{4-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}_{4-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

A Tabela 9 apresenta o comparativo entre as métricas de aproximações obtidas e a já reportadas no estado da arte.

Tabela 9 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 4$.

Método	ε	MSE	C_g^*	η
$\mathbf{C}_{\text{Exata}}$	0.0000	0.0000	7.5701	97.6966
$\hat{\mathbf{C}}_{1(\text{Proposta})}$	0.9565	0.0073	7.1744	95.5737
$\hat{\mathbf{C}}_{2(\text{Proposta})}$	0.0316	0.0002	7.5541	97.3301

Fonte: O autor (2025).

Tabela 10 – Comparação de complexidade computacional para $N = 4$.

Método	Multiplicações	Somas	Deslocamento de Bit	Conjunto
$\hat{\mathbf{C}}_{1(\text{Proposta})}$	0	8	0	$\mathcal{P}_1$
$\hat{\mathbf{C}}_{2(\text{Proposta})}$	0	8	2	$\mathcal{P}_2$

Fonte: O autor (2025).

Observa-se que a matriz $\mathbf{T}_1$ apresenta as melhores métricas dentro do conjunto $\mathcal{P}_1$, sendo, portanto, considerada sua matriz dominante. De forma análoga, a matriz $\mathbf{T}_2$ representa o ponto de dominância no conjunto ampliado $\mathcal{P}_2$.

Na Tabela 10 apresenta o custo computacional associado às matrizes $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$, em comparação com outras matrizes amplamente reportadas na literatura especializada.

As matrizes acima podem ser implementadas pelas seguintes fatorações a seguir:

$$\mathbf{T}_{4-1} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \quad (5.2)$$

e

$$\mathbf{T}_{4-2} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_5. \quad (5.3)$$

Considerando as seguinte matrizes para essa construção:

$$\mathbf{A}_4^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_4^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_4^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

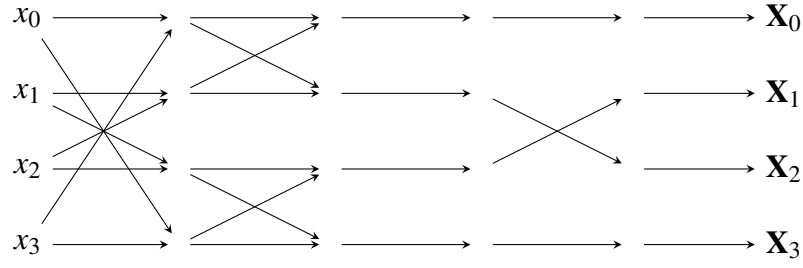
$$\mathbf{A}_4^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

As figuras a seguir apresentam o diagrama de Fluxo dos algoritmos rápidos das matrizes propostas. A Figura 4 e 5 ilustra respectivamente o diagrama de fluxo para a matriz $\mathbf{T}_{4-1}$ e $\mathbf{T}_{4-1}$.

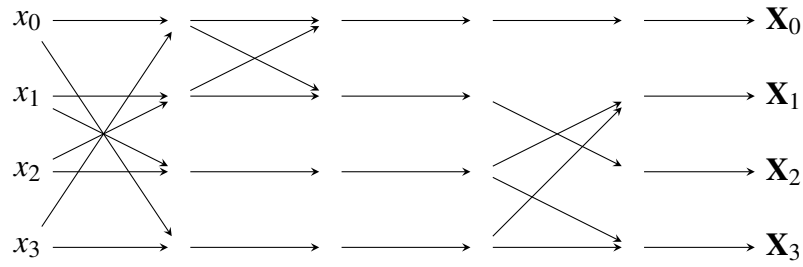
5.2 VARIAÇÕES DE ESCALAMENTO

5.2.1 Estruturas Propostas

Partindo do método proposto para busca de estruturas de escalamento, para $N = 4$, o espaço de busca contém 1024 pares, e para $N = 8$, esse número cresce para aproximadamente $2.62 \cdot 10^5$.

Figura 4 – Diagrama de fluxo de sinal para a matriz T_{4-1} .

Fonte: O autor (2025).

Figura 5 – Diagrama de fluxo de sinal para a matriz T_{4-2} .

Fonte: O autor (2025).

Em ambos os casos, é viável explorar exaustivamente todo o espaço de busca. No entanto, para $N = 16$, o espaço cresce para cerca de $1.71 \cdot 10^{10}$ pares, o que inviabiliza a busca exaustiva. Assim, adota-se uma estratégia sistemática, em virtude da complexidade combinatória, que reduziu para $2.78 \cdot 10^6$ pares possíveis. Em todos os casos, os pontos máximos foram obtidos com base na Equação 3.47, coincidindo com uma das melhores estruturas presentes em (Coelho *et al.*, 2021). Ao todo, foram encontrados quatro escalamentos distintos, sendo que um deles corresponde a uma estrutura também presente em (Coelho *et al.*, 2021).

Conforme é apresentado na Tabela 11, as estruturas obtidas, sendo o primeiro um método já descrito na literatura e as demais são resultados novos que apresentam métricas semelhantes ao escalamento no estado da arte. A Tabela 12 mostra as métricas baseado na Equação 3.47. Os Métodos II e III revelam-se equivalentes, respectivamente, ao método proposto em (Coelho *et al.*, 2021) e ao Método I apresentado neste trabalho. Dessa forma, observa-se que os Métodos I e III produzem a mesma matriz, o que também se verifica no outro conjunto de experimentos.

5.2.2 Condição de Igualdade

Considere a matriz $\mathbf{P}_N \in \mathbb{R}^{N \times N}$ dada por:

$$\mathbf{P}_N = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

Tabela 11 – Casos de Aproximações Obtidos para o Escalamento.

Caso	$\widehat{\mathbf{H}}_N$	$\widehat{\mathbf{G}}_N$	Ortogonal?
S _c -VI	$-\bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{D}_N$	$\mathbf{D}_N$	Sim
I	$\mathbf{I}_N$	$\bar{\mathbf{I}}_N$	Sim
II	$-\bar{\mathbf{I}}_N$	$\bar{\mathbf{I}}_N \cdot \mathbf{D}_N$	Sim
III	$\mathbf{D}_N$	$\mathbf{I}_N$	Sim

Fonte: O autor (2025).

Tabela 12 – Desempenho das aproximações para os comprimento $N = 8, 16$ e 32 .

Caso	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$
S _c -VI	1.954	3.033	4.515
I	1.954	3.033	4.515
II	1.954	3.033	4.515
III	1.954	3.033	4.515

Fonte: O autor (2025).

em que $\phi_{N(m-1)+n} = a_{m,n}$. Portanto $\mathbf{P}_N$ é dada por:

$$\mathbf{P}_N = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N,1} & \cdots & \cdots & a_{N,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_N \\ \phi_{N+1} & \phi_{N+2} & \cdots & \phi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{(N \times (N-1))+1} & \phi_{(N \times (N-1))+2} & \cdots & \phi_{N \times N} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Para fins de ilustração de equivalência entre métodos considere a matriz $\mathbf{P}_4$, conforme é apresentado a seguir:

$$\mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 & \phi_8 \\ \phi_9 & \phi_{10} & \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{13} & \phi_{14} & \phi_{15} & \phi_{16} \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

A matriz descrita será submetida a dois tipos de escalamento, e será tomada a diferença entre os resultados obtidos, a fim de verificar qual matriz de entrada conduz ao mesmo resultado final.

5.2.2.1 Condição 1

Os Métodos S_c-VI e I foram aplicados a matriz $\mathbf{P}_4$, os quais resultam na seguinte matriz de saída:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_1 - \phi_{16} & \phi_{15} - \phi_2 & -\phi_{14} - \phi_3 & \phi_{13} - \phi_4 & -\phi_{13} + \phi_4 & \phi_{14} + \phi_3 & -\phi_{15} + \phi_2 & \phi_1 + \phi_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{12} - \phi_5 & -\phi_{11} - \phi_6 & \phi_{10} - \phi_7 & -\phi_8 - \phi_9 & \phi_8 + \phi_9 & -\phi_{10} + \phi_7 & \phi_{11} + \phi_6 & -\phi_{12} + \phi_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_8 - \phi_9 & -\phi_{10} + \phi_7 & -\phi_{11} - \phi_6 & -\phi_{12} + \phi_5 & \phi_{12} - \phi_5 & \phi_{11} + \phi_6 & \phi_{10} - \phi_7 & \phi_8 + \phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{13} + \phi_4 & -\phi_{14} - \phi_3 & -\phi_{15} + \phi_2 & -\phi_1 - \phi_{16} & \phi_1 + \phi_{16} & \phi_{15} - \phi_2 & \phi_{14} + \phi_3 & \phi_{13} - \phi_4 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

manipulando a matriz para observar elementos semelhantes, é reorganizada para a seguinte forma:

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_1 + \phi_{16}) & \phi_{15} - \phi_2 & -(\phi_{14} + \phi_3) & -\phi_{13} + \phi_4 & -(\phi_{13} - \phi_4) & \phi_{14} + \phi_3 & -(\phi_{15} - \phi_2) & \phi_1 + \phi_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{12} - \phi_5 & -(\phi_{11} + \phi_6) & \phi_{10} - \phi_7 & -(\phi_8 + \phi_9) & \phi_8 + \phi_9 & -(\phi_{10} - \phi_7) & \phi_{11} + \phi_6 & -(\phi_{12} - \phi_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_8 + \phi_9) & -(\phi_{10} - \phi_7) & -(\phi_{11} + \phi_6) & -(\phi_{12} - \phi_5) & \phi_{12} - \phi_5 & \phi_{11} + \phi_6 & \phi_{10} - \phi_7 & \phi_8 + \phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_{13} + \phi_4) & -(\phi_{14} + \phi_3) & -(\phi_{15} - \phi_2) & -(\phi_1 + \phi_{16}) & \phi_1 + \phi_{16} & \phi_{15} - \phi_2 & \phi_{14} + \phi_3 & \phi_{13} - \phi_4 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Para condição de igualdade ocorrer entre os métodos, será montado o conjunto de equações, tal qual os resultados são elementos da matriz:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_{16} &= 0, \\ -\phi_2 + \phi_{15} &= 0, \\ \phi_3 + \phi_{14} &= 0, \\ -\phi_4 + \phi_{13} &= 0, \\ -\phi_5 + \phi_{12} &= 0, \\ \phi_6 + \phi_{11} &= 0, \\ -\phi_7 + \phi_{10} &= 0, \\ \phi_8 + \phi_9 &= 0, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{16} = -\phi_1, \\ \phi_{15} = \phi_2, \\ \phi_{14} = -\phi_3, \\ \phi_{13} = \phi_4, \\ \phi_{12} = \phi_5, \\ \phi_{11} = -\phi_6, \\ \phi_{10} = \phi_7, \\ \phi_9 = -\phi_8. \end{cases} \quad (5.9)$$

Com base na resposta dos conjuntos de equação é obtido a seguinte matriz $\mathbf{P}_4^1$, conforme é apresentada a seguir:

$$\mathbf{P}_4^1 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 & \phi_8 \\ -\phi_8 & \phi_7 & -\phi_6 & \phi_5 \\ \phi_4 & -\phi_3 & \phi_2 & -\phi_1 \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

A matriz $\mathbf{P}_4^1$ satisfaz a estrutura descrita na equação a seguir:

$$a_{N+1-n, N+1-m} = (-1)^{1+m+n} a_{m,n}. \quad (5.11)$$

5.2.2.2 Condição 2

Na segunda condição de igualdade a matriz $\mathbf{P}_4$ será submetida aos Métodos S_c-VI e II, os quais acabam retornando a seguinte matriz de saída:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{13} - \phi_{16} & \phi_{14} + \phi_{15} & -\phi_{14} - \phi_{15} & \phi_{13} + \phi_{16} & -\phi_{13} - \phi_{16} & \phi_{14} + \phi_{15} & -\phi_{14} - \phi_{15} & \phi_{13} + \phi_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{12} - \phi_9 & \phi_{10} - \phi_{11} & \phi_{10} - \phi_{11} & \phi_{12} - \phi_9 & -\phi_{12} + \phi_9 & -\phi_{10} + \phi_{11} & -\phi_{10} + \phi_{11} & -\phi_{12} + \phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_5 - \phi_8 & \phi_6 + \phi_7 & -\phi_6 - \phi_7 & \phi_5 + \phi_8 & -\phi_5 - \phi_8 & \phi_6 + \phi_7 & -\phi_6 - \phi_7 & \phi_5 + \phi_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_1 + \phi_4 & \phi_2 - \phi_3 & \phi_2 - \phi_3 & -\phi_1 + \phi_4 & \phi_1 - \phi_4 & -\phi_2 + \phi_3 & -\phi_2 + \phi_3 & \phi_1 - \phi_4 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

a manipulação da matriz $\mathbf{E}_2$ é efetuada para a seguinte forma:

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_{13}+\phi_{16}) & \phi_{14}+\phi_{15} & -(\phi_{14}+\phi_{15}) & \phi_{13}+\phi_{16} & -(\phi_{13}+\phi_{16}) & \phi_{14}+\phi_{15} & -(\phi_{14}+\phi_{15}) & \phi_{13}+\phi_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{12}+\phi_9 & \phi_{10}-\phi_{11} & \phi_{10}-\phi_{11} & -\phi_{12}+\phi_9 & -\phi_{12}+\phi_9 & -(\phi_{10}-\phi_{11}) & -(\phi_{10}-\phi_{11}) & -\phi_{12}+\phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_5+\phi_8) & \phi_6+\phi_7 & -(\phi_6+\phi_7) & \phi_5+\phi_8 & -(\phi_5+\phi_8) & \phi_6+\phi_7 & -(\phi_6+\phi_7) & \phi_5+\phi_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_1-\phi_4) & \phi_2-\phi_3 & \phi_2-\phi_3 & -(\phi_1-\phi_4) & \phi_1-\phi_4 & -(\phi_2-\phi_3) & -(\phi_2-\phi_3) & \phi_1-\phi_4 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

Com base na matriz $\mathbf{E}_2$ é montado o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_4 &= 0, \\ \phi_2 - \phi_3 &= 0, \\ \phi_5 + \phi_8 &= 0, \\ \phi_6 + \phi_7 &= 0, \\ \phi_9 - \phi_{12} &= 0, \\ \phi_{10} - \phi_{11} &= 0, \\ \phi_{13} + \phi_{16} &= 0, \\ \phi_{14} + \phi_{15} &= 0, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \phi_4 = \phi_1, \\ \phi_3 = \phi_2, \\ \phi_8 = -\phi_5, \\ \phi_7 = -\phi_6, \\ \phi_{12} = \phi_9, \\ \phi_{11} = \phi_{10}, \\ \phi_{16} = -\phi_{13}, \\ \phi_{15} = -\phi_{14}. \end{cases} \quad (5.14)$$

A condição de igualdade entre ambos os métodos ocorre quando a matriz de entrada tem a seguinte estrutura:

$$\mathbf{P}_4^2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_2 & \phi_1 \\ \phi_5 & \phi_6 & -\phi_6 & -\phi_5 \\ \phi_9 & \phi_{10} & \phi_{10} & \phi_9 \\ \phi_{13} & \phi_{14} & -\phi_{14} & -\phi_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

A matriz $\mathbf{P}_4^2$ satisfaz a expressão a seguir:

$$a_{m,N+1-n} = (-1)^{m+1} a_{m,n}. \quad (5.16)$$

5.2.2.3 Condição 3

A terceira condição de igualdade que se refere aos Métodos S_c-VI e III, os quais retornam a matriz $\mathbf{E}_3$:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{16}-\phi_4 & \phi_{15}-\phi_3 & -\phi_{14}-\phi_2 & -\phi_1+\phi_{13} & \phi_1-\phi_{13} & \phi_{14}+\phi_2 & -\phi_{15}+\phi_3 & \phi_{16}+\phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{12}+\phi_8 & -\phi_{11}+\phi_7 & \phi_{10}+\phi_6 & \phi_5-\phi_9 & -\phi_5+\phi_9 & -\phi_{10}+\phi_6 & \phi_{11}-\phi_7 & -\phi_{12}+\phi_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{12}-\phi_8 & -\phi_{11}+\phi_7 & -\phi_{10}-\phi_6 & \phi_5-\phi_9 & -\phi_5+\phi_9 & \phi_{10}+\phi_6 & \phi_{11}-\phi_7 & \phi_{12}+\phi_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{16}+\phi_4 & \phi_{15}-\phi_3 & \phi_{14}+\phi_2 & -\phi_1+\phi_{13} & \phi_1-\phi_{13} & -\phi_{14}-\phi_2 & -\phi_{15}+\phi_3 & -\phi_{16}-\phi_4 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

reorganizando a matriz, consegue-se obter a seguinte matriz:

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_{16}+\phi_4) & -(-\phi_{15}+\phi_3) & -(\phi_{14}+\phi_2) & -(\phi_1-\phi_{13}) & \phi_1-\phi_{13} & \phi_{14}+\phi_2 & -\phi_{15}+\phi_3 & \phi_{16}+\phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{12}+\phi_8 & -\phi_{11}+\phi_7 & \phi_{10}+\phi_6 & \phi_5-\phi_9 & -(\phi_5-\phi_9) & -(\phi_{10}+\phi_6) & -(-\phi_{11}+\phi_7) & -(\phi_{12}+\phi_8) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_{12}+\phi_8) & -\phi_{11}+\phi_7 & -(\phi_{10}+\phi_6) & \phi_5-\phi_9 & -(\phi_5-\phi_9) & \phi_{10}+\phi_6 & -(-\phi_{11}+\phi_7) & \phi_{12}+\phi_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{16}+\phi_4 & -(-\phi_{15}+\phi_3) & \phi_{14}+\phi_2 & -(\phi_1-\phi_{13}) & \phi_1-\phi_{13} & -(\phi_{14}+\phi_2) & -\phi_{15}+\phi_3 & -(\phi_{16}+\phi_4) \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

O seguinte conjunto de equações obtidos a partir da matriz $\mathbf{R}_3$:

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_{13} &= 0, \\ \phi_2 + \phi_{14} &= 0, \\ \phi_3 - \phi_{15} &= 0, \\ \phi_4 + \phi_{16} &= 0, \\ \phi_5 - \phi_9 &= 0, \\ \phi_6 + \phi_{10} &= 0, \\ \phi_7 - \phi_{11} &= 0, \\ \phi_8 + \phi_{12} &= 0, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{13} = \phi_1, \\ \phi_{14} = -\phi_2, \\ \phi_{15} = \phi_3, \\ \phi_{16} = -\phi_4, \\ \phi_9 = \phi_5, \\ \phi_{10} = -\phi_6, \\ \phi_{11} = \phi_7, \\ \phi_{12} = -\phi_8. \end{cases} \quad (5.19)$$

A matriz que permite a condição de igualdade entre os métodos é a seguinte:

$$\mathbf{P}_4^3 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 & \phi_8 \\ \phi_5 & -\phi_6 & \phi_7 & -\phi_8 \\ \phi_1 & -\phi_2 & \phi_3 & -\phi_4 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

A expressão a seguir expõem a estrutura da $\mathbf{P}_4^3$:

$$a_{N+1-m,n} = (-1)^{n+1} a_{m,n}. \quad (5.21)$$

5.2.2.4 Condição 4

A matriz $\mathbf{E}_4$ expressa a condição de igualdade que se refere aos Métodos I e II.

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1 - \phi_{13} & \phi_{14} + \phi_2 & -\phi_{15} + \phi_3 & \phi_{16} + \phi_4 & -\phi_{16} - \phi_4 & \phi_{15} - \phi_3 & -\phi_{14} - \phi_2 & -\phi_1 + \phi_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_5 - \phi_9 & \phi_{10} + \phi_6 & -\phi_{11} + \phi_7 & \phi_{12} + \phi_8 & -\phi_{12} - \phi_8 & \phi_{11} - \phi_7 & -\phi_{10} - \phi_6 & -\phi_5 + \phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_5 + \phi_9 & \phi_{10} + \phi_6 & \phi_{11} - \phi_7 & \phi_{12} + \phi_8 & -\phi_{12} - \phi_8 & -\phi_{11} + \phi_7 & -\phi_{10} - \phi_6 & \phi_5 - \phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_1 + \phi_{13} & \phi_{14} + \phi_2 & \phi_{15} - \phi_3 & \phi_{16} + \phi_4 & -\phi_{16} - \phi_4 & -\phi_{15} + \phi_3 & -\phi_{14} - \phi_2 & \phi_1 - \phi_{13} \end{bmatrix}, \quad (5.22)$$

manipulando a matriz é obtido o seguinte resultado:

$$\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1 - \phi_{13} & \phi_{14} + \phi_2 & -\phi_{15} + \phi_3 & \phi_{16} + \phi_4 & -(\phi_{16} + \phi_4) & -(-\phi_{15} + \phi_3) & -(\phi_{14} + \phi_2) & -(\phi_1 - \phi_{13}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_5 - \phi_9 & \phi_{10} + \phi_6 & -\phi_{11} + \phi_7 & \phi_{12} + \phi_8 & -(\phi_{12} + \phi_8) & -(-\phi_{11} + \phi_7) & -(\phi_{10} + \phi_6) & -(\phi_5 - \phi_9) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_5 - \phi_9) & \phi_{10} + \phi_6 & -(-\phi_{11} + \phi_7) & \phi_{12} + \phi_8 & -(\phi_{12} + \phi_8) & -\phi_{11} + \phi_7 & -(\phi_{10} + \phi_6) & \phi_5 - \phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\phi_1 - \phi_{13}) & \phi_{14} + \phi_2 & -(-\phi_{15} + \phi_3) & \phi_{16} + \phi_4 & -(\phi_{16} + \phi_4) & -\phi_{15} + \phi_3 & -(\phi_{14} + \phi_2) & \phi_1 - \phi_{13} \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

A partir das matrizes é obtido o conjunto de equações apresentados a seguir:

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_{13} &= 0, \\ \phi_2 + \phi_{14} &= 0, \\ \phi_3 - \phi_{15} &= 0, \\ \phi_4 + \phi_{16} &= 0, \\ \phi_5 - \phi_9 &= 0, \\ \phi_6 + \phi_{10} &= 0, \\ \phi_7 - \phi_{11} &= 0, \\ \phi_8 + \phi_{12} &= 0, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{13} = \phi_1, \\ \phi_{14} = -\phi_2, \\ \phi_{15} = \phi_3, \\ \phi_{16} = -\phi_4, \\ \phi_9 = \phi_5, \\ \phi_{10} = -\phi_6, \\ \phi_{11} = \phi_7, \\ \phi_{12} = -\phi_8. \end{cases} \quad (5.24)$$

A estrutura da matriz que descreve a condição de igualdade é a apresentada logo em seguida:

$$\mathbf{P}_4^3 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 & \phi_8 \\ \phi_5 & -\phi_6 & \phi_7 & -\phi_8 \\ \phi_1 & -\phi_2 & \phi_3 & -\phi_4 \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

essa matriz retorna a estrutura definida na Equação 5.21.

5.2.2.5 Condição 5

A quinta condição de igualdade que se refere aos Métodos I e III, os quais resultam na matriz $\mathbf{E}_5$:

$$\mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1 - \phi_4 & \phi_2 - \phi_3 & -\phi_2 + \phi_3 & -\phi_1 + \phi_4 & \phi_1 - \phi_4 & \phi_2 - \phi_3 & -\phi_2 + \phi_3 & -\phi_1 + \phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_5 + \phi_8 & \phi_6 + \phi_7 & \phi_6 + \phi_7 & \phi_5 + \phi_8 & -\phi_5 - \phi_8 & -\phi_6 - \phi_7 & -\phi_6 - \phi_7 & -\phi_5 - \phi_8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{12} + \phi_9 & \phi_{10} - \phi_{11} & -\phi_{10} + \phi_{11} & \phi_{12} - \phi_9 & -\phi_{12} + \phi_9 & \phi_{10} - \phi_{11} & -\phi_{10} + \phi_{11} & \phi_{12} - \phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{13} + \phi_{16} & \phi_{14} + \phi_{15} & \phi_{14} + \phi_{15} & \phi_{13} + \phi_{16} & -\phi_{13} - \phi_{16} & -\phi_{14} - \phi_{15} & -\phi_{14} - \phi_{15} & -\phi_{13} - \phi_{16} \end{bmatrix}, \quad (5.26)$$

reorganizando os elementos da matriz é obtido o seguinte:

$$\mathbf{E}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1 - \phi_4 & \phi_2 - \phi_3 & -(\phi_2 - \phi_3) & -(\phi_1 - \phi_4) & \phi_1 - \phi_4 & \phi_2 - \phi_3 & -(\phi_2 - \phi_3) & -(\phi_1 - \phi_4) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_5 + \phi_8 & \phi_6 + \phi_7 & \phi_6 + \phi_7 & \phi_5 + \phi_8 & -(\phi_5 + \phi_8) & -(\phi_6 + \phi_7) & -(\phi_6 + \phi_7) & -(\phi_5 + \phi_8) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{12} + \phi_9 & \phi_{10} - \phi_{11} & -(\phi_{10} - \phi_{11}) & -(\phi_{12} - \phi_9) & -\phi_{12} + \phi_9 & \phi_{10} - \phi_{11} & -(\phi_{10} - \phi_{11}) & -(\phi_{12} - \phi_9) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{13} + \phi_{16} & \phi_{14} + \phi_{15} & \phi_{14} + \phi_{15} & \phi_{13} + \phi_{16} & -(\phi_{13} + \phi_{16}) & -(\phi_{14} + \phi_{15}) & -(\phi_{14} + \phi_{15}) & -(\phi_{13} + \phi_{16}) \end{bmatrix}. \quad (5.27)$$

Com os elementos da matriz $\mathbf{E}_5$ é montado o conjunto de equações a seguir:

$$\begin{aligned} \phi_1 - \phi_4 &= 0, \\ \phi_2 - \phi_3 &= 0, \\ \phi_5 + \phi_8 &= 0, \\ \phi_6 + \phi_7 &= 0, \\ \phi_9 - \phi_{12} &= 0, \\ \phi_{10} - \phi_{11} &= 0, \\ \phi_{13} + \phi_{16} &= 0, \\ \phi_{14} + \phi_{15} &= 0, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \phi_4 = \phi_1, \\ \phi_3 = \phi_2, \\ \phi_8 = -\phi_5, \\ \phi_7 = -\phi_6, \\ \phi_{12} = \phi_9, \\ \phi_{11} = \phi_{10}, \\ \phi_{16} = -\phi_{13}, \\ \phi_{15} = -\phi_{14}. \end{cases} \quad (5.28)$$

A estrutura de matriz de entrada que satisfaz a condição de entrada é apresentada a seguir:

$$\mathbf{P}_4^2 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_2 & \phi_1 \\ \phi_5 & \phi_6 & -\phi_6 & -\phi_5 \\ \phi_9 & \phi_{10} & \phi_{10} & \phi_9 \\ \phi_{13} & \phi_{14} & -\phi_{14} & -\phi_{13} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

a matriz resultado obedece a condição estrutural apresentada na Equação 5.16.

5.2.2.6 Condição 6

A última condição de igualdade que se refere aos Métodos II e III, os quais resultam na seguinte matriz:

$$\mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_{13}-\phi_4 & -\phi_{14}-\phi_3 & \phi_{15}-\phi_2 & -\phi_1-\phi_{16} & \phi_1+\phi_{16} & -\phi_{15}+\phi_2 & \phi_{14}+\phi_3 & -\phi_{13}+\phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_8+\phi_9 & -\phi_{10}+\phi_7 & \phi_{11}+\phi_6 & -\phi_{12}+\phi_5 & \phi_{12}-\phi_5 & -\phi_{11}-\phi_6 & \phi_{10}-\phi_7 & -\phi_8-\phi_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{12}+\phi_5 & -\phi_{11}-\phi_6 & -\phi_{10}+\phi_7 & -\phi_8-\phi_9 & \phi_8+\phi_9 & \phi_{10}-\phi_7 & \phi_{11}+\phi_6 & \phi_{12}-\phi_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1+\phi_{16} & \phi_{15}-\phi_2 & \phi_{14}+\phi_3 & \phi_{13}-\phi_4 & -\phi_{13}+\phi_4 & -\phi_{14}-\phi_3 & -\phi_{15}+\phi_2 & -\phi_1-\phi_{16} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

reorganizando os elementos é obtido:

$$\mathbf{E}_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(-\phi_{13}+\phi_4) & -(\phi_{14}+\phi_3) & -(-\phi_{15}+\phi_2) & -(\phi_1+\phi_{16}) & \phi_1+\phi_{16} & -\phi_{15}+\phi_2 & \phi_{14}+\phi_3 & -\phi_{13}+\phi_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_8+\phi_9 & -\phi_{10}+\phi_7 & \phi_{11}+\phi_6 & -\phi_{12}+\phi_5 & -(-\phi_{12}+\phi_5) & -(\phi_{11}+\phi_6) & -(-\phi_{10}+\phi_7) & -(\phi_8+\phi_9) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\phi_{12}+\phi_5 & -(\phi_{11}+\phi_6) & -\phi_{10}+\phi_7 & -(\phi_8+\phi_9) & \phi_8+\phi_9 & -(-\phi_{10}+\phi_7) & \phi_{11}+\phi_6 & -(-\phi_{12}+\phi_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \phi_1+\phi_{16} & -(-\phi_{15}+\phi_2) & \phi_{14}+\phi_3 & -(-\phi_{13}+\phi_4) & -\phi_{13}+\phi_4 & -(\phi_{14}+\phi_3) & -\phi_{15}+\phi_2 & -(\phi_1+\phi_{16}) \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

O conjunto de equações obtidas a partir da matriz $\mathbf{E}_6$ é apresentada a seguir:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_{16} &= 0, \\ \phi_2 - \phi_{15} &= 0, \\ \phi_3 + \phi_{14} &= 0, \\ \phi_4 - \phi_{13} &= 0, \\ \phi_5 - \phi_{12} &= 0, \\ \phi_6 + \phi_{11} &= 0, \\ \phi_7 - \phi_{10} &= 0, \\ \phi_8 + \phi_9 &= 0, \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{16} = -\phi_1, \\ \phi_{15} = \phi_2, \\ \phi_{14} = -\phi_3, \\ \phi_{13} = \phi_4, \\ \phi_{12} = \phi_5, \\ \phi_{11} = -\phi_6, \\ \phi_{10} = \phi_7, \\ \phi_9 = -\phi_8. \end{cases} \quad (5.32)$$

A condição de igualdade entre os métodos selecionados é descrito pela seguinte matriz:

$$\mathbf{P}_4^1 = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \\ \phi_5 & \phi_6 & \phi_7 & \phi_8 \\ -\phi_8 & \phi_7 & -\phi_6 & \phi_5 \\ \phi_4 & -\phi_3 & \phi_2 & -\phi_1 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

a matriz que determina a condição de equivalência é estruturada perante a Equação 5.11.

5.2.2.7 Discussões entre condições de igualdade

Pode-se evidenciar que as matrizes $\mathbf{P}_4^1$, $\mathbf{P}_4^2$ e $\mathbf{P}_4^3$ correspondem às matrizes de entrada que garantem a equivalência entre os métodos, uma vez que apresentam estruturas matriciais que satisfazem as condições de equivalência. Assim, tem-se:

1. Quando a matriz de entrada satisfaz a estrutura apresentada na Equação 5.11, existe equivalência entre os métodos, de modo que:

- $S(\mathbf{T}_N, -\bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{D}_N, \mathbf{D}_N) = S(\mathbf{T}_N, \mathbf{I}_N, \bar{\mathbf{I}}_N)$;
- $S(\mathbf{T}_N, -\bar{\mathbf{I}}_N, \bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{D}_N) = S(\mathbf{T}_N, \mathbf{D}_N, \mathbf{I}_N)$.

2. Quando a matriz de entrada satisfaz a estrutura apresentada na Equação 5.16, existe equivalência entre os métodos, de modo que:

- $S(\mathbf{T}_N, -\bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{D}_N, \mathbf{D}_N) = S(\mathbf{T}_N, -\bar{\mathbf{I}}_N, \bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{D}_N)$;
- $S(\mathbf{T}_N, \mathbf{I}_N, \bar{\mathbf{I}}_N) = S(\mathbf{T}_N, \mathbf{D}_N, \mathbf{I}_N)$.

3. Quando a matriz de entrada satisfaz a estrutura apresentada na Equação 5.21, existe equivalência entre os métodos, de modo que:

- $S(\mathbf{T}_N, -\bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{D}_N, \mathbf{D}_N) = S(\mathbf{T}_N, \mathbf{D}_N, \mathbf{I}_N)$;
- $S(\mathbf{T}_N, \mathbf{I}_N, \bar{\mathbf{I}}_N) = S(\mathbf{T}_N, -\bar{\mathbf{I}}_N, \bar{\mathbf{I}}_N \mathbf{D}_N)$.

As Tabelas 13, 14, 15 e 16, demonstra para que o par de equivalência ocorra é necessário que a matriz de entrada respeite a estrutura apresentada.

Tabela 13 – Equivalência com Método S_c -VI.

Método	S_c -VI
I	$a_{N+1-n, N+1-m} = (-1)^{1+m+n} a_{m,n}$
II	$a_{i, N+1-n} = (-1)^{m+1} a_{m,n}$
III	$a_{N+1-m, n} = (-1)^{n+1} a_{m,n}$

Fonte: O autor (2025).

Tabela 14 – Equivalência com Método I.

Método	I
S_c-VI	$a_{N+1-n, N+1-m} = (-1)^{1+m+n} a_{m,n}$
II	$a_{N+1-m, n} = (-1)^{n+1} a_{m,n}$
III	$a_{m, N+1-n} = (-1)^{m+1} a_{m,n}$

Fonte: O autor (2025).

Tabela 15 – Equivalência com Método II.

Método	II
S_c-VI	$a_{m, N+1-n} = (-1)^{m+1} a_{m,n}$
I	$a_{N+1-m, n} = (-1)^{n+1} a_{m,n}$
III	$a_{N+1-n, N+1-m} = (-1)^{1+m+n} a_{m,n}$

Fonte: O autor (2025).

Tabela 16 – Equivalência com Método III.

Método	III
S_c-VI	$a_{N+1-m, n} = (-1)^{n+1} a_{m,n}$
I	$a_{m, N+1-n} = (-1)^{m+1} a_{m,n}$
II	$a_{N+1-m, N+1-m} = (-1)^{1+m+n} a_{m,n}$

Fonte: O autor (2025).

Tabela 17 – Matriz de $N = 4$ escaladas por S_c - VI.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{8\text{-Exata}}$	0.0000	0.0000	8.8259	93.9910	-
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	5.0492	0.0251	7.9461	85.3138	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	4.0933	0.0241	8.0428	84.8384	S_c - VI

Fonte: O autor (2025).

5.2.2.8 Condição 7

A sétima condição de igualdade entre métodos surge por consequência direta da combinação das três estruturas matriciais quando são satisfeitas.

A sétima condição de igualdade ocorre quando o sexto escalamento de (Coelho *et al.*, 2021) e os escalamentos propostos (I, II e III) resultam no mesmo escalamento. Um exemplo de matriz que satisfaz essas condições é a matriz $\mathbf{T}_{4-1}$.

5.3 ESCALAMENTO

A seção anterior apresentou as estruturas obtidas, as quais serviram de base para a etapa de escalamento. As aproximações propostas em (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezzel, Ahmad e Swamy, 2008), (Oliveira *et al.*, 2018) e (Silveira *et al.*, 2016), assim como as aproximações para $N = 4$ desenvolvidas neste trabalho, foram utilizadas como ponto de partida para essa operação, funcionando como entradas no processo de escalamento. Foram utilizados apenas os Métodos S_{c-VI} e I, pois todas as matrizes satisfazem a 2ª condição de igualdade, com exceção da matriz $\mathbf{T}_{4-1}$, que satisfaz a 7ª condição.

5.3.1 Método de Escalamento S_c -VI

As matrizes obtidas por meio do escalamento proposto em (Coelho *et al.*, 2021), a partir das aproximações com $N = 4$ até $N = 32$, tiveram seus desempenhos avaliados segundo as figuras de mérito descritas anteriormente. A Tabela a seguir apresenta os resultados obtidos para a iteração inicial, partindo de $N = 4$ para $N = 8$.

A Tabela 17 indica que a versão escalada da matriz $\mathbf{T}_1$, proposta como sétimo Método por Coelho *et al.* (2021), apresenta o melhor desempenho em termos de eficiência de transformação. Por outro lado, a matriz $\mathbf{T}_2$ se destaca nas demais métricas avaliadas.

A Tabela 18 apresenta a avaliação do desempenho das aproximações em relação às figuras de mérito, considerando os casos de $N = 8$ e $N = 16$, com o uso de matrizes já propostas na literatura e daquelas derivadas a partir de $N = 4$.

A Tabela 18 formaliza a notação utilizada neste trabalho, a matriz proposta em (Oliveira *et al.*, 2018) ($\hat{\mathbf{C}}_{N\text{-OCBSML}_1}$), a aproximação proposta em (Lengwehasatit e Ortega, 2004) ($\hat{\mathbf{C}}_{N\text{-LO}}$)

Tabela 18 – Matriz de $N = 8$ escaladas por S_c - VI.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{16}$ -Exata	0.0000	0.0000	9.4554	88.4556	-
$\hat{\mathbf{C}}_{16}$ -OCBSML ₁	13.7047	0.0706	8.175	63.7852	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16}$ -LO	12.6327	0.0660	7.8261	61.4863	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16}$ -BAS-2008b	17.9083	0.1320	6.3245	55.6896	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16}$ -Proposta-1	17.4314	0.0592	8.1941	70.6465	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16}$ -Proposta-2	15.8331	0.0577	8.2924	68.5672	S_c - VI

Fonte: O autor (2025).

Tabela 19 – Matriz de $N = 16$ escaladas por S_c - VI.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{32}$ -Exata	0.0000	0.0000	9.7736	81.6946	-
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -OCBSML ₁	43.7394	0.1244	8.2611	47.7746	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -LO	41.7415	0.1209	7.9136	46.1206	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -BAS-2008b	50.8869	0.1902	6.4098	42.4114	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -SBCKMK ₁	78.9483	0.6085	7.6034	41.1833	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-1	49.8829	0.1175	8.2693	55.9114	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-2	47.0808	0.1158	8.3693	53.7882	S_c - VI

Fonte: O autor (2025).

e em (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) ($\hat{\mathbf{C}}_{N}$ -BAS-2008b). Na anotação apresentada N denota o comprimento da matriz final.

Os resultados do escalamento das matrizes selecionadas via S_c - VI, de $N = 8$ para $N = 16$, conforme é apresentado na Tabela 18, indicando que a matriz apresentada em (Lengwehasatit e Ortega, 2004) possui o menor erro total de energia. Em relação às figuras de mérito MSE e ganho de codificação, a matriz escalada $\mathbf{T}_2$ apresenta desempenho dominante, enquanto, para a eficiência de transformação, a matriz $\mathbf{T}_1$ se sobressai.

Os desempenhos das aproximações escaladas são apresentados na Tabela 19, com base nas figuras de mérito previamente descritas das matrizes de $N = 32$.

A Tabela 19 apresenta a introdução da aproximação de baixa complexidade proposta em (Silveira *et al.*, 2016) ($\hat{\mathbf{C}}_{N}$ -SBCKMK₁) no processo de escalamento iterado. Até o momento, a aproximação apresentada por Lengwehasatit e Ortega (2004) apresenta o menor erro total de energia em todas as iterações de escalamento realizadas por meio do Método S_c -VI, conforme descrito. A matriz $\mathbf{T}_2$ continua apresentando desempenho superior nas métricas de MSE e ganho de codificação, enquanto a matriz $\mathbf{T}_1$ mantém sua dominância em eficiência de transformação. As aproximações propostas a partir de $N = 4$, escaladas por meio da estrutura apresentada por Coelho *et al.* (2021) e iteradas até $N = 32$, apresentam métricas superiores em

Tabela 20 – Matriz de $N = 4$ escalada pelo Método I.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{8\text{-Exata}}$	0.0000	0.0000	8.8259	93.9910	-
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	5.0492	0.0251	7.9461	85.3138	I
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	4.0933	0.0241	8.0428	84.8384	I

Fonte: O autor (2025).

Tabela 21 – Matriz de $N = 8$ escaladas pelo Método I.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{16\text{-Exata}}$	0.0000	0.0000	9.4554	88.4556	-
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-OCBSML}_1}$	13.7047	0.0475	8.8787	76.8108	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-LO}}$	12.6327	0.0473	8.6361	73.1059	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-BAS-2008b}}$	17.9083	0.0582	7.3217	67.3154	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-1}}$	17.4314	0.0592	8.1941	70.6465	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-2}}$	15.8331	0.0577	8.2924	68.5672	I

Fonte: O autor (2025).

relação às demais abordagens escaladas.

5.3.2 Método de Escalamento I

A partir deste ponto, utilizam-se matrizes obtidas por meio do Método de escalamento proposto neste trabalho, com base nas aproximações para $N = 4$, escaladas até $N = 32$. Partiremos do escalamento das matrizes de comprimento $N = 4$ propostas nesse trabalho para $N = 8$, a Tabela 20 ilustra o desempenho perante as figuras de mérito.

Na Tabela 20, observa-se um resultado semelhante ao da Tabela 17, com a matriz $\mathbf{T}_1$ mantendo a dominância na eficiência de transformação, independentemente do método de escalamento utilizado. As demais métricas continuam sendo lideradas pela matriz $\mathbf{T}_2$.

A Tabela 21 ilustra mais um passo no processo iterativo, no qual as matrizes de comprimento $N = 4$ são combinadas com matrizes selecionadas de $N = 8$, a fim de gerar aproximações para $N = 16$.

Na Tabela 21, observa-se que as métricas de erro foram dominadas pela aproximação apresentada em (Lengwehasatit e Ortega, 2004), enquanto as métricas de codificação se destacaram na aproximação proposta por (Oliveira *et al.*, 2018). Para finalizar o processo de escalamento iterado é efetuado o processo de escalamento para $N = 32$ das matrizes presentes na Tabela 21 com adição da matriz proposta por (Silveira *et al.*, 2014).

A Tabela 22 evidencia que as matrizes propostas por (Lengwehasatit e Ortega, 2004) e (Oliveira *et al.*, 2018) apresentam, respectivamente, dominância sobre as métricas de erro e de

Tabela 22 – Matriz de $N = 16$ escaladas pelo Método I.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{\text{Exata}}$	0.0000	0.0000	9.7736	81.6946	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{OCBSML}_1}$	46.2659	0.1104	8.9505	61.0272	I
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{LO}}$	43.8974	0.1095	8.7086	57.528	I
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2008b}}$	52.9558	0.1192	7.3987	52.9498	I
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{SBCKMK}_1}$	78.9483	0.1257	8.3682	55.7766	I
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{Proposta-1}}$	49.8829	0.1175	8.2693	55.9114	I
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{Proposta-2}}$	47.0808	0.1158	8.3693	53.7882	I

Fonte: O autor (2025).

Tabela 23 – Comparação entre resultados de método de escalamento para $N = 8$.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{8\text{-Exata}}$	0.0000	0.0000	8.8259	93.9910	-
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	5.0492	0.0251	7.9461	85.3138	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	4.0933	0.0241	8.0428	84.8384	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	5.0492	0.0251	7.9461	85.3138	I
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	4.0933	0.0241	8.0428	84.8384	I

Fonte: O autor (2025).

codificação, em mais uma iteração do processo de escalamento. As matrizes propostas a partir de $N = 4$ apresentam resultados competitivos em comparação às demais matrizes escaladas até $N = 32$.

5.3.3 Discussão Sobre Método de Escalamento

Foram apresentados os resultados obtidos a partir de ambas as estruturas de escalamento, e assim permitindo a seleção para a comparação com métodos consolidados no estado da arte. A análise também possibilitou a seleção das melhores matrizes de escalamento para cada valor de comprimento N , com base no desempenho frente às figuras de mérito consideradas.

A Tabela 23 evidencia que, independentemente do método de escalamento adotado, as matrizes $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ apresentam os mesmos resultados nas métricas avaliadas.

Na Tabela 24 é apresentado um comparativo entre os métodos de escalamento para $N = 16$, com base nas figuras de mérito adotadas.

A Tabela 24 mostra que a matriz proposta por (Lengwehasatit e Ortega, 2004) apresenta dominância nas métricas de erro. No entanto, ao se considerar o método de escalamento, observa-se que a dominância varia: o Método de Coelho *et al.* (2021) se destaca no erro total de energia, enquanto o Método I apresenta melhor desempenho no MSE. Para as métricas de codificação, observa-se dominância da aproximação proposta em (Oliveira *et al.*, 2018) apenas

Tabela 24 – Comparação entre resultados de método de escalamento para $N = 16$.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{16}\text{-Exata}$	0.0000	0.0000	9.4554	88.4556	-
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-OCBSML}_1$	13.7047	0.0706	8.1750	63.7852	$S_c\text{- VI}$
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-LO}$	12.6327	0.0660	7.8261	61.4863	$S_c\text{- VI}$
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-BAS-2008b}$	17.9083	0.1320	6.3245	55.6896	$S_c\text{- VI}$
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-Proposta-1}$	17.4314	0.0592	8.1941	70.6465	$S_c\text{- VI}$
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-Proposta-2}$	15.8331	0.0577	8.2924	68.5672	$S_c\text{- VI}$
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-OCBSML}_1$	13.7047	0.0475	8.8787	76.8108	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-LO}$	12.6327	0.0473	8.6361	73.1059	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-BAS-2008b}$	17.9083	0.0582	7.3217	67.3154	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-Proposta-1}$	17.4314	0.0592	8.1941	70.6465	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16}\text{-Proposta-2}$	15.8331	0.0577	8.2924	68.5672	I

Fonte: O autor (2025).

quando utilizado o Método I, que se destaca tanto no ganho de codificação quanto na eficiência de transformação.

A última comparação entre os métodos de escalamento, realizada para $N = 32$, tem como objetivo ilustrar de forma abrangente todo o processo iterativo de escalamento, abrangendo todos os comprimentos industriais. O comparativo apresentado na Tabela 25 indica que as matrizes propostas por (Lengwehasatit e Ortega, 2004) e (Oliveira *et al.*, 2018) exibem, respectivamente, dominância nas métricas de erro e de codificação, em mais uma etapa do processo de escalamento. Além disso, as matrizes derivadas a partir de $N = 4$ mostram resultados competitivos quando comparadas às demais matrizes escaladas até $N = 32$.

5.4 ESTADO DA ARTE E APROXIMAÇÕES PROPOSTAS

Nesta seção, são comparadas as matrizes obtidas com as matrizes presentes no estado da arte, considerando ambos os métodos de escalamento.

5.4.1 Comparativo em $N = 4$

Para as matrizes proposta neste trabalho são os pontos máximos do espaço de busca $N = 4$, conforme é apresentado na Tabela 26. A Tabela 26 mostra dominância da matriz $\mathbf{T}_2$ sobre as figuras de mérito.

Conforme já apresentado na Tabela 10, o comparativo entre a complexidade das matrizes resume-se apenas as matrizes obtidas. Como não há registros de aproximações para $N = 4$, a Tabela 10 apresenta a complexidade das matrizes propostas.

Tabela 25 – Comparação entre resultados de método de escalamento para $N = 32$.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$C_{32}\text{-Exata}$	0.0000	0.0000	9.7736	81.6946	-
$\hat{C}_{32}\text{-OCBSML}_1$	43.7394	0.1244	8.2611	47.7746	S_c - VI
$\hat{C}_{32}\text{-LO}$	41.7415	0.1209	7.9136	46.1206	S_c - VI
$\hat{C}_{32}\text{-BAS-2008b}$	50.8869	0.1902	6.4098	42.4114	S_c - VI
$\hat{C}_{32}\text{-SBCKMK}_1$	78.9483	0.6085	7.6034	41.1833	S_c - VI
$\hat{C}_{32}\text{-Proposta-1}$	49.8829	0.1175	8.2693	55.9114	S_c - VI
$\hat{C}_{32}\text{-Proposta-2}$	47.0808	0.1158	8.3693	53.7882	S_c - VI
$\hat{C}_{32}\text{-OCBSML}_1$	46.2659	0.1104	8.9505	61.0272	I
$\hat{C}_{32}\text{-LO}$	43.8974	0.1095	8.7086	57.5280	I
$\hat{C}_{32}\text{-BAS-2008b}$	52.9558	0.1192	7.3987	52.9498	I
$\hat{C}_{32}\text{-SBCKMK}_1$	78.9483	0.1257	8.3682	55.7766	I
$\hat{C}_{32}\text{-Proposta-1}$	49.8829	0.1175	8.2693	55.9114	I
$\hat{C}_{32}\text{-Proposta-2}$	47.0808	0.1158	8.3693	53.7882	I

Fonte: O autor (2025).

Tabela 26 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 4$.

Método	ε	MSE	C_g^*	η
C_{Exata}	0.0000	0.0000	7.5701	97.6966
$\hat{C}_{1(\text{Proposta})}$	0.9565	0.0073	7.1744	95.5737
$\hat{C}_{2(\text{Proposta})}$	0.0316	0.0002	7.5541	97.3301

Fonte: O autor (2025).

5.4.2 Comparativo em $N = 8$

A Tabela 27 ilustra o comparativo entre as matrizes escaladas de $N = 4$ até $N = 8$ para ambos os métodos de escalamento.

Para o comprimento $N = 8$, conforme ilustrado na Tabela 27, os resultados obtidos pelas aproximações propostas mostram-se competitivos em relação aos resultados reportados na literatura, as aproximações proposta neste trabalho a partir de $N = 8$ são ilustradas no Apêndice A. É apresentado o desempenho das métricas para as aproximações proposta em (Oliveira *et al.*, 2018) ($\hat{C}_{\text{OCBSML}_1}$ e $\hat{C}_{\text{OCBSML}_2}$), (Haweel, 2001) ($\hat{C}_{\text{SDCT}}$), (Cintra e Bayer, 2011) ($\hat{C}_{\text{RDCT}}$), (Bayer e Cintra, 2012) ($\hat{C}_{\text{MRDCT}}$), (Bouguezal, Ahmad e Swamy, 2008) ($\hat{C}_{\text{BAS-2008a}}$ e $\hat{C}_{\text{BAS-2008b}}$) e (Tablada, Cintra e Bayer, 2014) ($\hat{C}_{\text{TCB}_3}$, $\hat{C}_{\text{TCB}_4}$, $\hat{C}_{\text{TCB}_5}$ e $\hat{C}_{\text{TCB}_6}$)

A complexidade das matrizes já presentes no estado da arte e das obtidas por meio dos métodos de escalamento é apresentada na Tabela 28. As fatorações dos algoritmos rápidos estão explicitadas no Apêndice B, e os respectivos diagramas são apresentados no Apêndice C. Observa-se que, para $N = 8$, os algoritmos derivados por meio de escalamento apresentam

Tabela 27 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 8$.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{8\text{-Exato}}$	0.0000	0.0000	8.8259	93.9912	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{OCBSML}_1}$	1.2194	0.0046	8.6337	90.4615	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{OCBSML}_2}$	1.2194	0.0127	8.1024	87.2275	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{LO}}$	0.8695	0.0061	8.3902	88.7023	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{SDCT}}$	3.3158	0.0207	6.0261	82.6190	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{RDCT}}$	1.7945	0.0098	8.1827	87.4297	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{MRDCT}}$	8.6592	0.0594	7.3326	80.8969	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2008a}}$	5.9294	0.0238	7.1864	86.8226	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2008b}}$	4.1875	0.0191	6.2684	83.1734	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_3}$	3.3158	0.0202	6.0462	83.0814	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_4}$	1.7945	0.0098	8.1834	87.1567	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_5}$	1.7945	0.0062	8.1369	86.5359	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_6}$	0.8695	0.0062	8.3437	88.0594	-
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	5.0492	0.0251	7.9461	85.3138	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	4.0933	0.0241	8.0428	84.8384	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	5.0492	0.0251	7.9461	85.3138	I
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	4.0933	0.0241	8.0428	84.8384	I

Fonte: O autor (2025).

desempenho competitivo.

5.4.3 Comparativo em $N = 16$

A iteração de $N = 8$ para $N = 16$ é composta por matrizes do estado da arte e por matrizes escaladas por ambos os métodos, conforme exposto na Tabela 29. A Tabela 29 ilustra o desempenho da matriz nativa proposta por Bayer *et al.* (2012) e da matriz proposta em (Oliveira *et al.*, 2018), escalada por meio do Método do Tipo I. Na Tabela 29 é apresentado o desempenho sobre as figuras de mérito das aproximações proposta em (Silveira *et al.*, 2016) ($\hat{\mathbf{C}}_{\text{SBCKMK}}$), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2010) ($\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2010}}$), (Bayer *et al.*, 2012) ($\hat{\mathbf{C}}_{\text{BCEM}}$) e (Yarlagadda e Hershey, 1997) ($\hat{\mathbf{C}}_{\text{WHT}}$). A Tabela 30 apresenta a complexidade das aproximações de comprimento $N = 16$.

Todas as aproximações propostas para $N = 16$ têm sua complexidade apresentada na Tabela 30. É notável que as aproximações obtidas por escalamento, independentemente do método utilizado, apresentaram resultados competitivos e superiores nesse quesito.

5.4.4 Comparativo em $N = 32$

A comparação das matrizes de comprimento $N = 32$ inclui apenas aquelas obtidas a partir de $N = 16$ por meio de escalamento, uma vez que não há nenhuma matriz de origem nativa para

Tabela 28 – Comparação de complexidade computacional para $N = 8$.

Método	Multiplicações	Somas	Deslocamento de Bit	Conjunto	Escalamento
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{OCBSML}_1}$	0	24	6	$\mathcal{P}_2$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{OCBSML}_2}$	0	24	6	$\mathcal{P}_2$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{LO}}$	0	24	2	$\mathcal{P}_2$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{SDCT}}$	0	24	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{RDCT}}$	0	22	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{MRDCT}}$	0	14	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2008a}}$	0	18	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2008b}}$	0	21	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_3}$	0	16	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_4}$	0	24	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_5}$	0	24	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{TCB}_6}$	0	24	6	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	0	24	0	$\mathcal{P}_1$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	0	24	4	$\mathcal{P}_2$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-1}}$	0	24	0	$\mathcal{P}_1$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{8\text{-Proposta-2}}$	0	24	4	$\mathcal{P}_2$	I

Fonte: O autor (2025).

Tabela 29 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 16$.

Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{\text{Exata}}$	0.0000	0.0000	9.4555	88.4518	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{SBCKMK}}$	30.3230	0.0630	8.2950	70.8315	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2010}}$	40.9996	0.0947	7.8573	67.6078	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{WHT}}$	92.5631	0.4284	8.1941	70.6465	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BCEM}}$	8.0806	0.0465	7.8401	65.2789	-
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-OCBSML}_1}$	13.7047	0.0706	8.1750	63.7852	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-LO}}$	12.6327	0.0660	7.8261	61.4863	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-BAS-2008b}}$	17.9083	0.1320	6.3245	55.6896	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-1}}$	17.4314	0.0592	8.1941	70.6465	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-2}}$	15.8331	0.0577	8.2924	68.5672	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-OCBSML}_1}$	13.7047	0.0475	8.8787	76.8108	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-LO}}$	12.6327	0.0473	8.6361	73.1059	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-BAS-2008b}}$	17.9083	0.0582	7.3217	67.3154	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-1}}$	17.4314	0.0592	8.1941	70.6465	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-2}}$	15.8331	0.0577	8.2924	68.5672	I

Fonte: O autor (2025).

Tabela 30 – Comparação de complexidade computacional para $N = 16$.

Método	Multiplicações	Somas	Deslocamento de Bit	Conjunto	Escalamento
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{SBCKMK}}$	0	60	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2010}}$	0	64	8	$\mathcal{P}_2$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{WHT}}$	0	64	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{\text{BCEM}}$	0	72	0	$\mathcal{P}_1$	-
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-OCBSML}_1}$	0	64	12	$\mathcal{P}_2$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-LO}}$	0	64	4	$\mathcal{P}_2$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-BAS-2008b}}$	0	58	0	$\mathcal{P}_1$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-1}}$	0	64	0	$\mathcal{P}_1$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-2}}$	0	64	8	$\mathcal{P}_2$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-OCBSML}_1}$	0	64	12	$\mathcal{P}_2$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-LO}}$	0	64	4	$\mathcal{P}_2$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-AS-2008b}}$	0	58	0	$\mathcal{P}_1$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-1}}$	0	64	0	$\mathcal{P}_1$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{16\text{-Proposta-2}}$	0	64	8	$\mathcal{P}_2$	I

Fonte: O autor (2025).

esse comprimento.

Observa-se que a seleção de aproximações, conforme ambos os métodos de escalamento, apresenta resultados consistentes: para o erro total de energia, destaca-se a aproximação proposta em (Lengwehasatit e Ortega, 2004), escalada pelo Método de (Coelho *et al.*, 2021); para o MSE, a performance que mais minimiza o erro é obtida pela mesma aproximação, mas escalada pelo Método I. Quanto às métricas de codificação, a aproximação apresentada em (Oliveira *et al.*, 2018), escalada pelo Método I, apresenta o melhor desempenho. Além disso, as aproximações propostas inicialmente para $N = 4$ e escaladas até $N = 32$ demonstram resultados competitivos em todos os comprimentos industriais avaliados. Para o comparativo de complexidades das aproximações propostas, é designado a Tabela 32 ilustrar os seus desempenhos.

Na Tabela 32, é explicitado que a matriz $\hat{\mathbf{C}}_{\text{BAS-2008b}}$ (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008), escalada até $N = 32$, independentemente do método de escalamento, apresenta a menor complexidade aritmética para esse comprimento.

5.5 EXPERIMENTO COMPUTACIONAL

5.5.1 Compressão Tipo-JPEG

A avaliação da transformada aproximada também é realizada por meio de experimentos computacionais baseados no processo de compressão do tipo JPEG, conforme descrito em (Tablada, Cintra e Bayer, 2014) e (Potluri *et al.*, 2014).

O processo de compressão da imagem ocorre em cinco etapas principais. Primeiramente, a

Tabela 31 – Comparação de métodos aproximados da DCT para $N = 32$.

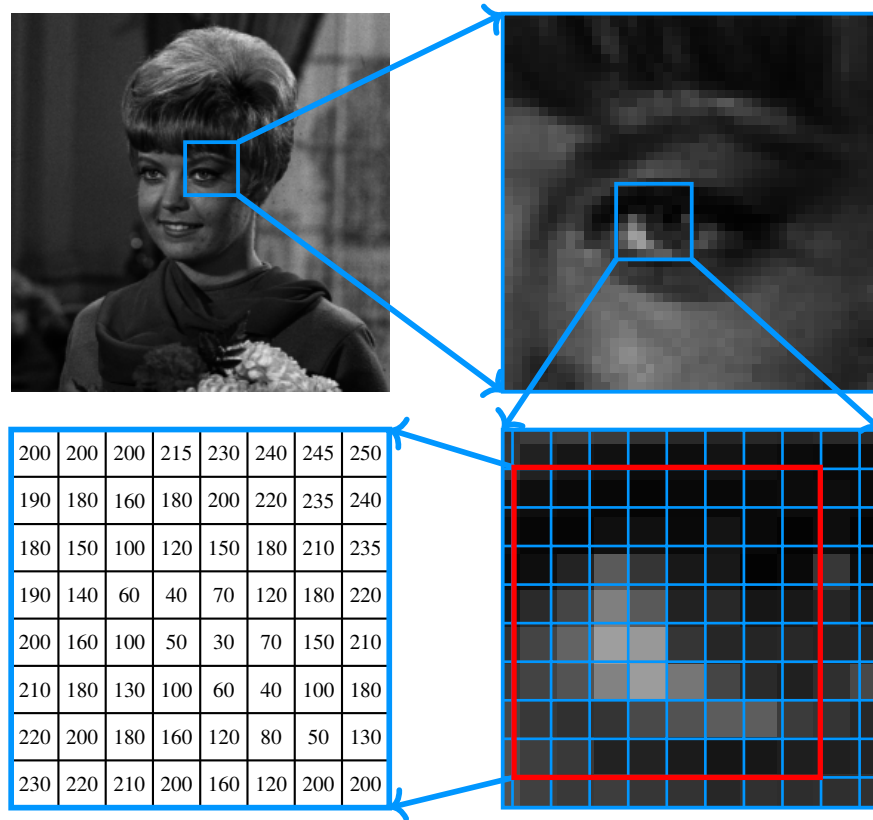
Método	ε	MSE	C_g^*	η	Escalamento
$\mathbf{C}_{32}$ -Exata	0.0000	0.0000	9.7736	81.6946	-
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -OCBSML ₁	43.7394	0.1244	8.2611	47.7746	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -LO	41.7415	0.1209	7.9136	46.1206	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -BAS-2008b	50.8869	0.1902	6.4098	42.4114	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -SBCKMK ₁	78.9483	0.6085	7.6034	41.1833	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-1	49.8829	0.1175	8.2693	55.9114	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-2	47.0808	0.1158	8.3693	53.7882	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -OCBSML ₁	46.2659	0.1104	8.9505	61.0272	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -LO	43.8974	0.1095	8.7086	57.5280	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -BAS-2008b	52.9558	0.1192	7.3987	52.9498	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -SBCKMK	78.9483	0.1257	8.3682	55.7766	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-1	49.8829	0.1175	8.2693	55.9114	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-2	47.0808	0.1158	8.3693	53.7882	I

Fonte: O autor (2025).

Tabela 32 – Comparação de complexidade computacional para $N = 32$.

Método	Multiplicações	Somas	Deslocamento de Bit	Conjunto	Escalamento
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -SBCKMK	0	152	0	$\mathcal{P}_1$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -OCBSML ₁	0	160	24	$\mathcal{P}_2$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -LO	0	160	8	$\mathcal{P}_2$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -BAS-2008b	0	148	0	$\mathcal{P}_1$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-1	0	160	0	$\mathcal{P}_1$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-2	0	160	16	$\mathcal{P}_2$	S_c - VI
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -SBCKMK	0	152	0	$\mathcal{P}_1$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -OCBSML ₁	0	160	24	$\mathcal{P}_2$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -LO	0	160	8	$\mathcal{P}_2$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -BAS-2008b	0	148	0	$\mathcal{P}_1$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-1	0	160	0	$\mathcal{P}_1$	I
$\hat{\mathbf{C}}_{32}$ -Proposta-2	0	160	16	$\mathcal{P}_2$	I

Fonte: O autor (2025).

Figura 6 – Extração bloco por bloco de tamanho $N \times N$.

Fonte: O autor (2025).

imagem original é dividida em blocos de dimensão $N \times N$ (Wallace, 1992), que será denotado como $\mathbf{A}$.

Em seguida, cada bloco é submetido a uma transformação bidimensional (Suzuki e Ikehara, 2010), de acordo com a transformada definida (a DCT ou uma matriz aproximada):

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{C}}^T. \quad (5.34)$$

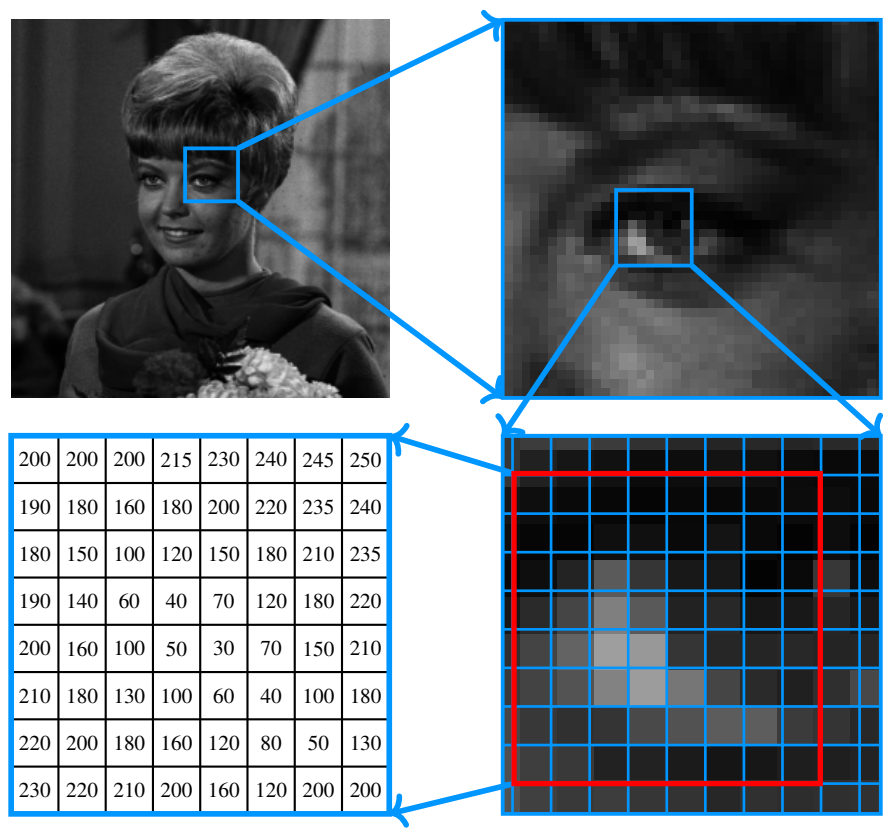
A Figura 8 ilustra a próxima etapa aplica-se a varredura em zig-zag padrão (Pao e Sun, 1998) no bloco transformado, a qual organiza os coeficientes em ordem de importância energética.

Nessa fase, define-se quantos coeficientes devem ser retidos, enquanto os demais são zerados, a matriz após o descarte é denotada por $\mathbf{B}'$, sendo ilustrada pela Figura 9. O descarte torna a matriz $\mathbf{B}'$ compatível com o processo de entropia (Wallace, 1992).

Na quarta etapa, realiza-se a reconstrução do bloco a partir dos coeficientes preservados por meio da transformada inversa, existindo modificação para o caso da ortogonalidade da matriz de baixa complexidade, conforme apresentado na expressão a seguir.

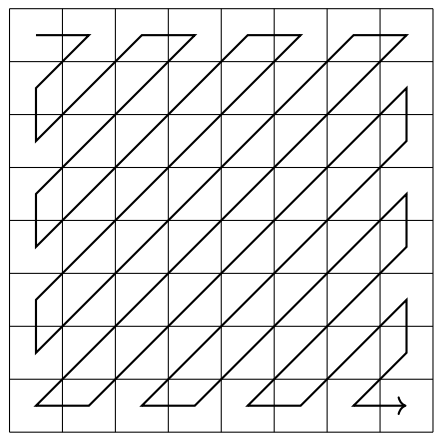
$$\mathbf{A}' = \begin{cases} \hat{\mathbf{C}}^T \cdot \mathbf{B}' \cdot \hat{\mathbf{C}}, & \text{se a matriz } \mathbf{T} \text{ for ortogonal,} \\ \hat{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \mathbf{B}' \cdot (\hat{\mathbf{C}}^{-1})^T, & \text{qualquer outro caso.} \end{cases} \quad (5.35)$$

Figura 7 – Reconstrução bloco por bloco de tamanho $N \times N$.



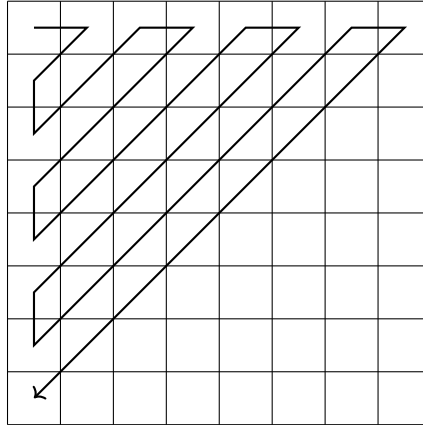
Fonte: O autor (2025).

Figura 8 – Padrão de leitura Zig-Zag completo.



Fonte: O autor (2025).

Figura 9 – Padrão de leitura Zig-Zag com descarte.



Fonte: O autor (2025).

Por fim, o bloco que foi restaurado ao domínio espacial é inserido na nova imagem, compondo gradualmente a versão comprimida da imagem original (Wallace, 1992).

5.5.2 Figuras de Mérito da Compressão

Uma abordagem comum para avaliar o desempenho de uma transformada em aplicações de compressão do tipo JPEG consiste em comparar a imagem original com a imagem comprimida, por meio de métricas previamente definidas. Essas métricas podem ser classificadas em dois grupos principais: métricas numéricas e métricas perceptuais.

As métricas numéricas quantificam a qualidade da compressão com base em comparações diretas entre os valores dos pixels das imagens, comumente associadas a normas do tipo ℓ_2 . Entre as mais utilizadas nesse grupo estão o erro médio quadrático (MSE) (Britanak, Yip e Rao, 2007) e a relação sinal-ruído de pico (PSNR) (Bjontegaard, 2001).

Por outro lado, as métricas perceptuais buscam avaliar a qualidade da imagem comprimida considerando modelos que aproximam a percepção visual humana. Tais métricas incluem o índice universal de qualidade (*Universal Quality Index*, UQI) (Wang e Bovik, 2002) e a medida de similaridade estrutural (*Structural Similarity Index Measure*, SSIM) (Wang *et al.*, 2004).

5.5.2.1 MSE

O MSE é definido por (Britanak, Yip e Rao, 2007):

$$\text{MSE} = \frac{1}{m \cdot n} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} [y_{i,j} - x_{i,j}]^2, \quad (5.36)$$

em que $y_{i,j}$ é um pixel da imagem comprimida e $x_{i,j}$ é um pixel da imagem original, na respectiva posição.

5.5.2.2 PSNR

A métrica de relação sinal-ruído de pico (Bjontegaard, 2001):

$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log \left(\frac{(2^8 - 1)^2}{\text{MSE}} \right). \quad (5.37)$$

5.5.2.3 UQI

A definição da qualidade de imagem universal (UQI) é dada por (Wang e Bovik, 2002):

$$Q = \frac{4\sigma_{xy}\bar{x}\bar{y}}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}, \quad (5.38)$$

em que σ_{xy} é a covariância da imagem original e da imagem que é modificada pelo processo de compressão, a variância da imagem original é dada por σ_x , e da imagem comprimida é σ_y , a média dos coeficientes da imagem original é simbolizado por $\bar{x}$ e da imagem comprimida é $\bar{y}$ (Wang e Bovik, 2002).

5.5.2.4 SSIM

A definição da medida do índice de similaridade estrutural (SSIM) é dada por (Wang *et al.*, 2004):

$$\text{SSIM} = \frac{(2\bar{x}\bar{y} + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}, \quad (5.39)$$

em as que constantes C_1 e C_2 são adicionadas para evitar indeterminações no denominador da equação, prevenindo que os termos $(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$ e $(\sigma_x^2 + \sigma_y^2)$ se tornem nulos (Wang *et al.*, 2004).

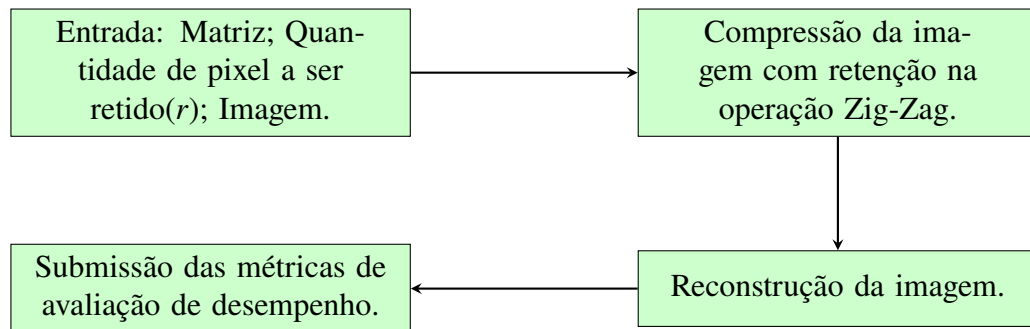
5.5.3 Resultado do Experimento Computacional

A imagem *Female*, pertencente ao banco de imagens padrão para testes de compressão de imagens USC-SIPI (2024), foi submetida ao processo de compressão utilizando algumas aproximações selecionadas por comprimento. Em todo o processo, foram mantidos apenas 25% dos coeficientes de cada bloco, e as imagens reconstruídas foram avaliadas por meio das métricas de compressão estabelecidas. Por questões de restrições computacionais, foi adotada essa proporção com maior retenção de coeficientes. A Figura 10 ilustra o diagrama do experimento computacional realizado.

5.5.3.1 Compressão em blocos de $N = 4$

Foram as aproximações selecionadas para esse comprimento foram as proposta neste trabalho ($\hat{\mathbf{C}}_1$ e $\hat{\mathbf{C}}_2$) juntamente com a exata ($\mathbf{C}_4$). A Figura 11 apresenta as imagens que passaram pelo processo de compressão e foram submetidas as métricas de avaliação. A Figura 11a apresenta a imagem original, enquanto as Figuras 11b, 11c e 11d mostram as versões comprimidas no estilo JPEG, mantendo 25% dos pixels originais, utilizando, respectivamente, a DCT exata, a matriz $\hat{\mathbf{C}}_1$ e a matriz $\hat{\mathbf{C}}_2$.

Figura 10 – Diagrama do experimento computacional.



Fonte: O autor (2025).

Figura 11 – Compressão por blocos de $N = 4$.

(a) Imagem original



(b) MSE: 30.7283
PSNR: 33.2554
UQI: 0.9902
SSIM: 0.9367



(c) MSE: 42.478
PSNR: 31.8492
UQI: 0.9864
SSIM: 0.9185



(d) MSE: 31.1461
PSNR: 33.1968
UQI: 0.99
SSIM: 0.9359

Fonte: O autor (2025).

5.5.3.2 Compressão em blocos de $N = 8$

Para $N = 8$, a imagem de teste foi mantida e a taxa de retenção de pixels permaneceu em 25%, com a adição de três matrizes nativas desse comprimento, conforme descrito em (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) e (Oliveira *et al.*, 2018).

A Figura 12 ilustra os resultados da operação de compressão para o comprimento $N = 8$. A Figura 12a apresenta a compressão realizada com a DCT exata. As Figuras 12b (Lengwehasatit e Ortega, 2004), 12c (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) e 12d (Oliveira *et al.*, 2018) correspondem às compressões obtidas a partir de buscas no espaço nativo de aproximações. Já as Figuras 12e e 12f referem-se às matrizes obtidas para $N = 4$ e escaladas segundo o Método proposto em (Coelho *et al.*, 2021). Por fim, as Figuras 12g e 12h mostram os resultados das compressões utilizando as aproximações $\hat{C}_1$ e $\hat{C}_2$, escaladas por meio do Método I.

5.5.3.3 Compressão em blocos de $N = 16$

A operação de compressão tipo-JPEG em $N = 16$ ocorre de forma semelhante aos demais comprimentos, mesma quantidade de retenção e mesmas figuras de mérito. Porém, nessa nova etapa será adicionado matrizes nativas de $N = 8$ reportadas na literatura, nos seguintes trabalhos (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) e (Oliveira *et al.*, 2018) escaladas por ambos os métodos.

A Figura 13 ilustra as imagens obtidas por compressão utilizando matrizes nativas de comprimento $N = 16$. A Figura 13a apresenta a imagem original; a Figura 13b mostra o resultado da compressão utilizando a DCT exata C_{16} ; e a Figura 13c exibe a imagem comprimida com a matriz proposta em (Silveira *et al.*, 2016).

A Figura 14 mostra as imagens escaladas pelo Método descrito por Coelho *et al.* (2021). As Figuras 14a, 14b e 14c ilustram os resultados obtidos a partir do escalamento das aproximações propostas, respectivamente, por (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) e (Oliveira *et al.*, 2018), utilizando o Método descrito em (Coelho *et al.*, 2021). As Figuras 14d e 14e apresentam as aproximações propostas neste trabalho, escaladas progressivamente até $N = 16$ por meio do Método proposto por Coelho *et al.* (2021).

A Figura 15 mostra as imagens escaladas pelo Método I descrito neste trabalho. As Figuras 15a, 15b e 15c ilustram os resultados obtidos a partir do escalamento das aproximações propostas, respectivamente, por (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) e (Oliveira *et al.*, 2018), utilizando o método descrito neste trabalho. As Figuras 15d e 15e apresentam as aproximações propostas neste trabalho, escaladas progressivamente até $N = 16$ por meio do método desenvolvido.

5.5.3.4 Compressão em blocos de $N = 32$

Em $N = 32$, foram mantidos as mesmas figuras de mérito como também a quantidade de 25% de retenção de pixels. A Figura 16 ilustra as imagens obtidas por compressão utilizando matrizes

Figura 12 – Compressão por blocos de $N = 8$.

(a) MSE: 23.7787
PSNR: 34.3689
UQI: 0.9924
SSIM: 0.9484



(b) MSE: 31.7928
PSNR: 33.1075
UQI: 0.9898
SSIM: 0.9331



(c) MSE: 42.2453
PSNR: 31.873
UQI: 0.9865
SSIM: 0.911



(d) MSE: 26.8298
PSNR: 33.8446
UQI: 0.9914
SSIM: 0.9427



(e) MSE: 42.2248
PSNR: 31.8751
UQI: 0.9864
SSIM: 0.921



(f) MSE: 36.5365
PSNR: 32.5035
UQI: 0.9883
SSIM: 0.9234

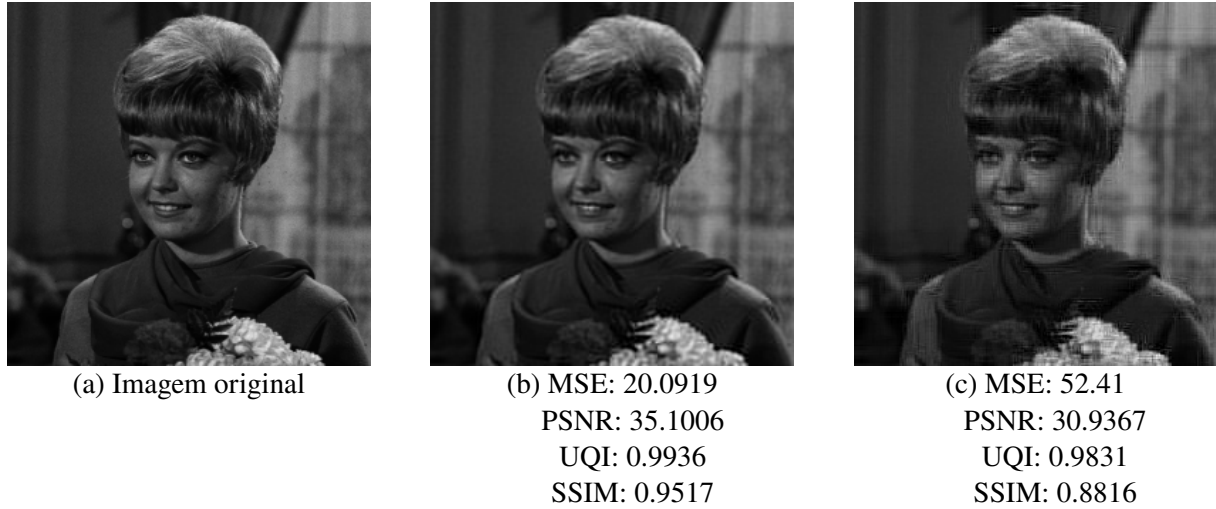


(g) MSE: 42.2248
PSNR: 31.8751
UQI: 0.9864
SSIM: 0.921



(h) MSE: 29.9584
PSNR: 33.3656
UQI: 0.9904
SSIM: 0.9392

Figura 13 – Compressão por blocos de $N = 16$ mediante a matrizes nativas.



Fonte: O autor (2025).

nativas de comprimento $N = 32$. A Figura 16a apresenta a imagem original; a Figura 16b mostra o resultado da compressão utilizando a DCT exata C_{32} .

A Figura 17 mostra as compressões da imagens da transformadas escaladas pelo Método descrito em (Coelho *et al.*, 2021). As Figuras 17a, 17b, 17c e 17d ilustram os resultados obtidos a partir do escalamento das aproximações propostas, respectivamente, por (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008), (Oliveira *et al.*, 2018) e (Silveira *et al.*, 2016), utilizando o método descrito em (Coelho *et al.*, 2021). As Figuras 17e e 17f apresentam as aproximações propostas neste trabalho, escaladas progressivamente até $N = 16$ por meio do Método proposto por Coelho *et al.* (2021).

A Figura 18 mostra as compressões da imagens da transformadas escaladas pelo Método I descrito neste trabalho. As Figuras 18a, 18b, 18c e 18d ilustram os resultados obtidos a partir do escalamento das aproximações propostas, respectivamente, por (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008), (Oliveira *et al.*, 2018) e (Silveira *et al.*, 2016), utilizando o Método I. As Figuras 18e e 18f apresentam as aproximações propostas neste trabalho, escaladas progressivamente até $N = 16$ por meio do Método I.

5.5.4 Discussão Sobre Experimento Computacional

As imagens reconstruídas a partir do experimento são perceptualmente indistinguíveis das originais e das já apresentadas na literatura. As matrizes obtidas através do escalamento matricial apresentam um resultado superior em comparativo a métodos presentes na literatura conforme é mostrado em (Lengwehasatit e Ortega, 2004), (Bouguezel, Ahmad e Swamy, 2008) e (Oliveira *et al.*, 2018).

Figura 14 – Compressão por blocos com $N = 16$ por métodos escalados através do Método S_c -VI.



(a) MSE: 53.4142
PSNR: 30.8542
UQI: 0.9828
SSIM: 0.8791



(b) MSE: 247.507
PSNR: 24.1949
UQI: 0.9312
SSIM: 0.7205



(c) MSE: 36.2106
PSNR: 32.5424
UQI: 0.9884
SSIM: 0.9127



(d) MSE: 41.965
PSNR: 31.9019
UQI: 0.9865
SSIM: 0.9182



(e) MSE: 36.7945
PSNR: 32.473
UQI: 0.9882
SSIM: 0.9174

Fonte: O autor (2025).

5.6 LIMITAÇÕES

Durante todo o procedimento de busca, a implementação foi realizada na linguagem de programação *Julia Lang*, enquanto os experimentos computacionais foram conduzidos em *Python*. Não foram exploradas particularidades específicas de cada linguagem, sendo priorizado apenas o suporte disponível para cada etapa do procedimento. Em ambos os casos, os testes foram executados em um computador equipado com processador Intel i5 de 10ª geração e 8 GB de memória RAM.

No caso das buscas, os espaços de busca de comprimento $N = 8, 16$ e 32 são intratáveis para métodos de busca por força bruta no dispositivo disposto pelo autor. A retenção foi determinada em 25% por questões de limitações computacionais e temporais.

Figura 15 – Compressão por blocos com $N = 16$ por matrizes escalados através do Método I.

(a) MSE: 31.7608
PSNR: 33.1119
UQI: 0.9898
SSIM: 0.9301



(b) MSE: 38.757
PSNR: 32.2473
UQI: 0.9876
SSIM: 0.9168



(c) MSE: 26.8517
PSNR: 33.8411
UQI: 0.9914
SSIM: 0.9396



(d) MSE: 41.965
PSNR: 31.9019
UQI: 0.9865
SSIM: 0.9182



(e) MSE: 29.3674
PSNR: 33.4521
UQI: 0.9906
SSIM: 0.9364

Fonte: O autor (2025).

Figura 16 – Compressão por blocos de $N = 32$ mediante matrizes nativas.



(a) Imagem original



(b) MSE: 19.2758
PSNR: 35.2807
UQI: 0.9939
SSIM: 0.9521

Fonte: O autor (2025).

Figura 17 – Compressão por blocos com $N = 32$ por matrizes escaladas através do Método S_c -VI.



(a) MSE: 51.9469
PSNR: 30.9752
UQI: 0.9833
SSIM: 0.8794



(b) MSE: 242.7222
PSNR: 24.2797
UQI: 0.9325
SSIM: 0.7186



(c) MSE: 36.2106
PSNR: 32.5424
UQI: 0.9884
SSIM: 0.9127



(d) MSE: 70.4874
PSNR: 29.6497
UQI: 0.9771
SSIM: 0.8235



(e) MSE: 41.7546
PSNR: 31.9238
UQI: 0.9866
SSIM: 0.9174



(f) MSE: 35.4559
PSNR: 32.6339
UQI: 0.9886
SSIM: 0.9182

Fonte: O autor (2025).

Figura 18 – Compressão por blocos com $N = 32$ por matrizes escaladas através do Método I.

(a) MSE: 31.3791
PSNR: 33.1644
UQI: 0.9900
SSIM: 0.9294



(b) MSE: 42.1512
PSNR: 31.8827
UQI: 0.9866
SSIM: 0.9057



(c) MSE: 26.4324
PSNR: 33.9094
UQI: 0.9916
SSIM: 0.939



(d) MSE: 50.8703
PSNR: 31.0662
UQI: 0.9836
SSIM: 0.8825



(e) MSE: 41.7546
PSNR: 31.9238
UQI: 0.9866
SSIM: 0.9174



(f) MSE: 29.2857
PSNR: 33.4642
UQI: 0.9906
SSIM: 0.9354

Fonte: O autor (2025).

6 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou um estudo sobre aproximações para a DCT com foco na redução da complexidade computacional voltada à visão computacional. Foram exploradas três estratégias principais: (i) busca exaustiva por aproximações ótimas para $N = 4$; (ii) busca diádica por estruturas de escalamento; e (iii) utilização de métodos de escalamento matricial para a obtenção de aproximações de comprimento N , com N variando de 8 até 32.

Adicionalmente, este trabalho introduz um algoritmo de busca para matrizes ortogonais que reduz a quantidade de operações, além de duas aproximações nativas para $N = 4$, correspondentes aos pontos ótimos de cada conjunto. Também foram desenvolvidos um algoritmo de busca diádica, três estruturas inéditas de escalamento matricial, quatro aproximações para $N = 8$, dez aproximações para $N = 16$ e doze aproximações para $N = 32$.

Foram propostas novas aproximações para $N = 4$, definidas a partir das melhores matrizes dentro de seus respectivos conjuntos. Com base na definição do escalamento matricial, foram obtidas três novas estruturas de escalamento que, aplicadas a aproximações já registradas na literatura, permitiram a geração de matrizes com desempenhos competitivos e superiores às alternativas do estado da arte. As comparações, fundamentadas em figuras de mérito, evidenciaram a robustez das aproximações geradas, especialmente aquelas derivadas de $N = 4$, que, mesmo após o processo iterativo, mantiveram desempenhos altamente competitivos.

Apesar dos resultados promissores, é interessante ressaltar algumas limitações. Os espaços de busca de comprimentos $N = 8, 16$ e 32 não conseguiram ser estudados, para a definição de aproximações nativas. As combinações possíveis de estruturas de escalamento não puderam ser exploradas, devido o tamanho do espaço de busca.

Os resultados obtidos no processo de compressão de imagens, quando comparados ao estado da arte, evidenciam valores baixos para a figura de mérito MSE e valores elevados para PSNR, UQI e SSIM. O desempenho alcançado mostra que a qualidade da imagem reconstruída é indistinguível à percepção humana.

Como perspectivas futuras, este trabalho pode ser estendido para geração de aproximações de diversos comprimentos conforme as demandas da indústria. Também é visado o análise do desempenho em diferentes contextos industriais. A metodologia de escalamento descrita neste trabalho admite variações que podem ser exploradas em trabalhos futuros.

Por fim, o desempenho das aproximações obtidas tenha sido evidenciado por figuras de mérito, como também a redução de operações necessárias, afetando a economia de energia em sistemas embarcados.

REFERÊNCIAS

- AHMED, Nasir; NATARAJAN, T.; RAO, Kamisetty R. Discrete cosine transform. **IEEE Trans Comput**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), C-23, n. 1, p. 90–93, jan. 1974. ISSN 2326-3814.
- Associação Brasileira de Normas Técnicas. **ABNT NBR ISO 9001:2015: Sistemas de gestão da qualidade — Requisitos**. Rio de Janeiro: ABNT, 2015.
- BAYER, F.M.; CINTRA, R.J. DCT-like transform for image compression requires 14 additions only. **Electron Lett**, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 48, n. 15, p. 919–921, jul. 2012. ISSN 1350-911X.
- BAYER, F. M.; CINTRA, R. J. Image compression via a fast DCT approximation. **IEEE Lat Am Trans**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 6, p. 708–713, dez. 2010. ISSN 1548-0992.
- BAYER, F. M. *et al.* A digital hardware fast algorithm and FPGA-based prototype for a novel 16-point approximate DCT for image compression applications. **Meas Sci Technol**, IOP Publishing, v. 23, n. 11, p. 114010, out. 2012. ISSN 1361-6501.
- BJONTEGAARD, Gisle. Calculation of average PSNR differences between RD-curves. **ITU SG16 Doc. VCEG-M33**, 2001.
- BLAHUT, R. E. **Fast algorithms for signal processing**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010.
- BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M.O.; SWAMY, M.N.S. Low-complexity 8×8 transform for image compression. **Electron Lett**, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 44, n. 21, p. 1249–1250, out. 2008. ISSN 1350-911X.
- BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M.N.S. A novel transform for image compression. In: **2010 53rd IEEE International Midwest Symposium on Circuits and Systems**. [S.l.]: IEEE, 2010. p. 509–512.
- BOUGUEZEL, S.; AHMAD, M. O.; SWAMY, M.N.S. A low-complexity parametric transform for image compression. In: **IEEE International Symposium of Circuits and Systems (IS-CAS)**. [S.l.]: IEEE, 2011. p. 2145–2148.
- BRITANAK, V.; YIP, P. C.; RAO, K. R. Integer discrete cosine/sine transforms. In: _____. **Discrete cosine and sine transforms**. [S.l.]: Elsevier, 2007. p. 141–304.
- CANTERLE, Diego Ramos. Novas classes multiparamétricas de transformadas discretas com alto ganho de codificação e eficiência. 2017.
- CANTERLE, D. R. *et al.* A multiparametric class of low-complexity transforms for image and video coding. **Signal Process**, Elsevier BV, v. 176, p. 107685, nov. 2020. ISSN 0165-1684.
- CHEN, Wen-Hsiung; SMITH, C.; FRALICK, S. A fast computational algorithm for the discrete cosine transform. **IEEE Trans Commun**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 25, n. 9, p. 1004–1009, set. 1977. ISSN 0096-2244.
- CINTRA, R. J.; BAYER, F. M. A DCT approximation for image compression. **IEEE Signal Process Lett**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 18, n. 10, p. 579–582, out. 2011. ISSN 1558-2361.

- CLARKE, R. J. Relation between the Karhunen-Loève and cosine transforms. **IEE Proceedings F Communications, Radar and Signal Processing**, Institution of Engineering and Technology (IET), v. 128, n. 6, p. 359, 1981. ISSN 0143-7070.
- COELHO, D. *et al.* Low-complexity scaling methods for DCT-II approximations. **IEEE Trans Signal Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 69, p. 4557–4566, 2021. ISSN 1941-0476.
- CROSBY, Philip B. **Quality is free: The art of making quality certain**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1979.
- DAUTOV, Rustem; DISTEFANO, Salvatore. Quantifying volume, velocity, and variety to support (Big) data-intensive application development. In: **2017 IEEE International Conference on Big Data (Big Data)**. [S.l.]: IEEE, 2017. p. 2843–2852.
- DEMING, W Edwards. **Out of the Crisis, reissue**. [S.l.]: MIT press, 2018.
- DUNTEMAN, G. **Principal components analysis**. [S.l.]: SAGE Publications, Inc., 1989.
- EINABADI, B.; BABOLI, A.; EBRAHIMI, M. Dynamic predictive maintenance in industry 4.0 based on real time information: Case study in automotive industries. **IFAC-Pap**, Elsevier BV, v. 52, n. 13, p. 1069–1074, 2019. ISSN 2405-8963.
- FEIG, E.; WINOGRAD, S. Fast algorithms for the discrete cosine transform. **IEEE Trans Signal Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 40, n. 9, p. 2174–2193, 1992. ISSN 1053-587X.
- LE GALL, Didier J. The MPEG video compression algorithm. **Signal Process Image Commun**, Elsevier BV, v. 4, n. 2, p. 129–140, abr. 1992. ISSN 0923-5965.
- GARVIN, David A. Competing on the eight dimensions of quality. **Harvard Bus Rev**, Harvard Business School Publishing, p. 101–109, 1987.
- GOECKS, Lucas Schmidt *et al.* Industry 4.0 and smart systems in manufacturing: Guidelines for the implementation of a smart statistical process control. **Applied System Innovation**, MDPI AG, v. 7, n. 2, p. 24, mar. 2024. ISSN 2571-5577.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Digital image processing**. Fourth edition, global edition. [S.l.]: Pearson, 2018.
- GORBAN, A. N. *et al.* **Principal Manifolds for Data Visualization and Dimension Reduction**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- HAWHEEL, Tarek I. A new square wave transform based on the DCT. **Signal Process**, Elsevier BV, v. 81, n. 11, p. 2309–2319, nov. 2001. ISSN 0165-1684.
- HE, Q. Peter *et al.* Statistical process monitoring for IoT-enabled cybermanufacturing: Opportunities and challenges. **IFAC-Pap**, Elsevier BV, v. 50, n. 1, p. 14946–14951, jul. 2017. ISSN 2405-8963.
- HEIDEMAN, Michael T. **Multiplicative Complexity, Convolution, and the DFT**. [S.l.]: Springer New York, 1988. ISSN 1431-7893. ISBN 9781461239123.
- HOTELLING, Harold. Analysis of a complex of statistical variables into principal components. **J Educ Psychol**, Warwick & York, v. 24, n. 6, p. 417–441, set. 1933. ISSN 0022-0663.

HOU, Hsieh. A fast recursive algorithm for computing the discrete cosine transform. **IEEE Trans Acoust Speech Signal Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 35, n. 10, p. 1455–1461, out. 1987. ISSN 0096-3518.

HOYLE, David. **ISO 9000 Quality Systems Handbook**. 6th. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2009.

JARDINE, Andrew K.S.; LIN, Daming; BANJEVIC, Dragan. A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier BV, v. 20, n. 7, p. 1483–1510, out. 2006. ISSN 0888-3270.

JRIDI, M.; ALFALOU, A.; MEHER, P. K. A generalized algorithm and reconfigurable architecture for efficient and scalable orthogonal approximation of DCT. **IEEE Trans Circuits Syst Regul Pap**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 62, n. 2, p. 449–457, fev. 2015. ISSN 1558-0806.

JURAN, Joseph M. **Juran's quality handbook**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1999.

KARHUNEN, Kari. Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. **Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A. I. Mathematica–Physica**, v. 37, p. 1, 1947.

KAY, Steven M. **Intuitive probability and random processes using MATLAB**. 4th corrected version of the 5th printing. ed. Boston, MA: Springer US, 2012. ISBN 9780387241579.

KHADIM, Nouman *et al.* Quantifying the cost of quality in construction projects: an insight into the base of the iceberg. **Quality amp; Quantity**, Springer Science and Business Media LLC, v. 57, n. 6, p. 5403–5429, jan. 2023. ISSN 1573-7845.

KUMAR, Ravinder; SINGH, Rajesh Kr.; DWIVEDI, Yogesh Kr. Application of industry 4.0 technologies in smes for ethical and sustainable operations: Analysis of challenges. **J Clean Prod**, Elsevier BV, v. 275, p. 124063, dez. 2020. ISSN 0959-6526.

LEE, Byeong. A new algorithm to compute the discrete cosine transform. **IEEE Trans Acoust Speech Signal Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 32, n. 6, p. 1243–1245, dez. 1984. ISSN 0096-3518.

LENGWEHASATIT, K.; ORTEGA, A. Scalable variable complexity approximate forward DCT. **IEEE Trans Circuits Syst Video Technol**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 14, n. 11, p. 1236–1248, nov. 2004. ISSN 1051-8215.

LEVITIN, Anany. **Introduction to the design analysis of algorithms**. 3. ed., international ed.. ed. Boston, Mass: Pearson, 2012. (Always learning). Includes bibliographical references and index. ISBN 9780273764113.

LOEFFLER, C.; LIGTENBERG, A.; MOSCHYTZ, G. S. Practical fast 1-D DCT algorithms with 11 multiplications. In: **International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing**,. [S.l.]: IEEE, 1989. p. 988–991.

LOÈVE, Michel. Fonctions aléatoires de second ordre. In: _____. **Processus Stochastique et Mouvement Brownien**. Paris: Gauthier-Villars, 1948. p. 366–420.

MCDERMOTT, Olivia *et al.* The use and application of the 7 new quality control tools in the manufacturing sector: a global study. **The TQM Journal**, Emerald Publishing Limited, v. 35, n. 8, p. 2621–2639, mar. 2023. ISSN 1754-2731.

MOBLEY, R. Keith. **An Introduction to Predictive Maintenance**. [S.l.]: Elsevier, 2002. ISBN 9780750675314.

NOOR-A-RAHIM, Md. *et al.* Wireless communications for smart manufacturing and industrial IoT: Existing technologies, 5G and beyond. **Sensors-basel**, MDPI AG, v. 23, n. 1, p. 73, dez. 2022. ISSN 1424-8220.

OAKLAND, John S. **Total quality management: text with cases**. [S.l.]: Routledge, 2003.

OKUYELU, Olanrewaju; ADAJI, Ojima. AI-Driven real-time quality monitoring and process optimization for enhanced manufacturing performance. **Journal of Advances in Mathematics and Computer Science**, Sciencedomain International, v. 39, n. 4, p. 81–89, mar. 2024. ISSN 2456-9968.

OLIVEIRA, R. S. *et al.* Low-complexity 8-point DCT approximation based on angle similarity for image and video coding. **Multidim Syst Sign P**, Springer Science and Business Media LLC, v. 30, n. 3, p. 1363–1394, jul. 2018. ISSN 1573-0824.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Discrete-time signal processing**. 3. ed.. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. (Prentice Hall signal processing series).

PAO, I-Ming; SUN, Ming-Ting. Approximation of calculations for forward discrete cosine transform. **IEEE Trans Circuits Syst Video Technol**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 8, n. 3, p. 264–268, jun. 1998. ISSN 1051-8215.

PLONKA, Gerlind; TASCHE, Manfred. Fast and numerically stable algorithms for discrete cosine transforms. **Linear Algebra Appl**, Elsevier BV, v. 394, p. 309–345, jan. 2005. ISSN 0024-3795.

POTLURI, U. S. *et al.* Improved 8-point approximate DCT for image and video compression requiring only 14 additions. **IEEE Trans Circuits Syst Regul Pap**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 61, n. 6, p. 1727–1740, jun. 2014. ISSN 1558-0806.

POURAZAD, Mahsa *et al.* Hvc: The new gold standard for video compression: How does HEVC compare with H.264/AVC? **IEEE Consumer Electronics Magazine**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 1, n. 3, p. 36–46, jul. 2012. ISSN 2162-2256.

PURI, A.; CHEN, X.; LUTHRA, A. Video coding using the H.264/MPEG-4 AVC compression standard. **Signal Process Image Commun**, Elsevier BV, v. 19, n. 9, p. 793–849, out. 2004. ISSN 0923-5965.

PYZDEK, Thomas. **The Six Sigma Handbook, Sixth Edition**: A complete guide for green belts, black belts, and managers at all levels. Six edition. New York, N.Y.: McGraw Hill LLC, 2024. (McGraw-Hill's AccessEngineeringLibrary). Includes bibliographical references and index. - Description based on e-Publication PDF. ISBN 1265146276.

QIU, H. *et al.* Deep residual learning based enhanced JPEG compression in the internet of things. **IEEE Trans Ind Inf**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), p. 1–1, 2020. ISSN 1941-0050.

RADUNZ, A. P. *et al.* Fast data-independent KLT approximations based on integer functions. **Multimed Tools Appl**, Springer Science and Business Media LLC, v. 83, n. 26, p. 67303–67325, jan. 2024. ISSN 1573-7721.

RAY, W; DRIVER, R. Further decomposition of the Karhunen-Loève series representation of a stationary random process. **IEEE Trans Inf Theory**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 16, n. 6, p. 663–668, nov. 1970. ISSN 1557-9654.

SEBER, George A. F. **A matrix handbook for statisticians**. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience, 2008. (Wiley series in probability and statistics). Includes bibliographical references (p. 529-545) and index. ISBN 9780470226780.

SHEWHART, Walter Andrew. **Economic control of quality of manufactured product**. [S.l.]: van Nostrand, 1931.

SHORES, Thomas S. **Applied Linear Algebra and Matrix Analysis**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2018.

SILVEIRA, T. L. T. da *et al.* An orthogonal 16-point approximate DCT for image and video compression. **Multidim Syst Sign P**, Springer Science and Business Media LLC, v. 27, n. 1, p. 87–104, ago. 2014. ISSN 1573-0824.

SILVEIRA, T. L. T. da *et al.* Multiplierless 16-point DCT approximation for low-complexity image and video coding. **Signal, Image and Video Processing**, Springer Science and Business Media LLC, v. 11, n. 2, p. 227–233, jun. 2016. ISSN 1863-1711.

STRANG, G. **Linear algebra and its applications**. 2. ed. ed. [S.l.]: Academic Press, 1980.

STRANG, Gilbert. The discrete cosine transform. **SIAM Rev**, Society for Industrial Applied Mathematics (SIAM), v. 41, n. 1, p. 135–147, jan. 1999. ISSN 1095-7200.

SUEHIRO, N.; HATORI, M. Fast algorithms for the DFT and other sinusoidal transforms. **IEEE Trans Acoust Speech Signal Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 34, n. 3, p. 642–644, jun. 1986. ISSN 0096-3518.

SUZUKI, Taizo; IKEHARA, Masaaki. Integer DCT based on direct-lifting of DCT-IDCT for lossless-to-lossy image coding. **IEEE Trans Image Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 11, p. 2958–2965, nov. 2010. ISSN 1057-7149.

TABLADA, C.J. *et al.* DCT approximations based on Chen’s factorization. **Signal Process Image Commun**, Elsevier BV, v. 58, p. 14–23, out. 2017. ISSN 0923-5965.

TABLADA, C. J.; CINTRA, R. J.; BAYER, F. M. Low-complexity 8-point DCT approximations based on integer functions. **Signal Process**, Elsevier BV, v. 99, p. 201–214, jun. 2014. ISSN 0165-1684.

UNSER, Michael. On the approximation of the discrete Karhunen-Loève transform for stationary processes. **Signal Process**, Elsevier BV, v. 7, n. 3, p. 231–249, dez. 1984. ISSN 0165-1684.

USC-SIPI. **The USC-SIPI image database**. 2024. <<https://sipi.usc.edu/database/>>.

VETTERLI, Martin; NUSSBAUMER, Henri J. Simple FFT and DCT algorithms with reduced number of operations. **Signal Process**, Elsevier BV, v. 6, n. 4, p. 267–278, ago. 1984. ISSN 0165-1684.

WALLACE, G.K. The JPEG still picture compression standard. **IEEE Trans Consum Electron**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 38, n. 1, p. xviii–xxxiv, 1992. ISSN 0098-3063.

WANG, Zhongde. Fast algorithms for the discrete W transform and for the discrete fourier transform. **IEEE Trans Acoust Speech Signal Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 32, n. 4, p. 803–816, ago. 1984. ISSN 0096-3518.

WANG, Zhou; BOVIK, A.C. A universal image quality index. **IEEE Signal Process Lett**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 9, n. 3, p. 81–84, mar. 2002. ISSN 1558-2361.

WANG, Zhou *et al.* Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. **IEEE Trans Image Process**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 13, n. 4, p. 600–612, abr. 2004. ISSN 1941-0042.

WATKINS, David S. **Fundamentals of matrix computations**. 3. ed.. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2010. (Pure and applied mathematics). Enth. Literaturverz. S. [627] - 633 und Index. ISBN 0470528338.

YARLAGADDA, R. K. Rao; HERSHEY, John E. **Hadamard Matrix Analysis and Synthesis**. [S.l.]: Springer US, 1997.

ZHANG, Yingfeng *et al.* IoT-enabled real-time production performance analysis and exception diagnosis model. **IEEE Trans Autom Sci Eng**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 13, n. 3, p. 1318–1332, jul. 2016. ISSN 1558-3783.

APÊNDICE A - APROXIMAÇÕES ESCALADAS

É apresentado as aproximações obtidas mediante aos escalamentos matriciais.

$$N = 8$$

$$\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^{\text{Sc-VI}} = S(\mathbf{T}_{4\text{-Proposta-1}}, -\bar{\mathbf{I}}_4 \mathbf{D}_4, \mathbf{D}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^{\text{I}} = S(\mathbf{T}_{4\text{-Proposta-1}}, \mathbf{I}_4, \bar{\mathbf{I}}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-2}}^{\text{Sc-VI}} = S(\mathbf{T}_{4\text{-Proposta-2}}, -\bar{\mathbf{I}}_4 \mathbf{D}_4, \mathbf{D}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$N = 32$$

[illegible]

97

101

APÊNDICE B - ALGORITMOS RÁPIDOS

É apresentado as fatorações dos algoritmos rápidos para as matrizes escaladas.

$N = 8$

Para as fatorações das matrizes obtidas em $N = 8$ são consideradas as seguintes matrizes como blocos das fatorações:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_8^1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_8^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_8^3 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_8^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_8^5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_8^6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_8^7 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_8^8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_8^9 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_8^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_8^{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_8^1 \mathbf{A}_8^2 \mathbf{A}_8^3 \mathbf{A}_8^4 \mathbf{A}_8^5 = \mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^{\text{I}} \quad (6.27)$$

$$\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-2}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_8^1 \mathbf{A}_8^2 \mathbf{A}_8^6 \mathbf{A}_8^7 \mathbf{A}_8^8 \quad (6.28)$$

$$\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-2}}^{\text{I}} = \mathbf{A}_8^1 \mathbf{A}_8^2 \mathbf{A}_8^9 \mathbf{A}_8^{10} \mathbf{A}_8^{11} \quad (6.29)$$

$$\mathbf{A}_{16}^{29} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{16}^{30} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-1}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^3 \mathbf{A}_{16}^4 \mathbf{A}_{16}^5 \mathbf{A}_{16}^6 = \mathbf{T}_{16\text{-Proposta-1}}^{\text{I}} \quad (6.30)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-2}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^3 \mathbf{A}_{16}^7 \mathbf{A}_{16}^8 \mathbf{A}_{16}^9 \quad (6.31)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-2}}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^3 \mathbf{A}_{16}^{10} \mathbf{A}_{16}^{11} \mathbf{A}_{16}^{12} \quad (6.32)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-LO}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^{13} \mathbf{A}_{16}^{14} \mathbf{A}_{16}^{15} \mathbf{A}_{16}^{16} \quad (6.33)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-LO}}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^{17} \mathbf{A}_{16}^{18} \mathbf{A}_{16}^{19} \mathbf{A}_{16}^{20} \quad (6.34)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-BAS-2008b}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^{21} \mathbf{A}_{16}^{22} \mathbf{A}_{16}^5 \mathbf{A}_{16}^{23} \quad (6.35)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-BAS-2008b}}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^{24} \mathbf{A}_{16}^{25} \mathbf{A}_{16}^5 \mathbf{A}_{16}^{26} \quad (6.36)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-OCBSML}_1}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^{13} \mathbf{A}_{16}^{14} \mathbf{A}_{16}^{27} \mathbf{A}_{16}^{28} \quad (6.37)$$

$$\mathbf{T}_{16\text{-OCBSML}_1}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{16}^1 \mathbf{A}_{16}^2 \mathbf{A}_{16}^{17} \mathbf{A}_{16}^{18} \mathbf{A}_{16}^{29} \mathbf{A}_{16}^{30} \quad (6.38)$$

$N = 32$

Para as fatorações das matrizes obtidas em $N = 32$ são consideradas as seguintes matrizes como blocos das fatorações:

112

114

$$\mathbf{T}_{32\text{-LO}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^3 \mathbf{A}_{32}^{14} \mathbf{A}_{32}^{15} \mathbf{A}_{32}^{16} \mathbf{A}_{32}^{17} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{T}_{32\text{-LO}}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^3 \mathbf{A}_{32}^{18} \mathbf{A}_{32}^{19} \mathbf{A}_{32}^{20} \mathbf{A}_{32}^{21} \quad (6.44)$$

$$\mathbf{T}_{32\text{-BAS-2008b}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^3 \mathbf{A}_{32}^{22} \mathbf{A}_{32}^{23} \mathbf{A}_{32}^6 \mathbf{A}_{32}^{24} \quad (6.45)$$

$$\mathbf{T}_{32\text{-BAS-2008b}}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^3 \mathbf{A}_{32}^{25} \mathbf{A}_{32}^{26} \mathbf{A}_{32}^6 \mathbf{A}_{32}^{27} \quad (6.46)$$

$$\mathbf{T}_{32\text{-OCBSML}_1}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^3 \mathbf{A}_{32}^{14} \mathbf{A}_{32}^{15} \mathbf{A}_{32}^{28} \mathbf{A}_{32}^{29} \quad (6.47)$$

$$\mathbf{T}_{32\text{-OCBSML}_1}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^3 \mathbf{A}_{32}^{18} \mathbf{A}_{32}^{19} \mathbf{A}_{32}^{30} \mathbf{A}_{32}^{31} \quad (6.48)$$

$$\mathbf{T}_{32\text{-SBCKMK}}^{\text{Sc-VI}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^{32} \mathbf{A}_{32}^{33} \mathbf{A}_{32}^{34} \mathbf{A}_{32}^6 \mathbf{A}_{32}^{35} \quad (6.49)$$

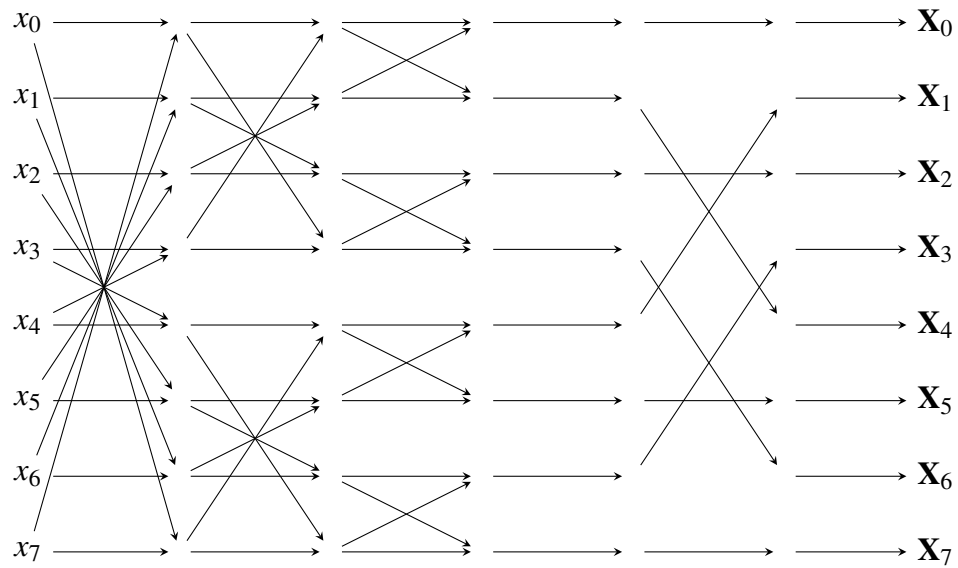
$$\mathbf{T}_{32\text{-SBCKMK}}^{\text{I}} = \mathbf{A}_{32}^1 \mathbf{A}_{32}^2 \mathbf{A}_{32}^{36} \mathbf{A}_{32}^{37} \mathbf{A}_{32}^{38} \mathbf{A}_{32}^6 \mathbf{A}_{32}^{39} \quad (6.50)$$

APÊNDICE C - DIAGRAMAS DE FLUXO DE SINAL

É apresentado os diagramas de fluxos dos algoritmos rápidos descrito no Apêndice B.

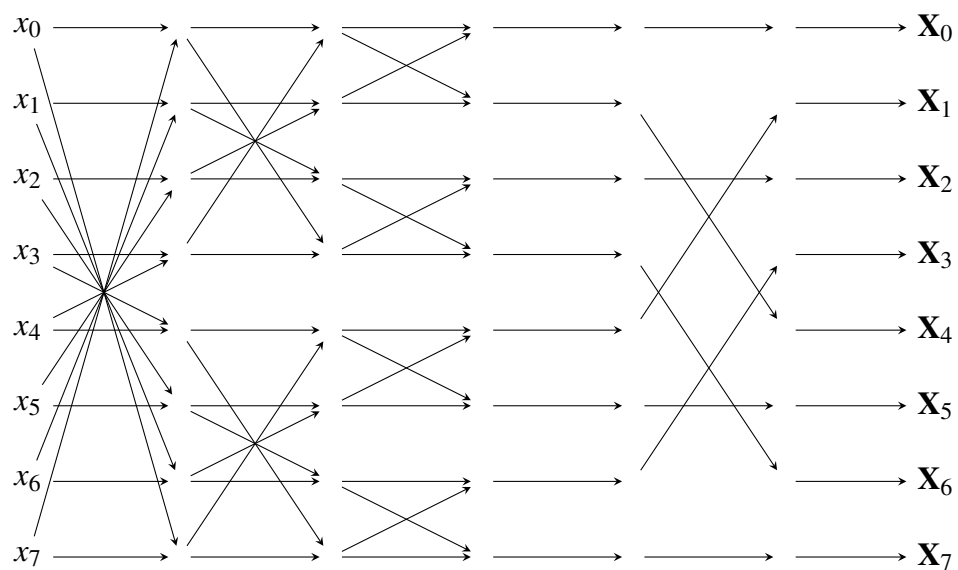
$$N = 8$$

Figura 19 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^{\text{Sc-VI}}$.



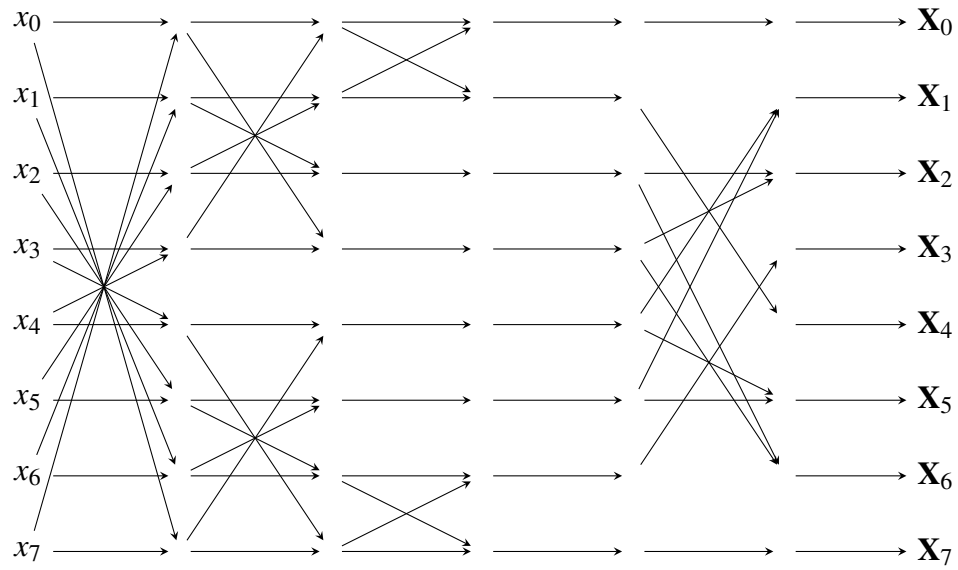
Fonte: O autor (2025).

Figura 20 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-1}}^{\text{I}}$.



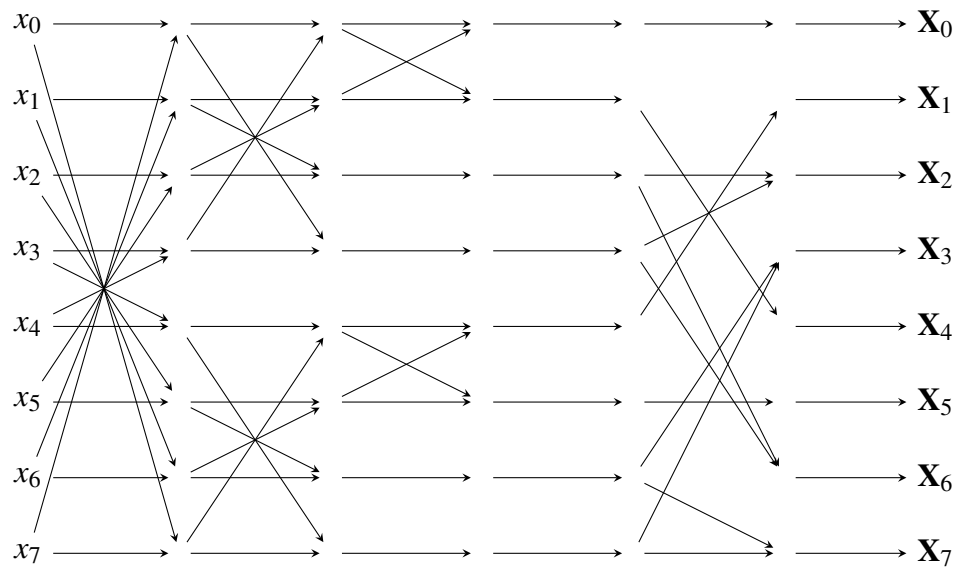
Fonte: O autor (2025).

Figura 21 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8\text{-Proposta-2}}^{S_{c-VI}}$.



Fonte: O autor (2025).

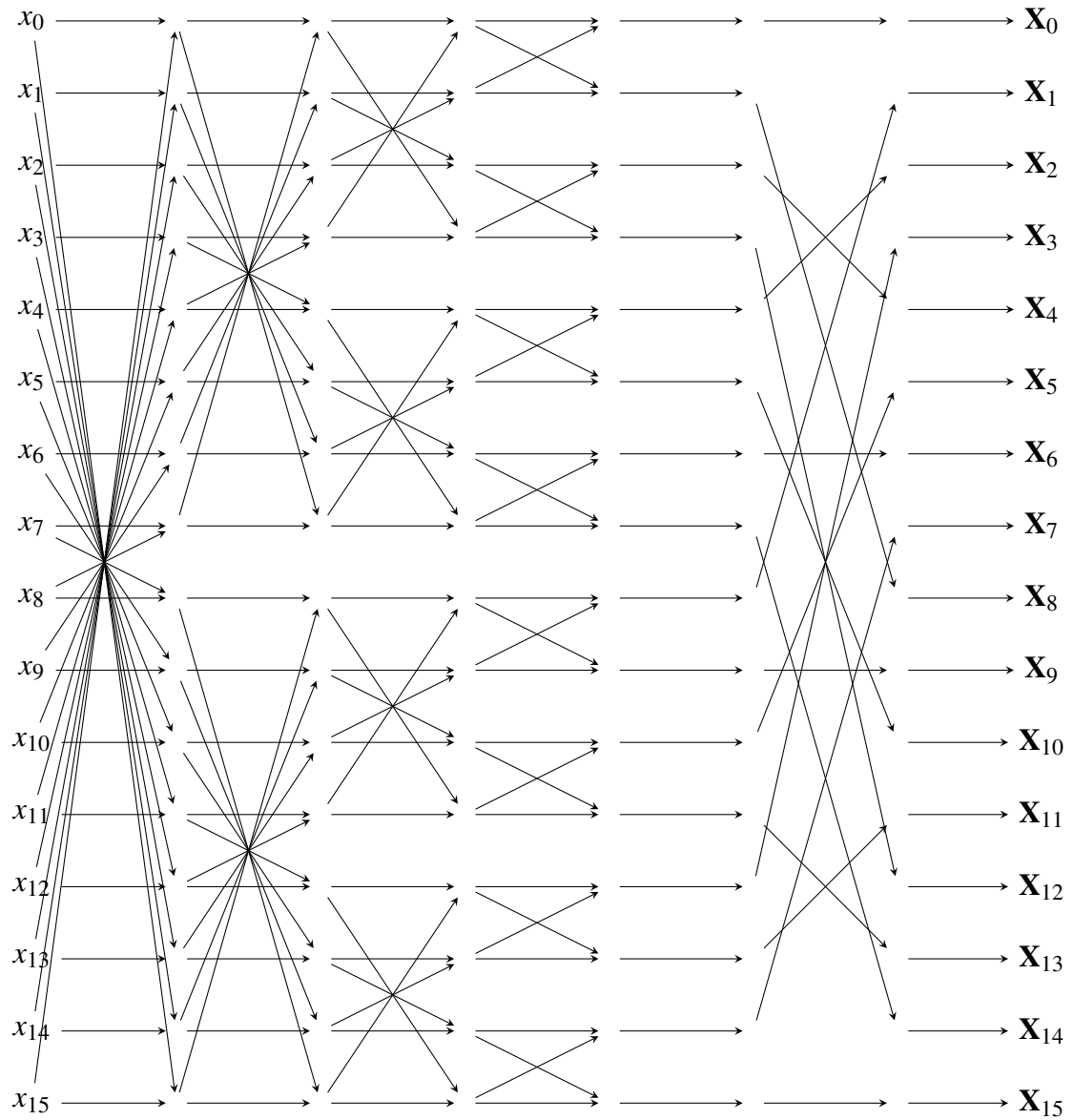
Figura 22 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{8-2}^I$.



Fonte: O autor (2025).

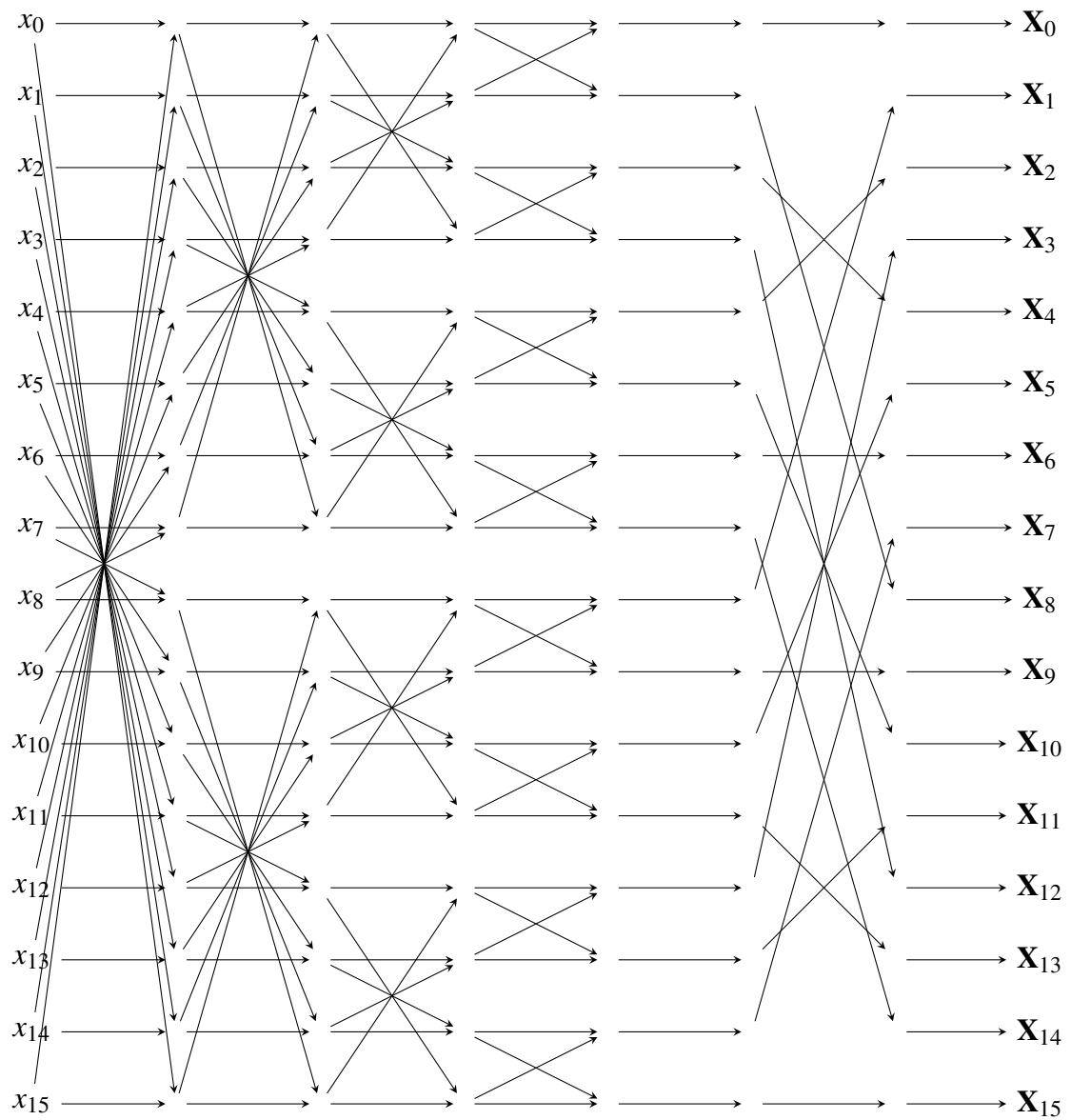
$N = 16$

Figura 23 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16-1}^{S_c-VI}$.



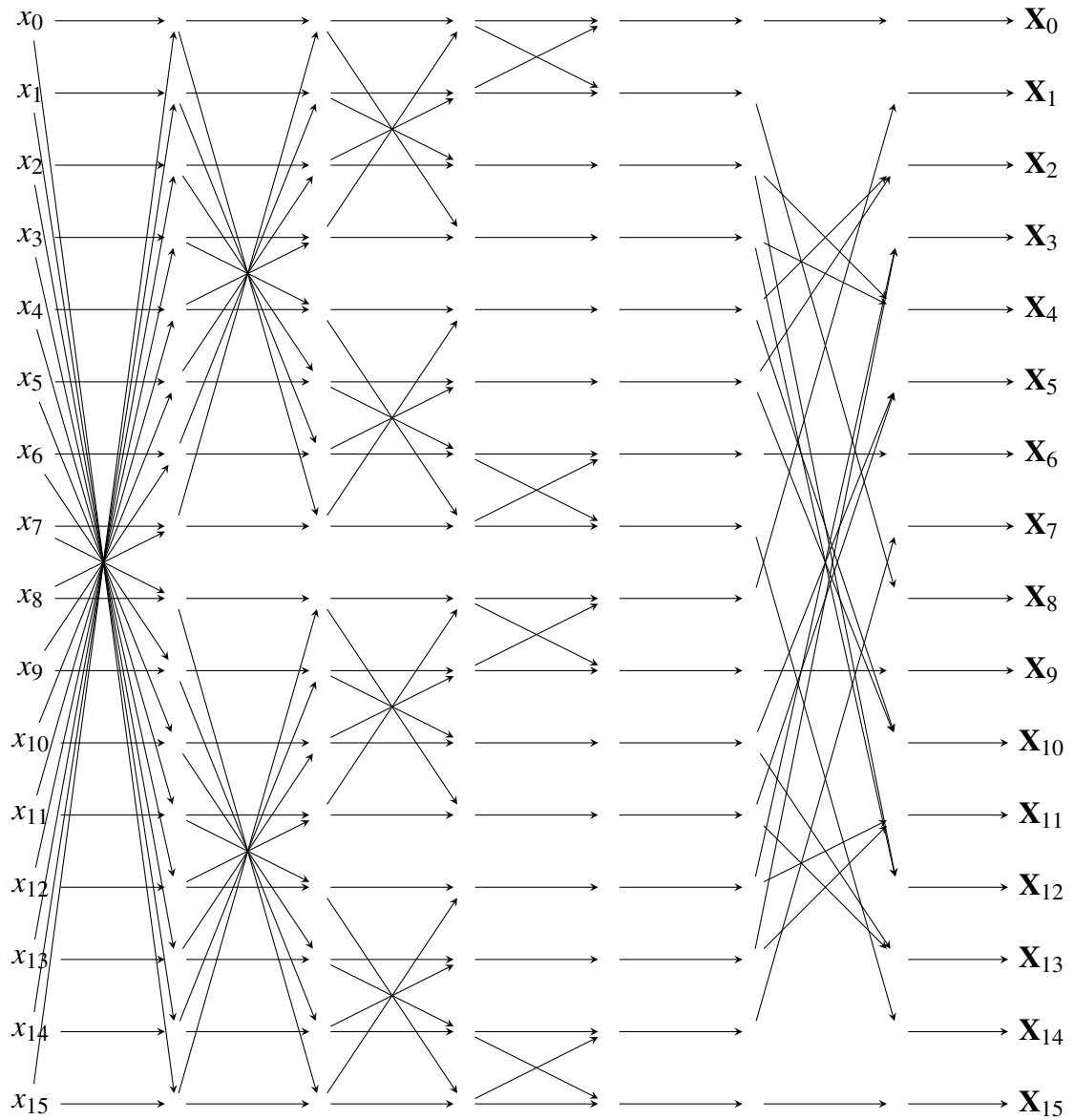
Fonte: O autor (2025).

Figura 24 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-1}}^I$.



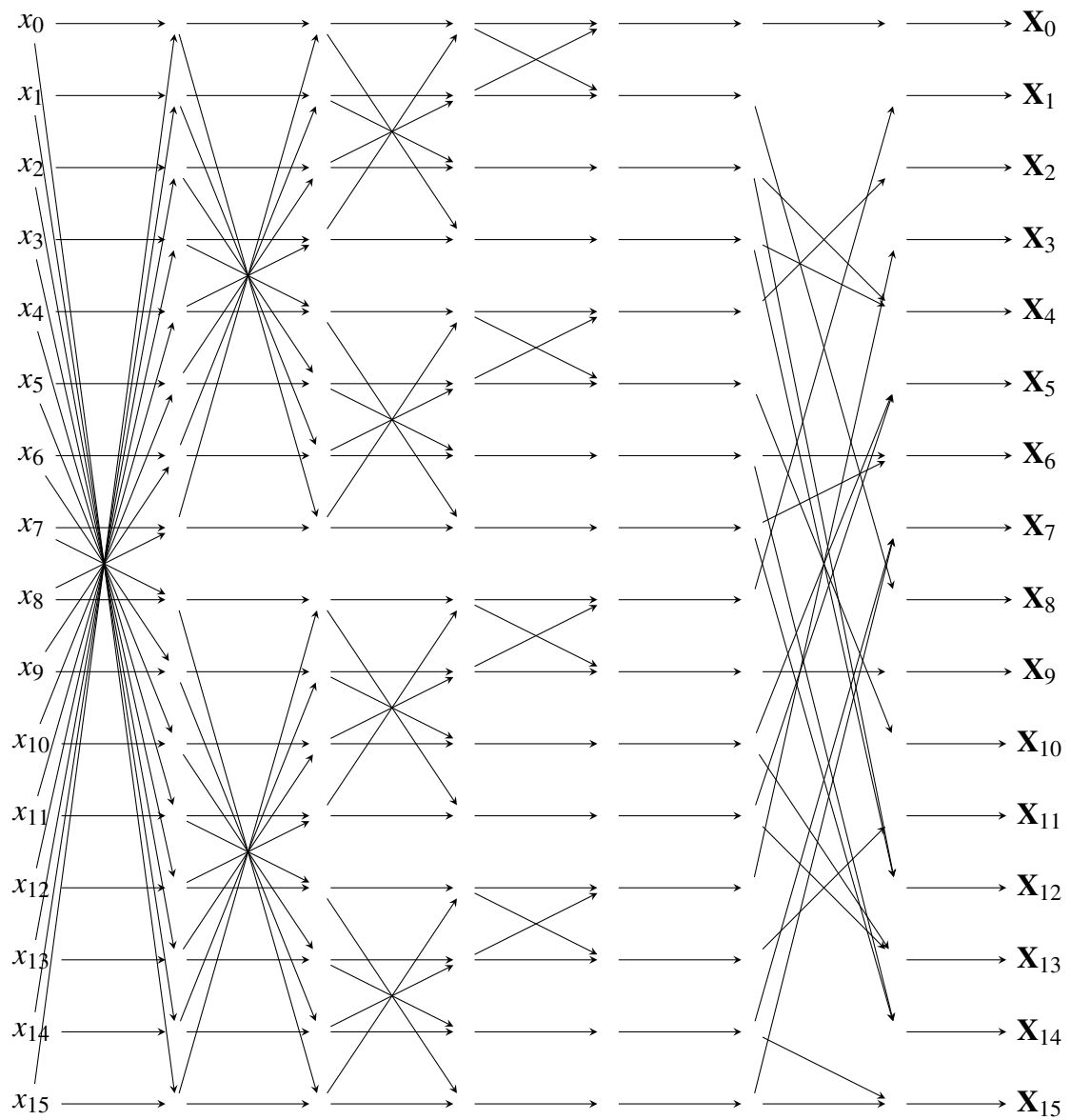
Fonte: O autor (2025).

Figura 25 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-2}}^{\text{Sc-VI}}$



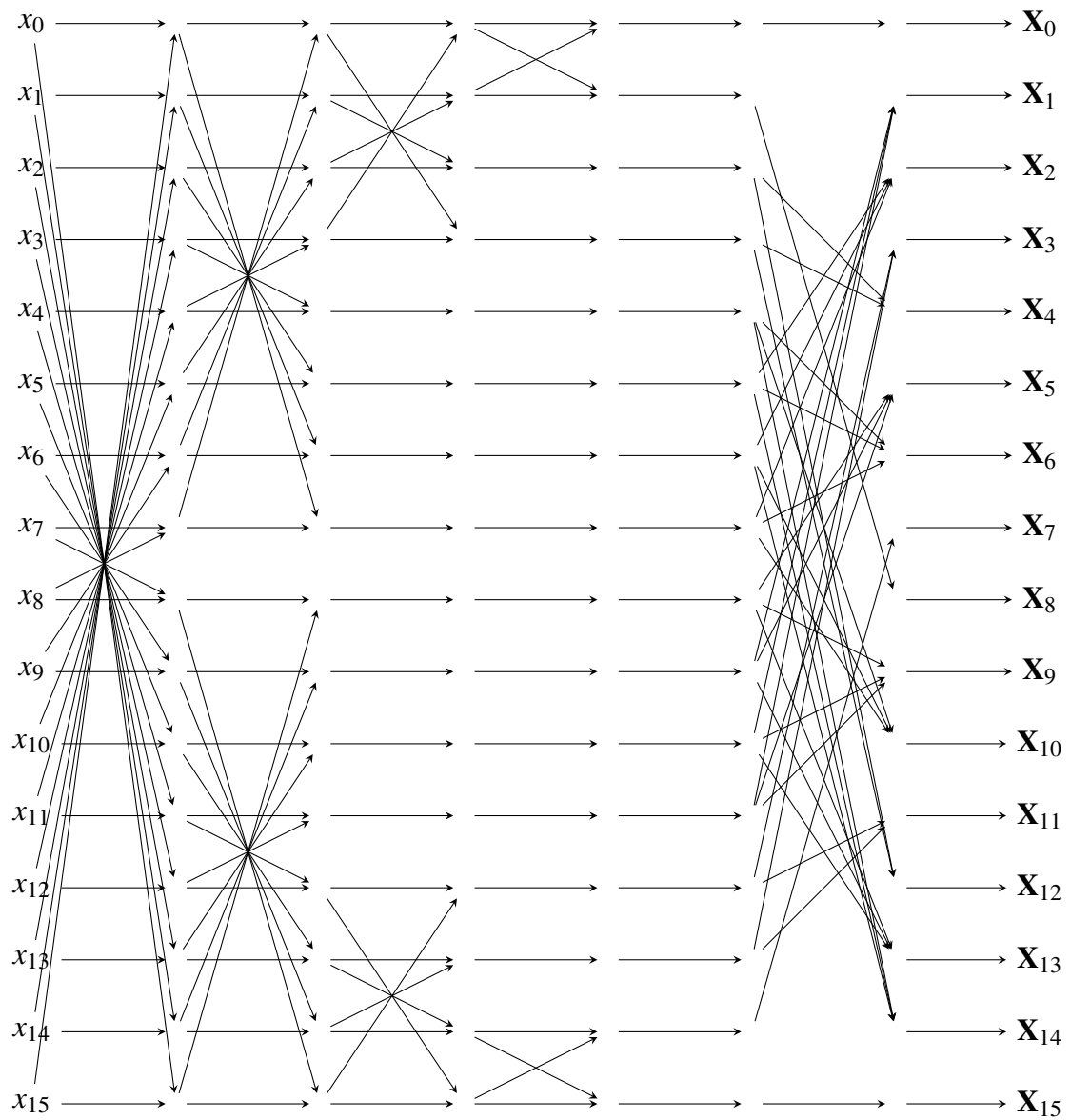
Fonte: O autor (2025).

Figura 26 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-Proposta-2}}^I$.



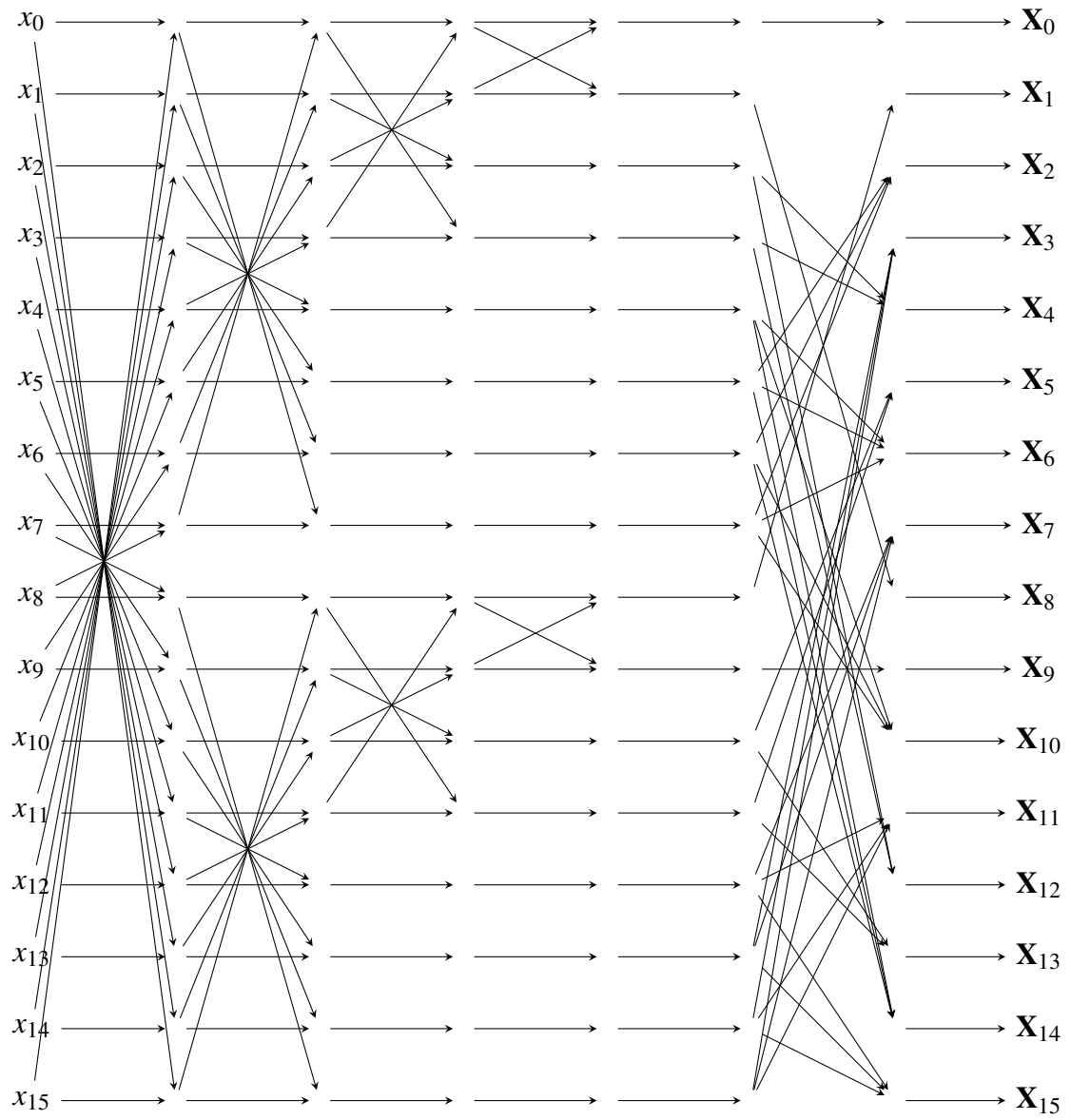
Fonte: O autor (2025).

Figura 27 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-LO}}^{\text{Sc-VI}}$.



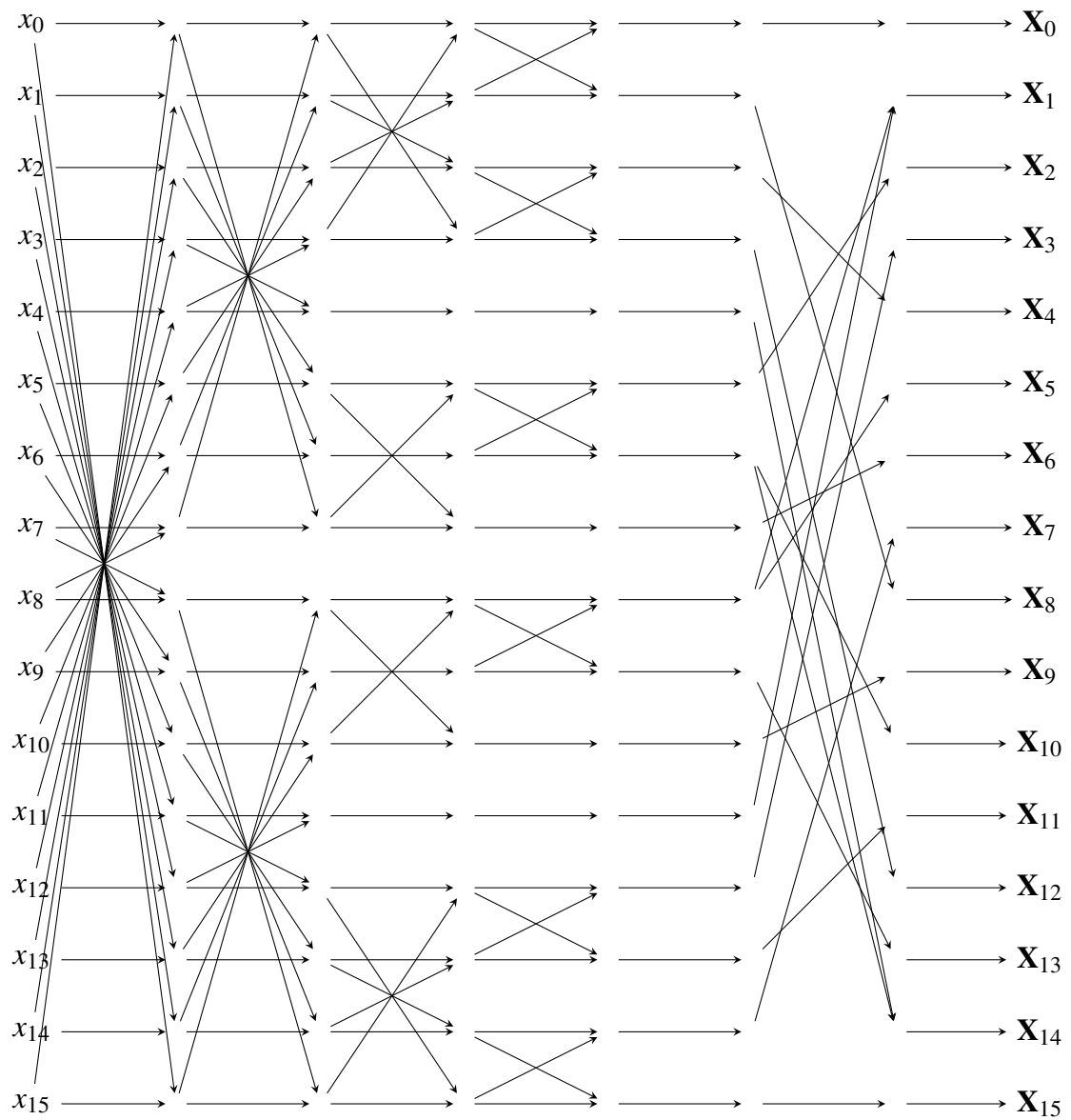
Fonte: O autor (2025).

Figura 28 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16-LO}^I$.



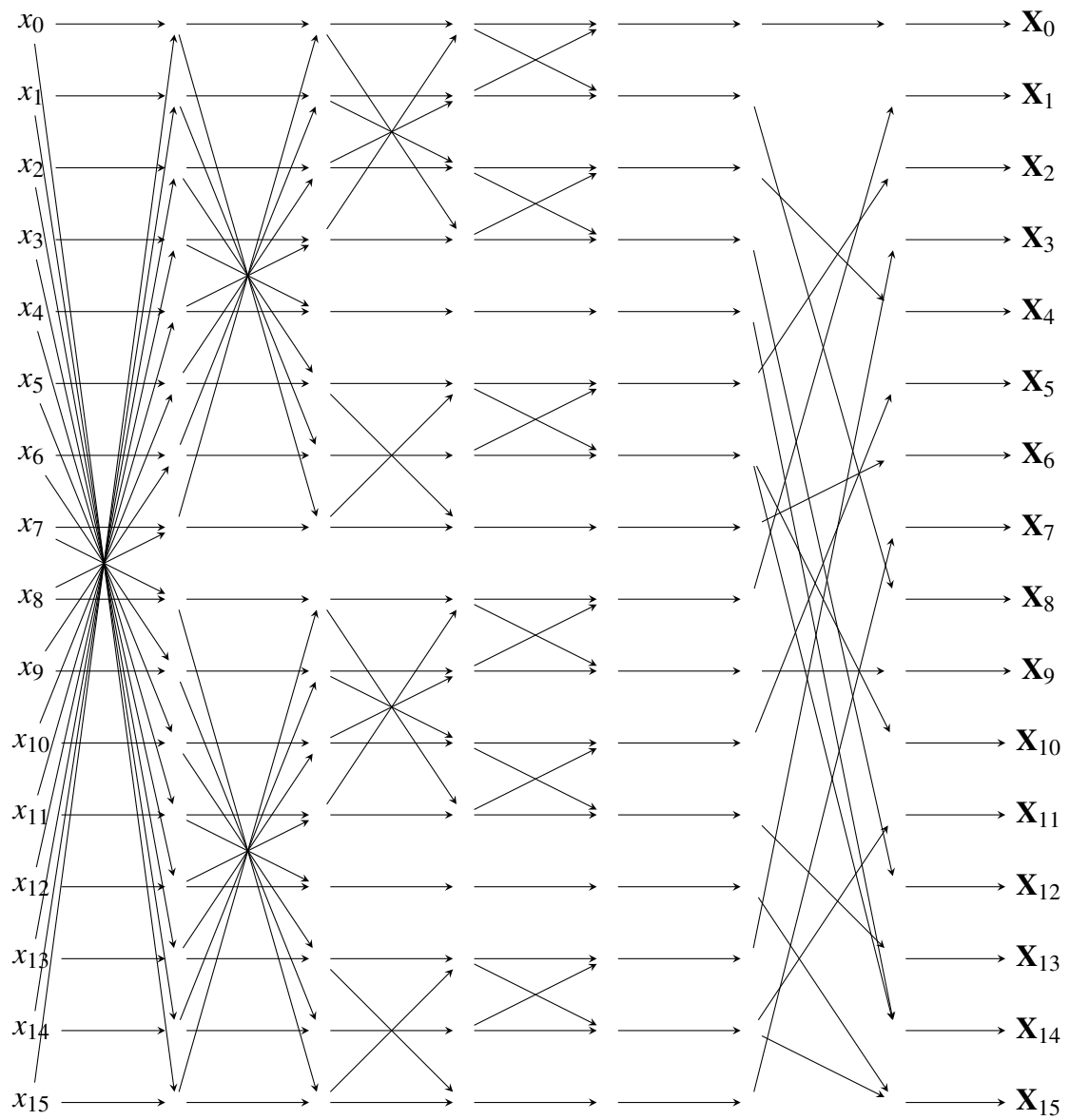
Fonte: O autor (2025).

Figura 29 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-BAS-2008b}}^{\text{Sc-VI}}$.



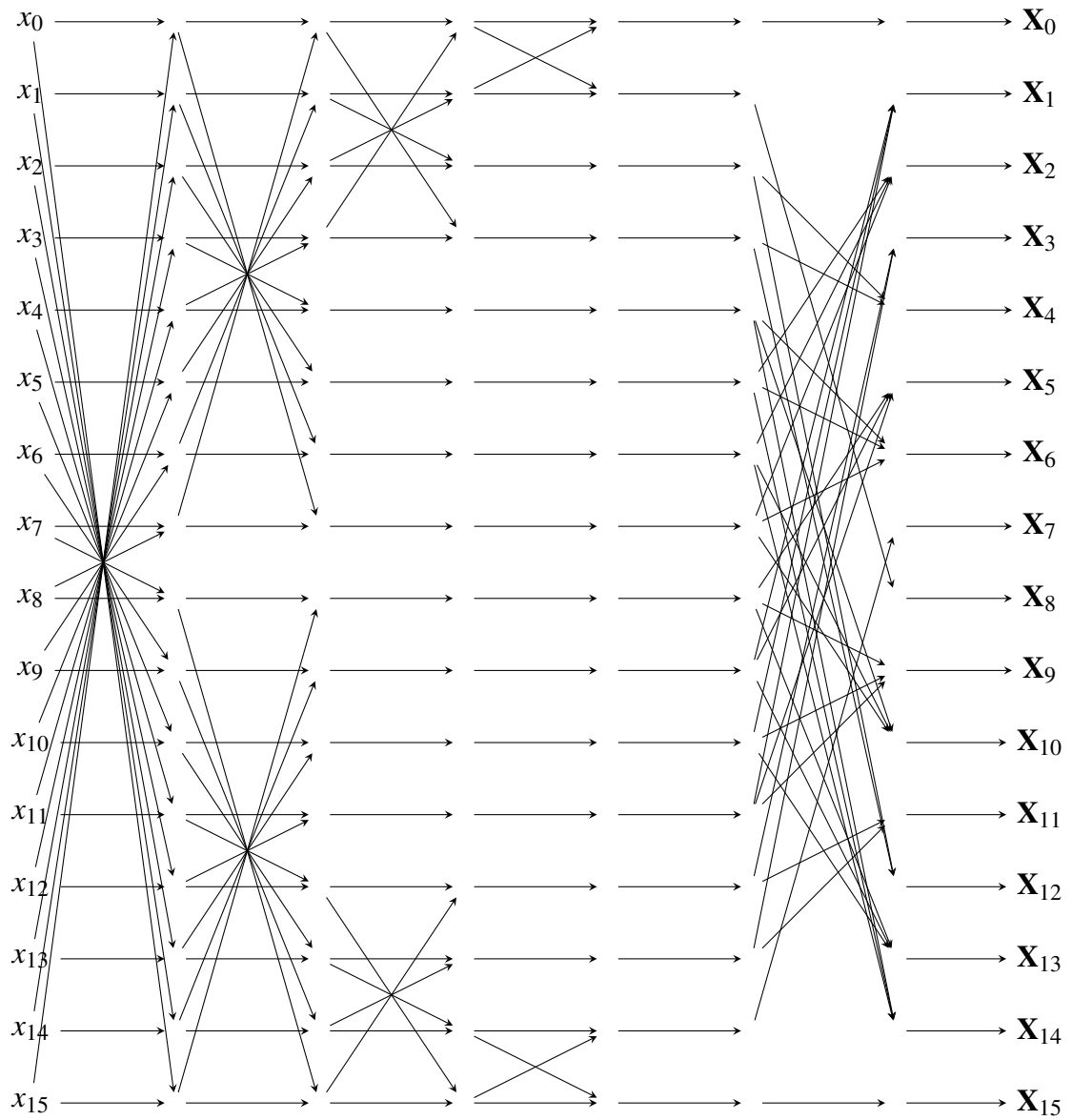
Fonte: O autor (2025).

Figura 30 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-BAS-2008b}}^I$.



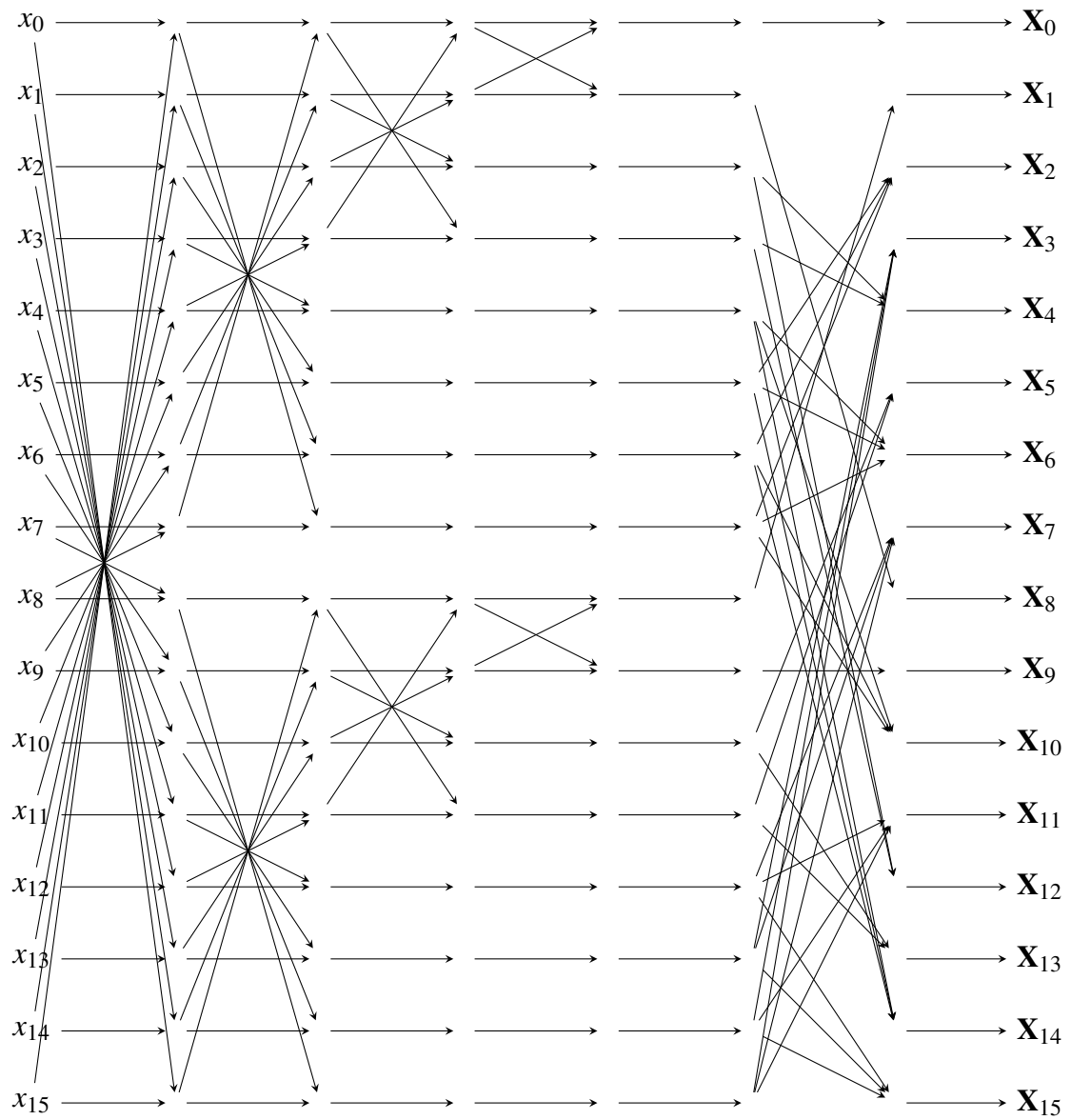
Fonte: O autor (2025).

Figura 31 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-OCBSML}_1}^{\text{Sc-VI}}$.



Fonte: O autor (2025).

Figura 32 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{16\text{-OCBSML}_1}^I$.



Fonte: O autor (2025).

$$N = 32$$

Figura 33 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-1}}^{\text{Sc-VI}}$

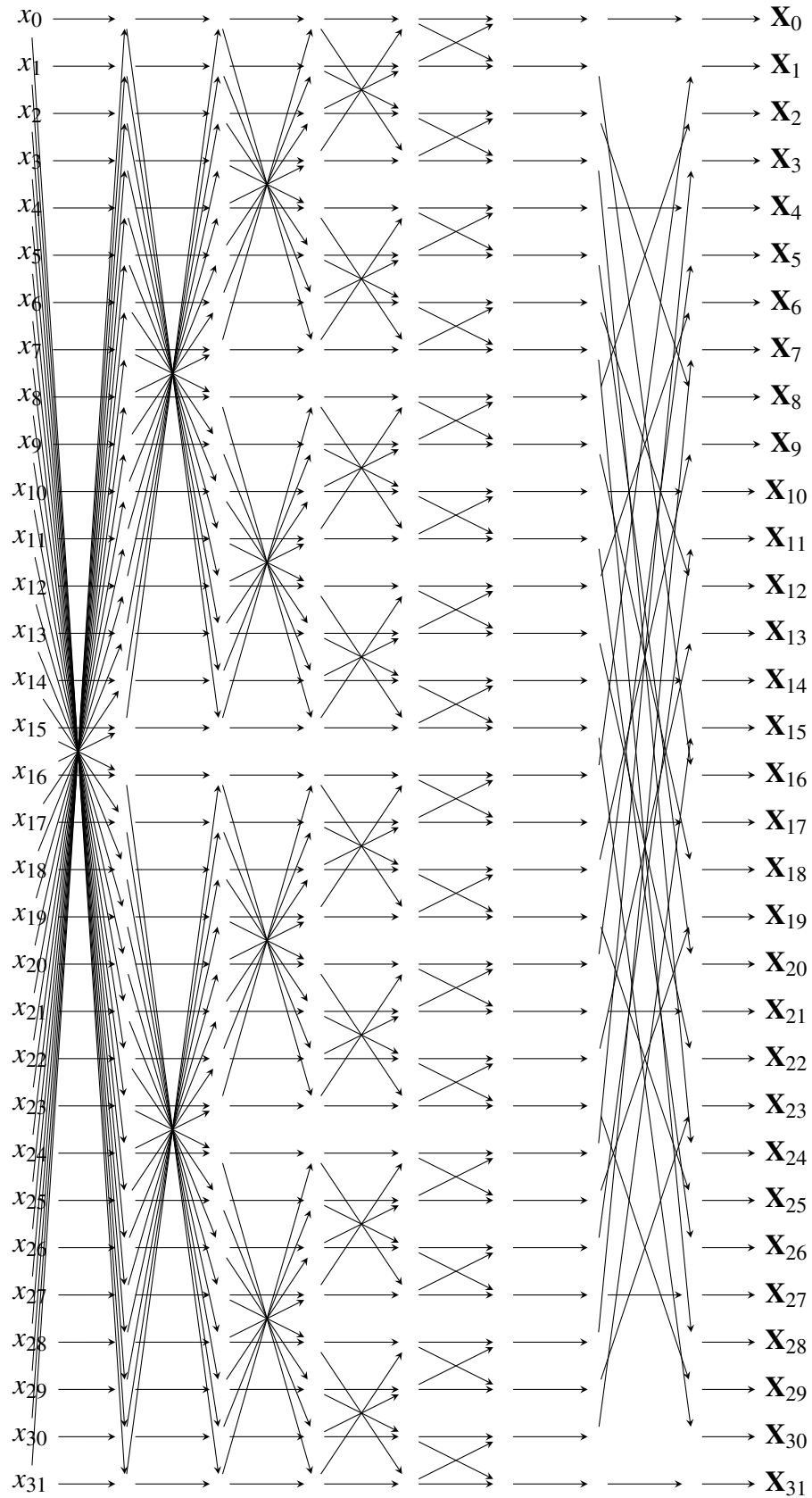
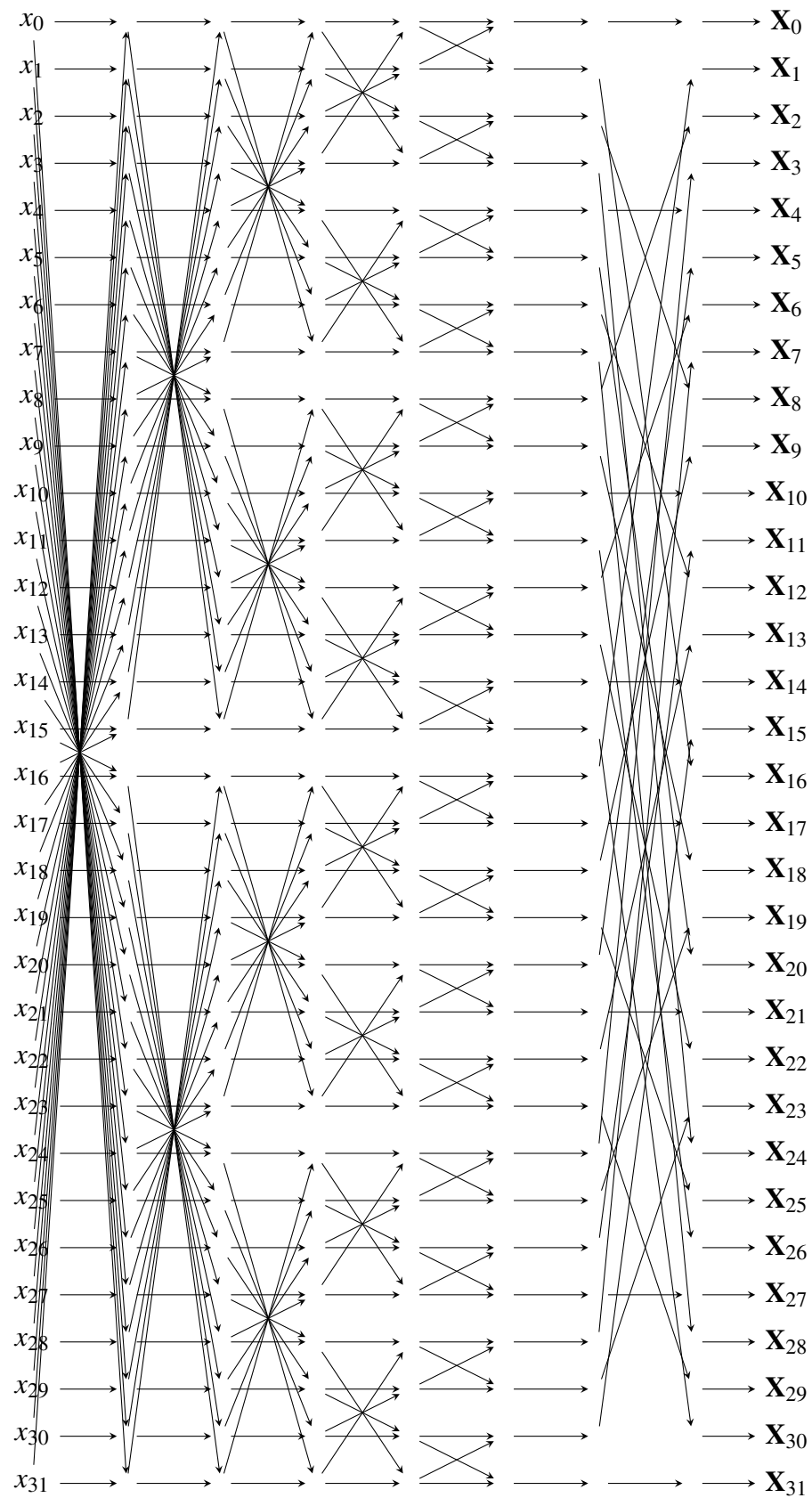
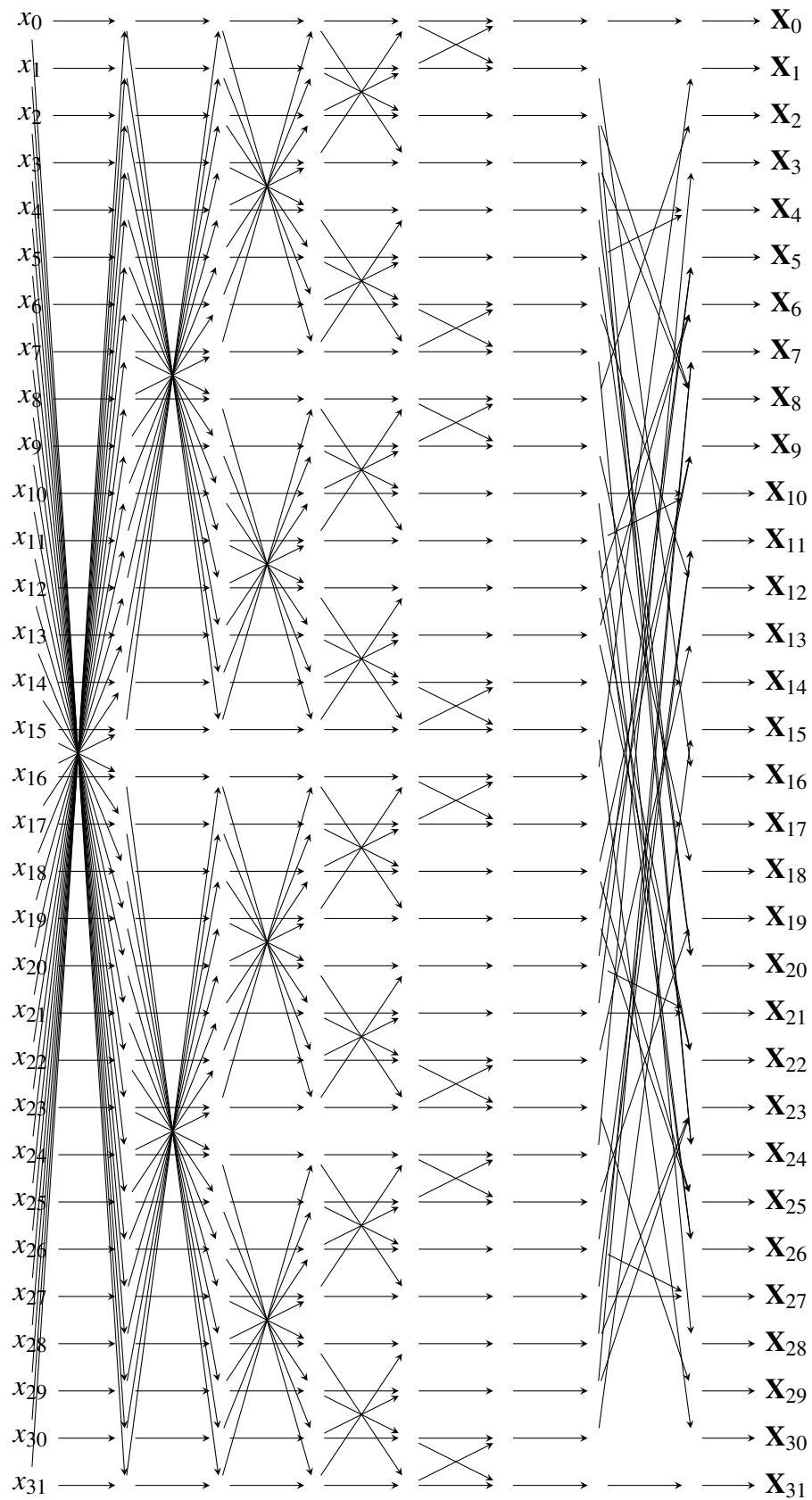


Figura 34 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-1}}^I$.



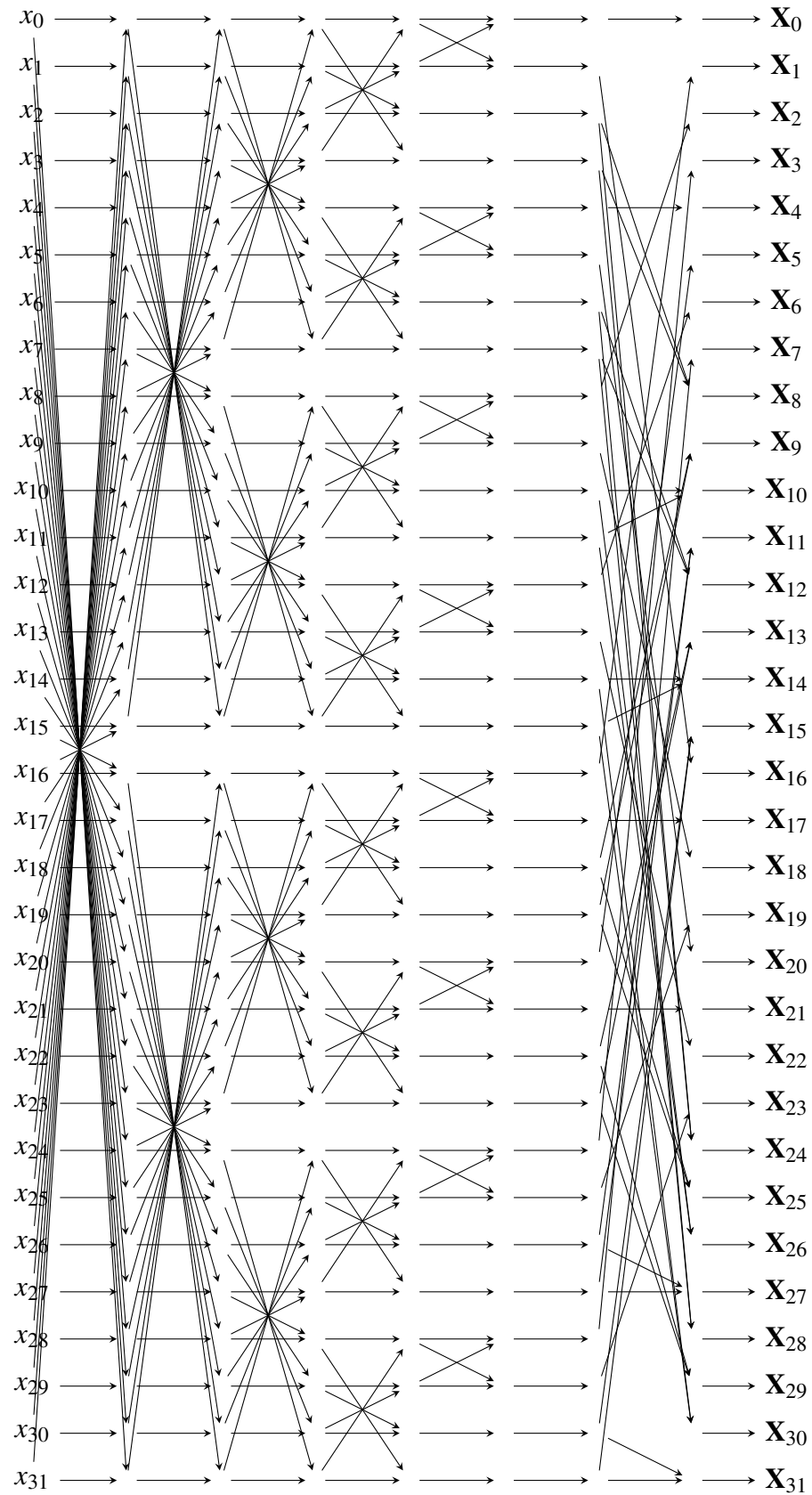
Fonte: O autor (2025).

Figura 35 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-2}}^{\text{Sc-VI}}$



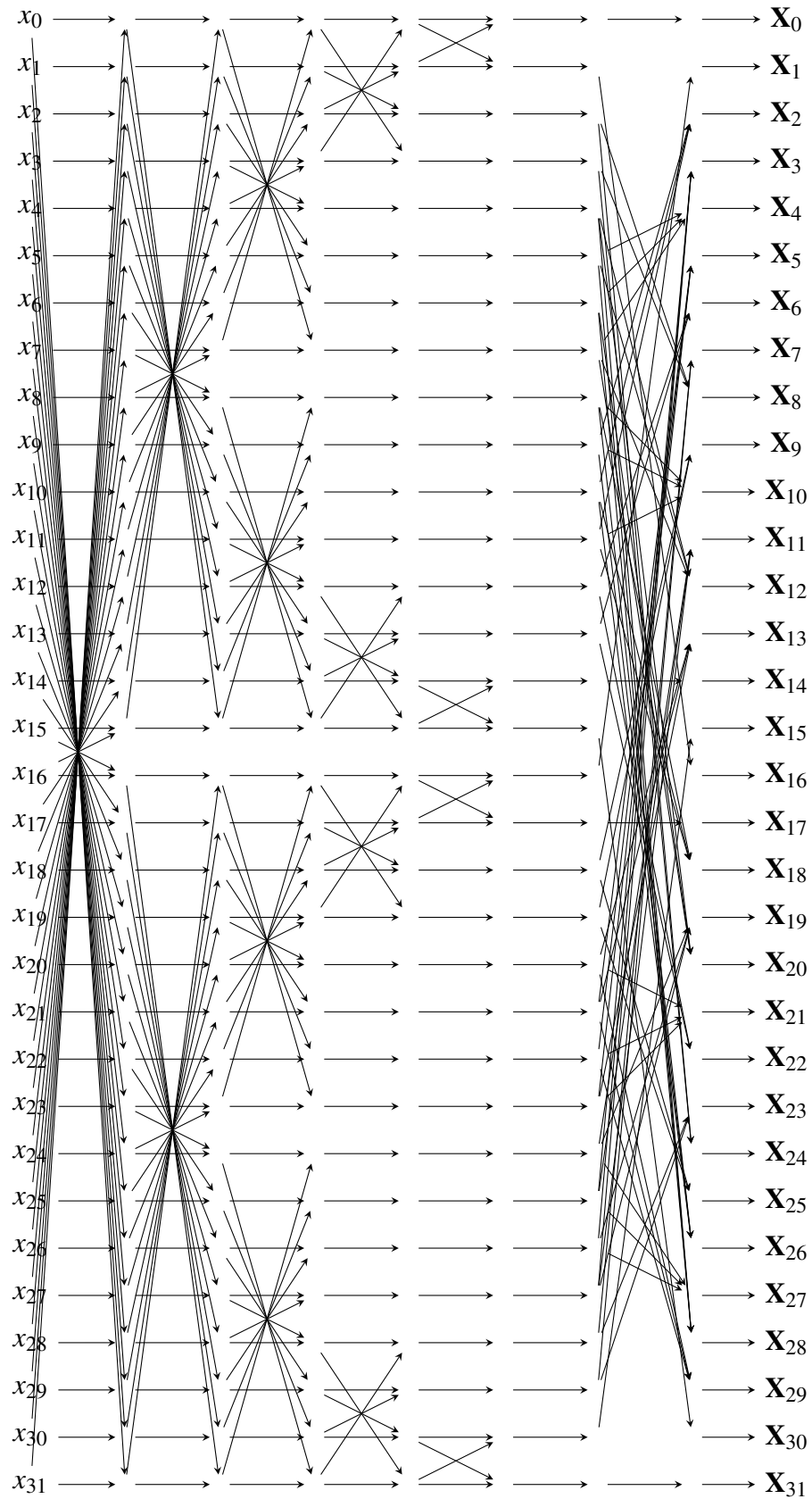
Fonte: O autor (2025).

Figura 36 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-Proposta-2}}^I$.



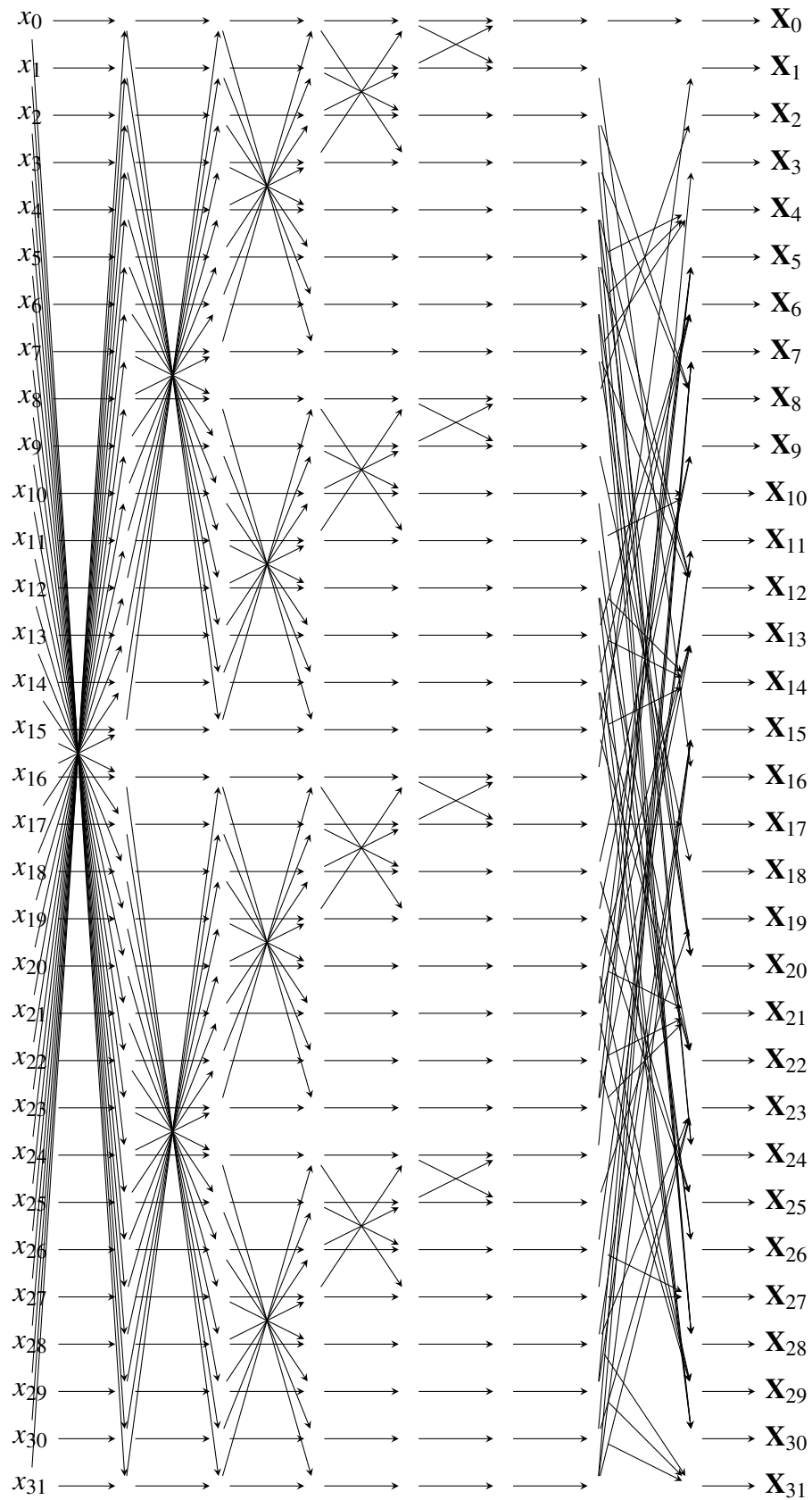
Fonte: O autor (2025).

Figura 37 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-LO}}^{\text{ScI}}$.



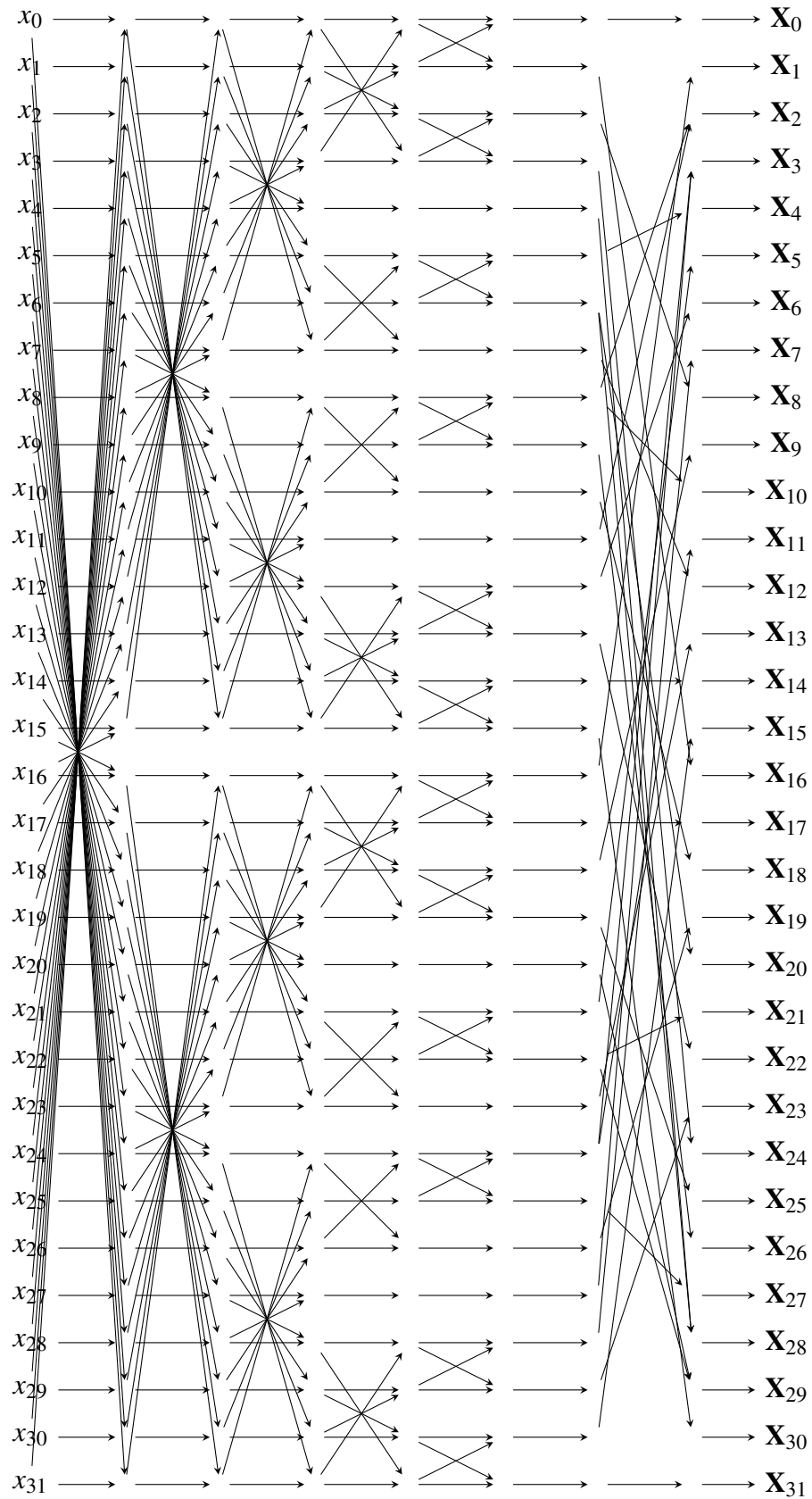
Fonte: O autor (2025).

Figura 38 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-LO}}^I$.



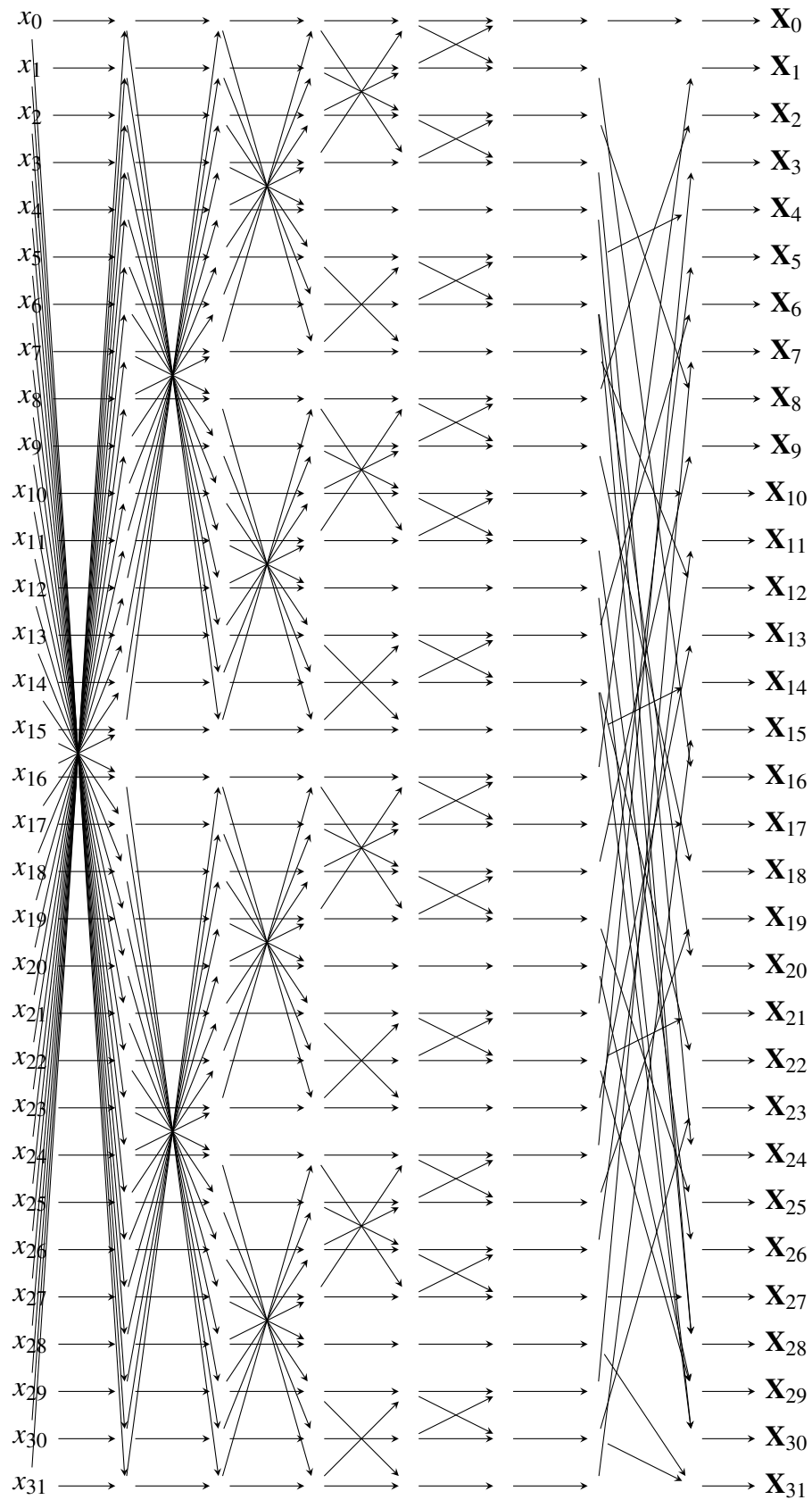
Fonte: O autor (2025).

Figura 39 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-BAS-2008b}}^{\text{Sc-VI}}$.



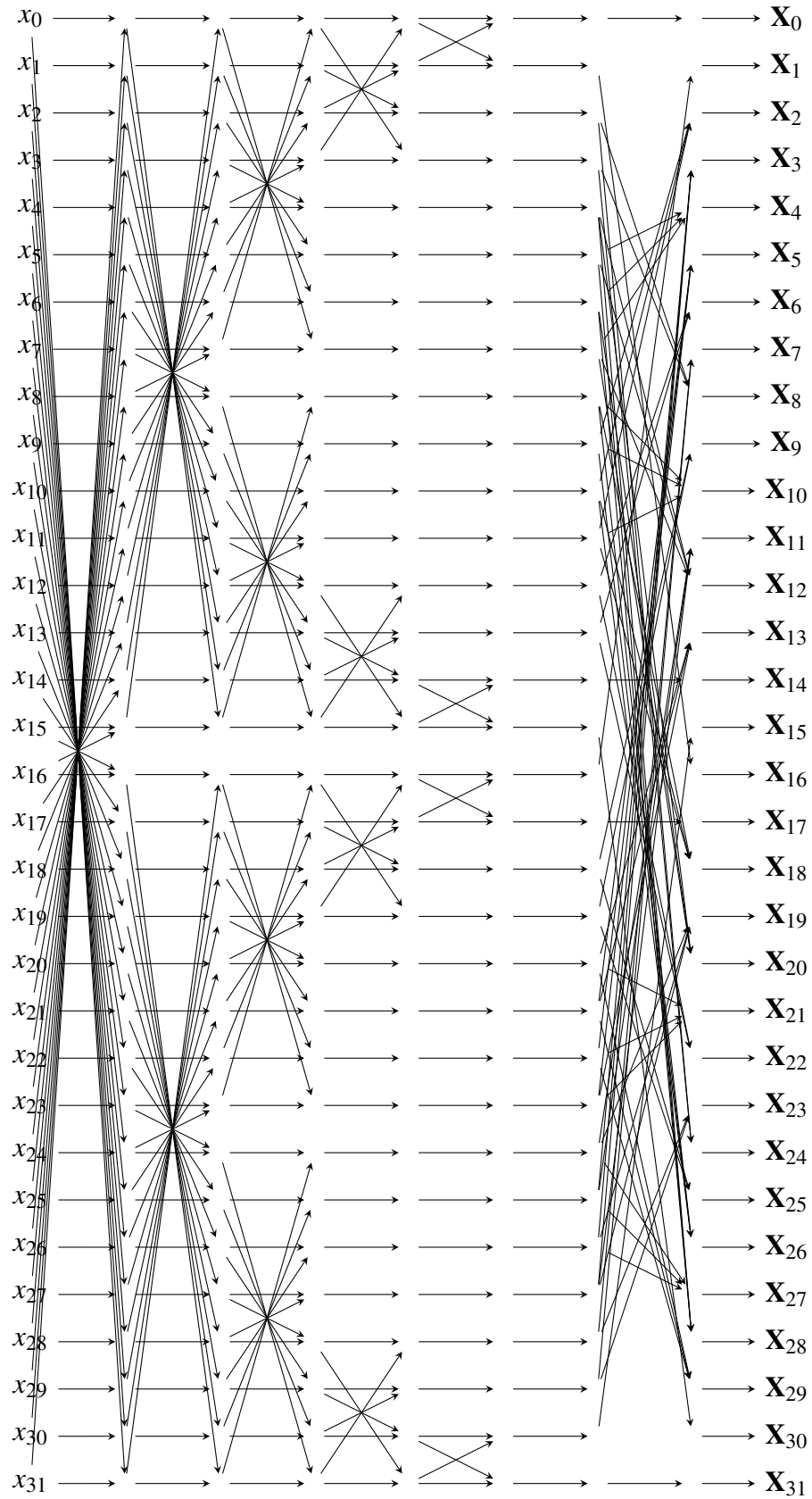
Fonte: O autor (2025).

Figura 40 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-BAS-2008b}}^{\text{I}}$.



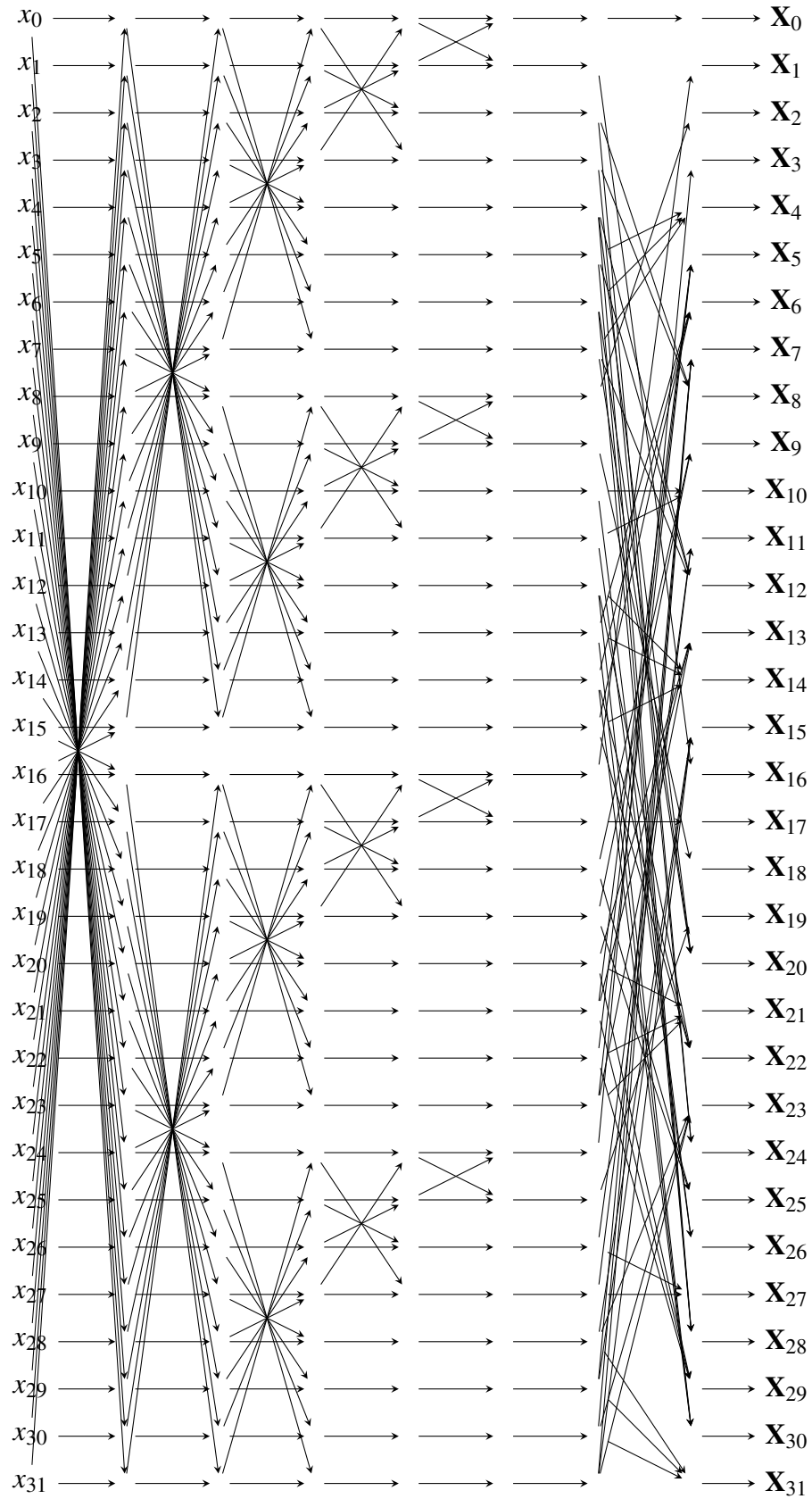
Fonte: O autor (2025).

Figura 41 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-OCBSML}_1}^{\text{Sc-VI}}$.



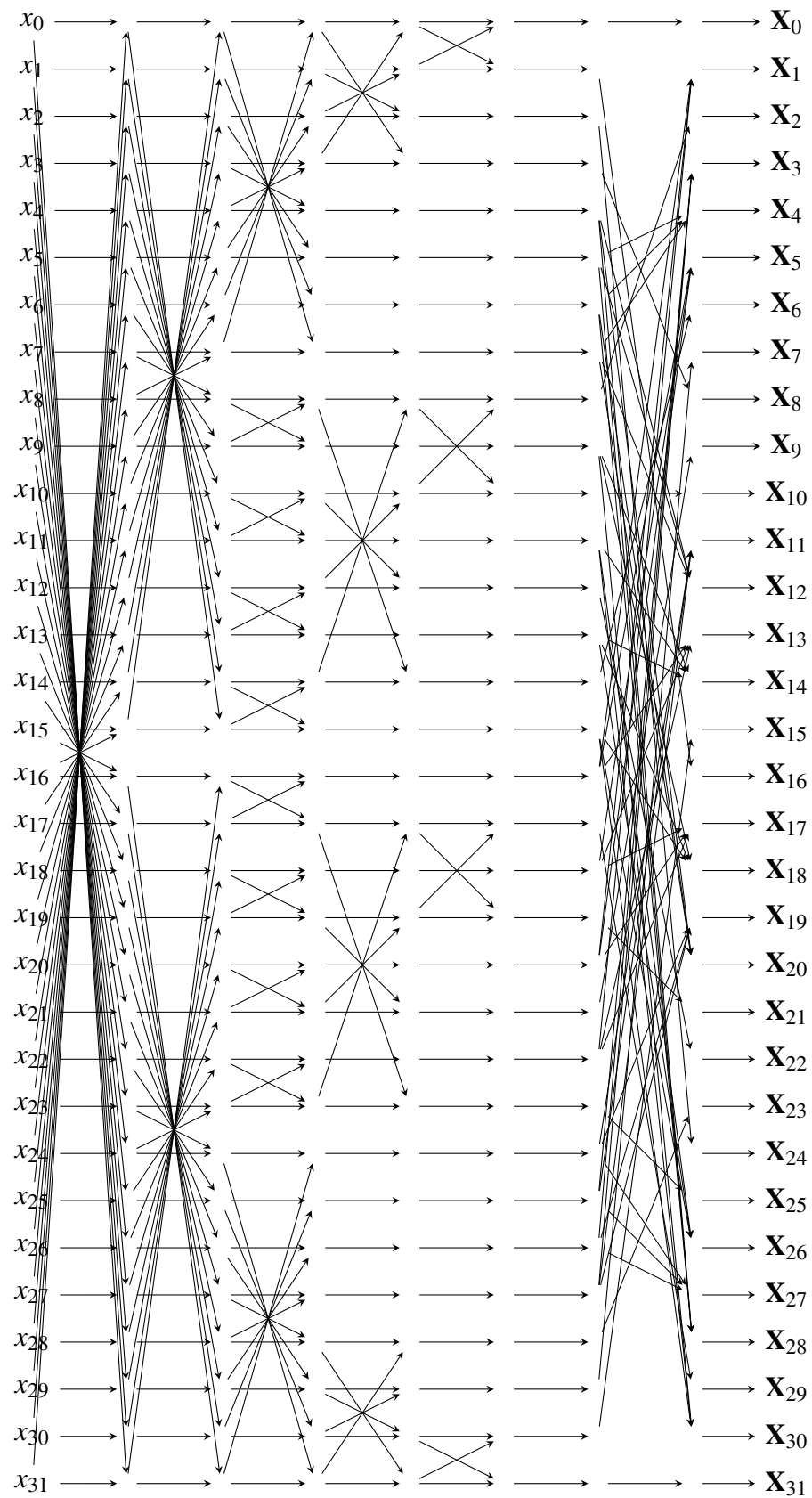
Fonte: O autor (2025).

Figura 42 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-OCBSML}_1}^I$.



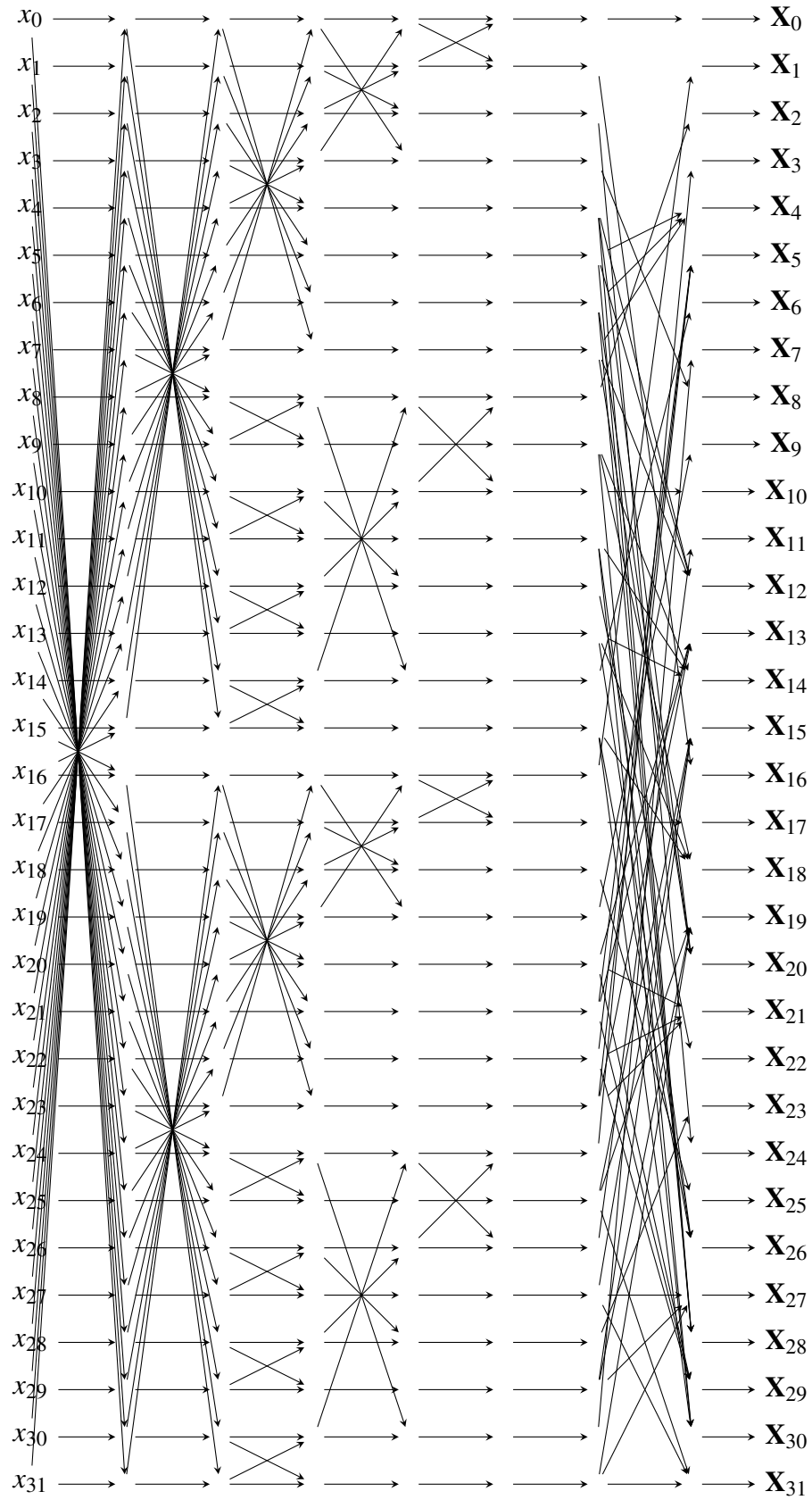
Fonte: O autor (2025).

Figura 43 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-SBCKMK}}^{\text{Sc-VI}}$.



Fonte: O autor (2025).

Figura 44 – Diagrama de fluxo de sinal da matriz $\mathbf{T}_{32\text{-SBCKMK}}^I$.



Fonte: O autor (2025).