



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

LEONARDO TAVARES DE OLIVEIRA

**ESTABILIDADE PARAMÉTRICA DE UM PROBLEMA RESTRITO ESPACIAL
DE TRÊS CORPOS**

Recife

2025

LEONARDO TAVARES DE OLIVEIRA

**ESTABILIDADE PARAMÉTRICA DE UM PROBLEMA RESTRITO ESPACIAL
DE TRÊS CORPOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Matemática.

Área de Concentração: Geometria

Orientador: Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Oliveira, Leonardo Tavares de.

Estabilidade paramétrica de um problema restrito espacial de três corpos / Leonardo Tavares de Oliveira. - Recife, 2025.
114 f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Pós-Graduação em Matemática, 2025.

Orientação: Hildeberto Eulalio Cabral.

Inclui referências e apêndice.

1. Estabilidade paramétrica; 2. Sistema Hamiltoniano; 3. Três graus de liberdade. I. Cabral, Hildeberto Eulalio. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

LEONARDO TAVARES DE OLIVEIRA

Estabilidade paramétrica de um problema restrito espacial de três corpos

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 18/07/2025

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **HILDEBERTO EULALIO CABRAL**
Data: 23/07/2025 19:33:19-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Hildeberto Eulalio Cabral (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Documento assinado digitalmente
 **EUDES NAZIAZENO GALVAO**
Data: 24/07/2025 21:35:53-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Eudes Naziazeno Galvão (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Documento assinado digitalmente
 **MARCELO PEDRO DOS SANTOS**
Data: 24/07/2025 11:37:26-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Marcelo Pedro Santos (Examinador Externo)
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Documento assinado digitalmente
 **JOSE LAUDELINO DE MENEZES NETO**
Data: 25/07/2025 15:15:22-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. José Laudelino de Menezes Neto (Examinador Externo)
Universidade Federal da Paraíba

Documento assinado digitalmente
 **GERSON CRUZ ARAUJO**
Data: 25/07/2025 10:43:22-0300
Verifique em <https://validar.itl.gov.br>

Prof. Dr. Gerson Cruz Araújo (Examinador Externo)
Universidade Federal de Sergipe

Dedico, primeiramente, a Deus, e às duas mulheres que estiveram ao meu lado em toda essa jornada: minha noiva, Thaiana Magna, e minha mãe, Lúcia Maria.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças ao longo da caminhada e por estar presente em cada momento difícil, cumprindo suas promessas em minha vida.

Aos meus pais, Francisco Felipe e Lúcia Maria, às minhas irmãs, Lucineide Tavares e Lucilane Tavares, e aos meus sobrinhos, Pedro Henrique e Lorena Tavares, pelo apoio, carinho e paciência durante todo esse tempo. Em especial, à minha mãe, pelo apoio incondicional, sempre se fazendo presente em todos os momentos, mesmo à distância.

À minha noiva, Thaiana Magna, essa pessoa incrível que esteve ao meu lado, especialmente nos primeiros anos de estudos. Sem sua ajuda, apoio, amor incondicional e companheirismo, eu não teria chegado até aqui.

Aos meus amigos do Ap. 203, Jandeilson, Jefferson, Júlio, Júnior e Willikat, pelos momentos compartilhados de discussões, parcerias e resenhas. À minha parceira de turma, Danielle Silva, e aos companheiros do DMat, Rafael Cavalcante, Matheus Nunes e Igor Nonato.

Aos meus professores, Valdemiro Braga e Francisco Enio, que foram fundamentais na minha formação inicial e responsáveis por eu estar neste universo da Matemática, agradeço pelos incentivos e por acreditarem no meu potencial.

A todos os professores da Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, que contribuíram para conclusão desta trajetória acadêmica.

Ao meu orientador, Dr. Hildeberto Eulalio Cabral, com quem tive a honra de trabalhar e por seu papel essencial no desenvolvimento deste trabalho, minha sincera admiração.

Aos membros da banca examinadora, pela disponibilidade em participar da avaliação e pelas valiosas sugestões para a melhoria desta tese.

A Universidade Estadual do Ceará (UECE) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financiamento.

E a todas as pessoas que, de algum modo, fizeram parte da minha formação acadêmica.

Muito Obrigado!

RESUMO

Estudamos a estabilidade paramétrica em um caso simplificado do problema restrito espacial de três corpos, onde um planeta descreve uma órbita elíptica devido à atração gravitacional do Sol, fixo em um dos focos da elipse, e um satélite move-se no espaço sujeito apenas à atração gravitacional do planeta. Inicialmente, investigamos a dinâmica de um problema restrito de dois corpos, onde o primário descreve uma órbita circular e o corpo de massa infinitesimal move-se no espaço tridimensional. Discutimos os equilíbrios do sistema Hamiltoniano deste sistema binário em um referencial rotatório relativamente ao qual o Hamiltoniano é autônomo. Determinamos as formas normais do Hamiltoniano quadrático na região de estabilidade linear em uma vizinhança dos pontos de equilíbrio. Posteriormente, analisamos o problema de estabilidade paramétrica do sistema Hamiltoniano obtido do referido problema restrito espacial simplificado de três corpos. Este sistema Hamiltoniano é τ -periódico com três graus de liberdade e contém um parâmetro μ , razão entre as massas do planeta e do Sol. Calculamos os equilíbrios deste sistema Hamiltoniano τ -periódico e estudamos a estabilidade paramétrica do sistema linearizado numa vizinhança de um dos pontos de equilíbrio do sistema, construindo, respectivamente, as superfícies e as curvas que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço e no plano dos parâmetros utilizando para isto o método de Deprit-Hori.

Palavras-chaves: Estabilidade paramétrica. Sistema Hamiltoniano. Três graus de liberdade.

ABSTRACT

We study parametric stability in a simplified case of the spatial restricted three-body problem, where a planet follows an elliptical orbit due to the gravitational attraction of the Sun, which is fixed at one of the foci of the ellipse, and a satellite moves through space subject only to the gravitational attraction of the planet. Initially, we investigate the dynamics of a restricted two-body problem, where the primary body moves in a circular orbit and the body of infinitesimal mass moves in the three-dimensional space. We discuss the equilibria of the Hamiltonian system of this binary system in a rotating reference frame, relative to which the Hamiltonian is autonomous. We determine its normal forms in the region of linear stability in a neighborhood of the equilibrium points. Subsequently, we analyze the parametric stability problem of the Hamiltonian system obtained from the aforementioned simplified spatial restricted three-body problem. This Hamiltonian system is τ -periodic with three degrees of freedom and contains a parameter μ , the mass ratio between the planet and the Sun. We compute the equilibria of this τ -periodic Hamiltonian system and study the parametric stability of the linearized system in a neighborhood of one of its equilibrium points, constructing, respectively, the surfaces and curves that separate the stability and instability regions in parameter space and plane using the Deprit-Hori method.

Keywords: Parametric stability. Hamiltonian system. Three degrees of freedom.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração do problema no contexto de uma órbita circular	15
Figura 2 – Órbita elíptica do planeta P no sistema planeta-satélite-Sol	38
Figura 3 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela superfície do extremo esquerdo do intervalo estabilidade linear	103
Figura 4 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela curva no plano paramétrico, especificamente para ξ_1^{*3} igual a 10^{-5}	104
Figura 5 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela superfície do extremo direito do intervalo estabilidade linear	105
Figura 6 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela curva no plano paramétrico, especificamente para $\tilde{\mu}_0 = \xi_1^{*3}$ igual a 10^{-5}	105
Figura 7 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pelas superfícies	106
Figura 8 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pelas curvas no plano paramétrico, correspondentes aos extremos do intervalo de estabilidade linear do problema	106

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	ESTUDO DA DINÂMICA DE UM PROBLEMA RESTRITO ES- PACIAL DE DOIS CORPOS	15
2.1	EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA DINÂMICA	15
2.2	O HAMILTONIANO DO SISTEMA	16
2.3	O HAMILTONIANO EM COORDENADAS ROTATÓRIAS	17
2.4	EQUILÍBRIOS DO SISTEMA NAS COORDENADAS ROTATÓRIAS	18
2.5	SISTEMA LINEARIZADO NUMA VIZINHANÇA DE UM EQUILÍBRIO . .	19
2.6	CONSIDERAÇÕES SOBRE ESTABILIDADE DE EQUILÍBRIOS	21
2.7	ESTABILIDADE LINEAR DO EQUILÍBRIO ζ_0	24
2.8	FORMA NORMAL DO HAMILTONIANO NO INTERVALO DE ESTABI- LIDADE LINEAR	25
2.9	FORMA NORMAL DO HAMILTONIANO NOS EXTREMOS DO INTER- VALO DE ESTABILIDADE LINEAR	27
3	PROBLEMA DE RESSONÂNCIA PARAMÉTRICA NO CASO SIM- PLIFICADO DO PROBLEMA RESTRITO ESPACIAL ELÍPTICO DE TRÊS CORPOS	38
3.1	O PROBLEMA RESTRITO ESPACIAL ELÍPTICO SIMPLIFICADO DE TRÊS CORPOS	38
3.1.1	Equação Diferencial da Dinâmica	39
3.1.2	O Hamiltoniano do Problema Restrito Elíptico Simplificado de Três Corpos	40
3.1.3	Equilíbrios do Sistema Hamiltoniano	42
3.1.4	Estabilidade Linear do Sistema Hamiltoniano Não Perturbado . . .	43
3.1.5	Algumas considerações sobre a estabilidade de sistemas Hamiltoni- anos lineares e o problema de ressonância paramétrica	46
3.1.6	Estabilidade Linear do Sistema Perturbado	51
3.1.7	Forma Normal dos Hamiltonianos Não Perturbados em (3.56) e (3.61) nos Extremos do Intervalo de Estabilidade Linear	54
3.2	FORMA MATRICIAL DA EQUAÇÃO HOMOLÓGICA	62

3.2.1	O Método de Deprit-Hori	63
3.2.2	Forma Matricial da Equação Homológica: Hamiltoniano Normalizado (3.72)	64
3.2.3	Forma Matricial da Equação Homológica: Hamiltoniano Normalizado (3.84)	70
3.3	O HAMILTONIANO AUTÔNOMO QUADRÁTICO	71
3.3.1	Cálculo do Hamiltoniano K	72
3.3.2	Cálculo do Hamiltoniano $\mathcal{K}$	77
3.4	CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE LINEAR EM TERMOS DO HAMILTONIANO K	96
3.5	CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE LINEAR EM TERMOS DO HAMILTONIANO $\mathcal{K}$	99
3.6	CONSTRUÇÃO DAS CURVAS FRONTEIRAS ENTRE AS REGIÕES DE ESTABILIDADE E INSTABILIDADE	102
3.6.1	Curvas no Plano Paramétrico (μ, ϵ)	102
3.6.2	Curvas no Plano Paramétrico $(\tilde{\mu}, \epsilon)$	103
4	CONCLUSÃO	107
	REFERÊNCIAS	108
	APÊNDICE A – CÁLCULO DA MATRIZ SEMELHANTE À MATRIZ M	110

1 INTRODUÇÃO

Investigaremos a estabilidade paramétrica nas vizinhanças dos pontos de equilíbrio em um sistema Hamiltoniano linear periódico com três graus de liberdade, que surge de um caso simplificado do problema restrito espacial de três corpos. Neste problema consideramos uma das primárias de massa M fixa no foco de uma trajetória elíptica e desprezamos a interação gravitacional de M sobre o corpo de massa infinitesimal. Faremos um estudo da estabilidade linear do sistema quando os parâmetros envolvidos variam. O objetivo é identificar os valores destes parâmetros que garantem a estabilidade do sistema e obter as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade - chamado de *problema de ressonância paramétrica*.

Proposto por Isaac Newton (1643-1727) em sua obra *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural*, publicada em 1687, o Problema de Três Corpos ainda não apresenta uma solução analítica explícita, apesar de ter emergido como um desafio fundamental que, posteriormente, com as tentativas de buscar soluções gerais, impulsionou o desenvolvimento teórico da Mecânica Celeste, da teoria das Equações Diferenciais e contribuiu com aplicações na Astronomia (MONTEIRO, 2011; CELLETTI; PEROZZI, 2007). Neste contexto, na busca por soluções particulares, mas com hipóteses que sejam razoáveis em um cenário de movimento no Sistema Solar, temos o chamado *Problema Restrito de Três Corpos*, proposto inicialmente por Leonhard Euler (1707-1783) e seguido das contribuições de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Henri Poincaré (1854-1912), entre outros. Esse problema simplifica o estudo da dinâmica ao considerar um corpo de massa m_2 desprezível em relação às massas M e m_1 dos outros dois corpos, chamados de primárias, de forma que os efeitos gravitacionais de m_2 sobre M e m_1 sejam desprezados. Outras informações acerca do contexto histórico sobre a evolução do problema de três corpos, e seus casos restritos, podem ser encontradas no artigo de Musielak e Quarles (2014).

A estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares periódicos tem sido objeto de estudo de diversos trabalhos. O problema é tratado por meio da normalização do sistema Hamiltoniano e do método Deprit-Hori, o qual permite a transformação do Hamiltoniano periódico em um Hamiltoniano autônomo - veja (CABRAL; DIAS, 2023; MEYER; OFFIN, 2017). O problema de ressonância paramétrica em sistemas Hamiltonianos lineares periódicos com dois graus de liberdade tem sido discutido em vários artigos, por exemplo em (ARAUJO; CABRAL, 2018; ARAUJO; CABRAL, 2021; CARVALHO; ARAUJO, 2023; NETO; CABRAL, 2020; VIDAL; VIDARTE,

2016) e (VALERIANO, 2016) que abordam modificações do problema restrito de três corpos no plano e em outros problemas mecânicos com dois graus de liberdade. No contexto de sistemas Hamiltonianos com três graus de liberdade, citamos os artigos (ZHONG et al., 2023), e (MARKEEV, 2021a; MARKEEV, 2021b; MARKEEV, 2023) que analisam a estabilidade não linear dos pontos de equilíbrio de Lagrange no problema restrito espacial elíptico de três corpos.

Neste trabalho, propomos um estudo analítico, até então não apresentado na literatura, sobre o problema de ressonância paramétrica para um sistema Hamiltoniano com três graus de liberdade. O objetivo é discutir a estabilidade paramétrica em um sistema Hamiltoniano linear periódico com três graus de liberdade, originado de uma versão simplificada do problema restrito de três corpos, onde o corpo menos massivo é um satélite, enquanto as primárias são um planeta e o Sol - este último fixado em um dos focos da órbita elíptica de excentricidade ϵ , descrita pelo planeta.

Iniciaremos nosso trabalho dissertando um pouco sobre o problema de dois corpos, m_1 e m_2 , conhecido como Problema de Kepler. Neste contexto, esses corpos orbitam em torno de seu centro de massa exclusivamente devido à atração gravitacional newtoniana.

Tomaremos, inicialmente, m_1 descrevendo um movimento circular no plano XY a uma velocidade angular constante w , enquanto m_2 , de massa infinitesimal, se move livremente no espaço (Figura 1). A ideia é compreender o comportamento dinâmico neste problema o qual é um sistema Hamiltoniano periódico com três graus de liberdade. Em um sistema rotatório com velocidade angular w a dinâmica é definida por um sistema autônomo. Assim, uma órbita circular do corpo m_2 com velocidade angular w é um ponto de equilíbrio, em um sistema de coordenadas rotatórias. Em seguida, determinaremos a forma normal do Hamiltoniano quadrático do sistema linearizado na vizinhança do ponto de equilíbrio do sistema Hamiltoniano (não perturbado) com três graus de liberdade.

Observemos que existem configurações composta pela Terra, Sol e um satélite em órbita baixa da Terra (entre 160 km e 1000 km acima da superfície terrestre, (ESA, 2020)). Uma destas é a órbita do telescópio espacial Hubble em uma órbita de 570 km da superfície terrestre, situado a uma distância de 6940 km do centro da Terra, a qual tem um raio aproximado de 6370 km.

Tomando os valores aproximados para a distância do satélite ao Sol de 150000000 km e a razão entre as massas do Sol e da Terra como 332946, podemos concluir através da lei da Gravitação Universal de Newton, que a intensidade da força gravitacional exercida pelo Sol sobre o satélite em órbita baixa varia entre 0,63 e 0,8 milésimos da força exercida pela

Terra. Portanto, embora a influência gravitacional do Sol sobre o satélite não seja desprezível, podemos, em uma primeira aproximação, considerar o movimento do satélite como se não houvesse a atração do Sol sobre ele. Isso justifica nossa escolha do problema restrito espacial dos três corpos mencionado anteriormente, no qual desconsideramos a atração gravitacional do Sol sobre o satélite.

Quando a órbita de m_1 é elíptica com raio vetor $R_0 = R_0(\epsilon, \nu)$, onde ϵ é a excentricidade e ν é a anomalia verdadeira, fazendo uma mudança de coordenadas pulsantes (CABRAL; DIAS, 2023) o movimento do satélite é descrito por um sistema Hamiltoniano com três graus de liberdade e dependente do “tempo” ν com período 2π . Este sistema contém o parâmetro μ , definido como a razão entre as massas do planeta e do Sol, e tem ϵ como parâmetro perturbador.

Após explicitar a forma normal do Hamiltoniano não perturbado na região de estabilidade linear numa vizinhança do equilíbrio, investigaremos a estabilidade do sistema linearizado perturbado, $\dot{\zeta} = A_0(\nu, \mu, \epsilon)\zeta$, para (μ, ϵ) próximo de $(\mu_0, 0)$, onde μ_0 é um valor no qual o sistema não perturbado $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$ é estável, mas não fortemente estável, isto é, um valor de ressonância paramétrica. Veremos que os valores de ressonância paramétrica μ_0 são dados pelos extremos do intervalo de estabilidade linear. Usando o método de Deprit-Hori e o Teorema de Krein-Gel’fands-Lidskii, concluiremos que existem sistemas estáveis e instáveis em qualquer vizinhança de $(\mu_0, 0)$ no plano dos parâmetros.

O desenvolvimento da descrição acima sobre como será abordada a problemática da nossa pesquisa segue ao longo de dois capítulos.

No primeiro capítulo, determinaremos o Hamiltoniano autônomo em coordenadas rotatórias para o problema infinitesimal de dois corpos, tomando um desses corpos em uma trajetória circular no plano, com velocidade angular constante w , enquanto o corpo de massa infinitesimal orbitará no espaço. Investigaremos as condições de estabilidade linear dos pontos de equilíbrio no sistema linearizado e, posteriormente, determinaremos as formas normais do Hamiltoniano tanto no interior da região de estabilidade linear quanto em seus extremos.

No segundo capítulo, abordaremos o Problema Restrito Elíptico Simplificado de Três Corpos, desconsiderando a interação entre o Sol e o satélite e assumindo o Sol fixo num dos focos da trajetória elíptica. Neste contexto, calcularemos o Hamiltoniano quadrático 2π -periódico no tempo ν , investigaremos as condições de estabilidade linear nos equilíbrios do sistema Hamiltoniano não perturbado e determinaremos os valores de ressonância paramétrica. Em seguida, utilizaremos a forma normal do Hamiltoniano não perturbado nos extremos da região

de estabilidade linear para aplicar o método de Deprit-Hori, com o objetivo de determinar o Hamiltoniano autônomo. Por conseguinte, a partir das condições de estabilidade linear para os novos Hamiltonianos, determinaremos os coeficientes que permitirão expressar os gráficos das curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade no plano paramétrico.

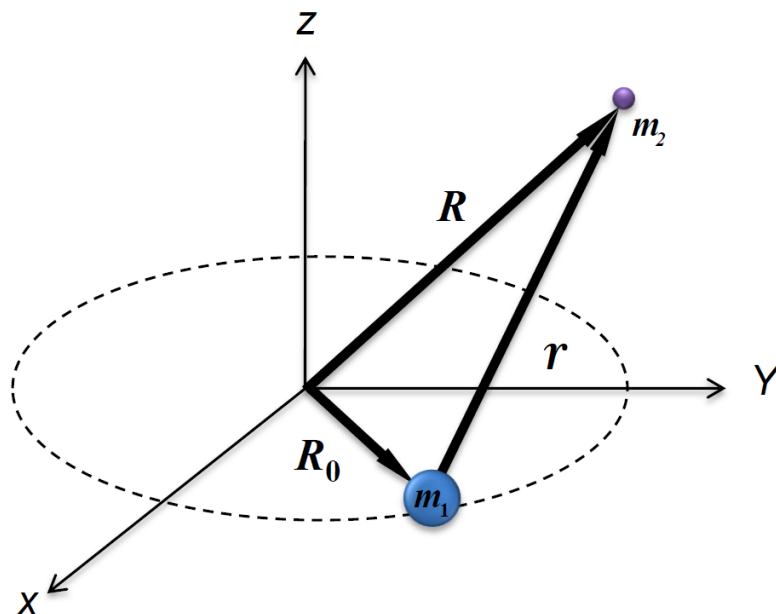
2 ESTUDO DA DINÂMICA DE UM PROBLEMA RESTRITO ESPACIAL DE DOIS CORPOS

No presente capítulo, apresentamos uma formulação Hamiltoniana autônoma para o problema restrito de dois corpos, considerando que um deles descreve um movimento circular uniforme. Estudamos os equilíbrios do sistema e a estabilidade do sistema linearizado em torno desses equilíbrios. Por fim, realizamos uma análise da estabilidade do sistema ao longo do intervalo de estabilidade linear, utilizando a forma normal do Hamiltoniano quadrático.

2.1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA DINÂMICA

Considere uma partícula de massa m_1 com vetor posição $\mathbf{R}_0$ em relação à origem do sistema de coordenadas $OXYZ$. Ela desloca-se em um círculo de raio a com uma velocidade angular constante w , no plano horizontal OXY , em torno da origem O do sistema $OXYZ$. Uma segunda partícula de massa infinitesimal m_2 , com vetor posição $\mathbf{R}$, move-se no espaço e é afetada exclusivamente pela interação gravitacional com a massa m_1 , Figura 1.

Figura 1 – Ilustração do problema no contexto de uma órbita circular



Fonte: O autor (2025).

Vamos estudar a dinâmica da partícula de massa m_2 no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$.

Como m_2 está sujeita apenas à interação gravitacional devido a partícula m_1 , segue-se que

a equação diferencial que rege o seu movimento é

$$m_2 \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|^3}(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0), \quad (2.1)$$

onde $G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ é a constante de gravitação universal de Newton e cada ponto sobre a função $\mathbf{R}$ representa uma derivada em relação ao tempo t .

Seja $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_0$, onde $\mathbf{r}$ é o vetor da direção que vai de m_1 para m_2 . Definindo a constante positiva $\kappa = Gm_1$, podemos reescrever a equação (2.1) como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} - \ddot{\mathbf{R}}_0(t), \quad (2.2)$$

onde

$$\mathbf{R}_0(t) = a(\cos wt, \sin wt, 0) \quad (2.3)$$

define a posição de m_1 em cada instante de tempo t .

A expressão (2.2) é a equação diferencial que rege o movimento da massa m_2 .

2.2 O HAMILTONIANO DO SISTEMA

Fazendo $\mathbf{x} = \mathbf{r}$ e $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{r}}$, a equação diferencial de segunda ordem (2.2) pode ser reformulada como o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y}, \quad \dot{\mathbf{y}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

com $V = V(\mathbf{x}, t)$ dada por

$$V = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{x}\|} + \langle \ddot{\mathbf{R}}_0(t), \mathbf{x} \rangle. \quad (2.5)$$

Portanto, a dinâmica da massa m_2 é descrita pelo seguinte sistema de equações canônicas

$$\dot{\mathbf{x}} = H_{\mathbf{y}} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{y}} = -H_{\mathbf{x}}, \quad (2.6)$$

onde a função Hamiltoniana com três graus de liberdade, que é periódica no tempo com período $\tau = \frac{2\pi}{w}$, tem a forma

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2 - \frac{\kappa}{\|\mathbf{x}\|} + \langle \ddot{\mathbf{R}}_0(t), \mathbf{x} \rangle. \quad (2.7)$$

2.3 O HAMILTONIANO EM COORDENADAS ROTATÓRIAS

Nesta seção, realizaremos uma mudança de coordenadas que nos permitirá encontrar um função Hamiltoniana autônoma para este novo sistema de coordenadas.

Consideremos a seguir a matriz de rotação em torno do eixo OZ

$$\Omega = \Omega(t) = \begin{bmatrix} \cos wt & -\sin wt & 0 \\ \sin wt & \cos wt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

A mudança de coordenadas definida por

$$\mathbf{x} = \Omega \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{y} = \Omega \boldsymbol{\eta} \quad (2.9)$$

é uma transformação simplética. De fato, sua matriz Jacobiana é dada por $M = \begin{bmatrix} \Omega & O \\ O & \Omega \end{bmatrix}$.

Vemos que $\Omega^T O = O$, $O^T \Omega = O$ são matrizes simétricas e $\Omega^T \Omega - O^T O = I$, onde O é a matriz identicamente nula. Portanto, essas são as condições necessárias e suficientes para que M seja uma matriz simplética, ver Proposition 2.6 em Cabral e Dias (2023).

Além disso, para a função $\mathcal{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t) = \langle \mathbf{x}, \Omega \boldsymbol{\eta} \rangle$, temos

$$\mathbf{y} = \mathcal{W}_x(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t) = \Omega \boldsymbol{\eta} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\xi} = \mathcal{W}_\eta(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t) = \Omega^{-1} \mathbf{x}, \quad (2.10)$$

logo, $\mathcal{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t)$ é a função geradora da transformação simplética (2.9).

Sua derivada em relação ao tempo é dada por

$$\mathcal{W}_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t) = \langle \mathbf{x}, \dot{\Omega} \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \Omega^{-1} \mathbf{x}, \Omega^{-1} \dot{\Omega} \boldsymbol{\eta} \rangle \quad (2.11)$$

e como $\Omega^{-1} \dot{\Omega} = w \Sigma$, onde

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

temos

$$\mathcal{W}_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t) = w \langle \boldsymbol{\xi}, \Sigma \boldsymbol{\eta} \rangle. \quad (2.13)$$

Por (2.3), temos que $\ddot{\mathbf{R}}_0(t) = -aw^2\Omega\mathbf{e}_1$, onde $\mathbf{e}_1$ é o vetor unitário do eixo OX . Segue da primeira equação (2.9) que

$$\langle \ddot{\mathbf{R}}_0(t), \mathbf{x} \rangle = -aw^2 \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_1 \rangle. \quad (2.14)$$

O novo Hamiltoniano do sistema, ver Proposição 2.13 de Cabral e Dias (2023), é dado por

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t) = H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + \mathcal{W}_t(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}, t).$$

Portanto, por (2.7), (2.13) e (2.14), obtemos

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \frac{\kappa}{\|\boldsymbol{\xi}\|} - aw^2 \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{e}_1 \rangle + w \langle \boldsymbol{\xi}, \Sigma \boldsymbol{\eta} \rangle, \quad (2.15)$$

e vemos que nas novas coordenadas $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$ o Hamiltoniano de três graus de liberdade é autônomo, isto é, não depende do tempo t .

2.4 EQUILÍBRIOS DO SISTEMA NAS COORDENADAS ROTATÓRIAS

Neste sistema de coordenadas rotatórias, a partir da função Hamiltoniana autônoma dada em (2.15), a dinâmica do sistema é descrita pelas equações canônicas

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathcal{H}_{\boldsymbol{\eta}}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = -\mathcal{H}_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (2.16)$$

Os equilíbrios do sistema (2.16) são dados pelas equações $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\xi}} = 0$ e $\mathcal{H}_{\boldsymbol{\eta}} = 0$. No entanto, temos que

$$\mathcal{H}_{\boldsymbol{\xi}} = \kappa \frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^3} - aw^2 \mathbf{e}_1 + w \Sigma \boldsymbol{\eta}, \quad \mathcal{H}_{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} - w \Sigma \boldsymbol{\xi}. \quad (2.17)$$

Assim, em um equilíbrio, o vetor $\boldsymbol{\eta}$ é dado por $\boldsymbol{\eta} = w \Sigma \boldsymbol{\xi}$. E, por ser $\Sigma^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, as

coordenadas do vetor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ satisfazem o sistema de equações escalares

$$\left(\frac{\kappa}{\|\boldsymbol{\xi}\|^3} - w^2 \right) \xi_1 - aw^2 = 0, \quad \left(\frac{\kappa}{\|\boldsymbol{\xi}\|^3} - w^2 \right) \xi_2 = 0, \quad \frac{\kappa}{\|\boldsymbol{\xi}\|^3} \xi_3 = 0. \quad (2.18)$$

Pela terceira equação em (2.18), temos $\xi_3 = 0$. Da primeira equação em (2.18), concluímos que $\frac{\kappa}{\|\boldsymbol{\xi}\|^3} \neq w^2$, pois $a \neq 0$. Segue então, pela segunda equação da mesma expressão, que $\xi_2 = 0$. Portanto, nos pontos de equilíbrio, temos que $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, 0, 0)$. Consequentemente, pela primeira equação em (2.9), a órbita circular $\mathbf{r} = \xi_1(\cos wt, \sin wt, 0)$ do corpo de massa

m_2 , com velocidade angular w , constitui um equilíbrio do sistema. Além disso, pela primeira equação em (2.18), ξ_1 satisfaz à equação

$$\left(\frac{\kappa}{|\xi_1|^3} - w^2\right)\xi_1 = aw^2,$$

ou seja,

$$w^2\xi_1^3 + aw^2\xi_1^2 - \kappa = 0, \quad \text{se } \xi_1 > 0 \quad \text{e} \quad w^2\xi_1^3 + aw^2\xi_1^2 + \kappa = 0, \quad \text{se } \xi_1 < 0.$$

A análise do comportamento da função cúbica de ξ_1 nestas equações acima, mostra que existe uma única raiz $\xi^* = (\xi_1^*, 0, 0)$, onde $\xi_1^* > 0$, e uma única raiz $\xi^{**} = (\xi_1^{**}, 0, 0)$, com $\xi_1^{**} < 0$.

Tomando $\eta^* = w\Sigma\xi^*$ e $\eta^{**} = w\Sigma\xi^{**}$, concluímos que existem dois pontos de equilíbrio

$$\zeta^* = (\xi^*, \eta^*) \quad \text{e} \quad \zeta^{**} = (\xi^{**}, \eta^{**}) \quad (2.19)$$

do sistema nas coordenadas rotatórias.

2.5 SISTEMA LINEARIZADO NUMA VIZINHANÇA DE UM EQUILÍBRIO

Para estudar a estabilidade em torno de um ponto de equilíbrio, introduzimos nesta seção o conceito de sistemas linearizados em uma vizinhança desse equilíbrio. Com esse processo de linearização, analisaremos a estabilidade linear local de um ponto de equilíbrio, aplicando métodos como a aplicação de formas normais, que exploraremos na seção seguinte.

Seja $\zeta_0 = \zeta^*$ ou $\zeta_0 = \zeta^{**}$. Fazendo $z = \zeta - \zeta_0$ o sistema linearizado em torno do equilíbrio $\zeta_0 = (\xi_1^0, 0, 0; 0, w\xi_1^0, 0)$ é

$$\dot{z} = Az, \quad (2.20)$$

onde $A = JG_0$ com J a matriz simplética padrão e G_0 a matriz Hessiana de $\mathcal{H}$ no equilíbrio ζ_0 . A matriz A é Hamiltoniana, pois G_0 é uma matriz simétrica (CABRAL; DIAS, 2023).

O Hamiltoniano quadrático do sistema linearizado em torno do equilíbrio, é dado por

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2}z^T G_0 z. \quad (2.21)$$

Para o Hamiltoniano autônomo em (2.15), obtemos que

$$\mathcal{H}_{\xi\xi} = \frac{\kappa}{\|\xi\|^5}(\|\xi\|^2 I - 3\xi\xi^T), \quad \mathcal{H}_{\xi\eta} = w\Sigma, \quad \mathcal{H}_{\eta\xi} = -w\Sigma, \quad \mathcal{H}_{\eta\eta} = I, \quad (2.22)$$

onde estamos tomando o vetor ξ como a matrix 3×1 , $\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix}^T$, e portanto ξ^T é a matriz 1×3 , $\begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{bmatrix}$.

Assim, a matriz Hessiana de $\mathcal{H}$, denotada por $G = D^2\mathcal{H}$, é a seguinte matriz simétrica

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{\|\xi\|^5}(\|\xi\|^2 I - 3\xi\xi^T) & w\Sigma \\ -w\Sigma & I \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Ademais, como $J = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}$, a matriz Hamiltoniana $A = JG$ do sistema linearizado é

$$A = \begin{bmatrix} -w\Sigma & I \\ -\frac{\kappa}{\|\xi\|^5}(\|\xi\|^2 I - 3\xi\xi^T) & -w\Sigma \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

O polinômio característico da matriz A é dado por

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda I + w\Sigma & -I \\ \frac{\kappa}{\|\xi\|^5}(\|\xi\|^2 I - 3\xi\xi^T) & \lambda I + w\Sigma \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

e é facilmente calculado pela regra $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det[DA - DBD^{-1}C]$, ver Siegel e Moser (1971), página 123. Com isso, obtemos

$$p(\lambda) = \det \left[(\lambda I + w\Sigma)(\lambda I + w\Sigma) + \frac{\kappa}{\|\xi\|^5}(\|\xi\|^2 I - 3\xi\xi^T) \right], \quad (2.26)$$

ou seja, tomando a matriz $A = A_0$ no ponto de equilíbrio ζ_0 , o polinômio característico é

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda^2 - w^2 - 2\frac{\kappa}{(\xi_1^0)^3} & -2\lambda w & 0 \\ 2\lambda w & \lambda^2 - w^2 + \frac{\kappa}{(\xi_1^0)^3} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \frac{\kappa}{(\xi_1^0)^3} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta), \quad (2.27)$$

onde definimos

$$\alpha = 2w^2 - \omega_1^2 \quad \text{e} \quad \beta = (w^2 + 2\omega_1^2)(w^2 - \omega_1^2), \quad \text{com} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{(\xi_1^0)^3}}. \quad (2.28)$$

Claramente, o polinômio $p(\lambda)$ possui duas raízes imaginárias puras distintas, a saber, $\pm i\omega_1$. As outras quatro raízes são as raízes da equação biquadrada

$$\lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta = 0.$$

Como

$$\lambda^2 = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2},$$

vemos que as quatro raízes restantes são números imaginários puros e distintos se, e somente se,

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad \text{e} \quad \Delta = \alpha^2 - 4\beta > 0. \quad (2.29)$$

Estas condições implicam que a equação diferencial linear (2.20) é estável, isto é, que a origem é um equilíbrio estável da equação (2.20).

2.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE ESTABILIDADE DE EQUILÍBRIOS

Nesta seção vamos fazer algumas considerações sobre estabilidade de equilíbrios de uma equação diferencial ordinária; detalhes podem ser vistos nas referências citadas no texto.

O ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um equilíbrio da equação diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.30)$$

se $f(x_0) = 0$. Isto significa que $x(t) \equiv x_0$ é uma solução da equação.

Denotemos por $\phi(t, \xi)$ a solução de (2.30) com condição inicial ξ , isto é,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi(t, \xi)) \quad \text{e} \quad \phi(0, \xi) = \xi.$$

Definição 1. Dizemos que x_0 é um equilíbrio estável de (2.30) quando, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\xi \in B_\delta(x_0)$ a solução $\phi(t, \xi)$ está definida para todo $t \geq 0$ e $\phi(t, \xi) \in B_\epsilon(x_0)$, para todo $t \geq 0$.

Dizemos que o equilíbrio x_0 é instável se ele não é estável, ou seja, existe um $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe um ponto $\xi \in B_\delta(x_0)$ tal que a solução $\phi(t, \xi)$ ou não está definida para todo $t \geq 0$ ou para algum $t_0 > 0$, tem-se $\phi(t_0, \xi) \notin B_\epsilon(x_0)$.

Se f é de classe C^2 , então numa vizinhança U de x_0 podemos escrever

$$f(x) = Ax + O(\|x\|^2), \quad \text{onde} \quad A = Df(x_0). \quad (2.31)$$

A equação diferencial linear

$$\dot{x} = Ax,$$

é chamada a *linearização* da equação (2.30) numa vizinhança de x_0 .

Dizemos que o equilíbrio x_0 de (2.30) é *linearmente estável* se a equação linear $\dot{x} = Ax$ é estável, o que significa que a origem $x = 0$ é um equilíbrio estável para ela.

O seguinte teorema é devido a Lyapunov e sua demonstração pode ser vista em (HIRSCH; SMALE, 1974).

Teorema 2.

(1) Se o equilíbrio x_0 da equação definida por (2.31) é estável, então para todos os autovalores λ de A tem-se $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

(2) Se para algum autovalor λ de A , tem-se $\operatorname{Re} \lambda > 0$, então o equilíbrio x_0 é instável.

O próximo teorema sobre estabilidade é formulado em termos de integrais primeiras. Uma *integral primeira* da equação (2.30) é uma função não-constante $\Psi(x)$ que permanece constante ao longo de cada solução de (2.30). Por exemplo, o Hamiltoniano $H(z)$ de um sistema autônomo é uma integral primeira, pois

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \langle H_x, \dot{x} \rangle + \langle H_y, \dot{y} \rangle = 0.$$

A demonstração do seguinte teorema pode ser vista em Cabral e Dias (2023).

Teorema 3. (Dirichlet) Seja x_0 um equilíbrio da equação (2.30). Se numa vizinhança de x_0 existe uma integral primeira $\Psi(x)$ definida positiva, ou definida negativa, então o equilíbrio é estável.

Vejamos a implicação destes teoremas para equilíbrios de sistemas Hamiltonianos autônomos.

Se o Hamiltoniano H é de classe C^3 numa vizinhança de um ponto ζ_0 , então fazendo $z = \zeta - \zeta_0$, podemos escrever

$$H(\zeta) = H(\zeta_0) + \langle \nabla H(\zeta_0), z \rangle + \frac{1}{2}z^T G z + O(|z|^3), \quad \text{onde } G = D^2 H(\zeta_0). \quad (2.32)$$

Se ζ_0 é um equilíbrio do sistema, então $\nabla H(\zeta_0) = 0$ e o sistema linearizado é

$$\dot{z} = Az, \quad \text{onde } A = JG.$$

O Hamiltoniano quadrático deste sistema linear é

$$H_0(z) = \frac{1}{2}z^T G z. \quad (2.33)$$

Mencionemos, agora, o seguinte resultado, Proposição 2.23 em Cabral e Dias (2023)

Proposição 4. *O polinômio característico de uma matriz Hamiltoniana é par.*

Por esta proposição se λ é um autovalor de $A = JG$, então $-\lambda$ também é, de modo que se algum autovalor tem parte real não-nula, existe algum autovalor de $A = JG$ com parte real positiva. Pelo item (2) do Teorema 2 o equilíbrio é instável. Assim, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 5. *Se um equilíbrio de um sistema Hamiltoniano autônomo é estável, então todos os autovalores do sistema linearizado são imaginários puros.*

Se ζ_0 é um equilíbrio do sistema e a matriz G em (2.32) é definida positiva, ou definida negativa, então numa vizinhança de ζ_0 suficientemente pequena a função $H(\zeta) - H(\zeta_0)$ também é. Como esta é uma integral primeira da equação diferencial, o Teorema de Dirichlet garante que o equilíbrio é estável. Portanto, para sistemas Hamiltonianos autônomos a questão da estabilidade de um equilíbrio só se coloca realmente quando a parte quadrática $z^T G z$ for indefinida.

Se todos os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ da matriz Hamiltoniana $A = JG$ são distintos podemos simplificar o Hamiltoniano quadrático (2.33) por meio de uma transformação simplética linear. Para o caso de $\lambda_j = i\omega_j$ ser imaginário puro, para $j = 1, \dots, n$, o processo é dado explicitamente pela seguinte proposição, Proposition 3.4 em Cabral e Dias (2023), na qual usamos o produto simplético em $\mathbf{R}^{2n}$ definido por $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} = \mathbf{r}^T J \mathbf{s}$.

Proposição 6. *Sejam $\pm i\omega_j$, $j = 1, \dots, n$ os autovalores da matriz Hamiltoniana real A com os números positivos $\omega_1, \dots, \omega_n$ todos distintos. Seja $\mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$ um autovetor de $i\omega_j$. Tomemos $\delta_j = \sin \angle\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$ e $\kappa_j = 1/\sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}$ e consideremos a matriz P formada por vetores colunas*

$$P = \text{Col}[-\kappa_1 \mathbf{s}_1, \dots, -\kappa_n \mathbf{s}_n, \delta_1 \kappa_1 \mathbf{r}_1, \dots, \delta_n \kappa_n \mathbf{r}_n].$$

Então, P é uma matriz simplética e a transformação linear $\mathbf{z} = P\zeta$ leva o Hamiltoniano (2.33) no Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_0(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j (\xi_j^2 + \eta_j^2), \quad (2.34)$$

onde $\zeta = (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$.

As seguintes expressões que aparecem em (2.34)

$$I_1 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2), \dots, I_n = \frac{1}{2}(\xi_n^2 + \eta_n^2)$$

são chamadas *variáveis ação*. Os números $\omega_1, \dots, \omega_n$ são as frequências dos osciladores harmônicos definidos por $\frac{1}{2}\omega_j(\xi_j^2 + \eta_j^2)$. Uma relação de *ressonância de ordem k* é uma combinação linear trivial

$$m_1\omega_1 + \dots + m_n\omega_n = 0,$$

com coeficientes inteiros tais que $|m_1| + \dots + |m_n| = k$.

Para $n = 2$, se não existem ressonâncias até ordem 4 então, ver seção sobre Forma Normal de Birkhoff em Cabral e Dias (2023), para um Hamiltoniano de classe pelo menos 5 a expressão (2.34) nas variáveis ação pode ser escrita até termos de quarto grau, ou de segundo grau nas ações,

$$\mathcal{H}(\zeta) = \delta_1\omega_1 I_1 + \delta_2\omega_2 I_2 + H_4(I_1, I_2) + Resto, \quad (2.35)$$

onde $H_4(I_1, I_2) = AI_1^2 + 2BI_1 I_2 + CI_2^2$.

Se $\delta_1\delta_2 > 0$ já comentamos acima que, pelo Teorema de Dirichlet, o equilíbrio é estável. No caso indefinido, $\delta_1\delta_2 < 0$, o resultado mais importante sobre estabilidade de equilíbrios em sistemas Hamiltonianos é o seguinte teorema, ver Capítulo 6 de Cabral e Dias (2023):

Teorema 7. (Arnold) *Se $H_4(\omega_2, \omega_1) \neq 0$, então o equilíbrio é estável.*

Para sistemas Hamiltonianos autônomos com mais de dois graus de liberdade ou mesmo com um grau de liberdade porém dependente do tempo, a questão da estabilidade de um equilíbrio é um problema não-trivial. Nestes casos limitamo-nos a estudar a estabilidade linear do equilíbrio. Esta é a nossa situação pois nosso problema tem três graus de liberdade.

2.7 ESTABILIDADE LINEAR DO EQUILÍBRIO ζ_0

Vimos na seção 2.5 que as condições (2.29) garantem a estabilidade do sistema linearizado. Os coeficientes α e β são dados em (2.28) e $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ é dado pela expressão

$$\Delta = (9\omega_1^2 - 8w^2)\omega_1^2. \quad (2.36)$$

Assim, todos os autovalores são imaginários puros e distintos se, e somente se,

$$\frac{8}{9}w^2 < \omega_1^2 < w^2. \quad (2.37)$$

Consequentemente, o ponto de equilíbrio ζ_0 é linearmente estável quando

$$\frac{\kappa}{w^2} < (\xi_1^0)^3 < \frac{9}{8} \frac{\kappa}{w^2}. \quad (2.38)$$

Para um sistema Hamiltoniano com n graus de liberdade e com frequências distintas, é importante obter a forma normal da parte quadrática para ver se os sinais $\delta_1, \dots, \delta_n$ são todos iguais, pois então teremos a garantia, pelo teorema de Dirichlet, de que o equilíbrio é estável. Também, no estudo da estabilidade de um sistema linear próximo do sistema linearizado (2.20) é importante obter a forma normal da parte quadrática para valores especiais das frequências

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{(\xi_1^0)^3}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}}. \quad (2.39)$$

Este é o objetivo das duas próximas seções.

2.8 FORMA NORMAL DO HAMILTONIANO NO INTERVALO DE ESTABILIDADE LINEAR

Pela equação (2.24) a matriz $A = JG$ no equilíbrio $\zeta_0 = \zeta^*$ é dada por

$$A^* = \begin{bmatrix} -w\Sigma & I \\ U & -w\Sigma \end{bmatrix}, \quad \text{onde } U = \begin{bmatrix} 2\omega_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Portanto, os autovetores $v = (x, y)$ de A^* correspondentes a um autovalor λ são dados por

$$Ux = (\lambda I + w\Sigma)y \quad \text{e} \quad y = (\lambda I + w\Sigma)x. \quad (2.41)$$

Assim, o vetor x está no núcleo da matriz $M_\lambda = (\lambda I + w\Sigma)^2 - U$, isto é,

$$M_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda^2 - w^2 - 2\omega_1^2 & -2w\lambda & 0 \\ 2w\lambda & \lambda^2 - w^2 + \omega_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 + \omega_1^2 \end{bmatrix}.$$

No intervalo de estabilidade linear, ou seja, sob as condições (2.37), os autovalores são os números imaginários puros $\lambda_j = \pm i\omega_j$, com $j = 1, 2, 3$, onde $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ são dados em (2.39). Deste modo, como eles são distintos, a Proposição 6 mostra que a forma normal da parte quadrática $\mathcal{H}_0$ do Hamiltoniano é dada por

$$\mathcal{H}_0(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \delta_j \omega_j (\xi_j^2 + \eta_j^2), \quad (2.42)$$

onde $\zeta = (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$.

Para $\lambda \neq \pm i\omega_1$, segue que $\lambda^2 + \omega_1^2 \neq 0$ e o determinante da matriz 2×2 do canto superior esquerdo de M_λ é nulo, pois, neste caso, os λ serão as raízes do polinômio $\lambda^4 + \alpha\lambda^2 + \beta$, onde os valores de α e β são dados em (2.28) sob as condições (2.29). Logo, o vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ pode ser dado como

$$x_1 = 2w\lambda, \quad x_2 = \lambda^2 - w^2 - 2\omega_1^2, \quad x_3 = 0,$$

e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ é determinado pela segunda equação de (2.41), a saber

$$y_1 = w(\lambda^2 + w^2 + 2\omega_1^2), \quad y_2 = \lambda(\lambda^2 + w^2 - 2\omega_1^2), \quad y_3 = 0.$$

Portanto, para $\lambda_j = i\omega_j$, com $j = 2, 3$, teremos o autovetor associado $\mathbf{v}_{\lambda_j} = \mathbf{r}_j + i\mathbf{s}_j$ para

$$\mathbf{r}_j = (0, -(w^2 + 2\omega_1^2 + \omega_j^2), 0; w(w^2 + 2\omega_1^2 - \omega_j^2), 0, 0) \quad (2.43)$$

$$\mathbf{s}_j = (2w\omega_j, 0, 0; 0, \omega_j(w^2 - 2\omega_1^2 - \omega_j^2), 0). \quad (2.44)$$

Assim, para o produto simplético $\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\} = \mathbf{r}_j^T J \mathbf{s}_j$, encontramos

$$\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\} = \omega_j(\omega_j^4 + 4\omega_j^2\omega_1^2 + 4\omega_1^4 - 3w^4 + 2w^2\omega_j^2 - 4w^2\omega_1^2), \quad j = 2, 3. \quad (2.45)$$

Para achar $\delta_j = \text{sinal}\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$, vamos estudar o sinal da expressão $P_j = \omega_j^{-1}\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}$, ou seja, de

$$P_j = \omega_j^4 + 4\omega_j^2\omega_1^2 + 4\omega_1^4 - 3w^4 + 2w^2\omega_j^2 - 4w^2\omega_1^2, \quad j = 2, 3.$$

Como $\omega_j^4 = \alpha\omega_j^2 - \beta$, usando o fato de que $\alpha = 2w^2 - \omega_1^2$ e $\beta = (w^2 + 2\omega_1^2)(w^2 - \omega_1^2)$, encontramos

$$\omega_j^4 = 2w^2\omega_j^2 - \omega_1^2\omega_j^2 - w^4 - w^2\omega_1^2 + 2\omega_1^4,$$

e substituindo esta expressão de ω_j^4 em P_j , obtemos

$$P_j = (4w^2 + 3\omega_1^2)\omega_j^2 + (6\omega_1^4 - 5w^2\omega_1^2 - 4w^4). \quad (2.46)$$

Substituindo ω_2^2 dado em (2.39) na equação (2.46) e levando em conta que $\alpha = 2w^2 - \omega_1^2$, temos

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{2}(4w^2 + 3\omega_1^2)(2w^2 - \omega_1^2) + (6\omega_1^4 - 5w^2\omega_1^2 - 4w^4) - \frac{1}{2}(4w^2 + 3\omega_1^2)\sqrt{\Delta}, \\ &= \left(\frac{9}{2}\omega_1^4 - 4w^2\omega_1^2\right) - \frac{1}{2}(4w^2 + 3\omega_1^2)\sqrt{\Delta}, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{2}(4w^2 + 3\omega_1^2)\sqrt{\Delta}, \quad (2.47)$$

onde usamos que $\Delta = (9\omega_1^2 - 8w^2)\omega_1^2$, veja (2.36). Por conseguinte, obtemos a expressão

$$P_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}(\sqrt{\Delta} - (4w^2 + 3\omega_1^2)). \quad (2.48)$$

No entanto, a partir de (2.37), sabemos que na região de estabilidade linear vale

$$\frac{8}{9}w^2 < \omega_1^2 < w^2.$$

Com isso, $\omega_1 < w$, logo $\sqrt{\Delta} = \sqrt{9\omega_1^2 - 8w^2}\omega_1 < w\omega_1$ e $4w^2 + 3\omega_1^2 > 7\omega_1^2$. Portanto,

$$\sqrt{\Delta} - (4w^2 + 3\omega_1^2) < (w - 7\omega_1)\omega_1 < \left(\frac{3}{\sqrt{8}} - 7\right)\omega_1^2 < 0.$$

Isto prova que o sinal de P_2 em (2.48) é igual a -1 , isto é, $\delta_2 = -1$.

Por (2.39), temos que $\omega_3^2 = \frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$. Então, substituindo esta expressão de ω_3^2 em (2.46), temos

$$P_3 = \frac{1}{2}(4w^2 + 3\omega_1^2)(2w^2 - \omega_1^2) + (6\omega_1^4 - 5w^2\omega_1^2 - 4w^4) + \frac{1}{2}(4w^2 + 3\omega_1^2)\sqrt{\Delta},$$

e, por conseguinte, em lugar da expressão (2.46), teremos

$$P_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}(\sqrt{\Delta} + (4w^2 + 3\omega_1^2)) > 0, \quad (2.49)$$

logo, $\delta_3 = +1$.

Como $\delta_2 = -1$ e $\delta_3 = +1$ então, independentemente de $\delta_1 = \text{sinal}\{r_1, s_1\}$ a parte quadrática do Hamiltoniano no equilíbrio (2.42) é indefinida. Portanto não podemos usar o Teorema de Dirichlet para decidir sobre a estabilidade não linear deste equilíbrio.

Como o sistema Hamiltoniano (2.15) tem três graus de liberdade também não podemos usar o Teorema de Arnold para decidir sobre a estabilidade não linear do sistema.

2.9 FORMA NORMAL DO HAMILTONIANO NOS EXTREMOS DO INTERVALO DE ESTABILIDADE LINEAR

Pela equação (2.24), a matriz $A = JG$ no equilíbrio $\zeta_0 = \zeta^*$ será

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & w & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Conforme visto anteriormente, sob as condições (2.37) os autovalores de A^* são números imaginários puros e distintos. No interior da região (2.37), temos $\omega_2 < \omega_3$. No extremo esquerdo, como $\frac{8}{9}w^2 = \omega_1^2$, implica que $\Delta = 0$ e, por (2.39), $\omega_2 = \omega_3$ é uma raiz dupla. Neste caso, o polinômio característico é

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)^2,$$

com

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\kappa}{\xi_1^{*3}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{w^2 - \frac{\omega_1^2}{2}} \quad \text{e} \quad 9\omega_1^2 - 8w^2 = 0. \quad (2.51)$$

Na fronteira direita de (2.37), $\omega_1^2 = w^2$, temos $\beta = 0$, donde, $\lambda^4 + \alpha\lambda^2 = 0$, logo, $\lambda_2^2 = 0$ e $\lambda_3^2 = -\alpha$. Como $\alpha = 2w^2 - \omega_1^2 = \omega_1^2$, segue que $\omega_3 = \omega_1$. O polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega_1^2)^2$$

tem três raízes duplas, a saber, a raiz nula e as raízes $\pm i\omega_1$.

Vamos considerar o caso do extremo esquerdo, quando ocorre a raiz dupla $i\omega_2$. Neste caso, temos a decomposição de $\mathbb{C}^6$ em soma direta de dois espaços A^* -invariantes,

$$\mathbb{C}^6 = E(\omega_1) \oplus E(\omega_2),$$

onde $E(\omega_1) = \eta(i\omega_1) \oplus \eta(-i\omega_1)$ e $E(\omega_2) = \eta^\dagger(i\omega_2) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_2)$ são subespaços simpléticos bidimensional e quadridimensional de $\mathbb{C}^6$, respectivamente.

Para encontrar a forma normal de A^* vamos construir bases simpléticas convenientes para $E(\omega_1)$ e $E(\omega_2)$.

Primeiramente, consideremos o caso mais simples, $A^* : E(\omega_1) \rightarrow E(\omega_1)$, em que $E(\omega_1)$ é bidimensional.

Uma base complexa de $E(\omega_1)$ é formada por autovetores da matriz real A^* , a saber: $\mathbf{w} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$ e $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{r} - i\mathbf{s}$ correspondentes aos autovalores $i\omega_1$ e $-i\omega_1$. Assim, $E(\omega_1)$ é invariante sob conjugação, e os vetores $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ formam uma base real de $E(\omega_1)$, porém não é simplética. Vamos construir uma base simplética real a partir dela.

Como o subespaço $E(\omega_1)$ tem dimensão dois, o produto simplético $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ não é nulo. Sejam $\delta = \text{sinal}\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}$ e $\kappa = 1/\sqrt{|\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\}|}$. Consideremos agora os vetores

$$\mathbf{u}_1^* = -\kappa\mathbf{s}, \quad \mathbf{v}_1^* = \delta\kappa\mathbf{r}. \quad (2.52)$$

Então, $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^*\} = \delta\kappa^2\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} = 1$, logo, $\mathbf{u}_1^*, \mathbf{v}_1^*$ forma uma base simplética real de $E(\omega_1)$.

Como $A^*w = i\omega_1 w$, temos $A^*r = -\omega_1 s$ e $A^*s = \omega_1 r$, então,

$$A^*u_1^* = -\delta\omega_1 v_1^* \quad \text{e} \quad A^*v_1^* = \delta\omega_1 u_1^*, \quad (2.53)$$

onde $\delta = \text{sign}\{r, s\}$. Portanto, matriz de A^* na base simplética real u_1^*, v_1^* é

$$[A_1^*]_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 0 & \delta\omega_1 \\ -\delta\omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

O caso $A^* : E(\omega_2) \rightarrow E(\omega_2)$ é mais complicado, pois $i\omega_2$ é um autovalor múltiplo e $E(\omega_2) = \eta^\dagger(i\omega_2) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_2)$ é um subespaço simplético de dimensão quatro. Para achar a forma normal de A^* restrita a $E(\omega_2)$, usaremos o processo descrito na demonstração apresentada nas páginas 170-171 de Cabral e Dias (2023) do seguinte Teorema:

Teorema 5.12 *Seja $u \in \eta^\dagger(i\beta)$ um vetor de índice de nilpotência $s+1$ tal que $\{B^s u, \bar{u}\} \neq 0$. Então, $Z(u, B) \oplus Z(\bar{u}, \bar{B})$ é um subespaço simplético de $E(\beta)$ e uma base simplética explícita pode ser construída para ele (CABRAL; DIAS, 2023).*

Neste teorema $Z(u, B)$ é o subespaço cíclico $[u, Bu, \dots, B^s u]$.

No processo devemos considerar os operadores lineares

$$\mathcal{B}_2 : \eta^\dagger(i\omega_2) \rightarrow \eta^\dagger(i\omega_2), \quad \bar{\mathcal{B}}_2 : \eta^\dagger(-i\omega_2) \rightarrow \eta^\dagger(-i\omega_2), \quad (2.55)$$

onde

$$\mathcal{B}_2 = A^* - i\omega_2 I \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{B}}_2 = A^* + i\omega_2 I. \quad (2.56)$$

Observe que $\eta^\dagger(i\omega_2) = \text{Ker } \mathcal{B}_2^2$, uma vez que a dimensão de $\eta^\dagger(i\omega_2)$ é igual a 2 (multiplicidade dos autovalores $\lambda_2 = \pm i\omega_2$). As matrizes $\mathcal{B}_2$ e $\mathcal{B}_2^2$ são dadas por

$$\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} -i\omega_2 & w & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & -i\omega_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_2 & 0 & 0 & 1 \\ 2\omega_1^2 & 0 & 0 & -i\omega_2 & w & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -w & -i\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & -i\omega_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{B}_2^2 = \begin{bmatrix} -w^2 + 2\omega_1^2 - \omega_2^2 & -2iw\omega_2 & 0 & -2i\omega_2 & 2w & 0 \\ 2iw\omega_2 & -w^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 & 0 & -2w & -2i\omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 & 0 & 0 & -2i\omega_2 \\ -4i\omega_1^2\omega_2 & w\omega_1^2 & 0 & -w^2 + 2\omega_1^2 - \omega_2^2 & -2iw\omega_2 & 0 \\ -w\omega_1^2 & 2i\omega_1^2\omega_2 & 0 & 2iw\omega_2 & -w^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2i\omega_1^2\omega_2 & 0 & 0 & -\omega_1^2 - \omega_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Para $\mathbf{z} = (x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \in \eta^\dagger(i\omega_2)$, isto é, $\mathcal{B}_2^2 \mathbf{z} = 0$ temos um sistema linear homogêneo de seis equações e a estrutura da matriz $\mathcal{B}_2^2$ mostra que a terceira e a sexta equações determinam um sistema homogêneo para x_3, y_3 cujo determinante dos coeficientes é $(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 \neq 0$, logo, $x_3 = 0$ e $y_3 = 0$.

Usando as relações (2.51), calculamos

$$-w^2 + 2\omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{1}{4}\omega_1^2 \quad \text{e} \quad -w^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 = -\frac{11}{4}\omega_1^2$$

e vemos que as restantes quatro equações homogêneas para x_1, x_2, y_1, y_2 definem dois sistemas não-homogêneos para as variáveis x_2, y_2 , a saber,

$$\begin{bmatrix} 8iw\omega_2 & -8w \\ 11\omega_1^2 & 8i\omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} -4w\omega_1^2 & 8iw\omega_2 \\ -8i\omega_1^2\omega_2 & 11\omega_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l'_1 \\ l'_2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

em que

$$\begin{aligned} l_1 &= \omega_1^2 x_1 - 8i\omega_2 y_1, & l'_1 &= -16i\omega_1^2 \omega_2 x_1 + \omega_1^2 y_1, \\ l_2 &= 8iw\omega_2 x_1 - 8w y_1, & l'_2 &= -4w\omega_1^2 x_1 + 8iw\omega_2 y_1. \end{aligned}$$

Os dois sistemas (2.58) têm as mesmas soluções dadas por

$$x_2 = \frac{1}{3w}(5i\omega_2 x_1 - 2y_1), \quad y_2 = -\frac{1}{6w}(7\omega_1^2 x_1 - 2i\omega_2 y_1). \quad (2.59)$$

Assim, os vetores $\mathbf{z} \in \eta^\dagger(i\omega_2)$ são da forma $\mathbf{z} = (x_1, x_2, 0; y_1, y_2, 0)$ com x_1 e y_1 arbitrários e x_2 e y_2 dados por (2.59).

Para x_1 e y_1 reais, x_2 e y_2 são números complexos e temos $J\bar{\mathbf{z}} = (y_1, \bar{y}_2, 0; -x_1, -\bar{x}_2, 0)$. Sendo

$$\mathcal{B}_2 \mathbf{z} = (-i\omega_2 x_1 + w x_2 + y_1, -w x_1 - i\omega_2 x_2 + y_2, 0; 2\omega_1^2 x_1 - i\omega_2 y_1 + w y_2, -\omega_1^2 x_2 - w y_1 - i\omega_2 y_2, 0),$$

obtemos para o produto simplético de $\mathcal{B}_2 z$ por $\bar{z}$ a seguinte expressão

$$\{\mathcal{B}_2 z, \bar{z}\} = \frac{5}{27}(5\omega_1^2 x_1^2 + 2y_1^2).$$

Tomando $u = z$, com $x_1 = 0$ e $y_1 = 1$, obtemos um vetor u com índice de nilpotência 2 e tal que $\{\mathcal{B}_2 u, \bar{u}\} = \frac{10}{27} \neq 0$. Pelo teorema acima (Teorema 5.12), $Z(u, \mathcal{B}_2) \oplus Z(\bar{u}, \bar{\mathcal{B}}_2)$ é um subespaço simplético de $E(\omega_2)$. Como estes subespaços têm a mesma dimensão 4, então eles são iguais. Podemos agora construir a base simplética para $E(\omega_2) = Z(u, \mathcal{B}_2) \oplus Z(\bar{u}, \bar{\mathcal{B}}_2)$.

Para obter a forma normal de A^* restrita a $E(\omega_2)$, vamos calcular uma base simplética real deste subespaço.

Como $s = 1$, então conforme apresentado na prova do Teorema 5.12 (CABRAL; DIAS, 2023) quando s é ímpar, existe um vetor $e_2 \in \eta^\dagger(i\omega_2)$ que satisfaz as condições

$$\{\mathcal{B}_2 e_2, \bar{e}_2\} = 1 \quad \text{e} \quad \{e_2, \bar{e}_2\} = 0. \quad (2.60)$$

Com base na observação no final da demonstração do Teorema 5.12, no caso $s = 1$, teremos que os vetores

$$u_2 = e_2, \quad u_3 = \mathcal{B}_2 e_2, \quad v_2 = -\bar{\mathcal{B}}_2 \bar{e}_2 \quad \text{e} \quad v_3 = \bar{e}_2 \quad (2.61)$$

formam uma base simplética complexa de $Z(u, \mathcal{B}_2) \oplus Z(\bar{u}, \bar{\mathcal{B}}_2)$ e, consequentemente,

$$\mathcal{B}_2 u_2 = u_3, \quad \mathcal{B}_2 u_3 = 0, \quad \bar{\mathcal{B}}_2 v_2 = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\mathcal{B}}_2 v_3 = -v_2. \quad (2.62)$$

A partir de (2.56), segue que A^* restrita a base simplética de $E(\omega_2)$ acima é

$$A^* u_2 = u_3 + i\omega_2 u_2, \quad A^* u_3 = i\omega_2 u_3, \quad A^* v_2 = -i\omega_2 v_2, \quad A^* v_3 = -v_2 - i\omega_2 v_3 \quad (2.63)$$

logo, a matriz de A^* restrita ao espaço $E(\omega_2)$, nesta base, é a matriz Hamiltoniana complexa

$$[A_2^*]_{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} i\omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & i\omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega_2 \end{bmatrix}.$$

Para obter a matriz Hamiltoniana real, devemos encontrar uma base simplética real seguindo o processo descrito pelas equações (5.63) e (5.64) nas páginas 177-178 em Cabral e Dias (2023), considerando s ímpar. Neste caso, os vetores u_j^* e v_j^* são definidos com base na paridade de j . Realizando os cálculos com essas considerações, obtemos a seguinte base simplética de $E(\omega_2)$

$$u_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2 + v_3), \quad u_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}i}(u_3 + v_2), \quad v_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(-u_3 + v_2), \quad v_3^* = \frac{1}{\sqrt{2}i}(u_2 - v_3). \quad (2.64)$$

Usando as expressões (2.61), temos

$$\overline{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{v}_3, \quad \overline{\mathbf{u}}_3 = -\mathbf{v}_2, \quad \overline{\mathbf{v}}_2 = -\mathbf{u}_3, \quad \overline{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{u}_2, \quad (2.65)$$

e das equações (2.64) e (2.65), vemos que

$$\mathbf{u}_2^* = \sqrt{2}\operatorname{Re} \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_2^* = \sqrt{2}\operatorname{Re} \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{u}_3^* = \sqrt{2}\operatorname{Im} \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}_3^* = -\sqrt{2}\operatorname{Im} \mathbf{v}_3, \quad (2.66)$$

logo, $\mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*$ é uma base simplética real de $E(\omega_2)$. De (2.63) e (2.64), decorre que

$$A^*\mathbf{u}_2^* = -\mathbf{v}_2^* - \omega_2\mathbf{v}_3^*, \quad A^*\mathbf{u}_3^* = -\omega_2\mathbf{v}_2^*, \quad A^*\mathbf{v}_2^* = \omega_2\mathbf{u}_3^* \quad \text{e} \quad A^*\mathbf{v}_3^* = \omega_2\mathbf{u}_2^* + \mathbf{u}_3^*. \quad (2.67)$$

Por conseguinte, a matriz da restrição de A^* ao subespaço $E(\omega_2)$ na base real é

$$[A_2^*]_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & \omega_2 & 1 \\ -1 & -\omega_2 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Uma vez que $i\omega_1 \pm i\omega_2 \neq 0$, o Lema 4.36 de Cabral e Dias (2023) nos diz que os subespaços $E(\omega_1)$ e $E(\omega_2)$ são simplecticamente ortogonais, isto é, $\{E(\omega_1), E(\omega_2)\} = 0$. Então, com base na Proposição 4.10 de Cabral e Dias (2023), $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*\}$ forma uma base simplética real de $\mathbb{C}^6 = E(\omega_1) \oplus E(\omega_2)$.

Vemos por (2.53) e (2.67) que a matriz de A^* nesta base simplética real do espaço $\mathbb{C}^6 = E(\omega_1) \oplus E(\omega_2)$ é a matriz Hamiltoniana

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 1 \\ -\delta\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Por fim, o Hamiltoniano normalizado $\mathcal{H}_0$ nas coordenadas ξ_i, η_i e na base simplética real $\mathbf{u}_i^*, \mathbf{v}_i^*$, com $i = 1, 2, 3$, é escrito como

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}^T \mathcal{S}^* \boldsymbol{\zeta}, \quad (2.70)$$

onde $\zeta = (\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3)$ e $\mathcal{S}^* = -J\mathcal{A}^*$ é a matriz simétrica

$$\mathcal{S}^* = \begin{bmatrix} \delta\omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pela equação (2.70) obtemos o Hamiltoniano normalizado, no caso do extremo esquerdo do intervalo de estabilidade linear quando ocorre o par de raízes duplas, $\pm i\omega_2$, como

$$\mathcal{H}_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\delta\omega_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_3^2) + \omega_2(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3), \quad (2.71)$$

para $\delta = \text{sign}\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} = \pm 1$. Tomando o autovetor $\mathbf{w} = (0, 0, 1; 0, 0, i\omega_1)$ da matriz A^* em (2.50) correspondente ao autovalor $i\omega_1$, obtemos os seguintes vetores $\mathbf{r} = (0, 0, 1; 0, 0, 0)$ e $\mathbf{s} = (0, 0, 0; 0, 0, \omega_1)$. Logo, $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} = \omega_1$, portanto $\delta = +1$.

Vamos agora determinar a forma normal de A^* ao considerarmos o extremo direito da região dada em (2.37). Neste caso, $w = \omega_1$ e temos os autovalores duplos $0, i\omega_1$ e $-i\omega_1$. Aqui temos a decomposição em soma direta de dois espaços A^* -invariantes

$$\mathbb{C}^6 = \eta^\dagger(0) \oplus E(\omega_1),$$

onde $\eta^\dagger(0)$ e $E(\omega_1) = \eta^\dagger(i\omega_1) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_1)$ são subespaços simpléticos bidimensional e quadridimensional de $\mathbb{C}^6$, respectivamente.

Consideremos primeiro o operador $A^* : \eta^\dagger(0) \rightarrow \eta^\dagger(0)$, onde $\eta^\dagger(0) = \text{Ker}(A^*)^2$ porque $\eta^\dagger(0)$ tem dimensão 2.

Agora na matriz A^* em (2.50) temos $w = \omega_1$ e seu quadrado é a matriz

$$(A^*)^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 2\omega_1 & 0 \\ 0 & -2\omega_1^2 & 0 & -2\omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_1^3 & 0 & \omega_1^2 & 0 & 0 \\ -\omega_1^3 & 0 & 0 & 0 & -2\omega_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_1^2 \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Para $\mathbf{z} = (x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \in \eta^\dagger(0)$, ou seja, $(A^*)^2\mathbf{z} = 0$, temos um sistema linear homogêneo com seis equações onde a terceira e a sexta equações determinam um sistema

homogêneo para x_3, y_3 cuja solução é obviamente $x_3 = 0$ e $y_3 = 0$. A primeira e a quinta equações são equivalentes e satisfeitas quando $y_2 = -\frac{\omega_1}{2}x_1$. A segunda e a quarta equações são equivalentes e satisfeitas quando $y_1 = -\omega_1x_2$. Com isso,

$$\mathbf{z} = (x_1, x_2, 0; -\omega_1x_2, -\frac{1}{2}\omega_1x_1, 0) \quad \text{e} \quad A^*\mathbf{z} = \left(0, -\frac{3\omega_1}{2}x_1, 0; \frac{3\omega_1^2}{2}x_1, 0, 0\right). \quad (2.73)$$

Os vetores $\mathbf{z}$ e $A^*\mathbf{z}$ são linearmente independentes se $x_1 \neq 0$, e são reais se x_1 e x_2 também forem reais. Em particular, tomando $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$, os vetores $\mathbf{z}$ e $A^*\mathbf{z}$ formam uma base real para $\eta^\dagger(0)$.

Como $\{A^*\mathbf{z}, \mathbf{z}\} = -\frac{3\omega_1^2}{4}x_1^2$, obtemos $\delta_1 = \text{sign}\{A^*\mathbf{z}, \mathbf{z}\} = -1$. Por sua vez, defina $\kappa_1 = 1/\sqrt{|\{A^*\mathbf{z}, \mathbf{z}\}|}$ e considere os vetores

$$\mathbf{u}_1 = \kappa_1 A^*\mathbf{z}, \quad \mathbf{v}_1 = \delta_1 \kappa_1 \mathbf{z}. \quad (2.74)$$

Então, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\} = \delta_1 \kappa_1^2 \{A^*\mathbf{z}, \mathbf{z}\} = 1$. Logo, $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ formam uma base simplética real de $\eta^\dagger(0)$ e, além disso, temos

$$A^*\mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{e} \quad A^*\mathbf{v}_1 = \delta_1 \mathbf{u}_1. \quad (2.75)$$

Portanto, a matriz de A^* restrita a $\eta^\dagger(0)$ na base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\}$ é

$$[A_1^*] = \begin{bmatrix} 0 & \delta_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

Agora, consideremos o caso do operador $A^* : E(\omega_1) \rightarrow E(\omega_1)$.

Como no processo feito acima para os autovalores duplos $\pm i\omega_2$, consideramos os operadores lineares

$$\mathcal{B}_1 : \eta^\dagger(i\omega_1) \rightarrow \eta^\dagger(i\omega_1), \quad \overline{\mathcal{B}}_1 : \eta^\dagger(-i\omega_1) \rightarrow \eta^\dagger(-i\omega_1), \quad (2.77)$$

onde

$$\mathcal{B}_1 = A^* - i\omega_1 I, \quad \overline{\mathcal{B}}_1 = A^* + i\omega_1 I. \quad (2.78)$$

Temos $\eta^\dagger(i\omega_1) = \text{Ker} \mathcal{B}_1^2$, pois a dimensão de $\eta^\dagger(i\omega_1)$ é igual a 2 - multiplicidade do autovalor $i\omega_1$. Como $w = \omega_1$ as matrizes $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_1^2$ são

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} -i\omega_1 & \omega_1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & -i\omega_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_1 & 0 & 0 & 1 \\ 2\omega_1^2 & 0 & 0 & -i\omega_1 & \omega_1 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -\omega_1 & -i\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & -i\omega_1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathcal{B}_1^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2i\omega_1^2 & 0 & -2i\omega_1 & 2\omega_1 & 0 \\ 2i\omega_1^2 & -3\omega_1^2 & 0 & -2\omega_1 & -2i\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\omega_1^2 & 0 & 0 & -2i\omega_1 \\ -4i\omega_1^3 & \omega_1^3 & 0 & 0 & -2i\omega_1^2 & 0 \\ -\omega_1^3 & 2i\omega_1^3 & 0 & 2i\omega_1^2 & -3\omega_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2i\omega_1^3 & 0 & 0 & -2\omega_1^2 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Dado o vetor $z = (x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \in \eta^\dagger(i\omega_1) = \text{Ker } \mathcal{B}_1^2$, a matriz (2.79) define um sistema linear nas coordenadas de z no qual a terceira e a sexta equações tem claramente a solução $y_3 = i\omega_1 x_3$.

O sistema linear para as quatro variáveis restantes x_1, x_2, y_1, y_2 , após simplificações, é o seguinte:

$$\begin{aligned} i\omega_1 x_2 + iy_1 - y_2 &= 0 \\ 2i\omega_1 x_1 - 3\omega_1 x_2 - 2y_1 - 2iy_2 &= 0 \\ 4i\omega_1 x_1 - \omega_1 x_2 + 2iy_2 &= 0 \\ \omega_1 x_1 - 2i\omega_1 x_2 - 2iy_1 + 3y_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuja matriz dos coeficientes tem determinante nulo. Resolvendo o sistema para x_2, y_1 e y_2 em função de x_1 , obtemos

$$x_2 = 2ix_1, \quad y_1 = -i\omega_1 x_1, \quad y_2 = -\omega_1 x_1.$$

Por conseguinte, o subespaço $\eta^\dagger(i\omega_1) \subset \mathbb{C}^6$ é da forma

$$\eta^\dagger(i\omega_1) = \left\{ z \in \mathbb{C}^6; \quad z = (x_1, 2ix_1, x_3; -i\omega_1 x_1, -\omega_1 x_1, i\omega_1 x_3), \quad x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}. \quad (2.80)$$

Para todo $z \in \eta^\dagger(i\omega_1)$, temos $\mathcal{B}_1 z = 0$, logo, $\mathcal{B}_1 = 0$ e $\bar{\mathcal{B}}_1 = 0$. Consequentemente,

$$A^*|_{\eta^\dagger(i\omega_1)} = i\omega_1 I \quad \text{e} \quad A^*|_{\eta^\dagger(-i\omega_1)} = -i\omega_1 I.$$

Assim, todo vetor de $\eta^\dagger(i\omega_1)$ é um autovetor de $A^*|_{\eta^\dagger(i\omega_1)}$. Para os pares de números reais $x_1 = 1, x_3 = 0$ e $x_1 = 0, x_3 = 1$, obtemos os vetores

$$w_2 = (1, 2i, 0; -i\omega_1, -\omega_1, 0), \quad w_3 = (0, 0, 1; 0, 0, i\omega_1), \quad \bar{w}_2, \quad \bar{w}_3 \quad (2.81)$$

que formam uma base de $E(\omega_1) = \eta^\dagger(i\omega_1) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_1)$. Dessa forma, as partes reais e imaginárias destes vetores

$$r_2 = (1, 0, 0; 0, -\omega_1, 0), \quad r_3 = (0, 0, 1; 0, 0, 0), \quad s_2 = (0, 2, 0; -\omega_1, 0, 0), \quad s_3 = (0, 0, 0; 0, 0, \omega_1)$$

formam uma base real do espaço simplético $E(\omega_1)$. Porém, ela não é uma base simplética. Note que $\{\mathbf{r}_2, \mathbf{s}_2\} = \{\mathbf{r}_3, \mathbf{s}_3\} = \omega_1$, com isso $\delta_j = \text{sign} \{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\} = +1$ para $j = 2, 3$. Fazendo $\kappa_j = 1/\sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}$, para $j = 2, 3$, então tomando os vetores

$$\mathbf{u}_2 = -\kappa_2 \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{u}_3 = -\kappa_3 \mathbf{s}_3, \quad \mathbf{v}_2 = \delta_2 \kappa_2 \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \delta_3 \kappa_3 \mathbf{r}_3 \quad (2.82)$$

obtemos uma base simplética real do espaço $E(\omega_1)$. Como A^* é uma matriz real e $A^*(r_j + is_j) = i\omega_1(r_j + is_j)$, obtemos

$$A^* \mathbf{r}_j = -\omega_1 \mathbf{s}_j \quad \text{e} \quad A^* \mathbf{s}_j = \omega_1 \mathbf{r}_j$$

e, por conseguinte, temos

$$A^* \mathbf{u}_2 = -\delta_2 \omega_1 \mathbf{v}_2, \quad A^* \mathbf{u}_3 = -\delta_3 \omega_1 \mathbf{v}_3, \quad A^* \mathbf{v}_2 = \delta_2 \omega_1 \mathbf{u}_2, \quad A^* \mathbf{v}_3 = \delta_3 \omega_1 \mathbf{u}_3. \quad (2.83)$$

Portanto, a matriz A^* na base simplética real $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ será dada por

$$[A^*]_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta_2 \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_1 \\ -\delta_2 \omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_3 \omega_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com a base simplética $\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1$ de $\eta^\dagger(0)$ dada em (2.74) e a base simplética (2.82) de $E(\omega_1)$, obtemos a seguinte base simplética real de $\mathbb{C}^6 = \eta^\dagger(0) \oplus E(\omega_1)$,

$$\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_3, \quad (2.84)$$

uma vez que $\eta^\dagger(0)$ é simplecticamente ortogonal a $E(\omega_1)$.

Por (2.75) e (2.83) vemos que a matriz de A^* na base (2.84) é a seguinte

$$\mathcal{A}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_2 \omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_3 \omega_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 \omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 \omega_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

A matriz simétrica que define o novo Hamiltoniano é $\mathcal{S}^* = -J\mathcal{A}^*$ e, portanto, o Hamiltoniano normalizado $\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \mathcal{S}^* \boldsymbol{\zeta}$, no caso do extremo direito, é dado por

$$\mathcal{H}_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2} \delta_1 \eta_1^2 + \frac{1}{2} \delta_2 \omega_1 (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2} \delta_3 \omega_1 (\xi_3^2 + \eta_3^2), \quad (2.86)$$

recordando que $\delta_1 = -1$ e $\delta_2 = \delta_3 = +1$.

Por fim, notamos que os Hamiltonianos quadráticos no equilíbrio, dados por (2.71) e (2.86), são indefinidos. Assim, com base no Teorema de Dirichlet, não é possível decidir sobre a estabilidade não linear desse equilíbrio nos extremos do intervalo de estabilidade linear.

Além disso, nesse caso, como os referidos sistemas Hamiltonianos têm três graus de liberdade, o Teorema de Arnold também não pode ser aplicado para avaliar a estabilidade não linear do sistema.

3 PROBLEMA DE RESSONÂNCIA PARAMÉTRICA NO CASO SIMPLIFICADO DO PROBLEMA RESTRITO ESPACIAL ELÍPTICO DE TRÊS CORPOS

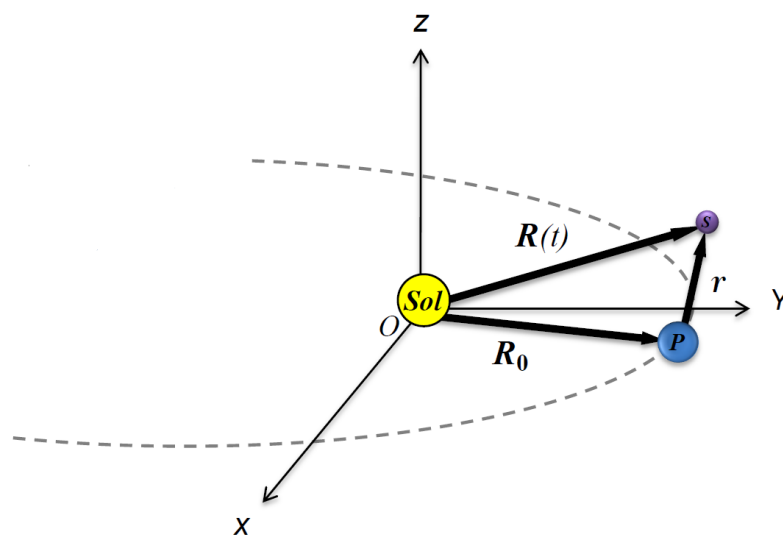
Neste capítulo, abordaremos o problema restrito espacial elíptico de três corpos, composto pelo sistema planeta-satélite-Sol, no qual o centro atrator percorre uma trajetória elíptica com excentricidade ϵ , em vez da trajetória circular inicialmente considerada.

Ao calcular a razão entre as forças gravitacionais do Sol e da Terra sobre um satélite localizado a aproximadamente 630 km da superfície terrestre (como, por exemplo, o Telescópio Hubble que orbita a 570 km de altitude), obtemos que a força gravitacional do Sol sobre o satélite equivale a 0,72 milésimos da força exercida pela Terra. Portanto, em uma primeira aproximação, consideraremos nula a força gravitacional do Sol sobre o satélite neste estudo.

3.1 O PROBLEMA RESTRITO ESPACIAL ELÍPTICO SIMPLIFICADO DE TRÊS CORPOS

Suponha um planeta P de massa m_1 percorre uma órbita elíptica, de excentricidade ϵ e velocidade angular variável dada em termos da anomalia verdadeira ν , devido à força gravitacional do Sol de massa M e fixo no foco O da elipse. Considere também um satélite S de massa infinitesimal m_2 em uma determinada posição espacial, de forma a considerarmos apenas à interação gravitacional do planeta P atuando sobre ele, Figura 2.

Figura 2 – Órbita elíptica do planeta P no sistema planeta-satélite-Sol



Fonte: O autor (2025).

3.1.1 Equação Diferencial da Dinâmica

Escolha um sistema de coordenadas espacial $OXYZ$ com origem no foco O da trajetória elíptica. Com isso, e conforme enunciado acima, o planeta P satisfaz a equação do problema de Kepler definido pelo Sol,

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = -\frac{\kappa}{\|\mathbf{R}_0\|^3} \mathbf{R}_0, \quad \text{com } \kappa = GM, \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{R}_0$ é o vetor posição de P em relação à origem do sistema $OXYZ$ em cada instante de tempo t .

A distância relativa entre o planeta P e o satélite S , será denotada por

$$\|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0\|,$$

onde $\mathbf{R}$ é o vetor posição do satélite S , enquanto a distância do planeta ao foco atrator é

$$r_0 = \|\mathbf{R}_0\|, \quad \text{com } \mathbf{R}_0 = r_0(\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2),$$

sendo $\mathbf{e}_i$, para $i = 1, 2, 3$, os vetores unitários nas direções dos eixos coordenados OX , OY e OZ , respectivamente. Diante disso, a derivada segunda de $\mathbf{R}_0$ em relação ao tempo t , será

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = (\ddot{r}_0 - r_0 \dot{\nu}^2)(\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2) + (2\dot{r}_0 \dot{\nu} + r_0 \ddot{\nu})(-\sin \nu \mathbf{e}_1 + \cos \nu \mathbf{e}_2).$$

Em coordenadas polares

$$\hat{\mathbf{R}}_0 = (\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2) \quad \text{e} \quad \hat{\boldsymbol{\nu}} = (-\sin \nu \mathbf{e}_1 + \cos \nu \mathbf{e}_2),$$

são os vetores unitários nas direções radial e angular de P .

No entanto, pela (3.1), a componente na direção angular da aceleração é nula, ou seja,

$$2\dot{r}_0 \dot{\nu} + r_0 \ddot{\nu} = 0 \Leftrightarrow r_0^2 \dot{\nu} = c,$$

onde c é uma constante definida como a intensidade do momento angular por unidade de massa do planeta P em sua trajetória elíptica em torno do Sol (CABRAL; DIAS, 2023). Portanto,

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = (\ddot{r}_0 - r_0 \dot{\nu}^2)(\cos \nu \mathbf{e}_1 + \sin \nu \mathbf{e}_2). \quad (3.2)$$

Por outro lado, como a única força atuando sobre o satélite S é a interação gravitacional devido ao planeta P , então, pela segunda lei de Newton e a lei da Gravitação Universal, o satélite S satisfaz a seguinte equação diferencial do movimento

$$\ddot{\mathbf{R}} = -Gm_1 \frac{\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0}{\|\mathbf{R}(t) - \mathbf{R}_0\|^3}. \quad (3.3)$$

Com base na descrição problema, ver Figura 2, podemos considerar o vetor posição do satélite S em relação ao sistema de coordenadas $OXYZ$ como $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_0(t) + \mathbf{r}(t)$. Assim, pela equação (3.3), segue que

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} - \ddot{\mathbf{R}}_0, \quad \text{onde } \mu = Gm_1. \quad (3.4)$$

Por conseguinte, substituindo $\ddot{\mathbf{R}}_0$ dado em (3.2), obtemos a equação diferencial que rege o movimento do satélite em relação ao planeta como

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^3}\mathbf{r} - (\ddot{r}_0 - r_0\dot{\nu}^2)\hat{\mathbf{R}}_0. \quad (3.5)$$

3.1.2 O Hamiltoniano do Problema Restrito Elíptico Simplificado de Três Corpos

Nesta subseção, estudaremos a dinâmica do problema em um sistema de coordenadas girante em torno do eixo OZ , utilizando um ângulo dado pela anomalia verdadeira ν . Com essa abordagem, a equação de movimento (3.5) será reformulada em termos da nova variável “tempo” ν . Em seguida, realizaremos uma outra mudança de variável na qual o Hamiltoniano do sistema se tornará 2π -periódico em relação ao tempo ν . A aplicação deste processo é conhecido como *mudança de coordenadas pulsantes* (CABRAL; DIAS, 2023).

Note que, como $\mathbf{R}_0$ é solução do problema de Kepler (3.1), então $r_0 = \|\mathbf{R}_0\|$ pode ser dado através da equação polar da cônica de excentricidade ϵ , a saber

$$r_0 = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \nu}, \quad (3.6)$$

onde $p = a(1 - \epsilon^2)$ é chamado de parâmetro da órbita, com $\epsilon \in [0, 1)$ e sendo a o semieixo maior da órbita elíptica (CABRAL; DIAS, 2023).

Para o problema em coordenadas giratórias em torno do eixo OZ , tomamos $\mathbf{r} = \Omega \mathbf{X}$, onde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ e Ω é a matriz de rotação por um ângulo ν em torno do eixo OZ , isto é,

$$\Omega(\nu) = \begin{bmatrix} \cos \nu & -\sin \nu & 0 \\ \sin \nu & \cos \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Sua derivada em relação ao tempo t , é dada por

$$\dot{\Omega} = \dot{\nu}\Omega\Sigma, \quad \text{com } \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos a seguinte equação diferencial

$$\ddot{\mathbf{r}} = \Omega(\ddot{\mathbf{X}} + 2\dot{\nu}\Sigma\dot{\mathbf{X}} + \ddot{\nu}\Sigma\mathbf{X} + \dot{\nu}^2\Sigma^2\mathbf{X}). \quad (3.8)$$

Por sua vez, a mudança de coordenadas pulsantes ocorre quando, em seguida, realizamos a transformação de escala $\mathbf{X} = r_0\boldsymbol{\xi}$, com $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$. Assim, $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ são expressos como

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{r}_0\boldsymbol{\xi} + r_0\dot{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{X}} = \ddot{r}_0\boldsymbol{\xi} + 2\dot{r}_0\dot{\boldsymbol{\xi}} + r_0\ddot{\boldsymbol{\xi}}.$$

Tomando como o novo parâmetro de “tempo” a anomalia verdadeira ν , obtemos as relações $\frac{d}{dt} = \dot{\nu}\frac{d}{d\nu}$ e $\frac{d^2}{dt^2} = \ddot{\nu}\frac{d}{d\nu} + \dot{\nu}^2\frac{d^2}{d\nu^2}$. Denotando a derivada em relação ao tempo ν por $' \equiv \frac{d}{d\nu}$ e aplicando as relações acima em $\boldsymbol{\xi}$, temos

$$\dot{\mathbf{X}} = \dot{r}_0\boldsymbol{\xi} + r_0\dot{\nu}\boldsymbol{\xi}' \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{X}} = \ddot{r}_0\boldsymbol{\xi} + r_0\dot{\nu}^2\boldsymbol{\xi}'', \quad (3.9)$$

onde, novamente, levamos em consideração que $2\dot{r}_0\dot{\nu} + r_0\ddot{\nu} = 0$ - consequência da conservação do momento angular no problema de Kepler. Por conseguinte, usando as equações de (3.9), a nova expressão para $\ddot{\mathbf{r}}$ em (3.8) será

$$\ddot{\mathbf{r}} = r_0\dot{\nu}^2\Omega\left(\boldsymbol{\xi}'' + 2\Sigma\boldsymbol{\xi}' + \Sigma^2\boldsymbol{\xi} + \frac{\ddot{r}_0}{r_0\dot{\nu}^2}\boldsymbol{\xi}\right). \quad (3.10)$$

Observe que, a partir da expressão de r_0 fornecida na equação (3.6), temos

$$\frac{\ddot{r}_0}{r_0\dot{\nu}^2} = \frac{r_0}{p}\epsilon\cos\nu = \frac{\epsilon\cos\nu}{1 + \epsilon\cos\nu}. \quad (3.11)$$

Com base nas consideração acima, a equação diferencial da dinâmica do sistema (3.5) pode ser reescrita na seguinte forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu\frac{\Omega}{r_0^2}\frac{\boldsymbol{\xi}}{\|\boldsymbol{\xi}\|^3} - (\ddot{r}_0 - r_0\dot{\nu}^2)\Omega\mathbf{e}_1. \quad (3.12)$$

No entanto, usando que $r_0^2\dot{\nu} = c$ e a expressão (3.6), teremos as equações

$$\dot{r}_0 = \frac{c\epsilon\sin\nu}{p}, \quad \ddot{r}_0 = \frac{c\dot{\nu}\epsilon\cos\nu}{p} = \frac{c^2}{r_0^2}\left(\frac{\epsilon\cos\nu}{p}\right) \quad \text{e} \quad r_0\dot{\nu}^2 = \frac{c^2}{r_0^3}. \quad (3.13)$$

Com isso,

$$(\ddot{r}_0 - r_0\dot{\nu}^2) = \frac{c^2}{r_0^2}\left(\frac{\epsilon\cos\nu}{p} - \frac{1}{r_0}\right) = -\frac{\kappa}{r_0^2}, \quad (3.14)$$

onde pelo problema de Kepler $p = c^2/\kappa$. Substituindo a expressão (3.14) na equação (3.12), chegamos a

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{\Omega}{r_0^2}\nabla_{\boldsymbol{\xi}}\left(\frac{\mu}{\|\boldsymbol{\xi}\|}\right) + \frac{\kappa}{r_0^2}\Omega\mathbf{e}_1. \quad (3.15)$$

A partir de (3.10), (3.11) e (3.15), teremos a equação diferencial

$$\xi'' + 2\Sigma\xi' + \Sigma^2\xi + \frac{\epsilon \cos \nu}{1 + \epsilon \cos \nu} \xi = \frac{1}{\kappa(1 + \epsilon \cos \nu)} \left[\nabla_{\xi} \left(\frac{\mu}{\|\xi\|} \right) + \kappa e_1 \right]. \quad (3.16)$$

Considerando $\eta = \xi' + \Sigma\xi$, podemos reescrever a equação diferencial de segunda ordem em (3.16) como o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\xi' = \eta - \Sigma\xi, \quad \eta' = -\Sigma\eta - \nabla_{\xi}U, \quad (3.17)$$

onde

$$U = U(\xi, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{1 + \epsilon \cos \nu} \left(\frac{\epsilon \cos \nu}{2} \|\xi\|^2 - \frac{\mu}{\kappa} \frac{1}{\|\xi\|} - \langle e_1, \xi \rangle \right). \quad (3.18)$$

Consequentemente, a função Hamiltoniana $\mathcal{H}$ tal que $\xi' = \mathcal{H}_{\eta}$ e $\eta' = -\mathcal{H}_{\xi}$, tem a forma

$$\mathcal{H}(\xi, \eta, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{1}{2} \|\eta\|^2 + \langle \xi, \Sigma\eta \rangle + U(\xi, \nu, \mu, \epsilon), \quad (3.19)$$

e define um sistema Hamiltoniano 2π -periódico no tempo ν .

Por fim, destacamos que o pequeno número positivo $\frac{\mu}{\kappa} = \frac{m_1}{M}$ (razão da massa do planeta P pela massa do Sol) será tomada como o parâmetro do sistema e, a efeito de simplificação, a partir deste momento denotaremos esse parâmetro apenas por μ .

3.1.3 Equilíbrios do Sistema Hamiltoniano

Os pontos de equilíbrio do sistema, dado pela função Hamiltoniana (3.19), são determinados por $\mathcal{H}_{\eta} = 0$ e $\mathcal{H}_{\xi} = 0$. Assim, pelas equações (3.17) e (3.19), as coordenadas do vetor $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ no ponto de equilíbrio satisfazem o seguinte sistema de equações escalares

$$\left(\mu \frac{1}{\|\xi\|^3} - 1 \right) \xi_1 - 1 = 0, \quad \left(\mu \frac{1}{\|\xi\|^3} - 1 \right) \xi_2 = 0 \quad \text{e} \quad \left(\epsilon \cos \nu + \mu \frac{1}{\|\xi\|^3} \right) \xi_3 = 0. \quad (3.20)$$

Pela terceira equação de (3.20), temos que $\xi_3 = 0$ porque o planeta P percorre toda sua trajetória elíptica. Na primeira equação, segue que $\frac{\mu}{\|\xi\|^3} \neq 1$ e, à vista disso, a segunda equação implica que $\xi_2 = 0$. Logo, os pontos de equilíbrio do sistema são da forma $\xi = (\xi_1, 0, 0)$, nos quais, pela primeira equação de (3.20), obtemos as equações

$$\xi_1^3 + \xi_1^2 - \mu = 0, \quad \text{se } \xi_1 > 0 \quad \text{e} \quad \xi_1^3 + \xi_1^2 + \mu = 0, \quad \text{se } \xi_1 < 0.$$

Conforme apresentado no final da Seção 2.4, a função cúbica nestas equações acima possui uma única raiz $\xi^* = (\xi_1^*, 0, 0)$ com $\xi_1^* > 0$, e uma única raiz $\xi^{**} = (\xi_1^{**}, 0, 0)$ com $\xi_1^{**} < 0$. Portanto, os dois pontos de equilíbrio do sistema são

$$\zeta^* = (\xi^*, \eta^*) \quad \text{e} \quad \zeta^{**} = (\xi^{**}, \eta^{**}), \quad (3.21)$$

onde $\boldsymbol{\eta}^* = \Sigma \boldsymbol{\xi}^* = (0, \xi_1^*, 0)$ e $\boldsymbol{\eta}^{**} = \Sigma \boldsymbol{\xi}^{**} = (0, \xi_1^{**}, 0)$.

Em seguida, nossos estudos serão conduzidos em torno do ponto de equilíbrio ζ^* , isto é, $\zeta^* = (\xi_1^*, 0, 0; 0, \xi_1^*, 0)$ com $\xi_1^* > 0$. Para o ponto de equilíbrio ζ^{**} , onde $\xi_1^{**} < 0$, a análise pode ser feita de maneira análoga.

Defina $(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^*, \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^*)$ como a translação na vizinhança do equilíbrio ζ^* . Neste caso, a partir da equação (3.19), obtemos o Hamiltoniano quadrático no referido ponto como

$$H(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|^2}{2} + \langle \boldsymbol{\xi}, \Sigma \boldsymbol{\eta} \rangle + \frac{\epsilon \cos \nu}{2(1 + \epsilon \cos \nu)} \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \frac{\mu}{2(1 + \epsilon \cos \nu)} \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - 3\xi_1^2}{\xi_1^{*3}}. \quad (3.22)$$

Portanto, reescrevemos na forma

$$H(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu, \epsilon) = \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|^2}{2} + \langle \boldsymbol{\xi}, \Sigma \boldsymbol{\eta} \rangle + \frac{1}{2} (1 - \epsilon \cos \nu + \epsilon^2 \cos^2 \nu - \epsilon^3 \cos^3 \nu + \dots) \left(\epsilon \cos \nu \|\boldsymbol{\xi}\|^2 + \mu \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - 3\xi_1^2}{\xi_1^{*3}} \right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} H(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu, \epsilon) &= \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|^2}{2} + \langle \boldsymbol{\xi}, \Sigma \boldsymbol{\eta} \rangle + \frac{1}{2} F(\boldsymbol{\xi}, \mu) + \frac{1}{2} \epsilon \cos \nu F_1(\boldsymbol{\xi}, \mu) - \\ &- \frac{1}{2} \epsilon^2 \cos^2 \nu F_2(\boldsymbol{\xi}, \mu) + \frac{1}{2} \epsilon^3 \cos^3 \nu F_3(\boldsymbol{\xi}, \mu) + \dots, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde

$$F(\boldsymbol{\xi}, \mu) = \mu \frac{\|\boldsymbol{\xi}\|^2 - 3\xi_1^2}{\xi_1^{*3}} \text{ e } F_j(\boldsymbol{\xi}, \mu) = \|\boldsymbol{\xi}\|^2 - F(\boldsymbol{\xi}, \mu), \text{ com } j = 1, 2, 3, \dots \quad (3.24)$$

Por outro lado, o Hamiltoniano H pode ser expandido em série de potências em função da excentricidade ϵ da trajetória elíptica, isto é,

$$H(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu, \epsilon) = H_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mu) + \frac{\epsilon}{1!} H_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu) + \frac{\epsilon^2}{2!} H_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu) + \frac{\epsilon^3}{3!} H_3(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu) + \dots, \quad (3.25)$$

onde $H_0, H_1, \dots$ são formas quadráticas nas variáveis $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$. Neste caso, comparando com a equação (3.23), obtemos

$$H_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mu) = \frac{\|\boldsymbol{\eta}\|^2}{2} + \langle \boldsymbol{\xi}, \Sigma \boldsymbol{\eta} \rangle + \frac{1}{2} F(\boldsymbol{\xi}, \mu), \quad (3.26)$$

$$H_j(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \mu) = j! \frac{(-1)^{j+1}}{2} (\cos \nu)^j F_j(\boldsymbol{\xi}, \mu), \quad j \geq 1. \quad (3.27)$$

3.1.4 Estabilidade Linear do Sistema Hamiltoniano Não Perturbado

Seja $A(\nu, \mu, \epsilon)$ a matriz Hamiltoniana do sistema linearizado no ponto de equilíbrio ζ^*

$$\dot{\zeta} = A(\nu, \mu, \epsilon) \zeta, \quad (3.28)$$

onde $\zeta = (\xi, \eta)$, $A = JG^*$ e G^* é a matriz Hessiana de H em (3.23) no equilíbrio ζ^* .

Suponha $\epsilon = 0$ na equação (3.23). Nesse caso, o Hamiltoniano do problema será representado apenas pelo termo quadrático, sem a perturbação causada pela excentricidade ϵ , ou seja, pelo Hamiltoniano H_0 em (3.26). Por conseguinte, o sistema Hamiltoniano linearizado e não perturbado em torno do ponto ζ^* , é

$$\dot{\zeta} = A_0(\mu)\zeta, \text{ para } A_0(\mu) = JG_0 \text{ e } G_0 = D^2H_0(\zeta^*, \mu). \quad (3.29)$$

Além disso, o Hamiltoniano quadrático linearizado próximo ao equilíbrio ζ^* é $H_0 = \frac{1}{2}\zeta^T G_0 \zeta$.

Agora, vamos tratar da análise da estabilidade linear do sistema Hamiltoniano não perturbado em torno do ponto de equilíbrio ζ^* .

Inicialmente, obtemos a matriz simétrica

$$G_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}F_{\xi\xi} & \Sigma \\ -\Sigma & I \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

com

$$\frac{1}{2}F_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} -\mu \frac{2}{\xi_1^{*3}} & 0 & 0 \\ 0 & \mu \frac{1}{\xi_1^{*3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \frac{1}{\xi_1^{*3}} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Assim, a matriz $A_0(\mu) = JG_0$ do sistema linearizado, dada por

$$A_0(\mu) = \begin{bmatrix} -\Sigma & I \\ -\frac{1}{2}F_{\xi\xi} & -\Sigma \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

é uma matriz Hamiltoniana (CABRAL; DIAS, 2023). Consequentemente, em relação ao polinômio característico de $A_0(\mu)$, temos que

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda I + \Sigma & -I \\ \frac{1}{2}F_{\xi\xi} & \lambda I + \Sigma \end{bmatrix} = \det \left[\begin{array}{ccc|c} & \lambda I + \Sigma & & -I \\ \hline -\mu \frac{2}{\xi_1^{*3}} & 0 & 0 & \\ 0 & \mu \frac{1}{\xi_1^{*3}} & 0 & \lambda I + \Sigma \\ 0 & 0 & \mu \frac{1}{\xi_1^{*3}} & \end{array} \right].$$

Efetuada alguns cálculos, concluímos que

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + \alpha^2)(\lambda^4 + \beta\lambda^2 + \gamma),$$

onde

$$\alpha^2 = \frac{\mu}{\xi_1^{*3}}, \quad \beta = (2 - \alpha^2) \quad \text{e} \quad \gamma = (1 + 2\alpha^2)(1 - \alpha^2).$$

Note que o polinômio $p(\lambda)$ tem pelo menos duas raízes imaginárias puras, a saber: $\lambda_1 = \pm i\omega_1$, onde $\omega_1 = |\alpha| = \sqrt{\frac{\mu}{\xi_1^{*3}}}$. Por conseguinte, as quatro raízes restantes, provenientes da equação biquadrada $\lambda^4 + \beta\lambda^2 + \gamma$, são números imaginários puros e distintos se, e somente se,

$$\beta > 0, \quad \gamma > 0 \quad \text{e} \quad \Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0. \quad (3.33)$$

Neste caso, os pares de raízes imaginárias puras e distintas são representadas por $\lambda_2 = \pm i\omega_2$, $\lambda_3 = \pm i\omega_3$, com $\omega_2 > 0$ e $\omega_3 > 0$.

Portanto, as condições (3.33) garantem a estabilidade do sistema Hamiltoniano linearizado (3.29) e que $\Delta = (9\omega_1^2 - 8)\omega_1^2 > 0$.

Desta forma, os autovalores de $A_0(\mu)$ são imaginários puros e distintos se, e somente se,

$$\frac{8}{9} < \omega_1^2 < 1. \quad (3.34)$$

Isto é, um ponto de equilíbrio ζ^* é linearmente estável neste sistema Hamiltoniano não perturbado quando $\mu < \xi_1^{*3} < \frac{9}{8}\mu$. Equivalentemente, no caso do problema com órbita circular das primárias ($\epsilon = 0$), o parâmetro, denotado nesse contexto por μ_0 , estará no intervalo

$$\frac{8}{9}\xi_1^{*3} < \mu_0 < \xi_1^{*3}. \quad (3.35)$$

Entretanto, surge agora o seguinte questionamento: se μ_0 é um valor para o qual o sistema não perturbado $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$ é estável, isto é, $\mu_0 \in \left(\frac{8}{9}\xi_1^{*3}, \xi_1^{*3}\right)$, então o sistema linearizado perturbado, $\dot{\zeta} = A(\nu, \mu, \epsilon)\zeta$, onde $A(\nu, \mu, \epsilon) = JD^2H(\zeta^*, \nu, \mu, \epsilon)$, para (μ, ϵ) próximo de $(\mu_0, 0)$ é estável?

Para analisar esta questão, é necessário inicialmente apresentar algumas considerações sobre estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares e ressonância paramétrica.

3.1.5 Algumas considerações sobre a estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares e o problema de ressonância paramétrica

Nesta subsecção, apresentaremos uma breve descrição teórica, baseada em Cabral e Dias (2023), sobre a estabilidade de sistemas Hamiltonianos lineares e o problema de ressonância paramétrica; fundamentais para a compreensão dos resultados subsequentes deste trabalho.

Seja o sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}, \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_n)$ e $A(t)$ é uma matriz real de ordem $n \times n$, contínua e τ -periódica. Além disso, definimos a norma $\|\cdot\|$ no espaço das matrizes quadradas tal que $\|A\| = \sup\{\|A\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| = 1\}$, com A uma matriz constante. E quando $A(t)$ é uma matriz contínua τ -periódica, tomaremos

$$\|A\| = \int_0^\tau \|A(t)\| dt.$$

Denotamos por $X(t)$ como o matrizante deste sistema, ou seja, a matriz fundamental de solução de (3.36) com $X(0) = I_n$, onde I_n é a matriz identidade $n \times n$.

Teorema 8. (Floquet) *Dado o sistema (3.36) nas condições acima, então existem uma matriz $Q(t)$ τ -periódica e uma matriz constante B , ambas de ordem $n \times n$, tais que*

$$X(t) = Q(t)e^{tB}. \quad (3.37)$$

Definição 9. *A igualdade (3.37) é chamada de decomposição de Floquet do matrizante do sistema τ -periódico (3.36).*

Observação 10. *Quando B é uma matriz real, pode-se tomar a matriz $Q(t)$ 2τ -periódica. Chamaremos $X(t) = Q(t)e^{tB}$ de representação de Floquet.*

Definição 11. *A matriz de monodromia é definida como o matrizante do sistema $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x}$, τ -periódico, quando calculado em τ ou 2τ . Aos autovalores ρ da matriz de monodromia, $X(\tau)$ ou $X(2\tau)$, chamamos de multiplicadores do sistema (3.36) e os autovalores λ da matriz B serão chamados de expoentes característicos do referido sistema.*

Note que os multiplicadores ρ e os expoentes característicos λ estão relacionados por

$$\rho = e^{\tau\lambda} \quad \text{ou} \quad \rho = e^{2\tau\lambda}, \quad (3.38)$$

conforme o período de $Q(t)$ seja τ ou 2τ , respectivamente.

Definição 12. Um multiplicador ρ de um sistema Hamiltoniano linear τ -periódico é chamado de multiplicador de primeira espécie (ou segunda espécie) se o produto simplético $\{\mathbf{r}, \mathbf{s}\} = \langle \mathbf{r}, J\mathbf{s} \rangle$ é positivo (ou negativo) para qualquer autovetor $\mathbf{v} = \mathbf{r} + i\mathbf{s}$ de ρ . Além disso, o multiplicador é dito definido quando o mesmo é de primeira espécie ou segunda espécie, caso contrário, ρ é indefinido.

Dando continuidade, temos os sistemas lineares estáveis e seus resultados.

Definição 13. O sistema linear (3.36) é estável quando, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $\|\mathbf{x}\| < \delta$, a solução $\phi(t, \mathbf{x})$ permanece dentro da bola $B_\epsilon(\mathbf{x})$ para todo tempo t , ou seja, a origem é um equilíbrio estável em ambas as direções do tempo.

Proposição 14. O sistema linear periódico contínuo (3.36) é estável se, e somente se, todas as suas soluções são limitadas.

A partir da proposição acima e sua demonstração (ver páginas 234-235 em Cabral e Dias (2023)), seguem os seguintes resultados:

Proposição 15. O sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, com A uma matriz constante, é estável se, e somente se, os autovalores de A são imaginários puros, incluindo o zero, e A é diagonalizável sobre os números complexos.

Podemos estudar a estabilidade do sistema (3.36) através do novo sistema constante obtido por meio de uma mudança de coordenadas, como mostra a proposição a seguir.

Proposição 16. Seja $X(t) = Q(t)e^{tB}$ a decomposição de Floquet do sistema linear (3.36). Então, o sistema linear (3.36) é estável se, e somente se, o sistema $\dot{\mathbf{y}} = B\mathbf{y}$ é estável.

Agora iremos estudar os sistemas Hamiltonianos lineares estáveis, na condição de que quaisquer outros sistemas lineares próximos também sejam estáveis. Ou seja, estamos falando dos sistemas lineares fortemente estáveis.

Definição 17. Um sistema Hamiltoniano τ -periódico (3.36) é chamado de fortemente estável se for estável e existir $\epsilon > 0$ tal que, para qualquer outro sistema Hamiltoniano τ -periódico, $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{A}(t)\mathbf{x}$, onde $\|\tilde{A} - A\| < \epsilon$, este também seja estável.

O próximo resultado é uma peça fundamental na teoria de sistemas Hamiltonianos lineares τ -periódicos. Sua demonstração pode ser vista em (CABRAL; DIAS, 2023).

Teorema 18. (*Krein-Gel'fand-Lidskii*) *O sistema Hamiltoniano real linear e τ -periódico, $\dot{x} = A(t)x$, é fortemente estável se, e somente se, todos os multiplicadores estão no círculo unitário e todos eles são definidos.*

Em geral, o Hamiltoniano dos problemas físicos depende de parâmetros específicos relacionados ao problema em estudo. Por exemplo, em nosso caso, o parâmetro é a razão entre as massas do planeta e do Sol, denotada por μ .

Destaca-se o estudo da variação de tais parâmetros, pois eles são responsáveis pelo efeito de ressonância do sistema, o que pode resultar em instabilidade do movimento. As regiões de instabilidades são denominadas de regiões de ressonância paramétrica e o problema de se determinar tais regiões é denominado Problema da Ressonância Paramétrica.

A seguir, abordaremos o conceito de estabilidade em sistemas Hamiltonianos lineares dependentes de parâmetros, com o objetivo de descrever um processo para determinar os valores dos parâmetros que correspondam às regiões de estabilidade e instabilidade, ou seja, o estudo do problema de ressonância paramétrica.

Definimos $\mathcal{L}$ como o espaço vetorial normado das matrizes Hamiltonianas τ -periódicas ou das matrizes dadas pela representação matricial dos Hamiltonianos quadráticos $H(x, t)$ τ -periódico.

Reescrevemos a Definição 17 para um sistema Hamiltoniano fortemente estável como:

Definição 19. *O Hamiltoniano quadrático τ -periódico $H_0(x, t) \in \mathcal{L}$ é dito fortemente estável quando é estável e existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $H(x, t) \in B_\epsilon(H_0) \subset \mathcal{L}$ é estável.*

Considere os Hamiltonianos quadráticos τ -periódicos $H(x, t, \mu)$ contendo um parâmetro $\mu \in P \subset \mathbb{R}^k$.

Definição 20. *O Hamiltoniano quadrático $H(x, t, \mu^*) \in \mathcal{L}$ é chamado de μ -estável quando é estável e existe $\delta > 0$ tal que para todo $\mu \in B_\delta(\mu^*) \subset \mathbb{R}^k$ o Hamiltoniano $H(x, t, \mu)$ é também estável.*

Observe que se $H(x, t, \mu^*)$ é fortemente estável, então o mesmo é também μ -estável.

Como já citado na Seção 2.6, seja z^* um ponto de equilíbrio do sistema Hamiltoniano autônomo real τ -periódico com dois graus de liberdade, a saber: $H(z, t, \mu, \epsilon)$, $z \in \mathbb{R}^4$, dependente do parâmetro real μ e de um pequeno parâmetro ϵ . Quando o sistema é autônomo podemos usar o Teorema de Arnold 7 para analisar a estabilidade deste equilíbrio. Porém, quando o sistema Hamiltoniano tem mais de dois graus de liberdade, ou mesmo um grau

de liberdade mas não é autônomo, a questão da estabilidade torna-se complicada. Por isso, passamos a estudar a estabilidade linear do sistema em torno do ponto de equilíbrio.

Seja o sistema Hamiltoniano real τ -periódico

$$\dot{x} = A(t, \mu, \epsilon)x, \quad (3.39)$$

onde $x = z - z^*$ e $A(t, \mu, \epsilon) = JD^2H(z^*, t, \mu, \epsilon)$.

Retomamos o questionamento levantando no final da subseção 3.1.4. Mais geralmente, para o sistema linear (3.39) suponha que o sistema não perturbado $\dot{x} = A(t, \mu, 0)x$ é estável para todo μ num intervalo I . Se $\mu^* \in I$, então para (μ, ϵ) próximo de $(\mu^*, 0)$ o sistema linearizado perturbado, $\dot{x} = A(t, \mu, \epsilon)x$, é estável?

Iniciamos a análise supondo que $\dot{x} = A(t, \mu^*, 0)x$, é fortemente estável. Assim, por definição, o sistema não perturbado é μ -estável e, então, $\dot{x} = A(t, \mu, \epsilon)x$ é estável para (μ, ϵ) próximo de $(\mu^*, 0)$.

Agora, resta analisar sob a condição do sistema $\dot{x} = A(t, \mu^*, 0)x$ não ser fortemente estável. Como estamos com o sistema não perturbado estável, então, das Proposições 5 e 16, os multiplicadores $\rho_i(\mu^*)$, com $i = 1, \dots, 2n$ estão na circunferência unitária. No caso em que entre os multiplicadores $\rho_i(\mu^*)$ não exista um multiplicador múltiplo (todos eles têm multiplicidade igual a 1 - chamados de multiplicadores simples), os expoentes característicos $\lambda_j(\mu^*)$, autovalores da matriz B na representação de Floquet, são imaginários puros e distintos. Então por continuidade, para (μ, ϵ) próximo de $(\mu^*, 0)$ e ϵ pequeno, os expoentes característicos $\lambda_j(\mu, \epsilon)$ do sistema $\dot{x} = B(\mu, \epsilon)x$ são também simples e imaginários puros. Logo, o sistema $\dot{x} = B(\mu, \epsilon)x$ é estável e portanto o sistema $\dot{x} = A(t, \mu, \epsilon)x$ também é estável, para (μ, ϵ) numa vizinhança de $(\mu^*, 0)$.

Por fim, falta estudar a questão da estabilidade apenas quando assumimos que pelo menos um dos $\rho_i(\mu^*)$, $i = 1, \dots, 2n$, é um multiplicador múltiplo.

Considere τ o período do matrizante do sistema Hamiltoniano linear real τ -periódico, $\dot{x} = A(t, \mu^*, 0)x$. Então, os expoentes característicos e os multiplicadores do sistema estão relacionados por $\rho_k = e^{\tau\lambda_k}$. Pela Proposição 4.24 e o Teorema de Floquet-Lyapunov, ambos em Cabral e Dias (2023) páginas 129 e 234, respectivamente, temos que $\rho_k^{-1} = e^{-\tau\lambda_k}$ é também um multiplicador. Portanto, considerando $\lambda_k = i\omega_k$, $\tau = 2\pi$ e que ρ_k é um multiplicador múltiplo, ou seja, $\rho_k = \rho_l$ ou $\rho_k = \rho_l^{-1}$ para algum l , teremos que

$$\omega_k \pm \omega_l = N, \quad (3.40)$$

onde N é um inteiro e $k, l = 1, 2, \dots, n$.

Definição 21. Chamamos de ressonância KGL uma ressonância do tipo (3.40). Para $k = l$ e N natural, dizemos que a ressonância $2\omega_k = N$ é uma ressonância básica. Se $\omega_k + \omega_l = N$ ou $\omega_k - \omega_l = N$ com $2\omega_k$ ou $2\omega_l$ sendo um inteiro, teremos um par de ressonâncias básicas, e quando $2\omega_k$ ou $2\omega_l$ não é um número inteiro, temos uma ressonância combinada. Além disso, quando ocorre apenas uma relação do tipo (3.40), temos uma ressonância simples. Caso contrário, teremos a chamada ressonância múltipla.

Definição 22. Chamamos $\mu^* \in I$ de valor de ressonância paramétrica quando o sistema $\dot{x} = A(t, \mu^*, 0)x$ possui um multiplicador múltiplo.

Se μ^* um valor de ressonância paramétrica e o sistema não perturbado $\dot{x} = A(t, \mu^*, 0)x$ é fortemente estável, isso implica que o sistema perturbado $\dot{x} = A(t, \mu, \epsilon)x$ é estável para (μ, ϵ) próximo de $(\mu^*, 0)$. Entretanto, caso o sistema Hamiltoniano $\dot{x} = A(t, \mu^*, 0)x$ não seja fortemente estável, existem sistemas Hamiltonianos lineares τ -periódicos estáveis, bem como sistemas instáveis, próximos ao sistema não perturbado. Assim, ao variar os parâmetros é possível que ocorram sistemas estáveis e instáveis na família de equações $\dot{x} = A(t, \mu, \epsilon)x$ na vizinhança do sistema não perturbado.

Consequentemente, no plano dos parâmetros (μ, ϵ) podem existir curvas contínuas que partem do ponto $(\mu^*, 0)$ e delimitem regiões de sistemas estáveis e regiões de sistemas instáveis na família de sistemas Hamiltonianos lineares $\dot{x} = A(t, \mu, \epsilon)x$. Tais curvas serão procuradas na forma de uma série de potências de ϵ

$$\mu = \mu^* + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2 + \dots, \quad (3.41)$$

cujos coeficientes $\mu^*, \mu_1, \mu_2, \dots$ devem ser determinados. Da mesma forma, o Hamiltoniano quadrático do sistema (3.39), dado por

$$H(z, t, \mu, \epsilon) = \frac{1}{2}z^T G(t, \mu, \epsilon)z,$$

onde $G(t, \mu, \epsilon)z = -JA(t, \mu, \epsilon)$, pode ser expandido em série de potências de ϵ

$$H(z, t, \mu, \epsilon) = H_0(z, \mu) + \epsilon H_1(z, t, \mu) + \epsilon^2 H_2(z, t, \mu) + \dots, \quad (3.42)$$

onde $H_0, H_1, \dots$ são polinômios quadráticos homogêneos em z tal que $H_1, H_2, \dots$ são τ -periódicos em t . Em seguida, normalizando o Hamiltoniano H_0 e aplicando (3.41) nos termos

$H_1, H_2, \dots$, obtemos uma nova expressão para o Hamiltoniano quadrático

$$\mathcal{H}(z, t, \mu, \epsilon) = \mathcal{H}_0(z, \mu^*) + \frac{\epsilon}{1!} \mathcal{H}_1(z, t, \mu^*, \mu_1) + \frac{\epsilon^2}{2!} \mathcal{H}_2(z, t, \mu^*, \mu_1, \mu_2) + \dots, \quad (3.43)$$

com os $\mathcal{H}_j(z, t, \mu^*, \mu_1, \dots, \mu_j)$, $j = 1, \dots$, polinômios quadráticos homogêneos τ -periódicos em t de coeficientes $\mu^*, \mu_1, \dots, \mu_j$. Este Hamiltoniano é nosso ponto de partida para, por meio do Método de Depri-Hori, determinar um Hamiltoniano autônomo K que nos auxiliará a encontrar os coeficientes das curvas citadas no plano dos parâmetros.

Todo esse processo será melhor detalhado nas próximas seções.

3.1.6 Estabilidade Linear do Sistema Perturbado

Com base nos resultados da última subseção, podemos agora investigar a estabilidade do sistema Hamiltoniano linear 2π -periódico

$$\dot{\zeta} = A(\nu, \mu, \epsilon)\zeta, \quad \text{onde } A(\nu, \mu, \epsilon) = JD^2H(\zeta^*, \nu, \mu, \epsilon),$$

para (μ, ϵ) próximo de $(\mu_0, 0)$, onde $\mu_0 \in \left(\frac{8}{9}\xi_1^{*3}, \xi_1^{*3}\right)$ é o valor no qual o sistema não perturbado $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$ é estável.

Inicialmente, sabemos que, se $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$ é fortemente estável, então o sistema não perturbado é μ -estável e, conseqüentemente, $\dot{\zeta} = A(\nu, \mu, \epsilon)\zeta$ é estável para todo (μ, ϵ) suficientemente próximo de $(\mu_0, 0)$. Assim, na sequência da subseção, devemos supor que o sistema Hamiltoniano linear não perturbado, $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$, é estável, porém não fortemente estável.

Em torno do equilíbrio ζ^* , por (3.32), a matriz Hamiltoniana $A_0(\mu_0) = JG_0$ do sistema linear não perturbado é dada explicitamente por

$$A_0(\mu_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

cujos os autovalores, sob as condições em (3.33), serão números imaginários puros e distintos, e cujas frequências são

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\xi_1^{*3}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\beta - \sqrt{\Delta}}{2}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{\beta + \sqrt{\Delta}}{2}}. \quad (3.45)$$

Por outro lado, no sistema não perturbado $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$, podemos considerar a decomposição de Floquet do matrizante do sistema como $X_0(\nu, \mu_0) = e^{\nu A_0(\mu_0)}$. Assim, com base na Definição 11 e equação (3.38), os multiplicadores do sistema $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$ - que são os autovalores ρ da matriz $X_0(\tau, \mu)$ - satisfazem a $\rho = e^{\tau\lambda}$, onde $\tau = 2\pi$ e λ são os expoentes característicos do sistema, isto é, os autovalores da matriz constante $A_0(\mu_0)$.

Portanto, os pares de multiplicadores do sistema Hamiltoniano linear não perturbado, $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$, são

$$\rho_1 = e^{\pm i\omega_1\tau}, \quad \rho_2 = e^{\pm i\omega_2\tau} \quad \text{e} \quad \rho_3 = e^{\pm i\omega_3\tau}.$$

No interior da região (3.34), temos $\omega_2 < \omega_3$ e os expoentes característicos do sistema não perturbado λ_j , $j = 1, 2$ e 3 , serão imaginários puros e distintos, ou seja, todos os multiplicadores do sistema são simples. Dessa forma, com base no apresentado na subseção anterior, o sistema linear perturbado (3.28) é estável para (μ, ϵ) numa vizinhança de $(\mu_0, 0)$. Além disso, destacamos que iremos desconsiderar as possíveis ressonâncias no intervalo de estabilidade linear, por exemplo, não há ressonância básica quando μ_0 representa a razão entre a massa de um planeta do sistema solar e a massa do Sol.

No extremo esquerdo da região (3.34), temos $\omega_1^2 = \frac{8}{9}$, o que equivale a $\Delta = 0$. Então, pelas equações em (3.45), teremos uma raiz dupla, pois $\omega_2 = \omega_3$, e o polinômio característico de $A_0(\mu_0)$ deve ser

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)^2, \quad (3.46)$$

com

$$\omega_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad (3.47)$$

donde obtemos os multiplicadores duplos do sistema não perturbado, $\rho_2 = \rho_3 = e^{\pm i\omega_2\tau}$. Além disso, pela desigualdade em (3.35), o valor μ_0 no extremo esquerdo é

$$\mu_0 = \frac{8}{9}\xi_1^{*3}. \quad (3.48)$$

Nas condições acima, a investigação da estabilidade linear do sistema perturbado segue com μ_0 em (3.48) sendo o *valor de ressonância paramétrica* no extremo esquerdo do intervalo de estabilidade linear (3.35). Ademais, conforme a Definição 21, temos uma ressonância KGL combinada para $\omega_2 - \omega_3 = 0$, com $2\omega_2 = 2\sqrt{5}/3$.

Para o extremo direito da região (3.34), segue que $\omega_1 = 1$ e, consequentemente, $\gamma = 0$. Desta forma, como $\beta = (2 - \omega_1^2)$ e por (3.45), obtemos

$$\omega_1 = \omega_3 = 1 \quad \text{e} \quad \omega_2 = 0. \quad (3.49)$$

Neste caso, o polinômio característico tem a forma

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + \omega_1^2)^2, \quad (3.50)$$

com as raízes duplas, a saber, a raiz nula e as raízes $\pm i\omega_1$. Com isso, os multiplicadores duplos são $\rho_1 = \rho_3 = e^{\pm i\omega_1\tau}$ e $\rho_2 = 1$. O valor μ_0 no extremo direito (3.35), denotado por $\tilde{\mu}_0$, é

$$\tilde{\mu}_0 = \xi_1^{*3}. \quad (3.51)$$

Analogamente, o estudo da estabilidade linear do sistema perturbado segue, neste caso, com $\tilde{\mu}_0$ em (3.51) definido como o *valor de ressonância paramétrica* no extremo direito do intervalo de estabilidade. Neste caso, as ressonâncias KGL do problema são compostas por três pares de ressonâncias básicas: $2\omega_1 = 2$, $2\omega_2 = 0$ e $2\omega_3 = 2$. Isto é, temos uma ressonância múltipla.

Pelo exposto na subseção 3.1.5, se estudarmos a estabilidade linear do sistema perturbado, $\dot{\zeta} = A(\zeta, \mu, \epsilon)\zeta$, quando o sistema não perturbado, $\dot{\zeta} = A_0(\mu_0)\zeta$, é estável, porém não fortemente estável, e com algum multiplicador múltiplo, então existem sistemas estáveis e sistemas instáveis em qualquer vizinhança de $(\mu_0, 0)$.

Em outras palavras, para cada um dos valores de ressonâncias paramétricas μ_0 e $\tilde{\mu}_0$, existem regiões de estabilidade e regiões de instabilidade dependendo das escolhas dos parâmetros. Assim, os parâmetros que fornecem tais sistemas são definidos a partir das curvas contínuas no plano paramétrico (μ, ϵ) que delimitam as regiões de sistemas estáveis e regiões de sistemas instáveis, emanando do ponto $(\mu_0, 0)$ e do ponto $(\tilde{\mu}_0, 0)$.

As curvas no plano paramétrico (μ, ϵ) , que partem dos pontos $(\mu_0, 0)$ e $(\tilde{\mu}_0, 0)$, são expressas em série de potências de ϵ , respectivamente, por

$$\mu = \mu_0 + \epsilon\mu_1 + \epsilon^2\mu_2 + \epsilon^3\mu_3 + \dots, \quad (3.52)$$

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0 + \epsilon\tilde{\mu}_1 + \epsilon^2\tilde{\mu}_2 + \epsilon^3\tilde{\mu}_3 + \dots \quad (3.53)$$

Substituindo a equação (3.52) em (3.23), obtemos

$$\begin{aligned} H(\xi, \eta, \nu, \mu, \epsilon) = & \frac{\|\eta\|^2}{2} + \langle \xi, \Sigma \eta \rangle + \frac{1}{2}F(\xi, \mu_0) + \\ & + \frac{\epsilon}{2} \left[\cos \nu \left(\|\xi\|^2 - F(\xi, \mu_0) \right) + F(\xi, \mu_1) \right] + \\ & + \frac{\epsilon^2}{2} \left[-\cos^2 \nu \left(\|\xi\|^2 - F(\xi, \mu_0) \right) - F(\xi, \mu_1) \cos \nu + F(\xi, \mu_2) \right] + \\ & + \frac{\epsilon^3}{2} \left[\cos^3 \nu \left(\|\xi\|^2 - F(\xi, \mu_0) \right) + F(\xi, \mu_1) \cos^2 \nu - F(\xi, \mu_2) \cos \nu + F(\xi, \mu_3) \right] + \\ & + \frac{\epsilon^4}{2} \left[-\cos^4 \nu \left(\|\xi\|^2 - F(\xi, \mu_0) \right) - F(\xi, \mu_1) \cos^3 \nu + F(\xi, \mu_2) \cos^2 \nu - \right. \\ & \left. - F(\xi, \mu_3) \cos \nu + F(\xi, \mu_4) \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

Mas,

$$H(\zeta, \nu, \mu, \epsilon) = H_0(\zeta, \mu_0) + \frac{\epsilon}{1!} H_1(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1) + \frac{\epsilon^2}{2!} H_2(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1, \mu_2) + \dots, \quad (3.55)$$

onde identificamos que

$$H_0(\zeta, \mu_0) = \frac{\|\eta\|^2}{2} + \langle \xi, \Sigma \eta \rangle + \frac{1}{2} F(\xi, \mu_0); \quad (3.56)$$

$$H_1(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1) = \frac{1}{2} [F_0(\xi, \mu_0) \cos \nu + F(\xi, \mu_1)]; \quad (3.57)$$

$$H_2(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = -F_0(\xi, \mu_0) \cos^2 \nu - F(\xi, \mu_1) \cos \nu + F(\xi, \mu_2); \quad (3.58)$$

$$H_3(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) = 3 [F_0(\xi, \mu_0) \cos^3 \nu + F(\xi, \mu_1) \cos^2 \nu - F(\xi, \mu_2) \cos \nu + F(\xi, \mu_3)]; \quad (3.59)$$

$$H_4(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = 12 [-F_0(\xi, \mu_0) \cos^4 \nu - F(\xi, \mu_1) \cos^3 \nu + F(\xi, \mu_2) \cos^2 \nu - F(\xi, \mu_3) \cos \nu + F(\xi, \mu_4)]; \quad (3.60)$$

na qual definimos $F_0(\xi, \mu_0) = \|\xi\|^2 - F(\xi, \mu_0)$.

Quando analisamos a estabilidade linear no extremo direito do intervalo de estabilidade (3.34), temos $\tilde{\mu}_0$ como valor de ressonância paramétrica e, neste caso, ao substituir (3.53) em (3.23), segue de forma análoga que

$$\tilde{H}_0(\zeta, \tilde{\mu}_0) = \frac{\|\eta\|^2}{2} + \langle \xi, \Sigma \eta \rangle + \frac{1}{2} F(\xi, \tilde{\mu}_0); \quad (3.61)$$

$$\tilde{H}_1(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1) = \frac{1}{2} [F_0(\xi, \tilde{\mu}_0) \cos \nu + F(\xi, \tilde{\mu}_1)]; \quad (3.62)$$

$$\tilde{H}_2(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) = -F_0(\xi, \tilde{\mu}_0) \cos^2 \nu - F(\xi, \tilde{\mu}_1) \cos \nu + F(\xi, \tilde{\mu}_2); \quad (3.63)$$

$$\tilde{H}_3(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3) = 3 [F_0(\xi, \tilde{\mu}_0) \cos^3 \nu + F(\xi, \tilde{\mu}_1) \cos^2 \nu - F(\xi, \tilde{\mu}_2) \cos \nu + F(\xi, \tilde{\mu}_3)]; \quad (3.64)$$

$$\tilde{H}_4(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4) = 12 [-F_0(\xi, \tilde{\mu}_0) \cos^4 \nu - F(\xi, \tilde{\mu}_1) \cos^3 \nu + F(\xi, \tilde{\mu}_2) \cos^2 \nu - F(\xi, \tilde{\mu}_3) \cos \nu + F(\xi, \tilde{\mu}_4)], \quad (3.65)$$

onde $F_0(\xi, \tilde{\mu}_0) = \|\xi\|^2 - F(\xi, \tilde{\mu}_0)$.

3.1.7 Forma Normal dos Hamiltonianos Não Perturbados em (3.56) e (3.61) nos Extremos do Intervalo de Estabilidade Linear

Nesta subsecção, determinaremos a forma normal dos Hamiltonianos (3.56) e (3.61) e, conseqüentemente, as transformações simpléticas que normalizam esses Hamiltonianos, associados aos valores de ressonância paramétrica μ_0 e $\tilde{\mu}_0$, respectivamente.

Inicialmente, considere o caso do extremo esquerdo da região (3.34), quando ocorre a raiz dupla $i\omega_2$ do polinômio característico de $A_0(\mu_0)$ em (3.46), o que determina o caso do valor de ressonância paramétrica μ_0 .

Seja $\mathbb{C}^6$ o espaço dado pela soma direta de dois subespaços $A_0(\mu_0)$ -invariantes,

$$\mathbb{C}^6 = E(\omega_1) \oplus E(\omega_2),$$

com $E(\omega_1) = \eta(i\omega_1) \oplus \eta(-i\omega_1)$ e $E(\omega_2) = \eta^\dagger(i\omega_2) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_2)$ subespaços simpléticos bidimensional e quadridimensional de $\mathbb{C}^6$, respectivamente.

É importante ressaltar que iremos determinar a forma normal da matriz $A_0(\mu_0)$ em (3.44) do sistema não perturbado, a partir da matriz de transição Q da base canônica de $\mathbb{R}^6$ para a base simplética real u_j^*, v_j^* , onde $j = 1, 2, 3$. Tal matriz real Q é determinada por meio das bases simpléticas reais convenientes para $E(\omega_1)$ e $E(\omega_2)$. Ademais, durante o processo de normalização de $A_0(\mu_0)$, faremos uso dos resultados da Seção 2.9, embora com $w = 1$.

Considere o operador linear $\mathcal{B}_1 : \eta(i\omega_1) \rightarrow \eta(i\omega_1)$, onde $\mathcal{B}_1 = A_0(\mu_0) - i\omega_1 I$ e cuja sua forma matricial é

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} -i\omega_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -i\omega_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i\omega_1 & 0 & 0 & 1 \\ 2\omega_1^2 & 0 & 0 & -i\omega_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -1 & -i\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & 0 & 0 & -i\omega_1 \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

onde destacamos que $\eta(i\omega_1) = \text{Ker } \mathcal{B}_1$, pois sua dimensão é igual a multiplicidade do autovalor $\lambda_1 = i\omega_1$ como raiz do polinômio característico.

Seja $\mathbf{z} = (x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$ um autovetor da matriz $A_0(\mu_0)$ associado ao autovalor $i\omega_1$, ou seja, $\mathbf{z} \in \eta(i\omega_1) = \text{Ker } \mathcal{B}_1$ determina um sistema linear homogêneo de seis equações. Observa-se que o determinante das equações do sistema, excluindo a terceira e a sexta equações, é $(1 - \omega_1^2) \neq 0$, logo, $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$. O sistema homogêneo dado pelas terceira e sexta equações para x_3 e y_3 implicam que o vetor $\mathbf{z}$ de $\eta(i\omega_1)$ tem a forma

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} + i\mathbf{s} = (0, 0, x_3; 0, 0, 0) + i(0, 0, 0; 0, 0, \omega_1 x_3), \quad (3.67)$$

isto é,

$$\eta(i\omega_1) = \{(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^6; x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0 \text{ e } y_3 = i\omega_1 x_3\}.$$

Pela arbitrariedade de $x_3 \in \mathbb{C}$, escolhemos convenientemente os $x_3 > 0$. Nestas condições, conforme apresentado na equação (2.52) e considerações subsequentes, os vetores da base simplética real de $E(\omega_1)$ são

$$\mathbf{u}_1^* = (0, 0, 0; 0, 0, -\sqrt{\omega_1}), \quad \mathbf{v}_1^* = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}; 0, 0, 0\right), \quad \text{onde } \omega_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (3.68)$$

Por outro lado, sabemos que $\eta^\dagger(i\omega_2) = \text{Ker } \mathcal{B}_2^2$, onde $\mathcal{B}_2 : \eta^\dagger(i\omega_2) \rightarrow \eta^\dagger(i\omega_2)$ com $\mathcal{B}_2 = A_0(\mu_0) - i\omega_2 I$ - ver equação (2.55). Assim, substituindo $w = 1$ e ω_1, ω_2 dados em (3.47) na expressão (2.57), podemos verificar que

$$\mathcal{B}_2^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{2i\sqrt{5}}{3} & 0 & -\frac{2i\sqrt{5}}{3} & 2 & 0 \\ \frac{2i\sqrt{5}}{3} & -\frac{22}{9} & 0 & -2 & -\frac{2i\sqrt{5}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{9} & 0 & 0 & -\frac{2i\sqrt{5}}{3} \\ -\frac{32i\sqrt{5}}{27} & \frac{8}{9} & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{2i\sqrt{5}}{3} & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{16i\sqrt{5}}{27} & 0 & \frac{2i\sqrt{5}}{3} & -\frac{22}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{16i\sqrt{5}}{27} & 0 & 0 & -\frac{13}{9} \end{pmatrix}.$$

Dado $\mathbf{z} = (x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \in \eta^\dagger(i\omega_2)$ satisfazendo $\mathcal{B}_2^2 \mathbf{z} = 0$ e seguindo o raciocínio da Seção 2.8 para a solução do sistema $\mathcal{B}_2^2 \mathbf{z} = 0$, concluímos que x_1 e x_2 são reescritos como

$$\eta^\dagger(i\omega_2) = \left\{ (x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^6; x_3 = y_3 = 0, x_1 = \frac{3}{28} (i\sqrt{5}y_1 - 9y_2), x_2 = -\frac{3}{28} (9y_1 + 5i\sqrt{5}y_2) \right\}.$$

Assim, para y_1 e y_2 reais, obtemos os produtos simpléticos $\{\mathcal{B}_2 \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}\}$ e $\{\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}\}$ tal que

$$\{\mathcal{B}_2 \mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}\} = \frac{15}{98} (y_1^2 + 5y_2^2) \quad \text{e} \quad \{\mathbf{z}, \bar{\mathbf{z}}\} = \frac{3i\sqrt{5}}{14} (y_1^2 - 5y_2^2).$$

Tomando $y_1 = \frac{7}{\sqrt{15}}$ e $y_2 = \frac{7}{5\sqrt{3}}$ determinamos o vetor de $\eta^\dagger(i\omega_2)$ na forma

$$\mathbf{z}_* = \left((-9 + 5i) \frac{\sqrt{3}}{20}, -(9 + 5i) \frac{\sqrt{15}}{20}, 0; \frac{7}{\sqrt{15}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, 0 \right).$$

Com isso, definindo que $\mathbf{u} = \mathbf{z}_*$, obtemos $\alpha_0 = \{\mathcal{B}_2 \mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}\} = 1$ e $\alpha_1 = \{\mathbf{u}, \bar{\mathbf{u}}\} = 0$.

Pelos Lemas 5.16, 5.17 (páginas 168-169 de Cabral e Dias (2023)) apresentados para demonstrar o Teorema 5.12 citado na Seção 2.9, e considerando $s = 1$, visto que $\mathcal{B}_2$ é nilpotente com índice de nilpotência igual a 2, obtemos os seguintes polinômios

$$\Phi = \Omega(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \alpha_0 I + \alpha_1 \mathcal{B}_2, \quad \Phi = \Phi^*, \quad \Psi = \beta_0 I + \beta_1 \mathcal{B}_2 \quad \text{e} \quad \Psi^2 = \Phi^*,$$

onde usamos que para s ímpar, $\epsilon = 1$. Com isso, pela igualdade $\Psi^2 = \Phi^*$ e das condições $\alpha_0 = 1$ e $\alpha_1 = 0$, concluímos que $\beta_0 = \epsilon\alpha_0 = 1$, $\beta_1 = -\frac{1}{2\beta_0}\epsilon\alpha_1 = 0$ e, consequentemente, $\Psi = I$. Portanto, o vetor $e_2 = \Psi^{-1}u$ apresentado na prova do Teorema 5.12 (CABRAL; DIAS, 2023) para $u = z_*$, é dado por $e_2 = z_*$.

Agora, pelas equações (2.61) e (2.64) chegamos às bases simpléticas do subespaço $E(\omega_2)$,

$$\begin{aligned} u_2 &= \left((-9 + 5i) \frac{\sqrt{3}}{20}, -(9 + 5i) \frac{\sqrt{15}}{20}, 0; \frac{7}{\sqrt{15}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, 0 \right), \\ u_3 &= \left((1 - i) \frac{\sqrt{15}}{10}, (1 + i) \frac{\sqrt{3}}{2}, 0; -(1 + i) \frac{\sqrt{3}}{3}, (-1 + i) \frac{\sqrt{15}}{15}, 0 \right), \\ v_2 &= \left(-(1 + i) \frac{\sqrt{15}}{10}, (-1 + i) \frac{\sqrt{3}}{2}, 0; (1 - i) \frac{\sqrt{3}}{3}, (1 + i) \frac{\sqrt{15}}{15}, 0 \right), \\ v_3 &= \left(-(9 + 5i) \frac{\sqrt{3}}{20}, (-9 + 5i) \frac{\sqrt{15}}{20}, 0; \frac{7}{\sqrt{15}}, \frac{7}{5\sqrt{3}}, 0 \right), \end{aligned}$$

como a base simplética complexa de $E(\omega_2)$; e

$$\begin{aligned} u_2^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{9\sqrt{3}}{10}, -\frac{9\sqrt{15}}{10}, 0; \frac{14\sqrt{15}}{15}, \frac{14\sqrt{3}}{15}, 0 \right), \\ u_3^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}, \sqrt{3}, 0; -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, 0 \right), \\ v_2^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\sqrt{15}}{5}, -\sqrt{3}, 0; \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{15}}{15}, 0 \right), \\ v_3^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2}, 0; 0, 0, 0 \right), \end{aligned} \tag{3.69}$$

a base simplética real de $E(\omega_2)$.

A partir dos vetores em (3.68) e (3.69), temos que $\{u_1^*, u_2^*, u_3^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*\}$ forma uma base simplética real de $\mathbb{R}^6 = E(\omega_1) \oplus E(\omega_2)$. Além disso, a matriz de transição Q da base canônica de $\mathbb{R}^6$ para a base simplética, isto é, $u_j^* = \sum_i Q_{ij} e_i$ e $v_j^* = \sum_i Q_{ij} e_i$, e sua inversa são dadas por

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{9\sqrt{3}}{10} & -\frac{\sqrt{15}}{5} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{5} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{9\sqrt{15}}{10} & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{15}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14\sqrt{15}}{15} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{14\sqrt{3}}{15} & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 & \frac{2\sqrt{15}}{15} & 0 \\ -\sqrt{\frac{4\sqrt{2}}{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.70}$$

e

$$Q^{-1} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{8}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{15}}{15} & 0 & \frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{15}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7\sqrt{15}}{15} & -\frac{7\sqrt{3}}{15} & 0 & -\frac{9\sqrt{3}}{20} & -\frac{9\sqrt{15}}{20} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{15}}{15} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{10} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, $A_0(\mu_0)$ na base simplética $\{\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*\}$ é a matriz $Q^{-1}A_0(\mu_0)Q$, ou seja, a normalização de $A_0(\mu_0)$ dado em (3.44), será

$$\mathcal{A}_0(\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & 1 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

Como ω_1 e ω_2 são definidos por (3.47), então $\mathcal{A}_0(\mu_0)$ será igual à matriz (2.69) com $\delta = 1$.

Desta forma, definimos a mudança simplética de coordenadas que normaliza H_0 em (3.56) como $\zeta = Q\tilde{\zeta}$, onde $\tilde{\zeta} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$. Assim, o Hamiltoniano não perturbado $H_0(\xi, \eta, \mu_0)$ é transformado numa forma mais simples, a saber

$$\mathcal{H}_0(\xi, \eta) = \frac{1}{2}\omega_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_3^2) + \omega_2(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3). \quad (3.72)$$

Observação 23. Para efeito de simplificação na notação, usamos no Hamiltoniano normalizado, $\mathcal{H}_0$, ζ ao invés de $\tilde{\zeta}$ dado pela mudança simplética de variável.

Durante o processo de normalização de $H_0(\xi, \eta, \mu_0)$, a mudança simplética de coordenada, $\zeta = Q\tilde{\zeta}$, também afeta os outros termos quadráticos $H_1, H_2, H_3, \dots$, de $H(\xi, \eta, \nu, \mu, \epsilon)$ em (3.55). De modo que, inicialmente conhecido através da equação (3.55), o Hamiltoniano quadrático do sistema e 2π -periódico em ν , é transformado em uma série

$$\mathcal{H}(\zeta, \nu, \mu, \epsilon) = \mathcal{H}_0(\zeta, \mu_0) + \frac{\epsilon}{1!}\mathcal{H}_1(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1) + \frac{\epsilon^2}{2!}\mathcal{H}_2(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1, \mu_2) + \dots \quad (3.73)$$

onde, pelas equações (3.57) até (3.60), definimos $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ e $\mathcal{H}_4$ como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 = & \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} \sqrt{2} \left(\cos \nu + \frac{1}{\xi_1^{*3}} (\mu_1 - \mu_0 \cos \nu) \right) \eta_1^2 + \right. \\ & + \left(\cos \nu + \frac{1}{2\xi_1^{*3}} (\mu_1 - \mu_0 \cos \nu) \right) \left(\frac{729}{100} \xi_2^2 + \frac{81}{25} \sqrt{5} \xi_2 \eta_2 + \frac{9}{5} \eta_2^2 + \frac{9}{5} \xi_3^2 - \frac{9}{5} \sqrt{5} \xi_3 \eta_3 + \frac{9}{4} \eta_3^2 \right) + \\ & \left. + \left(\cos \nu + \frac{7}{4} \frac{1}{\xi_1^{*3}} (\mu_1 - \mu_0 \cos \nu) \right) \left(-\frac{54}{25} \sqrt{5} \xi_2 \xi_3 + \frac{27}{5} \xi_2 \eta_3 - \frac{12}{5} \xi_3 \eta_2 + \frac{6}{5} \sqrt{5} \eta_2 \eta_3 \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2 = & \frac{3}{4} \sqrt{2} \left(-\cos^2 \nu + \frac{1}{\xi_1^{*3}} (\mu_0 \cos^2 \nu - \mu_1 \cos \nu + \mu_2) \right) \eta_1^2 + \\ & + \left(-\cos^2 \nu + \frac{1}{2\xi_1^{*3}} (\mu_0 \cos^2 \nu - \mu_1 \cos \nu + \mu_2) \right) \left(\frac{729}{100} \xi_2^2 + \frac{81}{25} \sqrt{5} \xi_2 \eta_2 + \frac{9}{5} \eta_2^2 + \frac{9}{5} \xi_3^2 - \frac{9}{5} \sqrt{5} \xi_3 \eta_3 + \frac{9}{4} \eta_3^2 \right) + \\ & + \left(-\cos^2 \nu + \frac{7}{4} \frac{1}{\xi_1^{*3}} (\mu_0 \cos^2 \nu - \mu_1 \cos \nu + \mu_2) \right) \left(-\frac{54}{25} \sqrt{5} \xi_2 \xi_3 + \frac{27}{5} \xi_2 \eta_3 - \frac{12}{5} \xi_3 \eta_2 + \frac{6}{5} \sqrt{5} \eta_2 \eta_3 \right); \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = & \frac{9}{4} \sqrt{2} \left(\cos^3 \nu + \frac{1}{\xi_1^{*3}} (-\mu_0 \cos^3 \nu + \mu_1 \cos^2 \nu - \mu_2 \cos \nu + \mu_3) \right) \eta_1^2 + \\ & + 3 \left(\cos^3 \nu + \frac{1}{2\xi_1^{*3}} (-\mu_0 \cos^3 \nu + \mu_1 \cos^2 \nu - \mu_2 \cos \nu + \mu_3) \right) \left(\frac{729}{100} \xi_2^2 + \frac{81}{25} \sqrt{5} \xi_2 \eta_2 + \frac{9}{5} \eta_2^2 + \frac{9}{5} \xi_3^2 - \frac{9}{5} \sqrt{5} \xi_3 \eta_3 + \frac{9}{4} \eta_3^2 \right) + \\ & + 3 \left(\cos^3 \nu + \frac{7}{4} \frac{1}{\xi_1^{*3}} (-\mu_0 \cos^3 \nu + \mu_1 \cos^2 \nu - \mu_2 \cos \nu + \mu_3) \right) \left(-\frac{54}{25} \sqrt{5} \xi_2 \xi_3 + \frac{27}{5} \xi_2 \eta_3 - \frac{12}{5} \xi_3 \eta_2 + \frac{6}{5} \sqrt{5} \eta_2 \eta_3 \right); \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_4 = & 9\sqrt{2} \left(-\cos^4 \nu + \frac{1}{\xi_1^{*3}} (\mu_0 \cos^4 \nu - \mu_1 \cos^3 \nu + \mu_2 \cos^2 \nu - \mu_3 \cos \nu + \mu_4) \right) \eta_1^2 + 12 \left(-\cos^4 \nu + \right. \\ & + \frac{1}{2\xi_1^{*3}} (\mu_0 \cos^4 \nu - \mu_1 \cos^3 \nu + \mu_2 \cos^2 \nu - \mu_3 \cos \nu + \mu_4) \left. \right) \left(\frac{729}{100} \xi_2^2 + \frac{81}{25} \sqrt{5} \xi_2 \eta_2 + \frac{9}{5} \eta_2^2 + \frac{9}{5} \xi_3^2 - \frac{9}{5} \sqrt{5} \xi_3 \eta_3 + \frac{9}{4} \eta_3^2 \right) + \\ & + 12 \left(-\cos^4 \nu + \frac{7}{4} \frac{1}{\xi_1^{*3}} (\mu_0 \cos^4 \nu - \mu_1 \cos^3 \nu + \mu_2 \cos^2 \nu - \mu_3 \cos \nu + \mu_4) \right) \cdot \\ & \cdot \left(-\frac{54}{25} \sqrt{5} \xi_2 \xi_3 + \frac{27}{5} \xi_2 \eta_3 - \frac{12}{5} \xi_3 \eta_2 + \frac{6}{5} \sqrt{5} \eta_2 \eta_3 \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Por sua vez, vamos agora normalizar o Hamiltoniano (3.61), considerando o extremo direito do intervalo de instabilidade linear dada em (3.34). Neste caso, os autovalores de $A_0(\tilde{\mu}_0)$, dados como raízes da equação (3.50), são os autovalores duplos 0, $i\omega_1$ e $-\omega_1$. Aqui $\omega_1 = 1$, onde definimos o valor de ressonância paramétrica $\tilde{\mu}_0$.

Devemos utilizar do mesmo processo de normalização de (3.56) aplicado anteriormente e dos resultados da última parte da Seção 2.9 para $w = \omega_1 = 1$.

A normalização do Hamiltoniano não perturbado (3.61) será realizada através da forma normal da matriz $A_0(\tilde{\mu}_0)$ em (3.44), por meio do uso da matriz de transição $\tilde{Q}$ da base canônica de $\mathbb{R}^6$ para a base simplética real u_j, v_j , onde $j = 1, 2, 3$.

Consideremos $\mathbb{C}^6 = \eta^\dagger(0) \oplus E(\omega_1)$, onde $\eta^\dagger(0)$ e $E(\omega_1) = \eta^\dagger(i\omega_1) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_1)$ são subespaços simpléticos bidimensional e quadridimensional de $\mathbb{C}^6$, respectivamente. Note que, a menos dos valores que ω_1 assume em cada caso estudado, $A_0(\tilde{\mu}_0)$ em (3.44) é igual à matriz A^* em (2.50) quando tomamos $w = 1$.

Portanto, com base no processo de normalização de A^* restrito a $\eta^\dagger(0)$ descrito na Seção 2.9, temos, de acordo com (2.72), que $\eta^\dagger(0) = \text{Ker}(A_0(\tilde{\mu}_0))^2$ é

$$\eta^\dagger(0) = \left\{ (x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^6; x_3 = y_3 = 0, \quad y_1 = -\omega_1 x_2, \quad y_2 = -\frac{1}{2}\omega_1 x_1 \right\}.$$

Pela arbitrariedade de x_1 e x_2 , escolhemos x_1 e x_2 números reais de modo que $\{A_0(\tilde{\mu}_0)\mathbf{z}, \mathbf{z}\} = -\frac{3}{4}\omega_1^2 x_1^2$ para todo $\mathbf{z} \in \eta^\dagger(0)$. Com isso, para $x_1 = 1$ e $x_2 = 0$, segue que existe $\mathbf{u} \in \eta^\dagger(0)$ de índice de nilpotência 2 tal que $\{A_0(\tilde{\mu}_0)\mathbf{u}, \mathbf{u}\} \neq 0$. Assim, com base em (2.74), os vetores

$$\mathbf{u}_1 = \kappa A_0(\tilde{\mu}_0)\mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_1 = \delta \kappa \mathbf{u}, \quad (3.78)$$

onde $\delta = \text{sign}\{A_0(\tilde{\mu}_0)\mathbf{u}, \mathbf{u}\} = -1$ e $\kappa = 1/\sqrt{|\{A_0(\tilde{\mu}_0)\mathbf{u}, \mathbf{u}\}|}$, formam uma base simplética real para $\eta^\dagger(0)$. Explicitamente, uma base simplética real de $\eta^\dagger(0)$, é dada pelos vetores

$$\mathbf{u}_1 = (0, -\sqrt{3}, 0; \sqrt{3}\omega_1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_1 = 2\frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{\omega_1}, 0, 0; 0, \frac{1}{2}, 0 \right). \quad (3.79)$$

Em seguida, a forma normal de $A_0(\tilde{\mu}_0)$ restrita a $E(\omega_1)$, segue de forma análoga a normalização de A^* restrita a $E(\omega_1)$ quando $\omega_1 = w$ (ver Seção 2.9). Assim, por (2.80), lembramos que

$$\eta^\dagger(i\omega_1) = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^6; \mathbf{z} = (x_1, 2ix_1, x_3; -i\omega_1 x_1, -\omega_1 x_1, i\omega_1 x_3), \text{ com } x_1, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Analogamente, os vetores $\mathbf{w}_2 = \mathbf{r}_2 + i\mathbf{s}_2$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{r}_3 + i\mathbf{s}_3$, $\overline{\mathbf{w}}_2$ e $\overline{\mathbf{w}}_3$ em (2.81) formam uma base de $E(\omega_1) = \eta^\dagger(i\omega_1) \oplus \eta^\dagger(-i\omega_1)$ que geram uma base simplética real do espaço simplético $E(\omega_1)$, a saber

$$\mathbf{u}_2 = -\kappa_2 \mathbf{s}_2, \quad \mathbf{u}_3 = -\kappa_3 \mathbf{s}_3, \quad \mathbf{v}_2 = \delta_2 \kappa_2 \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{v}_3 = \delta_3 \kappa_3 \mathbf{r}_3, \quad (3.80)$$

onde $\delta_j = \text{sign}\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\} = +1$, $\kappa_j = 1/\sqrt{|\{\mathbf{r}_j, \mathbf{s}_j\}|}$, para $j = 2, 3$, e

$$\mathbf{r}_2 = (1, 0, 0; 0, -\omega_1, 0), \mathbf{r}_3 = (0, 0, 1; 0, 0, 0), \mathbf{s}_2 = (0, 2, 0; -\omega_1, 0, 0), \mathbf{s}_3 = (0, 0, 0; 0, 0, \omega_1).$$

Explicitamente, temos os seguintes vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \left(0, -\frac{2}{\sqrt{\omega_1}}, 0; \sqrt{\omega_1}, 0, 0 \right), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 0; 0, 0, -\sqrt{\omega_1}), \\ \mathbf{v}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_1}}, 0, 0; 0, -\sqrt{\omega_1}, 0 \right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{\omega_1}}; 0, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Por meio dos vetores dados nas equações (3.79) e (3.81), obtemos a base simplética real $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^6 = \eta^\dagger(0) \oplus E(\omega_1)$. Desta forma, lembrando que estamos no caso

de $\omega_1 = 1$, a matriz de transição $\tilde{Q}$ da base canônica de $\mathbb{R}^6$ para a base simplética citada acima, é dada por

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2\sqrt{3}}{3} & 1 & 0 \\ -\sqrt{3} & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Então, a forma normal da matriz $A_0(\tilde{\mu}_0)$ em (3.44), dada por $\tilde{Q}^{-1}A_0(\tilde{\mu}_0)\tilde{Q}$, será

$$\mathcal{A}_0(\tilde{\mu}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.83)$$

Portanto, a mudança simplética de coordenadas, $\zeta = \tilde{Q}\tilde{\zeta}$, que normaliza $\tilde{H}_0$ em (3.61) determina que o Hamiltoniano não perturbado $H_0(\xi, \eta, \tilde{\mu}_0)$ seja transformado em

$$\tilde{H}_0(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}(\xi_3^2 + \eta_3^2). \quad (3.84)$$

Consequentemente, sabemos que a mudança simplética de coordenada modifica os outros termos quadráticos $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \tilde{H}_3, \dots$, de $\tilde{H}(\xi, \eta, \nu, \tilde{\mu}_0, \epsilon)$ como em (3.55). Logo, teremos o Hamiltoniano quadrático do sistema e 2π -periódico em ν

$$\tilde{\mathcal{H}}(\zeta, \nu, \tilde{\mu}, \epsilon) = \tilde{\mathcal{H}}_0(\zeta, \tilde{\mu}_0) + \frac{\epsilon}{1!}\tilde{\mathcal{H}}_1(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1) + \frac{\epsilon^2}{2!}\tilde{\mathcal{H}}_2(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) + \dots, \quad (3.85)$$

onde as equações (3.62) até (3.65), definem os novos Hamiltonianos $\tilde{\mathcal{H}}_1, \tilde{\mathcal{H}}_2, \tilde{\mathcal{H}}_3$ e $\tilde{\mathcal{H}}_4$ como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_1 = & \frac{1}{2} \left[(3\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + \eta_3^2 + 4\sqrt{3}\xi_1\xi_2) \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} + 4 \left(\cos \nu - \frac{2}{3} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1^2 + \right. \\ & \left. + \left(3 \cos \nu - 2 \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_2^2 + 4\sqrt{3} \left(-\cos \nu + \frac{2}{3} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1\eta_2 \right], \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_2 = & - \left[(3\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + \eta_3^2 + 4\sqrt{3}\xi_1\xi_2) \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2)}{\xi_1^{*3}} + 4 \left(\cos^2 \nu - \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1^2 + \right. \\ & \left. + \left(3 \cos^2 \nu - 2 \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_2^2 + 4\sqrt{3} \left(-\cos^2 \nu + \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1\eta_2 \right], \end{aligned} \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_3 = & 3 \left[\left(3\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + \eta_3^2 + 4\sqrt{3}\xi_1\xi_2 \right) \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3)}{\xi_1^{*3}} + \right. \\
& + 4 \left(\cos^3 \nu - \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1^2 + \\
& + \left(3 \cos^3 \nu - 2 \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_2^2 + \\
& \left. + 4\sqrt{3} \left(-\cos^3 \nu + \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1 \eta_2 \right], \tag{3.88}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}_4 = & -12 \left[\left(3\xi_1^2 + 4\xi_2^2 + \eta_3^2 + 4\sqrt{3}\xi_1\xi_2 \right) \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4)}{\xi_1^{*3}} + \right. \\
& + 4 \left(\cos^4 \nu - \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1^2 + \\
& + \left(3 \cos^4 \nu - 2 \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_2^2 + \\
& \left. + 4\sqrt{3} \left(-\cos^4 \nu + \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4)}{\xi_1^{*3}} \right) \eta_1 \eta_2 \right]. \tag{3.89}
\end{aligned}$$

3.2 FORMA MATRICIAL DA EQUAÇÃO HOMOLÓGICA

Conforme apresentado na última subseção, para cada valor de ressonância paramétrica μ_0 e $\tilde{\mu}_0$, podemos considerar os Hamiltonianos quadráticos 2π -periódicos

$$\mathcal{H}(\zeta, \nu, \mu, \epsilon) = \mathcal{H}_0(\zeta, \mu_0) + \frac{\epsilon}{1!} \mathcal{H}_1(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1) + \frac{\epsilon^2}{2!} \mathcal{H}_2(\zeta, \nu, \mu_0, \mu_1, \mu_2) + \dots \tag{3.90}$$

e

$$\tilde{\mathcal{H}}(\zeta, \nu, \tilde{\mu}, \epsilon) = \tilde{\mathcal{H}}_0(\zeta, \tilde{\mu}_0) + \frac{\epsilon}{1!} \tilde{\mathcal{H}}_1(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1) + \frac{\epsilon^2}{2!} \tilde{\mathcal{H}}_2(\zeta, \nu, \tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2) + \dots, \tag{3.91}$$

com $\zeta = (\xi, \eta)$ e $\mathcal{H}_0, \tilde{\mathcal{H}}_0$ representando os Hamiltonianos normalizados fornecidos em (3.72) e (3.84), respectivamente.

Nosso objetivo é transformar os Hamiltonianos quadráticos τ -periódicos acima em novos Hamiltonianos quadráticos autônomos, na forma

$$K(\zeta, a, \epsilon) = K_0(\zeta, a_0) + \frac{\epsilon}{1!} K_1(\zeta, a_0, a_1) + \frac{\epsilon^2}{2!} K_2(\zeta, a_0, a_1, a_2) + \dots, \tag{3.92}$$

onde o parâmetro a assume o valor μ ou $\tilde{\mu}$ especificados em (3.52) e (3.53), respectivamente, dependendo se estamos transformando o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ ou $\tilde{\mathcal{H}}$, nesta ordem. Essa transformação é realizada usando o método de Deprit-Hori através de uma transformação simplética

de coordenadas gerada pela função τ -periódica

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \epsilon) = \mathcal{W}_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) + \frac{\epsilon}{1!} \mathcal{W}_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu) + \frac{\epsilon^2}{2!} \mathcal{W}_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu) + \frac{\epsilon^3}{3!} \mathcal{W}_3(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu) + \dots,$$

onde $\mathcal{W}_j$ são polinômios homogêneos de grau dois.

Devido à importância deste método para determinarmos o Hamiltoniano autônomo K , ele será o tema da próxima subseção.

3.2.1 O Método de Deprit-Hori

Nesta subseção, apresentaremos o método de normalização de Deprit-Hori, o qual visa simplificar as funções Hamiltonianas quadráticas através de uma transformação simplética τ -periódica gerada por uma função τ -periódica W , transformação esta que converte o Hamiltoniano, originalmente dependente do tempo, em um Hamiltoniano quadrático autônomo.

Uma descrição detalhada deste processo é encontrada em (CABRAL; DIAS, 2023; MEYER; OFFIN, 2017; ARAUJO; CABRAL, 2021) e (ARAUJO, 2015).

Considere o Hamiltoniano H de um sistema Hamiltoniano linear, dado como a expansão em série de Taylor em função de um pequeno parâmetro ϵ , ou seja,

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} H_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (3.93)$$

O método tem como objetivo, por meio de uma transformação simplética de coordenadas próxima da identidade, transformar (3.93) numa função Hamiltoniana normalizada

$$K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} K_m(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, t). \quad (3.94)$$

A função geradora W , τ -periódica, é também expressa na forma

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t, \epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon^m}{m!} W_{m+1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t). \quad (3.95)$$

Assim, podemos utilizar o método de Deprit-Hori para normalizar um Hamiltoniano quadrático na forma de (3.93), τ -periódico, a fim de construir um Hamiltoniano quadrático autônomo K . Então, ver (KAMEL, 1969; CABRAL; DIAS, 2023; ARAUJO, 2015), utiliza-se da fórmula de Kamel para determinar os K_m em cada processo de normalização.

Teorema 24. *Dado o Hamiltoniano quadrático H como em (3.93), então os polinômios quadráticos de K em (3.94) são calculados pela fórmula*

$$K_m = H_m + \sum_{j=1}^{m-1} (C_{m-1}^{j-1} L_j H_{m-j} + C_{m-1}^j K_{j,m-j}) - \frac{DW_m}{Dt}, \quad (3.96)$$

onde C_j^m é o coeficiente binomial $\binom{m}{j} = \frac{m!}{j!(m-j)!}$, $L_i f$ é o colchete de Poisson de f e W , ou seja,

$$L_i f = \{f, W_i\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial W_i}{\partial \eta_i} - \frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial W_i}{\partial \xi_i} \right), \quad (3.97)$$

$$\frac{DW_m}{Dt} = \frac{\partial W_m}{\partial t} - L_m H_0, \quad (3.98)$$

$$K_{j,i} = L_j K_i - \sum_{s=1}^{j-1} C_{j-1}^{s-1} L_s K_{j-s,i}. \quad (3.99)$$

Além disso, o processo de recorrência inicia com a seguinte condição $K_0 = H_0$.

Por outro lado, segundo Cabral e Dias (2023) podemos escrever a fórmula de Kamel (24) na forma

$$K_m = H^{(m)} + \{H_0, W_m\} - \frac{\partial W_m}{\partial t}, \quad (3.100)$$

com

$$H^{(m)} = H_m + \sum_{j=1}^{m-1} (C_{m-1}^{j-1} L_j H_{m-j} + C_{m-1}^j K_{j,m-j}), \quad (3.101)$$

e o índice (m) indicando que estamos na m -ésima etapa do processo de normalização de H . Portanto, em cada etapa do método de normalização para construir o Hamiltoniano autônomo K , somos levados a resolver uma equação, chamada de *equação homológica*, da forma

$$K_n = H^{(n)} + \{H_0, W_n\} - \frac{\partial W_n}{\partial t} \quad (3.102)$$

para as formas quadráticas K_n , autônoma, e W_n , τ -periódica em t , sendo dada a forma quadrática $H^{(n)}$, τ -periódica em t .

3.2.2 Forma Matricial da Equação Homológica: Hamiltoniano Normalizado (3.72)

Conforme apresentado em Cabral e Dias (2023), considere os monômios dos polinômios quadráticos homogêneos, obedecendo à seguinte ordenação

$$\begin{aligned} & x_1^2, x_1 y_1, y_1^2, x_2^2, x_2 y_2, y_2^2, x_3^2, x_3 y_3, y_3^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_1 y_2, \\ & x_1 y_3, x_2 x_3, x_2 y_1, x_2 y_3, x_3 y_1, x_3 y_2, y_1 y_2, y_1 y_3, y_2 y_3, \end{aligned} \quad (3.103)$$

e os vetores $\mathbf{X}^{(n)}$ e $\mathbf{B}^{(n)}$ dados pelos coeficientes de W_n e $(H^{(n)} - K_n)$, respectivamente. Assim, escrevemos a equação homológica (3.102) em sua forma matricial como

$$\dot{\mathbf{X}}^{(n)} = M \mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}, \quad \text{onde} \quad M \mathbf{X}^{(n)} = \{H_0, W_n\}, \quad \mathbf{B}^{(n)} = H^{(n)} - K_n \quad (3.104)$$

e o índice (n) indica que estamos na n -ésima etapa do processo de normalização.

Nesta subsecção, determinaremos a forma matricial da equação homológica (3.104) na n -ésima etapa do processo de normalização do Hamiltoniano quadrático $\mathcal{H}$ em (3.73), quando o Hamiltoniano quadrático normalizado H_0 é dado por (3.72). Além disso, a partir deste ponto, denotaremos, as formas quadráticas K_n , $\mathcal{H}^{(n)}$ e $\mathcal{W}_n$ por K , $\mathcal{H}$ e $\mathcal{W}$, respectivamente.

Inicialmente, assim como em (3.103), consideraremos os monômios dos polinômios quadráticos homogêneos organizados na seguinte ordem

$$\begin{aligned} &\xi_1^2, \xi_1\eta_1, \eta_1^2, \xi_2^2, \xi_2\eta_2, \eta_2^2, \xi_3^2, \xi_3\eta_3, \eta_3^2, \xi_1\xi_2, \xi_1\xi_3, \xi_1\eta_2, \\ &\xi_1\eta_3, \xi_2\xi_3, \xi_2\eta_1, \xi_2\eta_3, \xi_3\eta_1, \xi_3\eta_2, \eta_1\eta_2, \eta_1\eta_3, \eta_2\eta_3. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Seja a função geradora $\mathcal{W}$ dada pelo polinômio homogêneo de grau 2

$$\mathcal{W} = \sum_{k+l=2} \mathcal{W}_{k_1k_2k_3l_1l_2l_3} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \xi_3^{k_3} \eta_1^{l_1} \eta_2^{l_2} \eta_3^{l_3}. \quad (3.106)$$

Dessa forma, a expansão de $\mathcal{W}$ é composta pelos vinte e um termos a seguir

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \mathcal{W}_{200000}\xi_1^2 + \mathcal{W}_{100100}\xi_1\eta_1 + \mathcal{W}_{000200}\eta_1^2 + \mathcal{W}_{020000}\xi_2^2 + \mathcal{W}_{010010}\xi_2\eta_2 + \mathcal{W}_{000020}\eta_2^2 + \mathcal{W}_{002000}\xi_3^2 + \\ & + \mathcal{W}_{001001}\xi_3\eta_3 + \mathcal{W}_{000002}\eta_3^2 + \mathcal{W}_{110000}\xi_1\xi_2 + \mathcal{W}_{101000}\xi_1\xi_3 + \mathcal{W}_{100010}\xi_1\eta_2 + \mathcal{W}_{100001}\xi_1\eta_3 + \mathcal{W}_{011000}\xi_2\xi_3 + \\ & + \mathcal{W}_{010100}\xi_2\eta_1 + \mathcal{W}_{010001}\xi_2\eta_3 + \mathcal{W}_{001100}\xi_3\eta_1 + \mathcal{W}_{001010}\xi_3\eta_2 + \mathcal{W}_{000110}\eta_1\eta_2 + \mathcal{W}_{000101}\eta_1\eta_3 + \mathcal{W}_{000011}\eta_2\eta_3. \end{aligned}$$

Neste caso, tomamos o vetor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{21}) \in \mathbb{R}^{21}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = & (\mathcal{W}_{200000}, \mathcal{W}_{100100}, \mathcal{W}_{000200}, \mathcal{W}_{020000}, \mathcal{W}_{010010}, \mathcal{W}_{000020}, \mathcal{W}_{002000}, \\ & \mathcal{W}_{001001}, \mathcal{W}_{000002}, \mathcal{W}_{110000}, \mathcal{W}_{101000}, \mathcal{W}_{100010}, \mathcal{W}_{100001}, \mathcal{W}_{011000}, \\ & \mathcal{W}_{010100}, \mathcal{W}_{010001}, \mathcal{W}_{001100}, \mathcal{W}_{001010}, \mathcal{W}_{000110}, \mathcal{W}_{000101}, \mathcal{W}_{000011}). \end{aligned} \quad (3.107)$$

A partir do Hamiltoniano quadrático não perturbado $\mathcal{H}_0$ em (3.72), podemos calcular o colchete de Poisson

$$\{H, W\} = \sum_{i=1}^3 (H_{\xi_i} W_{\eta_i} - H_{\eta_i} W_{\xi_i}),$$

o que nos leva à seguinte expressão

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\} = & \omega_1 \mathcal{W}_{100100} \xi_1^2 - 2\omega_1 (\mathcal{W}_{200000} - \mathcal{W}_{000200}) \xi_1 \eta_1 - \omega_1 \mathcal{W}_{100100} \eta_1^2 + \\
& + (\mathcal{W}_{010010} + \omega_2 \mathcal{W}_{010001}) \xi_2^2 + (2\mathcal{W}_{000020} + \omega_2 \mathcal{W}_{000011} - \omega_2 \mathcal{W}_{011000}) \xi_2 \eta_2 - \\
& - \omega_2 \mathcal{W}_{001010} \eta_2^2 + \omega_2 \mathcal{W}_{001010} \xi_3^2 + (-2\mathcal{W}_{002000} + \omega_2 \mathcal{W}_{000011} - \omega_2 \mathcal{W}_{011000}) \xi_3 \eta_3 - \\
& - (\mathcal{W}_{001001} + \omega_2 \mathcal{W}_{010001}) \eta_3^2 + (\mathcal{W}_{100010} + \omega_1 \mathcal{W}_{010100} + \omega_2 \mathcal{W}_{100001}) \xi_1 \xi_2 + \\
& + (\omega_1 \mathcal{W}_{001100} + \omega_2 \mathcal{W}_{100010}) \xi_1 \xi_3 + (\omega_1 \mathcal{W}_{000110} - \omega_2 \mathcal{W}_{101000}) \xi_1 \eta_2 + \\
& + (-\mathcal{W}_{101000} + \omega_1 \mathcal{W}_{000101} - \omega_2 \mathcal{W}_{110000}) \xi_1 \eta_3 + (\mathcal{W}_{001010} + \omega_2 \mathcal{W}_{010010} + \omega_2 \mathcal{W}_{001001}) \xi_2 \xi_3 + \\
& + (\mathcal{W}_{000110} - \omega_1 \mathcal{W}_{110000} + \omega_2 \mathcal{W}_{000101}) \xi_2 \eta_1 + \\
& + (\mathcal{W}_{000011} - \mathcal{W}_{011000} + 2\omega_2 \mathcal{W}_{000002} - 2\omega_2 \mathcal{W}_{020000}) \xi_2 \eta_3 + \\
& + (-\omega_1 \mathcal{W}_{101000} + \omega_2 \mathcal{W}_{000110}) \xi_3 \eta_1 + 2\omega_2 (\mathcal{W}_{000020} - \mathcal{W}_{002000}) \xi_3 \eta_2 - \\
& - (\omega_1 \mathcal{W}_{100010} + \omega_2 \mathcal{W}_{001100}) \eta_1 \eta_2 - (\mathcal{W}_{001100} + \omega_1 \mathcal{W}_{100001} + \omega_2 \mathcal{W}_{010100}) \eta_1 \eta_3 - \\
& - (\mathcal{W}_{001010} + \omega_2 \mathcal{W}_{010010} + \omega_2 \mathcal{W}_{001001}) \eta_2 \eta_3.
\end{aligned}$$

Portanto, os coeficientes do colchete de Poisson $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}$ são dados por

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{200000} &= \omega_1 \mathcal{W}_{100100}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{100100} &= -2\omega_1 (\mathcal{W}_{200000} - \mathcal{W}_{000200}); \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{000200} &= -\omega_1 \mathcal{W}_{100100}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{020000} &= \mathcal{W}_{010010} + \omega_2 \mathcal{W}_{010001}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{010010} &= 2\mathcal{W}_{000020} + \omega_2 \mathcal{W}_{000011} - \omega_2 \mathcal{W}_{011000}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{000020} &= -\omega_2 \mathcal{W}_{001010}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{002000} &= \omega_2 \mathcal{W}_{001010}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{001001} &= \omega_2 \mathcal{W}_{000011} - \omega_2 \mathcal{W}_{011000} - 2\mathcal{W}_{002000}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{000002} &= -\omega_2 \mathcal{W}_{010001} - \mathcal{W}_{001001}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{110000} &= \mathcal{W}_{100010} + \omega_1 \mathcal{W}_{010100} + \omega_2 \mathcal{W}_{100001}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{101000} &= \omega_2 \mathcal{W}_{100010} + \omega_1 \mathcal{W}_{001100}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{100010} &= \omega_1 \mathcal{W}_{000110} - \omega_2 \mathcal{W}_{101000}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{100001} &= \omega_1 \mathcal{W}_{000101} - \omega_2 \mathcal{W}_{110000} - \mathcal{W}_{101000}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{011000} &= \mathcal{W}_{001010} + \omega_2 \mathcal{W}_{010010} + \omega_2 \mathcal{W}_{001001}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{010100} &= -\omega_1 \mathcal{W}_{110000} + \mathcal{W}_{000110} + \omega_2 \mathcal{W}_{000101}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{010001} &= \mathcal{W}_{000011} - \mathcal{W}_{011000} + 2\omega_2 \mathcal{W}_{000002} - 2\omega_2 \mathcal{W}_{020000};
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{001100} &= -\omega_1 \mathcal{W}_{101000} + \omega_2 \mathcal{W}_{000110}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{001010} &= 2\omega_2 \mathcal{W}_{000020} - 2\omega_2 \mathcal{W}_{002000}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{000110} &= -\omega_1 \mathcal{W}_{100010} - \omega_2 \mathcal{W}_{001100}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{000101} &= -\omega_1 \mathcal{W}_{100001} - \mathcal{W}_{001100} - \omega_2 \mathcal{W}_{010100}; \\
\{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_{000011} &= -\omega_2 \mathcal{W}_{010010} - \omega_2 \mathcal{W}_{001001} - \mathcal{W}_{001010}.
\end{aligned}$$

Por meio da equação homológica do método de Deprit-Hori (3.102), escrevemos

$$\frac{d\mathcal{W}}{d\nu} = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\} + (\mathcal{H} - K). \quad (3.109)$$

Como definimos $\mathbf{X}$ a partir dos coeficientes dos monômios em (3.105), os quais aparecem em $\mathcal{W}$ dado na equação (3.106), então, ao compararmos os coeficientes desses monômios em ambos os lados da equação homológica (3.109), obtemos a expressão

$$X'_j = \{\mathcal{H}_0, \mathcal{W}\}_j + (\mathcal{H}_j - K_j), \quad \text{com } j = 1, \dots, 21 \text{ e } ' := \frac{d}{d\nu}, \quad (3.110)$$

que é um sistema equação diferencial não-homogêneo, 2π -periódico no tempo ν . Equivalentemente, conforme em (3.104), segue a forma matricial da equação homológica

$$\mathbf{X}' = M\mathbf{X} + (\mathcal{H} - K), \quad (3.111)$$

onde, a partir de (3.108), a matriz M de ordem 21×21 é dada a seguir

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
01)	0	ω_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02)	$-2\omega_1$	0	$2\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03)	0	$-\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
04)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_2	0	0	0	0	0
05)	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0	0	0	ω_2
06)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0
07)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_2	0	0	0
08)	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0	0	0	ω_2
09)	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0	0
10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	ω_2	0	ω_1	0	0	0	0	0	0
11)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_2	0	0	0	0	ω_1	0	0	0	0
12)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	ω_1	0	0
13)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_1	0
14)	0	0	0	0	ω_2	0	0	ω_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
15)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	ω_2	0
16)	0	0	0	$-2\omega_2$	0	0	0	0	$2\omega_2$	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1
17)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	ω_2	0	0
18)	0	0	0	0	0	$2\omega_2$	$-2\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0
20)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	$-\omega_2$	0	-1	0	0	0	0
21)	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Por outro lado, antes de analisarmos a equação (3.111) por meio da fórmula da variação dos parâmetro, com o objetivo de determinarmos o Hamiltoniano autônomo K , precisamos encontrar uma matriz semelhante à matriz M para simplificar essa análise. Os cálculos para a determinação dessa matriz semelhante são apresentados no Apêndice A.

No Apêndice A provamos que a matriz J tal que $J = P^{-1}MP$, possui a seguinte forma

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
01)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03)	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
04)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06)	0	0	0	0	0	$2i\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
07)	0	0	0	0	0	0	$-2i\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
08)	0	0	0	0	0	0	0	$2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
09)	0	0	0	0	0	0	0	1	$2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0	0	0	0
15)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0	0	0
16)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0	0
17)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0
18)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$i(\omega_1 - \omega_2)$	0	0	0	0
19)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$i(\omega_1 - i\omega_2)$	0	0	0
20)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-i(\omega_1 - i\omega_2)$	0	0
21)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-i(\omega_1 - \omega_2)$	0

De acordo com Teorema 2.1 de Doering e Lopes (2010), para um instante qualquer de tempo t , temos que $e^{tJ} = P^{-1}e^{tM}P$, mostrando que e^{tJ} é a matriz de e^{tM} na base de Jordan (ver Apêndice A). Além disso, temos a igualdade

$$P^{-1}(e^{-tM} - I)P = (e^{-tJ} - I), \quad (3.112)$$

onde I é a matriz identidade. Essa relação nos permite determinar a parte invertível da matriz $(e^{-tM} - I)$, uma vez que a equação (3.112) estabelece uma relação de semelhança entre as matrizes $(e^{-tM} - I)$ e $(e^{-tJ} - I)$. Vale ressaltar que, posteriormente, essa informação será essencial para anular os coeficientes do Hamiltoniano K .

Por sua vez, recordando que no problema elíptico o tempo é representado pela anomalia verdadeira ν e, assim, reescrevemos a matriz νJ como uma matriz em blocos

$$\nu J = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & O \\ O & \mathbf{J}_2 \end{bmatrix},$$

na qual

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\mathbf{J}_2$ é uma matriz de ordem 16×16 cujas as entradas na diagonal principal são dadas por $\pm 2i\omega_1\nu$, $\pm 2i\omega_2\nu$, $\pm i(\omega_1 + \omega_2)\nu$ e $\pm i(\omega_1 - \omega_2)\nu$. Desta forma,

$$e^{\nu J} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_1} & O \\ O & e^{\mathbf{J}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\nu) & O \\ O & B_J(\nu) \end{bmatrix},$$

onde

$$A(\nu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu^2}{2} & \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

e $B_J(\nu)$ é a matriz de Jordan cuja a diagonal principal é formada pelos elementos

$$\begin{aligned} & e^{2i\omega_1\nu}, e^{-2i\omega_1\nu}, e^{2i\omega_2\nu}, e^{2i\omega_2\nu}, e^{2i\omega_2\nu}, e^{-2i\omega_2\nu}, e^{-2i\omega_2\nu}, e^{-2i\omega_2\nu}, e^{i(\omega_1+\omega_2)\nu}, e^{i(\omega_1+\omega_2)\nu}, \\ & e^{-i(\omega_1+\omega_2)\nu}, e^{-i(\omega_1+\omega_2)\nu}, e^{i(\omega_1-\omega_2)\nu}, e^{i(\omega_1-\omega_2)\nu}, e^{-i(\omega_1-\omega_2)\nu}, e^{-i(\omega_1-\omega_2)\nu}. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Note que, se $\nu = -\tau$, onde $\tau = 2\pi$ é o período do sistema Hamiltoniano, então, como ω_1, ω_2 são dados pela equação (3.47), as exponenciais acima são diferentes de 1. Com isso, $B_J(-\tau) - I$ é uma matriz invertível.

Assim, na base de Jordan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{21}$ apresentada no Apêndice A, a matriz $e^{\nu M} - I$ será

$$e^{\nu M} - I = \begin{pmatrix} A(\nu) - I & O \\ O & B_J(\nu) - I \end{pmatrix}. \quad (3.115)$$

3.2.3 Forma Matricial da Equação Homológica: Hamiltoniano Normalizado (3.84)

Na presente subseção, de forma análoga à anterior, apresentaremos a forma matricial da equação homológica (3.102), agora considerando o Hamiltoniano normalizado $\tilde{\mathcal{H}}_0$ em (3.84), o qual surge ao levarmos em conta o valor de ressonância paramétrica $\tilde{\mu}_0$. Ademais, denotaremos por $\mathcal{K}$, $\tilde{\mathcal{H}}$ e $\tilde{\mathcal{W}}$ as formas quadráticas K_n , $\mathcal{H}^{(n)}$ e $\mathcal{W}_n$, respectivamente, que aparecem na forma matricial da equação homológica na n -ésima etapa do processo de normalização.

Sejam $\tilde{\mathcal{W}}$ a função geradora dada pelo polinômio quadrático homogêneo em (3.106), i.e.,

$$\begin{aligned} \mathcal{W} = & \tilde{\mathcal{W}}_{200000}\xi_1^2 + \tilde{\mathcal{W}}_{100100}\xi_1\eta_1 + \tilde{\mathcal{W}}_{000200}\eta_1^2 + \tilde{\mathcal{W}}_{020000}\xi_2^2 + \tilde{\mathcal{W}}_{010010}\xi_2\eta_2 + \tilde{\mathcal{W}}_{000020}\eta_2^2 + \tilde{\mathcal{W}}_{002000}\xi_3^2 + \\ & + \tilde{\mathcal{W}}_{001001}\xi_3\eta_3 + \tilde{\mathcal{W}}_{000002}\eta_3^2 + \tilde{\mathcal{W}}_{110000}\xi_1\xi_2 + \tilde{\mathcal{W}}_{101000}\xi_1\xi_3 + \tilde{\mathcal{W}}_{100010}\xi_1\eta_2 + \tilde{\mathcal{W}}_{100001}\xi_1\eta_3 + \tilde{\mathcal{W}}_{011000}\xi_2\xi_3 + \\ & + \tilde{\mathcal{W}}_{010100}\xi_2\eta_1 + \tilde{\mathcal{W}}_{010001}\xi_2\eta_3 + \tilde{\mathcal{W}}_{001100}\xi_3\eta_1 + \tilde{\mathcal{W}}_{001010}\xi_3\eta_2 + \tilde{\mathcal{W}}_{000110}\eta_1\eta_2 + \tilde{\mathcal{W}}_{000101}\eta_1\eta_3 + \tilde{\mathcal{W}}_{000011}\eta_2\eta_3, \end{aligned}$$

e $\mathbf{X}$ o vetor em $\mathbb{R}^{21}$ cujas componentes são os coeficientes $\tilde{\mathcal{W}}_{k_1k_2k_3l_1l_2l_3}$ correspondentes aos monômios organizados segundo a ordenação definida em (3.105). Com isso, o colchete de Poisson $\{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}$ é dado por

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\} = & 2\tilde{\mathcal{W}}_{200000}\xi_1\eta_1 + \tilde{\mathcal{W}}_{100100}\eta_1^2 + \tilde{\mathcal{W}}_{010010}\xi_2^2 + 2(\tilde{\mathcal{W}}_{000020} - \tilde{\mathcal{W}}_{020000})\xi_2\eta_2 - \\ & - \tilde{\mathcal{W}}_{010010}\eta_2^2 + \tilde{\mathcal{W}}_{001001}\xi_3^2 + 2(\tilde{\mathcal{W}}_{000002} - \tilde{\mathcal{W}}_{002000})\xi_3\eta_3 - \tilde{\mathcal{W}}_{001001}\eta_3^2 + \\ & + \tilde{\mathcal{W}}_{100010}\xi_1\xi_2 + \tilde{\mathcal{W}}_{100001}\xi_1\xi_3 - \tilde{\mathcal{W}}_{110000}\xi_1\eta_2 - \tilde{\mathcal{W}}_{101000}\xi_1\eta_3 + \\ & + (\tilde{\mathcal{W}}_{010001} + \tilde{\mathcal{W}}_{001010})\xi_2\xi_3 + (\tilde{\mathcal{W}}_{000110} + \tilde{\mathcal{W}}_{110000})\xi_2\eta_1 + (\tilde{\mathcal{W}}_{000011} - \tilde{\mathcal{W}}_{011000})\xi_2\eta_3 + \\ & + (\tilde{\mathcal{W}}_{000101} + \tilde{\mathcal{W}}_{101000})\xi_3\eta_1 + (\tilde{\mathcal{W}}_{000011} - \tilde{\mathcal{W}}_{011000})\xi_3\eta_2 + (\tilde{\mathcal{W}}_{100010} - \tilde{\mathcal{W}}_{010100})\eta_1\eta_2 + \\ & + (\tilde{\mathcal{W}}_{100001} - \tilde{\mathcal{W}}_{001100})\eta_1\eta_3 - (\tilde{\mathcal{W}}_{001010} + \tilde{\mathcal{W}}_{010001})\eta_2\eta_3. \end{aligned}$$

Dessa forma, os coeficientes do colchete de Poisson $\{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}$ serão expressos como

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{200000} &= 0; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{100010} &= -\tilde{\mathcal{W}}_{110000}; \\ \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{100100} &= 2\tilde{\mathcal{W}}_{200000}; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{100001} &= -\tilde{\mathcal{W}}_{101000}; \\ \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{000200} &= \tilde{\mathcal{W}}_{100100}; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{011000} &= \tilde{\mathcal{W}}_{010001} + \tilde{\mathcal{W}}_{001010}; \\ \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{020000} &= \tilde{\mathcal{W}}_{010010}; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{010100} &= \tilde{\mathcal{W}}_{000110} + \tilde{\mathcal{W}}_{110000}; \\ \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{010010} &= 2(\tilde{\mathcal{W}}_{000020} - \tilde{\mathcal{W}}_{020000}); & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{010001} &= \tilde{\mathcal{W}}_{000011} - \tilde{\mathcal{W}}_{011000}; \\ \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{000020} &= -\tilde{\mathcal{W}}_{010010}; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{001100} &= \tilde{\mathcal{W}}_{000101} + \tilde{\mathcal{W}}_{101000}; \\ \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{002000} &= \tilde{\mathcal{W}}_{001001}; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{001010} &= \tilde{\mathcal{W}}_{000011} - \tilde{\mathcal{W}}_{011000}; \\ \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{001001} &= 2(\tilde{\mathcal{W}}_{000002} - \tilde{\mathcal{W}}_{002000}); & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{000110} &= \tilde{\mathcal{W}}_{100010} - \tilde{\mathcal{W}}_{010100}; \end{aligned} \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned}
\{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{000002} &= -\tilde{\mathcal{W}}_{001001}; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{000101} &= \tilde{\mathcal{W}}_{100001} - \tilde{\mathcal{W}}_{001100}; \\
\{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{110000} &= \tilde{\mathcal{W}}_{100010}; & \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{000011} &= -\tilde{\mathcal{W}}_{001010} - \tilde{\mathcal{W}}_{010001}. \\
\{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}\}_{101000} &= \tilde{\mathcal{W}}_{100001};
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{X}$ é um vetor formado pelos coeficientes de $\tilde{\mathcal{W}}$, então, com base na subseção anterior, temos a forma matricial $\mathbf{X}' = \tilde{M}\mathbf{X} + (\tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{K})$, com a matriz $\tilde{M}$ igual a

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
01)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02)	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03)	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
04)	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05)	0	0	0	-2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06)	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
07)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
08)	0	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
09)	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
12)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
15)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
16)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1
17)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
18)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	1
19)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
20)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	0	0
21)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0

(3.117)

3.3 O HAMILTONIANO AUTÔNOMO QUADRÁTICO

Neste momento, com base no método de Deprit-Hori (ver subseção 3.2.1), estamos prontos para determinar o Hamiltoniano autônomo quadrático correspondente a cada extremidade da região de equilíbrio linearmente estável (3.35), onde foram definidos os valores de ressonância

paramétrica μ_0 e $\tilde{\mu}_0$, conforme apresentado ao longo do trabalho.

Conforme o método de Deprit-Hori, em cada etapa do processo de normalização dos Hamiltonianos quadráticos, 2π -periódicos, $\mathcal{H}$ em (3.73) e $\tilde{\mathcal{H}}$ em (3.85), os quais dependem do tempo ν , a equação homológica (3.102) pode ser expressa em sua forma matricial como $\mathcal{W}'_n = M\mathcal{W}_n + (\mathcal{H}_n - K_n)$. Assim, pela fórmula da variação dos parâmetros (capítulo 1 de Cabral e Dias (2023)), para cada etapa do processo de normalização, teremos

$$\mathcal{W}_n(t) = e^{tM}\mathcal{W}_n(0) + e^{tM} \int_0^t e^{-sM}(\mathcal{H}_n(s) - K_n(s))ds,$$

onde n representa o n -ésimo passo no processo de normalização com $n \geq 1$, pois no Teorema 24 o processo de recorrência inicia com a condição $\mathcal{H}_0 = K_0$.

O objetivo agora é encontrar uma solução $\mathcal{W}_n(t)$ da forma matricial da equação homológica, que seja τ -periódica, para um Hamiltoniano K_n possivelmente autônomo. Com isso, podemos afirmar que $\mathcal{W}_n(\tau) = \mathcal{W}_n(0)$ e $K_n = K_n(s)$ para todo tempo s , implicam em

$$(e^{-\tau M} - I)\mathcal{W}_n(0) = \int_0^\tau e^{-sM}(\mathcal{H}_n(s) - K_n)ds. \quad (3.118)$$

Com base no exposto acima e pelas informações das subseções 3.2.2 e 3.2.3, podemos, então, prosseguir com a determinação dos possíveis Hamiltonianos autônomos K e $\mathcal{K}$.

3.3.1 Cálculo do Hamiltoniano K

Nesta subseção, determinaremos o Hamiltoniano autônomo quadrático K correspondente ao extremo esquerdo da região de equilíbrio linearmente estável definida em (3.34), onde o valor de ressonância paramétrica é $\mu_0 = \frac{8}{9}\xi_1^*$.

Diante da equação (3.118), expressaremos $\mathcal{W}_n(0)$, $\mathcal{H}_n$ e K_n em termos da base de Jordan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{21}$, dada no Apêndice A, como

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n(0) &= w_1^{(n)}\mathbf{v}_1 + w_2^{(n)}\mathbf{v}_2 + \dots + w_{21}^{(n)}\mathbf{v}_{21}, \\ \mathcal{H}_n &= h_1^{(n)}\mathbf{v}_1 + h_2^{(n)}\mathbf{v}_2 + \dots + h_{21}^{(n)}\mathbf{v}_{21}, \\ K_n &= k_1^{(n)}\mathbf{v}_1 + k_2^{(n)}\mathbf{v}_2 + \dots + k_{21}^{(n)}\mathbf{v}_{21}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

A fim de facilitarmos a notação, denotamos

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= (w_1^{(n)}, w_2^{(n)}, \dots, w_{21}^{(n)}) = (\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}) \in \mathbb{C}^5 \times \mathbb{C}^{16}, \\ \mathbf{h} &= (h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, \dots, h_{21}^{(n)}) = (\mathbf{h}^{(1)}, \mathbf{h}^{(2)}), \end{aligned}$$

$$\mathbf{k} = (k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, \dots, k_{21}^{(n)}) = (\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)}).$$

Usando $\mathcal{W}_n(0)$, $\mathcal{H}_n$ e K_n dados anteriormente, e as equações (3.115) e (3.118), segue que

$$(A(-\tau) - I) \mathbf{w}^{(1)} = \int_0^\tau A(-s)(\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{k}^{(1)})ds, \quad (3.120)$$

$$(B_J(-\tau) - I) \mathbf{w}^{(2)} = \int_0^\tau B_J(-s)(\mathbf{h}^{(2)} - \mathbf{k}^{(2)})ds. \quad (3.121)$$

No entanto, pela expressão (3.113), temos que

$$(A(-\tau) - I) \mathbf{w}^{(1)} = (0, -w_1^{(n)}\tau, w_1^{(n)}\frac{\tau^2}{2} - w_2^{(n)}\tau, 0, 0)^T \quad (3.122)$$

e

$$A(-s)(\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{k}^{(1)}) = \begin{pmatrix} h_1^{(n)} - k_1^{(n)} \\ -(h_1^{(n)} - k_1^{(n)})s + (h_2^{(n)} - k_2^{(n)}) \\ (h_1^{(n)} - k_1^{(n)})\frac{s^2}{2} - (h_2^{(n)} - k_2^{(n)})s + (h_3^{(n)} - k_3^{(n)}) \\ h_4^{(n)} - k_4^{(n)} \\ h_5^{(n)} - k_5^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (3.123)$$

Escolhendo $k_2^{(n)} = k_3^{(n)} = 0$ em (3.122) e (3.123), obtemos, por (3.120), as igualdades

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau h_1^{(n)}(s)ds, \\ k_4^{(n)} &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau h_4^{(n)}(s)ds, \\ k_5^{(n)} &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau h_5^{(n)}(s)ds \end{aligned} \quad (3.124)$$

e

$$\begin{aligned} -w_1^{(n)}\tau &= \int_0^\tau [-(h_1^{(n)}(s) - k_1^{(n)})s + h_2^{(n)}(s)] ds, \\ w_1^{(n)}\frac{\tau^2}{2} - w_2^{(n)}\tau &= \int_0^\tau \left[(h_1^{(n)}(s) - k_1^{(n)})\frac{s^2}{2} - (h_2^{(n)}(s))s + h_3^{(n)}(s) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Em vista disto, concluímos de (3.124) e (3.125) que podemos determinar os coeficientes $k_1^{(n)}, \dots, k_5^{(n)}, w_1^{(n)}, w_2^{(n)}$, enquanto escolhemos $w_j^{(n)} = 0$ para $j = 3, 4, 5$.

Por outro lado, como a matriz $B_J(-\tau) - I$ é invertível, iremos tomar $\mathbf{k}^{(2)} = 0$, isto é, $k_j^{(n)} = 0$ para $j = 6, \dots, 21$. Consequentemente, a equação (3.121) implica que

$$\mathbf{w}^{(2)} = (B_J(-\tau) - I)^{-1} \int_0^\tau B_J(-s)\mathbf{h}^2(s)ds, \quad (3.126)$$

ou seja, é possível determinar os valores de $w_j^{(n)}$ com $j = 6, \dots, 21$. Portanto, a partir da determinação dos coeficientes $w_j^{(n)}$, $j = 1, \dots, 21$, temos a função geradora $\mathcal{W}_n$, 2π -periódica,

da transformação linear simplética que transforma o termo quadrático 2π -periódico $\mathcal{H}_n$ em um termo autônomo K_n .

Uma vez que $k_j^{(n)} = 0$ para $j = 6, \dots, 21$, verifica-se que $K_n = k_1^{(n)} \mathbf{v}_1 + \dots + k_5^{(n)} \mathbf{v}_5$. Mas, $k_2^{(n)}$ e $k_3^{(n)}$ também foram tomados iguais a zero. Portanto, considerando $K^\vee$ como o Hamiltoniano na base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{21}$ e pela matriz de mudança de base P em (A.2), temos que o Hamiltoniano na base euclidiana é dado por $K_n = PK^\vee$, ou seja,

$$K_n = \left(k_4^{(n)}, 0, k_4^{(n)}; 0, 0, \frac{k_1^{(n)}}{2}; \frac{k_1^{(n)}}{2}, 0, 0; 0, 0, 0; 0, k_5^{(n)}, 0; 0, 0, 0; 0, 0, k_5^{(n)} \right). \quad (3.127)$$

Entretanto, o termo autônomo quadrático K_n pode ser escrito na forma

$$K_n(\zeta, \mu) = \sum_{\alpha+\beta=2} k_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}^{(n)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3}. \quad (3.128)$$

Neste caso, ao comparar a expressão (3.127) com os vinte e um coeficientes provenientes dos monômios resultantes da expansão de K_n em (3.128), obtemos a forma autônoma real de K_n

$$K_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = k_4^{(n)}(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{k_1^{(n)}}{2}(\xi_3^2 + \eta_2^2) + k_5^{(n)}(\xi_2\xi_3 + \eta_2\eta_3). \quad (3.129)$$

Assim, por (3.124) e (3.129), determinaremos o Hamiltoniano autônomo quadrático

$$K = K_0 + \frac{\epsilon}{1!} K_1 + \frac{\epsilon^2}{2!} K_2 + \frac{\epsilon^3}{3!} K_3 + \frac{\epsilon^4}{4!} K_4 + \dots$$

Inicialmente, considere a forma quadrática, definida para todo $n \in \mathbb{N}$, como

$$\mathcal{H}_n(\zeta, \nu, \mu) = \sum_{\alpha+\beta=2} h_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}^{(n)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3}. \quad (3.130)$$

Além disso, o Hamiltoniano $\mathcal{H}_n$ na base euclidiana $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{21}$, com os coeficientes seguindo a ordenação conforme equação (3.105), será dado por

$$\mathcal{H}_n = h_1^{(n)} \mathbf{e}_1 + h_2^{(n)} \mathbf{e}_2 + \dots + h_{21}^{(n)} \mathbf{e}_{21}. \quad (3.131)$$

Observe que, a partir das equações (3.74) a (3.77), os coeficientes $h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_{10}^{(n)}, h_{11}^{(n)}, h_{12}^{(n)}, h_{13}^{(n)}, h_{15}^{(n)}, h_{17}^{(n)}, h_{19}^{(n)}, h_{20}^{(n)}$ são todos identicamente nulos, e que $h_6^{(n)} = h_7^{(n)}$.

A mudança da base euclidiana para a base formada pelos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{21}$ é realizada por meio da matriz de mudança de base P em (A.2). Assim, a forma quadrática $\mathcal{H}_n$ na base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{21}$, agora denotado por $\mathcal{H}_n^\vee$, é obtida pela igualdade $\mathcal{H}_n^\vee = P^{-1}\mathcal{H}_n$, a saber

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^\vee = \frac{1}{2} & \left(4h_6^{(n)}, h_5^{(n)} - h_8^{(n)}, h_4^{(n)} + h_9^{(n)}; h_3^{(n)}, h_{14}^{(n)} + h_{21}^{(n)}, \frac{h_3^{(n)}}{2}; \right. \\ & \frac{h_3^{(n)}}{2}, h_{18}^{(n)}, \frac{1}{2}(h_{14}^{(n)} - h_{21}^{(n)} - ih_5^{(n)} - ih_8^{(n)}); \frac{1}{2}(-h_{16}^{(n)} - ih_4^{(n)} + ih_9^{(n)}), h_{18}^{(n)}, \\ & \left. \frac{1}{2}(h_{14}^{(n)} - h_{21}^{(n)} + ih_5^{(n)} + ih_8^{(n)}); \frac{1}{2}(-h_{16}^{(n)} + ih_4^{(n)} - ih_9^{(n)}), 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0 \right). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Portanto, os coeficientes de $\mathcal{H}_n^y$ que ajudarão a obter os $k_1^{(n)}$, $k_4^{(n)}$ e $k_5^{(n)}$, são

$$h_1^{(n)}(\nu) = 2h_6^{(n)}, \quad h_4^{(n)}(\nu) = \frac{h_3^{(n)}}{2}, \quad h_5^{(n)}(\nu) = \frac{1}{2}(h_{14}^{(n)} + h_{21}^{(n)}). \quad (3.133)$$

No caso particular $n = 1$ na equação (3.133), e usamos os coeficientes em (3.74), obtêm-se

$$\begin{aligned} h_1^{(1)}(\nu) &= \frac{9}{5} \left(\cos \nu + \frac{1}{2\xi_1^{*3}}(\mu_1 - \mu_0 \cos \nu) \right), \\ h_4^{(1)}(\nu) &= \frac{3}{16} \sqrt{2} \left(\cos \nu + \frac{1}{\xi_1^{*3}}(\mu_1 - \mu_0 \cos \nu) \right), \\ h_5^{(1)}(\nu) &= -\frac{6}{25} \sqrt{5} \left(\cos \nu + \frac{7}{4} \frac{1}{\xi_1^{*3}}(\mu_1 - \mu_0 \cos \nu) \right). \end{aligned}$$

Substituindo $h_1^{(1)}$, $h_4^{(1)}$ e $h_5^{(1)}$ acima na expressões em (3.124) com $\tau = 2\pi$, obtemos

$$k_1^{(1)} = \frac{9}{10} \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}}, \quad k_4^{(1)} = \frac{3\sqrt{2}}{16} \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}} \quad \text{e} \quad k_5^{(1)} = -\frac{21\sqrt{5}}{50} \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}}. \quad (3.134)$$

Desta forma, o termo autônomo quadrático real K_1 , apresentado em (3.129) para $n = 1$, é

$$K_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mu) = \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3\sqrt{2}}{16} (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{9}{20} (\xi_3^2 + \eta_2^2) - \frac{21}{50} \sqrt{5} (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3) \right). \quad (3.135)$$

De forma análoga, aplicaremos o processo descrito acima para o Hamiltoniano $\mathcal{H}_2$ em (3.75). Em vista disto, concluímos que $h_1^{(2)}$, $h_4^{(2)}$, e $h_5^{(2)}$ de $\mathcal{H}_2^y$ são

$$\begin{aligned} h_1^{(2)}(\nu) &= \frac{18}{5} \left(-\cos^2 \nu + \frac{1}{2\xi_1^{*3}}(\mu_0 \cos^2 \nu - \mu_1 \cos \nu + \mu_2) \right), \\ h_4^{(2)}(\nu) &= \frac{3}{8} \sqrt{2} \left(-\cos^2 \nu + \frac{1}{\xi_1^{*3}}(\mu_0 \cos^2 \nu - \mu_1 \cos \nu + \mu_2) \right), \\ h_5^{(2)}(\nu) &= -\frac{12}{25} \sqrt{5} \left(-\cos^2 \nu + \frac{7}{4} \frac{1}{\xi_1^{*3}}(\mu_0 \cos^2 \nu - \mu_1 \cos \nu + \mu_2) \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} k_1^{(2)} &= -\frac{9}{5} + \frac{9}{5\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right), \\ k_4^{(2)} &= -\frac{3\sqrt{2}}{16} + \frac{3\sqrt{2}}{8\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right), \\ k_5^{(2)} &= \frac{6\sqrt{5}}{25} - \frac{21\sqrt{5}}{25\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right). \end{aligned} \quad (3.136)$$

Consequentemente, pela (3.129) com $n = 2$, chegamos ao termo autônomo real K_2 a seguir

$$\begin{aligned} K_2(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mu) &= \frac{3\sqrt{2}}{8} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \\ &+ \frac{9}{10} \left[-1 + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] (\xi_3^2 + \eta_2^2) + \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$+ \frac{\sqrt{5}}{25} \left[6 - \frac{21}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3).$$

Analogamente, pelas equações (3.76) e (3.77) concluímos que os termos K_3 e K_4 têm, respectivamente, os seguintes coeficientes

$$k_1^{(3)} = \frac{27}{5\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right), \quad k_4^{(3)} = \frac{9\sqrt{2}}{8\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right), \quad k_5^{(3)} = -\frac{63\sqrt{5}}{25\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right); \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} k_1^{(4)} &= -\frac{81}{5} + \frac{54}{5\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right), \\ k_4^{(4)} &= -\frac{27\sqrt{2}}{16} + \frac{9\sqrt{2}}{4\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right), \\ k_5^{(4)} &= \frac{54\sqrt{5}}{25} - \frac{126\sqrt{5}}{25\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right). \end{aligned} \quad (3.139)$$

Por conseguinte,

$$K_3(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mu) = \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right) \left(\frac{9\sqrt{2}}{8\xi_1^{*3}} (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{27}{10\xi_1^{*3}} (\xi_3^2 + \eta_2^2) - \frac{63\sqrt{5}}{25\xi_1^{*3}} (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3) \right) \quad (3.140)$$

e

$$\begin{aligned} K_4(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mu) &= \frac{9\sqrt{2}}{4} \left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \\ &+ \frac{54}{10} \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] (\xi_3^2 + \eta_2^2) - \\ &- \frac{18\sqrt{5}}{25} \left[-3 + \frac{7}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3). \end{aligned} \quad (3.141)$$

Portanto, pelas expressões (3.135), (3.137), (3.140), (3.141) e $K_0 = \mathcal{H}_0$, finalmente obtemos o Hamiltoniano autônomo quadrático K como

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \mu, \epsilon) &= \frac{1}{2}\omega_1(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_3^2) + \omega_2(\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3) + \\ &+ \frac{\epsilon}{1!} \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3\sqrt{2}}{16} (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{9}{20} (\xi_3^2 + \eta_2^2) - \frac{21}{50} \sqrt{5} (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3) \right) + \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2!} \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{8} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \right. \\ &+ \frac{9}{10} \left[-1 + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] (\xi_3^2 + \eta_2^2) + \\ &+ \left. \frac{\sqrt{5}}{25} \left[6 - \frac{21}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3) \right\} + \\ &+ \frac{\epsilon^3}{3!} \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right) \left(\frac{9\sqrt{2}}{8\xi_1^{*3}} (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{27}{10\xi_1^{*3}} (\xi_3^2 + \eta_2^2) - \frac{63\sqrt{5}}{25\xi_1^{*3}} (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3) \right) + \\ &+ \frac{\epsilon^4}{4!} \left\{ \frac{9\sqrt{2}}{4} \left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \right. \end{aligned} \quad (3.142)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{54}{10} \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4} \mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] (\xi_3^2 + \eta_2^2) - \\
& - \frac{18\sqrt{5}}{25} \left[-3 + \frac{7}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4} \mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3) \Big\} + \dots
\end{aligned}$$

3.3.2 Cálculo do Hamiltoniano $\mathcal{K}$

Nosso objetivo agora é determinar o Hamiltoniano $\mathcal{K}$ referente ao extremo direito da região de equilíbrio linearmente estável (3.34), onde o valor de ressonância paramétrica é $\tilde{\mu}_0 = \xi_1^{*3}$.

Sejam os vetores $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{21})$ e $\mathbf{B} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{21})$, representados por

$$\begin{aligned}
\mathbf{X} = & (\tilde{\mathcal{W}}_{200000}, \tilde{\mathcal{W}}_{100100}, \tilde{\mathcal{W}}_{000200}, \tilde{\mathcal{W}}_{020000}, \tilde{\mathcal{W}}_{010010}, \tilde{\mathcal{W}}_{000020}, \tilde{\mathcal{W}}_{002000}, \\
& \tilde{\mathcal{W}}_{001001}, \tilde{\mathcal{W}}_{000002}, \tilde{\mathcal{W}}_{110000}, \tilde{\mathcal{W}}_{101000}, \tilde{\mathcal{W}}_{100010}, \tilde{\mathcal{W}}_{100001}, \tilde{\mathcal{W}}_{011000}, \quad (3.143) \\
& \tilde{\mathcal{W}}_{010100}, \tilde{\mathcal{W}}_{010001}, \tilde{\mathcal{W}}_{001100}, \tilde{\mathcal{W}}_{001010}, \tilde{\mathcal{W}}_{000110}, \tilde{\mathcal{W}}_{000101}, \tilde{\mathcal{W}}_{000011})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} = & (b_{200000}, b_{100100}, b_{000200}, b_{020000}, b_{010010}, b_{000020}, b_{002000}, \\
& b_{001001}, b_{000002}, b_{110000}, b_{101000}, b_{100010}, b_{100001}, b_{011000}, \quad (3.144) \\
& b_{010100}, b_{010001}, b_{001100}, b_{001010}, b_{000110}, b_{000101}, b_{000011}),
\end{aligned}$$

onde $\mathbf{B} = \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{K}$ e, consequentemente, $b_{ijk\alpha\beta\gamma} = h_{ijk\alpha\beta\gamma} - k_{ijk\alpha\beta\gamma}$ quando $h_{ijk\alpha\beta\gamma}$, $k_{ijk\alpha\beta\gamma}$ representam os coeficientes de $\tilde{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{K}$, respectivamente. Neste caso, a partir da expressão (3.104), a equação homológica pode ser escrita em sua forma matricial como

$$\mathbf{X}'^{(n)} = \tilde{M} \mathbf{X}^{(n)} + \mathbf{B}^{(n)}, \quad \text{para} \quad ' := \frac{d}{d\nu}, \quad (3.145)$$

quando $\tilde{M} \mathbf{X}^{(n)} = \{\tilde{\mathcal{H}}_0, \tilde{\mathcal{W}}_n\}$ e o índice n representa a n -ésima etapa do processo de normalização no método de Deprit-Hori.

Por outro lado, reescrevemos a matriz dos coeficientes $\tilde{M}$, dada em (3.117), em blocos

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} \tilde{M}_1 & O & O & O \\ O & \tilde{M}_2 & O & O \\ O & O & \tilde{M}_3 & O \\ O & O & O & \tilde{M}_4 \end{bmatrix}, \quad (3.146)$$

onde as seguintes matrizes $\tilde{M}_1$, $\tilde{M}_2 = \tilde{M}_3$ e $\tilde{M}_4$ são dadas por

$$\tilde{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{M}_2 = \tilde{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.147)$$

$$\tilde{M}_4 = \left[\begin{array}{c|cccccccccccccc} & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ \hline 10) & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11) & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12) & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13) & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 15) & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 16) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 17) & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 18) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 19) & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20) & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 21) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 0 & -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.148)$$

Assim, inicialmente, o sistema (3.145) é decomposto em quatro outros sistemas lineares não homogêneos, a saber

$$\mathbf{X}'_1^{(n)} = \tilde{M}_1 \mathbf{X}_1^{(n)} + \mathbf{B}_1^{(n)}, \quad (3.149)$$

com $\mathbf{X}_1^{(n)} = (\tilde{\mathcal{W}}_{200000}^{(n)}, \tilde{\mathcal{W}}_{100100}^{(n)}, \tilde{\mathcal{W}}_{000200}^{(n)}) = (X_1, X_2, X_3)$ e $\mathbf{B}_1^{(n)} = (b_{200000}^{(n)}, b_{100100}^{(n)}, b_{000200}^{(n)}) = (b_1, b_2, b_3)$;

$$\mathbf{X}'_2^{(n)} = \tilde{M}_2 \mathbf{X}_2^{(n)} + \mathbf{B}_2^{(n)}, \quad (3.150)$$

com $\mathbf{X}_2^{(n)} = (\tilde{\mathcal{W}}_{020000}^{(n)}, \tilde{\mathcal{W}}_{010010}^{(n)}, \tilde{\mathcal{W}}_{000020}^{(n)}) = (X_4, X_5, X_6)$ e $\mathbf{B}_2^{(n)} = (b_{020000}^{(n)}, b_{010010}^{(n)}, b_{000020}^{(n)}) = (b_4, b_5, b_6)$;

$$\mathbf{X}'_3^{(n)} = \tilde{M}_3 \mathbf{X}_3^{(n)} + \mathbf{B}_3^{(n)}, \quad (3.151)$$

com $\mathbf{X}_3^{(n)} = (\widetilde{\mathcal{W}}_{002000}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{001001}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{000002}^{(n)}) = (X_7, X_8, X_9)$ e $\mathcal{B}_3^{(n)} = (b_{002000}^{(n)}, b_{001001}^{(n)}, b_{000002}^{(n)}) = (b_7, b_8, b_9)$; e, por último, o quarto sistema linear é

$$\mathbf{X}_4'^{(n)} = \tilde{M}_4 \mathbf{X}_4^{(n)} + \mathcal{B}_4^{(n)}, \quad (3.152)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_4^{(n)} &= (X_{10}, X_{11}, \dots, X_{21}), \\ &= (\widetilde{\mathcal{W}}_{110000}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{101000}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{100010}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{100001}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{011000}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{010100}^{(n)}, \\ &\quad \widetilde{\mathcal{W}}_{010001}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{001100}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{001010}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{000110}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{000101}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{W}}_{000011}^{(n)}) \end{aligned} \quad (3.153)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_4^{(n)} &= (b_{10}, b_{11}, \dots, b_{21}), \\ &= (b_{110000}^{(n)}, b_{101000}^{(n)}, b_{100010}^{(n)}, b_{100001}^{(n)}, b_{011000}^{(n)}, b_{010100}^{(n)}, \\ &\quad b_{010001}^{(n)}, b_{001100}^{(n)}, b_{001010}^{(n)}, b_{000110}^{(n)}, b_{000101}^{(n)}, b_{000011}^{(n)}). \end{aligned} \quad (3.154)$$

Agora devemos estudar cada um dos sistemas mencionados acima, lembrando que $\widetilde{\mathcal{W}}_n$ é uma função geradora τ -periódica, com $\tau = 2\pi$, e pretendemos encontrar um novo Hamiltoniano $\mathcal{K}^{(n)}$, possivelmente autônomo.

▪ Análise do primeiro sistema (3.149)

Pela fórmula da variação dos parâmetros e a τ -periodicidade de $\widetilde{\mathcal{W}}_n$, temos que

$$(e^{-\tau \tilde{M}_1} - I_3) \mathbf{X}_1^{(n)}(0) = \int_0^\tau e^{-s \tilde{M}_1} (\tilde{\mathcal{H}}_1^{(n)}(s) - \mathcal{K}_1^{(n)}) ds. \quad (3.155)$$

Como

$$e^{t \tilde{M}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 \\ t^2 & t & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos

$$(e^{-\tau \tilde{M}_1} - I_3) \mathbf{X}_1^{(n)}(0) = (0, -2\tau X_1(0), \tau^2 X_1(0) - \tau X_2(0))^T \quad (3.156)$$

e

$$e^{-s \tilde{M}_1} (\tilde{\mathcal{H}}_1^{(n)}(s) - \mathcal{K}_1^{(n)}) = \begin{bmatrix} h_1^{(n)} - k_1^{(n)} \\ -2s(h_1^{(n)} - k_1^{(n)}) + (h_2^{(n)} - k_2^{(n)}) \\ s^2(h_1^{(n)} - k_1^{(n)}) - s(h_2^{(n)} - k_2^{(n)}) + (h_3^{(n)} - k_3^{(n)}) \end{bmatrix}. \quad (3.157)$$

Tomando $k_2^{(n)} = k_3^{(n)} = 0$, da equação (3.155) combinada com (3.156) e (3.157), segue que

$$k_1^{(n)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau h_1^{(n)}(s) ds, \quad (3.158)$$

e

$$-2\tau \widetilde{\mathcal{W}}_{200000}^{(n)}(0) = \int_0^\tau [-2s(h_1^{(n)} - k_1^{(n)}) + h_2^{(n)}] ds, \quad (3.159)$$

$$\tau^2 \widetilde{\mathcal{W}}_{200000}^{(n)}(0) - \tau \widetilde{\mathcal{W}}_{100100}^{(n)}(0) = \int_0^\tau [s^2(h_1^{(n)} - k_1^{(n)}) - sh_2^{(n)} + h_3^{(n)}] ds, \quad (3.160)$$

onde escolhemos $X_3(0) = \widetilde{\mathcal{W}}_{000200}^{(n)}(0) = 0$.

▪ Análise do segundo sistema (3.150)

Neste caso, teremos o seguinte sistema a ser resolvido

$$\begin{aligned} X_4' &= X_5 + h_4^{(n)} - k_4^{(n)}, \\ X_5' &= -2X_4 + 2X_6 + h_5^{(n)} - k_5^{(n)}, \\ X_6' &= -X_5 + h_6^{(n)} - k_6^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Buscamos a solução do sistema acima com $X_4(\nu)$, $X_5(\nu)$, $X_6(\nu)$ funções 2π -periódicas e, esperamos que $k_4^{(n)}$, $k_5^{(n)}$, $k_6^{(n)}$ sejam constantes.

Pelo sistema (3.161), segue que $X_4' + X_6' = (h_4^{(n)} + h_6^{(n)}) - (k_4^{(n)} + k_6^{(n)})$ então

$$X_4(\nu) + X_6(\nu) - (X_4(0) + X_6(0)) = \int_0^\nu (h_4^{(n)}(s) + h_6^{(n)}(s)) ds - \nu (k_4^{(n)} + k_6^{(n)}).$$

Como $X_4(\nu) + X_6(\nu)$ é solução de uma equação diferencial, então para

$$k_4^{(n)} + k_6^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (h_4^{(n)}(s) + h_6^{(n)}(s)) ds, \quad (3.162)$$

a função $X_4(\nu) + X_6(\nu)$ é 2π -periódica, qualquer que seja $X_4(0) + X_6(0)$. Assim, tomando $X_4(0) + X_6(0) = 0$, teremos que

$$X_6(\nu) = -X_4(\nu) + \int_0^\nu (h_4^{(n)}(s) + h_6^{(n)}(s)) ds - \nu (k_4^{(n)} + k_6^{(n)}).$$

Além disso, pela primeira e segunda equações em (3.161), obtemos um novo sistema

$$X_4' = X_5 + g_1^{(n)}, \quad X_5' = -4X_4 + g_2^{(n)}, \quad (3.163)$$

onde

$$g_1^{(n)}(\nu) = h_4^{(n)}(\nu) - k_4^{(n)} \text{ e } g_2^{(n)}(\nu) = 2h_4^{(n)}(\nu) - 2\nu (k_4^{(n)} + k_6^{(n)}) + h_5^{(n)}(\nu) - k_5^{(n)}, \quad (3.164)$$

com

$$h_{46}(\nu) = \int_0^\nu \left(h_4^{(n)}(s) + h_6^{(n)}(s) \right) ds.$$

Note que o sistema (3.163) é um sistema canônico

$$X'_4 = \mathcal{H}_{X_5}, \quad X'_5 = -\mathcal{H}_{X_4},$$

com função Hamiltoniana dada por

$$\mathcal{H}(X_4, X_5, \nu) = \frac{1}{2}X_5^2 + 2X_4^2 + g_1^{(n)}(\nu)X_5 - g_2^{(n)}(\nu)X_4.$$

Façamos a mudança simplética de coordenadas $X_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ e $X_5 = \sqrt{2}y$, que transforma o Hamiltoniano anterior no seguinte

$$\tilde{\mathcal{H}}(x, y, \nu) = x^2 + y^2 + \sqrt{2}g_1^{(n)}(\nu)y - \frac{1}{\sqrt{2}}g_2^{(n)}(\nu)x.$$

Portanto, o sistema linear não homogêneo associado ao último Hamiltoniano é

$$X' = 2JX + G(\nu), \tag{3.165}$$

onde

$$X = (x, y)^T, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G(\nu) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}g_1^{(n)}(\nu) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}g_2^{(n)}(\nu) \end{bmatrix}.$$

Pelo método da variação dos parâmetros, a solução da equação diferencial (3.165) é

$$X(\nu) = e^{2\nu J} X(0) + e^{2\nu J} \int_0^\nu e^{-2sJ} G(s) ds.$$

Com isso, a solução será 2π -periódica se, e somente se,

$$(e^{4\pi J} - I) X(0) = -e^{4\pi J} \int_0^{2\pi} e^{-2sJ} G(s) ds. \tag{3.166}$$

Desde que

$$e^{2\nu J} = \begin{bmatrix} \cos(2\nu) & \sin(2\nu) \\ -\sin(2\nu) & \cos(2\nu) \end{bmatrix},$$

então o lado esquerdo de (3.166) é a matrix nula e, portanto, a solução $X(\nu)$ é 2π -periódica se, e somente se,

$$\int_0^{2\pi} e^{-2sJ} G(s) ds = 0.$$

Como

$$e^{-2sJ}G(s) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}g_1^{(n)}(s) \cos(2s) - \frac{1}{\sqrt{2}}g_2^{(n)}(s) \sin(2s) \\ \sqrt{2}g_1^{(n)}(s) \sin(2s) + \frac{1}{\sqrt{2}}g_2^{(n)}(s) \cos(2s) \end{bmatrix},$$

temos que a solução $X(\nu)$ é 2π -periódica se, e somente se,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (2g_1^{(n)}(s) \cos(2s) - g_2^{(n)}(s) \sin(2s)) ds &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (2g_1^{(n)}(s) \sin(2s) + g_2^{(n)}(s) \cos(2s)) ds &= 0. \end{aligned} \quad (3.167)$$

Neste momento, a partir das igualdades em (3.167), podemos determinar o coeficiente $k_5^{(n)}$.

Pelas equações em (3.164), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g_1^{(n)}(s) \sin(2s) ds &= \int_0^{2\pi} h_4^{(n)}(s) \sin(2s) ds \quad \text{e} \\ \int_0^{2\pi} g_1^{(n)}(s) \cos(2s) ds &= \int_0^{2\pi} h_4^{(n)}(s) \cos(2s) ds, \quad \text{para todo } n. \end{aligned} \quad (3.168)$$

Nesta parte do problema, como estamos analisando o extremo direito do intervalo de estabilidade, sabemos, a partir das equações (3.86) até (3.89), que

$$h_4^{(n)} = h_{020000}^{(n)}, \quad h_5^{(n)} = h_{010010}^{(n)}, \quad h_6^{(n)} = h_{000020}^{(n)}$$

com

$$h_5^{(1)}(\nu) = h_5^{(2)}(\nu) = h_5^{(3)}(\nu) = h_5^{(4)}(\nu) = 0 \quad (3.169)$$

e as demais funções dadas por

$$\begin{aligned} h_4^{(1)}(\nu) &= \frac{2\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, \quad h_4^{(2)}(\nu) = -\frac{4}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2), \quad h_4^{(3)}(\nu) = \frac{12}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3), \\ h_4^{(4)}(\nu) &= -\frac{48}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4), \\ h_6^{(1)}(\nu) &= \frac{1}{2} \left(3 \cos \nu - \frac{2\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \right), \quad h_6^{(2)}(\nu) = - \left(3 \cos^2 \nu - \frac{2}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2) \right), \\ h_6^{(3)}(\nu) &= 3 \left(3 \cos^3 \nu - \frac{2}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3) \right), \\ h_6^{(4)}(\nu) &= -12 \left(3 \cos^4 \nu - \frac{2}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4) \right). \end{aligned} \quad (3.170)$$

Assim, considerando as expressões em (3.169) e (3.170) aplicadas em (3.168), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} g_1^{(1)}(s) \sin(2s) ds &= \int_0^{2\pi} \frac{2\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \sin(2s) ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} g_1^{(1)}(s) \cos(2s) ds &= \int_0^{2\pi} \frac{2\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \cos(2s) ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} g_1^{(2)}(s) \sin(2s) ds &= - \int_0^{2\pi} \frac{4}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos s - \tilde{\mu}_2) \sin(2s) ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} g_1^{(2)}(s) \cos(2s) ds &= - \int_0^{2\pi} \frac{4}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos s - \tilde{\mu}_2) \cos(2s) ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} g_1^{(3)}(s) \sin(2s) ds &= \int_0^{2\pi} \frac{12}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^2 s - \tilde{\mu}_2 \cos s + \tilde{\mu}_3) \sin(2s) ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} g_1^{(3)}(s) \cos(2s) ds &= \int_0^{2\pi} \frac{12}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^2 s - \tilde{\mu}_2 \cos s + \tilde{\mu}_3) \cos(2s) ds = \frac{6\pi\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, \\
\int_0^{2\pi} g_1^{(4)}(s) \sin(2s) ds &= - \int_0^{2\pi} \frac{48}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^3 s - \tilde{\mu}_2 \cos^2 s + \tilde{\mu}_3 \cos s - \tilde{\mu}_4) \sin(2s) ds = 0, \\
\int_0^{2\pi} g_1^{(4)}(s) \cos(2s) ds &= - \int_0^{2\pi} \frac{48}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^3 s - \tilde{\mu}_2 \cos^2 s + \tilde{\mu}_3 \cos s - \tilde{\mu}_4) \cos(2s) ds = \frac{24\pi\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}.
\end{aligned} \tag{3.171}$$

Por outro lado, note que

$$\begin{aligned}
h_4^{(1)}(s) + h_6^{(1)}(s) &= \frac{3}{2} \cos s + \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, \\
h_4^{(2)}(s) + h_6^{(2)}(s) &= -3 \cos^2 s - \frac{2\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \cos s + \frac{2\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}, \\
h_4^{(3)}(s) + h_6^{(3)}(s) &= 9 \cos^3 s + \frac{6\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \cos^2 s - \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \cos s + \frac{6\tilde{\mu}_3}{\xi_1^{*3}}, \\
h_4^{(4)}(s) + h_6^{(4)}(s) &= -36 \cos^4 s - \frac{24\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \cos^3 s + \frac{24\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \cos^2 s - \frac{24\tilde{\mu}_3}{\xi_1^{*3}} \cos s + \frac{24\tilde{\mu}_4}{\xi_1^{*3}},
\end{aligned} \tag{3.172}$$

de onde encontramos os valores de $k_4^{(n)} + k_6^{(n)}$ em (3.162), como

$$\begin{aligned}
k_4^{(1)} + k_6^{(1)} &= \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, & k_4^{(2)} + k_6^{(2)} &= -\frac{3}{2} + \frac{2\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}, \\
k_4^{(3)} + k_6^{(3)} &= \frac{3\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} + \frac{6\tilde{\mu}_3}{\xi_1^{*3}}, & k_4^{(4)} + k_6^{(4)} &= -\frac{27}{2} + \frac{12\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} + \frac{24\tilde{\mu}_4}{\xi_1^{*3}}.
\end{aligned} \tag{3.173}$$

Assim, usando as funções (3.172) teremos as expressões de $g_2^{(n)}$ definidas em (3.164), como

$$\begin{aligned}
g_2^{(1)}(\nu) &= 3 \sin \nu + \frac{2\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \nu - 2 \left(k_4^{(1)} + k_6^{(1)} \right) \nu - k_5^{(1)}, \\
g_2^{(2)}(\nu) &= -3\nu - \frac{3}{2} \sin 2\nu - \frac{4\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \sin \nu + \frac{4\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \nu - 2 \left(k_4^{(2)} + k_6^{(2)} \right) \nu - k_5^{(2)}, \\
g_2^{(3)}(\nu) &= 2 \left[9 \left(\sin \nu - \frac{1}{3} \sin^3 \nu \right) + \frac{6\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{1}{2} \nu + \frac{1}{4} \sin 2\nu \right) - \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \sin \nu + \frac{6\tilde{\mu}_3}{\xi_1^{*3}} \nu \right] - \\
&\quad - 2 \left(k_4^{(3)} + k_6^{(3)} \right) \nu - k_5^{(3)}, \\
g_2^{(4)}(\nu) &= 2 \left[-36 \left(\frac{3}{8} \nu + \frac{1}{4} \sin 2\nu + \frac{1}{32} \sin 4\nu \right) - \frac{24\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \left(\sin \nu - \frac{1}{3} \sin^3 \nu \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{24\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{1}{2} \nu + \frac{1}{4} \sin 2\nu \right) - \frac{24\tilde{\mu}_3}{\xi_1^{*3}} \sin \nu + \frac{24\tilde{\mu}_4}{\xi_1^{*3}} \nu \right] - 2 \left(k_4^{(4)} + k_6^{(4)} \right) \nu - k_5^{(4)}.
\end{aligned}$$

Por sua vez, supondo $k_5^{(n)}$ constante para todo n , segue das últimas igualdades acima que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g_2^{(1)}(s) \sin(2s) ds &= 2\pi \left(-\frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} + (k_4^{(1)} + k_6^{(1)}) \right), \\ \int_0^{2\pi} g_2^{(2)}(s) \sin(2s) ds &= \frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} + 2\pi (k_4^{(2)} + k_6^{(2)}), \\ \int_0^{2\pi} g_2^{(3)}(s) \sin(2s) ds &= -\frac{3\pi\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} - \frac{12\pi\tilde{\mu}_3}{\xi_1^{*3}} + 2\pi (k_4^{(3)} + k_6^{(3)}), \\ \int_0^{2\pi} g_2^{(4)}(s) \sin(2s) ds &= 2\pi \left(\frac{9}{2} - \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} - \frac{24\tilde{\mu}_4}{\xi_1^{*3}} + (k_4^{(4)} + k_6^{(4)}) \right), \end{aligned} \quad (3.174)$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} g_2^{(1)}(s) \cos(2s) ds &= \int_0^{2\pi} g_2^{(2)}(s) \cos(2s) ds = 0, \\ \int_0^{2\pi} g_2^{(3)}(s) \cos(2s) ds &= \int_0^{2\pi} g_2^{(4)}(s) \cos(2s) ds = 0. \end{aligned} \quad (3.175)$$

Utilizando algumas das integrais em (3.171) e as integrais em (3.175), verificamos que a segunda equação em (3.167), ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \left(2g_1^{(n)}(s) \sin(2s) + g_2^{(n)}(s) \cos(2s) \right) ds = 0,$$

é satisfeita para $n = 1, 2, 3, 4$. Agora, usando as integrais em (3.171) e (3.174), verificamos que a primeira equação em (3.167), isto é,

$$\int_0^{2\pi} \left(2g_1^{(n)}(s) \cos(2s) - g_2^{(n)}(s) \sin(2s) \right) ds = 0,$$

se reduz às seguintes

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} - (k_4^{(1)} + k_6^{(1)}) \right) &= 0, \\ -\frac{3\pi}{2} + \frac{4\pi\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} - 2\pi (k_4^{(2)} + k_6^{(2)}) &= 0, \\ \frac{15\pi\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} + \frac{12\pi\tilde{\mu}_3}{\xi_1^{*3}} - 2\pi (k_4^{(3)} + k_6^{(3)}) &= 0, \\ \frac{60\pi\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} - 2\pi \left(\frac{9}{2} - \frac{24\tilde{\mu}_4}{\xi_1^{*3}} + (k_4^{(4)} + k_6^{(4)}) \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.176)$$

Ao compararmos os valores de $(k_4^{(n)} + k_6^{(n)})$ nas expressões (3.173) e (3.176), notamos que eles não concordam, o que impede a resolução do sistema para obter $k_5^{(n)}$ constante. Para contornar esse impasse, vamos supor que $k_5^{(n)}$ é função de ν .

Vamos tomar $k_5^{(n)} = \kappa_5^{(n)} \sin(2\nu)$, com $\kappa_5^{(n)}$ constante, e proceder ao cálculo das integrais neste caso. Como

$$\int_0^{2\pi} \sin(2\nu) k_5^{(n)}(\nu) d\nu = \kappa_5^{(n)} \pi \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \cos(2\nu) k_5^{(n)}(\nu) d\nu = 0,$$

as igualdades (3.175) permanecem válidas, enquanto que as igualdades (3.174) são modificadas pelo acréscimo do lado direito de cada uma delas pela constante $-\kappa_5^{(n)}\pi$.

Portanto, considerando as igualdades (3.173) nas equações (3.174) modificadas, encontramos os seguintes valores para as constantes $\kappa_5^{(n)}$

$$\kappa_5^{(1)} = 0, \quad \kappa_5^{(2)} = -\frac{3}{2}, \quad \kappa_5^{(3)} = -\frac{9\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, \quad \kappa_5^{(4)} = -18 - \frac{36\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}. \quad (3.177)$$

Tomando em (3.162) $k_4^{(n)} = k_6^{(n)}$, obtemos o Hamiltoniano $K_n^{(2)}$ na forma

$$K_n^{(2)}(\xi_2, \eta_2, \nu) = k_4^{(n)}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \kappa_5^{(n)} \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2, \quad (3.178)$$

com $\kappa_5^{(n)}$ dados em (3.177) e

$$k_4^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (h_4^{(n)}(s) + h_6^{(n)}(s)) ds. \quad (3.179)$$

A origem é um equilíbrio estável para o Hamiltoniano (3.178), conforme garantido pelo seguinte lema

Lema 25. *A origem é um equilíbrio estável para o Hamiltoniano*

$$H(x, y, t) = a(x^2 + y^2) + b \sin(2t)xy,$$

quaisquer que sejam os valores reais de a e b .

Demonstração. Se $b = 0$, a estabilidade decorre do fato de que o Hamiltoniano do oscilador harmônico é estável (CABRAL; DIAS, 2023). Suponhamos, então $b \neq 0$. Neste caso, o Hamiltoniano define um sistema linear da forma

$$\dot{x} = 2ay + b \sin(2t)x \quad \text{e} \quad \dot{y} = -2ax - b \sin(2t)y. \quad (3.180)$$

Multiplicando a primeira equação de (3.180) por x , a segunda por y e somando-as, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = 2b \sin(2t)(x^2 - y^2). \quad (3.181)$$

Uma análise da equação (3.181) sob a condição $b > 0$ resulta em

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leq 2b \sin(2t)(x^2 + y^2), \quad \text{se} \quad \sin(2t) > 0. \quad (3.182)$$

ou

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leq -2b \sin(2t)(x^2 + y^2), \quad \text{se} \quad \sin(2t) < 0. \quad (3.183)$$

Consequentemente, por (3.182), (3.183) e como $|\sin(2t)| \leq 1$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \leq 2b|\sin(2t)|(x^2 + y^2) \leq 2b(x^2 + y^2). \quad (3.184)$$

Integrando de 0 a t , fica

$$x^2(t) + y^2(t) \leq (x^2(0) + y^2(0))e^{2bt}.$$

Quando $t \rightarrow -\infty$ implica que $x(t)$ e $y(t)$ tendem a solução nula. Assim, a origem é um equilíbrio estável do sistema (3.180) para $t < 0$.

Por outro lado, façamos $\xi = -x$, $\eta = -y$ e $\tau = -t$, onde $'$ representa a derivada em relação a τ . Note que $\xi(\tau) = -x(t(\tau)) \Leftrightarrow \xi' = -\frac{d}{d\tau}x(t(\tau)) = -\dot{x}\frac{dt}{d\tau} = \dot{x}$ e, da mesma forma, $\eta' = \dot{y}$. Com isso, o sistema (3.180) é reescrito como

$$\xi' = -2a\eta + b\sin(2\tau)\xi \quad \text{e} \quad \eta' = 2a\xi - b\sin(2\tau)\eta. \quad (3.185)$$

Seguindo de forma análoga, concluímos que a origem é um equilíbrio estável do sistema (3.185) para $\tau < 0$. Consequentemente, como $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$, resulta que a origem é um equilíbrio estável do sistema (3.180) para $t > 0$.

Portanto, quando $b > 0$, a origem é um equilíbrio estável do sistema (3.180) para todo t .

Para o caso $b < 0$, observamos que a origem é estável para H se, e somente se, a origem é estável para $-H$. ■

É importante notar que não impomos nenhuma restrição ao coeficiente a . Além disso, quando os coeficientes do Hamiltoniano são constantes, certas condições sobre esses coeficientes são necessárias para garantir a estabilidade da origem. Por outro lado, ao substituir o coeficiente b por uma função periódica como $b\sin(2t)$, tais restrições deixam de ser exigidas.

▪ Análise do terceiro sistema (3.151)

Como a matriz $\tilde{M}_3$ é igual a $\tilde{M}_2$, concluímos que o sistema a ser resolvido é o seguinte

$$\begin{aligned} X_7' &= X_8 + h_7^{(n)} - k_7^{(n)}, \\ X_8' &= -2X_7 + 2X_9 + h_8^{(n)} - k_8^{(n)}, \\ X_9' &= -X_8 + h_9^{(n)} - k_9^{(n)}. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Novamente, queremos que as funções $X_7(\nu)$, $X_8(\nu)$ e $X_9(\nu)$ sejam 2π -periódicas e os $k_7^{(n)}$, $k_8^{(n)}$ e $k_9^{(n)}$ constantes. Por conseguinte, procedendo de forma análoga à análise do segundo sistema

(3.150), teremos $k_7^{(n)}$ e $k_9^{(n)}$ constantes, tal que

$$k_7^{(n)} = k_9^{(n)}, \quad \text{com} \quad k_7^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (h_7^{(n)}(s) + h_9^{(n)}(s)) ds \quad (3.187)$$

e

$$k_8^{(n)} = \kappa_8^{(n)} \sin(2\nu), \quad \text{onde} \quad \kappa_8^{(n)} \quad \text{é uma constante.} \quad (3.188)$$

Como para o sistema (3.151), sabemos que

$$h_7^{(n)} = h_{002000}^{(n)}, \quad h_8^{(n)} = h_{001001}^{(n)} \quad \text{e} \quad h_9^{(n)} = h_{000002}^{(n)},$$

então, nesta parte do problema, por (3.86) a (3.89), temos que

$$\begin{aligned} h_7^{(1)}(\nu) &= h_7^{(2)}(\nu) = h_7^{(3)}(\nu) = h_7^{(4)}(\nu) = 0, \\ h_8^{(1)}(\nu) &= h_8^{(2)}(\nu) = h_8^{(3)}(\nu) = h_8^{(4)}(\nu) = 0, \\ h_9^{(1)}(\nu) &= \frac{\tilde{\mu}_1}{2\xi_1^{*3}}, \quad h_9^{(2)}(\nu) = -\frac{1}{\xi_1^{*3}}(\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2), \\ h_9^{(3)}(\nu) &= \frac{3}{\xi_1^{*3}}(\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3), \\ h_9^{(4)}(\nu) &= -\frac{12}{\xi_1^{*3}}(\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4). \end{aligned} \quad (3.189)$$

Com base nas igualdades em (3.189) e utilizando os resultados apresentados na solução do sistema (3.150), concluímos que

$$\int_0^{2\pi} g_1^{(n)} \sin(2s) ds = \int_0^{2\pi} h_7^{(n)} \sin(2s) ds = 0, \quad \int_0^{2\pi} g_1^{(n)} \cos(2s) ds = \int_0^{2\pi} h_7^{(n)} \cos(2s) ds = 0, \quad \forall n.$$

Logo, neste caso, as igualdades em (3.167) são transformadas em

$$\int_0^{2\pi} g_2^{(n)}(s) \sin(2s) ds = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} g_2^{(n)}(s) \cos(2s) ds = 0 \quad (3.190)$$

para

$$g_2^{(n)}(\nu) = 2 \int_0^\nu h_9^{(n)}(s) ds - 2\nu(k_7^{(n)} + k_9^{(n)}) - k_8^{(n)},$$

onde

$$k_7^{(n)} + k_9^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_9^{(n)}(s) ds. \quad (3.191)$$

Pela equação (3.191), encontramos os valores de

$$k_7^{(1)} + k_9^{(1)} = \frac{\tilde{\mu}_1}{2\xi_1^{*3}}, \quad k_7^{(2)} + k_9^{(2)} = \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}},$$

$$k_7^{(3)} + k_9^{(3)} = \frac{3}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right), \quad k_7^{(4)} + k_9^{(4)} = \frac{6}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_2 + 2\tilde{\mu}_4),$$

as quais, juntamente com (3.189) e por $k_8^{(n)}(\nu) = \kappa_8^{(n)} \sin(2\nu)$, determinam as expressões de $g_2^{(n)}(\nu)$, a saber

$$\begin{aligned} g_2^{(1)}(\nu) &= \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \nu - 2\nu(k_7^{(1)} + k_9^{(1)}) - \kappa_8^{(1)} \sin(2\nu), \\ g_2^{(2)}(\nu) &= -\frac{2}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \sin \nu - \tilde{\mu}_2 \nu) - 2\nu(k_7^{(2)} + k_9^{(2)}) - \kappa_8^{(2)} \sin(2\nu), \\ g_2^{(3)}(\nu) &= \frac{6}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} \nu + \frac{\tilde{\mu}_1}{4} \sin(2\nu) - \tilde{\mu}_2 \sin \nu + \tilde{\mu}_3 \nu \right) - 2\nu(k_7^{(3)} + k_9^{(3)}) - \kappa_8^{(3)} \sin(2\nu), \\ g_2^{(4)}(\nu) &= -\frac{24}{\xi_1^{*3}} \left(\tilde{\mu}_1 \sin \nu - \frac{\tilde{\mu}_1}{3} \sin^3 \nu - \frac{\tilde{\mu}_2}{2} \nu - \frac{\tilde{\mu}_2}{4} \sin(2\nu) + \tilde{\mu}_3 \sin \nu - \tilde{\mu}_4 \nu \right) - \\ &\quad - 2\nu(k_7^{(4)} + k_9^{(4)}) - \kappa_8^{(4)} \sin(2\nu). \end{aligned}$$

A partir dos valores de $g_2^{(n)}$, com $n = 1, 2, 3, 4$, segue da segunda equação de (3.190) que

$$\int_0^{2\pi} g_2^{(n)}(s) \cos(2s) ds = 0, \quad \forall n,$$

e a primeira equação de (3.190) nos permite determinar as constantes $\kappa_8^{(n)}$, isto é,

$$\kappa_8^{(1)} = 0, \quad \kappa_8^{(2)} = 0, \quad \kappa_8^{(3)} = \frac{3\tilde{\mu}_1}{2\xi_1^{*3}}, \quad \kappa_8^{(4)} = \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}. \quad (3.192)$$

Tomando as constantes $k_7^{(n)}$ igual a $k_9^{(n)}$, obtemos o Hamiltoniano $K_n^{(3)}$ como

$$K_n^{(3)}(\xi_3, \eta_3, \nu) = k_7^{(n)}(\xi_3^2 + \eta_3^2) + \kappa_8^{(n)} \sin(2\nu) \xi_3 \eta_3, \quad (3.193)$$

onde $\kappa_8^{(n)}$ são dados em (3.192) e

$$k_7^{(n)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} h_9^{(n)}(s) ds. \quad (3.194)$$

De forma análoga, usamos o Lema 25 para garantir que a origem é também um equilíbrio estável deste Hamiltoniano.

▪ Análise do quarto sistema (3.152)

Para estudarmos o sistema (3.152), devemos reescrevê-lo em três outros subsistemas lineares, a saber: o primeiro nas variáveis $X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}$; o segundo nas variáveis $X_{14}, X_{16}, X_{18}, X_{21}$; e o terceiro nas variáveis $X_{15}, X_{17}, X_{19}, X_{20}$.

Explicitamente, o primeiro subsistema será

$$X'_{10} = \quad \quad \quad X_{12} \quad \quad + b_{10},$$

$$\begin{aligned}
X'_{11} &= X_{13} + b_{11}, \\
X'_{12} &= -X_{10} + b_{12}, \\
X'_{13} &= -X_{11} + b_{13}.
\end{aligned} \tag{3.195}$$

O segundo subsistema é

$$\begin{aligned}
X'_{14} &= X_{16} + X_{18} + b_{14}, \\
X'_{16} &= -X_{14} + X_{21} + b_{16}, \\
X'_{18} &= -X_{14} + X_{21} + b_{18}, \\
X'_{21} &= -X_{16} - X_{18} + b_{21}.
\end{aligned} \tag{3.196}$$

Enquanto que o terceiro subsistema será

$$\begin{aligned}
X'_{15} &= X_{19} + \tilde{b}_{15}, \\
X'_{17} &= X_{20} + \tilde{b}_{17}, \\
X'_{19} &= -X_{15} + \tilde{b}_{19}, \\
X'_{20} &= -X_{17} + \tilde{b}_{20},
\end{aligned} \tag{3.197}$$

onde

$$\tilde{b}_{15} = X_{10} + b_{15}, \quad \tilde{b}_{17} = X_{11} + b_{17}, \quad \tilde{b}_{19} = X_{12} + b_{19}, \quad \tilde{b}_{20} = X_{13} + b_{20}.$$

Iniciaremos a resolução dos subsistemas acima considerando soluções 2π -periódicas em ν , esperando que os coeficientes $k_i^{(n)}$ obtidos sejam constantes.

A partir do subsistema (3.196), segue que $X'_{14} + X'_{21} = (h_{14}^{(n)} + h_{21}^{(n)}) - (k_{14}^{(n)} + k_{21}^{(n)})$, então

$$X_{14}(\nu) + X_{21}(\nu) - (X_{14}(0) + X_{21}(0)) = \int_0^\nu (h_{14}^{(n)}(s) + h_{21}^{(n)}(s)) ds - \nu(k_{14}^{(n)} + k_{21}^{(n)}). \tag{3.198}$$

No entanto, por (3.86) a (3.89), temos que $h_{14}^{(n)} = h_{16}^{(n)} = h_{18}^{(n)} = h_{21}^{(n)} = 0$ para $n = 1, 2, 3, 4$. Além disso, ao supor que X_{14} e X_{21} são 2π -periódica, obtemos de (3.198) que

$$k_{14}^{(n)} + k_{21}^{(n)} = 0. \tag{3.199}$$

Ainda pelo subsistema (3.196), temos que $X'_{16} - X'_{18} = (h_{16}^{(n)} - h_{18}^{(n)}) - (k_{16}^{(n)} - k_{18}^{(n)})$ e

$$X_{16}(\nu) - X_{18}(\nu) - (X_{16}(0) - X_{18}(0)) = \int_0^\nu (h_{16}^{(n)}(s) - h_{18}^{(n)}(s)) ds - \nu(k_{16}^{(n)} - k_{18}^{(n)}).$$

Como $h_{16}^{(n)} = h_{18}^{(n)} = 0$ e supomos que as soluções X_{16} e X_{18} são 2π -periódica, então

$$k_{16}^{(n)} - k_{18}^{(n)} = 0. \tag{3.200}$$

Portanto, como tomamos os coeficientes $k_{14}^{(n)}, k_{16}^{(n)}, k_{18}^{(n)}$ e $k_{21}^{(n)}$ constantes, podemos, a partir das equações (3.199) e (3.200), assumir que

$$k_{14}^{(n)} = k_{16}^{(n)} = k_{18}^{(n)} = k_{21}^{(n)} = 0, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, 4. \quad (3.201)$$

Para o subsistema linear em (3.195), considere $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ como a matriz dos

coeficientes deste sistema. Neste caso, seja a forma matricial da equação homológica

$$\mathbf{Z}_1'^{(n)} = M_1 \mathbf{Z}_1^{(n)} + \mathbf{B}_1^{(n)},$$

com $\mathbf{Z}_1^{(n)} = (X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13})$ e $\mathbf{B}_1^{(n)} = (b_{10}, b_{11}, b_{12}, b_{13})$. Pela fórmula da variação dos parâmetros e a τ -periodicidade de $\widetilde{\mathcal{W}}_n$, concluímos que

$$(e^{-\tau M_1} - I_4) \mathbf{Z}_1^{(n)}(0) = \int_0^\tau e^{-s M_1} (\mathbf{H}_1^{(n)}(s) - \mathbf{K}_1^{(n)}) ds, \quad (3.202)$$

onde $\mathbf{H}_1^{(n)} = (h_{10}^{(n)}, h_{11}^{(n)}, h_{12}^{(n)}, h_{13}^{(n)})$ e $\mathbf{K}_1^{(n)} = (k_{10}^{(n)}, k_{11}^{(n)}, k_{12}^{(n)}, k_{13}^{(n)})$.

Por outro lado, temos

$$e^{t M_1} = \begin{bmatrix} \cos t \, I_2 & \sin t \, I_2 \\ -\sin t \, I_2 & \cos t \, I_2 \end{bmatrix} \quad (3.203)$$

e $h_{11}^{(n)}, h_{12}^{(n)}, h_{13}^{(n)}$ são identicamente nulos para $n = 1, 2, 3, 4$ - ver equações (3.86) a (3.89). Então, $(e^{-2\pi M_1} - I_4)$ é uma matriz nula e, portanto, a solução $\mathbf{Z}_1^{(n)}$ é 2π -periódica se, e somente se,

$$\int_0^\tau e^{-s M_1} (\mathbf{H}_1^{(n)}(s) - \mathbf{K}_1^{(n)}) ds = 0,$$

ou, equivalentemente, se as seguintes condições forem satisfeitas

$$\int_0^{2\pi} ((h_{10}^{(n)}(s) - k_{10}^{(n)}) \cos(s) + k_{12}^{(n)} \sin(s)) ds = 0, \quad (3.204)$$

$$\int_0^{2\pi} ((h_{10}^{(n)}(s) - k_{10}^{(n)}) \sin(s) - k_{12}^{(n)} \cos(s)) ds = 0, \quad (3.205)$$

$$\int_0^{2\pi} (-k_{11}^{(n)} \cos(s) + k_{13}^{(n)} \sin(s)) ds = 0, \quad (3.206)$$

$$\int_0^{2\pi} (k_{11}^{(n)} \sin(s) + k_{13}^{(n)} \cos(s)) ds = 0. \quad (3.207)$$

Observe que, como

$$h_{10}^{(1)} = 2\sqrt{3} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, \quad h_{10}^{(2)} = -\frac{4\sqrt{3}}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos \nu - \tilde{\mu}_2), \quad h_{10}^{(3)} = \frac{12\sqrt{3}}{\xi_1^{*3}} (\tilde{\mu}_1 \cos^2 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos \nu + \tilde{\mu}_3),$$

$$h_{10}^{(4)} = -\frac{48\sqrt{3}}{\xi_1^{*3}}(\tilde{\mu}_1 \cos^3 \nu - \tilde{\mu}_2 \cos^2 \nu + \tilde{\mu}_3 \cos \nu - \tilde{\mu}_4),$$

então para $k_{10}^{(n)}, k_{11}^{(n)}, k_{12}^{(n)}$ e $k_{13}^{(n)}$ constantes, segue que as equações (3.205), (3.206) e (3.207) são válidas. Porém, a expressão (3.204) é diferente de zero para $n = 2, 3, 4$. Portanto, ao tomarmos $k_{10}^{(n)}, k_{11}^{(n)}, k_{12}^{(n)}$ e $k_{13}^{(n)}$ constantes, não obtemos uma solução 2π -periódica para o subsistema. Assim, vamos supor que $k_{10}^{(n)}, k_{11}^{(n)}$ e $k_{13}^{(n)}$ são constantes e $k_{12}^{(n)}$ uma função de ν .

Considere $k_{12}^{(n)}(\nu) = \kappa_{12}^{(n)} \sin(\nu)$, com $\kappa_{12}^{(n)}$ sendo uma constante. Uma vez que

$$\int_0^{2\pi} k_{12}^{(n)}(s) \cos(s) ds = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} k_{12}^{(n)}(s) \sin(s) ds = \kappa_{12}^{(n)} \pi,$$

as igualdades (3.205) a (3.207) são satisfeitas. Além disso, a equação (3.204) permite determinar os valores das constantes $\kappa_{12}^{(n)}$ pela expressão

$$\kappa_{12}^{(n)} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h_{10}^{(n)}(s) \cos(s) ds.$$

De forma explícita, os valores são

$$\kappa_{12}^{(1)} = 0, \quad \kappa_{12}^{(2)} = 4\sqrt{3} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, \quad \kappa_{12}^{(3)} = 12\sqrt{3} \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}, \quad \kappa_{12}^{(4)} = \frac{48\sqrt{3}}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4} \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_3 \right). \quad (3.208)$$

Como $k_{10}^{(n)}, k_{11}^{(n)}$ e $k_{13}^{(n)}$ são constantes, podemos assumir que

$$k_{10}^{(n)} = k_{11}^{(n)} = k_{13}^{(n)} = 0, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (3.209)$$

Para a solução do terceiro subsistema em (3.197), utilizaremos $b_{11} = b_{13} = 0$ obtidos acima no estudo do primeiro subsistema (3.195). Assim, teremos que

$$X'_{10} = X_{12} + b_{10}, \quad X'_{11} = X_{13}, \quad X'_{12} = -X_{10} + b_{12}, \quad X'_{13} = -X_{11}.$$

Pela fórmula da variação dos parâmetros, as soluções deste último sistema, definido por X_{10}, X_{11}, X_{12} e X_{13} , serão dadas por

$$\begin{aligned} X_{10}(\nu) &= X_{10}(0) \cos \nu + X_{12}(0) \sin \nu + \cos \nu \int_0^\nu b_{10}(s) \cos s ds - \cos \nu \int_0^\nu b_{12}(s) \sin s ds + \\ &\quad + \sin \nu \int_0^\nu b_{10}(s) \sin s ds + \sin \nu \int_0^\nu b_{12}(s) \cos s ds; \\ X_{11}(\nu) &= X_{11}(0) \cos \nu + X_{13}(0) \sin \nu; \\ X_{12}(\nu) &= -X_{10}(0) \sin \nu + X_{12}(0) \cos \nu - \sin \nu \int_0^\nu b_{10}(s) \cos s ds + \sin \nu \int_0^\nu b_{12}(s) \sin s ds + \\ &\quad + \cos \nu \int_0^\nu b_{10}(s) \sin s ds + \cos \nu \int_0^\nu b_{12}(s) \cos s ds; \\ X_{13}(\nu) &= -X_{11}(0) \sin \nu + X_{13}(0) \cos \nu. \end{aligned} \quad (3.210)$$

Analogamente, as soluções do subsistema (3.197), definido por X_{15} , X_{17} , X_{19} e X_{20} , são

$$\begin{aligned}
X_{15}(\nu) &= X_{15}(0) \cos \nu + X_{19}(0) \sin \nu + \cos \nu \int_0^\nu (X_{10}(s) + b_{15}(s)) \cos s \, ds - \\
&\quad - \cos \nu \int_0^\nu (X_{12}(s) + b_{19}(s)) \sin s \, ds + \sin \nu \int_0^\nu (X_{10}(s) + b_{15}(s)) \sin s \, ds + \\
&\quad + \sin \nu \int_0^\nu (X_{12}(s) + b_{19}(s)) \cos s \, ds; \\
X_{17}(\nu) &= X_{17}(0) \cos \nu + X_{20}(0) \sin \nu + \cos \nu \int_0^\nu (X_{11}(s) + b_{17}(s)) \cos s \, ds - \\
&\quad - \cos \nu \int_0^\nu (X_{13}(s) + b_{20}(s)) \sin s \, ds + \sin \nu \int_0^\nu (X_{11}(s) + b_{17}(s)) \sin s \, ds + \\
&\quad + \sin \nu \int_0^\nu (X_{13}(s) + b_{20}(s)) \cos s \, ds; \\
X_{19}(\nu) &= -X_{15}(0) \sin \nu + X_{19}(0) \cos \nu - \sin \nu \int_0^\nu (X_{10}(s) + b_{15}(s)) \cos s \, ds + \\
&\quad + \sin \nu \int_0^\nu (X_{12}(s) + b_{19}(s)) \sin s \, ds + \cos \nu \int_0^\nu (X_{10}(s) + b_{15}(s)) \sin s \, ds + \\
&\quad + \cos \nu \int_0^\nu (X_{12}(s) + b_{19}(s)) \cos s \, ds; \\
X_{20}(\nu) &= -X_{17}(0) \sin \nu + X_{20}(0) \cos \nu - \sin \nu \int_0^\nu (X_{11}(s) + b_{17}(s)) \cos s \, ds + \\
&\quad + \sin \nu \int_0^\nu (X_{13}(s) + b_{20}(s)) \sin s \, ds + \cos \nu \int_0^\nu (X_{11}(s) + b_{17}(s)) \sin s \, ds + \\
&\quad + \cos \nu \int_0^\nu (X_{13}(s) + b_{20}(s)) \cos s \, ds.
\end{aligned} \tag{3.211}$$

Como buscamos condições iniciais para que exista uma solução 2π -periódica para o subsistema, e sendo que $h_{15}^{(n)} = h_{17}^{(n)} = h_{20}^{(n)} = 0$ e $h_{19}^{(n)} \neq 0$ (ver (3.86) a (3.89)), então analisaremos as equações em (3.211) a fim de obter valores constantes para $k_{15}^{(n)}, k_{17}^{(n)}, k_{19}^{(n)}$ e $k_{20}^{(n)}$ a partir das condições iniciais adequadas.

Primeiramente, utilizando a 2π -periodicidade das soluções X_{15} e X_{19} em (3.211), obtemos, respectivamente, que

$$\int_0^{2\pi} X_{10}(s) \cos s \, ds - \int_0^{2\pi} X_{12}(s) \sin s \, ds = \int_0^{2\pi} b_{19}(s) \sin s \, ds - \int_0^{2\pi} b_{15}(s) \cos s \, ds; \tag{3.212}$$

$$\int_0^{2\pi} X_{10}(s) \sin s \, ds + \int_0^{2\pi} X_{12}(s) \cos s \, ds = - \int_0^{2\pi} b_{15}(s) \sin s \, ds - \int_0^{2\pi} b_{19}(s) \cos s \, ds. \tag{3.213}$$

No entanto, como $b_{10} = h_{10}^{(n)}$, $b_{12} = -k_{12}^{(n)}(\nu) = -\kappa_{12}^{(n)} \sin(\nu)$, $b_{15} = -k_{15}^{(n)}$ e $b_{19} = h_{19}^{(n)} - k_{19}^{(n)}$, com $n = 1, 2, 3, 4$, então, a partir das equações de (3.210), segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} X_{10}(s) \cos s \, ds &= \pi X_{10}(0) + \frac{\pi^2 \kappa_{12}^{(n)}}{2} + \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \cos u \, du \right) \right] ds + \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left[\cos s \sin s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \sin u \, du \right) \right] ds;
\end{aligned} \tag{3.214}$$

$$\int_0^{2\pi} X_{12}(s) \sin s \, ds = -\pi X_{10}(0) - \frac{\pi^2 \kappa_{12}^{(n)}}{2} - \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \cos u \, du \right) \right] ds + \tag{3.215}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{2\pi} \left[\cos s \sin s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \sin u \, du \right) \right] ds; \\
\int_0^{2\pi} X_{10}(s) \sin s \, ds & = \pi X_{12}(0) - \frac{3\pi\kappa_{12}^{(n)}}{4} + \int_0^{2\pi} \left[\cos s \sin s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \cos u \, du \right) \right] ds + (3.216) \\
& + \int_0^{2\pi} \left[\sin^2 s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \sin u \, du \right) \right] ds; \\
\int_0^{2\pi} X_{12}(s) \cos s \, ds & = \pi X_{12}(0) + \frac{\pi\kappa_{12}^{(n)}}{4} - \int_0^{2\pi} \left[\cos s \sin s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \cos u \, du \right) \right] ds + (3.217) \\
& + \int_0^{2\pi} \left[\cos^2 s \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \sin u \, du \right) \right] ds.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, ao aplicarmos as expressões (3.214) e (3.215) em (3.212), e as equações (3.216) e (3.217) em (3.213), obtemos, respectivamente, as seguintes igualdades

$$2\pi X_{10}(0) + \pi^2 \kappa_{12}^{(n)} + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \cos u \, du \right) ds = \int_0^{2\pi} k_{15}^{(n)} \cos s \, ds - \int_0^{2\pi} k_{19}^{(n)} \sin s \, ds; \quad (3.218)$$

$$\begin{aligned}
2\pi X_{12}(0) - \frac{\pi\kappa_{12}^{(n)}}{2} + \int_0^{2\pi} \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \sin u \, du \right) ds + \int_0^{2\pi} h_{19}^{(n)}(s) \cos s \, ds & = \quad (3.219) \\
= \int_0^{2\pi} k_{15}^{(n)} \sin s \, ds + \int_0^{2\pi} k_{19}^{(n)} \cos s \, ds,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\int_0^{2\pi} h_{19}^{(n)}(s) \sin s \, ds = 0$ quando $h_{19}^{(n)} = h_{000110}^{(n)}$ é dado em (3.86) a (3.89).

Portanto, tomando as condições iniciais $X_{10}(0) = X_{10}^{(n)}(0)$ e $X_{12}(0) = X_{12}^{(n)}(0)$ como

$$X_{10}^{(n)}(0) = -\frac{\pi\kappa_{12}^{(n)}}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \cos u \, du \right) ds, \quad (3.220)$$

$$X_{12}^{(n)}(0) = \frac{\kappa_{12}^{(n)}}{4} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^s h_{10}^{(n)}(u) \sin u \, du \right) ds - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_{19}^{(n)}(s) \cos s \, ds, \quad (3.221)$$

concluimos, a partir de (3.218) e (3.219), que $k_{15}^{(n)}$ e $k_{19}^{(n)}$ podem ser considerados como constantes arbitrárias.

Por sua vez, a 2π -periodicidade das soluções X_{17} e X_{20} em (3.211) também nos fornece as seguintes expressões

$$\int_0^{2\pi} X_{11}(s) \cos s \, ds - \int_0^{2\pi} X_{13}(s) \sin s \, ds = \int_0^{2\pi} b_{20}(s) \sin s \, ds - \int_0^{2\pi} b_{17}(s) \cos s \, ds, \quad (3.222)$$

$$\int_0^{2\pi} X_{11}(s) \sin s \, ds + \int_0^{2\pi} X_{13}(s) \cos s \, ds = - \int_0^{2\pi} b_{17}(s) \sin s \, ds - \int_0^{2\pi} b_{20}(s) \cos s \, ds. \quad (3.223)$$

Além disso, a partir de X_{11} e X_{13} em (3.210), sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} X_{11}(s) \cos s \, ds & = \pi X_{11}(0), & \int_0^{2\pi} X_{13}(s) \sin s \, ds & = -\pi X_{11}(0), \\
\int_0^{2\pi} X_{11}(s) \sin s \, ds & = \pi X_{13}(0), & \int_0^{2\pi} X_{13}(s) \cos s \, ds & = \pi X_{13}(0).
\end{aligned} \quad (3.224)$$

Consequentemente, como $b_{17} = -k_{17}^{(n)}$, $b_{20} = -k_{20}^{(n)}$, ao utilizarmos as equações de (3.224) nas expressões (3.222) e (3.223), temos

$$X_{11}(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} k_{17}^{(n)}(s) \cos s \, ds - \int_0^{2\pi} k_{20}^{(n)}(s) \sin s \, ds \right), \quad (3.225)$$

$$X_{13}(0) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} k_{17}^{(n)}(s) \sin s \, ds + \int_0^{2\pi} k_{20}^{(n)}(s) \cos s \, ds \right). \quad (3.226)$$

Desta forma, ao tomar as condições iniciais $X_{11}(0) = X_{11}^{(n)}(0)$ e $X_{13}(0) = X_{13}^{(n)}(0)$ identicamente nulas, concluímos que $k_{17}^{(n)}$ e $k_{20}^{(n)}$ podem ser escolhidas como constantes.

Portanto, a partir das condições iniciais em (3.220), (3.221), (3.225) e (3.226), vimos que os coeficientes $k_{15}^{(n)}, k_{17}^{(n)}, k_{19}^{(n)}$ e $k_{20}^{(n)}$ podem ser considerados constantes arbitrárias. Em particular, supomos que todos sejam iguais a zero.

Em suma, apresentamos abaixo os coeficientes $k_j^{(n)}$, com $j = 1, \dots, 21$, obtidos a partir da análise dos quatro sistemas mencionados anteriormente

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau h_1^{(n)}(s) ds, \quad k_2^{(n)} = k_3^{(n)} = 0, \quad k_4^{(n)} = k_6^{(n)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau (h_4^{(n)}(s) + h_6^{(n)}(s)) ds, \\ k_5^{(n)} &= \kappa_5^{(n)} \sin(2\nu), \quad k_7^{(n)} = k_9^{(n)} = \frac{1}{2\tau} \int_0^\tau h_9^{(n)}(s) ds, \quad k_8^{(n)} = \kappa_8^{(n)} \sin(2\nu), \\ k_{10}^{(n)} &= k_{11}^{(n)} = k_{13}^{(n)} = \dots = k_{18}^{(n)} = k_{19}^{(n)} = k_{20}^{(n)} = k_{21}^{(n)} = 0; \quad k_{12}^{(n)} = \kappa_{12}^{(n)} \sin(\nu), \end{aligned} \quad (3.227)$$

onde estamos considerando $\tau = 2\pi$.

Sabemos que as igualdades em (3.227) determinam os coeficientes $k_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3}$ do Hamiltoniano quadrático

$$\mathcal{K}_n(\zeta, \nu, \tilde{\mu}) = \sum_{\alpha+\beta=2} k_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3}^{(n)} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3}. \quad (3.228)$$

No entanto, pelas equações (3.86) até (3.89), segue que

$$\begin{aligned} h_1^{(n)} &= h_{200000}^{(n)}, \quad h_3^{(n)} = h_{000200}^{(n)}, \quad h_4^{(n)} = h_{020000}^{(n)}, \quad h_6^{(n)} = h_{000020}^{(n)}, \\ h_9^{(n)} &= h_{000002}^{(n)}, \quad h_{10}^{(n)} = h_{110000}^{(n)}, \quad h_{19}^{(n)} = h_{000110}^{(n)}, \end{aligned}$$

são os coeficientes não nulos do Hamiltoniano quadrático $\tilde{\mathcal{H}}_n(\zeta, \nu, \tilde{\mu})$, $n \geq 1$. Assim, por (3.227), vemos que os coeficientes $k_j^{(n)}$, não nulos, serão

$$k_1^{(n)}, \quad k_4^{(n)} = k_6^{(n)}, \quad k_5^{(n)}, \quad k_8^{(n)}, \quad k_7^{(n)} = k_9^{(n)} \quad \text{e} \quad k_{12}^{(n)},$$

ou seja,

$$\mathcal{K}_n(\zeta, \nu, \tilde{\mu}) = k_1^{(n)} \xi_1^2 + k_4^{(n)} (\xi_2^2 + \eta_2^2) + k_5^{(n)} \xi_2 \eta_2 + k_7^{(n)} (\xi_3^2 + \eta_3^2) + k_8^{(n)} \xi_3 \eta_3 + k_{12}^{(n)} \xi_1 \eta_2, \quad (3.229)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1^{(n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1^{(n)}(s) ds, & k_4^{(n)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (h_4^{(n)}(s) + h_6^{(n)}(s)) ds, & k_5^{(n)} &= \kappa_5^{(n)} \sin(2\nu), \\ k_7^{(n)} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} h_9^{(n)}(s) ds, & k_8^{(n)} &= \kappa_8^{(n)} \sin(2\nu), & k_{12}^{(n)} &= \kappa_{12}^{(n)} \sin(\nu). \end{aligned} \quad (3.230)$$

Por conseguinte, iremos determinar os termos quadráticos $\mathcal{K}_i$, com $i = 1, 2, 3, 4$, através da equação (3.229) quando aplicamos as expressões (3.177), (3.192), (3.208) e (3.230), isto é, para $i = 1$

$$k_1^{(1)} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}, \quad k_4^{(1)} = \frac{\tilde{\mu}_1}{2\xi_1^{*3}}, \quad k_5^{(1)} = 0, \quad k_7^{(1)} = \frac{\tilde{\mu}_1}{4\xi_1^{*3}}, \quad k_8^{(1)} = 0, \quad k_{12}^{(1)} = 0, \quad (3.231)$$

e

$$\mathcal{K}_1(\zeta, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{2} \xi_1^2 + \frac{1}{2} (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{4} (\xi_3^2 + \eta_3^2) \right). \quad (3.232)$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} k_1^{(2)} &= 3 \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}, \quad k_4^{(2)} = -\frac{3}{4} + \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}, \quad k_5^{(2)} = -\frac{3}{2} \sin(2\nu), \quad k_7^{(2)} = \frac{\tilde{\mu}_2}{2\xi_1^{*3}}, \\ k_8^{(2)} &= 0, \quad k_{12}^{(2)} = 4\sqrt{3} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \sin \nu \end{aligned} \quad (3.233)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2(\zeta, \nu, \tilde{\mu}) &= 3 \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \xi_1^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \right) (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \frac{3}{2} \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{2\xi_1^{*3}} (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \\ &+ 4\sqrt{3} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \sin(\nu) \xi_1 \eta_2; \end{aligned} \quad (3.234)$$

$$\begin{aligned} k_1^{(3)} &= \frac{9}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right), \quad k_4^{(3)} = \frac{3}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right), \quad k_5^{(3)} = -\frac{9\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \sin(2\nu), \\ k_7^{(3)} &= \frac{3}{2\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right), \quad k_8^{(3)} = \frac{3\tilde{\mu}_1}{2\xi_1^{*3}} \sin(2\nu), \quad k_{12}^{(3)} = 12\sqrt{3} \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \sin(\nu), \end{aligned} \quad (3.235)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_3(\zeta, \nu, \tilde{\mu}) &= \frac{9}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right) \xi_1^2 + \frac{3}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right) (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \frac{9\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2 + \\ &+ \frac{3}{2\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right) (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \frac{3\tilde{\mu}_1}{2\xi_1^{*3}} \sin(2\nu) \xi_3 \eta_3 + 12\sqrt{3} \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \sin(\nu) \xi_1 \eta_2; \end{aligned} \quad (3.236)$$

por último, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_4(\zeta, \nu, \tilde{\mu}) &= \frac{36}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{2} + \tilde{\mu}_4 \right) \xi_1^2 - \left(\frac{27}{4} - \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} - \frac{12\tilde{\mu}_4}{\xi_1^{*3}} \right) (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \left(18 + \frac{36\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \right) \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2 + \\ &+ \frac{6}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{2} + \tilde{\mu}_4 \right) (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \sin(2\nu) \xi_3 \eta_3 + \frac{48\sqrt{3}}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4} \tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_3 \right) \sin(\nu) \xi_1 \eta_2. \end{aligned} \quad (3.237)$$

Portanto, pelas equações (3.232), (3.234), (3.236), (3.237) e considerando $\mathcal{K}_0 = \tilde{\mathcal{H}}_0$ em (3.84), teremos o Hamiltoniano quadrático $\mathcal{K}$ na forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\zeta, \nu, \tilde{\mu}, \epsilon) = & -\frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}(\xi_3^2 + \eta_3^2) + \\
& + \frac{\epsilon}{1!} \left[\frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{2}\xi_1^2 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{4}(\xi_3^2 + \eta_3^2) \right) \right] + \\
& + \frac{\epsilon^2}{2!} \left[3\frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}\xi_1^2 + \left(-\frac{3}{4} + \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \right) (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \frac{3}{2}\text{sen}(2\nu)\xi_2\eta_2 + \frac{\tilde{\mu}_2}{2\xi_1^{*3}}(\xi_3^2 + \eta_3^2) + \right. \\
& + 4\sqrt{3}\frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}\text{sen}(\nu)\xi_1\eta_2 \left. \right] + \\
& + \frac{\epsilon^3}{3!} \left[\frac{9}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right) \xi_1^2 + \frac{3}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right) (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \frac{9\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}}\text{sen}(2\nu)\xi_2\eta_2 + \right. \\
& + \frac{3}{2\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right) (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \frac{3\tilde{\mu}_1}{2\xi_1^{*3}}\text{sen}(2\nu)\xi_3\eta_3 + 12\sqrt{3}\frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}\text{sen}(\nu)\xi_1\eta_2 \left. \right] + \\
& + \frac{\epsilon^4}{4!} \left[\frac{36}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{2} + \tilde{\mu}_4 \right) \xi_1^2 + \left(-\frac{27}{4} + \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} + \frac{12\tilde{\mu}_4}{\xi_1^{*3}} \right) (\xi_2^2 + \eta_2^2) - \right. \\
& - \left(18 + \frac{36\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} \right) \text{sen}(2\nu)\xi_2\eta_2 + \frac{6}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{2} + \tilde{\mu}_4 \right) (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \\
& + \frac{6\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}}\text{sen}(2\nu)\xi_3\eta_3 + \frac{48\sqrt{3}}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_3 \right) \text{sen}(\nu)\xi_1\eta_2 \left. \right] + \dots
\end{aligned} \tag{3.238}$$

3.4 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE LINEAR EM TERMOS DO HAMILTONIANO K

As condições de estabilidade linear, impostas pelas raízes do polinômio característico da matriz Hamiltoniana associada ao Hamiltoniano autônomo K , serão fundamentais para a determinação futura dos coeficientes das curvas fronteiras das regiões de estabilidade.

Em geral, consideraremos os termos quadráticos K_n e $\mathcal{H}_n$ como dados pelas equações (3.128) e (3.130), respectivamente. Então, como em Cabral e Dias (2023), escrevemos o Hamiltoniano autônomo K na forma

$$\begin{aligned}
K(\zeta, \nu, \mu) = & \sum_{\alpha+\beta=2} k_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \xi_3^{\alpha_3} \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \eta_3^{\beta_3}, \quad \text{onde} \\
k_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3} = & k_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}^{(n)},
\end{aligned} \tag{3.239}$$

com $k_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}^{(0)}$ sendo os coeficientes de $K_0 = \mathcal{H}_0$.

Assim, no caso do problema com três graus de liberdade, o Hamiltoniano autônomo qua-

drático K em (3.239), pode ser representado por

$$\begin{aligned}
 K = & k_{200000}\xi_1^2 + k_{100100}\xi_1\eta_1 + k_{000200}\eta_1^2 + k_{020000}\xi_2^2 + k_{010010}\xi_2\eta_2 + k_{000020}\eta_2^2 + k_{002000}\xi_3^2 + \\
 & k_{001001}\xi_3\eta_3 + k_{000002}\eta_3^2 + k_{110000}\xi_1\xi_2 + k_{101000}\xi_1\xi_3 + k_{100010}\xi_1\eta_2 + k_{100001}\xi_1\eta_3 + k_{011000}\xi_2\xi_3 + \\
 & k_{010100}\xi_2\eta_1 + k_{010001}\xi_2\eta_3 + k_{001100}\xi_3\eta_1 + k_{001010}\xi_3\eta_2 + k_{000110}\eta_1\eta_2 + k_{000101}\eta_1\eta_3 + k_{000011}\eta_2\eta_3.
 \end{aligned} \quad (3.240)$$

Com isso, a matriz Hessiana $\mathbf{G}$ do Hamiltoniano quadrático K será

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2k_{200000} & k_{110000} & k_{101000} & k_{100100} & k_{100010} & k_{100001} \\ k_{110000} & 2k_{020000} & k_{011000} & k_{010100} & k_{010010} & k_{010001} \\ k_{101000} & k_{011000} & 2k_{002000} & k_{001100} & k_{001010} & k_{001001} \\ k_{100100} & k_{010100} & k_{001100} & 2k_{000200} & k_{000110} & k_{000101} \\ k_{100010} & k_{010010} & k_{001010} & k_{000110} & 2k_{000020} & k_{000011} \\ k_{100001} & k_{010001} & k_{001001} & k_{000101} & k_{000011} & 2k_{000002} \end{bmatrix}. \quad (3.241)$$

Por outro lado, sabemos que a matriz $\mathbf{A} = J\mathbf{G}$ é Hamiltoniana. Logo, tal matriz tem a forma em blocos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{bmatrix},$$

com B e C matrizes simétricas (CABRAL; DIAS, 2023). Além disso, conforme a Proposição 4, o polinômio característico $p(\lambda)$ da matriz Hamiltoniano $\mathbf{A}$ é par, então a equação característica para um problema com três graus de liberdade terá a forma

$$\lambda^6 + a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0, \quad (3.242)$$

com a, b e c números reais.

Por sua vez, a estabilidade de um equilíbrio do sistema Hamiltoniano definido por K decorre da condição de que os autovalores λ sejam imaginários puros e distintos, então tomamos $\lambda = iy$, com y um número real. Desta forma, a equação (3.242) pode ser reescrita como

$$y^6 - ay^4 + by^2 - c = 0.$$

Ao substituímos $x = y^2$ na expressão acima, a condição de estabilidade linear de K significa que a seguinte equação admite três raízes reais positivas e distintas

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0.$$

Consequentemente, a função $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ deve interceptar o eixo vertical em um ponto negativo de f e possui um ponto de máximo e um ponto de mínimo locais. A partir disto, temos as seguintes desigualdades envolvendo os coeficientes a, b e c

$$a > 0, \quad b > 0; \quad c > 0 \quad \text{e} \quad a^2 - 3b > 0, \quad (3.243)$$

que representam a condição necessária e suficiente para estabilidade linear do Hamiltoniano autônomo K com três graus de liberdade.

Por outro lado, em nosso caso, passamos agora à determinação dos coeficientes a, b, c em (3.242) em termos dos Hamiltonianos quadráticos $K_1, K_2, K_3, \dots$, a fim de usar tais expressões para determinar as regiões de estabilidade linear.

Considere o Hamiltoniano quadrático K conforme apresentado em (3.239). A partir de (3.72) e (3.129), podemos deduzir que

$$\begin{aligned} K = & \left(\frac{\omega_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_4^{(n)} \right) (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{k_1^{(n)}}{2} (\xi_3^2 + \eta_2^2) + \\ & + \frac{1}{2} (\xi_2^2 + \eta_3^2) + \left(\omega_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_5^{(n)} \right) (\xi_2 \xi_3 + \eta_2 \eta_3). \end{aligned} \quad (3.244)$$

Com isso, concluímos que existem apenas oito coeficientes não nulos em K , que são

$$k_{200000}, k_{000200}, k_{020000}, k_{000020}, k_{002000}, k_{000002}, k_{011000}, k_{000011}, \quad (3.245)$$

tais que $k_{200000} = k_{000200}$, $k_{020000} = k_{000020}$, $k_{002000} = k_{000002}$ e $k_{011000} = k_{000011}$.

A fim de simplificar a notação, os coeficientes de $k_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3}$ de K em (3.239) serão denotados por k_j , onde os mesmos são ordenados com $j = 1, \dots, 21$ conforme a sequência da expressão (3.105). Assim, os coeficientes em (3.245) serão representados por $k_1, k_3, k_4, k_6, k_7, k_9, k_{14}, k_{21}$, para os quais valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} k_1 = k_3 = & \left(\frac{\omega_1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_4^{(n)} \right), \quad k_4 = k_9 = \frac{1}{2}, \\ k_6 = k_7 = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{k_1^{(n)}}{2}, \quad k_{14} = k_{21} = \left(\omega_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_5^{(n)} \right). \end{aligned} \quad (3.246)$$

Consequentemente, a matriz $\mathbf{G}$ mencionada em (3.241) será representada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{14} & 2k_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_6 & k_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{14} & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.247)$$

Neste caso, conforme definido em (3.242), o polinômio característico de $\mathbf{A} = J\mathbf{G}$ possui os seguintes coeficientes

$$\begin{aligned} a &= 4k_1^2 + 4k_6 + 2k_{14}^2, \\ b &= (k_{14}^4 + 4k_6^2 - 4k_6k_{14}^2) + 4k_1^2(2k_{14}^2 + 4k_6) = (k_{14}^2 - 2k_6)^2 + 8k_1^2(k_{14}^2 + 2k_6), \\ c &= 4k_1^2(k_{14}^4 + 4k_6^2 - 4k_6k_{14}^2) = 4k_1^2(k_{14}^2 - 2k_6)^2. \end{aligned} \quad (3.248)$$

No entanto, essa equação característica também pode ser reescrita na forma

$$(\lambda^2 + 4k_1^2) [\lambda^4 + (2k_{14}^2 + 4k_6) \lambda^2 + (k_{14}^4 + 4k_6^2 - 4k_6k_{14}^2)] = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$(\lambda^2 + 4k_1^2) \left[\lambda^2 + (k_{14} + \sqrt{2k_6})^2 \right] \left[\lambda^2 + (k_{14} - \sqrt{2k_6})^2 \right] = 0. \quad (3.249)$$

Logo, os autovalores imaginários puros e distintos desta equação característica são

$$\lambda_1 = \pm 2ik_1, \quad \lambda_2 = \pm i(k_{14} + \sqrt{2k_6}), \quad \lambda_3 = \pm i(k_{14} - \sqrt{2k_6}), \quad (3.250)$$

com os coeficientes k_6 e k_{14} não nulos.

Portanto, as condições sobre o Hamiltoniano autônomo K para um equilíbrio linearmente estável são

$$k_1(\mu) \neq 0, \quad k_{14}(\mu) \neq 0, \quad k_{14}^2(\mu) \neq 2k_6(\mu) \quad \text{e} \quad k_6(\mu) > 0. \quad (3.251)$$

3.5 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE LINEAR EM TERMOS DO HAMILTONIANO $\mathcal{K}$

Sejam os Hamiltonianos $\mathcal{K}_0 = \tilde{\mathcal{H}}_0 = -\frac{1}{2}\eta_1^2 + \frac{1}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2}(\xi_3^2 + \eta_3^2)$ conforme (3.84), e $\mathcal{K}_j$, com $j = 1, 2, \dots$, definido por (3.229). Assim, o Hamiltoniano quadrático $\mathcal{K}$, dado por

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 + \frac{\epsilon}{1!}\mathcal{K}_1 + \frac{\epsilon^2}{2!}\mathcal{K}_2 + \frac{\epsilon^3}{3!}\mathcal{K}_3 + \dots,$$

pode ser reescrito na forma

$$\mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \tilde{\mu}, \epsilon) = \mathcal{K}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \left(k_1^{(n)} \xi_1^2 + K_n^{(2)} + K_n^{(3)} + \kappa_{12}^{(n)} \sin(\nu) \xi_1 \eta_2 \right),$$

em que $K_n^{(2)} = k_4^{(n)} (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \kappa_5^{(n)} \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2$ e $K_n^{(3)} = k_7^{(n)} (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \kappa_8^{(n)} \sin(2\nu) \xi_3 \eta_3$ (ver equações (3.178) e (3.193)). Assim, ao substituirmos $\mathcal{K}_0$ dado acima e reorganizarmos os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \tilde{\mu}, \epsilon) = & \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_1^{(n)} \right) \xi_1^2 - \frac{1}{2} \eta_1^2 + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_4^{(n)} \right) (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \\ & + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_7^{(n)} \right) (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_5^{(n)} \right) \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2 + \\ & + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_8^{(n)} \right) \sin(2\nu) \xi_3 \eta_3 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_{12}^{(n)} \right) \sin(\nu) \xi_1 \eta_2, \end{aligned} \quad (3.252)$$

onde, conforme o Hamiltoniano (3.239), teremos nove coeficientes não nulos em $\mathcal{K}$, a saber

$$k_{200000}, k_{000200}, k_{020000}, k_{010010}, k_{000020}, k_{002000}, k_{001001}, k_{000002}, k_{100010}, \quad (3.253)$$

onde $k_{020000} = k_{000020}$ e $k_{002000} = k_{000002}$.

Novamente, como na expressão (3.239), os coeficientes de $k_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_2 \beta_3}$ de $\mathcal{K}$ serão denotados por k_j , onde os mesmos são ordenados com $j = 1, \dots, 21$ conforme a sequência da expressão (3.105). Logo, os coeficientes em (3.253) serão, a partir de agora, representados respectivamente por $k_1, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, k_9$ e k_{12} , onde se aplicam as igualdades

$$\begin{aligned} k_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_1^{(n)}, \quad k_3 = -\frac{1}{2}, \quad k_4 = k_6 = \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_4^{(n)} \right), \quad k_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_5^{(n)} \sin(2\nu), \\ k_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_8^{(n)} \sin(2\nu), \quad k_7 = k_9 = \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} k_7^{(n)} \right), \quad k_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_{12}^{(n)} \sin(\nu). \end{aligned} \quad (3.254)$$

Consequentemente, o Hamiltoniano $\mathcal{K}$ em (3.252) é transformado em

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \nu, \tilde{\mu}, \epsilon) = & k_1 \xi_1^2 + k_3 \eta_1^2 + k_4 (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \kappa_5 \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2 + \\ & + k_7 (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \kappa_8 \sin(2\nu) \xi_3 \eta_3 + \kappa_{12} \sin(\nu) \xi_1 \eta_2, \end{aligned} \quad (3.255)$$

onde denotamos $\kappa_5 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_5^{(n)}$, $\kappa_8 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_8^{(n)}$ e $\kappa_{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \kappa_{12}^{(n)}$.

Por outro lado, para analisarmos a condição de estabilidade linear do Hamiltoniano $\mathcal{K}$ em (3.255), iremos reescrevê-lo como a soma de Hamiltonianos, isto é,

$$\mathcal{K} = K^{(1)} + K^{(2)} + K^{(3)} + K^{(4)},$$

onde

$$\begin{aligned} K^{(1)}(\xi_1, \eta_1) &= k_1 \xi_1^2 - \frac{1}{2} \eta_1^2, & K^{(2)}(\xi_2, \eta_2, \nu) &= k_4(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \kappa_5 \sin(2\nu) \xi_2 \eta_2, \\ K^{(3)}(\xi_3, \eta_3, \nu) &= k_7(\xi_3^2 + \eta_3^2) + \kappa_8 \sin(2\nu) \xi_3 \eta_3, & K^{(4)}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \nu) &= \kappa_{12} \sin(\nu) \xi_1 \eta_2. \end{aligned} \quad (3.256)$$

Ademais, faremos uso da Proposição 14, cuja demonstração pode ser encontrada em Cabral e Dias (2023), a qual garante que um sistema linear periódico contínuo é estável se, e somente se, todas as suas soluções forem limitadas.

Conforme visto no Lema 25, a origem é um equilíbrio estável para os Hamiltonianos $K^{(2)}$ e $K^{(3)}$, independentemente dos valores dos coeficientes k_4, κ_5, k_7 e κ_8 .

Em relação ao Hamiltoniano $K^{(1)}$ observamos que ele é autônomo. Assim, a matriz Hamiltoniana associada a esse sistema, é dada por $A_1 = J \text{Hess}(K^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2k_1 & 0 \end{pmatrix}$, cujos autovalores são $\lambda = \pm \sqrt{2k_1}$. Desta forma, se $k_1 > 0$, a origem é um equilíbrio instável de $K^{(1)}$; enquanto que, para $k_1 < 0$, a origem é um equilíbrio estável em $K^{(1)}$.

Por último, para o Hamiltoniano $K^{(4)}$, temos o sistema linear $\zeta'_4(\nu) = A_4 \zeta_4$, em que $\zeta_4 = (\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ e $A_4 = J \text{Hess}(K^{(4)})$, isto é,

$$\xi'_1 = 0; \quad \xi'_2 = \kappa_{12} \sin(\nu) \xi_1; \quad \eta'_1 = -\kappa_{12} \sin(\nu) \eta_2; \quad \eta'_2 = 0. \quad (3.257)$$

Assim, as soluções desse sistema são dadas por

$$\begin{aligned} \xi_1(\nu) &= \xi_1(0), & \xi_2(\nu) &= -\kappa_{12} \xi_1(0) \cos(\nu) + (\xi_2(0) + \kappa_{12} \xi_1(0)), \\ \eta_1(\nu) &= \kappa_{12} \eta_2(0) \cos(\nu) + (\eta_1(0) - \kappa_{12} \eta_2(0)), & \eta_2(\nu) &= \eta_2(0), \end{aligned} \quad (3.258)$$

onde $\xi_1(0), \xi_2(0), \eta_1(0), \eta_2(0)$ e κ_{12} são constantes.

Diante do exposto, as soluções do sistema linear em (3.257) são limitadas. Além disso, para $k_1 < 0$, a Proposição 14 nos garante que as soluções dos sistemas lineares $\zeta'_i = A_i(\nu) \zeta_i$, onde $\zeta_i = (\xi_i, \eta_i)$ e $A_i = J \text{Hess}(K^{(i)})$ para $i = 1, 2, 3$, são também soluções limitadas.

Consequentemente, as soluções $\zeta(\nu)$ do sistema linear $\zeta' = A(\nu) \zeta$, com $A = J \text{Hess}(\mathcal{K})$, são combinações lineares das soluções $\zeta_i(\nu)$ dos sistemas lineares $\zeta'_i = A_i(\nu) \zeta_i$, $i = 1, \dots, 4$. Assim, para $k_1 < 0$, essas soluções são limitadas, portanto, pela Proposição 14, o sistema $\zeta' = A(\nu) \zeta$ é estável. Por outro lado, se $k_1 > 0$, o sistema $\dot{\zeta} = A(\nu) \zeta$ torna-se instável.

Dessa forma, a condição sobre o Hamiltoniano $\mathcal{K}$ para que um equilíbrio seja linearmente estável é determinada por

$$k_1 < 0. \quad (3.259)$$

3.6 CONSTRUÇÃO DAS CURVAS FRONTEIRAS ENTRE AS REGIÕES DE ESTABILIDADE E INSTABILIDADE

3.6.1 Curvas no Plano Paramétrico (μ, ϵ)

Como visto na subseção 3.4, a região de estabilidade linear de K é determinada pelas condições apresentadas em (3.251), em função dos valores dos parâmetros $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots$. Assim, as curvas que delimitam as regiões de estabilidade e instabilidade no plano paramétrico (μ, ϵ) são determinadas pelas igualdades

$$k_1(\mu) = 0, \quad \text{ou} \quad k_{14}(\mu) = 0, \quad \text{ou} \quad k_6(\mu) = 0, \quad \text{ou} \quad k_{14}^2(\mu) = 2k_6(\mu). \quad (3.260)$$

Seja K a função Hamiltoniana dada pela equação (3.142). Se considerarmos o Hamiltoniano em sua forma quadrática (3.239), então os coeficientes k_1, k_6 e k_{14} serão

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{\epsilon}{1!} \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}} \frac{3\sqrt{2}}{16} + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{3\sqrt{2}}{8} \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] + \frac{\epsilon^3}{3!} \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right) \frac{9\sqrt{2}}{8\xi_1^{*3}} + \\ &\quad + \frac{\epsilon^4}{4!} \frac{9\sqrt{2}}{4} \left[-\frac{3}{4} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] + \dots; \\ k_6 &= \frac{\epsilon}{1!} \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}} \frac{9}{20} + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{9}{10} \left[-1 + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] + \frac{\epsilon^3}{3!} \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right) \frac{27}{10\xi_1^{*3}} + \\ &\quad + \frac{\epsilon^4}{4!} \frac{54}{10} \left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] + \dots; \\ k_{14} &= \omega_2 - \frac{\epsilon}{1!} \frac{\mu_1}{\xi_1^{*3}} \frac{21}{50} \sqrt{5} + \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\sqrt{5}}{25} \left[6 - \frac{21}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{\mu_0}{2} + \mu_2 \right) \right] - \frac{\epsilon^3}{3!} \left(\frac{\mu_1}{2} + \mu_3 \right) \frac{63\sqrt{5}}{25\xi_1^{*3}} - \\ &\quad - \frac{\epsilon^4}{4!} \frac{18\sqrt{5}}{25} \left[-3 + \frac{7}{\xi_1^{*3}} \left(\frac{3}{4}\mu_0 + \mu_2 + 2\mu_4 \right) \right] + \dots. \end{aligned} \quad (3.261)$$

Pelas equações (3.260) e (3.261), observamos que as condições de fronteiras $k_1 = 0$, $k_{14} = 0$ e $k_{14}^2 = 2k_6$ não possuem soluções que definam as curvas que delimitam as regiões estáveis e instáveis que emanam de $(\mu_0, 0)$. Então, resta-nos analisar o caso em que $k_6 = 0$.

Neste último caso, ao anular os coeficientes das potências de ϵ em k_6 , conforme dados por (3.261), obtemos os quatro primeiros coeficientes da curva μ em (3.52), como

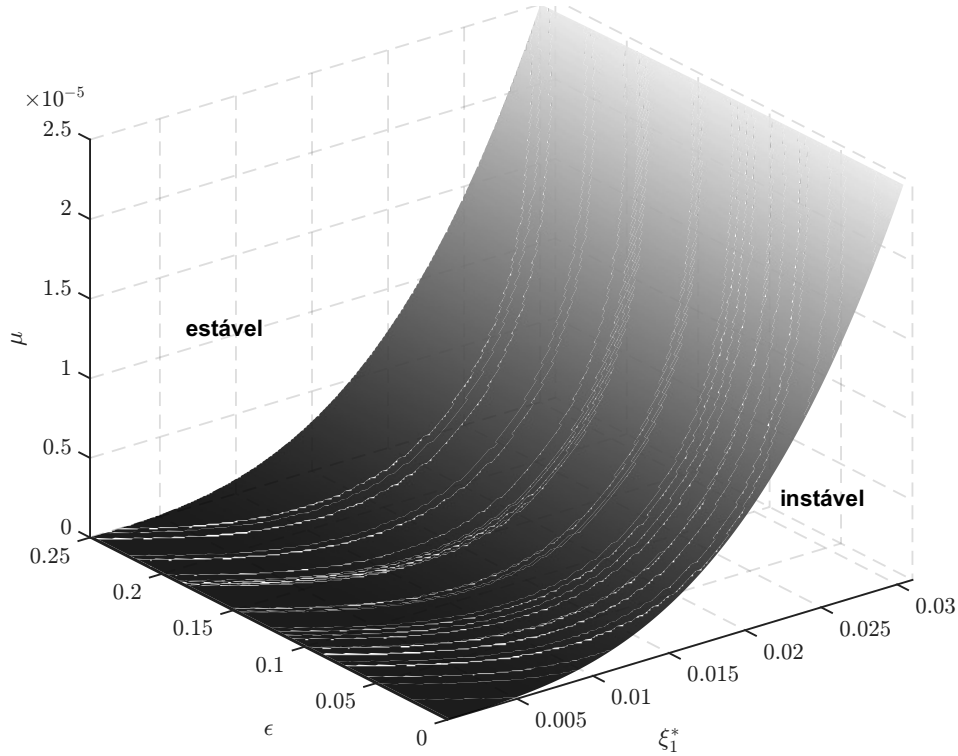
$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{5}{9}\xi_1^{*3}, \quad \mu_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{5}{36}\xi_1^{*3},$$

onde ressaltamos que o valor de ressonância paramétrica é $\mu_0 = \frac{8}{9}\xi_1^{*3}$.

Desta maneira, conseguimos determinar a superfície que define com precisão até a quarta ordem as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros (μ, ξ_1^*, ϵ) , Figura 3,

$$\mu(\xi_1^*, \epsilon) = \frac{8}{9}\xi_1^{*3} + \frac{5}{9}\xi_1^{*3}\epsilon^2 + \frac{5}{36}\xi_1^{*3}\epsilon^4. \quad (3.262)$$

Figura 3 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela superfície do extremo esquerdo do intervalo estabilidade linear



Fonte: O autor (2025).

Relembramos das subseções 3.1.2 e 3.1.3 que definimos o pequeno número real positivo $\mu := \frac{\mu}{\kappa} = \frac{m_1}{M}$ (razão da massa do planeta P pela a massa do Sol), bem como a condição de equilíbrio para ξ_1^* , isto é, o mesmo satisfaz a $\xi_1^3 + \xi_1^2 - \mu = 0$, se $\xi_1 > 0$. Dessa forma, consideramos μ variando entre $1,66 \times 10^{-7}$ e $9,56 \times 10^{-4}$, correspondendo às razões de massa μ para Mercúrio e Júpiter, respectivamente. Assim, obtemos que $6,7 \times 10^{-11} \leq \xi_1^{*3} \leq 2,8 \times 10^{-5}$, ou seja, assumindo $\xi_1^{*3} = 10^{-5}$, a curva no plano dos parâmetros (μ, ϵ) , representada na Figura 4 e que se origina no ponto $(\mu_0, 0)$, é expressa por

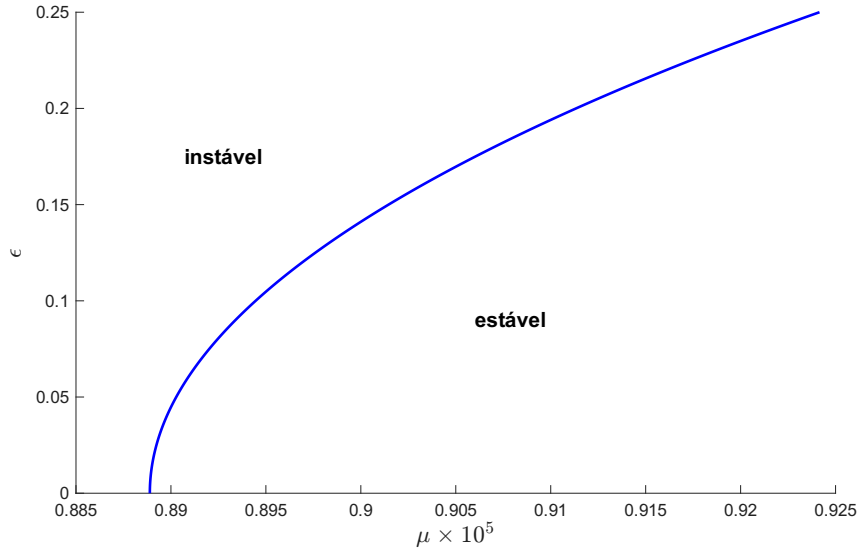
$$\mu(\epsilon) = \left(\frac{8}{9} + \frac{5}{9}\epsilon^2 + \frac{5}{36}\epsilon^4 \right) 10^{-5}. \quad (3.263)$$

A partir de $\mu_1 = \mu_3 = 0$ e considerando k_6 em (3.261), teremos que $k_6 < 0$ acima da curva $\mu(\epsilon)$, Figura 4. Esta parte no gráfico, portanto, representa a região de instabilidade.

3.6.2 Curvas no Plano Paramétrico $(\tilde{\mu}, \epsilon)$

Para o Hamiltoniano quadrático $\mathcal{K}$, a condição de estabilidade linear é imposta pela desigualdade apresentada em (3.259), a qual é função de $\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots$. Assim, a curva que

Figura 4 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela curva no plano paramétrico, especificamente para ξ_1^{*3} igual a 10^{-5}



Fonte: O autor (2025).

delimita as regiões de estabilidade e instabilidade no plano dos parâmetros $(\tilde{\mu}, \epsilon)$ é dada pela condição

$$k_1 = 0. \quad (3.264)$$

Porém, ao organizar o Hamiltoniano $\mathcal{K}$ em (3.238) de acordo com (3.239), obtemos

$$k_1 = \frac{3}{2} \frac{\epsilon}{1!} \frac{\tilde{\mu}_1}{\xi_1^{*3}} + 3 \frac{\epsilon^2}{2!} \frac{\tilde{\mu}_2}{\xi_1^{*3}} + \frac{9}{\xi_1^{*3}} \frac{\epsilon^3}{3!} \left(\frac{\tilde{\mu}_1}{2} + \tilde{\mu}_3 \right) + \frac{36}{\xi_1^{*3}} \frac{\epsilon^4}{4!} \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{2} + \tilde{\mu}_4 \right) + \dots \quad (3.265)$$

Consequentemente, a condição $k_1 = 0$ equivale a

$$\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = 0. \quad (3.266)$$

Desta forma, dado que o valor de ressonância paramétrica é $\tilde{\mu}_0 = \xi_1^{*3}$, obtemos a superfície que define com precisão até a quarta ordem, as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço de parâmetros $(\tilde{\mu}, \xi_1^*, \epsilon)$, Figura 5, como

$$\tilde{\mu}(\xi_1^*, \epsilon) = \xi_1^{*3}. \quad (3.267)$$

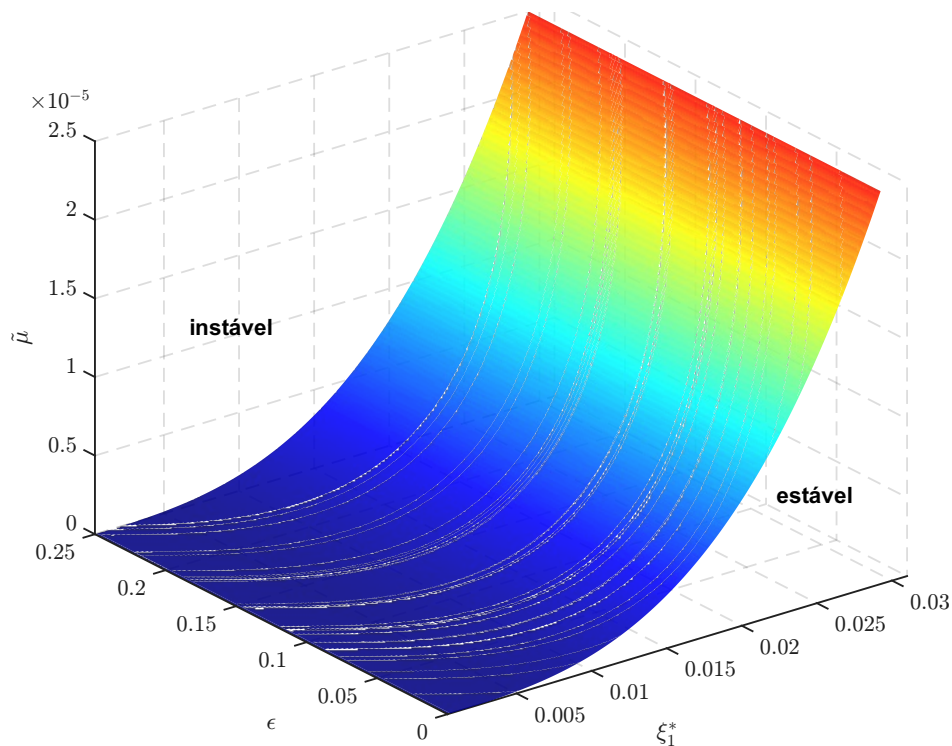
A curva no plano dos parâmetros $(\tilde{\mu}, \epsilon)$, que emana do ponto $(\tilde{\mu}_0, 0)$, será a curva constante

$$\tilde{\mu}(\epsilon) = 10^{-5} \quad (3.268)$$

que está representada na Figura 6, quando $\xi_1^{*3} = 10^{-5}$.

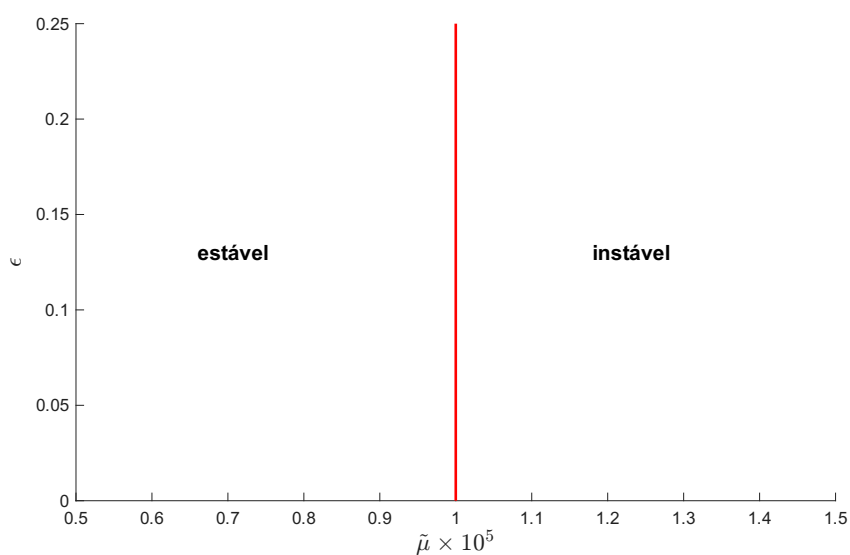
Pela expressão k_1 em (3.265), considerando $\tilde{\mu}_2 = \tilde{\mu}_3 = \tilde{\mu}_4 = 0$ conforme em (3.266), e tomando $\tilde{\mu}_1 > 0$, obtemos $k_1 > 0$. Dessa forma, a região à direita de $\tilde{\mu}(\epsilon)$ corresponde à região de instabilidade, como ilustrado na Figura 6.

Figura 5 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela superfície do extremo direito do intervalo estabilidade linear



Fonte: O autor (2025).

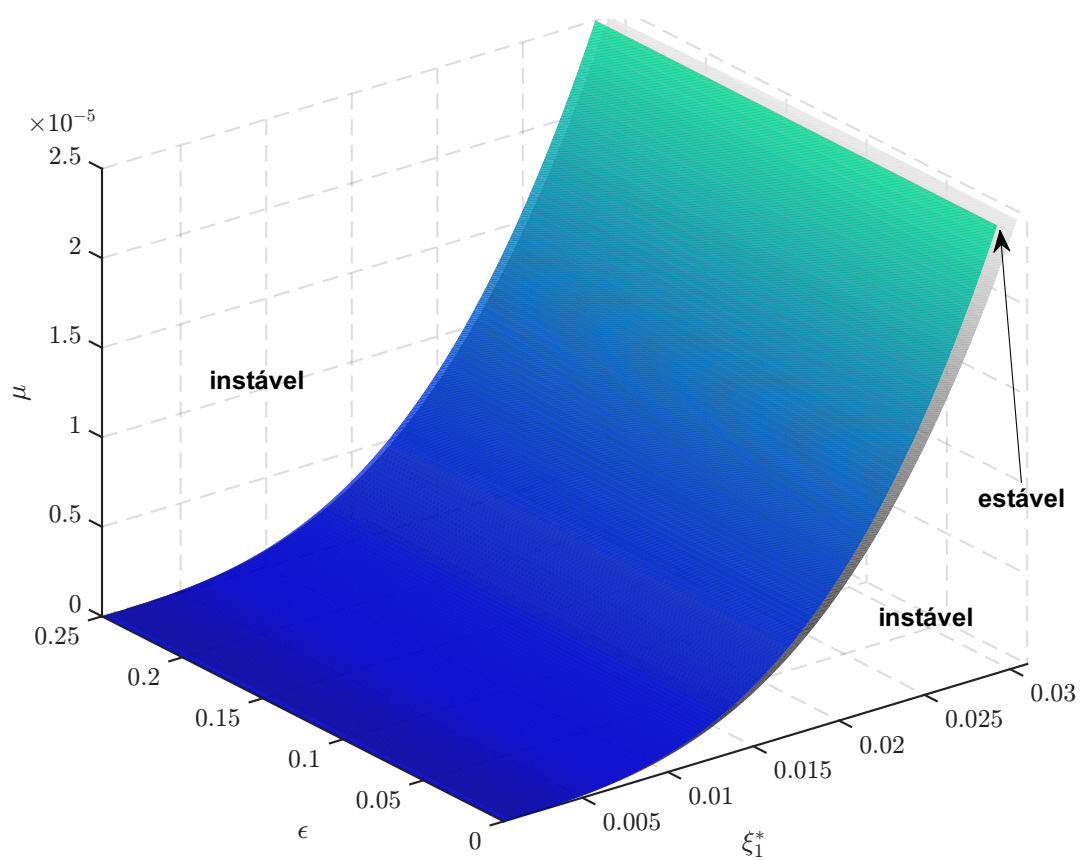
Figura 6 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pela curva no plano paramétrico, especificamente para $\tilde{\mu}_0 = \xi_1^{*3}$ igual a 10^{-5}



Fonte: O autor (2025).

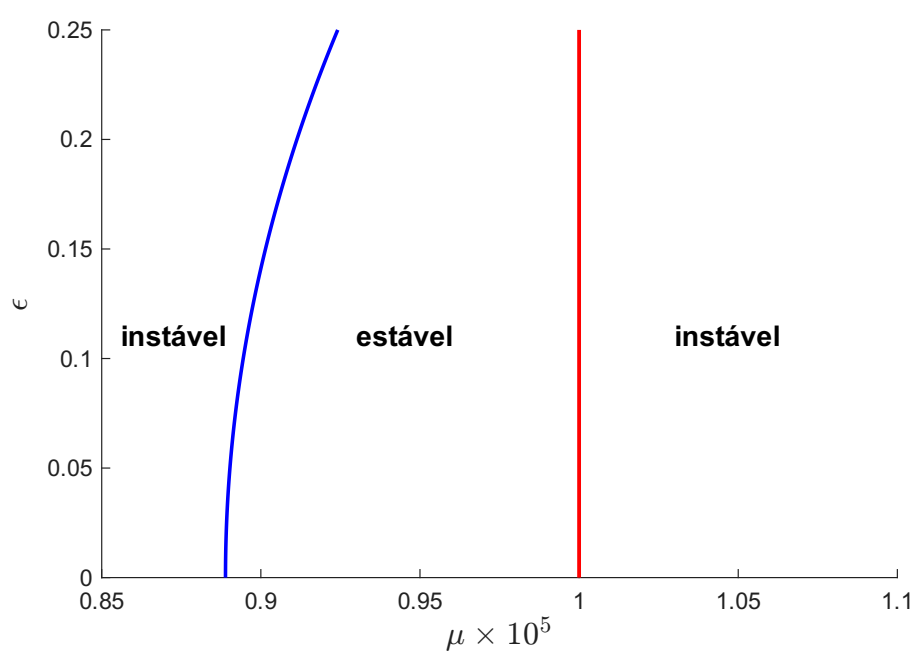
Por fim, combinamos ambas as superfícies, assim como as curvas (3.263) e (3.268) apresentadas anteriormente no plano dos parâmetros, em um único gráfico, conforme ilustrado nas Figuras 7 e 8, respectivamente.

Figura 7 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pelas superfícies



Fonte: O autor (2025).

Figura 8 – Regiões de estabilidade e instabilidade delimitadas pelas curvas no plano paramétrico, correspondentes aos extremos do intervalo de estabilidade linear do problema



Fonte: O autor (2025).

4 CONCLUSÃO

Inicialmente, ao estudarmos nosso problema restrito circular de dois corpos, identificamos uma órbita circular do corpo de massa m_2 a qual, em coordenadas rotatórias, configura um equilíbrio do correspondente sistema Hamiltoniano. Ao normalizarmos o Hamiltoniano quadrático do sistema linearizado no intervalo de estabilidade linear, concluímos que não é possível garantir a estabilidade não linear no interior e nem nos extremos do intervalo, pois mostramos que, tanto no interior quanto nos extremos do intervalo, os Hamiltonianos quadráticos em torno do equilíbrio são indefinidos, o que inviabiliza a aplicação do Teorema de Dirichlet. Além disso, como o sistema possui três graus de liberdade, não é possível decidir sobre a estabilidade não linear com base no Teorema de Arnold.

Quanto ao problema restrito espacial elíptico de três corpos apresentado neste trabalho, o sistema Hamiltoniano 2π -periódico que descreve este problema tem os pontos de equilíbrio ζ^* que, em coordenadas pulsantes, correspondem a órbitas circulares de raio $r_0\xi_1^*$ em torno do planeta. Fizemos a normalização do Hamiltoniano quadrático na vizinhança do ponto de equilíbrio ζ^* e depois aplicamos o método de Deprit-Hori para obter o Hamiltoniano quadrático autônomo, após o que foi possível construir, para cada ξ_1^* , as superfícies que separam as regiões de estabilidade e instabilidade no espaço dos parâmetros. O pequeno parâmetro ϵ varia em um intervalo que contém as excentricidades de todos os planetas do sistema solar. Como μ_0 é a razão entre a massa do planeta com a massa do Sol, tomamos $\xi_1^* = 10^{-5}$ para obter as curvas contínuas que partem de $(\mu_0, 0)$ e $(\tilde{\mu}_0, 0)$ e separam as regiões de estabilidade e instabilidade no plano paramétrico. Essas curvas indicam na Figura 8 que a região de estabilidade linear se estreita à medida que a excentricidade aumenta.

Como perspectiva futura, a ideia é estudar o problema restrito espacial elíptico de três corpos ao considerarmos a força gravitacional do Sol sobre o satélite. Por exemplo, quando o satélite é a Lua, que está aproximadamente a 384000 km do centro da Terra, concluímos que a força gravitacional do Sol sobre ela é cerca de 2,18 vezes maior do que a força gravitacional da Terra sobre a Lua. Além disso, objetos localizados a uma distância mínima de 259959 km do centro da Terra já começam a experimentar uma força gravitacional do Sol igual à da Terra. Diante desse cenário, é possível analisar a estabilidade paramétrica neste problema sob a influência da força gravitacional dos dois corpos primários - o planeta e o Sol - sobre o corpo de menor massa, o satélite.

REFERÊNCIAS

- ARAUJO, G. C. *Estabilidade Paramétrica em um Problema de $P+2$ Corpos*. Tese de Doutorado, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Natureza: Universidade Federal de Pernambuco, 2015.
- ARAUJO, G. C.; CABRAL, H. E. Parametric stability in a $p+2$ -body problem. *J. Dynam. Differential Equations*, ACM, v. 30, n. 2, p. 719–742, 2018.
- ARAUJO, G. C.; CABRAL, H. E. Parametric stability of a charged pendulum with an oscillating suspension point. *Regular and Chaotic Dynamics*, v. 26, n. 1, p. 39–60, 2021.
- BRONSON, R. *Matrix Methods: An Introduction*. New York: Academic Press, 1970. 284 p.
- CABRAL, H. E.; DIAS, L. B. *Normal Forms and Stability of Hamiltonian Systems*. [S.l.]: Springer, 2023.
- CARVALHO, A. C.; ARAUJO, G. C. Parametric resonance of a charged pendulum with a suspension point oscillating between two vertical charged lines. *Regular and Chaotic Dynamics*, v. 28, n. 3, p. 321–331, 2023.
- CELLETTI, A.; PEROZZI, E. *Celestial Mechanics: The Waltz of the Planets*. New York: Springer New York, 2007. 248 p.
- DOERING, C. I.; LOPES, O. A. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2010. 423 p.
- ESA. Types of orbits. 2020. Disponível em: <https://www.esa.int/Enabling_Support/Space_Transportation/Types_of_orbits>.
- HIRSCH, M.; SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. [S.l.]: Academic Press, 1974.
- INC, T. M. Matlab version: R2025a. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, United States, 2025. Disponível em: <<https://www.mathworks.com>>.
- KAMEL, A. A. Expansion formulae in canonical transformations depending on a small parameter. *Celest. Mech.*, v. 1, n. 2, p. 190–199, 1969.
- MARKEEV, A. P. On the metric stability and the nekhoroshev estimate of the velocity of arnold diffusion in a special case of the three-body problem. *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer Nature, v. 26, n. 4, p. 321–330, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1134/S1560354721040018>>.
- MARKEEV, A. P. On the stability of lagrange solutions in the spatial near-circular restricted three-body problem. *Mechanics of Solids*, Springer Nature, v. 58, n. 7, p. 2531–2543, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.3103/S0025654421080124>>.
- MARKEEV, A. P. On resonance values of parameters in the problem of stability of lagrange solutions in a restricted three-body problem close to a circle. *Mechanics of Solids*, Springer Nature, v. 58, n. 7, p. 2531–2543, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.3103/S0025654423070142>>.

MEYER, K. R.; OFFIN, D. C. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. 3 ed. [S.l.]: Springer, 2017.

MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 669 p.

MUSIELAK, Z.; QUARLES, B. The three-body problem. *Reports on Progress in Physics*, IOP Publishing, v. 77, n. 6, p. 065901, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/0034-4885/77/6/065901>>.

NETO, J. L. de M.; CABRAL, H. E. Parametric stability of a pendulum with variable length in an elliptic orbit. *Regular and Chaotic Dynamics*, v. 25, n. 4, p. 323–329, 2020.

SIEGEL, C. L.; MOSER, J. K. *Lectures on Celestial Mechanics*,. New York: Springer, 1971. 290 p.

VALERIANO, L. R. Parametric stability in robe's problem. *Regular and Chaotic Dynamics*, v. 21, n. 1, p. 126–135, 2016.

VIDAL, C.; VIDARTE, J. Stability of the equilibrium solutions in a charged restricted circular three-body problem. *Journal Differential Equations*, v. 260, n. 6, p. 5128–5173, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jde.2015.12.002>>.

ZHONG, X.; ZHAO, J.; YU, K.; AL. et. Stability analysis of resonant rotation of a gyrostat in an elliptic orbit under third- and fourth-order resonances. *Regul. Chaot. Dyn.*, Springer, v. 28, n. 2, p. 162–190, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1134/S156035472302003X>>.

APÊNDICE A – CÁLCULO DA MATRIZ SEMELHANTE À MATRIZ M

Inicialmente, com o intuito de facilitar a determinação do polinômio característico de M , apresentada na subseção 3.2.2, buscamos obter uma matriz semelhante à matriz M por meio de uma mudança de base. Em meus a esse cálculos, usamos o software MATLAB (INC, 2025).

Começamos determinando o núcleo e a imagem da aplicação $\mathbf{X} \mapsto M\mathbf{X}$. Assim, dado o vetor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{21}) \in \mathbb{R}^{21}$ tal que $M\mathbf{X} = 0$, teremos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} \omega_1 X_2 &= 0; -2\omega_1 X_1 + 2\omega_1 X_3 = 0; -\omega_1 X_2 = 0; X_5 + \omega_2 X_{16} = 0; 2X_6 - \omega_2 X_{14} + \omega_2 X_{21} = 0; \\ -\omega_2 X_{18} &= 0; \omega_2 X_{18} = 0; -2X_7 - \omega_2 X_{14} + \omega_2 X_{21} = 0; -X_8 - \omega_2 X_{16} = 0; \\ X_{12} + \omega_2 X_{13} + \omega_1 X_{15} &= 0; \omega_2 X_{12} + \omega_1 X_{17} = 0; -\omega_2 X_{11} + \omega_1 X_{19} = 0; \\ -\omega_2 X_{10} - X_{11} + \omega_1 X_{20} &= 0; \omega_2 X_5 + \omega_2 X_8 + X_{18} = 0; -\omega_1 X_{10} + X_{19} + \omega_2 X_{20} = 0; \\ -2\omega_2 X_4 + 2\omega_2 X_9 - X_{14} + X_{21} &= 0; -\omega_1 X_{11} + \omega_2 X_{19} = 0; 2\omega_2 X_6 - 2\omega_2 X_7 = 0; \\ -\omega_1 X_{12} - \omega_2 X_{17} &= 0; -\omega_1 X_{13} - \omega_2 X_{15} - X_{17} = 0; -\omega_2 X_5 - \omega_2 X_8 - X_{18} = 0. \end{aligned}$$

Consequentemente, como $(\omega_1^2 - \omega_2^2) \neq 0$, segue que a solução do sistema acima pode ser representada pelos vetores da forma

$$\mathbf{X} = (X_1, 0, X_1, X_4, 0, 0, 0, 0, X_4, 0, 0, 0, 0, X_{14}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, X_{14}).$$

Ou seja, o núcleo do operador $\mathbf{X} \mapsto M\mathbf{X}$ é gerado pelos vetores

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{X}}_1 &= (1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \tilde{\mathbf{X}}_2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), \\ \tilde{\mathbf{X}}_3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \tag{A.1}$$

Fazendo o escalonamento, verifica-se que $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \tilde{\mathbf{X}}_3$ são linearmente independentes. Com isso, tais vetores acima formam uma base de dimensão 3 para o núcleo de $\mathbf{X} \mapsto M\mathbf{X}$.

Em relação à imagem da aplicação $\mathbf{X} \mapsto M\mathbf{X}$, é necessário encontrar o subespaço de dimensão 18 dos vetores $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{21}$ tais que $\mathbf{Y} = M\mathbf{X}$. Note que os vetores colunas da matriz M formam um conjunto de geradores da imagem desta transformação, isto é, $Y_1 = Me_1, \dots, Y_{21} = Me_{21}$, com $e_1, \dots, e_{21}$ vetores da base canônica do $\mathbb{R}^{21}$. Portanto, observando que os pares de vetores colunas Me_1 e Me_3 ; Me_4 e Me_9 ; Me_{14} e Me_{21} são múltiplos entre si, concluímos que o conjunto de vetores formado pelas colunas da matriz M , a menos das colunas Me_3, Me_9, Me_{21} , formam uma base para imagem da transformação $\mathbf{X} \mapsto M\mathbf{X}$.

No entanto, observe que $\tilde{\mathbf{X}}_3 = Y_5 - Y_8 = M(e_5 - e_8)$ implica que $\tilde{\mathbf{X}}_3$ pertence ao núcleo e a imagem da referida transformação. Consequentemente, o conjunto $\{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \tilde{\mathbf{X}}_3, Y_i\}$, onde Y_i são os vetores da base da imagem de $\mathbf{X} \mapsto M\mathbf{X}$, não forma uma base para o espaço $\mathbb{R}^{21}$. Então, tomamos uma base para o núcleo como $\{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \tilde{\mathbf{X}}_3\}$ e uma base da imagem como

$$\begin{aligned} v_1 &= \tilde{\mathbf{X}}_3, v_2 = Me_1, v_3 = Me_2, v_4 = Me_4, v_5 = Me_5, v_6 = Me_6, v_7 = Me_7, \\ v_8 &= Me_{10}, v_9 = Me_{11}, v_{10} = Me_{12}, v_{11} = Me_{13}, v_{12} = Me_{14}, v_{13} = Me_{15}, \\ v_{14} &= Me_{16}, v_{15} = Me_{17}, v_{16} = Me_{18}, v_{17} = Me_{19}, v_{18} = Me_{20}, v_{19} = e_6. \end{aligned}$$

Com isso, podemos afirmar que o conjunto $\mathcal{B} = \{\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \tilde{\mathbf{X}}_3, v_1, v_2, \dots, v_{19}\}$ constitui uma base para $\mathbb{R}^{21}$. Desta forma, a matriz $[M]$ da transformação $\mathbf{X} \mapsto M\mathbf{X}$ na base $\mathcal{B}$ será

	$\tilde{\mathbf{X}}_1$	$\tilde{\mathbf{X}}_2$	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}	v_{18}	v_{19}
$\tilde{\mathbf{X}}_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\tilde{\mathbf{X}}_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	ω_2	0	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	0	0	$2\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_3	0	0	0	$-2\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	$2\omega_2$	0	0	0	0	0
v_5	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	0	0	0	0	$-2\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0
v_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	1
v_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_2	0	0	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	ω_2	0	ω_1	0	0	0	0	0	0
v_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_2	0	0	0	0	ω_1	0	0	0	0
v_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	ω_1	0	0
v_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_2$	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	ω_1	0
v_{12}	0	0	0	0	0	0	$2\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0
v_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	ω_2	0
v_{14}	0	0	0	0	0	$-2\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
v_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	ω_2	0	0
v_{16}	0	0	0	0	0	0	0	$2\omega_2$	$-2\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v_{17}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	0	0	0	$-\omega_2$	0	0	0	0
v_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-\omega_1$	0	$-\omega_2$	0	-1	0	0	0	0
v_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Portanto, a relação de semelhança entre as matrizes M e $[M]$, por meio de uma mudança de base, garante que os polinômios característico de M e $[M]$ sejam iguais. Por conseguinte, temos que o polinômio característico é dado por

$$p(x) = x^5(x^2 + 4\omega_1^2)(x^2 + 4\omega_2^2)^3[x^2 + (\omega_1 + \omega_2)^2]^2[x^2 + (\omega_1 - \omega_2)^2]^2.$$

Consequentemente, os autovalores de M , na seguinte ordenação que segue abaixo, juntamente com suas respectivas multiplicidades algébricas 5, 1, 1, 3, 3, 2, 2, 2 e 2, são expressos por

$$0, 2i\omega_1, -2i\omega_1, 2i\omega_2, -2i\omega_2, i(\omega_1 + \omega_2), -i(\omega_1 + \omega_2), i(\omega_1 - \omega_2), -i(\omega_1 - \omega_2).$$

Com isso, com base em Bronson (1970), podemos determinar os autovetores generalizados de M associados aos seus autovalores e suas respectivas multiplicidades algébricas, a saber:

- Para o autovalor nulo de multiplicidade algébrica igual a 5, temos uma cadeia de Jordan gerada por um autovetor generalizado de grau 3, um autovetor generalizado de grau 2 e 3 autovetores (grau 1), respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \left(0, 0, 0; 0, 0, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0\right), \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, -1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0) = M\mathbf{v}_1, \\ \mathbf{v}_3 &= (0, 0, 0; 1, 0, 0; 0, 0, 1; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0) = M\mathbf{v}_2 = \tilde{\mathbf{X}}_3, \\ \mathbf{v}_4 &= (1, 0, 1; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0) = \tilde{\mathbf{X}}_1, \\ \mathbf{v}_5 &= (0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1) = \tilde{\mathbf{X}}_2. \end{aligned}$$

- Para os autovalores $2i\omega_1$ e $-2i\omega_1$, ambos com multiplicidade algébrica iguais a 1, obtemos os autovetores:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_6 &= (-1, -2i, 1; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}_7 &= (-1, 2i, 1; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0). \end{aligned}$$

- Para o autovalor $2i\omega_2$ de multiplicidade algébrica igual a 3, temos uma cadeia de Jordan gerada por um autovetor generalizado de grau 3, isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_8 &= \left(0, 0, 0; 0, 0, \frac{i}{2}; -\frac{i}{2}, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1; 0, 0, 0\right), \\ \mathbf{v}_9 &= (0, 0, 0; 0, i, 0; 0, i, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, -1) = (M - 2i\omega_2 I)\mathbf{v}_8, \\ \mathbf{v}_{10} &= (0, 0, 0; i, 0, 0; 0, 0, -i; 0, 0, 0; 0, 0, 0; -2, 0, 0; 0, 0, 0) = (M - 2i\omega_2 I)\mathbf{v}_9. \end{aligned}$$

Note que os autovetores generalizados associados ao autovalor $-2i\omega_2$ são os vetores conjugados de $\mathbf{v}_8$, $\mathbf{v}_9$ e $\mathbf{v}_{10}$, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{11} &= \left(0, 0, 0; 0, 0, -\frac{i}{2}; \frac{i}{2}, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 0; 0, 0, 1; 0, 0, 0\right) = \bar{\mathbf{v}}_8, \\ \mathbf{v}_{12} &= (0, 0, 0; 0, -i, 0; 0, -i, 0; 0, 0, 0; 0, 1, 0; 0, 0, 0; 0, 0, -1) = \bar{\mathbf{v}}_9, \\ \mathbf{v}_{13} &= (0, 0, 0; -i, 0, 0; 0, 0, i; 0, 0, 0; 0, 0, 0; -2, 0, 0; 0, 0, 0) = \bar{\mathbf{v}}_{10}. \end{aligned}$$

- | 01 | 02 | 03 | 04 | 05 | 06 | 07 | 08 | 09 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---------------|-----------|----------|----------|----------|-------------------|------------------|----------------------------------|-----------------|------------------|----------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-----------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | -1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2<i>i</i> | 2<i>i</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | <i>i</i> | 0 | 0 | -<i>i</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | <i>i</i> | 0 | 0 | -<i>i</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{i}{2}$ | 0 | 0 | $-\frac{i}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{i}{2}$ | 0 | 0 | $\frac{i}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | <i>i</i> | 0 | 0 | -<i>i</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -<i>i</i> | 0 | 0 | <i>i</i> | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -<i>i</i> | 0 | <i>i</i> | 0 | -<i>i</i> | 0 | <i>i</i> |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -<i>i</i> | 0 | <i>i</i> | 0 | -<i>i</i> | 0 | <i>i</i> | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | 0 | -1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | -<i>i</i> | 0 | <i>i</i> | 0 | <i>i</i> | 0 | -<i>i</i> | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | <i>i</i> | 0 | -<i>i</i> | 0 | -<i>i</i> | 0 | <i>i</i> |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
- (A.2)

Portanto, P é a *matriz de mudança de base* construída a partir da base de Jordan de M , formada pelos próprios vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{21}$. Por fim, J é a matriz semelhante a M tal que $J = P^{-1}MP$ assume a forma

	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
01)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
03)	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
04)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
06)	0	0	0	0	0	$2i\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
07)	0	0	0	0	0	0	$-2i\omega_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
08)	0	0	0	0	0	0	0	$2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
09)	0	0	0	0	0	0	0	1	$2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-2i\omega_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0	0	0	0
15)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0	0	0
16)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0	0
17)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-i(\omega_1 + \omega_2)$	0	0	0	0	0
18)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$i(\omega_1 - \omega_2)$	0	0	0	0
19)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$i(\omega_1 - i\omega_2)$	0	0	0
20)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-i(\omega_1 - i\omega_2)$	0	0
21)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	$-i(\omega_1 - \omega_2)$	0