UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA

JOSÉ MANUEL JARAMILLO TORO

CONEXÃO ENTRE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E CADEIAS DE MARKOV

Recife

2025

JOSÉ MANUEL JARAMILLO TORO

CONEXÃO ENTRE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E CADEIAS DE MARKOV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Estatística.

Área de Concentração: Probabilidade

Orientador: Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez (UFPE)

Coorientador: Profa. Dra. Irene Paniello Alastruey
(UNIZAR)

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Toro, José Manuel Jaramillo.
Conexão entre álgebras de evolução e cadeias de Markov / José Manuel Jaramillo Toro. - Recife, 2025.
120 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Estatística, 2025.
Orientação: Pablo Martin Rodriguez.
Coorientação: Irene Paniello Alastruey.
Inclui referências e apêndices.

1. Álgebras de evolução; 2. Álgebras de evolução markovianas; 3. Cadeias de Markov; 4. Cadeias de Markov em tempo discreto; 5. Teoria dos grafos. I. Martin Rodriguez, Pablo. II. Alastruey, Irene Paniello. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

JOSÉ MANUEL JARAMILLO TORO

CONEXÃO ENTRE ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E CADEIAS DE MARKOV

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Estatística.

Aprovado em: 20 de fevereiro de 2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Pablo Martin Rodriguez
Presidente (Orientador)

Prof. Dr. Alex Dias Ramos
Examinador Interno

Profa. Dra. Mary Luz Rodiño Montoya
Examinadora Externa

À minha família, por me inspirar não apenas a estudar,

mas, acima de tudo, a viver.

AGRADECIMENTOS

Embora este trabalho tenha se concentrado na conexão entre as álgebras de evolução e as cadeias de Markov, permito-me, nas próximas páginas, agradecer e recordar as pessoas maravilhosas que encontrei no meu caminho durante esses anos de mestrado. Porque, como dizemos na Colômbia: "No final, quem tem dinheiro faz o que quer". E eu, como não tenho dinheiro, adaptei essa frase dizendo: "No final, quem faz uma dissertação faz o que quer com seus agradecimentos."

Quero começar agradecendo aos meus professores da Universidade de Antioquia e ao Instituto de Matemáticas. A formação que recebi lá foi inestimável e provavelmente serei grato por toda a vida por ter habitado nesse espaço tão especial. Deixo aqui uma frase que reflete minha experiência e gratidão: "A Universidade de Antioquia não apenas me educou, mas também me acolheu e me transformou em um ser humano mais consciente."

Aos meus queridos professores da Universidade Federal de Pernambuco, quero me dirigir de forma mais pessoal e íntima, mencionando-os apenas como professores, deixando de lado, neste contexto, o título formal de doutor(a). Ao professor Alex Ramos, pelos seus comentários e brincadeiras que, no início, quando cheguei ao Brasil, eu não sabia se deveria pular (brincar) ou quê. Contudo, graças a essa dinâmica, suas aulas foram sempre um prazer de assistir e estudar. Ao professor Roberto, minha total admiração por suas aulas tão meticulosas e organizadas. Era como se ele tivesse uma régua na mão esquerda, garantindo uma ordem e um nível de detalhe em suas demonstrações que foram simplesmente dignas de elogio. Ao professor Francisco Cribari, porque quem cursou uma disciplina com ele não apenas se apaixonou pela estatística, mas também pelo maior time do Brasil: o Sport Club do Recife. Atrevo-me a dizer que saí apaixonado pelos dois. Obrigado por sua dedicação, tanto dentro quanto fora da sala de aula.

Ao professor Pablo Rodriguez, que esteve presente desde o primeiro momento, tanto acadêmica quanto emocionalmente. Obrigado por me incentivar, por me ensinar tanto durante esses anos, e ainda mais desde que nos conhecemos. Você foi um verdadeiro exemplo a seguir e por isso fico infinitamente grato. À professora Irene Paniello, o que aprendi em Saragoça foi espetacular. A experiência de intercâmbio foi maravilhosa e ficará gravada na minha memória para sempre. Aos professores da Universidade de Saragoça, especialmente ao professor Fernando Montaner, meus mais sinceros agradecimentos pela calorosa recepção e atenção durante minha estadia na Espanha.

Agradeço à FACEPE pelo apoio financeiro, que tornou realidade sonhos que, se eu tivesse contado ao José de 10 anos atrás, ele não teria acreditado. Para finalizar estes agradecimentos acadêmicos, como disse o célebre matemático Paul Erdős: "Um matemático é uma máquina que transforma café em teoremas." Deixem-me dizer que, durante aquele último ano, quase deixamos a Colômbia sem café.

Aos meus queridos e amados amigos da Colômbia: Não menciono todos vocês nestes agradecimentos por uma simples razão. Estes agradecimentos, assim como esta dissertação, seriam o equivalente em qualidade aos livros de Harry Potter; especificamente ao terceiro, O Prisioneiro de Azkaban. Nesse livro, embora personagens como Hagrid, Hermione ou o próprio Harry sejam fundamentais, também é crucial introduzir e agradecer aos novos personagens que aparecem pela primeira vez, como o professor Lupin, no trem a caminho de Hogwarts, oferecendo um chocolate para nos reanimar. Pensando bem, talvez pudesse tê-los mencionado um por um, mas acho que isso não combina, neste momento, comigo.
De qualquer forma, agora você tem duas opções: incluir-se nessa lista (é muito provável

que já esteja nela) ou se animar e ler os agradecimentos da minha monografia de graduação. Garanto que esses agradecimentos, e apenas eles, vão arrancar de você uma lágrima ou um sorriso.

À minha querida turma: Francisco e Maria, obrigado por me acolherem e terem paciência comigo desde os primeiros dias. Agora entendo que o desafio de compreender este *paisita* falando "portunhol" — que ainda falo — deve ter sido uma grande prova linguística, e que só com muita paciência e um coração enorme foi possível superá-la.

Às minhas duas paraibanas de coração, Maria Eduarda e Naiara, obrigado por me mostrarem o verdadeiro Brasil: suas expressões, suas músicas, seus filmes e um pouquinho das suas infâncias. Como latino, a gente percebe que, apesar da distância, temos muitas coisas em comum. Um agradecimento especial à Duda (Maria Eduarda), não só pela parceria e pelo tempo dedicado às disciplinas, mas também a este trabalho. Sem ela, certamente encontraríamos nesta dissertação expressões como: "pero si, pero que no", "para tudo...", "pero no, mas talvez, então... melhor não pensar muito, né?". Enfim, graças à sua fantástica habilidade com o espanhol e o português, ela já está pronta para receber um título em tradução entre os dois idiomas!

Aos meus queridos amigos colombianos: Mónica, Jhon, Santiago, Ana e Yessenia, obrigado pelas experiências compartilhadas nestas terras pernambucanas. Apesar de estarmos a 4.680 quilômetros da Colômbia, conseguimos, ainda que por um momento, fazer Recife ouvir *El Ausente*, do *Pastor López*; *Tu Cumpleaños*, de *Diomedes Díaz*; *Cariñito*, de *Rodolfo Aicardi*; *Ódiame*, de *Julio Jaramillo*; Ah, e claro, *Feliz Cumpleaños Ferxxo*, de *Feid*. E nos sentirmos, em muitas ocasiões, como se estivéssemos na Colômbia, podendo escutar no fondo da rua o grito do vendedor dizendo: ¡*MAZAMORRA*!

Finalmente, à minha família: Ao Pollo, meu irmão; à Juli, minha sobrinha; à Polva e ao Firu, meus pais; à minha tia, Ana Maria; à minha amiga e irmã de alma, minha

Bebesauria, Laura; e à Yessenia, minha namorada, como menciono na dedicatória, obrigado por me inspirarem a estudar e, acima de tudo, a viver.
Para encerrar estes agradecimentos, quero dedicar a vocês mais do que uma frase, um significado, inspirado, obviamente, em Harry Potter. Na saga, há um espelho chamado Espelho do Ojesed, que, ao contrário, significa o Espelho do Desejo. Dizem que esse espelho não só mostra o que a gente vê, mas o que o coração mais deseja. Em outras palavras, se o homem mais feliz do mundo se olhasse nele, veria a si mesmo exatamente como está, porque não lhe faltaria nada. Embora talvez eu não seja o homem mais feliz do mundo, tenho uma certeza: se me olhasse nesse espelho, vocês estariam comigo.

"A felicidade pode ser encontrada até mesmo nos tempos mais sombrios, se a pessoa se lembrar de acender a luz."

- Albus Percival Wulfric Brian Dumbledore.

RESUMO

As álgebras de evolução, introduzidas pela primeira vez por Tian e Vojtěchovský (2006) no artigo "Mathematical Concepts of Evolution Algebras in non-Mendelian Genetics", constituem um ramo das álgebras não associativas que tem despertado crescente interesse em diversas áreas do conhecimento, como a teoria dos grafos, os sistemas dinâmicos e as cadeias de Markov. Essas álgebras oferecem uma abordagem inovadora para descrever as genéticas não mendelianas. O presente trabalho tem como objetivo principal ampliar o estudo das álgebras de evolução para o contexto de dimensões enumeráveis, explorando também sua relação com as cadeias de Markov sob uma perspectiva probabilística.

Palavras-chaves: Álgebras de evolução. Álgebras de evolução markovianas. Cadeias de Markov. Cadeias de Markov em tempo discreto. Teoria dos grafos.

ABSTRACT

Evolution algebras, first introduced by Tian and Vojtěchovský (2006) in their article "Mathematical Concepts of Evolution Algebras in Non-Mendelian Genetics", constitute a branch of non-associative algebras that has garnered growing interest in diverse fields, including graph theory, dynamical systems, and Markov chains. These algebras provide a novel framework for modeling non-Mendelian inheritance patterns. This work aims to extend the study of evolution algebras to countable-dimensional settings, further investigating their relationship with Markov chains from a probabilistic standpoint.

Keywords: Evolution algebras. Markovian evolution algebras. Markov chains. Discrete-time Markov chains. Graph theory.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

As álgebras de evolução constituem uma classe particular de álgebras não associativas que têm despertado crescente atenção em diversas áreas da matemática aplicada e pura, bem como em disciplinas conexas, como a biologia e a estatística. Introduzidas no artigo *"Mathematical Concepts of Evolution Algebras in Non-Mendelian Genetics"* (TIAN; VOJTĚCHOVSKÝ, 2006) e ampliadas posteriormente no livro *"Evolution Algebras and Their Applications"* por (TIAN, 2008), essas estruturas apresentam novas perspectivas que conectam diferentes áreas matemáticas. Essas álgebras foram concebidas para modelar processos genéticos não mendelianos. Desde então, seu alcance tem se expandido para campos como a teoria dos grafos, os sistemas dinâmicos e as cadeias de Markov.

A principal motivação deste trabalho é explorar as conexões entre as álgebras de evolução e as cadeias de Markov, duas áreas que, à primeira vista, pertencem a contextos diferentes: a primeira no âmbito algébrico e a segunda no probabilístico. Neste estudo, adotamos uma abordagem diferenciada de autores como (CABRERA, 2016) e (ELDUQUE; LABRA, 2015), no conceito de subálgebra de evolução, o que possibilita propriedades distintas. Durante este estudo, também observamos propriedades específicas das álgebras de evolução, como o conceito de bárico, investigado em (PANIELLO, 2022). Esta dissertação busca demonstrar que existe uma relação profunda e mutuamente enriquecedora entre ambas as disciplinas, permitindo uma compreensão mais ampla de suas propriedades estruturais e aplicações.

O desenvolvimento deste estudo concentra-se em estender o conceito de álgebras de evolução ao contexto de dimensões enumeráveis e analisar suas propriedades sob uma perspectiva probabilística. Para isso, utilizamos abordagens que combinam ferramentas clássicas da álgebra com princípios fundamentais da teoria de cadeias de Markov. Além disso, são apresentados resultados originais que destacam o impacto do tamanho da dimensão nas propriedades algébricas e probabilísticas dessas estruturas.

Esta dissertação está organizada em três capítulos principais. No primeiro capítulo, são introduzidos os fundamentos teóricos das álgebras de evolução, incluindo suas definições, propriedades e conexão com a teoria dos grafos, com base nos estudos de (CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2020; CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2021). O segundo capítulo é dedicado a estabelecer as bases das álgebras de evolução markovianas, que também foram amplamente investigadas em artigos como (CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2023; CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2024). Ressaltamos que ampliamos os resultados existentes para o caso de dimensões infinitas. Por fim, no terceiro capítulo, baseado no artigo (CABRERA et al., 2021), são analisadas as derivações em álgebras de evolução markovianas e sua relação com a irredutibilidade das cadeias de Markov associadas, coincidindo com os resultados obtidos em (CAMACHO et al., 2012).

O presente trabalho representa um esforço para ampliar o horizonte de investigação na área das álgebras de evolução, oferecendo novas perspectivas para seu estudo e aplicações. Espera-se que os resultados obtidos contribuam para o desenvolvimento de ferramentas teóricas que facilitem a análise de fenômenos complexos a partir de uma perspectiva algébrica e probabilística, fortalecendo o vínculo entre essas duas áreas do conhecimento.

2 ÃLGEBRAS DE EVOLUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos os conceitos fundamentais das álgebras de evolução que serão utilizados no desenvolvimento desta dissertação. Nossa principal referência será o livro *"Evolution Algebras and Their Applications"* de (TIAN, 2008). Começaremos com noções básicas da teoria de álgebras não associativas, para as quais nos apoiamos em (SCHAFER, 1966; ZHEVLAKOV et al., 1982). Convidamos o leitor a considerar as definições apresentadas no Apêndice A, onde estão as definições correspondentes as álgebras de evolução em geral, caso deseje mais informações detalhadas sobre as álgebras não associativas.

2.1 ÁLGEBRAS

Definição 2.1.1. *Uma $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{A}$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial sobre o qual está definido um produto bilinear interno, cumprindo que:*

1. *Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}$, então $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$.*

2. *Se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}$, então $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$.*

3. *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$, então $\alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (\alpha \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha \boldsymbol{y})$.*

Notação 2.1.2. *A definição mais detalhada de espaço vetorial pode ser encontrada na Definição A.1.1 no Apêndice. Neste trabalho nos referimos a uma $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{A}$ como álgebra $\mathcal{A}$.*

Duas propriedades que uma álgebra pode possuir são a associatividade e a comutatividade. Associatividade significa que $(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z})$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}$, e a comutatividade significa que $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$.

Definição 2.1.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{A}$ como $\mathbb{R}$-álgebra se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathcal{A}$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Além disso, a dimensão da álgebra é a mesma dimensão do espaço vetorial.*

A noção de base, conforme é definida na Definição A.1.2, é fundamental, pois permite descrever os elementos como combinações lineares dos elementos da base. Como observado na Definição A.1.5, existem dois tipos de bases, que podem ser utilizadas dependendo do enfoque adotado. Sob uma perspectiva algébrica, geralmente trabalha-se com a base de Hamel, enquanto no âmbito da análise, é mais comum o uso da base de Schauder.

Neste trabalho, consideramos bases de Hamel. Não consideramos bases de Schauder, pois seria necessário conhecimento de análise funcional, que não será nosso foco. Para a leitura de trabalhos com este foco, convidamos o leitor a consultar os artigos (CADAVID et al., 2024; CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2023; CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2024).

Definição 2.1.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. As constantes de estrutura são as constantes c_{ijk} que aparecem nos produtos dos elementos da base*

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \sum_{k \in \Lambda} c_{ijk} \boldsymbol{e}_k, \quad c_{ijk} \in \mathbb{R}.$$

Note que se a álgebra $\mathcal{A}$ é de dimensão finita com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$, então temos no máximo n^3 constantes de estrutura e n^2 equações. Tais equações são armazenadas na tabela de multiplicação da álgebra. Para uma álgebra de dimensão n, temos a tabela de multiplicação apresentada na Tabela 1.

Observação 2.1.5. *As constantes de estrutura determinam a álgebra $\mathcal{A}$. Pois o produto para os elementos arbitrários da álgebra é obtido estendendo pela linealidade dos produtos dos elementos da base.*

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \boldsymbol{e}_1 & \dots & \boldsymbol{e}_j & \dots & \boldsymbol{e}_n \\
\hline
\boldsymbol{e}_1 & \sum_{k=1}^{n} c_{11k}\boldsymbol{e}_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} c_{1jk}\boldsymbol{e}_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} c_{1nk}\boldsymbol{e}_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{e}_i & \sum_{k=1}^{n} c_{i1k}\boldsymbol{e}_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} c_{ijk}\boldsymbol{e}_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} c_{ink}\boldsymbol{e}_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\boldsymbol{e}_n & \sum_{k=1}^{n} c_{n1k}\boldsymbol{e}_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} c_{njk}\boldsymbol{e}_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} c_{nnk}\boldsymbol{e}_k
\end{array}
$$

Tabela 1 – Tabela de multiplicação da álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão n.

Exemplo 2.1.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ e com produtos dados por:*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1^2 &= \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_2^2 &= \frac{1}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= 0, \\
\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}$ é comutativa, pois os elementos da base comutam, quer dizer, $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = 0$. Além disso, $\mathcal{A}$ é comutativa, pois os demais elementos são combinações lineares dos elementos da base e a propriedade comutativa se estende linearmente. Porém, não é associativa, pois os elementos da base não associam:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2\right)\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{15}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{15}\boldsymbol{e}_2, \\
\boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) &= \boldsymbol{e}_1 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}
$$

As constantes de estrutura de $\mathcal{A}$ são:

$$c_{111} = \frac{2}{3}, \quad c_{112} = \frac{1}{3},$$
$$c_{221} = \frac{1}{5}, \quad c_{222} = \frac{4}{5},$$
$$c_{121} = c_{122} = c_{211} = c_{212} = 0.$$

Exemplo 2.1.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ e com produtos dados por:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1^2 &= \boldsymbol{e}_1,\\
\boldsymbol{e}_2^2 &= \boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{e}_1,\\
\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_2.
\end{aligned}$$

Observamos que os elementos da base associam:

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2),\\
(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1),\\
(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1),\\
(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1),\\
(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2),\\
(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2).
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que a $\mathcal{A}$ é associativa, pois os demais elementos são combinações lineares dos elementos da base e a propriedade associativa se estende linearmente. Porém, $\mathcal{A}$ não é comutativa, já que os elementos da base não comutam. De fato: $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \neq \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1$.

Exemplo 2.1.8. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ e com produtos dados por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1^2 &= \boldsymbol{e}_1, \\ \boldsymbol{e}_2^2 &= \boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Observamos que os elementos da base são associativos:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2), \\ (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_2 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1). \end{aligned}$$

Os outros quatro casos são iguais a zero. Assim, concluímos que a $\mathcal{A}$ é associativa, pela linealidade dos elementos da álgebra. Ademais, $\mathcal{A}$ é comutativa, pois os elementos da base comutam: $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}$.

Definição 2.1.9. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Seja S um subconjunto qualquer de elementos de $\mathcal{A}$. O $span$ (ou envolvente linear) de S, é o conjunto de todas as combinações lineares possíveis, finitas, dos elementos de S. Equivalentemente, o $span(S)$ é dado por:*

$$span(S) = \left\{ \sum_{i \in S} \alpha_i \boldsymbol{v}_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ e } \upsilon_i \in S \right\}.$$

Observação 2.1.10. *O $span(S)$ é um tipo particular de subespaço vetorial de $\mathcal{A}$, levando em consideração que o conceito de subespaço vetorial esta na Definição A.1.6. O $span(S)$ de um subconjunto S é sempre um subespaço de $\mathcal{A}$.*

Definição 2.1.11. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$.*

1. *$\mathcal{A}_1$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ se é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ e é fechado com relação ao produto de $\mathcal{A}$, ou seja, se $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}_1$, então $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}_1$.*

2. $\mathcal{I}$ *é um ideal (bilátero) de* $\mathcal{A}$*, se é uma subálgebra de* $\mathcal{A}$ *e cumpre que* $\mathcal{A} \cdot \mathcal{I} + \mathcal{I} \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ [1].

Definição 2.1.12. *Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra com base* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ *e* S *um subconjunto qualquer de elementos de* $\mathcal{A}$*. A subálgebra de* $\mathcal{A}$ *gerada por* S*, denotada por* $subalg(S)$*, é a menor subálgebra de* $\mathcal{A}$ *que contém* S*. Equivalentemente, a subálgebra gerada por* S *é dada por:*

$$subalg(S) = \bigcap\{W \subseteq \mathcal{A} \mid W \text{ é subálgebra e } S \subseteq W\}.$$

Exemplo 2.1.13. *(CABRERA, 2016, Exemplo 1.4.1) Seja* $\mathcal{A}$ *uma álgebra com base* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ *e produtos dados por:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1^2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_2^2 &= \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_3^2 &= -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3, \\
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{0}, \text{ para todo } i \neq j.
\end{aligned}$$

Sejam os seguintes elementos: $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$ *e* $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$*. Mostraremos que* $\mathcal{A}_1 = span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ *é uma subálgebra de* $\mathcal{A}$*. Sejam* $\boldsymbol{u}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2$ *e* $\boldsymbol{u}_2 = \gamma\boldsymbol{v}_1 + \delta\boldsymbol{v}_2$*,*

[1] Ler Definição A.1.7.

dois elementos qualquer deste conjunto. Assim:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 &= \alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 + \gamma\boldsymbol{v}_1 + \delta\boldsymbol{v}_2 \\
&= (\alpha+\gamma)\boldsymbol{v}_1 + (\beta+\delta)\boldsymbol{v}_2, \\
\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 &= (\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2)\cdot(\gamma\boldsymbol{v}_1 + \delta\boldsymbol{v}_2) \\
&= \alpha\gamma\boldsymbol{v}_1^2 + \alpha\delta\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 + \beta\gamma\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1 + \beta\delta\boldsymbol{v}_2^2 \\
&= \alpha\gamma(\boldsymbol{e}_1^2 + \boldsymbol{e}_3^2) + \alpha\delta(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3)\cdot(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + \beta\gamma(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) + \beta\delta(\boldsymbol{e}_1^2 + \boldsymbol{e}_2^2) \\
&= \alpha\gamma(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3) + \alpha\delta(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) + \beta\gamma(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) + \beta\delta(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3) \\
&= (\alpha\delta + \beta\gamma)(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3) + \beta\delta(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \\
&= (\alpha\delta + \beta\gamma)\boldsymbol{v}_1 + \beta\delta\boldsymbol{v}_2.
\end{aligned}
$$

Então, $\mathcal{A}_1$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

2.2 ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO

Em geral, iremos trabalhar com álgebras associativas. Como veremos a seguir, as álgebras de evolução devem satisfazer duas características fundamentais. Em primeiro lugar, a álgebra deve admitir uma base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$, em que os produtos cruzados entre os elementos dessa base sejam nulos, quer dizer, $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}$ se $i \neq j \in \Lambda$. Em segundo lugar, o conjunto Λ deve ser enumerável. Embora neste trabalho nosso foco não seja a motivação biológica, não devemos esquecer que as álgebras de evolução são motivadas pelas leis da genética não mendeliana e foram introduzidas pela primeira vez por (TIAN; VOJTĚCHOVSKÝ, 2006) no artigo *"Mathematical Concepts of Evolution Algebras in non-Mendelian Genetics"*. Nesta referência, foram apresentadas as álgebras de evolução, no entanto, com enfoque na dimensão finita. As álgebras de evolução foram estudadas mais amplamente por (TIAN, 2008) no livro *"Evolution Algebras and their Applications"*.

Observação 2.2.1. *Nesta seção em diante, serão apresentadas as definições e os resultados necessários para trabalhar com as álgebras de evolução, para dimensão enumerável. No caso de uma proposição ou teorema não ser citado diretamente no enunciado, existem três razões principais para isso: a primeira é que a proposição ou teorema pode ter condições adicionais em relação à versão original para estender as afirmações ao caso enumerável, e as versões originais mencionaremos ou citaremos antes ou depois dos resultados comentando que diferença têm. A segunda razão é que as proposições ou teoremas vêm de afirmações ou comentários presentes no livro, os quais não possuem demonstração alguma e os quais formalizamos por meio de uma demonstração. E, por fim, a terceira razão envolve proposições de nossa autoria, que foram formuladas para abordar resultados importantes que conseguimos obter graças ao amplo conteúdo bibliográfico utilizado neste trabalho.*

Definição 2.2.2. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é natural se os produtos cruzados $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \mathbf{0}$ se $i \neq j$ e Λ é enumerável.*

Definição 2.2.3. *(TIAN, 2008, Definição 3) Uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ é uma $\mathbb{R}$-álgebra que admite uma base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$, tal que:*

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = \sum_{k \in \Lambda} c_{ik} \boldsymbol{e}_k, \qquad \text{para todo } i.$$

Observação 2.2.4. *Vale ressaltar que, como estamos trabalhando com bases de Hamel, os quadrados são combinações lineares finitas da base.*

Para uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ de dimensão finita com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ temos a tabela de multiplicação apresentada na Tabela 2, tendo no máximo n equações e n^2 constantes de estrutura.

Pela Definição 2.2.3, toda álgebra de evolução admite uma base natural. No entanto, ao se trabalhar com álgebras de evolução, não necessariamente se trabalha com bases naturais. Devido a este fato, enfatizamos que neste trabalho serão consideradas as

	$\boldsymbol{e}_1$	$\dots$	$\boldsymbol{e}_i$	$\dots$	$\boldsymbol{e}_n$
$\boldsymbol{e}_1$	$\sum_{k=1}^{n} c_{1k}\boldsymbol{e}_k$	$\dots$	0	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\boldsymbol{e}_i$	0	$\dots$	$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\boldsymbol{e}_k$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\boldsymbol{e}_n$	0	$\dots$	0	$\dots$	$\sum_{k=1}^{n} c_{nk}\boldsymbol{e}_k$

Tabela 2 – Tabela de multiplicação da álgebra de evolução $\mathcal{A}$ de dimensão n.

álgebras de evoluções e suas bases naturais. Em (BUSTAMANTE; MELLON; VELASCO, 2020), são discutidas as condições necessárias e suficientes sob as quais uma álgebra comutativa de dimensão finita é uma álgebra de evolução.

Notação 2.2.5. *Como os produtos cruzados são zero, denotamos as constantes de estrutura dos quadrados como c_{ik} em vez de c_{iik}, como foi apresentado na Definição 2.1.4.*

Definição 2.2.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Chamaremos matriz de estrutura, $C = (c_{ij})_{i,j\in\Lambda}$, de $\mathcal{A}$ em relação à base natural $\mathcal{B}$, à matriz que contém as constantes de estrutura da álgebra de evolução $\mathcal{A}$. No caso que Λ for finito, a matriz de estrutura é:*

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Observamos que o conjunto $\mid \{j \in \Lambda \mid c_{ij} \neq 0\} \mid < \infty$, para todo $i \in \Lambda$ é um conjunto finito[2]. Logo, na matriz C, independentemente da dimensão de $\mathcal{A}$, cada linha é uma

[2] Lembrando que $|\cdot|$ denota a cardinalidade de um conjunto. Esta é definida na Definição A.1.8.

sequência quase nula, ou seja, cada linha tem um número finito de termos diferentes de zero.

No (TIAN, 2008, Capítulo 6), são feitos vários questionamentos que envolvem as álgebras de evolução e a teoria dos grafos. O artigo de (ELDUQUE; LABRA, 2015) é um dos primeiros artigos onde se estabelece formalmente a conexão entre esses dois campos. Neste artigo, estabelece-se que uma álgebra de evolução finita tem dois grafos associados: um grafo direcionado e um grafo direcionado ponderado. A seguir, formularemos como uma álgebra de evolução com um conjunto Λ enumerável possui dois grafos associados: um grafo não direcionado e um grafo direcionado ponderado.

Definição 2.2.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ e matriz de estrutura $C = (c_{ij})_{i,j\in\Lambda}$.*

- *O grafo associado à álgebra de evolução $\mathcal{A}$ em relação à base natural $\mathcal{B}$ é o grafo $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (V, E)$, sendo (V, E) um par ordenado, em que $V = \Lambda$ e $E = \{(i, j) \in V \times V \mid c_{ij} \neq 0$ ou $c_{ji} \neq 0\}$.*
- *O digrafo ponderado associado à álgebra de evolução $\mathcal{A}$ em relação à base natural $\mathcal{B}$ é o digrafo $\Gamma^\omega(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = (V, E^\omega, \omega)$, sendo (V, E^ω, ω) um triplo ordenado, em que $V = \Lambda$, $E^\omega = \{(i, j) \in V \times V \mid c_{ij} \neq 0\}$ e $\omega : E^\omega \to \mathbb{R}$, com $\omega((i, j)) = c_{ij}$.*

O grafo e o digrafo associados nas álgebras de evolução são úteis para visualizar a estrutura da álgebra.

Exemplo 2.2.8. *(CABRERA, 2016, Exemplo 1.4.1) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e produtos dados por:*

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,$$
$$\boldsymbol{e}_3^2 = -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3.$$

A matriz de estrutura de $\mathcal{A}$, seu grafo e digrafo ponderado são apresentados na Figura 1.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Figura 1 – $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\Gamma^{\omega}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ do Exemplo 2.2.8.

Uma pergunta que surge no contexto das álgebras é: O que aconteceria se a base natural fosse trocada? As propriedades da álgebra ou do grafo associado seriam preservadas? No (ELDUQUE; LABRA, 2015, Exemplo 2.5), é mostrado como, ao mudar de base natural, a estrutura do grafo muda. É por isso que, na literatura, quando é feita referência ao grafo (digrafo) e à matriz de estrutura, é acrescentado 'em relação à base natural $\mathcal{B}$'. Embora essas perguntas sejam fundamentais no estudo das álgebras, elas não serão o foco deste trabalho. Assim, dada uma álgebra de evolução com base natural e produtos definidos, estes não serão alterados.

2.2.1 PROPRIEDADES DAS ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO

Nesta subseção, definiremos uma das estruturas mais importantes nas álgebras de evolução: as subálgebras de evolução. Descreveremos como são as álgebras de evolução associativas e, sob certas condições, caracterizaremos as subálgebras de evolução geradas pelos elementos da base natural.

Corolário 2.2.9. *(TIAN, 2008, Corolário 1)*

1. *As álgebras de evolução não são associativas, em geral.*

2. *As álgebras de evolução são comutativas.*

Lembremos que as álgebras de evolução definidas na Definição 2.2.3 são uma generalização das tratadas por (TIAN, 2008), já que nossa definição não depende da dimensão, mas sim do fato do conjunto Λ ser enumerável. A demonstração apresentada na (TIAN, 2008, pág. 20) confirma essas afirmações no caso específico considerado nessa referência.

Observação 2.2.10. *No Exemplo 2.1.6, construímos uma álgebra de evolução que é comutativa e não associativa. No entanto, no Exemplo 2.1.8, construímos uma álgebra de evolução que é comutativa e associativa. A seguir, apresentaremos uma caracterização das álgebras de evolução associativas não nulas.*

A Proposição 2.2.11 decorre do fato de se identificar o caso específico em que as álgebras de evolução são associativas.

Proposição 2.2.11. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não nula, com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. $\mathcal{A}$ é associativa se, e somente se, tiver produtos dados por: $\boldsymbol{e}_i^2 = c_{ii}\boldsymbol{e}_i$ para todo $i \in \Lambda$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{A}$ é associativa. Ou seja, todos os elementos de $\mathcal{A}$ se associam, em particular, os elementos da base se associam, isto é:

$$(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k), \text{ para todo } i \neq k \in \Lambda. \tag{2.1}$$

Dado que o lado direito da equação (2.1) é sempre zero, pois $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k = \mathbf{0}$ para todo $i \neq k \in \Lambda$, o lado esquerdo também deve ser zero. Portanto, como $\boldsymbol{e}_i^2 = \sum_{j\in\Lambda} c_{ij}\boldsymbol{e}_j$, é necessário que $c_{ij} = 0$ para todo $j \in \Lambda$, exceto talvez para i. Assim, $\boldsymbol{e}_i^2 = c_{ii}\boldsymbol{e}_i$ para algum $c_{ii} \in \mathbb{R}$ e todo $i \in \Lambda$. Logo, para que $\mathcal{A}$ seja uma álgebra não nula, precisamos que ao menos um $j_0 \in \Lambda$, tal que $c_{j_0 j_0} \neq 0$.

($\Longleftarrow$) Assumindo que os produtos da álgebra de evolução são dados por: $\boldsymbol{e}_i^2 = c_{ii}\boldsymbol{e}_i$ para todo $i \in \Lambda$. Observamos que os elementos da base associam:

$$(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_k = c_{ii}\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k),$$
$$(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k) \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_i \cdot (\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i),$$
$$(\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} \cdot \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{e}_k \cdot c_{ii}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_k \cdot (\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i),$$

para todo $i, k \in \Lambda$. Assim, pela linealidade dos elementos da álgebra, concluímos que a $\mathcal{A}$ é associativa. $\square$

Observação 2.2.12. *As álgebras de evolução associativas não nulas são conhecidas como álgebras de evolução não nulas triviais.*

Na Definição 2.1.11 definimos as subálgebras e os ideais no contexto de uma álgebra qualquer. A seguir, vamos apresentar a definição de subálgebra de evolução e ideal de evolução definidos por (TIAN, 2008).

Definição 2.2.13. *(TIAN, 2008, Definição 4) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$.*

- *A subálgebra $\mathcal{A}_1$ é uma subálgebra de evolução, se admite uma base natural $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda_1\}$, em que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$.*
- *O subconjunto $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ é um ideal de evolução, se é uma subálgebra de evolução e se $\mathcal{A} \cdot \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}$.*

Fixada uma base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ para a álgebra de evolução $\mathcal{A}$, as subálgebras de evolução na Definição 2.1.11 são geradas por subconjuntos Λ_1 de elementos naturais da base de Λ. Esses subconjuntos Λ_1 determinam de forma única cada subálgebra de evolução. Essa definição pode ser vista como restritiva e é por isso que autores como (CABRERA, 2016), ou (ELDUQUE; LABRA, 2015), propõem que a definição de subálgebra de evolução exija apenas que ela admita uma base natural. Uma das principais diferenças entre essas duas definições é que, para nós, com a Definição 2.1.11, as subálgebras de evolução são ideais de evolução, enquanto na (CABRERA, 2016, Definição 1.4.3) não.

Proposição 2.2.14. *(TIAN, 2008, Proposição 2) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Toda subálgebra de evolução de $\mathcal{A}$ é um ideal de evolução.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}_1$ uma subálgebra de evolução de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}_1$ tem uma base natural $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda_1\} \in \mathcal{A}$, em que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$. Sejam $\boldsymbol{x} = \sum_{j\in\Lambda_1} x_j\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}_1$ e $\boldsymbol{y} = \sum_{i\in\Lambda} y_i\boldsymbol{e}_i$, em que $x_j, y_i \in \mathbb{R}$. Então, o produto é dado por:

$$\boldsymbol{xy} = \left(\sum_{j\in\Lambda_1} x_j\boldsymbol{e}_j\right)\left(\sum_{i\in\Lambda} y_i\boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{k\in\Lambda_1} x_k y_k \boldsymbol{e}_k^2 \in \mathcal{A}_1.$$

Como $\mathcal{A}_1$ é uma subálgebra de evolução, temos que $\boldsymbol{e}_k^2 \in \mathcal{A}_1$ para todo $k \in \Lambda_1$ e, assim, $\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_1$. Além disso, como $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa, $\mathcal{A}_1$ é um ideal. □

Definição 2.2.15. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Seja S um subconjunto qualquer de elementos de $\mathcal{A}$. A subálgebra de evolução gerada por S, denotada por $\langle S\rangle$, é a menor subálgebra de evolução de $\mathcal{A}$ que contém S. Equivalentemente, a subálgebra gerada por S é dada por: $\langle S\rangle = \bigcap\{W \subseteq \mathcal{A} \mid W \text{é subálgebra de evolução e } S \subseteq W\}$.*

Exemplo 2.2.16. *(CABRERA, 2016, Exemplo 1.4.1) No Exemplo 2.1.13, $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$. Verificamos que $\mathcal{A}_1$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. No entanto, $\mathcal{A}_1$ não é uma subálgebra de evolução, dado que não* *existe uma base natural para $\mathcal{A}_1$. Suponha por absurdo que $\mathcal{A}_1$ tem uma base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, em que:*

$$\boldsymbol{w}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2,$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \gamma\boldsymbol{v}_1 + \delta\boldsymbol{v}_2,$$

para alguns $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, ou seja, eles são uma combinação linear de $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$. Além disso, $D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, quer dizer, eles são linearmente independentes. Como $\mathcal{B}$ é uma base natural, temos que $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$. Logo, $\boldsymbol{w}_1 \cdot \boldsymbol{w}_2 = (\alpha\delta + \beta\gamma)\boldsymbol{v}_1 + \beta\delta\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$. No entanto, em qualquer caso possível, obtemos que $D = 0$, gerando uma contradição.

O próximo exemplo, nos mostra como, dada uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com base natural $\mathcal{B}$ obtemos uma subálgebra $\mathcal{A}_1$ que não admite uma base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda_1\}$, em que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$.

Exemplo 2.2.17. *(CABRERA, 2016, Exemplo 1.4.10) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e produtos dados por:*

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_1,$$

$$\boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_1.$$

Sejam $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1$ e $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$. É possível mostrar que $\mathcal{A}_1 = span\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Sejam $\boldsymbol{u}_1 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{u}_2 = \gamma\boldsymbol{v}_1 + \delta\boldsymbol{v}_2$, dois elementos qualquer *deste conjunto. Assim, fazendo os cálculos, obtemos que:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 &= \alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2 + \gamma \boldsymbol{v}_1 + \delta \boldsymbol{v}_2 \\ &= (\alpha + \gamma)\boldsymbol{v}_1 + (\beta + \delta)\boldsymbol{v}_2, \\ \boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 &= (\alpha \boldsymbol{v}_1 + \beta \boldsymbol{v}_2) \cdot (\gamma \boldsymbol{v}_1 + \delta \boldsymbol{v}_2) \\ &= \alpha\gamma \boldsymbol{v}_1^2 + \alpha\delta \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + \beta\gamma \boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \beta\delta \boldsymbol{v}_2^2 \\ &= \alpha\gamma \boldsymbol{e}_1^2 + \alpha\delta \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) + \beta\gamma(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_1 + \beta\delta(\boldsymbol{e}_2^2 + \boldsymbol{e}_3^2) \\ &= \alpha\gamma(\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3) + \alpha\delta \mathbf{0} + \beta\gamma \mathbf{0} + 2\beta\delta \boldsymbol{e}_1 \\ &= 2\beta\delta \boldsymbol{v}_1 + \alpha\gamma \boldsymbol{v}_2. \end{aligned}$$

Além disso, a base de $\mathcal{A}_1$ é natural, já que $\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$. No entanto, não admite uma base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda_1\}$, em que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$, pelo fato de que $\boldsymbol{e}_2 \notin \mathcal{A}_1$ e $\boldsymbol{e}_3 \notin \mathcal{A}_1$. Portanto, não é uma subálgebra de evolução.

Observação 2.2.18. *Dada uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ e dado um subconjunto qualquer $S \subseteq \Lambda$, em geral, o $span(S)$ não é uma subálgebra de evolução. No entanto, sob certas condições, $span(S) = \langle S \rangle$.*

Definição 2.2.19. *(TIAN, 2008, Definição 4) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$.*

1. *Dizemos que $\mathcal{A}$ é indecomponível se $\mathcal{A}$ não pode ser decomposto em uma soma direta de subálgebras de evolução próprias.*

2. *Dizemos que $\mathcal{A}$ é simples se não tiver nenhum ideal de evolução próprio.*

3. *Dizemos que $\mathcal{A}$ é irredutível se não tiver nenhuma subálgebra de evolução própria.*

Observação 2.2.20. *No contexto das álgebras de evolução, (CABRERA, 2016) demonstra que uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ é simples se $\mathcal{A}^2 \neq \mathbf{0}$ onde $\mathcal{A}^2 = span\{\boldsymbol{e}_i^2 \mid$*

$i \in \Lambda\}$. Vale ressaltar que este conjunto constitui sempre um ideal. Embora este resultado não seja o foco principal da nossa abordagem sobre álgebras simples, sua menção é pertinente por ser um resultado padrão na teoria clássica das álgebras de evolução.

No nosso caso, como as subálgebras de evolução coincidem com os ideais de evolução, dizer que uma álgebra de evolução é irredutível é equivalente a dizer que é simples.

Definição 2.2.21. *(ELDUQUE; LABRA, 2015, Definição 2.6) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. O anulador de $\mathcal{A}$ é o conjunto*

$$ann(\mathcal{A}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{A} \mid \boldsymbol{x} \cdot \mathcal{A} = \mathbf{0}\}.$$

Uma álgebra de evolução é chamada não degenerada se $ann(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$.

Lema 2.2.22. *(CABRERA, 2016, Proposição 1.5.3 (I)) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$, então temos que:*

$$ann(\mathcal{A}) = span\{\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i^2 = 0\}.$$

Demonstração. ($\subseteq$) Seja $\boldsymbol{x} \in ann(\mathcal{A})$ um elemento não nulo, tal que $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in\Lambda} x_i \boldsymbol{e}_i$, onde $x_i \neq 0$. Como $\boldsymbol{x}$ pertence ao anulador, temos que $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$, para qualquer $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$. Em particular, para os elementos da base, ocorre que: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_i = x_i \boldsymbol{e}_i^2 = \mathbf{0}$, como $x_i \neq 0$, temos que: $\boldsymbol{e}_i^2 = \mathbf{0}$, quer dizer, $\boldsymbol{x} \in span\{\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i^2 = \mathbf{0}\}$.
($\supseteq$) Seja $\boldsymbol{e}_k \in span\{\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i^2 = \mathbf{0}\}$, logo como $\boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{e}_j = \mathbf{0}$ para todo $j \in \Lambda$, então $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{e}_k = \mathbf{0}$, para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$. Logo, $\boldsymbol{e}_k \in ann(\mathcal{A})$. $\square$

O resultado a seguir reescreve a (CABRERA, 2016, Proposição 1.5.3 (III)) no contexto das álgebras de evolução de dimensão enumerável.

Proposição 2.2.23. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. O $ann(\mathcal{A})$ é um ideal de evolução.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.22 obtemos que $ann(\mathcal{A}) = span\{\boldsymbol{e}_i \mid \boldsymbol{e}_i^2 = 0\}$. Observamos que, para cada $\boldsymbol{e}_k \in ann(\mathcal{A})$, temos que $\boldsymbol{e}_k^2 = \boldsymbol{0} \in ann(\mathcal{A})$. Agora, sejam $\boldsymbol{x} = \sum_{t\in\Lambda} x_t\boldsymbol{e}_t$ e $\boldsymbol{y} = \sum_{t\in\Lambda} y_t\boldsymbol{e}_t$ dois elementos qualquer de $ann(\mathcal{A})$. Fazendo os cálculos, obtemos que:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \sum_{t\in\Lambda} x_t\boldsymbol{e}_t + \sum_{t\in\Lambda} y_t\boldsymbol{e}_t = \sum_{t\in\Lambda}(x_t + y_t)\boldsymbol{e}_t,$$
$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left(\sum_{t\in\Lambda} x_t\boldsymbol{e}_t\right)\left(\sum_{t\in\Lambda} y_t\boldsymbol{e}_t\right) = \sum_{t\in\Lambda} x_t y_t \boldsymbol{e}_t^2 = \boldsymbol{0}.$$

Assim, $ann(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de evolução pelo fato que $ann(\mathcal{A})$ é gerada por uma base do tipo $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda_1\}$, em que $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$. Logo, pela Proposição 2.2.14 $ann(\mathcal{A})$ é um ideal de evolução. □

2.2.2 ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO NÃO NEGATIVAS

Definição 2.2.24. *(TIAN, 2008, pág. 18) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução não negativa se suas constantes de estrutura são não negativas.*

Definição 2.2.25. *(TIAN, 2008, Definição 4) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra comutativa, não necessariamente de evolução.*

1. *As potências principais de $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$ são definidas como $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}$, e, em geral: $\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{x}^{n-1} \cdot \boldsymbol{x}$.*

2. *As potências plenas de $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$ são definidas como:*

$$\boldsymbol{x}^{[1]} = \boldsymbol{x}^{(2)} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x},$$
$$\boldsymbol{x}^{[2]} = \boldsymbol{x}^{(2^2)} = \boldsymbol{x}^{(2)} \cdot \boldsymbol{x}^{(2)},$$
$$\boldsymbol{x}^{[3]} = \boldsymbol{x}^{(2^3)} = \boldsymbol{x}^{(4)} \cdot \boldsymbol{x}^{(4)},$$

em geral:

$$\boldsymbol{x}^{[n]} = \boldsymbol{x}^{(2^n)} = \boldsymbol{x}^{(2^{n-1})} \cdot \boldsymbol{x}^{(2^{n-1})}.$$

Por conveniência, denotamos $\boldsymbol{x}^{[0]} = \boldsymbol{x}$. Além disso, temos que:

$$(\boldsymbol{x}^{[n]})^{[m]} = (\boldsymbol{x}^{(2^n)})^{(2^m)} = \boldsymbol{x}^{(2^n 2^m)} = \boldsymbol{x}^{(2^{n+m})} = \boldsymbol{x}^{[n+m]}.$$

Definição 2.2.26. *(TIAN, 2008, pág. 26) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com uma base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Assim, para $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$, onde $\boldsymbol{x} = \sum_{j\in\Lambda} x_j \boldsymbol{e}_j$.*

1. *Dizemos que $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{x}$, se o coeficiente $x_i \neq 0$. Quando $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{x}$, escrevemos $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{x}$.*

2. *Dizemos que $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados, se $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$ e $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[m]}$ para alguns $n, m \in \mathbb{N}$.*

Definição 2.2.27. *(TIAN, 2008, pág. 27) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Definimos a relação "$<$", sobre os elementos da base natural da seguinte forma:*

$$\boldsymbol{e}_i < \boldsymbol{e}_j, \text{ se } \boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]} \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Dizemos que $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{e}_j$, se $\boldsymbol{e}_i < \boldsymbol{e}_j$.

A Proposição 2.2.28 dá uma prova para o resultado mencionado em (TIAN, 2008, pág. 26- 27).

Proposição 2.2.28. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. A relação $<$ é uma relação de ordem parcial, quer dizer:*

1. *Reflexividade: $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_i^{[0]}$, para todo $i \in \Lambda$.*

2. *Transitividade: Se $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$ e $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_k^{[m]}$, então $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_k^{[n+m]}$, para alguns $n, m \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. 1. Pela Definição 2.2.19, temos que: $\boldsymbol{e}_i^{[0]} = \boldsymbol{e}_i$. Então $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_i^{[0]}$, para todo $i \in \Lambda$.

2. Pela Definição 2.2.19, temos que: $\boldsymbol{e}_i^{[m]} = \boldsymbol{e}_i^{(2^m)}$. Sejam $\boldsymbol{e}_j^{[n]} = \sum_{l\in\Lambda} a_{nl}\boldsymbol{e}_l$, $\boldsymbol{e}_k^{[m]} = \sum_{l\in\Lambda} b_{ml}\boldsymbol{e}_l$ e
$\boldsymbol{e}_k^{[m+n]} = \sum_{l\in\Lambda} b_{(m+n)l}\boldsymbol{e}_l$, em que a_{nl}, b_{ml} e $b_{(m+n)l}$ são constantes não nulas das correspondentes potências. Como $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$ e $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_k^{[m]}$, para alguns $n, m \in \mathbb{N}$, então $a_{ni} \neq 0$ e $b_{mj} \neq 0$. Agora, na potência $n+m$, temos que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_k^{[n+m]} &= \left(\boldsymbol{e}_k^{[m]}\right)^{[n]} = \left(\sum_{l\in\Lambda} b_{ml}\boldsymbol{e}_l\right)^{[n]} = \left(\sum_{l\in\Lambda} b_{ml}\boldsymbol{e}_l\right)^{(2^n)} = \sum_{l\in\Lambda}(b_{ml})^{(2^n)}\boldsymbol{e}_l^{(2^n)} \\ &= \sum_{l\in\Lambda}(b_{ml})^{(2^n)}\boldsymbol{e}_l^{[n]}.\end{aligned}$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_k^{[n+m]} &= \sum_{\substack{l\in\Lambda\\ l\neq j}}(b_{ml})^{(2^n)}\boldsymbol{e}_l^{[n]} + (b_{mj})^{(2^n)}\boldsymbol{e}_j^{[n]} \\ &= \sum_{\substack{l\in\Lambda\\ l\neq j}}(b_{ml})^{(2^n)}\boldsymbol{e}_l^{[n]} + (b_{mj})^{(2^n)}\sum_{l\in\Lambda} a_{nl}\boldsymbol{e}_l.\end{aligned}$$

Portanto, como a álgebra é não negativa, cada uma das constantes $b_{mj}^{(2^n)} > 0$ e $a_{ni} > 0$, então $b_{mj}^{(2^n)} a_{ni} > 0$. Logo, $b_{(n+m)i} = \delta + b_{mj}^{(2^n)} a_{ni}$, em que δ é a constante resultante da soma à esquerda. Da mesma forma, dado que a álgebra de evolução é não negativa, $\delta > 0$, ou seja, $b_{(n+m)i} > 0$ e, portanto, $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_k^{[n+m]}$.

□

O Exemplo 2.2.29 nos mostra por que a hipótese de que a álgebra de evolução seja não negativa é importante para preservar a transitividade.

Exemplo 2.2.29. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ e produtos dados por:*

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2^2 = -\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2.$$

Observamos que $\boldsymbol{e}_2 \prec \boldsymbol{e}_1^{[1]}$ e $\boldsymbol{e}_1 \prec \boldsymbol{e}_3^{[1]}$, no entanto, $\boldsymbol{e}_2 \not\prec \boldsymbol{e}_3^{[2]}$, em que $\boldsymbol{e}_3^{[2]} = \boldsymbol{e}_3^4 = 0$. Portanto, a condição de que a álgebra seja não negativa na Proposição 2.2.28 é fundamental para preservar a transitividade.

Consideraremos, a seguir, a noção de descendente do índice i, introduzida inicialmente em (CABRERA, 2016).

Definição 2.2.30. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda\}$. Dado $i \in \Lambda$.*

- *O descendente da geração zero é o índice do subconjunto $D^0(i)$ dado por:*

$$D^0(i) = \{i\}.$$

- *Os descendentes de primeira geração de i são os índices do subconjunto $D^1(i)$ dado por:*

$$D^1(i) := \{k \in \Lambda \mid c_{ik} \neq 0\}.$$

- *Os descendentes de segunda geração de i, são os índices j, tais que $j \in D^1(k)$ para algum $k \in D^1(i)$. Portanto:*

$$D^2(i) = \bigcup_{k \in D^1(i)} D^1(k).$$

- *Em geral, definimos o conjunto de descendentes da m-ésima geração de i como:*

$$D^m(i) = \bigcup_{k \in D^{m-1}(i)} D^1(k).$$

Finalmente, o conjunto de descendentes de i é definido por:

$$D(i) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} D^m(i).$$

Observação 2.2.31. *Observamos que $D(i) \subseteq \Lambda$, para todo $i \in \Lambda$. E denotamos $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup 0$ como o conjunto dos números naturais, incluindo o zero.*

A Definição 2.2.30 difere da definição apresentada em (CABRERA, 2016, Definição 2.1.1), em dois pontos.

1. Definimos a geração zero para todo $i \in \Lambda$.

2. A álgebra de evolução tem que ser não negativa.

Ao exigir que a álgebra de evolução seja não negativa, obtemos a seguinte equivalência. Os Lemas 2.2.32 e 2.2.34, a Proposição e o Corolário 2.2.37 surgem da necessidade de formalizar e demonstrar as afirmações apresentadas em (TIAN, 2008, pág. 26), porém sob a condição de que se tratem de álgebras de evolução não negativas e não degeneradas.

Lema 2.2.32. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Sejam $i, j \in \Lambda$ e algum $n \in \mathbb{N}$.*

$$j \in D^n(i) \text{ se, e somente se, } \boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[n]}.$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Provemos por indução matemática. Para $n = 1$, temos que, se $j \in D^1(i)$, então $c_{ij} > 0$, quer dizer, $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_1^{[1]}$. Suponhamos agora que vale para n, ou seja, se $j \in D^n(i)$, então $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[n]}$, e mostremos que vale para $n+1$. Seja $j \in D^{n+1}(i)$, então existe um $k \in \Lambda$, tal que $j \in D^1(k)$ e $k \in D^n(i)$, pela hipótese de indução e o caso $n = 1$, temos que $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_i^{[n]}$ e $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_k^{[1]}$. Dado que a álgebra de evolução é não negativa, pela transitividade da Proposição 2.2.28, temos que $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[n+1]}$.

($\Longleftarrow$) O raciocínio é análogo ao caso anterior. $\square$

Exemplo 2.2.33. *No Exemplo 2.2.29, $\mathcal{A}$ é uma álgebra que não satisfaz a condição de ser não negativa, pelo fato de que $\boldsymbol{e}_2^2 = -\boldsymbol{e}_2$. Por isso, neste caso, obtemos a situação em que $2 \in D^2(3)$ e $\boldsymbol{e}_2 \not\prec \boldsymbol{e}_3^{[n]}$ para nenhum $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 2.2.34. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda\}$. Então $A^{(i)} := span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(i)\}$ é uma subálgebra de evolução para todo $i \in \Lambda$.*

Demonstração. Observamos que, se $\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}^{(i)}$, então $\boldsymbol{e}_j^2 \in A^{(i)}$. De fato, dado que $\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}^{(i)}$, temos que $j \in D(i)$. Daí, existe um $m > 0$, tal que $j \in D^m(i)$. Então, pelo Lema 2.2.32, temos que $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[m]}$. Além disso, para todo $k \in \Lambda$ tal que $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_j^{[1]}$, ou seja, $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_j^2$, pela Proposição 2.2.28 temos que $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_i^{[m+1]}$, ou seja, $\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{A}^{(i)}$. Portanto, dado que, para cada $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_j^2$ temos que $\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{A}^{(i)}$, então $\boldsymbol{e}_j^2 \in \mathcal{A}^{(i)}$.
Agora, sejam $\boldsymbol{x} = \sum_{t \in D(i)} x_t \boldsymbol{e}_t$ e $\boldsymbol{y} = \sum_{t \in D(i)} y_t \boldsymbol{e}_t$ dois elementos qualquer de $\mathcal{A}^{(i)}$. Fazendo os cálculos, obtemos que:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \sum_{t \in D(i)} x_t \boldsymbol{e}_t + \sum_{t \in D(i)} y_t \boldsymbol{e}_t = \sum_{t \in D(i)} (x_t + y_t) \boldsymbol{e}_t,$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \left(\sum_{t \in D(i)} x_t \boldsymbol{e}_t \right) \left(\sum_{t \in D(i)} y_t \boldsymbol{e}_t \right) = \sum_{t \in D(i)} x_t y_t \boldsymbol{e}_t^2.$$

Assim, $\mathcal{A}^{(i)}$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$ para todo $i \in \Lambda$, e imediatamente é uma subálgebra de evolução de $\mathcal{A}$, pelo fato que é gerada por uma base do tipo $\mathcal{B}_i = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(i)\}$, em que $D(i) \subseteq \Lambda$. $\square$

Observação 2.2.35. *Dado um subconjunto $S_1 \subseteq \Lambda$, $\mathcal{A}_1 = span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_1\}$ nem sempre é uma subálgebra de evolução. No entanto, para comprovar se, dado um $S_1 \subseteq \Lambda$, o $\mathcal{A}_1 = span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_1\}$ é uma subálgebra de evolução, basta mostrar que, se $\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{A}_1$, então $\boldsymbol{e}_k^2 \in \mathcal{A}_1$.*

A Proposição 2.2.36 caracteriza como são as subálgebras de evolução geradas pelos elementos da base natural em uma álgebra de evolução não negativa.

Proposição 2.2.36. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Então, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \mathcal{A}^{(i)}$ para todo $i \in \Lambda$, em que $\mathcal{A}^{(i)} = span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(i)\}$.*

Demonstração. $\subseteq$ Sabemos que $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ é a menor subálgebra de evolução de $\mathcal{A}$ que contém o elemento $\boldsymbol{e}_i$. Assim, pelo Lema 2.2.34, temos que $\mathcal{A}^{(i)}$ é uma subálgebra de evolução. Portanto, dado que $\boldsymbol{e}_i \in \mathcal{A}^{(i)}$, então $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle \subseteq \mathcal{A}^{(i)}$.

$\supseteq$ Suponhamos que existe $\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{A}^{(i)}$. Então, existe um $n \in \mathbb{N}$, tal que $k \in D^n(i)$, ou seja, $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_i^{[n]} = \boldsymbol{e}_i^{(2^n)}$. Logo, pelo fato que $\boldsymbol{e}_i^{(2^n)} \in \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$, então $\boldsymbol{e}_k \in \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$. Assim, $\mathcal{A}^{(i)} \subseteq \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$.

Portanto, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \mathcal{A}^{(i)}$ para todo $i \in \Lambda$. $\square$

Teorema 2.2.37. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa e não degenerada com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Se $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle \subseteq \langle \boldsymbol{e}_j \rangle$.*

Demonstração. Basta provar que $D(i) \subseteq D(j)$. De fato, seja $k \in D(i)$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $k \in D^m(i)$, assim, pelo Lema 2.2.32, temos que $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_i^{[m]}$. Como $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então, pela transitividade da Proposição 2.2.28, temos que $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_j^{[m+n]}$, daí $k \in D^{n+m}(j)$ e assim temos que $k \in D(j)$. Logo, pela Proposição 2.2.36, temos que:

$$\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = span\{\boldsymbol{e}_k \mid k \in D(i)\} \subseteq span\{\boldsymbol{e}_k \mid k \in D(j)\} = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle \, .$$

$\square$

Definição 2.2.38. *(TIAN, 2008, pág. 18) Uma álgebra de evolução não negativa $\mathcal{A}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ é chamada de álgebra de evolução markoviana se $\sum_{k \in \Lambda} c_{ik} = 1$ para todo $i \in \Lambda$, ou seja, se a matriz de estrutura C é estocástica.*

Observação 2.2.39. *Dada uma álgebra de evolução markoviana $\mathcal{A}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Observamos o seguinte:*

1. *$\mathcal{A}$ é não degenerada, pelo fato que $\boldsymbol{e}_i^2 \neq 0$ para todo $i \in \Lambda$.*
2. *$\mathcal{A}$ "gera" uma cadeia de Markov homogênea a tempo discreto com espaço de estados S, onde $S = \Lambda$ e as probabilidades de transição são iguais às constantes de estrutura.*

No (TIAN, 2008, Capítulo 4), foi estudada a conexão entre as álgebras de evolução e as cadeias de Markov, a qual será nosso foco de estudo. As álgebras de evolução de permutações, estudadas em (KHUDOYBERDIYEV; OMIROV; QARALLEH, 2015), são um tipo particular de álgebras de evolução markovianas. Neste ponto, direcionamos o leitor que não é familiarizado com o conceito de Cadeias de Markov para o Apêndice B.

Exemplo 2.2.40. *No Exemplo 2.1.6, a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução markoviana com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ e com produtos dados por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1^2 &= \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_2^2 &= \frac{1}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

A cadeia de Markov associada a essa álgebra é uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ homogênea de tempo discreto, com espaço de estados $S = \Lambda$ e probabilidades de transição dadas por:

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{2}{3}, \quad p_{12} = \frac{1}{3}, \\ p_{21} &= \frac{1}{5}, \quad p_{22} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

2.2.3 OPERADOR EVOLUÇÃO

Definição 2.2.41. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda\}$. O operador evolução L cumpre que, $L : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ e $L(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_i^2$, para todo $i \in \Lambda$.*

Somente no caso em que a álgebra é finita, podemos dar uma representação de L, fazendo uso do elemento universal, $\boldsymbol{\theta} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i$. Assim, temos que:

$$L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{e}_i \right) \cdot \boldsymbol{x},$$

para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$. Para uma álgebra qualquer de dimensão enumerável, temos que:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in \Lambda} x_i \boldsymbol{e}_i^2, \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in \mathcal{A}.$$

Teorema 2.2.42. *(TIAN, 2008, Teorema 3) Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ e $\mathcal{A}_1$ uma subálgebra de evolução. Então, $L^n(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, em que L^n denota n interações do operador L.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda_1\}$ a base natural da subálgebra de evolução $\mathcal{A}_1$. Faremos a prova por indução matemática sobre n. Para $n = 1$, temos que:

$$L(\boldsymbol{x}) = \sum_{j \in \Lambda_1} x_j L(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j \in \Lambda_1} x_j \boldsymbol{e}_j^2 = \sum_{i \in \Lambda_1} \left(\sum_{j \in \Lambda_1} x_j c_{ji} \right) \boldsymbol{e}_i.$$

Como $\mathcal{A}_1$ é um ideal de evolução, temos que $L(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$, onde $\Lambda_1 \subseteq \Lambda$. Suponhamos que vale para n e mostremos que cumpre para $n+1$. Denotamos por $x_i^{(n)}$ o coeficiente não nulo correspondente a $L^n(\boldsymbol{x})$. Então, pela hipótese de indução, temos que:

$$L(L^n(\boldsymbol{x})) = \sum_{i \in \Lambda_1} x_i^{(n)} L(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i \in \Lambda_1} x_i^{(n)} \boldsymbol{e}_i^2 = \sum_{j \in \Lambda_1} \left(\sum_{i \in \Lambda_1} x_i^{(n)} c_{ij} \right) \boldsymbol{e}_j.$$

Neste caso, $x_j^{(n+1)} = \left(\sum_{i \in \Lambda_1} x_i^{(n)} c_{ji} \right)$ e, assim, $L^{n+1}(x) = \sum_{j \in \Lambda_1} x_j^{(n+1)} \boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}_1$. Portanto, $L^n(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}_1$. $\square$

Definição 2.2.43. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. A norma de $\mathcal{A}$ cumpre que, $\|\cdot\| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\|\boldsymbol{x}\| = \sum_{i\in\Lambda} \mid x_i \mid$, onde $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in\Lambda} x_i \boldsymbol{e}_i \in \mathcal{A}$.*

Com esta norma, concluímos que as álgebras de evolução são espaços normados ou, mais especificamente, álgebras normadas. Embora não aprofundemos as propriedades nem as implicações das normas nas álgebras. Convidamos o leitor a consultar livros de análise funcional como (KREYSZIG, 1978), caso deseje mais informações detalhadas sobre operadores limitados. Ou ver o Apêndice A para uma consulta rápida.

Embora a proposição apresentada em (TIAN, 2008, Proposição 6) afirme que o operador evolução é limitado, podemos mostrar que essa afirmação não é verdadeira em todos os casos. Em particular, apresentaremos um contraexemplo que demonstra que a afirmação não é verdadeira no contexto das álgebras de evolução enumeráveis.

Exemplo 2.2.44. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ com produtos dados por: $\boldsymbol{e}_i^2 = i\boldsymbol{e}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Em particular, temos que $\|L(\boldsymbol{e}_i)\| = \|i\boldsymbol{e}_i\| = i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, o operador evolução não é limitado.*

No entanto, no caso das álgebras de evolução markovianas, essa afirmação é verdadeira.

Proposição 2.2.45. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução markoviana com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. O operador evolução é um operador limitado.*

Demonstração. Seja $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in\Lambda} x_i \boldsymbol{e}_i$ e $L(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in\Lambda} x_i \left(\sum_{k\in\Lambda} c_{ik}\boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{k\in\Lambda} \left(\sum_{i\in\Lambda} x_i c_{ik}\right) \boldsymbol{e}_k$, então, temos que:

$$\begin{aligned} \|L(\boldsymbol{x})\| &= \sum_{k\in\Lambda} \left| \sum_{i\in\Lambda} x_i c_{ik} \right| \leq \sum_{k\in\Lambda} \sum_{i\in\Lambda} \mid x_i c_{ik} \mid \\ &\leq \sum_{i\in\Lambda} \mid x_i \mid \sum_{k\in\Lambda} \mid c_{ik} \mid = \sum_{i\in\Lambda} \mid x_i \mid = \|\boldsymbol{x}\|, \end{aligned}$$

em que $\sum_{k\in\Lambda} \mid c_{ik} \mid= 1$, para todo $i \in \Lambda$. Neste caso, $c = 1$. Logo, L é uniformemente limitado. □

2.2.4 RECORRÊNCIA ALGÉBRICA

Definição 2.2.46. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$.*

- *$\boldsymbol{e}_j$ é algebricamente recorrente se a subálgebra de evolução $\langle \boldsymbol{e}_j \rangle$ é simples.*
- *$\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente se a subálgebra de evolução $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ não é simples.*

A seguir, demonstraremos que, se dois elementos da álgebra se intercomunicam, eles geram a mesma subálgebra de evolução. Contudo, limitaremos nossa prova às álgebras de evolução não negativas e não degeneradas, para que possamos utilizar os resultados do Lema 2.2.34. No intuito de que tais resultados nos auxiliem na compreensão da conexão entre as álgebras de evolução e as cadeias de Markov.

Proposição 2.2.47. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa e não degenerada com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Dizemos que $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados se, e somente se, $D(i) = D(j)$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados.

($\subseteq$) Seja $k \in D(i)$, então existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $k \in D^l(i)$, daí, $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_i^{[l]}$. Por hipótese, $\boldsymbol{e}_i$ se intercomunica com $\boldsymbol{e}_j$, então, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$. Pela transitividade da Proposição 2.2.28, temos que $\boldsymbol{e}_k \prec \boldsymbol{e}_j^{[n+l]}$, o que implica que $\boldsymbol{e}_k \in D^{l+n}(j)$ e, portanto, $\boldsymbol{e}_k \in D(j)$.

($\supseteq$) O raciocínio é análogo ao caso anterior.

Assim, temos que $D(i) = D(j)$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $D(i) = D(j)$. Assim, temos que $i \in D(j)$. Logo, existe um $n \in \mathbb{N}$, tal que $i \in D^n(j)$ e $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$. De forma semelhante, dado que $j \in D(i)$, existe um $m \in \mathbb{N}$, tal que $j \in D^m(i)$ e $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[m]}$. Quer dizer, $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados. $\square$

Teorema 2.2.48. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa e não degenerada com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Dizemos que $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados se, e somente se, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.2.47, temos que $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados se, e somente se, $D(i) = D(j)$. Portanto, pelo Lema 2.2.34, temos que:

$$\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = span\{\boldsymbol{e}_k \mid k \in D(i)\} = span\{\boldsymbol{e}_k \mid k \in D(j)\} = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle .$$

$\square$

Corolário 2.2.49. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não negativa e não degenerada com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Sejam $i, j \in \Lambda$, tal que $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados. $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente se, e somente se, $\boldsymbol{e}_j$ é algebricamente recorrente.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente, ou seja, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ é uma subálgebra de evolução simples. Logo, pelo Teorema 2.2.48, como $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados, então $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle$. Portanto, $\langle \boldsymbol{e}_j \rangle$ é uma subálgebra de evolução simples, ou seja, $\boldsymbol{e}_j$ é algebricamente recorrente.

($\Longleftarrow$) O raciocínio é análogo ao caso anterior. $\square$

Corolário 2.2.50. *(TIAN, 2008, Corolário 9) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$.*

1. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução indecomponível, então $\mathcal{A}$ tem uma subálgebra de evolução própria se, e somente se, $\mathcal{A}$ tem um gerador algebricamente transiente.*

2. *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução indecomponível, então $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução simples se, e somente se, $\mathcal{A}$ não tem gerador algebricamente transiente.*

3. *Se $\mathcal{A}$ não tem gerador algebricamente transiente, então $\mathcal{A}$ pode ser escrito como uma soma direta de subálgebras de evolução (o número de parcelas pode ser um).*

A demonstração do Corolário 2.2.50 pode ser encontrada em (TIAN, 2008, pág. 42).

Teorema 2.2.51. *(TIAN, 2008, Teorema 9) Qualquer álgebra de evolução de dimensão finita com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, tem pelo menos uma subálgebra de evolução simples.*

Demonstração. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$, onde $\Lambda = \{1, \cdots, n\}$. Raciocinaremos da seguinte maneira recursiva.

1. Se $\mathcal{A}$ é simples. Não temos nada a provar, pois ela mesma é a sua subálgebra de evolução.

2. Se $\mathcal{A}$ não for simples, então existe uma subálgebra de evolução própria $\mathcal{A}_1$ com base natural $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda_1\}$, obtendo que $\mathcal{A}_1 \subsetneq \mathcal{A}$ e $\Lambda_1 \subsetneq \Lambda$. Se $\mathcal{A}_1$ é simples, encontramos a subálgebra de evolução simples de $\mathcal{A}$.

3. Se $\mathcal{A}_1$ não é simples, então existe uma subálgebra de evolução $\mathcal{A}_2$ com base natural $\mathcal{B}_2 = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda_2\}$, obtendo que $\mathcal{A}_2 \subsetneq \mathcal{A}_1 \subsetneq \mathcal{A}$ e $\Lambda_2 \subsetneq \Lambda_1 \subsetneq \Lambda$. Se $\mathcal{A}_2$ é simples, encontramos a subálgebra de evolução simples de $\mathcal{A}$, se não for, o raciocínio é análogo. Mas, como a álgebra de evolução é finita, esse processo irá parar. Portanto, sempre teremos uma subálgebra de evolução simples.

$\square$

O Exemplo 2.2.52 ilustra o fato que uma álgebra de evolução de dimensão infinita enumerável pode não ter subálgebras simples.

Exemplo 2.2.52. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e produtos dados por $\boldsymbol{e}_i^2 = \boldsymbol{e}_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Observamos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de evolução não negativa e não degenerada, portanto, valem os resultados da Proposição 2.2.36 e Teorema 2.2.37, obtendo assim que $\langle \boldsymbol{e}_{i+1} \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esta contenção é estrita pelo fato de que pelo menos $\boldsymbol{e}_i \notin \langle \boldsymbol{e}_{i+1} \rangle$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*
Agora suponhamos que existe uma subálgebra de evolução $\mathcal{A}_1$ com base natural $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda_1\}$. Seja $J \in \Lambda_1$, o mínimo de Λ_1, quer dizer, $J \leq i$ para todo $i \in \Lambda_1$, tal que $\boldsymbol{e}_J \in \mathcal{A}_1$ e $\langle \boldsymbol{e}_J \rangle \subseteq \mathcal{A}_1$. Pode ocorrer, justamente $\langle \boldsymbol{e}_J \rangle = \mathcal{A}_1$, no entanto, pela contenção $\langle \boldsymbol{e}_{i+1} \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos que $\langle \boldsymbol{e}_{J+1} \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{e}_J \rangle$, ou seja, qualquer subálgebra de evolução de $\mathcal{A}$ vai ter uma subálgebra de evolução. Logo $\mathcal{A}$ não tem subálgebra de evolução simples.

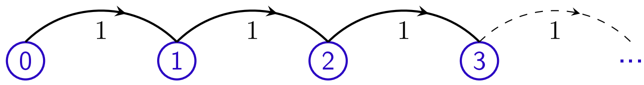

Figura 2 – $\Gamma^{\omega}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ da álgebra $\mathcal{A}$ do Exemplo 2.2.52.

2.2.5 FUNÇÕES BÁRICAS

Definição 2.2.53. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Uma função bárica σ é um homomorfismo de álgebra não nulo de $\mathcal{A}$ a $\mathbb{R}$, isto é, $\sigma : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, tal que, $\sigma(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{y})$ para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é bárica se existe uma função bárica em $\mathcal{A}$. Esse homomorfismo é chamado de função peso ou função bárica de $\mathcal{A}$, além disso, $\sigma(\boldsymbol{x})$ é o peso de $\boldsymbol{x}$.*

No (CASAS; LADRA; ROZIKOV, 2010, Teorema 3.2) é dada a condição necessária e suficiente para $\mathcal{A}$ ser bárica, sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita. A prova deste resultado será generalizada para o caso de dimensão enumerável.

Teorema 2.2.54. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. $\mathcal{A}$ é bárica se, e somente se, existe $k \in \Lambda$, tal que $c_{kk} \neq 0$ e $c_{ik} = 0$, para todo $i \neq k$. A função bárica correspondente é $\sigma(\boldsymbol{x}) = c_{kk}x_k$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{A}$ é bárica e seja $\sigma(\boldsymbol{x}) = \sum_{j\in\Lambda} \alpha_j x_j$ uma função bárica de $\mathcal{A}$. Sejam $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in\Lambda} x_i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = \sum_{i\in\Lambda} y_i \boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \sum_{k\in\Lambda} \left(\sum_{i\in\Lambda} x_i y_i c_{ik}\right) \boldsymbol{e}_k$. Então, temos que:

$$\sigma(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \sum_{j\in\Lambda} \alpha_j \sum_{i\in\Lambda} c_{ij} x_i y_i = \sum_{i\in\Lambda} \left(\sum_{j\in\Lambda} \alpha_j c_{ij} \right) x_i y_i. \tag{2.2}$$

Note que podemos trocar a ordem das somatórias na equação (2.2), dado que, ao assumir que a função bárica existe, a mesma está bem definida, então, caso seja uma somatória infinita, ela converge e a segunda somatória é finita. Por outro lado, temos que:

$$\sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{y}) = \left(\sum_{j\in\Lambda} \alpha_j x_j \right) \left(\sum_{i\in\Lambda} \alpha_i y_i \right) = \sum_{i\in\Lambda} \sum_{j\in\Lambda} \alpha_j \alpha_i x_j y_i.$$

Assumindo que $\sigma(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{y})$, temos as seguintes equações:

$$\alpha_i \alpha_j = 0, \quad \text{para todo } i \neq j, \tag{2.3}$$

$$\sum_{j\in\Lambda} c_{ij} \alpha_j = \alpha_i^2, \quad \text{para todo } i \in \Lambda. \tag{2.4}$$

Da equação $\sigma(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \sigma(\boldsymbol{x})\sigma(\boldsymbol{y})$ podemos observar que, do lado esquerdo da igualdade, os termos cruzados estão ausentes, enquanto do lado direito, os termos cruzados estão presentes. Daí, para que a igualdade seja verdadeira, a equação (2.3) deve ser satisfeita. Por outro lado, quando os termos são iguais, obtemos a equação (2.4).

Como a função $\sigma(\boldsymbol{x})$ é não nula, pela equação (2.3), existe um $k \in \Lambda$, tal que $\alpha_k \neq 0$ e $\alpha_i = 0$, para todo $i \neq k$. Assim, substituindo na equação (2.4), obtemos que:

$c_{ik}\alpha_k = 0$, se $i \neq k$, e $c_{kk}\alpha_k = \alpha_k^2$, se $i = k$. Portanto, $c_{ik} = 0$, para todo $i \neq k$ e $\alpha_k = c_{kk}$.

($\Longleftarrow$) Assumindo que existe $k \in \Lambda$, tal que $c_{kk} \neq 0$ e para todo $i \neq k, c_{ik} = 0$. É fácil observar que a função $\sigma(\boldsymbol{x}) = c_{kk}\boldsymbol{x}_k$ é uma função bárica, logo, $\mathcal{A}$ é bárica. □

Corolário 2.2.55. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução. A quantidade de funções báricas que podem ser definidas em $\mathcal{A}$ é igual ao número de $k \in \Lambda$ que satisfazem as condições do Teorema 2.2.54.*

2.3 ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E TEORIA DOS GRAFOS

Nesta seção, exploraremos como, a partir de um grafo não dirigido, ou simplesmente um grafo, podemos associar dois tipos de álgebras de evolução. Apresentaremos a seguir algumas definições importantes da teoria dos grafos, necessárias para estudar essa conexão. Além disso, aproveitando a seção sobre grafos, também mencionaremos algumas definições relacionadas a grafos dirigidos, ou dígrafos.

Definição 2.3.1. *Um grafo é simples se não há múltiplas arestas entre dois vértices. Um dígrafo é simples se não há múltiplas arestas direcionadas no mesmo sentido entre dois vértices.*

Definição 2.3.2. *(BALAKRISHNAN; RANGANATHAN, 2012, Capítulo 1) Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e sem laços.*

1. *Dois vértices v e u são chamados de vizinhos se $(u, v) = (v, u) \in E$.*

2. *Um caminho é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_k$, tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $i \in \{1, \ldots, k-1\}$.*

3. *Dois vértices u e v estão conectados se existe um caminho entre eles. Mesmo que o grafo tenha ou não laços, por convenção, cada vértice está conectado a si mesmo. Essa relação é chamada de relação de conexão.*

4. *A relação de conexão é uma relação de equivalência sobre G. Essa relação de equivalência permite particionar o grafo em subgrafos disjuntos chamados de subgrafos conexos. Esses subgrafos conexos contêm os vértices que estão conectados entre si.*

5. *Seja $\{G[V_i]\}_{i\in\Phi}$ a partição de G pela relação de conexão. Se $\mid \Phi \mid = 1$ chamamos o grafo de conexo, se $\mid \Phi \mid \geq 2$ chamamos o grafo de desconexo.*

6. *Denotamos por $deg(v)$ o número de vizinhos de v.*

7. *A matriz de adjacencia do grafo G é a matriz $A = (a_{ij})$, tal que:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (v_i, v_j) \in E, \\ 0, & \text{se } (v_i, v_j) \notin E. \end{cases}$$

   Caso o grafo G seja finito, a matriz A é simétrica.

8. *Dizemos que G é localmente finito, se todo vértice tiver um número finito de vizinhos.*

Se o grafo tiver ou não laços, as definições anteriores permanecem as mesmas. No caso dos dígrafos, os conceitos são equivalentes, apenas com uma diferença na definição de vizinho, que apresentaremos a seguir.

Definição 2.3.3. *Seja $H = (V, E^{\omega})$ um digrafo simples.*

1. *Dizemos que u tem v como vizinho se a aresta (u, v) existir.*

2. *Dizemos que v tem u como vizinho se a aresta (v, u) existir.*

3. *Dizemos que G é localmente finito, se todo vértice tiver um número finito de vizinhos.*

Observação 2.3.4. *Dada uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Observamos o seguinte de $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $\Gamma^{\omega}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Embora os quadrados da álgebra tenham uma representação finita, pode ocorrer que um vértice de $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tenha infinitos vizinhos, ou seja, não necessariamente se trata de um grafo localmente finito. No entanto, $\Gamma^{\omega}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é sempre localmente finito.*

Definição 2.3.5. *Seja G um grafo simples e H um digrafo simples.*

- *Dizemos que G é fortemente conexo se dados dois vértices qualquer v e u, existe um caminho entre eles.*
- *Dizemos que H é fortemente conexo se dados dois vértices qualquer v e u, existe um caminho direcionado de v a u e existe um caminho direcionado de u a v.*

Motivados pela (ELDUQUE; LABRA, 2015, Proposição 2.8), estendemos esse resultado para o caso de dimensão enumerável.

Proposição 2.3.6. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução não degenerada com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. $\mathcal{A}$ é indecomponível se, e somente se, $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é conexo.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\Gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ é desconexo. Portanto, $G = \cup_{J \in \Phi} G[\Lambda_J]$, onde $\mid \Phi \mid > 1$ e $G[\Lambda_J]$ é uma componente conexa para qualquer $J \in \Phi$. Cumprindo que $G[\Lambda_I] \cap G[\Lambda_J] = \phi$, se $I \neq J$, e $\sum_{I \in \Phi} \mid G[\Lambda_I] \mid = \mid G \mid$. Observamos que, para qualquer vértice $\boldsymbol{j} \in G[\Lambda_J]$ ele não é conectado com nenhum $\boldsymbol{i} \in G[\Lambda_I]$ para $I \neq J$. Na álgebra de evolução, afirmamos que $\mathcal{A}_I = span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda_I\}$ é uma subálgebra de evolução, para todo $I \in \Phi$.
De fato, dado que $G[\Lambda_I] \cap G[\Lambda_J] = \phi$, em $\mathcal{A}$ temos que, se $\boldsymbol{e}_i \in \mathcal{A}_I$ e $\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}_J$, então $\boldsymbol{e}_j \not\prec \boldsymbol{e}_i^{[1]}$, portanto, $\boldsymbol{e}_i^2 \in \mathcal{A}_I$. Logo, pela Observação 2.2.35, é suficiente para

demonstrar que $\mathcal{A}_I = span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda_I\}$ é uma subálgebra e, dado que, $\Lambda_I \subsetneq \Lambda$, então $\mathcal{A}_I$ é uma subálgebra de evolução. De novo, pelo fato que $\Lambda_I \cap \Lambda_J = \phi$, as subálgebras de evolução são disjuntas, temos que $\mathcal{A} = \oplus_{I\in\Phi}\mathcal{A}_I$. Quer dizer, $\mathcal{A}$ é decomponível.
($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\mathcal{A}$ é decomponível e $ann(\mathcal{A}) = \mathbf{0}$. Existem subálgebras de evolução $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ não triviais com bases naturais $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda_1\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda_2\}$, respetivamente, ao quais podem se estender a base natural, tendo que $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \phi$ e $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Lambda$. Dado que, se $\boldsymbol{e}_i \in \mathcal{A}_1$ e $\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}_2$, então $\boldsymbol{e}_j \nprec \boldsymbol{e}_i^{[n]}$ para nenhum $n \in \mathbb{N}$ e $I \neq J$, portanto, temos que $\boldsymbol{e}_i^2 \in \Lambda_I$. Fazendo a tradução no grafo, temos que: $G[\Lambda_1]$ e $G[\Lambda_2]$ são componentes conexas e disjuntas. Logo, o grafo é desconexo. $\square$

Terminaremos este capítulo ilustrando duas formas distintas de definir uma álgebra de evolução a partir de um certo tipo particular de grafos.

Definição 2.3.7. *(CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2021, Definição 1.2) Seja $G = (V, E)$ um grafo simples localmente finito com matriz de adjacência $A = (a_{ij})$. Definimos por $\mathcal{A}(G)$ à álgebra de evolução associada ao grafo G. Esta álgebra tem como base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in V\}$ e produtos dados por:*

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i = \sum_{k\in\Lambda} a_{ik}\boldsymbol{e}_k, \qquad \text{para todo } i,$$
$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \mathbf{0}, \qquad\qquad \text{se } i \neq j.$$

Exemplo 2.3.8. *Considere o grafo G com matriz de adjacência A, (ver Figura 3).*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

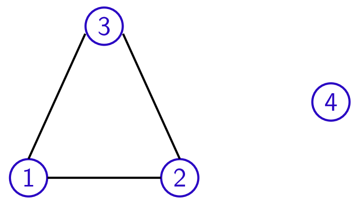

Figura 3 – Grafo G do Exemplo 2.3.8.

A álgebra $\mathcal{A}(H)$ associada ao grafo H, tem como base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ e produtos dados por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1^2 &= \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{e}_2^2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{e}_3^2 &= \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{e}_4^2 &= \boldsymbol{0},\\
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= 0, \ \textit{para todo } i \neq j.
\end{aligned}$$

Observamos que a matriz de estrutura C é mesma matriz de adjacência A.

Uma segunda forma de definir uma álgebra de evolução associada a um grafo de $G = (V, E)$ de maneira natural é derivada do passeio aleatório simétrico sobre G.

Definição 2.3.9. *(CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2021, Definição 1.5). Seja $G = (V, E)$ um grafo simples localmente finito com matriz de adjacência $A = (a_{ij})$. Se $deg(v_i) > 0$, para todo $i \in V$. Definimos por $\mathcal{A}_{RW}(G)$ à álgebra de evolução associada à passeio aleatório simétrico sobre G. Esta álgebra tem como base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in V\}$ e produtos dados por:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i &= \sum_{k \in \Lambda} \left(\frac{a_{ik}}{deg(v_i)} \right) \boldsymbol{e}_k, \qquad \textit{para todo } i,\\
\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= \boldsymbol{0}, \qquad\qquad\qquad \textit{se } i \neq j.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.10. *Consideremos o grafo roda de 4 vértices ou W_4, dado pela Figura 4, as álgebras de evolução associadas $\mathcal{A}(W_4)$ e $\mathcal{A}_{RW}(W_4)$, têm os seguintes quadrados:*

$$\mathcal{A}(W_4) = \begin{cases} \boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\ \boldsymbol{e}_4^2 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \\ \qquad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}, \qquad \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

$$\mathcal{A}_{RW}(W_4) = \begin{cases} \boldsymbol{e}_1^2 = \dfrac{\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4}{3}, \\ \boldsymbol{e}_2^2 = \dfrac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4}{3}, \\ \boldsymbol{e}_3^2 = \dfrac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4}{3}, \\ \boldsymbol{e}_4^2 = \dfrac{\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3}{3}, \\ \qquad \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{0}, \qquad \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

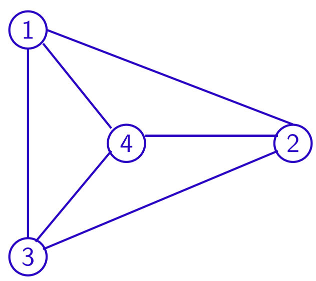

Figura 4 – Grafo W_4

O leitor poderá encontrar resultados sobre esse tipo de conexão entre as álgebras de evolução e a teoria de grafos nos artigos (CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2020; CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2021).

3 ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO E CADEIAS DE MARKOV

3.1 ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO MARKOVIANAS

No capítulo anterior, estudamos propriedades das álgebras de evolução, destacando sua conexão com a teoria dos grafos. Muitos desses resultados serão úteis para nós, já que, neste capítulo, focaremos nosso estudo nas álgebras de evolução markovianas, que tem associadas um digrafo. Convidamos o leitor a considerar as definições apresentadas no Apêndice B, onde estão as definições correspondentes as cadeias de Markov, que mencionaremos ao longo dos capítulos 2 e 3.
Na Definição 2.2.38 definimos as álgebras de evolução markovianas, tais álgebras são álgebras de evolução não negativas, em que a soma das constantes de estrutura para cada $i \in \Lambda$ é igual a 1. A seguir, observamos como essas álgebras com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ "geram" ou estão associadas a uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ com espaço de estados $S = \Lambda$ e probabilidades de transição descritas pelas constantes de estrutura. Isso nos leva a uma questão: Toda cadeia de Markov pode, por sua vez, estar associada a uma álgebra de evolução?

Essa equivalência foi abordada parcialmente por *Tian (2008)* (TIAN, 2008, Teorema 16), com o seguinte enunciado: Toda cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ homogênea no tempo e no espaço de estados S tem uma álgebra de evolução associada, em que a base natural da álgebra será o conjunto $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$ e as constantes de estrutura serão as probabilidades de transição na cadeia de Markov.

No Exemplo 3.1.1, apresentamos uma cadeia de Markov que não gera uma álgebra de evolução de acordo com a Definição 2.2.3.

Exemplo 3.1.1. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados $S = \mathbb{Z}$ e probabilidades de transição dadas por:*

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } j = i \pm 1, \text{ com } i \neq 0, \\ e^{-1}, & \text{se } j = 0, \text{ com } i = 0, \\ \frac{1}{2}\frac{e^{-1}}{|j|!}, & \text{para todo } j \neq 0, \text{ com } i = 0, \end{cases}$$

em que e é o número euler. As probabilidades de transição são armazenadas na matriz P, e seu digrafo é apresentado na Figura 5.

$$P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & e^{-1}/12 & e^{-1}/4 & e^{-1}/2 & e^{-1} & e^{-1}/2 & e^{-1}/4 & e^{-1}/12 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

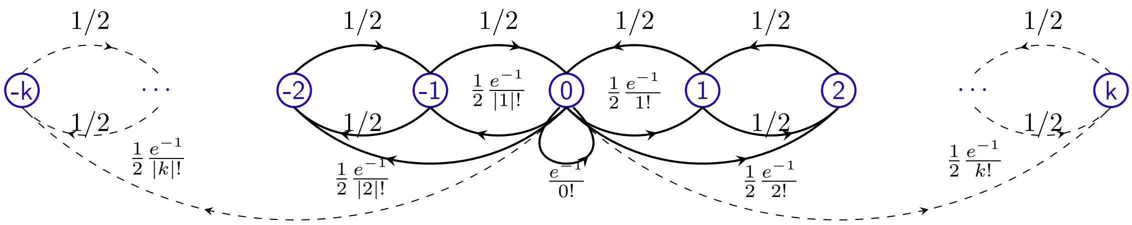

Figura 5 – Digrafo de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ do Exemplo 3.1.1.

Suponha que existe uma álgebra $\mathcal{A}$ gerada pela cadeia de Markov, com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ e produtos dados por:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_i^2 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{i-1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_{i+1}, \text{ para } i \neq 0, \\
\boldsymbol{e}_0^2 &= e^{-1}\boldsymbol{e}_0 + \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ j\neq 0}} \frac{1}{2}\frac{e^{-1}}{\mid j \mid !}\boldsymbol{e}_j.
\end{aligned}$$

Como os produtos cruzados são iguais a zeros e o conjunto $S = \mathbb{Z}$ é enumerável, $\mathcal{B}$ é uma base natural. No entanto, lembremos que estamos trabalhando com bases Hamel, ou seja, é necessário que os elementos tenham uma representação única como combinação linear finita de elementos da base natural. Pela construção dada, temos que o elemento $\boldsymbol{v}_0^2$ tem uma combinação linear infinita de elementos da base. Portanto, de acordo com nossa definição, $\mathcal{A}$ não é uma álgebra de evolução. Recentemente Cadavid, Rodriguez e Vidal (2024) generalizaram a definição de álgebra de evolução, trabalhando com bases Schauder, ver (CADAVID et al., 2024; CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2023; CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2024). Nestes artigos, encontram-se diferentes exemplos em que um estado da cadeia de Markov se comunica com infinitos estados. Exemplos como (CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2024, Exemplo 1.2) ou (CADAVID; RODRIGUEZ; VIDAL, 2024, Exemplo 3.5, Exemplo 3.7), são exemplos fundamentais para nosso estudo.

Observação 3.1.2. *Como mencionado na Observação 2.2.1, as proposições ou teoremas que não forem citados diretamente no enunciado correspondem a resultados próprios. As versões originais serão citadas antes do resultado, indicando as diferenças entre elas.*

O propósito deste capítulo é estudar os resultados de (TIAN, 2008, Capítulo 4), em que foram estudadas as propriedades que estão simultaneamente presentes nas álgebras de evolução markovianas e nas cadeias de Markov, principalmente no caso de dimensão infinita. Nesse sentido, temos três objetivos principais em nosso estudo:

1. Estudar as condições necessárias para que uma cadeia de Markov, com espaço de estados S enumerável, gere uma álgebra de evolução markoviana $\mathcal{A}$, com base natural $\mathcal{B}$, no sentido da Definição 2.2.3.

2. Estudar as propriedades comuns para as álgebras de evolução markovianas e para as propriedades para cadeias de Markov, concentrando-nos em estender essas definições e propriedades no caso enumerável.

3. Abordar a conexão entre as álgebras de evolução markovianas e as cadeias de Markov, a partir de uma perspectiva probabilística, quer dizer, tentar demonstrar os diferentes resultados que se têm para as álgebras de evolução, a partir das propriedades das cadeias de Markov. Devido ao fato de que esses resultados normalmente são abordados a partir de uma análise algébrica.

Notação 3.1.3. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S. Dados $i, j \in S$ dizemos que i leva para j em um passo, sempre que $p_{ij} > 0$. Dado um estado $i \in S$, definimos:*

$$\mathcal{J}_i = \{j \in S \mid p_{ij} > 0\}.$$

Observe que $\mathcal{J}_i$ é o conjunto de estados j para os quais i leva para j em um único passo.

Como observamos no Exemplo 3.1.1, o resultado apresentado por *Tian (2008)* no (TIAN, 2008, Teorema 16) não se aplica a todas as cadeias de Markov. A seguir, no Teorema 3.1.4, enunciamos as condições suficientes para que uma cadeia de Markov gere uma álgebra de evolução.

Teorema 3.1.4. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S enumerável, tal que para todo $i \in S$, $\mid \mathcal{J}_i \mid < \infty$. Então, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gera uma álgebra de evolução markoviana $\mathcal{A}(X_n)$, com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$ e constantes de estrutura dadas pelas probabilidades de transição na cadeia de Markov.*

Demonstração. Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S enumerável, tal que para todo $i \in S$, $\mid \mathcal{J}_i \mid < \infty$. Construímos a álgebra de evolução $\mathcal{A}(X_n)$ da seguinte forma:

1. $\mathcal{A}(X_n)$ é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$.

2. Definimos os produtos como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i^2 &= \sum_{k\in S} p_{ik}\boldsymbol{e}_k, && \text{para todo } i, \\ \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j &= \mathbf{0}, && \text{se } i \neq j. \end{aligned}$$

3. Por hipotese, $\mid \mathcal{J}_i \mid < \infty$, para todo $i \in S$, implicando que os $\boldsymbol{e}_i^2$ sejam descritos por uma combinação linear finita dos elementos da base.

4. $\mathcal{B}$ é uma base natural pelo fato de que os produtos cruzados são iguais a zero e S é enumerável.

5. Para todo $i \in S$, temos que $p_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$.

Portanto, $\mathcal{A}(X_n)$ é uma álgebra de evolução markoviana. $\square$

Notação 3.1.5. *Deste ponto adiante, uma álgebra de evolução markoviana $\mathcal{A}$ que fornece uma cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ na forma indicada no Teorema 3.1.4, será denotada por $\mathcal{A}(X_n)$.*

Observação 3.1.6. *Os conjuntos análogos aos $\mathcal{J}_i$ nas álgebras de evolução são os conjuntos de descendentes da primeira geração do elemento i, que definimos na Definição 2.2.30 no Capítulo 1.*

Exemplo 3.1.7. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, com distribuição $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ e $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$. Definimos as seguintes variáveis aleatórias:*

$$S_0 = 0 \text{ e } S_n = S_{n-1} + X_n \text{ para } n \geq 1.$$

Então, $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é uma cadeia de Markov, com espaço de estados $S = \mathbb{Z}$ e probabilidades de transição dadas por:

$$p_{ij} := \begin{cases} p, & \text{se } j = i+1, \\ 1-p, & \text{se } j = i-1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As probabilidades de transição são armazenadas na matriz de transição P e seu digrafo ponderado é apresentado na Figura 6.

$$P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

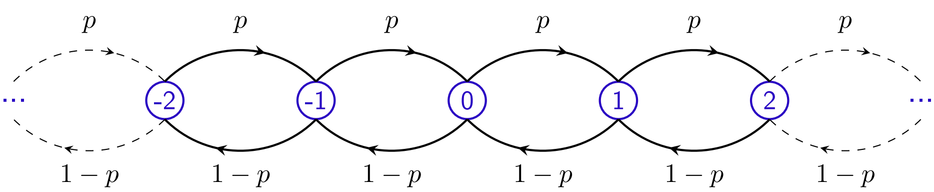

Figura 6 – Digrafo do passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ do Exemplo 3.1.7.

A cadeia $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *é conhecida como passeio aleatório em* $\mathbb{Z}$*, e gera a álgebra de evolução* $\mathcal{A}(S_n)$ *com base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ *e produtos dados por:*

$$\boldsymbol{e}_i^2 = (1-p)\boldsymbol{e}_{i-1} + p\boldsymbol{e}_{i+1}, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 3.1.8. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* $S = \{1,2\}$ *e probabilidades de transição dadas por:*

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{2}{3}, \quad p_{12} = \frac{1}{3}, \\ p_{21} &= \frac{1}{5}, \quad p_{22} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

$\mathcal{A}(X_n)$ *tem como base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ *e produtos definidos por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1^2 &= \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_2, \\ \boldsymbol{e}_2^2 &= \frac{1}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Observação 3.1.9. *Recordemos duas propriedades sobre as cadeias de Markov:*

1. *As probabilidades de transição na cadeia de Markov são armazenadas na matriz de probabilidade, ou matriz estocástica,* $P = (p_{ij})_{i,j\in S}$.

2. *As cadeias de Markov têm um digrafo ponderado associado, em que os vértices representam os estados da cadeia, e existe uma aresta entre dois vértices se as probabilidades de transição são diferentes de zero. O peso de cada aresta corresponde à respectiva probabilidade de transição.*

Um resultado direto do Teorema 3.1.4 é que, se uma cadeia de Markov gera uma álgebra de evolução, então a matriz de probabilidade P é a mesma matriz de estrutura C, e o digrafo da cadeia é o mesmo digrafo da álgebra de evolução. O Corolário 3.1.10 coincide, de fato, com o resultado apresentado no (TIAN, 2008, Teorema 16).

Corolário 3.1.10. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov finita, quer dizer,* $\mid S \mid < \infty$. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *gera uma álgebra de evolução markoviana.*

Demonstração. Dado que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é uma cadeia de Markov finita, temos que para todo $i \in S$, $\mid \mathcal{J}_i \mid < \infty$. Logo, cumpre-se as condições do Teorema 3.1.4, portanto, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gera uma álgebra de evolução markoviana. $\square$

3.2 OPERADOR EVOLUÇÃO E PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO

Nesta seção, descrevemos como as ferramentas das álgebras de evolução, tais como o operador de evolução, a função de projeção e a norma, têm implicações nos aspectos probabilísticos das cadeias de Markov, como nas distribuições no n-ésimo passo e nas probabilidades de transição em n passos.

Definição 3.2.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. A projeção j-ésima é tal que, $\rho_j : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ e $\rho_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}_j \boldsymbol{e}_j$, em que $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in\Lambda} x_i \boldsymbol{e}_i$.*

Observação 3.2.2. *A projeção j-ésima é função da base. Sempre assumiremos uma base natural.*

Definição 3.2.3. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S.*

1. *Seja $\boldsymbol{\vartheta} = (\upsilon_i)_{i\in S}$, um vetor tal que $\upsilon_i \geq 0$, para todo $i \in S$ e $\sum_{i\in S} \upsilon_i = 1$. Chamamos $\boldsymbol{\vartheta}$ de distribuição de probabilidades sobre S.*

2. *Seja $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)} = (\upsilon_i^{(0)})_{i\in S}$, uma distribuição de probabilidades sobre S tal que $\upsilon_i^{(0)} = \mathbb{P}(X_0 = i)$, para todo $i \in S$. Chamamos $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}$ de distribuição inicial da cadeia de Markov.*

3. *Seja $\boldsymbol{\vartheta}^{(n)} = (\upsilon_i^{(n)})_{i\in S}$, uma distribuição de probabilidades sobre S tal que $\upsilon_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i)$, para todo $i \in S$. Chamamos $\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}$ de distribuição no n-ésimo passo, para $n \in \mathbb{N}$.*

Observação 3.2.4. *Convidamos o leitor a considerar a Definição B.1.2 do Apêndice, onde estão apresentadas as probabilidades de transição em n passos do estado i para o estado j.*

No Teorema 3.2.5, assumimos a hipótese de que a distribuição inicial é um vetor quase nulo, garantindo que ele pertença à álgebra de evolução. Com isso fazemos uma diferença com o enunciado do (TIAN, 2008, Lema 4).

Teorema 3.2.5. *Seja $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)} = (\upsilon_i^{(0)})_{i\in S}$ uma distribuição inicial e $\boldsymbol{\vartheta}^{(n)} = (\upsilon_i^{(n)})_{i\in S}$ a distribuição no n-ésimo passo, para $n \in \mathbb{N}$. Se $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}$ tem finitos $\upsilon_j^{(0)}$ diferentes de zero, então:*

$$\boldsymbol{\vartheta}^{(n)} = L^n(\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}) \quad \text{ou} \quad \upsilon_i^{(n)} = \left\|\rho_i\left(L^n(\boldsymbol{\vartheta}^{(0)})\right)\right\| \text{ para todo } i \in S \text{ e para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

em que $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)} = \sum_{j\in S} \upsilon_j^{(0)}\boldsymbol{e}_j$ e $\boldsymbol{\vartheta}^{(n)} = \sum_{j\in S} \upsilon_j^{(n)}\boldsymbol{e}_j$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notação 3.2.6. *Inicialmente, tanto $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}$ como $\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, são distribuições associadas à cadeia de Markov. No entanto, fazemos um abuso de notação ao denotar que: $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)} = \sum_{j\in S} \upsilon_j^{(0)}\boldsymbol{e}_j$ e $\boldsymbol{\vartheta}^{(n)} = \sum_{j\in S} \upsilon_j^{(n)}\boldsymbol{e}_j$, são elementos de $\mathcal{A}(X_n)$.*

Demonstração. Faremos a prova por indução matemática. Para $n = 1$, dado que $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}$ é um vetor quase zero, $\boldsymbol{\vartheta}^{(0)} = \sum_{j\in S} \upsilon_j^{(0)}\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}(X_n)$, temos que:

$$L(\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}) = \sum_{i\in S} \upsilon_i^{(0)} L(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i\in S} \upsilon_i^{(0)} \sum_{k\in S} p_{ik}\boldsymbol{e}_k = \sum_{k\in S}\sum_{i\in S} p_{ik}\upsilon_i^{(0)}\boldsymbol{e}_k. \tag{3.2}$$

Na primeira igualdade, isso ocorre porque o operador é linear, e na última igualdade, podemos trocar a ordem das somatórias pelo fato de que são somatórias finitas. Por outro lado, pelas propriedades da cadeia de Markov, temos que:

$$\upsilon_k^{(1)} = \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(X_1 = k \mid X_0 = i)\mathbb{P}(X_0 = i) = \sum_{i\in S} p_{ik}\upsilon_i^{(0)}. \tag{3.3}$$

Das Equações (3.2) e (3.3), obtemos que:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{(1)} = \sum_{k\in S} \upsilon_k^{(1)} \boldsymbol{e}_k = \sum_{k\in S}\sum_{i\in S} p_{ik}\upsilon_i^{(0)} \boldsymbol{e}_k = L(\boldsymbol{\vartheta}^{(0)}).$$

Suponhamos agora que vale para n, ou seja, $L^n(\boldsymbol{\vartheta}) = \boldsymbol{\vartheta}^{(n)}$, e mostraremos que vale para $n+1$.

$$\begin{aligned} L^{n+1}(\boldsymbol{\vartheta}) &= L(L^n(\boldsymbol{\vartheta})) = L(\boldsymbol{\vartheta}^{(n)}) = L(\sum_{i\in S} \upsilon_i^{(n)} \boldsymbol{e}_i) \\ &= \sum_{i\in S} \upsilon_i^{(n)} \sum_{k\in S} p_{ik}\boldsymbol{e}_k = \sum_{k\in S}\sum_{i\in S} p_{ik}\upsilon_i^{(n)} \boldsymbol{e}_k. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por outro lado, pelas propiedades da cadeia de Markov, temos que:

$$\boldsymbol{\vartheta}_k^{(n+1)} = \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i\in S} \mathbb{P}(X_{n+1} = k \mid X_n = i)\mathbb{P}(X_n = i) = \sum_{i\in S} p_{ik}\upsilon_i^{(n)}. \tag{3.5}$$

Das Equações (3.4) e (3.5) obtemos que:

$$\boldsymbol{\vartheta}^{(n+1)} = \sum_{k\in S} \upsilon_k^{(n+1)} \boldsymbol{e}_k = \sum_{k\in S}\sum_{i\in S} p_{ik}\upsilon_i^{(n)} \boldsymbol{e}_k = L^{n+1}(\boldsymbol{\vartheta}).$$

□

O desenvolvimento da demonstração do Teorema 3.2.5, desde o enfoque probabalístico, foi essencial para identificar o Corolário 3.2.7, um resultado observado por *Tian (2008)* após a Proposição 3.2.8 na (TIAN, 2008, pág. 57).

Corolário 3.2.7. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se $\upsilon_i = \mathbb{P}(X_0 = i) = 1$, então $\|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{e}_i)\right)\| = p_{ij}^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $j \in S$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.5, temos que $\upsilon_j^{(n)} = \|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{\vartheta})\right)\|$ e $\boldsymbol{\vartheta} = \sum_{j\in S} \upsilon_j \boldsymbol{e}_j = \upsilon_i \boldsymbol{e}_i$. Então,

$$\begin{aligned} \|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{e}_i)\right)\| = \boldsymbol{\upsilon}_j^{(n)} &= \mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{k\in S} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = k)\mathbb{P}(X_0 = k) \\ &= \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^n. \end{aligned}$$

□

3.2.1 EQUAÇÕES DE CHAPMAN-KOLMOGOROV

As equações de Chapman-Kolmogorov na Proposição B.1.3 são essenciais na teoria das cadeias de Markov, pois descrevem a evolução das probabilidades em sistemas estocásticos. Elas possibilitam o cálculo da probabilidade de que um processo de Markov esteja em um estado específico em um momento futuro, com base no estado atual. No contexto das álgebras de evolução, as equações de Chapman-Kolmogorov nos ajudam a estudar as propriedades do operador de evolução.

O enfoque probabilístico não apenas nos forneceu novas demonstrações para os enunciados anteriores, como também abrange o caso de dimensão enumerável. Tais resultados nos permitiram demonstrar a Proposição 3.2.8 a partir dessa abordagem, englobando o enunciado apresentado em (TIAN, 2008, pág. 56) e obtendo, assim, uma demonstração válida para álgebras de evolução markovianas de dimensão enumerável.

Proposição 3.2.8. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Então, para todo $i, k \in S$ e $l, m \in \mathbb{N}_0$, temos que:*

$$\left\|\rho_j L^{l+m}(\boldsymbol{e}_i)\right\| = \sum_{k\in S} \left\|\rho_k L^l(\boldsymbol{e}_i)\right\| \cdot \|\rho_j L^m(\boldsymbol{e}_k)\| . \tag{3.6}$$

Demonstração. Pelo Corolário 3.2.7, temos que:

$$\begin{aligned} \left\|\rho_j L^{l+m}(\boldsymbol{e}_i)\right\| &= p_{ij}^{l+m}, \\ \left\|\rho_k L^l(\boldsymbol{e}_i)\right\| &= p_{ik}^l, \\ \|\rho_j L^m(\boldsymbol{e}_k)\| &= p_{kj}^m. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema B.1.3, temos que:

$$\left\|\rho_j L^{l+m}(\boldsymbol{e}_i)\right\| = p_{ij}^{l+m} = \sum_{k\in S} p_{ik}^l p_{kj}^m = \sum_{k\in S} \left\|\rho_k L^l(\boldsymbol{e}_i)\right\| \cdot \|\rho_j L^m(\boldsymbol{e}_k)\| .$$

□

As equações de Chapman-Kolmogorov, no contexto das álgebras de evolução, nos dão uma prova para o fato de que: $L^{n+m} = L^n \circ L^m$, para qualquer $n, m \in \mathbb{N}$.
Alguns pontos a destacar nesta seção são os seguintes:

1. Nas demonstrações anteriores, utilizamos diversas ferramentas das cadeias de Markov, desde o Teorema da Probabilidade Total até as equações de Chapman-Kolmogorov nas cadeias de Markov.

2. Um ponto interessante sobre os resultados obtidos é que a demonstração vale para cadeias de Markov com espaço de estados enumeráveis, mesmo reconhecendo que, em muitas áreas da matemática, a prova pode variar conforme a dimensão.

3.3 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO MARKOVIANAS

Nesta seção, destacamos uma das primeiras semelhanças entre as cadeias de Markov e as álgebras de evolução markovianas: se dois estados pertencem à mesma classe de comunicação na cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, os elementos correspondentes geram a mesma subálgebra de evolução na álgebra de evolução markoviana $\mathcal{A}(X_n)$ correspondente. Dado que as álgebras de evolução markovianas são álgebras não negativas e não degeneradas, poderemos usar, sem problema, os teoremas e corolários que exigem essas condições no Capítulo 2.

Observação 3.3.1. *Convidamos o leitor a considerar as definições apresentadas na Seção B.1.1 do Apêndice, onde estão as definições correspondentes a classes ou subconjuntos fechados no contexto das cadeias de Markov.*

Lema 3.3.2. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Dois estados i e j estão na mesma classe na cadeia de Markov se, e somente se, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha que i e j estão na mesma classe na cadeia de Markov. Portanto, existem $n, m \in \mathbb{N}$, tal que $p_{ij}^n \neq 0$ e $p_{ji}^m \neq 0$. Agora, pelo Corolário 3.2.7, temos que:

$$\|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{e}_i)\right)\| = p_{ij}^n, \text{ para algun } n \in \mathbb{N}$$
$$\|\rho_i(L^m(\boldsymbol{e}_j))\| = p_{ji}^m, \text{ para algun } m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[n]}$ e $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[m]}$, quer dizer, $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados. Logo, pelo Teorema 2.2.48, temos que $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle$.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle$. Então, pelo Teorema 2.2.48, $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados, daí, existem $n, m \in \mathbb{N}$, tal que $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[n]}$ e $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[m]}$. Portanto, pelo Corolário 3.2.7, temos que:

$$\|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{e}_i)\right)\| = p_{ij}^n \neq 0, \text{ para algun } n \in \mathbb{N}$$
$$\|\rho_i(L^m(\boldsymbol{e}_j))\| = p_{ji}^m \neq 0, \text{ para algun } m \in \mathbb{N}.$$

Quer dizer, i e j se comunicam dentro da cadeia de Markov, ou seja, i e j estão na mesma classe na cadeia de Markov. $\square$

Teorema 3.3.3. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Seja $S_0 \subsetneq S$. S_0 é uma classe fechada na cadeia de Markov se, e somente se, $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é uma subálgebra de evolução simples.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $S_0 \subsetneq S$ é uma classe fechada. Queremos mostrar que $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é subálgebra de evolução e é simples.

1. Para mostrar que é subálgebra de evolução, basta mostrar que, se $\boldsymbol{e}_k \in span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$, então $\boldsymbol{e}_k^2 \in span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$, como foi mencionado na Observação 2.2.35.

   Como S_0 é um subconjunto fechado, para todo $k \in S_0$, se $j \notin S_0$ temos que $p_{kj} = 0$. Portanto, os quadrados em $\mathcal{A}(X_n)$, para cada $k \in S_0$, são da forma:

$\boldsymbol{e}_k^2 = \sum_{j\in S} p_{kj}\boldsymbol{e}_j$, quer dizer, $\boldsymbol{e}_k^2 \in span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$. Assim, $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é subálgebra de evolução.

2. Dado que S_0 é uma classe, então pelo Corolario 3.3.2, temos que, para qualquer $k, j \in S_0$, $\langle \boldsymbol{e}_k \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle$, quer dizer, $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é uma subálgebra de evolução simples.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é uma subálgebra de evolução simples. Queremos mostrar que S_0 é uma classe e é fechada.

1. Então, para qualquer $i, j \in S_0$, temos que $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = \langle \boldsymbol{e}_j \rangle = span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$. Daí, pelo Corolário 3.3.2, i e j estão na mesma classe na cadeia de Markov, portanto, S_0 é uma classe.

2. Dado que $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é subálgebra de evolução, temos que: se $\boldsymbol{e}_j \notin span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ e $\boldsymbol{e}_i \in span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$, então $\boldsymbol{e}_j \not\prec \boldsymbol{e}_i^{[n]}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Teorema 2.2.48, temos que $\|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{e}_i)\right)\| = p_{ij}^n = 0$, quer dizer, j não é acessível a partir de i. Logo, S_0 é uma classe fechada.

□

Assumindo que S_0 é um subconjunto fechado, como é descrito na Definição B.1.6, concluiremos que $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é uma subálgebra de evolução, embora não necessariamente simples. Portanto, sob essas condições, o (TIAN, 2008, Teorema 17) se torna um Corolário do Teorema 3.3.3.

Corolário 3.3.4. *(TIAN, 2008, Teorema 17) Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Seja $S_0 \subsetneq S$. S_0 é um subconjunto fechado na cadeia de Markov se, e somente se, $span\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$ é uma subálgebra de evolução.*

O Exemplo 3.3.5 ilustrao Teorema 3.3.3 e o Corolário 3.3.4.

Exemplo 3.3.5. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* $S = \{1,2,3,4\}$ *e probabilidades de transição dadas por:*

$$p_{11} = \tfrac{1}{5}, \quad p_{12} = \tfrac{4}{5}, \quad p_{13} = 0, \quad p_{14} = 0,$$
$$p_{21} = \tfrac{2}{5}, \quad p_{22} = \tfrac{3}{5}, \quad p_{23} = 0, \quad p_{24} = 0,$$
$$p_{31} = \tfrac{1}{2}, \quad p_{32} = \tfrac{1}{2}, \quad p_{32} = 0, \quad p_{34} = 0,$$
$$p_{41} = 0, \quad p_{42} = 0, \quad p_{43} = 0, \quad p_{44} = 1.$$

Seu digrafo está apresentado na Figura 7.

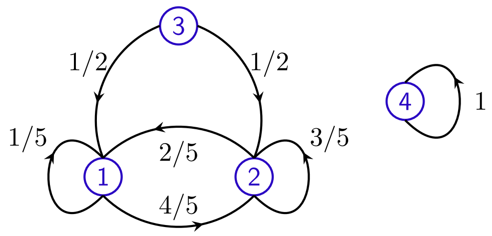

Figura 7 – Digrafo de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ do Exemplo 3.3.5.

$\mathcal{A}(X_n)$ *tem como base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ *e produtos dados por:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1^2 &= \frac{1}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{4}{5}\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{e}_2^2 &= \frac{2}{5}\boldsymbol{e}_1 + \frac{3}{5}\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{e}_3^2 &= \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2,\\
\boldsymbol{e}_4^2 &= \boldsymbol{e}_4.
\end{aligned}$$

Na cadeia de Markov temos 3 *classes de comunicação:* $C(1) = C(2)$, $C(3)$ *e* $C(4)$, *em que* $C(1), C(2)$ *e* $C(4)$ *são classes fechadas.*

Na álgebra de evolução temos que $\langle \boldsymbol{e}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{e}_2 \rangle = span\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ *e* $\langle \boldsymbol{e}_3 \rangle = span\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, *pelo Teorema 2.2.36 e Teorema 2.2.48.*

Se escolhermos $S_0 = \{1, 2, 3\}$, que é um subconjunto fechado, mas que não é uma classe, temos que $span\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ é uma subálgebra de evolução que não é simples. E, se escolhermos $S_0 = \{1, 2\}$, que é uma classe fechada, temos que $span\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ é uma subálgebra de evolução simples.

Proposição 3.3.6. *(TIAN, 2008, Corolário 11) Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Seja $S_0 \subsetneq S$. Se S_0 é um subconjunto fechado, então $\rho_j L^n(\boldsymbol{e}_i) = 0$, para $\boldsymbol{e}_i \in S_0$ e $\boldsymbol{e}_j \notin S_0$.*

Demonstração. Sendo S_0 um subconjunto fechado, para todo $i \in S_0$ e $j \notin S_0$, temos que $p_{ij}^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, pelo Corolário 3.2.7, temos que $\|\rho_j\, L^n(\boldsymbol{e}_i)\| = p_{ij}^n = 0$, isto é, $\rho_j\, L^n(\boldsymbol{e}_i) = \mathbf{0}$, para todo $\boldsymbol{e}_i \in S_0$ e $\boldsymbol{e}_j \notin S_0$. $\square$

Definição 3.3.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Dizemos que um elemento $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$, é idempotente se $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}$.*

Corolário 3.3.8. *(TIAN, 2008, Corolário 12) Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Então, $k \in S$ é um estado absorvente na cadeia de Markov se, e somente se, $\boldsymbol{e}_k$ é um elemento idempotente na álgebra de evolução.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que k é um estado absorvente na cadeia de Markov, então $p_{kk} = 1$. Logo, em $\mathcal{A}(X_n)$ o quadrado para $\boldsymbol{e}_k$ é dado por $\boldsymbol{e}_k^2 = \boldsymbol{e}_k$, ou seja, $\boldsymbol{e}_k$ é um elemento idempotente.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{e}_k$ é idempotente em $\mathcal{A}(X_n)$, quer dizer, $\boldsymbol{e}_k^2 = \boldsymbol{e}_k$. Portanto, pelo Teorema 3.2.7, temos que $\|\rho_k\,(L(\boldsymbol{e}_k))\| = p_{kk} = 1$, quer dizer, k é um estado absorvente. $\square$

Observação 3.3.9. *Se $\boldsymbol{e}_k^2 = \boldsymbol{e}_k$, temos que $\langle \boldsymbol{e}_k \rangle = span\{\boldsymbol{e}_k\}$ é uma subálgebra de evolução simples de dimensão 1.*

O Teorema 3.3.10 nos demonstra que os conceitos de simples na álgebra de evolução e irredutível na cadeia de Markov, são equivalentes.

Teorema 3.3.10. *(TIAN, 2008, Teorema 18) Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é irredutível se, e somente se, $\mathcal{A}(X_n)$ é simples.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\mathcal{A}(X_n)$ não é simples. Portanto, existe uma subálgebra de evolução $\mathcal{A}_1$ própia com base natural $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S_0\}$, em que $S_0 \subsetneq S$. Como $\mathcal{A}_1$ é própia, existe pelo menos um elemento $\boldsymbol{e}_j \notin \mathcal{A}_1$, tal que, para todo $\boldsymbol{e}_k \in \mathcal{A}_1$ cumpre-se que $\boldsymbol{e}_j \not\prec \boldsymbol{e}_k^{[n]}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $\rho_j\, L^n(\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{0}$, uma vez que $\mathcal{A}_1$ é subálgebra de evolução. Consequentemente, pelo Corolário 3.2.7, temos que $\|\rho_j\, L^n(\boldsymbol{e}_k)\| = p_{kj}^n = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso significa, na cadeia de Markov, que o estado j não pode ser acessivél a partir de i, portanto, a cadeia de Markov é redutível.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\mathcal{A}(X_n)$ é simples. Portanto, todos os elementos $\boldsymbol{e}_i \in \mathcal{B}$ geram a álgebra de evolução $\mathcal{A}(X_n)$. Logo, pelo Lema 3.3.2, todos os estados $i \in S$ pertencem a mesma classe na cadeia de Markov, quer dizer, a cadeia de Markov é irredutível. □

Lembrando a definição de álgebra de evolução bárica apresentada na Definição 2.2.53. Na Proposição 3.3.11 e no Corolário 3.3.12 apresentamos uma geralização desses resultados encontrados em (PANIELLO, 2022, Proposição 2.6, Corolário 2.7). Os seguintes resultados não dependem da dimensão da cadeia de Markov e as provas fazem uso das propriedades da cadeia de Markov.

Proposição 3.3.11. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se $\mathcal{A}(X_n)$ é bárica, então $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é redutível.*

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{A}(X_n)$ é bárica. Portanto, pelo Teorema 2.2.54, existe um $k \in S$, tal que $p_{kk} \neq 0$ e $p_{jk} = 0$, para todo $j \neq k$. Basta mostrar que, para todo $j \neq k \in \Lambda$ e $n \in \mathbb{N}$, cumpre-se que $p_{jk}^n = 0$.

Faremos a prova por indução matemática. Para $n = 1$, temos pelo Teorema 2.2.54 que $p_{jk} = 0$ para todo $j \neq k$. Suponhamos que vale para n e mostremos que se cumpre $n+1$. Pelo Teorema B.1.3, temos que

$$p_{jk}^{n+1} = \sum_{i \in \Lambda} p_{ji}^{n} p_{ik} = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ i \neq k}} p_{ji}^{n} p_{ik} + p_{jk}^{n} p_{kk}.$$

Pela hipotese de indução, temos que $p_{jk}^{n} = 0$ e no caso base $p_{jk} = 0$ para todo $j \neq k \in \lambda$, logo $p_{jk}^{n+1} = 0$. Isso significa, na cadeia de Markov, que o estado k não pode ser acessivél a partir de nenhum j. Portanto, a cadeia de Markov é redutível. □

Corolário 3.3.12. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se $\Gamma^{\omega}(\mathcal{A}(X_n), \mathcal{B})$ é fortemente conexo, então $\mathcal{A}(X_n)$ não é bárica.*

Demonstração. Como o digrafo ponderado é fortemente conexo, pela Definição 2.3.5, dado qualquer $k \in S$ existe pelo menos um $j \in S$ tal que j é vizinho de k. Isso significa em $\mathcal{A}(X_n)$ que $p_{kj} \neq 0$ para todo $k \in S$. Assim, não existe $k \in \Lambda$, tal que $p_{kk} \neq 0$ e $p_{ik} = 0$ para todo $i \neq k$. Logo, pelo Teorema 2.2.54, $\mathcal{A}$ não é bárica. □

3.3.1 OPERADOR DESTINO

Definição 3.3.13. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Definimos a eliminação j-ésima pela aplicação, $\rho_j^0 : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, tal que $\rho_j^0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \rho_j(\boldsymbol{x})$, sempre que $\boldsymbol{x} = \sum_{i \in \Lambda} x_i \boldsymbol{e}_i$.*

Observação 3.3.14. *A eliminação j-ésima é função da base. Sempre assumiremos uma base natural.*

Definição 3.3.15. *(TIAN, 2008, Definição 9) Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Definimos a primeira visita ao elemento $\boldsymbol{e}_j$ no n-ésimo passo da seguinte forma:*

- $V_j^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \rho_j L(\boldsymbol{x})$, *a primeira visita ao elemento $\boldsymbol{e}_j$ pela primeira vez no primeiro passo.*

- $V_j^{(2)}(\boldsymbol{x}) = V^{(1)}\rho_j^0 L(\boldsymbol{x}) = \rho_j L\,(\rho_j^0 L)(\boldsymbol{x})$, *a primeira visita ao elemento $\boldsymbol{e}_j$ pela primeira vez no segundo passo.*

  $\vdots$

- $V_j^{(n)}(\boldsymbol{x}) = V^{(n-1)}\rho_j^0 L(\boldsymbol{x}) = \rho_j L\,(\rho_j^0 L)^{(n-1)}(\boldsymbol{x})$, *a primeira visita ao elemento $\boldsymbol{e}_j$ pela primeira vez no n-ésimo passo.*

Definição 3.3.16. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Definimos o operador destino ao elemento $\boldsymbol{e}_j$ da seguinte forma:*

$$D_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} V_j^{(n)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_j L\,(\rho_j^0 L)^{(n-1)}(\boldsymbol{x}).$$

Observação 3.3.17. *As definições anteriores são válidas em qualquer álgebra de evolução com uma base natural dada. Quando consideramos $\mathcal{A}(X_n)$ ela satisfaz a seguinte igualdade:*

$$V_j^{(n)}(\boldsymbol{e}_i) = \rho_j L(\rho_j^{\circ} L)^{n-1}(\boldsymbol{e}_i) = f_{ij}^n \boldsymbol{e}_j,$$

em que, como se indica na Definição B.1.7, f_{ij} denota a probabilidade de que, começando em i, a primeira chegada ao estado j seja no n-esimo passo. Além disso, observamos que:

$$||\; V_j^{(n)}(\boldsymbol{e}_i) \;||= f_{ij}^n.$$

Ou seja, a norma da primeira visita ao elemento $\boldsymbol{e}_j$ pela primeira vez no n-ésimo passo aplicada no elemento $\boldsymbol{e}_i$, coincide com a probabilidade de que, começando em i, a primeira chegada ao estado j seja no n-esimo passo na cadeia de Markov.

Observação 3.3.18. *Chamamos a atenção para o fato de que o Teorema 3.3.19 e o Teorema 3.3.20 são baseados em (TIAN, 2008, Lema 6, Corolário 13), fazendo, no entanto, a ressalva de que tais resultados são diferentes tanto em seus enunciados quanto em suas demonstrações.*

Teorema 3.3.19. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. A seguinte igualdade é sempre válida $D_j(\boldsymbol{e}_i) = f_{ij}\boldsymbol{e}_j$ para todo $i, j \in S$.*

Demonstração. Dado que $\mathcal{A}(X_n)$ é uma álgebra de evolução markoviana, pela Observação 3.3.17, temos que $V_j^{(n)}(\boldsymbol{e}_i) = f_{ij}^n \boldsymbol{e}_j$. Além disso, pela Definição B.1.8, temos que:

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^n.$$

Agora, queremos mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{m=1}^{n} V_j^{(m)}(\boldsymbol{e}_i) - f_{ij}\boldsymbol{e}_j \right\| = 0.$$

Logo, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{m=1}^{n} V_j^{(m)}(\boldsymbol{e}_i) - f_{ij}\boldsymbol{e}_j \right\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^n \boldsymbol{e}_j - f_{ij}\boldsymbol{e}_j \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(\sum_{m=1}^{n} f_{ij}^n - f_{ij} \right) \boldsymbol{e}_j \right\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \mid \sum_{m=1}^{n} f_{ij}^n - f_{ij} \mid \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.20. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. O operador de destino D_j é convergente, para qualquer $j \in S$.*

Demonstração. Seja $\boldsymbol{x} = \sum_{i\in S} x_i \boldsymbol{e}_i \in \mathcal{A}(X_n)$. O operador D_j é linear, uma vez que ρ_j, ρ_j° e L são operadores lineares. Portanto, temos que:

$$D_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{i\in S} x_i D_j(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i\in S} x_i f_{ij} \boldsymbol{e}_j = \left(\sum_{i\in S} x_i f_{ij} \right) \boldsymbol{e}_j \in \mathcal{A}(X_n).$$

□

No Exemplo 3.3.21, apresentamos um $\mathcal{A}(X_n)$ e computamos algumas das quantidades definidas nesta seção.

Exemplo 3.3.21. *Consideremos o passeio aleatório em* $\mathbb{Z}$ *do Exemplo 3.1.7 com* $p = 2/3$. *Sua álgebra de evolução* $\mathcal{A}(S_n)$ *tem como base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ *e produtos dados por:*

$$\boldsymbol{e}_i^2 = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_{i-1} + \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_{i+1}, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Seu digrafo ponderado é apresantado na Figura 8.

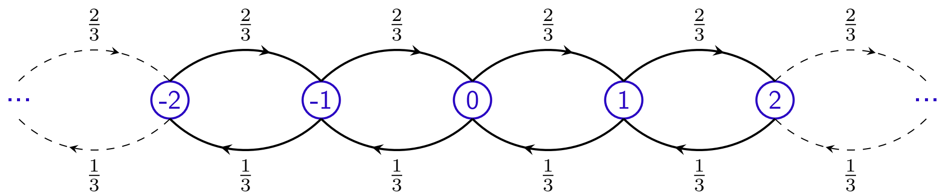

Figura 8 – Digrafo do passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ com $p = \frac{2}{3}$, do Exemplo 3.3.21.

Calcularemos $V_0(\boldsymbol{e}_0)^{(n)}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *partindo de* $\boldsymbol{e}_0$. *Portanto:*

$$V_0^{(1)}(\boldsymbol{e}_0) = \rho_0\, L(\boldsymbol{e}_0) = \rho_0 \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_{-1} + \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1\right) = 0,$$
$$V_0^{(2)}(\boldsymbol{e}_0) = \rho_0 L\left(\rho_0^0 L(\boldsymbol{e}_0)\right) = \rho_0 L\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{e}_{-1} + \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_1\right) = \rho_0\left(\frac{1}{9}\boldsymbol{e}_{-2} + \frac{2}{9}\boldsymbol{e}_0 + \frac{2}{9}\boldsymbol{e}_0 + \frac{4}{9}\boldsymbol{e}_2\right)$$
$$= 2\left(\frac{2}{9}\right)\boldsymbol{e}_0.$$

Observamos que:

$$V_0^{(2m-1)}(\boldsymbol{e}_0) = 0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N},$$
$$V_0^{(2m)}(\boldsymbol{e}_0) = 2\left(\frac{2}{9}\right)^m \boldsymbol{e}_0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim, obtemos que:

$$D_0(\boldsymbol{e}_0) = \sum_{m=1}^{\infty} V_0^{(m)}(\boldsymbol{e}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{9}\right)^n \boldsymbol{e}_0 = \frac{4}{7}\boldsymbol{e}_0.$$

Proposição 3.3.22. *(TIAN, 2008, Lema 7) Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Para todo $n, k \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq k < n$ e para todo $i, j \in S$, cumpre-se que:*

$$\rho_j L^n(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \rho_j L^{n-k}(\rho_j L(\rho_j^{\circ} L)^{k-1}(\boldsymbol{x})).$$

Demonstração. Mostraremos que a igualdade é válida para os elementos da base natural, logo, estende-se para qualquer elemento pela linealidade do produto na álgebra de evolução. Seja $\boldsymbol{e}_i \in \mathcal{B}$, então, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \rho_j L^{n-k} \left(\rho_j L(\rho_j^0 L)^{k-1}(\boldsymbol{e}_i)\right) = \sum_{k=1}^{n} \rho_j L^{n-k} \left(f_{ij}^k \, \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k \, \rho_j L^{n-k} \left(\boldsymbol{e}_j\right)$$

A primeira igualdade é válida, pela Observação 3.3.17 e, a segunda igualdade, pela linearidade do operador $\rho_j L^{n-k}$. Assim, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k \, \rho_j L^{n-k} \left(\boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k \, p_{jj}^{n-k} \boldsymbol{e}_j = p_{ij}^n \, \boldsymbol{e}_j = \rho_j L^n(\boldsymbol{e}_i).$$

A primeira igualdade é valida, pelo Corolário 3.2.7, em que $\rho_j L^{n-k} \left(\boldsymbol{e}_j\right) = p_{jj}^{n-k} \boldsymbol{e}_j$. A segunda igualdade, pela Proposição B.1.10, temos que $\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^k \, p_{jj}^{n-k} = p_{ij}^n$. Logo, pela linearidade, temos o resultado demostrado. □

Definição 3.3.23. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Definimos o operador "número de vezes ao elemento $\boldsymbol{e}_j$" da seguinte forma:*

$$Q_j(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_j L^n(\boldsymbol{x}).$$

Corolário 3.3.24. *(TIAN, 2008, Teorema 19) Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Para todo $\boldsymbol{e}_j$ pertencente a sua base $\mathcal{B}$,*

$$\|Q_j(\boldsymbol{e}_j)\| = \frac{1}{1 - \|D_j(\boldsymbol{e}_j)\|}.$$

Demonstração. Do Teorema B.1.11 e do Corolário 3.2.7, temos que:

$$\|Q_j(\boldsymbol{e}_j)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \rho_j L^n(\boldsymbol{e}_j) \right\| = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^n = \frac{1}{1 - f_{jj}} = \frac{1}{1 - \|D_j(\boldsymbol{e}_j)\|}.$$

□

Vale ressaltar que os resultados apresentados nesta seção foram provados com ferramentas probabilísticas, diferenciando das provas apresentadas em (TIAN, 2008). E destacamos que tais provas não dependem da dimensão.

3.4 RECORRÊNCIA ALGÉBRICA E RECORRÊNCIA PROBABILÍSTICA

Na Definição 2.2.46, estabeleceu-se que, se $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ é uma subálgebra simples, então $\boldsymbol{e}_i$ é denominado algebricamente recorrente; caso contrário, é denominado algebricamente transiente. Intuitivamente, podemos interpretar ambos casos da seguinte forma:

- Quando dizemos que a subálgebra de evolução gerada por um elemento não é simples, isso significa que o elemento é algebricamente transiente. Intuitivamente, isso implica que existem elementos $\boldsymbol{e}_j \in \mathcal{B}$ na subálgebra de evolução que, podem deixar de estar presentes a partir da n-ésima interação do operador evolução sobre $\boldsymbol{e}_j$, para algum $n \in \mathbb{N}$. De uma perspectiva biológica, isso pode ser interpretado como um subconjunto de alelos que não persistem indefinidamente e, eventualmente, deixam de aparecer ou desaparecem do sistema, com o passar do tempo.

- Caso contrário, quando a subálgebra de evolução gerada por um elemento é simples, significa que, para todos os elementos que compõem essa subálgebra, independentemente das interações do operador evolução realizadas em eles, continuarão presentes em algum momento e não desaparecerão. De uma perspectiva biológica, isso pode ser interpretado como um subconjunto de alelos que permanecerão recorrentes ao longo do tempo.

No paralelo com as cadeias de Markov, na Definição B.1.9, estabelecemos que um estado i é recorrente se $f_{ii} = 1$. Caso contrário, se $f_{ii} < 1$, é denominado transiente.

- i é um estado transiente se, ao iniciar em i, a probabilidade de retornar ao estado i em algum momento for estritamente menor que 1. Isso significa que, existe uma probabilidade positiva de não retornar jamais ao estado i. Embora seja possível que i seja visitado algumas vezes após o início, não há garantia de que seja visitado infinitas vezes.
- Caso contrário, i é um estado recorrente se, ao iniciar em i, a probabilidade de retornar ao estado i em algum momento for igual a 1. Embora o retorno possa demorar, ele está garantido. Além disso, como se trata de uma cadeia de Markov, a propriedade markoviana nos assegura que o estado será visitado infinitas vezes ao longo do tempo.

A seguir, estudaremos em que situações essas duas definições têm implicações mútuas, quando uma implica a outra, e qual papel desempenha a dimensão nesse estudo.

3.4.1 PERDA DOS COEFICIENTES (TRANSIÊNCIA)

Dada $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in S\}$ e dados $\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \in \mathcal{B}$, lembramos da Definição 2.2.27 que, $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{e}_j$, se $\boldsymbol{e}_i \prec \boldsymbol{e}_j^{[n]}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.4.1. *Chamamos a atenção para o fato de que, do Lema 3.4.2 até o Teorema 3.4.9, tais resultados são baseados nos Teoremas e Proposições encontrados na (TIAN, 2008, Seção 4.1.4) até a (TIAN, 2008, Seção 4.2.3). No entanto, tais resultados são diferentes tanto em seus enunciados quanto em suas demonstrações.*

Lema 3.4.2. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Temos que o elemento $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente em $\mathcal{A}(X_n)$ se, e somente se, existe algum $\boldsymbol{e}_k$ o qual ocorre em $\boldsymbol{e}_i$, tal que $\boldsymbol{e}_i$ não ocorre em $\boldsymbol{e}_k$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente. Pelo Teorema 2.2.36, temos que $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(i)\}$. Como $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ é uma subálgebra de

evolução não simples, existe uma subálgebra de evoluçãoprópia $\mathcal{A}_1$ com base natural $\mathcal{B}_1 = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in S_1\}$, tal que $S_1 \subsetneq D(i) \subseteq S$.
Então, existe um elemento $\boldsymbol{e}_k$ pertenecente a $\mathcal{B}_1$, satisfazendo que: $span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(k)\} = \langle \boldsymbol{e}_k \rangle \subseteq \mathcal{A}_1 \subsetneq \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$, ou seja, $D(k) \subsetneq D(i)$. Portanto, $\boldsymbol{e}_k$ ocorre em $\boldsymbol{e}_i$, mas $\boldsymbol{e}_i$ não ocorre em $\boldsymbol{e}_k$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que existe algum $\boldsymbol{e}_k$ o qual ocorre em $\boldsymbol{e}_i$, tal que $\boldsymbol{e}_i$ não ocorre em $\boldsymbol{e}_k$. Portanto, pela Definição 2.2.30, temos que $D(k) \subsetneq D(i)$. Assim, pelo Teorema 2.2.37, $\langle \boldsymbol{e}_k \rangle \subsetneq \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$, quer dizer, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ é uma subálgebra que não e simples. Portanto, $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente. $\square$

Teorema 3.4.3. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se o elemento $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente em $\mathcal{A}(X_n)$, então o estado i é transiente em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Demonstração. Dado que $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente, pelo Lema 3.4.2, existe algum $\boldsymbol{e}_k$ o qual ocorre em $\boldsymbol{e}_i$, tal que $\boldsymbol{e}_i$ não ocorre em $\boldsymbol{e}_k$. Portanto, como $\boldsymbol{e}_j$ ocorre em $\boldsymbol{e}_i$, existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\boldsymbol{e}_j \prec \boldsymbol{e}_i^{[n]}$ e, como $\boldsymbol{e}_i$ não ocorre em $\boldsymbol{e}_j$, temos que $\boldsymbol{e}_i \nprec \boldsymbol{e}_j^{[m]}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 3.2.7, significa que:

$$\|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{e}_i)\right)\| = p_{ij}^n \neq 0, \text{ para algun } n \in \mathbb{N},$$
$$\|\rho_i(L^m(\boldsymbol{e}_j))\| = p_{ji}^m = 0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Portanto, na cadeia de Markov, obtemos que o estado j é acessível desde o estado i, mas o estado i não é acessível desde j. Então, i é um estado transiente na cadeia de Markov. $\square$

Teorema 3.4.4. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ finita com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se o estado i é transiente em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, então $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente em $\mathcal{A}(X_n)$.*

Demonstração. Suponhamos que $D_i(\boldsymbol{e}_i) = f_{ii}\boldsymbol{e}_i$, com $f_{ii} < 1$. Como $f_{ii} < 1$, na cadeia de Markov, pela Definição B.1.8, temos que i é um estado transiente. No entanto, dado que a cadeia de Markov é finita, uma das consequências de um estado i ser transiente, na cadeia de Markov, é que existe pelo menos um estado j, tal que, j é acessível desde o estado i, mas o estado i não é acessível desde j, ou seja, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ij}^n \neq 0$ e $p_{ji}^m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Pelo Corolário 3.2.7, isso significa que:

$$\begin{aligned} \|\rho_j\left(L^n(\boldsymbol{e}_i)\right)\| &= p_{ij}^n \neq 0, \text{ para algun } n \in \mathbb{N}, \\ \|\rho_i(L^m(\boldsymbol{e}_j))\| &= p_{ji}^m = 0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Quer dizer, $\boldsymbol{e}_j$ ocorre em $\boldsymbol{e}_i$, mas $\boldsymbol{e}_i$ não ocorre em $\boldsymbol{e}_j$. Logo, pelo Lema 3.4.2, $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente em $\mathcal{A}(X_n)$. □

Observação 3.4.5. *Na demonstração do Teorema 3.4.3 fazemos uso do seguinte fato: se existe um estado j acessível a partir do estado i, mas o estado i não é acessível a partir do estado j, então i é um estado transiente. Esse é um resultado proveniente das cadeias de Markov enumeráveis. No entanto, o contrário não se cumpre; ou seja, se o estado i é transiente, não necessariamente existe um estado j que seja acessível a partir do estado i, mas que i não seja acessível a partir do estado j.*
De fato, no Exemplo 3.4.6 encontramos essa situação.

Exemplo 3.4.6. *Consideremos o passeio aleatório em $\mathbb{Z}$ com $p = 2/3$ e probabilidades de transição dadas por:*

$$p_{ij} := \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{se } j = i+1 \\ \frac{1}{3}, & \text{se } j = i-1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Na cadeia de Markov, destacamos que ela é irredutível, se $0 < p < 1$, pela Definição B.1.12. Ou seja, para quaisquer estados i e j existem $n, m \in \mathbb{N}$, tais que $p_{ij}^n \neq 0$ e $p_{ji}^m \neq 0$. No entanto, como calculamos no Exemplo 3.3.21, para o estado 0 obtemos que

$\|D_0(\boldsymbol{e}_0)\| = 4/7$. Ou seja, $f_{00} = \frac{4}{7} < 1$. Portanto, o estado 0 é um estado transiente na cadeia de Markov. Nesse caso particular, todos os estados são transientes e vale que $\|D_i(\boldsymbol{e}_i)\| = 4/7$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.
Além disso, sua álgebra de evolução $\mathcal{A}(S_n)$ tem como base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ e produtos dados por:

$$\boldsymbol{e}_i^2 = \frac{1}{3}\boldsymbol{e}_{i-1} + \frac{2}{3}\boldsymbol{e}_{i+1}, \text{ para todo } i \in \mathbb{Z}.$$

Observamos que, para qualquer $i \in \mathbb{Z}$, temos que $D(i) = \mathbb{Z}$. Portanto, pelo Teorema 2.2.36, temos que $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \mathbb{Z}\} = \mathcal{A}(S_n)$. Ou seja, a álgebra de evolução $\mathcal{A}(S_n)$ é uma álgebra de evolução simples, e, consequentemente, todos os elementos da álgebra são algebricamente recorrentes.

Lembremos que os conceitos de recorrência e transitoriedade em uma cadeia de Markov, embora estejam relacionados com a irredutibilidade da cadeia, não são conceitos equivalentes em dimensão infinita.

Nesta seção, destacamos a conexão entre o conceito de transiência nas cadeias de Markov e nas álgebras de evolução markovianas.

1. Do Teorema 3.4.3, concluímos que, se o elemento $\boldsymbol{e}_i$ em $\mathcal{A}(X_n)$ é algebricamente transiente, então o estado i em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é transiente. Ou seja, a transitoriedade algébrica implica transitoriedade probabilística, para S enumerável.

2. Do Teorema 3.4.4, obtemos que, se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é finita e o estado i em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é transiente, então $\boldsymbol{e}_i$ em $\mathcal{A}(X_n)$ é um elemento algebricamente transiente. Ou seja, no caso de dimensão finita, a transitoriedade probabilística implica transitoriedade algébrica.

3. O Exemplo 3.4.6 ilustra como, no caso de dimensão infinita, a transitoriedade probabilística não implica transitoriedade algébrica.

3.4.2 CONSERVAÇÃO DOS COEFICIENTES (RECORRÊNCIA)

Lema 3.4.7. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Temos que, $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente, se e somente se, para todos os elementos $\boldsymbol{e}_j$, os quais $\boldsymbol{e}_j$ ocorre em $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{e}_j$.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos que $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente. Pelo Teorema 2.2.36, temos que $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(i)\}$. Como $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ é uma subálgebra de evolução simples, todos os $\boldsymbol{e}_k \in span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(i)\}$ geram a mesma subálgebra de evolução, ou seja, $\langle \boldsymbol{e}_k \rangle = \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$. Portanto, pelo Teorema 2.2.48 $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados, quer dizer, $\boldsymbol{e}_j$ que ocorrem em $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{e}_j$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que para todos os elementos $\boldsymbol{e}_j$, os quais ocorrem em $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{e}_j$. Portanto, pelo Teorema 2.2.36, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = span\{\boldsymbol{e}_j \mid j \in D(i)\}$. Como, para todo $\boldsymbol{e}_j$ que ocorrem em $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i$ ocorre em $\boldsymbol{e}_j$, isso significa que, $\boldsymbol{e}_i$ e $\boldsymbol{e}_j$ estão intercomunicados. Logo, pelo Teorema 2.2.48, temos que $\langle \boldsymbol{e}_j \rangle = \langle \boldsymbol{e}_i \rangle$, ou seja, $\langle \boldsymbol{e}_i \rangle$ é uma subálgebra simples e, portanto, $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente. $\square$

Teorema 3.4.8. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se o estado i é recorrente em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, então o elemento $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente em $\mathcal{A}(X_n)$.*

Demonstração. Suponhamos que o elemento $\boldsymbol{e}_i$ não é algebricamente recorrente. Então, como $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente em $\mathcal{A}(X_n)$, pelo Teorema 3.4.3, obtemos que o estado i é transiente na cadeia de Markov, o que é uma contradição. Logo, $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente. $\square$

Teorema 3.4.9. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ finita com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se o elemento $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente em $\mathcal{A}(X_n)$, então o estado i é recorrente em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Demonstração. Suponhamos que o estado i não é recorrente. Então, como i é transiente em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, pelo Teorema 3.4.4, obtemos que o elemento $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente, o que é uma contradição. Logo, o estado i é recorrente em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. $\square$

Complementando a seção anterior, destacamos a conexão entre o conceito de recorrência nas cadeias de Markov e nas álgebras de evolução markovianas.

1. Do Teorema 3.4.8, concluímos que, se um estado i em $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é recorrente probabilisticamente, então o elemento $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente transiente em $\mathcal{A}(X_n)$. Ou seja, a recorrência probabilística implica em recorrência algébrica, para S enumerável.

2. Do Teorema 3.4.9, obtemos que, se a cadeia de Markov é finita e o elemento $\boldsymbol{e}_i$ é algebricamente recorrente, então i, na cadeia de Markov, é recorrente. Ou seja, no caso de dimensão finita, a recorrência algébrica implica recorrência probabilística.

3. O Exemplo 3.4.6 ilustra como, no caso de dimensão infinita, a recorrência algébrica não implica em recorrência probabilística.

4 DERIVAÇÕES EM ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO MARKOVIANAS

No capítulo 2, estudamos as propriedades fundamentais das álgebras de evolução com dimensão enumerável. Destacamos uma conexão relevante dessa álgebra com a teoria dos grafos. Por exemplo, na Proposição 2.3.6, observamos que uma álgebra de evolução é indecomponível se, e somente se, o grafo associado é conexo. Ou seja, uma propriedade algébrica da álgebra de evolução implica uma propriedade topológica do grafo, e vice-versa. Esse tipo de relação entre essas duas áreas pode ser explorado de forma mais aprofundada.

No capítulo 3, analisamos sob quais condições uma cadeia de Markov gera uma álgebra de evolução. Nesse processo, estabelecemos uma conexão entre essas duas áreas. Por fim, o objetivo central deste capítulo, é estudar as derivações nas álgebras de evolução markovianas e destacar como certas propriedades probabilísticas têm repercussões importantes nessas derivações.

4.1 DERIVAÇÕES EM ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO

A principal referência deste capítulo será o artigo (CABRERA et al., 2021). Convidamos o leitor a consultar outras obras, como as de (CAMACHO et al., 2012) e (ELDUQUE; LABRA, 2019), onde são abordadas as derivações em álgebras de evolução. No entanto, é importante destacar que as derivações tratadas nesses três artigos estão focadas em álgebras de evolução de dimensão finita e com um enfoque algébrico. O nosso objetivo neste capítulo é estudar alguns resultados encontrados em (CABRERA et al., 2021) e estendê-los para álgebras de evolução markovianas com dimensão enumerável, a partir de ferramentas das cadeias de Markov.

Definição 4.1.1. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda\}$.*

Uma derivação é um operador linear $d : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ tal que $d(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{k\in\Lambda} d_{ik}\boldsymbol{e}_k$ para todo $i \in \Lambda$. Além disso, deve satisfazer $d(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = d(\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot d(\boldsymbol{v})$, para todo $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathcal{A}$ (Regra de Leibniz).

Observação 4.1.2. *Sendo $d(\boldsymbol{e}_i) \in \mathcal{A}$, para todo $i \in \Lambda$, temos que $\sum_{k\in\Lambda} d_{ik}\boldsymbol{e}_k$ é sempre finita, com uma álgebra de evolução de dimensão enumerável.*

Definição 4.1.3. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda\}$. Dada derivação d sobre $\mathcal{A}$, chamaremos matriz de derivação $\mathscr{D} = (d_{ij})_{i,j\in\Lambda}$, de $\mathcal{A}$, a matriz que contém as constantes de derivação.*

Definição 4.1.4. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda\}$. O espaço de todas as derivações de $\mathcal{A}$ é denotado por $Der(\mathcal{A})$.*

Começaremos nosso estudo das derivações estendendo as condições necessárias para que uma aplicação linear seja uma derivação de uma álgebra de evolução, no caso de dimensão enumerável.

Proposição 4.1.5. *Seja $\mathcal{A}$ a álgebra de evolução com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in \Lambda\}$. Se $d \in Der(\mathcal{A})$, d deve satisfazer o seguinte sistema de equações:*

$$c_{jk}d_{ij} + c_{ik}d_{ji} = 0, \text{ para todo } i, j, k \in \Lambda \text{ e } i \neq j. \tag{4.1}$$

$$\sum_{j\in\Lambda} c_{ij}d_{jk} = 2c_{ik}d_{ii}, \text{ para todo } i, k \in \Lambda. \tag{4.2}$$

Demonstração. Conforme indicado no Capítulo 2, assumimos que as álgebras de evolução que estudamos possuem bases naturais de Hamel. Logo, todo elemento de uma álgebra de evolução $\mathcal{A}$ possui uma representação única como combinação linear finita de elementos da base natural $\mathcal{B}$.

Seja $d \in Der(\mathcal{A})$, dado que d deve cumprir a regra de Leibniz, tal derivação devem cumprir as seguintes condições para os elementos da base. Sejam $i \neq j \in \Lambda$, temos que:

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) &= d(\boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot d(\boldsymbol{e}_j) \\ &= \left(\sum_{k \in \Lambda} d_{ik} \boldsymbol{e}_k \right) \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot \left(\sum_{k \in \Lambda} d_{jk} \boldsymbol{e}_k \right) \\ &= d_{ij} \boldsymbol{e}_j^2 + d_{ji} \boldsymbol{e}_i^2 \\ &= d_{ij} \left(\sum_{k \in \Lambda} c_{jk} \boldsymbol{e}_k \right) + d_{ji} \left(\sum_{k \in \Lambda} c_{ik} \boldsymbol{e}_k \right) \\ &= \sum_{k \in \Lambda} (c_{jk} d_{ij} + c_{ik} d_{ji}) \boldsymbol{e}_k. \end{aligned} \tag{4.3}$$

No entanto, como d é um operador linear,

$$d(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = d(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

Logo, por (4.3) e (4.4), d deve satisfazer a,

$$c_{jk} d_{ij} + c_{ik} d_{ji} = 0, \text{ para todo } i, j, k \in \Lambda \text{ e } i \neq j.$$

Finalizando, assim, a prova da Equação (4.1), que d deve satisfazer. Agora, vejamos a prova da Equação (4.2).

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i) &= d(\boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_i \cdot d(\boldsymbol{e}_i) \\ &= 2 \left(\sum_{k \in \Lambda} d_{ik} \boldsymbol{e}_k \right) \cdot \boldsymbol{e}_i \\ &= 2 d_{ii} \boldsymbol{e}_i^2 \\ &= \sum_{k \in \Lambda} 2 c_{ik} d_{ii} \boldsymbol{e}_k. \end{aligned}$$

No entanto, como d é um operador linear, temos que:

$$\begin{aligned}
d(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_i) &= d\left(\sum_{j\in\Lambda} c_{ij}\boldsymbol{e}_j\right) \\
&= \sum_{j\in\Lambda} c_{ij} d(\boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_{j\in\Lambda} c_{ij}\left(\sum_{k\in\Lambda} d_{jk}\boldsymbol{e}_k\right) \\
&= \sum_{k\in\Lambda}\left(\sum_{j\in\Lambda} c_{ij} d_{jk}\right)\boldsymbol{e}_k
\end{aligned}$$

Quer dizer, d deve satisfazer que:

$$\sum_{j\in\Lambda} c_{ij} d_{jk} = 2c_{ik}d_{ii}, \text{ para todo } i,k\in\Lambda.$$

□

Observação 4.1.6. *As derivações são operadores lineares definidos em qualquer álgebra, não necessariamente em álgebras de evolução. No entanto, daqui em diante, todas as definições que apresentaremos serão dadas no contexto de álgebras de evolução geradas por cadeias de Markov. Lembramos que $\mathcal{A}(X_n)$ denota a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Reformularemos, a seguir, o resultado obtido na Proposição 4.1.5 para adaptá-lo ao contexto das álgebras de evolução markovianas. Isso nos permitirá expressar tais condições necessárias em termos de probabilidades de transição da cadeia de Markov.

Corolário 4.1.7. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se $d \in Der(\mathcal{A})$, d deve satisfazer o seguinte sistema de equações:*

$$p_{jk}d_{ij} + p_{ik}d_{ji} = 0, \text{ para todo } i,j,k\in S \text{ e } i\neq j. \tag{4.5}$$

$$\sum_{j\in\Lambda} p_{ij}d_{jk} = 2p_{ik}d_{ii}, \text{ para todo } i,k\in S. \tag{4.6}$$

Exemplo 4.1.8. *Seja $\mathcal{A}(X_n)$ a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$, onde $S = \{1, 2\}$ e os produtos são dados por:*

$$\boldsymbol{e}_1^2 = p_{11}\boldsymbol{e}_1 + p_{12}\boldsymbol{e}_2,$$
$$\boldsymbol{e}_2^2 = p_{21}\boldsymbol{e}_1 + p_{22}\boldsymbol{e}_2.$$

Lembremos que $p_{11} + p_{12} = 1$ e $p_{21} + p_{22} = 1$, observando que $p_{12} = 1 - p_{11}$ e $p_{22} = 1 - p_{21}$. Consideramos que $0 < p_{11} < 1$ e $0 < p_{22} < 1$. Seu digrafo associado é o seguinte:

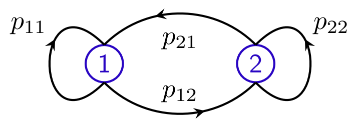

Figura 9 – Digrafo de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ do Exemplo 4.1.8.

Agora, consideremos uma derivação $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$ qualquer. Ela deve satisfazer as Equações (4.5) *e* (4.6)*. Portanto, da Equação* (4.5)*, obtemos as seguintes equações:*

$$p_{21}d_{12} + p_{11}d_{21} = 0, \tag{4.7}$$
$$p_{22}d_{12} + p_{12}d_{21} = 0. \tag{4.8}$$

Da Equação (4.6) *obtemos as seguintes equações:*

$$p_{11}d_{11} + p_{12}d_{21} = 2p_{11}d_{11}, \tag{4.9}$$
$$p_{11}d_{12} + p_{12}d_{22} = 2p_{12}d_{11}, \tag{4.10}$$
$$p_{21}d_{11} + p_{22}d_{21} = 2p_{21}d_{22}, \tag{4.11}$$
$$p_{21}d_{12} + p_{22}d_{22} = 2p_{22}d_{22}. \tag{4.12}$$

Para resolver este sistema, das Equações (4.7) *e* (4.8)*, temos que*

$$d_{12} = -\frac{p_{11}}{p_{21}} d_{21},$$
$$d_{12} = -\frac{p_{12}}{p_{22}} d_{21}.$$

Assim, obtemos dois possiveis casos:

1. *Se* $p_{11} \neq p_{21}$*, observamos que* d_{12} *tem duas representações, tal que, a única solução possível é que* $d_{12} = d_{21} = 0$*. Substituindo esses valores nas Equações* (4.9)-(4.12)*, observa-se que* $d_{11} = d_{22} = 0$*. Em outras palavras, a derivação* d *é nula.*

2. *Se* $p_{11} = p_{21}$*, temos que* $d_{12} = -d_{21}$ *nas Equações* (4.7) *e* (4.8) *. Substituindo esses valores nas Equações* (4.9)-(4.12)*, obtemos as seguintes equações:*

$$\begin{aligned} p_{12}d_{21} &= p_{11}d_{11}, \\ -p_{11}d_{21} + p_{12}d_{22} &= 2p_{12}d_{11}, \\ p_{11}d_{11} + p_{12}d_{21} &= 2p_{11}d_{22}, \\ p_{11}d_{12} &= p_{12}d_{22}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Das quais obtemos, imediatamente, as duas seguintes equações:

$$\begin{aligned} d_{11} &= \frac{p_{12}}{p_{11}} d_{21}, \\ d_{22} &= -\frac{p_{11}}{p_{12}} d_{12}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Utilizando (4.14) *em* (4.13) *e sabendo que* $d_{12} = -d_{21}$*, obtemos que:*

$$d_{11} = \frac{p_{12}}{p_{11}} d_{21},$$
$$d_{11} = -\frac{p_{11}}{p_{12}} d_{21}.$$

Pelo que, embora $p_{11} = p_{12}$*, observamos que* d_{11} *tem duas representações, tal que a única solução possível é que* $d_{11} = d_{12} = d_{21} = d_{22} = 0$*. Em outras palavras,* *a derivação d é nula. Ou seja, $Der(\mathcal{A}(X_n)) = \{\mathbf{0}\}$. Ainda que consideremos $0 < p_{11} < 1$ e $0 < p_{22} < 1$, o leitor pode verificar, nos outros dois casos, que a conclusão é a mesma. Ou seja, para qualquer álgebra de evolução gerada por uma cadeia de Markov finita de dimensão 2, a única derivação é a nula.*

Em (CAMACHO et al., 2012), demonstra-se que, para álgebras de evolução cuja matriz de estrutura seja não singular, o espaço de derivações é zero, ou seja, a única derivação é a derivação nula. Neste trabalho, observamos que são estudadas álgebras de evolução complexas, mas enfatizamos que se trabalha no contexto de dimensão finita. Em (CABRERA et al., 2021), demonstra-se que, para álgebras de evolução finitas, onde seu digrafo é conexo, o espaço de derivações depende de propriedades que o digrafo associado à álgebra de evolução possui. Tal conceito é o conceito de gêmeo, que adaptaremos às cadeias de Markov. Com isso em mente, a seguir, estudaremos quais propriedades das cadeias de Markov podem nos fornecer informações para caracterizar as derivações nas álgebras de evolução geradas por cadeias de Markov, independentemente da dimensão.

4.2 DERIVAÇÕES EM ÁLGEBRAS DE EVOLUÇÃO MARKOVIANAS

Começaremos esta seção, lembrando que $\mathcal{J}_i = \{j \in S \mid p_{ij} \neq 0\}$ é o conjunto de estados j para os quais a probabilidade de transição do estado i para o estado j num único passo difere de zero, denotado em 3.1.3. Esses conjuntos coincidem com o conjunto de descendentes de primeira geração do elemento i, conforme definido na Definição 2.2.30, e que isso coincide, por sua vez, com a definição de descendentes do grafo dada em (CABRERA et al., 2021).

Definição 4.2.1. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$.*

1. *Dizemos que $i, j \in S$ são gêmeos se $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_j$.*

2. *Se para todo $i, j \in S$, com $i \neq j$ temos que $\mathcal{J}_i \neq \mathcal{J}_j$, dizemos que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é livre de gêmeos.*

O Proposição 4.2.2 descreve as derivações nas álgebras de evolução markovianas. Tal resultado segue a ideia da (CABRERA et al., 2021, Proposição 1), estendendo tais resultados para o caso das álgebras de evolução markovianas de dimensão enumerável, cujo grafo associado não precisa ser conexo. Ressaltamos, no entanto, que as álgebras de evolução markovianas são sempre álgebras de evolução não degeneradas. Além disso, o resultado a seguir, assim como os resultados subsequentes, pode ser aplicada as cadeias de Markov cujo dígrafo associado seja redutível, conforme a definição apresentada em (CABRERA et al., 2021).

Proposição 4.2.2. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Se $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$, então d satisfaz as seguintes condições:*

1. *Se $i, j \in S, i \neq j$ e $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j \neq \phi$, então*
$$d_{ij} = -\frac{p_{ik}}{p_{jk}} d_{ji}, \text{ para todo } k \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j.$$
2. *Se $i, j \in S, i \neq j$ e $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j^c \neq \phi$, então $d_{ji} = 0$.*
3. *Se $i, j \in S, i \neq j$ e $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \phi$, então $d_{ij} = d_{ji} = 0$.*
4. *Para todo $i \in S$ temos que:*
$$\sum_{k \in \mathcal{J}_i} p_{ik} d_{kj} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \notin \mathcal{J}_i, \\ 2p_{ij} d_{ii}, & \text{se } j \in \mathcal{J}_i. \end{cases}$$

Demonstração. Seja $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$. Portanto, temos que:

1. Sejam $i, j \in S, i \neq j$ tal que $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j \neq \phi$. Seja $k \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j$, portanto, $p_{ik} \neq 0$ e $p_{jk} \neq 0$. Como d satisfaz a Equação (4.5), temos que:
$$d_{ij} = -\frac{p_{ik}}{p_{jk}} d_{ji}, \text{ para todo } k \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j.$$

2. Se $i, j \in S, i \neq j$ e $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j^c \neq \phi$. Seja $k \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j^c$, portanto $p_{ik} \neq 0$ e $p_{jk} = 0$. Como d satisfaz a Equação (4.5), temos que $p_{ik}d_{ji} = 0$, portanto, $d_{ji} = 0$.

3. Se $i, j \in S, i \neq j$ e $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \phi$. Pelo item anterior, dado que $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j = \phi$, obtemos que $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j^c \neq \phi$ e $\mathcal{J}_j \cap \mathcal{J}_i^c \neq \phi$, temos que $d_{ji} = 0$ e $d_{ij} = 0$.

4. Seja $i \in S$, dado que d satisfaz a Equação (4.6), observamos que se $k \notin \mathcal{J}_i$ entaõ $p_{ik} = 0$, portanto, temos que:

$$\sum_{k \in S} p_{ik}d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{J}_i} p_{ik}d_{kj} + \sum_{k \notin \mathcal{J}_i} p_{ik}d_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{J}_i} p_{ik}d_{kj}.$$

   De fato, se $j \notin \mathcal{J}_i$, temos que $p_{ij} = 0$, assim

$$\sum_{k \in \mathcal{J}_i} p_{ik}d_{kj} = 0.$$

   Caso contrario, se $j \in \mathcal{J}_i$, temos que $p_{ij} \neq 0$, logo

$$\sum_{k \in \mathcal{J}_i} p_{ik}d_{kj} = 2p_{ij}d_{ii}.$$

□

Observação 4.2.3. *Observamos que, embora o conjunto $\mathcal{J}_j^c$ possa ser infinito para algum $j \in S$, devido à finitude de $\mathcal{J}_i$, para todo $i \in S$, a interseção mencionada no item 3 da Proposição 4.2.2 corresponde sempre a um conjunto finito de estados da cadeia de Markov.*

O Corolário 4.2.4 é uma extensão do (CABRERA et al., 2021, Corolário 1).

Corolário 4.2.4. *Considere $\mathcal{A}(X_n)$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$. Seja $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$. Se $d_{ij} = 0$ e $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_j$, então $d_{ji} = 0$.*

Demonstração. Dado que $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_j$, pelo item 1 da Proposição 4.2.2, temos que:

$$d_{ij} = -\frac{p_{ik}}{p_{jk}}d_{ji}, \text{ para todo } k \in \mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j.$$

Dado que $d_{ij} = 0$ e para todo $k \in \mathcal{J}_i$ temos que $p_{ik} \neq 0$, portanto, $d_{ji} = 0$. □

Exemplo 4.2.5. *(CABRERA et al., 2021, pág. 752) Seja $\mathcal{A}(X_n)$ a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$, onde $S = \{1, 2, 3\}$ e os produtos são dados por:*

$$\boldsymbol{e}_1^2 = \boldsymbol{e}_1,$$
$$\boldsymbol{e}_2^2 = \boldsymbol{e}_1,$$
$$\boldsymbol{e}_3^2 = \boldsymbol{e}_1.$$

Seu digrafo associado é o seguinte:

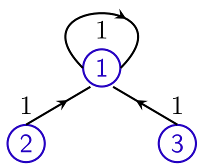

Figura 10 – Digrafo de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ do Exemplo 4.2.5.

Observamos que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_3 = \{1\}$. Seja $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$, então pelo primeiro item da Proposição 4.2.2, temos as seguintes equações:

$$d_{12} = -d_{21},$$
$$d_{13} = -d_{31},$$
$$d_{23} = -d_{32}.$$

Do quarto item da Proposição 4.2.2, temos que:

$$d_{11} = 2d_{11},$$
$$d_{12} = 0,$$
$$d_{13} = 0,$$
$$d_{11} = 2d_{22},$$
$$d_{11} = 2d_{33}.$$

Pelo Corolário 4.2.4, como $d_{12} = d_{13} = 0$ *e* $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_3$*, temos que* $d_{21} = d_{31} = 0$. *Além disso, observamos que se* $d_{11} = 2d_{11}$*, então* $d_{11} = 0$. *Assim, das equações anteriores, obtemos que* $d_{11} = d_{12} = d_{13} = d_{21} = d_{22} = d_{31} = d_{33} = 0$ *e* $d_{32} = -d_{23}$. *Portanto, se* $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$*, sua matriz de derivação* $\mathscr{D}$ *tem a seguinte estrutura:*

$$\mathscr{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. *Obtém-se que:*

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{e}_1) &= \mathbf{0}, \\ d(\boldsymbol{e}_2) &= \alpha \boldsymbol{e}_3, \\ d(\boldsymbol{e}_3) &= -\alpha \boldsymbol{e}_2. \end{aligned}$$

Verificamos que d *é uma derivação. Fazendo os cálculos para os elementos cruzados obtém-se que:*

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = d(\mathbf{0}) = d(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2) = d(\boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \cdot d(\boldsymbol{e}_2) = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{e}_2 + \alpha \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} = d(\mathbf{0}) = d(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3) = d(\boldsymbol{e}_1) \cdot \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_1 \cdot d(\boldsymbol{e}_3) = \mathbf{0} \cdot \boldsymbol{e}_3 - \alpha \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} = d(\mathbf{0}) = d(\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3) = d(\boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_2 \cdot d(\boldsymbol{e}_3) = \alpha \boldsymbol{e}_3^2 - \alpha \boldsymbol{e}_2^2 = \alpha \boldsymbol{e}_1 - \alpha \boldsymbol{e}_1 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Para os quadrados, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = d(\boldsymbol{e}_1) = d(\boldsymbol{e}_1^2) = 2\boldsymbol{e}_1 \cdot d(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} = d(\boldsymbol{e}_1) = d(\boldsymbol{e}_2^2) = 2\boldsymbol{e}_2 \cdot d(\boldsymbol{e}_2) = 2\alpha \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{0} = d(\boldsymbol{e}_1) = d(\boldsymbol{e}_3^2) = 2\boldsymbol{e}_3 \cdot d(\boldsymbol{e}_3) = -2\alpha \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Então, d *é uma derivação de* $\mathcal{A}(X_n)$.

As Proposições 4.2.6 e 4.2.7 são uma extensão do (CABRERA et al., 2021, Lema 2).

Proposição 4.2.6. *Considere* $\mathcal{A}(X_n)$ *com base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$*. Seja* $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$*. Se* $d_{ij} \neq 0$ *para todo* $i, j \in S, i \neq j$*, então* $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_j$*.*

Demonstração. Seja $i, j \in S, i \neq j$ tal que $d_{ij} \neq 0$. Portanto, $d_{ji} \neq 0$, assim, pelo contra reciproco do item três da Proposição 4.2.2, temos que $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j \neq \phi$. Também pelo contra reciproco do item dois da Proposição 4.2.2, temos que $\mathcal{J}_i \cap \mathcal{J}_j^c = \phi$ e $\mathcal{J}_i^c \cap \mathcal{J}_j = \phi$. Concluindo, assim, que $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_j$. □

Proposição 4.2.7. *Considere* $\mathcal{A}(X_n)$ *com base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$*. Seja* $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$*. Se* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *é livre de gêmeos, então para todo* $i, j \in S, i \neq j$ *cumpre-se que* $d_{ji} = d_{ji} = 0$*.*

Demonstração. Dado $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ livre de gêmeos, então $\mathcal{J}_i \neq \mathcal{J}_j$ para todo $i, j \in S, i \neq j$. Logo, pelo contra reciproco da Proposição 4.2.6, obtemos que $d_{ij} = d_{ji} = 0$. □

4.2.1 DERIVAÇÕES NULAS E CADEIAS DE MARKOV IRREDUTÍVEIS

Como mencionamos no início, os resultados obtidos em (CABRERA et al., 2021) estão focados em álgebras de evolução finitas cujo grafo associado é conexo. Com o objetivo de estender o (CABRERA et al., 2021, Teorema 1) para o caso de álgebras de evolução markovianas, cujo grafo não precisa ser necessariamente conexo, enunciamos e demonstramos o Lema 4.2.9 e o Teorema 4.2.10, os quais constituem uma extensão do (CABRERA et al., 2021, Lema 1), com foco principal no caso em que a álgebra de evolução markoviana seja de dimensão enumerável. A Proposição 4.2.11 também constitui uma extensão do (CABRERA et al., 2021, Lema), pois, embora seja formulada para o caso finito, contempla situações em que o grafo associado à $(\mathcal{A}(X_n))$ não precisa ser conexo.

Definição 4.2.8. *Seja* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov.*

1. *Um caminho é uma sequência de estados* $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$*, onde cada* $i_j \neq i_l$ *para* $j \neq l$ *e, para todo* $j \in \{1, \ldots, k-1\}$*,* $p_{i_j i_{j+1}} \neq 0$.

2. *Um ciclo é uma sequência finita de estados* $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$*, onde* $i_j \neq i_l$ *para* $j, l \in \{1, \cdots, k\}$ *com* $j \neq l$*, e tal que* $p_{i_j i_{j+1}} \neq 0$ *para* $j \in \{1, \cdots, k-1\}$ *e* $p_{i_k i_1} \neq 0$.

3. *O tamanho do ciclo* $\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ *é* $k+1$.

4. *Se* $k = 1$ *e* $p_{i_1 i_1} \neq 0$*. A sequência* $\{i_1, i_1\}$ *é um laço (um ciclo de tamanho 1).*

Lema 4.2.9. *Seja* $\mathcal{A}(X_n)$ *a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$*, com base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in S\}$*. Se* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *é irredutível, então* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *possui um ciclo.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, seja $i_1 \in S$ um estado qualquer da cadeia de Markov. Se $p_{i_1 i_1} \neq 0$, então existe um ciclo de tamanho 1. Caso contrário, como a cadeia de Markov é irredutível, existe um i_2 tal que $p_{i_1 i_2} \neq 0$.
Se $p_{i_2 i_2} \neq 0$, então existe um ciclo de tamanho 1. Caso contrário, se $p_{i_2 i_1} \neq 0$ temos um ciclo de tamanho 2. Caso isso também não ocorra, como a cadeia é irredutível, existe um $i_3 \neq i_2, i_1$ tal que $p_{i_2 i_3} \neq 0$.
Seguindo esse raciocínio, continuamos encontrando $i_4, i_5, \cdots$. No entanto, como a cadeia de Markov é irredutível, eventualmente existe um i_k tal que $p_{i_k i_1} \neq 0$. Caso contrário, se tal i_k não existisse, teríamos $p^m_{i_1 i_1} = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, o que seria uma contradição. Assim, a cadeia de Markov possui pelo menos um ciclo. $\square$

Teorema 4.2.10. *Seja* $\mathcal{A}(X_n)$ *a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$*, com base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in S\}$*. Seja* $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *irredutível e* $d \in Der(\mathcal{A}(X_n)$*. Se* $d_{ij} = d_{ji} = 0$ *para todo* $i, j \in S, i \neq j$*, então* $d_{ii} = 0$ *para todo* $i \in S$*.*

Demonstração. Pelo Lema 4.2.9, sabemos que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ possui ciclos. Sejam $\{c_s\}_{s\in\Phi}$ os ciclos de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Observamos que, Φ é um conjunto enumerável e possivelmente infinito, se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é infinita, além disso, tais ciclos podem ter interseção não vazia.

Sejam $\{c_s^\circ\}_{s\in\Phi}$ os conjuntos de estados pertencentes a tais ciclos, ou seja, $c_i^\circ = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_{t_i}}\}$, onde $u_{i_j} \in S$ para todo $i \in \Phi$ e $j \in \{1, \cdots, t_i\}$ e tais ciclos são de tamanho $t_i + 1$. Agora, para $j \in \{1, \cdots, (t_i - 1)\}$ e $i \in \Phi$, temos que $i_{j+1} \in \mathcal{J}_{i_j}$ e $i_1 \in \mathcal{J}_{i_{t_i}}$. Seja $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$, pelo item 4 da Proposição 4.2.2, dado que $i_{j+1} \in D(i_j)$ para todo $j \in \{1, \cdots, (t_i - 1)\}$ e $i_1 \in D(i_{t_i})$, temos que:

$$2d_{i_j i_j} = d_{i_{j+1} i_{j+1}} \text{ e } 2d_{i_{t_i} i_{t_i}} = d_{i_1 i_1}.$$

Portanto $d_{i_j i_j} = 0$ para todo $j \in \{1, \cdots, t_i\}$ e $i \in \Phi$. Além disso, observamos que, para qualquer estado $v_k \in S$ ele pertence a algum ciclo c_k°. De fato, se v_k não pertence a nenhum ciclo, isso significa que, $p^m_{v_k v_k} = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, a cadeia é redutível, o que é uma contradição. Assim, $d_{kk} = 0$, para todo $k \in S$. $\square$

Lembramos da Definição B.1.5 que as cadeias de Markov podem-se particionar em subconjuntos disjuntos chamados classes, recôrrentes e transientes. Esses conceitos derivam diretamente da Definição B.1.9. No entanto, nas cadeias de Markov finitas, tais conceitos estão conectados com o conceito de classes fechadas da Definição B.1.6. Assim, no caso finito, podemos dizer que as classes recorrentes são classes fechadas, e as classes transientes são classes não fechadas. Portanto, em uma classe fechada, se um estado j é acessível a partir de um estado i, então i, por sua vez, também é acessível a partir do estado j. Por essa razão, nas classes fechadas, uma vez que entramos nelas, não há probabilidade de sair. No entanto, as classes transientes não são fechadas; ou seja, pode acontecer que um estado j seja acessível a partir de i, mas i não seja acessível a partir de j. Assim, embora todos os estados de uma classe não fechada se comuniquem entre si, existe uma probabilidade de sair da classe e nunca mais retornar a ela.

Proposição 4.2.11. *Seja $\mathcal{A}(X_n)$ a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in S\}$. Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ finita e $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$. Se $d_{ij} = d_{ji} = 0$ para todo $i, j \in S, i \neq j$, então $d_{ii} = 0$ para todo $i \in S$.*

Demonstração. Se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é finita e irredutível, pelo Teorema 4.2.10 podemos concluir que este caso já está coberto. Então, supohamos que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é finita e redutível. Então, podemos considerar a partição de classes de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ como $\cup_{i\in\Phi} C_i = S$ onde $\mid \Phi \mid\leq m$, sendo m o número de estados da cadeia de Markov, ou seja $\mid S \mid= m$. Além disso, cada C_i é uma classe. Graças ao Teorema B.1.13 existe pelo menos uma classe fechada. Portanto, denotamos $F_i's$ as classes fechadas e $A_j's$ as classes não fechadas, portanto $\cup_{i\in\Phi} C_i = (\cup_{i\in\Phi_1} F_i) \cup (\cup_{j\in\Phi_2} A_j) = S$, onde $\Phi_1 \cup \Phi_2 = \Phi$.
Seja $d \in Der(\mathcal{A}(X_n)$. Se $d_{ij} = d_{ji} = 0$ para todo $i, j \in S, i \neq j$ e seja F_i uma classe fechada qualquer. Observamos que as classes fechadas podem ser vistas como subcadeias de Markov irredutíveis. Portanto, pelo Teorema 4.2.10 para qualquer estado k pertencente a alguma clase F_i para algum $i \in \Phi_1$, obtemos que $d_{kk} = 0$.
Agora, dado que a cadeia é finita, as classes não fechadas estão conetadas a alguma classe fechada. Quer dizer, dado qualquer estado $k \in A_j$ para algum $j \in \{1, \cdots, n - m\}$, existe uma classe F_i a qual tem um estado $i_k \in F_i$ tal que existe um caminho $\{k, k_1, k_2, \cdots, k_s, i_k\}$, onde $k_1, k_2, \cdots, k_s \in A_j$. Logo, como $d_{i_k i_k} = 0$, então $d_{kk} = d_{k_1k_1} = \cdots = d_{k_sk_s} = 0$. Assim, para todo $i \in S, d_{ii} = 0$. $\square$

Finalmente, o Teorema 4.2.12 é uma estensao do (CABRERA et al., 2021, Teorema 1)o qual contempla situações em que o grafo associado à $(\mathcal{A}(X_n))$ não precisa ser conexo.

Teorema 4.2.12. *Seja $\mathcal{A}(X_n)$ a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_j \mid j \in S\}$. Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ finita e livre de gêmeos, então $Der(\mathcal{A}(X_n))$ é nula.*

Demonstração. Pela Proposição 4.2.7, dado que a cadeia é livre de gêmeos, então $\mathcal{J}_i \neq \mathcal{J}_j$ para todo $i, j \in S, i \neq j$, ou seja, $d_{ij} = d_{ji} = 0$ para todo $i, j \in S, i \neq j$. Logo, como $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é finita, pela Proposição 4.2.11, $d_{ii} = 0$, para todo $i \in S$. $\square$

Mantendo a hipótese de que, dado uma derivação $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$ tal que $d_{ij} = d_{ji} = 0$ para todo $i, j \in S, i \neq j$, podemos destacar as seguintes observações dos teoremas anteriores:

- Se a cadeia de Markov é irredutível e livre de gêmeos, independente da dimensão, obtemos que a única derivação é a nula.
- Se a cadeia de Markov e finita e livre de gêmeos. Seja que a cadeia de Markov é irredutível o não, obtém-se o mesmo resultado por dois fatores importantes. O primeiro é que sempre existe uma classe fechada, que neste contexto é equivalente a uma classe recorrente. E o segundo é que todas as classes transientes devem ter acesso uma classe fechada devido à finitude da cadeia.
- Se a cadeia de Markov é infinita e livre de gêmeos. Não podemos aplicar os teoremas anteriores por dois fatores. O primeiro é que não se garante a existência de uma classe fechada e, no caso infinito, uma classe fechada não é equivalente a uma classe recorrente. O segundo é que não podemos garantir que as classes não fechadas (transientes) tenham acesso as clases fechadas, devido à infinitude da cadeia.

Na próxima seção, com o propósito de encerrar este capítulo com chave de ouro, apresentaremos algumas cadeias de Markov e analisaremos quais são as possíveis derivações em cada uma delas.

4.3 CADEIAS DE MARKOV INFINITAS E SUAS DERIVAÇÕES

O primeiro exemplo que apresentaremos é uma cadeia de Markov livre de gêmeos e redutível. Por essa razão, não podemos aplicar o Teorema 4.2.10. No entanto, destacamos que ela gera uma álgebra de evolução infinita que possui derivação não nula.

Exemplo 4.3.1. *Seja $\mathcal{A}(X_n)$ a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$, onde $S = \mathbb{N}_0$ e os produtos são dados por:*

$$\boldsymbol{e}_i^2 = \boldsymbol{e}_{i+1}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0.$$

Seu digrafo associado é o seguinte:

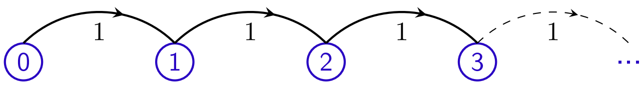

Figura 11 – Digrafo de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ do Exemplo 4.3.1.

Observamos que esta cadeia de Markov é infinita, não possui classe fechada e é redutível. Seja $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$, dado que a cadeia é livre de gêmeos, pela Proposição 4.2.7 temos que $d_{ij} = d_{ji} = 0$ para todo $i, j \in S, i \neq j$. Logo, pelo item 4 da Proposição 4.2.2, dado que $i + 1 \in D(i)$ para todo $i \in S$, obtemos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} d_{11} &= 2d_{00}, \\ d_{22} &= 2d_{11}, \\ &\vdots \\ d_{ii} &= 2d_{i-1i-1}. \end{aligned}$$

Recursivamente observamos que para qualquer $i \in S$, cumpre-se que $d_{ii} = 2^i d_{00}$. Portanto, se $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$d(\boldsymbol{e}_i) = 2^i \alpha \boldsymbol{e}_i, \text{ para todo } i \in S.$$

Verificamos que d é uma derivação, fazendo os cálculos para os elementos cruzados, obtém-se que:

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) &= d(\boldsymbol{e}_i) \cdot \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i \cdot d(\boldsymbol{e}_j) \\ &= 2^i \alpha \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j + 2^j \alpha \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j \\ &= \boldsymbol{0}, \\ d(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) &= d(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

Para os quadrados, temos que:

$$\begin{aligned} d(\boldsymbol{e}_i^2) &= d(\boldsymbol{e}_{i+1}) = 2^{i+1} \alpha \boldsymbol{e}_{i+1}, \\ d(\boldsymbol{e}_i^2) &= 2\boldsymbol{e}_i d(\boldsymbol{e}_i) = 2\boldsymbol{e}_i (2^i \alpha \boldsymbol{e}_i) = 2^{i+1} \alpha \boldsymbol{e}_{i+1}. \end{aligned}$$

O segundo exemplo é uma generalização do passeio aleatório sobre $\mathbb{Z}$, em que as probabilidades de transição dependem do estado em que nos encontramos. No entanto, mantendo a irredutibilidade da cadeia, obtemos que a única derivação é a nula.

Exemplo 4.3.2. *Seja $\mathcal{A}(X_n)$ a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$, onde $S = \mathbb{Z}$ e os produtos são dados por:*

$$\boldsymbol{e}_i^2 = q_i \boldsymbol{e}_{i-1} + r_i \boldsymbol{e}_i + p_i \boldsymbol{e}_{i+1}, \ \textit{para todo } i \in \mathbb{N}_0.$$

Onde $q_i + r_i + p_i = 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Seu digrafo associado é o seguinte:

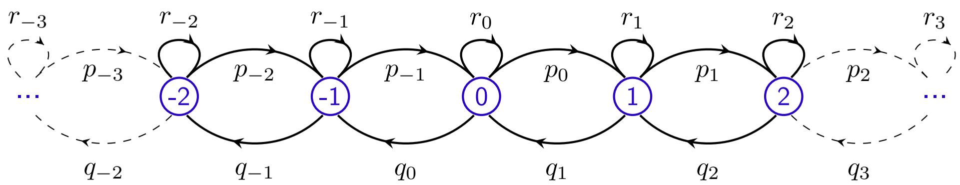

Figura 12 – Digrafo de $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ do Exemplo 4.3.2.

Sempre que $0 < p_i < 1$ e $0 < q_i < 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é irredutível. Dado que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ é livre de gêmeos, pela Proposição 4.2.7, temos que

$d_{ij} = d_{ji} = 0$ *para todo* $i, j \in S, i \neq j$. *Logo, pelo Teorema 4.2.10, temos que* $d_{ii} = 0$, *quer dizer,* $Der(\mathcal{A}(X_n)) = 0$.

Observação 4.3.3. *Do exemplo anterior, podemos destacar o seguinte:*

- *Se* $r_i \neq 0$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$, *essa cadeia é conhecida na literatura como passeio aleatório preguiçoso, pois há uma probabilidade positiva de que a partícula permaneça no mesmo estado.*
- *Se* $r_i = 0$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$, *trata-se de uma generalização do passeio aleatório, já que as probabilidades de transição dependem do estado em que nos encontramos.*
- *Se* $r_i = 0$ *e* $p_i = p$ *para todo* $i \in \mathbb{Z}$, *a cadeia é o passeio aleatório em* $\mathbb{Z}$, *apresentado pela primeira vez no Exemplo 3.1.7.*

No entanto, mantendo a irredutibilidade da cadeia de Markov, obtemos que a única derivação é a nula.

O terceiro exemplo é uma cadeia de Markov infinita com um estado absorvente, cuja única derivação é a nula.

Exemplo 4.3.4. *Seja* $\mathcal{A}(X_n)$ *a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *com base natural* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$, *onde* $S = \mathbb{Z}$ *e os produtos são dados por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_0^2 &= \boldsymbol{e}_0, \\ \boldsymbol{e}_i^2 &= q_i\boldsymbol{e}_{i-1} + r_i\boldsymbol{e}_i + p_i\boldsymbol{e}_{i+1}, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde $q_i + r_i + p_i = 1$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$. *Seu digrafo associado é o seguinte:*

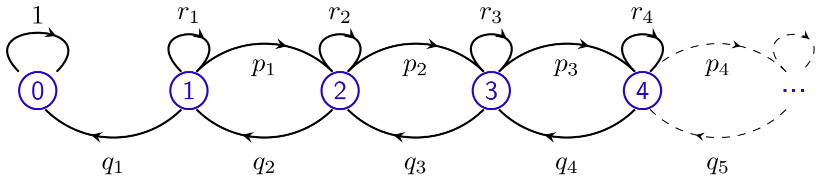

Figura 13 – Digrafo de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ do Exemplo 4.3.4.

Dado que $p_{00} = 1$, a cadeia de Markov é redutível. No entanto, sempre que $0 < p_i < 1$ e $0 < q_i < 1$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, temos duas classes: a classe do zero, que é uma classe fechada e absorvente, e a classe do 1, à qual pertencem os demais estados. Esta última é uma classe transiente que, além de possuir ciclos, comunica-se com a classe do zero. Portanto, dado que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ é livre de gêmeos, pela Proposição 4.2.7, temos que $d_{ij} = d_{ji} = 0$ para todo $i, j \in S, i \neq j$. Embora não possamos aplicar o Teorema 4.2.10, pelas condições da cadeia, concluimos que $d_{ii} = 0$, quer dizer, $Der(\mathcal{A}(X_n)) = 0$.

Observação 4.3.5. *A cadeia de Markov descrita anteriormente é conhecida como um processo de nascimento e morte, onde o estado 0 é um estado absorvente. Na literatura, como em (SCHINAZI, 1999), pode-se encontrar que $p_{01} \neq 0$, o que responde a uma das questões mais importantes dentro desse tipo de cadeias de Markov infinitas: sob quais condições a cadeia de Markov é recorrente. Infelizmente, neste caso, temos uma cadeia de Markov irredutível e, como é livre de gêmeos, a única derivação é a nula.*

O último exemplo que apresentaremos é o caso de obter uma cadeia de Markov infinita e irredutível com gêmeos e uma derivação distinta de zero. Tal cadeia de Markov pode ser vista como a união de duas subcadeias de Markov, nas quais uma é uma cadeia finita com gêmeos e a outra uma cadeia infinita livre de gêmeos. Esta ideia de criar cadeias de Markov com comportamentos diversos pode se tornar muito natural dentro deste contexto. No entanto, tal exemplo nos dá uma ideia de como o (CABRERA;

CADAVID; REIS, 2023, Corolário 3.2) pode ser generalizado para álgebras de evolução markovianas, independentemente da dimensão da cadeia de Markov, ou seja, ainda há muito caminho a percorrer no estudo das álgebras de evolução markovianas.

Exemplo 4.3.6. *Seja $\mathcal{A}(X_n)$ a álgebra de evolução markoviana gerada pela cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ com base natural $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in S\}$, onde $S = \{-3,-2,-1\} \cup \mathbb{N}_0$ e os produtos são dados por:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{-3}^2 &= \boldsymbol{e}_{-3}, \\
\boldsymbol{e}_{-2}^2 &= \boldsymbol{e}_{-3}, \\
\boldsymbol{e}_{-1}^2 &= \boldsymbol{e}_{-3}, \\
\boldsymbol{e}_i^2 &= \boldsymbol{e}_{i+1}, \ \text{para todo } i \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Seu digrafo associado é o seguinte:

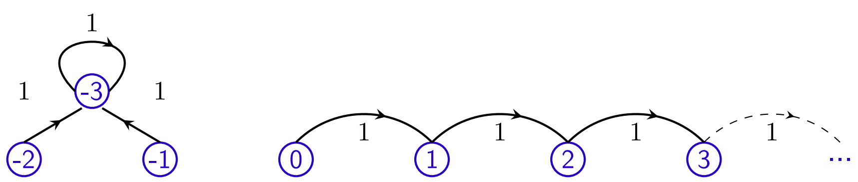

Figura 14 – Digrafo de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ do Exemplo 4.3.6.

Esta cadeia de Markov pode ser vista como a união de duas cadeias de Markov, nas quais suas subcadeias não têm interação entre si, simplesmente estamos unindo os estados. Os estados $\{-1,-2,-3\}$ são uma adaptação da cadeia de Markov do Exemplo 4.2.5, e os estados em $\mathbb{N}_0$ são os estados da cadeia de Markov do Exemplo 4.3.1. Observamos que, devido à forma como a cadeia foi construída, ela é uma cadeia redutível e, portanto, a álgebra de evolução gerada por ela não é simples. Ela é soma de dois ideais, um ideal gerado por $\{\boldsymbol{e}_{-3}, \boldsymbol{e}_{-2}, \boldsymbol{e}_{-1}\}$ e um ideal gerado por $\{\boldsymbol{e}_0\}$. Logo, é facíl verificar que se $d \in Der(\mathcal{A}(X_n))$, a matriz de derivação $\mathscr{D}$, tem a seguinte estrutura:

$$\mathscr{D} = \left[\begin{array}{ccc|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\alpha & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8\alpha & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right],$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Ou seja, a matriz de derivação de* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *pode ser vista em blocos, onde o primeiro bloco corresponde à matriz de derivação do Exemplo 4.2.5 e o segundo bloco corresponde à matriz de derivação do Exemplo 4.3.1.*

5 CONCLUSÕES

5.1 CONCLUSÕES

Nesta dissertação, foram investigadas as conexões entre as álgebras de evolução e as cadeias de Markov, culminando em generalizações significativas que ampliam o escopo das definições e resultados previamente conhecidos na literatura. Tais avanços foram aplicados às álgebras de dimensão enumerável, permitindo uma compreensão mais profunda e abrangente dessas estruturas matemáticas. Este trabalho não apenas contribuiu, mas também introduziu novas ferramentas e abordagens que podem servir como base para estudos futuros.

No capítulo 2, foi apresentada uma introdução detalhada às álgebras de evolução, baseada no livro (TIAN, 2008), com um foco particular na Definição 2.2.13 de subálgebra de evolução. Essa definição foi fundamental para diferenciar nossa abordagem daquela utilizada por outros autores, como (CABRERA, 2016). Aqui, foi destacado que as subálgebras de evolução, conforme tratadas neste trabalho, são ideais. Essa diferença conceitual conduziu à obtenção de propriedades distintas, tanto nas álgebras de evolução quanto nas álgebras não associativas tradicionais, trazendo novas perspectivas para o estudo dessas estruturas. Além disso, a análise foi expandida para contextos onde a dimensão da álgebra de evolução é enumerável, o que permitiu o desenvolvimento de exemplos mais gerais e a formulação de novas ferramentas teóricas. Um caso emblemático foi o estudo das álgebras báricas discutido no artigo (PANIELLO, 2022), que exemplifica a relevância da generalização proposta. A relação entre álgebras de evolução e a teoria dos grafos também foi explorada de forma detalhada, baseando-se nos artigos (CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2020; CADAVID; RODIÑO; RODRIGUEZ, 2021) e (ELDUQUE; LABRA, 2015). Essa conexão revelou-se crucial para visualizar propriedades algébricas de forma mais intuitiva e para introduzir novas metodologias de análise, mostrando como conceitos aparentemente distintos podem interagir de maneira sinérgica.

No Capítulo 3, baseado em (TIAN, 2008, Capítulo 4), foram apresentadas condições precisas sob as quais uma cadeia de Markov de dimensão enumerável, pode ser associada a uma álgebra de evolução markoviana. Essa conexão permitiu utilizar ferramentas probabilísticas provenientes da teoria das cadeias de Markov para resolver problemas que, na literatura, são tradicionalmente tratados sob uma abordagem estritamente algébrica. Esse enfoque diferenciou-se por sua originalidade e eficiência, proporcionando demonstrações mais diretas e gerais. Vale destacar que os resultados obtidos são para cadeias de Markov de dimensão enumerável, evidenciando a robustez e a generalidade das técnicas empregadas. Ademais, este estudo introduziu uma nova perspectiva sobre o papel da recorrência e da transitoriedade no comportamento dessas estruturas, expandindo o entendimento das propriedades fundamentais preservadas pelas generalizações propostas.

No Capítulo 4, com base no artigo (CABRERA et al., 2021), o estudo focou nas derivações em álgebras de evolução markovianas no contexto de dimensão enumerável. Os resultados obtidos ampliaram os resultados clássicos para casos enumeráveis, mostrando que a irredutibilidade das cadeias de Markov associadas desempenha um papel central na caracterização das derivações. Foi possível identificar cenários em que as derivações são nulas e outros em que não são, destacando exemplos concretos de álgebras de dimensão infinita com derivações não nulas. Esses resultados coincidem com estudos prévios em dimensões finitas, como os apresentados nos artigos de (CAMACHO et al., 2012) e (ELDUQUE; LABRA, 2015), reforçando a coerência das generalizações. Além disso, a abordagem probabilística introduzida não apenas fortaleceu a relação entre as álgebras de evolução e as cadeias de Markov, mas também abriu novas linhas de pesquisa para cenários mais complexos.

De forma geral, a maioria dos resultados obtidos nesta dissertação representa uma extensão significativa das definições e propriedades previamente conhecidas na literatura. As generalizações apresentadas permitem a aplicação dessas estruturas em álgebras de dimensão finita e infinita contável, ampliando consideravelmente seu alcance teórico. Isso consolida as álgebras de evolução como ferramentas versáteis e poderosas, capazes de abordar questões tanto algébricas quanto probabilísticas. O trabalho também deixa várias questões em aberto, especialmente relacionadas ao impacto da irredutibilidade das cadeias de Markov nas derivações das álgebras de evolução markovianas associadas, sugerindo caminhos promissores para investigações futuras.

REFERÊNCIAS

ACERO, L. C. *Introducción a los procesos estocásticos*. Medellín: Universidad de Antioquia, 2020. ISBN 9789587149395.

BALAKRISHNAN, R.; RANGANATHAN, K. *A Textbook of Graph Theory*. [S.l.]: Springer, 2012. ISBN 9781461445289.

BUSTAMANTE, M. D.; MELLON, P.; VELASCO, M. V. Determining when an algebra is an evolution algebra. *Mathematics*, v. 8, n. 8, p. 1349, 2020.

CABRERA, Y. *PhD thesis (Tese de doutorado) Evolution algebras*. [S.l.]: Facultad de ciencias, Universidad de Málaga, 2016. ISBN 0000000122987828.

CABRERA, Y.; CADAVID, P.; REIS, T. Derivations and loops of some evolution algebras. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, v. 117, n. 119, 2023.

CABRERA, Y.; CADAVID, P.; RODIÑO, M.; RODRÍGUEZ, P. On the characterization of the space of derivations in evolution algebras. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, v. 200, n. 2, p. 737–755, 2021.

CADAVID, P.; RODIÑO, M. L.; RODRIGUEZ, P. M. The connection between evolution algebras, random walks and graphs. *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 19, n. 02, p. 2050023, 2020.

CADAVID, P.; RODIÑO, M. L.; RODRIGUEZ, P. M. On the isomorphisms between evolution algebras of graphs and random walks. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 69, n. 10, p. 1858–1877, 2021.

CADAVID, P.; RODIÑO, M. L.; RODRIGUEZ, P. M.; VIDAL, S. J. On some singular graphs with non-isomorphic associated evolution algebras. v. 2405.12341, n. arXiv, p. math.CO, 2024.

CADAVID, P.; RODRIGUEZ, P. M.; VIDAL, S. J. Hilbert evolution algebras and its connection with discrete-time markov chains. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, v. 54, n. 3, p. 883–894, 2023.

CADAVID, P.; RODRIGUEZ, P. M.; VIDAL, S. J. Hilbert evolution algebras, weighted digraphs, and nilpotency. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, v. 118, n. 117, 2024.

CAMACHO, L. M.; GÓMEZ, J. R.; OMIROV, B. A.; TURDIBAEV, R. M. The derivations of some evolution algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 61, n. 3, p. 309–322, 2012.

CASAS, J.; LADRA, M.; ROZIKOV, U. A chain of evolution algebras. *Linear Algebra and its Applications*, v. 435, p. 852–870, 03 2010.

ELDUQUE, A.; LABRA, A. Evolution algebras and graphs. *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 14, n. 07, p. 1550103, 2015.

ELDUQUE, A.; LABRA, A. Evolution algebras, automorphisms, and graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 69, n. 2, p. 331–342, 2019.

KHUDOYBERDIYEV, A. K.; OMIROV, B. A.; QARALLEH, I. Few remarks on evolution algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, v. 14, n. 04, p. 1550053, 2015.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1978. ISBN 0471507318.

NORRIS, J. R. *Markov Chains*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN 9780521633963.

PANIELLO, I. Markov evolution algebras. *Linear and Multilinear Algebra*, v. 70, n. 19, p. 4633–4653, 2022.

RINCON, L. *Introducción a los procesos estocásticos*. México DF: Facultad de Ciencias UNAM, 2012. ISBN 9786070230448.

SCHAFER, R. D. *An Introduction to Nonassociative Algebras*. New York: Dover Publications, 1966. ISBN 9780486688138.

SCHINAZI, R. B. *Classical and Spatial Stochastic Processes*. New York: Birkhäuser, 1999. ISBN 9780817640811.

TIAN, J. P. *Evolution Algebras and their Applications*. 1ª. ed. Berlin: Springer, 2008. ISBN 978-3-540-74284-5.

TIAN, J. P.; VOJTĚCHOVSKÝ, P. Mathematical concepts of evolution algebras in non-mendelian genetics. *Quasigroups and Related Systems*, v. 14, n. 1, p. 111–122, 2006.

ZHEVLAKOV, K. A.; SLINKO, A. M.; SHESTAKOV, I. P.; SHIRSHOV, A. I. *Rings That are Nearly Associative*. [S.l.]: Elsevier Science, 1982. ISBN 9780080874234.

APÊNDICE A – ÁLGEBRAS

Esta seção do apêndice apresenta informações essenciais sobre álgebras, não necessariamente associativas, e alguns conceitos de análise que complementam o conteúdo do trabalho, incluindo principalmente definições. As principais referências bibliográficas utilizadas podem ser encontradas em (KREYSZIG, 1978; TIAN, 2008; ZHEVLAKOV et al., 1982), mas o leitor pode consultar qualquer livro de álgebra ou análise de sua preferência.

A.1 ÁLGEBRAS

Definição A.1.1. *Um espaço vetorial (ou espaço linear) sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *é um conjunto não vazio* $\mathcal{A}$ *de elementos* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \ldots$, *munido de duas operações:*

1. *Se* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$, *então* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$.

2. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$, *então* $\alpha\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$.

Essas operações devem satisfazer os seguintes axiomas para todos $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

1. $(\mathcal{A}, +)$ *é um grupo abeliano (existe um elemento neutro* $\mathbf{0} \in \mathcal{A}$ *e cada elemento* $\boldsymbol{x}$ *tem um oposto* $-\boldsymbol{x}$*).*

2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$ *(comutatividade da adição).*

3. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$ *(associatividade da adição).*

4. $\alpha(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{y}$ *(distributividade da multiplicação por escalar sobre a adição vetorial).*

5. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$ *(distributividade da multiplicação por escalar sobre a adição de escalares).*

6. $(\alpha\beta)\boldsymbol{y} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$ *(associatividade da multiplicação por escalar).*

7. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ *onde* 1 *é o elemento neutro da multiplicação em* $\mathbb{K}$.

Definição A.1.2. *Seja* $\mathcal{A}$ *um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Dizemos que o conjunto de elementos* $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$ *é uma base se satisfaz as seguintes condições:*

Linearmente independente: *Os elementos* $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots\}$ *são linearmente independentes, ou seja, se*

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{x}_r + \cdots = \boldsymbol{0},$$

então $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = \cdots = 0$ *para qualquer combinação finita de elementos.*

Gerador de $\mathcal{A}$: *Cada elemento* $\boldsymbol{x} \in \mathcal{A}$ *pode ser expresso como uma combinação linear de elementos de* $\mathcal{B}$.

Definição A.1.3. *Uma* $\mathbb{K}$*-álgebra* $\mathcal{A}$ *é um* $\mathbb{K}$*-espaço vetorial sobre o qual está definido um produto bilinear interno cumprendo que:*

1. *Se* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$, *então* $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$.

2. *Se* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}$, *então* $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$.

3. *Se* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{A}$, *então* $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$.

4. *Se* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}$, *então* $\alpha(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = (\alpha\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (\alpha\boldsymbol{y})$.

Observação A.1.4. *Duas observações importantes a serem consideradas.*

1. *Consideramos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e nos referimos a uma $\mathbb{R}$-álgebra $\mathcal{A}$ como álgebra $\mathcal{A}$.*

2. *Dizemos que um conjunto Λ é enumerável se, existe uma bijeção emtre o conjunto Λ e o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.*

A seguir, definimos os dois tipos de bases que podem ser encontrados na literatura.

Definição A.1.5. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Definimos*

Base de Hamel: *$\mathcal{B}$ é uma base de Hamel se, para todo elemento não nulo $\boldsymbol{v} \in \mathcal{A}$, existe uma representação única como uma combinação linear finita de elementos de $\mathcal{B}$ com coeficientes não nulos em $\mathbb{R}$.*

Base de Schauder: *$\mathcal{B}$ é uma base de Schauder se, para todo elemento não nulo $\boldsymbol{v} \in \mathcal{A}$, existe uma representação única como uma combinação linear infinita (convergente) de elementos de $\mathcal{B}$ com coeficientes não nulos em $\mathbb{R}$.*

Definição A.1.6. *Seja $\mathcal{A}$ um $\mathbb{R}$ espaço vetorial. Um subespaço $\mathcal{A}_1$ é um subconjunto não vazio de $\mathcal{A}$ tal que, para todo $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{A}_1$ e para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos que $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}_1$.*

Definição A.1.7. *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra com base $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e}_i \mid i \in \Lambda\}$. Dados dois conjuntos quaisquer $X, Y \subseteq \mathcal{A}$. Podemos obter os dois seguintes conjuntos:*

$$X \cdot Y = \{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in X, \boldsymbol{y} \in Y\}$$

ou

$$Y \cdot X = \{\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y} \in Y, \boldsymbol{x} \in X\}$$

Definição A.1.8. *A cardinalidade de um conjunto Ω, denotada por $\mid \Omega \mid$, representa a quantidade de elementos em Ω. Se Ω for finito $\mid \Omega \mid = n, n \in \mathbb{N}$ ou $\mid \Omega \mid < \infty$. Se for infinito $\mid \Omega \mid = \infty$. Lembrando que os conjuntos que trabalhamos são conjuntos enumeráveis.*

A noção de operador limitado é central na teoria dos espaços normados, pois assegura a existência de uma constante uniforme que controla o crescimento da norma da imagem.

Definição A.1.9. *Seja $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ espaçõs normados e seja T um operador linear, tal que $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, onde $D(T) \subseteq \mathcal{C}$, é o dominio de T. Dizemos que T é um operador limitado se existir um número real $c \geq 0$ tal que, para todo $\boldsymbol{x} \in D(T)$, a seguinte desigualdade seja satisfeita:*

$$\|T(\boldsymbol{x})\| \leq c \|\boldsymbol{x}\| .$$

APÊNDICE B – CADEIAS DE MARKOV

Este apêndice fornece as informações necessárias sobre cadeias de Markov, complementando o conteúdo abordado. Inclui as definições, corolários e teoremas mencionados ao longo deste trabalho. As referências bibliográficas utilizadas podem ser encontradas em (ACERO, 2020; NORRIS, 1998; RINCON, 2012). No entanto, o leitor pode consultar o livro de sua preferência sobre cadeias de Markov ou processos estocásticos.

B.1 CADEIAS DE MARKOV

Definição B.1.1. *Um processo estocástico* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$*, com espaço de estados* S *finito ou contavél, é uma cadeia de Markov de tempo discreto ou simplesmente cadeia de Markov discreta, se, para todo* $n \geq 0$ *e qualquer subconjunto finito* $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}$ *de possíveis estados de* S*, satisfaz o seguinte:*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1}|X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1}|X_n = s_n).$$

Dada a definição de cadeia de Markov, estabeleceremos os seguintes conceitos e definições:

1. As probabilidades condicionais na **Definição** B.1.1 são chamadas probabilidades de transição do estado i para o estado j em um único passo. Se a cadeia não depende de n, dizemos que a cadeia de Markov é homogênea no tempo. Denotamos as probabilidades de transição do estado i para o estado j em um único passo por:
$$p_{ij} := \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i).$$
2. As cadeias de Markov, neste trabalho, são cadeias de Markov homogênea e de tempo discreto. Tanto as que são geradas por álgebras de evolução markoviana, como as que possam ou não gerar uma álgebra de evolução markoviana.

3. Se S é finito, quer dizer, $S = \{1, \ldots, n\}$, chamamos a cadeia de Markov finita.

4. Se S é infinito contavél, quer dizer, $\mid S \mid = \infty$, chamamos a cadeia de Markov infinita.

5. $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ é o conjunto dos números naturais, incluindo o zero.

As cadeias de Markov têm associado um grafo dirigido e ponderado, em que os vértices representam os estados da cadeia e as arestas são as probabilidades de transição diferentes de zero, tal que o peso de cada aresta é a respectiva probabilidade de transição. Na **Figura** 15, observamos o grafo de uma cadeia de Markov infinita, em que os pesos são as probabilidades de transição de um estado para outro. Portanto, será natural apresentar o digrafo associado quando seja necessário.

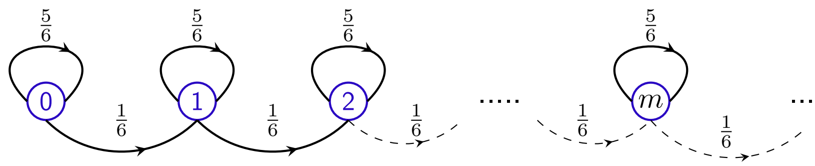

Figura 15 – Digrafo de uma cadeia de Markov infinita.

As probabilidades de transição são armazenadas na matriz $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$, chamada matriz de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$. No caso em que o espaço de estados S seja finito, a matriz de transição será finita, como pode ser observado na **Figura** 16; caso contrário, se o espaço S for infinito contavél, a matriz P será infinita.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Figura 16 – Matriz de transição de uma cadeina de Marvok com espaço de estados finito.

a1'

Definição B.1.2. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S. A probabilidade de ir do estado i para o estado j em n passos é denotada por p_{ij}^n, tal que:*

$$p_{ij}^n := \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Proposição B.1.3 (Equações de Chapman-Kolmogorov)**.** *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S. Para qualquer $l, m \in \mathbb{N}_0$, temos que:*

$$p_{ij}^{l+m} = \sum_{k\in S} p_{ik}^l p_{kj}^m.$$

Corolário B.1.4. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S. Dado qualquer $k \in S$, com $l, m \in \mathbb{N}_0$ temos que:*

$$p_{ij}^{l+m} \geq p_{ik}^l p_{kj}^m.$$

B.1.1 Clasificação dos Estados de uma Cadeia de Markov

Definição B.1.5. *Dizemos que um estado j é acessível a partir de i se existe $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^n > 0$. Se j é acessível a partir de i, escrevemos $i \to j$. Se os estados i e j são acessíveis um ao outro, ou seja, $i \to j$ e $j \to i$, então dizemos que i se comunica com j, e escrevemos $i \leftrightarrow j$.*

A relação de comunicação é uma relação de equivalência, pelo fato que ela é:

- Reflexiva: Um estado j se comunica com ele mesmo, dado que: $p_{jj}^0 = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_n = j) = 1 > 0$.
- Simétrica: Pela definição.
- Transitiva: Sejam i, j, k estados. Suponha que i e j se comunicam e que j e k se comunicam. Vejamos que i e k se comunicam. Como i e j se comunican,

existe $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^n > 0$ e, como j e k se comunicam, existe $m \geq 0$ tal que $p_{jk}^m > 0$. Portanto, pelo **Corolário** B.1.4, temos que $p_{ik}^{n+m} \geq p_{ij}^n p_{jk}^m > 0$.

As relações de equivalência permitem particionar o conjunto em subconjuntos disjuntos chamados classes. Em uma cadeia de Markov, a relação de equivalência de comunicação divide o espaço de estados em classes, que contêm os estados que se comunicam entre si. Essa definição permite abordar os conceitos de recorrência e de transitoriedade nas cadeias de Markov.

Definição B.1.6. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S. Seja S_0 um subconjunto de S, não necessariamente uma classe. Dizemos que S_0 é fechado se, para qualquer $i \in S_0$ e $j \notin S_0$, $i \not\to j$. Se S_0 é uma classe, então ela é chamada de classe fechada.*

B.1.2 Recorrência Probabilística

Definição B.1.7. *Seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S. A probabilidade de que, começando em i, a primeira chegada ao estado j seja no n-esimo passo, é denotada por:*

$$f_{ij}^n := \mathbb{P}(X_n = j, X_{n-1} \neq j, X_{n-2} \neq j, \dots, X_1 \neq j | X_0 = i) \quad \textit{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{B.1}$$

Definimos $f_{ij}^0 = 0$, incluindo o caso $i = j$.

Os estados de uma cadeia de Markov podem ser classificados em dois tipos: recorrente e transiente. Intuitivamente, um estado é recorrente se, com probabilidade um, a cadeia pode eventualmente retornar a esse estado. Quando isso ocorre em algum momento finito, a propriedade de Markov garante que é possível retornar a ele repetidamente com probabilidade um. Devido a esse comportamento, o estado é chamado de recorrente. Por outro lado, um estado é transiente se existe uma probabilidade positiva de que a cadeia, ao começar nele, nunca retorne a esse estado.

Definição B.1.8. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* S. *Em termos de probabilidades de primeira visita, a probabilidade de uma eventual visita ao estado* j, *partindo do estado* i, *é a seguinte probabilidade:*

$$f_{ij} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{n}. \tag{B.2}$$

Definição B.1.9. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* S. *Dizemos que o estado* i *é recorrênte, se* $f_{ii} = 1$. *Caso contrario, dizemos que* i *é transiente, se* $f_{ii} < 1$.

Proposição B.1.10. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* S. *Para todo* $n, k \in \mathbb{N}$, *tal que* $1 \leq k < n$ *e para tudo* $i, j \in S$, *temos que:*

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{k}\, p_{jj}^{n-k}.$$

Teorema B.1.11. *Seja* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *uma cadeia de Markov com espaço de estados* S. *Um estado* i *é recorrente, se e somente se,* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$.

Uma demonstração do **Teorema** B.1.11 pode ser encontrada em (RINCON, 2012). Nessa demonstração, destacamos a seguinte expressão que é valida para qualquer cadeia de Markov:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} = \frac{1}{1 - f_{ii}}. \tag{B.3}$$

Da Equação (B.3) podemos obter a seguinte intuição: a série da esquerda pode ser interpretada como o número médio de retornos ao estado i saindo do estado i. Então, se o estado i é recorrente, $f_{ii} = 1$, portanto, a série diverge, quer dizer, o número médio de retornos é infinito. Caso contrario, se o estado i é transiente, $f_{ii} < 1$, portanto, a série converge, quer dizer, o número médio de retornos é finito.

Definição B.1.12. *Dizemos que uma cadeia de Markov é irredutível se houver apenas uma classe, ou seja, todos os estados se comunicam entre se.*

Teorema B.1.13. *Toda cadeia de Markov finita, tem uma clase fechada.*