UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Micael Estevão da Silva

Instabilidade de Turing em modelos de EDP reação-difusão com termos não locais e aplicações

Recife

2025

Micael Estevão da Silva

Instabilidade de Turing em modelos de EDP reação-difusão com termos não locais e aplicações

Trabalho apresentado ao Programa de Pós graduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Orientador (a): César Augusto Rodrigues Castilho

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Silva, Micael Estevão da.
Instabilidade de Turing em modelos de EDP reação-difusão com termos não locais e aplicações / Micael Estevão da Silva. - Recife, 2025.
107f.: il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.
Orientação: César Augusto Rodrigues Castilho.
Inclui referências.

1. Instabilidade de Turing; 2. Condições de Turing - Sistemas não-locais; 3. Modelo epidemiológico SIR - Modelo do tipo predador-presa. I. Castilho, César Augusto Rodrigues. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

MICAEL ESTEVÃO DA SILVA

Instabilidade de Turing em modelos de EDP reação-difusão com termos não locais e aplicações

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutorado em Matemática.

Aprovado em: 27/02/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. César Augusto Rodrigues Castilho (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. João Antônio Miranda Gondim (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Alex Dias Ramos (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Diego Araujo de Souza (Examinador Externo)
University of Seville

Dedico a Deus, em primeiro lugar. Que toda honra e toda glória sejam dadas a Ele. Também dedico a todos aqueles que estiveram comigo nessa caminhada acadêmica, ajudando-me, fortalecendo-me e torcendo por mim.

AGRADECIMENTOS

"Que darei eu ao Senhor por todos os benefícios que me tem feito?" (Salmos 116:12). Agradeço a Deus, em primeiro lugar, pois, sem Seu auxílio e permissão, não teria sido possível concluir essa jornada. Nos momentos mais difíceis, vi Suas misericórdias se renovarem a cada manhã (Lamentações 3:22-23) sobre mim: segurando-me, andando comigo, fortalecendo-me, ensinando-me e colocando pessoas especiais em minha vida, que foram essenciais durante toda essa caminhada. Algo que parecia distante para mim tornou-se possível. Deus "fez infinitamente mais do que tudo o que pedi ou pensei"(Efésios 3:20). Obrigado, Pai!

Agradeço à minha família: minha mãe, Marinalva; meu pai, Estevão (in memoriam); meus irmãos, Marciela, Patrícia e Irailson; meus avós, Belchior, Delmira, Maria (in memoriam) e Liberato (in memoriam); e aos meus tios, tias e primos. Obrigado por todo apoio e carinho!

Aos meus amigos que sempre me ajudaram de alguma forma. À equipe Argé: Mirelle, Geovani e Jacqueline, que foram como irmãos para mim. Viemos juntos do Piauí para enfrentar essa batalha acadêmica, e sou imensamente grato por tudo. Ao Ricardo, grande companheiro de estudos e treinos. Também ao Júlio e ao Josué, que nos acolheram (os Argés) quando chegamos em Recife. Ao João Gondim, que sempre me ajudou no que pôde, principalmente na época do mestrado. Ao Brandon e ao Lázaro, pessoas sensacionais que me ajudaram bastante. Aos meus amigos da sala 216: Júnior, Rafael e Matheus, por tornarem os dias mais leves com nossas conversas e amizade, além dos ensinamentos matemáticos. À Michele Gonzaga, por sua grande ajuda nessa reta final do doutorado. E, por fim, à minha querida e amada igreja PIBEM, que foi um grande divisor de águas na minha vida.

Aos meus professores de mestrado e doutorado, que foram muito importantes para mim: Felipe Wergete, Diego Araújo, Marco Barone, Tonny e Ricardo Bortolotti, pelos ensinamentos transmitidos, pela compreensão, pelo esclarecimento de dúvidas e pelo incentivo. Ao professor Miguel Loayza, pelo suporte prestado para que eu pudesse realizar o mestrado na UFPE. Aos meus professores da graduação: Alex Sandro, Bruno Vasconcelos, João Santos, Daniel da Costa Silva, Gilberto, Erick e Cícero, por sempre me incentivarem a seguir para o mestrado, pelas aulas de Análise na Reta e pelas palavras de encorajamento. Sem esse início, não teria sido possível chegar até aqui.

Finalmente, ao meu orientador, César Castilho, por todo o conhecimento transmitido, pela ajuda, confiança, incentivo, compreensão nos momentos difíceis dessa jornada e pela paciência

que teve comigo. Obrigado por tudo!

E, por fim, ao CNPq, por ter possibilitado que eu enfrentasse essa jornada através do seu apoio financeiro.

RESUMO

Nesta tese, determinamos condições suficientes para a existência de instabilidade de Turing em sistemas de equações diferenciais parciais (EDP) do tipo reação-difusão com termos não locais e condições de contorno de Neumann. O estudo foi realizado em sistemas com duas equações (casos unidimensional e bidimensional) e com três equações (casos unidimensional e bidimensional). Nossos resultados foram aplicados a um modelo epidemiológico do tipo SIR e a um modelo do tipo predador-presa em uma reserva espacialmente isolada. Com o auxílio do software MATLAB, analisamos numericamente o efeito da instabilidade de Turing nesses modelos. Através de um modelo epidemiológico compartimental do tipo SIR, estudamos o papel dos não - infecciosos na evolução da virulência de um patógeno. Os resultados mostraram que a introdução do processo difusivo influencia significativamente na quantidade total de infectados. No modelo predador-presa, verificamos que o tamanho do região considerado, bem como os valores das taxas de difusão, determinam a organização espacial do sistema predador presa: padrões espaciais intricados e caóticos, só podem surgir se o tamanho da reserva for grande o suficiente. Nossos achados destacam a relevância da instabilidade de Turing para a compreensão de dinâmicas biológicas complexas.

Palavras-chaves: Instabilidade de Turing, condições necessárias para a existência de instabilidade de Turing , termos não locais, modelo epidemiológico SIR e modelo do tipo predador-presa.

ABSTRACT

In this thesis, we determine the sufficient conditions for the existence of Turing instability in reaction-diffusion partial differential equation (PDE) systems with nonlocal terms and Neumann boundary conditions. The study was conducted on systems with two equations (one-dimensional and two-dimensional cases) and three equations (one-dimensional and two-dimensional cases). Our results were applied to an epidemiological SIR-type model and a predator-prey model in a spatially isolated reserve. With the aid of MATLAB software, we numerically analyzed the effect of Turing instability in these models. Through a compartmental SIR-type epidemiological model, we studied the role of non-infectious individuals in the evolution of a pathogen's virulence. The results showed that the introduction of the diffusive process significantly influences the total number of infected individuals. In the predator-prey model, we found that the size of the considered region, as well as the values of the diffusion rates, determine the spatial organization of the predator-prey system: intricate and chaotic spatial patterns can only emerge if the reserve is large enough. Our findings highlight the relevance of Turing instability for understanding complex biological dynamics.

Keywords: Turing instability, necessary conditions for the existence of Turing instability, nonlocal terms, SIR epidemiological model, and predator-prey model.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Região de Instabilidade de Turing do modelo (3.11) para $r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $\rho = 0.94$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; e $D_R = 0.00001$. 65

Figura 2 – Comportamento dos polinômios b_3 e B para $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $\rho = 0.94$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; e $D_R = 0.00001$. 66

Figura 3 – Plot sobre os maiores valores da parte real $\lambda(\omega^2)$ como função de ω^2 para os mesmos valores dos parâmetros da figura (2) : $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $\rho = 0.94$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; e $D_R = 0.00001$. 67

Figura 4 – Comportamento dos polinômios $b_3(\lambda(\omega^2))$, $B(\lambda(\omega^2))$ e de max Re$(\lambda(\omega^2))$ para $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $\rho = 0.1$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; e $D_R = 0.00001$. . . . 68

Figura 5 – Comportamento dos polinômios $b_3(\lambda(\omega^2))$, $B(\lambda(\omega^2))$ e de max Re$(\lambda(\omega^2))$ para $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $\rho = 0.5$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; e $D_R = 0.00001$. . . . 69

Figura 6 – Plot das regiões onde para cada $\rho \in [0, 1]$ tem-se : Max Re$(\lambda(\omega^2)) > 0$; Max Re$(\lambda(\omega^2)) = 0$ e Max Re$(\lambda(\omega^2)) < 0$; para assim descobrir para quais valores de $\rho \in [0, 1]$ temos Instabilidade de Turing. Os valores dos demais parâmetros são : $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; e $D_R = 0.00001$. . . 70

Figura 7 – Esses casos representandos referem-se ao $\mu_{id} = 0.0100$ e $\beta = 0.3965$ Resultando no $R_0 = 5.9624$. 70

Figura 8 – Densidade de $S(x,t), V(x,t)$ e $R(x,t)$ respectivamente onde os parâmetros são : $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $\rho = 0.94$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; $D_R = 0.00001$; $K = 100$; $\omega = 20$, $T = 10.000$ e $L = 50\pi$. Nesse caso, $R_0 = 1.8584$ e $R_d = 23.4819$ 71

Figura 9 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda e terceira figura temos respectivamente : $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001$, , $T = 10000$ e $\omega = 20$; $D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001$, $T = 8000$ e $\omega = 2$; $D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001$, $T = 8000$ e $\omega = 1$. 72

Figura 10 – Região de Instabilidade para os valores de : $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001$; $D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001$; $D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001$ para cada figura respectivamente. 73

Figura 11 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda e terceira figura temos respectivamente : $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001$, $T = 9000$ e $\omega = 20$; $D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001$, $T = 5000$ e $\omega = 2$; $D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001$, $T = 5000$ e $\omega = 1$. 73

Figura 12 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda, terceira e quarta figura temos respectivamente que : $\rho = 0$ e $T = 800$; $\rho = 0.25$ e $T = 1000$; $\rho = 0.5$ e $T = 1450$; $\rho = 1$ e $T = 12000$ 74

Figura 13 – Plot da maior parte Re($\lambda(\omega^2)$) (Max Re($\lambda(\omega^2)$)) para cada $\rho \in [0,1]$ tal que para cada ρ Max Re($\lambda(\omega^2)$) > 0 (garantindo que tem Instabilidade de Turing). Note que conforme ρ se aproxima de 1, Max Re($\lambda(\omega^2)$) tende para 0.0315 sendo o maior valor atingido para $\rho \in [0,1]$ representando assim o o modo dominante como falado acima. 75

Figura 14 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda, terceira e quarta figura temos respectivamente que : $\rho = 0$ e $T = 800$; $\rho = 0.25$ e $T = 1000$; $\rho = 0.5$ e $T = 1450$; $\rho = 1$ e $T = 10000$ 75

Figura 15 – Plot da maior parte Re($\lambda(\omega^2)$) (Max Re($\lambda(\omega^2)$)) para cada $\rho \in [0,1]$ tal que para cada ρ Max Re($\lambda(\omega^2)$) > 0 (garantindo que tem Instabilidade de Turing). Note que conforme ρ se aproxima de 1, Max Re($\lambda(\omega^2)$) tende para 0.0315 sendo o maior valor atingido para $\rho \in [0,1]$ representando assim o o modo dominante como falado acima. 76

Figura 16 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, correspondendo a $R_0 \approx 1$, $R_0 \approx 5$ e $R_0 \approx 10$, respectivamente. Os parâmetros usados na primeira figura são: $\mu_{id} = 0{,}0500$, $\beta = 0{,}1265$, $r = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}0365$, $\mu = 0{,}02$, $\epsilon = 0$, $\delta = 0$, $D_s = 0{,}00001$, $D_v = 0{,}0001$, $D_R = 0{,}00001$, $K = 100$, $\omega = 20$, $T = 2190$ e $L = 50\pi$, resultando em $R_0 = 1{,}1878$. Na segunda figura, os parâmetros que diferem são: $\mu_{id} = 0{,}0500$, $\beta = 0{,}5365$ e $T = 1050$, resultando em $R_0 = 5{,}0376$. Na terceira figura, as diferenças são: $\mu_{id} = 0{,}0100$, $\beta = 0{,}6765$ e $T = 5500$, resultando em $R_0 = 10{,}1729$. 77

Figura 17 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, correspondendo, respectivamente, a: $\mu_{id} = 0{,}0100$ com $R_0 = 10{,}1729$; $\mu_{id} = 0{,}0500$ com $R_0 = 5{,}0376$; e $\mu_{id} = 0{,}1000$ com $R_0 = 1{,}0639$. 78

Figura 18 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, correspondendo, respectivamente, a: $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001\,, T = 1050\ e\ \omega = 20; D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001\,, T = 1050\ e\ \omega = 2; D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001\,, T = 1460\ e\ \omega = 1$. 79

Figura 19 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, com os parâmetros comuns usados em todos os casos sendo: $\mu_{id} = 0{,}0500$, $\beta = 0{,}5365$, $r = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}0365$, $\mu = 0{,}02$, $\epsilon = 0$, $\delta = 0$, $D_s = 0{,}00001$, $D_v = 0{,}0001$, $D_R = 0{,}00001$, $K = 100$, $\omega = 20$, $T = 1050$ e $L = 50\pi$, resultando em $R_0 = 5{,}0376$. Para os valores de δ, temos: na primeira figura, $\delta = 0$; na segunda figura, $\delta = 0{,}01$; na terceira figura, $\delta = 0{,}035$; e na quarta figura, $\delta = 0{,}077$. 80

Figura 20 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para diferentes valores de ρ em um cenário de vacinação ativa, considerando a possibilidade de perda de imunidade na população. Cada figura representa, respectivamente, os casos em que $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0,001$,$\epsilon = 0,01$ e $\epsilon = 0,06$. 81

Figura 21 – Plano de fase das soluções de u e v referente ao modelo de EDO (4.7) para diferentes condições inicias de u e v : $(0.1, 0.1); (0.5, 0.5); (0.9, 0.3); (0.8, 0.9); (0.2, 0.7)$. Os parâmetros escolhidos para tal caso são : $a = 1$; $b = 0,5$; $e = 0,2$; $p = 0,2$; $\mu = 0,05$; $m = 1$ e $L = 40\pi$. Além disso, como $\sigma(L)$ e $n(L)$ são parâmetros dos sistemas (4.3) (4.7) que dependem de L e dos parâmetros do sistema inicial (4.1) : ρ_1, ρ_2 e $\tilde{n}$; escolhemos para tais parâmetros os valores $\rho_1 = \frac{1}{L}$, $\rho_2 = \frac{1}{L}$ e $\tilde{n} = 200$ resultando em $\sigma = 1$ e $n(L) = 1,5915$. 95

Figura 22 – Comportamento dos polinômios $b_1(\omega^2)$ e $b_2(\omega^2)$ 2 para $D_u = 0,000063326 = 6.3326 \times 10^{(-5)}$ e $D_v = 0,00094989 = 9,4989 \times 10^{(-4)}$ e os demais parâmetros são os mesmo da figura anterior (21). 96

Figura 23 – Plot sobre os maiores valores da parte real $\lambda(\omega^2)$ como função de ω^2 . . . 96

Figura 24 – Os parâmetros escolhidos para tal caso são : $a = 9$; $b = 0,5$; $e = 0,165$; $p = 0,1$; $\mu = 0,1$; $m = 0,2$; $\rho_1 = 0,5$; $\rho_2 = 0,1$; $Du = 0,00002$; $D_v = 0,2500$ e $L = 10$. Além disso, $\tilde{n} = 20$ resultando em $n(L) = 0,4000$. Logo, $E_c = (0,968036656015707, 0,853815389347990)$ e $\zeta = 22,5000 > 1$ (condição de existência de E_c), $n(L) = 0,4000 > 0,2 = m$ (condição de estabilidade de E_c no modelo de EDO) e $F_{u^*} = 0,0094 > 0$ (condição para instabilidade de E_c) 97

Figura 25 – Os parâmetros escolhidos para os três casos foram : $a = 1$; $b = 0,5$; $e = 0,2$; $p = 0,2$; $\mu = 0,05$; $m = 1$. Além disso, como $\sigma(L)$ e $n(L)$ são parâmetros dos sistemas (4.3) (4.7) que dependem de L e dos parâmetros do sistema inicial (4.1) : ρ_1, ρ_2 e $\tilde{n}$; escolhemos para tais parâmetros os valores $\rho_1 = \frac{1}{L}$, $\rho_2 = \frac{1}{L}$ e $\tilde{n} = 200$. E os parâmetros da difusão foram $D_u = 0,0000012665 = 1,2665 \times 10^{-6}$ e $D_v = 0,0000094989 = 9,4989 \times 10^{-6}$. 98

Figura 26 – Os parâmetros escolhidos para os três casos foram os mesmo da figura anterior (25). A diferença é que para os três casos : $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$. 99

Figura 27 – Densidades de u e v no caso $L = 40\pi$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0000012665$ = e $D_v = 0,0000094989$. 100

Figura 28 – Densidades de u e v no caso $L = 40\pi$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$. . . 100

Figura 29 – Densidades de u e v no caso $L = 200$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0000012665 =$ e $D_v = 0,0000094989$. 101
Figura 30 – Densidades de u e v no caso $L = 200$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$. . . 102

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Nomeclatura das variavéis do modelo SIR 45
Tabela 2 – Parâmetros basico do modelo SIR 46
Tabela 3 – Nomeclatura das variavéis do modelo predador-presa 85
Tabela 4 – Parâmetros basico do modelo predador presa 86

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 17

2 CONDIÇÕES DE TURING PARA SISTEMAS NÃO-LOCAIS 20

2.1 INSTABILIDADE DE TURING EM SISTEMAS COM DUAS EQUAÇÕES E COM TERMOS NÃO LOCAIS. 20

2.1.1 Instabilidade de Turing em sistema bi-dimensional com duas equações e com termos não locais. 30

2.2 INSTABILIDADE DE TURING EM SISTEMA COM TRÊS EQUAÇÕES E COM TERMOS NÃO LOCAIS. 34

2.2.1 Instabilidade de Turing em sistema bi-dimensional com três equações e com termos não locais. 39

3 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO EPIDEMIOLÓGICO 42

3.1 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO SIR COM O PARÂMATRO ρ 42

3.2 O MODELO 43

3.3 OS PONTOS DE EQUILÍBRIO DO MODELO SIR 47

3.4 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO. . 50

3.5 CONDIÇÕES DE INSTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO. 59

3.6 SIMULAÇÕES 71

3.6.1 Número de pessoas Infectados 76

3.6.2 Efeito da vacinação no número de pessoas Infectados 80

3.7 CONCLUSÃO DA INSTABILIDADE DE TURING NO MODELO SIR . . . 82

4 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO PREDADOR- PRESA EM DUAS DIMENSÕES 84

4.1 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO PREDADOR- PRESA COM TERMO NÃO LOCAL 84

4.2 O MODELO 85

4.3 PONTOS DE EQUILÍBRIO DO MODELO PREDADOR-PRESA 87

4.4 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO. . 89

4.5 CONDIÇÕES DE INSTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO. 92

4.6 SIMULAÇÕES 99

4.7 CONCLUSÃO MODELO PREDADOR-PRESA 102

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 104
REFERÊNCIAS 106

1 INTRODUÇÃO

Em 1952, Alan Turing propôs pela primeira vez a teoria de reação-difusão para a formação de padrões em seu trabalho seminal sobre a base química da morfogênese (TURING, 1952). Nesse trabalho, Turing afirma que, em vez de agir para igualar as diferenças de concentração no espaço, a difusão pode ser acoplada a sistemas adequados de reação-difusão para desestabilizar um estado estacionário homogêneo estável e gerar padrões de concentração estáveis e independentes do tempo (JIA.Y CAI. Y; W, 2018). Isso significa que a instabilidade de Turing ocorre quando um sistema inicialmente estável se torna instável devido à difusão das substâncias envolvidas, levando à formação de padrões espaciais complexos que não seriam previsíveis apenas com base nas reações locais entre as substâncias.

Matematicamente, a Instabilidade de Turing (ou Instabilidade impulsionada por difusão) refere-se à desestabilização induzida pela difusão de um estado estacionário espacialmente homogêneo em um sistema de reação-difusão (MARTCHEVA, 2015). Isso ocorre se o estado estacionário homogêneo for estável a pequenas perturbações no modelo temporal (EDO) na ausência de difusão, mas instável a pequenas perturbações espaciais no modelo espacial (EDP) quando a difusão está presente (MURRAY, 2013), formando, assim, determinados tipos de padrões. Para que essa formação de padrões ocorra, são necessárias pelo menos duas classes interagindo, ou seja, ocorrendo em pelo menos um sistema 2×2 (MARTCHEVA, 2015).

A importância da instabilidade de Turing vai além da matemática pura, com aplicações significativas em várias áreas da biologia, onde destacamos aqui a ecologia e a epidemiologia.

Na ecologia, a modelagem com equações de reação-difusão tem se tornado uma das ferramentas adequadas para estudar as características dinâmicas importantes das interações predador-presa. Esses modelos espaço-temporais são capazes de refletir o efeito dos movimentos das espécies interativas em direções aleatórias por meio dos termos de difusão em seus habitats. Tais modelos conseguem investigar as dinâmicas de interações presa-predador em ambientes onde as espécies estão distribuídas de forma heterogênea e formam manchas localizadas (S PAL; S, 2018.).

Na epidemiologia, o papel da dispersão espacial em sistemas epidêmicos e o estudo da dinâmica espaço-temporal de uma população durante uma epidemia têm sido objeto de pesquisa para muitos cientistas (CARRERO; ., 2003). A adição de uma reação-difusão nos modelos epidemiológicos pode tornar as pesquisas mais precisas (M.ZHANG et al., 2001). A instabilidade

de Turing, que descreve como um sistema reação-difusão em equilíbrio pode se tornar instável devido à difusão, explica como a doença pode se espalhar de maneiras complexas e formar padrões de distribuição de infectados e suscetíveis ao longo do espaço. Estudar essa instabilidade em modelos epidêmicos pode melhorar a previsão da propagação de doenças e contribuir para o desenvolvimento de estratégias de controle mais eficazes e uma resposta de saúde pública mais informada e eficiente.

Vemos que estudar a propriedade de Instabilidade de Turing em sistemas de reação-difusão é muito importante. Na maioria da literatura, o estudo dessa propriedade é feito em modelos nos quais os agentes envolvidos (pode ser espécies de animais ou pessoas) interagem (têm contato) somente com agentes que estão no mesmo local (posição no espaço). Exemplo, um agente U entra em contato com um agente V somente em um local x, isto é:

$$U(x,t)V(x,t)\,.$$

Nesta tese vamos estudar instabilidade de Turing em modelos com termos não locais da forma

$$U(x,t)\int_0^L V(x,t)\,dx\,.$$

A motivação para essa inclusão é a de refletir a realidade de processos biológicos e ecológicos, onde as interações entre indivíduos não são necessariamente restritas somente a uma mesma vizinhança. Em modelos de predador-presa, por exemplo, as equações de reação-difusão com termos de interação não-local conseguem modelar situações em que indivíduos em um ponto espacial têm acesso a recursos localizados em outro ponto (S PAL; S, 2018.).

Neste trabalho, nosso propósito é o de determinarmos condições necessárias para termos a instabilidade de Turing em um sistema de reação-difusão com termos não locais, e aplicar nossos resultados em um modelo epidemiológico e um modelo ecológico, de formas a entendermos os efeitos causados pela difusão como mais um elemento a ser considerado para o estudo e compreensão desses modelos.

A seguir (Capítulo (2)), após revisarmos brevemente os conceitos involvidos, provamos nosso teorema principal, onde determinamos as condições suficientes para que ocorra instabilidade de Turing em um sistema de reação-difusão com os termos não locais abordados. Analisamos um sistema com duas equações e outro com três equações. Em ambos os casos, realizamos a análise dessas condições considerando os cenários unidimensional e bidimensional.

No Capítulo (3), estruturamos um modelo epidemiológico compartimental do tipo SIR com termo não local. Nesse modelo, com base na teoria apresentada no Capítulo (2), verificamos

se ele satisfazia as condições necessárias para que ocorresse instabilidade de Turing em um sistema de três equações no caso unidimensional. Após a análise dessas condições, utilizamos o conceito de instabilidade de Turing para estudar estudamos o papel dos não - infecciosos na evolução da virulência de um patógeno.

Por fim, no Capítulo (4), estruturamos um modelo do tipo predador-presa com termo não local, considerando uma reserva espacialmente isolada. De forma semelhante, com base na teoria apresentada no Capítulo (2), analisamos se tal modelo satisfazia as condições necessárias para que ocorresse instabilidade de Turing em um sistema de duas equações no caso bidimensional. Após essa análise, por meio da teoria da instabilidade de Turing, estudamos a influência do tamanho da reserva (território onde estão predador e presa) na dinâmica predador-presa.

2 CONDIÇÕES DE TURING PARA SISTEMAS NÃO-LOCAIS

Neste capítulo, apresentamos de forma resumida a teoria da instabilidade de Turing, além da motivação e dos objetivos deste trabalho. Investigamos as condições necessárias para que ocorra a instabilidade de Turing em sistemas de Equações Diferenciais Parciais (EDP) do tipo reação-difusão com termos não locais. Esses sistemas incluem um com duas equações e outro com três equações. Em ambos os casos, realizamos a análise dessas condições considerando os cenários unidimensional e bidimensional. Nos capítulos posteriores, aplicaremos essas condições a dois modelos: um em Ecologia e outro em Epidemiologia.

2.1 INSTABILIDADE DE TURING EM SISTEMAS COM DUAS EQUAÇÕES E COM TERMOS NÃO LOCAIS.

A Instabilidade de Turing refere-se à desestabilização induzida pela difusão de um estado estacionário espacialmente homogêneo em um sistema de reação-difusão (MARTCHEVA, 2015). Matematicamente, um sistema apresenta Instabilidade de Turing ou Instabilidade impulsionada por difusão se o estado estacionário homogêneo for estável a pequenas perturbações no modelo temporal (EDO) na ausência de difusão, mas instável a pequenas perturbações espaciais no modelo espacial (EDP) quando a difusão é introduzida (MURRAY, 2013), podendo formar dessa forma, padrões geométricos específicos. Para que essa instabilidade ocorra, são necessárias pelo menos duas classes interagindo, ou matematicamente , necessita-se de um sistema que tenha pelo menos duas dimensões (MARTCHEVA, 2015).

Heuristicamente, para que a instabilidade de Turing ocorra em um sistema 2x2, devemos ter uma situação em que um agente (uma substância química ou espécie) B induz a produção de mais agentes do tipo B e se espalha (difunde-se) em um determinado meio (espaço). Devemos ter ainda um agente C, que ao se difundir, inibe a produção de B. Esse efeito de reação e difusão dos agentes no meio resulta em picos de concentração do agente B. Esse processo é também denominado de processo ativador-inibidor, onde, neste caso, B atua como o agente ativador e C como o inibidor.

Como mencionamos, a formação de padrões de Turing ocorre em um sistema de pelo menos 2x2, isto é, em sistemas do tipo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= F(u,v) + D_u \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= G(u,v) + D_v \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

E como visto na maior parte da literatura, o estudo desse padrões são feitos em modelos nos quais os agentes interagem (tem contato) em uma mesma posição do espaço, isto é, as interações entre os agentes U e V são pontuais, isto é, o um agente U entra em contato com um agente V somente em um local x, isto é:

$$U(x,t)V(x,t)\,.$$

.

Nesta tese vamos estudar a instabilidade de Turing em modelos com termos não locais, mais exatamente, vamos assumir um termo de interação integral 'quebrando' assim a localidade, ou seja, assumiremos termos da forma

$$U(x,t)\int_0^L V(x,t)\,dx\,.$$

Nosso propósito de estudar instabilidade de Turing em modelos com termos não locais, é generalizar os critérios de instabilidade de Turing para modelos com termos não locais, aumentando assim o alcance da teoria da instabilidade de Turing.

A seguir, tendo como principais referências (MARTCHEVA, 2015), (MURRAY, 2013), estendemos os critérios de Turing para sistemas do tipo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= F(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) + D_u \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= G(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) + D_v \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

com $x \in [0,L] \subset \mathbb{R}$ e $t \geq 0$. Além disso, u, v satisfazem as condições de fronteiras homôgeneas de neumann :

$$\begin{aligned} u_x(0,t) &= u_x(L,t) = 0 \ \forall t \geq 0. \\ v_x(0,t) &= v_x(L,t) = 0 \ \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Suponha que o sistema (2.2) admita uma solução constante u^*, v^*. Ou seja,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^* \\ v(x,t) &= v^* \end{aligned}$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} F(u^*, v^*, \int_0^L u^* dx, \int_0^L v^* \, dx) &= F(u^*, v^*, Lu^*, Lv^*) \equiv F(u^*, v^*) = 0 \\ G(u^*, v^*, \int_0^L u^* dx, \int_0^L, v^* \, dx) &= G(u^*, v^*, Lu^*, Lv^*) \equiv G(u^*, v^*) = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dessa forma u^* e v^* satisfazendo (2.3) são pontos de equílibrio do modelo espacial autônomo (2.2) e também são uma solução de equilíbrio do modelo de EDO obtido a partir de (2.2) assumindo-se difusão zero, isto é, $D_u = D_v = 0$.

Definição 2.1. *O sistema 2.3 possui instabilidade de Turing em* (u^*, v^*) *se*

I) u^* *e* v^* *são soluções de equílibrio* ***localmente estáveis*** *do modelo de EDO em* (2.2) *quando* $D_u = D_v = 0$.

II) u^* *e* v^* *são soluções* ***instáveis*** *do modelo de EDP* (2.2) *com* D_u *e* $D_v \neq 0$ *(instabilidade impulsionada pela difusão).*

Nosso objetivo é encontrar condições que garantam que u^*, v^* satisfaçam i) e ii).

Caso I : Condições de Estabilidade

Queremos análisar condições para estabilidade de u^*, v^* no modelo de EDO em (2.2), isto é, na ausência da variavel espacial x. Então:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u(t) \implies \int_0^L u \, dx = Lu(t) \\ v(x,t) &= v(t) \implies \int_0^L v \, dx = Lv(t) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} F(u(x,t), v(x,t), \int_0^L u(x,t) dx, \int_0^L v(x,t) \, dx) &= F(u(t), v(t), Lu(t), Lv(t)) \equiv \Phi(u,v) \\ G(u(x,t), v(x,t), \int_0^L u(x,t) dx, \int_0^L v(x,t) \, dx) &= G(u(t), v(t), Lu(t), Lv(t)) \equiv \Psi(u,v) \end{aligned} \tag{2.4}$$

O sistema (2.2) depende somente de $u(t), v(t)$, isto é, reduz-se para o sistema de EDOs

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t)}{\partial t} &= \Phi(u,v) \\ \frac{\partial v(t)}{\partial t} &= \Psi(u,v) \, . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Observe que as funções Φ, Ψ no modelo de EDO (2.5) são diferentes das funções F, G do modelo de EDPs (2.2) com os termos não locais $\int_0^L u\,dx$ e $\int_0^L v\,dx$. Devido a isso, as derivadas parcias de Φ e Ψ com respeito a u e v no sistema de EDOs podem ser diferentes das derivadas parcias de F e G com respeito u e v a no modelo de EDPs.

De fato, considere

$$\begin{aligned} u(t) &= u^* + \delta\, z(t) \\ v(t) &= v^* + \delta\, y(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

então

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \Phi\Big((u^*,v^*) + \delta\,(z,\,y)\Big) \\ \Psi(u,v) &= \Psi\Big((u^*,v^*) + \delta\,(z,\,y)\Big) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Expandindo Φ, Ψ em série de taylor e pegando os termos até a derivada de primeira ordem

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \Phi(u^*,v^*) + \delta\,\nabla\Phi(u^*,v^*)\cdot(z,\,y) \\ \Psi(u,v) &= \Psi(u^*,v^*) + \delta\,\nabla\Psi(u^*,v^*)\cdot(z,\,y) \end{aligned}$$

Por (2.3), (2.4) $\Phi(u^*,v^*) = \Psi(u^*,v^*) = 0$. Então

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \delta\,\nabla\Phi(u^*,v^*)\cdot(z,\,y) \\ \Psi(u,v) &= \delta\,\nabla\Psi(u^*,v^*)\cdot(z,\,y) \end{aligned}$$

Portanto, linearizando-se o sistema (2.5) em torno de u^*, v^*, isto é considerando (2.6), temos

$$\frac{\partial z(t)}{\partial t} = \nabla\Phi(u^*,v^*)\cdot(z,\,y)$$

$$\frac{\partial y(t)}{\partial t} = \nabla\Psi(u^*,v^*)\cdot(z,\,y)$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(t)}{\partial t} &= \Phi_u(u^*,v^*)\;z \;+\; \Phi_v(u^*,v^*)\;y \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} &= \Psi_u(u^*,v^*)\;z \;+\; \Psi_v(u^*,v^*)\;y \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para estudarmos a estabilidade do ponto crítico considere uma solução da forma $z(t) = a_0\, e^{\lambda t}$ e $y = b_0\, e^{\lambda t}$. Substituindo-se em (2.8) temos que:

$$(\Phi_u(u^*, v^*) - \lambda)a_0 + \Phi_v(u^*, v^*)b_0 = 0$$

$$\Psi_u(u^*, v^*)a_0 + (\Psi_v(u^*, v^*) - \lambda)b_0 = 0$$

No qual escrevemos no seguinte sistema matricial:

$$M \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Phi_u(u^*, v^*) - \lambda) & \Phi_v(u^*, v^*) \\ \Psi_u(u^*, v^*) & (\Psi_v(u^*, v^*) - \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Estamos interessados em encontrar soluções não triviais do sistema linear homogêneo (2.9). Para que tais soluções existam λ deve ser raiz da equação polinomial $Det(M) = 0$. Calculando o determinante obtemos a seguinte equação quadratica em termos de λ

$$\lambda^2 - (\Phi_u + \Psi_v)\lambda + (\Phi_u\Psi_v - \Phi_v\Psi_u) = 0 \tag{2.10}$$

Sendo λ_1, λ_2 soluções de (2.10), u^* e v^* serão soluções estáveis de (2.5) se $Re\,\lambda_1 < 0$ e $Re\,\lambda_2 < 0$. O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz nos diz que isso ocorre quando

$$a_2 = -(\Phi_u + \Psi_v) > 0 \Leftrightarrow \Phi_u + \Psi_v < 0$$
$$a_1 = \Phi_u\Psi_v - \Phi_v\Psi_u > 0$$

Considerando-se a matriz Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} \Phi_u & \Phi_v \\ \Psi_u & \Psi_v \end{pmatrix}_{|u=u^*, v=v^*}$$

teremos estabilidade local se o traço da matriz jacobiana for negativo e o determinante da matriz jacobiana for positivo.

Em resumo, para que u^*, v^* sejam pontos de equilibrio estáveis de (2.2) devemos ter

$$tr(J) = \Phi_u + \Psi_v < 0 \quad e \quad Det(J) = \Phi_u\Psi_v - \Phi_v\Psi_u > 0. \tag{2.11}$$

Caso II: Condições de Instabilidade

Considere agora o sistema de EDPs (2.2). Calcularemos as condições de instabilidade local de forma análoga ao caso anterior. Considere

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^* + \delta\, z(x,t) \\ v(x,t) &= v^* + \delta\, y(x,t) \end{aligned}$$

onde as funções $z(x,t)$ e $y(x,t)$ são assumidas satisfazendo as condições de contorno de Neumann. Então

$$\begin{aligned} F(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) &= F\Big((u^*,v^*,Lu^*,Lv^*) + \delta\,(z,\,y,\int_0^L z\,dx,\int_0^L y\,dx)\Big) \\ G(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) &= G\Big((u^*,v^*,Lu^*,Lv^*) + \delta\,(z,\,y,\int_0^L z\,dx,\int_0^L y\,dx)\Big) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Expandindo F, G em série de taylor e pegando os termos até a derivada de primeira ordem temos que:

$$F(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) = F(u^*,v^*,Lu^*,Lv^*) + \delta\,\nabla F(u^*,v^*,Lu^*,Lv^*)\cdot(z,\,y,\int_0^L z\,dx,\int_0^L y\,dx)$$

$$G(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) = G(u^*,v^*,Lu^*,Lv^*) + \delta\,\nabla G(u^*,v^*,Lu^*,Lv^*)\cdot(z,\,y,\int_0^L z\,dx,\int_0^L y\,dx)$$

Como de (2.3) $F(u^*,v^*,Lu^*,Lv^*) \equiv F(u^*,v^*) = 0 = G(u^*,v^*) \equiv G(u^*,v^*,Lu^*,Lv^*)$ então

$$F(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) = \delta\,\nabla F(u^*,v^*)\cdot(z,\,y,\int_0^L z\,dx,\int_0^L y\,dx)$$

$$G(u,v,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx) = \delta\,\nabla G(u^*,v^*)\cdot(z,\,y,\int_0^L z\,dx,\int_0^L y\,dx)$$

Logo, linearizando (2.2) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= F_u(u^*,v^*)\;z + F_v(u^*,v^*)\;y + F_p(u^*,v^*)\int_0^L z\,dx + F_q(u^*,v^*)\int_0^L y\,dx + D_u\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= G_u(u^*,v^*)\;z + G_v(u^*,v^*)\;y + G_p(u^*,v^*)\int_0^L z\,dx + G_q(u^*,v^*)\int_0^L y\,dx + D_v\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde as derivadas parcias de F e G estão sendo avaliadas nos pontos de equílibrio (u^*,v^*) e $p(t) = \int_0^L u(x,t)\,dx$ e $q(t) = \int_0^L v(x,t)\,dx$. As derivadas parciais F_p e G_q significam as

derivadas de F e G com respeito aos termo integral. Nos capitulos seguintes, veremos de forma mais clara, como calculamos as derivadas parciais com respeito ao termo integral nos modelo estudados.

Queremos encontrar soluções de (2.13). Considere $W(x,t) = \begin{pmatrix} z(x,t) \\ y(x,t) \end{pmatrix}$. Note que para cada $t \geq 0$ fixo, $W(x,t)$ define um caminho dependente de x. Então, o sistema (2.13) reduz-se ao seguinte sistema matricial :

$$W_t = AW(x,t) + B\int_0^L W(x,t)\,dx + DW_{xx} \tag{2.14}$$

Onde,

$$A = \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} F_p & F_q \\ G_q & G_q \end{pmatrix}, \int_0^L W(x,t)\,dx = \begin{pmatrix} \int_0^L z(x,t)\,dx \\ \\ \int_0^L y(x,t)\,dx \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

Note que o sistema (2.14) é um sistema linear. Então podemos procurar soluções na forma de soluções separavéis. Consideramos uma solução separável geral da forma

$$W(x,t) = T(t)X(x)$$

onde assumimos que $T(t)$ é uma função escalar de t. Substituindo em (2.14) e depois dividindo por $T(t)$, temos:

$$\frac{T'(t)}{T(t)}X(x) \;\; = \;\; A\,X(x) + DX''(x) + B\int_0^L X(x)dx.$$

Por um lado, para que essa igualdade aconteça para todo $t \geq 0$, a expressão $\dfrac{T'(t)}{T(t)}$ tem que ser uma constante. Dessa forma consideramos λ como tal constante. Então:

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda \implies T(t) = T_0 e^{\lambda t}.$$

onde T_0 é uma constante apropriada .Por outro lado, sendo $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$, temos o seguinte problema :

$$\lambda X(x) \;\; = \;\; A\,X(x) + DX''(x) + B\int_0^L X(x)dx \tag{2.16}$$

Como $z(x,t), y(x,t)$ são assumidas satisfazendo as condições de contorno de Neumann, consequetemente queremos que $X(x)$ também satisfaça. Então, note que podemos encontrar uma solução não trivial da equação (2.16) se considerarmos $X(x)$ satisfaça o problema de autovalor:

$$\begin{aligned} X''(x) + \omega^2 X(x) &= 0 \\ X'(0) = X'(L) &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Que tem como solução (auto função):

$$X_\omega(x) = C_\omega \, cos(\omega \, x), \quad \omega = \frac{n\pi}{L}. \tag{2.18}$$

pois $\int_0^L X_\omega(x)\, dx = 0$.

Esse processo define $\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}$ para cada $n = 1, 2 \ldots$, e para cada n, $X_{\omega_n}(x) = C_{\omega_n} cos(\omega_n \, x)$, e $\int_0^L X_{\omega_n}(x)\, dx = 0$.

Portanto, temos a solução geral da forma

$$W(x,t) = \sum_n a_n \, e^{\lambda_n t} X_{\omega_n}(x) \tag{2.19}$$

onde para cada n, a_n é uma constante apropriada. Note que Substituindo (2.19) em (2.14) para cada n, cancelando $a_n \, e^{\lambda_n t}$ para cada n, e lembrando que $\int_0^L X_\omega(x)\, dx = 0$, temos :

$$\lambda_n X_{\omega_n}(x) = A \, X_{\omega_n}(x) + D \, X''_{\omega_n}(x) \tag{2.20}$$

Por (2.17), $X''_{\omega_n}(x) = -\omega_n^2 X_{\omega_n}(x)$. Assim,

$$A \, X_{\omega_n}(x) - D \, \omega_n^2 X_{\omega_n}(x) - \lambda_n X_{\omega_n}(x) = \vec{0} \implies M_n \, X_{\omega_n}(x) = \vec{0} \tag{2.21}$$

onde $M_n = \begin{pmatrix} (F_u - D_u \, \omega_n^2 - \lambda_n \,) & F_v \\ G_u & (G_v - D_v \, \omega_n^2 - \lambda_n \,) \end{pmatrix}$.

O sistema (2.21) tem uma solução não trivial se e somente se o determinante da matriz M_n é nulo, isto é, $Det(M_n) = 0$. Calculando o determinante obtemos a seguinte equação quadratica em termos de λ_n :

$$\lambda_n^2 + [\,(D_u + D_v)\omega_n^2 - (F_u + G_v)\,]\lambda_n + [D_u D_v \omega_n^4 - (D_v F_u + D_u \, G_v)\, \omega_n^2 + (F_u G_v - F_v G_u)] = 0 \tag{2.22}$$

Pelo critério de **estabilidade** de Routh-Hurwitz **as condições de estabilidade** para u^*, v^* no sistema (2.13) são:

$$\begin{aligned} &(D_u + D_v)\omega_n^2 - (F_u + G_v) > 0 \Leftrightarrow F_u + G_v - D_u\,\omega_n^2 - D_v\,\omega_n^2 < 0 \\ &D_u D_v \omega_n^4 - (D_v F_u + D_u\,G_v)\,\omega_n^2 + (F_u G_v - F_v G_u) > 0 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Mas agora, queremos encontrar condições para que u^*, v^* **sejam instáveis** no sistema (2.13). Portanto, para que isso aconteça, **uma condição suficiente** é que uma das desigualdades de (2.23) **não seja satisfeita.**

Observação 2.1. *As derivadas parciais de F, G com respeito a u e v obtidas do sistema de EDP* (2.13)*, podem ser iguais ou diferentes das derivadas parciais do modelo de EDO* (2.5)*; isso vai depender de qual modelo com termo não local está sendo estudado. (No decorrer do trabalho, ao aplicar um modelo nessa teoria, veremos isso de forma mais clara.)*

Mas caso ocorra que $F_u = \Phi_u$ e $G_v = \Psi_v$ como de (2.11) *$\Phi_u + \Psi_v < 0$, com sinais opostos, então $F_u + G_v < 0$. Logo a primeira desigualdade da condição de estabilidade em* (2.23) *sempre é satisfeita. Com isso, a única forma de desestabilizar os pontos de equílibrio com os termos de difusão é se*

$$D_u D_v\,\omega_n^4 - (D_v F_u + D_u\,G_v)\,\omega_n^2 + (F_u G_v - F_v G_u) < 0.$$

Definindo a função $H(\omega_n^2) = A\omega_n^4 - B\omega_n^2 + C$ onde $A = D_u D_v$, $B = D_v F_u + D_u\,G_v$ e $C = F_u G_v - F_v G_u$, a instabilidade ocorre se as raizes de $H(\omega_n^2) = 0$ são reais, digamos que tais raizes sejam ω_{n1}^2 e ω_{n2}^2, e se para $\omega_n^2 \in [\omega_{n1}^2, \omega_{n2}^2]$ existe solução para o problema de Auto - valor (2.17)*. Logo a instabilidade de Turing ocorre se:*

$$\begin{aligned} B > 0 \quad &\Longrightarrow \quad D_v F_u + D_u\,G_v > 0 \\ B^2 > 4AC \quad &\Longrightarrow \quad D_v F_u + D_u\,G_v > 2\sqrt{D_u D_v (F_u G_v - F_v G_u)}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Note que o caso $D_u = D_v$ não pode acontecer , pois caso contrário teriamos que :

$$D_v F_u + D_u\,G_v > 0 \implies D_u F_u + D_u\,G_v > 0 \implies F_u + G_v > 0$$

contradizendo a condição de estabilidade no qual $F_u + G_v < 0$.

Observação 2.2. *Por mais que tenhamos termos não locais* $\int_0^L u\,dx$, $\int_0^L v\,dx$ *como no sistema* (2.2)*, podemos ver que tanto para a análise das condições de estabilidade quanto para a análise das condições de instabilidade é suficiente analisar somente as derivadas parciais com respeito a* u *e* v*, avaliadas nos pontos de equilíbrio* u^* *e* v^**, assim como na teoria comum vista na literatura, como podemos observar, por exemplo, em (MARTCHEVA, 2015) e (MURRAY, 2013).*

Em resumo, para que se tenha instabilidade de Turing no sistema (2.2) temos:

Caso I) No modelo de EDO:

$$tr(J) = \Phi_u + \Psi_v < 0 \quad e \quad Det(J) = \Phi_u\Psi_v - \Phi_v\Psi_u > 0. \tag{2.25}$$

Caso II) No modelo de EDP algumas das desigualdade seguintes **não** devem ser satisfeitas:

$$\begin{aligned} &(D_u + D_v)\omega_n^2 - (F_u + G_v) > 0 \\ &D_uD_v\omega_n^4 - (D_vF_u + D_u\,G_v)\,\omega_n^2 + (F_uG_v - F_vG_u) > 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.1.1 Instabilidade de Turing em sistema bi-dimensional com duas equações e com termos não locais.

Considere o sistema (2.2) sendo bi-dimensional, isto é:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} &= F(u,v,\int_0^L\int_0^L u\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L v\,dx\,dy)+D_u\,(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2})\\ \frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t} &= G(u,v,\int_0^L\int_0^L u\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L v\,dx\,dy)+D_v(\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x,y,t)}{\partial y^2})\end{aligned} \tag{2.27}$$

para todo $(x,y)\in[0,L]\times[0,L]$ e $t\geq 0$ onde u,v satisfazem as condições de fronteiras homôgeneas de neumann :

$$\begin{aligned}u_x(0,y,t) &= u_x(L,y,t)=v_x(0,y,t)=v_x(L,y,t)=0\ \forall t\geq 0.\\ u_y(x,0,t) &= u_y(x,L,t)=v_y(x,0,t)=v_y(x,L,t)=0\ \forall t\geq 0.\end{aligned} \tag{2.28}$$

De semelhante modo, seja u^*,v^* solução constante não nula de :

$$\begin{aligned}F(u^*,v^*,\int_0^L\int_0^L u^*dxdy,\int_0^L\int_0^L v^*\,dxdy) &= F(u^*,v^*,L^2u^*,L^2v^*)=0\\ G(u^*,v^*,\int_0^L\int_0^L u^*dxdy,\int_0^L\int_0^L v^*\,dx\,dy) &= G(u^*,v^*,L^2u^*,L^2v^*)=0\end{aligned} \tag{2.29}$$

Dessa forma u^* e v^* satisfazendo (2.29) são pontos de equílibrio do modelo espacial homôgeneo (2.27) e também é uma solução de equilíbrio do modelo EDO obtido (2.27) quando $D_u=D_v=0$. Assim como na secção anterior, para que o sistema (2.27) tenha instabilidade de turing :

Definição 2.2.

i) u^* *e* v^* *tem que serem soluções de equílibrio* ***localmente estáveis*** *do modelo de EDO em* (2.27) *quando* $D_u=D_v=0$.

ii) *Mas* u^* *e* v^* *tem que serem soluções* ***instáveis*** *do modelo de EDP em* (2.27) *com* $D_u,D_v\neq 0$ *(instabilidade impulsionada pela difusão).*

Caso Estabilidade

Queremos encontrar condições para que u^* e v^* sejam pontos de equílibrio estaveis do modelo (2.27) na ausência da variavéis espaciais x, y , isto é :

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= u(t) \implies \int_0^L \int_0^L u\,dx\,dy = L^2 u(t) \\ v(x,y,t) &= v(t) \implies \int_0^L \int_0^L v\,dx\,dy = L^2 v(t) \end{aligned}$$

E seguindo de forma análoga como na secção (2.1) obtemos o modelo de EDO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t)}{\partial t} &= \Phi(u,v) \\ \\ \frac{\partial v(t)}{\partial t} &= \Psi(u,v) \end{aligned} \tag{2.30}$$

E dessa forma, para que u^* e v^* sejam pontos de equílibrio estaveis do modelo de EDO:

$$Tr(J) = \Phi_u + \Psi_v < 0 \;\; e \;\; Det(J) = \Phi_u \Psi_v - \Phi_v \Psi_u > 0 \tag{2.31}$$

Com isso, vemos que mesmo sendo um modelo bi-dimensional, a análise de condições de estabilidade são as mesmas.

Caso instabilidade

Considere

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= u^* + \delta\, z(x,y,t) \\ v(x,y,t) &= v^* + \delta\, \varphi(x,y,t) \end{aligned}$$

onde as funções $z(x,y,t)$ e $\varphi(x,y,t)$ são assumidas como satisfazendo as condições de con-

torno de Neumann (2.28). Então Linearizando (2.27), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} = F_u(u^*, v^*)\ z\ +\ F_v(u^*, v^*)\ \varphi + F_I(u^*, v^*) \int_0^L \int_0^L z\, dx\, dy \quad &+ \quad F_J(u^*, v^*) \int_0^L \int_0^L \varphi\, dx\, dy \\
&+ \quad D_u(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t} = G_u(u^*, v^*)\ z\ +\ G_v(u^*, v^*)\ \varphi + G_I(u^*, v^*) \int_0^L \int_0^L z\, dx\, dy \quad &+ \quad G_J(u^*, v^*) \int_0^L \int_0^L \varphi\, dx\, dy \\
&+ \quad D_v(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2})
\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $I(t) = \int_0^L \int_0^L u\, dx\, dy$ e $J(t) = \int_0^L \int_0^L v\, dx\, dy$.

Considere $W(x, y, t) = \begin{pmatrix} z(x, y, t) \\ y(x, y, t) \end{pmatrix}$. Note que também $W(x, y, t)$ define um caminho. Então, o sistema (2.13) reduz-se ao seguinte sistema matricial :

$$W_t = A\, W(x, y, t) + B \int_0^L \int_0^L W(x, y, t)\, dx\, dy\ + \nabla^2 W \tag{2.33}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} F_p & F_q \\ G_q & G_q \end{pmatrix}, \\
\int_0^L \int_0^L W(x, y, t)\, dx\, dy &= \begin{pmatrix} \int_0^L \int_0^L z(x, y, t)\, dx \\ \\ \int_0^L \int_0^L y(x, y, t)\, dx\, dy \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_u & 0 \\ 0 & D_v \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Como sistema (2.33) é um sistema linear, podemos procurar soluções na forma de soluções separavéis. Consideramos uma solução separável geral da forma

$$W(x, y, t) = T(t)\, X(x, y)$$

onde onde $T(t)$ é uma função escalar de t.

Seguindo de forma análoga ao caso da secção anterior, teremos que :

$$W(x,y,t) = \sum_{n,\,m} a_{n,m}\, e^{\lambda_{n,m}\, t} X_{\omega_{n,m}}(x,y) \tag{2.35}$$

onde para cada n e m, temos que $a_{n,\,m}$ é uma constante apropriada e

$$X_{\omega_{n,m}}(x,y) = C_{n,m}\, cos(\omega_n\, x)\, cos(\omega_m\, y) \;\text{ com }\; \omega_n = \frac{n\pi}{L} \;\text{ e }\; \omega_m = \frac{m\pi}{L}.$$

e ao Substituirmos (2.35) em (2.33), obtemos :

$$M_{n,m}\, X_{\omega_{n,m}}(x) = \vec{0} \tag{2.36}$$

onde $M_{n,m} = \begin{pmatrix} (F_u - D_u\,(\omega_n^2 + \omega_m^2) - \lambda_{n,m}\,) & F_v \\ G_u & (G_v - D_v(\omega_n^2 + \omega_m^2) - \lambda_{n,m}\,) \end{pmatrix}$.

O sistema (2.36) tem uma solução não trivial se e somente se o determinante da matriz $M_{n,m}$ é nulo, isto é, $Det(M_{n,m}) = 0$. Calculando o determinante obtemos a seguinte equação quadratica em termos de $\lambda_{n,m}$:

$$\lambda^2 + [\,(D_u + D_v)\omega^2 - (F_u + G_v)\,]\lambda + [D_u D_v \omega^4 - (D_v F_u + D_u\, G_v)\,\omega^2 + (F_u G_v - F_v G_u)] = 0 \tag{2.37}$$

onde $\lambda = \lambda_{n,m}$ e $\omega^2 = (\omega_n^2 + \omega_m^2)$.

Portanto, uma condição suficiente para que u^* e v^* sejam pontos de equílibrios instáveis de (2.32) é que alguma das condições de critérios de estabilidade de Routh-Hurwitz a seguir :

$$\begin{aligned} &(D_u + D_v)\omega^2 - (F_u + G_v) > 0 \implies F_u + G_v - D_u\,\omega^2 - D_v\,\omega^2 < 0 \\ &D_u D_v \omega^4 - (D_v F_u + D_u\, G_v)\,\omega^2 + (F_u G_v - F_v G_u) > 0 \end{aligned} \tag{2.38}$$

não seja satisfeita.

2.2 INSTABILIDADE DE TURING EM SISTEMA COM TRÊS EQUAÇÕES E COM TERMOS NÃO LOCAIS.

Vamos agora estudar quais as condições de intabilidade de Turing em um sistema com três equações e com Termos não locais. Então Considere o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= F(u,v,r,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx,\int_0^L r\,dx) + D_u\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\
\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= G(u,v,r,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx,\int_0^L r\,dx) + D_v\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \\
\frac{\partial r(x,t)}{\partial t} &= H(u,v,r,\int_0^L u\,dx,\int_0^L v\,dx,\int_0^L r\,dx) + D_r\frac{\partial^2 r(x,t)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

para todo $x \in [0,L]$ e $t \geq 0$, onde u, v, r satisfazem as condições de fronteiras homôgeneas de neumann :

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = v_x(0,t) = v_x(L,t) = r_x(0,t) = r_x(L,t) = 0 \ \forall t \geq 0.$$

Assim como na secção anterior vamos procurar quais as condições para que haja instabilidade de Turing no sistema (2.39). O processo é análogo.

Caso de estabilidade

Considerando o sistema (2.39) na ausência da variavel espacial x, isto é:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u(t) \\
v(x,t) &= v(t) \\
r(x,t) &= r(t)
\end{aligned}$$

temos que,

$$\begin{aligned}
F(u(x,t),v(x,t),\int_0^L u(x,t)dx,\int_0^L v(x,t)\,dx) &= F(u(t),v(t),Lu(t),Lv(t)) \equiv \Phi(u,v,r) \\
G(u(x,t),v(x,t),\int_0^L u(x,t)dx,\int_0^L v(x,t)\,dx) &= G(u(t),v(t),Lu(t),Lv(t)) \equiv \Psi(u,v,r) \\
H(u(x,t),v(x,t),\int_0^L u(x,t)dx,\int_0^L v(x,t)\,dx) &= H(u(t),v(t),Lu(t),Lv(t)) \equiv M(u,v,r)
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Assim, ele se reduz ao sistema temporal (EDO):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t)}{\partial t} &= \Phi(u,v,r) \\ \frac{\partial v(t)}{\partial t} &= \Psi(u,v,r) \\ \frac{\partial r(t)}{\partial t} &= M(u,v,r) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Sejam u^*, v^*, r^* solução constante não nula de (2.41) e considere

$$\begin{aligned} u(t) &= u^* + \delta\, z(t) \\ v(t) &= v^* + \delta\, y(t) \\ r(t) &= r^* + \delta\, q(t)\,. \end{aligned}$$

Linearizando (2.41) em torno de u^*, v^*, r^*, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(t)}{\partial t} &= \Phi_u(u^*,v^*,r^*)\; z \;+\; \Phi_v(u^*,v^*,r^*)\; y + \Phi_r(u^*,v^*,r^*)\; q \\ \frac{\partial y(t)}{\partial t} &= \Psi_u(u^*,v^*,r^*)\; z \;+\; \Psi_v(u^*,v^*,r^*)\; y + \Psi_r(u^*,v^*,r^*)\; q \\ \frac{\partial q(t)}{\partial t} &= M_u(u^*,v^*,r^*)\; z \;+\; M_v(u^*,v^*,r^*)\; y + M_r(u^*,v^*,r^*)\; q \end{aligned} \tag{2.42}$$

Com solução $z(t) = a_0\, e^{\lambda t}$, $y = b_0\, e^{\lambda t}$ e $q(t) = c_0\, e^{\lambda t}$. Substituindo tais soluções no sistama obtemos:

$$\begin{aligned} (\Phi_u(u^*,v^*,r^*) - \lambda)a_0 + \Phi_v(u^*,v^*,r^*)b_0 + \Phi_r(u^*,v^*,r^*)c_0 &= 0 \\ \Psi_u(u^*,v^*,r^*)a_0 + (\Psi_v(u^*,v^*,r^*) - \lambda)b_0 + \Psi_r(u^*,v^*,r^*)c_0 &= 0 \\ M_u(u^*,v^*,r^*)\; a_0 \;+\; M_v(u^*,v^*,r^*)\; b_0 + (M_r(u^*,v^*,r^*) - \lambda\;)c_0 &= 0 \end{aligned}$$

No qual podemos escrever no sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} (\Phi_u(u^*,v^*,r^*) - \lambda) & \Phi_v(u^*,v^*,r^*) & \Phi_r(u^*,v^*,r^*) \\ \Psi_u(u^*,v^*,r^*) & (\Psi_v(u^*,v^*,r^*) - \lambda) & \Psi_r(u^*,v^*,r^*) \\ M_u(u^*,v^*,r^*) & M_v(u^*,v^*,r^*) & (M_r(u^*,v^*,r^*) - \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Que tem uma solução não trivial se ,e somente se, o determinante é nulo. Calculando o determinate temos:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0 \tag{2.44}$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\Phi_u + \psi_v + M_r) \\ a_2 &= \Phi_u\Psi_v + \Phi_u M_r + \Psi_v M_r - \Phi_v\Psi_u - \Phi_r M_u - \Psi_r M_v \\ a_3 &= \Phi_u\Psi_r M_v + \Phi_v\Psi_u M_r + \Phi_r\Psi_v M_u - \Phi_u\Psi_v M_r - \Phi_v\Psi_r M_u - \Phi_r\Psi_u M_v\,. \end{aligned}$$

Pelo critério de estabilidade de Routh-Hurwitz os pontos de equílibrio $u^*,\, v^*, r^*$ de (2.41) são estáveis quando :

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ a_3 &> 0 \\ a_1\, a_2 &> a_3 \end{aligned} \tag{2.45}$$

Caso de instabilidade

Sejam $u^*,\, v^*, r^*$ solução constante não nula de (2.39) e considere

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u^* + \delta\, z(x,t) \\ v(x,t) &= v^* + \delta\, y(x,t) \\ r(x,t) &= r^* + \delta\, q(x,t)\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Linearizando (2.39) em torno de $u^*,\, v^*, r^*$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= F_u(u^*,v^*,r^*)\ z\ +\ F_v(u^*,v^*,r^*)\ y + F_r(u^*,v^*,r^*)q \\
&+\ F_I(u^*,v^*,r^*)\int_0^L z\,dx\ +\ F_J(u^*,v^*,r^*)\int_0^L y\,dx\ + F_P(u^*,v^*,r^*)\int_0^L q\,dx\ +\ D_u\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\
\\
\frac{\partial y}{\partial t} &= G_u(u^*,v^*,r^*)\ z\ +\ G_v(u^*,v^*,r^*)\ y + G_r(u^*,v^*,r^*)\ q \\
&+\ G_I(u^*,v^*,r^*)\int_0^L z\,dx\ +\ G_J(u^*,v^*,r^*)\int_0^L y\,dx\ +\ G_P(u^*,v^*,r^*)\int_0^L q\,dx\ +\ D_v\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \\
\\
\frac{\partial q}{\partial t} &= H_u(u^*,v^*,r^*)\ z\ +\ H_v(u^*,v^*,r^*)\ y + H_r(u^*,v^*,r^*)\ q \\
&+\ H_I(u^*,v^*,r^*)\int_0^L z\,dx\ +\ H_J(u^*,v^*,r^*)\int_0^L y\,dx\ +\ H_P(u^*,v^*,r^*)\int_0^L q\,dx\ +\ D_r\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Onde $I = \int_0^L u\,dx\ J = \int_0^L v\,dx$ e $P = \int_0^L r\,dx$.

Tomando $W(x,t) = \begin{pmatrix} z(x,t) \\ y(x,t) \\ q(x,t) \end{pmatrix}$, então o sistema (2.47) reduz-se ao seguinte sistema matricial :

$$W_t = AW(x,t) + B\int_0^L W(x,t)\,dx + DW_{xx} \tag{2.48}$$

Onde,

$$A = \begin{pmatrix} F_u & F_v & F_r \\ G_u & G_v & G_r \\ H_u & H_v & H_r \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} F_I & F_J & F_P \\ G_I & G_J & G_P \\ H_I & H_J & H_p \end{pmatrix},$$

$$\int_0^L W(x,t)\,dx = \begin{pmatrix} \int_0^L z(x,t)\,dx \\ \\ \int_0^L y(x,t)\,dx \\ \\ \int_0^L q(x,t)\,dx \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} D_u & 0 & 0 \\ 0 & D_v & 0 \\ 0 & 0 & D_r \end{pmatrix}, \tag{2.49}$$

Seguindo de forma análoga as secções anteriores, teremos como solução de (2.48), a solução da forma :

$$W(x,t) = \sum_n a_n \, e^{\lambda_n t} X_{\omega_n}(x) \tag{2.50}$$

onde para cada n, temos que a_n é uma constante apropriada e $\int_0^L X_{\omega_n}(x)\, dx = 0$.

Ao Substituirmos (2.50) em (2.48), obtemos :

$$M_n \, X_{\omega_n}(x) = \vec{0} \tag{2.51}$$

onde $M_n = \begin{pmatrix} (F_u - D_u\,\omega_n^2 \, - \lambda_n) & F_v & F_r \\ G_u & (G_v - D_v\,\omega_n^2 - \lambda_n\,) & G_r \\ H_u & H_v & (H_r - D_r\,\omega_n^2 - \lambda_n\,) \end{pmatrix}$.

logo o sistema (2.51) tem uma solução não trivial se e somente se o determinante da matriz M_n é nulo, isto é, $Det(M_n) = 0$. Calculando o determinante obtemos a seguinte equação em termos de λ_n :

$$\lambda_n^3 + b_1\lambda_n^2 + b_2\lambda_n + b_3 = 0$$

onde

$$\begin{aligned} b_1 &= (D_u + D_v + D_r)\omega_n^2 - (F_u + G_v + H_r) \\ b_2 &= (D_uD_v + D_uD_r + D_vD_r)\omega_n^4 - \Big(D_u(G_v + H_r) + D_v(F_u + H_r) + D_r(F_u + G_v)\Big)\omega_n^2 \\ &+ F_uG_v + F_uH_r + G_vH_r - F_vG_u - F_rH_u - G_rH_v \\ b_3 &= D_uD_vD_r\omega_n^6 - \Big[D_uD_vH_r + D_uD_rg_v + D_vD_rF_u\Big]\omega_n^4 \\ &- \Big[D_u(H_vG_r - G_vHr) + D_v(F_rH_u - F_uH_r) + D_R(F_vG_u - F_uG_v)\Big]\omega_n^2 \\ &+ F_uG_rH_v + F_vG_uH_r + F_rG_vH_u - F_uG_vH_r - F_vG_rH_u - F_rG_uH_v\,. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Como no caso do modelo de EDP queremos que os pontos de equílibrios de (2.39) sejam soluções **Instáveis**. Logo uma condição suficiente é que alguma das desigualdades do critério de estabalidade abaixo **não sejam satisfeitas**:

$$\begin{aligned} b_1 &> 0 \\ b_3 &> 0 \\ b_1\, b_2 &> b_3. \end{aligned} \tag{2.53}$$

2.2.1 Instabilidade de Turing em sistema bi-dimensional com três equações e com termos não locais.

Considere o sistema com três equações sendo bi-dimensional. Isto é :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} &= F(u,v,r,\int_0^L\int_0^L u\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L v\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L r\,dx\,dy)+D_u\,(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})\\
\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial t} &= G(u,v,r,\int_0^L\int_0^L u\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L v\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L r\,dx\,dy)+D_v(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})\\
\frac{\partial r(x,y,t)}{\partial t} &= H(u,v,r,\int_0^L\int_0^L u\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L v\,dx\,dy,\int_0^L\int_0^L r\,dx\,dy)+D_r(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2})
\end{aligned} \tag{2.54}$$

para todo $(x,y)\in[0,L]\times[0,L]$ e $t\geq 0$, onde u,v,r satisfazem as condições de fronteiras homôgeneas de neumann :

$$\begin{aligned}
u_x(0,y,t) &= u_x(L,y,t)=v_x(0,y,t)=v_x(L,y,t)=r_x(0,y,t)=r_x(L,y,t)=0\ \forall t\geq 0.\\
u_y(x,0,t) &= u_y(x,L,t)=v_y(x,0,t)=v_y(x,L,t)=r_y(x,0,t)=r_y(x,L,t)=0\ \forall t\geq 0.
\end{aligned}$$

Condições de Estabilidade

Sejam u^*,v^* e r^* pontos de equílibrio constantes não nulos do (2.54) obtidos na ausência de difusão ($D_u=D_v=D_r=0$). Na subsecção (2.1.1) vimos que mesmo sendo em um sistema bidimensional, as condições de estabilidade para os pontos de equílibrio do sistema estudado , permancem as mesmas do caso unidimensional, uma vez que tais condições são obtidas considerando o modelo na ausência das variáveis espaciais x,y, isto é, em um modelo de EDO. De semelhante forma, o mesmo é valido para o sistema (2.54). Ou seja, a análise das condições de estabilidade são feitas no modelo de EDO:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \Phi(u,v,r)\\
\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} &= \Psi(u,v,r)\\
\frac{\partial r(x,t)}{\partial t} &= M(u,v,r)
\end{aligned}$$

E como vimos anteriormente, Pelo critério de estabilidade de Routh-Hurwitz se tais desigualdades são satisfeitas:

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ a_3 &> 0 \\ a_1\, a_2 &> a_3 \end{aligned} \tag{2.55}$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\Phi_u + \psi_v + M_r) \\ a_2 &= \Phi_u\Psi_v + \Phi_u M_r + \Psi_v M_r - \Phi_v\Psi_u - \Phi_r M_u - \Psi_r M_v \\ a_3 &= \Phi_u\Psi_r M_v + \Phi_v\Psi_u M_r + \Phi_r\Psi_v M_u - \Phi_u\Psi_v M_r - \Phi_v\Psi_r M_u - \Phi_r\Psi_u M_v\,, \end{aligned}$$

os pontos de equílibrio u^*, v^* e r^* são estáveis do modelo de EDO.

Condições de instabilidade

Sejam u^*, v^*, r^* solução constante não nula de (2.54) e considere

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= u^* + \delta\, z(x,y,t) \\ v(x,y,t) &= v^* + \delta\, \varphi(x,y,t) \\ r(x,y,t) &= r^* + \delta\, q(x,y,t)\,. \end{aligned}$$

Linearizando (2.54) em torno de u^*, v^*, r^*, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= F_u(u^*,v^*,r^*)\; z \;+\; F_v(u^*,v^*,r^*)\;\varphi + F_r(u^*,v^*,r^*)q + F_I(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L z\,dx\,dy \\ &+ \quad F_J(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L \varphi\,dx\,dy \;+ F_P(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L q\,dx\,dy \;+\; D_u(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= G_u(u^*,v^*,r^*)\; z \;+\; G_v(u^*,v^*,r^*)\;\varphi + G_r(u^*,v^*,r^*)\;q + G_I(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L z\,dx\,dy \\ &+ \quad G_J(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L \varphi\,dx\,dy \;+ G_P(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L q\,dx\,dy \;+\; D_v(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} &= H_u(u^*,v^*,r^*)\; z \;+\; H_v(u^*,v^*,r^*)\;\varphi + H_r(u^*,v^*,r^*)\;q + H_I(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L z\,dx\,dy \\ &+ \quad H_J(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L \varphi\,dx\,dy \;+ H_P(u^*,v^*,r^*)\int_0^L\!\!\int_0^L q\,dx\,dy \;+\; D_r(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}) \end{aligned}$$

(2.56)

Onde $I = \int_0^L \int_0^L u\,dx\,dy$, $J = \int_0^L \int_0^L v\,dx\,dy$, e $P = \int_0^L \int_0^L r\,dx\,dy$,.

Seguindo de forma análoga as secções anteriores, teremos a seguinte equação em termos de λ :

$$\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

onde $\lambda = \lambda_{n,m}$ e

$$\begin{aligned}
b_1 &= (D_u + D_v + D_r)\omega^2 - (F_u + G_v + H_r) \\
b_2 &= (D_uD_v + D_uD_r + D_vD_r)\omega^4 - \Big(D_u(G_v + H_r) + D_v(F_u + H_r) + D_r(F_u + G_v)\Big)\omega^2 \\
&+ F_uG_v + F_uH_r + G_vH_r - F_vG_u - F_rH_u - G_rH_v \\
b_3 &= D_uD_vD_r\omega^6 - \Big[D_uD_vH_r + D_uD_rg_v + D_vD_rF_u\Big]\omega^4 \\
&- \Big[D_u(H_vG_r - G_vHr) + D_v(F_rH_u - F_uH_r) + D_R(F_vG_u - F_uG_v)\Big]\omega^2 \\
&+ F_uG_rH_v + F_vG_uH_r + F_rG_vH_u - F_uG_vH_r - F_vG_rH_u - F_rG_uH_v\,.
\end{aligned}$$

com $\omega^2 = (\omega_n^2 + \omega_m^2)$.

Portanto, para que $u^*,\ v^*, r^*$ sejam pontos de equílibrio instáveis no modelo de EDP (2.54) , uma condição suficiente é que alguma das desigualdades a seguir não sejam satisfeitas:

$$\begin{aligned}
b_1 &> 0 \\
b_3 &> 0 \\
b_1\,b_2 &> b_3.
\end{aligned}$$

..

3 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO EPIDEMIOLÓGICO

Neste capítulo, com base no que foi apresentado no Capítulo (2) sobre o sistema de três equações no caso unidimensional, verificamos, em um modelo epidemiológico do tipo SIR, as condições em que tal modelo apresenta instabilidade de Turing. Utilizamos o software MATLAB tanto para verificar se os resultados obtidos analiticamente sobre essas condições eram confirmados numericamente quanto para analisar o efeito e a importância de estudar essa teoria no modelo

3.1 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO SIR COM O PARÂMATRO ρ

A epidemiologia é uma disciplina que estuda os padrões de saúde e doença em coletividades humanas, sendo importante na medicina preventiva, concentrando-se nos padrões de transmissão e nos fatores que influenciam as doenças (MARTCHEVA, 2015)(M.ZHANG et al., 2001). Com a melhoria das instalações de saneamento, dos cuidados médicos e da civilização humana, epidemias que outrora devastaram o mundo, como a cólera e a varíola, foram efetivamente controladas. No entanto, algumas epidemias novas e mutantes surgiram silenciosamente, representando uma grande ameaça à saúde humana (M.ZHANG et al., 2001).

Os modelos matemáticos, nesse caso especificamente de epidemiologia, os modelos epidêmicos, nos ajudam a entender a dinâmica das doenças epidêmicas, isto é, os seus mecanismos de transmissão. Consequentemente, eles nos ajudam a prever os efeitos da doença modelada em uma população, permitindo assim a elaboração de estratégias de controle. Os primeiros modelos epidemiológicos foram propostos por Kermack e McKendrick em 1927, com um modelo conhecido como o modelo epidêmico SIR (MARTCHEVA, 2015). Este modelo epidemiológico divide a população em três classes:

- **Indivíduos suscetíveis** (S) - É a classe de indivíduos que estão saudáveis, mas podem contrair a doença.
- **Indivíduos infectados** (I) - É a classe de indivíduos que contraíram a doença (infectados) e que transmitem a doença (são infecciosos).
- **Indivíduos removidos** (R) - É a classe de indivíduos que se recuperaram da doença (podendo depois se tornar suscetíveis novamente ou não à doença) ou que morreram.

Doenças como gripe, dengue e COVID-19 são alguns tipos de doenças que podem ser modeladas por um modelo epidemiológico do tipo SIR.

O movimento de indivíduos entre centros populacionais facilita a propagação geográfica de doenças infecciosas (KEELING; ROHANI., 2008.). E isso é notório, pois em uma epidemia os:

- **Indivíduos infectados** - Podem mover-se para áreas com maior concentração de pessoas suscetíveis, aumentando a propagação da doença. Isso pode ocorrer por várias razões, incluindo a busca por cuidados médicos, a necessidade de se mover para outras áreas por razões pessoais ou profissionais, ou simplesmente pela disseminação natural da doença à medida que as pessoas viajam.

- **Indivíduos suscetíveis (não infectados)** - Podem se mover para áreas com menor concentração de infectados, na tentativa de evitar a infecção. Esse comportamento é um tipo de "fuga"ou "evitação"do risco.

Devido a fatos como estes citados, o papel da dispersão espacial em sistemas epidêmicos e o estudo da dinâmica espaço-temporal de uma população durante uma epidemia têm sido objeto de pesquisa para muitos cientistas (CARRERO; ., 2003). A adição de uma reação-difusão nos modelos epidemiológicos pode tornar as pesquisas mais precisas (M.ZHANG et al., 2001). Como mencionado no (2), a instabilidade de Turing descreve como um sistema reação-difusão que está inicialmente em equilíbrio pode se tornar instável devido à difusão, levando à formação de padrões espaciais. Em termos de epidemias, isso significa que a doença pode se espalhar de maneiras complexas e formar "padrões"de distribuição de infectados e suscetíveis ao longo do espaço. Então, estudar a Instabilidade de Turing em modelos epidêmicos pode melhorar a previsão da propagação de doenças e assim ajudar no desenvolvimento de estratégias de controle mais precisas e eficazes de uma epidemia e, consequentemente, contribuir para uma resposta de saúde pública mais informada e eficiente. Motivado por esses fatos acima, vamos estudar a Instabilidade de Turing em um modelo epidemiológico do tipo SIR, onde colocamos nesse modelo termo não local.

3.2 O MODELO

Em um modelo de reação-difusão, a variável x geralmente representa uma coordenada espacial. Por essa razão, a maioria dos trabalhos que empregam modelos de reação-difusão,

tem como objetivo analisar a disseminação espacial de uma população por meio da equação de difusão.

Entretanto, motivados pelo artigo de (SILVA E. J. A.;CASTILHO, 2020), neste trabalho consideramos a variável x como uma representação de patógenos caracterizados por uma característica fenotípica mutante x . Assume-se que o patógeno $x \in [0, L]$ sofre mutação de acordo com um processo de caminhada aleatória (termo difusivo). Dessa forma, a interpretação que adotamos e estudamos em nosso modelo trata da disseminação e da distribuição, no espaço, das classes de população suscetível, infectada e removida pelo patógeno x.

Denotamos por $v(x, t)$ a densidade de hospedeiros infectados pelo patógeno x no tempo t, ou seja, o número total de infectados no instante de tempo t é dado por

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_0^L V(x, t), dx.$$

A população suscetível é estruturada de acordo com sua resposta imunológica. Dentro de um hospedeiro infectado, a seleção é para a maior taxa de crescimento entre os diferentes subtipos (características fenotípicas) que não são eliminados pelo sistema imunológico. $S(x, t)$ indicará o número de hospedeiros para os quais a característica x se tornará o traço dominante.

Para simplificação, assume-se que um indivíduo suscetível do tipo x só se tornará infeccioso ao entrar em contato com um indivíduo infectado com a mesma característica x. Outros contatos não gerarão indivíduos infecciosos.

O modelo é obtido como o caso limite de um modelo com um número finito de características M. Assume-se que a taxa na qual os suscetíveis-i deixam a classe infecciosa é

$$-\beta\frac{S_i I}{N(t)} = -\beta\,\frac{S_i\left(\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} V_i\,\delta x_i\right)}{\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} S_i\,\delta x_i + \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} V_i\,\delta x_i + \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} R_i\,\delta x_i}.$$

Devido às nossas suposições sobre a competição intra-hospedeiro, a taxa na qual os suscetíveis entram na classe infectada não será igual à taxa na qual eles deixam a classe de suscetíveis. Apenas encontros entre suscetíveis do tipo i e infecciosos da característica i gerarão indivíduos infecciosos, a uma taxa de :

$$+\beta\frac{S_i V_i}{N(t)} = +\beta\,\frac{S_i\,V_i}{\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} S_i\,\delta x_i + \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} V_i\,\delta x_i + \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M} R_i\,\delta x_i}.$$

Quanto aos encontros entre suscetíveis do tipo i e infectados pela característica j, com $i \neq j$, que pode ser dado pela difereça

$$\beta\frac{S_iI}{N(t)} - \beta\frac{S_iV_i}{N(t)} = \beta\,\frac{S_i\left(\frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1}V_j\,\delta x_j\right)}{\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M}S_i\,\delta x_i + \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M}V_i\,\delta x_i + \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M}R_i\,\delta x_i}\,.$$

Colocamos eles na classe dos removidos, onde a taxa pela qual eles vão entrar nessa classe, vai depender de um parâmetro no qual denominamos de $\rho \in [0,1]$.

Tomando o limite para um número infinito de características ($M \to \infty$), considerando um termo de crescimento logístico e uma mutação aleatória da característica x (termo difusivo), assumimos que $S(x,t)$, $v(x,t)$ e $R(x,t)$ obedecerão ao seguinte sistema de equações do modelo SIR:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial t} &= r(S+V+R)(1-\frac{N(t)}{K}) - \beta\frac{S\left(\frac{1}{L}\int_0^L V dx\right)}{N(t)} - \mu S - \delta S + \epsilon R + D_S\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} \\
\frac{\partial V}{\partial t} &= \beta\frac{SV}{N(t)} - (\mu+\mu_{id}+\gamma)V + D_V\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} \\
\frac{\partial R}{\partial t} &= \gamma V + \delta S + (1-\rho)\frac{\beta S}{N(t)}\left[\frac{1}{L}\int_0^L V dx - V\right] - \mu R - \epsilon R + D_R\frac{\partial^2 R(x,t)}{\partial x^2}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Tal que $N(t) = \frac{1}{L}\int_0^L S(x,t)\,dx + \frac{1}{L}\int_0^L V(x,t)\,dx + \frac{1}{L}\int_0^L R(x,t)\,dx$, onde $x \in [0,L] \subset \mathbb{R}$ e $t \geq 0$; r, K são estritamente positivos; β, γ, μ, μ_{id}, ε, δ são não negativos e $\rho \in [0,1]$.

Tabela 1 – Nomeclatura das variavéis do modelo SIR

Variavéis	**Descrição**
$S(x,t)$	É a densidade de indivíduos suscetíveis ao patógeno x no tempo $t \geq$ que podem contrair a doença.
$V(x,t)$	É a densidade de indivíduos infectados por um patógeno x em um tempo $t \geq 0$.
$R(x,t)$	É a densidade de indivíduos removidos da população em um tempo $t \geq 0$, no qual se recuperaram da infecção (podendo depois se tornar suscetíveis novamente ou não). Ou que morrerão (seja de morte natural ou induzida pelo patógeno x).
$N(t)$	É o tamanho total da população em um tempo $t \geq 0$. .

Tabela 2 – Parâmetros basico do modelo SIR

Parâmetros	Descrição
r	Taxa de crescimento da populção
K	É é a capacidade de suporte do ambiente
β	Taxa de trasmissão do Patógeno
γ	Taxa de recuperação do hospedeiro
μ	Taxa de mortalidade natural do Hospedeiro
μ_{id}	Taxa de mortalidade do Hospedeiro induzida pela doença.
ϵ	Taxa de perda de imunidade da doença.
δ	Taxa de vacinação
ρ	Percentual de formação dos nãos infecciosos
D_S	Taxa de difusão da densidade de suscetíveis ao patógeno do tipo x.
D_V	Taxa de difusão da densidade de infectados pelo patógeno do tipo x.
D_R	Taxa de difusão da densidade de dos Removidos pelo patógeno do tipo x.

Uma condição necessária para que a doença se espalhe na população é ter a variação dos infectados maior do que zero. Então consideremos

$$\begin{aligned} V_0 > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \beta\frac{S_0 V_0}{N_0} - (\mu + \mu_{id} + \gamma)V_0 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\beta S_0}{N_0\left(\mu + \mu_{id} + \gamma\right)} > 1 \end{aligned}$$

Como o interesse é no momento em que a doença surge, é natural supor que o número de indivíduos suscetíveis é aproximadamente igual à população total (GONDIM, 2021). Logo, Definimos o *número reprodutivo básico* (R_0) como sendo

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \mu_{id} + \gamma}\,, \tag{3.2}$$

Onde assumimos que $R_0 > 1$, ou seja, que o surto epidêmico ocorre quando $R_0 > 1$.

Estamos considerando que o modelo SIR (3.1) satisfaz as condições de contorno homogêneas de Neumann :

$$\begin{aligned} S_x(0,t) &= S_x(L,t) = 0 \\ V_x(0,t) &= V_x(L,t) = 0 \\ R_x(0,t) &= R_x(L,t) = 0. \end{aligned}$$

No qual indica que não há quantidade atravessando as fronteiras.

Vamos analisar se o modelo (3.1) apresenta instabilidade de Turing . Para isso, com base no que vimos no (2), é necessário primeiro determinar os pontos de equilíbrio do modelo.

3.3 OS PONTOS DE EQUILÍBRIO DO MODELO SIR

Considere S, V e R soluções constantes não nulas de (3.1). Sendo S, V e R constantes note que $\int_0^L S(x,t)\,dx = LS$, $\int_0^L V(x,t)\,dx = LV$, $\int_0^L R(x,t)\,dx = LR$. Assim $N = S + V + R$ e a expressão

$$(1-\rho)\frac{\beta S}{N(t)}\Big[\frac{1}{L}\int_0^L V dx - V\Big] = (1-\rho)\frac{\beta S}{N}\Big[V - V\Big] = 0.$$

Portanto, no equilíbrio, o modelo (3.1) torna-se da seguinte forma :

$$\begin{aligned} rN(1-\frac{N}{K}) - \beta\frac{SV}{N} - \mu S - \delta S + \epsilon R &= 0 \\ \beta\frac{SV}{N} - (\mu + \mu_{id} + \gamma)V &= 0 \\ \gamma V + \delta S - \mu R - \epsilon R &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Como $V > 0$, note que da segunda equação, no equílibrio $\dfrac{S}{N} = \dfrac{\mu + \mu_{id} + \gamma}{\beta} = \dfrac{1}{R_0}$.

O valor de N no equílibrio

Somando as três equações de (3.3), temos :

$$rN(1-\frac{N}{K}) - \mu(S+V+R) - \mu_{id}V = 0 \implies rN(1-\frac{N}{K}) - \mu N - \mu_{id}V = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} r(1-\frac{N}{K}) &= \mu + \mu_{id}V_1\ ,\ V_1 = \frac{V}{N}\,. \\ \implies -\frac{N}{K} &= \frac{\mu + \mu_{id}V_1}{r} - 1 \\ \implies N &= K[1 - \frac{\mu + \mu_{id}V_1}{r}]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

De

$$N = S + V + R \implies 1 = \frac{S}{N} + \frac{V}{N} + \frac{R}{N}$$

$$\implies 1 - \frac{1}{R_0} = \frac{V}{N} + \frac{R}{N} \text{ , pois no equilíbrio } \frac{S}{N} = \frac{1}{R_0}.$$

Daí, da terceira equação de (3.3), temos que

$$\gamma V + \delta S = (\mu + \varepsilon)R \implies \gamma\frac{V}{N} + \delta\frac{S}{N} = (\mu + \varepsilon)\frac{R}{N} \implies \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon}\frac{V}{N} + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0} = \frac{R}{N} \tag{3.5}$$

Assim de

$$1 - \frac{1}{R_0} = \frac{V}{N} + \frac{R}{N} \implies \frac{V}{N} + \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon}\frac{V}{N} + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0} = 1 - \frac{1}{R_0}$$

$$\implies \frac{V}{N}(1 + \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon}) = 1 - \frac{1}{R_0}(1 + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon})$$

$$\implies \frac{V}{N}(\frac{\mu + \varepsilon + \gamma}{\mu + \varepsilon}) = 1 - \frac{1}{R_0}(\frac{\mu + \varepsilon + \delta}{\mu + \varepsilon})$$

segue que

$$\frac{V}{N} = \theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \text{ onde } \theta = \frac{\mu + \varepsilon}{\mu + \varepsilon + \gamma}, \ \varphi = \frac{\mu + \varepsilon + \delta}{\mu + \varepsilon}.$$

Como de (3.4), $N = K[1 - \frac{\mu + \mu_{id}V_1}{r}]$ sendo $V_1 = \frac{V}{N}$, então

$$N = K\Big[1 - \frac{\mu + \mu_{id}\,\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})}{r}\Big]$$

$$= K\Big[1 - \frac{\underline{\mu R_0 + \mu_{id}\,\theta(R_0 - \varphi)}}{\underline{R_0}\quad r}\Big]$$

$$= K\Big[1 - \frac{\mu R_0 + \mu_{id}\,\theta(R_0 - \varphi)}{R_0\, r}\Big]$$

Portanto,

$$N = K(1 - \frac{1}{R_d}), \text{ onde } R_d = \frac{R_0\, r}{\mu R_0 + \mu_{id}\,\theta(R_0 - \varphi)}. \tag{3.6}$$

O valor de S no equilíbrio

Temos que :

$$\frac{S}{N} = \frac{1}{R_0}$$

logo,

$$S = \frac{1}{R_0}K(1 - \frac{1}{R_d}). \tag{3.7}$$

O valor de V no equilíbrio

Como vimos,

$$\frac{V}{N} = \theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \text{ onde } \theta = \frac{\mu + \varepsilon}{\mu + \varepsilon + \gamma}, \ \varphi = \frac{\mu + \varepsilon + \delta}{\mu + \varepsilon}.$$

Assim,

$$V = K\theta(1 - \frac{1}{R_d})(1 - \frac{\varphi}{R_0}). \tag{3.8}$$

por fim,

O valor de R no equilíbrio

De (3.5), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{R}{N} = \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon}\frac{V}{N} + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0} &= \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0} \\
&= \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon}\frac{\mu + \varepsilon}{\mu + \varepsilon + \gamma}(1 - \frac{\varphi}{R_0}) + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0} \\
&= \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon + \gamma}(1 - \frac{\varphi}{R_0}) + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0}
\end{aligned}$$

Segue que,

$$R = K(1 - \frac{1}{R_d})\Big[\theta_\gamma(1 - \frac{\varphi}{R_0}) + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0}\Big], \text{ onde } \theta_\gamma = \frac{\gamma}{\mu + \varepsilon + \gamma}. \tag{3.9}$$

Portanto por (3.6),(3.7),(3.8) e (3.9) os pontos de equílibrio de (3.1) são :

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{1}{R_0}K(1 - \frac{1}{R_d}) \\
V^* &= K\theta(1 - \frac{1}{R_d})(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \\
R^* &= K(1 - \frac{1}{R_d})\Big[\theta_\gamma(1 - \frac{\varphi}{R_0}) + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0}\Big]
\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $R_0 = \dfrac{\beta}{\mu + \mu_{id} + \gamma}$, $R_d = \dfrac{rR_0}{\mu R_0 + \mu_{id}\theta(R_0 - \varphi)}$, $\theta = \dfrac{\mu + \epsilon}{\mu + \epsilon + \gamma}$, $\theta_\gamma = \dfrac{\gamma}{\mu + \epsilon + \gamma}$ e $\varphi = \dfrac{\mu + \epsilon + \delta}{\mu + \epsilon}$.

Proposição 3.1. *Se $R_0 > \varphi$ e $R_d > 1$ então existe um único equilíbrio endêmico espacialmente homogêneo.* □

De agora em diante vamos considerar também que $R_0 > \varphi \geq 1$ e $R_d > 1$.

Como vimos no (2), para que ocorra instabilidade de Turing em um sistema de equações, os pontos de equilíbrio devem ser estáveis no modelo de EDO, isto é, na ausência das variáveis espaciais e com os termos de difusão sendo nulos. No entanto, os pontos de equilíbrio devem ser instáveis no modelo de EDP e com a presença de difusão. Nas próximas seções, veremos quais as condições necessárias para que o nosso modelo específico (3.1) deva satisfazer para ter instabilidade de Turing.

3.4 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO.

Vamos analisar as condições de estabilidade dos pontos de equilíbrio (3.10) no modelo de EDO da equação (3.1), ou seja, o mesmo modelo, mas na ausência da variável x e com as difusões $D_s = D_v = D_R = 0$. Então :

$$\begin{aligned} S(x,t) = S(t) \implies \int_0^L S(x,t)dx = \int_0^L S(t)dx &= LS(t) \\ V(x,t) = V(t) \implies \int_0^L V(x,t)\,dx = \int_0^L V(t)dx &= LV(t) \\ R(x,t) = R(t) \implies \int_0^L R(x,t)\,dx = \int_0^L R(t)dx &= LR(t). \end{aligned}$$

Assim, $N(t) = S(t) + V(t) + R(t)$. Além disso, a expressão :

$$(1-\rho)\frac{\beta S(t)}{N(t)}\Big[\frac{1}{L}\int_0^L V(x,t)dx - V(x,t)\Big] = (1-\rho)\frac{\beta S(t)}{N(t)}\Big[V(t) - V(t)\Big] = 0.$$

logo, o sistema (3.1) torna-se no seguinte modelo de EDO:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= rN(t)(1-\frac{N(t)}{K}) - \beta\frac{S(t)V(t)}{N(t)} - \mu S(t) - \delta S(t) + \epsilon R(t) \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= \beta\frac{S(t)V(t)}{N(t)} - (\mu + \mu_{id} + \gamma)V(t) \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= \gamma V(t) + \delta S(t) - \mu R(t) - \epsilon R(t) \end{aligned} \tag{3.11}$$

para todo $t \geq 0$.

Para facilitar a análise de estabilidade dos pontos de equilíbrio, uma vez que podemos determinar S em termos das outras variáveis , isto é, $S(t) = N(t) - V(t) - R(t)$, vamos substituir a equação $\dfrac{\partial S}{\partial t}$ por $\dfrac{\partial N}{\partial t}$.

Note que:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial t} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) - \mu N(t) - \mu_{id}V(t)$$

e

$$\begin{aligned}
\beta\frac{S(t)V(t)}{N(t)} &= \beta\frac{\Big(N(t) - V(t) - R(t)\Big)V(t)}{N(t)} \\
&= \beta\frac{\Big(N(t)V(t) - V^2(t) - R(t)V(t)\Big)}{N(t)} \\
&= \beta\Big(V(t) - \frac{V(t)^2}{N(t)} - \frac{R(t)V(t)}{N(t)}\Big).
\end{aligned}$$

Então, sob essas condições, o modelo (3.11) torna-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial t} &= rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) - \mu N(t) - \mu_{id}V(t) \\
\frac{\partial V}{\partial t} &= \beta\Big(V(t) - \frac{V(t)^2}{N(t)} - \frac{R(t)V(t)}{N(t)}\Big) - (\mu + \mu_{id} + \gamma)V(t) \\
\frac{\partial R}{\partial t} &= (\gamma - \delta)V(t) + \delta N(t) - (\mu + \epsilon + \delta)R(t).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Seja,

$$\begin{aligned}
\Phi(N,V,R) &= rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) - \mu N(t) - \mu_{id}V(t) \\
\Psi(N,V,R) &= \beta\Big(V(t) - \frac{V(t)^2}{N(t)} - \frac{R(t)V(t)}{N(t)}\Big) - (\mu + \mu_{id} + \gamma)V(t) \\
M(N,V,R) &= (\gamma - \delta)V(t) + \delta N(t) - (\mu + \epsilon + \delta)R(t).
\end{aligned}$$

Determinaremos as derivadas parcias de Φ,Ψ e M avaliadas nos pontos de equilibrio (3.10).

Determinar Φ_N

Temos que

$$\Phi_N = r(1 - 2\frac{N}{K}) - \mu.$$

Aplicando no valores de N, S, V, R no equílibrio, isto é, $N = N^*$ então

$$\Phi_N = r\Big(1 - 2(1 - \frac{1}{R_d})\Big) - \mu = r(-1 + \frac{2}{R_d}) - \mu$$

logo,

$$\Phi_N = -r(1 - \frac{2}{R_d}) - \mu$$

Determinar Φ_V

De forma imediata, vemos que

$$\Phi_V = -\mu_{id}.$$

Determinar Φ_R

Como na função de Φ não temos a variável R, então:

$$\Phi_R = 0.$$

Passemos agora para as derivadas parciais de Ψ.

Determinar Ψ_N

Observe que :

$$\Psi_N = \beta\Big(\frac{V^2}{N^2} + \frac{RV}{N^2}\Big) = \beta\Big((\frac{V}{N})^2 + \frac{R}{N}\frac{V}{N}\Big)$$

E note que no equílibrio :

$$\begin{aligned} \frac{V}{N} &= \theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \\ \\ \frac{R}{N} &= \theta_\gamma(1 - \frac{\varphi}{R_0}) + \frac{\delta}{\mu + \varepsilon}\frac{1}{R_0} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Segue que :

$$\begin{aligned}
\Psi_N &= \beta\Big(\theta^2(1-\frac{\varphi}{R_0})^2+\big(\theta_\gamma(1-\frac{\varphi}{R_0})+\frac{\delta}{\mu+\varepsilon}\frac{1}{R_0}\big)\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})\Big)\\
&= \beta\Big(\theta^2(1-\frac{\varphi}{R_0})^2+\theta_\gamma\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})^2+\frac{\delta}{\mu+\varepsilon}\frac{1}{R_0}\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})\Big)\\
&= \beta\Big(\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})^2[\theta+\theta_\gamma]+\frac{\delta}{\mu+\varepsilon}\frac{1}{R_0}\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})\Big)\\
&= \beta\Big(\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})^2+\frac{\delta}{\mu+\varepsilon}\frac{1}{R_0}\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})\Big) \text{ pois } [\theta+\theta_\gamma]=[\frac{\mu+\epsilon}{\mu+\epsilon+\gamma}+\frac{\gamma}{\mu+\epsilon+\gamma}]=1\\
&= \beta\Big(\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})\big((1-\frac{\varphi}{R_0})+\frac{\delta}{\mu+\varepsilon}\frac{1}{R_0}\big)\Big)\\
&= \beta\Big(\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})\big(1-\frac{1}{R_0}(\varphi-\frac{\delta}{\mu+\varepsilon})\big)\Big)
\end{aligned}$$

Como $(\varphi-\frac{\delta}{\mu+\varepsilon})=(\frac{\mu+\epsilon+\delta}{\mu+\epsilon}-\frac{\delta}{\mu+\varepsilon})=1$, portanto

$$\Psi_N=\beta\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})(1-\frac{1}{R_0}).$$

Determinar Ψ_V

$$\begin{aligned}
\Psi_V &= \beta\Big(1-2\frac{V}{N}-\frac{R}{N}\Big)-(\mu+\mu_{id}+\gamma) \\
&= \beta\Big(1-2\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})-(\theta_\gamma(1-\frac{\varphi}{R_0})+\frac{\delta}{\mu+\varepsilon}\frac{1}{R_0})\Big)-\frac{\beta}{R_0} \text{ pois } R_0=\frac{\beta}{\mu+\mu_{id}+\gamma} \\
&= \beta\Big(1-\frac{1}{R_0}-\Big(1-\frac{\varphi}{R_0}\Big)(2\theta+\theta_\gamma)-\frac{\delta}{\mu+\varepsilon}\frac{1}{R_0}\Big) \\
&= \beta\Big(1-\frac{1}{R_0}(1+\frac{\delta}{\mu+\varepsilon})-\Big(1-\frac{\varphi}{R_0}\Big)(2\theta+\theta_\gamma)\Big) \\
&= \beta\Big(1-\frac{\varphi}{R_0}-\Big(1-\frac{\varphi}{R_0}\Big)(2\theta+\theta_\gamma)\Big) \text{ pois } \varphi=\frac{\mu+\epsilon+\delta}{\mu+\epsilon}=1+\frac{\delta}{\mu+\epsilon} \\
&= \beta\Big((1-\frac{\varphi}{R_0})(1-2\theta-\theta_\gamma)\Big) \\
&= \beta\Big((1-\frac{\varphi}{R_0})(1-2\frac{\mu+\epsilon}{\mu+\epsilon+\gamma}-\frac{\gamma}{\mu+\epsilon+\gamma})\Big) \\
&= \beta\Big((1-\frac{\varphi}{R_0})(-\frac{\mu+\epsilon}{\mu+\epsilon+\gamma})\Big)
\end{aligned}$$

uma vez que $\theta=\dfrac{\mu+\epsilon}{\mu+\epsilon+\gamma}$,temos portanto :

$$\Psi_V=-\beta\theta(1-\frac{\varphi}{R_0}).$$

Determinar Ψ_R

Temos que

$$\Psi_R=-\beta(\frac{V}{N})$$

logo,

$$\Psi_R=-\beta\theta(1-\frac{\varphi}{R_0}).$$

Por fim, vamos determinar as derivadas parciais de M que como podemos observar são de forma imediata:

$$
\begin{aligned}
M_N &= \delta \\
M_V &= \gamma - \delta \\
M_R &= -(\mu + \epsilon + \delta)
\end{aligned}
$$

Portanto, as derivadas parciais de Φ,Ψ e M avaliadas nos pontos de equilibrio (3.10) são :

$$
\begin{aligned}
\Phi_N &= -r(1 - \frac{2}{R_d}) - \mu \\
\Phi_V &= -\mu_{id} \\
\Phi_R &= 0 \\
\Psi_N &= \beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})(1 - \frac{1}{R_0}) \\
\Psi_V &= -\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \\
\Psi_R &= -\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \\
M_N &= \delta \\
M_V &= \gamma - \delta \\
M_R &= -(\mu + \epsilon + \delta)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

Como vimos no capítulo (2),especificamente em (2.45), para que os pontos de equílibrio sejam estáveis, as seguintes condições tem que serem satisfeitas :

$$
\begin{aligned}
a_1 &> 0 \\
a_3 &> 0 \\
a_1\, a_2 &> a_3
\end{aligned}
$$

onde,

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -(\Phi_N + \Psi_V + M_R) \\
a_2 &= \Phi_N\Psi_V + \Phi_N M_R + \Psi_V M_R - \Phi_V\Psi_N - \Phi_R M_N - \Psi_R M_V \\
a_3 &= \Phi_N\Psi_R M_V + \Phi_V\Psi_N M_R + \Phi_R\Psi_V M_N - \Phi_N\Psi_V M_R - \Phi_V\Psi_R M_N - \Phi_R\Psi_N M_V\,.
\end{aligned}
$$

Note que, como $\Phi_R = 0$, então em a_2 temos que $\Phi_R M_N = 0$ e a_3 temos que $\Phi_R\Psi_V M_N = 0$

e $-\Phi_R\Psi_N M_V = 0$. logo para os pontos de equílibrio serem estáveis no modelo (3.10) :

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ a_3 &> 0 \\ a_1\, a_2 - a_3 &> 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\Phi_N + \Psi_V + M_R) \\ a_2 &= \Phi_N\Psi_V + \Phi_N M_R + \Psi_V M_R - \Phi_V\Psi_N - \Psi_R M_V \\ a_3 &= \Phi_N\Psi_R M_V + \Phi_V\Psi_N M_R - \Phi_N\Psi_V M_R - \Phi_V\Psi_R M_N\,. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Teorema 3.1. *(Condições necessária para a exitência de estabilidade)*

a) Se $R_d \geq 2$ e $\gamma > \delta$ então as condições de estabalidade (3.15) *são satisfeitas.*

Demonstração.

Com efeito, se $R_d \geq 2$ então $(1 - \frac{2}{R_d}) \geq 0$. Logo, como $r > 0$ então $-r(1 - \frac{2}{R_d}) \leq 0$.Daí, como $\mu, \epsilon, \delta > 0$ temos que $\Phi_N, M_R < 0$. E uma vez que $R_0 > \varphi$ segue $\Psi_V < 0$. Dessa forma :

$$a_1 > 0.$$

Com relação a análise se $a_3 > 0$, observe que considerando a hipótese que $\gamma > \delta$ implica que $M_V = \gamma - \delta > 0$ e como $\Phi_N, \Psi_R < 0$ segue que $\Phi_N\Psi_R M_V > 0$. De $\Phi_N, \Psi_V,\ M_R < 0$ temos $-\Phi_N\Psi_V M_R > 0$. Daí, note que :

$$\begin{aligned} \Phi_V\Psi_N M_R &= \mu_{id}\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})(1 - \frac{1}{R_0})(\mu + \epsilon + \delta) \\ \Phi_V\Psi_R M_N &= \mu_{id}\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})\delta \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \Phi_V\Psi_N M_R - \Phi_V\Psi_R M_N &= \mu_{id}\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})(1 - \frac{1}{R_0})(\mu + \epsilon + \delta) - \mu_{id}\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})\delta \\ &= \mu_{id}\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})\Big((1 - \frac{1}{R_0})(\mu + \epsilon + \delta) - \delta\Big) \\ &= \mu_{id}\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})\Big(\mu + \epsilon - \frac{\mu + \epsilon + \delta}{R_0}\Big) \\ &= \mu_{id}\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})\Big(\mu + \epsilon - \frac{(\mu + \epsilon)\varphi}{R_0}\Big) \ \textit{pois}\ \varphi = \frac{\mu + \epsilon + \delta}{\mu + \epsilon} \\ &= \mu_{id}(\mu + \epsilon)\beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})\Big(1 - \frac{\varphi}{R_0}\Big) > 0 \end{aligned}$$

Logo, considerando os sinais dos termos de a_3 analisados, temos que :

$$a_3 = \Phi_N\Psi_R M_V - \Phi_N\Psi_V M_R + \Phi_V\Psi_N M_R - \Phi_V\Psi_R M_N > 0.$$

Por fim, vamos analisar $a_1a_2 - a_3$. *ora :*

$$\begin{aligned} a_1a_2 &= -(\Phi_N + \Psi_V + M_R)\Big(\Phi_N\Psi_V + \Phi_N M_R + \Psi_V M_R - \Phi_V\Psi_N - \Psi_R M_V\Big) \\ &= -(\Phi_N + \Psi_V + M_R)(\Phi_N\Psi_V) - (\Phi_N + \Psi_V + M_R)\Big(\Phi_N M_R + \Psi_V M_R\Big) \\ &+ (\Phi_N + \Psi_V + M_R)(\Phi_V\Psi_N) + (\Phi_N + \Psi_V + M_R)(\Psi_R M_V) \\ &= -(\Phi_N + \Psi_V)(\Phi_N\Psi_V) - \Phi_N\Psi_V M_R - (\Phi_N + \Psi_V + M_R)\Big(\Phi_N M_R + \Psi_V M_R\Big) \\ &+ (\Phi_N + \Psi_V)(\Phi_V\Psi_N) + \Phi_V\Psi_N M_R + \Phi_N\Psi_R M_V + (\Psi_V + M_R)(\Psi_R M_V) \end{aligned}$$

Como

$$a_3 = \Phi_N\Psi_R M_V - \Phi_N\Psi_V M_R + \Phi_V\Psi_N M_R - \Phi_V\Psi_R M_N$$

Então

$$\begin{aligned} a_1a_2 - a_3 &= -(\Phi_N + \Psi_V)(\Phi_N\Psi_V) - (\Phi_N + \Psi_V + M_R)\Big(\Phi_N M_R + \Psi_V M_R\Big) \\ &+ (\Phi_N + \Psi_V)(\Phi_V\Psi_N) + (\Psi_V + M_R)(\Psi_R M_V) + \Phi_V\Psi_R M_N \end{aligned}$$

Logo, como por hipótese $R_d > 2$ *e sabemos que* $\mu, \mu_{id}, \varepsilon, \delta > 0$ *temos que*

$$\begin{aligned} -(\Phi_N + \Psi_V)(\Phi_N\Psi_V) &> 0 \ \textit{pois} - (\Phi_N + \Psi_V) > 0\,,\ (\Phi_N\Psi_V) > 0 \\ -(\Phi_N + \Psi_V + M_R)\Big(\Phi_N M_R + \Psi_V M_R\Big) &> 0 \,\textit{pois} - (\Phi_N + \Psi_V + M_R) > 0\,,\ (\Phi_N M_R + \Psi_V M_R) > 0 \\ (\Phi_N + \Psi_V)(\Phi_V\Psi_N) &> 0 \ \textit{pois}(\Phi_N + \Psi_V) < 0\,,\ (\Phi_V\Psi_N) < 0 \end{aligned}$$

e da hipótese que $\gamma > \delta$ *implicando que* $M_V = \gamma - \delta > 0$ *então*

$$(\Psi_V + M_R)(\Psi_R M_V) > 0 \ \textit{pois}(\Psi_V + M_R) < 0 \ \textit{e} \ (\Psi_R M_V) < 0$$

e de forma imediata, vemos que $\Phi_V\Psi_R M_N > 0$. *Dessa forma,* $a_1a_2 - a_3 > 0$ *e portanto as condições para estabilidade* (3.15) *são satisfeitas.* □

b) Se $1 < R_d < 2$, $r > \mu + 2\mu_d$ *e* $\gamma > \delta$ *então as condições de estabalidade* (3.15) *são satisfeitas.*

Demonstração.

Note que pela definição de R_d *:*

$$R_d = \frac{R_0 r}{\mu R_0 + \mu_{id}\theta(R_0 - \varphi)} = \frac{r}{\mu + \mu_{id}\theta(1 - \dfrac{\varphi}{R_0})}.$$

Da hipótese que $1 < R_d < 2$ *por um lado temos que :*

$$\begin{aligned}
1 < R_d &\implies 1 < \frac{r}{\mu + \mu_{id}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})} \\
&\implies \mu + \mu_{id}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) < r \\
&\implies 1 - \frac{\varphi}{R_0} < \frac{r - \mu}{\mu_{id}\theta} \\
&\implies -\frac{\varphi}{R_0} < \frac{r - \mu - \mu_{id}\theta}{\mu_{id}\theta} \\
&\implies \frac{\varphi}{R_0} > \frac{\mu_{id}\theta - (r - \mu)}{\mu_{id}\theta} \\
&\implies \varphi\mu_{id}\theta > R_0(\mu_{id}\theta - (r - \mu))
\end{aligned}$$

Como por hipótese também $r > \mu + 2\mu_{id}$ *então*

$$r > \mu + 2\mu_{id} > \mu + \mu_{id} > \mu + \mu_{id}\theta \text{ pois } \theta = \frac{\mu + \varepsilon}{\mu + \varepsilon + \gamma} < 1.$$

ou seja,

$$r > \mu + 2\mu_{id} \implies r > \mu + \mu_{id}\theta \implies \mu_{id}\theta - (r - \mu) < 0.$$

Portanto de $1 < Rd$ *temos que*

$$\frac{\varphi\mu_{id}\theta}{\mu_{id}\theta - (r - \mu)} < R_0.$$

Por outro lado, de $R{\cdot}d < 2$ *temos :*

$$\begin{aligned}
R_d < 2 &\implies \frac{r}{\mu + \mu_{id}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})} < 2 \\
&\implies r < 2\mu + 2\mu_{id}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \\
&\implies r - \mu - \mu < 2\mu_{id}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}) \\
&\implies \frac{r - \mu - \mu}{2\mu_{id}\theta} < (1 - \frac{\varphi}{R_0}) \\
&\implies \frac{2\mu_{id}\theta + \mu - (r - \mu)}{2\mu_{id}\theta} > \frac{\varphi}{R_0} \\
&\implies R_0(2\mu_{id}\theta + \mu - (r - \mu)) > \varphi 2\mu_{id}\theta
\end{aligned}$$

como $R_0 > 1 > 0$ *e* $2\mu_{id}\theta > 0$, *Note que* $(2\mu_{id}\theta + \mu - (r - \mu)) > 0$. *Pois se* $(2\mu_{id}\theta + \mu - (r - \mu)) < 0$ *teriamos um absurdo mátematico. Logo,* $(2\mu_{id}\theta + \mu - (r - \mu)) > 0$. *E assim de* $R_d < 2$

$$\frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta + \mu - (r - \mu)} < R_0.$$

Portanto

$$1 < R_d < 2 \implies R_0 > \frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta + \mu - (r-\mu)} > \frac{\varphi\mu_{id}\theta}{\mu_{id}\theta - (r-\mu)}. \tag{3.17}$$

onde a última desigualdade segue que pelo fato de $\frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta + \mu - (r-\mu)} > 0$ *e* $\frac{\varphi\mu_{id}\theta}{\mu_{id}\theta - (r-\mu)} < 0$ *uma vez que* $\mu_{id}\theta - (r-\mu) < 0$. *Daí, observe que*

$$\begin{aligned}
\Phi_N = -r(1-\frac{2}{R_d}) - \mu < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mu + r(1-\frac{2}{R_d}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mu + r\left(1 - 2\left[\frac{\mu + \mu_{id}\theta(1-\frac{\varphi}{R_0})}{r}\right]\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad r - \mu - 2\mu_{id}\theta(1-\frac{\varphi}{R_0}) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{r-\mu}{2\mu_{id}\theta} > (1-\frac{\varphi}{R_0}) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2\mu_{id}\theta - (r-\mu)}{2\mu_{id}\theta} < \frac{\varphi}{R_0} \\
&\Leftrightarrow \quad R_0(2\mu_{id}\theta - (r-\mu)) < \varphi 2\mu_{id}\theta
\end{aligned}$$

como por hipótese $r > \mu + 2\mu_{id}$ *segue que*

$$r > \mu + 2\mu_{id} > \mu + 2\mu_{id}\theta \ \textit{ pois } \ \theta < 1.$$

então $2\mu_{id}\theta - (r-\mu) < 0$. *Logo,*

$$\Phi_N = -r(1-\frac{2}{R_d}) - \mu < 0 \Leftrightarrow R_0 > \frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta - (r-\mu)}. \tag{3.18}$$

Como vimos $\frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta + \mu - (r-\mu)} > 0$ *e* $0 > \frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta - (r-\mu)}$ *pois* $2\mu_{id}\theta - (r-\mu) < 0$, *então de* (3.17) *e* (3.18) *temos a seguinte condição pra o* R_0

$$R_0 > \frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta + \mu - (r-\mu)} > \frac{\varphi 2\mu_{id}\theta}{2\mu_{id}\theta - (r-\mu)}. \tag{3.19}$$

Ou seja, desde que $r > \mu + 2\mu_{id}$ *temos que* $\Phi_N = -r(1-\frac{2}{R_d}) - \mu < 0$ *para* $1 < R_d < 2$ *(* $1 - \frac{2}{R_d} < 0$*) pois o* R_0 *satisfaz simultaneamente* (3.19). *Portanto, como* $\Phi_N < 0$ *e* $\gamma > \delta$, *pelo intem anterior temos a estabilidade dos pontos de equílibrio.*

3.5 CONDIÇÕES DE INSTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO.

Agora considere o modelo de EDP (3.1). E seja,

$$F(S,V,R,S_t,I_t,R_t) = r(S+V+R)(1-\frac{N(t)}{K}) - \beta\frac{S(\frac{1}{L}I_t)}{N(t)} - \mu S - \delta S + \epsilon R$$

$$G(S,V,R,S_t,I_t,R_t) = \beta\frac{S(x,t)V(x,t)}{N(t)} - (\mu+\mu_{id}+\gamma)V(x,t)$$

$$H(S,V,R,S_t,I_t,R_t) = \gamma V + \delta S + (1-\rho)\frac{\beta S}{N(t)}\Big[\frac{1}{L}I_t - V\Big] - \mu R - \epsilon R$$

Onde $S_t = \int_0^L S(x,t)\,dx$, $I_t = \int_0^L V(x,t)\,dx$, $R_t = \int_0^L R(x,t)\,dx$. Ou seja, $N(t) = \frac{1}{L}S_t + \frac{1}{L}I_t + \frac{1}{L}R_t$, onde $x \in [0,L] \subset \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

Como vimos no capítulo (2), especificamente na secção (2.2), para analisar a instablidade dos pontos de equílibrio é suficiente analisar calculando somente as derivadas parciais de F, G e H com respeito as variáveis S, V, e R avaliadas nos pontos de equílibrio (3.10) . E note que ao derivar com respeito S, V, e R, temos que S_t, V_t, e R_t são vistas como constantes .

Vamos determinar tais derivadas :

Determinar F_s

Observe que $N(t) = \frac{1}{L}S_t + \frac{1}{L}I_t + \frac{1}{L}R_t$. Logo:

$$F_s = r(1-\frac{N}{K}) - \beta\frac{\frac{1}{L}I_t}{N} - \mu - \delta$$

Avaliemos F_s nos pontos de equílibrio (3.10). Lembrando que no equílibrio $\frac{1}{L}I_t = \frac{1}{L}\int_0^L V^*\,dx = V^*$. Daí, temos :

$$\begin{aligned} F_{s^*} &= r(1-\frac{N^*}{K}) - \beta\frac{V^*}{N^*} - \mu - \delta \\ &= r\Big(1-(1-\frac{1}{R_d})\Big) - \beta\theta(1-\frac{\varphi}{R_0}) - \mu - \delta \end{aligned}$$

logo,

$$F_{s^*} = \frac{r}{R_d} - \beta\theta(1-\frac{\varphi}{R_0}) - \mu - \delta$$

Determinar F_V

$$F_V = r(1-\frac{N}{K})$$

Avaliando F_V nos pontos de equílibrio :

$$F_{V^*} = \frac{r}{R_d}$$

Determinar F_R

$$F_R = r(1 - \frac{N}{K}) + \epsilon$$

aplicando F_R nos pontos de equílibrio :

$$F_{R^*} = \frac{r}{R_d} + \epsilon$$

Determinar G_S

$$G_S = \beta \frac{V}{N}$$

Logo,

$$G_{S^*} = \beta\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})$$

Determinar G_V

$$G_V = \beta \frac{S}{N} - (\mu + \mu_{id} + \gamma)$$

Como $R_0 = \dfrac{\beta}{\mu + \mu_{id} + \gamma}$ então $(\mu + \mu_{id} + \gamma) = \dfrac{\beta}{R_0}$. Além disso, no equílibrio $\dfrac{S}{N} = \dfrac{1}{R_0}$. Dessa forma,

$$G_{V^*} = 0$$

Determinar G_R

Note que em G não temos a varável R. logo,

$$G_R = 0\,.$$

Determinar H_s

$$H_s = \delta + (1 - \rho)\frac{\beta}{N}\Big[\frac{1}{L}I_t - V\Big]$$

Como no equílibrio $\dfrac{1}{L}I_t = V^*$ então $\left[\dfrac{1}{L}I_t - V^*\right] = 0$. Portanto,

$$H_s = \delta$$

Determinar H_V

$$H_V = \gamma + (1-\rho)\frac{\beta S}{N}[-1] = \gamma - (1-\rho)\beta\frac{S}{N}$$

Assim,

$$H_{V^*} = \gamma - (1-\rho)\frac{\beta}{R_0}$$

Determinar H_R

De forma imediata podemos ver que :

$$H_{R^*} = -(\mu + \varepsilon)$$

Portanto, as derivadas parciais de F, G e H com respeito a S, V, e R avaliadas nos pontos de equílibrio (3.10) são :

$$\begin{aligned}
F_S &= \frac{r}{R_d} - \beta\theta\Big(1 - \frac{\varphi}{R_0}\Big) - \mu - \delta \\
F_V &= \frac{r}{R_d} \\
F_R &= \frac{r}{R_d} + \varepsilon \\
G_S &= \beta\theta\Big(1 - \frac{\varphi}{R_0}\Big) \\
G_V &= 0 \\
G_R &= 0 \\
H_S &= \delta \\
H_V &= \gamma - (1-\rho)\frac{\beta}{R_0} \\
H_R &= -(\mu + \varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Como vimos no capítulo (2),especificamente em (2.53), para que os pontos de equílibrio sejam **instavéis**, uma das seguintes condições **não devem ser satisfeitas** :

$$\begin{aligned}
b_1 &> 0 \\
b_3 &> 0 \\
b_1\, b_2 - b_3 &> 0.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{array}{rcl} b_1 & \leq & 0 \\ \text{ou} & & \\ b_3 & \leq & 0 \\ \text{ou} & & \\ b_1\, b_2 - b_3 & \leq & 0. \end{array} \tag{3.21}$$

onde,

$$\begin{aligned} b_1 &= (D_S + D_V + D_R)\omega_n^2 - (F_S + G_V + H_R) \\ b_2 &= (D_S D_V + D_S D_R + D_V D_R)\omega_n^4 - \Big(D_S(G_V + H_R) + D_V(F_S + H_R) + D_R(F_S + G_V)\Big)\omega_n^2 \\ &+ F_S G_V + F_S H_R + G_V H_R - F_V G_S - F_R H_S - G_R H_V \\ b_3 &= D_S D_V D_R\, \omega_n^6 - \Big[D_S D_V H_R + D_S D_R G_V + D_V D_R F_S\Big]\omega_n^4 \\ &- \Big[D_S(H_V G_R - G_V HR) + D_V(F_R H_S - F_S H_R) + D_R(F_V G_S - F_S G_V)\Big]\omega_n^2 \\ &+ F_S G_R H_V + F_V G_S H_R + F_R G_V H_S - F_S G_V H_R - F_V G_R H_S - F_R G_S H_v\,. \end{aligned}$$

E como $G_V = 0$ e $G_R = 0$ então

$$\begin{aligned} b_1 &= (D_S + D_V + D_R)\omega_n^2 - (F_S + H_R) \\ b_2 &= (D_S D_V + D_S D_R + D_V D_R)\omega_n^4 - \Big(D_S(H_R) + D_V(F_S + H_R) + D_R(F_S)\Big)\omega_n^2 \\ &+ F_S H_R - F_V G_S - F_R H_S \\ b_3 &= D_S D_V D_R\, \omega_n^6 - \Big[D_S D_V H_R + D_V D_R F_S\Big]\omega_n^4 \\ &- \Big[D_V(F_R H_S - F_S H_R) + D_R(F_V G_S)\Big]\omega_n^2 \\ &+ F_V G_S H_R - F_R G_S H_V\,. \end{aligned}$$

Note que podemos ver b_1, b_2 e b_3 como funções polinomiais em termos de ω_n.

A análise das funções polinomiais será em termos de $y = \omega_n^2$.

Com relação ao polinômio $b_1(y)$, observe que de (3.20) :

$$H_R = -(\mu + \epsilon) < 0$$

e como já vimos

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \mu_{id} + \gamma} > 1 \implies \beta > \mu + \mu_{id} + \gamma \implies \beta > \mu_{id} \implies \mu_{id} - \beta < 0$$

e

$$R_d = \frac{R_0 r}{\mu R_0 + \mu_{id}\theta(R_0 - \varphi)} = \frac{r}{\mu + \mu_{id}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})} \implies \frac{r}{R_d} = \mu + \mu_{id}\theta(1 - \frac{\varphi}{R_0}).$$

Então como $\theta = \dfrac{\mu + \epsilon}{\mu + \epsilon + \gamma} > 0$, $\delta \geq 0$ e $R_0 > \varphi$ temos que :

$$F_S = \frac{r}{R_d} - \beta\theta\Big(1 - \frac{\varphi}{R_0}\Big) - \mu - \delta = \theta(1 - \frac{\varphi}{R_0})\Big(\mu_{id} - \beta\Big) - \delta < 0$$

Assim, para todo $y = \omega_n^2$. :

$$b_1(y) = (D_S + D_V + D_R)y - (F_S + H_R) > 0$$

Com relação aos polinômios b_3 e $B = b_1 b_2 - b_3$, note que eles possuem muitos parâmetros, dificultando assim uma análise analítica sobre quais condições os parâmetros $r, \beta, \gamma, \mu, \mu_{id}, \varepsilon, \delta$, ρ, D_s, D_v, D_R devem assumir para que

$$\begin{array}{rcl} b_3 & \leq & 0 \\ \text{ou} & & \\ B & \leq & 0. \end{array} \tag{3.22}$$

para algum $y = \omega_n^2$. Então, recorremos ao auxílio do software MATLAB.

Como na teoria de Instabilidade de Turing, ao analisar as condições de instabilidade dos pontos de equilíbrio no modelo espacial com a presença da difusão, que nesse caso seriam as condições (3.22), devemos considerar também as condições existentes de quando os pontos de equilíbrio são estáveis no modelo de EDO sem a difusão; Então, usamos o software MATLAB para encontrar um espaço de parâmetros que satisfaça as condições de estabilidade e instabilidade simultaneamente. Fizemos isso fixando valores para $r, \gamma, \mu, \varepsilon, \delta$ de modo que tais valores atendam às condições de existência dos pontos de equilíbrio (3.10) e às hipóteses do teorema das condições de estabilidade (3.1). Também fixamos valores para os parâmetros ρ, D_s, D_v, D_R, que aparecem somente quando estamos analisando as condições de instabilidade. Logo, o espaço de parâmetros será abrangido em termos de β e μ_{id}. Isto é, fixados os parâmetros mencionados, queremos saber quais valores β e μ_{id} devem assumir para que uma das condições (3.22) aconteça e consequentemente tenhamos instabilidade de Turing no modelo (3.1), onde das condições:

$$r > \mu + \mu_{id} \implies \mu_{id} \in [0, r - \mu)$$

e de

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + \mu_{id} + \gamma} > 1 \implies \beta > \mu + \mu_{id} + \gamma\,.$$

Na figura a seguir, para um conjunto de parâmetros escolhidos conforme os critérios acima, temos a região de instabilidade de Turing do modelo

(3.1) :

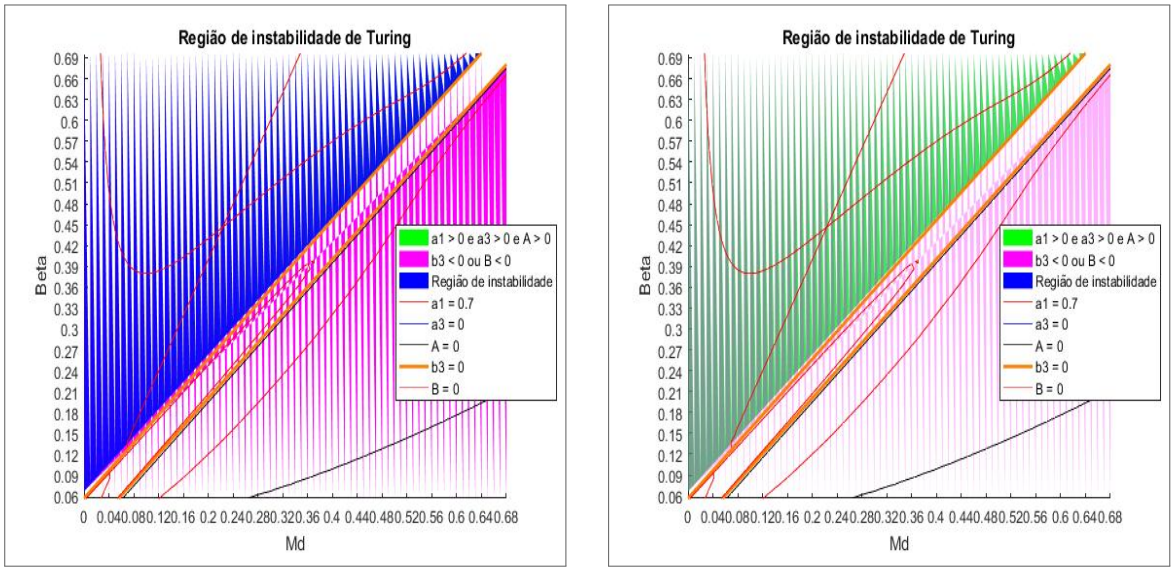

Figura 1 – Região de Instabilidade de Turing do modelo (3.11) para $r = 0.7$; $\gamma = 0.0365$; $\mu = 0.02$; $\epsilon = 0.0$; $\delta = 0.0$; $\rho = 0.94$; $D_s = 0.00001$; $D_v = 0.0001$; e $D_R = 0.00001$.

A figura (1) mostra os valores que β e μ_{id} devem assumir (com relação aos valores que estão fixados na legenda) para que se tenha instabilidade de Turing no modelo (3.11), que matematicamente acontece quando simultaneamente $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $A > 0$ e $b_3 < 0$, ou $B < 0$. A região de instabilidade de Turing é a região azul forte (figura à esquerda). Na figura à direita, ao diminuir a tonalidade da cor azul, podemos ver as cores com mais detalhes que representam quando $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $A > 0$ e $b_3 < 0$, ou $B < 0$. As curvas que aparecem no gráfico são as curvas de níveis que foram obtidas ao fazer $a_1(\mu_{id}, \beta) = 0.7$, $a_3(\mu_{id}, \beta) = 0$, $A(\mu_{id}, \beta) = 0$ e $b_3(\mu_{id}, \beta) = 0$, ou $B(\mu_{id}, \beta) = 0$ para assim sabermos onde seriam as regiões positivas ou negativas de tais funções.

Como podemos ver na região de instabilidade (figura (1) a região azul forte), existe uma grande quantidade de pontos que satisfazem as condições necessárias para instabilidade de Turing. Por exemplo, escolhendo $\mu_{id} = 0.0600$ e $\beta = 0.2165$ que estão nessa região, onde juntamente com os valores que foram fixados de $\gamma = 0.0365$ e $\mu = 0.02$ resultam no $R_0 = \dfrac{\beta}{\mu + \mu_{id} + \gamma} = 1.8584$, e além disso temos o seguinte comportamento dos polinômios de b_3 e B:

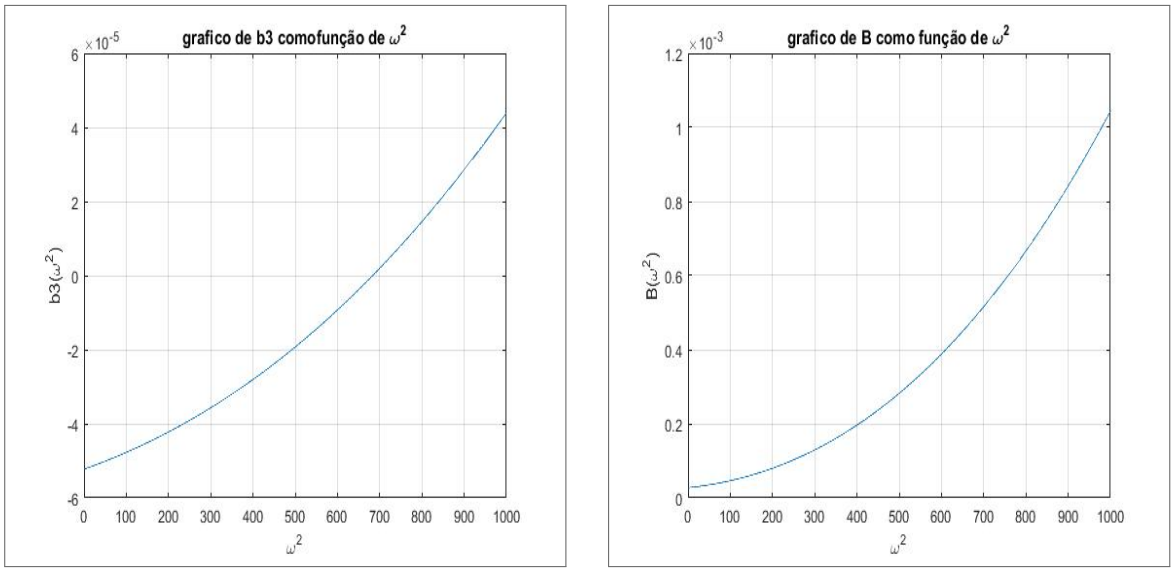

Figura 2 – Comportamento dos polinômios b_3 e B para $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7;\ \gamma = 0.0365;\ \mu = 0.02;\ \epsilon = 0.0;\ \delta = 0.0;\ \rho = 0.94; D_s = 0.00001;\ D_v = 0.0001;$ e $D_R = 0.00001$.

Então, podemos ver que, em relação ao polinômio b_3, ele é negativo para uma faixa aproximada de $\omega^2 \in [0, 680]$, enquanto que B é positivo para todo $\omega^2 \in [0, 1000]$. Logo, como para os valores dos parâmetros da figura (2) temos que $b_3(\omega^2) < 0$ para uma faixa aproximada de $\omega^2 \in [0, 680]$, portanto temos instabilidade de Turing no modelo (3.1) para tais parâmetros .

Uma condição equivalente para analisar se os pontos de equilíbrio são estáveis ou instáveis é analisar as partes reais das soluções do polinômio característico:

$$\lambda^3 + b_1(\omega^2)\lambda^2 + b_2(\omega^2)\lambda + b_3(\omega^2) = 0$$

Logo, os pontos de equilíbrio (3.10) são **estáveis** se todas as soluções do polinômio característico $\lambda_1(\omega^2)$, $\lambda_2(\omega^2)$ e $\lambda_3(\omega^2)$ tiverem parte real negativa para todo ω^2. Serão **instáveis** se existir algum ω^2 tal que $\lambda_1(\omega^2)$, $\lambda_2(\omega^2)$ ou $\lambda_3(\omega^2)$ tenha parte real positiva.

No gráfico a seguir, com o intuito de comparar com os resultados obtidos ao analisar as desigualdades (3.22), plotamos o comportamento da curva sobre os maiores valores da parte real das soluções do polinômio característico para cada ω^2, ideia usada por (MURRAY, 2013), pois, observe que fixados os valores dos parâmetros da figura (2), para cada ω^2 podemos ter um polinômio característico diferente e consequentemente soluções diferentes.

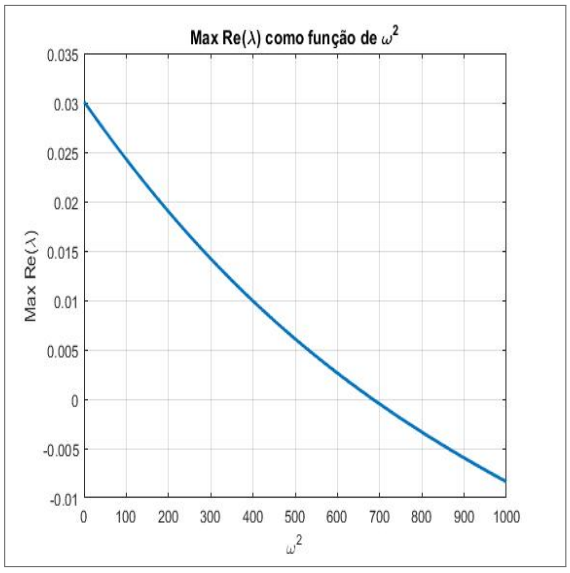

Figura 3 – Plot sobre os maiores valores da parte real $\lambda(\omega^2)$ como função de ω^2 para os mesmos valores dos parâmetros da figura (2) : $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7;\ \gamma = 0.0365;\ \mu = 0.02;\ \epsilon = 0.0;\ \delta = 0.0;\ \rho = 0.94; D_s = 0.00001;\ D_v = 0.0001;$ e $D_R = 0.00001$.

Observe que, em primeiro lugar, Max Re $\lambda(\omega^2) > 0$ para uma faixa aproximada de $\omega^2 \in [0, 680]$. E, assim como vimos antes na figura (2), para os valores dos parâmetros da figura (3) e $\omega^2 \in [0, 680]$, temos instabilidade de Turing no modelo (3.1). Em segundo lugar, observe que o comportamento da função $b_3(\omega^2)$ é oposto ao de Max Re $\lambda(\omega^2)$, isto é, quando $b_3(\omega^2) < 0$, temos que Max Re $\lambda(\omega^2) > 0$ (a faixa onde os pontos de equilíbrio são instáveis); e quando $b_3(\omega^2) > 0$, temos que Max Re $\lambda(\omega^2) < 0$ (a faixa onde os pontos de equilíbrio são estáveis).

Uma vez que $\rho \in [0, 1]$, vejamos mais alguns casos. Por exemplo, nas figuras a seguir, mudamos apenas o parâmetro ρ de 0.94 para 0.1.

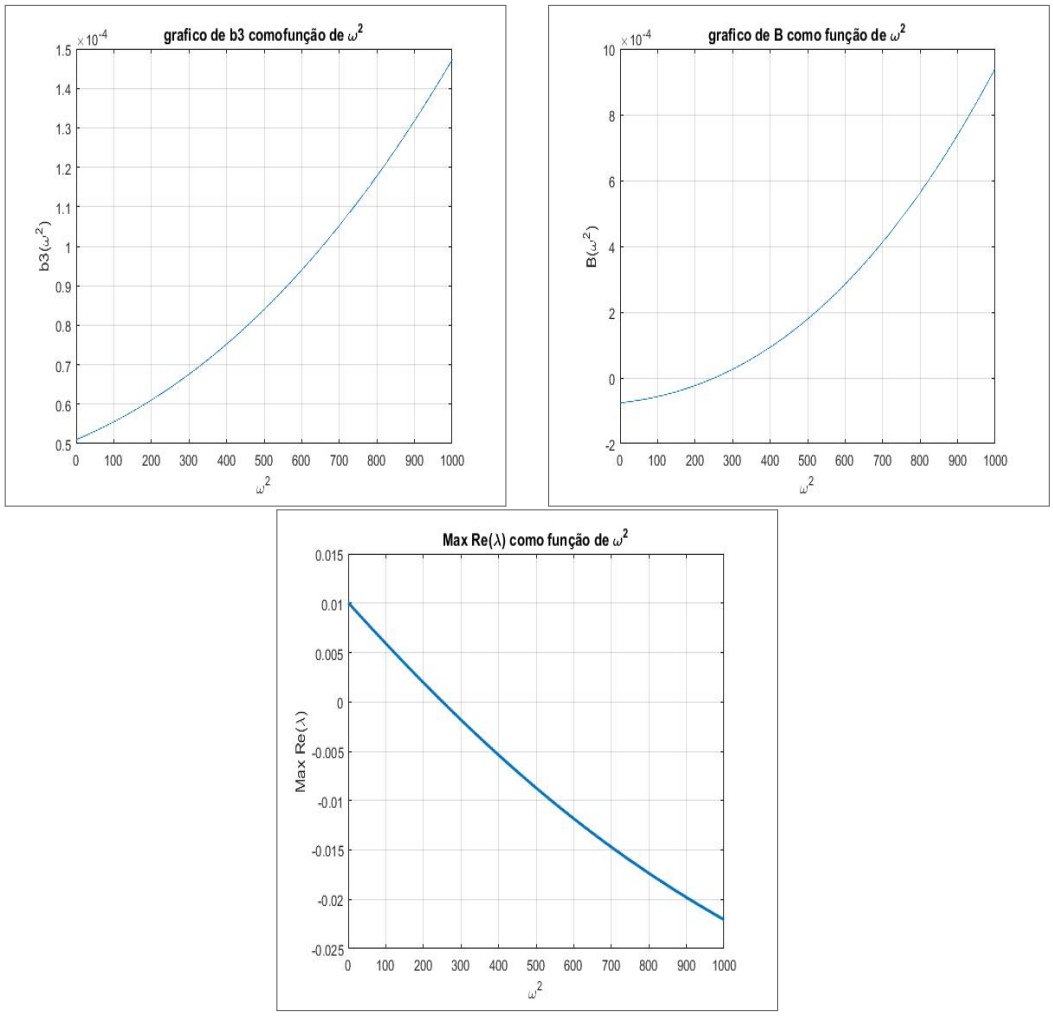

Figura 4 – Comportamento dos polinômios $b_3(\lambda(\omega^2))$, $B(\lambda(\omega^2))$ e de max Re$(\lambda(\omega^2))$ para $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7; \gamma = 0.0365; \mu = 0.02; \epsilon = 0.0; \delta = 0.0; \rho = 0.1; D_s = 0.00001; D_v = 0.0001;$ e $D_R = 0.00001$.

Note que, dessa vez, $b_3(\lambda(\omega^2)) > 0$ para todo ω^2, enquanto que $B(\lambda(\omega^2)) < 0$ para uma faixa de ω^2, conforme a figura, sendo o comportamento oposto de Max Re$(\lambda(\omega^2))$.

Escolhendo $\rho = 0.5$, temos :

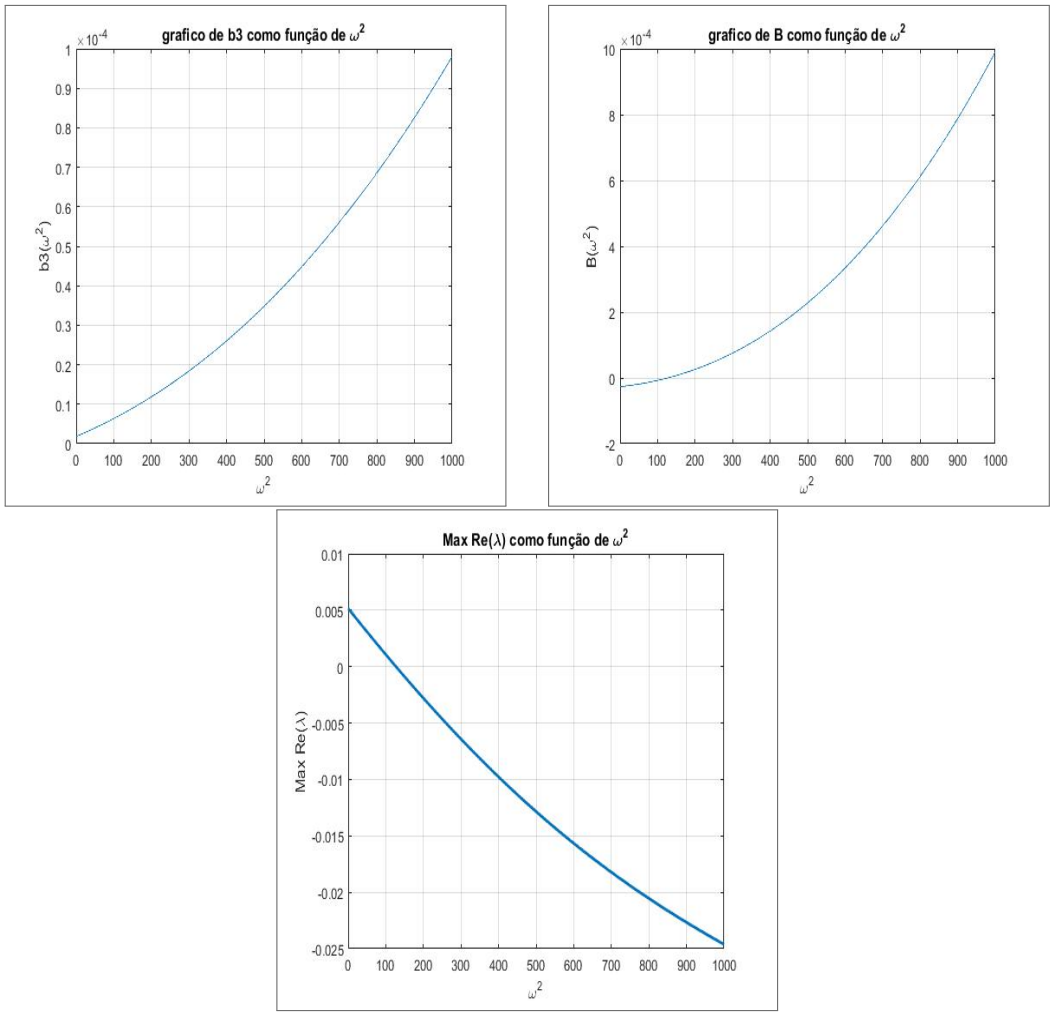

Figura 5 – Comportamento dos polinômios $b_3(\lambda(\omega^2))$, $B(\lambda(\omega^2))$ e de max Re$(\lambda(\omega^2))$ para $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7; \gamma = 0.0365; \mu = 0.02; \epsilon = 0.0; \delta = 0.0; \rho = 0.5; D_s = 0.00001; D_v = 0.0001;$ e $D_R = 0.00001$.

$b_3(\lambda(\omega^2)) > 0$ para todo ω^2, enquanto que $B(\lambda(\omega^2)) < 0$ para uma faixa de ω^2, conforme a figura, sendo o comportamento oposto de Max Re$(\lambda(\omega^2))$.

Com base em tais casos, como esperado, podemos ver que as formas de analisar se os pontos de equilíbrio são estáveis ou instáveis conforme algumas dessas abordagens (se alguma das funções é negativa ou através de analisar a parte real das soluções do polinômio característico) estão sendo equivalentes e também mostra que a teoria que desenvolvemos está bem sólida. Além disso, vemos que para alguns valores de ρ, ou $b_3(\lambda(\omega^2))$ ou $B(\lambda(\omega^2))$ é negativa. Isso no faz questionar para quais valores de ρ temos Instabilidade de Turing ?

Na figura a seguir, para os valores dos parâmetros vistos anteriormente, vemos para quais valores de $\rho \in [0, 1]$ temos Instabilidade de Turing.

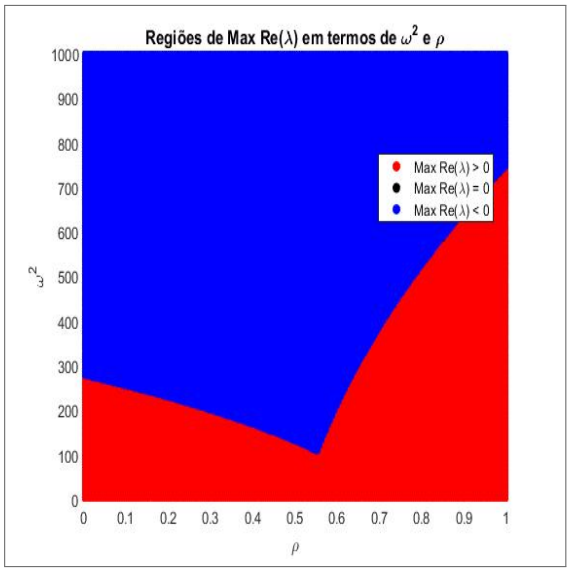

Figura 6 – Plot das regiões onde para cada $\rho \in [0,1]$ tem-se : Max Re$(\lambda(\omega^2)) > 0$; Max Re$(\lambda(\omega^2)) = 0$ e Max Re$(\lambda(\omega^2)) < 0$; para assim descobrir para quais valores de $\rho \in [0,1]$ temos Instabilidade de Turing. Os valores dos demais parâmetros são : $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7; \gamma = 0.0365; \mu = 0.02; \epsilon = 0.0; \delta = 0.0;\ D_s = 0.00001;\ D_v = 0.0001;$ e $D_R = 0.00001$.

Podemos ver através da figura (6), que para todo $\rho \in [0,1]$, há uma região (faixa de ω^2) onde Max Re$(\lambda(\omega^2)) > 0$. Portanto, para todo $\rho \in [0,1]$ e para o conjunto de parâmetros escolhidos, temos instabilidade de Turing.

Vejamos mais um caso na figura a seguir :

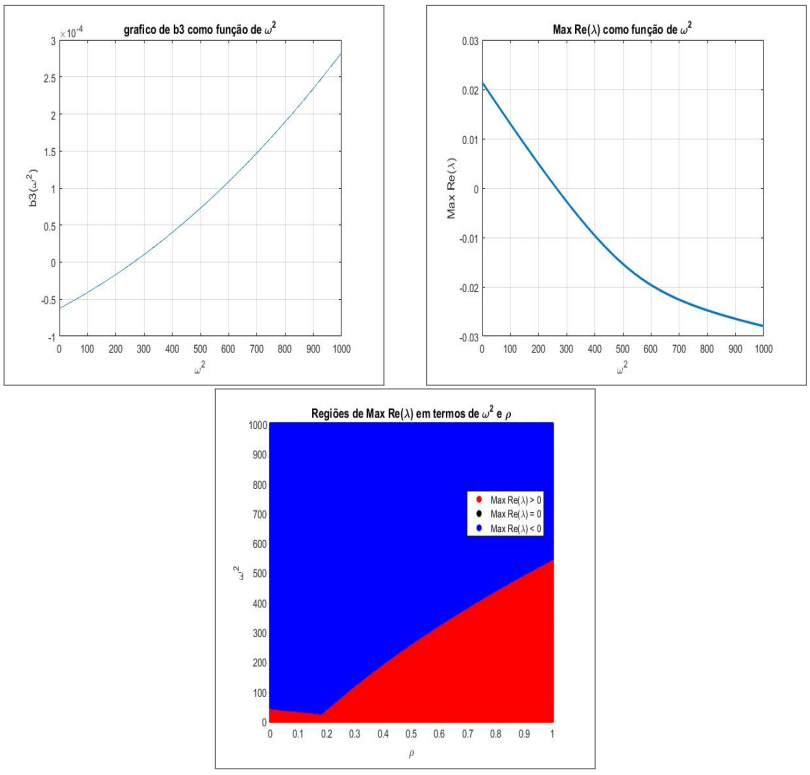

Figura 7 – Esses casos representandos referem-se ao $\mu_{id} = 0.0100$ e $\beta = 0.3965$ Resultando no $R_0 = 5.9624$.

As duas primeiras figuras anteriores é para o caso particular quando $\rho = 0.5$ (Os demais parâmetros são os mesmos de antes) que nos mostra que existe uma faixa de ω^2 no qual $b_3(\lambda(\omega^2)) < 0$ sendo a mesma faixa onde Max Re$(\lambda(\omega^2)) > 0$, isto é, tem Instabilidade de Turing. E a terceira figura nos mostra que para esse escolha de μ_{id} e β e os demais parâmetros já fixados, tem-se Instabilidade de Turing para todo $\rho \in [0, 1]$.

De forma análoga, outras análises podem ser feitas para outros valores de β e μ_{id} escolhidos na região de instabilidade de Turing, e portanto comprovando que temos Istabilidade de Turing no modelo (3.1).

Nas próximas seções, apresentaremos as simulações do nosso modelo.

3.6 SIMULAÇÕES

O objetivo desta seção é analisar os padrões instáveis de Turing no modelo (3.1), utilizando os parâmetros que satisfazem as propriedades analíticas de instabilidade de Turing discutidas na seção anterior. Na figura a seguir, temos um exemplo:

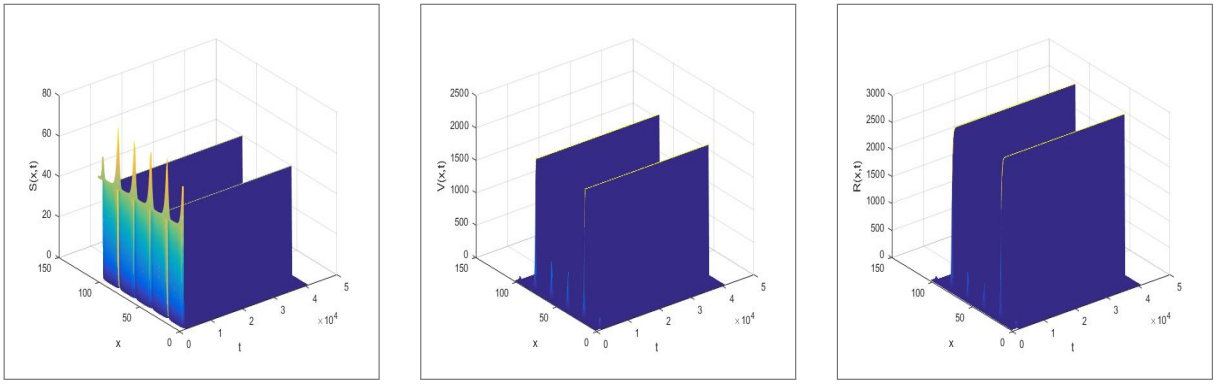

Figura 8 – Densidade de $S(x,t), V(x,t)$ e $R(x,t)$ respectivamente onde os parâmetros são : $\mu_{id} = 0.0600; \beta = 0.2165; r = 0.7; \gamma = 0.0365; \mu = 0.02; \epsilon = 0.0; \delta = 0.0; \rho = 0.94; D_s = 0.00001; D_v = 0.0001; D_R = 0.00001; K = 100; \omega = 20, T = 10.000$ e $L = 50\pi$. Nesse caso, $R_0 = 1.8584$ e $R_d = 23.4819$.

Podemos observar na Figura (8) que, de fato, surgem padrões ocasionados pela instabilidade de Turing no modelo (3.1). Para os parâmetros descritos, os pontos de equilíbrio (3.10) são dados por $(S^*, V^*, R^*) = (51.5190, , 15.6539, , 28.5684)$. Utilizando as seguintes condições iniciais:

$$S(x,0) = S^* + \cos(20x) = 51.5190 + 0.001\ \cos(20x)$$

$$V(x,0) = V^* + \cos(20x) = 15.6539 + 0.001\ \cos(20x)$$

$$R(x,0) = R^* + \cos(20x) = 28.5684 + 0.001\ \cos(20x)$$

Observamos que, ao aplicar uma pequena perturbação nos pontos de equilíbrio, as densidades $S(x,t)$, $V(x,t)$ e $R(x,t)$ se afastam desses pontos e se dissipam no espaço, assumindo um padrão estacionário, como mostrado na figura. Tal comportamento está em conformidade com a teoria da instabilidade de Turing, confirmando sua presença no modelo (3.1).

Uma vez que é de grande interesse analisar a quantidade de pessoas infectadas em uma epidemia, focaremos na análise dos tipos de padrões de Turing que aparecem na densidade $V(x,t)$.

Iniciaremos pela análise do efeito da difusão em nosso modelo. Na figura a seguir, mostramos os casos em que aumentamos os valores da difusão. Os parâmetros μ_{id}, β, r, γ, μ, ϵ, δ, ρ, K e L utilizados foram os mesmos da figura anterior (8).

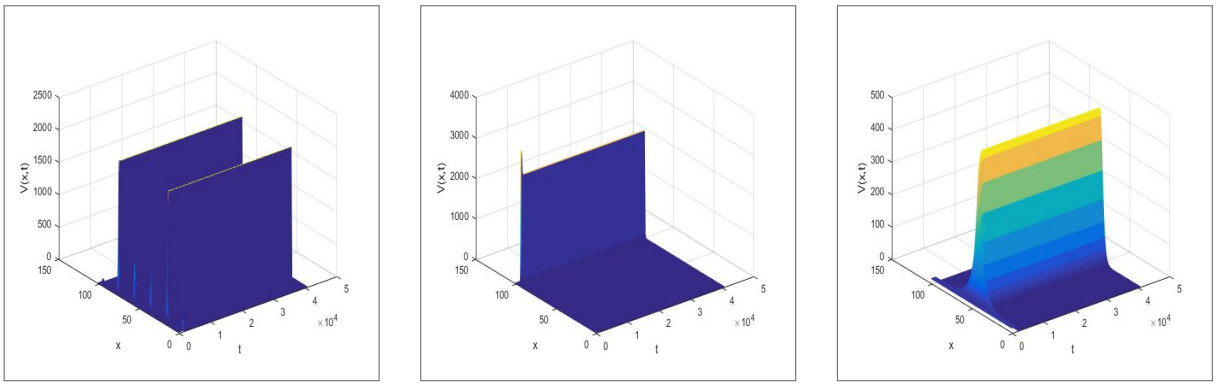

Figura 9 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda e terceira figura temos respectivamente : $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001$, ,$T = 10000$ e $\omega = 20$; $D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001$,$T = 8000$ e $\omega = 2$; $D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001$,$T = 8000$ e $\omega = 1$. .

Observe que, na primeira figura acima, há quatro picos (modos), dos quais dois predominam. Com o aumento da difusão, restou apenas um pico. Assim, a difusão no nosso modelo (3.1) tem o efeito de selecionar modos. Além disso, observe que os valores de ω diminuíram com o aumento da difusão. Isso se explica pelo fato de que, ao aumentar a difusão, a região (faixa) de instabilidade de Turing diminuiu, reduzindo assim o intervalo de ω. Podemos observar isso na figura a seguir (10), onde os valores de difusão usados para cada caso foram os mesmos da figura (9), e os demais parâmetros foram os mesmos da figura (8) :

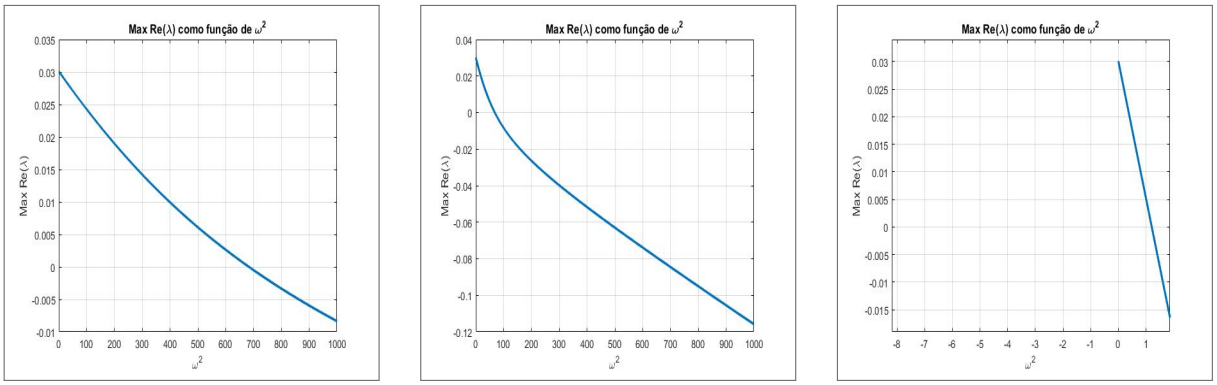

Figura 10 – Região de Instabilidade para os valores de : $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001$; $D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001$; $D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001$ para cada figura respectivamente.

Como podemos ver nas figuras a seguir, o mesmo caso quando consideramos $\beta = 0.3965$ e $\mu_{id} = 0.0100$.

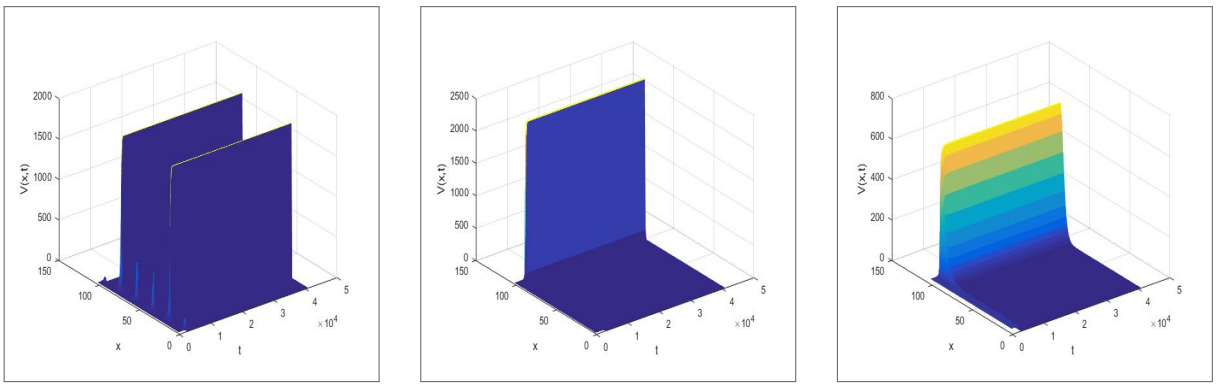

Figura 11 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda e terceira figura temos respectivamente : $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001$, $T = 9000$ e $\omega = 20$; $D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001$, $T = 5000$ e $\omega = 2$; $D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001$, $T = 5000$ e $\omega = 1$. .

Agora, vamos analisar o efeito do parâmetro ρ em nosso modelo. Na figura a seguir, mostramos a densidade $V(x,t)$ para diferentes valores de ρ. Utilizamos os mesmos valores da figura (8), exceto pelos valores do parâmetro ρ e do tempo T, que variam em cada caso.

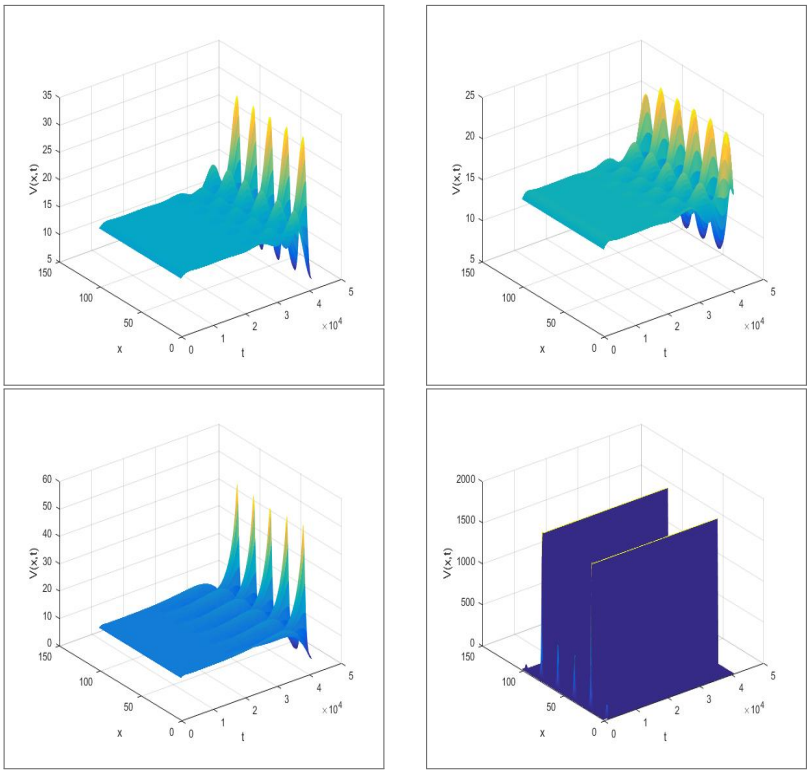

Figura 12 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda, terceira e quarta figura temos respectivamente que : $\rho = 0$ e $T = 800; \rho = 0.25$ e $T = 1000; \rho = 0.5$ e $T = 1450; \rho = 1$ e $T = 12000$.

Note que, nas duas primeiras figuras ($\rho = 0$ e $\rho = 0.25$), a densidade $V(x,t)$ apresenta vários picos (modos). Na terceira figura ($\rho = 0.5$), esses picos se reduzem a 5, e, no último caso ($\rho = 1$), reduzindo a dois modos predominando. Ou seja, ao variar os valores de ρ, observamos uma seleção de modos.

Essa seleção de modos é um fenômeno que pode ocorrer em alguns modelos com instabilidade de Turing. (MURRAY., 2023) afirma que, em um sistema com instabilidade de Turing, a perturbação inicial pode conter vários modos. No entanto, o modo que cresce mais rapidamente (aquele com a maior parte real $Re\,\lambda(\omega^2)$) acaba dominando o sistema, resultando em um padrão estável que corresponde a esse modo dominante. Isso é o que observamos na figura (12) e pode ser comprovado na figura a seguir, onde plotamos a maior parte real $Re\,\lambda(\omega^2)$ para cada valor de ρ. Os parâmetros são os mesmos da figura anterior, exceto, claro, o parâmetro ρ, que está no intervalo $[0, 1]$.

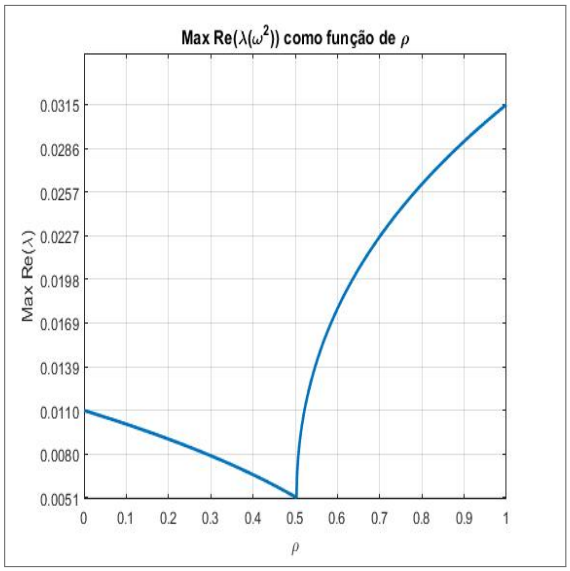

Figura 13 – Plot da maior parte Re($\lambda(\omega^2)$) (Max Re($\lambda(\omega^2)$)) para cada $\rho \in [0,1]$ tal que para cada ρ Max Re($\lambda(\omega^2)$) > 0 (garantindo que tem Instabilidade de Turing). Note que conforme ρ se aproxima de 1, Max Re($\lambda(\omega^2)$) tende para 0.0315 sendo o maior valor atingido para $\rho \in [0,1]$ representando assim o o modo dominante como falado acima.

O mesmo caso ocorre quando consideramos $\beta = 0.3965$ e $\mu_{id} = 0.0100$.

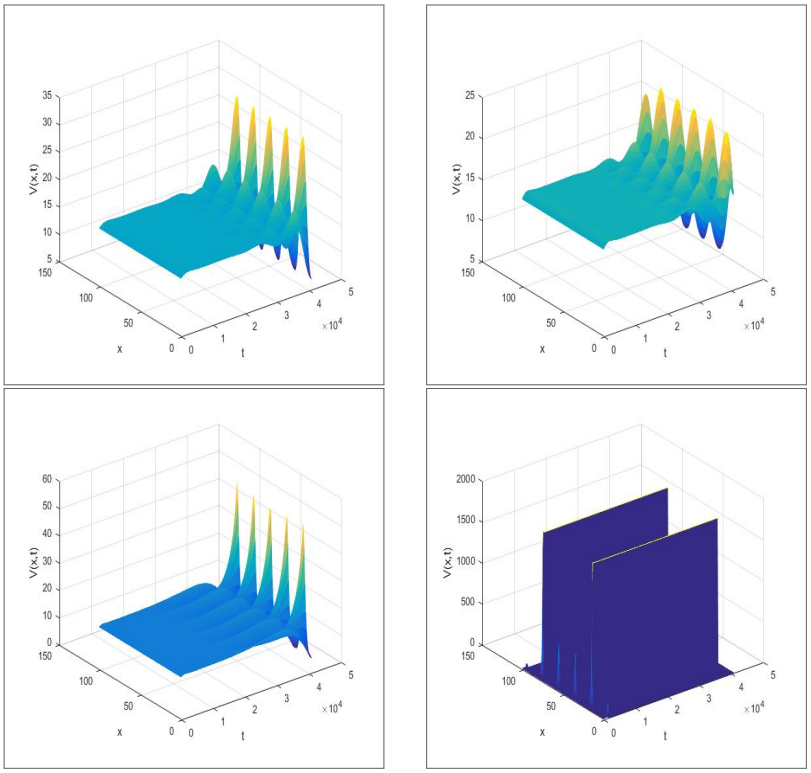

Figura 14 – Densidade de $V(x,t)$ onde para primeira, segunda, terceira e quarta figura temos respectivamente que : $\rho = 0$ e $T = 800; \rho = 0.25$ e $T = 1000; \rho = 0.5$ e $T = 1450; \rho = 1$ e $T = 10000$.

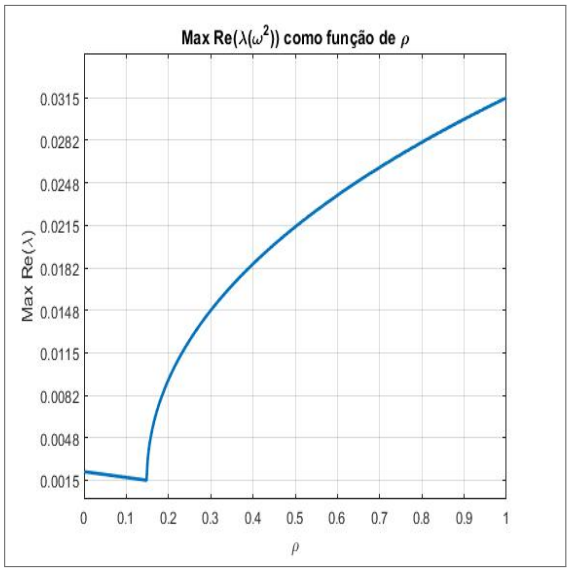

Figura 15 – Plot da maior parte Re($\lambda(\omega^2)$) (Max Re($\lambda(\omega^2)$)) para cada $\rho \in [0,1]$ tal que para cada ρ Max Re($\lambda(\omega^2)$) > 0 (garantindo que tem Instabilidade de Turing). Note que conforme ρ se aproxima de 1, Max Re($\lambda(\omega^2)$) tende para 0.0315 sendo o maior valor atingido para $\rho \in [0,1]$ representando assim o o modo dominante como falado acima.

Observamos que o parâmetro ρ exerce grande influência nos tipos de padrões de Turing que surgem em nosso modelo (3.1), assim como na seleção de modos (padrões). Vale lembrar que, em nosso modelo, consideramos $V(x,t)$ como a densidade de indivíduos infectados por um patógeno x no tempo $t \geq 0$, onde o patógeno $x \in [0,L]$ sofre mutação de acordo com um processo de caminhada aleatória. Com base nessa seleção de modos, podemos deduzir que, entre as possíveis mutações do patógeno x, algumas acabam predominando à medida que ρ tende a 1. Para compreender melhor essa influência, decidimos estudar a quantidade de infectados para diferentes valores de ρ.

3.6.1 Número de pessoas Infectados

Saber o número total de infectados em uma epidemia é essencial para a compreensão e o controle da propagação da doença. O número total de pessoas infectadas em um instante de tempo t é dado por:

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_0^L V(x,t)dx.$$

Nosso objetivo é analisar esse número para cada valor de ρ. Para isso, uma vez que o surto epidêmico ocorre quando $R_0 > 1$, vamos examinar de inicio o número de infectados para cada ρ em três casos distintos de R_0: $R_0 \approx 1$, $R_0 \approx 5$ e $R_0 \approx 10$. Na figura a seguir, vemos esses

três casos representados respectivamente:

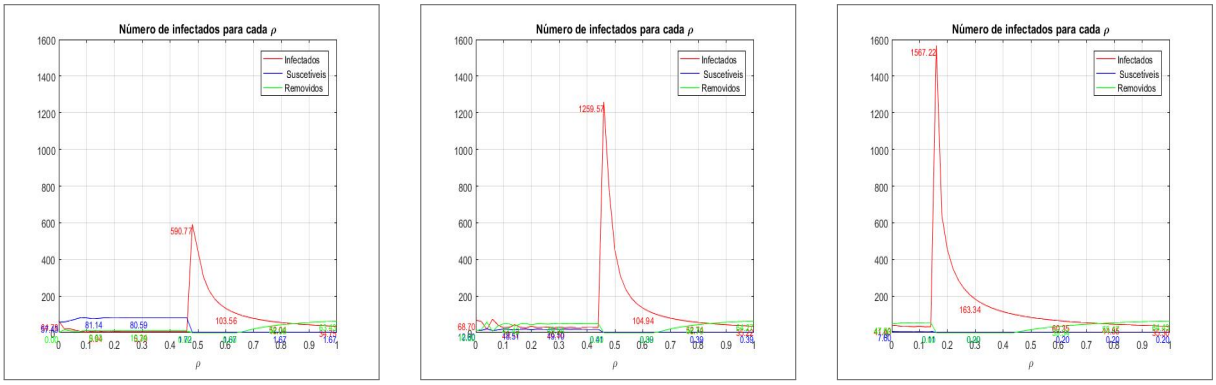

Figura 16 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, correspondendo a $R_0 \approx 1$, $R_0 \approx 5$ e $R_0 \approx 10$, respectivamente. Os parâmetros usados na primeira figura são: $\mu_{id} = 0{,}0500$, $\beta = 0{,}1265$, $r = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}0365$, $\mu = 0{,}02$, $\epsilon = 0$, $\delta = 0$, $D_s = 0{,}00001$, $D_v = 0{,}0001$, $D_R = 0{,}00001$, $K = 100$, $\omega = 20$, $T = 2190$ e $L = 50\pi$, resultando em $R_0 = 1{,}1878$. Na segunda figura, os parâmetros que diferem são: $\mu_{id} = 0{,}0500$, $\beta = 0{,}5365$ e $T = 1050$, resultando em $R_0 = 5{,}0376$. Na terceira figura, as diferenças são: $\mu_{id} = 0{,}0100$, $\beta = 0{,}6765$ e $T = 5500$, resultando em $R_0 = 10{,}1729$

.

Observa-se um comportamento semelhante nos três casos, com a presença de um pico máximo de infectados. À medida que o valor de R_0 aumenta, o pico máximo do número de infectados também cresce. Logo, vemos que o aumento da transmissão da doença aumenta o número de infectados, como esperado.

Outro fator que podemos notar na Figura (16) é que, nos dois primeiros casos, temos $\mu_{id} = 0{,}0500$, e o pico máximo ocorreu aproximadamente para $\rho = 0{,}5$. No entanto, ao reduzirmos μ_{id} para $\mu_{id} = 0{,}0100$, o pico máximo foi observado para um ρ menor, entre $[0{,}1, 0{,}2]$, mesmo em um cenário com R_0 elevado, sendo $R_0 = 10{,}1729$. Isso nos motivou a investigar a relação entre μ_{id} e o parâmetro ρ e, consequentemente, o impacto no número de infectados.

Na figura a seguir, apresentamos a curva de infectados para três valores de μ_{id}: um valor menor (com os parâmetros da figura anterior, resultando em $R_0 = 10{,}1729$), um valor médio (parâmetros da figura anterior que resultaram em $R_0 = 5{,}0376$) e um valor maior (com dados que diferem dos anteriores apenas na mudança de μ_{id} e β, onde, nesse caso, $\mu_{id} = 0{,}1000$, $\beta = 0{,}1665$, resultando em $R_0 = 1{,}0639$ e $T = 1450$).

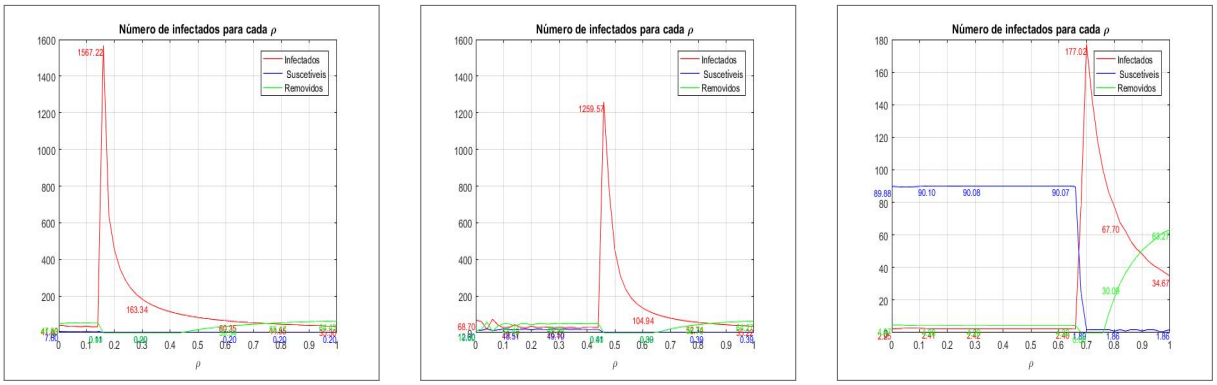

Figura 17 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, correspondendo, respectivamente, a: $\mu_{id} = 0{,}0100$ com $R_0 = 10{,}1729$; $\mu_{id} = 0{,}0500$ com $R_0 = 5{,}0376$; e $\mu_{id} = 0{,}1000$ com $R_0 = 1{,}0639$.

.

Vemos que, conforme μ_{id} aumenta, o pico máximo de infectados ocorre para um valor maior de ρ. Isto é, quando μ_{id} é pequeno (por exemplo, $\mu_{id} = 0{,}0100$), o pico máximo de infectados ocorre com ρ tendendo a 0. Por outro lado, quando μ_{id} é maior (como em $\mu_{id} = 0{,}1000$), o pico máximo de infectados ocorre com ρ tendendo a 1. Como μ_{id} representa a mortalidade induzida pela doença, este parâmetro sugere que valores menores de ρ refletem uma doença menos agressiva, enquanto valores maiores indicam uma doença mais agressiva.

Além disso, esse comportamento é independente do valor de R_0: com μ_{id} menor, o R_0 é maior (indicando mais infectados), enquanto, com μ_{id} maior, o R_0 é menor (indicando menos infectados). Isso sugere, respectivamente, uma doença de alto contágio e baixa mortalidade e uma doença mais letal, que resulta em menos casos de infecção.

Na seção anterior, vimos que o parâmetro ρ está relacionado à seleção de cepas. Dentre as várias mutações que um patógeno x pode sofrer, algumas acabam predominando à medida que ρ tende a 1 (ver Figuras (12), (13), (14), (15)). Como também observamos que ρ está relacionado à agressividade da doença, podemos, portanto, deduzir que as cepas podem ser: menos agressivas (mesmo com um alto fator de contágio, como no caso de $\mu_{id} = 0{,}0100$ com $R_0 = 10{,}1729$), de agressividade média ($\mu_{id} = 0{,}0500$) e altamente agressivas ($\mu_{id} = 0{,}1000$).

Na seção anterior, também vimos que a difusão atua como uma seleção de modos (padrão), que pode ser interpretada como uma seleção de cepas (ver Figuras (9), (10), (11)). Para entender melhor o efeito da difusão no nosso modelo, analisamos a quantidade de infectados para cada ρ, aumentando a difusão, assim como fizemos na seção anterior. Escolhemos os parâmetros da Figura (17), onde $R_0 = 5{,}0376$, por ser um caso intermediário. Na figura a seguir, temos essa análise.

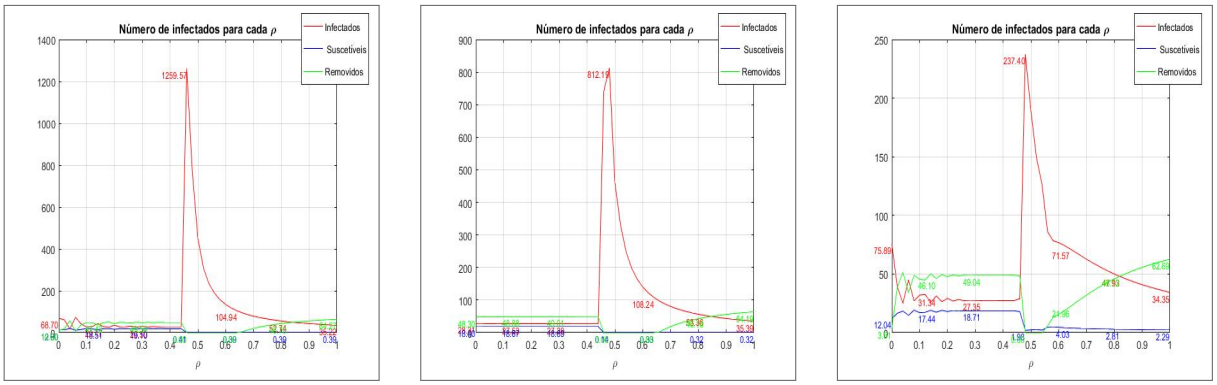

Figura 18 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, correspondendo, respectivamente, a: $D_s = 0.00001$, $D_v = 0.0001$, $D_R = 0.00001\,, T = 1050\ e\ \omega = 20; D_s = 0.001$, $D_v = 0.01$, $D_R = 0.001\,, T = 1050\ e\ \omega = 2; D_s = 0.001$, $D_v = 1$, $D_R = 0.001\,, T = 1460\ e\ \omega = 1$. .

.

Observamos que o aumento da difusão reduz a quantidade do pico máximo de infectados. Essa situação pode indicar que, com baixa difusão em nosso modelo, as cepas ou variantes dos infectados tendem a se agrupar, formando picos locais bem definidos, o que intensifica a transmissão local e eleva o pico máximo de infectados. Por outro lado, com o aumento da difusão, os infectados se espalham de forma mais uniforme, o que, como vimos na figura (9) da seção anterior, promove a predominância de alguma cepa adaptada a essa dispersão e, consequentemente, limita a formação de surtos intensos de infectados.

Logo, no nosso modelo, observamos dois tipos de seleção: a seleção de cepas mediada pelo parâmetro ρ e a seleção espacial influenciada pela difusão. O parâmetro ρ determina a agressividade do vírus, com valores próximos de 0 favorecendo cepas menos agressivas (que causam menos mortalidade) e valores próximos de 1 promovendo cepas mais agressivas (que causam maior mortalidade). Por outro lado, a difusão impacta a dinâmica da infecção: com baixa difusão, as cepas tendem a se agrupar, resultando em picos locais elevados de infecção. Em contraste, o aumento da difusão promove uma distribuição mais uniforme dos infectados, limitando surtos intensos e favorecendo alguma cepa adaptada, o que reduz o pico máximo de infectados. Assim, a interação entre a seleção de cepas e a seleção espacial é fundamental para entender a dinâmica da epidemia, refletindo um equilíbrio entre a agressividade do vírus e a homogeneidade na propagação.

Até o momento, a análise do número de infectados está sendo feita com o parâmetro de vacinação $\delta = 0$. Na próxima seção, veremos o efeito da vacinação no nosso modelo.

3.6.2 Efeito da vacinação no número de pessoas Infectados

Para analisar a quantidade de infectados para cada ρ com a presença da vacina, vamos considerar quatro valores distintos para δ: $\delta = 0{,}00$, $\delta = 0{,}01$, $\delta = 0,035$ e $\delta = 0{,}077$. Na Figura (19), apresentamos cada caso para os valores de δ, respectivamente:

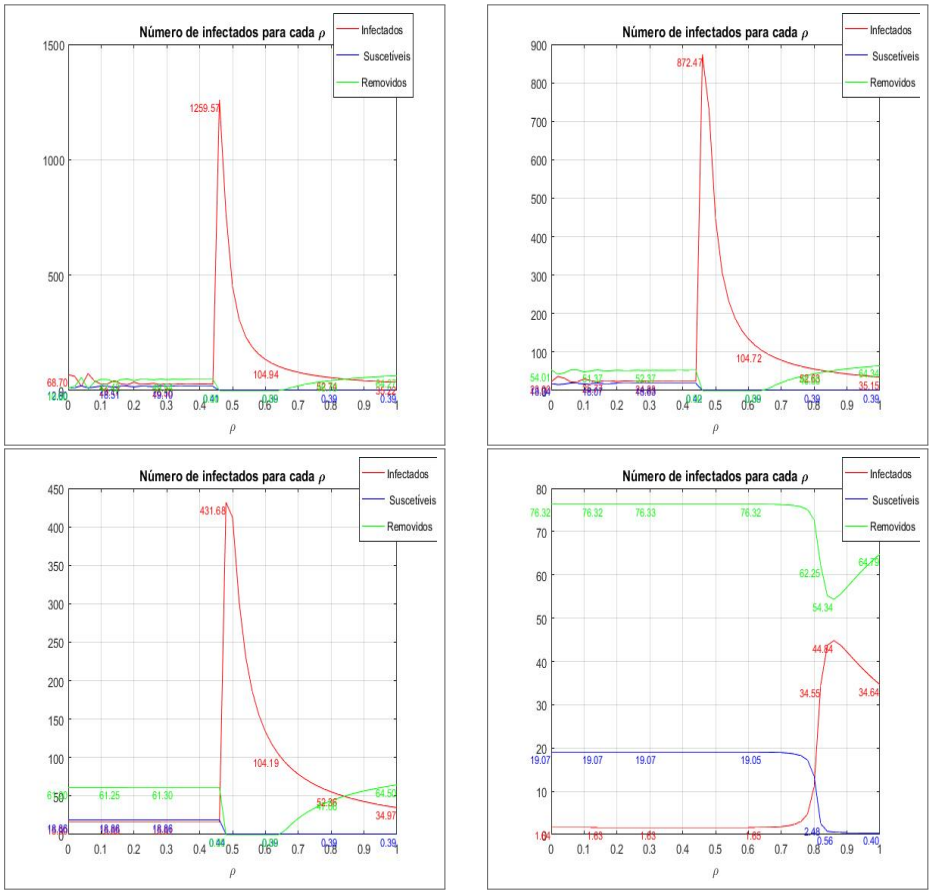

Figura 19 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para cada valor de ρ, com os parâmetros comuns usados em todos os casos sendo: $\mu_{id} = 0{,}0500$, $\beta = 0{,}5365$, $r = 0{,}7$, $\gamma = 0{,}0365$, $\mu = 0{,}02$, $\epsilon = 0$, $\delta = 0$, $D_s = 0{,}00001$, $D_v = 0{,}0001$, $D_R = 0{,}00001$, $K = 100$, $\omega = 20$, $T = 1050$ e $L = 50\pi$, resultando em $R_0 = 5{,}0376$. Para os valores de δ, temos: na primeira figura, $\delta = 0$; na segunda figura, $\delta = 0{,}01$; na terceira figura, $\delta = 0{,}035$; e na quarta figura, $\delta = 0{,}077$.

Considerando um cenário de epidemia com vacinação ativa, observa-se que, à medida que o valor de δ aumenta, o pico máximo de infectados diminui. Para valores de $\delta = 0{,}01$ e $\delta = 0{,}035$, o pico máximo de infectados é reduzido, mas ocorre no mesmo valor de ρ que no caso em que $\delta = 0$. No entanto, com $\delta = 0{,}077$, o valor de ρ correspondente ao pico se desloca para mais próximo de 1. Isso sugere que, em um contexto de vacinação intensa, o vírus precisa ser mais agressivo (ou seja, um ρ maior) para gerar picos significativos de infecção, mas seu impacto é limitado pela redução geral no número de infectados.

Além disso, a análise das classes de suscetíveis e removidos revela dinâmicas importantes.

Com o aumento de δ, há um leve aumento na quantidade de suscetíveis, pois a vacinação reduz a pressão infecciosa, permitindo que uma proporção maior da população permaneça na classe S. Por outro lado, o número de removidos aumenta significativamente, especialmente para $\delta = 0{,}077$, onde a classe R é maior do que a classe I em todos os valores de ρ. Nesse caso, a vacinação promove uma transferência direta de indivíduos para a classe R, reduzindo ainda mais o pico de infectados e a intensidade da epidemia.

Consideremos agora o cenário em que a população é vacinada, mas com a possibilidade de perda de imunidade, ou seja, com o parâmetro ϵ ativado. Para essa análise, utilizaremos os mesmos valores de parâmetros da figura anterior ((19)), fixando $\delta = 0,077$, pois esse valor apresentou o melhor cenário de imunização pela vacina. Nesse contexto, analisaremos quatro valores distintos para o parâmetro ϵ: $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0,001$, $\epsilon = 0,01$ e $\epsilon = 0,06$. A figura a seguir ilustra os resultados para cada caso.

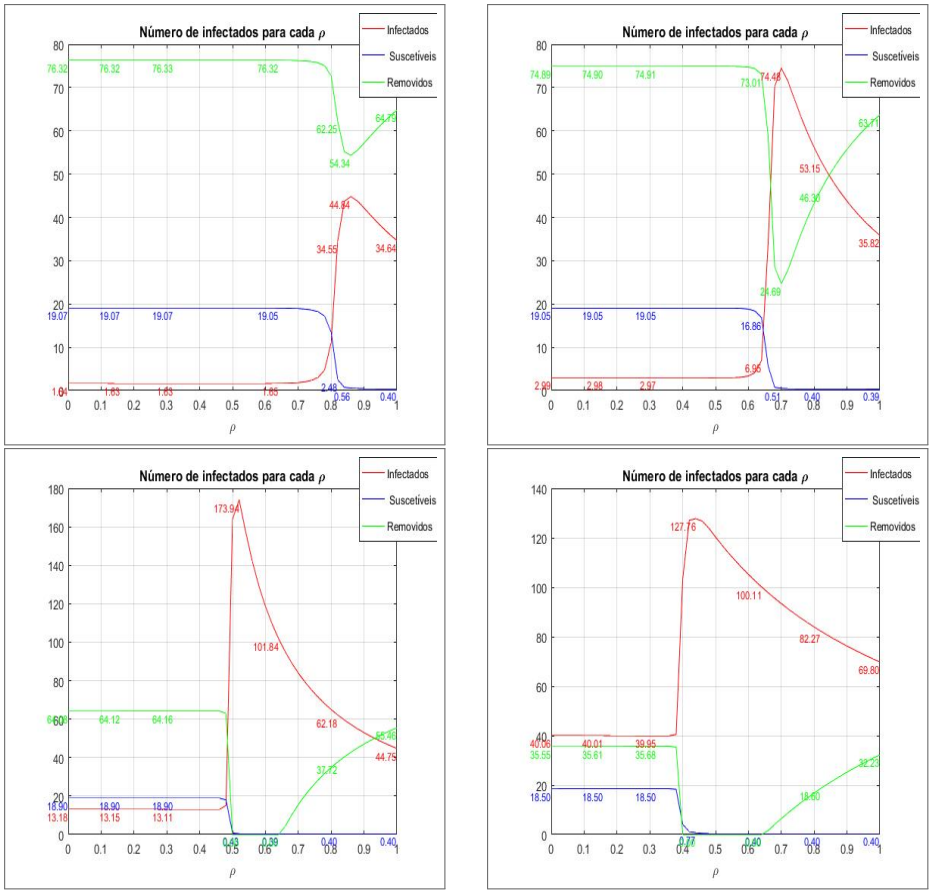

Figura 20 – Curvas do número de infectados, $I(t)$, para diferentes valores de ρ em um cenário de vacinação ativa, considerando a possibilidade de perda de imunidade na população. Cada figura representa, respectivamente, os casos em que $\epsilon = 0$, $\epsilon = 0,001$,$\epsilon = 0,01$ e $\epsilon = 0,06$.

Note que a taxa de perda de imunidade (ϵ) exerce um papel significativo na dinâmica da curva de infectados. Ao introduzir uma perda de imunidade com $\epsilon = 0,001$, observa-se uma

leve redução no número de indivíduos na classe dos removidos (R), embora antes e depois do pico de infectados essa redução não seja tão expressiva. Durante o pico, porém, a classe de infectados ultrapassa a de removidos.

À medida que ϵ aumenta, a redução na quantidade de removidos se torna mais significativa em todos os momentos da epidemia. Para $\epsilon = 0,01$, o número de removidos diminui ainda mais, e o pico de infectados se torna mais alto, indicando que a perda de imunidade intensifica a epidemia. No caso de $\epsilon = 0,06$, a curva de infectados se mantém superior às curvas de removidos e suscetíveis em todo o intervalo de $\rho \in [0, 1]$, evidenciando que altos valores de ϵ favorecem a manutenção de indivíduos na classe dos infectados.

Esses resultados reforçam que a perda de imunidade afeta significativamente a epidemia, promovendo o aumento da classe de infectados e reduzindo o impacto da imunização, especialmente para valores elevados de ϵ.

Logo, uma possível solução para mitigar esses efeitos seria implementar campanhas de vacinação periódica, especialmente em cenários onde a taxa de perda de imunidade é elevada. Essa estratégia poderia manter uma fração significativa da população na classe dos removidos (R), reduzindo o número de indivíduos suscetíveis ao vírus e, consequentemente, a magnitude da classe de infectados. Além disso, o desenvolvimento de vacinas com maior eficácia e duração de imunidade seria essencial para minimizar o impacto da perda de imunidade sobre a dinâmica epidêmica.

3.7 CONCLUSÃO DA INSTABILIDADE DE TURING NO MODELO SIR

O estudo da instabilidade de Turing neste modelo epidêmico trouxe contribuições importantes para entender como a doença se espalha e como certas cepas de vírus podem se tornar predominantes. Observamos que parâmetros como ρ (relacionado à agressividade do vírus), a taxa de difusão e a vacinação influenciam diretamente a formação de picos de infectados e a seleção de variantes.

Quando a difusão é baixa, os infectados tendem a se agrupar em focos intensos, aumentando o pico de infecções. Já uma difusão mais alta espalha os casos de forma mais uniforme, favorecendo alguma cepa mais adaptada ao ambiente disperso e reduzindo esses picos de infecção . O estudo também mostrou que valores de ρ próximos de zero está relacionado a vírus menos agressivos, enquanto valores mais próximos de 1 levam a variantes mais letais .

A vacinação se mostrou crucial para reduzir o pico máximo de infecções, especialmente

com altas taxas de vacinação. Contudo, a perda de imunidade ao longo do tempo (ϵ) leva à diminuição do número de removidos e ao aumento da classe de infectados, já que indivíduos imunizados retornam à classe dos suscetíveis. Estratégias como campanhas de revacinação e vacinas mais duradouras são fundamentais para mitigar esses efeitos.

Portanto, estudar a instabilidade de Turing neste modelo não só permitiu uma compreensão mais profunda da dinâmica da epidemia, mas também revelou como os parâmetros envolvidos podem direcionar a seleção natural das cepas e a propagação espacial do vírus. Esses resultados reforçam a importância de estratégias de controle, como a vacinação com imunidade prolongada, para reduzir o impacto de surtos e facilitar uma resposta epidemiológica mais eficaz.

4 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO PREDADOR- PRESA EM DUAS DIMENSÕES

Neste capítulo, com base no que vimos no Capítulo (2) sobre as condições necessárias para a ocorrência de instabilidade de Turing em um sistema de reação-difusão de duas equações no caso bidimensional, e com termos não locais, estudamos um modelo predador-presa quais as condições necessárias para que ele apresente instabilidade de Turing. Utilizamos o software MATLAB tanto para verificar se os resultados obtidos analiticamente sobre essas condições eram confirmados numericamente, quanto para analisar o efeito e a importância de estudar essa teoria no modelo.

4.1 INSTABILIDADE DE TURING EM MODELO PREDADOR- PRESA COM TERMO NÃO LOCAL

O modelo predador-presa é um sistema de equações diferenciais que descreve a interação dinâmica entre duas espécies: uma atuando como presa e a outra como predador. No ambiente ecológico, a presa é uma espécie que se reproduz e cresce em número, enquanto o predador depende da presa como fonte de alimento.

Estudar a dinâmica de interação predador-presa através de modelos espaço-temporais é uma abordagem mais precisa, pois esses modelos conseguem refletir o efeito dos movimentos aleatórios das espécies em seus habitats por meio dos termos de difusão. Tais modelos tornaram-se ferramentas importantes na ecologia para investigar as dinâmicas de interações presa-predador em ambientes onde as espécies estão distribuídas de forma heterogênea e formam manchas localizadas (S PAL; S, 2018.).

Na literatura, encontram-se modelos espaço-temporais que estudam a dinâmica de interação predador-presa, assumindo que os indivíduos em um ponto espacial interagem apenas com aqueles presentes no mesmo local. Contudo, os indivíduos de ambas as espécies podem se mover de um ponto espacial para outro. Assim, as equações de reação-difusão com termos de interação somente local, não conseguem modelar situações em que indivíduos em um ponto espacial têm acesso a recursos localizados em outro ponto. Para modelar tais situações, é necessário incluir termos de interação não local na cinética de reação (S PAL; S, 2018.).

Portanto, com o objetivo de estudar a dinâmica predador-presa em cenários onde essas espécies podem interagir com outras que não se encontram em um único local, ou seja, onde

os indivíduos em um ponto espacial x podem se mover para outro ponto y para acessar os recursos disponíveis, investigaremos a instabilidade de Turing em um modelo predador-presa com interação não local.

4.2 O MODELO

Tomamos como referência o modelo predador-presa com interação local de (GUIN LAKSHMI NARAYAN; HAQUE, 2012.), no qual os autores investigaram, por meio da teoria de instabilidade de Turing, o papel da autodifusão (movimento de uma espécie devido à sua própria densidade) e da cross-difusão (movimento de uma espécie influenciado pela presença de outra) em um modelo predador-presa dependente da presa, onde o predador possui uma fonte alternativa de alimento. No entanto, no nosso caso, consideramos esse modelo apenas com autodifusão.

Com a intenção de introduzir um termo de interação não local no modelo predador-presa (GUIN LAKSHMI NARAYAN; HAQUE, 2012.), considerando apenas a autodifusão, também tomamos como referência o modelo predador-presa com interação não local de (S PAL; S, 2018.). Nesse trabalho, os autores adicionaram um termo de "quebra"de interação local (termo não-local) na equação logística da presa, com o objetivo de examinar, através da teoria de instabilidade de Turing, o papel da competição intraespecífica não local por recursos limitados na população de presas. Em nosso estudo, inserimos termos de interação não locais tanto na equação logística da presa quanto na do predador, permitindo modelar situações em que as espécies podem acessar recursos em diferentes pontos do espaço.

Diante disso, considere o seguinte modelo predador-presa com interação não local:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)}{\partial t} &= a\,\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)\left(1-\frac{1}{K_1(L)}\frac{1}{L^2}\iint\limits_{\tilde{S}}\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\right)-p\,\frac{\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)\,\tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y},t)}{m\,\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)+\tilde{n}}+\tilde{D}_{\tilde{u}}\,\tilde{\nabla}^2\tilde{u}\\
\frac{\partial \tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y},t)}{\partial t} &= b\,\tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y},t)\left(1-\frac{1}{K_2(L)}\frac{1}{L^2}\iint\limits_{\tilde{S}}\tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y},t)\,d\tilde{x}\,d\tilde{y}\right)-\mu\,\tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y},t)+e\,p\,\frac{\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)\,\tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y},t)}{m\,\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)+\tilde{n}}+\tilde{D}_{\tilde{v}}\,\tilde{\nabla}^2\tilde{v}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

para todo $(\tilde{x},\tilde{y})\in\tilde{S}=[0,L]\times[0,L]\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e $t\geq 0$; $a,b,K_1(L),K_2(L),e,p,m,n>0$.

Tabela 3 – Nomeclatura das variavéis do modelo predador-presa

Variavéis	Descrição
$\tilde{u}(\tilde{x},\tilde{y},t)$	É a densidade da população de presas no tempo $t\geq 0$.
$\tilde{v}(\tilde{x},\tilde{y},t)$	É a densidade da popualção de predadores no tempo $t\geq 0$.
	.

Tabela 4 – Parâmetros basico do modelo predador presa

Parâmetros	Descrição
a	Taxa de crescimento da espécie presa
b	Taxa de crescimento da espécie predador
K_1	Taxa capacidade de suporte da espécie presa.
K_2	Taxa capacidade de suporte da espécie predador.
p	Taxa de predação.
μ	Taxa de mortalidade do predador
e	Fator de conversão
$m, \tilde{n}$	Taxa de saturação
$\tilde{D}_{\tilde{u}}$	Coeficiente de difusão da densidade presa.
$\tilde{D}_{\tilde{v}}$	Coeficiente de difusão da densidade predador

Além disso, $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ satisfazem as condições de fronteira homôgenea de neumann :

$$\begin{aligned} u_{\tilde{x}}(0,\tilde{y},t) &= u_{\tilde{x}}(L,\tilde{y},t) = v_{\tilde{x}}(0,\tilde{y},t) = v_{\tilde{x}}(L,\tilde{y},t) = 0 \ \forall t \geq 0. \\ u_{\tilde{y}}(\tilde{x},0,t) &= u_{\tilde{y}}(\tilde{x},L,t) = v_{\tilde{y}}(\tilde{x},0,t) = v_{\tilde{y}}(\tilde{x},L,t) = 0 \ \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

No qual indica que não há quantidade atravessando as fronteiras.

As capacidades de suporte $K_1(L)$ e $K_2(L)$ são assumidas como dependentes da densidade. Seja ρ_i o número de indivíduos da espécie i por unidade de área. Assume-se que

$$K_i(L) = \rho_i(L)\, L^2 \quad i = 1, 2.$$

Realizando as escalas

$$x = \tilde{x}/L\,,\ y = \tilde{y}/L\,,\ u = \tilde{u}/\left(\rho_1(L)\, L^2\right) \text{ e } v = \tilde{v}/\left(\rho_2(L)\, L^2\right)\,,$$

temos que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \rho_1(L)\, L^2\, \frac{\partial u}{\partial t},\ d\tilde{u} = L\, dx,\ \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial}{\partial x^2} \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \rho_2(L)\, L^2\, \frac{\partial v}{\partial t},\ d\tilde{v} = L\, dy,\ \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial}{\partial y^2}$$

substituindo (4.2) (4.1) e definindo

$$D_u = \tilde{D}_{\tilde{u}}/L^2\,,\ D_v = \tilde{D}_{\tilde{v}}/L^2\,,\ n(L) = \frac{\tilde{n}}{\rho_1(L)\, L^2}\,,\ \sigma(L) = \rho_2(L)/\rho_1(L)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a\,u\left(1-\iint\limits_S u\,dx\,dy\right)-\sigma(L)\,p\,\tfrac{u\,v}{m\,u+n(L)}+D_u\,\nabla^2 u \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= b\,v\left(1-\iint\limits_S v\,dx\,dy\right)-\mu\,v+e\,p\,\tfrac{u\,v}{m\,u+n(L)}+D_v\,\nabla^2 v \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde $(x,y)\in S=[0,1]\times[0,1]$ e os parâmetros $n(L)$ e $\sigma(L)$ dependem do comprimento característico L. Além disso, o modelo Predador - Presa (4.3) também satisfaz as condições de fronteira homogênea de Neumann:

$$\begin{aligned} u_x(0,y,t) &= u_x(L,y,t)=v_x(0,y,t)=v_x(L,y,t)=0\ \forall t\geq 0. \\ u_y(x,0,t) &= u_y(x,L,t)=v_y(x,0,t)=v_y(x,L,t)=0\ \forall t\geq 0. \end{aligned}$$

Vamos analisar se tal modelo (4.3) apresenta instabilidade de Turing. Para isso, como já vimos, com base na teoria de instabilidade de Turing, é necessário primeiro determinarmos os pontos de equilíbrio do modelo.

4.3 PONTOS DE EQUILÍBRIO DO MODELO PREDADOR-PRESA

Sejam $u=u^*$ e $v=v^*$ soluções constantes (por se tratarem de espécies, $u^*,v^*\geq 0$) de (4.3). Daí, note que $\iint\limits_S u^*\,dx\,dy=u^*$ e $\iint\limits_S v^*\,dx\,dy=v^*$. Logo, no equílibrio, o sistema (4.3) torna-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a\,u^*\,(1-u^*)-\sigma(L)\,p\,\tfrac{u^*\,v^*}{m\,u^*+n(L)} &= 0 \\ b\,v^*\,(1-v^*)-\mu\,v^*+e\,p\,\tfrac{u^*\,v^*}{m\,u^*+n(L)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Teorema 4.1. *O sistema* (4.3) *possui três pontos de equilíbrio*

$$E_1=(0,0)\,,\ E_2=(1,0)\,,\ E_3=(0,1-\mu/b)$$

Um quarto ponto de equilíbrio $E_c=(u^*,v^*)$, representando o equilíbrio de coexistência presa-predador (isto é u^*, $v^*>0$), ocorre se, e somente se,

$$\zeta>1$$

onde $\zeta=\frac{a\,n(L)}{\sigma(L)\,p(1-\frac{\mu}{b})}$.

Demonstração.

Com efeito, vamos demonstrar caso a caso. Podemos ver facilmente que a solução constante $u^* = v^* = 0$ satisfaz (4.4). Logo, $E_1 = (0, 0)$ é ponto de equilíbrio.

$E_2 = (1, 0)$ **é ponto de equilíbrio.**

Considere $u^* > 0$ e $v^* = 0$, isto é, $E_2 = (u^*, 0)$. Logo, a segunda equação de (4.4) é satisfeita de imediato. Já na primeira equação, teremos:

$$a\,u^*(1 - u^*) = 0 \Leftrightarrow (1 - u^*) = 0 \Leftrightarrow u^* = 1.$$

Portanto, $E_2 = (1, 0)$ é ponto de equilíbrio.

$E_3 = (0, 1 - \dfrac{\mu}{b})$ **é ponto de equilíbrio.**

Considere agora $u^* = 0$ e $v^* > 0$, isto é, $E_3 = (0, v^*)$. A primeira equação de (4.4) é satisfeita de forma imediata e da segunda equação temos:

$$b\,v^*\,(1 - v^*) - \mu\,v = 0 \Leftrightarrow b\,(1 - v^*) - \mu = 0 \Leftrightarrow v^* = 1 - \frac{\mu}{b}.$$

Logo, $E_3 = (0, 1 - \dfrac{\mu}{b})$ é ponto de equilíbrio.

Existência do ponto de equilíbrio de coexistência $E_c = (u^*, v^*)$**.**

Suponhamos agora que ambos $u^*, v^* > 0$. Nesse caso, não conseguimos obter explicitamente quem são u^* e v^* no equilíbrio, mas podemos mostrar a existência de tais pontos. Uma vez que estamos supondo $u^*, v^* > 0$, dividindo a primeira equação de (4.4) por u e a segunda equação por v, temos que:

$$\begin{aligned} a\,(1 - u^*) - \sigma(L)\,p\,\tfrac{v^*}{m\,u^* + n(L)} &= 0 \\ b\,(1 - v^*) - \mu + e\,p\,\tfrac{u^*}{m\,u^* + n(L)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Assim,

$$\begin{aligned} v^* &= \tfrac{a}{\sigma(L)\,p}\,(1 - u^*)\,(m\,u^* + n(L)), \\ v^* &= 1 - \tfrac{\mu}{b} + \tfrac{e\,p}{b}\,\tfrac{u^*}{m\,u^* + n(L)}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

E_c será dado pela interseção dessas duas curvas no primeiro quadrante do plano (u^*, v^*). Na primeira equação, definindo como sendo a curva $v_1(u^*)$, e na segunda como sendo a curva

$v_2(u^*)$, observe que a primeira curva $v_1(u^*)$ é uma parábola com raízes em $u^* = -\frac{n(L)}{m}$ e $u^* = 1$. Com relação à curva $v_2(u^*)$, note que:

$$\begin{aligned} v_2'(u^*) &= \frac{e\,p}{b}\frac{n(L)}{(m\,u^* + n(L))^2} > 0, \\ v_2''(u^*) &= \frac{e\,p}{b}\frac{-2\,n(L)\,m}{(m\,u^* + n(L))^3} < 0. \end{aligned}$$

Assim, de v_2' temos que v_2 é uma função monótona crescente e, de v_2'', que é côncava para baixo. Logo, as curvas $v_1(u^*)$ e $v_2(u^*)$ terão uma interseção se, e somente se, $v_1(0) > v_2(0)$, ou seja,

$$\frac{a\,n(L)}{\sigma(L)\,p} > 1 - \frac{\mu}{b} \Leftrightarrow \frac{a\,n(L)}{\sigma(L)\,p(1-\frac{\mu}{b})} > 1 \text{ pois } b > \mu.$$

Portanto, para $\zeta = \frac{a\,n(L)}{\sigma(L)\,p(1-\frac{\mu}{b})} > 1$, temos a exitência de E_c. □

Tendo conhecimento dos pontos de equilíbrio, para que ocorra a Instabilidade de Turing em (4.3), é necessário verificar se esses pontos são estáveis no modelo de EDO, isto é, na ausência das variáveis espaciais e com termos de difusão nulos, e se se tornam instáveis no modelo de EDP com a presença de difusão.

Nas próximas seções, apresentaremos as condições necessárias para que a Instabilidade de Turing ocorra.

4.4 CONDIÇÕES DE ESTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO.

Primeiro, devemos analisar quais as condições de estabilidade dos pontos de equilíbrio (4.1) no modelo de EDO da equação (4.3). Então considere o sistema dinâmico

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a\,u\,(1-u) - \sigma(L)\,p\,\frac{u\,v}{m\,u+n(L)} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= b\,v\,(1-v) - \mu\,v + e\,p\,\frac{u\,v}{m\,u+n(L).} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Definindo

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= a\,u\,(1-u) - \sigma(L)\,p\,\frac{u\,v}{m\,u+n(L)} \\ \Psi(u,v) &= b\,v\,(1-v) - \mu\,v + e\,p\,\frac{u\,v}{m\,u+n(L).} \end{aligned}$$

Temos que as derivadas parcias de Φ e Ψ são :

$$\begin{aligned} \Phi_u &= a\,(1-2\,u) - \sigma(L)\,p\,\tfrac{n\,v}{(m\,u+n(L))^2} \\ \Phi_v &= -\sigma(L)\,p\,\tfrac{u}{m\,u+n(L)} \\ \Psi_u &= e\,p\,\tfrac{n(L)\,v}{(m\,u+n(L))^2} \\ \Psi_v &= b\,(1-2\,v) - \mu + e\,p\,\tfrac{u}{m\,u+n(L)} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Assim, a matriz jacobiana do sistema é :

$$J = \begin{pmatrix} \Phi_u & \Phi_v \\ \\ \Psi_u & \Psi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,(1-2\,u) - \sigma(L)\,p\,\tfrac{n(L)\,v}{(m\,u+n(L))^2} & -\sigma(L)\,p\,\tfrac{u}{m\,u+n(L)} \\ \\ e\,p\,\tfrac{n(L)\,v}{(m\,u+n(L))^2} & b\,(1-2\,v) - \mu + e\,p\,\tfrac{u}{m\,u+n(L)} \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.2. *Os pontos críticos*

$$E_1 = (0,0)\,,\; E_2 = (1,0)$$

são localmente instáveis. $E_3 = (0, 1 - \dfrac{\mu}{b})$ *é localmente instável se, e somente se,* $\zeta = \frac{a\,n(L)}{\sigma(L)\,p(1-\frac{\mu}{b})} > 1$. *Uma condição suficiente para estabilidade local de* E_c *é que* $n(L) > m$.

Demonstração.

Nos pontos críticos

$$J\Big|_{E_1} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \\ 0 & b-\mu \end{pmatrix},\; J\Big|_{E_2} = \begin{pmatrix} -a & -\frac{\sigma(L)\,p}{m+n(L)} \\ \\ 0 & b-\mu+\frac{e\,p}{m+n(L)} \end{pmatrix}$$

e

$$J\Big|_{E_3} = \begin{pmatrix} a - \frac{\sigma(L)\,p\,(1-\mu/b)}{n} & 0 \\ \\ \frac{e\,p}{n(L)}\,(1-\mu/b) & \mu - b \end{pmatrix}.$$

Os elementos diagonais acima são os autovalores de suas respectivas matrizes. Uma vez que $a > 0$ e $b - \mu > 0$, então E_1 e E_2 são pontos críticos localmente instáveis. Como $\mu - b < 0$, segue E_3 será localmente instável se, e somente se,

$$a - \frac{\sigma(L)\,p\,(1-\mu/b)}{n(L)} > 0 \Leftrightarrow \frac{a\,n(L)}{\sigma(L)p\,(1-\mu/b)} > 1\,.$$

Estabilidade de E_c: Seja J_{ij} o elemento i, j da matriz Jacobiana avaliada em E_c. Como vimos no (2), especificamente em (2.31), E_c será um ponto de equílibrio estável se , e somente se,

$$tr(J) = J_{11} + J_{22} < 0 \quad \text{e} \quad \det(J) = J_{11}\, J_{22} - J_{12}\, J_{21} > 0.$$

Ora, Trivialmente, temos que $J_{12} < 0$ e $J_{21} > 0$. Agora, mostraremos que $J_{22} < 0$. De fato, pois note que de (4.5)

$$e\, p\, \frac{u^*}{m\, u^* + n(L)} = -b\,(1 - v^*) + \mu$$

Logo,

$$J_{22} = b\,(1 - 2\, v^*) - \mu + e\, p\, \frac{u^*}{m\, u^* + n(L)} = b\,(1 - 2\, v^*) - \mu - b\,(1 - v^*) + \mu = -b\, v^* < 0\,.$$

Agora, veremos o sinal de J_{11}. Ainda por (4.5) temos que :

$$a\,(1 - u^*) = \sigma(L)\, p\, \frac{v}{m\, u^* + n(L)} \implies \frac{a\, n(L)\,(1 - u^*)}{m\, u^* + n(L)} = \sigma(L)\, p\, \frac{n(L)\, v^*}{(m\, u^* + n(L))^2}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
J_{11} &= a\,(1 - 2\, u^*) - \sigma\, p\, \tfrac{n(L)\, v^*}{(m\, u^* + n(L)^2}\,, \\
&= a\,(1 - 2\, u^*) - \tfrac{a\, n(L)\,(1 - u^*)}{m\, u^* + n(L)}\,, \\
&= \frac{(m\, u^* + n(L))\, a(1 - 2\, u^*) - a\, n(L)\,(1 - u^*)}{m\, u^* + n(L)} \\
&= \frac{m\, u^*\, a - 2m\,(u^*)^2\, a + n(L)a - 2\, u^*\, n(L)\, a - a\, n(L) + a\, n(L)\, u^*}{m\, u^* + n(L)}\,. \\
&= \frac{m\, u^*\, a - 2m\,(u^*)^2\, a - u^*\, n(L)\, a}{m\, u^* + n(L)} \\
&= -\frac{a\, u^*}{m\, u^* + n(L)}\ (2\, m\, u^* + n(L) - m)
\end{aligned}$$

Logo, para $n(L) > m$ teremos que $J_{11} < 0$. Com isso, como $J_{11} < 0$, $J_{22} < 0$ e $J_{12} < 0$, $J_{21} > 0$, temos que

$$tr(J) = J_{11} + J_{22} < 0 \quad \text{e} \quad \det(J) = J_{11}\, J_{22} - J_{12}\, J_{21} > 0.$$

E, portanto, E_c é um ponto de equilíbrio estável. □

No resultado anterior, observe que a condição que torna o ponto de equilíbrio $E_3 = (0, 1 - \frac{\mu}{b})$ instável no modelo de EDO (4.7) ($\zeta = \frac{a\, n(L)}{\sigma(L) p(1-\frac{\mu}{b})} > 1$) é a mesma que garante a existência do ponto de equilíbrio E_c (ver Teorema (4.1)). Além disso, como E_c é estável para $n(L) > m$ (Teorema anterior), e sendo ele o nosso interesse maior de estudo, na próxima seção focaremos somente em E_c para analisar quais condições o tornam instável no modelo de EDP (4.3).

4.5 CONDIÇÕES DE INSTABILIDADE PARA OS PONTOS DE EQUILÍBRIO.

Queremos que o ponto de equilíbrio de coexistência $E_c = (u^*, v^*)$ seja instável no modelo de EDP (4.3). Verificaremos para quais condições isso é possível. Seja:

$$\begin{aligned} F(u, v, I_t, J_t) &= a\, u\, (1 - I_t) - \sigma\, p\, \tfrac{u\, v}{m\, u + n} \\ G(u, v, I_t, J_t) &= bv\, (1 - J_t) - \mu v + e\, p\, \tfrac{u\, v}{m\, u + n} \end{aligned}$$

Onde $I_t = \iint\limits_S u(x, y, t) dx\, dy$ e $J_t = \iint\limits_S v(x, y, t) dx\, dy$ com $S = [0, 1] \times [0, 1]$. Vamos calcular as derivadas parciais de F e G.

Determinar F_u

$$F_u = a\, (1 - I_t) - \sigma\, p\, \tfrac{n\, v}{(m\, u + n)^2}$$

Avaliando F nos pontos de equilíbrio $u = u^*$ e $v = v^*$, temos que $I_t = \iint\limits_S u(x, y, t) dx\, dy = \iint\limits_S u^* dx\, dy = u^*$. Logo,

$$F_{u^*} = a\, (1 - u^*) - \sigma\, p\, \frac{n\, v^*}{(m\, u^* + n)^2}$$

Determinar F_v

Uma vez que a variável v aparece somente na expressão $\sigma\, p\, \frac{u\, v}{m\, u + \tilde{n}}$, teremos que :

$$F_{v^*} = -\sigma\, p\, \frac{u^*}{m\, u^* + n}$$

Determinar G_u

Nesse caso, temos que a variável u esta somente na expressão $e\,p\,\frac{u\,v}{m\,u+\tilde{n}}$, logo :

$$G_{u^*} = e\,p\,\frac{n\,v^*}{(m\,u^*+n)^2}$$

Determinar G_v

Temos que:

$$G_v = b\,(1-J_t) - \mu + e\,p\,\frac{u}{m\,u+n}$$

Avaliando G_v em $E_c = (u^*, v^*)$, temos que $J_t = \iint\limits_S v^*(x,y,t)dx\,dy = v^*$ e :

$$G_{v^*} = b\,(1-v^*) - \mu + e\,p\,\frac{u^*}{m\,u^*+n}$$

Da equação (4.5), temos que no equilíbrio de coexistência :

$$b\,(1-v^*) - \mu + e\,p\,\frac{u^*}{m\,u^*+n} = 0$$

Segue que $G_v = 0$. Portanto, temos que as derivadas parciais de F e G avaliadas nos pontos de equilíbrio de coexistência são :

$$\begin{aligned} F_{u^*} &= a\,(1-u^*) - \sigma\,p\,\tfrac{n\,v^*}{(m\,u^*+n)^2} \\ F_{v^*} &= -\sigma\,p\,\tfrac{u^*}{m\,u^*+n} \\ G_{u^*} &= e\,p\,\tfrac{n\,v^*}{(m\,u^*+n)^2} \\ G_{v^*} &= 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Para que $E_c = (u^*, v^*)$ sejam instavéis no modelo de EDP (4.3), pelo o que vimos no capítulo (2),especificamente em (2.38), algumas da desigualdades a seguir :

$$(D_u + D_v)\omega^2 - (F_{u^*} + G_{v^*}) > 0$$
$$D_u D_v \omega^4 - (D_v F_{u^*} + D_u\,G_{v^*})\,\omega^2 + (F_{u^*}G_{v^*} - F_{v^*}G_{u^*}) > 0$$

não deve ser satisfeita. Uma vez que $G_{v^*} = 0$. Isso significa que uma das desigualdades a seguir deve acontecer:

$$\begin{aligned} &b_1(\omega^2) := (D_u + D_v)\omega^2 - (F_{u^*}) < 0 \\ &\text{ou} \\ &b_2(\omega^2) := D_u D_v \omega^4 - (D_v F_{u^*})\,\omega^2 - F_{v^*}G_{u^*} < 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Teorema 4.3. *Uma condição necessária para que o ponto de equílibrio de coexistência* $E_c = (u^*, v^*)$ *seja Instável no modelo de EDP* (4.3)*, é que* $F_{u^*} > 0$*. E Tal condição,* $F_{u^*} > 0$*, é satisfeita para* E_c *Com* $u^* \in (0,1)$ *e* $a,\ m,\ N(L) > 0$*, temos portanto que* $F_{u^*} > 0$ *..*

Demonstração.

Note que se $F_{u^*} \leq 0$, uma vez que $D_u,\ D_v,\ \omega^2 > 0$, teriamos que da primeira equação de (4.10) :

$$(D_u + D_v)\omega^2 - (F_{u^*}) > 0$$

E como $F_{v^*} < 0$ e $G_{u^*} > 0$ implicando que $F_{v^*}G_{u^*} < 0$, teriamos também que :

$$D_u D_v \omega^4 - (D_v F_{u^*})\,\omega^2 - F_{v^*}G_{u^*} > 0$$

Portanto, F_{u^*} tem que ser estritamente positivo, isto é, $F_{u^*} > 0$.

Vamos verificar agora se a condição de $F_{u^*} > 0$ é possível acontecer, ou seja, se é satisfeita.

Da condição de equílibrio (4.5) temos que:

$$a\,(1-u^*) - \sigma(L)\,p\,\frac{v^*}{m\,u^* + n(L)} = 0 \implies a\,(1-u^*) = \sigma(L)\,p\,\frac{v^*}{m\,u^* + n(L)}$$

Assim,

$$\begin{aligned} F_{u^*} &= a\,(1-u^*) - \sigma\,p\,\tfrac{n(L)\,v^*}{(m\,u^*+n(L))^2} \\ &= a\,(1-u^*) - \tfrac{a\,n(L)\,(1-u^*)}{m\,u^*+n(L)} \\ &= a\,(1-u^*)\,\left(1 - \tfrac{n(L)}{m\,u^*+n(L)}\right) \\ &= \tfrac{m\,a}{m\,u^*+n(L)}\,u^*\,(1-u^*) \end{aligned}$$

Como $u^* \in (0,1)$ e $a,\ m,\ N(L) > 0$, temos portanto que $F_{u^*} > 0$. □

O resultado anterior indica que, ao encontrarmos o ponto de equilíbrio E_c e sendo ele estável, a condição $F_{u^*} > 0$ é satisfeita, possibilitando a ocorrência de instabilidade de Turing. Utilizaremos agora o software MATLAB para verificar se esses fatos se confirmam.

Na figura a seguir, temos o plano de fase das soluções de $u(t)$ e $v(t)$ referente ao modelo de EDO (4.7), mostrando a existência de E_c para os parâmetros escolhidos de acordo com as hipoteses de (4.1) e (4.2).

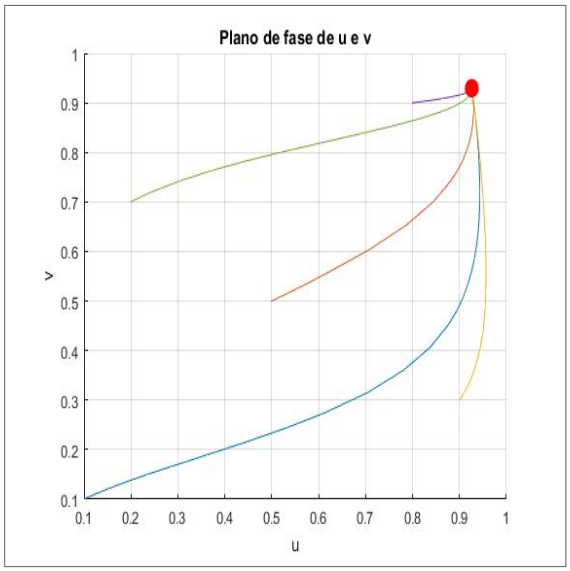

Figura 21 – Plano de fase das soluções de u e v referente ao modelo de EDO (4.7) para diferentes condições inicias de u e v : $(0.1, 0.1); (0.5, 0.5); (0.9, 0.3); (0.8, 0.9); (0.2, 0.7)$. Os parâmetros escolhidos para tal caso são : $a = 1$; $b = 0,5$; $e = 0,2$; $p = 0,2$; $\mu = 0,05$; $m = 1$ e $L = 40\pi$. Além disso, como $\sigma(L)$ e $n(L)$ são parâmetros dos sistemas (4.3) (4.7) que dependem de L e dos parâmetros do sistema inicial (4.1) : ρ_1, ρ_2 e $\tilde{n}$; escolhemos para tais parâmetros os valores $\rho_1 = \dfrac{1}{L}$, $\rho_2 = \dfrac{1}{L}$ e $\tilde{n} = 200$ resultando em $\sigma = 1$ e $n(L) = 1,5915$.

Para tais parâmetros, temos que $\zeta = \frac{a\, n(L)}{\sigma(L)\, p\left(1-\frac{\mu}{b}\right)} = 8,8419 > 1$, que é a condição de existência do ponto de equilíbrio $E_c = (u^*, v^*) = (0,926168960168145, , 0,929428834088732)$ vista no Teorema (4.1). Além disso, temos que $n(L) = 1,591 > 1 = m$, no qual é uma condição para a estabilidade de E_c, conforme visto no Teorema (4.2). Para esses valores, $tr(J) = J_{11} + J_{22} = -1,363723859439883 < 0$ e $\det(J) = J_{11}\, J_{22} - J_{12}\, J_{21} = 0,418469393179888 > 0$. Como podemos ver através da Figura (21), essas condições são de fato verificadas: o ponto de equilíbrio E_c existe (representado pela bola vermelha) e é estável, pois, para diferentes condições iniciais, $(u(t), v(t))$ converge para ele.

Temos também, para tais parâmetros, que $F_{u^*} = 0.0272 > 0$, o que, conforme vimos no Teorema (4.3), ocorreria devido à existência de E_c sendo estável (confirmado pelos parâmetros escolhidos). Além disso, $F_{u^*} > 0$ seria uma condição necessária para que E_c fosse instável no modelo de EDP (4.3), Ou seja, algumas das condições em (4.10) seriam satisfeitas. Nas figuras a seguir, vemos que isso se confirma.

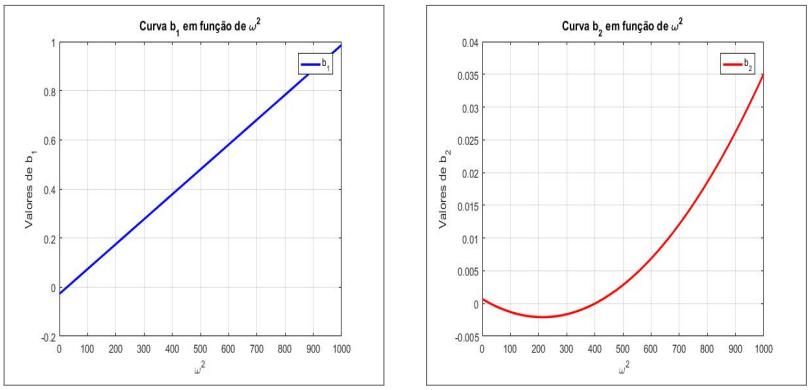

Figura 22 – Comportamento dos polinômios $b_1(\omega^2)$ e $b_2(\omega^2)$ 2 para $D_u = 0,000063326 = 6.3326 \times 10^{(-5)}$ e $D_v = 0,00094989 = 9,4989 \times 10^{(-4)}$ e os demais parâmetros são os mesmo da figura anterior (21).

Como podemos ver, existe uma região na qual $b_1(\omega^2) < 0$ ou $b_2(\omega^2) < 0$, mostrando que, para os parâmetros mencionados, E_c é instável no modelo de (4.3), comprovando o resultado do Teorema (4.3).

Já vimos que uma condição equivalente para analisar se os pontos de equilíbrio são instáveis é verificar se as soluções do polinômio característico têm parte real positiva para algum ω^2. Nesse caso, por se tratar de um modelo com duas equações, o polinômio característico é:

$$\lambda^2 + b_1(\omega^2)\lambda + b_2(\omega^2) = 0$$

Na figura a seguir, observamos o comportamento da curva dos maiores valores da parte real das soluções do polinômio característico para cada ω^2, com os mesmos parâmetros mencionados anteriormente.

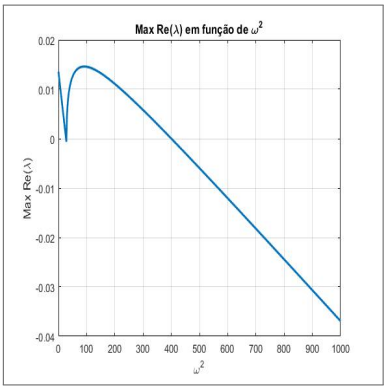

Figura 23 – Plot sobre os maiores valores da parte real $\lambda(\omega^2)$ como função de ω^2 para os mesmos valores dos parâmetros da figura (21) (22)

Vemos que também existem intervalos nos qual $Max\left(\mathrm{Re}\,\lambda(\omega^2)\right) > 0$ para algum ω^2. Observe que a região onde isso ocorre é quando $b_1(\omega^2) < 0$ ou $b_2(\omega^2) < 0$. Logo, E_c é instável no modelo de (4.3), comprovando novamente o resultado do Teorema (4.3). Note também

que as formas de analisar isso, seja verificando se os polinômios b_1 ou b_2 possuem regiões negativas, ou se os maiores valores da parte real de $\lambda(\omega^2)$ são positivos, são equivalentes.

Escolhendo outro conjunto de parâmetros de acordo com os resultados dos Teoremas (4.1), (4.2) e (4.3), na simulação a seguir podemos ver que o mesmo caso anterior ocorre: existência de E_c, estabilidade de E_c no modelo de EDO, instabilidade de E_c no modelo de EDP, e que a forma de verificar a instabilidade, seja analisando onde $b_1(\omega^2) < 0$ ou $b_2(\omega^2) < 0$, ou onde $Max\left(\text{Re}\,\lambda(\omega^2)\right) > 0$ para algum ω^2, são equivalentes.

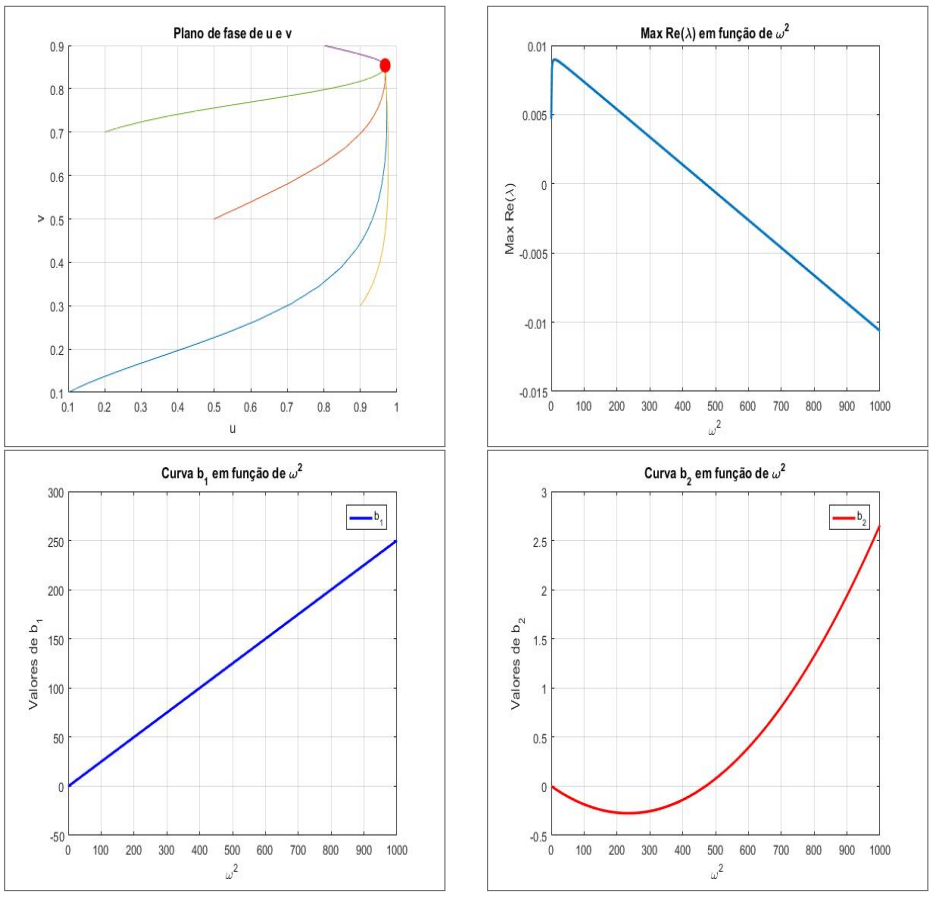

Figura 24 – Os parâmetros escolhidos para tal caso são : $a = 9$; $b = 0,5$; $e = 0,165$; $p = 0,1$; $\mu = 0,1$; $m = 0,2$; $\rho_1 = 0,5$; $\rho_2 = 0,1$; $Du = 0,00002$; $D_v = 0,2500$ e $L = 10$. Além disso, $\tilde{n} = 20$ resultando em $n(L) = 0,4000$. Logo, $E_c = (0,968036656015707, 0,853815389347990)$ e $\zeta = 22,5000 > 1$ (condição de existência de E_c), $n(L) = 0,4000 > 0,2 = m$ (condição de estabilidade de E_c no modelo de EDO) e $F_{u^*} = 0,0094 > 0$ (condição para instabilidade de E_c) .

Mediante tais simulações, comprovamos que os resultados dos teoremas (4.1), (4.2) e (4.3) são válidos.

Um dos objetivos ao estudar o modelo predador-presa (4.3) com termo não local é analisar a influência do tamanho do território (isto é, o tamanho de L e, consequentemente, o tamanho da área $[0, L] \times [0, L]$) na distribuição (dinâmica) das espécies predador e presa no território em que elas se encontram. Para isso, primeiramente, analisamos o que acontece com as regiões

de instabilidade de Turing ao variarmos o tamanho de L

Na figura a seguir, com parâmetros escolhidos que satisfazem os resultados dos Teoremas (4.1), (4.2) e (4.3), analisamos o que acontece com as regiões de instabilidade de Turing ao mudarmos o tamanho de L. Fizemos isso através do comportamento de $Max, \left(\text{Re}, \lambda(\omega^2)\right) > 0$ para algum ω^2, por facilitar tal análise. Os tamanhos escolhidos para L foram: $L = 10$, $L = 40\pi$ e $L = 200$. Vejamos esses casos representados, respectivamente:

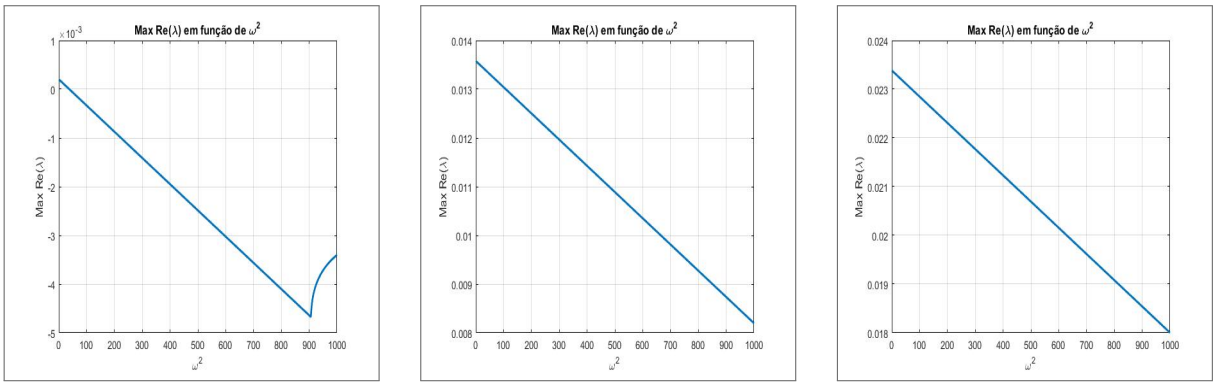

Figura 25 – Os parâmetros escolhidos para os três casos foram : $a = 1; b = 0,5; e = 0,2; p = 0,2; \mu = 0,05; m = 1$. Além disso, como $\sigma(L)$ e $n(L)$ são parâmetros dos sistemas (4.3) (4.7) que dependem de L e dos parâmetros do sistema inicial (4.1) : ρ_1, ρ_2 e $\tilde{n}$; escolhemos para tais parâmetros os valores $\rho_1 = \dfrac{1}{L}$, $\rho_2 = \dfrac{1}{L}$ e $\tilde{n} = 200$. E os parâmetros da difusão foram $D_u = 0,0000012665 = 1,2665 \times 10^{-6}$ e $D_v = 0,0000094989 = 9,4989 \times 10^{-6}$

Observe que, conforme aumenta o tamanho de L, a região onde $Max\left(\text{Re}\,\lambda(\omega^2)\right) > 0$, ou seja, a região de possível instabilidade de Turing, também aumenta. Isso permite aumentar os valores da difusão para L maiores, pois, para os parâmetros escolhidos em (25), as difusões foram tomadas tão pequenas porque era necessário no caso $L = 10$ para que houvesse uma região onde $Max\left(\text{Re}\,\lambda(\omega^2)\right) > 0$.

No caso a seguir, vemos que para os três tamanhos de L: $L = 10$, $L = 40\pi$ e $L = 200$, ao aumentar as difusões para $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$, a região onde $Max\left(\text{Re}\,\lambda(\omega^2)\right) > 0$ diminui nos três casos. Entretanto, para $L = 200$, essa região é consideravelmente maior em comparação com os outros tamanhos.

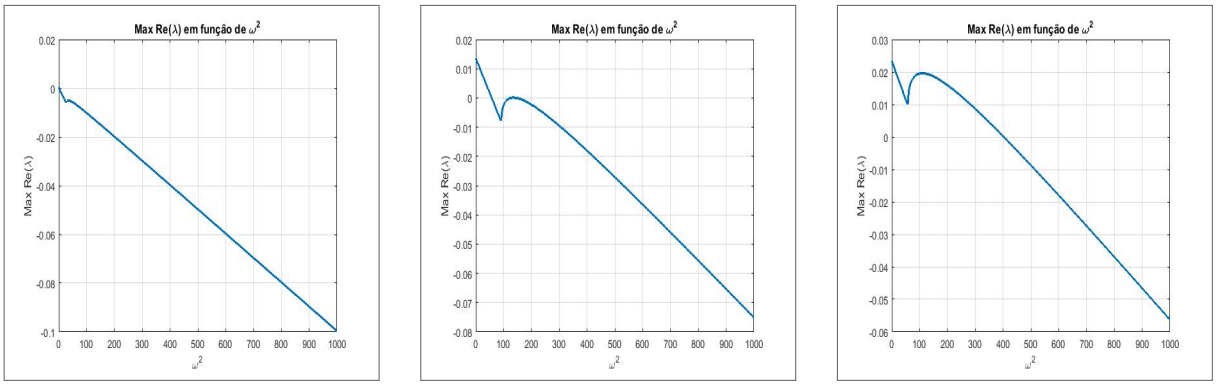

Figura 26 – Os parâmetros escolhidos para os três casos foram os mesmo da figura anterior (25). A diferença é que para os três casos : $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$.

Portanto, tendo esse entendimento da influência e relação do tamanho de L com as difusões D_u e D_v (que quanto maior L, pode-se aumentar as difusões de forma a manter a instabilidade de Turing no modelo (4.3)), vamos analisar agora qual o efeito disso no modelo (4.3).

4.6 SIMULAÇÕES

Neste seção, vamos analisar o comportamento dos padrões de Turing no modelo (4.3). Escolhemos os casos onde $L = 40\pi$ e $L = 200$, pois, como vimos na seção anterior, apresentavam uma região maior onde possivelmente haveria instabilidade de Turing, permitindo o aumento das difusões. Os parâmetros escolhidos, tanto para o caso $L = 40\pi$ quanto para $L = 200$, são os mesmos da seção anterior, e, para cada um desses casos, vamos analisar para a difusão menor - $D_u = 0,0000012665$ e $D_v = 0,0000094989$; e para a difusão maior - $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$, e assim veremos qual o efeito do tamanho de L e das difusões no modelo (4.3). Começamos com o caso $L = 40\pi$ com difusão menor $D_u = 0,0000012665$ e $D_v = 0,0000094989$. Vejamos:

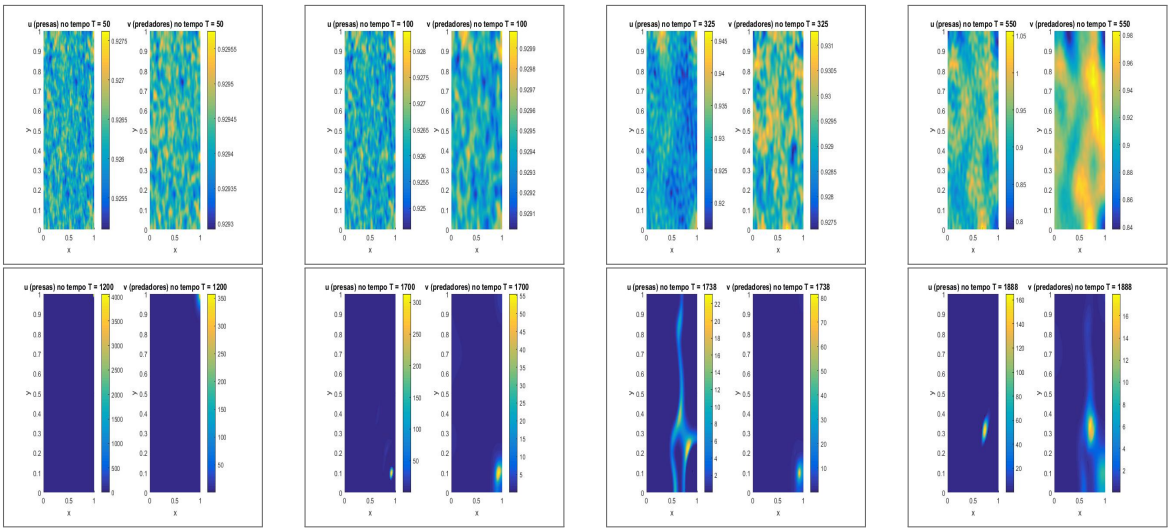

Figura 27 – Densidades de u e v no caso $L = 40\pi$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0000012665 =$ e $D_v = 0,0000094989$.

Observe que a densidade da presa u se desloca para uma determinada região (padrão de Turing que a representa) e se concentra nessa região específica por um período de tempo. A densidade de predadores v se desloca em direção a u e, após um tempo sendo predada, a presa se desloca para outra região.

Vejamos agora o caso $L = 40\pi$ com difusão maior $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$:

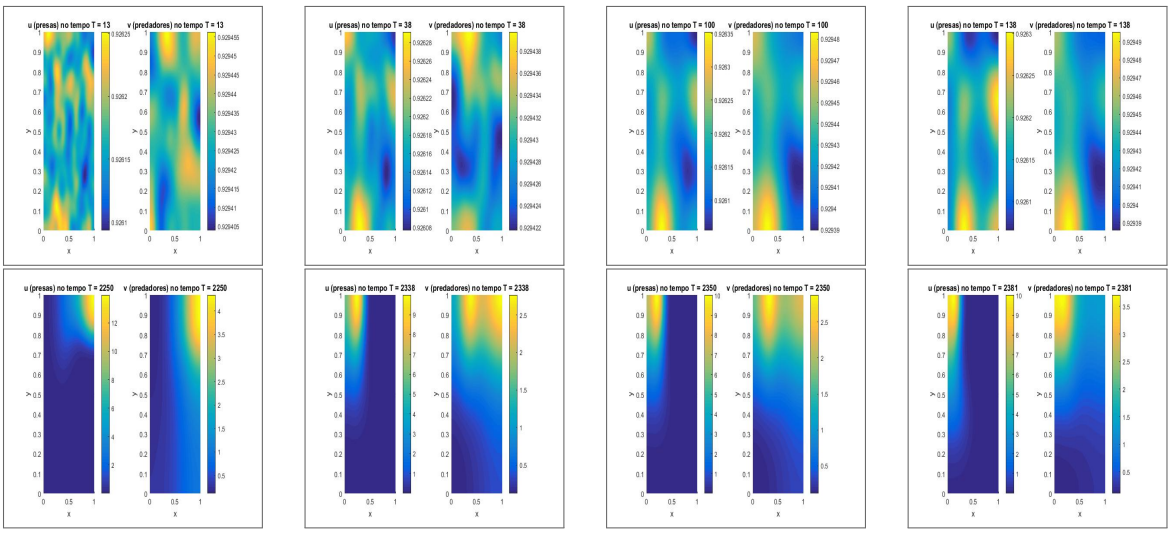

Figura 28 – Densidades de u e v no caso $L = 40\pi$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$.

Note que, nesse caso, o comportamento observado anteriormente se repete: a densidade da presa u se desloca para uma determinada região e se concentra nessa região específica por um período de tempo. Em seguida, a densidade de predadores v se desloca em direção a u e, após um período de predação, a presa se desloca para outra região.

Note também que, embora o comportamento do caso anterior (com difusões menores) se repita com difusões maiores, ele apresenta diferenças neste último caso. Com difusões maiores, o deslocamento da presa para uma região, seguido pelo movimento do predador em direção a ela, ocorre mais rapidamente (já perceptível em $T = 13$ e $T = 38$). Em contrapartida, no caso de difusões menores, esse comportamento demora mais para se manifestar, tornando-se evidente apenas em $T = 325$ e $T = 550$.

Outro ponto a destacar é que, no caso de difusões menores, a presa u, ao se concentrar em uma determinada região antes de se deslocar para outra, se agrupou em uma área mais isolada e em quantidades maiores, como podemos ver em $T = 1200$. Por outro lado, no caso de difusões maiores, a densidade de presas ficou mais distribuída pela região, mas em quantidades menores. O predador se deslocava em sua direção, a presa rapidamente mudava de local, sem acumular uma grande quantidade nesse ponto.

Vejamos agora o caso para $L = 200$ para as difusões menores :

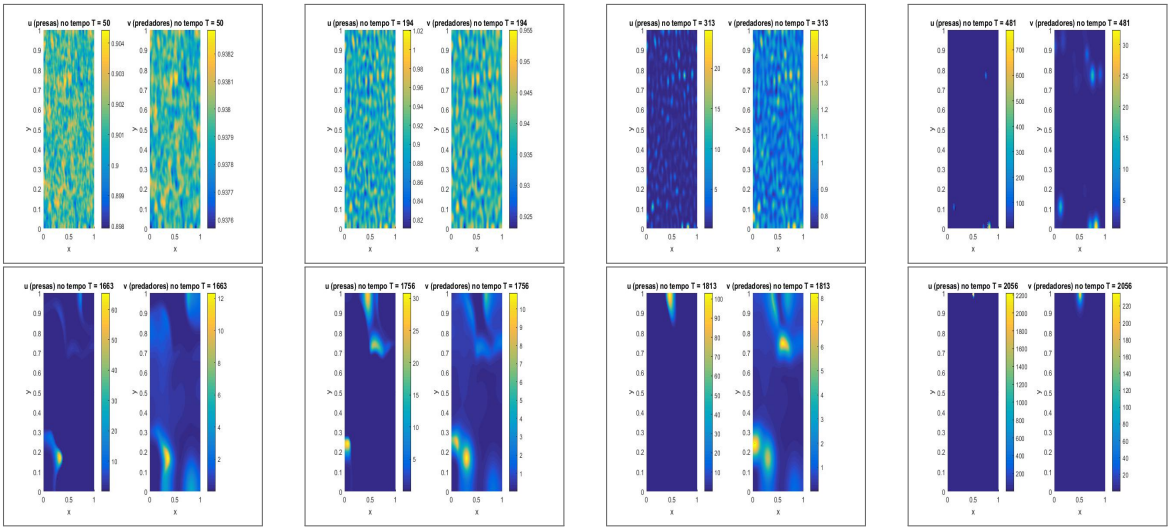

Figura 29 – Densidades de u e v no caso $L = 200$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0000012665 =$ e $D_v = 0,0000094989$.

Percebe-se que o mesmo comportamento dos casos anteriores se repete: o deslocamento da densidade de presas u para uma região, seguido pelo movimento da densidade de predadores v em sua direção. Observe que, no tempo $T = 2056$, novamente nesse caso de difusão menor, a concentração de presas antes de se deslocar para outra região é menos distribuída no espaço, mas apresenta uma grande quantidade em um ponto específico e isolado. Além disso, para o caso $L = 200$ com difusões menores, a formação do padrão de comportamento nas simulações ocorreu em um tempo mais rápido ($T = 313$ e $T = 481$), em comparação com o caso $L = 40\pi$ com difusões menores (27), que começou a se tornar mais perceptível apenas em $T = 550$.

Vejamos agora o caso para $L = 200$ para as difusões maiores :

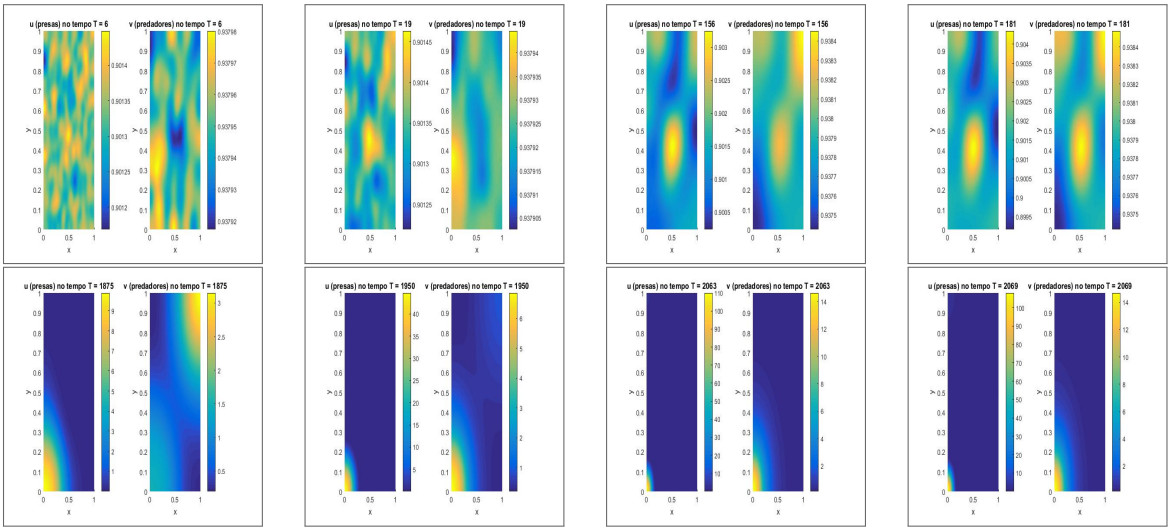

Figura 30 – Densidades de u e v no caso $L = 200$ em diferentes instantes de tempo, onde o tempo total foi $T = 2500$ e $D_u = 0,0001$ e $D_v = 0,00037500$.

O comportamento para esse caso é semelhante ao caso de $L = 40\pi$ com difusões maiores (28): temos o deslocamento da densidade de presas u para uma região, seguido pelo movimento da densidade de predadores v em sua direção. Esse comportamento torna-se perceptível de forma mais rápida (como observado nos tempos $T = 19$ e $T = 156$), em comparação com o caso de difusões menores, onde demora mais para que esse comportamento seja notado. Além disso, para esse caso de difusões maiores, vemos novamente que a densidade de presas u em uma região específica do espaço, antes de se deslocar para outra, está mais distribuída no espaço, porém em menor quantidade.

4.7 CONCLUSÃO MODELO PREDADOR-PRESA

Os resultados obtidos neste estudo evidenciam a influência significativa das taxas de difusão e do tamanho do território na dinâmica espacial das populações predador-presa. Observamos que taxas de difusão menores resultam em padrões mais localizados e concentrações de presas em áreas específicas por períodos mais prolongados e em grandes quantidades. Essa concentração pode ser interpretada como uma estratégia de proteção mútua, onde as presas se agrupam para aumentar suas chances de sobrevivência, oferecendo uma defesa coletiva contra predadores ou uma melhor proteção em ambientes com recursos limitados.

Em contraste, taxas de difusão maiores promovem uma dispersão mais rápida, com as presas se distribuindo mais uniformemente no espaço, mas em menor quantidade nessas regiões.

Essa dispersão pode ser vista como uma estratégia de "diluição", onde as presas buscam reduzir o risco de predação ao se espalharem por áreas maiores. Ao evitar a formação de grandes aglomerações, elas dificultam a tarefa dos predadores de localizar e capturar uma grande quantidade de presas, reduzindo assim a probabilidade de predação em qualquer ponto específico.

Além disso, o tamanho do território (L) desempenha um papel crucial na velocidade com que os padrões de Turing se formam. Em territórios maiores, o comportamento predador-presa se manifesta mais rapidamente, sugerindo que o espaço disponível influencia a rapidez com que as dinâmicas de predação e refúgio se estabelecem.

Esses resultados destacam a importância dos processos de difusão nos modelos ecológicos, oferecendo ideias importantes para a conservação e o manejo de ecossistemas. Entender como a movimentação das espécies e as características do ambiente influenciam as comunidades pode ajudar a desenvolver estratégias de preservação mais eficazes, considerando as interações entre predadores, presas e o espaço onde vivem.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta tese, estabelecemos condições suficientes para a existência da instabilidade de Turing em sistemas de EDP do tipo reação-difusão com termos não locais. O estudo foi conduzido tanto para sistemas com duas equações (nos casos unidimensional e bidimensional) quanto para sistemas com três equações (também nos casos unidimensional e bidimensional). Os resultados analíticos obtidos demonstraram ser consistentes e eficazes, pois, ao aplicá-los a modelos de relevância biológica — um modelo epidemiológico do tipo SIR e um modelo ecológico predador-presa —, foi possível determinar as condições que os parâmetros deveriam satisfazer para que a instabilidade de Turing ocorresse.

A verificação computacional, realizada por meio do software MATLAB, corroborou os resultados analíticos ao evidenciar que, sob as condições identificadas, os sistemas apresentavam instabilidade de Turing conforme esperado. As simulações numéricas mostraram padrões espaciais emergentes condizentes com a teoria, permitindo interpretações biológicas significativas.

No modelo SIR, os resultados obtidos por meio da teoria da instabilidade de Turing mostraram como a difusão, a agressividade do vírus e a vacinação influenciam a formação de padrões espaciais e a quantidade de infectados. Difusão baixa levou à formação de focos intensos de infecção, aumentando o número de infectados, enquanto difusão alta favoreceu uma dispersão mais uniforme, reduzindo os picos de infecção e permitindo a seleção de uma variante predominante. Além disso, a taxa associada à agressividade do vírus também influenciou a quantidade de infectados e a seleção de variantes, enquanto a vacinação mostrou-se altamente eficaz na redução dos picos epidêmicos. Assim, a teoria da instabilidade de Turing nesse modelo reforça a importância de estratégias epidemiológicas baseadas na vacinação prolongada para reduzir surtos epidêmicos e controlar a disseminação da doença.

No modelo predador-presa, os resultados demonstraram que taxas de difusão menores favorecem a formação de agregações espaciais de presas, funcionando como uma estratégia de proteção contra predadores, enquanto taxas de difusão maiores promovem uma distribuição mais uniforme, reduzindo a predação por diluição. Além disso, o tamanho do território foi identificado como um fator determinante na velocidade de formação dos padrões espaciais, fornecendo implicações importantes para a conservação e o manejo de ecossistemas.

Dessa forma, os achados desta tese não apenas aprofundam a compreensão matemática da instabilidade de Turing em sistemas com termos não locais, mas também fornecem aplica-

ções concretas em epidemiologia e ecologia. A metodologia desenvolvida pode ser estendida para outros modelos biológicos e físicos, ampliando o escopo das investigações sobre padrões espaciais em sistemas dinâmicos e, consequentemente, trazendo informações relevantes.

REFERÊNCIAS

CARRERO, G.; ., M. L. Pattern formation in a sis epidemiological model. *CANADIAN APPLIED MATHEMATICS QUARTERLY Volume 11, Number 1.*, 2003.

GONDIM, J. A. *Contribuições à modelagem matemática de epidemias no combate à COVID-19*. Tese (Doutorado) — Programa de Pósgraduação em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, 2021.

GUIN LAKSHMI NARAYAN; HAQUE, M. . M. P. K. The spatial patterns through diffusion-driven instability in a predator–prey model. *Applied Mathematical Modelling, v. 36, p. 1825–1841*, 2012.

JIA.Y CAI. Y, S. H. F. S.; W, W. Turing patterns in a reaction–diffusion epidemic model. *International Journal of Biomathematics Vol. 11, No. 2*, 2018.

KEELING, M. J.; ROHANI., P. *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*. [S.l.]: Princeton University Press., 2008.

MARTCHEVA, M. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. Springer US, 2015. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 9781489976123. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=tt7HCgAAQBAJ>.

MURRAY, J. *Mathematical Biology*. Springer Berlin Heidelberg, 2013. (Biomathematics). ISBN 9783662085424. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=PmXsCAAAQBAJ>.

MURRAY., J. D. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, Third Edition*. [S.l.]: Springer, 2023.

M.ZHANG; M.XIAO; R.QIAN; R.FANG; J.LI. Stability analysis and turing instability of a sir model with reaction-diffusion. *33rd Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 2001.

S PAL; S, G. M. B. Analysis of a prey–predator model with non-local interaction in the prey population. *Society for Mathematical Biology*, 2018.

SILVA E. J. A.;CASTILHO, C. Optimal virulence, diffusion and tradeoffs. *Bulletin of Mathematical Biology, v. 82, p. 16.*, 2020.

TURING, A. The chemical basis of morphogenesis. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B: Biol. Sci. 237 (641) 37–72.*, 1952.