



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MATEUS CHAGAS LIMA

**Construção de sólitons de translação do fluxo pela curvatura média via método
variacional**

Recife

2025

MATEUS CHAGAS LIMA

Construção de sólitons de translação do fluxo pela curvatura média via método variacional

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Centro de Ciências Exatas e da Natureza da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Orientador: Eddygledson Souza Gama

Recife

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Lima, Mateus Chagas.

Construção de sólitons de translação do fluxo pela curvatura média via método variacional / Mateus Chagas Lima. - Recife, 2025.

89f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2025.

Orientação: Eddygledson Souza Gama.

Inclui referências.

1. Fluxo pela curvatura média; 2. Sólitos de translação; 3. Método variacional; 4. Superfície de Scherk. I. Gama, Eddygledson Souza. II. Título.

UFPE-Biblioteca Central

MATEUS CHAGAS LIMA

Construção de sólitons de translação do fluxo pela curvatura média via método variacional

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestrado em Matemática.

Aprovada em: 13/02/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eddygledson Souza Gama (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Leandro de Freitas Pessoa (Examinador Externo)
Universidade Federal do Piauí

Prof. Dr. Ronaldo Freire de Lima (Examinador Externo)
Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

À Deus que em sua infinita bondade tem me proporcionado a dádiva da existência e todos os momentos de felicidade e aprendizado ao longo de cada dia.

Aos meus pais, Januário das Chagas Silva e Damiana Quitéria de Lima por formarem o pilar mais sólido da minha constituição enquanto ser humano.

Ao meu orientador, professor Eddygledson Souza Gama pela sua inestimada atenção e paciência ao longo desta etapa na minha trajetória.

Aos professores Leandro de Freitas Pessoa e Ronaldo Freire de Lima por aceitarem o convite de compor a banca e pelas valiosas contribuições.

Ademais, a todos os amigos, familiares e colegas com os quais tive a honra de partilhar momentos significativos ao longo desta etapa.

Este trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Seja quem você for, seja qualquer posição que você tenha na vida, no nível altíssimo ao mais baixo (social), tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá.

(Ayrton Senna)

RESUMO

Motivada pelo estudo do fluxo pela curvatura média, a presente dissertação tem por objetivo detalhar a construção, via método variacional, contida no trabalho *Scherk-like translators for mean curvature flow*, *Journal of Differential Geometry*, (122), n. 3 de David Hoffman, Francisco Martín e Brian White, de quatro objetos geométricos: o sólito de translação de Scherk, o scherknoide, o sólito de translação tipo helicóide e o *pitchfork*. Quanto à organização, o segundo capítulo trata dos conceitos preliminares, bem como das ferramentas essenciais que sustentam o nosso trabalho. O terceiro capítulo é dedicado ao estudo dos fluxos geométricos, em especial, o fluxo pela curvatura média. No quarto, descrevemos um pouco sobre a teoria dos sólitos de translação do fluxo pela curvatura média. O quinto capítulo trata da construção em si. Finalmente, no último capítulo, trazemos resultados recentes a respeito do sólito de translação tipo helicóide e do *pitchfork*.

Palavras-chaves: Fluxo pela curvatura média. Sólitos de translação. Método variacional. Superfície de Scherk.

ABSTRACT

Motivated by the study of mean curvature flow, this dissertation aims to detail the construction, via the variational approach, presented in the work *Scherk-like translators for mean curvature flow*, *Journal of Differential Geometry*, (122), no. 3, by David Hoffman, Francisco Martín, and Brian White, of four geometric objects: the Scherk translating soliton, the scherknoid, the helicoid-type translating soliton, and the pitchfork. Regarding the organization, the second chapter covers preliminary concepts as well as the essential tools that support our work. The third chapter is dedicated to the study of geometric flows, particularly, mean curvature flow. In the fourth chapter, we provide an overview of the theory of translating solitons for mean curvature flow. The fifth chapter focuses on the construction itself. Finally, in the last chapter, we present recent results concerning the helicoid-type translating soliton and the pitchfork.

Keywords: Mean curvature flow. Translating soliton. Variational approach. Scherk surfaces.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Regiões $P(\alpha, w, L)$ e $\Omega(\alpha, w)$	14
Figura 2 – Superfície mínima de Scherk duplamente periódica	15
Figura 3 – <i>Grim reaper</i> e <i>tilted grim reaper</i> com $\theta = \pi/6$	39
Figura 4 – <i>Bowl soliton</i> e sólton de translação tipo catenoide	41
Figura 5 – Δ -wing	42
Figura 6 – Bordo de $\tilde{\Sigma}_L^h$	49
Figura 7 – Superfície Φ_i	50
Figura 8 – Parte fundamental do sólton de translação de Scherk $\mathcal{D}_{\pi/2, \pi/2}$	53
Figura 9 – Regiões em posição geral	56
Figura 10 – Conjunto de nível menos um conjunto compacto	56
Figura 11 – Possível comportamento da “malha”	57
Figura 12 – Comportamento real do conjunto de nível	57
Figura 13 – Trapézio $\Omega_{\alpha, w}(c)$	61
Figura 14 – Parte fundamental do Scherknoide com $\mathcal{D}_{\pi/2, \pi}$	64
Figura 15 – Sólton de translação de Scherk $\mathcal{S}_{\pi/2, \pi/2}$	72
Figura 16 – Scherknoide $\mathcal{S}_{\pi/2, \pi}$	72
Figura 17 – Gráfico da função u do Teorema 5.10 (a) com $w = \pi/2$	74
Figura 18 – Gráfico da função u do Teorema 5.10 (b) com $w = \pi$	74
Figura 19 – Domínio de $\mathcal{S}_{\alpha, w}$ com $w \geq \pi$	77
Figura 20 – Sólton de translação tipo helicoide com largura $w = \pi/2$	80
Figura 21 – Pitchfork de largura $w = \pi$	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	13
2.1	SUPERFÍCIES MÍNIMAS	13
2.2	O PROBLEMA DE PLATEAU	15
2.2.1	O teorema do mergulho de Meeks-Yau	16
2.3	RESULTADOS ESSENCIAIS	17
2.3.1	Compacidade	18
2.3.2	Teoria de Morse-Radó	23
2.3.3	Teoria de Jenkins-Serrin	25
2.3.4	Fórmula da monotonicidade	27
3	FLUXOS GEOMÉTRICOS	28
3.1	FLUXO PELA CURVATURA MÉDIA	28
3.1.1	Singularidades de fluxo	33
4	SÓLITONS DE TRANSLAÇÃO	36
4.1	A EQUAÇÃO DOS SÓLITONS DE TRANSLAÇÃO	37
4.2	EXEMPLOS BÁSICOS E O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO	38
4.2.1	O <i>grim reaper</i>	38
4.2.2	Sólitons de translação rotacionalmente simétricos	40
4.2.3	O Δ -wing	41
4.2.4	O teorema de classificação	42
4.3	ESTIMATIVAS PARA SÓLITONS DE TRANSLAÇÃO	42
4.4	MÉTRICA DE ILMANEN E SUAS CONSEQUÊNCIAS	43
4.4.1	Princípio do máximo	44
4.4.2	Compacidade para sólitons de translação	45
5	CONSTRUÇÃO	46
5.1	PARTE FUNDAMENTAL DO SÓLITON DE TRANSLAÇÃO DE SCHERK	48
5.2	PARTE FUNDAMENTAL DO SCHERKNOIDE	61
5.3	TOMANDO O LIMITE: $\alpha \rightarrow \pi$	73
5.4	O SÓLITON DE TRANSLAÇÃO TIPO HELICOIDE	79
5.5	O <i>PITCHFORK</i>	83

6	O TEOREMA DE MARTÍN-SÁEZ-TSIAMIS-WHITE	85
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

O estudo da evolução de objetos geométricos proporcionaram significativos resultados que ultrapassaram o campo da Geometria Diferencial, estendendo-se para outros campos da Matemática, bem como da Física. No contexto da Teoria da Relatividade Geral, podemos citar a demonstração da desigualdade de Penrose por Huisken e Ilmanen, a partir do estudo do fluxo pela curvatura média. Por outro lado, os trabalhos de Perelman, os quais levaram à prova da conjectura da geometrização de Thurston e, conseqüentemente, à conjectura de Poincaré, foram frutos do estudo do fluxo de Ricci.

O primeiro fluxo citado, trata-se de um fluxo extrínseco, onde analisamos a evolução da imersão dos objetos; enquanto que o segundo, trata-se de um fluxo intrínseco, onde analisamos a evolução da métrica. Nesse trabalho, estamos interessados no primeiro tipo de fluxo, o qual pode ser descrito da seguinte forma: ao considerarmos uma família a 1-parâmetro de imersões suaves, a componente normal do vetor velocidade, em cada ponto, de uma superfície qualquer da família, coincide com o vetor curvatura média dessa mesma superfície nesse mesmo ponto.

Nesse sentido, os sólitons de translação do fluxo pela curvatura média (ou simplesmente, sólitons de translação), tratam-se de soluções especiais do fluxo pela curvatura média, os quais preservam sua forma durante a evolução, movendo-se por translação.

Apesar do estudo dos fluxos geométricos consistirem em uma atividade recente na história da matemática (em meados da segunda metade do século XX), o significativo trabalho de (ILMANEN, 1994), nos permite associar os sólitons de translação com as superfícies mínimas. Essa conexão é possível mediante alteração da métrica usual para uma métrica conforme, a qual ficou conhecida como “métrica de Ilmanen”.

A partir dessa poderosa ferramenta, e inspirados pela superfície mínima de Scherk, os autores em (HOFFMAN; MARTÍN; WHITE, 2022b), estabeleceram uma construção para quatro sólitons de translação: o sólito de translação de Scherk, o scherknoide, o sólito de translação tipo helicóide e o *pitchfork*. Motivada por esse artigo, a presente dissertação tem por objetivo detalhar a construção nele expressa, bem como as ferramentas, conceitos e teorias necessárias.

As ferramentas nos permitem determinar, inicialmente, apenas uma parte do sólito, a qual foi chamada de “parte fundamental”. A partir daí, reflexões e variações nos parâmetros considerados inicialmente, nos permitem constituir o sólito de translação por completo. Caracterizando assim um processo de construção via método variacional.

Visando estabelecer um apanhado geral das teorias e ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, no Capítulo 2, apresentamos as superfícies mínimas, o problema de Plateau e os resultados essenciais em nosso contexto. Destacamos as subseções 2.2.1, 2.3.1 e 2.3.3.

No Capítulo 3, tratamos da existência de fluxos geométricos, em especial, do fluxo pela curvatura média. Assim, descrevemos as características deste fluxo, bem como os tipos de singularidades existentes.

No Capítulo 4, detalhamos a teoria dos sólitons de translação, introduzindo, a princípio, os conceitos, as equações associadas, os principais exemplos e um importante teorema de classificação. Em seguida, apresentamos as estimativas gradiente e de curvatura que são necessárias em nosso contexto. E, a última seção, traz uma abordagem a respeito da métrica de Ilmanen e algumas de suas consequências, como o princípio do máximo e os resultados de compacidade no contexto de sólitons de translação.

No Capítulo 5, temos a construção dos sólitons de translação a partir de suas partes fundamentais. As funções utilizadas durante este processo estão definidas sobre domínios, contidos em uma faixa paralela ao eixo- x , que dependem de duas variáveis: uma descrevendo o ângulo com relação ao semieixo- x positivo, e a outra relacionada à largura da faixa. Considerando reflexões de Schwarz (um processo isométrico na métrica de Ilmanen), conseguimos estender os resultados obtidos para construirmos os sólitons de translação de Scherk e o Scherknoide. Em seguida, fazendo o parâmetro angular tender à π , construímos o sólito de translação tipo helicóide e o *pitchfork*.

Por fim, no Capítulo 6, apresentamos alguns resultados recentes acerca da unicidade dos sólitons de translação tipo helicóide e *pitchfork*.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo fazemos um apanhado geral das teorias e ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Assumiremos que o leitor seja familiarizado com algumas noções básicas a respeito de: Geometria Diferencial, como curvatura média, segunda forma fundamental e superfície regular; Variedades Diferenciáveis, como imersões e mergulhos; e Superfícies Mínimas. As respectivas referências seguem de (CARMO, 2005), (LEE, 2012) e (COLDING; MINICOZZI II, 2004).

Os demais resultados que serão fundamentais para o nosso intuito, também trazidos neste capítulo, estão devidamente referenciados para que o leitor interessado em aprofundar seus conhecimentos, possa assim fazê-lo.

2.1 SUPERFÍCIES MÍNIMAS

Nesta seção trazemos alguns exemplos de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ e detalhamos a superfície mínima que inspirou a construção dos objetos que são trazidos neste trabalho.

Definição 2.1 ((CARMO, 2005), p. 234). *Uma superfície parametrizada regular em $\mathbb{R}^3$ é chamada de **mínima** quando sua curvatura média é identicamente nula.*

Além do plano, o catenoide, descoberto por Leonhard Euler em 1764, e o helicóide, por Jean Baptiste Meusnier em 1776, foram os primeiros exemplos de superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$. Anos mais tarde, em 1835, Heinrich Ferdinand Scherk, descobriu o terceiro exemplo não-trivial de superfície mínima, uma superfície duplamente periódica a qual ficou conhecida como superfície mínima de Scherk. Outros exemplos recorrentes na literatura são a superfície de Enneper, uma superfície que possui autointerseções, introduzida por Alfred Enneper em 1864; e a superfície de Costa-Hoffman-Meeks, descoberta por Celso Costa em 1982, e provada por David Hoffman e William Meeks III que trata-se de uma superfície mergulhada.

Antes de apresentarmos a superfície mínima de Scherk, inspiração para a construção dos objetos geométricos que detalhamos neste trabalho, estabeleceremos algumas notações.

Dados $\alpha \in (0, \pi)$, $w \in (0, \infty)$ e $L \in (0, \infty]$ defina as regiões poligonais:

$$P(\alpha, w, L) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y}{\tan \alpha} < x < L + \frac{y}{\tan \alpha}, 0 < y < w \right\}, \quad (2.1)$$

e

$$\Omega(\alpha, w) := P(\alpha, w, +\infty) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > \frac{y}{\tan \alpha}, 0 < y < w \right\}. \quad (2.2)$$

Referiremo-nos aos segmentos de reta dessas regiões poligonais da seguinte forma:

- quando $0 < L < +\infty$:

$$\Gamma_1 := \{y = x \tan \alpha \mid 0 < x < w / \tan \alpha\},$$

$$\Gamma_2 := \{w / \tan \alpha < x < L + w / \tan \alpha, y = w\},$$

$$\Gamma_3 := \{y = x \tan(\alpha) - L \tan \alpha \mid L < x < L + w / \tan \alpha\}, \text{ e}$$

$$\Gamma_4 := \{0 < x < L, y = 0\};$$

- quando $L = +\infty$:

Γ_1 idêntico ao caso anterior,

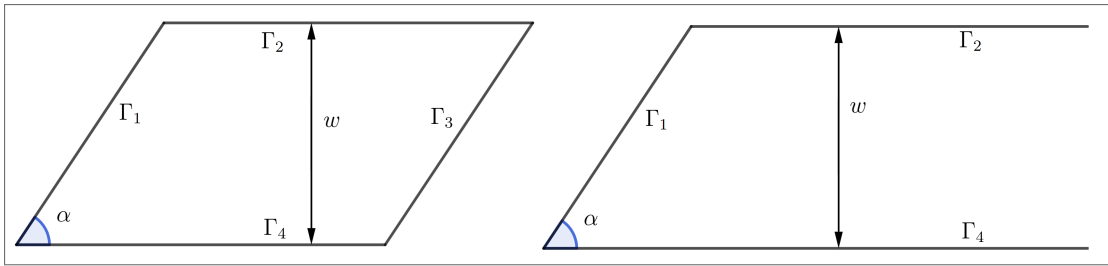
$$\Gamma_2 = \{x > w / \tan \alpha, y = w\},$$

$$\Gamma_3 = \emptyset, \text{ e}$$

$$\Gamma_4 = \{x > 0, y = 0\}.$$

Possíveis translações desses conjuntos serão denotadas por $\tilde{\Gamma}_i$, com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Figura 1 – Regiões $P(\alpha, w, L)$ e $\Omega(\alpha, w)$



Fonte: Autor

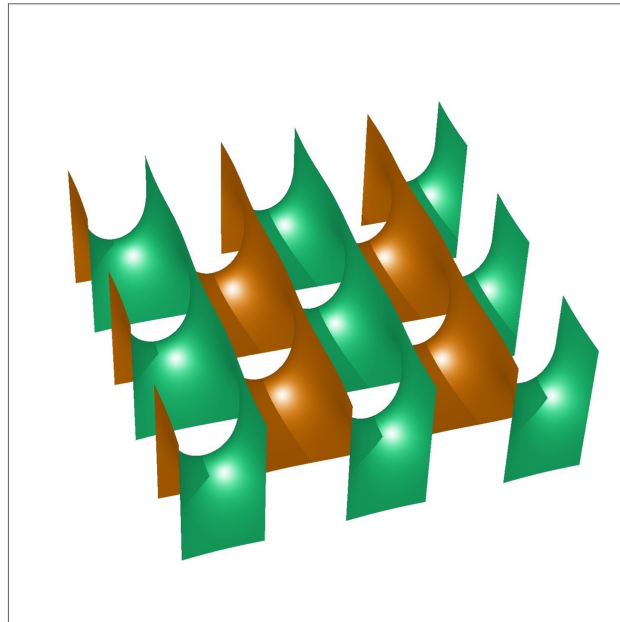
Com isso, a superfície mínima de Scherk pode ser descrita a partir do seguinte teorema:

Teorema 2.1 (Superfície mínima de Scherk). *Para cada $\alpha \in (0, \pi)$, $w \in (0, +\infty)$ e $L \in (0, +\infty]$, o problema de valor no bordo*

$$\begin{cases} u : P(\alpha, w, L) \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{graf}(u) \text{ é superfície mínima} \\ u \equiv +\infty \text{ em } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ u \equiv -\infty \text{ em } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases}$$

tem solução se, e somente se, $L = w/\sin \alpha$. Se $P := P(\alpha, w, w/\sin \alpha)$ é um losango, então a solução é única a menos de adição de constante. Assim, existe uma única solução $u_{\alpha, w}$ de modo que o vetor $(\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0)$ é tangente ao gráfico de $u_{\alpha, w}$ na origem. Além disso, $\text{graf}(u_{\alpha, w})$ é limitado por quatro retas verticais sobre os vértices de P . E por sucessivas reflexões de Schwarz podemos estender $\text{graf}(u_{\alpha, w})$ à uma superfície mínima $S_{\alpha, w}$ duplamente periódica. Quando $\alpha \rightarrow 0$, $S_{\alpha, w}$ converge suavemente para planos verticais paralelos entre si: $y = nw, n \in \mathbb{Z}$. E quando $\alpha \rightarrow \pi$, $S_{\alpha, w}$ converge suavemente para o helicóide: $z = x \cot(y\pi/w)$.

Figura 2 – Superfície mínima de Scherk duplamente periódica



Fonte: MARTÍN (2020).

2.2 O PROBLEMA DE PLATEAU

Para os nossos propósitos será crucial analisarmos o problema de Plateau: *Dada uma curva fechada Γ em $\mathbb{R}^3$, é possível determinar uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ de menor área tal que $\partial S = \Gamma$?*

Uma versão do problema de Plateau foi solucionada, independentemente, por (RADÓ, 1930) para o caso euclidiano de dimensão 3 e por (DOUGLAS, 1931) para o caso euclidiano de dimensão arbitrária $m \geq 2$. Até então, os resultados apontavam que a superfície solução era uma imersão exceto, possivelmente, em um conjunto isolado de pontos. Isto equivale a dizer que os pontos de ramificação da superfície solução não excediam um conjunto isolado

de pontos. Mais tarde, (MORREY JR., 1948) generalizou a solução de Radó e Douglas para o contexto de variedades riemannianas.

Décadas depois, (OSSERMAN, 1970) provou, para o caso euclidiano de dimensão 3, que o interior da solução é livre de pontos de ramificação. Pouco tempo depois, (ALT, 1972), (ALT, 1973) e (GULLIVER, 1973) forneceram uma prova completa, bem como uma generalização para o caso riemanniano de dimensão 3. Por fim, (GULLIVER; LESLEY, 1973) provaram que, se Γ é analítica real, então a solução é livre de pontos de ramificação também no bordo.

Até então, a solução do problema de Plateau tratava-se de uma imersão, ou seja, a superfície solução poderia conter autointerseções. Desse modo, ainda restava analisar as condições para a curva Γ de modo que a solução para o problema de Plateau fosse mergulhada. O primeiro resultado nesse sentido foi provado por (RADÓ, 1933).

O teorema de Radó, o qual está presente com detalhes em (RADÓ, 1933, p. 36), pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema 2.2 (Teorema 16 de (LAWSON JR., 1980)). *Se uma curva de Jordan $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ admite uma projeção ortogonal injetiva em uma curva convexa $\tilde{\Gamma}$ no plano xy , então a solução do problema de Plateau para Γ é livre de pontos de ramificação e pode ser expressa como gráfico de uma função contínua $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2$, onde $\partial\Omega = \tilde{\Gamma}$. Além disso, a solução é única.*

Décadas mais tarde, outro importante resultado, desta vez envolvendo a curvatura média, foi obtido por (SCHOEN, 1983).

Considere Σ^2 uma hipersuperfície mínima imersa em $\mathbb{R}^3$ de modo que $B := \partial\Sigma$ é unidimensional compacto, imerso e de classe C^2 . Ou seja, Σ é suave no interior e C^2 no bordo. E considere $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado com bordo de classe C^2 .

Teorema 2.3 (Corolário 1 de (SCHOEN, 1983)). *Se $\partial\Omega$ tem curvatura média não negativa e $B \subset (\partial\Omega) \times \mathbb{R}$ é gráfico de modo que o plano tangente a qualquer ponto de B não contém e_3 , então qualquer hipersuperfície mínima imersa suave Φ com $\partial\Phi = B$, é gráfico de uma função suave definida em $\bar{\Omega}$.*

2.2.1 O teorema do mergulho de Meeks-Yau

Finalmente, (MEEKS III; YAU, 1982a) provaram que, se Γ é uma curva de Jordan contida no bordo de uma variedade suave, compacta e convexa Σ^2 , de modo que $\partial\Sigma$ é homotópica a

identidade, então toda solução de Morrey do problema de Plateau para tal curva de Jordan é uma solução mergulhada. Em particular, toda solução de Douglas para uma curva de Jordan extrema é mergulhada. Posteriormente, (MEEKS III; YAU, 1982b) provaram um resultado de mergulho para um caso mais geral: quando o bordo da variedade tem curvatura média não negativa. A partir desta abordagem provaremos o Teorema 5.1, o qual será fundamental para a construção descrita no Capítulo 5.

Definição 2.2 (Variedade média convexa com bordo suave por partes). *Dizemos que M^3 é uma **variedade média convexa com bordo suave por partes** quando trata-se de uma variedade compacta e com bordo, contida em uma variedade suave $\widetilde{M}$, satisfazendo (após uma triangulação apropriada de $\widetilde{M}$) a condição: $\partial M = \{B_1, \dots, B_k\}$, onde*

- (i) B_i é uma superfície C^2 em $\widetilde{M}$ cuja curvatura média é não negativa com respeito ao vetor normal que aponta para dentro; e
- (ii) B_i é um subconjunto compacto de alguma subvariedade $\widetilde{B}_i \subset \widetilde{M}$, onde $\widetilde{B}_i \cap M = B_i$ e $\partial \widetilde{B}_i \subset \partial \widetilde{M}$;

para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, com $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4 (Teorema 1 de (MEEKS III; YAU, 1982b)). *Seja M^3 uma variedade convexa com bordo suave por partes. Se Γ é uma curva de Jordan em ∂M , então existe um mergulho do disco $\overline{\mathbb{D}}$ em M , suave em $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ e com bordo Γ . Além disso, tal mergulho tem a menor área dentre qualquer outra aplicação deste tipo.*

2.3 RESULTADOS ESSENCIAIS

O embasamento teórico que sustenta a construção dos objetos geométricos de nosso interesse, passa pela análise de alguns elementos tais como: os resultados de compacidade e regularidade para sequências de superfícies; e o estudo dos pontos críticos de superfícies. Nesta seção abordamos não apenas estes tópicos, como também trazemos a teoria de Jenkins-Serrin, a qual nos permitirá analisar o comportamento dos vetores normais às superfícies e, por fim, enunciamos a fórmula da monotonicidade, fundamental em nosso contexto.

2.3.1 Compacidade

O argumento de compacidade, expresso nesta subseção, consiste em uma etapa essencial em muitas demonstrações. Estamos interessados em analisar quando uma sequência de superfícies converge, mesmo que subsequencialmente, para uma superfície limite. Além disso, quando assumimos que as superfícies de uma tal sequência gozam de uma certa propriedade, visamos estudar como essa mesma propriedade pode ser estendida à superfície limite (quando essa existir, mesmo que subsequencialmente).

No que segue, adotaremos a seguinte notação: (M^3, g) variedade riemanniana, $U \subset M$ aberto em M e munido com a topologia induzida, $\{\Sigma_i\}_i$ sequência de subvariedades bidimensionais em M com $(\overline{\Sigma_i} \setminus \Sigma_i) \cap U = \emptyset$.

Note que a última condição implica que $\partial(\Sigma_i \cap U) \subseteq \partial U$ sempre que $\Sigma_i \cap U \neq \emptyset$. De fato, caso a implicação não fosse verdadeira, teríamos $\partial(\Sigma_i \cap U) \subseteq U$ ou $\partial(\Sigma_i \cap U) \subseteq M \setminus \overline{U}$. A primeira inclusão não ocorre, pois a condição $(\overline{\Sigma_i} \setminus \Sigma_i) \cap U = \emptyset$ impede que existam pontos de aderência de Σ_i contidos em U . A segunda inclusão também não ocorre, pois os pontos de aderência de U não podem estar no complementar de $\overline{U}$.

Além disso, para cada Σ_i e para todo $p \in U$ defina

$$f_i(p) := \text{dist}_M(p, \Sigma_i) = \inf_{q \in \Sigma_i} \{\text{dist}_M(p, q)\}.$$

Observe que $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana, com constante de Lipschitz igual a 1. De fato, para quaisquer $p, \tilde{p}, q \in \Sigma_i$, temos

$$\text{dist}_M(p, q) \leq \text{dist}_M(p, \tilde{p}) + \text{dist}_M(\tilde{p}, q),$$

e tomando o ínfimo, temos

$$\inf_{q \in \Sigma_i} \{\text{dist}_M(p, q)\} \leq \text{dist}_M(p, \tilde{p}) + \inf_{q \in \Sigma_i} \{\text{dist}_M(q, \tilde{p})\}.$$

Assim,

$$|f_i(p) - f_i(\tilde{p})| \leq \text{dist}_M(p, \tilde{p}).$$

Como queríamos mostrar.

Lema 2.1 (Convergência de Hausdorff para conjuntos fechados). *Sejam $U \subset M$ conjunto aberto, $\{\Sigma_i\}_i$ e $\{f_i : U \rightarrow \mathbb{R}\}_i$ definidos como antes. Assuma que $K \subset U$ é um conjunto*

compacto em U , com $K \cap \Sigma_i \neq \emptyset$. Então, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, $\{f_i|_K\}_i$ converge subsequencialmente para uma função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Ou seja, $\{\Sigma_i\}_i$ converge subsequencialmente para $\Sigma := \{q \in K \mid f(q) = 0\}$.

A denominação do Lema 2.1 justifica-se uma vez que a condição $(\overline{\Sigma_i} \setminus \Sigma_i) \cap U = \emptyset$ é equivalente a dizer que cada Σ_i é fechado em U (isto é, $\overline{\Sigma_i} \cap U \subseteq \Sigma_i$). De fato,

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma_i} \cap U &= (\Sigma_i \cup (\overline{\Sigma_i} \setminus \Sigma_i)) \cap U \\ &= (\Sigma_i \cap U) \cup \underbrace{((\overline{\Sigma_i} \setminus \Sigma_i) \cap U)}_{=\emptyset} \\ &= \Sigma_i \cap U \subseteq \Sigma_i. \end{aligned}$$

Note que não impomos fortes restrições à $\{\Sigma_i\}_i$ e ainda assim conseguimos obter uma superfície limite Σ , mesmo que de modo subsequencial. Contudo, não fizemos nenhuma menção à geometria de Σ . Nos próximos resultados trataremos dessa questão.

Lema 2.2 (Lema 2.4 de (COLDING; MINICOZZI II, 2004)). *Seja $\Sigma \subset U$ subvariedade imersa de dimensão 2 com U aberto em $\mathbb{R}^3$,*

$$16r^2 \sup_{\Sigma} |A_{\Sigma}|^2 \leq 1.$$

Se $p \in \Sigma$ e $\text{dist}_{\Sigma}(p, \partial\Sigma) \geq 2r$, então a bola intrínseca em Σ centrada em p de raio $2r$, $B_{2r}^{\Sigma}(p) := \{q \in \Sigma \mid \text{dist}_{\Sigma}(p, q) < 2r\}$, pode ser escrita como gráfico de uma função u sobre um aberto de $T_p\Sigma$ com $|Du| \leq 1$ e $(r\sqrt{2})|\text{Hess } u| \leq 1$. Além disso, a componente conexa de $B_r(p) \cap \Sigma$ que contém p está contida em $B_{2r}^{\Sigma}(p)$ (e, portanto, também é gráfico).

Teorema 2.5 (Teorema de Arzelà-Ascoli Geométrico). *Fixe $0 < \alpha < 1$. Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ aberto em $\mathbb{R}^3$, $\{\Sigma_i\}_i$ sequência de hipersuperfícies imersas em U com $(\overline{\Sigma_i} \setminus \Sigma_i) \cap U = \emptyset$, satisfazendo*

$$\text{area}(\Sigma_i \cap K) \leq \mathcal{A}(K) < +\infty \quad \text{e} \quad \sup_{\Sigma_i \cap K} |A_{\Sigma_i}| \leq \mathcal{C}(K) < +\infty, \quad (2.3)$$

para cada $K \subset\subset U$. Então existe uma coleção $\mathcal{S} = \{\Phi_l\}_{l \in \Lambda}$ de hipersuperfícies Φ_l onde

- (a) *cada Φ_l satisfaz $(\overline{\Phi_l} \setminus \Phi_l) \cap U = \emptyset$;*
- (b) *o conjunto $\Sigma = \bigcup_{l \in \Lambda} \Phi_l$ é fechado em U com a topologia do subespaço;*
- (c) *para cada conjunto compacto $K \subset U$, no máximo, apenas um número finito de Φ_l 's intersecta K .*

Mais do que isso, a menos de subsequência, $\{\Sigma_i\}_i$ converge para Σ em $C^{1,\alpha}$ com multiplicidade finita. Mais precisamente, para cada ponto $p \in \Sigma$ existe um raio $\sigma = \sigma(p) > 0$ tal que

- (i) $B_{8\sigma}(p) \subset U$;
- (ii) para qualquer $q \in B_{2\sigma} \cap \Phi_l$, $B_{4\sigma}(q) \cap \Phi_l$ é gráfico sobre $T_q\Phi_l$ de alguma função $C^{1,\alpha}$;
- (iii) para cada $\varepsilon > 0$ existe um $i_0 = i_0(p, \varepsilon)$ tal que para todo $i > i_0$ vale a seguinte propriedade: qualquer componente conexa, $\tilde{\Sigma}$, de $\Sigma_i \cap B_{2\sigma}(p)$ que se encontra dentro de $B_\sigma(p)$ pode ser escrita como gráfico de uma função $\tilde{u}$ sobre $T_q\Phi_l$ para algum $q \in \Phi_l \cap \overline{B}_\sigma(p)$. Mais ainda, se u é uma função cujo gráfico sobre $T_q\Phi_l$ é dado por Φ_l então

$$|\tilde{u} - u|_{1,\alpha} < \varepsilon;$$

- (iv) o número de componentes de $B_{2\sigma}(p) \cap \Sigma_i$ intersectando $B_\sigma(p)$ é uniformemente limitada por $N = N(p)$.

Demonstração. Seja $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma exaustão de U por compactos. Denote

$$C_j = \max\{\mathcal{A}(K_j), \mathcal{C}(K_j)\},$$

onde $\mathcal{A}(K_j)$ e $\mathcal{C}(K_j)$ são as constantes garantidas por (2.3) para cada $j \in \mathbb{N}$. Tome $\delta_j > 0$ de modo que para cada ponto $p \in K_j$, tenhamos $B_{\delta_j}(p) \subset K_{j+1}$, tal que

$$16\delta_j^2 C_{j+1}^2 \leq 1.$$

Além disso, seja

$$\sigma(p) = \begin{cases} \frac{1}{8}\delta_1, & p \in K_1 \\ \frac{1}{8}\delta_j, & p \in K_j \setminus K_{j-1}, \text{ para } j \geq 2 \end{cases}.$$

Pelo Lema 2.1, a menos de subsequência, podemos assumir que Σ_i converge para um conjunto Σ . Resta mostrar que Σ cumpre as propriedades descritas no enunciado.

Até o momento, observe que dado $p \in \Sigma$, temos dois resultados: $B_{8\sigma}(p) = B_{\delta_j} \subset U$ e, além disso, para todo $q \in B_{2\sigma} \cap \Sigma$, $B_{4\sigma}(q) \cap \Sigma$ está contido em $B_{6\sigma}(p)$, ou seja, os pontos de $B_{4\sigma}(q) \cap \Sigma$ estão a uma distância maior do que ou igual a 2σ do bordo de Σ , logo pelo Lema 2.2, cada componente desse conjunto é gráfico. (Isso indica que já temos o primeiro passo para demonstrarmos o item (ii).)

Pelo Teorema da Cobertura de Lindelöf, podemos tomar um conjunto enumerável de pontos, $\{p_l\}_{l \in L}$, com $p_l \in \Sigma$ tal que $\cup_{l \in L} B_{\sigma(p_l)}(p_l)$ cobre Σ , enquanto que $B_{\frac{1}{5}\sigma(p_l)}(p_l)$ são dois a dois disjuntos. Esta última propriedade segue do Lema de Vitali.

Mais ainda, por compacidade, apenas um número finito de p_l 's está dentro de K_j . De fato, caso K_j admitisse um número infinito de p_l 's, teríamos um conjunto ilimitado (uma vez que as bolas $B_{\frac{1}{5}\sigma(p_l)}(p_l)$ são dois a dois disjuntas) contido em um conjunto limitado: $\cup_{l=1}^{\infty} B_{\frac{1}{5}\sigma(p_l)}(p_l) \subset K_{j+1}$.

Fixe p_{l_1} em nosso conjunto de pontos. Logo, ou $p_{l_1} \in K_1$, ou $p_{l_1} \in K_j \setminus K_{j-1}$, para algum $j \geq 2$. Seja $\rho_1 = 2\sigma(p_{l_1})$. Pelo Lema 2.2, cada componente de $B_{2\rho_1}(p_{l_1}) \cap \Sigma_i$ é gráfico de alguma função sobre um algum plano em $\mathbb{R}^3$, pois $B_{2\rho_1}(p_{l_1}) = B_{4\sigma}(p_{l_1})$.

O que temos até agora implica que $(1/10)\rho^2$ é um limitante inferior de área de qualquer componente conexa de $\Sigma_i \cap B_{\rho}(p_{l_1})$. Em particular, por limitação uniforme da área (2.3) com respeito ao compacto K_j , existe no máximo $N_1 = N(p_{l_1})$ dessas componentes para todo i .

Denote tais componentes por $\Sigma_i^{1,1}, \dots, \Sigma_i^{1,N_1}$. Agora, escolhemos pontos $q_i^{1,k} \in \Sigma_i^{1,k}$, com $k \in \{1, \dots, N_1\}$. Por compacidade de $\overline{B}_{\rho}(p_{l_1})$ e de $\mathbb{S}^2$, a menos de tomarmos uma subsequência em i , temos as convergências: $q_i^{1,k} \rightarrow q_k^1 \in \Sigma \cap \overline{B}_{\rho}(p_{l_1})$ (uma vez que $\Sigma_i^{1,k} \subset B_{\rho}(p_{l_1})$) e $\nu(q_i^{1,k}) \rightarrow \nu_k^1$ para todo $k \in \{1, \dots, N_1\}$. Seja P_k^1 o plano que passa por q_k^1 cujo vetor normal é dado por ν_k^1 . Pelo Lema 2.2, para i suficientemente grande, podemos escrever cada componente $\Sigma_i^{1,k}$ como gráfico de uma função $u_i^{1,k}$ definida sobre P_k^1 . Como $|u_i^{1,k}|_{2,0} \leq 3$, temos que $u_i^{1,k} \in C^{1,\lambda}(\Omega_k^1)$.

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, a menos de subsequência, temos que $\{u_i^{1,k}\}_i$ converge em compactos para uma função $u_k^1 \in C^{1,\lambda}$ com a noção de convergência em $C^{1,\lambda}$:

$$\sum_{|\alpha|=1} \|D^{\alpha} u_i^{1,k} - D^{\alpha} u_k^1\|_{\infty} + \sum_{|\alpha|=1} \sup_{p \neq q} \frac{|D^{\alpha} u_i^{1,k}(p) - D^{\alpha} u_k^1(q)|}{|p - q|^{\lambda}} \rightarrow 0 \quad \text{quando } i \rightarrow +\infty.$$

Assim, temos

$$\Sigma \cap B_{\rho}(p_l) = \left(\bigcup_{k=1}^{N_1} \Phi_k^1 \right) \cap B_{\rho}(p_l), \quad (2.4)$$

onde $\Phi_k^1 = \text{graf}(u_k^1)$.

Observe que, para alcançarmos tal convergência foi necessário considerarmos subsequências em cada etapa. Agora, ao tomarmos p_{l_2} distinto de p_{l_1} , considere os índices da subsequência que garantem a convergência anterior, isto é, considere os índices $\{i_{\eta}\}_{\eta \in \mathbb{N}}$ de modo que as funções $u_{i_{\eta}}^{1,k}$ convergem para u_k^1 quando $\eta \rightarrow +\infty$, para todo $k \in \{1, \dots, N_1\}$, fazendo com que a igualdade em (2.4) seja satisfeita.

Para p_{l_2} , repita o procedimento adotado em p_{l_1} . Assim, a subsequência $\{i_{\eta_\mu}\}_{\mu \in \mathbb{N}}$ que garante o resultado nesta etapa, trata-se de uma subsequência da sequência $\{i_\eta\}_{\eta \in \mathbb{N}}$. Assim, ao tomarmos o limite $\mu \rightarrow +\infty$, além de garantirmos o resultado desta etapa (para o ponto p_{l_2}) estaremos também garantindo o resultado para a etapa anterior (no caso p_{l_1}).

Sucessivamente, adotamos essa estratégia para os outros pontos do conjunto $\{p_l\}_{l \in L}$. Queremos extrair uma subsequência “global” $\{\Sigma_{i_\eta}\}_{\eta \in \mathbb{N}}$ de $\{\Sigma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\Sigma_{i_\eta} \cap B_\rho(p_l)$ converge para $\Sigma \cap B_\rho(p_l)$ quando $\eta \rightarrow +\infty$, qualquer que seja o ponto p_l . Caso $\#L < +\infty$, conseguimos diretamente, a partir do processo descrito, extrair tal subsequência: basta tomar a subsequência obtida para o último ponto p_l considerado. Caso $\#L = +\infty$, basta considerarmos o processo de diagonalização para obtermos tal subsequência que valha para todo ponto p_l .

Em resumo, temos que Σ é localmente a união de hipersuperfícies $C^{1,\lambda}$. Como as superfícies locais podem ser “coladas” umas nas outras de maneira consistente para cada p_l , concluímos o que queríamos. $\square$

Agora, além das estimativas de curvatura, assumiremos que as hipersuperfícies Σ_i são superfícies mínimas mergulhadas.

Teorema 2.6 (Proposição 5.10 de (COLDING; MINICOZZI II, 1999)). *Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ um aberto e $\{\Sigma_i\}_i$ uma sequência de superfícies mínimas mergulhadas fechadas em U com*

$$\text{area}(\Sigma_i) \leq \mathcal{A} < +\infty \quad \text{e} \quad \int_{\Sigma_i} |A_{\Sigma_i}|^2 \leq \mathcal{C} < +\infty. \quad (2.5)$$

Então, existe um conjunto finito de pontos, $S \subset U$, e uma subsequência de $\{\Sigma_i\}_i$ que converge uniformemente na topologia C^k , com $2 \leq k < \infty$, em conjuntos compactos de $U \setminus S$ para uma superfície mínima $\Sigma \subset U$. Além disso, Σ é suave em U e satisfaz (2.5).

Proposição 2.1 (Estimativa de Schauder). *Seja $u \in C^k(\Omega)$, com $k \geq 2$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aberto. Considere L um operador elíptico de segunda ordem,*

$$Lu = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} u + \sum_i b_i(x) \partial_{x_i} u + c(x),$$

isto é, $\xi^T A(x) \xi > 0$ para todo $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$, onde $A(x) := [a_{ij}(x)]$ (ou seja, $A(x)$ é positiva definida) para todo $x \in \Omega$. E considere $K \subset \tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$. Então existe $C > 0$, dependendo apenas de a_{ij}, b_i, c e $K, \tilde{\Omega}$, tal que toda solução de $Lu = f$ satisfaz

$$\|u\|_{C^{2,\lambda}(K)} \leq C(\|u\|_{C^0(\tilde{\Omega})} + \|f\|_{C^\lambda(\tilde{\Omega})}).$$

Proposição 2.2. *Assuma que $\{\Sigma_i\}_i$ é uma sequência de superfícies mínimas contidas em um conjunto aberto U tal que $\partial\Sigma_i \subset \partial U$. Além disso, considere $u_i \in C^{1,\lambda}(\mathbb{D})$ função real para cada $i \in \mathbb{N}$, onde $0 < \lambda \leq 1$. Se $\Sigma_i = \text{graf}(u_i)$, com $\|u_i\|_{C^2} \leq C < +\infty$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Então, a menos de subsequência, $\{u_i\}_i$ converge suavemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$ para uma função u tal que $\Sigma := \text{graf}(u)$ é uma superfície mínima.*

Demonstração. Pelo teorema de Arzelà-Ascoli, $\{u_i\}_i$ admite uma subsequência tal que $u_i \rightarrow u$ em $C^{1,\lambda}$ em subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Ou seja, $u \in C_{loc}^{1,\lambda}$. Desse modo, para $K \subset\subset \mathbb{D}$, temos que $Du \in C^{0,\lambda}(K)$.

Em nosso contexto, consideramos o operador elíptico

$$Lu = \text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 0.$$

Desse modo, os coeficientes do operador L possuem a mesma regularidade das funções u_x e u_y . Assim, tratam-se de funções contidas no espaço $C_{loc}^{0,\lambda}(\mathbb{D})$. Como $-Lu = 0$ e pela estimativa de Schauder [2.1](#), segue que

$$u \in C_{loc}^{2,\lambda}(\mathbb{D}).$$

Mas então, $Du \in C_{loc}^{1,\lambda}$. Consequentemente, os coeficientes de L estão nesse mesmo espaço. Mais uma vez pelo fato que $-Lu = 0$ e pela estimativa de Schauder [2.1](#), concluímos que

$$u \in C_{loc}^{3,\lambda}(\mathbb{D}).$$

Repetindo esse processo iteradas vezes, vemos que $u \in C^{k,\lambda}$ para $k = 1, 2, \dots$, e portanto, $u \in C^\infty(\mathbb{D})$.

□

2.3.2 Teoria de Morse-Radó

Esta seção é dedicada à análise dos pontos críticos mediante a teoria de Morse-Radó. Inicialmente, destacamos um importante resultado da teoria de superfícies mínimas:

Proposição 2.3. *Se Σ é um disco mínimo compacto em $\mathbb{R}^3$, $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é linear e $h^{-1}(p) \cap \Sigma$ contém um ponto crítico interior de $h|_\Sigma$ com multiplicidade k , então $h^{-1}(p) \cap \partial\Sigma$ contém pelo menos $2(k + 1)$ pontos.*

Definição 2.3 (Função de Radó). *Seja M^2 uma variedade suave. Uma função contínua $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **função de Radó** quando cada ponto $p \in M$ admite uma vizinhança U tal que*

- (i) $U \cap \{q \in M \mid F(q) = F(p)\}$ consiste em uma coleção finita de arcos (subvariedades de dimensão 1) mergulhados: $C_1, \dots, C_v$;
- (ii) cada C_i conecta o ponto p a um ponto em ∂U ;
- (iii) $C_i \cap C_j = \{p\}$ sempre que $i \neq j$;
- (iv) cada C_i está no fecho de $\{q \in \mathbb{R}^3 \mid F(q) > t\}$ e de $\{q \in \mathbb{R}^3 \mid F(q) < t\}$; e
- (v) quando $p \in \partial M$, nós também exigimos que cada $C_i \setminus \{p\}$ esteja contido no interior de M .

Definição 2.4 (Número de valença). *O número $v = v(F, p)$ acima é chamado de **número de valença** da função F em p .*

A denominação de *função de Radó* é oriunda do trabalho (HOFFMAN; MARTÍN; WHITE, 2023b) (onde os detalhes podem ser conferidos) baseado nos resultados obtidos por Radó em (RADÓ, 1933). Com isso, destacamos também:

Observação 2.1. *Considerando uma função de Radó $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, para cada t , o conjunto $(\partial M) \cap F^{-1}(t)$ é discreto. De fato, se $p \in U$ são como na Definição 2.3 e se $p \in \partial M$, então $(\partial M) \cap U \cap \{F = F(p)\}$ consiste apenas no ponto p .*

Definição 2.5 (Função de Morse). *Dada uma variedade diferenciável M , uma função diferenciável $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dita **função de Morse** quando todos os seus pontos críticos são não degenerados.*

Teorema 2.7. *Seja Σ^2 uma superfície suave sem bordo e $F_\theta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $\theta \in [0, T]$, uma família a 1-parâmetro de funções suaves tal que todos os pontos críticos tenham a forma*

$$c + r^n \sin(n\beta) + O(r^n),$$

onde $c \in \mathbb{R}$, n é algum inteiro maior do que ou igual a 2 e $\lim_{r \rightarrow 0} O(r^n)/r^n = 0$. Suponha que $p \in \Sigma \setminus \partial \Sigma$ seja um ponto crítico de multiplicidade k de F_0 . Então, existe uma vizinhança $K \subset \Sigma$ de p e um $\varepsilon > 0$ tal que $N(F_\theta|_K) = k$ para todo $\theta \in [0, \varepsilon]$, onde $N(F_\theta|_K)$ denota o número de pontos críticos (contando com a multiplicidade) de $F_\theta|_K$.

Demonstração. Seja $K \subset M$ uma região compacta com bordo suave tal que $p \in K \setminus \partial K$ e tal que K não contenha outros pontos onde DF_0 se anule. Perturbando K levemente, podemos assumir que $F_0|_{\partial K}$ é uma função de Morse. Seja I o conjunto de $\theta \in [0, T]$ tal que DF_θ não se anula em nenhum ponto de ∂K e tal que $F_\theta|_{\partial K}$ é uma função de Morse. Então I é um subconjunto relativamente aberto de $[0, T]$ contendo 0. Pelo Teorema 26 de (HOFFMAN; MARTÍN; WHITE, 2023b), $N(F_\theta|_K)$ é constante em cada componente conexa de I .

□

Corolário 2.1. Se $N(F_0|_\Sigma) \geq n$, com $n \in \mathbb{Z}$, então $N(F_\theta|_\Sigma) \geq n$ para θ suficientemente próximo de zero.

2.3.3 Teoria de Jenkins-Serrin

Os problemas do tipo Jenkins-Serrin são conhecidos na literatura como sendo um tipo de problema de Dirichlet. Neste caso, o problema consiste em determinar funções cujos valores no bordo alternam entre valores finitos e valores que “explodem”, isto é, valores que tendem ou a $+\infty$ ou a $-\infty$ quando nos aproximamos do bordo. Nesta seção selecionamos alguns desses resultados, além de analisarmos o comportamento de vetores normais e vetores tangentes às superfícies.

Lema 2.3 (Lema 4 de (JENKINS; SERRIN, 1966)). Considere Ω um domínio limitado em partes por um segmento de reta C , orientado positivamente no sentido padrão. Seja u uma solução da equação de superfície mínima

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0$$

que assume valor de bordo $\pm\infty$ em C . Então,

$$\int_C \frac{u_x}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dy + \frac{u_y}{\sqrt{1 + |Du|^2}} dx = \pm|C|,$$

onde $|C|$ denota o comprimento do segmento C .

Lema 2.4. Seja Ω um aberto convexo de $\mathbb{R}^2$ e $S \subset \partial\Omega$ um conjunto discreto de pontos. Assuma que $\mathcal{D}$ é uma superfície mínima, gráfico de uma função $u : \tilde{\Omega} \subseteq \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto, tal que $\overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D} \subseteq S \times \mathbb{R}$ (e u tem valor $+\infty$, ou $-\infty$, na componente conexa C de $(\partial\tilde{\Omega}) \setminus S$). Então, C deve ser um dos seguintes objetos: uma reta, uma semirreta ou um segmento de reta.

Demonstração. Assuma que u tem valor $-\infty$ em C . Logo, a superfície mínima $\mathcal{D} - (0, 0, -z)$ converge suavemente, quando $z \rightarrow \infty$, a

$$\{x \in \partial\tilde{\Omega} \mid u(x) = -\infty\}. \quad (2.6)$$

Desse modo, (2.6) é uma superfície mínima e então, cada uma de suas componentes deve ser plana. O caso quando u é $+\infty$ em C é análogo. $\square$

Observação 2.2. *Em particular, quando consideramos o caso mais específico onde u tem valor de bordo $+\infty$, ou $-\infty$, em todas as componentes conexas de $(\partial\tilde{\Omega}) \setminus S$, segue que $\tilde{\Omega}$ é convexo.*

Por fim, analisaremos o comportamento dos vetores tangentes e vetores normais aos objetos de interesse. Considere (conforme a notação da Seção 2.1) $u : P(\alpha, w, L) \rightarrow \mathbb{R}$ função suave com valores de bordo:

$$\begin{cases} u \equiv +\infty, & \text{em } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ u \equiv -\infty, & \text{em } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases}.$$

Então, com respeito ao gráfico de u , temos o seguinte comportamento quando nos aproximamos dos fins de $\text{graf}(u)$ (retas sobre os vértices de $P(\alpha, w, L)$):

- nos aproximando dos fins e tendendo à $+\infty$:
 - $(0, 0, 0)$: e_1 é vetor tangente e e_2 é vetor normal.
 - $(w/\tan \alpha, w, 0)$: e_1 é vetor tangente e $-e_2$ é vetor normal.
 - $(L_{\alpha, w}, 0, 0)$: $-e_1$ é vetor tangente e e_2 é vetor normal.
 - $(L_{\alpha, w} + w/\tan \alpha, w, 0)$: $-e_1$ é vetor tangente e $-e_2$ é vetor normal.
- nos aproximando dos fins e tendendo à $-\infty$:
 - $(0, 0, 0)$: $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ é vetor tangente e $(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$ é vetor normal.
 - $(w/\tan \alpha, w, 0)$: $(-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$ é vetor tangente e $(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$ é vetor normal.
 - $(L_{\alpha, w}, 0, 0)$: $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ é vetor tangente e $(\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$ é vetor normal.
 - $(L_{\alpha, w} + w/\tan \alpha, w, 0)$: $(-\cos \alpha, -\sin \alpha, 0)$ é vetor tangente e $(\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$ é vetor normal.

2.3.4 Fórmula da monotonicidade

Os resultados descritos nesta subsecção são frutos do trabalho (HUISKEN, 1990). Em nosso contexto, enunciamos a fórmula da monotonicidade:

Teorema 2.8 (Teorema 3.20 de (SIMON, 2018)). *Sejam U aberto em $\mathbb{R}^3$, $\xi \in U$ e $0 < \sigma \leq \rho < r$ tal que $B_r(\xi) \subset U$. Se Σ é uma superfície mínima contida em U , com vetor curvatura média $|\vec{H}| \leq 1$, então*

$$e^{F(\rho)} \frac{\text{area}(\Sigma \cap B_\rho(\xi))}{2\pi\rho^2} - e^{F(\sigma)} \frac{\text{area}(\Sigma \cap B_\sigma(\xi))}{2\pi\sigma^2} = \frac{G(\rho, \sigma)}{2\pi} \int_{(B_\rho(\xi) \setminus B_\sigma(\xi)) \cap \Sigma} \frac{|(x - \xi)^\perp|^2}{|x - \xi|^4} d\Sigma(x),$$

onde $F(s) \in [-s/r, s/r]$ para todo $s \in (0, r)$ e $G(\rho, \sigma) \in [e^{-1}, e]$.

Observação 2.3. *Em particular,*

$$\frac{\text{area}(\Sigma \cap B_s(\xi))}{2\pi s^2}$$

é não decrescente em s , com $s \in (0, r)$.

Os detalhes podem ser vistos em (SIMON, 2018).

3 FLUXOS GEOMÉTRICOS

Os fluxos geométricos tratam-se de equações de evolução que nos permite analisar o comportamento das características de objetos geométricos ao longo do tempo. Dois dos fluxos mais conhecidos na literatura são: o fluxo pela curvatura média e o fluxo de Ricci. O presente capítulo é dedicado ao estudo do fluxo pela curvatura média.

Enquanto o fluxo de Ricci trata-se de um fluxo intrínseco, onde analisamos a evolução da métrica de uma variedade, o fluxo pela curvatura média trata-se de um fluxo extrínseco, onde estamos interessados na evolução da imersão dos objetos estudados.

3.1 FLUXO PELA CURVATURA MÉDIA

Nesta seção descrevemos o fluxo pela curvatura média. Contudo, é necessário, primeiramente, situarmos alguns resultados.

Considere M^2 uma variedade suave orientável bidimensional (sobre a qual já estamos considerando uma orientação), $(\mathbb{R}^3, g)$ o espaço euclidiano tridimensional munido com uma métrica g e $F_0 : M \rightarrow (\mathbb{R}^3, g)$ uma aplicação suave. Seja Δ_g o operador de Beltrami-Laplace associado à métrica g . Em coordenadas, podemos escrever $\Delta_g F_0 = (\Delta_g F_0^1, \Delta_g F_0^2, \Delta_g F_0^3)$, onde F_0^k é a k -ésima função coordenada de F_0 , para todo $k \in \{1, 2, 3\}$, e

$$\Delta_g F_0^k := \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} \left(\sqrt{|g|} \sum_{j=1}^2 g^{ij} \partial_{x_j} F_0^k \right),$$

onde $|g|$ denota o determinante e g^{ij} denota o inverso da métrica g .

Como expresso acima, estamos interessados no caso de objetos imersos. Com isso, considere $F_0(M)$ uma hipersuperfície suave imersa de $(\mathbb{R}^3, g)$. Em particular, trata-se de uma superfície regular de classe C^2 . E assim, sabe-se de (DIERKES et al., 1992, p. 71) que

$$\Delta_g F_0(p) = -H(F_0(p))\nu(F_0(p)),$$

onde H é a curvatura média e $-\nu$ é o vetor unitário normal à $F_0(M)$ que aponta para cima, ambos em $F_0(p)$. Como consequência, quando $F_0(M)$ é mínima, temos que

$$\Delta_g F_0 \equiv 0. \tag{3.1}$$

Um caso mais específico ocorre quando levamos em consideração que as hipersuperfícies em questão são gráficos de funções suaves. Nesse contexto, seja uma função suave $u : \Omega \subseteq$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω domínio (aberto e conexo) de $\mathbb{R}^2$. Definindo $F_0(x) := (x, u(x))$, para todo $x \in \Omega$, e supondo que o gráfico de u é uma hipersuperfície mínima, segue de (3.1) que

$$\Delta_g u \equiv 0. \quad (3.2)$$

Uma vez finalizada a exposição dos resultados necessários, iniciamos a apresentação do fluxo geométrico de nosso interesse.

Ao falarmos de fluxo pela curvatura média, estamos nos referindo a um fluxo geométrico cuja família de superfícies, que evolui segundo tal fluxo, satisfaz a seguinte condição: considerada qualquer superfície da família, a componente normal do vetor velocidade, em cada ponto, coincide com o vetor curvatura média da superfície nesse ponto.

No que segue, consideramos Σ^2 uma hipersuperfície suave orientável bidimensional (sobre a qual já estamos considerando uma orientação) e $F_0 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão suave. Além disso, quando $F_0(\Sigma)$ é uma subvariedade suave imersa de $\mathbb{R}^3$, diremos que $F_0 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma hipersuperfície imersa. Note que nesse caso, a codimensão de $F_0(\Sigma)$ é 1.

Observação 3.1 (Proposição 5.18 (LEE, 2012)). *A injetividade da imersão F_0 é uma condição suficiente para que $F_0(\Sigma)$, munida de únicas e apropriadas topologia e estrutura diferenciável, seja subvariedade suave imersa de $\mathbb{R}^3$.*

Por simplicidade, em alguns momentos escreveremos $\Sigma := F_0(\Sigma)$ para nos referirmos à imersão $F_0 : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$. Assim, diremos que Σ é uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^3$. Além disso, estaremos considerando $0 < T \leq +\infty$.

Definição 3.1 (Fluxo pela curvatura média). *O fluxo pela curvatura média de F_0 trata-se de uma família a 1-parâmetro $F : \Sigma \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ de imersões suaves $F(\cdot, t) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, satisfazendo*

$$\begin{cases} (\partial_t F(x, t))^\perp = \vec{H}(F(x, t)) & \text{para todo } (x, t) \in \Sigma \times [0, T) \\ F(\cdot, 0) = F_0 \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde $\vec{H}(F(x, t))$ denota o vetor curvatura média de $\Sigma_t := F(\Sigma, t)$ em $F(x, t)$.

Observação 3.2. $(\partial_t F(x, t))^\perp$ denota a projeção ortogonal do vetor velocidade $\partial_t F(x, t)$ no fibrado normal de Σ_t . Isto é, $(\partial_t F(x, t))^\perp \in (T_{F(x, t)}\Sigma_t)^\perp$.

Neste trabalho seguimos a seguinte convenção:

$$\vec{H}(F(x, t)) = -H(F(x, t))\nu(F(x, t)), \quad (3.4)$$

onde $H(F(x, t))$ e $-\nu(F(x, t))$ são, respectivamente, a curvatura média escalar e o vetor unitário que aponta para cima normal à Σ_t , ambos em $F(x, t)$.

Definição 3.2 (Solução do fluxo pela curvatura média). *Uma família a 1-parâmetro $\{\Sigma_t\}_{t \in [0, T]}$ de hipersuperfícies imersas em $\mathbb{R}^3$ é dita uma **solução do fluxo pela curvatura média de F_0** quando existe uma família a 1-parâmetro $F : \Sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ de imersões suaves $F(\cdot, t) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ de modo que $F(\Sigma, t) = \Sigma_t$ e (3.3) é satisfeito. Também dizemos que Σ **evolui (ou move-se) pelo fluxo da curvatura média de F_0** .*

Note que pela Observação 3.1, dado um fluxo pela curvatura média $F : \Sigma \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $F(\cdot, t)$ é injetiva para cada $t \in [0, T]$, a família de hipersuperfícies $\{F(\Sigma, t)\}_{t \in [0, T]}$ é solução do fluxo pela curvatura média de $F(\cdot, 0)$. Um caso especial ocorre quando a solução do fluxo pela curvatura média trata-se de hipersuperfícies que são gráficos de funções suaves.

Sejam $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ função suave, com Ω aberto, e $\varphi(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \Omega$ imersão suave bijetiva para todo $t \in [0, T]$. Considere $F : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ um fluxo pela curvatura média, o qual é dado por

$$F(x, t) = (\varphi(x, t), u(\varphi(x, t), t)) \quad \text{para todo } (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (3.5)$$

onde $u(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são funções suaves para todo $t \in [0, T]$, de modo que $u(\cdot, 0) = u$. Com isso, temos satisfeito:

$$\begin{cases} (\partial_t F(x, t))^\perp = -H(F(x, t))\nu(F(x, t)) \\ F_0(\Omega) = \text{graf}(u) \end{cases}, \quad (3.6)$$

onde $F_0 = F(\cdot, 0)$, e $H(F(x, t))$ e $-\nu(F(x, t))$ são, respectivamente, a curvatura média escalar e o vetor unitário que aponta para cima normal à $F(\Omega, t)$, ambos em $F(x, t)$.

Para cada $t \in [0, T]$, as hipóteses sobre $\varphi(\cdot, t)$ são necessárias no seguinte sentido: a injetividade da sua diferencial garante que $F(\cdot, t)$ é imersão; sua injetividade garante a injetividade de $F(\cdot, t)$ (e desse modo $F(\Omega, t)$ é hipersuperfície pela Observação 3.1); e sua sobrejetividade garante que a equação (3.5) está bem definida, uma vez que Ω é tanto a imagem de $\varphi(\cdot, t)$ quanto o domínio de $u(\cdot, t)$.

Observe que, por (3.5), a hipersuperfície $F(\Omega, t)$ é gráfico de $u(\cdot, t)$, para cada $t \in [0, T]$. Nesse contexto, denotamo-as por **hipersuperfícies gráficas do fluxo pela curvatura média de F_0** . Consequentemente tais hipersuperfícies gráficas são mergulhadas em $\mathbb{R}^3$, pela Proposição 5.4 de (LEE, 2012), e (3.6)₁ garante que $\{F(\Omega, t)\}_{t \in [0, T]}$ é solução do fluxo pela curvatura média de F_0 .

Destacamos que, a princípio, havíamos considerado a imersão suave $F(\cdot, t) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, para cada $t \in [0, T)$, definida sobre um conjunto mais geral: uma hipersuperfície suave orientável Σ . Contudo, a aplicação φ torna natural considerarmos um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ em vez de Σ . De fato, para o caso geral, consideraríamos $\varphi(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \Sigma$ imersão suave bijetiva para cada $t \in [0, T)$ e $F : \Sigma \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(x, t) = (\varphi(x, t), u(\varphi(x, t), t)) \quad \text{para todo } (x, t) \in \Sigma \times [0, T),$$

onde u e $u(\cdot, t)$, para cada $t \in [0, T)$, são como antes.

A partir disso, podemos considerar a família a 1-parâmetro $\tilde{F} : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\tilde{F}(y, t) = F((\varphi(\cdot, t))^{-1}(y), t) \quad \text{para todo } (y, t) \in \Omega \times [0, T).$$

Para cada $(y, t) \in \Omega \times [0, T)$ podemos considerar $x = x(y, t) := (\varphi(\cdot, t))^{-1}(y) \in \Sigma$. Por bijetividade de $\varphi(\cdot, t)$, temos que $x(y, t)$ existe e é único para cada $(y, t) \in \Omega \times [0, T)$. Com isso, vemos que

$$\tilde{F}(y, t) = F(x, t) = (\varphi(x, t), u(\varphi(x, t), t)) \quad \text{para todo } (y, t) \in \Omega \times [0, T),$$

conforme consideramos em (3.5).

Proposição 3.1 (Hipersuperfícies gráficas). *Seja $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω aberto. Então,*

- (a) *a expressão da métrica e do inverso da métrica induzida por $\text{graf}(u)$ são dadas, respectivamente, por*

$$g_{ij} = \delta_{ij} + u_{x_i} u_{x_j} \quad \text{e} \quad g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{1 + |Du|^2} u_{x_i} u_{x_j};$$

- (b) *a segunda forma fundamental escalar de $\text{graf}(u)$ é dada por*

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} u_{x_i x_j};$$

- (c) *o vetor unitário normal à $\text{graf}(u)$ que aponta para baixo é dado por*

$$\nu = \frac{(Du, -1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}};$$

- (d) *a curvatura média escalar de $\text{graf}(u)$ é dada por*

$$H = \text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

Demonstração. Inicialmente considere a aplicação $F : \Omega \rightarrow \text{graf}(u) \subset \mathbb{R}^{m+1}$, definida por $F(x) := (x, u(x))$. Note que $dF_x : T_x \mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^m \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{R}^{m+1} \approx \mathbb{R}^{m+1}$ é dada por

$$dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = \begin{pmatrix} I_m \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x) \end{pmatrix}_{(m+1) \times m}, \quad (3.7)$$

onde I_m é a matriz identidade $m \times m$.

(a) Para a métrica induzida, temos

$$g_{ij}(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x, \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right\rangle := \left\langle dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right), dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_x \right) \right\rangle_x$$

Podemos identificar $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = e_i$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, logo

$$dF_x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x \right) = dF_x(e_i) = \begin{pmatrix} I_m \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x) \end{pmatrix}_{(m+1) \times m} \cdot (e_i)_{m \times 1} = (e_i, u_{x_i}(x)) \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

Com isso,

$$g_{ij}(x) = \langle dF_x(e_i), dF_x(e_j) \rangle = \langle (e_i, u_{x_i}(x)), (e_j, u_{x_j}(x)) \rangle = \delta_{ij} + u_{x_i}(x)u_{x_j}(x).$$

Por outro lado, um cálculo direto mostra que

$$\sum_{k=1}^m \underbrace{(\delta_{ik} + u_{x_i}(x)u_{x_k}(x))}_{g_{ik}(x)} \left(\delta_{kj} - \frac{u_{x_k}(x)u_{x_j}(x)}{1 + |Du(x)|^2} \right) = \delta_{ij}.$$

Portanto,

$$g^{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{u_{x_i}(x)u_{x_j}(x)}{1 + |Du(x)|^2}.$$

(b) Sabemos que $\{dF_x(e_1), \dots, dF_x(e_m)\} = \{(e_1, u_{x_1}(x)), \dots, (e_m, u_{x_m}(x))\}$ forma uma base para o espaço tangente em x . Logo, buscamos (y, y_{m+1}) , com $y = (y_1, \dots, y_m)$, tal que $\langle (e_i, u_{x_i}(x)), (y, y_{m+1}) \rangle = 0$. O que ocorre se, e somente se, $y_i = -y_{m+1}u_{x_i}(x)$. Note que, para $y_i = u_{x_i}(x)$ e $y_{m+1}(x) = -1$, temos o desejado. Assim, $(y, y_{m+1}) = (Du, -1)$. Como desejamos um vetor unitário, basta considerarmos o vetor

$$\nu = \frac{(Du(x), -1)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}}.$$

(c) Por definição de segunda forma fundamental escalar

$$A_{ij}(F(x)) = \left\langle F_{x_i x_j}(x), -\nu(F(x)) \right\rangle,$$

onde $F_{x_i}(x) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x)$ é a i -ésima coluna da matriz (3.7), isto é, $F_{x_i}(x) = (e_i, u_{x_i})$. Logo,

$$F_{x_i x_j}(x) = (0, u_{x_i x_j}(x)).$$

Portanto,

$$A_{ij}(F(x)) = \left\langle (0, u_{x_i x_j}(x)), \frac{(-Du(x), 1)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \right\rangle = \frac{u_{x_i x_j}(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}}.$$

(d) Sabe-se que a curvatura média escalar em $F(x)$ é dada por

$$H(F(x)) = \sum_{i,j=1}^m g^{ij}(F(x)) A_{ij}(F(x)).$$

Logo, por (a) e (b),

$$\begin{aligned} H(F(x)) &= \sum_{i,j=1}^m \left(\delta_{ij} - \frac{u_{x_i}(x)u_{x_j}(x)}{1 + |Du(x)|^2} \right) \left(\frac{u_{x_i x_j}(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \right) \\ &= \frac{\Delta u(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} - \sum_{i,j=1}^m \frac{u_{x_i}(x)u_{x_j}(x)u_{x_i x_j}(x)}{(|1 + |Du(x)||)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\frac{Du(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \right) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{u_{x_i}(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} \right) \\ &= \frac{\Delta u(x)}{\sqrt{1 + |Du(x)|^2}} - \sum_{i,j=1}^m \frac{u_{x_i}(x)u_{x_j}(x)u_{x_i x_j}(x)}{(|1 + |Du(x)||)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

□

3.1.1 Singularidades de fluxo

Note que o fluxo está definido em um intervalo de tempo $[0, T)$, podendo este ser limitado, ou não. Em especial, neste trabalho, estamos interessados no comportamento assintótico da evolução das hipersuperfícies, isto é, queremos analisar as características da hipersuperfície limite, $\lim_{t \rightarrow T} \Sigma_t$, quando essa existir. Neste sentido, analisamos a segunda forma fundamental para definirmos quando um fluxo torna-se singular. A seguinte abordagem segue do trabalho de (ECKER, 2004).

Definição 3.3 (Singularidade de fluxo). *Seja $F : \Sigma^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ um fluxo pela curvatura média de uma hipersuperfície Σ fechada em $\mathbb{R}^3$. Quando*

$$\limsup_{t \rightarrow T} \{ |A(y, t)| \mid y \in \Sigma_t \cap B(x, r) \} = +\infty,$$

para todo $r > 0$, onde $B(x, r)$ é a bola euclidiana em $\mathbb{R}^3$ de raio r centrada em x e $|A(\cdot, \cdot)|$ denota a norma da segunda forma fundamental, dizemos que o fluxo torna-se **singular** no ponto (x, T) do espaço-tempo.

Uma elegante forma de estudar as singularidades de um fluxo se dá pela combinação de duas estratégias: desacelerar o fluxo e ampliar a visualização do fluxo próximo a uma singularidade pouco antes dela ser atingida. Nas próximas linhas trataremos de descrever um processo conhecido na literatura como *blowup*. Nesse sentido, destacamos o trabalho pioneiro de (HUISKEN, 1990).

A princípio, considere $F : \Sigma \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ um fluxo pela curvatura média, seguindo novamente a notação $\Sigma_t = F(\Sigma, t)$. Considerando uma dilatação do intervalo $(0, T)$ por um fator $\lambda > 1$, para cada $t \in [0, \lambda T)$, podemos associar a hipersuperfície $\Sigma_{\lambda^{-1}t}$ do fluxo considerado inicialmente. Note que, a dilatação do intervalo inicial para um intervalo $[0, \lambda T)$ faz com que, em um mesmo intervalo de tempo, a hipersuperfície tenha uma menor variação, isto é, estamos desacelerando o fluxo. Além disso, para cada $t \in [-\tilde{t}, 0]$, com $\tilde{t} \in (0, T)$, podemos associar a hipersuperfície $\Sigma_{t+\tilde{t}}$.

Por outro lado, note que a translação $\Sigma_t - y$ indica que estamos normalizando o ponto $y \in \Sigma_t$ para que este torne-se a origem. Desse modo, $\lambda(\Sigma_t - y)$ nos permite ampliar a hipersuperfície $\Sigma_t - y$, o que equivale ampliar a hipersuperfície Σ_t em y .

Agora assumamos que (x, T) é um ponto onde o fluxo torna-se singular. Sejam $\{t_i\}_i$ em $[0, T)$ e $\{x_i\}_i$ em Σ_{t_i} tal que $(x_i, t_i) \rightarrow (x, T)$ e $\{\lambda_i\}_i$ em $\mathbb{R}^+$ tal que $\lambda_i \nearrow +\infty$. Considere o redimensionamento do fluxo, dado por

$$t \in (-\lambda_i^2 t_i, 0] \mapsto \lambda_i \left(\Sigma_{\lambda_i^{-2} t + t_i} - x_i \right).$$

Quando $i \rightarrow +\infty$ temos o *blowup* que trata-se de uma convergência suave para o fluxo de curvatura média ancestral

$$t \in (-\infty, 0] \mapsto \tilde{\Sigma}(t),$$

onde $\tilde{\Sigma}(0)$ é não-plana, apresentando assim uma estrutura geométrica mais sofisticada.

Determinar quais fluxos ancestrais $\tilde{\Sigma}(\cdot)$ são originados por *blowups* como descrito acima, é um grande problema em aberto. Um caso especial deste problema é considerar soluções que se movem por translação pelo fluxo da curvatura média, e determinar se tais soluções são originadas a partir do processo de *blowup* como descrito acima.

Definição 3.4 (Tipos de singularidades de fluxo). *Seja $F : \Sigma^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ um fluxo pela curvatura média de uma hipersuperfície Σ fechada em $\mathbb{R}^3$ e denote por $|A(\cdot, \cdot)|$ a norma da segunda forma fundamental. Quando existe uma constante $C > 1$ satisfazendo*

$$\max |A(y, t)| \leq \frac{C}{\sqrt{2(T-t)}} \quad \forall t \in [0, T),$$

*dizemos que o fluxo desenvolve **singularidade do tipo I** em T . Do contrário, ou seja, quando não existe tal constante C e assim*

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max |A(y, t)| \sqrt{T-t} = +\infty,$$

*dizemos que o fluxo desenvolve **singularidade do tipo II** em T .*

Ambos os tipos de singularidades estão relacionados a específicas soluções do fluxo pela curvatura média, conhecidas como **autossimilares**. Estas tratam-se de hipersuperfícies que preservam sua forma ao longo da evolução. Os tipos mais recorrentes na literatura são

- (i) *self-shrinkers*: trata-se de uma hipersuperfície $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ (como no início da Seção 3.1) de modo que $F : \Sigma \times (-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $F(\Sigma, 0) = \Sigma$, dada por

$$F(x, t) = \sqrt{-t}F(x, 0)$$

é fluxo pela curvatura média.

- (ii) *self-expanders*: trata-se de uma hipersuperfície $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ (como no início da Seção 3.1) de modo que $F : \Sigma \times [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$, com $F(\Sigma, 0) = \Sigma$, dada por

$$F(x, t) = \sqrt{t}F(x, 0)$$

é fluxo pela curvatura média.

- (iii) *sólitons de translação*: serão descritos a seguir.

4 SÓLITONS DE TRANSLAÇÃO

Neste capítulo, descrevemos um pouco sobre a teoria dos sólitons de translação, introduzindo sua definição, as equações associadas, os principais exemplos e um importante teorema de classificação. As estimativas sobre o gradiente e sobre a curvatura também são necessárias em nosso contexto. Por fim, tratamos de um resultado de extrema relevância, obtido por (ILMANEN, 1994), que nos permite conectar o estudo dos sólitons de translação com a teoria de superfícies mínimas. Desse modo, podemos considerar poderosas ferramentas, como o princípio do máximo (princípio da tangência) e os resultados de compacidade.

O ponto de partida, segue das soluções autossimilares do fluxo pela curvatura média, trazidas ao final do Capítulo 3. Dentre essas soluções especiais que evoluem pelo fluxo geométrico de nosso interesse, as quais preservam sua forma no espaço ambiente, estamos interessados no caso em que a hipersuperfície dada inicialmente, $F_0 : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, move-se pelo fluxo da curvatura média por translação. Isto é, quando existe um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $F : \Sigma \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$F(x, t) = F(x, 0) + tv \quad (4.1)$$

é fluxo da curvatura média de F_0 . Como $\partial_t F(x, t) = v$ segue de (3.3) que

$$\vec{H}(F(x, t)) = v^\perp. \quad (4.2)$$

Isso nos motiva à próxima definição.

Definição 4.1 (Sóliton de translação do fluxo pela curvatura média). *Dizemos que uma hipersuperfície $F_0 : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um **sóliton de translação do fluxo pela curvatura média de F_0 com velocidade v** quando a família a 1-parâmetro $F : \Sigma \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por (4.1) é fluxo da curvatura média de F_0 . Ou seja, quando (3.3) é satisfeito.*

A menos que digamos o contrário, assumiremos daqui por diante que o vetor velocidade é $v = e_3$. Isto é, consideraremos sólitons de translação do fluxo pela curvatura média de F_0 com velocidade e_3 , aos quais referiremo-nos simplesmente por **sólitons de translação**.

4.1 A EQUAÇÃO DOS SÓLITONS DE TRANSLAÇÃO

A partir de (4.2) vemos que para os sólitons de translação vale a seguinte equação:

$$\vec{H} = e_3^\perp. \quad (4.3)$$

E, uma vez observado que $e_3 = e_3^\perp + e_3^\top$ implica $\langle e_3, \nu \rangle = \langle e_3^\perp, \nu \rangle$, segue de (3.4) e (4.3) que

$$H = -\langle e_3, \nu \rangle. \quad (4.4)$$

Dizemos que as equações (4.3) e (4.4) são as **equações dos sólitons de translação**.

Definição 4.2 (Sóliton de translação gráfico completo). *Seja $F_0 : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com Ω aberto, um sóliton de translação. Dizemos que tal sóliton é **gráfico** quando $F_0(\Omega)$ é gráfico de alguma função suave $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Isto é, $F_0(\Omega) = \text{graf}(u)$. Além disso, dizemos tal sóliton é **completo**, quando $F_0(\Omega)$ é completo como subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Naturalmente, um **sóliton de translação gráfico completo** trata-se de um sóliton de translação que é gráfico e é completo.*

Desse modo, para qualquer sóliton de translação gráfico podemos observar, a partir da Proposição 3.1, que

$$e_3^\perp = \text{proj}_{-\nu} e_3 = \frac{(-Du, 1)}{1 + |Du|^2},$$

onde $\text{proj}_{-\nu} e_3$ denota a projeção de e_3 sobre o vetor normal $-\nu$ que aponta para cima. E por (3.4), vemos que

$$\vec{H} = -H\nu = \text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) \frac{(-Du, 1)}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

Considerando esses resultados, a partir de (4.3), chegamos à equação diferencial parcial quasilinear elíptica:

$$\text{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}. \quad (4.5)$$

Dizemos que (4.5) é a **equação dos sólitons de translação gráficos**. Desenvolvendo seus termos, podemos reescrevê-la como

$$1 = \sum_{i=1}^m \left(u_{x_i x_i} - \sum_{j=1}^m \frac{u_{x_i} u_{x_j}}{1 + |Du|^2} u_{x_i x_j} \right). \quad (4.6)$$

4.2 EXEMPLOS BÁSICOS E O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO

Os exemplos mais simples de sólitons de translação são as superfícies mínimas na métrica usual. Isto é, hipersuperfícies para as quais a curvatura média escalar é identicamente nula. Pela equação (4.3), isso significa

$$0 = \vec{H} = e_3^\perp. \quad (4.7)$$

Em outras palavras, tal hipersuperfície permanece relativamente estática, no sentido de que, ao considerarmos uma translação pelo vetor e_3 , a hipersuperfície ocupa o mesmo lugar geométrico em $\mathbb{R}^3$ quando comparado à situação inicial. Além disso, por (4.7), o vetor de translação e_3 deve ser tangente à hipersuperfície. Ou seja, os exemplos mais simples de sólitons de translação são os **hiperplanos** com direção de translação e_3 e tangentes a este vetor.

A seguir exibiremos exemplos de sólitons de translação mais sofisticados.

4.2.1 O *grim reaper*

Considere a função $u : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$u(x, y) = -\log \sin y,$$

onde $\log$ denota o logaritmo natural. Um cálculo direto mostra que

$$\operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \sin y = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}}.$$

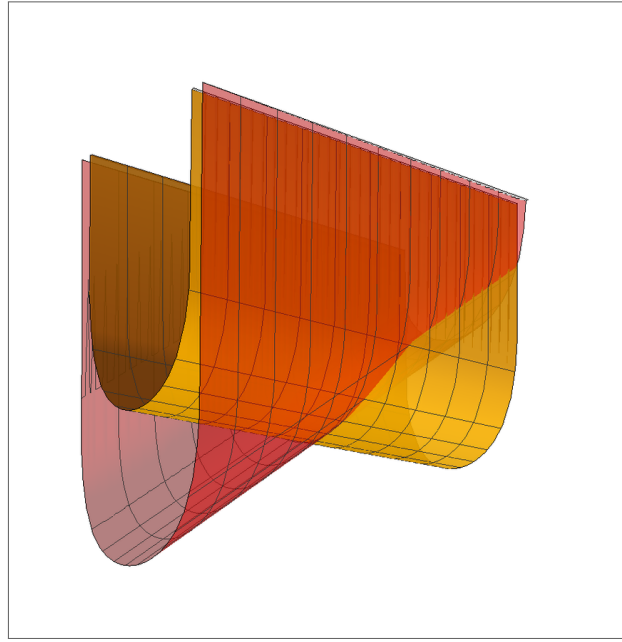
Com isso, temos um sólito de translação $\mathcal{G}$, o qual denotamos por *grim reaper*, que pode ser considerado a partir da parametrização $F : \mathbb{R} \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y) = (x, y, -\log \sin y)$.

De fato, o *grim reaper* trata-se de um caso particular do sólito de translação conhecido como *tilted grim reaper*. Na verdade, esse sólito de translação mais geral é obtido a partir de uma dilatação $\lambda > 0$ e de uma rotação $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ apropriadas. Iremos denotá-lo por $\mathcal{G}_\lambda^\theta$. Nesse caso, consideramos uma dilatação $\lambda = 1/\cos \theta$, com $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Assim, $\mathcal{G}_\lambda^\theta$ trata-se do gráfico da função $u : \mathbb{R} \times (0, \pi/\cos \theta)$ dada por

$$u(x, y) = -(\sec^2 \theta) \log \sin(y \cos \theta) + x \tan \theta. \quad (4.8)$$

Observação 4.1. De um modo geral, ao considerarmos *tilted grim reapers*, estaremos tratando de uma função u como descrita em (4.8) definida sobre a faixa $\mathbb{R} \times (0, w)$, onde $w = \pi/\cos \theta$.

Figura 3 – *Grim reaper* e *tilted grim reaper* com $\theta = \pi/6$



Fonte: Adaptado de [HOFFMAN et al. \(2021\)](#)

Observação 4.2. Note que o *grim reaper* trata-se do *tilted grim reaper* com rotação $\theta = 0$ e com dilatação $\lambda = 1$.

Para os nossos propósitos, é importante destacar a ação da aplicação de Gauss no *tilted grim reaper*. Recorde que, para uma parametrização arbitrária φ de uma vizinhança parametrizada W de uma superfície qualquer $S \subset \mathbb{R}^3$, temos uma forma natural de definirmos um campo de vetores unitários normais à S ao longo de W :

$$\nu = \frac{\varphi_x \wedge \varphi_y}{|\varphi_x \wedge \varphi_y|}.$$

Mais especificamente, para superfícies que são gráficos de uma função $u : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, com U aberto de $\mathbb{R}^2$, temos (pelo Teorema [3.1\(c\)](#))

$$\nu = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1}}. \quad (4.9)$$

Considerando u como em [\(4.8\)](#) e a partir de [\(4.9\)](#) temos que a aplicação de Gauss do *tilted grim reaper*, $\nu : \text{graf}(u) \rightarrow \mathbb{S}^2$, é dada por

$$\nu(x, y) = (-(\sin \theta) \sin(y \cos \theta), \cos(y \cos \theta), (\cos \theta) \sin(y \cos \theta)). \quad (4.10)$$

Note que aqui estamos fazendo uma simplificação na notação. De fato, os pontos $(x, y, u(x, y)) \in \text{graf}(u)$ estão unicamente definidos em função das duas primeiras coordenadas. Além disso, observe que $\nu(x, y) \rightarrow e_2$ quando $y \rightarrow 0$, e $\nu(x, y) \rightarrow -e_2$ quando $y \rightarrow \pi / \cos \theta$.

Denotando por $\mathbb{S}^{2+} := \{p \in \mathbb{S}^2 \mid \langle p, e_3 \rangle \geq 0\}$, isto é, o hemisfério superior fechado de $\mathbb{S}^2$, vemos que a imagem de $\text{graf}(u)$ pela aplicação de Gauss consiste na interseção de $\mathbb{S}^{2+} \setminus \{e_2, -e_2\}$ com o plano Π cujo vetor normal é dado por

$$\frac{(0, 1, 0) \wedge (-\sin \theta, 0, \cos \theta)}{|(0, 1, 0) \wedge (-\sin \theta, 0, \cos \theta)|} = (\cos \theta, 0, \sin \theta).$$

Ou seja, o plano Π é descrito pela equação $x \cos \theta + z \sin \theta = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \nu(\text{graf}(u)) &= (\mathbb{S}^{2+} \cap \Pi) \setminus \{e_2, -e_2\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid x = -z \tan \theta, -\pi/2 < \theta < \pi/2\} \setminus \{e_2, -e_2\}. \end{aligned}$$

Podemos expressar a igualdade anterior em termos de w (uma vez que $w = \pi / \cos \theta$, pela Observação 4.1):

$$\nu(\text{graf}(u)) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid x = -z \sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}, z \geq 0 \right\} \setminus \{e_2, -e_2\}. \quad (4.11)$$

Em particular, para o *grim reaper* (isto é, quando $w = \pi$), temos que sua imagem pela aplicação de Gauss consiste em $(\mathbb{S}^{2+} \cap \{x = 0\}) \setminus \{e_2, -e_2\}$.

4.2.2 Sólitos de translação rotacionalmente simétricos

Os detalhes desta subseção estão contidos em (CLUTTERBUCK; SCHNÜRER; SCHULZE, 2007).

Bowl soliton

Proposição 4.1 (Existência do *bowl soliton*). *Existe um sólito de translação, inteiro, rotacionalmente simétrico e estritamente convexo, $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, com $m \geq 2$. Mais ainda, quando $r \rightarrow \infty$, temos a seguinte expansão assintótica:*

$$u(r) = \frac{r^2}{2(m-1)} - \log r + O(r^{-1}).$$

(ALTSCHULER; WU, 1994) mostraram não apenas a existência, como também o comportamento assintótico de tal sólito ao parabolóide

$$\frac{r^2}{2(m-1)}.$$

O sólito de translação nos conformes da Proposição 4.1 é chamado de ***bowl soliton***.

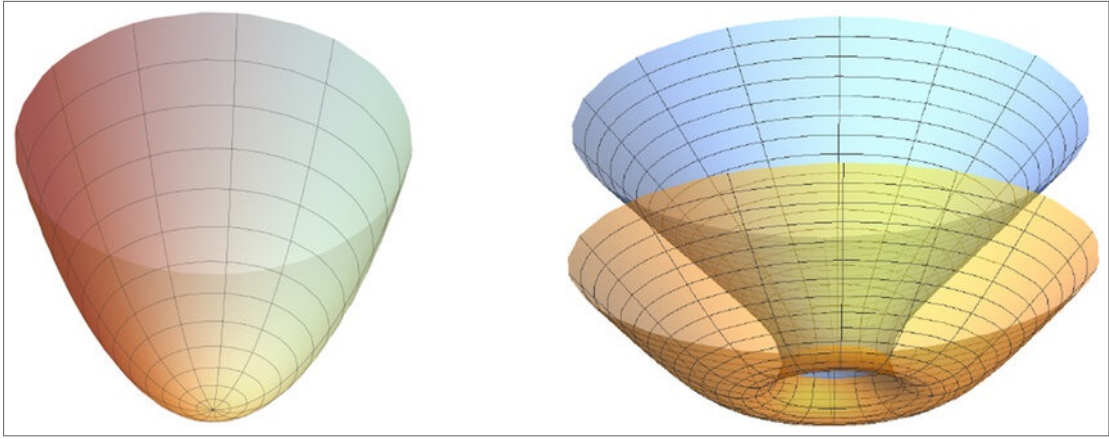
Sólito de translação tipo catenoide

Proposição 4.2 (Existência do sóliton de translação tipo catenoide). *Existem sólitons de translação, rotacionalmente simétricos, $u_{r_0}^+, u_{r_0}^- : (\mathbb{R}^m \setminus B_{r_0}(0)) \rightarrow \mathbb{R}$, com $m \geq 2$ e $r_0 > 0$. Mais ainda, quando $r \rightarrow +\infty$, temos a seguinte expansão assintótica:*

$$u_{r_0}^\pm(x) = \frac{r^2}{2(m-1)} - \log r + O(r^{-1}) + C^\pm.$$

O sóliton de translação nos conformes da Proposição 4.2 é chamado de **sóliton de translação tipo catenoide**.

Figura 4 – Bowl soliton e sóliton de translação tipo catenoide



Fonte: Adaptado de [HOFFMAN; MARTÍN; WHITE \(2023a\)](#)

4.2.3 O Δ -wing

Por fim, apresentamos o sóliton de translação conhecido como Δ -wing. Os detalhes podem ser vistos em [\(HOFFMAN et al., 2019\)](#).

Teorema 4.1 (Existência do Δ -wing). *Para todo $w > \pi$ existe um sóliton de translação $u_w : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- (a) $(0, w/2)$ é ponto de mínimo global;
- (b) $u_w(x, y) = u_w(x, w - y) = u_w(-x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, w)$;
- (c) a curvatura de Gauss de $\text{graf}(u_w)$ é estritamente positiva em todos os pontos;
- (d) para $\tilde{w} \geq w$, temos

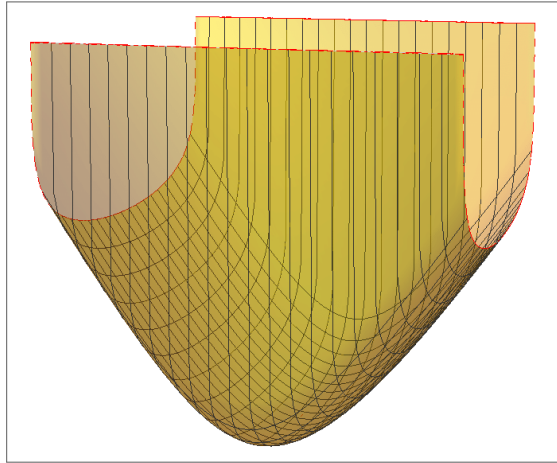
$$\sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times (0,w)} (w - |y|) + \sqrt{1 + |Du_w(x, y)|^2} \leq C(\tilde{w}),$$

onde $C(\tilde{w}) < +\infty$.

Teorema 4.2 (Unicidade do Δ -wing). *Para todo $w > \pi$ existe um único (a menos de translação) sólito de translação $u_w : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$, cuja curvatura de Gauss de $\text{graf}(u_w)$ é estritamente maior do que zero.*

Ao sólito de translação descrito nos Teoremas 4.1 e 4.2 denotamos por Δ -wing.

Figura 5 – Δ -wing



Fonte: GAMA; MARTÍN (2023).

4.2.4 O teorema de classificação

Introduzidos tais sólitos, podemos apresentar um importante teorema de classificação obtido em (HOFFMAN et al., 2019).

Teorema 4.3 (Teorema de Classificação). *A menos de isometrias de $\mathbb{R}^2$ e translações verticais, os únicos sólitos de translação gráficos completos em $\mathbb{R}^3$ são o tilted grim reaper, o Δ -wing e o bowl soliton.*

4.3 ESTIMATIVAS PARA SÓLITOS DE TRANSLAÇÃO

Ao longo desta construção, será essencial o uso de algumas estimativas. A princípio destacamos uma estimativa sobre o gradiente.

Lema 4.1 (Lema 6.3 de (HOFFMAN et al., 2019)). *Seja Ω um aberto convexo de $\mathbb{R}^2$ contendo $[0, +\infty) \times [-w, w]$, com $w > 0$. Suponha que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é um sólito de translação e suponha que $[0, +\infty) \times [-w, w]$ contém um conjunto ilimitado, conexo e fechado C tal que $|Du|$ é limitado em C . Então $|Du|$ é limitado em $[0, +\infty) \times [-w, w]$.*

Por fim, apresentamos uma estimativa sobre a curvatura.

Proposição 4.3 (Proposição 23 de (HOFFMAN; MARTÍN; WHITE, 2022a)). *Seja Σ um sólito de translação gráfico de uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre um aberto convexo Ω de $\mathbb{R}^2$ tal que*

- $\Gamma := \bar{\Sigma} \setminus \Sigma$ é uma curva poligonal (não necessariamente conexa) consistindo de segmentos de reta, semirretas ou retas; e
- $\bar{\Sigma}$ é uma variedade suave com bordo exceto nos vértices de Γ .

Se $p \in \mathbb{R}^3$, defina $r_\Sigma(p)$ o supremo de $r > 0$ tal que $B_r(p) \cap \partial\Sigma$ ou é vazio, ou consiste em um segmento de reta simples. Então, existe uma constante $C < +\infty$ tal que

$$|A_\Sigma(p)| \min\{1, r_\Sigma(p)\} \leq C,$$

onde $|A_\Sigma(p)|$ é a norma da segunda forma fundamental de Σ em p .

4.4 MÉTRICA DE ILMANEN E SUAS CONSEQUÊNCIAS

Nesta seção abordaremos um importante resultado obtido por Ilmanen, o qual pode ser visto com detalhes nos Capítulos 2 e 3 de (ILMANEN, 1994). Tal resultado nos permite conectar o estudo dos sólitos de translação com a teoria de superfícies mínimas.

Considerando $\mathbb{R}^{m+1}$ o espaço ambiente, denotamos por **métrica de Ilmanen** a métrica dada por

$$g(x) = e^{\frac{2}{m}\langle v, x \rangle} \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

onde $v \in \mathbb{R}^{m+1}$ é não nulo e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica usual. Ou seja, no nosso contexto, temos

$$g(x) = e^{\frac{2}{2}\langle e_3, x \rangle} \langle \cdot, \cdot \rangle = e^{x_3} \langle \cdot, \cdot \rangle, \quad (4.12)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$. Nesse contexto, Ilmanen mostrou que um ponto estacionário Σ do funcional área I dado por

$$I(\Phi) = \text{area}_g(\Phi) = \int_{\Phi} e^{x_3} d\mu_{\Phi},$$

é um sólito de translação, onde $\text{area}_g(\cdot)$ denota a área de uma superfície com a métrica de Ilmanen g . A relação entre pontos estacionários, equação de Euler-Lagrange e superfícies mínimas pode ser vista em (GELFAND; FOMIN, 1963).

Em resumo, temos a seguinte relação: $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é um sólito de translação na métrica usual se, e somente se, Σ é uma superfície g -mínima, isto é, uma superfície mínima em $(\mathbb{R}^3, g)$, onde g denota a métrica de Ilmanen. Para mais detalhes sobre a métrica de Ilmanen veja a Seção 3.1 de (HOFFMAN et al., 2021).

A seguir, considerando a métrica de Ilmanen, expressaremos alguns resultados importantes (decorrentes de (SOLOMON, 1986, p. 75)) os quais serão utilizados como ferramentas para a construção dos sólitos de nosso interesse.

Proposição 4.4. *Seja $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave sobre um domínio de $\mathbb{R}^2$. Suponha que $\Sigma := \text{graf}(u)$ é um sólito de translação em $\mathbb{R}^3$. Se Φ é qualquer outra superfície dentro do cilindro $\mathcal{C}(\Omega) = \{x + te_3 \mid x \in \bar{\Omega}, t \in \mathbb{R}\}$ tal que $\partial\Phi = \partial\Sigma$, então*

$$\text{area}_g(\Sigma) \leq \text{area}_g(\Phi).$$

Lema 4.2. *Se U é um conjunto limitado, convexo e aberto em $\mathbb{R}^3$ disjunto de $\bar{\Sigma} \setminus \Sigma$, então*

$$\text{area}_g(\Sigma \cap U) \leq \frac{1}{2} \text{area}_g(\partial U).$$

Observação 4.3. *$J := \langle \nu, e_3 \rangle \geq 0$ é um g -campo de Jacobi positivo, uma vez que, pelo Lema 2.1 de (MARTÍN; SAVAS-HALILAJ; SMOCZYK, 2015), temos*

$$\Delta J + \langle \nabla J, e_3 \rangle + |A|^2 J = 0,$$

onde $|A|$ denota a norma da segunda forma fundamental.

Note que a métrica de Ilmanen não é completa. De fato, temos $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-z/2} dz < +\infty$, para todo $t_0 \in (0, +\infty)$. Destacamos ainda que reflexões com respeito a planos verticais e rotações em torno de retas verticais são isometrias da métrica de Ilmanen. Portanto, podemos estender as superfícies g -mínimas por reflexão de Schwarz, isto é, por uma rotação de 180° em torno de retas verticais.

A menos que digamos o contrário, no que segue, g denotará a métrica de Ilmanen.

4.4.1 Princípio do máximo

A métrica de Ilmanen nos permite caracterizar um sólito de translação em $\mathbb{R}^3$ (na métrica usual) como uma hipersuperfície mínima em $(\mathbb{R}^3, g)$. Mais ainda, por (3.2), podemos ver tal objeto como uma hipersuperfície real analítica em $(\mathbb{R}, g)$. Para mais detalhes a esse respeito, veja (STEIN; SHAKARCHI, 2010, p. 9, p. 27).

Desse modo, nesta subseção apresentamos uma versão geométrica do clássico princípio do máximo. Tal resultado, também conhecido na literatura como princípio da tangência, nos diz que dois sólitons de translação mergulhados e distintos entre si não podem se “tocar”, seja no interior, seja no bordo.

Teorema 4.4 (Teorema 2.1 de (MARTÍN; SAVAS-HALILAJ; SMOCZYK, 2015)). *Sejam Σ_1 e Σ_2 sólitons de translação mergulhados em $\mathbb{R}^3$ com bordos $\partial\Sigma_1$ e $\partial\Sigma_2$.*

- (a) *(Princípio no interior) Suponha que existe um ponto p em comum no interior tanto de Σ_1 quanto de Σ_2 ($p \in (\text{int } \Sigma_1) \cap (\text{int } \Sigma_2)$), onde os respectivos espaços tangentes coincidem e tal que Σ_1 está contido em um dos lados de Σ_2 . Então Σ_1 coincide com Σ_2 .*
- (b) *(Princípio no bordo) Suponha que os bordos $\partial\Sigma_1$ e $\partial\Sigma_2$ estão contidos no mesmo hiperplano Π e que a interseção de Σ_1 e Σ_2 com Π seja transversal. Assuma que Σ_1 está contido em um dos lados de Σ_2 e que existe um ponto em comum entre $\partial\Sigma_1$ e $\partial\Sigma_2$ onde as superfícies Σ_1 e Σ_2 têm o mesmo plano tangente. Então Σ_1 coincide com Σ_2 .*

4.4.2 Compacidade para sólitons de translação

Finalmente, a partir da Subseção 2.3.1, e dos resultados obtidos por (ILMANEN, 1994), podemos estender os resultados de compacidade para o contexto de sólitons de translação.

Observação 4.4. *Seja $\{\Sigma_i\}_i$, $\{\Gamma_i := \overline{\Sigma_i} \setminus \Sigma_i\}_i$ e $\{\Omega_i\}_i$ sequências de exemplos satisfazendo as hipóteses da Proposição 4.3. Suponha que $\{\Gamma_i\}_i$ converge para uma curva poligonal Γ . Então, pelos resultados de compacidade conforme Subseção 2.3.1, $\{\Sigma_i\}_i$ converge suavemente, a menos de subsequência, em $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$ para um sólito de translação suave Σ . Pelo Lema 4.2, Σ é mergulhada. Seja Σ_c uma componente conexa de Σ . Note que translações verticais dão origem a um g -campo de Jacobi em Σ (4.3) que não muda de sinal (uma vez que Σ é um limite de gráficos). Pelo princípio do máximo forte, se tal campo zera em qualquer ponto de Σ_c , ele deve zera em todos os pontos de Σ_c . Neste caso, a equação do sólito de translação implica que Σ_c é plano. Então, cada componente conexa Σ_c de Σ deve ser, ou um gráfico, ou plana e vertical.*

5 CONSTRUÇÃO

Baseados na superfície mínima de Scherk, descrita na Seção 2.1, apresentamos neste capítulo a construção, via método variacional, presente em (HOFFMAN; MARTÍN; WHITE, 2022b), de quatro sólitons de translação: o sólito de translação de Scherk, o scherknoide, o sólito de translação tipo helicóide e o *pitchfork*.

O primeiro e o terceiro sólitons estão associados à uma faixa de largura menor do que π , e como já vimos, ambos aparecem no contexto de superfícies mínimas tendo assim comportamentos já detalhados na literatura. Já o segundo e quarto sólitons, não possuem associações com as superfícies mínimas já conhecidas e são construídos a partir de faixas com largura maior do que ou igual à π .

Nesse sentido, considerando a notação da Seção 2.3.3, veremos que o scherknoide, quando $z \rightarrow +\infty$, é assintótico à uma família de planos verticais, paralelos entre si: $\{y = nw\}$, $n \in \mathbb{N}$, mas quando $z \rightarrow -\infty$ é assintótico a um único plano vertical, $y = x \tan \alpha$, e quando se afasta do plano $y = x \tan \alpha$, o scherknoide se comporta como uma família periódica de *tilted grim reapers*, cada um com largura w . Quanto ao *pitchfork*, trata-se de um sólito de translação contido na faixa $\{|y| < w\}$, é assintótico aos planos $\{y = -w\}$, $\{y = 0\}$ e $\{y = w\}$, quando $z \rightarrow +\infty$ e ao plano $\{y = 0\}$ quando $z \rightarrow -\infty$.

O ponto de partida será dado pela construção das chamadas partes fundamentais. Em seguida, tomaremos limite sobre um dos parâmetros usados na construção e evidenciaremos algumas questões acerca das reflexões de Schwarz. Na derradeira parte, apresentamos o sólito de translação tipo helicóide e o *pitchfork*.

A princípio, apresentamos um teorema de existência de sólitons de translação no contexto de variedades médias convexas.

Teorema 5.1 (Existência de sólitons de translação médios convexas). *Seja Ω o interior de um polígono convexo em $\mathbb{R}^2$ e V o conjunto de vértices do polígono. Considere $\tilde{u} : (\partial\Omega) \setminus V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que é constante (finita) em cada componente conexa de seu domínio, e seja Γ a curva simples fechada obtida adicionando segmentos verticais (quando necessário) ao gráfico de $\tilde{u}$. Então existe um único disco g -mínimo mergulhado Σ com $\partial\Sigma = \Gamma$ e tal que $\Sigma \setminus \Gamma$ é gráfico de uma função suave $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demonstração. Inicialmente consideramos a região fechada K acima de um *bowl soliton* e abaixo de um plano horizontal, onde tais sólito e plano são escolhidos de modo que K

contenha Γ . Desse modo, $K \cap (\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ é compacto g -médio convexo. Então, pela solução mergulhada de Meeks-Yau (Teorema 2.4), existe um disco Σ com área g -mínima, com bordo Γ e que é uma variedade mergulhada com bordo suave, exceto nos vértices de Γ .

Para mostrarmos que $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ é um gráfico, é suficiente mostrar que o plano tangente à Σ não é vertical qualquer que seja o ponto considerado. Nesse sentido, suponha por absurdo que $\nu = (a, b, 0) \neq (0, 0, 0)$ é normal à Σ em um ponto $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$. Então, $h : (x, y, z) \in \Sigma \mapsto ax + by$ é uma função harmônica não constante no disco Σ com um ponto crítico em p , então pela Proposição 2.3 e pela Observação 2.1,

$$\Gamma \cap \{q \in \mathbb{R}^3 \mid h(q) > h(p)\} \quad (5.1)$$

tem pelo menos duas componentes conexas. Mas, pela convexidade da região poligonal Ω , (5.1) é conexo. Contradição, como queríamos.

Por fim, resta provar a unicidade. Considere $p \in \Gamma$ um vértice de Σ (onde um segmento vertical intersecta um segmento horizontal). Naturalmente, p está sobre um dos vértices do polígono $\partial\Omega$. Como $\Sigma \subset \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$, vemos que o cone tangente à Σ em p deve ser um quarto de plano (e não três quartos de plano, por exemplo). Assim, uma reflexão de Schwarz em torno do segmento vertical gera uma superfície $\hat{\Sigma}$ cujo cone tangente em p é um semiplano. Então $\hat{\Sigma}$ é suave em p . Note também que, no ponto p , Σ é tangente a uma face de $\Omega \times \mathbb{R}$.

Agora, suponha por absurdo que a unicidade falha, isto é, existem dois discos g -mínimos mergulhados distintos, Σ e Φ . A menos de renomear tais discos, podemos assumir que Σ contém um ponto que está acima de Φ .

Tome $z \in \mathbb{R}$ suficientemente grande de modo que $\Phi(z) := \Phi + (0, 0, z)$ seja disjunto de Σ . Agora, reduzimos o valor de z para um valor z_0 de modo que $\Phi(z_0)$ toca a superfície Σ pela primeira vez. Como sabemos que existe um ponto em Σ que está acima de Φ , segue que $z_0 > 0$. Pelo princípio do máximo 4.4(a), $\Phi(z_0)$ não pode tocar Σ em um ponto interior.

Então, $\Phi(z_0)$ e Σ devem ser tangentes em um ponto p do bordo. Note que p deve estar em um segmento vertical de Γ . Com isso, temos os seguintes casos:

- p não é um vértice de $\partial\Phi(z_0)$ ou de $\partial\Sigma$.

O que não pode ocorrer pelo princípio do máximo 4.4(b).

- p é um vértice de $\partial\Phi(z_0)$ mas não de $\partial\Sigma$.

Nesse caso, pelo que discutimos acima, $\Phi(z_0)$ é tangente à $\Omega \times \mathbb{R}$ em p . Mas, pelo princípio do máximo 4.4(b), Σ não pode ser tangente à $\Omega \times \mathbb{R}$ em p . Contradição.

- p é um vértice de $\partial\Sigma$ mas não de $\partial\Phi(z_0)$.

Análogo ao caso anterior.

- p é um vértice de $\partial\Phi(z_0)$ e também de $\partial\Sigma$.

Nesse caso, $\Phi(z_0)$ deveria ser tangente, em p , a uma face B de $\Omega \times \mathbb{R}$, enquanto que, neste mesmo ponto p , Σ deveria ser tangente a uma face adjacente à B . Com isso, Σ e $\Phi(z_0)$ não poderiam ser tangentes entre si em p . Contradição.

□

5.1 PARTE FUNDAMENTAL DO SÓLITON DE TRANSLAÇÃO DE SCHERK

Teorema 5.2 (Existência da parte fundamental do sóliton de translação de Scherk). *Para todo $0 < \alpha < \pi$ e $0 < w < \pi$, existe $0 < L_{\alpha,w} < +\infty$ para o qual é possível determinar um sóliton de translação $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\alpha,w}$ tal que $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ é gráfico de uma função $u : P(\alpha, w, L_{\alpha,w}) \rightarrow \mathbb{R}$, cujos valores no bordo são:*

$$\begin{cases} u \equiv +\infty, & \text{em } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ u \equiv -\infty, & \text{em } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \end{cases}. \quad (5.2)$$

E de modo que o vetor $v_{\alpha/2} := (\cos \alpha/2, \sin \alpha/2, 0)$ é tangente à $\mathcal{D}$ na origem.

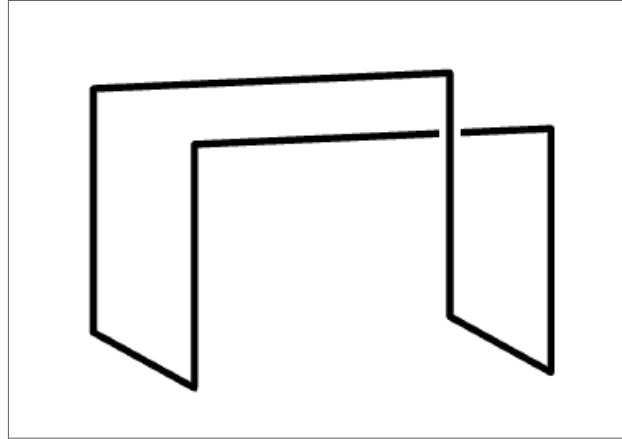
Demonstração. Fixe $\alpha \in (0, \pi)$ e $w \in (0, \pi)$. Para cada $L > 0$ e $h > 0$ considere, pelo Teorema 5.1,

$$\tilde{u}_L^h : \tilde{P}(\alpha, w, L) \rightarrow \mathbb{R}$$

o único sóliton de translação cujos valores no bordo são: $\tilde{u}_L^h \equiv 0$ em $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$ e $\tilde{u}_L^h \equiv -h$ em $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$. Aqui $\tilde{P}(\alpha, w, L)$ corresponde à translação de $P(\alpha, w, L)$ de modo que o ponto central esteja na origem. Além disso, denote por $\tilde{\Sigma}_L^h$ o gráfico de $\tilde{u}_L^h$.

Considerando S o conjunto dos quatro vértices de $\tilde{P}(\alpha, w, L)$, note que $\partial\tilde{\Sigma}_L^h$ consiste em oito segmentos de reta: $\tilde{\Gamma}_2 \times \{z = 0\}$, $\tilde{\Gamma}_4 \times \{z = 0\}$, $\tilde{\Gamma}_1 \times \{z = -h\}$, $\tilde{\Gamma}_3 \times \{z = -h\}$ e nos quatro segmentos verticais $S \times \{-h \leq z \leq 0\}$. Lembre que $\tilde{\Gamma}_i$ denota a translação de Γ_i , para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Uma vez que $\tilde{\Sigma}_L^h$ é sóliton de translação na métrica usual de $\mathbb{R}^3$ temos, pela Seção 4.4, que este trata-se de um disco cuja área é g -mínima, onde g é a métrica de Ilmanen. Por unicidade, tal disco é invariante por uma reflexão de Schwarz em torno do eixo z .

Figura 6 – Bordo de $\tilde{\Sigma}_L^h$ 

Fonte: Autor

Afirmamos que

$$D\tilde{u}_L^h(0,0) = 0. \quad (5.3)$$

Do contrário, teríamos, por exemplo, $\partial_x \tilde{u}_L^h(0,0) > 0$. Assim, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, teríamos

$$\tilde{u}_L^h(-\varepsilon, 0) < \tilde{u}_L^h(0, 0) < \tilde{u}_L^h(\varepsilon, 0)$$

o que vai de encontro à invariância de Σ_L^h por uma rotação de π radianos em torno do eixo z . Procedendo com uma argumentação análoga, concluimos que não podemos ter $\partial_x \tilde{u}_L^h(0,0) < 0$ ou $\partial_y \tilde{u}_L^h(0,0) \neq 0$.

Quando $L \rightarrow 0$, a g -área de $\tilde{\Sigma}_L^h$ tende a zero. Afirmamos que a distância de $(0,0, \tilde{u}_L^h(0,0))$ a $\partial\tilde{\Sigma}_L^h$ tende a zero.

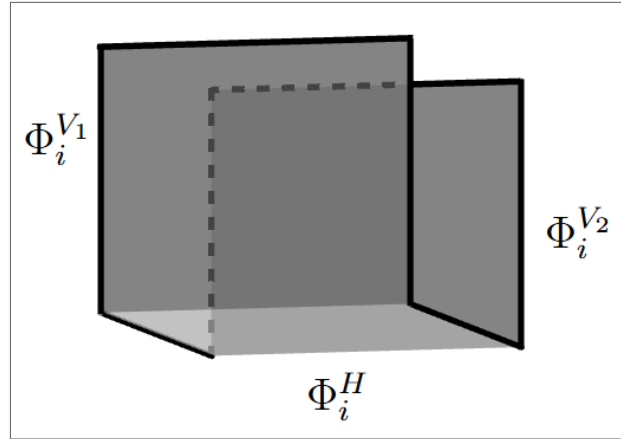
De fato, suponha por absurdo que isso não ocorre, ou seja, suponha que existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\lim_{L \rightarrow 0} \text{dist}((0,0, \tilde{u}_L^h(0,0)), \partial\tilde{\Sigma}_L^h) > \varepsilon.$$

Seja $\{L_i\}_i$ uma sequência de termos positivos tais que $L_i \rightarrow 0$ e defina $p_i := (0,0, \tilde{u}_{L_i}^h(0,0))$. Considere a superfície $\Phi_i := \Phi_{L_i}^h$, conforme a Figura 7 e note que $\partial\Phi_i = \partial\tilde{\Sigma}_{L_i}^h$.

Denote por $\Phi_i^{V_1}, \Phi_i^{V_2}$ as faces verticais de Φ_i e por Φ_i^H a face horizontal. Observe que, na métrica de Ilmanen, temos

$$\text{area}_g(\Phi_i^{V_1}) = \int_{-h}^0 \int_{-L_i/2-w/(2\tan\alpha)}^{L_i/2-w/(2\tan\alpha)} e^z \, dx \, dz = (1 - e^{-h})L_i$$

Figura 7 – Superfície Φ_i 

Fonte: Autor

e

$$\text{area}_g(\Phi_i^H) = \int_{-w/2}^{w/2} \int_{-L_i/2+y \cot \alpha}^{L_i/2+y \cot \alpha} dx dy = wL_i$$

Desse modo, sendo $\tilde{\Sigma}_{L_i}^h$ g -minimizante de área, temos que

$$\text{area}_g(\tilde{\Sigma}_{L_i}^h) \leq 2 \text{area}_g(\Phi_i^{V1}) + \text{area}_g(\Phi_i^H) = 2(1 - e^{-h})L_i + wL_i.$$

Assim, temos

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \text{area}_g(\tilde{\Sigma}_{L_i}^h) \leq 0$$

Por outro lado, como consequência da fórmula da monotonicidade (2.3), considerando $0 < \eta < \varepsilon/2$, temos

$$\text{area}_g(\tilde{\Sigma}_{L_i}^h \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_i)) \geq e^{-h+\eta} \text{area}(\tilde{\Sigma}_{L_i}^h \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_i)) \geq 2\pi \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 C(\varepsilon) e^{-h+\eta},$$

com $C(\varepsilon) \geq 1$ constante que independe de i . Tomando novamente o limite em i , chegamos à um absurdo, como queríamos. Com isso,

$$\lim_{L \rightarrow 0} \tilde{u}_L^h(0, 0) = -h. \quad (5.4)$$

Por outro lado, quando $L \rightarrow +\infty$ temos que $\tilde{u}_L^h(0, 0)$ não pode decrescer indefinidamente, isto é,

$$\lim_{L \rightarrow +\infty} \tilde{u}_L^h(0, 0) > -\infty. \quad (5.5)$$

De fato, suponha por absurdo que existe uma sequência $\{L_i\}_i$ convergindo para $+\infty$ tal que $\tilde{u}_{L_i}^h(0, 0)$ converge para $-\infty$. Logo, a menos de subsequência, o gráfico de $\tilde{u}_{L_i}^h(x, y)$ —

$\tilde{u}_{L_i}^h(0,0)$, com $(x,y) \in \tilde{P}(\alpha, w, L)$, converge para um s3lton de transla33o completo $\tilde{\Sigma}^h$ (pela Se33o 2.3.1) contido em $\{-w/2 \leq y \leq w/2\}$. Por (5.3), o plano tangente a $\tilde{\Sigma}^h$ na origem 3 horizontal. Naturalmente, a componente conexa contendo a origem, a qual denotaremos por $\tilde{\Sigma}_0^h$, n3o pode ser plana e vertical. Ent3o, pela Observa33o 4.4, $\tilde{\Sigma}_0^h$ deve ser gr3fico. Como $\tilde{\Sigma}^h$ 3 completo, segue que $\tilde{\Sigma}_0^h$ 3 completo. Ou seja, $\tilde{\Sigma}_0^h$ seria um s3lton de transla33o gr3fico completo contido em uma faixa com largura menor do que π (uma vez que $w < \pi$), contrariando o Teorema de Classifica33o 4.3. E esta contradi33o prova o que quer3amos.

Agora provaremos um resultado que nos mostra mais especificamente o comportamento de $\tilde{u}_L^h(0,0)$ para L suficientemente grande.

Mais uma vez, tomando um limite suave subsequencial em $\tilde{u}_L^h$, com rela33o 3 L , obtemos um s3lton de transla33o suave $\tilde{\Sigma}^h := \text{graf}(\tilde{u}^h)$, onde $\tilde{u}^h := \lim_{L \rightarrow +\infty} \tilde{u}_L^h$, contido em $\{-w/2 \leq y \leq w/2\}$. Nesse caso, $\partial\tilde{\Sigma}^h$ consiste nas retas $\{y = -w/2, z = 0\}$ e $\{y = w/2, z = 0\}$. Assim, $\tilde{\Sigma}^h$ tem valor nulo em todos os pontos do bordo.

Pelo Teorema 3.2 de (HOFFMAN et al., 2019), $\tilde{\Sigma}^h$ depende apenas da segunda vari3vel y , e portanto, 3 invariante por transla33es na dire33o de e_1 . A partir do Teorema de Classifica33o 4.3, vemos que o *grim reaper* 3 o 3nico s3lton de transla33o gr3fico completo que 3 invariante por transla33es na dire33o de e_1 .

Com isso, seja $\mathcal{G} : \mathbb{R} \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ a parametriza33o do *grim reaper* dada por $\mathcal{G}(x, y) = (x, y, -\log \cos y)$. Considerando uma transla33o por $-\log \cos(w/2) > 0$ unidades no sentido $-e_3$, vemos que $\tilde{\mathcal{G}} := \mathcal{G} + (\log \cos(w/2))e_3$ intersecta $\partial\tilde{\Sigma}^h$; mais do que isso, $\partial\tilde{M}^h \subset \tilde{\mathcal{G}}$. Pelo princ3pio da tang3ncia 4.4 (a), se tais hipersuperf3cies s3o distintas, ent3o elas n3o podem se intersectar no interior da faixa $\mathbb{R} \times (-w/2, w/2)$. Assim, $\tilde{\Sigma}^h$ 3 limitado superiormente por $\tilde{\mathcal{G}}$.

Agora, considerando uma parametriza33o do *grim reaper* $\mathcal{G}$ deslocado por $t > 0$ unidades na dire33o de $-e_3$, com t suficientemente grande de modo que $-t < \tilde{u}^h(0,0)$ (podemos considerar tal t uma vez que vale (5.5)), pelo mesmo argumento acima, vemos que

$$\lim_{t \rightarrow \log \cos(w/2)} \mathcal{G} + te_3 = \tilde{\mathcal{G}} \text{ limita } \tilde{\Sigma}^h \text{ inferiormente.}$$

Isso mostra que $\tilde{\Sigma}^h$ trata-se, na verdade, da restri33o da hipersuperf3cie $\tilde{\mathcal{G}}$ sobre a faixa $\mathbb{R} \times (-w/2, w/2)$. Ou seja,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \tilde{u}_L^h(x, y) = -\log \cos y + \log \left(\cos \left(\frac{w}{2} \right) \right). \quad (5.6)$$

Observe que o lado direito da 3ltima igualdade n3o depende de h .

Fixado $h > 0$, por (5.4) e (5.6), vemos que $\lim_{L \rightarrow 0} \tilde{u}_L^h(0, 0) = -h$ e $\lim_{L \rightarrow +\infty} \tilde{u}_L^h(0, 0) = \log \cos(w/2)$. Tomando h suficientemente grande, de modo que $-h/2 < \log \cos(w/2)$, segue que existe $L(h)$ tal que $u_{L(h)}^h(0, 0) = -h/2$.

Defina

$$\varphi^{h_i}(x, y) := \tilde{u}_{L(h_i)}^{h_i}(x, y) - \tilde{u}_{L(h_i)}^{h_i}(0, 0)$$

para todo $(x, y) \in \tilde{P}(\alpha, w, L)$, com $\{h_i\}_i$ sequência tendendo à $+\infty$. Então existe uma subsequência $\{h_k := h_{i_k}\}_k$ tal que $L(h_k) \rightarrow \tilde{L} \in [0, \infty]$ e $\text{graf}(\varphi^{h_k})$ converge suavemente para um sólido de translação completo $\mathcal{D}$.

Como o plano tangente à $\mathcal{D}$ na origem é horizontal, temos que $\mathcal{D}_0 \setminus \partial\mathcal{D}_0$ é gráfico de uma função suave $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω aberto de $\tilde{P} := \tilde{P}(\alpha, w, \tilde{L})$ (pela Observação 4.4), onde $\mathcal{D}_0$ denota a componente conexa de $\mathcal{D}$ contendo a origem.

Se $\tilde{L} = 0$, deveríamos ter $\mathcal{D}$ (e portanto $\mathcal{D}_0$) plano e vertical. Se $\tilde{L} = +\infty$, então $\mathcal{D}_0$ seria um sólido de translação gráfico completo contido em uma faixa com largura menor do que π contrariando o Teorema de Classificação 4.3. Portanto, $0 < \tilde{L} < +\infty$.

Por construção, ao longo de $\tilde{\Gamma}_2 \cup \tilde{\Gamma}_4$ temos $\varphi_{L(h_k)}^{h_k} \equiv 0 - (-h_k/2) = h_k/2$. Além disso, $\varphi_{L(h_k)}^{h_k} \equiv -h_k - (-h_k/2) = -h_k/2$ em $\tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_3$. Desse modo, quando $h_k \rightarrow +\infty$, temos as marcações no bordo conforme em (5.2). Com isso, $\partial\mathcal{D} = \tilde{S} \times \mathbb{R}$, onde $\tilde{S}$ denota o conjunto dos vértices de $\tilde{P}$.

Se $\partial\mathcal{D}_0 = \emptyset$, $\mathcal{D}_0$ deveria ser um gráfico, completo, definido sobre uma faixa menor do que π . O que contraria o teorema de classificação 4.3.

Logo $\partial\mathcal{D}_0$ deve conter alguma componente conexa de $\partial\mathcal{D}$. Sem perda de generalidade, assumamos que $\partial\mathcal{D}_0$ contém o vértice superior direito de $\tilde{P}$. Isso implica que, $u \equiv +\infty$ em $C^s := \{(x, y^s(x)) \in \Omega\}$ onde $y^s(x) := \sup\{y \mid (x, y) \in \Omega\}$ e $u \equiv -\infty$ em $C^d := \{(x^d(y), y) \in \Omega\}$ onde $x^d(y) := \sup\{x \mid (x, y) \in \Omega\}$. Pelo Lema 2.4, C^s e C^d devem ser segmentos de reta. Se C^s não fosse $\tilde{\Gamma}_2$, então C^s intersectaria o eixo de simetria de $\tilde{P}$ em um ponto V distinto do vértice superior esquerdo de $\tilde{P}$. Assim, V estaria conectando C^s com $\tilde{C}^d$, que nesse sentido denota a reflexão de Schwarz de C^d . Com isso, teríamos $V \times \mathbb{R} \subset \partial\mathcal{D}_0$. Um absurdo, pois $V \notin S$, e portanto $V \times \mathbb{R} \not\subset \partial\mathcal{D}$.

Com isso, $C^s \equiv \tilde{\Gamma}_2$ e pelo mesmo argumento devemos ter $C^d \equiv \tilde{\Gamma}_3$. Desse modo, aplicada uma reflexão de Schwarz, vemos que Ω coincide com $\tilde{P}$. Portanto, $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$.

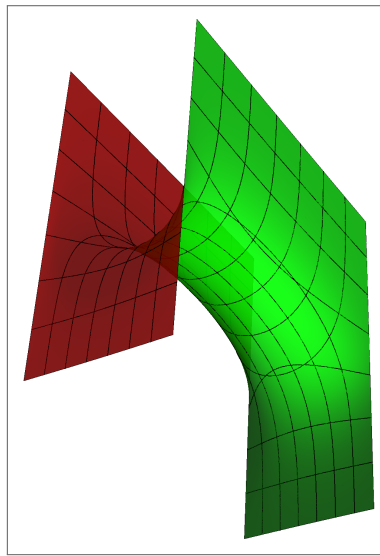
Quanto ao vetor $v_{\alpha/2}$ tangente à $\mathcal{D}$ na origem, a demonstração seguirá conforme a prova do Teorema 5.5. □

Mais ainda, a partir do trabalho (JENKINS; SERRIN, 1966), no contexto de sólitons de translação temos a seguinte desigualdade:

$$0 < L - \frac{w}{\sin \alpha} < \frac{1}{2}wL. \quad (5.7)$$

Definição 5.1 (Parte fundamental e função sólton de translação de Scherk). *Um sólton de translação $\mathcal{D}_{\alpha,w}$ conforme o descrito no Teorema 5.2 é chamado de **parte fundamental do sólton de translação de Scherk**.*

Figura 8 – Parte fundamental do sólton de translação de Scherk $\mathcal{D}_{\pi/2,\pi/2}$



Fonte: Adaptado de (HOFFMAN; MARTÍN; WHITE (2022b)).

A seguir, iremos apresentar algumas propriedades da parte fundamental do sólton de translação de Scherk. Contudo, antes precisamos analisar importantes comportamentos no que diz respeito a este sólton.

Teorema 5.3 (Dependência contínua e comportamento de $L_{\alpha,w}$). *Sejam $\mathcal{D}_{\alpha,w}$ a parte fundamental do sólton de translação de Scherk, e $L_{\alpha,w}$ conforme o Teorema 5.2. Então,*

- (a) $\mathcal{D}_{\alpha,w}$ e $L_{\alpha,w}$ dependem continuamente de $(\alpha, w) \in (0, \pi)^2$.
- (b) Se $\{\alpha_i\}_i$ em $(0, \pi)$ converge para $\alpha \in (0, \pi)$ e $\{w_i\}_i$ em $(0, \pi)$ converge para π , então $L_{\alpha_i, w_i} \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Assuma que $\{(\alpha_i, w_i)\}_i$ em $(0, \pi)^2$ converge para (α, w) em $(0, \pi)^2$. Pela desigualdade (5.7), temos

$$\frac{w_i}{\sin \alpha_i} < L_i,$$

onde $L_i := L_{\alpha_i, w_i}$. Então, a menos de subsequência, podemos assumir que L_i converge para um limite L com $0 < w/\sin \alpha \leq L \leq +\infty$. Seja $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{\alpha_i, w_i}$. Considere p_i o centro do paralelogramo $P_i := P(\alpha_i, w_i, L_i)$ e (p_i, z_i) o ponto correspondente em $\mathcal{D}_i$. Se $L = +\infty$, então $\mathcal{D}_i - (p_i, z_i)$ deveria convergir para um sólon de translação completo Σ em $\mathbb{R} \times [-w/2, w/2]$. Como o plano tangente à Σ na origem é horizontal, Σ deveria ser um gráfico, o que contraria o teorema de classificação [4.3](#) uma vez que $w < \pi$. Com isso, $L < +\infty$ e assim, P_i converge para um paralelogramo $P := P(\alpha, w, L)$.

Considere $\tilde{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}_i - (0, 0, z_i)$. Note que o plano tangente à $\tilde{\mathcal{D}}_i$ em $(p_i, 0)$ é horizontal. Assim, a menos de subsequência, podemos assumir que $\{\mathcal{D}_i\}_i$ e $\{\tilde{\mathcal{D}}_i\}_i$ convergem suavemente para limites $\mathcal{D}$ e $\tilde{\mathcal{D}}$.

Agora, considere p o centro do paralelogramo P . Uma vez que o plano tangente à $\tilde{\mathcal{D}}$ em $(p, 0)$ é horizontal, a componente $\tilde{\Sigma}_0$ de $\tilde{\mathcal{D}} \setminus \partial\tilde{\mathcal{D}}$ contendo $(p, 0)$ é gráfico de uma função $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Pelo Lema [2.4](#), Ω é um subconjunto conexo e aberto de P contendo o ponto p e, além disso, cada componente de $(\partial\Omega) \setminus S$ é um segmento de reta, onde S denota o conjunto dos vértices de P . Logo, devemos ter $\Omega = P$.

Uma vez que o vetor $(\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0)$ é tangente a $\mathcal{D}$ na origem, temos que $\mathcal{D}$ contém pontos no interior de $P \times \mathbb{R}$. Agora, observe que se $\mathcal{D}$ não fosse uma translação vertical de $\tilde{\mathcal{D}}$, então poderíamos encontrar uma translação vertical $\tilde{\mathcal{D}} + (0, 0, c)$ de $\tilde{\mathcal{D}}$ que possui uma interseção transversal não vazia com $\mathcal{D}$. Mas, para $i \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, $\tilde{\mathcal{D}}_i + (0, 0, c)$ intersectaria $\mathcal{D}_i$ transversalmente, o que não pode ocorrer, pois $\tilde{\mathcal{D}}_i$ é uma translação vertical de $\mathcal{D}_i$. Assim, $\mathcal{D}$ é uma translação vertical de $\tilde{\mathcal{D}}$, de modo que $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ é o gráfico de uma função $u : P \rightarrow \mathbb{R}$. Com isso, pela convergência suave,

- A fronteira de $\mathcal{D}$ são as quatro retas verticais sobre os vértices de P .
- Os valores de u na fronteira são $+\infty$ em $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$ e $-\infty$ em $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$.
- O vetor $(\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0)$ é tangente a $\mathcal{D}$ na origem.

Portanto, $L = L(\alpha, w)$ e $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\alpha, w}$, o que prova o item [\(a\)](#).

Agora provaremos item [\(b\)](#). Suponha por absurdo que tal afirmação é falsa. Então, a menos de subsequência, os $L_i := L(\alpha_i, w_i)$ convergem para um limite finito L . Como na prova do item [\(a\)](#), obtemos a existência de um sólon de translação $u : P(\alpha, \pi, L) \rightarrow \mathbb{R}$ cujos valores de bordo são $+\infty$ em $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$ e $-\infty$ em $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$. Mas, de acordo com o teorema de classificação [4.3](#), tal sólon de translação não existe. Isso prova o item [\(b\)](#). $\square$

Corolário 5.1. *Seja $\mathcal{D}_{\alpha,w}$ a parte fundamental do sóliton de translação de Scherk e considere $S_{\alpha,w}$ a superfície obtida a partir de sucessivas reflexões de Schwarz aplicadas à $\mathcal{D}_{\alpha,w}$. Então, $S_{\alpha,w}$ depende continuamente de $(\alpha, w) \in (0, \pi)^2$.*

Os próximos resultados são voltados para o estudo dos pontos críticos.

Definição 5.2 (Posição geral). *Sejam Ω_1 e Ω_2 duas regiões poligonais abertas convexas. Dizemos que tais polígonos estão em **posição geral** quando nenhum vértice de um deles está contido no bordo do outro, e cada interseção dos seus lados é transversal (não necessariamente perpendicular).*

Para os nossos propósitos, é conveniente considerar o seguinte conjunto:

Sejam Ω_1 e Ω_2 regiões (como na definição anterior) em posição geral, denote por $\mathcal{P}$ o conjunto consistindo nos seguintes pontos:

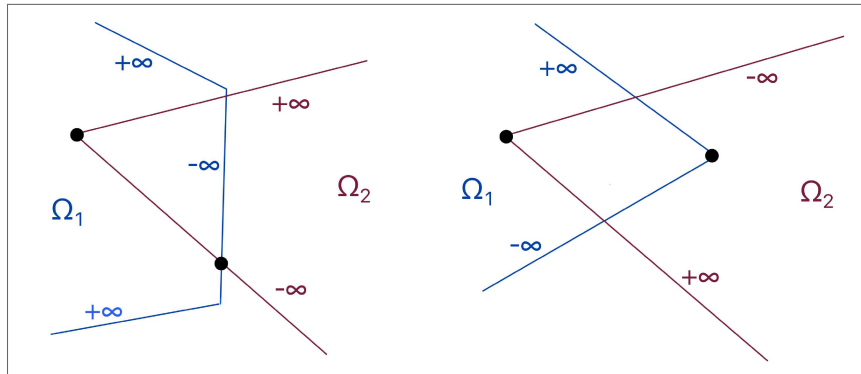
- (i) os vértices de Ω_1 contidos no interior de Ω_2 , e vice-versa; e
- (ii) os pontos de interseção entre uma aresta de Ω_1 e uma aresta de Ω_2 cujos valores de bordo de u_1 e u_2 em tais arestas coincidem (isto é, ambas valem $+\infty$ ou ambas valem $-\infty$).

Proposição 5.1. *Sejam Ω_1 e Ω_2 regiões poligonais abertas e convexas em posição geral tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ é limitada e não vazia. Considere Σ_i sóliton de translação suave e propriamente mergulhado cujo bordo consiste em retas verticais, de modo que $\Sigma_i \setminus \partial\Sigma_i$ é gráfico de uma função suave $u_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$, com $i \in \{1, 2\}$ (nestas condições isso significa que os valores de bordo de u_i são, alternadamente, $+\infty$ e $-\infty$). Se $\mathcal{P}$, definido como antes, tem menos do que quatro pontos, então $\#\mathcal{P} = 2$. Mais ainda, cada conjunto de nível de $u_1 - u_2$ é uma curva suave conectando esses dois pontos, e $u_1 - u_2$ não tem pontos críticos.*

Demonstração. Considere um conjunto de nível Q de $u_1 - u_2$ em $\Omega_1 \cap \Omega_2$. A menos de adição de uma constante à u_1 , podemos assumir que Q é o conjunto de nível onde $u_1 - u_2 = 0$. Isto é, Q consiste nos pontos onde os gráficos de u_1 e u_2 se intersectam.

Note que, se $p \in \mathcal{P}$ satisfaz (i), isto é, p é um vértice de Ω_1 contido no interior de Ω_2 , então $\partial\Sigma_1$ (uma reta vertical) intersecta o gráfico de u_2 . Logo, pelo comportamento transversal de Σ_1 sobre o ponto p temos que, sobre pontos situados nas proximidades do ponto p , a interseção do gráfico de u_1 com o gráfico de u_2 consiste em uma curva. Logo

Figura 9 – Regiões em posição geral

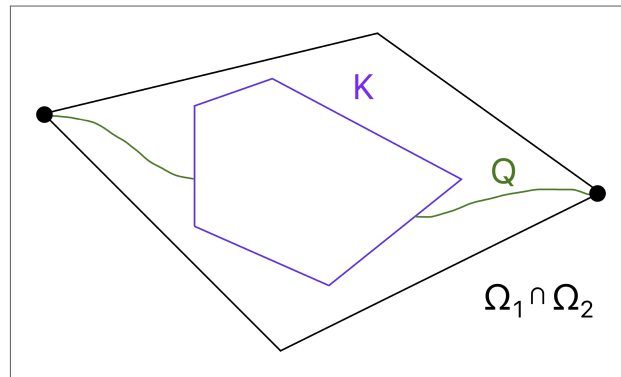


Fonte: Autor

a projeção de tal curva sobre o plano, está contida no conjunto Q , também é uma curva. Claramente, o mesmo vale considerando p vértice de Ω_2 .

Se $p \in \mathcal{P}$ satisfaz (ii), isto é, $p \in (\partial\Omega_1) \cap (\partial\Omega_2)$ com $u_1(p) = u_2(p) = +\infty$, então o gráfico de u_1 intersecta o gráfico de u_2 sobre pontos nas proximidades de p . Novamente pelo comportamento transversal de Σ_1 sobre o ponto p (note que Σ_2 também apresenta tal comportamento transversal), como argumentado antes, segue que Q consiste em uma curva nas proximidades de p . Claramente, o mesmo vale considerando $u_1(p) = u_2(p) = -\infty$.

Figura 10 – Conjunto de nível menos um conjunto compacto



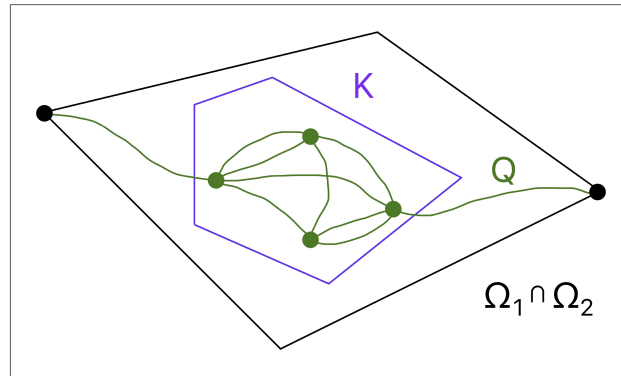
Fonte: Autor

Desse modo, podemos considerar um compacto $K \subset (\Omega_1 \cap \Omega_2)$ suficientemente grande, de modo que $Q \setminus K$ consiste em $\#\mathcal{P}$ curvas.

Por estarmos tratando de dois sólitons de translação que se intersectam, devemos ter um comportamento de “rede” (ou “malha”) cujos “nós” dessa rede são pontos de contato de ordem, pelo menos 1 (ou seja, pontos onde $u_1 = u_2$ e $Du_1 = Du_2$) e, portanto, pela Proposição 17 de (LAWSON JR., 1980), cada nó tem valença v (conforme a Definição 2.4)

maior do que ou igual à $2k + 2$, onde k denota a ordem do contato. No nosso caso $k = 1$, e assim $v \geq 4$.

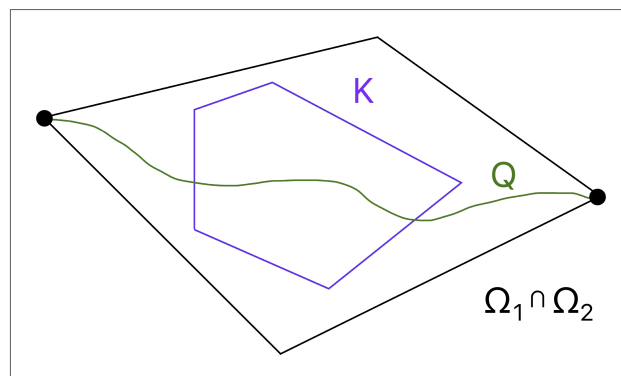
Figura 11 – Possível comportamento da “malha”



Fonte: Autor

Por outro lado, esta rede não pode ser composta por laços fechados, uma vez que isso implicaria que no interior desses laços deveríamos ter um ponto de mínimo local ou máximo local, contrariando o princípio do máximo forte. Assim, tal rede deve ser constituída por arcos ou ramificações. Mas recorde que os fins de Q corresponde aos pontos de $\mathcal{P}$, os quais ocorrem em um número par e menor do que 4. Assim, $\#\mathcal{P}$ é zero ou dois.

Figura 12 – Comportamento real do conjunto de nível



Fonte: Autor

Como $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, existe um conjunto de nível Q conforme consideramos inicialmente. Assim, não podemos ter $\#\mathcal{P} = 0$, logo $\#\mathcal{P} = 2$ e portanto Q trata-se um arco simples sem nós (sem pontos onde $Du_1 = Du_2$). Ou seja, $u_1 - u_2$ não tem pontos críticos.

□

Proposição 5.2. *Sobre as hipóteses da Proposição 5.1, se $\#\mathcal{P} \leq 4$, então $u_1 - u_2$ tem, no máximo, um ponto crítico, e tal ponto crítico é não degenerado.*

Demonstração. Basta provarmos o caso $\#\mathcal{P} = 4$. Como na demonstração da Proposição 5.1, cada conjunto de nível deve ser uma rede com pontos finais em $\mathcal{P}$. Como cada nó da rede deve ter valença $v \geq 4$, cada conjunto de nível deve assumir uma das seguintes formas:

- um par de arcos, ou
- uma rede com exatamente um nó.

No segundo caso, tal ponto é não degenerado.

De fato, se tivéssemos uma outra rede em $P_1 \cap P_2$, cujos pontos finais fossem em $\mathcal{P}$, tal rede deveria se intersectar com a primeira. Mas diferentes conjuntos de níveis são disjuntos entre si, logo só podemos ter, no máximo, uma rede com um nó. $\square$

Proposição 5.3. *Considere $P := P(\alpha, w, L_{\alpha, w})$ e seja $u : P \rightarrow \mathbb{R}$ a função sóliton de translação de Scherk. Assuma que $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ é um tilted grim reaper sobre uma faixa aberta S . Então, $g - u$ tem, no máximo, um ponto crítico. Além disso, se $S \cap \Gamma_2$ ou $S \cap \Gamma_4$ é vazio, então $g - u$ não tem pontos críticos.*

Demonstração. Primeiramente observe que, se $S \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ e $S \cap \Gamma_4 = \emptyset$, então a soma do número de pontos extremos de Γ_2 que estão contidos em S juntamente com o número de pontos em $(\partial S) \cap \Gamma_2$, é igual a 2. E vice-versa.

Observe também que, se $(\partial S) \cap (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) = \emptyset$, não podemos ter $(\partial S) \cap (\partial P) \subset (\Gamma_1 \cup \Gamma_3)$. De fato, pois isso implicaria que existiria um ponto $p_0 \in \text{int}(S) \cap \text{int}(P)$ de modo que $(g - u)(p_0) = 0$. Mas nesse caso, o conjunto de nível $g - u = 0$ deveria (como expresso na demonstração da Proposição 5.1) ter um comportamento de malha onde p_0 seria um nó com valença maior do que ou igual a 4. Mas os segmentos que saem desse nó não podem formar curvas fechadas (pelo princípio do máximo), tampouco poderiam se conectar a quatro pontos em ∂S . Ou seja, não teríamos nenhuma possibilidade de existência para esse caso. E essa contradição mostra o que queríamos.

Agora, analisaremos em dois casos:

- ∂S não contém nenhum vértice de P .

Neste caso, as observações preliminares nos mostram que $\#\mathcal{P} = 4$ (conforme a notação do conjunto definido após a Definição 5.2), uma vez que S e P estão em posição geral. Com isso, podemos aplicar a Proposição 5.2 para concluir que $N(g - u) \leq 1$.

▪ Caso geral.

Seja p_0 um ponto na faixa $\mathbb{R} \times (0, w)$ que está à esquerda de P (isto é, $p_0 = (x_0, y_0)$, onde $x_0 < w/\tan \alpha$ e $0 < y_0 < w$). Para $|\theta| < \pi$, seja $g_\theta : S_\theta \rightarrow \mathbb{R}$ a rotação no sentido anti-horário de $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ em torno de p_0 por um ângulo θ . Para $|\theta| > 0$ suficientemente pequeno, temos que ∂S_θ não contém nenhum vértice de P . Então, pelo caso anterior, temos $N(g_\theta - u) \leq 1$. Pela Proposição 2.1 segue que $N(g_0 - u) \leq 1$.

Encerrada a primeira afirmação da proposição, assuma agora que $S \cap \Gamma_4 = \emptyset$. Então, $S_\theta \cap \Gamma_4 = \emptyset$ para $|\theta| > 0$ suficientemente pequeno. Como não podemos ter simultaneamente $S_\theta \cap \Gamma_2 = \emptyset$ (pela segunda observação que fizemos inicialmente), segue que $S_\theta \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$. Então a soma entre os pontos extremos de Γ_2 contidos em S_θ (neste caso, o único ponto possível seria $(L_{\alpha,w} + w/\tan \alpha, w)$, uma vez que θ é suficientemente pequeno) juntamente com $\#\{\Gamma_2 \cap (\partial S)\}$, resulta em 2. Isso significa que $\#\mathcal{P} = 2$. Desse modo, estamos dentro das hipóteses da Proposição 5.1 e, assim, $g_\theta - u$ não possui pontos críticos ($N(g_\theta - u) = 0$). Novamente pela Proposição 2.1, segue que $N(g - u) = 0$. $\square$

Observação 5.1. (i) *Podemos estender o resultado anterior no seguinte contexto: Trocando Γ_2 por $I_1 := (0, +\infty) \times \{0\}$ e Γ_4 por $I_2 := (-\infty, \hat{x}) \times \{w\}$, com $\hat{x} > 0$, a segunda observação feita no início da demonstração da Proposição 5.3 continua sendo válida.*

(ii) *Além disso, ressaltamos a importância da contrapositiva da última afirmação da Proposição 5.3: Se $g - u$ tem pelo menos um ponto crítico, então $S \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$ e $S \cap \Gamma_4 \neq \emptyset$ ($S \cap I_1 \neq \emptyset$ e $S \cap I_2 \neq \emptyset$).*

Teorema 5.4 (Propriedades da parte fundamental do sóliton de translação de Scherk). *Considere $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\alpha,w}$ a parte fundamental do sóliton de translação de Scherk. Então,*

- (a) *$\mathcal{D}$ tem curvatura de Gauss negativa em todos os pontos, e*
- (b) *a aplicação de Gauss é um difeomorfismo de $\mathcal{D}$ em*

$$\mathbb{S}^{2+} \setminus \{e_2, -e_2, (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0), (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)\}.$$

Demonstração. (a) A princípio, analisaremos a curvatura de Gauss em $\partial \mathcal{D}$. Sendo $\mathcal{D}$ um sóliton de translação, temos que $\vec{H} = e_3^\perp$. Por outro lado, $\vec{H} = -H\nu$ e, nesse caso, conforme

descrito na Seção 2.3.3.

$$\nu(p) \in \{e_2, -e_2, (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0), (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)\} \quad (5.8)$$

qualquer que seja o ponto $p \in \partial\mathcal{D}$. Lembre que $\partial\mathcal{D}$ consiste em quatro retas verticais. Ou seja, $e_3^\perp = 0$ se, e somente se, $H = 0$ em $\partial\mathcal{D}$. Desse modo, as curvaturas principais no bordo, κ_1 e κ_2 , coincidem, a menos de sinal (isto é, $\kappa_1 = -\kappa_2$). Logo, o produto entre elas deve ser não positivo, ou seja, a curvatura de Gauss no bordo de $\mathcal{D}$ é menor do que ou igual a zero.

Como $J = \langle \nu, e_3 \rangle$ é campo de Jacobi em $\mathcal{D}$ que é positivo em $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ (vide Observação 4.3), pelo lema do bordo de Hopf (EVANS, 2010, p. 327) a derivada de tal campo é não nula em cada ponto do bordo. Então a segunda forma fundamental é não nula, logo a curvatura de Gauss é estritamente negativa em todos os pontos de $\partial\mathcal{D}$. Pelo Teorema 2.2 de (HOFFMAN et al., 2019), não existem pontos interiores com curvatura de Gauss nula. Com isso, a curvatura de Gauss é estritamente negativa em $\mathcal{D}$, uma vez que este é conexo. Isso encerra o item (a)

(b) Por Alexandrov, podemos compactar $\mathcal{D}$ adicionando quatro pontos no infinito, correspondendo aos quatro fins de $\mathcal{D}$. Seja $\tilde{\mathcal{D}}$ a compactificação resultante. Então $\tilde{\mathcal{D}}$ é topologicamente um disco fechado. Observe que a aplicação de Gauss de $\mathcal{D}$, ν , pode ser estendida continuamente à $\tilde{\mathcal{D}}$. De fato, isso ocorre pois ν tem valor limite quando tendemos a $+\infty$ ou $-\infty$ ao longo de cada um dos fins, seguindo a configuração descrita na Seção 2.3.3.

Assim, a extensão de ν leva os quatro pontos no infinito aos vetores descritos no conjunto (5.8).

Note assim que ν é uma aplicação contínua de $\tilde{\mathcal{D}}$ em $\mathbb{S}^{2+}$; ν é localmente um difeomorfismo suave em todos os pontos interiores de $\tilde{\mathcal{D}}$ pelo Teorema da Aplicação Inversa, pois $d\nu \neq 0$ (uma vez que $d\nu < 0$); e ν leva $\partial\tilde{\mathcal{D}}$ homeomorficamente no equador de $\mathbb{S}^2$. Segue por topologia que ν leva $\tilde{\mathcal{D}}$ homeomorficamente em $\mathbb{S}^{2+}$. Mais ainda, como a curvatura de Gauss é negativa em todos os pontos de $\mathcal{D}$, a aplicação de Gauss é um difeomorfismo suave, exceto nos quatro pontos de $\tilde{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$.

□

Observação 5.2. Na demonstração do item (a) do Teorema 5.4, note que a argumentação levou em consideração o fato de que $\partial\mathcal{D}$ consistia apenas de retas verticais. Com isso, podemos estender tal resultado para outros domínios.

Corolário 5.2. Seja $w > 0$ e $I_1 = (0, +\infty) \times \{0\}$. Considere I_2 qualquer um dos seguintes casos:

- a semirreta: $(\hat{x}, +\infty) \times \{w\}$, para algum $\hat{x} \in \mathbb{R}$; ou
- a reta: $\mathbb{R} \times \{w\}$.

Seja Ω o interior do invólucro convexo de $I_1 \cup I_2$. Seja $\mathcal{D}$ o sólido de translação tal que $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ é gráfico de uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ com valores de bordo $+\infty$ em $I_1 \cup I_2$ e $-\infty$ em $(\partial\Omega) \setminus \overline{I_1 \cup I_2}$. Então, a curvatura de Gauss é estritamente negativa em todos os pontos de $\mathcal{D}$.

5.2 PARTE FUNDAMENTAL DO SCHERKNÓIDE

Teorema 5.5 (Existência da parte fundamental do Scherknoide). *Considere $\alpha \in (0, \pi)$ e $w \in [\pi, \infty)$. Então existe um sólido de translação $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\alpha, w}$ tal que $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ é gráfico de uma função suave $u : \Omega(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R}$, cujos valores no bordo são:*

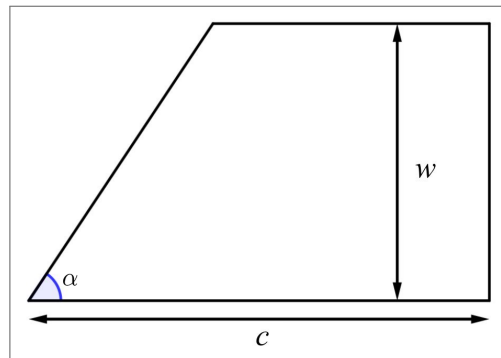
$$\begin{cases} u \equiv +\infty, & \text{em } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \\ u \equiv -\infty, & \text{em } \Gamma_1 \end{cases}.$$

E de modo que o vetor $v_{\alpha/2} := (\cos \alpha/2, \sin \alpha/2, 0)$ é tangente à $\mathcal{D}$ na origem.

Demonstração. Fixe $\alpha \in (0, \pi)$, $w \in (0, \infty)$ e tome $c > w/\tan \alpha$. Seja $\Omega_{\alpha, w}(c)$ o trapézio retângulo definido por

$$\Omega_{\alpha, w}(c) := \{(x, y) \in \Omega(\alpha, w) \mid x < c\}.$$

Figura 13 – Trapézio $\Omega_{\alpha, w}(c)$



Fonte: Autor

Mais uma vez pelo Teorema 5.1, considere $u_c^h : \Omega_{\alpha, w}(c) \rightarrow \mathbb{R}$ o único sólido de translação cujos valores no bordo são: $-h$ em Γ_1 , e 0 nos outros três lados do trapézio. Note que esse

sóliton de translação depende de α e w ; contudo, uma vez fixados esses parâmetros, estaremos omitindo-os para efeitos de simplificação na notação.

Além disso, note que

$$\partial \text{graf}(u_c^h) = \Gamma_1^h \cup (\Gamma_0^h \cup \Gamma_P^h) \cup \Gamma_\Omega^c,$$

onde Γ_1^h é a translação de Γ_1 por h unidades no sentido $-e_3$, Γ_0^h, Γ_P^h são os segmentos de reta verticais, respectivamente, sobre a origem e sobre o ponto $(w/\tan \alpha, w)$, com comprimento h , contidos no semiespaço $\{z < 0\}$, e

$$\begin{aligned} \Gamma_\Omega^c := & \{0 \leq x \leq c, y = 0, z = 0\} \cup \left\{ \frac{w}{\tan \alpha} \leq x \leq c, y = w, z = 0 \right\} \\ & \cup \{x = c, 0 \leq y \leq w, z = 0\}, \end{aligned}$$

consiste na união de três lados do trapézio $\Omega_{\alpha,w}(c)$.

Por estimativas de curvatura e, conseqüentemente, pelos resultados da Seção 2.3.1, existe uma hipersuperfície limite Σ_c para a qual $\text{graf}(u_c^h)$ converge subsequencialmente quando $h \rightarrow +\infty$. Tal convergência é suave exceto, possivelmente, nos vértices de $\partial \Sigma_c$. Observe que $\partial \Sigma_c$ é a poligonal consistindo na união das semirretas verticais contidas no semiespaço $\{z < 0\}$ com pontos de origem em $(0, 0)$ e $(w/\tan \alpha, w)$, juntamente com Γ_Ω^c .

Pela Observação 4.4, se a hipersuperfície Σ_c não fosse um gráfico, então deveria ser plana e vertical. Todavia, da forma como é constituído, $\partial \Sigma_c$ não pode ser bordo de uma superfície vertical. Logo, Σ_c deve ser gráfico de uma função suave $u_c : U_c \subseteq \Omega_{\alpha,w}(c) \rightarrow \mathbb{R}$, com U_c aberto de $\Omega_{\alpha,w}(c)$.

Mais uma vez, pela forma como $\partial \Sigma_c$ é constituído, observamos que, por um lado, U_c deve ser limitado por Γ_Ω^c . Por outro lado, *a priori*, a curva conectando a origem ao ponto $P_{\alpha,w}$ poderia estar estritamente contida em $\Omega_{\alpha,w}(c)$, fazendo com que U_c possua-se área estritamente menor do que tal trapézio.

No entanto, note que $\overline{\Sigma_c} \setminus \Sigma_c$ está contido em retas verticais que passam pela origem e por $P_{\alpha,w}$. E assim, conforme a notação do Lema 2.4, definindo S como sendo os dois pontos citados, temos que tais pontos devem estar conectados por um segmento de reta. Com isso, U_c deve ser todo $\Omega_{\alpha,w}(c)$.

Agora, considere $v_c : [-c, c] \times [0, w] \rightarrow \mathbb{R}$, o sóliton de translação cujos valores no bordo são nulos. Mais uma vez a existência e unicidade de tal sóliton seguem do Teorema 5.1. Pela prova do Teorema 4.1 de (HOFFMAN et al., 2019), quando $c \rightarrow +\infty$, v_c converge para um sóliton de translação gráfico completo, v , sobre $\mathbb{R} \times (0, w)$. Assim, considerando g o *tilted*

grim reaper definido sobre $\mathbb{R} \times (0, w)$, temos, pelo princípio do máximo, que g e v não podem coincidir no interior da região (uma vez que v tem valor 0 em $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{w\})$, enquanto que g tem valor $+\infty$). Observe que, dado $z \in \mathbb{R}$, temos que $g(x, y) - z$ tende a $-\infty$ quando $z \rightarrow +\infty$. Desse modo, $u_c(x, y) \rightarrow -\infty$ para todo $(x, y) \in \Omega(\alpha, w)$.

Consequentemente, quando $c \rightarrow \infty$, a hipersuperfície Σ_c converge para a união dos quartos de planos verticais

$$\{(x, 0, z) \mid x \geq 0, z \leq 0\} \cup \left\{ (x, w, z) \mid x \geq \frac{w}{\tan \alpha}, z \leq 0 \right\}. \quad (5.9)$$

Considerando $(\cos \theta_c(z), \sin \theta_c(z), 0)$ o vetor tangente à Σ_c em $(0, 0, z)$. Como $e_1 = (1, 0, 0)$ é tangente à Σ_c em $(0, 0, 0)$ segue que $\theta_c(0) = 0$. Por outro lado, quando $z \rightarrow \infty$, Σ_c é assintótico à superfície plana vertical $\{y = x \tan \alpha\}$ contida em $\{0 < y < w\}$, logo $\theta_c(z) \rightarrow \alpha$. Ou seja, os vetores tangentes à Σ_c em $(0, 0, z)$ variam entre $(\cos 0, \sin 0, 0)$ e $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ a medida em que z varia entre 0 e $-\infty$. Como a convergência é suave, a menos de subsequência, segue que os vetores tangentes também variam suavemente. Em particular, existe $0 > z_0(c) > -\infty$ para o qual $\theta_c(z_0(c)) = \alpha/2$. E assim, $v_{\alpha/2} := (\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0)$ é tangente à Σ_c em $(0, 0, z_0(c))$.

Como Σ_c converge aos quartos de plano descritos em (5.9), segue que, fixado $z \in (-\infty, 0)$, o vetor tangente à Σ_c em $(0, 0, z)$ tende à $e_1 = (\cos 0, \sin 0, 0)$ quando $c \rightarrow \infty$. Desse modo, $z_0(c) \rightarrow -\infty$ quando $c \rightarrow \infty$.

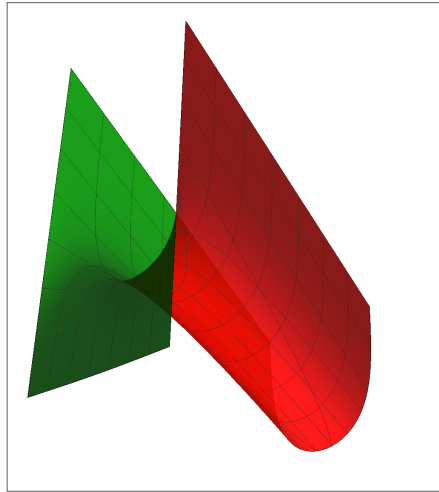
Pelos resultados da Seção 2.3.1, quando $c \rightarrow +\infty$ temos que $\Sigma_c - (0, 0, z_0(c))$ converge suavemente, a menos de subsequência, a um sólon de translação $\mathcal{D}$ contido em $\overline{\Omega(\alpha, w)} \times \mathbb{R}$.

Considere $\mathcal{D}_0$ a componente conexa de $\mathcal{D}$ contendo a origem. Se a hipersuperfície $\mathcal{D}_0 \setminus \partial \mathcal{D}_0$ não é um gráfico, então deve ser plana e vertical. Logo, deveria ser o semiplano $\{ze_3 + tv_{\alpha/2} \mid t \geq 0\}$. Absurdo, pois $\mathcal{D}$ está contido em $\overline{\Omega(\alpha, w)} \times \mathbb{R}$.

Desse modo, $\mathcal{D}_0 \setminus \partial \mathcal{D}_0$ é gráfico de uma função suave $u : U \subseteq \Omega(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R}$, com U aberto. Com um argumento análogo ao que utilizamos para mostrar que $U_c = \Omega_{\alpha, w}(c)$, concluímos que $U = \Omega(\alpha, w)$, e, portanto, $\mathcal{D}_0$ deve ser todo $\mathcal{D}$. O que encerra a demonstração. $\square$

Definição 5.3 (Parte fundamental e função Scherknoide). *Uma função suave $u : \Omega(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R}$ com valores de bordo conforme descritos no enunciado do Teorema 5.5 é chamada de função Scherknoide. Enquanto que o sólon de translação $\mathcal{D}_{\alpha, w}$ associado é chamado de parte fundamental do Scherknoide.*

Figura 14 – Parte fundamental do Scherknoide com $\mathcal{D}_{\pi/2, \pi}$



Fonte: Adaptado de [HOFFMAN; MARTÍN; WHITE \(2022b\)](#).

Antes de apresentarmos as propriedades da parte fundamental do Scherknoide, precisamos de um importante resultado.

Para o que segue, será conveniente adotarmos a seguinte notação no que diz respeito a funções *tilted grim reapers*:

- $g_w : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ denotará a função *tilted grim reaper* tal que $g_w(0, w/2) = 0$ e $\partial_x g_w \geq 0$. Mais especificamente, por [4.11](#), temos

$$\partial_x g_w \equiv \sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}. \quad (5.10)$$

- $\tilde{g}_w : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ denotará a função *tilted grim reaper* tal que $\tilde{g}_w(0, w/2) = 0$ e $\partial_x \tilde{g}_w \leq 0$. Mais especificamente, por [4.11](#), temos

$$\partial_x \tilde{g}_w \equiv -\sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}.$$

Teorema 5.6. *Seja Σ um sólito de translação gráfico de uma função $u : (0, +\infty) \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ com valores de bordo*

$$u(\cdot, 0) = u(\cdot, w) = +\infty.$$

Então $w \geq \pi$, e quando $x \rightarrow +\infty$, Σ é fracamente assintótico a um tilted grim reaper no seguinte sentido: existe um tilted grim reaper $g : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Sigma - \left(x, 0, u\left(x, \frac{w}{2}\right)\right)$$

converge suavemente para o gráfico de g quando $x \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Para cada $x > 0$, note que a função $\varphi^x(y) := u(x, y)$ atinge um valor mínimo, uma vez que $u(x, 0) = +\infty = u(x, w)$. Então, tal função admite ao menos um ponto crítico. Com isso, podemos considerar uma sequência $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ de pontos críticos satisfazendo: $x_i \rightarrow +\infty$.

Além disso, a menos de subsequência, podemos considerar que $y_i \rightarrow \tilde{y} \in (0, w)$ (pois $0 < y_i < w$ para todo $i \in \mathbb{N}$) e que

$$\Sigma - (x_i, 0, u(x_i, y_i))$$

converge (pela Observação 4.4) para um sóiton de translação completo $\tilde{\Sigma}$.

Afirmção 5.1. $\tilde{\Sigma}$ é o gráfico da função *tilted grim reaper* $g_w : (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ definida acima.

Note que, como consequência, devemos ter $\tilde{y} = w/2$. A princípio, denote por $\tilde{\Sigma}_{\tilde{y}}$ a componente conexa (e, portanto, também completa) contendo $(0, \tilde{y}, 0)$. Pela Observação 4.4, ou $\tilde{\Sigma}_{\tilde{y}}$ é um plano vertical, ou é gráfico. Suponha que $\tilde{\Sigma}_{\tilde{y}}$ é plano vertical, como tal plano deve estar contido em $\{0 < y < w\}$, segue que $\tilde{\Sigma}_{\tilde{y}}$ deve ser o plano $\{y = \tilde{y}\}$. Por outro lado, uma vez que $u_y(x_i, y_i) = 0$ segue que e_2 é tangente à $\tilde{\Sigma}$ (e, portanto, à $\tilde{\Sigma}_{\tilde{y}}$) em $(0, \tilde{y}, 0)$. Mas e_2 é normal à $\{y = \tilde{y}\}$. Contradição.

Pelo teorema de classificação 4.3, $\tilde{\Sigma}_{\tilde{y}}$ deve ser ou o Δ -wing ou o *tilted grim reaper*. Em particular, $w \geq \pi$. Em ambos os casos, para todo ponto crítico (x, y) de u , devemos ter

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_{yy}(x, y) > 0. \quad (5.11)$$

Em outras palavras, existe $c > 0$ tal que $x \geq c$ implica que todo ponto crítico da função φ^x é ponto de mínimo local estrito. Com isso, os pontos críticos de φ^x , os quais denotaremos por $y_c(x)$, devem ser únicos sempre que $x \geq c$. De fato, se houvessem dois pontos de mínimo local estrito, entre eles deveria haver um ponto p de máximo local estrito, onde $u_{yy}(p) < 0$, contrariando (5.11).

Como os pontos críticos de tais sóitons de translação estão localizados ao longo do seu eixo central, para $x > 0$ suficientemente grande, segue que

$$\frac{\pi}{2} < y_c(x) < w - \frac{\pi}{2}. \quad (5.12)$$

E considerando, se preciso for, c ainda maior, podemos assumir que (5.12) vale para todo $x \geq c$.

Além disso, pelas próprias características do *tilted grim reaper* e do Δ -wing, segue que $\lim_{x \rightarrow +\infty} |Du(x, y_c(x))| < +\infty$. Desse modo, como $|Du|$ é limitado sobre o conjunto conexo e

ilimitado $\{(x, y_c(x)) \mid x \geq c\}$ contido em $[c, +\infty) \times [\pi/4, w - \pi/4]$, segue da Proposição 4.1 que

$$\sup_{[c, +\infty) \times K} |Du| < +\infty$$

para cada subintervalo $K \subset (0, w)$.

Consequentemente, pelos resultados da Seção 2.3.1, toda sequência $\{x_i\}_i$ admite uma subsequência tal que

$$\Sigma_i := \Sigma - (x_i, 0, u(x_i, w/2)) \quad (5.13)$$

converge suavemente para um sóliton de translação gráfico completo.

Considere $\mathcal{F}$ a família de funções limite subsequenciais. Afirmamos que $\mathcal{F}$ é conexo. De fato, mostraremos que tal família é conexa por caminhos. Isto é, dadas $u_0, u_1 \in \mathcal{F}$, queremos uma aplicação contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{F}$, satisfazendo: $\alpha(0) = u_0, \alpha(1) = u_1$ e $\alpha([0, 1]) \subset \mathcal{F}$. Considere $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\alpha_n(s) := \Sigma - ((1-s)p_n + sq_n, 0, u((1-s)p_n + sq_n, w/2)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

onde $\{p_k\}_k$ e $\{q_l\}_l$ são subsequências de $\{x_i\}_i$, isto é, $p_k = x_{i_k}$ e $q_l = x_{i_l}$, tais que $\Sigma_{i_k} \rightarrow u(0)$ e $\Sigma_{i_l} \rightarrow u(1)$, quando k e l tendem à $+\infty$, respectivamente.

Agora, considere a seguinte noção de convergência: dizemos que α_n converge para α em compactos quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ temos

$$\|\alpha_n - \alpha\|_K := \sup_K \text{dist}_{\mathcal{H}}(\alpha_n, \alpha) < \varepsilon,$$

onde $K \subset \mathbb{R} \times (0, w)$ denota conjuntos compactos e

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(E_1, E_2) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid E_1 \subseteq B_\varepsilon(E_2), E_2 \subseteq B_\varepsilon(E_1)\}$$

denota a distância de Hausdorff, com $E_1, E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ conjuntos quaisquer (podendo ser, inclusive, pontos).

Nesse sentido, α_n é localmente lipschitziana, isto é, para cada $t \in [0, 1]$ existe uma vizinhança K (a qual podemos assumir ser compacta em $[0, 1]$), tal que

$$\text{dist}_{\mathcal{H}}(\alpha_n(t), \alpha_n(s)) \leq C(K)|t - s|.$$

Pela convergência de Hausdorff, descrita na Seção 2.3.1, sabemos que α_n converge para uma função α . Resta mostrar que $\alpha \in \mathcal{F}$, isto é, α deve ser limite de uma subsequência de

(5.13). Ora, basta notar que

$$\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \text{dist}_{\mathcal{H}}(\alpha_{n_\mu}, \alpha) = 0$$

qualquer que seja a subsequência $\{n_\mu\}_\mu$ considerada (uma vez que a própria sequência converge para α) e, naturalmente,

$$\alpha_{n_\mu}(s) = \Sigma - ((1-s)p_{n_\mu} + sq_{n_\mu}, 0, u((1-s)p_{n_\mu} + sq_{n_\mu}, w/2))$$

é uma subsequência de (5.13). Com isso, $\alpha \in \mathcal{F}$ e temos provada a conexidade por caminhos.

Agora, mostraremos que $\mathcal{F}$ contém apenas um único elemento: um *tilted grim reaper*.

Realizaremos essa análise para dois casos:

- $w = \pi$

O único sólito de translação gráfico completo definido sobre uma faixa de largura π é o *grim reaper*.

- $w > \pi$

Suponha que $\mathcal{F}$ contém um Δ -wing. Desde modo, a função $x \mapsto u(x, w/2)$ admite uma sequência (ilimitada) de pontos de mínimo local estrito. Como entre dois mínimos locais estritos deve haver um ponto de máximo local estrito, segue que $x \mapsto u(x, w/2)$ admite uma sequência (ilimitada) $\{\tilde{x}_i\}_i$ de pontos de máximo local estrito. Desse modo, pelos resultados da Seção 2.3.1, $\Sigma - (\tilde{x}_i, 0, u(\tilde{x}_i, w/2))$ converge, a menos de subsequência, para um sólito de translação completo que é gráfico de uma função $\tilde{u} \in \mathcal{F}$. E assim, temos que $\tilde{u}_x(0, w/2) = 0$ e $\tilde{u}_{xx}(0, 0) \leq 0$. Mas, nesse contexto, o único sólito de translação satisfazendo $\tilde{u}_x(0, w/2) = 0$ é o *grim reaper*, o qual tem largura π . Contradição.

Isso mostra que os únicos elementos de $\mathcal{F}$ são os *tilted grim reapers*. No entanto, apenas dois (os gráficos de g_w e $\tilde{g}_w$) contém o ponto $(0, w/2, 0)$. Por conexidade, $\mathcal{F}$ consiste de apenas um deles.

Observe que se $w = \pi$, então $\partial_x g_w \equiv \partial_x \tilde{g}_w \equiv 0$ e assim $g_w = \tilde{g}_w$. Por isso, considere $w > \pi$. Mostraremos que $\lim_{a \rightarrow +\infty} u(x+a, y) - u(a, w/2) = g_w(x, y)$.

Suponha por absurdo que tal limite é $\tilde{g}_w$. Defina $p_i := (x_i, w/2)$, onde $\{x_i\}_i$ é uma sequência divergente tal que

$$x_i > \frac{w}{2 \tan \alpha} \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Considere $g : \mathbb{R} \times (w/2 - \pi/2, w/2 + \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ a função *grim reaper*. Analisaremos o comportamento da função

$$g - u : \tilde{\Omega}(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R},$$

onde $\tilde{\Omega}(\alpha, w) := \{(x, y) \in \Omega(\alpha, w) \mid y \in (w/2 - \pi/2, w/2 + \pi/2)\}$. Observe que $(g - u)(p_i) \rightarrow +\infty$. Além disso, tanto ao longo das semirretas horizontais, quanto ao longo do segmento de reta de $\partial(\tilde{\Omega}(\alpha, w))$, $g - u$ tem valor de bordo $+\infty$. Desse modo, $g - u$ deve atingir um valor mínimo, o que contraria o princípio do máximo. $\square$

Antes de enunciarmos as propriedades, assuma a seguinte notação:

$$\mathcal{R}_w := \{\text{região aberta contida em } \mathbb{R}^{2+} \text{ limitada por } C \text{ e } C(w)\}, \quad (5.14)$$

onde C é o grande semicírculo equatorial $C := \{(x, y, 0) \in \mathbb{S}^2 \mid x \geq 0\}$ e

$$C(w) := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \mid x = z \sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}, z > 0 \right\}.$$

Teorema 5.7 (Propriedades da parte fundamental do Scherknoide). *Sejam $u : \Omega(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função Scherknoide e $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{\alpha, w}$ a parte fundamental do Scherknoide. Então*

(a) $\mathcal{D}$ tem curvatura de Gauss negativa em todos os pontos.

(b) Quando $a \rightarrow +\infty$,

$$u(a + x, y) - u\left(a, \frac{w}{2}\right)$$

converge suavemente para a função *tilted grim reaper* $g_w(x, y)$.

(c) A aplicação de Gauss leva $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ difeomorficamente na região aberta $\mathcal{R}_w$.

Demonstração. (a) Segue do Corolário 5.2.

(b) Segue da Afirmação 5.1.

(c) Considere Γ o conjunto de todos os vetores $v \in \mathbb{S}^2$ para os quais existe uma sequência divergente $\{p_i\}$ em $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ tal que $\nu(p_i) \rightarrow v$. Por (b) e por (4.11), segue que Γ consiste na curva $C \cup C(w)$.

Por (a), sabemos que a curvatura de Gauss é negativa (em particular, é distinta de zero), e portanto $d\nu \neq 0$, ou seja, $\nu : \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{S}^2$ é uma imersão suave. Segue que a multiplicidade da função

$$v \in \mathbb{S}^2 \mapsto \#\{p \in \Sigma \mid \nu(p) = v\}$$

é constante em cada uma das componentes conexas de $\mathbb{S}^2 \setminus \Gamma$. Tal função é zero no hemisfério inferior (pois $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ é gráfico), logo é nula na componente $\mathbb{S}^2 \setminus \overline{\mathcal{R}_w}$. Afirmamos que

$$\nu : \mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}_w \quad (5.15)$$

é própria. De fato, seja $K \subset \mathcal{R}_w$ compacto. Como $\mathcal{R}_w$ é aberto, $\text{dist}_{\mathbb{S}^2}(K, \partial(\mathcal{R}_w)) > 0$. Isso garante que:

- $\text{dist}_{\mathcal{D}}(\nu^{-1}(K), \partial\mathcal{D}) \geq \varepsilon > 0$, uma vez que $\lim_{p \rightarrow \partial\mathcal{D}} \nu(p) \in C$;
- $\sup\{y \mid (x, y, z) \in \nu^{-1}(K)\} < +\infty$, uma vez que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \nu(x, y, z) \in C(w)$;
- $\sup\{z \mid (x, y, z) \in \nu^{-1}(K)\} < +\infty$, uma vez que $\lim_{p \rightarrow \Gamma_4} \nu(p) = e_2$, $\lim_{p \rightarrow \Gamma_2} \nu(p) = -e_2$ e $\{e_2, -e_2\} \subset C$; e
- $\inf\{z \mid (x, y, z) \in \nu^{-1}(K)\} > -\infty$, uma vez que $\lim_{p \rightarrow \Gamma_1} \nu(p) = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$ e $(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0) \subset C$.

Ou seja, $\nu^{-1}(K)$ é limitado. A compacidade segue do fato que ν é contínua e K é fechado.

Com isso, (5.15) é imersão própria e, portanto, uma aplicação de recobrimento (LEE, 2012, p. 94). Como $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ é conexo e $\mathcal{R}_w$ é simplesmente conexo, a aplicação (5.15) é um difeomorfismo. $\square$

Corolário 5.3. Se u e $\mathcal{D}$ são como no Teorema 5.7, então

$$u_x > \sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}.$$

Demonstração. Segue do Teorema 5.7 (b) e de (5.10) $\square$

Teorema 5.8 (Unicidade da parte fundamental do Scherknoide). *Conforme as hipóteses e notações do Teorema 5.5, uma vez exigido que um vetor v_θ , com $0 < \theta < \alpha$, seja tangente à solução $\mathcal{D} := \mathcal{D}_{2\theta, w}$ na origem, temos que tal solução é única.*

A demonstração do teorema seguirá como consequência dos próximos resultados.

Lema 5.1. *Seja $\tilde{\Omega}(\alpha, w) := \Omega(\alpha, w) + \xi$, com $\alpha \in (0, \pi)$, $w \in [\pi, \infty)$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ vetor não nulo. Se u e $\tilde{u}$ são funções Scherknoide sobre $\Omega(\alpha, w)$ e $\tilde{\Omega}(\alpha, w)$, respectivamente; então $\tilde{u} - u$ não tem pontos críticos.*

Demonstração. A menos de renomear as regiões $\tilde{\Omega}$ e Ω , podemos assumir que: ou $\xi_2 > 0$, ou $\xi_2 = 0 < \xi_1$. Suponha por absurdo que existe $p \in \tilde{\Omega} \cap \Omega$ ponto crítico de $\tilde{u} - u$. Tal ponto deve ser isolado. Do contrário, como $\tilde{u} - u$ satisfaz (3.2), existiria uma vizinhança em torno de p sobre a qual $\tilde{u} - u$ deveria ser constante. Logo, por continuação analítica (STEIN; SHAKARCHI, 2010, p. 52), $\tilde{u} - u$ deveria ser constante em $\tilde{\Omega} \cap \Omega$. Mas isso não pode ocorrer, uma vez que $\tilde{u} - u$ tem valor de bordo $+\infty$ em algumas componentes e $-\infty$ em outras.

Rotacionando $\tilde{u}$ por um fator θ no sentido antihorário em torno do vértice inferior esquerdo de Ω , obtemos $\tilde{u}_\theta : \tilde{\Omega}_\theta \rightarrow \mathbb{R}$. Note que, da suposição inicial que fizemos no início da prova e da forma consideramos a rotação, nenhum vértice de $\tilde{\Omega}$ está contido no bordo de Ω , e vice-versa. Além disso, para $\theta > 0$ suficientemente pequeno, o conjunto $\tilde{\Omega} \cap \Omega$ é um triângulo. Para tal θ , temos que $\tilde{\Omega}$ e Ω são regiões poligonais abertas convexas que estão em posição geral e, portanto, vale a Proposição 5.1. Em particular, $\tilde{u}_\theta - u$ não tem pontos críticos.

Por outro lado, pela Proposição 2.1, para todo $\theta > 0$, suficientemente pequeno $\tilde{u}_\theta - u$ deveria ter pelo menos um ponto crítico em uma vizinhança de p . Contradição. Como queríamos. $\square$

Lema 5.2. *Se $u, v : \Omega(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R}$, com $\alpha \in (0, \pi)$ e $w \in [\pi, \infty)$, são funções Scherknoide; então $u - v$ é constante.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $u - v$ não é constante. Então, existe um ponto $p \in \Omega := \Omega(\alpha, w)$ tal que $D(u - v)(p) \neq 0 \Leftrightarrow Du(p) \neq Dv(p)$. Pelo Teorema 5.7 (c), os gráficos de u e v têm a mesma imagem pela aplicação de Gauss (a menos de difeomorfismo), logo existe $q \in \Omega$ tal que $Du(q) = Dv(p)$. Defina $\tilde{u} : \Omega + (p - q) \rightarrow \mathbb{R}$ a função Scherknoide correspondente à u definida sobre a translação de Ω pelo vetor não nulo $p - q$. Logo, p é ponto crítico de $\tilde{u} - v$. De fato,

$$\begin{aligned} D(\tilde{u} - v)(p) &= D\tilde{u}(p) - Dv(p) \\ &= Du(p - (p - q)) - Dv(p) \\ &= Du(q) - Dv(p) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Absurdo, pois isso contraria o Lema 5.1. Portanto, $u - v$ é constante. $\square$

Demonstração do Teorema 5.8. Sejam u e v funções Schernoides sobre $\Omega(\alpha, w)$. Pelo lema 5.2, $u - v = k$, com k constante. Se $k \neq 0$, teríamos que v_θ seria tangente à $\mathcal{D}$ na origem quando consideramos u , por exemplo, mas não seria tangente à $\mathcal{D}$ na origem quando consideramos v , uma vez que este estaria deslocado na vertical em k unidades. Portanto, devemos ter $k = 0$. E assim, temos a unicidade. $\square$

O teorema a seguir nos mostra que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_{\alpha_i, w_i} & \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} & \mathcal{D}_{\alpha, w} \\ \text{reflexão de Schwarz} \downarrow & & \downarrow \text{reflexão de Schwarz} \\ \mathcal{S}_{\alpha_i, w_i} & & \mathcal{S}_{\alpha, w} \end{array}$$

comuta para o caso $\alpha < \pi$. Isto é, se considerarmos $\{\mathcal{D}_{\alpha_i, w_i}\}_i$ uma sequência de partes fundamentais (ou do sóliton de translação de Scherk, ou do Scherknoide), com $\alpha_i \rightarrow \alpha \in (0, \pi)$, tomarmos o limite para chegarmos, a menos de subsequência, à uma hipersuperfície suave $\mathcal{D}_{\alpha, w}$ e depois aplicarmos sucessivas reflexões de Schwarz, a hipersuperfície $\mathcal{S}_{\alpha, w}$ resultante, coincide com a hipersuperfície formada quando consideramos o processo inverso: primeiramente aplicamos sucessivas reflexões de Schwarz sobre $\mathcal{D}_{\alpha_i, w_i}$, originando uma hipersuperfície $\mathcal{S}_{\alpha_i, w_i}$, e depois tomando o limite (subsequecencial).

Teorema 5.9 (Reflexões de Schwarz para $\alpha < \pi$). *Se $\{\alpha_i\}_i$ e $\{w_i\}_i$ são, respectivamente, sequências em $(0, \pi)$ e $(0, \infty)$ convergindo para $\alpha \in (0, \pi)$ e $w \in (0, \infty)$, então $\{\mathcal{D}_i\}_i$ converge suave e subsequencialmente à $\mathcal{D}_{\alpha, w}$ e $\{\mathcal{S}_i\}_i$ converge suave e subsequencialmente para $\mathcal{S}_{\alpha, w}$.*

Demonstração. Para $w < \pi$, segue do Teorema 5.3 e do Corolário 5.1.

Para $w \geq \pi$, passando a uma subsequência, sabe-se (pela Seção 2.3.1) que $\mathcal{D}_i$ converge para uma hipersuperfície limite $\mathcal{D}$ em $\overline{\Omega(\alpha, w)} \times \mathbb{R}$, pois lembre que, pelo Teorema 5.3 (b), $L_{\alpha, w} = +\infty$. Como a convergência ocorre de modo suave, $v_{\alpha/2} = (\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2), 0)$ é tangente à $\mathcal{D}$ na origem. Se $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ não fosse gráfico, então deveria ser o semiplano $\{sv_{\alpha/2} + te_3 \mid s \geq 0, t \in \mathbb{R}\}$, uma vez que o bordo $\partial\mathcal{D}$ consiste apenas em uma reta vertical sobre a origem (ou seja, o eixo z). Mas isso não pode ocorrer, pois a hipersuperfície deve estar contida em $\overline{\Omega(\alpha, w)} \times \mathbb{R}$. Logo, $\mathcal{D} \setminus \partial\mathcal{D}$ é gráfico de uma função $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \subseteq \Omega(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R}$.

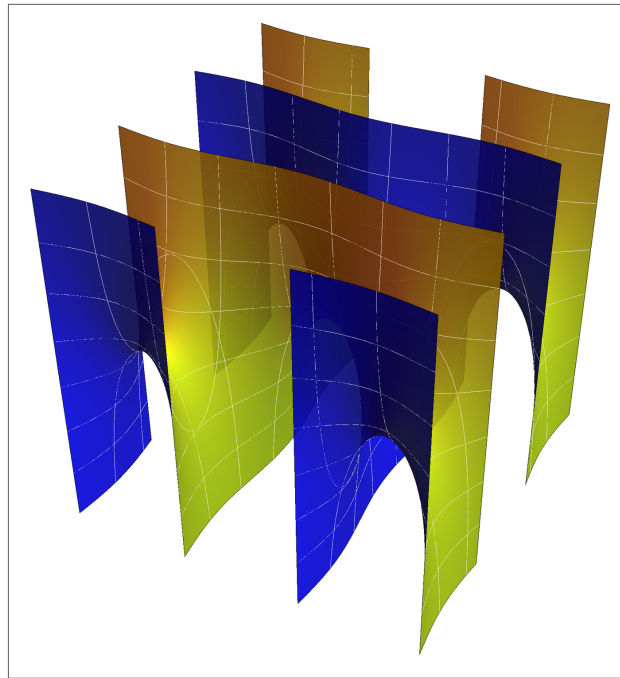
Pelo Lema 2.4 $\tilde{\Omega}$ é um aberto convexo e cada componente conexa de

$$\tilde{\Omega} \setminus \left\{ (0, 0), \left(\frac{w}{\tan \alpha}, w \right) \right\}$$

é uma reta, uma semirreta ou um segmento de reta. Com isso, devemos ter $\tilde{\Omega} = \Omega(\alpha, w)$. E portanto, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\alpha, w}$. Daí segue que $\mathcal{S}_i$ converge, a menos de subsequência, para $\mathcal{S}_{\alpha, w}$. $\square$

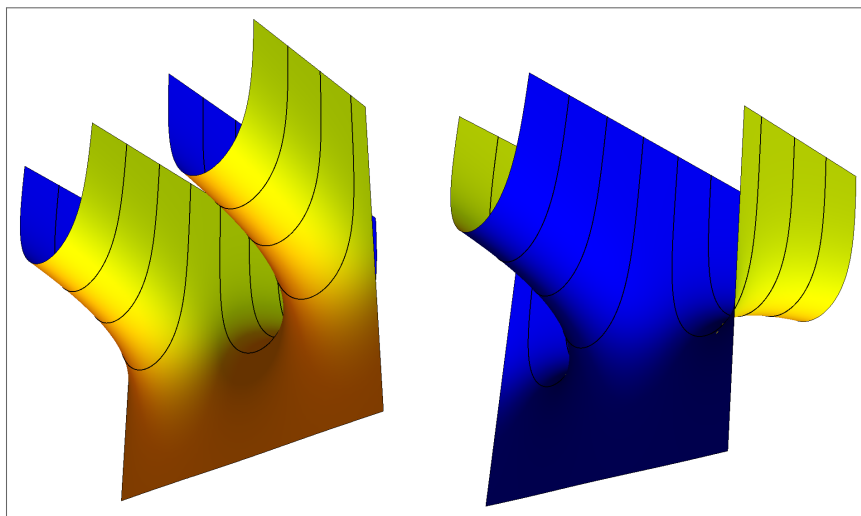
Definição 5.4 (Sóliton de translação de Scherk e Scherknoide). *Com a notação do Teorema 5.9, para $w < \pi$ dizemos que $\mathcal{S}_{\alpha, w}$ é o **sóliton de translação de Scherk** e para $w \geq \pi$ dizemos que $\mathcal{S}_{\alpha, w}$ é o **Scherknoide**.*

Figura 15 – Sóliton de translação de Scherk $\mathcal{S}_{\pi/2, \pi/2}$



Fonte: MARTÍN (2020).

Figura 16 – Scherknoide $\mathcal{S}_{\pi/2, \pi}$



Fonte: Adaptado de HOFFMAN; MARTÍN; WHITE (2022b).

5.3 TOMANDO O LIMITE: $\alpha \rightarrow \pi$

Teorema 5.10 (Convergência das partes fundamentais). *Considere as seqüências $\{\alpha_i\}_i$ em $(0, \pi)$ e $\{w_i\}_i$ em $(0, \infty)$ de modo que $\alpha_i \rightarrow \pi$ e $w_i \rightarrow w \in (0, \infty)$. Seja $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{\alpha_i, w_i}$ a parte fundamental do sóliton de translação do tipo Scherk, conforme os Teoremas 5.2 e 5.5. Então, $\{\mathcal{D}_i\}_i$ admite convergência suave subsequencial à um sóliton de translação Σ tal que $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ é gráfico de uma função suave*

$$u : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}.$$

(a) Se $w < \pi$, então $\partial\Sigma = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(\hat{x}, w, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, para algum $0 \leq \hat{x} < \infty$, e u tem valores de bordo

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases} \quad e \quad u(x, w) = \begin{cases} +\infty, & x < \hat{x} \\ -\infty, & x > \hat{x} \end{cases}.$$

(b) Se $w \geq \pi$, então $\partial\Sigma = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$, e u tem valores de bordo

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases} \quad e \quad u(\cdot, w) = +\infty.$$

Demonstração. As estimativas de curvatura da Seção 2.3.1 garantem uma convergência subsequencial suave de $\{\mathcal{D}_i\}_i$ à uma hipersuperfície $\mathcal{D}$. Seja Σ a componente conexa de $\mathcal{D}$ contendo a origem. Por construção,

$$v_i := \left(\cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right), 0 \right)$$

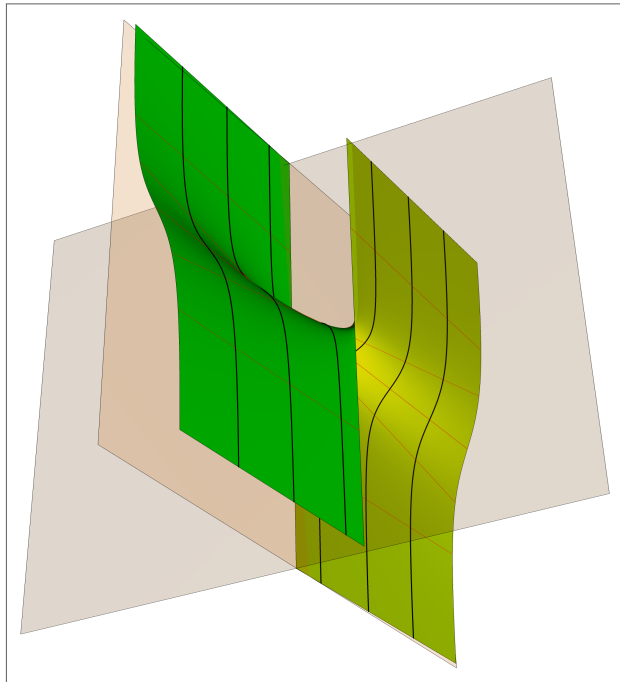
é o vetor tangente à $\mathcal{D}_i$ na origem. Por hipótese, $\alpha_i \rightarrow \pi$, logo $v_i \rightarrow (0, 1, 0)$. E assim, e_2 é tangente à M na origem.

Passando a uma subsequência podemos assumir dois casos: ou $w_{i_k} \geq \pi$ para todo k , ou $w_{i_k} < \pi$ para todo k .

Caso 1: $w_{i_k} \geq \pi$ para todo k .

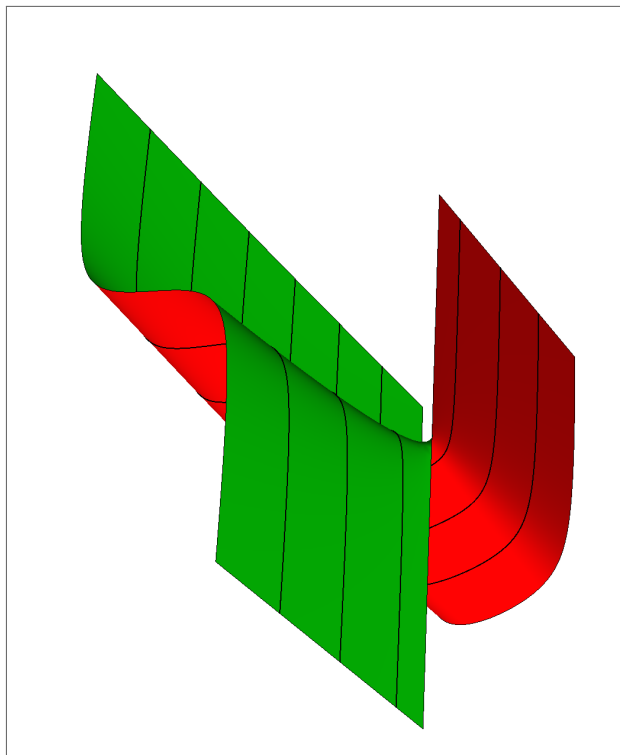
Nesse caso, $\mathcal{D}_k := \mathcal{D}_{i_k}$ está contido na região $\Omega_k := P(\alpha_{i_k}, w_{i_k}, \infty)$. Além disso, como $\alpha_{i_k} \rightarrow \pi$, o vértice superior esquerdo de Ω_k , isto é, o ponto $(w/\tan \alpha_{i_k}, w_{i_k})$ distancia-se cada vez mais do eixo y a medida em que consideramos k cada vez maior. Note também que o segmento conectando a origem a tal ponto, tende ao semieixo x negativo quando $k \rightarrow \infty$.

Figura 17 – Gráfico da função u do Teorema 5.10(a) com $w = \pi/2$



Fonte: Adaptado de MARTÍN et al. (2024).

Figura 18 – Gráfico da função u do Teorema 5.10(b) com $w = \pi$



Fonte: Adaptado de HOFFMAN; MARTÍN; WHITE (2022b).

Com isso, $\partial\Sigma$ consiste apenas no eixo z . Sob essa condição, afirmamos que $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ é

gráfico de uma função

$$\tilde{u} : \mathbb{R} \times (0, \tilde{w}) \rightarrow \mathbb{R}$$

para algum $\pi \leq \tilde{w} \leq w$, cujos valores no bordo são:

$$\tilde{u}(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \tilde{u}(\cdot, \tilde{w}) = +\infty.$$

De fato, pela Observação 4.4, caso não fosse gráfico, $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ deveria ser o semiplano vertical $\{x = 0, y \geq 0\}$, uma vez que e_2 é tangente à Σ na origem. Mas isto é um absurdo, pois Σ está contido no semiespaço $\{0 \leq y \leq w\}$. Mais uma vez pela Observação 4.4, o domínio Ω de $\tilde{u}$ deve ser um aberto convexo de modo que $\partial\Omega \ni (0, 0)$ e $\partial\Omega \setminus \{(0, 0)\}$ consiste em retas, semirretas ou segmentos de reta. Logo, $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \tilde{w})$, para algum $\tilde{w} \leq w$. Uma vez observado que $(\Sigma \setminus \partial\Sigma) \cap \{x > 0\}$ satisfaz a hipótese do Teorema 5.6, temos que $\pi \leq \tilde{w}$. E isso conclui a prova da nossa afirmação. Agora, iremos provar que $\tilde{w} \geq w$.

Pelo Teorema 5.7 (c)

$$\mathcal{R}_{\tilde{w}} \subset \lim_k \overline{\mathcal{R}_{w_k}} = \overline{\mathcal{R}_w},$$

e assim, $\tilde{w} \geq w$. Definindo $u := \tilde{u}$, finalizamos a demonstração do item b).

Caso 2: $w_{i_k} < \pi$ para todo k .

Considerando $L_i := L_{\alpha_i, w_i}$, denote por $x_i := L_i + w / \tan \alpha_i$ a primeira coordenada do vértice superior direito de $P_i := P(\alpha_i, w_i, L_{\alpha_i, w_i})$. Uma vez que $\alpha_i \rightarrow \pi$, podemos assumir, a menos de uma quantidade finita, que todos os termos da sequência $\{\alpha_i\}_i$ estão contidos no segundo quadrante. Desse modo, $-\tan \alpha_i > \sen \alpha_i$ e assim

$$L_i + \frac{w}{\tan \alpha_i} > L_i - \frac{w}{\sen \alpha_i},$$

para todo i . Com isso,

$$x_i > L_i - \frac{w}{\sen \alpha_i} > 0, \tag{5.16}$$

para todo i , onde a segunda desigualdade segue de (5.7).

Uma vez que $\sen \alpha_i \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$, a segunda desigualdade em (5.16) mostra que devemos ter $L_i \rightarrow \infty$. E desse modo, o vértice inferior direito de P_i afasta-se do eixo y a medida em que consideramos i cada vez maior, uma vez que suas coordenadas são dadas por

$(L_i, 0)$. Por outro lado, o vértice superior esquerdo de P_i e o segmento que conecta a origem a tal vértice, têm um comportamento análogo ao descrito para a região Ω_k no caso 1.

Note que se a sequência $\{x_i\}_i$ é divergente, então $\partial\Sigma$ consiste apenas no eixo z . Então regressaríamos ao caso anterior. Com isso, assumimos que $x_i \rightarrow \tilde{x} \in (0, \infty)$. Desse modo, $\partial\Sigma$ consiste no eixo z e na reta vertical $(\tilde{x}, w) \times \mathbb{R}$.

Uma vez que $\mathcal{D}_i$ é completo, simplesmente conexo e com curvatura não positiva (de fato, temos curvatura negativa em todos os pontos), então, como consequência do Teorema de Hadamard, segue que para quaisquer dois pontos existe uma única geodésica conectando-os. Desse modo, considere a geodésica em $\mathcal{D}_i$ que conecta os pontos $(0, 0, 0)$ e $(x_i, w_i, 0)$. Por simetria, segue que o ponto intermediário, e consequentemente, ponto crítico, é dado por $(x_i/2, w_i/2, u(x_i/2, w_i/2))$. Logo o plano tangente à $\mathcal{D}_i$ em tal ponto é horizontal.

Quando $i \rightarrow +\infty$, as geodésicas γ_i convergem, a menos de subsequência, a uma geodésica γ em Σ , cujo ponto intermediário é $(\tilde{x}/2, w/2, u(\tilde{x}/2, w/2))$. Isto segue da dependência contínua das soluções de equações diferenciais a partir das condições iniciais, (lembre-se que geodésicas são soluções de uma equação diferencial). Consequentemente, o plano tangente à Σ neste ponto é horizontal, logo $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ não pode ser plano e vertical, e assim, pela Observação 4.4, Σ é gráfico de uma função u .

Note que, a princípio, poderíamos ter $w = \pi$. Mostraremos agora que isso não ocorre, ou seja, devemos ter $w < \pi$.

Pelo Teorema 5.4 (b), sabemos que existe um ponto (x_0, y_0) para o qual o vetor normal $\nu(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ é o vetor e_3 , ou seja, nesse ponto temos que $Du(x_0, y_0) = 0$. Agora, considere o *grim reaper* $\mathcal{G}$ que trata-se do gráfico da função $g : S \rightarrow \mathbb{R}$, definida sobre a faixa

$$S := \mathbb{R} \times \left(y_0 - \frac{\pi}{2}, y_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

de modo que $\mathcal{G}$ seja tangente à Σ em $(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$. Pela Afirmação 5.1, segue que S intersecta $I_1 := (0, +\infty) \times \{0\}$ e $I_2 := (-\infty, \hat{x}) \times \{w\}$ (semirretas onde u assume o valor de bordo $+\infty$). Logo, $y_0 - \pi/2 < 0$ e $y_0 + \pi/2 > w$. Com isso, $w < \pi$.

□

Definição 5.5 (Semigráfico). *Um sólito de translação suave, conexo, completo e propriamente mergulhado $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ é um **semigráfico** quando contém uma coleção discreta, não vazia, $\{L_i\}_i$ de retas verticais tal que $\Sigma \setminus (\cup_i L_i)$ é gráfico de uma função $u = u(x, y)$.*

O lema a seguir nos permitirá um importante resultado a respeito do Scherknoide.

Lema 5.3. Dados $0 < \alpha < \pi$ e $w \geq \pi$, considere $\mathcal{D}_{\alpha,w}$ a parte fundamental do Scherknoide (conforme o Teorema 5.5) e seja $\mathcal{S}_{\alpha,w}$ a hipersuperfície obtida a partir de $\mathcal{D}_{\alpha,w}$ após sucessivas reflexões de Schwarz. Defina $\tilde{x} := w/\tan \alpha$ e para cada $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ satisfazendo $(\Omega \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_{\alpha,w} \neq \emptyset$ defina

$$\varphi(\Omega) := \inf\{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in \mathcal{S}_{\alpha,w}, (x, y) \in \Omega\}.$$

Se $c \in \mathbb{R}$ satisfaz

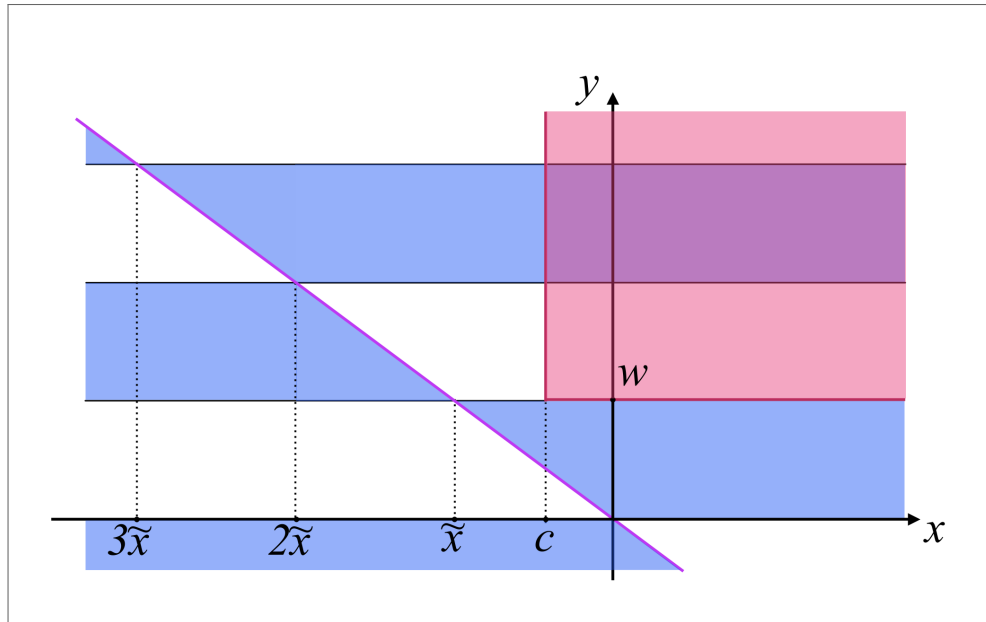
$$2\tilde{x} + 1 \leq c \leq 0, \quad (5.17)$$

então vale a seguinte desigualdade

$$\varphi([c, \infty) \times [w, \infty)) \geq \varphi(\{1\} \times (0, w)) + (c - 2\tilde{x} - 1)\sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}. \quad (5.18)$$

Demonstração. A princípio, como $\tilde{x} \leq -1/2 < 0$ (por (5.17)), segue que $\alpha > \pi/2$. Como observamos anteriormente, $\mathcal{S}_{\alpha,w}$ é um semigráfico, em virtude das retas verticais sobre os pontos $(n\tilde{x}, nw)$, com $n \in \mathbb{Z}$. Denotando tais retas por L_n , temos que $\mathcal{S}_{\alpha,w} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} L_n$ é gráfico de uma função $u_{\alpha,w} : \hat{\Omega}(\alpha, w) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\hat{\Omega}(\alpha, w)$ é obtido a partir de $\Omega(\alpha, w)$ após realizadas sucessivas reflexões de Schwarz.

Figura 19 – Domínio de $\mathcal{S}_{\alpha,w}$ com $w \geq \pi$



Fonte: Autor

Desse modo, $u := u_{\alpha,w}$ é periódica com período $(2\tilde{x}, 2w)$. Note que qualquer ponto em $\Omega_{\alpha,w} \cap ([c, \infty) \times [w, \infty))$ pode ser escrito como $(x, y + 2nw)$, onde $(x, y) \in [c, \infty) \times (0, w)$

para algum $n \in \mathbb{Z}^+$. Além disso, segue da periodicidade que

$$u(x, y + 2nw) = u(x - 2n\tilde{x}, y).$$

Pelo Corolário 5.3, temos que

$$u_x > \sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}, \text{ em } [0, \infty) \times (0, \pi). \quad (5.19)$$

Desse modo, u_x em $[0, \infty) \times (0, w)$ não pode ser igual ou inferior à v_x , onde $v(x, y) := (x\sqrt{(w/\pi)^2 - 1} + b, y)$, com $b \in \mathbb{R}$, está definida sobre $[0, \infty) \times (0, w)$. Por hipótese, $1 + 2\tilde{x} \leq c \leq 0$, em particular, $1 \leq -2\tilde{x}$. Se vale a igualdade, então $c = 0$ e assim, $1 \leq x - 2\tilde{x}$, uma vez que $x \geq c$. Se $1 < -2\tilde{x}$, então $1 + 2\tilde{x} < c \leq 0$ e assim, $1 < c - 2\tilde{x} \leq x - 2\tilde{x}$. Logo, $u(1, y) \leq u(x - 2\tilde{x}, y)$ (pois, em particular, (5.19) mostra que $u_x > 0$). Mais do que isso, temos que

$$u(1, y) + (x - w\tilde{x} - 1)\sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1} \leq u(x - 2n\tilde{x}, y), \quad (5.20)$$

onde o fator positivo adicionado ao termo esquerdo da inequação (5.20), consiste na variação de v em $(1, x - 2\tilde{x}) \times \{y\}$, que por sua vez não supera à de $u(\cdot, y)$. Por (5.19) e (5.20) temos

$$u(x, y + 2nw) \geq u(1, y) + (c - w\tilde{x} - 1)\sqrt{\left(\frac{w}{\pi}\right)^2 - 1}.$$

□

Com isso, uma vez que fazemos α tender à π , (5.18) mostra que os pontos da hipersuperfície $\mathcal{S}_{\alpha, w}$ que estão sobre a região $[c, \infty) \times [w, \infty)$ “explodem” (tendem a $+\infty$) quando $w > \pi$. Por outro lado, como $\tilde{x} \rightarrow -\infty$ quando $\alpha \rightarrow \pi$, então podemos considerar c cada vez menor. A partir disso, podemos concluir que os pontos de $\mathcal{S}_{\alpha, w}$ sobre a região $\mathbb{R} \times [w, \infty)$ tendem à $+\infty$ quando $\alpha \rightarrow \pi$. Por simetria, o mesmo ocorre na região $\mathbb{R} \times (-\infty, -w]$.

Em resumo, para estudarmos o comportamento da hipersuperfície $\mathcal{S}_{\alpha, w}$, com $w > \pi$, quando $\alpha \rightarrow \pi$, basta analisarmos seu comportamento apenas sobre a região $\mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. Isto equivale a considerar uma única reflexão de Schwarz da hipersuperfície $\mathcal{D}_{\alpha, w}$.

Por outro lado, quando $w = \pi$, observe que o lado direito de (5.18) não depende mais de α , assim não podemos afirmar que o mesmo comportamento ocorre.

Teorema 5.11 (Reflexões de Schwarz para $\alpha = \pi$). *Segundo as hipóteses e notações do Teorema 5.10, temos que*

- (a) se $w < \pi$, sucessivas reflexões de Schwarz aplicadas à Σ produzem um sólon de translação $\hat{\Sigma}$ completo, simplesmente conexo e unicamente periódico; e
- (b) se $w \geq \pi$, uma simples reflexão de Schwarz aplicada à Σ produz um sólon de translação $\hat{\Sigma}$ completo, simplesmente conexo e sem bordo.

Mais ainda, quando $w \neq \pi$, a hipersuperfície $\mathcal{S}_i := \mathcal{S}_{\alpha_i, w_i}$ converge subsequencialmente de modo suave à hipersuperfície $\hat{\Sigma}$. E para $w = \pi$, $\mathcal{S}_i$ converge subsequencialmente de modo suave à uma hipersuperfície $\mathcal{S} := \mathcal{S}_{\alpha, w}$ cuja componente conexa que contém a origem é $\hat{\Sigma}$.

Demonstração. $\hat{\Sigma}$ é um semigráfico e é simplesmente conexo pelo Teorema de Van Kampen.

Se $w < \pi$, note que $\hat{\Sigma}$ é gráfico sobre o conjunto $\cup_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{R} \times (nw, (n+1)w)$ (já que o bordo de $\hat{\Sigma}$ consiste em retas verticais sobre pontos contidos em intervalos do tipo $\mathbb{R} \times nw$, com $n \in \mathbb{Z}$), logo qualquer componente conexa de $\mathcal{S} \setminus \hat{\Sigma}$ deve estar contida no plano $\{y = nw\}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Suponha por absurdo que existe $p \in \mathcal{S} \setminus \hat{\Sigma}$. Considere $\mathcal{S}_p$ a componente conexa contendo tal ponto. Pela Observação 4.4, $\mathcal{S}_p$ deve ser um plano vertical, e portanto, $\mathcal{S}_p = \{y = n_0 w\}$ (uma vez que $\mathcal{S}_p$ deve estar contido em $\{y = n_0 w\}$) para algum $n_0 \in \mathbb{Z}$. Mas $\hat{\Sigma}$ contém um segmento vertical de tal plano, assim $\hat{\Sigma} \cap \{y = n_0 w\} \neq \emptyset$. Pela conexidade desses objetos, temos que $\hat{\Sigma} \cup \{y = n_0 w\}$ é a componente conexa contendo p . Absurdo, pois $p \notin \hat{\Sigma}$. E isso mostra que $\mathcal{S} = \hat{\Sigma}$.

Se $w > \pi$, cada componente de $\mathcal{S} \setminus \hat{\Sigma}$ deveria estar na faixa $2nw < y < (2n+1)w$ ou $2nw < -y < (2n+1)w$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, isto é, regiões contidas em $(\mathbb{R} \times [w, \infty)) \cup (\mathbb{R} \times (-\infty, -w])$. Mas, pelo Lema 5.3 isso não pode ocorrer.

Se $w = \pi$, nada podemos afirmar a respeito de $\mathcal{S} \setminus \hat{\Sigma}$. □

5.4 O SÓLITON DE TRANSLAÇÃO TIPO HELICOIDE

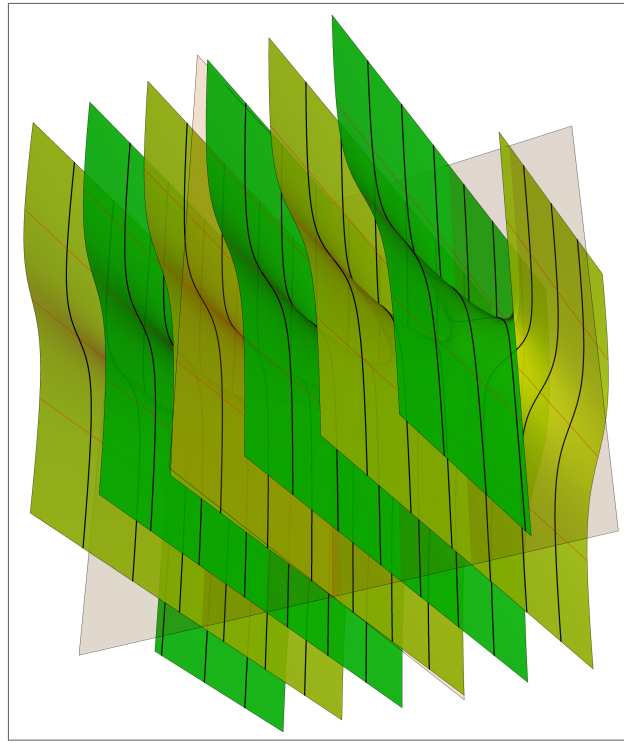
Teorema 5.12 (Sólon de translação tipo helicóide). *Suponha que Σ é um sólon de translação suave tal que $\partial\Sigma$ consiste de duas linhas verticais, e tal que $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ é gráfico de uma função $u : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$, com valores de bordo*

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad u(x, w) = \begin{cases} +\infty, & x < \hat{x} \\ -\infty, & x > \hat{x} \end{cases}, \text{ para algum } \hat{x} \in \mathbb{R}.$$

Considere $\hat{\Sigma}$ a hipersuperfície obtida a partir de sucessivas reflexões de Schwarz sobre Σ , e seja $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ a reta contendo os pontos $(0, 0, 0)$ e $(\hat{x}, w, 0)$. Então,

- (a) Σ tem curvatura de Gauss negativa em todos os pontos;
- (b) se $p_i := (x_i, y_i, z_i) \in \Sigma$ e $|x_i| \rightarrow +\infty$, então $\Sigma - p_i$ converge suavemente para o plano $\{y = 0\}$ e o vetor unitário normal $\nu(p_i)$ converge para $-e_2$ quando $x_i \rightarrow -\infty$ e converge para e_2 quando $x_i \rightarrow +\infty$;
- (c) A aplicação de Gauss é um difeomorfismo de Σ em $\mathbb{S}^{2+} \setminus \{e_2, -e_2\}$.
- (d) Se $p_i \in \hat{\Sigma}$ e $\text{dist}(p_i, \mathcal{L}) \rightarrow +\infty$, então $\hat{\Sigma} - p_i$ converge suavemente para os planos (paralelos entre si) $\{y = nw\}$, com $n \in \mathbb{Z}$, verticais ao domínio da função;
- (e) $w < \pi$; e
- (f) $\hat{x} > 0$.

Figura 20 – Sóliton de translação tipo helicóide com largura $w = \pi/2$



Fonte: Adaptado de [HOFFMAN; MARTÍN; WHITE \(2022b\)](#).

Demonstração. (a) Segue do Corolário [5.2](#).

(b) Afirmamos que existe $a > 0$ tal que $u_y > 0$ em $(-\infty, -a) \times (0, w)$. De fato, suponha por absurdo que a afirmação não seja verdadeira. Logo existiria $\{x_i\}$ em $(-\infty, 0)$, com $x_i \rightarrow -\infty$, tal que

$$u_y(x_i, y_i) \leq 0, \quad (5.21)$$

onde $\{y_i\}$ é uma sequência arbitrária.

Para cada x_i , note que $u(x_i, y) \rightarrow -\infty$ sempre que $y \rightarrow 0$. Logo, $u_y(x_i, y) > 0$ para y suficientemente próximo de 0. Assim, se existisse $\{x_i\}$ com tal comportamento, para cada x_i , poderíamos escolher y_i como sendo o menor valor em $(0, w)$ para o qual (5.21) ainda vale. Desse modo, $\{y_i\}$ seria tal que $u_y(x_i, y_i) = 0$, para todo i .

Da forma como construímos, temos $u_y(x_i, y_i - \varepsilon) > 0$ e $u_y(x_i, y_i) \leq 0$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Com isso, $u_{yy}(x_i, y_i) \leq 0$, o que contraria (5.11). E assim, temos provada nossa afirmação.

A menos de subsequência, uma vez que todos os vetores normais estão contidos no conjunto compacto (e, portanto, limitado) $\mathbb{S}^2$, segue que ν_i , o vetor unitário normal à Σ em $p_i := (x_i, y_i, u(x_i, y_i))$ que aponta para cima, converge para um vetor ν .

Novamente (pelas estimativas de curvatura da Seção 2.3.1), passando a uma subsequência se preciso for, a superfície $\Sigma - p_i$ converge suavemente para um sólito de translação completo.

Seja Σ_0 a componente conexa contendo a origem. Se $\langle \nu, e_3 \rangle > 0$, então M_0 é gráfico de uma função $u_0 : \mathbb{R} \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, onde $(a, b) \subseteq (0, w)$ é um intervalo. Pela afirmação inicial, temos $\partial_y u_0 \geq 0$ em $\mathbb{R} \times (a, b)$. Contudo, o Teorema de Classificação 4.3 mostra que não existe um sólito com tal característica. Portanto, $\langle \nu, e_3 \rangle = 0$ e assim Σ_0 deve ser um plano vertical. Uma vez que Σ_0 está contido na faixa $\{a \leq y \leq b\}$, segue que $\Sigma_0 = \{y = 0\}$. Desse modo, ou $\nu = -e_2$ ou $\nu = e_2$. Novamente pela afirmação inicial, segue que $\langle \nu, e_2 \rangle < 0$. Assim, devemos ter $\nu = -e_2$.

Analogamente vemos que, para $x_i \rightarrow +\infty$, $\Sigma - p_i \rightarrow \{y = 0\}$ e $\nu(p_i) \rightarrow e_2$.

(c) Seja $\{p_i\}_i$ uma sequência divergente em $\Sigma \setminus \partial\Sigma$, logo, a menos de subsequência, $\{\nu(p_i)\}_i$ converge para um limite $v \in \mathbb{S}^2$ (recorde que $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ é gráfico). Mais uma vez, passando a uma subsequência se preciso for, temos duas possibilidades: ou $\{p_i\}_i$ é divergente em Σ , ou $\{p_i\}_i$ converge para um ponto em $\partial\Sigma$.

No primeiro caso, v é e_2 ou $-e_2$ por (b) e pelo Lema 2.4. No segundo caso, teríamos que v também estaria contido no equador $\partial\mathbb{S}^{2+}$. De fato, uma vez que cada uma das duas componentes de $\partial\Sigma$ são verticais, um vetor normal a qualquer ponto de $\partial\Sigma$ deve ter terceira coordenada nula. Então, por uma análise similar a desenvolvida na demonstração do Teorema 5.7 (c), concluímos que

$$\nu : \Sigma \setminus \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{2+} \setminus \partial\mathbb{S}^{2+}$$

é uma imersão própria. Logo, trata-se de uma aplicação de recobrimento (LEE, 2012, p. 94).

Como o domínio é conexo e o contradomínio é simplesmente conexo, segue que a aplicação ν é difeomorfismo. Uma vez que ν mapeia $\partial\Sigma$ difeomorficamente em $(\partial\mathbb{S}^{2+}) \setminus \{e_2, -e_2\}$, segue que $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{2+} \setminus \{e_2, -e_2\}$ é difeomorfismo.

(d) Segue dos itens (b) e (c).

(e) Uma vez verificada a afirmação (c), sabemos que existe um ponto (x_0, y_0) para o qual o vetor normal $\nu(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ é o vetor e_3 , ou seja, nesse ponto temos que $Du(x_0, y_0) = 0$. Com isso, o resultado segue conforme a parte final da demonstração do Teorema 5.10.

(f) Considere $a > 0$, de modo que $|\hat{x}| < a$. Pelo Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned} \iint_{[-a,a] \times [0,w]} \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right) (x, y) \, dx dy &= \int_0^w \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}(a, y), (1, 0) \right\rangle dy \\ &+ \int_a^{-a} \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}(x, w), (0, 1) \right\rangle dx + \int_w^0 \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}(-a, y), (-1, 0) \right\rangle dy \\ &+ \int_{-a}^a \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}(x, 0), (0, -1) \right\rangle dx. \end{aligned}$$

Note que, desenvolvendo o produto interno das integrais simples com relação à y , observamos que seus integrandos consistem, respectivamente, em $\langle \nu(a, y), e_1 \rangle$ e $-\langle \nu(-a, y), e_1 \rangle$. Assim, quando $a \rightarrow +\infty$, $\nu(a, y) \rightarrow e_2$ e $\nu(-a, y) \rightarrow -e_2$. Em ambos os casos os integrandos tendem a zero. Por outro lado, particionando os limites de integração da integral com respeito à x , respectivamente, nos subintervalos $(-a, \hat{x})$, $(\hat{x}, a)$ e $(-a, 0)$, $(0, a)$; e considerando a Proposição 2.3, segue que

$$\int_a^{-a} \frac{u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}}(x, w) \, dx + \int_{-a}^a \frac{u_y}{\sqrt{1+|Du|^2}}(x, 0) \, dx = 2\hat{x}.$$

Finalmente, unindo as informações acima com o fato que u satisfaz a equação dos sólitons de translação gráficos (4.5), segue que

$$2\hat{x} = \iint_{\mathbb{R} \times [0,w]} \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}(x, y) \, dx dy > 0.$$

□

5.5 O PITCHFORK

Teorema 5.13 (*Pitchfork*). Suponha que Σ é um sólito de translação tal que $\partial\Sigma$ é o eixo- z e $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ é gráfico de uma função $u : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$, com valores de bordo

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad u(x, w) = +\infty, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Então,

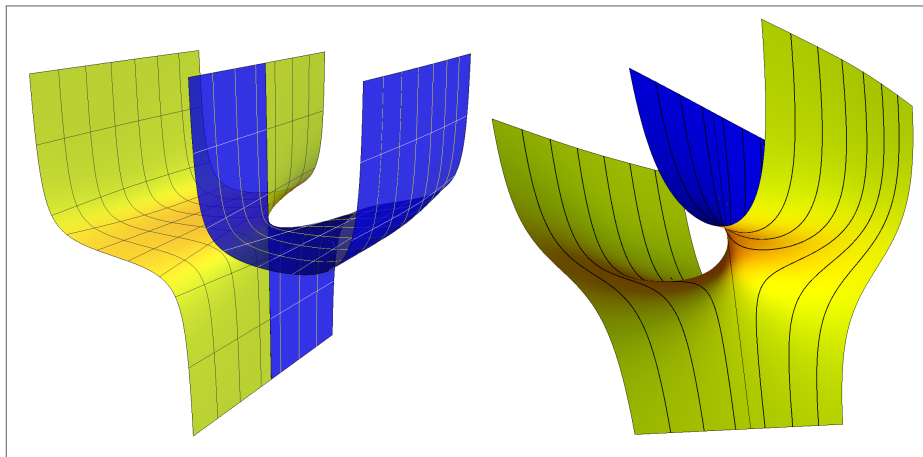
- (a) Σ tem curvatura de Gauss negativa em todos os pontos;
- (b) Se $p_i := (x_i, y_i, z_i) \in \Sigma$ e $x_i \rightarrow -\infty$, então $\Sigma - p_i$ converge suavemente para o plano $\{y = 0\}$;
- (c) Quando $a \rightarrow +\infty$, temos que

$$u(a + x, y) - u(a, w/2)$$

converge suavemente para o único tilted grim reaper $g_w : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g_w(0, w/2) = 0$ e $\partial_x g_w \geq 0$;

- (d) A aplicação de Gauss é um difeomorfismo de $\Sigma \setminus \partial\Sigma$ na região aberta $\mathcal{R}_w$ (conforme descrita em (5.14)).
- (e) $w \geq \pi$.

Figura 21 – Pitchfork de largura $w = \pi$



Fonte: GAMA; MARTÍN; MØLLER (2022).

Demonstração. (a) Segue do Corolário 5.2.

(b) Segue como na demonstração do Teorema 5.12 (b).

(c) Mostraremos que $\mathcal{F} = \{g_w\}$. Para isso, analisaremos o caso $w > \pi$ (o caso $w = \pi$ é imediato).

Afirmção 5.2. *Seja L uma reta em $\{z = 0\}$ que intersecta o eixo x tal que $\text{dist}(L, (0, 0)) > \pi$ e seja $v = (v_1, v_2)$ vetor tangente à L tal que $v_2 > 0$. Denotando $\hat{L} := \{(x, y) \in L \mid 0 < y < \pi\}$, então*

$$\langle Du, v \rangle > 0 \quad \text{em } \hat{L} \quad (5.22)$$

e

$$u_x \geq 0 \quad \text{em } \mathbb{R} \times (\pi, w). \quad (5.23)$$

De fato, suponha que $\langle Du, v \rangle \leq 0$ para algum ponto em $\hat{L}$. Logo, como $u \equiv -\infty$ no ponto $(x, 0) \in L$, isso mostra que $Du(x, \varepsilon) > 0$, com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde $(x, \varepsilon) \in \hat{L}$. Desse modo, em um ponto $p \in \hat{L}$ devemos ter $Du(p) = 0$.

Diante disso, considere $\mathcal{G}$ o *grim reaper* definido sobre uma faixa S que contém L , de modo que $\mathcal{G}$ é tangente à Σ em p .

Por hipótese, $\text{dist}(L, (0, 0)) > \pi$, logo $\text{dist}(S, (0, 0)) > 0$. Ou seja, S não intersecta $[0, +\infty) \times \{0\}$. Mas, pela Proposição 5.3 pela Observação 5.1, $\mathcal{G}$ não pode ser tangente à M . Contradição. Isso prova (5.22).

Agora, considere $b \in (\pi, w)$ arbitrário. Para $m > 0$ suficientemente pequeno, a reta $\{y = mx + b, z = 0\}$ está a uma distância maior do que π da origem. Por (5.22),

$$\langle Du, (1, m) \rangle = u_x + mu_y > 0, \quad \text{em } \left\{ (x, y) \mid y = mx + b, -\frac{b}{m} < x < \frac{w-b}{m} \right\}.$$

Nesse contexto, vemos u como função apenas da variável x :

$$\frac{du}{dx}(x, mx + b) > 0, \quad \text{onde } -\frac{b}{m} < x < \frac{w-b}{m}.$$

Fazendo $m \rightarrow +\infty$, vemos que $u_x(x, b) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. E isso prova a Afirmção 5.2.

Desse modo, com a notação da Afirmção 5.1, provamos que $\mathcal{F} = \{g_w\}$. E isso encerra o item (c).

(d) Segue do Teorema 5.7 (c).

(e) Segue do Teorema 5.6.

□

6 O TEOREMA DE MARTÍN-SÁEZ-TSIAMIS-WHITE

Este capítulo é dedicado à apresentação de importantes resultados obtidos em (MARTÍN et al., 2024) que tratam da unicidade tanto do sóliton de translação tipo helicóide, quanto do *pitchfork*; bem como da não existência de sólitons de translação definidos sobre semiplanos com condições de bordo específicas.

Teorema 6.1 (Unicidade do sóliton de translação tipo helicóide). *Seja $w < \pi$. A menos de adição de uma constante, existe um único sóliton de translação $u : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: existe um $\hat{x} \in \mathbb{R}$ tal que u tem os valores de bordo*

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases} \quad e \quad u(x, w) = \begin{cases} +\infty, & x < \hat{x} \\ -\infty, & x > \hat{x} \end{cases}, \text{ para algum } \hat{x} \in \mathbb{R},$$

e tal que $\Sigma := \text{graf}(u) \cup \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \cup \{(\hat{x}, w, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ é uma variedade suave com bordo.

Teorema 6.2 (Unicidade do *pitchfork*). *Seja $w \geq \pi$. A menos de adição de uma constante, existe um único sóliton de translação $u : \mathbb{R} \times (0, w) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que u tem os valores de bordo*

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases} \quad e \quad u(x, w) = +\infty$$

e tal que $\Sigma := \text{graf}(u) \cup \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ é uma variedade suave com bordo.

Teorema 6.3 (Não existência do *yeti* sobre o semiplano). *Não existe solução $u : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ da equação do sóliton de translação (4.5) tal que*

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\infty, & x < 0 \\ +\infty, & x > 0 \end{cases},$$

e tal que $\text{graf}(u) \cup \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ é uma variedade suave com bordo.

Por definição o **yeti**, a menos de movimento rígido, trata-se de um sóliton de translação completo Σ tal que $\{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \subset \Sigma$ e $\Sigma \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ é gráfico de uma função definida sobre a região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$. Nesse sentido, o Teorema 6.3 nos mostra que, ao considerarmos uma restrição u do *yeti* ao semiplano $\{y > 0\}$, tal restrição não é um sóliton de translação. Os valores de bordo de u ocorrem conforme no enunciado por completude do *yeti*.

REFERÊNCIAS

- ALT, H. W. Verzweigungspunkte von H-Flächen. I. *Mathematische Zeitschrift*, v. 127, p. 333–362, 1972. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01111392>.
- ALT, H. W. Verzweigungspunkte von H-Flächen. II. *Mathematische Annalen*, v. 201, p. 33–55, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01432935>.
- ALTSCHULER, S. J.; WU, L. F. Translating surfaces of the non-parametric mean curvature flow with prescribed contact angle. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 2, n. 1, p. 101–111, 1994. <https://doi.org/10.1007/BF01234317>.
- CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro, Brasil: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- CLUTTERBUCK, J.; SCHNÜRER, O. C.; SCHULZE, F. Stability of translating solutions to mean curvature flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 29, n. 3, p. 281–293, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00526-006-0033-1>.
- COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. *Minimal Surfaces*. New York University: Courant Institute of Mathematical Sciences, 1999. v. 4. (Courant lecture notes in mathematics, v. 4).
- COLDING, T. H.; MINICOZZI II, W. P. *A Course in Minimal Surfaces*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2004. v. 121. (Graduate Studies in Mathematics, v. 121).
- DIERKES, U.; HILDEBRANDT, S.; KÜSTER, A.; WOHLRAB, O. *Minimal Surfaces I: Boundary Value Problems*. 1. ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992. v. 295. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, v. 295).
- DOUGLAS, J. Solution of the problem of Plateau. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 33, n. 1, p. 263–321, 1931. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1989472>.
- ECKER, K. *Regularity Theory for Mean Curvature Flow*. 1. ed. Boston, Massachusetts: Birkhäuser, 2004. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications).
- EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. 2. ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010. v. 19. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19).
- GAMA, E. S.; MARTÍN, F. Translating solitons of the mean curvature flow asymptotic to hyperplanes in $\mathbb{R}^{n+1}$. *International Mathematics Research Notices (IMRN)*, 2023. To appear.
- GAMA, E. S.; MARTÍN, F.; MØLLER, N. M. Finite entropy translating solitons in slabs. *arXiv preprint arXiv:2209.01640*, 2022.
- GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1963. (Selected Russian Publications in the Mathematical Sciences). Revised English Edition, Translated and Edited by Richard A. Silverman.
- GULLIVER, R.; LESLEY, F. D. On boundary branch points of minimizing surfaces. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 52, n. 1, p. 20–25, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00249089>.

GULLIVER, R. D. Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature. *Annals of Mathematics*, v. 97, n. 2, p. 275–305, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1970848>.

HOFFMAN, D.; ILMANEN, T.; MARTÍN, F.; WHITE, B. Graphical translators for mean curvature flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 58, n. 117, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00526-019-1560-x>.

HOFFMAN, D.; ILMANEN, T.; MARTÍN, F.; WHITE, B. Notes on translating solitons for mean curvature flow. In: HOFFMANN, T.; KILIAN, M.; LESCHKE, K.; MARTIN, F. (Ed.). *Minimal Surfaces: Integrable Systems and Visualisation*. Cham: Springer International Publishing, 2021. v. 349, p. 147–168. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-030-68541-6_9.

HOFFMAN, D.; MARTÍN, F.; WHITE, B. Nguyen's tridents and the classification of semigraphical translators for mean curvature flow. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)*, v. 786, p. 79–105, 2022.

HOFFMAN, D.; MARTÍN, F.; WHITE, B. Scherk-like translators for mean curvature flow. *Journal of Differential Geometry*, v. 122, n. 3, p. 421–465, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.4310/jdg/1675712995>.

HOFFMAN, D.; MARTÍN, F.; WHITE, B. Annuloids and δ -wings. *Advanced Nonlinear Studies*, 2023. Final version. To appear.

HOFFMAN, D.; MARTÍN, F.; WHITE, B. Morse-Radó theory for minimal surfaces. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 108, n. 2, p. 1669–1700, 2023. <https://doi.org/10.1112/jlms.12791>.

HUISKEN, G. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *Journal of Differential Geometry*, v. 31, n. 1, p. 285–299, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214444099>.

ILMANEN, T. *Elliptic Regularization and Partial Regularity for Motion by Mean Curvature*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1994. v. 108. (Memoirs of the American Mathematical Society, 520).

JENKINS, H.; SERRIN, J. Variational problems of minimal surface type II. Boundary value problems for the minimal surface equation. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 21, n. 4, p. 321–342, 1966. <https://doi.org/10.1007/BF00282252>.

LAWSON JR., H. B. *Lectures on Minimal Submanifolds*. Berkeley, California: Publish or Perish, Inc., 1980. v. 1. (Mathematics Lecture Series, 9).

LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. 2. ed. New York: Springer, 2012. v. 218. (Graduate Texts in Mathematics, v. 218).

MARTÍN, F. *Doubly Periodic Scherk Surfaces*. 2020. Disponível em: <https://www.ugr.es/~fmartin/gallery/doubly-periodic-scherks.html>. Acesso em: 05 jan. 2025.

MARTÍN, F.; SAVAS-HALILAJ, A.; SMO CZYK, K. On the topology of translating solitons of the mean curvature flow. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, v. 54, n. 3, p. 2853–2882, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00526-015-0886-2>.

MARTÍN, F.; SAÉZ, M.; TSAMIS, R.; WHITE, B. Classification of semigraphical translators. *arXiv preprint arXiv:2401.12345*, 2024.

MEEKS III, W. H.; YAU, S.-T. The classical Plateau problem and the topology of three-dimensional manifolds: The embedding of the solution given by Douglas-Morrey and an analytic proof of Dehn's lemma. *Topology*, v. 21, n. 4, p. 409–442, 1982. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(82\)90021-0](https://doi.org/10.1016/0040-9383(82)90021-0).

MEEKS III, W. H.; YAU, S.-T. The existence of embedded minimal surfaces and the problem of uniqueness. *Mathematische Zeitschrift*, Springer, v. 179, n. 2, p. 151–168, 1982.

MORREY JR., C. B. The problem of plateau on a riemannian manifold. *Annals of Mathematics*, v. 49, n. 4, p. 807–851, 1948. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1969401>.

OSSERMAN, R. A proof of the regularity everywhere of the classical solution to Plateau's problem. *Annals of Mathematics*, v. 91, n. 3, p. 550–569, 1970. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1970637>.

RADÓ, T. On Plateau's problem. *Annals of Mathematics*, v. 31, n. 3, p. 457–469, 1930. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1968237>.

RADÓ, T. *On the Problem of Plateau*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1933. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 2).

SCHOEN, R. M. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *Journal of Differential Geometry*, Lehigh University, v. 18, n. 4, p. 791–809, 1983.

SIMON, L. *Introduction to Geometric Measure Theory*. [S.l.]: Self-published, 2018. Revision and updating of the author's 1983 "Lectures on Geometric Measure Theory".

SOLOMON, B. On foliations of $\mathbb{R}^{n+1}$ by minimal hypersurfaces. *Commentarii Mathematici Helvetici*, v. 61, p. 67–83, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF02621903>.

STEIN, E. M.; SHAKARCHI, R. *Complex Analysis*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2010. (Princeton Lectures in Analysis, 2).