UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

LAURA AUGUSTA VASCONCELOS DE ALBUQUERQUE

Aplicação dos métodos pseudoespectral de Fourier e da fronteira imersa na análise de escoamentos utilizando o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras

Caruaru

2025

LAURA AUGUSTA VASCONCELOS DE ALBUQUERQUE

Aplicação dos métodos pseudoespectral de Fourier e da fronteira imersa na análise de escoamentos utilizando o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil e Ambiental (PPGECAM) da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Engenharia civil.

Orientador: Douglas Mateus de Lima

Coorientadora: Mariana Fernandes dos Santos Villela

Caruaru

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Albuquerque, Laura Augusta Vasconcelos de.
Aplicação dos métodos pseudo espectral de Fourier e da fronteira imersa na análise de escoamentos utilizando o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras / Laura Augusta Vasconcelos de Albuquerque. - Caruaru, 2025.
113f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2025.
Orientação: Douglas Mateus de Lima.
Coorientação: Mariana Fernandes dos Santos Villela.
Inclui referências.

1. Método da fronteira imersa; 2. Método pseudoespectral de Fourier; 3. Modelo de fechamento da turbulencia de Spalart-Allmaras; 4. Escoamentos turbulentos; 5. Dinâmica dos Fluidos Computacional. I. Lima, Douglas Mateus de. II. Villela, Mariana Fernandes dos Santos. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

LAURA AUGUSTA VASCONCELOS DE ALBUQUERQUE

Aplicação dos métodos pseudoespectral de Fourier e da fronteira imersa na análise de escoamentos utilizando o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e Ambiental (PPGECAM) da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.
Área de concentração: Mecânica dos Fluidos
.

Aprovado em: ___/___/_____.

BANCA EXAMINADORA

_____
Prof. Dr. Douglas Mateus de Lima (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Profª. Drª. Mariana Fernandes dos Santos Villela (Coorientadora)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr. Alessandro Romario Echevarria Antunes (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

_____
Prof. Dr. João Marcelo Vedovotto (Examinador Externo)
Universidade Federal de Uberlândia

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profª. Drª. Mariana Fernandes dos Santos Villela, e ao meu coorientador, Prof. Dr. Felipe Pamplona Mariano, pela dedicação, apoio constante e pelos valiosos conhecimentos compartilhados, que contribuíram de maneira essencial para o meu desenvolvimento acadêmico e profissional.

À UFPE (Universidade Federal de Pernambuco) e ao CAA (Centro Acadêmico do Agreste), pelo suporte contínuo e pela excelente infraestrutura de ensino, que foram fundamentais para a realização deste trabalho. Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Goiás (PPGMEC-UFG), pela disponibilização dos recursos computacionais indispensáveis à pesquisa.

À toda a equipe da secretaria do PPGECAM (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental), pela atenção, presteza e suporte ao longo de todo o curso. A todos os professores do PPGECAM da UFPE/CAA, pela generosidade ao compartilhar seus conhecimentos em sala de aula e pela disposição em sempre orientar e apoiar os discentes.

À Eletrobras e ao Programa de Pesquisa e Desenvolvimento Tecnológico (P&D) da ANEEL, pelo apoio financeiro indispensável ao desenvolvimento desta pesquisa, tornando possível a concretização deste trabalho.

RESUMO

A busca por métodos de alta acurácia e alta taxa de convergência para a solução das equações da fluidodinâmica é de grande interesse na mecânica dos fluidos computacional, especialmente devido à necessidade de tratar fenômenos físicos complexos, como os escoamentos turbulentos, que demandam metodologias de alta ordem para fornecer soluções precisas e fiéis à física do problema. A principal dificuldade em alcançar alta acurácia na solução dessas equações reside no elevado custo computacional. Nesse contexto, a metodologia IMERSPEC se destaca ao combinar o método pseudoespectral de Fourier (MPEF) com o método da fronteira imersa (MFI). As principais características do MPEF incluem sua alta acurácia numérica e baixo custo computacional, uma vez que não requer a resolução de sistemas lineares para o acoplamento pressão-velocidade. O MFI é integrado para ampliar a aplicabilidade do MPEF a problemas não periódicos, permitindo a simulação de escoamentos sobre geometrias complexas. No presente trabalho, investiga-se como a combinação da metodologia IMERSPEC com o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras pode contribuir para simulações acuradas e eficientes de escoamentos turbulentos. Foram simulados escoamentos turbulentos em canais, sobre cilindros e aerofólios, cujos resultados foram comparados com dados de simulação computacional direta disponíveis na literatura, demonstrando boa concordância qualitativa e quantitativa. Assim, este estudo valida e amplia o uso da metodologia IMERSPEC, avançando na simulação de escoamentos turbulentos com modelagem de turbulência.

Palavras-chaves: Método da fronteira imersa. Método pseudoespectral de Fourier. Modelo de fechamento da turbulencia de Spalart-Allmaras. Escoamentos turbulentos.

ABSTRACT

The search for high-accuracy and fast-convergence methods for solving fluid dynamics equations is of great interest in computational fluid mechanics, especially due to the need to handle complex physical phenomena such as turbulent flows, which require high-order methodologies to provide precise and physically consistent solutions. The main challenge in achieving high accuracy in solving these equations lies in the high computational cost. In this context, the IMERSPEC methodology stands out by combining the Fourier pseudospectral method (FSM) with the immersed boundary method (IBM). The main features of FSM include its high numerical accuracy and low computational cost, as it does not require solving linear systems for pressure-velocity coupling. The IBM is integrated to extend the applicability of FSM to non-periodic problems, allowing the simulation of flows over complex geometries. This study investigates how the combination of the IMERSPEC methodology with the Spalart-Allmaras turbulence model can contribute to accurate and efficient simulations of turbulent flows. Simulations of turbulent flows in channels, around cylinders, and over airfoils were performed, and the results were compared with direct numerical simulation data, showing good qualitative and quantitative agreement. Thus, this study validates and extends the use of the IMERSPEC methodology, advancing the simulation of turbulent flows with turbulence modeling.

Keywords: Immersed Boundary Method. Fourier Pseudospectral Method. Spalart-Allmaras Turbulence Model. Turbulent Flows.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Comparação de discretização utilizando três tipos de métodos 15
Figura 2 – Comparação do custo computacional entre a DFT e a FFT 16
Figura 3 – Regimes de escoamento laminar e turbulento 18
Figura 4 – Variação da velocidade com o tempo em um escoamento a ΔP constante . 40
Figura 5 – Gráfico de f_w em função de r 46
Figura 6 – Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa 47
Figura 7 – Definição do plano π 54
Figura 8 – Termos da Eq. 3.62 no Espaço de Fourier e sua Projeção em Relação ao Plano π 57
Figura 9 – Representação esquemática dos domínios de cálculo euleriano e lagrangiano 66
Figura 10 – Domínio computacional LES. A zona de amortecimento é utilizada para dissipar ondas espúrias e evitar reflexões nas fronteiras do domínio 70
Figura 11 – Solução da equação de Burgers usando malha de 128 pontos, $t = \frac{\pi}{8}$ s . . . 74
Figura 12 – Comparação da acurácia na resolução da equação de Burgers, $c = 0$ m/s . 77
Figura 13 – Campo de velocidade u sobreposto pelos vetores de velocidade, $t = 4$ s . . 79
Figura 14 – Campo de velocidade v sobreposto pelos vetores de velocidade, $t = 4$ s . . 79
Figura 15 – Campo de pressão p sobreposto pelos vetores de velocidade, $t = 4$ s 80
Figura 16 – Domínio de cálculo para a solução de escoamentos sobre um aerofólio . . . 82
Figura 17 – Campo de velocidades, em [m/s], do escoamento sobre o aerofólio NACA 4402, $Re = 1000$, $\alpha = 4°$ 83
Figura 18 – Curva de sustentação para NACA 4404, $Re = 400$ 84
Figura 19 – Curva de sustentação para NACA 4404, $Re = 800$ 85
Figura 20 – Curva de sustentação para NACA 4404, $Re = 6000$ 85
Figura 21 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4402, $Re = 6000$, $\alpha = 5°$ 86
Figura 22 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4404, $Re = 6000$, $\alpha = 5°$ 86
Figura 23 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4402, $Re = 800$, $\alpha = 7°$ 87

Figura 24 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4404, $Re = 800$, $\alpha = 7°$ 87
Figura 25 – Curva polar do escoamento sobre o aerofólio NACA 4404 ($Re = 800$) utilizando a função chapéu 91
Figura 26 – Curva polar do escoamento sobre o aerofólio NACA 4404 ($Re = 800$) utilizando a metodologia híbrida 92
Figura 27 – Perfil de velocidade parabólico de um escoamento laminar 93
Figura 28 – Perfil de velocidade parabólico de um escoamento turbulento 93
Figura 29 – Campo de velocidade do escoamento $Re_\tau = 1000$ 94
Figura 30 – Perfil de velocidade média, $Re_\tau = 1000$ 95
Figura 31 – Tensões viscosas, $Re_\tau = 1000$ 96
Figura 32 – Perfil de velocidade média, $Re_\tau = 550$ 96
Figura 33 – Tensões viscosas, $Re_\tau = 550$ 97
Figura 34 – Perfil de velocidade média, $Re_\tau = 180$ 97
Figura 35 – Tensões viscosas, $Re_\tau = 180$ 98
Figura 36 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×32 . . 98
Figura 37 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×64 . . 99
Figura 38 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×128 . . 99
Figura 39 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×256 . . 100
Figura 40 – Domínio de cálculo para as simulações de escoamento sobre cilindro circular 101
Figura 41 – Campo de vorticidade do escoamento sobre cilindro, $Re_D = 10^4$ 102
Figura 42 – Distribuição da velocidade u ao redor do aerofólio NACA 0012 ($Re = 79.900$, $\alpha = 40°$) 104
Figura 43 – Coeficiente de sustentação médio estático comparado com dados experimentais para $Re = 79.900$ no aerofólio NACA 0012 105

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Valores dos parâmetros do modelo de turbulência de Spalart-Allmaras . . . 47

Tabela 2 – Valores das constantes α^l e β^l utilizadas no método RK46. 62

Tabela 3 – Análise da norma L_2 para $C = 4$ m/s e $t = \frac{\pi}{8}$ 75

Tabela 4 – Análise da norma L_2 para $C = 0$ m/s e $t = \frac{\pi}{8}$ 75

Tabela 5 – Parâmetros utilizados para a solução das Equações de Taylor-Green 78

Tabela 6 – Norma L_2 para solução da equação Manufaturada de Taylor-Green, $t = 4$ s 80

Tabela 7 – Coeficientes aerodinâmicos do aerofólio NACA 4402, $Re = 1000$, $\alpha = 4°$. 83

Tabela 8 – Resultados dos coeficientes C_L e C_D para diferentes funções peso e valores de α 89

Tabela 9 – Coeficientes aerodinâmicos médios do perfil NACA 0008 para diferentes funções peso 90

Tabela 10 – Valores do coeficiente de arrasto e erro relativo 102

Tabela 11 – Valores dos coeficientes aerodinâmicos e diferenças relativas para $\alpha = 40°$ e $Re = 79.900$. 105

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD	*Computational Fluids Dynamics*
CFL	Condição de Courant-Friedrichs-Lewis
DFT	Transformada discreta de Fourier
DNS	*Direct Numerical Simulation*
EDPs	Equações diferenciais parciais
FFT	*Fast Fourier Transform*
LES	*Large eddy simulation*
MDF	*Multi-Direct Forcing*
MFI	Método da fronteira imersa
MPEF	Método pseudoespectral de Fourier
RANS	*Reynolds Averaged Navier-Stokes*
RK46	Método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal com seis passos
URANS	*Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation*

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 13

1.1 MÉTODOS ESPECTRAIS E FRONTEIRA IMERSA 14

1.2 ESCOAMENTOS TURBULENTOS 17

1.3 OBJETIVOS 20

1.3.1 Objetivos específicos 21

1.4 JUSTIFICATIVA 21

2 REFERENCIAL TEÓRICO 23

2.1 A TURBULÊNCIA NOS FLUIDOS 24

2.1.1 Aspectos históricos 24

2.1.2 Modelagem da turbulência 26

2.1.2.1 Modelo $k-\epsilon$ 28

2.1.2.2 Modelos $k-\omega$ e $k-\omega$ SST 29

2.1.2.3 Modelos a uma equação e o modelo de Spalart-Allmaras 30

2.2 MÉTODOS ESPECTRAIS 33

3 METODOLOGIA 38

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DIFERENCIAL 38

3.1.1 Equações da fluidodinâmica 41

3.1.2 Viscosidade turbulenta 43

3.1.3 Modelo de turbulência de Spalart-Allmaras 44

3.2 MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA 47

3.2.1 Acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano 48

3.2.2 Cálculo da força lagrangiana 49

3.3 MÉTODO PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER 53

3.3.1 Recuperação do campo de pressão 58

3.3.2 DFT e FFT 60

3.4 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL 61

3.5 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SPALART-ALLMARAS PELO MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER 62

3.5.1 Imposição de Condições de Contorno para $\tilde{\nu}$ 64

3.6 ACOPLAMENTO ENTRE AS METODOLOGIAS PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER E FRONTEIRA IMERSA – IMERSPEC 65
3.6.1 Tratamento das condições de contorno 69
3.6.1.1 Zona de amortecimento 69
4 RESULTADOS 72
4.1 VERIFICAÇÃO 72
4.1.1 Solução da Equação de Burgers 72
4.1.2 Solução Manufaturada de Taylor-Green 77
4.2 ESCOAMENTOS SOBRE AEROFÓLIOS 80
4.2.1 Análise de refinamento e diferentes números de Reynolds 81
4.2.2 Influência das funções peso 87
4.3 ESCOAMENTO EM UM CANAL TURBULENTO 92
4.4 ESCOAMENTO SOBRE CILINDRO 100
4.5 ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE AEROFÓLIO 103
5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS 106
REFERÊNCIAS 108

1 INTRODUÇÃO

As metodologias numérico-computacionais são ferramentas extremamente versáteis na engenharia, dado que o desenvolvimento de protótipos virtuais, representados por um sistema de equações fundamentadas em uma teoria matemática, viabiliza a modelagem das mais variadas geometrias, sem limitações quanto à natureza das equações trabalhadas e à evolução temporal do processo. Mesmo considerando hipóteses simplificadoras e aproximações em relação à realidade, os métodos computacionais possibilitam a obtenção de uma representação bastante próxima do comportamento de um protótipo físico, sem a exigência de instrumentos experimentais específicos. Além disso, essas metodologias proporcionam maior facilidade de parametrização dos modelos, o que resulta não apenas em um melhor entendimento de como cada uma das variáveis influencia os resultados, mas também na possibilidade de verificação de diferentes condições de análise. Na dinâmica dos fluidos computacional, do inglês *Computational Fluids Dynamics* (CFD), as metodologias numéricas são meios centrais de solução.

A dinâmica dos fluidos computacional é um ramo da ciência que emprega métodos numéricos e computacionais para a solução dos modelos matemáticos que descrevem os escoamentos dos fluidos (SOUSA; MOREIRA; PAULA, 2019). Dado o amplo número de aplicações industriais e de escoamentos encontrados na natureza, a CFD tem ganhado vasta importância nos estudos e pesquisas. A obtenção de resultados computacionais cada vez mais confiáveis para um número maior de aplicações tem sido um dos grandes desafios. Em particular, na CFD, muitos esforços são aplicados na busca pela alta *acurácia*[1] nos resultados das simulações. Considerando a aplicação de condições de contorno em geometrias complexas, obter resultados mais acurados é ainda mais desafiador (MARIANO et al., 2022).

O comportamento da dinâmica de um fluido homogêneo sujeito a um campo de forças externo é descrito com as equações da fluidodinâmica, as quais foram deduzidas a partir da Segunda Lei de Newton, juntamente com o Princípio de Conservação de Massa. Por se tratarem de equações diferenciais parciais não lineares de segunda ordem, a obtenção de soluções para geometrias arbitrárias e condições de contorno gerais é dificultosa, estando a teoria matemática desta classe de equações ainda não totalmente desenvolvida, segundo Fortuna (2020). As equações da fluidodinâmica podem ser resolvidas numericamente utilizando os métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, métodos espectrais, entre outros. De-

[1] A acurácia está relacionada à magnitude do erro, ou seja, o quanto a solução numérica difere da solução exata em um único nível de refinamento. Quanto menor for o erro, mais acurada é a solução.

pendendo do tipo de escoamento que se queira resolver, uma dessas técnicas numéricas pode se adequar melhor do que outras (MALISKA, 2004).

A busca por métodos mais acurados para a resolução das equações da fluidodinâmica é de grande interesse para pesquisadores de CFD. Segundo Mariano et al. (2022), certos fenômenos físicos só podem ser devidamente capturados por esquemas de alta ordem de convergência, permitindo uma solução mais fiel à física do problema. Métodos com ordem de convergência numérica superior a dois já são considerados de alta ordem. Essas metodologias possuem alta *taxa de convergência*[2] e, embora sejam computacionalmente mais caras que os métodos de baixa ordem, conseguem representar melhor os fenômenos físicos para o mesmo nível de refinamento. A principal dificuldade na obtenção dessa acurácia é o *custo computacional*[3] envolvido. Metodologias clássicas de alta ordem, como diferenças finitas, volumes finitos de alta ordem e esquemas compactos, são onerosas devido ao tamanho do estêncil e à necessidade de resolver grandes e numerosos sistemas lineares (NASCIMENTO et al., 2024).

1.1 MÉTODOS ESPECTRAIS E FRONTEIRA IMERSA

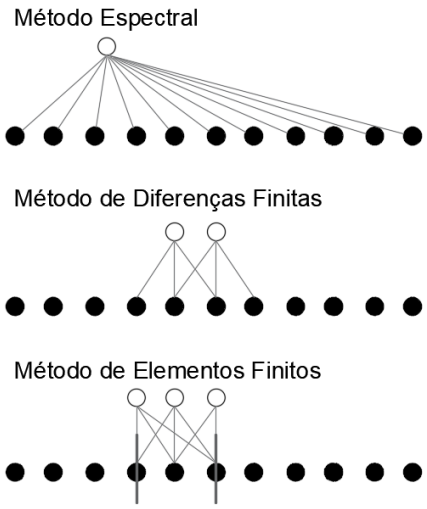
Dentre as metodologias de alta ordem, os métodos espectrais, caracterizados por expandir a solução em termos de séries truncadas de funções de aproximação globais das variáveis independentes (séries de Fourier, séries de polinômios de Chebyshev ou Legendre), possuem grande destaque. Para Canuto et al. (2006), as metodologias espectrais são as melhores alternativas para resolver, com alta acurácia, Equações diferenciais parciais (EDPs) sobre domínios simples e regulares.

Na Fig. 1, é apresentado um esboço de como as metodologias espectrais utilizam os pontos da discretização do domínio (representados pelos círculos fechados) para calcular uma derivada em uma determinada posição (indicada pelo círculo aberto), em comparação com os métodos clássicos (BOYD, 2001). Observa-se que, nos métodos espectrais, todos os pontos do domínio são considerados no cálculo. Em contraste, no método de diferenças finitas de segunda ordem, assim como no método dos volumes finitos, apenas os nós vizinhos da posição de interesse são utilizados. Da mesma forma, o método dos elementos finitos emprega apenas os nós pertencentes a um elemento.

[2] A taxa de convergência é o quão rápido os erros entre a solução real e a solução numérica decrescem com o refinamento da malha.

[3] O custo computacional refere-se ao tempo de processamento (uso da CPU), ao armazenamento de dados no disco rígido e ao uso da memória RAM do computador.

Figura 1 – Comparação de discretização utilizando três tipos de métodos



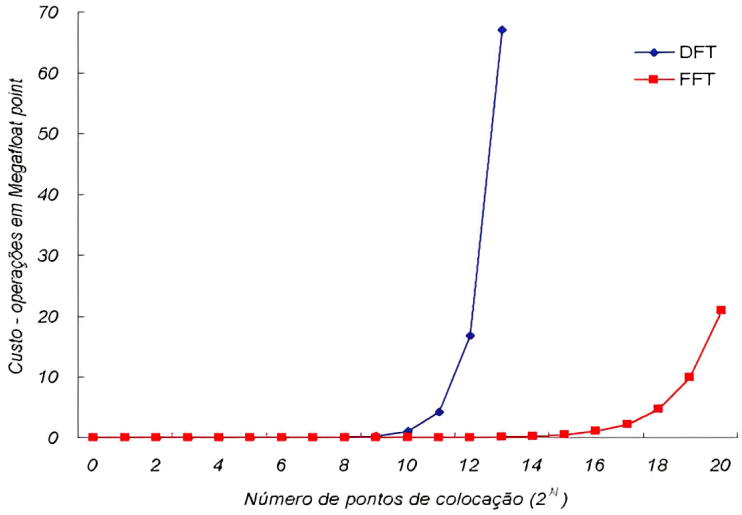
Fonte: Adaptada de BOYD (2001)

Por utilizar todos os pontos da discretização do domínio, as metodologias espectrais obtêm o máximo de informação possível para calcular uma derivada. Elas proporcionam mais de 10 dígitos de acurácia, permitindo a obtenção de soluções satisfatórias com menos pontos na malha em comparação com metodologias clássicas. Segundo Moreira (2011), essa alta acurácia é alcançada sempre que a solução for suficientemente simples e suave, como domínios retangulares ou circulares, sem a presença de mudanças abruptas, como ondas de choque ou outras descontinuidades.

Para conciliar a alta acurácia necessária nas modelagens com um custo computacional mais eficiente, destaca-se o Método pseudoespectral de Fourier (MPEF). Este método espectral possui uma taxa de convergência elevada, oferece grande acurácia (erro de máquina) e é altamente eficiente computacionalmente. O menor custo computacional dessa abordagem está diretamente relacionado ao uso da transformada rápida de Fourier, *Fast Fourier Transform* (FFT), desenvolvida por Cooley e Tukey (1965). Este algoritmo resolve a Transformada discreta de Fourier (DFT) de maneira eficaz, utilizando um procedimento conhecido como rotação de bit, o que torna a solução de EDPs eficiente e acurada. Na Figura 2 compara-se o custo computacional da transformação de uma função para o espaço espectral de Fourier utilizando a DFT e a FFT. Observa-se que ao empregar a FFT, o número de operações é reduzido de $O(N^2)$ para $O(N \log_2 N)$, onde N representa o número de pontos no domínio discreto e O é a ordem de grandeza.

Outro fator que torna a utilização do método pseudoespectral de Fourier atrativo em pro-

Figura 2 – Comparação do custo computacional entre a DFT e a FFT



Fonte: MARIANO (2011)

blemas de CFD é ao resolver as equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, pois ao serem transformadas para o espaço espectral de Fourier, tornam-se independentes do termo de pressão, devido à aplicação do método de projeção do gradiente transformado (CANUTO et al., 2006; SILVEIRA-NETO, 2020). Com isso, elimina-se a necessidade de resolver sistemas lineares, substituindo o cálculo da equação de Poisson, usado para acoplar pressão e velocidade, por um produto vetor-matriz, que é computacionalmente mais rápido (MARIANO et al., 2022).

Todavia, apesar dessas vantajosas características, a aplicação do MPEF com alta ordem de convergência aliada ao baixo custo computacional está restrita a problemas com condições de contorno periódicas. Ainda, como comentado por Mariano (2011), técnicas numéricas baseadas nos Métodos Espectrais podem apresentar desvantagens quando aplicadas em problemas envolvendo geometrias complexas, levando em conta que o uso de transformações suaves de um domínio complexo para um computacional simples, bem como a utilização de filtros numéricos, nem sempre são suficientes para recuperar a alta acurácia perdida. O autor, então, investiu em uma metodologia que conseguisse resolver escoamentos sobre geometrias complexas com aplicação de métodos de alta ordem para quaisquer condições de contorno (KINOSHITA et al., 2016).

O tratamento de escoamentos sobre geometrias complexas é um desafio em CFD, posto que as técnicas existentes geralmente apresentam baixa acurácia quando aplicadas a este tipo de problema. Os métodos utilizados para resolução de escoamentos sobre geometrias

com um alto nível de detalhamento requerem malhas não estruturadas, além da utilização de técnicas de remalhagem, acarretando aumento no custo computacional e necessidade de uma implementação numérica complexa, de acordo com Kinoshita et al. (2016). Os autores comentam que, buscando contribuir para a resolução deste problema, tem-se desenvolvido, alternativamente, as metodologias baseadas no conceito de fronteira imersa.

Mariano et al. (2010) associaram o MPEF ao Método da fronteira imersa (MFI), uma metodologia reconhecida por viabilizar a modelagem e a solução de problemas de qualquer complexidade, mobilidade e deformabilidade geométrica, utilizando malhas cartesianas. Essa associação eliminou a principal limitação do MPEF, que exige condições de contorno periódicas, permitindo sua aplicação também a escoamentos sobre geometrias complexas e/ou móveis. Com a metodologia híbrida, as equações da fluidodinâmica são resolvidas pelo método pseudoespectral de Fourier, enquanto as condições de contorno físicas são impostas por meio do termo fonte de força da fronteira imersa, possibilitando a aplicação do método pseudoespectral de Fourier a problemas não periódicos. Essa metodologia foi desenvolvida no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia (MFLab) e ficou conhecida como IMERSPEC, tendo sido validada para diferentes escoamentos complexos, como jatos em desenvolvimento espacial (MOREIRA, 2011), escoamentos bifásicos (VILLELA, 2015), transferência de calor (KINOSHITA, 2015) e interação fluido-estrutura (NASCIMENTO, 2016).

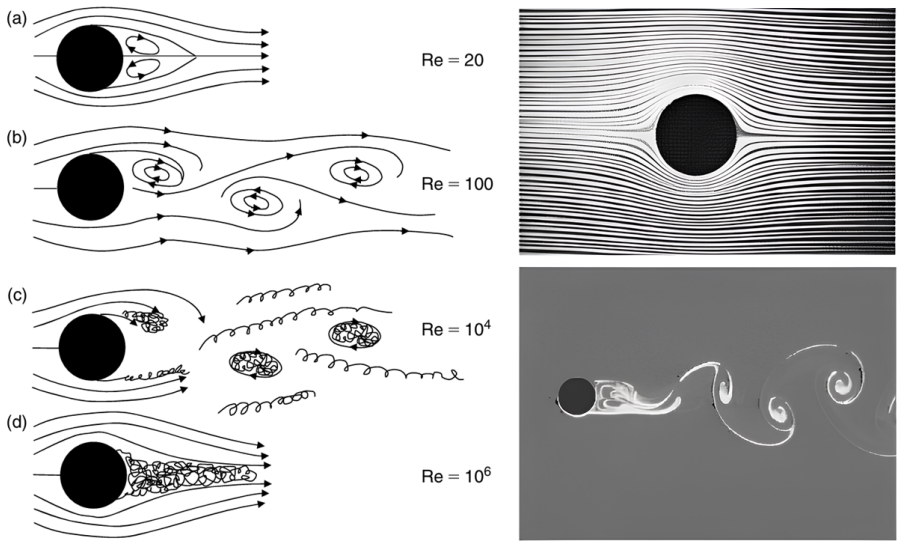
1.2 ESCOAMENTOS TURBULENTOS

A maior parte dos escoamentos observados na natureza e em aplicações práticas são turbulentos. Segundo a definição de Versteeg e Malalasekera (2007), escoamentos turbulentos apresentam um perfil caótico e aparentemente aleatório, com velocidade e pressão mudando continuamente ao longo do tempo. Esses escoamentos são caracterizados principalmente pela multiplicidade de estruturas turbulentas, onde as maiores representam as baixas frequências, controladas pela geometria que as geram, e as menores representam as altas frequências, limitadas pelo número de Reynolds (SILVEIRA-NETO, 2020). Esse perfil é atingido a partir de certo valor do Número de Reynolds, quando as forças viscosas se tornam imperceptíveis em relação às inerciais. A turbulência é um tópico de grande relevância em diversos setores da engenharia. O escoamento de ar próximo à superfície terrestre, onde a rugosidade é extremamente variável, é importante, por exemplo, para a previsão do potencial e do dimensionamento de transfor-

madores de energia em parques eólicos (SILVA, 2018a). Além disso, o estudo da turbulência é essencial para a aerodinâmica de aviões e navios em movimento, influenciando diretamente o desempenho e a eficiência energética desses veículos (PINTO, 2015). Outro exemplo prático é o bombeamento de água para cidades, onde a turbulência afeta a perda de carga nas tubulações e a eficiência dos sistemas de distribuição (PINHEIRO et al., 2015). Na indústria petrolífera, a turbulência também desempenha um papel fundamental na extração e transporte de petróleo, impactando processos como a mistura de fases e a deposição de partículas em dutos (OCHIENG et al., 2022).

A fim de verificar, através de um critério numérico, se determinado escoamento é classificado como turbulento, utiliza-se o número de Reynolds, parâmetro que relaciona os efeitos advectivos e difusivos de quantidade de movimento linear. Quanto mais influentes forem os efeitos advectivos, maior será o grau de instabilidade e, consequentemente, o escoamento tenderá a apresentar um maior grau de turbulência. Por outro lado, quanto maiores forem os efeitos difusivos, maior será a inibição dessas instabilidades, fazendo com que o escoamento tenda a ser laminar (FILHO, 2006). Na Fig. 3, apresentada por Skrbek e Vinen (2009), é possível verificar que, em escoamentos laminares, as perturbações são inibidas até a situação de equilíbrio, enquanto em escoamentos turbulentos, qualquer perturbação injetada é amplificada, tornando o sistema naturalmente instável.

Figura 3 – Regimes de escoamento laminar e turbulento



Fonte: SKRBEK; VINEN (2009)

A princípio, as equações de Navier-Stokes, juntamente com a equação da continuidade, descrevem tanto os escoamentos laminares quanto os turbulentos, sem a necessidade de in-

formações adicionais. Entretanto, quanto maior o número de Reynolds, mais amplo se torna o espectro de energia associado. Para calcular esse espectro, é necessário utilizar malhas extremamente finas, com espaçamentos e passos de tempo da ordem do comprimento característico de Kolmogorov, o que, segundo Klein (2007), é muito menor que o menor volume finito de uma malha que poderia ser utilizada, na prática, em análises computacionais em níveis industriais. Ao resolver as equações da fluidodinâmica diretamente, utilizando métodos como a Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation* (DNS)), são necessários esquemas de discretização espacial e temporal de alta ordem, que não imponham difusão numérica ao cálculo. Além disso, exige-se o uso de condições de contorno apropriadas, com níveis de perturbação específicos para cada caso.

Reynolds apresentou uma alternativa viável para o tratamento da turbulência, ao observar que as propriedades dos escoamentos turbulentos poderiam ser descritas pela superposição de um termo flutuante a um valor médio, sugerindo que os campos presentes nas equações de balanço fossem divididos em componentes médias e flutuantes, turbulentas (WHITE, 2006). Esse processo resulta em uma nova equação, na qual os efeitos do campo turbulento estão isolados dos termos descritivos do escoamento médio, o que, consequentemente, dá origem a um número de variáveis dinâmicas independentes maior do que o número de equações disponíveis. Isso caracteriza um problema matematicamente indeterminado, que ficou conhecido como problema do fechamento na turbulência e que deu origem aos chamados modelos de fechamento da turbulência (KLEIN, 2007).

O uso das variáveis médias reduz drasticamente os recursos computacionais requeridos, funcionando como uma espécie de filtragem que elimina as flutuações das variáveis dependentes. Isso permite o uso de malhas muito menos refinadas e a adoção de hipóteses simplificadoras, como escoamento bidimensional (DESCHAMPS, 2002). No entanto, esse processo introduz um novo termo nas equações de Navier-Stokes, resultante das interações entre as flutuações no campo de escoamento. Este termo representa a média do produto das flutuações de velocidade e é denominado tensor de Boussinesq-Reynolds, que traduz a transferência adicional de quantidade de movimento causada pela turbulência.

O desenvolvimento dos modelos de turbulência baseia-se no conceito de viscosidade turbulenta, que relaciona as contribuições da turbulência na transferência da quantidade de movimento às taxas de deformação do escoamento médio, ou na modelagem da equação de balanço do tensor de Boussinesq-Reynolds. Deschamps (2002) considera que o grau de precisão dos modelos de turbulência depende, sobretudo, da validade das hipóteses consideradas

na sua concepção. O autor destaca que o desenvolvimento desses modelos está, portanto, necessariamente associado a uma compreensão fenomenológica do problema estudado.

No presente trabalho, propõe-se avaliar a aplicabilidade e a potencialidade da metodologia IMERSPEC na simulação de escoamentos turbulentos. Nesse contexto, incorpora-se à metodologia IMERSPEC o modelo de turbulência de Spalart-Allmaras, reconhecido por sua capacidade de capturar fenômenos turbulentos de forma eficaz em diversos escoamentos sobre diferentes geometrias. O modelo de Spalart-Allmaras é amplamente utilizado devido à sua simplicidade computacional e à sua eficácia na simulação de escoamentos com gradientes de velocidade pronunciados e em geometrias complexas, tornando-o uma escolha apropriada para aplicações industriais e práticas.

A utilização desse modelo em simulações bidimensionais (2D) é justificada pela necessidade de validar a metodologia em configurações mais simples antes de avançar para casos tridimensionais mais complexos. As simulações bidimensionais permitem um controle mais eficiente dos parâmetros e facilitam a análise dos resultados, garantindo que o modelo de turbulência seja adequado para capturar os fenômenos físicos relevantes. Além disso, a validação em 2D serve como um passo fundamental para a eventual expansão para simulações tridimensionais, onde o comportamento turbulento é ainda mais complexo de modelar.

1.3 OBJETIVOS

No presente trabalho propõe-se a expansão da metodologia IMERSPEC para a realização de simulações baseadas nas médias de Reynolds para as equações de Navier-Stokes, do inglês, *Reynolds Averaged Navier-Stokes* (RANS). Esse método fundamenta-se nas médias das propriedades do escoamento e em como as flutuações impactam sobre elas, sendo uma alternativa prática para a simulação de escoamentos em altos números de Reynolds. Mais especificamente, este estudo visa explorar como a combinação da metodologia IMERSPEC com o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras pode contribuir para simulações acuradas e eficientes de escoamentos turbulentos. Essa abordagem possibilita investigar não apenas os aspectos macroscópicos do escoamento, mas também as interações entre o fluido e a superfície sólida, fundamentais para diversas aplicações práticas e industriais. A verificação desta capacidade será realizada utilizando resultados de simulações DNS e experimentais disponíveis na literatura.

1.3.1 Objetivos específicos

- Implementar as Equações da fluidodinâmica médias de Reynolds no IMERSPEC;
- Implementar o modelo de Spallart-Almaras no IMERSPEC;
- Verificar as implementações realizadas, utilizando o método das Soluções Manufaturadas;
- Validar as implementações realizadas comparando-as com outros trabalhos da literatura, especialmente, com trabalhos de Simulações Numéricas Diretas (DNS) sobre geometrias simples;
- Validar as implementações realizadas comparando-as com outros trabalhos da literatura, sobre geometrias complexas, especialmente, escoamentos sobre cilindros e aerofólios.

1.4 JUSTIFICATIVA

A importância desse trabalho vincula-se à crescente necessidade do uso de metodologias numérico-computacionais para simulações e modelagens, a fim de elaborar projetos eficientes e confiáveis. Essas análises, quando bem ajustadas e com alto nível de confiabilidade, garantem resultados precisos utilizando técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD). A identificação dos fenômenos físicos subjacentes aos eventos estudados e a aplicação de ferramentas matemáticas para modelá-los são fundamentais para obter resultados críveis e, consequentemente, úteis para embasar decisões essenciais ao longo do desenvolvimento de um determinado projeto.

Apesar dos avanços recentes na simulação direta de escoamentos turbulentos, o conceito de média de Reynolds e a modelagem da turbulência associada para fechamento continuam sendo as principais ferramentas práticas em simulações de engenharia.

A escolha do modelo de Spalart-Allmaras, combinado com a metodologia IMERSPEC, visa alcançar simulações precisas e eficientes de escoamentos turbulentos a números de Reynolds elevados, expandindo a aplicabilidade da metodologia para uma gama mais ampla de problemas de engenharia e contribuindo para o avanço das técnicas de simulação numérica em dinâmica dos fluidos.

Embora se tenha obtido resultados coerentes de escoamentos utilizando a metodologia IMERSPEC, até o momento, não se avançou em escoamentos com números de Reynolds elevados sobre geometrias complexas, pois há necessidade de se representar adequadamente a turbulência. Portanto, justifica-se o presente trabalho com a implementação das equações URANS juntamente com o modelo de turbulência Spalart-Allmaras para realizar simulações de escoamentos turbulentos sobre objetos complexos utilizando a metodologia IMERSPEC.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A modelagem matemática do movimento de fluidos e de seus efeitos é bastante complexa devido à riqueza da física envolvida, à vasta faixa de variação das propriedades de cada fluido e, sobretudo, às fortes não-linearidades inerentes ao comportamento de líquidos e gases. Soluções analíticas para as equações da fluidodinâmica só foram determinadas para uma classe limitada de problemas, adotando várias hipóteses simplificadoras que podem conduzir a resultados inadequados para os interesses da engenharia (SANTIAGO, 2008). Mesmo as equações da camada limite, obtidas com as simplificações de Prandtl, e as equações de Euler, derivadas pela eliminação dos efeitos viscosos, ainda não possuem solução analítica conhecida.

Para Fortuna (2020), esta é a razão que leva à utilização de ensaios experimentais, como testes em túneis de vento ou em tanques d'água, na análise dos fenômenos fluidodinâmicos. Esse tipo de investigação, contudo, possui limitações de custo, tempo e equipamento, sendo comum a realização de medidas em apenas alguns pontos da região de interesse, o que pode não ser sempre satisfatório. O autor elenca dois pretextos que limitam o tratamento experimental: o fato de que o fenômeno em estudo nem sempre é passível de reprodução em laboratório, mesmo em nível reduzido, como na previsão do tempo; e o custo e o tempo da montagem experimental, que podem ser proibitivos, como no estudo da aerodinâmica de aviões em túneis de vento de altas velocidades, que são caros de operar. Assim, as soluções numérico-computacionais passam a ter fundamental importância. Com o advento e desenvolvimento da computação científica, estas soluções tiveram grandes avanços nas últimas décadas.

O regime turbulento é predominante nos escoamentos, uma vez que pequenas perturbações injetadas são naturalmente amplificadas, gerando instabilidades que os conduzem à transição. Utilizando as definições propostas por Silveira-Neto (2020), a turbulência é caracterizada principalmente pela irregularidade, alta difusibilidade e pelas flutuações tridimensionais da vorticidade. Este fenômeno ocorre em altos números de Reynolds, sendo altamente transformativo, imprevisível e contínuo. A predição determinística dos escoamentos turbulentos é desafiadora, sendo o uso de ferramentas estatísticas a abordagem predominante para análise.

Silveira-Neto (2020) considera a turbulência, assim como a transição da turbulência a partir de um regime laminar, um dos temas mais pesquisados na Mecânica dos Fluidos. Isso evidencia as dificuldades inerentes a esse tema, cuja compreensão completa ainda representa um dos grandes desafios da física moderna.

2.1 A TURBULÊNCIA NOS FLUIDOS

2.1.1 Aspectos históricos

O estudo de fenômenos físicos envolvendo fluidos é uma atividade que vem sendo desenvolvida há muitos séculos. Por estarem comumente presentes na natureza, como em fenômenos relacionados à propagação de ondas na atmosfera e nos oceanos, nos escoamentos em rios e em canais, em fenômenos climáticos como ventanias e chuvas, entre outros, sempre foram objetos de observação e curiosidade humana. Fortuna (2020) salienta que, historicamente, pesquisadores de mecânica dos fluidos examinaram o comportamento desses fenômenos experimentalmente muito antes de abordá-los de forma matemática, o que explica o desenvolvimento da hidráulica, que trata do movimento de líquidos confinados ou em escoamento em tubos, canais e outros dispositivos, antes da hidrodinâmica, que determina as relações entre o movimento dos fluidos e as forças que o provocam.

Através das leis de Newton, o matemático suíço Leonard Euler deduziu as equações de movimento dos fluidos, as chamadas equações de Euler. No entanto, a formulação mais robusta e completa das equações de movimento dos fluidos, que inclui os efeitos de viscosidade, evoluiu a partir dos trabalhos de Augustin-Louis Cauchy, que estabeleceu a base matemática para a formulação moderna do contínuo. Subsequentemente, as equações de Navier-Stokes ganharam força no século XIX, com contribuições pioneiras de Claude-Louis Navier, em 1822, Simeon Poisson, em 1829, e George Stokes, em 1845. Segundo Santiago (2008), foi ainda neste século, e no início do século XX, que a mecânica dos fluidos experimentou um grande avanço, especialmente na área de aerodinâmica, impulsionada pelo interesse em projetar máquinas voadoras. O desenvolvimento do motor a combustão interna incentivou novas pesquisas sobre escoamentos externos, resultando nos primeiros perfis aerodinâmicos e nas primeiras teorias sobre a camada limite e a turbulência.

O estudo matemático dos escoamentos turbulentos foi impulsionado por Claude-Louis Navier, que deduziu suas equações com base nas equações de Cauchy para descrever o comportamento de fluidos. Ele introduziu uma descrição molecular para justificar a interação entre as partículas do fluido, antes mesmo da apresentação clara do conceito de tensões cisalhantes nos fluidos. Embora suas premissas moleculares tenham sido questionadas, Navier é amplamente reconhecido pelo seu resultado clássico (FREIRE, 2019). O conceito de tensões internas viscosas foi formalmente introduzido por Saint-Venant, que, em sua obra de 1843, revisou as

equações de Navier, argumentando que a viscosidade é proporcional ao gradiente de velocidade do escoamento. George Stokes, em 1845, forneceu uma nova dedução das equações de movimento, considerando as forças viscosas internas e aplicando argumentos de continuidade para mostrar que as equações de movimento de um corpo elástico e de um fluido viscoso são semelhantes (FREIRE, 2019).

Osborne Reynolds, em 1883, na sua clássica investigação de escoamentos no interior de tubos, estipulou a existência de dois regimes de escoamentos distintos e fundamentais, o laminar e o turbulento. Determinou também a existência de um parâmetro de controle da transição, que ficou conhecido posteriormente como número de Reynolds (Eq. 2.1),

$$Re = \frac{Ud}{\nu}, \tag{2.1}$$

onde U é a velocidade característica, d é o comprimento característico e ν é a viscosidade cinemática do fluido. Outra contribuição importante feita por Reynolds foi a formulação da noção de campos médios e flutuantes em escoamentos turbulentos, desenvolvendo um modelo teórico fundamental para a análise desses escoamentos, que ainda hoje constitui o estado da arte (SILVEIRA-NETO, 2002a).

Contemporâneo de Reynolds, Boussinesq percebeu a formação de estruturas turbilhonares por meio da ação da viscosidade. Diferente do que consideravam Navier e Stokes, o cientista constatou que a ação da viscosidade dependia não apenas do fluido, mas também da posição dentro do escoamento e da taxa de turbulência do mesmo (agitação turbilhonar), o que foi apresentado em seu trabalho de 1877. Para Freire (2019), o mérito essencial de Boussinesq no desenvolvimento de uma teoria para a turbulência foi o reconhecimento do problema de base, algo que seus predecessores tiveram dificuldades em perceber.

A partir dos trabalhos de Prandtl e von Kármán, no período de 1920-1930, os métodos baseados em constantes empíricas, capazes de melhor aproximar as soluções para perfis médios de velocidade, foram desenvolvidos (SILVEIRA-NETO, 2002a). Em particular, Prandtl iniciou a era moderna da mecânica dos fluidos com sua teoria de camada limite. Freire (2002) cita como principais contribuições de Prandtl a teoria do comprimento de mistura, a distribuição logarítmica da velocidade, a lei do atrito, a especificação de modelos diferenciais de fechamento para a turbulência considerando a equação da energia cinética turbulenta, e a descrição de escoamentos sobre superfícies rugosas. Após Prandtl, numerosas hipóteses mais complexas foram levantadas para modelagem da transferência de quantidade de movimento pelas flutuações

turbulentas (POPE, 2000).

2.1.2 Modelagem da turbulência

Uma das características mais importantes de um escoamento turbulento é a multiplicidade de estruturas que o caracteriza (SILVEIRA-NETO, 2020). Esta multiplicidade de estruturas representa também o número de graus de liberdade de um escoamento turbulento, o qual pode ser estimado a partir do número de Reynolds, conforme a Eq. 2.2, onde L é o comprimento característico e l_d é o comprimento de Kolmogorov, menor estrutura da turbulência.

$$N_{gl} = \left(\frac{L}{l_d}\right)^3 = {Re_L}^{\frac{9}{4}}. \tag{2.2}$$

Percebe-se pela Eq. 2.2 que quanto maior o número de Reynolds, maior será o número de graus de liberdade do escoamento. Verifica-se que, mesmo para um modesto número de Reynolds, $Re = 4000$, o cálculo explícito de todos os graus de liberdade, $N_{gl} = 127.243.316$, requer resolver sistemas lineares com 10^8 equações simultâneas.

A Simulação Numérica Direta (DNS) tem por objetivo resolver numericamente todos os graus de liberdade ou todo o espectro de energia associado ao escoamento, sem recorrer à modelagem matemática em qualquer nível. Como resultado, não há necessidade de fazer hipóteses para a modelagem da turbulência ou estabelecer correlações empíricas. Com uma malha suficientemente refinada e métodos numéricos que minimizem dispersão e difusão, os resultados obtidos com DNS são altamente fiéis à física do escoamento (SILVA, 2018b).

Silva (2018b) observa que, atualmente, a DNS é aplicável apenas a escoamentos simples e com números de Reynolds baixos a moderados. No entanto, essa técnica tem sido amplamente adotada em estudos acadêmicos e demonstrado ser uma ferramenta excelente para o estudo da dinâmica da turbulência (KORHONEN et al., 2023; DOMINGO; VERVISCH, 2023; ZHANG et al., 2024).

Para possibilitar o cálculo de escoamentos em geometrias mais complexas e para lidar com números de Reynolds elevados, é necessário reduzir o número de escalas resolvidas, utilizando a simulação de grandes escalas, *Large eddy simulation* (LES), ou até mesmo adotar modelagens que cubram todas as escalas, utilizando a simulação das equações médias de Reynolds, RANS. Dessa forma, é possível reduzir o custo computacional, embora isso envolva compromissos na representação dos fenômenos físicos da turbulência.

As técnicas de solução RANS são utilizadas para resolver as equações médias que modelam o espectro completo das estruturas turbulentas em um escoamento. Essas equações introduzem nove novas incógnitas, tornando o problema matematicamente indeterminado. Para resolver esse conjunto de equações, é necessário modelar esses novos termos ou derivar equações de transporte para eles. A modelagem desses termos adicionais segue a hipótese de Boussinesq, que introduz o conceito de viscosidade turbulenta. De acordo com essa hipótese, as tensões de Reynolds são proporcionais ao tensor taxa de deformação (parte simétrica do gradiente de velocidade), de maneira semelhante às tensões viscosas. A viscosidade turbulenta representa o coeficiente de proporção entre esses tensores e é fundamental para o fechamento do sistema de equações (BISTAFA, 2024).

Silva (2018b) relata que os modelos RANS baseados na hipótese de Boussinesq são empíricos e variam consideravelmente dependendo do tipo de escoamento analisado. Além disso, esses modelos produzem tensões de Reynolds isotrópicas, embora seja sabido que essas tensões são anisotrópicas em escoamentos próximos a superfícies sólidas. Exemplos desses modelos incluem as formulações propostas por Spalart e Allmaras (1994) e Menter (1994), entre outros. Apesar de sua simplicidade e empirismo, esses modelos são mais econômicos em termos de custo computacional e geralmente convergem mais rapidamente que modelos mais complexos.

Modelos de turbulência que não utilizam a hipótese de Boussinesq podem ser desenvolvidos escrevendo equações de transporte para as tensões de Reynolds e para a energia cinética turbulenta. Esses modelos são mais completos que os baseados na hipótese de Boussinesq, pois permitem determinar a anisotropia das tensões de Reynolds, oferecendo uma representação mais precisa da turbulência. No entanto, na prática, esses modelos são mais caros computacionalmente, apresentam problemas de convergência e exigem uma malha muito mais refinada (SILVA, 2018b).

Em todos os modelos de turbulência RANS, os coeficientes de ajuste são determinados por calibração experimental, o que os restringe às classes específicas de escoamentos para as quais foram validados. Esses modelos possuem aplicabilidade robusta em geometrias complexas, como destacado por Silva (2018b). Contudo, o comportamento das grandes escalas do escoamento varia significativamente com base nas condições de contorno e iniciais, impossibilitando uma modelagem uniforme desses efeitos em escoamentos muito distintos. Essa limitação tem impulsionado o interesse por abordagens alternativas, como a LES.

Uma forma de classificar os modelos de turbulência é pelo número de equações de transporte que eles empregam. Esses modelos variam desde aqueles que não utilizam equações de

transporte, os quais utilizam modelos algébricos, até modelos que utilizam múltiplas equações de transporte, dependendo do número de grandezas transportadas (SILVEIRA-NETO, 2020).

Os modelos de zero equações de transporte são uma família baseada na hipótese do comprimento de mistura de Prandtl. A maioria dos modelos sub-malha utilizados para Simulação de Grandes Escalas pertence a essa categoria (SILVEIRA-NETO, 2002b). Nos modelos de uma equação, uma equação diferencial de transporte é resolvida para uma determinada propriedade turbulenta, normalmente a energia cinética turbulenta (k), enquanto uma segunda propriedade turbulenta, geralmente um comprimento de escala turbulento, é expressa por uma equação algébrica. Os modelos a duas equações apresentam duas equações diferenciais de transporte de propriedades turbulentas, que são quantidades independentes diretamente relacionadas com as escalas de comprimento e tempo. Esses modelos devem ser formulados com uma viscosidade turbulenta anisotrópica, propriamente invariante e que seja não linear nos gradientes da velocidade média (KLEIN, 2007).

2.1.2.1 Modelo $k-\epsilon$

O modelo de fechamento da turbulência $k-\epsilon$ modela a turbulência utilizando duas variáveis de balanço: a energia cinética turbulenta (k) e a taxa de transformação (ϵ) da energia cinética turbulenta (k). Proposto por Launder e Spalding (1974), esse modelo expandiu a ideia original de Chou (1945), buscando obter equações de transporte precisas para essas grandezas. Wilcox (1993) detalha os fundamentos e aplicações desse modelo, destacando suas contribuições para a análise e simulação de escoamentos turbulentos. As equações modeladas para k e ϵ são:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i k)}{\partial x_i} = P - \rho\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right], \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \varepsilon)}{\partial x_i} = C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P - C_{2\varepsilon}\rho\frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right] + C_{\varepsilon 3}\rho\frac{\varepsilon}{k}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial k}{\partial x_j}, \tag{2.4}$$

onde ρ é a massa específica do fluido, u_i são as componentes da velocidade média, P é a produção de energia cinética turbulenta, μ é a viscosidade dinâmica do fluido e μ_t é a viscosidade turbulenta.

Os valores das constantes para o modelo $k-\epsilon$ padrão foram determinados por Launder e Spalding (1974). Estes valores foram calibrados para representar o equilíbrio da camada

logarítmica e o decaimento da energia cinética turbulenta em um escoamento uniforme. As constantes obtidas são $C_{1\varepsilon} = 1,44$, $C_{2\varepsilon} = 1,92$, $C_\mu = 0,09$, $\sigma_k = 1,0$ e $\sigma_\varepsilon = 1,3$.

O modelo de fechamento da turbulência $k-\epsilon$ padrão foi um dos primeiros amplamente adotados em programas comerciais de CFD durante a popularização dessa tecnologia. Entretanto, suas limitações foram rapidamente identificadas. Uma crítica significativa é sua propensão a gerar excesso de viscosidade turbulenta em escoamentos com gradientes adversos de pressão, como ressaltado por Rodi e Scheuerer (1986). Esse excesso de difusão turbulenta frequentemente resulta na subestimação de regiões de recirculação previstas pelo modelo (LABOZETTO, 2016).

2.1.2.2 Modelos $k-\omega$ e $k-\omega$ SST

O modelo $k-\omega$ padrão foi proposto por Wilcox (1988) como uma extensão das ideias de Kolmogorov. Neste modelo, utiliza-se uma equação para a taxa de dissipação turbulenta específica ω, interpretada como a proporção de ϵ em k, sendo definida por $\omega = \frac{\epsilon}{kC_\mu}$. As equações que descrevem o modelo são dadas por:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = P_k - \beta^* k\omega + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \sigma_k \nu_t)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right], \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \sigma_\omega \nu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right], \tag{2.6}$$

onde P_k é a taxa de produção de energia cinética turbulenta, ν é a viscosidade cinemática, ν_t é a viscosidade turbulenta, e σ_k, σ_ω, α, β, β^* são constantes empíricas, calibradas de maneira semelhante às constantes do modelo $k-\epsilon$. Os valores dessas constantes são: $\alpha = \frac{5}{9} = 0,556$, $\beta = \frac{3}{40} = 0,075$, $\beta^* = 0,09$, $\sigma_k = \frac{1}{2}$, $\sigma_\omega = \frac{1}{2}$.

O modelo $k-\omega$ padrão apresenta resultados significativamente superiores na simulação de escoamentos internos com gradientes adversos de pressão em comparação com o modelo $k-\epsilon$. No entanto, uma deficiência crítica foi prontamente identificada. Conforme observado por Menter (1994), o modelo $k-\omega$ padrão é fortemente influenciado pela condição de contorno de ω na corrente livre ao simular escoamentos externos. Quando valores muito baixos de ω são prescritos na corrente livre, há uma previsão de viscosidade turbulenta excessiva nas regiões superiores da camada limite.

Menter (1994) propôs uma modificação para modelo $k-\omega$ incluindo um termo de difusão cruzada na equação de ω, atuando na região da camada limite próxima ao escoamento externo, enquanto esse termo é ausente nas proximidades da parede. O modelo proposto é conhecido como $k-\omega$ SST (*Shear Stress Transport*). Este modelo utiliza uma função, $F1$, que garante que $F1 \to 0$ quando $y \to \infty$ e $F1 \to 1$ quando $y \to 0$. A equação de ω é dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\gamma}{\nu_t} P_k - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \sigma \nu_t)\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right] + 2(1-F1)\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, \tag{2.7}$$

com $\alpha = 0,556F1 + 0,44(1-F1)$, $\beta = 0,075F1 + 0,0828(1-F1)$ e $\sigma = 0,5F1 + 0,856(1-F1)$.

$$F1 = \tanh\left(\left[\min\left(\max\left(\frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2\omega}\right), \frac{4\sigma_k k}{CD_{k\omega} y^2}\right)\right]^4\right), \tag{2.8}$$

$$CD_{k\omega} = \max\left(2\sigma_{\omega 2}\frac{1}{\omega}\frac{\partial k}{\partial x_j}\frac{\partial \omega}{\partial x_j}, 10^{-20}\right), \tag{2.9}$$

onde $\sigma_{\omega 2} = 0,856$.

O modelo $k-\omega$ SST é considerado o modelo de duas equações mais bem-sucedido no sentido de representar uma ampla gama de escoamentos (LABOZETTO, 2016). Ele é a escolha predominante em aplicações aeronáuticas, devido à física envolvida nos escoamentos externos.

2.1.2.3 Modelos a uma equação e o modelo de Spalart-Allmaras

Uma das conclusões de Rodi e Scheuerer (1986) foi que modelos com apenas uma equação de balanço podem prever escoamentos com gradientes adversos de pressão de maneira mais eficiente que o modelo $k-\varepsilon$ padrão. Segundo Labozetto (2016), enquanto alguns pesquisadores preferem aumentar a complexidade na modelagem da turbulência visando maior generalidade, outros optam por simplificar ao máximo os modelos. Na classe de modelos de viscosidade de turbulência a uma equação, uma equação diferencial de balanço é resolvida para uma quantidade turbulenta específica (SILVEIRA-NETO, 2020). Esta quantidade pode ser usada para determinar grandezas características da turbulência, como comprimento e velocidade, utilizadas na avaliação da viscosidade turbulenta, que é proporcional à massa específica ρ, à flutuação de velocidade V_L e ao comprimento característico L.

O modelo de uma equação mais utilizado no passado assume a velocidade característica proporcional à raiz quadrada da energia cinética turbulenta ($k^{1/2}$), resultando na fórmula de Kolmogorov-Prandtl (SILVEIRA-NETO, 2020):

$$\mu_t = \rho C_\mu L k^{1/2}, \tag{2.10}$$

onde μ_t é a viscosidade turbulenta, ρ é a massa específica, C_μ é uma constante de proporcionalidade, L é o comprimento característico, e k é a energia cinética turbulenta.

O campo de energia cinética turbulenta é determinado resolvendo-se a correspondente equação diferencial de balanço. Esta equação é derivada a partir das equações de Navier-Stokes, aplicando-se o produto escalar da equação da quantidade de movimento com o vetor velocidade u_i e tomando-se a média temporal do resultado. Ao subtrair desta a equação da energia mecânica instantânea, obtém-se a equação da energia cinética turbulenta (k):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_i^2} - \epsilon, \tag{2.11}$$

onde u_j é a velocidade média na direção j; $\overline{u_i' u_j'}$ é o tensor de Reynolds; $\overline{u_i' p'}$ é a correlação pressão-velocidade; ν é a viscosidade cinemática; e ϵ é a potência específica de transformação viscosa.

Na Eq. 2.11 existem termos de natureza complexa que necessitam ser determinados em função de quantidades conhecidas ou que possam ser calculadas. Após introduzidas hipóteses adicionais, a forma modelada da equação da energia cinética turbulenta (2.11) passa a ser:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_j} k\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_j}\right] + P_k - \epsilon, \tag{2.12}$$

onde,

$$P_k = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}, \tag{2.13}$$

$$\epsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L}. \tag{2.14}$$

Nessa perspectiva, Menter (1997) desenvolveu um modelo de fechamento de uma equação para a viscosidade turbulenta a partir dos modelos $k-\varepsilon$ e $k-\omega$. O modelo propõe que a turbulência consiste de pequenas estruturas turbilhonares que são continuamente formadas e dissipadas. Enquanto posteriormente Menter (1997) derivou seu modelo usando regras simples

de cálculo diferencial, Spalart e Allmaras (1994) chegaram à sua equação de balanço apenas por argumentos dimensionais. Para o termo de dissipação de turbulência, decidiram usar como comprimento característico a própria distância da parede d obtida do modelo de comprimento de mistura de Prandtl. A equação básica resultante é:

$$\frac{D\nu_t}{Dt} = c_{b1}\frac{v_t}{S} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_t\frac{\partial v_t}{\partial x_j}\right) + c_{b2}\left(\frac{\partial v_t}{\partial x_j}\right)^2 - C_{w1}f_w\left(\frac{v_t}{d}\right)^2. \tag{2.15}$$

A partir da Eq. 2.15, as constantes e funções de amortecimento foram calibradas para que uma viscosidade turbilhonar transformada, $\tilde{\nu}$, relacionada com ν_t, tivesse uma lei de variação linear entre a parede e a camada logarítmica ($\tilde{\nu} = \kappa u^* d$). Dessa calibração resulta a equação de transporte definida na Eq. 2.16.

$$\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u_j}\tilde{\nu})}{\partial x_j} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\left(\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right) + c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} - C_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2, \tag{2.16}$$

onde a viscosidade turbulenta usada na hipótese de Boussinesq, ν_t, é dada por:

$$\nu_t = \tilde{v}f_{\nu_1}, \tag{2.17}$$

$$f_{\nu_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu_1}^3}, \tag{2.18}$$

onde,

$$\chi = \frac{\tilde{v}}{\nu}. \tag{2.19}$$

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2}f_{\nu 2}, \tag{2.20}$$

sendo,

$$f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1+\chi f_{\nu 1}}. \tag{2.21}$$

A taxa média de deformação do escoamento, S, é definida em termos da magnitude do tensor de vorticidade, Ω:

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \tag{2.22}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{2.23}$$

A função f_w é definida como unitária na região logarítmica da camada limite, amplificando o efeito do termo relacionado à produção de energia cinética turbulenta à medida que se aproxima da parede, e tendendo a zero em regiões mais afastadas. Sua definição é:

$$f_w = g\left[\left(1 + \frac{C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6}\right)^{\frac{1}{6}}\right], \tag{2.24}$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r), \tag{2.25}$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}. \tag{2.26}$$

Finalmente, o modelo padrão é fechado com as constantes:

$$c_{b1} = 0,1355, \quad c_{b2} = 0,622, \quad \sigma = \frac{2}{3}, \quad \kappa = 0,41,$$
$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma}, \quad c_{w2} = 0,3, \quad c_{w3} = 2,0, \quad c_{v1} = 7,1.$$

O modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras foi desenvolvido principalmente para aplicações de fluidodinâmica computacional na área aeroespacial, onde o escoamento sobre superfícies sólidas é crucial. Este modelo tem gerado bons resultados para escoamentos com gradientes adversos de pressão e tem ganhado popularidade em estudos de turbinas (SILVEIRA-NETO, 2020).

2.2 MÉTODOS ESPECTRAIS

Os métodos de alta ordem têm recebido atenção considerável na comunidade científica nas últimas décadas devido ao seu potencial em proporcionar maior acurácia na solução numérica. Embora apresentem um custo computacional mais elevado do que os métodos de baixa ordem, eles permitem obter soluções mais detalhadas para um mesmo nível de refinamento de malha, tornando-se vantajosos para a análise de fenômenos complexos (NASCIMENTO et al., 2024). Esses métodos são especialmente relevantes para a visualização detalhada de estruturas complexas, análise de escoamentos turbulentos e geração de dados de referência (*benchmark*).

Na comunidade de CFD, diversos métodos de alta ordem foram desenvolvidos para lidar com uma ampla gama de problemas. De acordo com Wang et al. (2012), no espectro de precisão, os métodos espectrais são reconhecidos como os mais acurados, enquanto esquemas

de primeira ordem, como o método de Godunov, por exemplo, são considerados os menos acurados.

Os métodos espectrais são uma classe avançada de técnicas para resolver Equações Diferenciais Parciais (EDPs), que se baseiam na aproximação das soluções por polinômios. Eles são uma extensão dos esquemas de discretização para EDPs, conhecidos como método dos resíduos ponderados (CANUTO et al., 2006). Esses métodos têm a capacidade de alcançar alta acurácia, limitada apenas pela acurácia computacional. Teoricamente, isso é possível devido à habilidade de aproximar qualquer função analítica com uma taxa de convergência exponencial (CANUTO et al., 2006). Numericamente, a taxa de convergência da solução discreta em relação à solução exata é determinada pela regularidade da solução exata, o que justifica o crescente interesse e aplicação dos métodos espectrais na pesquisa científica e engenharia computacional.

Como todo método baseado em resíduos ponderados, os métodos espectrais apresentam duas classes de funções utilizadas em sua formulação: as funções de aproximação e as funções de ponderação. As funções de aproximação são usadas como funções de base para a expansão em série (truncada) da solução, enquanto as funções de ponderação garantem que a equação diferencial seja satisfeita da maneira mais precisa possível pela expansão em série. As escolhas mais comuns para as funções de aproximação incluem as séries de Fourier, os polinômios de Legendre e os polinômios de Chebyshev (CANUTO et al., 1988).

A utilização das séries de Fourier como funções de teste resultou no método espectral de Fourier, que aproveita as propriedades vantajosas das transformadas de Fourier para resolver equações diferenciais parciais (FIGUEIREDO, 2018). Historicamente, o método espectral de Fourier foi desenvolvido na década de 1970, quando o uso de séries de Fourier truncadas para discretizar problemas com condições de contorno periódicas foi combinado com o então recente algoritmo *Fast Fourier Transform* (FFT), de Cooley e Tukey (1965). Este algoritmo possibilitou o cálculo das transformadas de Fourier com um custo computacional significativamente menor em comparação com a técnica conhecida como *Discrete Fourier Transform* (DFT).

Apesar das vantagens, a FFT e a DFT apresentam uma limitação significativa: a necessidade de impor condições de contorno periódicas. Como a transformada de Fourier é uma integral imprópria, os algoritmos de FFT e DFT precisam truncar a série para serem viáveis do ponto de vista computacional, garantindo a acurácia e a estabilidade do método apenas se a função for periódica. Isso representa uma limitação considerável, uma vez que condições de contorno periódicas raramente estão presentes em aplicações de interesse físico. Para problemas não-periódicos, a expansão em série de Fourier pode gerar oscilações espúrias que

comprometem a solução do problema (MARIANO, 2011).

Para superar essas limitações, algumas abordagens foram propostas, como o método de *reduction to periodicity* de Roache (1978), que sugere a utilização da FFT mesmo para problemas não-periódicos, através de interpolações com polinômios de alta ordem a cada passo de tempo. Os resultados demonstraram o potencial do método, apresentando grande estabilidade e acurácia em problemas unidimensionais testados. No entanto, a aplicação desta técnica a problemas bidimensionais e tridimensionais revelou-se restrita devido ao alto custo computacional envolvido.

Fu e Liu (2012) propuseram um método alternativo para mitigar a exigência de periodicidade das condições de contorno em algoritmos baseados na Transformada Discreta de Fourier, bem como para reduzir os efeitos do fenômeno de Gibbs. Denominado *Buffered Fourier Spectral Method* (BFSM), o método proposto pelos autores fundamenta-se na periodização do problema por meio da criação de extensões periódicas, seguida da interpolação utilizando polinômios de alta ordem. Evidenciou-se que, mesmo em malhas relativamente grosseiras, esse método pode fornecer resultados superiores aos obtidos com abordagens clássicas, como os esquemas centrados de diferenças finitas de segunda ordem.

Uma limitação fundamental dos métodos espectrais surge ao tratar termos não lineares, como o termo advectivo nas equações de Navier-Stokes. A aplicação direta da transformada espectral a esses termos envolve uma convolução, correspondendo à transformada do produto de duas funções. No entanto, a resolução explícita dessa convolução é computacionalmente inviável, devido ao elevado número de operações necessárias para avaliar a integral numérica, resultando em um custo computacional extremamente alto (MARIANO et al., 2022). Contudo, Canuto et al. (2006) demonstraram que o tratamento pseudoespectral do termo não linear pode atenuar parte desses desafios computacionais.

Outra estratégia para a adaptação do método espectral de Fourier a problemas não periódicos foi proposta por Mariano (2011) e Mariano et al. (2022), que integraram o método pseudoespectral de Fourier ao método da fronteira imersa. Nesse contexto, o autor validou a metodologia, denominada IMERSPEC, por meio de simulações de problemas clássicos, como a cavidade com tampa deslizante e o escoamento ao redor de um prisma quadrado. De maneira análoga, Villela (2015) expandiu a aplicação do IMERSPEC para escoamentos bifásicos, incluindo simulações da ascensão de bolhas. Além disso, Kinoshita (2015) e Kinoshita et al. (2016) aplicaram essa técnica ao estudo da transferência de calor, enquanto Nascimento (2016) e Nascimento et al. (2024) combinaram o método pseudoespectral de Fourier com o

método da fronteira imersa para investigar fenômenos de interação fluido-estrutura. No entanto, uma limitação comum a esses estudos é que são predominantemente bidimensionais, o que compromete a capacidade de previsão de escoamentos turbulentos, a menos que um modelo URANS seja incorporado às equações resolvidas.

Por outro lado, Moreira (2011) expandiu a metodologia para simulações tridimensionais, permitindo a análise de escoamentos turbulentos em jatos espaciais. Para isso, foi implementado um modelo de submalha na formulação de grandes escalas (LES), possibilitando a captura das estruturas turbilhonares de forma mais realista. Os resultados obtidos demonstraram concordância com dados experimentais, tanto qualitativa quanto quantitativamente.

A aplicabilidade da metodologia IMERSPEC também foi validada para escoamentos sobre aerofólios com números de Reynolds baixos ($Re < 6000$). Os estudos de Albuquerque, Villela e Mariano (2023a), Albuquerque, Villela e Mariano (2023b) concentraram-se em aerofólios altamente esbeltos, como os perfis NACA 0002, NACA 0008, NACA 4402 e NACA 4404. A modelagem desses escoamentos apresenta desafios significativos devido à elevada relação de aspecto e à sensibilidade às variações dos parâmetros de simulação. Nessas investigações, foram determinados os coeficientes de sustentação e arrasto, analisando-se a influência das condições numéricas no comportamento do escoamento. Os resultados demonstraram boa concordância com dados disponíveis na literatura, além de evidenciar que o uso de diferentes funções de distribuição, fundamentais para o método da fronteira imersa, aprimora significativamente a acurácia das previsões (ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO, 2024).

Embora os estudos bidimensionais tenham demonstrado a aplicabilidade da IMERSPEC a escoamentos complexos, sua utilização tem sido limitada a baixos números de Reynolds. Essa restrição decorre da presença acentuada de oscilações espúrias em regimes de Reynolds elevados, comprometendo a estabilidade e a acurácia das simulações. Para ampliar o escopo da metodologia e viabilizar sua aplicação a escoamentos turbulentos, este estudo propõe a integração da IMERSPEC com o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras. Esse modelo tem se mostrado altamente eficaz na simulação de escoamentos externos, especialmente em cálculos aerodinâmicos de aerofólios, nos quais a utilização da distância d como escala de comprimento permite a reprodução acurada da camada limite. Além disso, sua aplicação tem sido investigada em diferentes configurações de escoamento, como no estudo de Albuquerque, Villela e Mariano (2025), que analisaram simulações de escoamento plenamente desenvolvido em canal.

Com o aumento da complexidade dos escoamentos, torna-se essencial empregar aborda-

gens numéricas mais eficientes. Em determinadas condições, métodos convencionais podem se tornar excessivamente onerosos devido à necessidade de resolver grandes sistemas lineares acoplados entre pressão e velocidade. Nesse contexto, a associação da IMERSPEC ao modelo de Spalart-Allmaras apresenta um potencial significativo para aprimorar tanto a acurácia quanto a eficiência das simulações de escoamentos turbulentos. Essa abordagem não apenas expande o alcance da metodologia para uma gama mais ampla de aplicações em engenharia, mas também contribui para o avanço das técnicas numéricas em dinâmica dos fluidos.

Entre as metodologias espectrais previamente investigadas, destaca-se o trabalho de Lundbladh et al. (1999), que desenvolveram uma metodologia eficiente para simular escoamentos incompressíveis sobre uma placa plana por meio de integração espectral das equações de Navier-Stokes. O algoritmo proposto pode ser utilizado em simulações temporais ou espaciais; nesta última, aplica-se a técnica da *fringe region* para permitir entrada e saída de escoamento em um domínio espectralmente periódico. A discretização é feita com séries de Fourier nas direções paralelas à placa e polinômios de Chebyshev na direção normal. A integração temporal combina métodos de Adams-Bashforth ou Runge-Kutta para os termos não lineares e o esquema de Crank-Nicholson para os termos viscosos. A abordagem se destaca pela robustez e flexibilidade em diferentes regimes de escoamento.

Abordagens semelhantes à de Lundbladh et al. (1999) foram posteriormente adotadas por Schlatter et al. (2008), Strand e Goldstein (2011) e Bhushan e Muthu (2019), os quais também investigaram o escoamento na camada limite utilizando métodos espectrais com a formulação espacial. Esses estudos se baseiam no mesmo princípio de utilizar uma *fringe region* para viabilizar a simulação de escoamentos com desenvolvimento espacial dentro de um domínio espectralmente periódico, mantendo a combinação de discretização com Fourier nas direções paralelas à parede e Chebyshev na direção normal. Esses trabalhos expandem a aplicação da metodologia para diferentes regimes de escoamento e geometrias, reforçando sua eficácia na modelagem da transição e do desenvolvimento de camadas limite turbulentas.

Mais recentemente, Valadão et al. (2025) aplicaram o método pseudoespectral de Fourier para investigar os efeitos do atrito linear (ou atrito de Ekman) sobre a cascata direta de enstrofia em escoamentos turbulentos bidimensionais. Utilizando um código otimizado para execução em GPU, os autores realizaram simulações de alta resolução das equações de Navier-Stokes 2D, permitindo explorar amplamente diferentes regimes de número de Reynolds e coeficiente de atrito. Seus resultados evidenciam a versatilidade dos métodos espectrais em contextos bidimensionais, inclusive para análise de fenômenos estatísticos em cascatas turbulentas.

3 METODOLOGIA

Este capítulo tem como objetivo apresentar a metodologia empregada para o desenvolvimento do presente trabalho, descrevendo as formulações matemáticas, as hipóteses e os métodos numéricos utilizados. Apresenta-se a formulação base para escoamentos turbulentos e sua modelagem, assim como a proposta da metodologia IMERSPEC. É abordada a formulação matemática do método da fronteira imersa (MFI), baseado na Múltipla Imposição Direta da Força, *Multi-Direct Forcing* (MDF). Por fim, descreve-se o método pseudoespectral de Fourier (MPEF), procedendo a transformação das equações de Navier-Stokes para o espaço espectral, bem como o procedimento de discretização temporal. Salienta-se que, para o desenvolvimento deste capítulo, foram tomados como base os trabalhos de Mariano (2011), Moreira (2011), Villela (2015), Magalhães (2022) e Mariano et al. (2022).

3.1 MODELAGEM MATEMÁTICA DIFERENCIAL

A modelagem matemática de escoamentos incompressíveis e isotérmicos de fluidos newtonianos é baseada na resolução das equações de Navier-Stokes, cuja forma indicial é apresentada na Eq. 3.1. Além de satisfazer esta equação, o campo de velocidades deve também satisfazer a equação da continuidade, Eq. 3.2, que garante que o balanço de massa não seja violado.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{f_i}{\rho}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \tag{3.2}$$

Nestas equações $\rho\,[kg/m^3]$ é a massa específica e $\nu\,[m^2/s]$ a viscosidade cinemática, sendo estas propriedades que caracterizam o fluido. As propriedades que caracterizam o escoamento são as componentes do vetor velocidade $u_i\,[m/s]$, na direção $i = 1, 2$ no caso de problemas bidimensionais, o campo de pressão estática $p\,[N/m^2]$ e o termo de força $f_i\,[N/m^3]$, o qual representa as forças externas que atuam sobre a partícula de fluido, como, por exemplo, a força gravitacional, ou a força eletromagnética.

As equações de balanço podem ser adimensionalizadas utilizando escalas temporais e espaciais com base em parâmetros como uma velocidade de referência u_0 e um comprimento característico l. Nesta forma adimensional, as equações dependem apenas de um coeficiente

adimensional, o número de Reynolds (Re), e um fator associado à força de corpo. O número de Reynolds caracteriza o regime do escoamento, representando a relação entre as forças inerciais e as forças viscosas. Devido à natureza não linear da Equação 3.1, um aumento no número de Reynolds resulta em um aumento no número de graus de liberdade no escoamento, ampliando o espectro de energia cinética turbulenta e aumentando a importância dos fenômenos relacionados à turbulência (WHITE, 2006).

Apesar de as equações de Navier-Stokes terem sido postuladas no Século XIX, elas ainda são consideradas um grande desafio matemático. Nas soluções analíticas existentes, são incorporadas muitas simplificações que, na maioria dos casos, representam soluções idealizadas, dificilmente observadas no mundo real. Assim, resultados mais realistas são proporcionados por metodologias numéricas, obtidas através da solução do modelo matemático diferencial, desenvolvido a nível do contínuo, em um domínio discreto. Como o modelo computacional está limitado a um número finito de nós ou células, informações podem ser perdidas, especialmente se tratando de escoamentos turbulentos. Todavia, se o tamanho da malha é da ordem das grandezas características de Kolmogorov, que representam as menores estruturas turbulentas no espectro, todas as informações fluidodinâmicas podem ser avaliadas pelo modelo fundamental (SILVEIRA-NETO, 2020).

A utilização de malhas muito refinadas, requeridas para o cálculo de todas as estruturas turbilhonares, implica em custos computacionais extremamente elevados, visto que o número de pontos exigidos na malha cresce mais rápido que o quadrado do número de Reynolds, limitando o uso da Simulação Numérica Direta (DNS) a escoamentos pouco complexos, dependendo fortemente do hardware disponível. Embora o uso de DNS para escoamentos a maiores números de Reynolds esteja sendo possibilitado a cada ano, dado o avanço de métodos computacionais e a evolução dos hardwares, esses valores ainda são modestos quando se trata de aplicações industriais (MAGALHÃES, 2022).

Uma alternativa à abordagem determinística da DNS é a decomposição das escalas de turbulência, a partir de Equações médias de Boussinesq-Reynolds ou a partir de Equações de Navier-Stokes filtradas (SMAGORINSKY, 1963). Na primeira perspectiva, separa-se as escalas da turbulência em escalas relativas ao comportamento médio e relativas às flutuações em relação a esta média. Na segunda, separa-se as escalas da turbulência em dois grupos: o grupo das grandes e o grupo das pequenas escalas, ou escalas sub-malha (SILVEIRA-NETO, 2020).

Certa informação genérica de um escoamento turbulento obtida através de experimentação material ou numérica (DNS), aqui representada por $\varphi(x_i, t)$, pode ser decomposta em uma

soma de um valor médio no tempo e uma flutuação sobre esse valor, como mostra a Eq. 3.3:

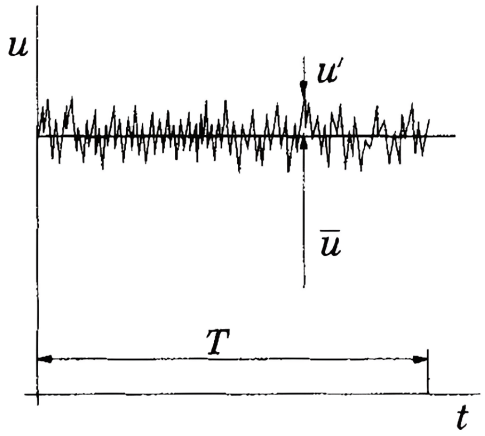
$$\varphi\left(x_i, t\right) = \bar{\varphi}\left(x_i\right) + \varphi'\left(x_i,\ t\right), \tag{3.3}$$

sendo,

$$\bar{\varphi}\left(x_i\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi\left(x_i, t\right) dt. \tag{3.4}$$

onde t é o tempo e T é o período no qual a variável deve ser integrada de forma a gerar uma média representativa do escoamento, sendo T suficientemente grande comparado à escala de tempo das flutuações, como mostrado na Figura 4, que ilustra o perfil de um componente de velocidade de um escoamento turbulento exposto a um gradiente de pressão constante (FERZIGER; PERIC, 2002).

Figura 4 – Variação da velocidade com o tempo em um escoamento a ΔP constante



Fonte: FERZIGER; PERIC (2002)

Segundo Silveira-Neto (2020), a proposta de decomposição dos escoamentos turbulentos em uma parte média e uma parte flutuante atende a uma parcela das aplicações de engenharia e de outras áreas que envolvam a dinâmica dos fluidos estacionária, todavia, não pode atender às classes de problemas transientes. Smagorinsky (1963), então, propôs a distribuição da informação de interesse, $\varphi\left(x, t\right)$, em uma parte filtrada, $\bar{\varphi}\left(\vec{x}, t\right)$, e uma parte que contempla a flutuação da informação em relação à parte filtrada, $\varphi'\left(\vec{x}, t\right)$.

$$\varphi\left(\vec{x}, t\right) = \bar{\varphi}\left(\vec{x}, t\right) + \varphi'\left(\vec{x}, t\right). \tag{3.5}$$

Aqui, $\bar{\varphi}\left(\vec{x}, t\right)$ é a parte filtrada da variável $\varphi\left(x, t\right)$, que representa fisicamente as menores frequências do escoamento ou as maiores estruturas turbilhonares. $\varphi'\left(\vec{x}, t\right)$ é a flutuação de

$\bar{\varphi}(\vec{x},t)$, em relação à sua parte filtrada, que representa fisicamente as maiores frequências do escoamento ou as menores estruturas turbilhonares.

Matematicamente, o processo de filtragem é realizado por meio de uma integral de convolução entre uma função de filtragem e a função a ser filtrada. As Eqs. 3.6 e 3.7 apresentam, respectivamente, uma filtragem temporal e uma filtragem espacial, em que $g(t')$ e $h(x')$ são as funções filtro. Para o caso da filtragem temporal, $\Delta\mathrm{t}$ é o tempo de integração, o qual determina a frequência de corte do processo de filtragem, $f_c = \frac{2\pi}{\Delta\mathrm{t}}$. Já para a filtragem espacial, $\Delta\mathrm{V}$ é o volume de integração, o qual determina o número de onda de corte do processo $\vec{k}_c = 2\pi\left(\frac{1}{\Delta\mathrm{x}}, \frac{1}{\Delta\mathrm{y}}, \frac{1}{\Delta\mathrm{z}}\right)$.

$$\bar{\varphi}(\vec{x},t) = \int_{\Delta\mathrm{t}} g(t')\,\varphi(\vec{x}, t-t')\,dt', \tag{3.6}$$

$$\bar{\varphi}(\vec{x},t) = \int_{\Delta\mathrm{V}} h(\vec{x}')\,\varphi(\vec{x}-\vec{x}', t)\,d\vec{x}. \tag{3.7}$$

3.1.1 Equações da fluidodinâmica

Aplicando o operador de filtragem, aqui representado por $(\bar{\ })$, sobre a equação da conservação de massa, Eq. 3.2, e utilizando a propriedade comutativa entre este operador e o operador derivada parcial, já que estes operadores são lineares, tem-se:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0. \tag{3.8}$$

Similarmente, aplicando o operador de filtragem sobre a equação de Navier-Stokes, Eq. 3.1, e considerando a propriedade comutativa, tem-se a Eq. 3.9:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\overline{f}_i}{\rho}. \tag{3.9}$$

A Eq. 3.9 é apresentada como uma equação de transporte para as variáveis filtradas, $\overline{u}_i$. No entanto, o termo de transporte advectivo, $\overline{u_i u_j}$, aparece como um produto filtrado, em vez do produto das variáveis dependentes filtradas, o que impede que a Eq. 3.9 seja resolvida na forma atual. Busca-se, então, uma forma de reescrever essa equação de maneira a se obter o produto $\overline{u_i}\,\overline{u_j}$, o que é feito definindo-se o tensor global da turbulência, como:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i\,\overline{u}_j, \tag{3.10}$$

onde $\tau_{ij} = \overline{u_i{'}u_j{'}}$, para URANS.

Embora τ_{ij} esteja relacionado aos termos não lineares associados à turbulência, sua natureza física é distinta do tensor viscoso molecular. No entanto, é comum, por conveniência matemática, levá-lo para o segundo membro da equação e agrupá-lo com o tensor viscoso. Assim, a expressão obtida após a substituição das variáveis decompostas é dada por:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i}\,\overline{u_j}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[v\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \tau_{ij}\right] + \frac{\overline{f}_i}{\rho}. \tag{3.11}$$

A Eq. 3.11, para as componentes da velocidade, é conhecida como equação média transiente de Reynolds, do inglês *Unsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes Equation* (URANS). Por ela, é possível observar que a consequência imediata do processo de transformação das equações instantâneas é o aparecimento do tensor adicional $\tau_{ij} = \overline{u_i{'}u_j{'}}$, conhecido como tensor de Boussinesq-Reynolds, que representa toda a troca de quantidade de movimento linear entre a parte filtrada e a parte flutuante do escoamento turbulento. Este tensor pode ser reescrito na forma matricial como se segue:

$$\tau = \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Verifica-se que o tensor da Eq. 3.12 é simétrico, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, pois a ordem das componentes das flutuações de velocidade não afeta os momentos estatísticos de segunda ordem que o compõem. Nos escoamentos turbulentos, os componentes normais ($\overline{u'u'}$, $\overline{v'v'}$ e $\overline{w'w'}$) são sempre diferentes de zero, uma vez que são formados pelo quadrado da velocidade turbulenta. Já os componentes de cisalhamento ($\overline{u'v'}$, $\overline{u'w'}$ e $\overline{v'w'}$) estão associados a diferentes componentes da velocidade (VERSTEEG; MALALASEKERA, 2007). O surgimento deste novo termo deixa o modelo matemático aberto, uma vez que seis novas variáveis são introduzidas. Esse cenário caracteriza o Problema do Fechamento, tornando-se necessário determinar uma correlação para os componentes do tensor de Boussinesq-Reynolds.

A modelagem do tensor de Boussinesq-Reynolds é, em geral, feita a partir de duas classes de métodos: aqueles baseados na hipótese de Boussinesq e aqueles baseados em equações algébricas. No presente trabalho serão apresentadas apenas formulações derivadas da hipótese de Boussinesq, baseadas no conceito de viscosidade turbulenta.

3.1.2 Viscosidade turbulenta

Boussinesq (1877) estabeleceu uma analogia com o modelo de Stokes para as tensões viscosas moleculares. Através dessa analogia, foi proposto que o fechamento do tensor de Boussinesq-Reynolds pudesse ser efetuado conforme o modelo apresentado na Eq. 3.13.

$$-\rho\overline{u_i'u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j}}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij}, \tag{3.13}$$

onde μ_t é a viscosidade dinâmica turbulenta, que está relacionada à energia cinética turbulenta, k, dada por:

$$k \equiv \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}\right). \tag{3.14}$$

A viscosidade dinâmica turbulenta, $\mu_t(\vec{x},t)$, apresenta significativa complexidade em sua avaliação, pois depende intrinsecamente da natureza do escoamento, ao contrário da viscosidade dinâmica molecular. Essa dependência acarreta uma forte não linearidade nas soluções das equações governantes. A energia cinética turbulenta, k, também é considerada na formulação de Boussinesq. Contudo, como k depende exclusivamente do traço do tensor de Boussinesq-Reynolds, sua natureza é análoga à da pressão, podendo ser incorporada no termo do gradiente de pressão. Substituindo a Eq. 3.13 na Eq. 3.11, obtém-se a equação de Navier-Stokes filtrada, expressa em notação indicial, utilizando o modelo proposto por Boussinesq:

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\overline{u}_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right) + \nu_t\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}k\delta_{ij}\right] + \frac{\overline{f}_i}{\rho}, \tag{3.15}$$

onde $\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho}$.

O divergente do termo envolvendo k e o delta de Kronecker, δ_{ij}, resulta no gradiente da energia cinética turbulenta:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{2}{3}k\delta_{ij}\right) = \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial x_i}, \tag{3.16}$$

o que permite a incorporação deste termo ao gradiente de pressão na Eq. 3.15, resultando em uma pressão modificada na equação modelada:

$$\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\overline{u}_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right] + \frac{\overline{f}_i}{\rho}, \tag{3.17}$$

onde a pressão modificada pela energia cinética turbulenta é dada por:

$$\overline{p}^* = \overline{p} + \frac{2}{3}\rho k. \tag{3.18}$$

Para recuperar o campo de pressão real, é necessário modelar a energia cinética turbulenta, o que deve ser realizado simultaneamente ao cálculo da viscosidade turbulenta, através dos chamados modelos de turbulência.

3.1.3 Modelo de turbulência de Spalart-Allmaras

O modelo de turbulência de Spalart-Allmaras (S-A), introduzido em Spalart e Allmaras (1994), é amplamente adotado na modelagem de turbulência devido à sua significativa precisão e custo computacional relativamente baixo (CELIC; HIRSCHEL, 2006). Este modelo computa diretamente a evolução da viscosidade turbulenta, ν_t, e foi desenvolvido com base em empirismo e análise dimensional (SILVEIRA-NETO, 2020).

O modelo S-A não resolve diretamente ν_t, mas sim uma viscosidade turbulenta modificada $\tilde{\nu}$. Considerando a estrutura da camada limite turbulenta próxima a uma superfície, a variável $\tilde{\nu}$ é escalada de forma a ser igual a $\kappa y u_\tau$ na camada logarítmica, bem como na camada de transição e na subcamada viscosa. Aqui, κ representa a constante de von Karman e u_τ a velocidade de atrito. Esta abordagem é vantajosa para soluções numéricas, uma vez que $\tilde{\nu}$ varia linearmente com a distância da parede, permitindo que seu comportamento seja capturado em malhas relativamente grosseiras (KESSELS, 2016).

A equação de turbulência de Spalart-Allmaras possui diversas variantes, incluindo modelos com e sem termos relacionados à transição. Ao incorporar os termos de transição, é possível identificar os locais no campo de escoamento onde a transição para a turbulência deve ocorrer. No presente trabalho, optou-se por desconsiderar os termos de transição, dado que o foco está em escoamentos totalmente turbulentos, onde o escoamento é turbulento sempre que há presença de vorticidade. Além disso, o interesse reside não no comportamento físico exato do escoamento, mas na estabilidade da formulação derivada para malhas mais grosseiras, preservando a acurácia. Portanto, o modelo totalmente turbulento será empregado em todas as simulações. Este modelo é representado pela equação:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u_j}\tilde{\nu})}{\partial x_j} = c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} - C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu + \tilde{\nu})\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\right] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\left(\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_j}\right). \tag{3.19}$$

Observa-se que os dois primeiros termos da Eq. 3.19 constituem a derivada material de $\tilde{\nu}$. Os dois termos subsequentes correspondem aos termos de reação, os quais modelam, respectivamente, a produção e a destruição da viscosidade turbulenta. Finalmente, os últimos dois termos representam os efeitos de difusão conservativa e não conservativa. A viscosidade cinemática turbulenta pode ser expressa como:

$$\nu_t = \tilde{v} f_{\nu_1}, \tag{3.20}$$

$$f_{\nu_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{\nu_1}^3}, \tag{3.21}$$

onde,

$$\chi = \frac{\tilde{v}}{\nu}. \tag{3.22}$$

A magnitude da vorticidade S é ajustada para $\tilde{S}$ de forma a garantir que o comportamento logarítmico na camada intermediária se estenda até a parede. Spalart e Allmaras (1994) argumentam que a vorticidade é utilizada no termo de produção, dado que a turbulência ocorre exclusivamente na presença de vorticidade, ambos os termos emanando de superfícies sólidas. A magnitude modificada da vorticidade é definida como:

$$\tilde{S} = S + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{\nu 2}, \tag{3.23}$$

com a taxa média de deformação do escoamento, S, sendo definida em termos da magnitude do tensor de vorticidade, Ω:

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \tag{3.24}$$

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{3.25}$$

A função f_{v2} é definida como:

$$f_{\nu 2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu 1}}. \tag{3.26}$$

A função f_w é empregada como calibração para o termo de destruição, uma vez que foi identificado que seu decaimento ocorre de forma lenta na região externa da camada limite (KESSELS, 2016). Esta função assume o valor de 1 na camada logarítmica e apresenta

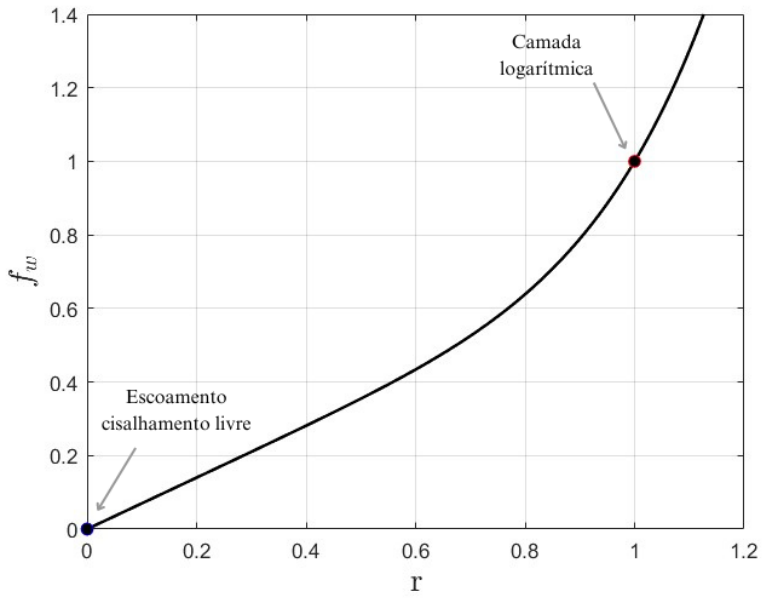
um decaimento em direção à parte externa da camada limite, conforme ilustrado na Fig. 5. A expressão para f_w é dada por:

$$f_w = g\left[\left(1 + \frac{C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6}\right)^{\frac{1}{6}}\right], \tag{3.27}$$

$$g = r + C_{w2}(r^6 - r), \tag{3.28}$$

$$r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2}. \tag{3.29}$$

Figura 5 – Gráfico de f_w em função de r



Fonte: Adaptada de Kessels (2016)

Finalmente, o modelo é parametrizado pelas seguintes constantes da Tab. 1:

Tabela 1 – Valores dos parâmetros do modelo de turbulência de Spalart-Allmaras

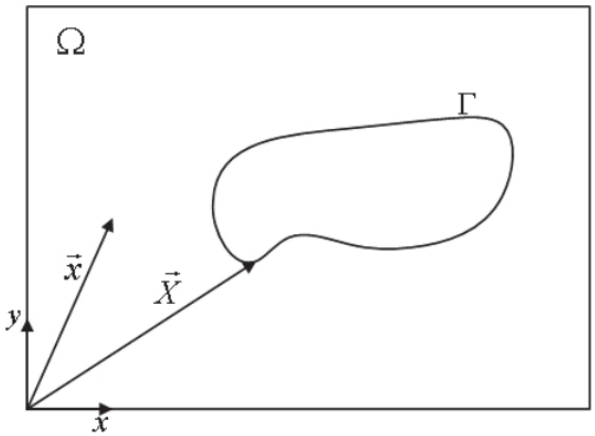
Parâmetro	**Valor**
c_{b1}	0,1355
c_{b2}	0,622
σ	$\frac{2}{3}$
κ	0,41
c_{w1}	$\frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma}$
c_{w2}	0,3
c_{w3}	2,0
c_{v1}	7,1

Fonte: Autoria própria

3.2 MÉTODO DA FRONTEIRA IMERSA

O método da Fronteira Imersa (MFI) opera simultaneamente com dois domínios de cálculo. O primeiro, denominado euleriano (Ω), é cartesiano e fixo, onde são resolvidas as equações para o escoamento de fluido. O segundo, denominado lagrangiano (Γ), representa a interface imersa no escoamento. No caso de escoamentos bidimensionais, Γ é representado por uma linha; no caso tridimensional, por uma superfície. Na Fig. 6 são ilustrados esses domínios, onde $\vec{x}$ posiciona um ponto qualquer no domínio euleriano (Ω) e $\vec{X}$ posiciona um ponto qualquer no domínio lagrangiano (Γ). As equações para o escoamento são resolvidas em todo o domínio Ω, inclusive na região delimitada pelo domínio Γ. O domínio lagrangiano representa uma fronteira entre dois tipos de fluidos ou entre um fluido e um sólido.

Figura 6 – Esboço dos domínios de cálculo utilizados na metodologia da Fronteira Imersa



Fonte: Mariano (2011)

Como o domínio lagrangiano é independente do domínio euleriano, é possível modelar e simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando domínios cartesianos para o fluido. Uma vantagem significativa é que, em problemas de interação fluido-estrutura, a malha euleriana permanece fixa, eliminando a necessidade de remalhagem. Mesmo com o movimento da estrutura, apenas a interface lagrangiana se desloca. A utilização de um domínio cartesiano fixo é uma das principais vantagens em comparação com metodologias que utilizam malhas não estruturadas ou que requerem remalhagem do domínio fluido (MARIANO et al., 2022).

3.2.1 Acoplamento entre os domínios euleriano e lagrangiano

Na Eq. 3.17, aparece o termo fonte $\bar{f}_i$, que pode ser interpretado, fisicamente, como um termo representativo das forças de campo, como a força gravitacional ou uma força eletromagnética. No contexto do Método da Fronteira Imersa (MFI), esse termo é responsável por representar a interface imersa no domínio euleriano (Ω). Sua representação matemática é dada pela Eq. 3.30.

$$f_i(\vec{x},t) = \begin{cases} F_i(\vec{X},t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X}. \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X}. \end{cases} \tag{3.30}$$

onde $F_i(\vec{X},t)$ é a força lagrangiana definida no domínio Γ.

Esta definição resulta em um campo $f_i(\vec{x},t)$ descontínuo, que pode ser resolvido numericamente apenas quando os pontos que compõem a interface coincidem com alguns dos pontos do domínio fluido. Na ausência dessa coincidência, uma ocorrência comum em geometrias complexas, é necessário distribuir a função $F_i(\vec{x},t)$ em sua vizinhança. Para esse propósito, emprega-se a função de distribuição de força $D_h(\vec{x}-\vec{X})$, conforme proposta por Peskin (1972), e transcrita nas Eqs. 3.31, 3.32, 3.33.

$$f_i(\vec{x}) = \sum_{\Gamma} D_h(\vec{x}-\vec{X}) F_i(\vec{X}) \Delta s^2, \tag{3.31}$$

$$D_h(\vec{x}-\vec{X}) = \frac{1}{h^2} W_g(r_x) W_g(r_y), \tag{3.32}$$

$$W_g(r) = \begin{cases} \frac{3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4|r|^2}}{8} & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ \frac{5-2|r|+\sqrt{-7+12|r|-4|r|^2}}{8} & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |r| > 2 \end{cases} \tag{3.33}$$

onde,

$$r_x = \frac{x - X}{h} \quad \text{e} \quad r_y = \frac{y - Y}{h}. \tag{3.34}$$

sendo h o espaçamento entre os nós de colocação do domínio euleriano, quando este é discretizado, e Δs o espaçamento entre os nós discretizados do domínio lagrangiano. A função W_g tem uma forma similar a uma gaussiana e satisfaz a propriedade de integral unitária no intervalo de $[-\infty, \infty]$.

O campo de força euleriano, $f_i(\vec{x}, t)$, é nulo em todo o domínio, exceto nas proximidades dos pontos lagrangianos, onde virtualmente modela a presença da membrana imersa, simulando um corpo ou a interface entre dois fluidos. Dessa maneira, não é necessário adaptar a malha euleriana para localizar a interface (MARIANO, 2011). Uma vez determinado o campo de força lagrangiano, $F_i(\vec{X}, t)$, este pode ser distribuído ao longo da malha euleriana, permitindo a incorporação da informação relativa à presença da geometria imersa no escoamento simulado.

No presente trabalho, foram utilizadas duas funções peso distintas: a função cúbica, W_c, Eq. 3.35, proposta por Tornberg e Engquist (2004); e a função chapéu (*hat*), W_h, Eq. 3.36, que corresponde a uma interpolação bilinear, conforme mostrado no trabalho de Su, Lai e Lin (2007).

$$W_c(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3 & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |r|)^3 & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |r| > 2 \end{cases} \tag{3.35}$$

$$W_h(r) = \begin{cases} 1 - |r| & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |r| > 1 \end{cases} \tag{3.36}$$

3.2.2 Cálculo da força lagrangiana

O método da Fronteira Imersa baseado na Múltipla Imposição Direta da Força (MDF) exige um modelo matemático para o cálculo da força lagrangiana (MARIANO, 2011). A partir

da Eq. 3.17, pode-se isolar o termo fonte $\overline{f}_i$, resultando em:

$$\overline{f}_i(\vec{x},t) = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\overline{u}_j) + \frac{\partial \overline{p}^*}{\rho \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right], \tag{3.37}$$

Ou ainda:

$$\overline{f}_i(\vec{x},t) = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \mathsf{rhs}_i^t, \tag{3.38}$$

onde,

$$\mathsf{rhs}_i^t(\vec{x},t) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\overline{u}_j) + \frac{\partial \overline{p}^*}{\rho \partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right)\right]. \tag{3.39}$$

Considerando que a Eq. 3.37 foi derivada sob a hipótese do contínuo e que o domínio Γ está contido em Ω, pode-se definir a força lagrangiana utilizando a Eq. 3.40:

$$\overline{F}_i\left(\vec{X},t\right) = \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{U}_i\overline{U}_j\right) + \frac{\partial \overline{P}^*}{\rho \partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)\right], \tag{3.40}$$

onde as variáveis maiúsculas correspondem ao domínio lagrangiano. A Eq. 3.40 expressa a Segunda Lei de Newton aplicada às partículas de fluido localizadas na interface fluido-fluido ou fluido-sólido. Ao discretizar a derivada temporal da Eq. 3.40 usando um esquema de Euler explícito (WANG; FAN; LUO, 2008), com Δt sendo o passo de tempo, obtém-se:

$$\overline{F}_i\left(\vec{X},t\right) = \frac{\overline{U}_i^{t+\Delta t} - \overline{U}_i^t}{\Delta t} + \mathsf{RHS}_i^t, \tag{3.41}$$

onde

$$\mathsf{RHS}_i\left(\vec{X},t\right) = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\overline{U}_i\overline{U}_j\right) + \frac{\partial \overline{P}^*}{\rho \partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j}\left[(\nu+\nu_t)\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial X_i}\right)\right]. \tag{3.42}$$

O MDF envolve a adição e subtração de um parâmetro temporário $\overline{U}_i^*$ na derivada temporal discretizada da Eq. 3.41. Essa abordagem permite reescrever a força lagrangiana da seguinte forma:

$$\overline{F}_i\left(\vec{X},t\right) = \frac{\overline{U}_i^{t+\Delta t} - \overline{U}_i^* + \overline{U}_i^* - \overline{U}_i^t}{\Delta t} + \mathsf{RHS}_i^t. \tag{3.43}$$

O próximo passo consiste em decompor a Eq. 3.43 em duas equações distintas (Eqs. 3.44 e 3.45),

$$\frac{\overline{U}_i^* - \overline{U}_i^t}{\Delta t} + \mathsf{RHS}_i^t = 0, \tag{3.44}$$

$$\overline{F}_i\left(\vec{X}, t\right) = \frac{\overline{U}_i^{t+\Delta t} - \overline{U}_i^*}{\Delta t}. \tag{3.45}$$

A Eq. 3.44 é válida tanto no domínio lagrangiano quanto no domínio euleriano. Assim, é possível determinar o parâmetro temporário $\overline{u}_i^*$ ao resolver a Eq. 3.46:

$$\frac{\overline{u}_i^* - \overline{u}_i^t}{\Delta t} + \mathsf{rhs}_i^t = 0. \tag{3.46}$$

Assim, a Eq. 3.46 representa a equação de Navier-Stokes sem a influência do termo fonte. Posteriormente, após a obtenção do termo fonte, o campo $\overline{u}_i^*$ é ajustado utilizando a Eq. 3.47, permitindo que o campo de velocidade euleriano incorpore as informações do campo de força.

$$\overline{u}_i^{t+\Delta t} = \overline{u}_i^* + \Delta t\, \overline{f}_i. \tag{3.47}$$

A Eq. 3.45 requer o cálculo de $\overline{U}_i^*$, que é obtido por meio da transferência de informações entre os domínios euleriano e lagrangiano. Para isso, utiliza-se a Eq. 3.48 quando há coincidência entre os pontos de ambos os domínios. Caso contrário, recorre-se à função de interpolação, conforme descrito na Eq. 3.49:

$$\overline{U}_i^*(\vec{X}, t) = \begin{cases} \overline{u}_i^*(\vec{x}, t) & \text{se } \vec{x} = \vec{X} \\ 0 & \text{se } \vec{x} \neq \vec{X} \end{cases} \tag{3.48}$$

$$\overline{U}_i^* = \sum_{\Omega} \overline{u}_i^* D_h(x_i - X_i)\, h^2. \tag{3.49}$$

A função de interpolação pode ser entendida como um processo inverso à operação de distribuição. Enquanto na distribuição a informação de um ponto lagrangiano é transmitida para os pontos vizinhos eulerianos, na interpolação a informação dos pontos eulerianos vizinhos é transferida para um ponto lagrangiano (MARIANO, 2011). Essas transferências são ponderadas pela distância entre os pontos, por meio da função D_h, conforme apresentado na Eq. 3.32.

O termo $\overline{U}_i^{t+\Delta t}$ na Eq. 3.45 refere-se à velocidade da fronteira imersa no instante $t + \Delta t$. Geralmente, essa velocidade é conhecida em problemas onde é possível especificar $\overline{U}_i^{t+\Delta t}$. Em situações de interação fluido-fluido ou fluido-estrutura, temos $\overline{U}_i^{t+\Delta t} = \overline{U}_{FI}$, onde $\overline{U}_{FI}$ deve ser determinada pelo modelo que descreve o movimento da interface. Idealmente, a

velocidade do fluido sobre a interface imersa deveria coincidir com $\overline{U}_{FI}$, representando a velocidade esperada da fronteira. No entanto, devido a processos de discretização temporal e espacial, assim como às operações de interpolação e distribuição, essa condição nem sempre é completamente atendida. O processo iterativo do MDF busca melhorar a precisão desses cálculos. Assim, na Eq. 3.47, é estabelecido:

$$\overline{u}_i^{t+\Delta t} = \overline{u}_i^{it}. \tag{3.50}$$

onde it representa o número da iteração no contexto do processo iterativo.

O campo de velocidade $\overline{u}_i^{it}$ é submetido a um novo processo de interpolação antes da transição para o próximo passo de tempo. Assim, a Eq. 3.49 é resolvida novamente, conforme segue:

$$\overline{U}_i^{it} = \sum_{\Omega} \overline{u}_i^{it}\, D_h(x_i - X_i)\, h^2. \tag{3.51}$$

Assim, obtém-se um novo campo de força $\bar{f}_i^{it}$, do qual se obtém novamente:

$$\overline{u}_i^{it+1} = \overline{u}_i^{it} + \Delta t\, \overline{f}_i^{it}. \tag{3.52}$$

Esse processo iterativo aproxima ainda mais a solução da condição de não deslizamento. Repetindo este procedimento de $it = 1$ até $it =$ NL, onde NL é o número total de iterações, obtém-se:

$$\overline{U}_{FI} - \overline{u}_i^{it+1} \to 0. \tag{3.53}$$

Dessa forma, a força lagrangiana na N-ésima iteração tende a zero. Wang, Fan e Luo (2008) utilizaram um número fixo de iterações, NL. No presente trabalho, optou-se por utilizar a máxima diferença das forças lagrangianas entre duas iterações consecutivas, adimensionalizadas pela diferença entre as forças calculadas nas duas primeiras iterações. Esta abordagem pode ser expressa pela seguinte condição:

$$\frac{\max\left|\bar{F}_i^{it+1} - \bar{F}_i^{it}\right|}{\max\left|\bar{F}_i^{1} - \bar{F}_i^{2}\right|} \leq \epsilon. \tag{3.54}$$

A adoção desse critério de convergência visa garantir uma acurácia adequada, minimizando a diferença entre as iterações sucessivas até que a força lagrangiana se torne insignificante. Inicialmente, não se sabe quantas iterações são necessárias para obter um resultado que seja

fiel à realidade física do problema. Em momentos específicos, especialmente no início de cada simulação ou durante a fase transiente do escoamento, mais iterações são necessárias. No entanto, quando o escoamento atinge um regime permanente, o número de iterações requeridas diminui (MARIANO, 2011). A Eq. 3.54 depende da diferença máxima entre as velocidades lagrangianas em iterações consecutivas. Assim, quando a velocidade tende a não se alterar entre iterações consecutivas, o processo iterativo é concluído.

3.3 MÉTODO PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER

O método pseudoespectral de Fourier (MPEF) realiza a transformação das variáveis de interesse do espaço físico para o espaço espectral. As transformadas direta e inversa de Fourier de uma função são expressas como:

$$\hat{\phi}(\vec{k},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\vec{x},t) e^{-\iota 2\pi \vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}, \tag{3.55}$$

$$\phi(\vec{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\vec{k},t) e^{\iota 2\pi \vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}. \tag{3.56}$$

Nas equações acima, $\hat{\phi}(\vec{k},t)$ representa a função transformada, enquanto $\vec{k}$ é o vetor número de onda, que atua como parâmetro na transformação espacial de Fourier. O número imaginário é denotado por $\iota = \sqrt{-1}$. O campo transformado, $\hat{\phi}(\vec{k},t)$, reside no que é conhecido como espaço de Fourier ou espaço espectral. Em contrapartida, o campo não transformado está no espaço físico.

A principal vantagem da transformação de Fourier é a simplificação de operações matemáticas específicas no domínio espectral (CANUTO et al., 2006). Por exemplo, a operação de derivada é convertida em uma multiplicação simples. Adicionalmente, equações diferenciais parciais (EDPs) se transformam em equações diferenciais ordinárias (EDOs) no domínio espectral, simplificando a sua solução. Contudo, vale destacar que outras operações, como a multiplicação de duas funções, podem se tornar mais complexas nesse domínio devido à operação de convolução.

As principais propriedades do espaço espectral de Fourier são a homogeneidade e a aditividade. A transformada da derivada de uma função é ilustrada pela Eq. 3.57.

$$\widehat{\frac{\partial^n f}{\partial x^n}}(\vec{x}) = (\iota k)^n \hat{f}(\vec{k}), \tag{3.57}$$

onde n é a ordem da derivada e k é o número de onda. Já a transformada do produto de duas funções é um produto de convolução entre as transformadas dessas funções, como mostrado na Eq. 3.58.

$$\widehat{f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})} = [\hat{f}(\vec{r}) * \hat{g}(\vec{s})](\vec{k}), \tag{3.58}$$

onde $\vec{k}$ é o parâmetro de transformação do produto, $\vec{r}$ é o parâmetro de transformação da função $f(\vec{x})$, e $\vec{s}$ é o parâmetro de transformação da função $g(\vec{x})$. O uso do método pseudo-espectral é justificado por essa propriedade, uma vez que resolver a integral de convolução é um processo computacionalmente custoso.

Partindo para a transformação do modelo diferencial, Eqs. 3.17 e 3.2, para o espaço espectral, primeiramente, aplica-se a transformada de Fourier sobre a equação da continuidade, Eq. 3.2:

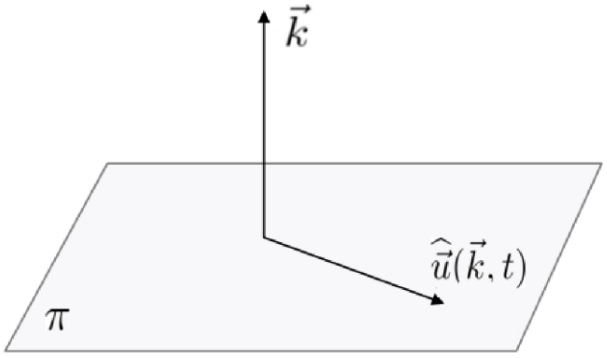
$$\widehat{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i}} = 0. \tag{3.59}$$

Ao aplicar a propriedade das transformadas de Fourier à derivada da Eq. 3.2, obtém-se:

$$ik_i \hat{\bar{u}}_i = 0. \tag{3.60}$$

Conforme os princípios da geometria analítica, um produto escalar nulo entre dois vetores indica que esses vetores são ortogonais. Assim, ao analisar a Eq. 3.60, conclui-se que o vetor número de onda, $\vec{k}$, é ortogonal ao campo de velocidade transformada $\hat{\bar{u}}_i(\vec{k}, t)$. Em decorrência dessa relação, define-se um plano perpendicular ao vetor número de onda, denominado plano π ou plano de divergência nula, que contém o campo de velocidade transformada. O vetor de velocidade transformado $\hat{\bar{u}}_i(\vec{k}, t)$ está contido no plano π, conforme ilustrado na Fig. 7.

Figura 7 – Definição do plano π



Fonte: Moreira (2011)

Transformando a Eq. 3.17 para o espaço de Fourier, tem-se:

$$\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} i k_i \widehat{\bar{p}^*} - \hat{\imath} k_j (\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}) + i k_j \left[2 \widehat{\nu_{ef} \bar{S}_{ij}} \right] + \frac{\widehat{\bar{f}_i}}{\rho}, \tag{3.61}$$

onde $\nu_{ef} = \nu + \nu_t$.

A Eq. 3.61 pode ser submetida a manipulações matemáticas que visam desacoplar o campo de pressão do campo de velocidade. Para facilitar a compreensão desse processo, cada um dos termos transformados é relacionado ao plano π, seguido pela aplicação do operador de projeção sobre esses termos.

O termo referente à taxa de variação da quantidade de movimento linear, $\frac{\partial \widehat{\bar{u}_i}}{\partial t}$, pertence ao plano π. O gradiente de pressão, $i k_i \widehat{\bar{p}^*}$, é colinear ao vetor número de onda $\vec{k}$, o que implica que ele é ortogonal ao plano π. Quanto ao termo fonte, não é possível determinar sua posição em relação ao plano π. Os termos não lineares advectivo e difusivo no espaço de Fourier aparecem como transformadas do produto entre duas funções. No espaço de Fourier, a solução desses termos envolve a resolução de uma integral de convolução para cada um deles, o que dificulta a determinação se suas posições em relação ao plano π. Desta forma, a Eq. 3.61 torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\bar{u}_i}}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho} i k_i \widehat{\bar{p}^*} - i k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\bar{u}_i}(\vec{r}) \widehat{\bar{u}_j}(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \\ & + i k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{\mathsf{ef}}}(\vec{r}) [(k_j - r_j)\widehat{\bar{u}_i} + (k_i - r_i)\widehat{\bar{u}_j}](\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} + \frac{\widehat{\bar{f}}_i}{\rho}, \end{aligned} \tag{3.62}$$

onde $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$ fornece as interações triádicas entre os vetores número de onda $\vec{k}$, $\vec{r}$ e $\vec{s}$.

Manipulando os termos da Eq. 3.62, mostra-se as posições conhecidas de cada termo em relação ao plano π:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{\partial \widehat{\bar{u}_i}}{\partial t}}_{\in \pi} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \iota k_i \widehat{\bar{p}^*}}_{\perp \pi} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\bar{u}_i}(\vec{r}) \widehat{\bar{u}_j}(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \\ & - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{\mathsf{ef}}}(\vec{r}) \left[(k_j - r_j)\widehat{\bar{u}_i} + (k_i - r_i)\widehat{\bar{u}_j} \right] (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \frac{\widehat{\bar{f}}_i}{\rho} = 0. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Como discutido anteriormente e evidenciado na Eq. 3.63, não se conhece a priori a posição dos termos não lineares advectivo e difusivo, bem como do termo fonte, em relação ao plano π. No entanto, dado que o termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear $\left(\frac{\partial \hat{\bar{u}}_i}{\partial t} \right)$ pertence ao plano π, a soma dos demais termos também deve pertencer a este plano. Isso decorre do princípio de que, se a soma de dois vetores é nula, então eles devem ser colineares. Portanto, conclui-se que:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\iota k_i\widehat{\bar{p}^*} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\bar{u}_i}(\vec{r})\widehat{\bar{u}_j}(\vec{k}-\vec{r})d\vec{r} \\ &- \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{\mathsf{ef}}}(\vec{r}) \left[(k_j - r_j)\widehat{\bar{u}_i} + (k_i - r_i)\widehat{\bar{u}_j}\right](\vec{k}-\vec{r})d\vec{r} - \frac{\widehat{\bar{f}_i}}{\rho} \in \pi.\end{aligned} \tag{3.64}$$

Define-se o tensor de projeção $\wp_{ij}$ pela Eq. 3.65, o qual projeta qualquer vetor sobre o plano π (SILVEIRA-NETO, 2002a; SILVEIRA-NETO, 2020).

$$\wp_{ij}\left(\vec{k}\right) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \tag{3.65}$$

onde δ_{ij} é o tensor delta de Kronecker, dado por:

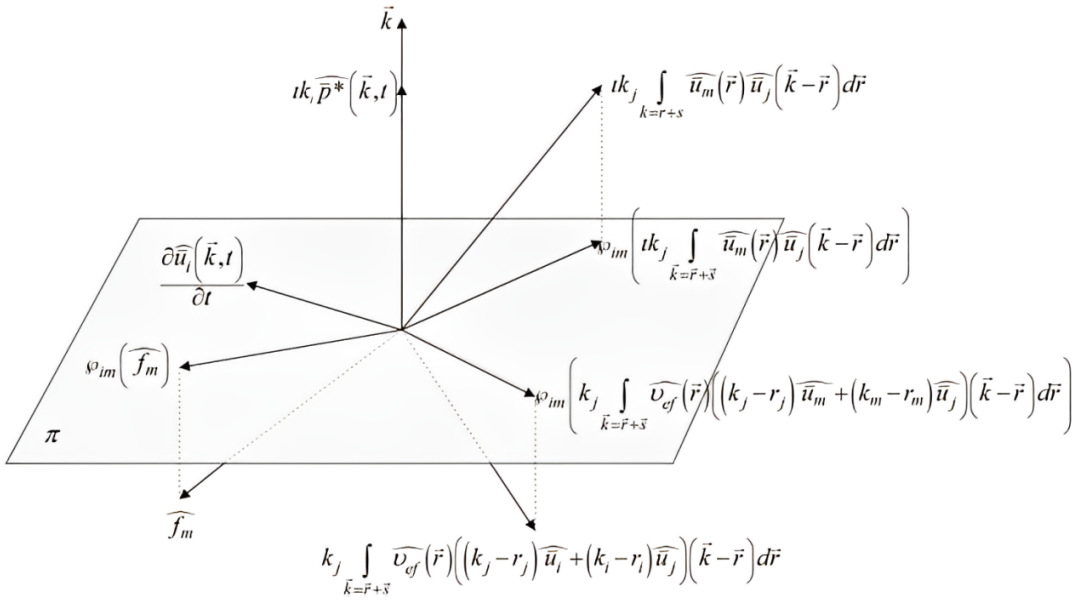
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3.66}$$

De posse da definição do tensor projeção e aplicando-o na Eq. 3.64, e sabendo que o termo $\iota k_i\hat{\bar{p}}^*$ é ortogonal a π, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\iota k_i\hat{\bar{p}}^* - \frac{\hat{\bar{f}}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\bar{u}}_i(\vec{r})\hat{\bar{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\ &- \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r}) \left[(k_j - r_j)\hat{\bar{u}}_i + (k_i - r_i)\hat{\bar{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\ &= \wp_{im}\left[-\frac{\hat{\bar{f}}_m}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\bar{u}}_m(\vec{r})\hat{\bar{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r}\right. \\ &\left.- \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r}) \left[(k_j - r_j)\hat{\bar{u}}_m + (k_m - r_m)\hat{\bar{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r}\right].\end{aligned} \tag{3.67}$$

Nota-se, na Eq. 3.67, que o termo referente ao gradiente de pressão no espaço de Fourier desaparece no lado direito do sinal de igualdade, pois a projeção, sobre um dado plano, de um vetor ortogonal a esse plano é nula. Este resultado é ilustrado na Fig. 8, que mostra a representação geométrica dos termos da Eq. 3.62 em relação ao plano π.

Figura 8 – Termos da Eq. 3.62 no Espaço de Fourier e sua Projeção em Relação ao Plano π



Fonte: Moreira (2011)

Na Fig. 8 tem-se os vetores do termo fonte e dos termos não lineares advectivo e difusivo projetados sobre o plano π. Já o vetor que representa o gradiente de pressão desaparece quando projetado. Este procedimento promove o desacoplamento dos campos de pressão e das velocidades das equações de Navier-Stokes incompressíveis. Assim, a Eq. 3.62 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{\hat{u}}_i\left(\vec{k},t\right)}{\partial t} = \wp_{im}\Bigg\{ & -\iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\hat{u}}_m(\vec{r})\hat{\hat{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\ & + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})(k_j-r_j)\hat{\hat{u}}_m(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\ & + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})(k_m-r_m)\hat{\hat{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} + \frac{\hat{f}_m}{\rho}\Bigg\}\end{aligned} \quad . \tag{3.68}$$

A Eq. 3.68 é independente do termo de pressão, que foi substituído pela projeção dos termos fonte, advectivo e difusivo. Comparado aos esquemas clássicos, este procedimento é equivalente a substituir a solução de uma equação de Poisson por um produto vetor-matriz, o que, em termos numéricos, é mais eficiente e acurado (MARIANO, 2011). Em termos físicos, ambos métodos garantem o balanço de massa. Além disso, observa-se a presença de integrais de convolução, necessárias para resolver os termos não lineares advectivo e difusivo. Essas integrais devem, rigorosamente, ser resolvidas por meio de algum esquema de integração numérica. Entretanto, caso isso seja implementado, o ganho computacional obtido pela operação

de projeção poderia ser comprometido. Aqui, essas integrais de convolução são tratadas pelo método pseudoespectral, tornando a resolução da 3.68 mais vantajosa.

O método pseudoespectral de Fourier (MPEF) é fundamentado na premissa de evitar o cálculo direto dos termos não lineares advectivo e difusivo da Eq. 3.68 no domínio de Fourier, uma vez que tal abordagem exigiria a resolução de integrais de convolução, as quais são computacionalmente dispendiosas. Para mitigar esse desafio, as derivadas espaciais dos termos não lineares advectivo e difusivo são inicialmente computadas no espaço de Fourier e subsequentemente transformadas para o espaço físico, onde os produtos são efetivamente calculados. A alta acurácia do método espectral de Fourier é preservada pela capacidade de realizar produtos no espaço físico e calcular as derivadas no espaço espectral.

Outra peculiaridade do tratamento do termo não linear reside no fato de que ele pode ser escrito de diferentes formas (CANUTO et al., 2006). Todas estas formas, quando se assume incompressibilidade no escoamento, apresentam equivalência matemática. Entretanto, as propriedades numéricas podem variar significativamente durante a discretização dessas equações. As formas de tratamento do termo não linear, em notação tensorial, podem ser expressas como se segue:

- Forma não-divergente: $u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$
- Forma divergente: $\frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i}$
- Forma anti-simétrica: $\frac{1}{2}\left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_i}\right)$
- Forma rotacional: $\frac{1}{2}\frac{\partial (u_i u_i)}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) u_i$

onde ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e $\omega_k = \epsilon_{ijk}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ representa a componente do vetor vorticidade, dado por $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$.

A forma escolhida no presente trabalho para a solução do termo não-linear foi a forma anti-simétrica, reportada como sendo a mais estável do ponto de vista numérico (CANUTO et al., 2006). Essa forma consiste em realizar uma média aritmética entre o termo não-linear escrito na forma divergente e na forma não-divergente.

3.3.1 Recuperação do campo de pressão

Embora o campo de pressão não apareça nas equações de Navier-Stokes transformadas (Eq. 3.68), ele pode ser recuperado por meio de um pós-processamento a partir da Eq. 3.67.

Isolando-se o termo referente ao gradiente de pressão, obtém-se a Eq. 3.69.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho}\iota k_i\hat{\bar{p}}^* = \\
&= \wp_{im}\Bigg[-\frac{\hat{\bar{f}}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\bar{u}}_i(\vec{r})\hat{\bar{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\
&\qquad - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})\left[(k_j-r_j)\hat{\bar{u}}_i + (k_i-r_i)\hat{\bar{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r}\Bigg] \\
&\qquad - I_{im}\Bigg[-\frac{\hat{\bar{f}}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\bar{u}}_i(\vec{r})\hat{\bar{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\
&\qquad - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})\left[(k_j-r_j)\hat{\bar{u}}_i + (k_i-r_i)\hat{\bar{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r}\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Observa-se que tensor identidade I_{im} foi introduzido por conveniência, sem alterar a equação. Colocando em evidência os termos entre colchetes, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\iota k_i\hat{\bar{p}}^* = (\wp_{im} - I_{im})\Bigg[&-\frac{\hat{\bar{f}}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\bar{u}}_i(\vec{r})\hat{\bar{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\
&- \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})\left[(k_j-r_j)\hat{\bar{u}}_i + (k_i-r_i)\hat{\bar{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r}\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Ao realizar o produto escalar da Eq. 3.70 pelo vetor número de onda k_i, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\iota k^2\hat{\bar{p}}^* = (\wp_{im} - I_{im})k_i\Bigg[&-\frac{\hat{\bar{f}}_i}{\rho} + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\bar{u}}_i(\vec{r})\hat{\bar{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\
&- \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})\left[(k_j-r_j)\hat{\bar{u}}_i + (k_i-r_i)\hat{\bar{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r}\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Observando que:

$$(\wp_{im} - I_{im})k_i = \left(\delta_{im} - \frac{k_i k_m}{k^2} - I_{im}\right)k_i = -k_m. \tag{3.72}$$

Então, substituindo a equação Eq. 3.71 na Eq. 3.72, obtém-se:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\iota k^2\hat{\bar{p}}^* = k_m\Bigg[&\frac{\hat{\bar{f}}_i}{\rho} - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\bar{u}}_i(\vec{r})\hat{\bar{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r} \\
&+ \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})\left[(k_j-r_j)\hat{\bar{u}}_i + (k_i-r_i)\hat{\bar{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\,d\vec{r}\Bigg].
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Assim, o campo de pressão pode ser obtido usando a Eq. 3.74:

$$\hat{\tilde{p}}^* = \frac{k_m \rho}{\iota k^2}\left[\frac{\hat{\tilde{f}}_i}{\rho} - \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{\tilde{u}}_i(\vec{r})\hat{\tilde{u}}_j(\vec{k}-\vec{r})\, d\vec{r} \right. \\ \left. + \iota k_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{\nu_{ef}}(\vec{r})\left[(k_j - r_j)\hat{\tilde{u}}_i + (k_i - r_i)\hat{\tilde{u}}_j\right](\vec{k}-\vec{r})\, d\vec{r}\right]. \tag{3.74}$$

3.3.2 DFT e FFT

A versão discreta da transformada de Fourier é conhecida como Transformada Discreta de Fourier (DFT) e está definida na Eq. 3.75.

$$\hat{\phi}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \phi_n e^{-\iota \frac{2\pi k n}{N}}. \tag{3.75}$$

onde ϕ_n é o campo de velocidade discretizado com N nós de colocação; n fornece a posição x_n dos nós de colocação, $x_n = n\Delta x$; Δx é o espaçamento entre dois nós de colocação; e k é o número de onda (Eq. 3.77).

A Eq. 3.75 é a aproximação numérica da transformada de Fourier, aplicada sobre os nós de colocação de um domínio discretizado. Deve-se notar que, para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada necessariamente deve ser periódica, ou seja:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + \vec{L}, t). \tag{3.76}$$

onde $\vec{L}$ é o comprimento do domínio na direção considerada. As rotinas DFT impõem automaticamente a condição de periodicidade. Esta propriedade é a grande restrição da metodologia pseudoespectral de Fourier, limitando o seu uso a problemas com condições de contorno periódicas. Entretanto, com a fusão da metodologia da fronteira-imersa com a MPEF, busca-se resolver esta restrição.

Na implementação computacional para a resolução da Eq. 3.75, adota-se o algoritmo proposto por Cooley e Tukey (1965), conhecido como Transformada Rápida de Fourier (FFT). Diversas sub-rotinas estão disponíveis para o cálculo da FFT, as quais consideram uma variedade de parâmetros, tais como: manipulação de dados reais ou complexos; precisão simples ou dupla; FFTs unidimensionais, bidimensionais ou tridimensionais; programação serial ou paralela; utilização de potências de 2, 3, 5, 7, 11 e 13; e suporte a várias linguagens de programação (Fortran, C, C++). O desempenho ótimo das subrotinas é alcançado para 2^N nós de colo-

cação, onde N é um número inteiro. Os vetores número de onda são calculados da seguinte forma:

$$k_i(n) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L_i}(n-1) & \text{se } 1 \leq n \leq \frac{N}{2}+1 \\ \frac{2\pi}{L_i}(n-1-N) & \text{se } \frac{N}{2}+2 \leq n \leq N \end{cases} \tag{3.77}$$

onde k_i é a componente i do vetor número de onda; N é o número de nós de colocação numa dada direção; L_i é o comprimento físico do domínio nessa dada direção e n é a posição no vetor em uma dada direção do domínio.

3.4 DISCRETIZAÇÃO TEMPORAL

O método pseudoespectral de Fourier assegura alta acurácia e uma elevada ordem de convergência na discretização espacial. Além disso, ele permite desacoplar a solução do gradiente de pressão, que se torna um resultado obtido apenas no pós-processamento. A aplicação da Transformada Rápida de Fourier (FFT) contribui para a redução do custo computacional na resolução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Dado que a discretização espacial é realizada com um método de alta ordem, é necessário empregar um método de alta ordem também na discretização temporal (MARIANO, 2011). Dessa forma, o IMERSPEC adota o Método de Runge-Kutta de quarta ordem de convergência temporal com seis passos (RK46) de Allampalli et al. (2009).

A escolha desse método de avanço temporal baseia-se na sua otimização no espaço espectral, o que resulta em uma diminuição no armazenamento de variáveis e em menores níveis de dispersão e dissipação numérica. O algoritmo RK46 é apresentado pela Eq. 3.78

$$\begin{cases} \mathsf{AUX}_i^l = \alpha^l \mathsf{AUX}_i^{l-1} + \Delta t \left(\nu k^2 \hat{u}_i - \phi_{im} \widehat{TNL}\right)^l \\ \hat{u}_i^{*l+1} = \hat{u}_i^{*l} + \beta^l \mathsf{AUX}_i^l \end{cases} \tag{3.78}$$

onde $l = 1, 2, \ldots, 6$ é o passo do método, AUX é uma variável auxiliar, α^l e β^l são constantes apresentadas na Tab. 2.

Tabela 2 – Valores das constantes α^l e β^l utilizadas no método RK46.

l	α	β
1	0,0	0,122
2	-0,691750906070	0,477263056358
3	-1,727127405211	0,381941220320
4	-0,694890150986	0,447757195744
5	-1,039942756197	0,498614246822
6	-1,531977447611	0,186648570846

Fonte: Allampalli et al. (2009)

O incremento temporal utilizado no IMERSPEC é variável, dependente da Condição de Courant-Friedrichs-Lewis (CFL), e é dado por:

$$\Delta t = CFL \cdot \min\left\{ \min\left[\frac{\Delta x_1}{\max|u_1|}, \frac{\Delta x_2}{\max|u_2|}, \frac{\Delta x_3}{\max|u_3|} \right]; \frac{2}{\nu}\left(\frac{1}{\Delta x_1^2} + \frac{1}{\Delta x_2^2} + \frac{1}{\Delta x_3^2} \right)^{-1} \right\}, \tag{3.79}$$

onde os termos relacionados a Δx_3 e u_3 são anulados para modelagens de escoamentos bidimensionais. O método RK46 é um método temporal explícito, portanto, o valor de CFL deve ser sempre inferior a unidade para garantir a estabilidade computacional.

3.5 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE SPALART-ALLMARAS PELO MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER

O modelo de Spalart-Allmaras (S-A) é baseado em uma equação de transporte para uma variável de viscosidade turbulenta modificada, $\tilde{\nu}$, que captura os efeitos da turbulência. A equação diferencial parcial (EDP) que descreve a evolução de $\tilde{\nu}$ é dada pela Eq. 3.19. No presente trabalho esta equação é resolvida usando o método pseudoespectral de Fourier, sendo necessária a transformação da equação para o espaço espectral. Aplica-se a transformada de Fourier às variáveis dependentes, o que converte as derivadas espaciais em multiplicações por números complexos associados às frequências do espaço espectral.

A derivada temporal de $\tilde{\nu}$ no espaço físico é transformada diretamente como:

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \hat{\tilde{\nu}}}{\partial t}. \tag{3.80}$$

O termo convectivo é transformado aplicando a propriedade de derivada da transformada de Fourier:

$$\frac{\partial(\overline{u_j}\tilde{\nu})}{\partial x_j} \rightarrow ik_j\widehat{\overline{u_i}\tilde{\nu}}. \tag{3.81}$$

Os termos de produção e destruição são transformados para o espaço espectral como:

$$c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} \rightarrow c_{b1}\widehat{\tilde{S}_i\tilde{\nu}}, \tag{3.82}$$

$$-C_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2 \rightarrow -C_{w1}f_w\widehat{\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2}. \tag{3.83}$$

O termo de difusão viscosa é transformado para o espaço espectral considerando a aplicação da derivada e da convolução no espaço espectral:

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right] \rightarrow \frac{1}{\sigma}\iota k_j\left[\widehat{(\nu+\tilde{\nu})} * \left(\iota k_j\hat{\tilde{\nu}}\right)\right]. \tag{3.84}$$

Por fim, o termo de difusão turbulenta é transformado para o espaço espectral de Fourier como:

$$\frac{c_{b2}}{\sigma}\left(\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right) \rightarrow \frac{c_{b2}}{\sigma}k_j^2\left(\hat{\tilde{\nu}} * \hat{\tilde{\nu}}\right). \tag{3.85}$$

Assim, a equação de Spalart-Allmaras no espaço espectral pode ser escrita como:

$$\frac{\partial\hat{\tilde{\nu}}}{\partial t} + ik_j\widehat{\overline{u_j}\tilde{\nu}} = c_{b1}\widehat{\tilde{S}\tilde{\nu}} - C_{w1}f_w\widehat{\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2} - \frac{1}{\sigma}ik_j\left(\widehat{(\nu+\tilde{\nu})} * \left(ik_j\hat{\tilde{\nu}}\right)\right) + \frac{c_{b2}}{\sigma}k_j^2\left(\hat{\tilde{\nu}} * \hat{\tilde{\nu}}\right). \tag{3.86}$$

O método pseudoespectral é utilizado para tratar produtos de duas funções. Este processo envolve a transformação das funções para o espaço físico por meio da transformada inversa de Fourier, a realização do produto no espaço físico, e a subsequente transformação do resultado de volta ao espaço espectral.

Os termos não lineares são tratados pelo método pseudoespectral de forma anti-simétrica, a forma mais estável considerada por Canuto et al. (2006). A forma anti-simétrica consiste em calcular a média aritmética do termo não-linear expresso tanto na forma conservativa quanto na forma não conservativa. Especificamente, tem-se:

- **Forma divergente**: Na forma divergente, os termos são escritos como derivadas de um escoamento. Para a equação de Spalart-Allmaras, eq. 3.86, o termo convectivo na forma conservativa é dado por:

$$\frac{\partial(\bar{u}_j\tilde{\nu})}{\partial x_j} = ik_j(\widehat{\bar{u}_j\tilde{\nu}}), \tag{3.87}$$

- **Forma não divergente**: Na forma não divergente, os termos são expressos diretamente em termos da derivada do produto das funções:

$$\bar{u_j}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j} = \widehat{\bar{u_j}ik_j\tilde{\nu}}. \tag{3.88}$$

A forma anti-simétrica combina as duas abordagens anteriores, resultando em uma expressão que minimiza os erros numéricos associados às derivações espectrais:

$$\widehat{ik_j\bar{u_j}\tilde{\nu}} = \frac{1}{2}\left[ik_j(\widehat{\bar{u_j}\tilde{\nu}}) + \widehat{\bar{u_j}ik_j\tilde{\nu}}\right]. \tag{3.89}$$

Este tratamento antissimétrico atende ao balanço das propriedades físicas essenciais do escoamento, ao mesmo tempo em que proporciona maior estabilidade numérica.

3.5.1 Imposição de Condições de Contorno para $\tilde{\nu}$

A imposição das condições de contorno para a viscosidade turbulenta modificada $\tilde{\nu}$ é realizada utilizando o método da fronteira imersa, que trata as condições de contorno como fontes adicionais de força no domínio computacional. Isso é realizado através da inserção de uma força virtual que atua sobre a variável $\tilde{\nu}$, direcionando-a para satisfazer a condição de contorno imposta. No caso da condição de não deslizamento, a força é aplicada de maneira que a velocidade tangencial da parede seja nula.

Na equação de Spalart-Allmaras, a imposição de uma condição de contorno de não deslizamento pode ser matematicamente representada pela modificação do termo convectivo na equação de transporte de $\tilde{\nu}$, da seguinte forma:

$$\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u_j}\tilde{\nu})}{\partial x_j} = c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu} - C_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\nu+\tilde{\nu})\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\left(\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\frac{\partial\tilde{\nu}}{\partial x_j}\right) + \mathbf{f}_{bc}, \tag{3.90}$$

onde $\mathbf{f}_{bc}$ representa o termo fonte imposto para satisfazer a condição de contorno. Esse termo é calculado iterativamente para assegurar que $\tilde{\nu}$ atinja o valor desejado na fronteira:

$$\mathbf{f}_{bc} = -\lambda(\tilde{\nu} - \tilde{\nu}_{bc}), \tag{3.91}$$

em que λ é um parâmetro de controle que ajusta a intensidade da força aplicada, e $\tilde{\nu}_{bc}$ é o valor de referência de $\tilde{\nu}$ na fronteira, que é igual a zero para a condição de não deslizamento.

O MDF é utilizado para iterativamente ajustar o termo fonte de forma a corrigir qualquer desvio da condição de contorno desejada. Cada aplicação sucessiva da força leva a $\tilde{\nu}$ a

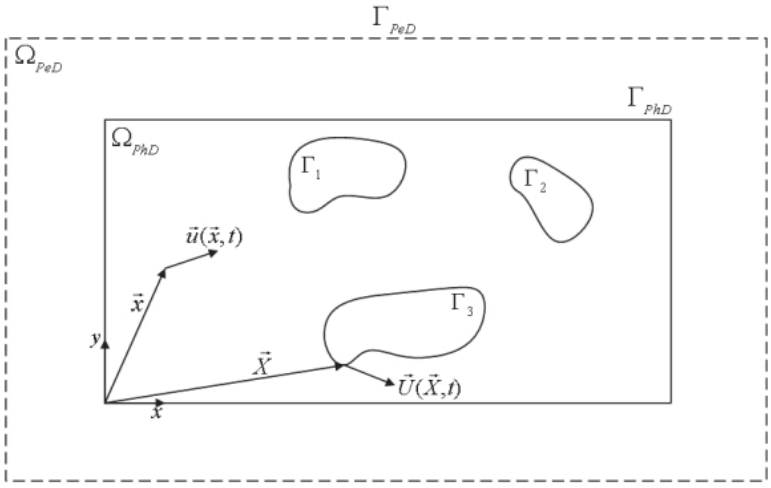
aproximar-se cada vez mais do valor de referência na fronteira, garantindo assim a imposição exata da condição de não deslizamento.

3.6 ACOPLAMENTO ENTRE AS METODOLOGIAS PSEUDOESPECTRAL DE FOURIER E FRONTEIRA IMERSA – IMERSPEC

A abordagem IMERSPEC visa contornar as restrições das condições de contorno periódicas necessárias para a utilização do método pseudoespectral e, simultaneamente, obter um método de fronteira imersa de alta acurácia e com alta ordem de convergência espacial. As definições dos domínios estão ilustradas na Fig. 9. O domínio físico Ω_{PhD}, classificado como euleriano, é circunscrito pela fronteira imersa Γ_{PhD}, a qual também é tratada como um domínio lagrangiano. Dentro de Ω_{PhD}, ocorre toda a fenomenologia física que se pretende modelar e simular. Neste domínio, é possível inserir um ou mais subdomínios delimitados pelas fronteiras imersas Γ_i, onde $i = 1, 2, \ldots, N$. Na fronteira imersa Γ_{PhD}, pode-se definir quaisquer condições de contorno, mesmo que sejam não periódicas (MARIANO, 2011).

O domínio complementar euleriano Ω_{PeD} é delimitado pela fronteira Γ_{PeD} e é utilizado para impor diretamente as condições de contorno periódicas na solução das equações de Navier-Stokes transformadas (Eq. 3.62). Este domínio, Ω_{PeD}, envolve o domínio Ω_{PhD} e possibilita estender a solução do problema não periódico até a fronteira periódica Γ_{PeD}. As condições de contorno periódicas são aplicadas diretamente sobre Γ_{PeD} por meio dos procedimentos pseudoespectrais. Em contrapartida, as condições de contorno não periódicas são impostas indiretamente sobre a fronteira imersa Γ_{PhD} através do campo de força euleriano $\vec{f}(\vec{x}, t)$. Na Fig. 9, o vetor $\vec{x}$ representa qualquer ponto dentro do domínio euleriano, enquanto o vetor $\vec{X}$ representa qualquer ponto de uma interface lagrangiana.

Figura 9 – Representação esquemática dos domínios de cálculo euleriano e lagrangiano



Fonte: Moreira (2011)

Simular escoamentos turbulentos com acurácia através de métodos transientes exige a imposição de condições de contorno adequadas. Escoamentos com desenvolvimento temporal, como decaimento isotrópico, camadas de mistura, jatos e canais planos, beneficiam-se da condição de periodicidade na direção preferencial do escoamento, onde as informações no plano de saída são reintroduzidas na entrada, proporcionando o suporte necessário para o correto desenvolvimento da turbulência dentro do domínio.

Para transformar a equação de $\tilde{\nu}$ para o espaço espectral, emprega-se a Transformada de Fourier (FFT). Inicialmente, as variáveis associadas à equação de $\tilde{\nu}$ são convertidas para o espaço espectral. Posteriormente, são calculados os termos não lineares, viscosos, e os efeitos de compressibilidade e turbulência, sendo cada um desses aspectos tratados separadamente no espaço espectral.

Os efeitos advectivos e não lineares são considerados no termo convectivo da equação. O termo de produção turbulenta está associado ao tensor de rotação $\tilde{S}$. Além disso, são considerados os efeitos de dissipação próximos à parede, dependentes de $\tilde{\nu}$ e da distância ao objeto. Os efeitos viscosos e a difusão turbulenta são igualmente incluídos, ambos essenciais para a correta predição dos campos de $\tilde{\nu}$ e, consequentemente, de ν_t. A imposição das condições de contorno para $\tilde{\nu}$ é alcançada por meio da aplicação do termo fonte $\mathbf{f}_{bc}$, garantindo as condição de contorno.

A soma desses componentes resulta no termo de contribuição para o lado direito da equação, que, ao ser invertida pela transformada de Fourier, retorna ao espaço físico. Isso permite a atualização dos valores de $\tilde{\nu}$ e, por conseguinte, a determinação dos campos turbulentos. Esse

procedimento, aliado à imposição precisa das condições de contorno, é fundamental para assegurar a acurácia da solução numérica em simulações que envolvem escoamentos turbulentos em torno de geometrias complexas.

Para finalizar, o algoritmo da metodologia IMERSPEC é apresentado abaixo:

1. Inicializa-se o campo de velocidade, $\bar{u}_i^t$, e o campo da viscosidade turbulenta modificada, $\tilde{\nu}^t$, no espaço físico no instante t;

2. Aplica-se a Transformada Rápida de Fourier (FFT) aos campos $\bar{u}_i^t$ e $\tilde{\nu}^t$, obtendo-se seus correspondentes no domínio transformado, $\widehat{\bar{u}_i^t}$ e $\widehat{\tilde{\nu}^t}$.

3. Para garantir a equação da continuidade, aplica-se o tensor projeção sobre o campo de velocidade, obtendo: $\widehat{\bar{u}_{i\pi}}^t = \wp_{ij}\left(\widehat{\bar{u}_j^t}\right)$;

4. Calculam-se os termos do lado direito (RHS), necessários para resolver a Eq. 3.68:

   - Termo difusivo:

     a) Calculam-se as derivadas no espaço espectral, $(\widehat{Du})_i^t = ik_i\widehat{\bar{u}_{i\pi}^t}$;

     b) Calcula-se $\widehat{\sigma_{ij}} = i\left(k_j\widehat{\bar{u}_i} + k_i\widehat{\bar{u}_j}\right)^t$;

     c) Aplica-se a transformada inversa de Fourier sobre $\widehat{\sigma_{ij}}$ obtendo-se σ_{ij};

     d) Calcula-se o produto $\sigma_{ij}\nu_{\text{ef}}$;

     e) Aplica-se a transformada direta de Fourier sobre $\sigma_{ij}\nu_{\text{ef}}$ obtendo-se $\widehat{\sigma_{ij}\nu_{\text{ef}}}$;

     f) Calcula-se o termo difusivo (termo não-linear): $\widehat{visc_i}^t = ik_i\widehat{\sigma_{ij}\nu_{\text{ef}}}$;

     g) Projeta-se o termo não-linear usando o tensor projeção: $\widehat{visc_{i\pi}}^t = \wp_{ij}\left(\widehat{visc_j}^t\right)$;

   - Termo advectivo na forma anti-simétrica; o termo difusivo também é calculado pelo método pseudoespectral:

     a) Calcula-se o produto: $(Pu)_i^t = \bar{u}_{i\pi}^t\bar{u}_{j\pi}^t$ no espaço físico;

     b) Transforma-se o produto $(Pu)_i^t$ para o espaço espectral usando a FFT, obtendo-se $(\widehat{Pu})_i^t$;

     c) Calculam-se as derivadas no espaço espectral, $(\widehat{Du})_i^t = ik_i\widehat{\bar{u}_{i\pi}^t}$;

     d) Aplica-se a transformada inversa de Fourier sobre as derivadas, $(\widehat{Du})_i^t$, obtendo-se $(Du)_i^t$;

     e) Calcula-se o produto das velocidades no espaço físico, com as derivadas, também no espaço físico, $(PDu)_i^t = \bar{u}_{i\pi}^t(Du)_i^t$;

f) Transforma-se o produto das velocidades com as derivadas para o espaço de Fourier, obtendo-se $(\widehat{PDu})_i^t$;

g) Calcula-se o termo advectivo não-linear: $\widehat{tnl}_i^t = \frac{1}{2}\left[(\widehat{Pu})_i^t + (\widehat{PDu})_i^t\right]$;

h) Projeta-se o termo não-linear usando o tensor projeção: $\widehat{tnl}_{i\pi}^t = \wp_{ij}\left(\widehat{tnl}_j^t\right)$;

5. De forma análoga, resolvem-se os termos da Eq. 3.90 para a viscosidade turbulenta modificada $\tilde{\nu}$, seguindo o mesmo procedimento de cálculo dos termos difusivos e advectivos.

6. Aplica-se o esquema de Runge-Kutta e obtêm-se os parâmetros temporários $\widehat{u_i^*}$ e $\widehat{\tilde{\nu}^*}$;

7. Aplica-se a transformada inversa de Fourier em $\widehat{u_i^*}$ e $\widehat{\tilde{\nu}^*}$, obtendo-se os parâmetros temporários no espaço físico, u_i^* e $\tilde{\nu}^*$;

8. Se os pontos lagrangianos coincidem com os eulerianos, usa-se a Eq. 3.48. Caso contrário, interpola-se o parâmetro temporário no espaço físico, usando a Eq. 3.49, obtendo-se a velocidade sobre os pontos lagrangianos, $\bar{U}_i^*$;

9. Calcula-se a força lagrangiana, $\bar{F}_i$, através da Eq. 3.45, onde $\bar{U}_i^{t+\Delta t} = \bar{U}_i\bar{F}_i$, isto é, a velocidade que a fronteira imersa deve ter;

10. Calcula-se a força euleriana, $\bar{f}_i$, quando os pontos lagrangianos coincidem com os nós de colocação eulerianos, ou utiliza-se o processo de distribuição, quando não existe coincidência;

11. Analogamente, calcula-se o termo fonte para $\tilde{\nu}$, $\mathbf{f}_{bc}$.

12. Transforma-se $\mathbf{f}_{bc}$ e o campo de força euleriano, $\bar{f}_i$, para o espaço espectral e aplica-se o tensor projeção $\wp_{ij}$, obtendo: $\widehat{\bar{f}_{i\pi}} = \wp_{ij}\left(\widehat{\bar{f}_j}\right)$;

13. Com o parâmetro temporário obtido no passo 6 e a força euleriana projetada no passo anterior, atualiza-se o campo de velocidade $\widehat{\bar{u}_i^{t+\Delta t}} = \Delta t\wp_{im}\left(\widehat{\bar{f}_m}\right) + \widehat{\bar{u}_i^*}$ e calcula-se $\widehat{\bar{\tilde{\nu}}_i^{t+\Delta t}} = \Delta t\tilde{\nu}^*$;

14. Utilizando o método da múltipla imposição da força, entra-se no processo de ciclagem, fazendo $\widehat{\bar{u}_i^{*it+1}} = \widehat{\bar{u}_i^{t+\Delta t}}$, atualizando o parâmetro temporário da seguinte maneira: $\widehat{\bar{u}_i^{*it+1}} = \widehat{\bar{u}_i^{*it}} + \Delta t\wp_{ij}\left(\widehat{\bar{f}_i^{it}}\right)$ e $\widehat{\bar{\tilde{\nu}}_i^{*it+1}} = \Delta t\tilde{\nu}^*$;

15. Com $\widehat{\bar{u}_i^{it+1}}$ calculado, retorna-se ao passo 7, obtendo $\bar{u}_i^* = \bar{u}_i^{*it+1}$ e $\tilde{\nu}^* = \tilde{\nu}^{*it+1}$;

16. Repete-se os passos 7 até 13 até satisfazer um dos critérios de parada, seja a Eq. 3.54 ou o número máximo de iterações, NL;

17. Após o critério de parada ser satisfeito, retorna-se ao passo 1 e avança-se no tempo.

3.6.1 Tratamento das condições de contorno

O código computacional adota condições de contorno periódicas em todas as direções para as variáveis primitivas, ou seja, para as componentes da velocidade, em conformidade com as restrições inerentes ao Método Pseudoespectral de Fourier (MPEF). No entanto, essa periodicidade imposta pelo método pode limitar a simulação de escoamentos não periódicos. Para contornar essa restrição, são empregados dois artifícios numéricos: a metodologia IMERSPEC, previamente apresentada, e a zona de amortecimento.

Embora a zona de amortecimento não represente uma imposição direta de condição de contorno, sua descrição se faz necessária nesta seção devido à sua estreita relação com a implementação de condições de contorno não periódicas, que são tratadas pela metodologia IMERSPEC. Sua função principal é garantir uma transição suave do escoamento ao longo das fronteiras do domínio de interesse, permitindo que o escoamento que sai retorne gradativamente à condição de entrada, sem comprometer a periodicidade exigida pelo MPEF (MOREIRA, 2011).

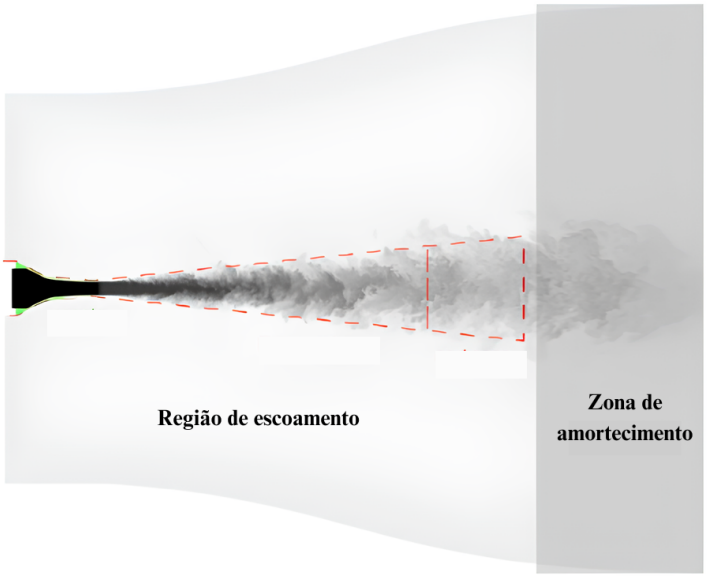
Além disso, a metodologia IMERSPEC resulta do acoplamento entre o método da fronteira imersa e o MPEF, permitindo a imposição de condições de contorno dentro do domínio computacional. Essa abordagem viabiliza a simulação de escoamentos não periódicos preservando as propriedades espectrais do MPEF. Dessa forma, o domínio computacional é estruturado em duas regiões distintas: o domínio de interesse, onde ocorre a análise principal do escoamento, e o domínio complementar, composto pela região da MFI e pela zona de amortecimento, que auxilia na preservação da acurácia da solução (MARIANO et al., 2022).

3.6.1.1 Zona de amortecimento

A zona de amortecimento (*Buffer Zone*) é um procedimento numérico amplamente utilizado, especialmente em fluido-acústica, com o objetivo de mitigar os efeitos da reflexão de ondas quando estruturas turbilhonares atravessam as fronteiras do domínio, reduzindo, assim,

interferências nos campos de velocidade (ALVAREZ, 2015). De acordo com Deng (2011), essa técnica é implementada por meio da adição de uma região suplementar ao redor do domínio computacional, na qual são inseridos pontos extras e incorporados termos de amortecimento exponencial às equações governantes, promovendo a dissipação gradual das estruturas, como pode ser observado na Fig. 10. Dessa maneira, a zona de amortecimento atua como um sumidouro artificial de estruturas turbilhonares, atenuando reflexões espúrias e preservando a acurácia da solução numérica no interior do domínio de interesse (UZUN, 2003).

Figura 10 – Domínio computacional LES. A zona de amortecimento é utilizada para dissipar ondas espúrias e evitar reflexões nas fronteiras do domínio



Fonte: Adaptado de Khalighi et al. (2011)

No presente trabalho, a função de amortecimento foi empregada para minimizar as influências das condições de contorno periódicas, inerentes ao método pseudoespectral de Fourier. Além disso, essa técnica pode ser utilizada para estabilizar o escoamento externo ao domínio de interesse, sendo particularmente relevante para simulações envolvendo altos valores do número de Reynolds (MOREIRA, 2011).

A função de amortecimento é dada pela Eq. 3.92:

$$ZA = \Psi(Q - Q_t), \tag{3.92}$$

onde Q denota a solução do problema na região de interesse, representando as velocidades computadas, e Q_t corresponde à solução alvo desejada ao final da zona de amortecimento. O código numérico adota condições de contorno periódicas em todas as direções, enquanto

o parâmetro Ψ desempenha um papel fundamental na atenuação das estruturas turbilhonares. Esse parâmetro deve ser ajustado de forma criteriosa, considerando as características do problema, a fim de assegurar uma transição suave e gradual até a solução alvo. A formulação matemática da função de amortecimento é apresentada na Eq. 3.93.

$$\Psi = \frac{1}{2}\left[1 - \tanh\left(4 - 8\frac{z_{za} - z}{z_{za} - z_f}\right)\right], \tag{3.93}$$

onde z_{za} e z_f são, respectivamente, o início e o fim da zona de amortecimento.

Após ser calculada, a função ZA é incorporada ao lado direito (RHS) da equação discretizada (Eq.3.68) como um termo corretivo. No caso do método pseudoespectral, esse cálculo é realizado no espaço físico.

4 RESULTADOS

4.1 VERIFICAÇÃO

A verificação de códigos computacionais busca garantir a correta resolução das equações implementadas numericamente e assegurar a ausência de erros no algoritmo. Para medir esses erros, a solução do código deve ser comparada com outras soluções, sejam elas analíticas ou computacionais, verificando se as equações foram resolvidas de maneira correta e satisfatória. Aspectos como acurácia da solução e convergência do algoritmo são avaliados nesta fase, que atesta a acurácia do modelo numérico (XUE; WANG; ROY, 2023).

4.1.1 Solução da Equação de Burgers

A equação de Burgers, apresentada na Eq. 4.1, é uma equação diferencial parcial (EDP) não linear unidimensional com condições de contorno periódicas. Devido ao balanço entre os termos de advecção e difusão, essa equação é frequentemente empregada como um modelo fundamental na hierarquia das equações de Navier-Stokes (CANUTO et al., 2006). Sua relevância abrange tanto a matemática quanto a engenharia, sendo utilizada como um modelo qualitativo para diversos fenômenos físicos, incluindo ondas de densidade de carga, linhas de estruturas turbilhonares em supercondutores de alta temperatura, além da formação de grandes estruturas cosmológicas e ondas de choque (NASCIMENTO, 2016). Além disso, sua principal vantagem é a possibilidade de obtenção de uma solução analítica, Eq. 4.3, o que a torna uma ferramenta valiosa para a verificação de métodos numéricos.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{em } \Omega,\ \forall t > 0, \tag{4.1}$$

onde u é a velocidade, ν é uma constante positiva, e Ω é o domínio espacial. A Eq. 4.1 é completada pela condição inicial:

$$u(x,0) = c + u_b(x,0). \tag{4.2}$$

Sendo a solução analítica proposta por Canuto et al. (2006):

$$u_b(x,t) = -2\nu\frac{\partial \phi}{\partial x}(x - ct, t+1)\frac{1}{\phi(x-ct,t+1)}, \tag{4.3}$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{[x-(2n+1)\pi]^2}{4\nu t}}, \tag{4.4}$$

onde c é a velocidade de fase, x é a posição no eixo das abscissas, t é o tempo e n é o contador do somatório.

Para resolver numericamente a equação de Burgers utilizando o método pseudoespectral de Fourier, deve-se aplicar a transformada de Fourier na variável espacial, obtendo-se a Eq. 4.5.

$$\widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} + u\widehat{\frac{\partial u}{\partial x}} - \nu\widehat{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = 0. \tag{4.5}$$

Considerando as propriedades do espaço espectral de Fourier, cada termo da Eq. 4.5 é analisado separadamente como segue:

$$\underbrace{\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}}_{\text{Transiente}} = \underbrace{-\hat{u}\frac{\partial \hat{u}}{\partial x}}_{\text{Advectivo}} + \underbrace{\nu(i\cdot k)^2\hat{u}}_{\text{Difusivo}}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\hat{u} * (i\cdot k)\cdot \hat{u} - \nu k^2 \hat{u}. \tag{4.7}$$

O tratamento do termo não linear pode ser realizado de forma advectiva (Eq. 4.8), forma divergente (Eq. 4.9) e forma antissimétrica (Eq. 4.11).

$$u\frac{du}{dx}, \tag{4.8}$$

$$\frac{d(uu)}{dx}. \tag{4.9}$$

Neste caso específico, por se tratar de uma equação unidimensional, a forma divergente é apresentada por Canuto et al. (2006) da seguinte maneira:

$$\frac{1}{2}\frac{d(uu)}{dx}, \tag{4.10}$$

sendo que a forma antissimétrica é a média aritmética das formas advectiva e divergente:

$$\frac{1}{2}\left[u\frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d(uu)}{dx}\right]. \tag{4.11}$$

O código numérico desenvolvido foi testado para dois cenários, um considerando apenas a difusão da onda ($c = 0$ m/s) e outro demonstrando, além da difusão, a propagação da onda ao longo do tempo ($c = 4$ m/s). O domínio é unidimensional com um comprimento $L_x = 2\pi$.

Para o avanço temporal, foi utilizado passo de tempo variável, baseado no critério CFL, proposto por Courant, Friedrichs e Lewy (1967):

$$\Delta t = \text{CFL} \cdot \min\left[\frac{\Delta x}{\max|u|}, \frac{\Delta x^2}{2 \cdot \nu}\right] \tag{4.12}$$

onde CFL é geralmente um número entre 0 e 1, que depende do esquema de integração e do próprio método em análise. Para estas análises, utilizou-se $\text{CFL} = 0,1$.

O erro foi calculado comparando os resultados numéricos com a solução analítica. Esta avaliação foi realizada utilizando as normas L_2 e L_∞, definidas pelas equações:

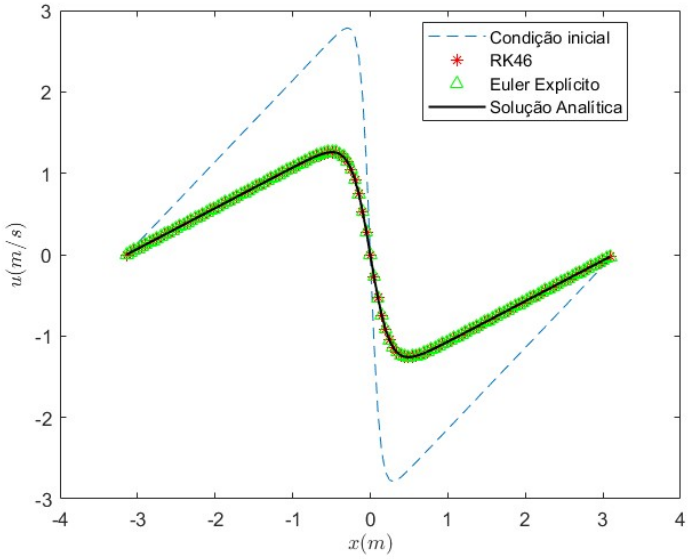
$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(u_j^n - u_j^a\right)^2} \tag{4.13}$$

$$L_\infty = \text{Erro}_{\text{abs}} = \max|u^a - u^n| \tag{4.14}$$

onde N é a quantidade de pontos nodais, u^a representa a solução analítica, u^n a solução numérica, e $\max|\cdot|$ denota o valor máximo absoluto da diferença entre a solução analítica e a solução numérica.

A Fig. 11 apresenta a solução da equação de Burgers, conhecida por sua natureza periódica e por exibir um forte gradiente de velocidade, que se aproxima da descontinuidade. A presença desse gradiente acentuado faz da equação adequada para testar a capacidade dos métodos numérico-computacionais em capturar características complexas e não linearidades.

Figura 11 – Solução da equação de Burgers usando malha de 128 pontos, $t = \frac{\pi}{8}$ s



Fonte: Autoria Própria

Ao utilizar um método de alta precisão e alta ordem de convergência na discretização espacial, é igualmente essencial empregar um método compatível na discretização temporal. Para verificar essa compatibilidade, foram realizados testes utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem otimizado em seis passos (RK46), conforme proposto por Allampalli et al. (2009), e o método de Euler explícito para $c = 4$ m/s e $c = 0$ m/s. Com um tempo final de $t_f = \frac{\pi}{8}$ s e uma viscosidade cinemática de $\nu = 0,2$ m^2/s, os resultados foram comparados com a solução analítica e estão apresentados, respectivamente, nas Tabelas 3 e 4. Todos os valores adotados foram extraídos do livro de Canuto et al. (2006). Adicionalmente, foram avaliadas duas abordagens para o tratamento do termo não linear: a forma advectiva e a forma antissimétrica.

Tabela 3 – Análise da norma L_2 para $C = 4$ m/s e $t = \frac{\pi}{8}$

N	RK46 (Adv.)	RK46 (Antiss.)	Euler (Adv.)	Euler (Antiss.)	Canuto et al.
32	$4,96 \times 10^{-2}$	$7,20 \times 10^{-3}$	$4,96 \times 10^{-2}$	$7,18 \times 10^{-3}$	$1,00 \times 10^{-2}$
64	$4,20 \times 10^{-3}$	$3,92 \times 10^{-4}$	$4,16 \times 10^{-3}$	$4,02 \times 10^{-4}$	$1,00 \times 10^{-4}$
128	$1,06 \times 10^{-5}$	$8,37 \times 10^{-7}$	$9,07 \times 10^{-5}$	$9,01 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-6}$
256	$4,80 \times 10^{-11}$	$3,85 \times 10^{-12}$	$9,01 \times 10^{-5}$	$9,01 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-11}$
512	$2,53 \times 10^{-14}$	$2,41 \times 10^{-14}$	$9,01 \times 10^{-5}$	$9,01 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-12}$
1024	$6,55 \times 10^{-14}$	$6,38 \times 10^{-14}$	$9,01 \times 10^{-5}$	$9,01 \times 10^{-5}$	$1,00 \times 10^{-12}$

Fonte: Autoria Própria

Tabela 4 – Análise da norma L_2 para $C = 0$ m/s e $t = \frac{\pi}{8}$

N	RK46 (Adv.)	RK46 (Antiss.)	Euler (Adv.)	Euler (Antiss.)
32	$2,43 \times 10^{-4}$	$1,10 \times 10^{-3}$	$2,41 \times 10^{-4}$	$1,05 \times 10^{-3}$
64	$1,41 \times 10^{-7}$	$1,58 \times 10^{-6}$	$3,11 \times 10^{-6}$	$3,22 \times 10^{-6}$
128	$1,79 \times 10^{-13}$	$4,15 \times 10^{-12}$	$3,16 \times 10^{-6}$	$3,16 \times 10^{-6}$
256	$1,33 \times 10^{-15}$	$2,07 \times 10^{-15}$	$3,16 \times 10^{-6}$	$3,16 \times 10^{-6}$
512	$3,23 \times 10^{-15}$	$3,47 \times 10^{-15}$	$3,16 \times 10^{-6}$	$3,16 \times 10^{-6}$
1024	$7,58 \times 10^{-15}$	$6,43 \times 10^{-15}$	$3,16 \times 10^{-6}$	$3,16 \times 10^{-6}$

Fonte: Autoria Própria

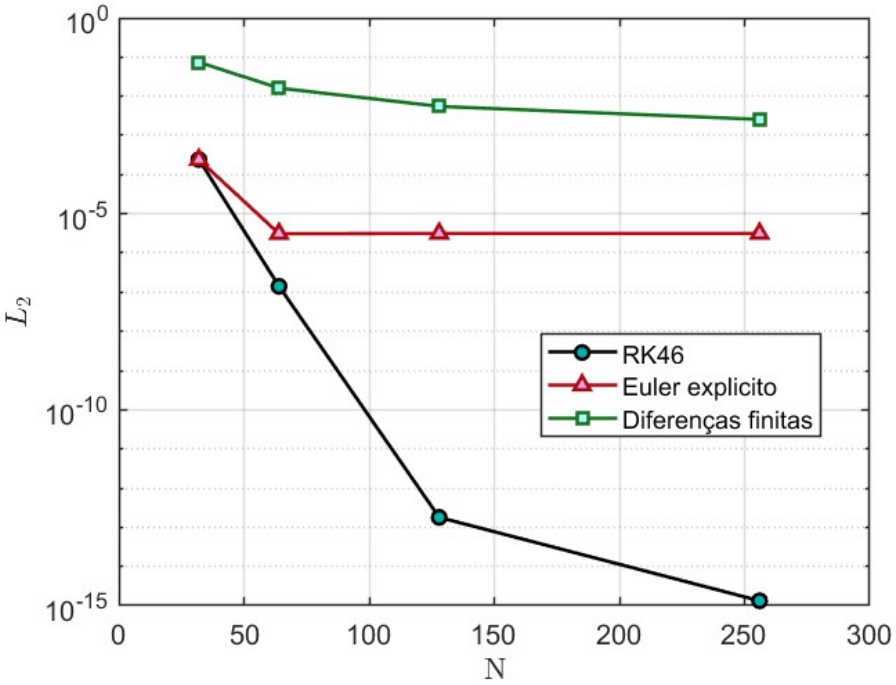
A Tabela 4 demonstra que, quando $c = 0$ m/s, a abordagem advectiva para o tratamento do termo não linear tende a proporcionar resultados mais precisos em comparação com a forma antissimétrica. Por outro lado, a Tabela 3 revela que, para $c = 4$ m/s, a forma antissimétrica apresenta um desempenho melhor, corroborando as conclusões de Kinoshita (2011). Observa-se também uma discrepância significativa entre os resultados obtidos pelo método de Euler

explícito e o método RK46, especialmente com o refinamento da malha. O avanço temporal utilizando o método RK46 mostra-se várias ordens de grandeza mais acurado do que o Euler explícito, aproximando-se mais dos resultados reportados por Canuto et al. (2006). Portanto, o método de Runge-Kutta otimizado foi adotado para todos os testes subsequentes, assegurando que a progressão temporal não comprometa a elevada acurácia do método espectral.

O gráfico da da Fig. 12 compara a acurácia na resolução da equação de Burgers, para $c = 0$ m/s, utilizando o método pseudoespectral de Fourier com dois diferentes esquemas de integração temporal. A curva associada ao método RK46 demonstra uma significativa redução no erro à medida que o número de pontos aumenta, evidenciando a alta ordem de convergência ou convergência exponencial deste método. Em contraste, o método de Euler explícito apresenta erros consideravelmente maiores, que permanecem praticamente constante independentemente do número de pontos nodais, sugerindo que o erro não depende da discretização espacial, mas da discretização temporal.

Adicionalmente, a equação de Burgers foi resolvida pelo método das diferenças finitas, fornecendo uma referência de comparação com a abordagem espectral. Neste método, a discretização espacial foi realizada utilizando diferenças centrais de segunda ordem, enquanto a evolução temporal foi conduzida por meio do esquema de Euler explícito. Essa formulação, embora simples e de fácil implementação, impõe restrições significativas à estabilidade numérica, uma vez que o passo de tempo deve satisfazer rigorosamente a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) para evitar instabilidades. Ademais, devido à natureza de baixa ordem do método, a acurácia da solução é fortemente limitada tanto pela discretização espacial quanto pelo avanço temporal. Dessa forma, a inclusão dessa abordagem tem o objetivo de evidenciar as vantagens do método pseudoespectral, especialmente quando associado a esquemas temporais de alta ordem, os quais permitem alcançar níveis superiores de acurácia.

Figura 12 – Comparação da acurácia na resolução da equação de Burgers, $c = 0$ m/s



Fonte: Autoria Própria

4.1.2 Solução Manufaturada de Taylor-Green

O processo de verificação foi também realizado utilizando técnicas de soluções manufaturadas, que consistem em utilizar a própria solução teórica para resolver os problemas com as equações de Navier-Stokes (NASCIMENTO, 2016). Para tal, foram empregadas as equações analíticas de pressão e velocidades propostas por Taylor e Green (1937), conforme apresentado por Canuto et al. (2006), representadas pelas Eqs. 4.15, 4.16 e 4.17:

$$u^c = U_\infty \sin\left(\frac{ax}{L}\right) \cos\left(\frac{by}{L}\right) e^{-\left[\frac{\nu t}{L^2}(a^2+b^2)\right]}, \tag{4.15}$$

$$v^c = -U_\infty \frac{a}{b} \cos\left(\frac{ax}{L}\right) \sin\left(\frac{by}{L}\right) e^{-\left[\frac{\nu t}{L^2}(a^2+b^2)\right]}, \tag{4.16}$$

$$p^c = -\rho U_\infty^2 \frac{a^2}{2b^2} \left[\sin^2\left(\frac{ay}{L}\right) - \cos^2\left(\frac{by}{L}\right)\right] e^{-\left[\frac{2\nu t}{L^2}(a^2+b^2)\right]}, \tag{4.17}$$

Nesta solução, u^c e v^c representam as componentes contínuas da velocidade na direção x e y, enquanto p^c denota a pressão contínua. a e b são constantes e x e y são as coordenadas

cartesianas; L é o diâmetro de um vórtice e é igual a π metros; ν é a viscosidade cinemática; ρ é a massa específica do fluido; e U_∞ é uma velocidade de referência.

As equações para verificação devem obedecer à equação da continuidade, Eq. 4.18:

$$\frac{\partial u^a}{\partial x} + \frac{\partial v^a}{\partial y} = 0, \tag{4.18}$$

Os termos fontes introduzidos nas equações de Navier-Stokes são dados pelas Eqs. 4.19 e 4.20:

$$f_x^a = \frac{\partial u^a}{\partial t} + \frac{\partial u^a u^a}{\partial x} + \frac{\partial u^a v^a}{\partial y} + \frac{\partial p^a}{\partial x} - \nu \left(\frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^a}{\partial y^2} \right), \tag{4.19}$$

$$f_y^a = \frac{\partial v^a}{\partial t} + \frac{\partial u^a v^a}{\partial x} + \frac{\partial v^a v^a}{\partial y} + \frac{\partial p^a}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u^a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^a}{\partial y^2} \right). \tag{4.20}$$

Ao substituir as Eqs. 4.15 a 4.17 nas Eqs. 4.19 e 4.20, obtêm-se $f_x^a = 0$ e $f_y^a = 0$. Assim, as soluções analíticas propostas por Taylor e Green resultam em termos fonte nulos nas equações de Navier-Stokes. As condições de contorno de periodicidade foram aplicadas nesta etapa.

Os parâmetros utilizados para a solução das Equações de Taylor-Green estão apresentados na Tabela 5.O número de Reynolds é definido para esse escoamento de acordo com a Eq. 4.21.

$$Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \tag{4.21}$$

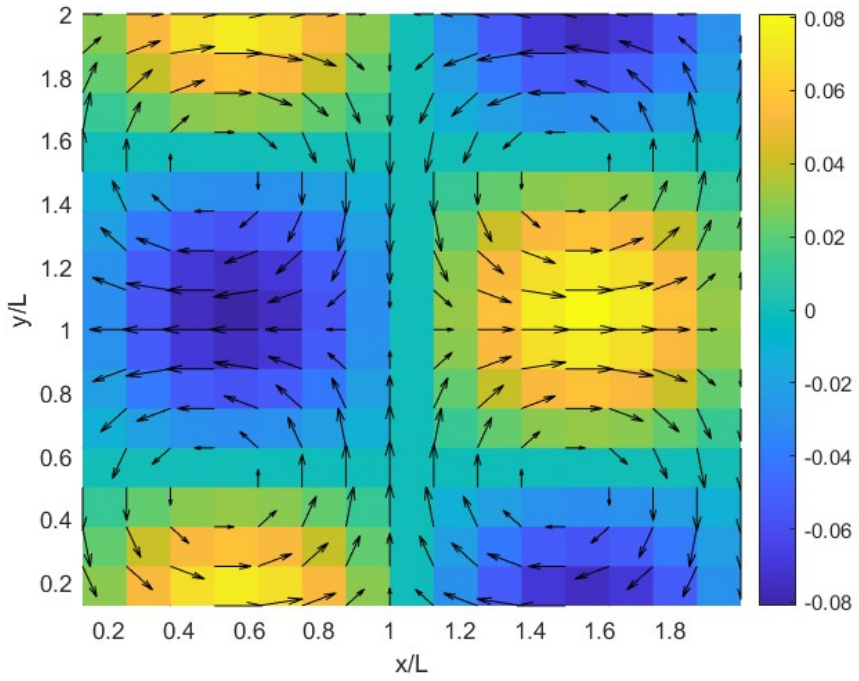
Tabela 5 – Parâmetros utilizados para a solução das Equações de Taylor-Green

$L_x \times L_y$	U_∞	Re	t_f	CFL	$N_x \times N_y$	a	b
$2\pi \times 2\pi$	$1\,\mathrm{m/s}$	10	$4\,\mathrm{s}$	$0,75$	16×16	1	1

Fonte: Autoria Própria

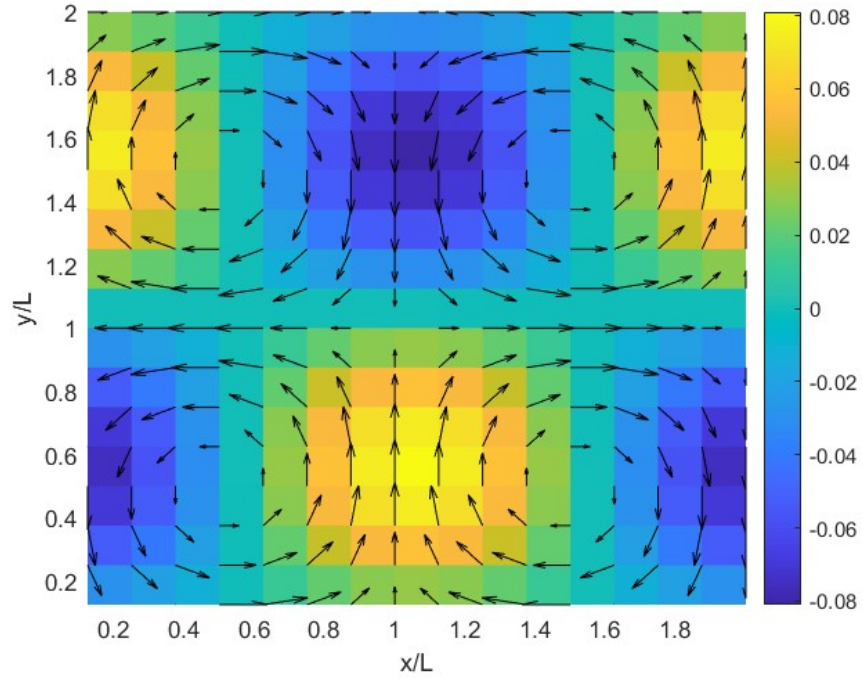
As Figuras 13, 14 e 15 apresentam, respectivamente, o campo de velocidade na direção horizontal, o campo de velocidade na direção vertical e a pressão obtidos para a solução de Taylor-Green em $t = 4$ segundos.

Figura 13 – Campo de velocidade u sobreposto pelos vetores de velocidade, $t = 4$ s



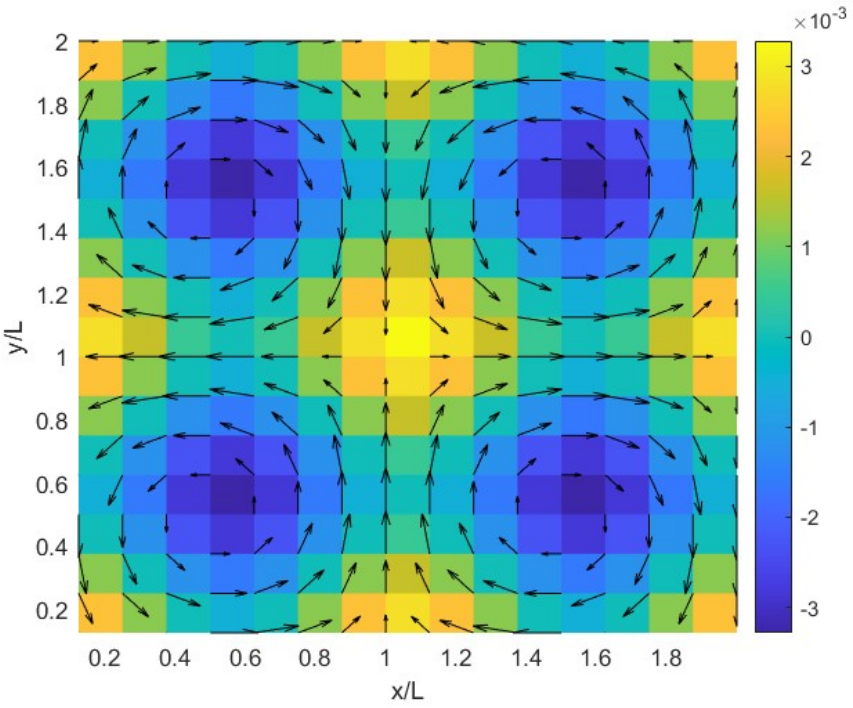
Fonte: Autoria Própria

Figura 14 – Campo de velocidade v sobreposto pelos vetores de velocidade, $t = 4$ s



Fonte: Autoria Própria

Figura 15 – Campo de pressão p sobreposto pelos vetores de velocidade, $t = 4$ s



Fonte: Autoria Própria

A norma L_2 calculada para cada uma dessas variáveis está mostrada na Tabela 6, evidenciando que os erros obtidos estão na ordem do erro de máquina, mesmo para a malha menos refinada (16x16), demonstrando a significativa acurácia do método pseudoespectral de Fourier.

Tabela 6 – Norma L_2 para solução da equação Manufaturada de Taylor-Green, $t = 4$ s

Variável	Norma L_2
Velocidade horizontal (U_0)	$4,85 \times 10^{-16}$
Velocidade vertical (V_0)	$4,82 \times 10^{-16}$
Pressão (P_0)	$2,81 \times 10^{-17}$

Fonte: Autoria Própria

4.2 ESCOAMENTOS SOBRE AEROFÓLIOS

Nesta seção, será mostrado o procedimento de validação da metodologia IMERSPEC, avaliando sua capacidade de representar e modelar a análise de escoamentos incompressíveis sobre um aerofólio (ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO, 2023a; ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO,

2023b; ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO, 2024). Isso possibilita a comparação dos resultados numérico-computacionais obtidos com outros resultados disponíveis na literatura.

As forças aerodinâmicas que atuam sobre um aerofólio resultam da interação entre o escoamento do fluido e o corpo imerso. A força gerada pode ser decomposta em duas componentes: a força de sustentação (L), que atua perpendicularmente à direção do escoamento, e a força de arrasto (D), que age paralelamente a ele. Para a análise comparativa com dados numéricos ou experimentais disponíveis na literatura, utilizam-se, como principais parâmetros, os coeficientes adimensionais de sustentação (C_L) e de arrasto (C_D). Esses coeficientes apresentam variações temporais devido ao fenômeno de desprendimento de turbilhões; contudo, seus valores médios ao longo do tempo possibilitam uma avaliação quantitativa adequada.

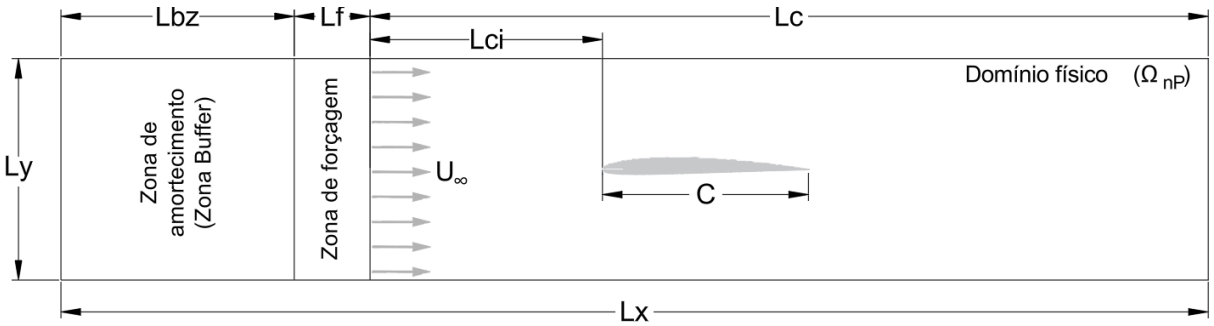
4.2.1 Análise de refinamento e diferentes números de Reynolds

A análise do refinamento da malha Euleriana na metodologia IMERSPEC é essencial para assegurar a acurácia dos resultados e a convergência das soluções, especialmente na modelagem de escoamentos sobre aerofólios. Nesse contexto, são examinados dois níveis de refinamento da malha: 512 $\times$ 128 pontos e 1024 $\times$ 256 pontos de colocação.

As dimensões do domínio computacional são apresentadas na Fig. 16. O domínio Euleriano é definido por $L_x \times L_y$, onde $L_x = \frac{N_x}{N_y} L_y$. Esse domínio é subdividido em três regiões distintas: a zona de amortecimento (L_{bz}), a zona de forçagem ($L_c - L_{bz}$) e o domínio físico (L_c). A estruturação dessas regiões resulta em um domínio periódico, garantindo que as condições de contorno na entrada e na saída sejam idênticas.

Devido à periodicidade do domínio, instabilidades físicas, como recirculações de fluido que deixam a região computacional, são reintroduzidas na entrada. Esse fenômeno justifica a inclusão da zona de amortecimento e da zona de forçagem. A zona de amortecimento tem a função de dissipar as instabilidades que ingressam pela face de entrada, enquanto a zona de forçagem ajusta o escoamento antes que ele atinja a região do domínio físico. Dessa maneira, evita-se a retroalimentação de perturbações que possam comprometer a representação do perfil de velocidade na entrada do domínio físico (MARIANO, 2011).

Figura 16 – Domínio de cálculo para a solução de escoamentos sobre um aerofólio



Fonte: Autoria Própria

Foram conduzidos testes de refinamento de malha para o aerofólio NACA 4402, considerando um ângulo de ataque $\alpha = 4°$ e um número de Reynolds $Re = 1000$. Embora esse ângulo de ataque seja relativamente pequeno, ele é suficiente para modificar o escoamento ao redor do aerofólio, resultando na formação de pequenas regiões de recirculação associadas ao descolamento parcial da camada limite e à presença de gradientes adversos de pressão. No entanto, essas condições são menos intensas em comparação com regimes altamente turbulentos, nos quais há um desprendimento mais pronunciado da camada limite e uma extensa geração de turbilhões, que podem impactar significativamente a aerodinâmica do aerofólio.

Nas simulações, os aerofólios foram posicionados no centro de um domínio com dimensões suficientemente grandes para representar com acurácia o escoamento externo sobre os perfis e minimizar os efeitos das paredes do domínio sobre a geometria imersa. As dimensões do domínio foram baseadas nas especificações adotadas por Monteiro e Mariano (2023) e foram adimensionalizadas pela corda do aerofólio, $c = 1\,\text{m}$. O domínio Euleriano utilizado possui dimensões de 32×8 metros, com uma distância de 24 m entre a borda de fuga e a saída, e uma zona de forçagem de 0,625 m.

O perfil de velocidade na entrada do domínio físico é uniforme e dado por $U_\infty = 1\,\text{m/s}$ ao longo de L_y. O número de pontos Lagrangianos foi definido de modo que a relação $h/\Delta s \approx 1$ seja satisfeita, onde h é o espaçamento euleriano e Δs o espaçamento lagrangiano, distribuídos uniformemente ao longo das curvas das superfícies do perfil. Para garantir essa equivalência, a viscosidade do fluido é determinada como $\nu = U_\infty c/\text{Re}$. Adicionalmente, o número de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) adotado nas simulações foi fixado em $\text{CFL} = 0,25$.

A Tabela 7 apresenta os valores médios (com respeito à amostra ao longo de todo o intervalo de tempo físico de 100 s, iniciando a partir do regime estatisticamente independente) dos coeficientes de sustentação e de arrasto para o aerofólio NACA 4402 com diferentes

malhas. Os resultados foram comparados com os valores propostos por Antonelli (2017), que utilizou um solver baseado no Método dos Elementos Finitos, e por Kunz e Kroo (2000), que empregaram o código INS2D desenvolvido na NASA Ames. O código INS2D é baseado em um esquema de diferenças finitas originalmente desenvolvido por Rogers e Kwak (1990).

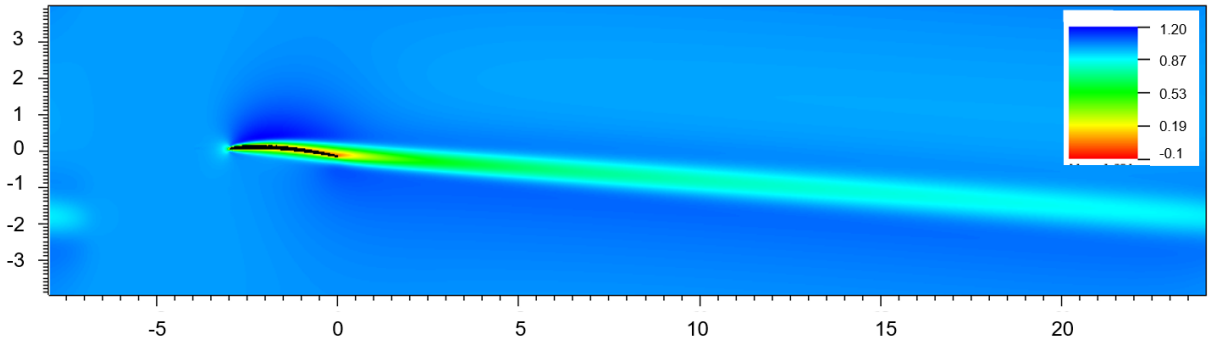
Tabela 7 – Coeficientes aerodinâmicos do aerofólio NACA 4402, $Re = 1000$, $\alpha = 4°$

Malhas de Refinamento	C_L	C_D	C_L/C_D
512 $\times$ 128	0,420	0,154	2,733
1024 $\times$ 256	0,497	0,136	3,646
Antonelli (2017)	0,506	0,146	3,460
Kunz e Kroo (2000)	0,506	0,110	4,598

Fonte: Autoria Própria

Com base nos trabalhos mencionados, a partir dos resultados na Tabela 7, a malha 1024 $\times$ 256 demonstrou ser adequada para a análise dos parâmetros aerodinâmicos em questão. Os resultados obtidos exibiram convergência e aprimoramento significativo quando comparados àqueles provenientes da malha menos refinada. De forma semelhante, o comportamento do escoamento laminar observado na Fig. 17 confirma que o formato esbelto do aerofólio NACA 4402 e o baixo número de Reynolds são suficientes para atrasar o descolamento da camada limite e evitar a formação de turbilhões nessas condições.

Figura 17 – Campo de velocidades, em [m/s], do escoamento sobre o aerofólio NACA 4402, $Re = 1000$, $\alpha = 4°$



Fonte: Autoria Própria

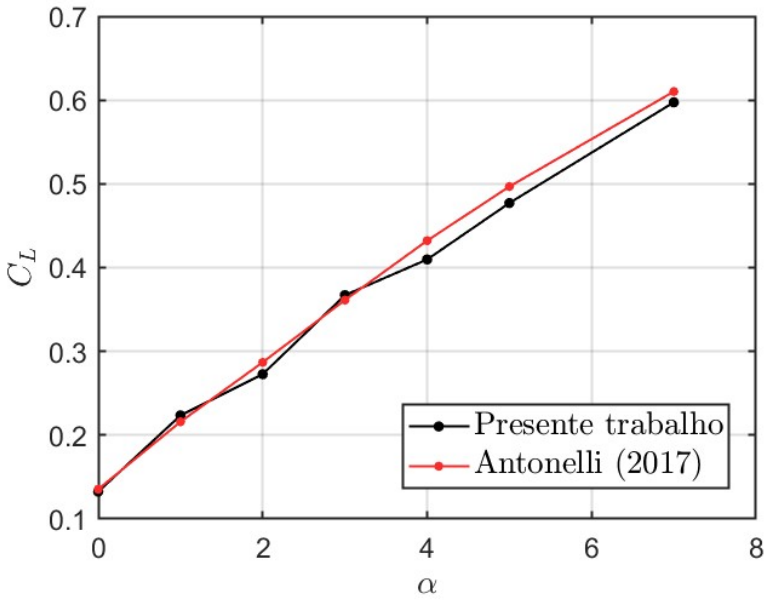
O refinamento da malha Euleriana resulta em um aumento no número de pontos Lagrangianos, o que influencia diretamente nos cálculos do campo de velocidades do escoamento. Malhas menos refinadas, por outro lado, tendem a reduzir o custo computacional, uma vez que diminuem o número de operações e cálculos associados à distribuição, interpolação e

interações inerentes ao Método da Fronteira Imersa (MFI). Contudo, o uso de malhas mais grossas pode levar a maiores variações numéricas e divergências, comprometendo a acurácia dos resultados.

As curvas de sustentação obtidas para o aerofólio NACA 4404 são apresentadas nas Figs. 18, 19 e 20, correspondentes aos números de Reynolds $Re = 400$, 800 e 6000. De forma análoga aos trabalhos de referência, este estudo concentrou-se na análise da seção linear das curvas, situada acima do ângulo de sustentação nula, onde o escoamento acompanha o contorno do aerofólio. Para garantir a confiabilidade dos resultados, os valores do coeficiente de sustentação foram calculados como médias temporais ao longo de um intervalo de tempo físico de 100 segundos.

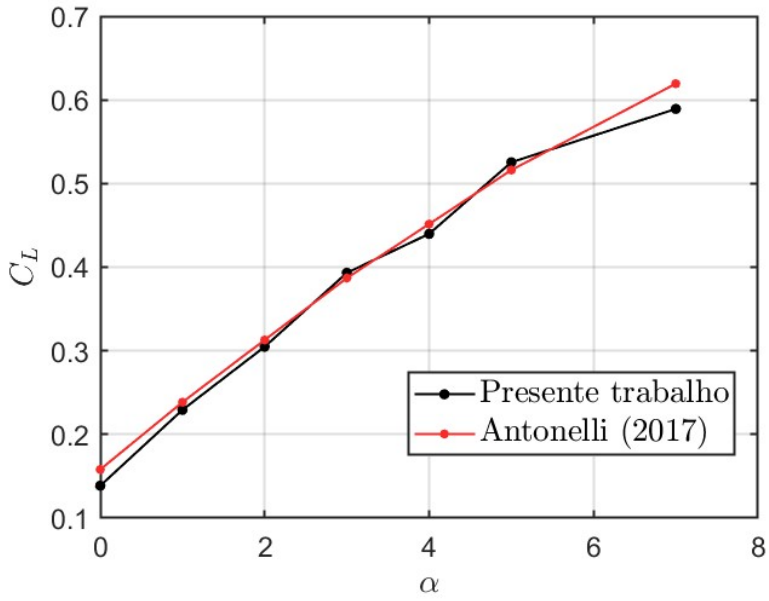
Os resultados demonstram elevada consistência, especialmente em escoamentos com baixos números de Reynolds, nos quais predomina um regime laminar e ordenado. Contudo, observam-se flutuações em determinados ângulos de ataque, as quais podem ser atribuídas à manifestação do fenômeno de Gibbs. Esse fenômeno, caracterizado por oscilações em soluções numéricas decorrentes da presença de descontinuidades, é particularmente relevante em métodos de alta ordem, como o MPEF.

Figura 18 – Curva de sustentação para NACA 4404, $Re = 400$



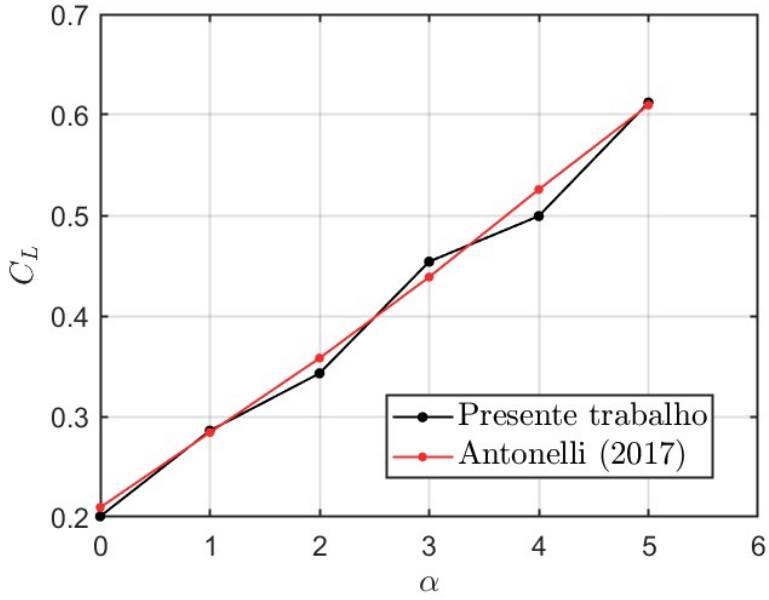
Fonte: Autoria Própria

Figura 19 – Curva de sustentação para NACA 4404, $Re = 800$



Fonte: Autoria Própria

Figura 20 – Curva de sustentação para NACA 4404, $Re = 6000$



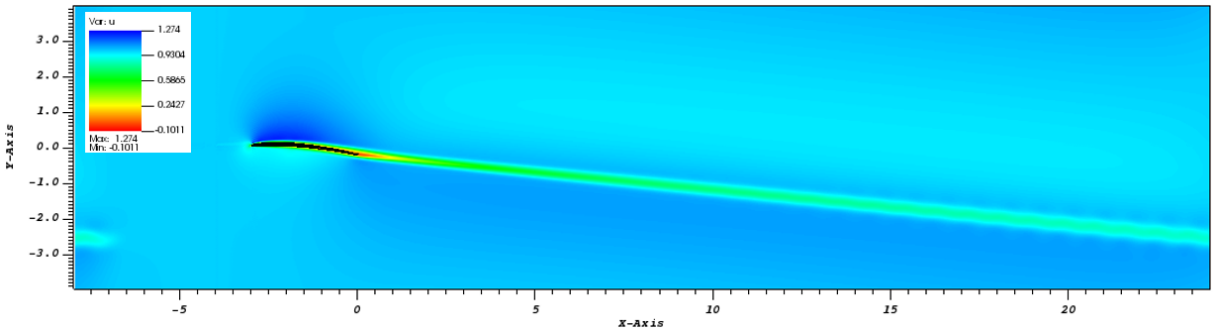
Fonte: Autoria Própria

Nas Figuras 21 a 24, são apresentados os campos de velocidade $u(x, y, t)$ em $[m/s]$ para os perfis aerodinâmicos NACA 4402 e NACA 4404, com ângulos de ataque de $5°$ para $Re = 800$ e $7°$ para $Re = 6000$. Nota-se que o aumento do número de Reynolds provoca uma modificação significativa na dinâmica do escoamento. Para esses ângulos de ataque relativamente baixos,

o descolamento da camada limite já é evidenciado pela presença de uma região de velocidade negativa nas proximidades da superfície do extradorso. Essa região se intensifica no escoamento com $Re = 6000$, estendendo-se para cobrir uma área mais ampla do extradorso, o que sugere a tendência do escoamento em formar estruturas turbilhonares na esteira. Tais estruturas propagam-se de modo a assegurar a conservação de massa, conforme prescrito pelas equações de Navier-Stokes.

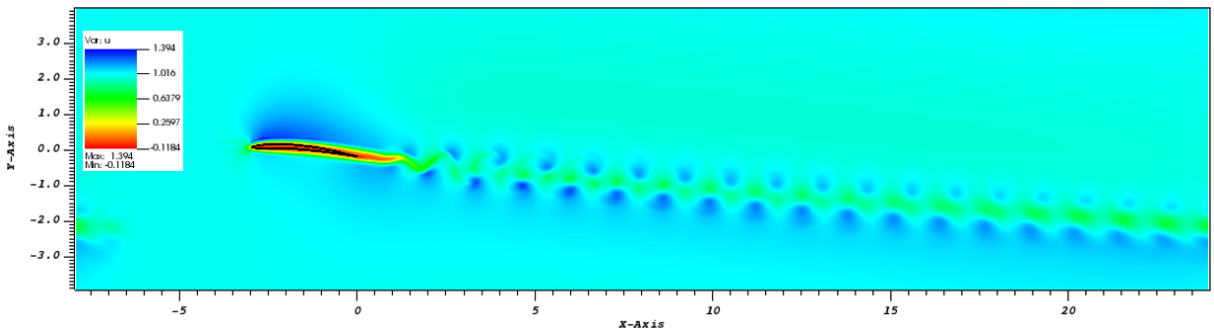
Além disso, são observadas oscilações no escoamento sobre o perfil NACA 4404. O arqueamento dos perfis influencia diretamente a distribuição de pressão entre o intradorso e o extradorso. Isso ocorre porque, ao passar pela região superior do perfil, o escoamento é submetido a um gradiente de pressão adverso mais acentuado, especialmente após o ponto de máxima curvatura do perfil. Esse fenômeno contribui para a complexidade do comportamento do escoamento, destacando a interação entre a geometria do perfil e as condições aerodinâmicas impostas.

Figura 21 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4402, $Re = 6000$, $\alpha = 5°$



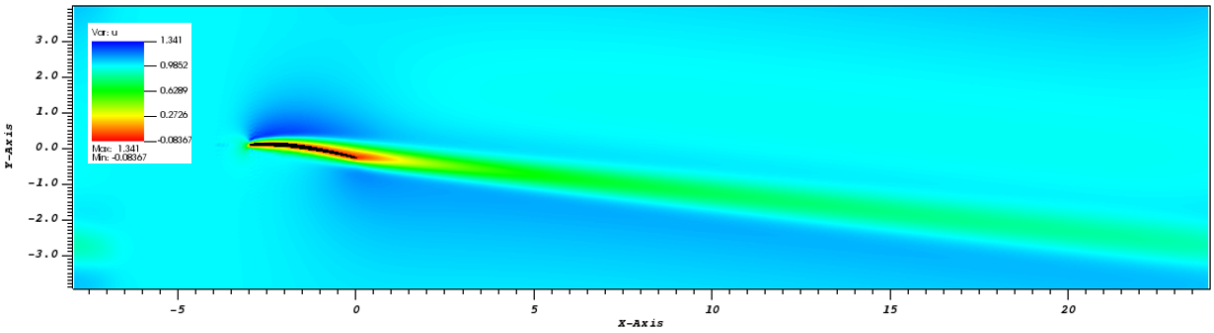
Fonte: Autoria Própria

Figura 22 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4404, $Re = 6000$, $\alpha = 5°$



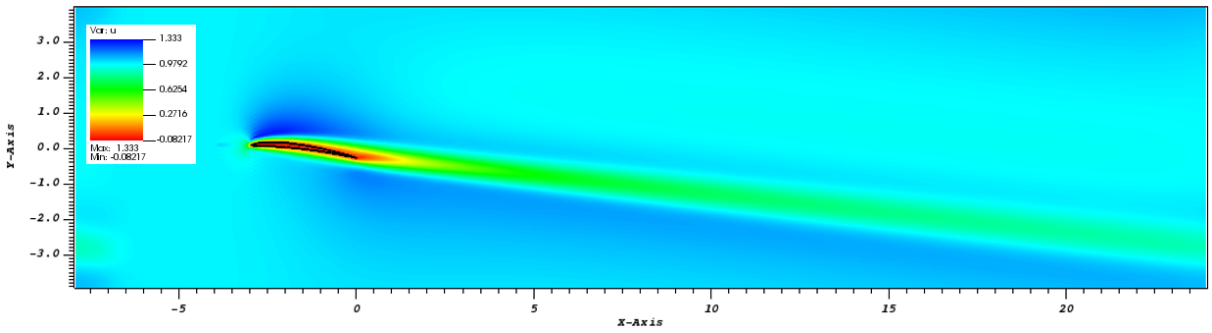
Fonte: Autoria Própria

Figura 23 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4402, $Re = 800$, $\alpha = 7°$



Fonte: Autoria Própria

Figura 24 – Campo de velocidade $u(x, y, t)$ em [m/s] do escoamento sobre o perfil NACA 4404, $Re = 800$, $\alpha = 7°$



Fonte: Autoria Própria

Na continuidade deste trabalho, foi possível avançar para a simulação de escoamentos turbulentos por meio da implementação do modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras. Como demonstrado anteriormente, as simulações realizadas sem o modelo estavam restritas a escoamentos com números de Reynolds baixos, nos quais o regime laminar predominava. A adoção do modelo de Spalart-Allmaras permitiu superar essa limitação, possibilitando a análise de escoamentos com números de Reynolds elevados.

4.2.2 Influência das funções peso

Nesta seção, investiga-se a influência de diferentes funções peso nas simulações de escoamentos bidimensionais sobre o aerofólio NACA 4404. As análises foram conduzidas para ângulos de ataque variando de 0° a 7° e um número de Reynolds de 800. Foram testadas três funções: a função gaussiana, Eq. 4.22, proposta por Peskin (1972); a função cúbica, Eq. 4.23,

desenvolvida por Tornberg e Engquist (2004); e a função chapéu, Eq. 4.24, apresentada por Su, Lai e Lin (2007).

$$W_g(r) = \begin{cases} \frac{3-2|r|+\sqrt{1+4|r|-4|r|^2}}{8}, & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ \frac{5-2|r|+\sqrt{-7+12|r|-4|r|^2}}{8}, & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 0, & \text{se } 2 < |r| \end{cases} \tag{4.22}$$

$$W_c(r) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}|r| - |r|^2 + \frac{1}{2}|r|^3, & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 1 + \frac{11}{6}|r| + |r|^2 - \frac{1}{6}|r|^3, & \text{se } 1 < |r| \leq 2 \\ 0, & \text{se } 2 < |r| \end{cases} \tag{4.23}$$

$$W_h(r) = \begin{cases} 1 - |r|, & \text{se } 0 < |r| \leq 1 \\ 0, & \text{se } 2 < |r| \end{cases} \tag{4.24}$$

sendo $r_x = \frac{x-X}{h}$ e $r_y = \frac{y-Y}{h}$, onde $\vec{x}$ é o vetor que define o posicionamento de um ponto qualquer no domínio euleriano (Ω), $\vec{X}$ é um vetor que define o posicionamento de um ponto qualquer no domínio lagrangiano (Γ) e h é a distância entre os pontos de colocação eulerianos.

As simulações foram realizadas em uma malha computacional de 1024×256 pontos, mantendo as mesmas dimensões do domínio utilizadas na seção anterior. Conforme demonstrado na análise prévia, essa configuração de malha apresentou maior consistência e coerência em comparação com a malha menos refinada. A escolha visa garantir a acurácia e a confiabilidade dos resultados, permitindo uma avaliação adequada do impacto das funções peso no comportamento do escoamento.

Na Tabela 8, são apresentados os valores médios dos coeficientes de sustentação (C_L) e arrasto (C_D), calculados ao longo de todo o intervalo de tempo físico das simulações realizadas. Tais valores foram obtidos mediante a aplicação das diferentes funções peso analisadas. Adicionalmente, os resultados foram comparados com os dados de Antonelli (2017), visando avaliar a consistência das simulações.

Tabela 8 – Resultados dos coeficientes C_L e C_D para diferentes funções peso e valores de α

α	Função peso	C_L	C_D	Diferença C_L	Diferença C_D
0	Cúbica	0,088	0,107	44,51%	1,49%
	Gaussiana	0,166	0,218	5,02%	101,82%
	Chapéu	0,157	0,207	0,53%	91,16%
	Antonelli (2017)	0,158	0,108	-	-
1	Cúbica	0,157	0,108	34,06%	1,50%
	Gaussiana	0,252	0,216	6,01%	96,72%
	Chapéu	0,245	0,202	2,70%	84,12%
	Antonelli (2017)	0,238	0,110	-	-
2	Cúbica	0,224	0,112	28,68%	0,16%
	Gaussiana	0,336	0,198	6,87%	76,66%
	Chapéu	0,325	0,206	3,39%	84,16%
	Antonelli (2017)	0,314	0,112	-	-
3	Cúbica	0,284	0,115	26,73%	0,13%
	Gaussiana	0,417	0,212	7,81%	84,93%
	Chapéu	0,409	0,214	5,65%	86,88%
	Antonelli (2017)	0,387	0,114	-	-
5	Cúbica	0,482	0,118	5,80%	0,72%
	Gaussiana	0,644	0,233	41,46%	98,42%
	Chapéu	0,477	0,155	4,67%	32,44%
	Antonelli (2017)	0,455	0,117	-	-
6	Cúbica	0,414	0,125	20,10%	2,27%
	Gaussiana	0,496	0,249	4,21%	103,40%
	Chapéu	0,499	0,183	3,72%	49,18%
	Antonelli (2017)	0,518	0,122	-	-
7	Cúbica	0,464	0,134	25,39%	1,11%
	Gaussiana	0,574	0,243	7,86%	82,38%
	Chapéu	0,599	0,252	3,76%	89,21%
	Antonelli (2017)	0,623	0,133	-	-

Fonte: Autoria Própria

Na Tabela 8 é possível observar que, para todos os ângulos de ataque considerados, as simulações que empregaram a função cúbica apresentaram resultados mais próximos dos valores de referência para o coeficiente de arrasto (C_D), com diferenças relativas inferiores a 2,27%. Esse comportamento sugere que a função cúbica é mais adequada para capturar os efeitos viscosos e de pressão associados ao arrasto. No entanto, para o coeficiente de sustentação (C_L), a função cúbica não demonstrou desempenho satisfatório, subestimando ou superestimando os

valores esperados. Em contrapartida, a função chapéu mostrou-se mais acurada para o cálculo de C_L, indicando uma melhor representação das forças relacionadas à sustentação.

Essa discrepância no desempenho das funções peso evidencia a importância da escolha adequada da função de interpolação/distribuição, uma vez que diferentes aspectos do escoamento podem ser influenciados de maneira distinta. Os resultados obtidos sugerem que uma abordagem híbrida, combinando a função cúbica para o cálculo de C_D e a função chapéu para o cálculo de C_L, pode ser uma estratégia eficaz para melhorar a acurácia global das simulações. Essa combinação permitiria aproveitar as vantagens de cada função, otimizando a representação tanto das forças de arrasto quanto das forças de sustentação.

A Tabela 9 apresenta os resultados da aplicação da metodologia híbrida no cálculo do C_L, do C_D e da eficiência aerodinâmica (C_L/C_D) para o perfil simétrico NACA 0008. Esses resultados são comparados com aqueles obtidos utilizando as funções peso isoladas (gaussiana, cúbica e chapéu), bem como com os dados de referência de Antonelli, Sacco e Tamagno (2013), que simularam o mesmo perfil sob condições de número de Reynolds de 2000 e ângulo de ataque de 3°. Para essa simulação, adotou-se a euleriana menos refinada, com dimensões de 512×128. Apesar da resolução reduzida, os resultados obtidos demonstraram-se satisfatórios, evidenciando a robustez e a eficácia da metodologia híbrida.

Tabela 9 – Coeficientes aerodinâmicos médios do perfil NACA 0008 para diferentes funções peso

Função peso	C_L	C_D	C_L/C_D	Diferença C_L	Diferença C_D
Gaussiana	0.1474	0.1628	0.91	28.014%	127.416%
Cúbica	0.2414	0.0727	3.32	17.914%	1.537%
Chapéu	0.2404	0.0979	2.46	17.455%	36.800%
Híbrida (cúbica e chapéu)	0.2050	0.0820	2.50	0.135%	14.595%
Antonelli et al. (2013)	0.2047	0.0716	2.86	–	–

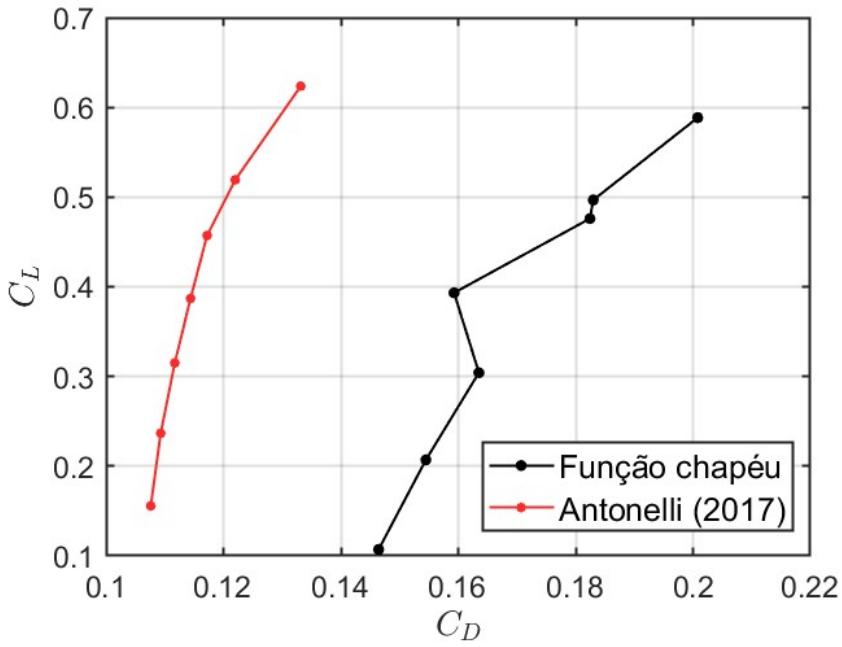
Fonte: Autoria Própria

Com base nos resultados apresentados na Tab. 9, observa-se que a metodologia híbrida proporcionou a menor diferença relativa para o coeficiente de sustentação (C_L), com apenas 0.135% em comparação aos dados de Antonelli, Sacco e Tamagno (2013). Para o coeficiente de arrasto (C_D), a função cúbica isoladamente obteve a menor diferença relativa (1.537%), enquanto a metodologia híbrida resultou em uma diferença maior (14.595%). No entanto, a eficiência aerodinâmica (C_L/C_D) obtida com a abordagem híbrida mostrou-se mais próxima do valor de referência do que os resultados das funções gaussiana, cúbica e chapéu utilizadas isoladamente. Isso indica que, embora a função cúbica seja mais acurada para C_D, a meto-

dologia híbrida oferece um equilíbrio mais adequado entre C_L e C_D, sendo uma estratégia eficaz para melhorar a acurácia das simulações, especialmente em cenários onde ambos os coeficientes são relevantes para a análise.

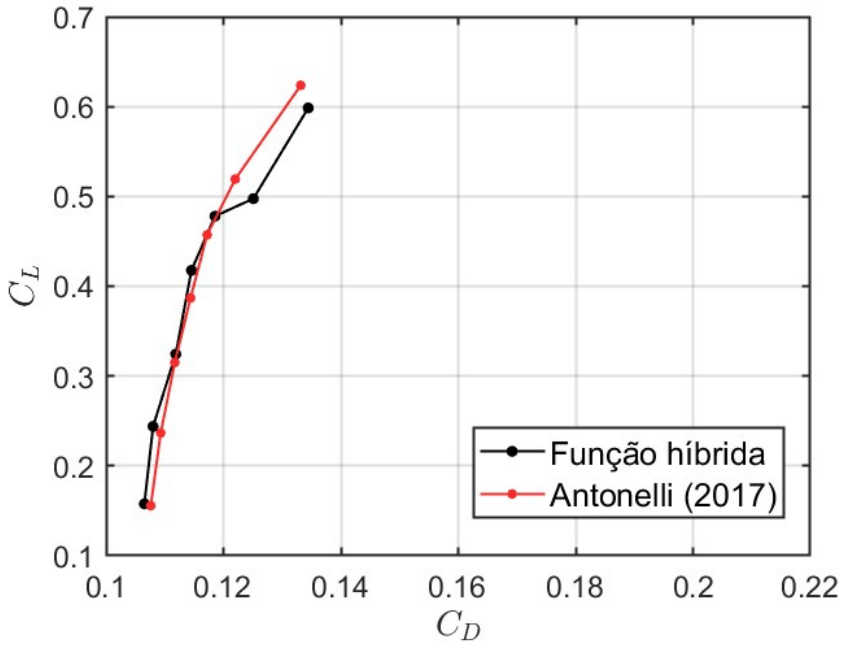
A Figura 25 apresenta a curva polar do escoamento sobre o aerofólio NACA 4404 para o número de Reynolds de 800, utilizando a função chapéu para o cálculo dos coeficientes de sustentação e arrasto. Observa-se que os resultados obtidos distanciam-se significativamente da curva polar de referência fornecida por Antonelli (2017), indicando limitações no uso isolado dessa função peso. Por outro lado, a Fig. 26 exibe a curva polar do mesmo escoamento, agora obtida com a aplicação da metodologia híbrida, que combina a função cúbica para o cálculo de C_D e a função chapéu para o cálculo de C_L. Neste caso, os resultados mostram-se consideravelmente próximos da referência, evidenciando a eficácia da abordagem híbrida em melhorar a acurácia das simulações e capturar o comportamento do escoamento de forma mais adequada.

Figura 25 – Curva polar do escoamento sobre o aerofólio NACA 4404 ($Re = 800$) utilizando a função chapéu



Fonte: Autoria Própria

Figura 26 – Curva polar do escoamento sobre o aerofólio NACA 4404 ($Re = 800$) utilizando a metodologia híbrida



Fonte: Autoria Própria

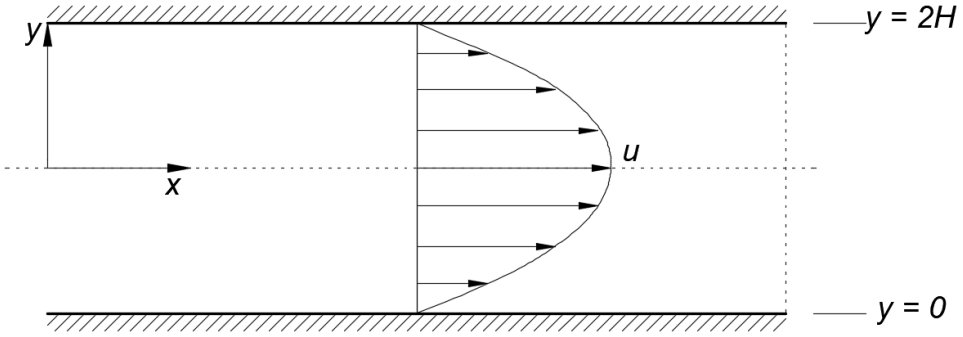
4.3 ESCOAMENTO EM UM CANAL TURBULENTO

Para avaliar a aplicação da metodologia IMERSPEC em conjunto com o modelo de turbulência de Spalart-Allmaras (S-A), simulou-se o escoamento monofásico em um canal plano (ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO, 2025). Neste contexto, foram impostas condições periódicas na direção do escoamento.

A simulação do escoamento em um canal totalmente desenvolvido é amplamente utilizada para a validação de modelos turbulentos devido à simplicidade de sua geometria, que facilita a investigação da turbulência. Diversos estudos, com resultados experimentais e de Simulação Numérica Direta (DNS), já foram conduzidos por vários pesquisadores para esse problema, oferecendo uma ampla base de dados para a validação de modelos de turbulência, como RANS e LES. O presente estudo utiliza como referência os dados DNS de Hoyas e Jimenez (2006) e Lee e Moser (2015).

O perfil de velocidades de uma camada limite turbulenta difere significativamente do perfil de velocidades observado em um escoamento laminar. Para condições de escoamento laminar ($\mathrm{Re}_D = \frac{u_{\mathrm{máx}} D}{\nu} < 2300$, conforme White (2006)), o perfil de velocidade resultante é parabólico, como mostrado na Fig 27, o que pode ser demonstrado através do equilíbrio de forças no canal.

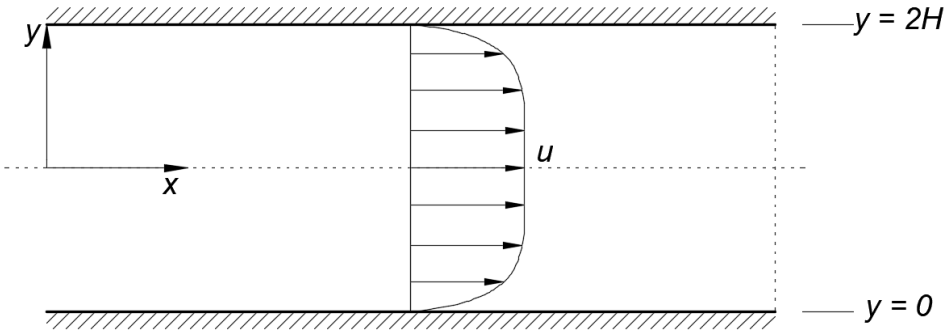
Figura 27 – Perfil de velocidade parabólico de um escoamento laminar



Fonte: Autoria Própria

A Fig. 28 ilustra o perfil de velocidade de um escoamento turbulento. A distribuição achatada da velocidade caracteriza o regime turbulento, no qual a turbulência intensifica significativamente a difusão molecular da quantidade de movimento linear do centro do canal para as paredes. O transporte advectivo dessa quantidade de movimento, do centro do canal para as regiões próximas às paredes, é especialmente intensificada (SILVEIRA-NETO, 2020).

Figura 28 – Perfil de velocidade parabólico de um escoamento turbulento



Fonte: Autoria Própria

Considera-se um escoamento turbulento incompressível e sem transferência de calor em um canal plano de comprimento L_x de 10 m e uma largura L_y de 1 m. O escoamento é tratado como bidimensional em média, desconsiderando os efeitos de borda na direção normal ao plano de estudo. Este problema serve como um caso de teste adequado, uma vez que o modelo de turbulência Spalart-Allmaras é calibrado para coincidir com as características do escoamento em canal. Assim, uma implementação bem-sucedida do modelo S-A utilizando IMERSPEC deve reproduzir resultados coerentes com dados de DNS. Os resultados são apresentados para $Re_\tau = 1000$, $Re_\tau = 550$ e $Re_\tau = 180$, onde Re_τ é o número de Reynolds baseado na tensão de cisalhamento na parede, definido da seguinte forma:

$$Re_\tau = \frac{u_\tau H}{\nu}, \tag{4.25}$$

onde u_τ denota a velocidade de atrito, definida como

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \tag{4.26}$$

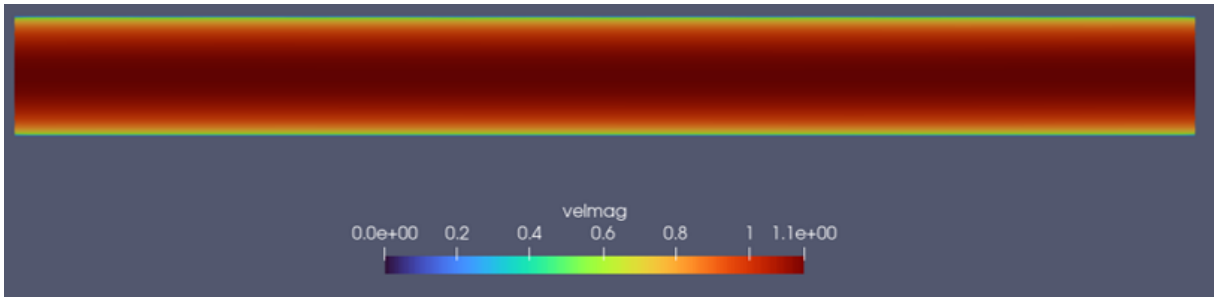
sendo τ_w a tensão de cisalhamento na parede e ρ a massa específica do fluido. Além disso, H representa metade da altura do canal e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

A viscosidade cinemática foi determinada como $\nu = \frac{1}{Re}$, e a velocidade de entrada U_∞ foi fixada em 1,0 m/s. Inicialmente, a componente de velocidade na direção do escoamento, u, foi configurada como uniforme em todo o domínio, igual ao valor da velocidade de entrada. A componente de velocidade na direção perpendicular, v, foi definida como zero em todo o domínio. Nas paredes superior e inferior, foi imposta a condição de não deslizamento, o que implica que a velocidade u nas paredes é zero. Essa condição de contorno é imposta via método da fronteira imersa coincidente com os pontos eulerianos, a cada passo de tempo.

No espaço físico, os nós da malha são uniformemente espaçados com $\Delta x = L_x/N_x$ e $\Delta y = L_y/N_y$ nas direções x e y. O domínio computacional é inicialmente discretizado utilizando 64×128 pontos de colocação, correspondendo respectivamente às direções do comprimento e da largura.

A Fig. 29 apresenta o campo de velocidade do escoamento simulado para $Re_\tau = 1000$. Este gradiente de velocidade é característico de um escoamento totalmente desenvolvido em regime turbulento, onde a troca de momento na direção transversal ao escoamento causa uma distribuição achatada da velocidade ao longo da seção transversal do canal.

Figura 29 – Campo de velocidade do escoamento $Re_\tau = 1000$



Fonte: Autoria Própria

A Fig. 30 ilustra o perfil de velocidade média, normalizado pela velocidade na linha central, em função da distância normalizada pela largura do canal, para um escoamento totalmente

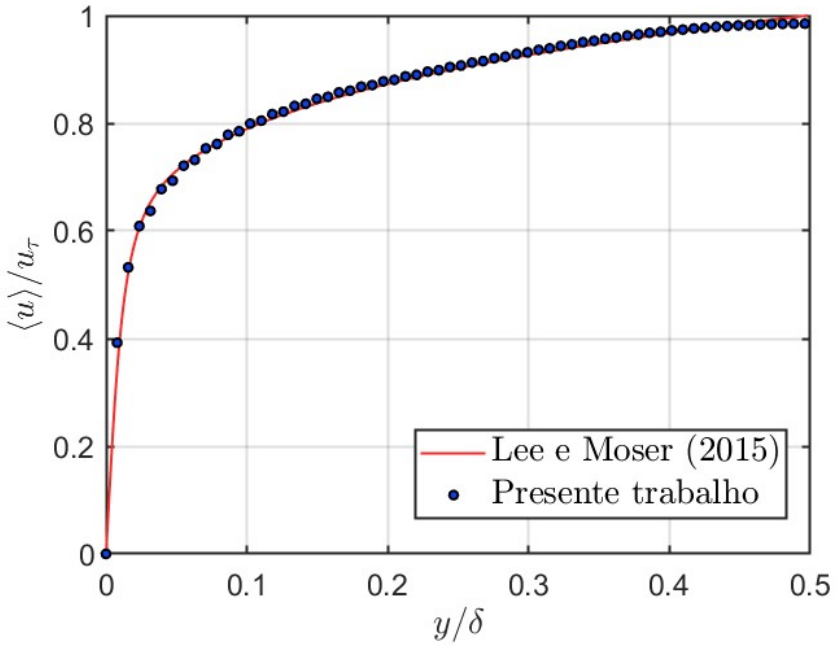
desenvolvido com $Re_\tau = 1000$, comparado aos dados de DNS. A Fig. 31 apresenta o perfil da tensão de cisalhamento viscosa, também em comparação com os dados de DNS. A tensão de cisalhamento viscosa é definida como

$$\tau_v = \mu \frac{du}{dy}, \tag{4.27}$$

onde τ_v é a tensão de cisalhamento viscosa, μ é a viscosidade dinâmica do fluido e $\frac{du}{dy}$ é o gradiente de velocidade na direção normal à parede.

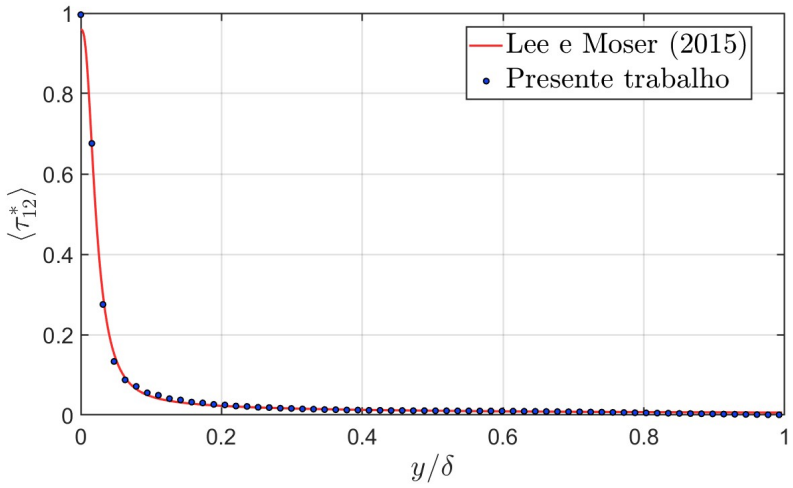
Para $Re_\tau = 550$, os gráficos correspondentes são apresentados nas Figs. 32 e 33, respectivamente.

Figura 30 – Perfil de velocidade média, $Re_\tau = 1000$



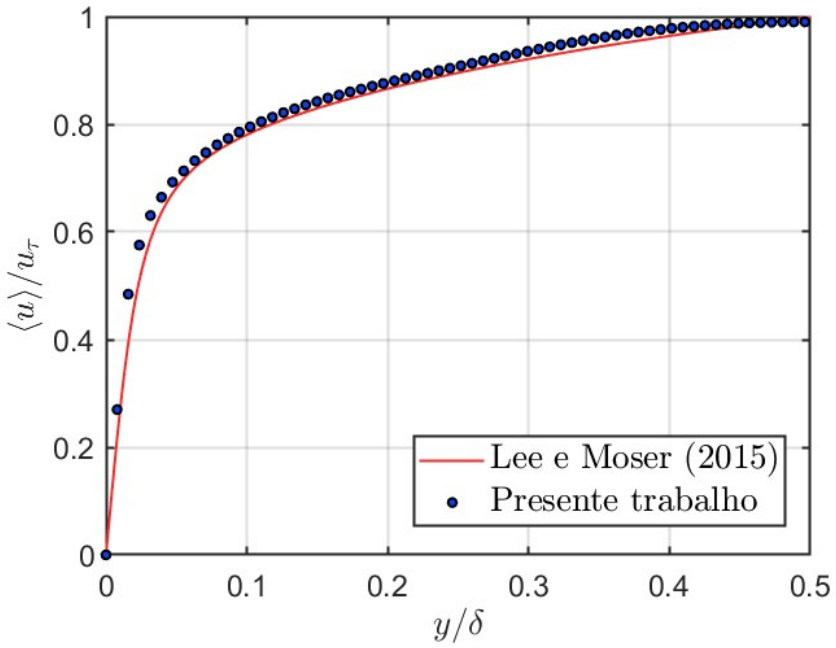
Fonte: Autoria Própria

Figura 31 – Tensões viscosas, $Re_\tau = 1000$



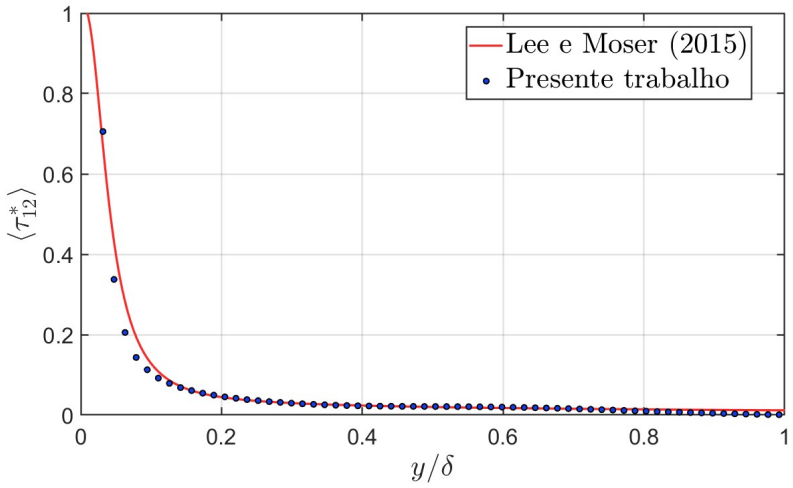
Fonte: Autoria Própria

Figura 32 – Perfil de velocidade média, $Re_\tau = 550$



Fonte: Autoria Própria

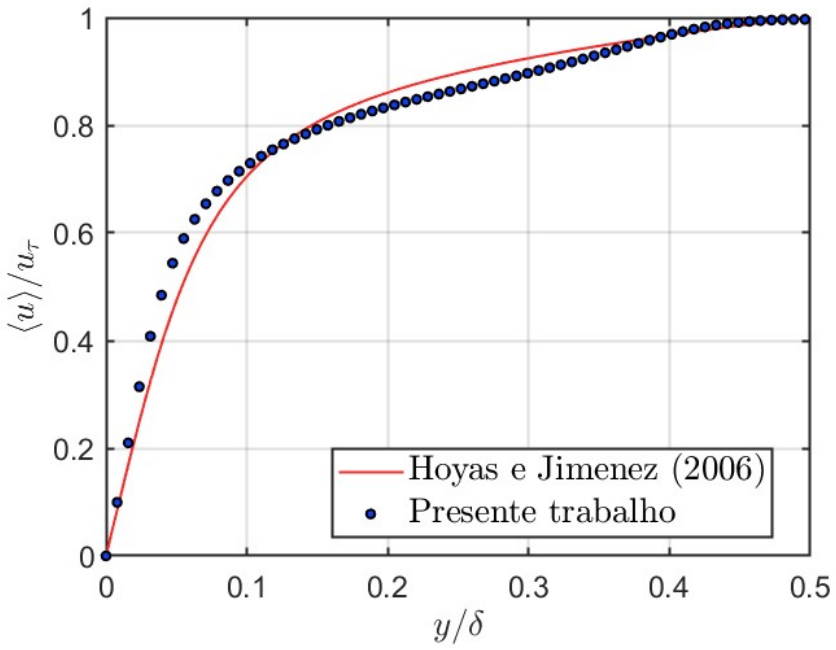
Figura 33 – Tensões viscosas, $Re_\tau = 550$



Fonte: Autoria Própria

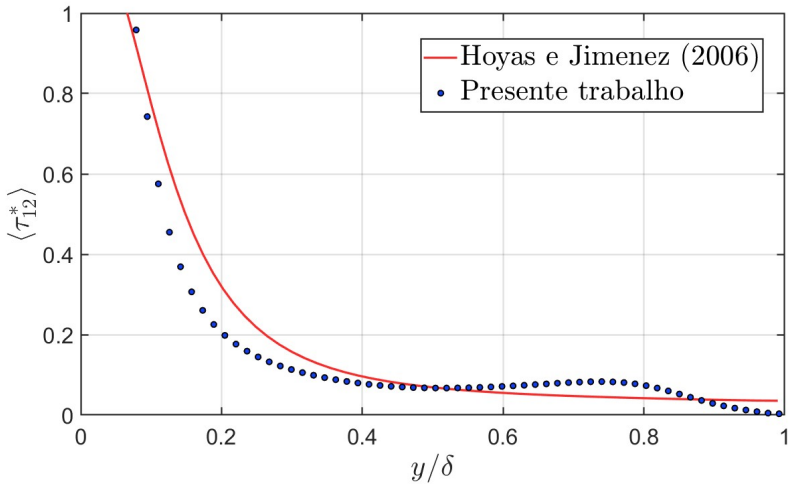
Para $Re_\tau = 180$, a Fig. 34 apresenta o perfil de velocidade média, enquanto a Fig. 35 exibe o perfil da tensão de cisalhamento viscosa.

Figura 34 – Perfil de velocidade média, $Re_\tau = 180$



Fonte: Autoria própria

Figura 35 – Tensões viscosas, $Re_\tau = 180$

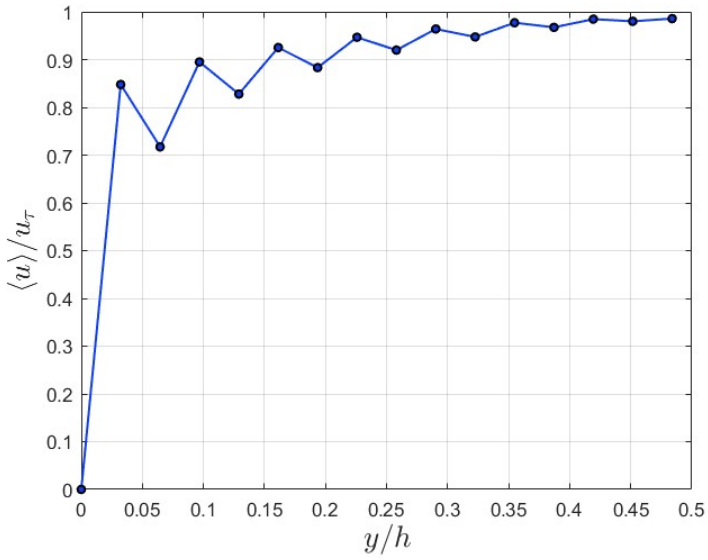


Fonte: Autoria própria

À medida que o escoamento se aproxima de um regime totalmente turbulento, observa-se uma maior concordância com os dados de DNS. Com o aumento do número de Reynolds, o escoamento se torna progressivamente mais turbulento, resultando em tensões turbulentas mais elevadas. Adicionalmente, o perfil de velocidade torna-se mais uniforme devido à intensificação da troca de momento na direção y.

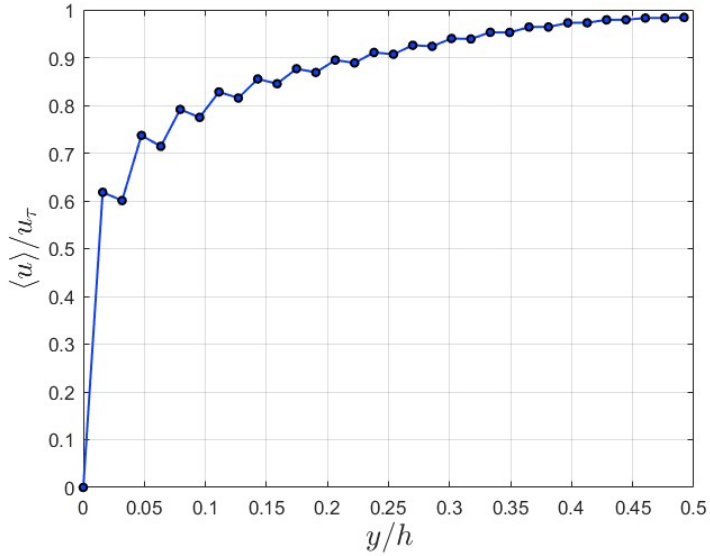
Para $Re_\tau = 1000$, novas configurações de malha foram testadas. As Figs. 36 a 39 apresentam, respectivamente, os perfis de velocidade média para malhas de 64×32, 64×64, 64×128 e 64×256 pontos de colocação.

Figura 36 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×32



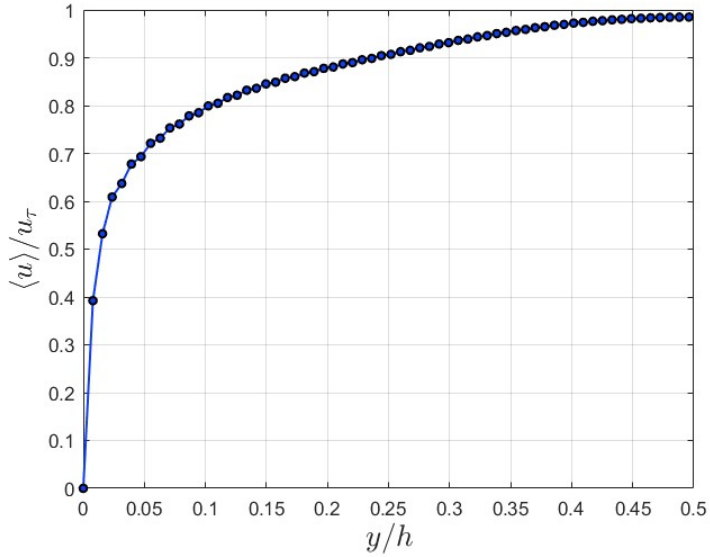
Fonte: Autoria Própria

Figura 37 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×64



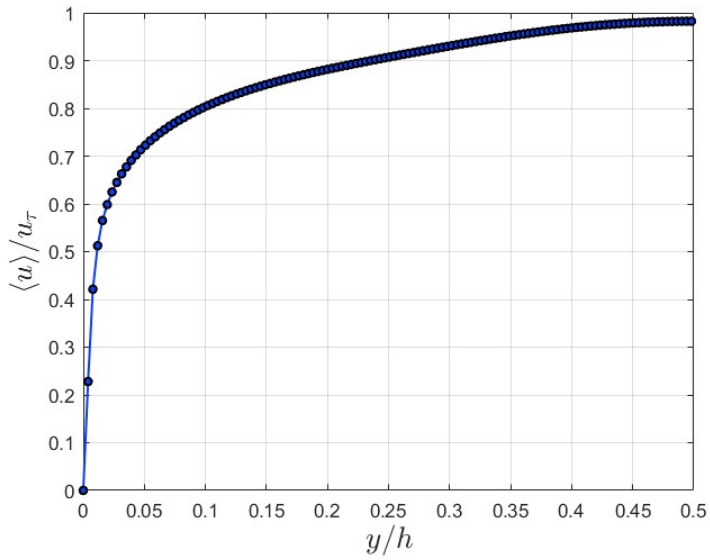
Fonte: Autoria Própria

Figura 38 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×128



Fonte: Autoria Própria

Figura 39 – Perfil de velocidade para escoamento a $Re_\tau = 1000$, malha de 64×256



Fonte: Autoria Própria

Nas Figs. 36 a 38, observa-se a presença de oscilações nos perfis de velocidade, particularmente nas malhas mais grosseiras, o que evidencia a sensibilidade dos métodos espectrais à resolução da malha. Essas oscilações indicam a necessidade de uma malha mais refinada para capturar adequadamente a dinâmica do escoamento turbulento em altos números de Reynolds. Para a malha de 64×128, estima-se uma norma $L_2 = 1.992 \times 10^{-2}$ entre os resultados obtidos e o DNS de Lee e Moser (2015). Para a malha de 64×256, a diferença reduz para $L_2 = 5.176 \times 10^{-3}$, demonstrando a melhoria significativa na acurácia com o refinamento da malha.

4.4 ESCOAMENTO SOBRE CILINDRO

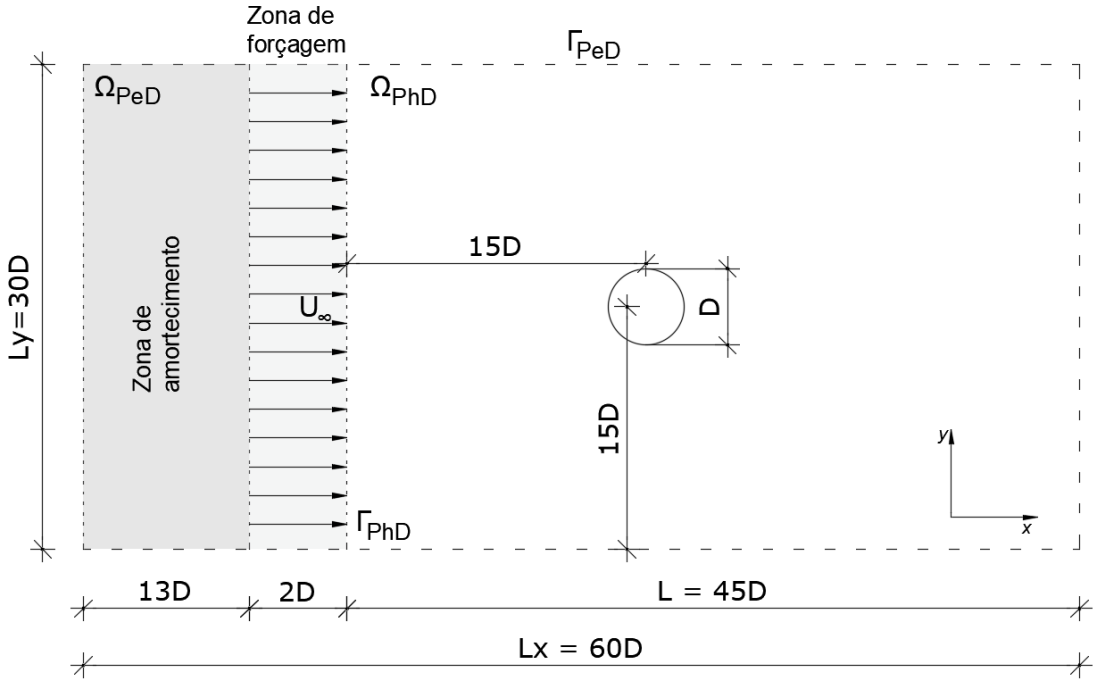
Os escoamentos sobre cilindros imersos representam um problema clássico na Mecânica dos Fluidos, sendo amplamente utilizados para a validação de códigos computacionais e metodologias numéricas. Para as simulações realizadas nesta seção, o domínio de cálculo (Ω_{PeD}) é ilustrado na Fig. 40. As dimensões da região de interesse foram estabelecidas com base nos estudos de Mariano (2011) e Nascimento (2016).

O domínio é subdividido em três regiões distintas: a zona de amortecimento, com comprimento $L_{BZ} = 13D$; a zona de forçagem, com comprimento $L_{FZ} = 2D$; e o domínio físico (Ω_{PhD}), com comprimento $L = 45D$. Assim, o comprimento total do domínio é $L_x = 60D$,

onde $D = 1.0\,\text{m}$ representa o diâmetro do cilindro. Na direção vertical, o domínio possui um comprimento total de $L_y = 30D$.

A zona de forçagem, também denominada zona porosa, é empregada para uniformizar o escoamento na entrada do domínio de cálculo de interesse. Esta região é "forçada"por meio do termo fonte da fronteira imersa a assumir uma velocidade conhecida. Na direção horizontal, a velocidade corresponde ao valor do perfil de entrada (U_∞), enquanto na direção vertical, a velocidade é nula. A zona de forçagem é essencial para garantir que a velocidade e sua derivada sejam corretamente impostas na posição onde o perfil de velocidade é especificado.

Figura 40 – Domínio de cálculo para as simulações de escoamento sobre cilindro circular



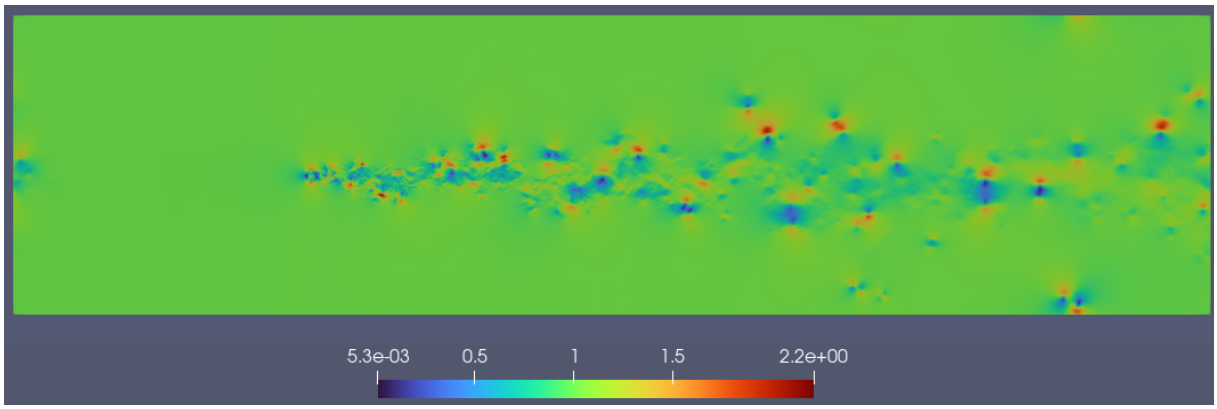
Fonte: Autoria Própria

A velocidade de referência é a velocidade do perfil uniforme na entrada, a qual é constante, $U_\infty = 1,0\,\text{m/s}$. A massa específica é $\rho = 1,0\,\text{kg/m}^3$ e a viscosidade cinemática é calculada com base no número de Reynolds do escoamento, $Re_D = \frac{U_\infty D}{\nu}$. Para avançar no tempo, foi utilizado o critério de CFL $= 0,2$. O parâmetro de controle do processo iterativo do método da múltipla imposição da força foi definido como $\epsilon = 10^{-3}$. A função de distribuição utilizada foi a função chapéu (*hat*), que corresponde a uma interpolação bilinear, conforme mostrado no trabalho de Su, Lai e Lin (2007). Para caracterizar o escoamento simulado foi utilizado $Re_D = 10^4$. Considerou-se uma malha de 1024×256 pontos de colocação. O modelo de turbulência de Spalart-Allmaras foi especificamente desenvolvido para estudos aerodinâmicos, sendo amplamente utilizado em simulações de escoamento ao redor de corpos

sólidos. Um exemplo clássico desse tipo de escoamento é o escoamento ao redor de um cilindro circular. Nessas simulações, adotam-se condições de contorno de parede com condição de não deslizamento, o parâmetro de turbulência $\tilde{\nu}$ é igual a zero na parede.

O campo de vorticidade obtido é apresentado na Fig. 41. Observa-se que, nas condições de contorno do método numérico empregado, há a reinjeção das vorticidades no início do domínio. Além disso, é evidente a presença da zona de buffer, que amortece as instabilidades, e da zona de imposição de forças, responsável por introduzir a condição de entrada do escoamento.

Figura 41 – Campo de vorticidade do escoamento sobre cilindro, $Re_D = 10^4$



Fonte: Autoria própria

O coeficiente de arrasto médio obtido neste estudo é apresentado na Tabela 10 e comparado com os resultados experimentais reportados por Gopalkrishnan (1993), os quais foram obtidos por meio de testes em laboratório e servem como referência para a validação dos dados aqui apresentados.

Tabela 10 – Valores do coeficiente de arrasto e erro relativo

Trabalho	Cd	Diferença (%)
Gopalkrishnan (1993)	1.1856	-
Presente trabalho	0.9185	22.53

Fonte: Autoria Própria

A simulação numérica bidimensional realizada subestimou a força de arrasto sobre o cilindro. Isso pode ser atribuído à utilização da metodologia URANS (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes), que captura apenas o comportamento médio do escoamento, resultando em uma representação menos detalhada dos fenômenos físicos. Conforme relatado por Silveira-Neto (2020), a metodologia URANS não é ideal para a análise do comportamento transitório do escoamento devido ao alto nível de viscosidade turbulenta associado a este tipo de modelo.

Apesar do erro ser considerável para os padrões do método pseudo-espectral de Fourier, os resultados obtidos são relativamente satisfatórios, uma vez que o erro também é função do refinamento da malha e do número de iterações na metodologia de múltipla imposição da força, podendo ser mitigado com alterações nos parâmetros de simulação. Portanto, a metodologia pode ser adequada para a investigação de problemas em altos números de Reynolds envolvendo geometria complexa.

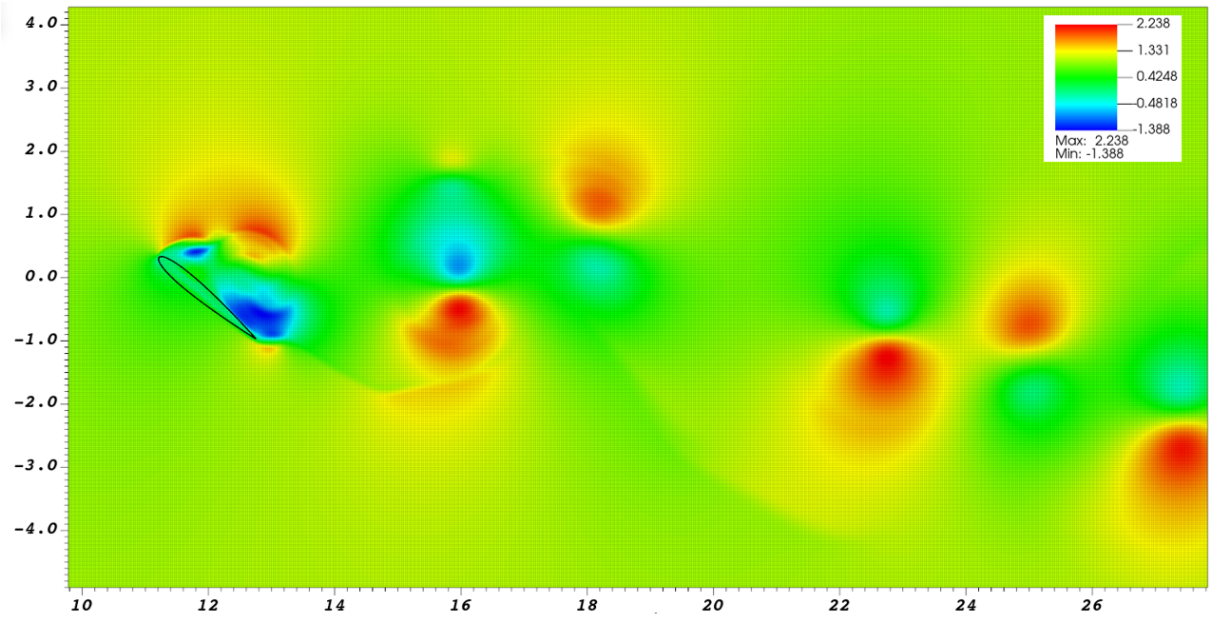
4.5 ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE AEROFÓLIO

Nesta seção, realiza-se uma análise numérica do escoamento bidimensional ao redor do aerofólio NACA 0012, considerando um número de Reynolds de 79.900 e ângulos de ataque variando de 0° a 40°. O desempenho da metodologia IMERSPEC, em combinação com o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras, foi avaliado por meio da comparação dos resultados numérico-computacionais com os dados experimentais reportados por Zakaria et al. (2018), permitindo uma análise da acurácia da abordagem empregada.

As dimensões do domínio são as mesmas empregadas na simulação do escoamento laminar, como ilustrado na Fig. 16. O domínio físico é delimitado pela fronteira Ω_{nP} e inclui uma fronteira imersa formada pelos pontos lagrangianos que discretizam o aerofólio NACA 0012, totalizando $N_L = 200$ pontos lagrangianos. O domínio de cálculo euleriano é discretizado em $N_x = 1024 \times N_y = 256$ pontos de colocação, configuração de malha que demonstrou bom desempenho na simulação do escoamento laminar. No aerofólio, considerado como a parede imersa, o parâmetro de turbulência $\tilde{\nu}$ é igual a zero. O incremento temporal Δt foi definido com base em um número de Courant-Friedrichs-Lewy igual a $0,1$.

A Figura 42 apresenta os resultados da simulação numérica do escoamento em torno do aerofólio para um ângulo de ataque de 40°. Observa-se uma separação completa do escoamento logo após o bordo de ataque, resultando em uma região extensa de recirculação. A distribuição da componente longitudinal da velocidade (u) revela a presença de estruturas turbilhonares na esteira, caracterizadas por alternâncias de regiões de alta e baixa velocidade, típicas de um regime altamente instável. Esse padrão confirma que o aerofólio encontra-se em uma condição de pós-estol, onde a sustentação já foi reduzida significativamente e o escoamento não consegue mais se anexar à superfície do aerofólio. Como consequência, há um aumento expressivo do arrasto e uma intensa formação de flutuações na esteira, impactando diretamente a estabilidade aerodinâmica.

Figura 42 – Distribuição da velocidade u ao redor do aerofólio NACA 0012 ($Re = 79.900$, $\alpha = 40°$)

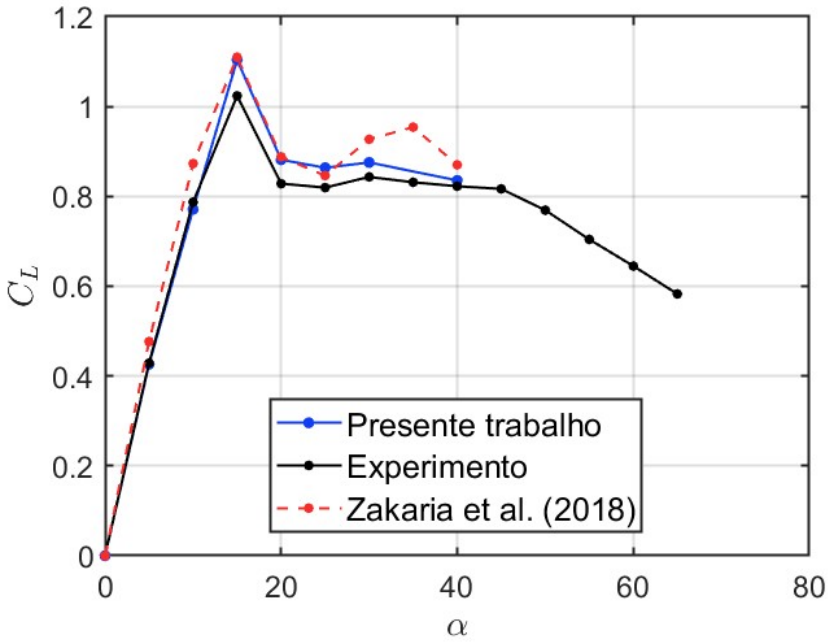


Fonte: Autoria própria

As variações dos coeficientes médios de sustentação em função do ângulo de ataque, até $40°$, obtidas pelas simulações numéricas, são comparadas com os dados experimentais na Fig. 43. Os resultados revelam uma boa concordância entre as simulações e as medições experimentais realizadas por Zakaria et al. (2018) em túnel de vento, demonstrando que a metodologia aplicada consegue reproduzir com acurácia o comportamento aerodinâmico do aerofólio, incluindo a transição para o regime de estol. Cada ponto de dados apresentado nas simulações corresponde a um valor médio calculado ao longo do tempo total de simulação, 100 s, sendo que os efeitos transitórios são desconsiderados para garantir que apenas o comportamento estável do escoamento seja avaliado.

No intervalo de ângulos de ataque entre $15°$ e $40°$, conforme ilustrado na Fig. 43, observa-se que os valores simulados são ligeiramente superiores aos valores experimentais. Essa diferença está em concordância com resultados numéricos obtidos por Zakaria et al. (2018), que também utilizaram o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras. Segundo os autores, embora esse modelo seja eficaz na simulação de uma variedade de condições de escoamento, ele apresenta limitações ao capturar completamente os efeitos dinâmicos associados ao desprendimento de estruturas turbilhonares, especialmente em ângulos de ataque elevados. Tais limitações podem ser atribuídas à incapacidade do modelo de refletir com acurácia a complexidade do escoamento em regimes de estol.

Figura 43 – Coeficiente de sustentação médio estático comparado com dados experimentais para $Re = 79.900$ no aerofólio NACA 0012



Fonte: Autoria própria

Na Tabela 11 é apresentada uma comparação entre os coeficientes de força previstos pela metodologia IMERSPEC sem modelo de turbulência e pela combinação da metodologia IMERSPEC com o modelo Spalart-Allmaras. A análise das diferenças percentuais calculadas mostra que o maior desvio foi registrado na simulação laminar, com uma discrepância de $25,5\%$ no coeficiente de sustentação em relação aos valores experimentais. Esse desvio significativo sublinha a limitação do modelo laminar em capturar com acurácia os efeitos da turbulência. Por outro lado, a combinação da metodologia IMERSPEC com o modelo de fechamento da turbulência Spalart-Allmaras apresentou uma previsão com maior acurácia dos coeficientes de força, evidenciando melhoria em cenários de escoamento mais complexos.

Tabela 11 – Valores dos coeficientes aerodinâmicos e diferenças relativas para $\alpha = 40°$ e $Re = 79.900$.

Modelo	C_L	C_D	dif. (C_L) (%)	dif. (C_D) (%)
Experimento (ZAKARIA et al., 2018)	0.82	0.79	-	-
S-A	0.84	0.81	1.58	2.53
Sem modelo	1.00	0.99	21.58	25.32

Fonte: Autoria Própria

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

O principal objetivo deste trabalho foi integrar a metodologia IMERSPEC ao modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras, ampliando as capacidades da metodologia para a análise de escoamentos turbulentos em condições mais complexas e realistas. Para verificar e validar a implementação do método, foram conduzidas simulações preliminares que avaliaram a acurácia e a estabilidade da metodologia em diferentes cenários.

A simulação da equação de Burgers foi utilizada como primeiro caso de verificação, destacando a importância de uma discretização temporal de alta ordem para assegurar resultados consistentes. Observou-se que o erro de máquina só foi alcançado ao empregar uma discretização temporal compatível com o método pseudoespectral de Fourier utilizado na discretização espacial. Assim, a metodologia adotou o método de Runge-Kutta de quarta ordem com seis passos (RK46) (ALLAMPALLI et al., 2009), que demonstrou ser eficaz para manter a estabilidade e a acurácia das simulações ao longo do tempo. Essa escolha foi essencial para garantir que o método fosse capaz de capturar, com alta acurácia, os fenômenos físicos modelados.

Além disso, a verificação numérica por meio da solução manufaturada de Taylor-Green corroborou a robustez do método. A norma L_2 manteve-se na mesma ordem de grandeza do erro de máquina em uma malha com 16×16 pontos de colocação, demonstrando a eficácia do método pseudoespectral em alcançar resultados extremamente acurados, mesmo com uma malha grosseira. Esse desempenho reforça o potencial do IMERSPEC para aplicações que requerem alta acurácia e eficiência computacional na solução de problemas de dinâmica dos fluidos.

A aplicação da metodologia IMERSPEC ao escoamento monofásico em um canal plano foi o primeiro caso envolvendo o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras. Nesse cenário, as condições de simetria no centro do canal e periodicidade nas direções restantes permitiram avaliar o comportamento da metodologia em um escoamento turbulento. Os resultados foram satisfatórios, apresentando boa concordância com os perfis de velocidade e tensões viscosas reportados em Simulações Numéricas Diretas (DNS) de Hoyas e Jimenez (2006) e Lee e Moser (2015), especialmente em números de Reynolds elevados. Isso reforça a capacidade do método de capturar adequadamente os principais aspectos da dinâmica turbulenta, mesmo em condições complexas.

O estudo do escoamento ao redor de um cilindro foi outro teste importante para a me-

todologia IMERSPEC-S-A. Esse caso foi utilizado para avaliar a capacidade da metodologia em lidar com geometrias não-cartesianas e malhas relativamente grosseiras. Embora a simulação bidimensional apresente limitações inerentes à formulação URANS, os resultados foram promissores. Em particular, o método mostrou potencial para analisar fenômenos em altos números de Reynolds, mesmo com as restrições de um modelo bidimensional, destacando-se como uma abordagem eficiente e flexível para aplicações na CFD.

A última análise envolveu escoamento turbulento ao redor do aerofólio NACA 0012 em número de Reynolds de 79.900 e ângulos de ataque variando de $0°$ a $40°$. A combinação do IMERSPEC com o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras demonstrou ser eficaz em prever os coeficientes de sustentação em regimes de estol e pós-estol, apresentando boa concordância com os dados experimentais de Zakaria et al. (2018). Apesar disso, verificou-se que os valores simulados foram ligeiramente superiores aos experimentais. Essa diferença está alinhada com resultados previamente reportados por Zakaria et al. (2018), que indicam limitações do modelo S-A em capturar os efeitos dinâmicos associados ao desprendimento de estruturas turbilhonares em ângulos elevados. Esses resultados destacam a necessidade de futuros ajustes ou melhorias no modelo de fechamento utilizado, a fim de aprimorar sua capacidade preditiva em condições de alta complexidade aerodinâmica.

A metodologia IMERSPEC, validada por meio de uma série de estudos numéricos (ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO, 2023a; ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO, 2023b; ALBUQUERQUE; VILLELA; MARIANO, 2024), apresenta-se como uma ferramenta computacional promissora para simulações de alta ordem em dinâmica dos fluidos. A integração com o modelo de fechamento da turbulência de Spalart-Allmaras amplia significativamente sua aplicabilidade, possibilitando a análise de escoamentos turbulentos em números de Reynolds mais elevados, algo que ainda não havia sido explorado com essa metodologia. Trabalhos futuros poderão focar na adaptação da metodologia para escoamentos tridimensionais, bem como na implementação de modelos de turbulência mais avançados para capturar fenômenos como transição laminar-turbulenta e interações entre estruturas turbilhonares e superfícies imersas.

Por fim, os resultados obtidos neste estudo demonstram o potencial do IMERSPEC-S-A como uma ferramenta robusta e confiável para a modelagem de escoamentos complexos. A combinação de discretizações de alta ordem no espaço e no tempo, associada à integração com um modelo de fechamento da turbulência amplamente utilizado, posiciona a metodologia como uma abordagem eficiente e precisa para a simulação de fenômenos aerodinâmicos em condições reais e industriais.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, L.; VILLELA, M.; MARIANO, F. Flows over immersed bodies using the Fourier pseudospectral method. In: *COBEM*. [S.l.: s.n.], 2023.

ALBUQUERQUE, L.; VILLELA, M.; MARIANO, F. Simulações numéricas de escoamentos sobre aerofólios assimétricos usando a metodologia IMERSPEC. In: *CREEM*. [S.l.: s.n.], 2023.

ALBUQUERQUE, L.; VILLELA, M.; MARIANO, F. Numerical simulation of flows using the Fourier pseudospectral method and the immersed boundary method. *Axioms*, v. 13, n. 228, 2024.

ALBUQUERQUE, L. A. V. d.; VILLELA, M. F. d. S.; MARIANO, F. P. Numerical evaluation of the imerspec methodology and spalart–allmaras turbulence model in fully developed channel flow simulations. *Fluids*, v. 10, p. 45, 2025.

ALLAMPALLI, V.; HIXON, R.; NALLASAMY, M.; SAWYER, S. D. High-accuracy large-step explicit Runge–Kutta (HALE-RK) schemes for computational aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, v. 228, n. 10, p. 3837–3850, 2009. ISSN 0021-9991.

ALVAREZ, E. G. *Numerical simulation of bubbles and drops in complex geometries by using dynamic meshes*. Tese (Doutorado) — Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain, 2015.

ANTONELLI, D. P. *Análisis estacionario e inestacionario de perfiles aerodinámicos a números de Reynolds ultra-bajos (Re $<$ 10000)*. Tese (Doutorado) — Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, 2017.

ANTONELLI, D. P.; SACCO, C. G.; TAMAGNO, J. P. Aerodinámica del vuelo a números de reynolds ultrabajos (Re $<$ 10000). *Mecánica Computacional*, Mendoza, Argentina, XXXII, p. 1047–1070, 2013.

BHUSHAN, S.; MUTHU, S. Parallel performance assessment of a pseudo-spectral solver for transition and turbulent boundary layer flows. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, v. 13, n. 1, p. 763–781, 2019.

BISTAFA, S. R. 200 years of the Navier–Stokes equation. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 46, 2024.

BOUSSINESQ, J. Essai sur la théorie des aux courants. *Mém. Acad. Sci. Paris. XXII*, 1877.

BOYD, J. P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2nd. ed. Mineola, NY: Dover Publications, 2001. ISBN 0486411834 9780486411835.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. 1st. ed. [S.l.]: Springer Berlin, Heidelberg, New York, USA, 1988.

CANUTO, C.; HUSSAINI, M. Y.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A. *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. New York: Springer Verlag, 2006.

CELIC, A.; HIRSCHEL, E. H. Comparison of eddy-viscosity turbulence models in flows with adverse pressure gradient. *AIAA Journal*, v. 44, p. 2156–2169, 2006.

CHOU, P. Y. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quarterly of Applied Mathematics*, Brown University, v. 3, n. 1, p. 38–54, 1945. ISSN 0033569X, 15524485.

COOLEY, T.; TUKEY, J. An algorithm for themachine calculation of complex Fourier series. *Mathematics Computation. Providence*, v. 19, 1965.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967.

DENG, T. *LES Combined with Statistical Models of Spray Formation Closely to Air-Blast Atomizer*. Tese (Doutorado) — Université de Lyon, École Centrale de Lyon, Lyon, France, 2011.

DESCHAMPS, C. J. Modelos algébricos e diferenciais. In: Freire, A.P.S; Menut, P.P.M; Jian, S. Transição e Turbulência. Rio de Janeiro. *ABCM (ISBN 8585769106)*, 2002.

DOMINGO, P.; VERVISCH, L. Recent developments in DNS of turbulent combustion. *Proceedings of the Combustion Institute*, v. 39, n. 2, p. 2055–2076, 2023. ISSN 1540-7489.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. [S.l.]: Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. v. 3.

FIGUEIREDO, D. G. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 5ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018. 292 p. ISBN 9788524404283.

FILHO, J. E. A. *Modelação numérica de processos de sedimentação em escoamentos turbulentos e análise da ressuspensão em canais*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais Para Dinâmica dos Fluidos. Conceitos Básicos e Aplicações*. 2nd. ed. [S.l.]: Editora da Universidade de São Paulo, 2020.

FREIRE, A. P. S. Turbulência e seu desenvolvimento histórico. *ABCM, 2002. Anais da I Escola de Primavera de Transição e Turbulência*, 2002.

FREIRE, A. P. S. O vôo dos pássaros e a mecânica dos fluidos. *VIIIEEE, Petrópolis. Rio de Janeiro: Coppe/UFRJ*, 2019.

FU, H.; LIU, C. A buffered fourier spectral method for non-periodic PDE. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, v. 9, n. 2, p. 460–478, 2012.

GOPALKRISHNAN, R. *Vortex-induced forces on oscillating bluff cylinders*. Tese (PhD Thesis) — Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Ocean Engineering, Cambridge, MA, 1993. Thesis (Sc. D.).

HOYAS, S.; JIMENEZ, J. Scaling of velocity fluctuations in turbulent channels up to $re_\tau = 2000$. *Physics of Fluids*, v. 18, p. 011702, 2006.

KESSELS, P. C. J. *Finite element discretization of the Spalart-Allmaras turbulence model*. Dissertação (Mestrado) — Faculty of Aerospace Engineering, Delft University of Technology, 2016.

KHALIGHI, Y.; NICHOLS, J. W.; HAM, F.; LELE, S. K.; MOIN, P. Unstructured large eddy simulation for prediction of noise issued from turbulent jets in various configurations. In: *Proceedings of the 17th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. Portland, Oregon: AIAA, 2011.

KINOSHITA, D. *Adaptatividade espectral para resolução da equação de Burgers*. Uberlândia, Brazil, 2011.

KINOSHITA, D. *Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada froteira imersa térmica e pseudoespectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

KINOSHITA, D.; PADILLA, E. L. M.; SILVEIRA-NETO, A.; MARIANO, F. P.; SERFATY, R. Fourier pseudospectral method for nonperiodical problems: A general immersed boundary method for three types of thermal boundary conditions. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Taylor & Francis, v. 70, n. 6, p. 537–558, 2016.

KLEIN, T. S. *Estudo de um Novo Modelo de Turbulência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

KORHONEN, M.; IZBASSAROV, D.; NYARI, J.; SANTASALO-AARNIO, A.; VUORINEN, V. *Turbulence impacts synthetic methanol production in a square duct flow: a direct numerical simulation (DNS) study*. 2023.

KUNZ, P.; KROO, L. Analysis and design of airfoils for use at ultra-low reynolds numbers. In: *Proceedings of the AIAA Fixed, Flapping and Rotating Wing Aerodynamics at Very Low Reynolds Numbers Conference*. Notre Dame: [s.n.], 2000. p. 35–60.

LABOZETTO, R. L. *Modelo de Spalart-Allmaras modificado com modelagem alternativa para a escala de comprimento*. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2016.

LAUNDER, B.; SPALDING, D. The numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 3, n. 2, p. 269–289, 1974. ISSN 0045-7825.

LEE, M.; MOSER, R. D. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $re_\tau = 5200$. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 774, p. 395–415, 2015.

LUNDBLADH, A.; BERLIN, S.; SKOTE, M.; HILDINGS, C.; CHOI, J.; KIM, J.; HENNINGSON, D. S. *An Efficient Spectral Method for a Simulation of Incompressible Flow Over a Flat Plate*. Stockholm, Sweden, 1999.

MAGALHÃES, G. M. *Modelagem matemática e computacional de escoamentos turbulentos multifásicos em malha adaptativa bloco estruturada utilizando o método Multi Direct Forcing*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2022.

MALISKA, C. A. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 1st. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MARIANO, F.; MOREIRA, L.; SILVEIRA-NETO, A.; SILVA, C. D.; PEREIRA, J. A new incompressible navier-stokes solver combining fourier pseudo-spectral and immersed boundary methods. *CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences*, v. 59, n. 2, p. 181 – 216, 2010.

MARIANO, F. P. *Simulação de Escoamentos Não-Periódicos Utilizando as Metodologias Pseudo-Espectral de Fourier e da Fronteira Imersa Acopladas*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.

MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q.; NASCIMENTO, A. A.; SILVEIRA-NETO, A. An improved immersed boundary method by coupling of the multi-direct forcing and Fourier pseudo-spectral methods. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2022.

MENTER, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, v. 50, n. 8, p. 1906–1915, 1994.

MENTER, F. R. Eddy viscosity transport equations and their relation to the $k - \varepsilon$ model. *ASME Journal of Fluids Engineering*, v. 119, p. 876–884, December 1997.

MONTEIRO, L.; MARIANO, F. Flow modeling over airfoils and vertical axis wind turbines using Fourier pseudo-spectral method and coupled immersed boundary method. *Axioms*, v. 12, n. 2, p. 212, 2023.

MOREIRA, L. Q. *Modelagem matemática de jatos em desenvolvimento espacial usando a metodologia pseudoespectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.

NASCIMENTO, A. A. *Métodos Pseudoespectral de Fourier e Fronteira imersa aplicados a escoamento simplidicados de engenharia de perfuração*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2016.

NASCIMENTO, A. A.; MARIANO, F. P.; SILVEIRA-NETO, A.; PADILLA, E. L. M. Coupling of the immersed boundary and fourier pseudo-spectral methods applied to solve fluid–structure interaction problems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, n. 46, p. 213, 2024.

OCHIENG, F. O.; KINYANJUI, M. N.; ABONYO, J. O.; KIOGORA, P. R. Mathematical modeling of wax deposition in field-scale crude oil pipeline systems. *Journal of Applied Mathematics*, Hindawi, 2022.

PESKIN, C. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of Computational Physics*, 1972.

PINHEIRO, G. W.; MACHADO, E. A.; CASTIGLIO, G. S.; ENDRES, L. A. M. Perda de carga total em rede ramificada de tubulações: comparação entre modelos numérico e experimental. *XXI Simpósio Brasileiro de Recursos Hídricos*, 2015.

PINTO, S. D. C. *Geometrias de revestimentos para redução do consumo de energia em veículos automóveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Beira Interior, Portugal, 2015.

POPE, S. B. *Turbulent Flows*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000.

ROACHE, P. J. A pseudo-spectral fft technique for non-periodic problems. *Journal of Computational Physics*, v. 27, n. 2, p. 204–220, 1978. ISSN 0021-9991.

RODI, W.; SCHEUERER, G. Scrutinizing the k-ε turbulence model under adverse pressure gradient conditions. *Journal of Fluids Engineering*, v. 108, n. 2, p. 174, 1986.

ROGERS, S. E.; KWAK, D. Upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible navier-stokes equations. *AIAA Journal*, v. 28, n. 8, p. 1238–1246, 1990.

SANTIAGO, V. S. *Modelagem Numérica do Escoamento ao Redor de Corpos Aerodinâmicos Utilizando o Método de Vórtices*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

SCHLATTER, P.; BRANDT, L.; LANGE, H. C. de; HENNINGSON, D. S. On streak breakdown in bypass transition. *Physics of Fluids*, v. 20, n. 10, p. 101505, 2008.

SILVA, P. M. S. *Estudo comparativo entre modelos de turbulência para escoamentos em condutas com rugosidade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade do Porto, Portugal, 2018.

SILVA, R. G. *Aplicação das Equações de Perturbações não Lineares com Sintetização da Turbulência Submalha para Solução de Escoamentos Turbulentos*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

SILVEIRA-NETO, A. Fundamentos da turbulência nos fluidos. In: Freire, A.P.S; Menut, P.P.M; Jian, S. Transição e Turbulência. Rio de Janeiro. *ABCM (ISBN 8585769106)*, 2002.

SILVEIRA-NETO, A. *Turbulência nos Fluidos Aplicada*. [S.l.]: Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campus Santa Mônica, 2002.

SILVEIRA-NETO, A. *Escoamentos turbulentos: análise física e modelagem teórica*. 1st. ed. [S.l.]: Composer, 2020.

SKRBEK, L.; VINEN, W. F. The use of vibrating structures in the study of quantum turbulence. *Progress in Low Temperature Physics*, p. 195–246, 2009.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review, vol. 91, issue 3, p. 99*, 1963.

SOUSA, C. H. de; MOREIRA, A. C.; PAULA, M. R. de. Métodos numéricos aplicados à engenharia: uma abordagem conceitual e proposta de empregabilidade de metodologia ativa de ensino. In: . AXVI SEGeT – Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia, Associação Educacional Dom Bosco: [s.n.], 2019.

SPALART, P. R.; ALLMARAS, S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *Recherche Aerospatiale*, n. 1, p. 5–21, 1994.

STRAND, J. S.; GOLDSTEIN, D. B. Direct numerical simulations of riblets to constrain the growth of turbulent spots. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 668, p. 267–292, 2011.

SU, S.; LAI, M.-C.; LIN, C.-L. An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary. *Computers and Fluids*, v. 36, p. 313–324, 2007.

TORNBERG, A.; ENGQUIST, B. Numerical approximations of singular source terms in differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 200, p. 462–488, 2004.

UZUN, A. *3-D Large-eddy simulation for jet aeroacoustics*. 233 p. Tese (Doutorado) — Pardue University, Pardue, USA, 2003.

VALADÃO, V. J.; BOFFETTA, G.; LILLO, F. D.; MUSACCHIO, S.; CRIALESI-ESPOSITO, M. *Spectrum correction on Ekman-Navier-Stokes equation in two-dimensions*. 2025.

VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method. *Prentice Hall, Second Edition*, 2007.

VILLELA, M. F. S. *Modelagem Matemática de Escoamentos Bifásicos usando a Metodologia IMERSPEC Combinada com os Métodos VOF e Front-Tracking*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2015.

WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi-direct forcing and immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International of Journal Multiphase Flow*, 2008.

WANG, Z. J.; FIDKOWSKI, K.; ABGRALL, R.; BASSI, F.; CARAENI, D.; CARY, A.; DECONINCK, H.; HARTMANN, R.; HILLEWAERT, K.; HUYNH, H. T.; KROLL, N.; MAY, G.; PERSSON, P.-O.; LEER, B. van; VISBAL, M. High-order CFD methods: Current status and perspective. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 00, p. 1–42, 2012.

WHITE, F. M. *Viscous Fluid Flow*. 3rd. ed. [S.l.]: McGraw-Hill, 2006. ISBN 978-0072402315.

WILCOX, D. C. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, v. 26, n. 11, p. 1299–1310, 1988.

WILCOX, D. C. *Turbulence Modeling for CFD*. La Canada Flintridge: DCW Industries Inc., 1993.

XUE, W.; WANG, H.; ROY, C. J. Code verification for the SENSEI CFD code. *ASME Journal of Verification, Validation and Uncertainty Quantification*, v. 8, n. 2, p. 021003, 2023.

ZAKARIA, M. Y.; IBRAHIM, M. M.; RAGAB, S.; HAJJ, M. R. A computational study of vortex shedding from a NACA–0012 airfoil at high angles of attack. *International Journal of Aerodynamics*, v. 6, n. 1, p. 1–17, 2018.

ZHANG, T.; LI, L.; LOPEZ-MARRERO, V.; LIN, M.; LIU, Y.; YANG, F.; YU, K.; ATIF, M. Emulator of PR-DNS: Accelerating dynamical fields with neural operators in particle-resolved direct numerical simulation. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, v. 16, n. 2, 2024.