



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

JOSÉ THIAGO GOMES DA SILVA

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS COM EFEITO DE
GRAVIDADE UTILIZANDO MÉTODOS CONSISTENTES TIPO MPFA**

Caruaru

2025

JOSÉ THIAGO GOMES DA SILVA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS COM EFEITO DE GRAVIDADE UTILIZANDO MÉTODOS CONSISTENTES TIPO MPFA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de Concentração: Recursos Naturais e Meio Ambiente.

Linha de Pesquisa: Modelagem Matemática e Computacional Aplicada em Recursos Naturais

Orientador: Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras.

Coorientador: Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes

Caruaru

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Silva, Jose Thiago Gomes da.

Simulação numérica do escoamento de fluidos com efeito de gravidade utilizando métodos consistentes tipo mpfa / Jose Thiago Gomes da Silva. - Caruaru, 2025.

124f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2025.

Orientação: Fernando Raul Licapa Contreras.

Coorientação: Alessandro Romário Echevarria Antunes.

Inclui referências e apêndices.

1. Escoamento bifásico; 2. MPFA; 3. Reservatórios heterogêneos e anisotrópicos; 4. Influência do efeito gravitacional. I. Contreras, Fernando Raul Licapa. II. Antunes, Alessandro Romário Echevarria. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

JOSÉ THIAGO GOMES DA SILVA

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS COM EFEITO DE GRAVIDADE UTILIZANDO MÉTODOS CONSISTENTES TIPO MPFA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de Concentração: Recursos Naturais e Meio Ambiente.

Linha de Pesquisa: Modelagem Matemática e Computacional Aplicada em Recursos Naturais

Aprovado em: 31/03/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Gustavo Bono (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Jonathan da Cunha Teixeira (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas

Prof. Dr. Adrian Torrico Siacara (Examinador Externo)
Universidade de São Paulo

Dedico este trabalho àqueles que acreditaram em mim e me inspiraram a seguir em frente, mostrando que o conhecimento é o caminho para transformar sonhos em realidade.

AGRADECIMENTOS

A caminhada até a conclusão deste mestrado foi marcada por desafios pessoais e circunstâncias adversas no mundo todo, exigindo determinação, resiliência e fé. Esse propósito jamais seria realizado sem o apoio de pessoas fundamentais que estiveram ao meu lado em cada etapa desse caminho.

Agradeço primeiramente a Deus, pela força concedida nos momentos mais difíceis, pela sabedoria e pelas bênçãos que me permitiram continuar mesmo diante das adversidades.

À minha mãe, Erinalda Maria da Silva, e ao meu pai, Geraldo Gomes Silva, por todo o amor, incentivo e apoio. Vocês sempre acreditaram que a educação é a chave para transformar realidades e nunca pouparam esforços para me proporcionar essa oportunidade. Sou eternamente grato por todo o sacrifício e dedicação.

A todos os meus familiares, que, de forma direta ou indireta, contribuíram com palavras de apoio, carinho e encorajamento. Vocês estiveram presentes nos momentos em que mais precisei de força e me ajudaram a enfrentar cada desafio.

Aos meus dois avôs que, durante o mestrado, enfrentei suas perdas, onde mesmo diante de todas as dificuldades da vida foram exemplos de coragem e determinação ao construir uma família com dignidade e valores. Seus legados permanecem vivos em minhas lembranças e suas histórias de superação sempre me darão forças para continuar.

Ao meu orientador, Professor Fernando R. L. Contreras, e ao meu coorientador, Professor Alessandro R. E. Antunes, sou profundamente grato pela orientação, imensa paciência e dedicação ao longo de toda a pesquisa. Seus conhecimentos, ensinamentos e apoio contínuo foram essenciais para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos amigos que fiz durante o mestrado, aos meus amigos do trabalho, àqueles que estiveram ao meu lado desde o início e aos que surgiram ao longo do caminho, sou grato pelo apoio e conversas motivadoras que tornaram a jornada mais leve.

À Universidade Federal de Pernambuco, em especial ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, que me proporcionaram a estrutura e os recursos necessários para o desenvolvimento dessa pesquisa, aos professores e funcionários que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação acadêmica e pessoal.

Enfim, agradeço a todos que fizeram parte dessa caminhada e que acreditaram no meu potencial. Este trabalho é dedicado a vocês, que foram fundamentais para a realização deste sonho.

”Eu disse essas coisas, para que vocês tenham a minha paz. Neste mundo vocês terão aflições, mas tenham coragem; eu venci o mundo.”

(BÍBLIA, N. T., João 16:33)

RESUMO

O escoamento de fluidos em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos é essencial em vários campos da engenharia, sobretudo na análise do transporte de poluentes em aquíferos e do fluxo multifásico em reservatórios de petróleo. Isso acontece, principalmente, devido às propriedades físicas e geológicas complexas que tornam inviáveis a obtenção de soluções analíticas e exige o uso de metodologias numéricas robustas e flexíveis. Neste trabalho, propomos um Método de Volumes Finitos com Aproximação por Múltiplos Pontos (MPFA – *Multi-Point Flux Approximation*), para a discretização da equação de pressão sobre influência do efeito da gravidade. Em comparação com métodos clássicos, estes métodos se destacam por sua capacidade de lidar com tensores de permeabilidade arbitrários, mantendo a consistência física do fluxo nas interfaces dos volumes de controle. Um diferencial desta pesquisa é a formulação consistente do termo gravitacional na lei de Darcy, uma vez que a abordagem desse termo é frequentemente negligenciada ou tratada de forma inconsistente por diversos simuladores comerciais. Para a equação de saturação, utilizamos o método Upwind de primeira ordem para resolver o termo advectivo, que garante estabilidade numérica na discretização sob os efeitos gravitacionais, e o método de Euler explícito para tratar o problema transiente, onde foram resolvidos através da metodologia IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*). A formulação proposta foi avaliada em diferentes cenários e seus resultados obtidos demonstram a eficácia dos métodos na simulação de escoamentos complexos, captando os efeitos gravitacionais e preservando as propriedades físicas do sistema, se mostrando propícios para outras aplicações no estudo do escoamento em meios porosos.

Palavras-chaves: Escoamento bifásico, MPFA, Reservatórios heterogêneos e anisotrópicos, Influência do efeito gravitacional.

ABSTRACT

Fluid flow in heterogeneous and anisotropic porous media is of fundamental importance in various fields of engineering, especially in the analysis of contaminant transport in aquifers and multiphase flow in petroleum reservoirs. This is mainly due to the complex physical and geological properties that make analytical solutions impractical and require robust and flexible numerical methods. In this work, we propose a finite volume method with multipoint flux approximation (MPFA) for the discretization of the pressure equation under the influence of gravity. Compared to classical methods, these methods are characterized by their ability to handle arbitrary permeability tensors while preserving the physical consistency of the fluxes at the interfaces of the control volume. A particular feature of this research is the consistent formulation of the gravitational term in Darcy's law, as this term is often neglected or treated inconsistently by various commercial simulators. For the saturation equation, we use the first-order upwind method to solve the advective term, which provides numerical stability in the discretization under gravitational influences, and the explicit Euler method to handle the transient problem, both integrated by the IMPES (Implicit Pressure Explicit Saturation) method. The proposed formulation has been evaluated in different scenarios and the results show the effectiveness of the methods in simulating complex flow behaviors, capturing gravitational effects and preserving the physical properties of the system, indicating their potential for other applications in the study of flows in porous media.

Keywords: Two-phase flow, MPFA, Heterogeneous and anisotropic reservoirs, Influence of gravitational effects.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diagrama dos fluxos de massa através das várias faces de um elemento infinitesimal.	33
Figura 2 – Identificação das condições de contorno.	38
Figura 3 – Método IMPES.	39
Figura 4 – Domínio discretizado e volume de controle arbitrário.	40
Figura 5 – Representação do estêncil para o calculo do fluxo utilizando o MPFA-D (a) e utilizando o MPFA-H (b).	42
Figura 6 – Domínio unidimensional.	43
Figura 7 – Erros de consistência do TPFA.	44
Figura 8 – Volumes de controle da esquerda e da direita com os triângulos auxiliares em evidência.	46
Figura 9 – Nós auxiliares na vizinhança de um vértice I.	48
Figura 10 – Representação dos elementos geométricos e dos fluxos locais necessários para a derivação do LPEW-2.	49
Figura 11 – Representação dos elementos físicos e geométricos do método MPFA-H. . .	51
Figura 12 – Parâmetros utilizados na discretização do termo gravitacional padrão. . . .	54
Figura 13 – Parâmetros utilizados na discretização do termo gravitacional consistente para o método MPFA-D.	55
Figura 14 – Parâmetros utilizados na discretização do termo gravitacional consistente para o método MPFA-H.	56
Figura 15 – Método para determinação da mobilidade.	60
Figura 16 – Tipos de malhas utilizadas para as simulações do teste monofásico com refinamento 8x8: quadrilateral (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangular (d) estruturada, (e) distorcida e (f) diagonal	62
Figura 17 – Representação das condições de contorno e dos parâmetros físicos dos problemas monofásicos.	63

Figura 18 – Caso 1 – Campos de pressão: (a) solução analítica em malha estruturada (65.536 Volumes de controles (VCs)) e soluções numéricas via Multi-Point Flux Approximation with Diamond Stencil (MPFA-D) para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (d) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (e) triangular diagonal (128 VCs).	65
Figura 19 – Caso 2 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).	67
Figura 20 – Caso 3 – erro de pressão ε_p em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.	69
Figura 21 – Caso 3 – erro de fluxo ε_q em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.	70
Figura 22 – Caso 3 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).	71
Figura 23 – Caso 4 – erro de pressão ε_p em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.	73
Figura 24 – Caso 4 – erro de fluxo ε_q em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.	74
Figura 25 – Caso 4 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).	75

Figura 26 – Caso 5 – erro de pressão ε_p em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.	77
Figura 27 – Caso 5 – erro de fluxo ε_q em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.	78
Figura 28 – Caso 5 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).	79
Figura 29 – Propriedades, condições iniciais e de contorno.	80
Figura 30 – Tipos de malhas utilizadas para as simulações do teste bifásico com refinamento 8x8: quadrilateral (a) estruturada e (b) distorcida.	81
Figura 31 – Evolução temporal da saturação da fase óleo na malha quadrilateral distorcida com refinamento 8x8 utilizando o MPFA-D.	82
Figura 32 – Malha quadrilateral distorcida: Erros na saturação (a) e pressão (c) e o fluxo total máximo (b) em função do tempo para o refinamento 8x8 e os erros de pressão ε_p versus o refinamento (d).	83
Figura 33 – Malha quadrilateral estruturada: Erros na saturação (a) e pressão (c) e o fluxo total máximo (b) em função do tempo para o refinamento 64x64 e os erros de pressão ε_p versus o refinamento (d).	84
Figura 34 – Evolução temporal da saturação da fase óleo na malha quadrilateral estruturada com refinamento 64x64 utilizando o MPFA-D.	85
Figura C.1 – Domínio discretizado por uma malha quadrilateral de nove elementos.	121
Figura C.2 – Montagem da matriz global $\mathcal{M}$ (esquerda) e do vetor de termos independentes $\mathcal{J}$ (direita) após a contribuição de todas as faces para o MPFA-D.	122
Figura C.3 – Montagem da matriz global $\mathcal{M}$ (esquerda) e do vetor de termos independentes $\mathcal{J}$ (direita) após a contribuição de todas as faces para o MPFA-H.	123
Figura C.4 – Função spy do MATLAB para uma malha quadrilateral de nove elementos com o método (a) MPFA-D e (b) MPFA-H.	124

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resumo dos valores dos coeficientes de ponderação que caracterizam cada caso.	63
Tabela 2 – Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ no caso bifásico para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida.	82
Tabela 3 – Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ no caso bifásico para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada.	84
Tabela B.1 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	97
Tabela B.2 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	97
Tabela B.3 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	97
Tabela B.4 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 a).	98
Tabela B.5 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	98
Tabela B.6 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	98
Tabela B.7 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	98
Tabela B.8 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	99
Tabela B.9 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	99
Tabela B.10 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	99
Tabela B.11 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	99
Tabela B.12 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	100

Tabela B.13–Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	100
Tabela B.14–Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	100
Tabela B.15–Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	100
Tabela B.16–Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	101
Tabela B.17–Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	101
Tabela B.18–Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	101
Tabela B.19–Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	101
Tabela B.20–Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	102
Tabela B.21–Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	102
Tabela B.22–Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	102
Tabela B.23–Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	102
Tabela B.24–Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	103
Tabela B.25–Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	103
Tabela B.26–Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	103
Tabela B.27–Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	104
Tabela B.28–Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	104

Tabela B.29–Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	105
Tabela B.30–Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	105
Tabela B.31–Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	106
Tabela B.32–Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	106
Tabela B.33–Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	107
Tabela B.34–Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	107
Tabela B.35–Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	108
Tabela B.36–Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	108
Tabela B.37–Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	109
Tabela B.38–Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	109
Tabela B.39–Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	110
Tabela B.40–Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	110
Tabela B.41–Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	111
Tabela B.42–Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	111
Tabela B.43–Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	112
Tabela B.44–Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	112

Tabela B.45–Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	113
Tabela B.46–Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	113
Tabela B.47–Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	114
Tabela B.48–Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	114
Tabela B.49–Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	115
Tabela B.50–Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).	115
Tabela B.51–Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	116
Tabela B.52–Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).	116
Tabela B.53–Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	117
Tabela B.54–Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).	117
Tabela B.55–Caso 5: Erro de pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	118
Tabela B.56–Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).	118
Tabela B.57–Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	119
Tabela B.58–Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).	119
Tabela B.59–Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	120
Tabela B.60–Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).	120

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
CMG	Computer Modelling Group Ltd
FOUM	First Order Upwind Method
IMPES	Implicit Pressure Explicit Saturation
LPEW2	Linearity- Preserving Explicit Weighted 2
MATLAB	MATrix LABoratory
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFM	Método dos Elementos Finitos Misto
MEFVC	Métodos de Elementos Finitos por Volumes de Controle
MPFA	Multi-Point Flux Approximation
MPFA-O	Multi-Point Flux Approximation O
MPFA-H	Multi-Point Flux Approximation with Harmonic Points
MPFA-D	Multi-Point Flux Approximation with Diamond Stencil
MUSCL	Monotonic Upstream-Centerd Scheme for Conservation Laws
MVF	Método dos Volumes Finitos
TPFA	Two-Point Flux Aproximation
TVD	Total Variation Diminishing
VC	Volumes de controle

LISTA DE SÍMBOLOS

ρ	Densidade
μ	Viscosidade
τ	Tensão cisalhante
$\partial u / \partial n$	Gradiente de velocidade normal
p	Pressão
C	Concentração
T	Temperatura
ϕ	Porosidade
V_{vazios}	Volume de vazios do meio poroso
V_{total}	Volume total do meio poroso
S_i	Saturação da fase $i = o$ (óleo), w (água)
V_i	Volume da fase $i = o$ (óleo), w (água)
K	Permeabilidade
k_{ri}	Permeabilidade relativa da fase $i = o$ (óleo), w (água)
k_i	Permeabilidade efetiva da fase $i = o$ (óleo), w (água)
S_e	Saturação efetiva da fase molhante
S_{wi}	Saturação irreduzível da fase água
S_{or}	Saturação residual da fase óleo
dV	Volume infinitesimal cúbico
$\vec{v}$	Vetor velocidade total
t	Instante de tempo
q	Taxa de injeção/extração de massa
∇	Operador gradiente
ρ_i	Densidade da fase $i = o$ (óleo), w (água)
q_i	Taxa de injeção/extração de massa da fase $i = o$ (óleo), w (água)
$\vec{v}_i$	Vetor velocidade da fase $i = o$ (óleo), w (água)
λ_i	Mobilidade da fase $i = o$ (óleo), w (água)
p_i	Pressão da fase $i = o$ (óleo), w (água)
$\mathbf{g}_i$	Vetor da força gravitacional atuante na fase $i = o$ (óleo), w (água)
μ_i	Viscosidade da fase $i = o$ (óleo), w (água)

$\vec{g}$	Aceleração devido ao vetor gravidade
λ	Mobilidade total
∇p	Gradiente de pressão
Q	Vazão volumétrica
p_c	Pressão capilar
$\mathbf{G}$	Força gravitacional atuante na equação de pressão para fluxo bifásico
f_i	Fluxo fracional da fase $i = o$ (óleo), w (água)
Q_i	Vazão volumétrica da fase $i = o$ (óleo), w (água)
$\vec{F}_i$	Fluxo hiperbólico da fase $i = o$ (óleo), w (água)
G	Força gravitacional atuante na equação de saturação para fluxo bifásico
$\Gamma, \partial\Omega$	Contorno do domínio
Γ_D	Condição de contorno de Dirichlet
Γ_N	Condição de contorno de Neumann
Γ_I	Condição de contorno do poço injetor
Γ_P	Condição de contorno do poço produtor
$p_{producao}$	Pressão no poço de produção
$q_{injecao}$	Vazão no poço de injeção
$\vec{x}$	Vetor posição
$\bar{S}_w$	Saturação da fase água no poço de injeção
$\bar{S}_w^0$	Saturação da fase água no primeiro passo de tempo
Ω	Domínio espacial
M	Domínio espacial discretizado
E	Conjunto das superfícies de controle
$\hat{L}$	Volume de controle à esquerda da face analisada
IJ	Face formada pelos vértices I e J
I, J	Vértices genéricos analisados da malha computacional
$\partial\hat{L}$	Contorno do volume de controle $\hat{L}$
$ IJ , \vec{IJ} , A_{IJ}$	Comprimento do segmento IJ
$x_{\hat{\gamma}}$	Baricentro do volume de controle $\gamma = L$ (esquerda), R (direita)
V_i	Volume de um volume de controle $\gamma = L$ (esquerda), R (direita)
$\vec{N}_{IJ}, \vec{N}_{JI}$	Vetor área normal à face IJ ou JI
$\vec{n}$	Vetor unitário normal
$\vec{v}_{IJ}$	Vetor velocidade na face IJ

$\bar{Q}_{\hat{L}}$	Média do termo fonte/sumidouro do volume de controle $\hat{L}$
$\vec{n}_{IJ}$	Vetor unitário normal da face IJ
$K_{\hat{\gamma}}^T$	Tensor de permeabilidade transposto do volume de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)
$\hat{R}$	Volume de controle à direita da face analisada
$K_{\hat{\gamma}}$	Permeabilidade do volume de controle $\gamma = L$ (esquerda), R (direita)
$p_{\hat{\gamma}}$	Pressão no baricentro do volume de controle $\gamma = L$ (esquerda), R (direita)
p_I, p_J	Pressões nos vértices I e J , respectivamente
$\Re$	Matriz de rotação
$\vec{IJ}$	Vetor na direção da face formada pelos vértices I e J
$h_{IJ}^{\hat{\gamma}}$	Altura da face IJ ao elemento $\gamma = L$ (esquerda), R (direita)
$K_{IJ,\gamma}$	Tensor completo de permeabilidade projetado na face IJ dos volume de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)
$K_{IJ,\gamma}^{(n)}, K_{IJ,\gamma}^{(t)}$	Constantes normais e tangenciais do tensor de permeabilidade projetado na face IJ dos volume de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)
$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}}, \vec{v}_{JI}^{\hat{R}}$	Vetor velocidade na face IJ ou JI relativo ao elemento L ou R
$K_{IJ}^{(1)}$	Constante que envolve entes geométricos e físicos na direção normal do tensor de permeabilidade
$D_{IJ}^{(1)}$	Constante que envolve entes geométricos e físicos na direção tangencial do tensor de permeabilidade
$n(I)$	Número de nós conectados ao vértice I
w_k	Pesos explícitos do k-ésimo elemento
$\eta_{k,i}$	Constante geométrica do k-ésimo elemento no volume de controle para derivação dos pesos explícitos $i = 1, 2$
$K_{\alpha,i}^{(n)}, K_{\alpha,i}^{(t)}, \bar{K}_{\alpha}^{(n)}, \bar{K}_{\alpha}^{(t)}$	Constantes normais e tangencias no sentido do escoamento associados ao tensor de permeabilidade usadas para derivar os pesos explícitos
$\theta_{k,i}, \vartheta_{k,i}$	Ângulos no k-ésimo elemento, para $i = 1, 2$.
$x_{\hat{\gamma},i(IJ)}, x_{\hat{\gamma},j(IJ)}$	Pontos harmônicos para os volumes de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)
$\alpha_{\hat{\gamma},i(IJ)}, \alpha_{\hat{\gamma},j(IJ)}$	Constantes utilizadas na construção dos pontos harmônicos para os volumes de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)
$\theta_{\hat{\gamma},1(IJ)}, \theta_{\hat{\gamma},2(IJ)}$	Ângulos utilizados na construção dos pontos harmônicos para os volumes de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$	Vetor unitário dos eixos x , y e z
λ_{IJ}	Mobilidade na face IJ
$w_{\hat{\gamma}(IJ)}$	Pesos sobre a face IJ utilizados na ponderação do MPFA-H
$\mathcal{A}_{\hat{\gamma}(IJ)}, \mathcal{D}_{IJ}$	Constantes que envolvem entes geométricos e físicos para a construção do MPFA-H, para os volumes de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)
p_{IJ}	Pressão no ponto harmônico
g	Gravidade escalar
$\bar{K}_{IJ}$	Média harmônica ponderada do tensor de permeabilidade dos elementos que compartilham a face IJ
$\bar{g}_{IJ}$	Média ponderada do vetor gravitacional dos elementos que compartilham a face IJ
$d_{IJ, \hat{\gamma}}$	Distância vetorial entre a face IJ e os elementos $\gamma = L$ (esquerda), R (direita)
x_{IJ}	Ponto médio da face IJ
$\vec{g}_{\hat{\gamma}}$	Aceleração devido ao vetor gravidade para o volume de controle $\gamma = \hat{L}$ (esquerda), $\hat{R}$ (direita)
$g_{\hat{\gamma}}$	Gravidade escalar no baricentro do volume de controle $\gamma = L$ (esquerda), R (direita)
g_I, g_J	Gravidade escalar nos vértices I e J , respectivamente
$g_{IJ}, g_{\hat{\gamma}, i(IJ)}, g_{\hat{\gamma}, j(IJ)}$	Gravidade escalar no ponto harmônico
$\mathcal{M}$	Matriz de transmissibilidade do sistema linear
$\underline{p}$	Vetor de pressões do sistema linear
$\mathcal{J}$	Vetor dos termos independentes do sistema linear
$\vec{F}_{i, IJ}$	Fluxo hiperbólico na face IJ da fase $i = o$ (óleo), w (água)
S_w^k	Saturação da fase água no k -ésimo passo de tempo
Δt	Intervalo de tempo
$\mathcal{C}_{max}$	Número de Courant máximo
$\mathcal{C}$	Número de Courant
ε_u	Erro numérico para $u = p$ (pressão), q (fluxo), S (saturação)
$\mathcal{R}_u$	Taxa de convergência para ps erros de $u = p$ (pressão), q (fluxo)
q_{IJ}	Fluxo numérico na face IJ
g_x, g_y	Componentes no eixo x e y do vetor gravitacional
n	Número total de elementos da malha computacional

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	MOTIVAÇÃO	23
1.2	ESTADO DA ARTE	24
1.3	OBJETIVO GERAL	28
1.4	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	28
1.5	ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO	29
2	MODELO MATEMÁTICO	30
2.1	PROPRIEDADES DO MEIO POROSO E DOS FLUIDOS	30
2.2	EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA	32
2.3	LEI DE DARCY	34
2.4	EQUAÇÃO DE PRESSÃO	35
2.5	EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO	36
2.6	CONDIÇÕES INICIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO	37
3	MODELO NUMÉRICO	39
3.1	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS CENTRADOS NA CÉLULA	40
3.2	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE PRESSÃO PELO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS	41
3.2.1	Discretização da vazão pelo método de aproximação de fluxo por dois pontos (TPFA)	43
3.2.2	Discretização da vazão pelo método de aproximação de fluxo por múlti- plos pontos com estêncil tipo diamante (MPFA-D)	45
3.2.2.1	<i>Tratamento dos Fluxos no Contorno</i>	47
3.2.2.2	<i>Interpolação das Pressões nos Vértices</i>	47
3.2.3	Discretização da vazão pelo método de aproximação de fluxo por múlti- plos pontos baseado em pontos harmônicos (MPFA-H)	49
3.2.3.1	<i>Tratamento dos Fluxos no Contorno</i>	52
3.2.3.2	<i>Interpolação dos Pontos Harmônicos</i>	52
3.3	DISCRETIZAÇÃO DO TERMO GRAVITACIONAL	53
3.3.1	Discretização padrão do termo gravitacional	53
3.3.2	Formulação do termo gravitacional consistente	54

3.3.2.1	<i>Discretização do termo gravitacional utilizando o MPFA-D</i>	54
3.3.2.2	<i>Discretização do termo gravitacional pelo método MPFA-H</i>	56
3.4	MONTAGEM DO SISTEMA LINEAR	57
3.5	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO	57
3.6	APROXIMAÇÃO DAS MOBILIDADES	59
4	RESULTADOS NUMÉRICOS	61
4.1	ESCOAMENTO MONOFÁSICO COM EFEITO GRAVITACIONAL NUM MEIO POROSO HOMOGÊNEO	61
4.1.1	Erros e taxas de convergência	64
4.1.2	Caso 1: Termo gravitacional constante em todo o domínio	64
4.1.3	Caso 2: Termo gravitacional constante por partes	66
4.1.4	Caso 3: Termo gravitacional influenciado pela função suave	67
4.1.5	Caso 4: Termo gravitacional influenciado igualmente pela função de- grau e pela função suave	71
4.1.6	Caso 5: Termo gravitacional influenciado muito mais pela função suave do que pela função degrau	75
4.2	ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIO POROSO HETEROGÊNEO COM EQUILÍBRIO VERTICAL	79
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	86
5.1	CONCLUSÕES	86
5.2	TRABALHOS FUTUROS	87
	REFERÊNCIAS	88
	APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DA FORÇA GRAVITACIONAL ES- CALAR	95
	APÊNDICE B – TABELAS DE ERROS E TAXAS DE CONVERGÊN- CIA PARA OS EXEMPLOS NUMÉRICOS	97
	APÊNDICE C – DETALHAMENTO DA MONTAGEM MATRICIAL UTILIZANDO O MPFA-D E O MPFA-H	121

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Compreender os fenômenos de escoamento em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos é fundamental em diversos campos da engenharia, como a exploração de petróleo, a gestão de recursos hídricos subterrâneos e a remediação ambiental de aquíferos contaminados. Nesse contexto, a simulação numérica configura-se como uma ferramenta essencial, destacando-se em estudos sobre o transporte de contaminantes em aquíferos e o fluxo multifásico em reservatórios de petróleo, que são dois dos principais temas investigados em simulações de meios porosos (Carvalho, 2005; Konikow; Glynn, 2012; Druetta *et al.*, 2016).

Diversos estudos multidisciplinares vêm sendo realizados utilizando modelagem de águas subterrâneas com o intuito de compreender melhor a dinâmica dos aquíferos, avaliar a exploração sustentável dos recursos hídricos e prever o transporte de contaminantes. Essa abordagem tem se mostrado uma alternativa eficiente diante das dificuldades e limitações associadas aos levantamentos em campo, permitindo análises mais amplas e detalhadas do comportamento dos sistemas aquíferos em diferentes cenários (Song *et al.*, 2020; He *et al.*, 2023).

Nesse mesmo sentido, a capacidade de prever o comportamento dos fluidos em reservatórios de petróleo com diferentes níveis de complexidade é indispensável para que as empresas petrolíferas utilizem seus recursos financeiros de forma eficiente. A análise de diferentes estratégias de produção permite aos engenheiros aprimorar os métodos de extração, realizar estimativas mais precisas das reservas e tomar decisões fundamentadas sobre o desenvolvimento dos campos. A simulação de reservatórios de petróleo tem se mostrado, frequentemente, uma atividade bastante promissora em diversas etapas de produção da indústria petrolífera (Carvalho, 2005; Khalili; Ahmadi, 2023).

A obtenção de soluções analíticas para as equações governantes do fluxo de fluidos é, na maioria das vezes, inviável devido à complexidade geológica, às condições de contorno irregulares e à presença de termos físico-geométricos não lineares. Assim, a simulação numérica torna-se uma alternativa indispensável, pois permite a análise de fenômenos complexos (Aziz; Settari, 1979; Chen; Huan; Ma, 2006; Bear; Cheng, 2010).

Um simulador é uma ferramenta computacional baseada em métodos numéricos, e a maioria deles utiliza métodos tradicionais ou clássicos. No entanto, esses métodos enfrentam dificuldades ao lidar com meios porosos complexos. Além disso, a influência da gravidade nas equações

que regem o modelo adiciona uma camada extra de complexidade, afetando diretamente a distribuição e o movimento dos fluidos. Isso pode resultar em perda de acurácia ou em instabilidades numéricas.

Diante desses desafios, torna-se necessário o desenvolvimento de abordagens numéricas robustas e adaptáveis, capazes de descrever os fenômenos físicos complexos presentes no escoamento em meios porosos. Isso reforça a importância de continuar pesquisando novas formulações e implementando métodos avançados, com o objetivo de superar não apenas as limitações dos métodos atualmente disponíveis, mas também de atender à crescente demanda por previsões confiáveis e eficientes em aplicações na indústria petrolífera e meio ambiente.

1.2 ESTADO DA ARTE

A modelagem e simulação numérica do escoamento em meios porosos com propriedades altamente heterogêneas e anisotrópicas representam um desafio multidisciplinar, envolvendo desde aspectos matemáticos e computacionais até a caracterização geológica do meio poroso.

Em razão da heterogeneidade das propriedades do meio poroso, é um grande desafio encontrar soluções analíticas para as equações governantes do fluxo de fluidos, dessa forma, é necessário utilizar algum método numérico, que consiste em substituir as derivadas existentes por expressões algébricas e as propriedades do meio contínuo em propriedades discretas permitindo a resolução computacional (Anderson, 1995; Maliska, 2004). Os métodos numéricos são mais amplos em suas aplicações e têm se mostrado altamente eficazes na obtenção de soluções para certas equações diferenciais em situações envolvendo reservatórios com características complexas (Peaceman, 1977). Dentre os principais métodos numéricos utilizados para resolver as equações governantes e, conseqüentemente, estudar seu comportamento, destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Volumes Finitos (MVF) (Ferziger; Perić, 2002; Bear; Cheng, 2010).

O MDF para a solução de equações diferenciais consiste na substituição das derivadas parciais por aproximações discretas em uma grade de pontos, a partir de expansões em séries de Taylor, com um erro de truncamento controlado. Suas aplicações são extensas, permitindo a solução numérica de problemas físicos envolvendo o transporte de massa, energia e momento. O MDF é extremamente econômico em termos computacionais devido à sua simplicidade de entendimento, apresenta boa robustez e facilidade de implementação. Contudo, possui como desvantagem dificuldades na representação de geometrias complexas, meios altamente hete-

rogêneos e anisotrópicos, além de malhas distorcidas (Peaceman, 1977; Aziz; Settari, 1979; Carvalho, 2005; Chen; Huan; Ma, 2006; Fanchi, 2006).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) foi inicialmente concebido na década de 1940 para resolver problemas de elasticidade da dinâmica estrutural em engenharia (Turner *et al.*, 1956), tendo sido formalmente desenvolvido e popularizado pelo matemático Richard Courant. No entanto, o método clássico não conservava localmente as propriedades físicas, mas possuía a vantagem de permitir o uso de malhas não estruturadas. Posteriormente, para problemas de escoamento de fluidos em meios porosos, foi desenvolvido o MEF de Galerkin, que passou a ser utilizado tanto para calcular o campo de pressões quanto o campo de velocidades (Courant, 1943; Clough, 1990; Maliska, 2004; Chen; Huan; Ma, 2006).

Além da formulação clássica para o MEF, outras variações foram desenvolvidas para aprimorar a simulação do fluxo de fluidos. O Método dos Elementos Finitos Misto (MEFM) melhora a conservação de massa ao introduzir a velocidade como variável adicional, enquanto o Métodos de Elementos Finitos por Volumes de Controle (MEFVC) combina a flexibilidade do MEF com a estrutura conservativa do MVF. Apesar do aumento no custo computacional, essas abordagens garantem maior precisão na representação dos campos de pressão e velocidade, permitindo simulações mais realistas em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos. Contudo, o termo gravitacional ainda é discretizado utilizando uma abordagem clássica (Oden; Strouboulis; Devloo, 1986; Ferziger; Perić, 2002; Maliska, 2004; Carvalho, 2005).

Com maior destaque neste trabalho, o Método dos Volumes Finitos (MVF) conserva as propriedades tanto em nível global quanto local, em cada volume de controle. Esse método é caracterizado por aproximar as integrais de superfície e de volume utilizando a forma integral das equações governantes, transformando-as de um domínio contínuo para um domínio discreto. Além disso, é simples de implementar e facilmente adaptável a geometrias complexas e malhas não estruturadas (Maliska, 2004; Contreras, 2012).

Com base nesses métodos, diversos softwares comerciais têm sido desenvolvidos para aplicações específicas. No estudo de aquíferos, destacam-se o MODFLOW, que utiliza o Método de Diferenças Finitas (MDF) para fluxo de água subterrânea e para transporte de solutos (McDonald; Harbaugh, 1988; Wasif; Hasan, 2020; Chowdhury; Rahnuma, 2023), o FEFLOW, adota o Método de Elementos Finitos (MEF) permitindo maior flexibilidade em geometrias complexas (Koskinen *et al.*, 1996; Trefry; Muffels, 2007; Lima; Bacellar; Drumond, 2018), e o HydroGeoSphere, que combina o Método dos Elementos Finitos (MEF) com Volumes Finitos, utilizando o Métodos de Elementos Finitos por Volumes de Controle (MEFVC) para assegurar a conser-

vação de massa local (Brunner; Simmons, 2012; Boubacar *et al.*, 2020; Morel; Graf, 2023).

Já na indústria do petróleo, como principais simuladores podemos citar o ECLIPSE e o INTERSECT, ambos da Schlumberger mas se diferenciam pela metodologia de aproximação adotada sendo o primeiro através do MDF e o segundo do MVF, o CMG Software, que adota o MDF permitindo simulações rápidas e estáveis em reservatórios convencionais, e também o tNavigator, que utiliza o MVF com aproximação de fluxo por dois pontos para discretização espacial de suas equações governantes. Vale destacar que, a escolha do simulador adequado depende das características do reservatório e da complexidade dos fenômenos físicos a serem modelados (Patwardhan *et al.*, 2015; Shao *et al.*, 2021; Nasrollahzadeh; Amiri; Ghabezloo, 2021; Hogeweg; Strobel; Hagemann, 2022; Wang; Li; Ren, 2023).

No entanto, alguns simuladores comerciais apresentam uma limitação comum relacionada ao tratamento do termo gravitacional na equação de Darcy. Em geral, os métodos representam a pressão como um potencial, de forma que a discretização considera apenas suas variações relativas, desconsiderando os efeitos do potencial causados pela ação da gravidade (Starnoni *et al.*, 2019). Isso faz com que a formulação numérica adotada não capture adequadamente os efeitos da gravidade, comprometendo a precisão dos resultados e gerando desvios na representação do escoamento, como a criação de fluxos artificiais impulsionados por flutuações (Negara; Salama; Sun, 2015; Starnoni *et al.*, 2019).

Nessa perspectiva, um tópico relevante abordado no presente trabalho é a consideração do termo gravitacional presente na equação da Lei de Darcy, que não será desprezado. Serão analisadas as influências desse termo durante as simulações, especialmente em casos com malhas distorcidas ou variações significativas na densidade dos fluidos. Além disso, a incorporação precisa do termo gravitacional intensifica os desafios na simulação de meios porosos heterogêneos e anisotrópicos, exigindo abordagens inovadoras para uma representação adequada dos fluxos induzidos pela gravidade.

Assim, no presente trabalho, adotam-se métodos numéricos não ortodoxos, baseados em formulações do Método dos Volumes Finitos (MVF), com as seguintes propriedades: capacidade de tratar malhas poligonais arbitrárias; lidar com tensores de permeabilidade descontínuos e fortemente anisotrópicos; apresentar taxas de convergência de segunda ordem; fornecer uma aproximação consistente do termo gravitacional; e garantir a conservação local e global (Gao; Wu, 2013; Contreras; Lyra; Carvalho, 2019). Essas características são essenciais, uma vez que métodos numéricos clássicos não conseguem lidar adequadamente com as propriedades mencionadas.

Considerando essas vantagens, adotamos o Método dos Volumes Finitos com Aproximação por Múltiplos Pontos (MPFA), utilizando as variantes com estêncil de diamante (MPFA-D — *Multi-Point Flux Approximation with Diamond Stencil*) e com pontos harmônicos (MPFA-H — *Multi-Point Flux Approximation with Harmonic Points*). No fluxo discretizado por esses métodos, pela primeira vez, incluímos o termo gravitacional discretizado de forma consistente. No método MPFA-D, as variáveis primárias são posicionadas nos centros dos elementos, e as variáveis auxiliares, nos vértices da malha computacional, onde são interpoladas por meio de uma estratégia com pesos explicitamente definidos, resultando em uma combinação linear das variáveis centradas no volume de controle (Gao; Wu, 2010; Contreras, 2012; Contreras *et al.*, 2016). No método MPFA-H as variáveis primárias também se posicionam nos centros dos elementos, porém as auxiliares ocupam os pontos harmônicos definidos para a malha computacional realizando, assim, uma combinação linear, fazendo com que diminua o estêncil do método sem perder sua precisão (Agélas; Eymard; Herbin, 2009; Gao; Wu, 2013; Contreras *et al.*, 2017).

Para verificar a acurácia e robustez dos métodos, resolvemos benchmarks da literatura, cujos resultados foram comparados com os obtidos pelo método clássico MPFA-O (Aavatsmark, 2002), acoplado com termo gravitacional. O método MPFA-O acoplado foi implementado em ambiente Python pelo Departamento de Matemática da Universidade de Bergen, Noruega, utilizando a biblioteca PorePy (Keilegavlen *et al.*, 2021), que é uma biblioteca de código aberto desenvolvida para a modelagem numérica de escoamentos em meios porosos fraturados. Utilizando o MPFA-O clássico, a ferramenta permite uma discretização precisa das equações de escoamento e transporte, garantindo um tratamento consistente do termo gravitacional, a depender das configurações adotadas. Também, o PorePy possibilita a representação explícita de redes de fraturas e suas interações com a matriz porosa, sendo uma solução robusta para a simulação de sistemas geológicos complexos e amplamente utilizada na pesquisa acadêmica (Starnoni *et al.*, 2019; Keilegavlen *et al.*, 2021; Starnoni *et al.*, 2021; Stefansson *et al.*, 2024).

Neste trabalho, no que se refere à discretização dos termos advectivos, empregamos um Método Upwind de Primeira Ordem (FOUM — *First Order Upwind Method*). O método Upwind leva em consideração a direção do escoamento para calcular os fluxos numéricos, garantindo maior estabilidade, sendo amplamente reconhecido por sua robustez e simplicidade de implementação, apesar da abordagem poder introduzir uma difusão dissipação moderada (Godunov; Bohachevsky, 1959; Contreras, 2017). Em contraste a isso, a literatura aponta para métodos de ordem superior, como os esquemas *Total Variation Diminishing* (TVD) e *Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws* (MUSCL), que oferecem uma resolução mais acentu-

ada dos gradientes, embora exijam um controle mais rigoroso de oscilações e possuam maior custo computacional (Harten, 1983; Leer, 1979; Carvalho, 2005). No entanto, a presença do termo gravitacional impõe dificuldades adicionais na discretização advectiva, uma vez que ele pode gerar fluxos gravitacionais em contracorrente que são contrários ao movimento dominante do fluido, causando desbalanços numéricos que impactam a estabilidade e a precisão da solução (Lamine, 2009; Starnoni *et al.*, 2019). Em vista disso, a implementação e o acoplamento de métodos como TVD e MUSCL são elementos-chave em estudos futuros, visto que esses métodos oferecem mecanismos capazes de limitar variações abruptas na solução, garantindo maior estabilidade e precisão sem a introdução de oscilações artificiais.

1.3 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral visa desenvolver formulações numéricas baseadas no método de volumes finitos com aproximação por múltiplos pontos para resolver as equações de pressão e saturação, considerando o efeito de gravidade, em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos.

1.4 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Com finalidade de atender ao objetivo geral deste trabalho, são definidos os seguintes objetivos específicos:

- a) formular modelos numéricos para resolver as equações de pressão e saturação utilizando o método de volumes finitos sem negligenciar o efeito de gravidade;
- b) formular uma discretização numérica consistente para o termo gravitacional, assegurando sua correta representação nos fluxos simulados;
- c) implementar e acoplar as formulações desenvolvidas em um código numérico eficiente para simulações em diferentes cenários;
- d) verificar a acurácia das formulações propostas por meio de validações com exemplos da literatura e análises comparativas.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO CONTEÚDO

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, que abordam da fundamentação teórica até a apresentação dos resultados e conclusões. O capítulo inicial traz uma introdução, contextualizando os assuntos, assim como os objetivos e o escopo desta dissertação. No capítulo 2, são discutidos os conceitos relacionados ao problema analisado, abrangendo a formulação matemática das equações governantes. O capítulo 3 apresenta a metodologia da pesquisa, descrevendo a discretização das equações governantes e os métodos numéricos. No capítulo 4, são apresentados os experimentos numéricos, descrevendo os casos de teste, os parâmetros e a avaliação dos resultados alcançados. O capítulo 5 contém as conclusões do trabalho, ressaltando as principais descobertas e sugerindo pesquisas futuras. Por fim, são apresentadas as referências utilizadas para construir o trabalho e o apêndice tratando da construção da força gravitacional escalar.

2 MODELO MATEMÁTICO

Este capítulo apresenta uma breve discussão sobre os conceitos essenciais relacionados às propriedades da rocha e dos fluidos, fundamentais para o entendimento do modelo matemático adotado, focando nas variáveis e parâmetros diretamente envolvidos na análise do escoamento. Com o objetivo de simplificar a análise, assume-se que a rocha e os fluidos são considerados isotérmicos, incompressíveis e não há troca de massa ou reação entre eles, além de se desprezarem os efeitos da capilaridade (Peaceman, 1977; Chen; Huan; Ma, 2006). Por sua vez, o efeito gravitacional é incluído nas equações que regem o fluxo no meio poroso.

As equações que governam o fluxo em meios porosos são obtidas pela combinação da lei de Darcy aplicada a cada fase do escoamento com um balanço de massa diferencial simples. As equações de pressão e saturação são de natureza elíptica e hiperbólica, respectivamente, devido às considerações adotadas. Para que o problema esteja bem posto, essas equações necessitam das condições de contorno adequadas, uma vez que determinam o comportamento do fluxo nas fronteiras do domínio e representam as características físicas e geológicas do sistema em estudo (Peaceman, 1977; Ewing, 1983; Chen; Huan; Ma, 2006; Contreras, 2017).

2.1 PROPRIEDADES DO MEIO POROSO E DOS FLUIDOS

A densidade (ρ), ou massa específica, de um fluido é determinada como a razão entre a massa do fluido e o volume que ele ocupa. Geralmente, a densidade de um fluido varia com a pressão e a temperatura de acordo com equações de estado (Bear, 1972).

A viscosidade (μ) é caracterizada como a resistência do fluido às deformações causadas pela ação de forças cisalhantes, ou seja, a resistência do fluido ao fluxo. Para fluidos newtonianos, objeto de nosso estudo, a lei que rege a viscosidade é dada por:

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial n} \quad (2.1)$$

onde τ é a tensão cisalhante e $\partial u / \partial n$ é o gradiente de velocidade normal à superfície do fluido. Assim como a densidade, a viscosidade também pode variar com a pressão (p), temperatura (T) e a concentração (C) de acordo com as equações de estado (Bear, 1972; Sun, 1996). No entanto, a partir de nossas hipóteses simplificadoras, assumimos a densidade e a viscosidade constantes em toda a simulação.

A porosidade é uma propriedade das rochas que depende da sua textura e estrutura desde o seu processo de formação. A porosidade influencia na capacidade de armazenamento de fluidos e na capacidade desses fluidos deslocarem-se através do meio poroso. É definida como a relação entre o volume de espaços vazios e o volume do meio poroso, como mostra a equação (2.2) (Bear, 1972; Bear; Cheng, 2010).

$$\phi = \frac{V_{vazios}}{V_{total}} \quad (2.2)$$

Outro conceito importante para o escoamento multifásico é o da saturação, que consiste na fração do volume vazio do meio poroso preenchido por cada fase pelo volume vazio total, que é representado pela equação de saturação a seguir (Peaceman, 1977):

$$S_i = \frac{V_i}{V_{vazios}} \quad \text{com } i = w, o \quad (2.3)$$

Considerando o escoamento bifásico composto por w = água e o = óleo e que todos os espaços vazios da rocha são saturados pelos fluidos, implicamos na seguinte relação de restrição (Peaceman, 1977; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$S_w + S_o = 1 \quad (2.4)$$

onde S_w é a saturação da fase água e S_o é a saturação da fase óleo.

A permeabilidade (K) é um parâmetro que caracteriza o meio poroso, representando a sua habilidade de transmitir fluidos. Quando o meio é saturado por uma única fase, a permeabilidade é chamada de permeabilidade absoluta, representada pelo tensor:

$$K = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Quando os componentes da diagonal principal k_{xx} e k_{yy} forem iguais e os demais componentes forem nulos, o meio será isotrópico; caso contrário, será anisotrópico (Helmig, 1997; Chen; Huan; Ma, 2006).

Quando o meio poroso está saturado por dois ou mais fluidos, o escoamento de um fluido não acontece de forma isolada, pois, em cada ponto analisado, parte do meio está ocupado pelo outro fluido, dificultando o escoamento do primeiro. Assim, é introduzido o conceito de permeabilidade relativa k_{ri} , que representa a tendência de escoamento de um fluido através do meio, levando em consideração os outros fluidos presentes e que depende unicamente da saturação de cada fase. Para cada fase, ao se multiplicar a permeabilidade relativa pela permeabilidade

absoluta, encontra-se a permeabilidade efetiva (k_i) da fase em questão, como mostra a equação a seguir (Bear, 1972; Helmig, 1997; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$k_i = k_{ri}K, \quad \text{com } i = w, o \quad (2.6)$$

A obtenção dos valores da permeabilidade relativa se dá através de relações empíricas a partir de experimentos que foram realizados. Um dos modelos mais clássicos, e que é utilizado nas simulações do presente trabalho, é o de Brooks e Corey (1964) que constrói as permeabilidades relativas a partir da saturação efetiva da fase molhante (S_e) conforme relações abaixo (Bear, 1972; Helmig, 1997; Bear; Cheng, 2010):

$$k_{rw} = (S_e)^{n_w}; \quad k_{ro} = (1 - S_e)^{n_o}; \quad (2.7)$$

onde os expoentes n_w e n_o possuem valores de acordo com as propriedades dos fluidos, para os problemas aqui simulados, foi adotado o valor 2 para ambos, conforme recomendação da literatura especializada (Burdine, 1953; Helmig, 1997). A saturação efetiva, ou saturação reduzida, da água para fluxo bifásico é dada pela expressão:

$$S_e = \frac{S_w - S_{wi}}{1 - S_{wi} - S_{or}} \quad (2.8)$$

onde S_{wi} é a saturação irreduzível da água e S_{or} é a saturação residual de óleo (Bear, 1972; Helmig, 1997; Bear; Cheng, 2010). O valor aqui adotado para S_{wi} e S_{or} foi 0 por desprezar os efeitos causados devidos à pressão capilar. Assim, as equações para as permeabilidades relativas tornam-se:

$$k_{rw} = (S_w)^2; \quad k_{ro} = (1 - S_w)^2; \quad (2.9)$$

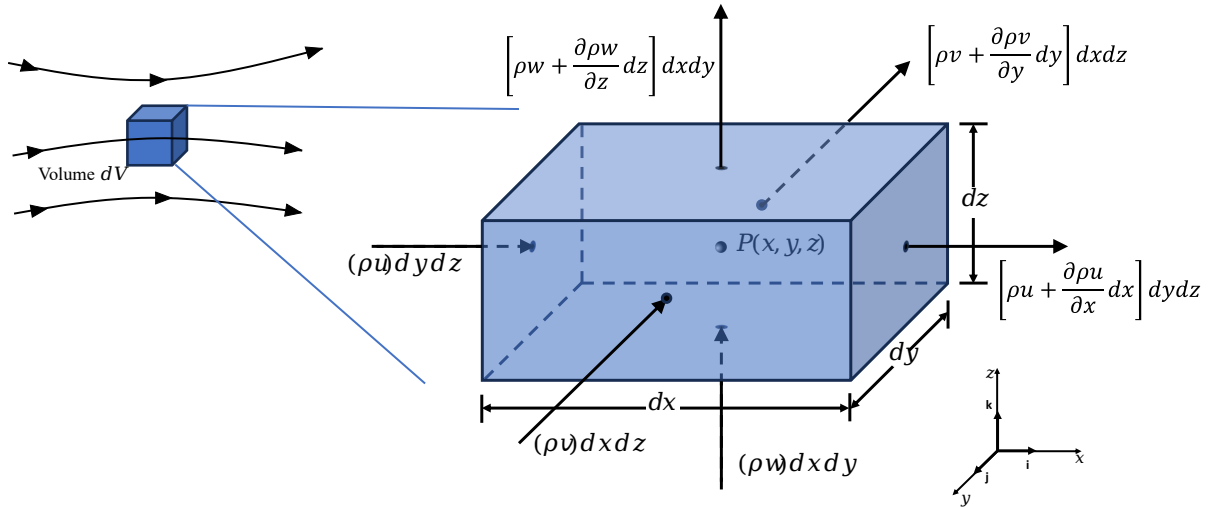
2.2 EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA

A equação de conservação de massa pode ser desenvolvida a partir de um elemento infinitesimalmente pequeno, fixo no espaço, pelo o qual o fluido passa através dele. Assumimos um sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) com um elemento infinitesimalmente pequeno centrado em $P(x, y, z)$ com dimensões $dV = dx \times dy \times dz$ e um fluido com velocidade $\vec{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, sendo a , b e c funções do espaço (x, y, z) e tempo t , como mostra a Figura 1. De acordo com o princípio de conservação de massa temos que a acumulação de massa no volume dV observado ao longo do tempo dt é igual fluxo líquido de massa que entra ou sai do volume dV somado

à injeção ou extração de fluxo mássico em dV devido à reações químicas ou outras origens, conforme mostra a equação abaixo (Peaceman, 1977; Anderson, 1995; Sun, 1996).

$$[\text{taxa de entrada}] - [\text{taxa de saída}] + [\text{taxa de injeção/extração}] = [\text{taxa de acumulação}] \quad (2.10)$$

Figura 1 – Diagrama dos fluxos de massa através das várias faces de um elemento infinitesimal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Considerando as faces da esquerda e da direita na Figura 1 que são perpendiculares ao eixo x , temos sua área igual a $dydz$. Como a velocidade e a densidade são funções que variam com o espaço, os valores do fluxo mássico através da face da esquerda e da direita serão diferentes devido ao seu incremento ao longo da direção x que é dado por $[\partial \rho u / \partial x] dx$. Logo, o fluxo mássico através da face da esquerda é $(\rho u) dydz$ e o fluxo mássico na face da direita $\{\rho u + [\partial \rho u / \partial x] dx\} dydz$ (Anderson, 1995). Assim, a taxa de entrada menos a taxa de saída ao longo da direção x é expressa por:

$$(\rho u) dydz - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx \right] dydz = - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dydz \quad (2.11)$$

De modo similar, essa analogia pode ser replicada para os demais eixos e a taxa de fluxo mássico para todo o elemento infinitesimal é descrita como:

$$- \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dydz - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy dx dz - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dz dx dy = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dydz \quad (2.12)$$

Sabendo que a massa total de fluido no elemento abordado é $\rho(dx dy dz)$, a taxa de acumulação de massa devido à compressibilidade do fluido por unidade de tempo é dada por (Anderson, 1995; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} (dx dy dz) \quad (2.13)$$

Também, a taxa de injeção/extração de massa do elemento devido a uma fonte de escoamento de intensidade q , onde q tem unidade dada em massa por unidade de volume por unidade de tempo, é (Peaceman, 1977; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$q(dxdydz) \quad (2.14)$$

Substituindo os termos na equação (2.10) temos:

$$-\left[\frac{\partial(\rho a)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho b)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho c)}{\partial z}\right]dxdydz + q(dxdydz) = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t}(dxdydz) \quad (2.15)$$

Dividindo todos os termos da equação acima pelo volume $dxdydz$, aplicando o operador divergente e rearranjando a equação obtemos a seguinte equação de conservação de massa para todo o sistema de fluido:

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = q \quad (2.16)$$

Para fluxos multifásicos, os mesmos princípios acima podem ser aplicados, com exceção do termo dado pela equação (2.13), que agora deve levar em conta a saturação de cada fase. A taxa de acumulação de massa por unidade de tempo para cada fase é (Chen; Huan; Ma, 2006):

$$\frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t}(dxdydz) \quad (2.17)$$

Considerando que não há transferência de massa entre fases e realizando as manipulações adequadas, temos a massa conservada dentro de cada fase dada por:

$$\frac{\partial(\phi\rho_i S_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \vec{v}_i) = q_i \quad (2.18)$$

2.3 LEI DE DARCY

A Lei de Darcy, formulada empiricamente em meados do século XIX pelo engenheiro Henry Darcy, estabelece uma relação linear entre a velocidade de escoamento em meios porosos e o gradiente de pressão (Bear, 1972; Chen; Huan; Ma, 2006; Bear; Cheng, 2010). Esse princípio, amplamente utilizado até hoje na modelagem de fluxos subterrâneos, serve como base para definir a velocidade de Darcy para cada fase, conforme a seguinte equação:

$$\vec{v}_i = -\lambda_i K (\nabla p_i - \nabla \mathbf{g}_i), \quad \text{com } i = w, o \quad (2.19)$$

onde λ_i é a mobilidade de cada fase, que expressa a capacidade de cada fluido se mover através dos espaços interconectados do meio poroso (Fanchi, 2006), dada por $\lambda_i = k_{ri}/\mu_i$, sendo k_{ri} a

permeabilidade relativa de cada fase e μ_i a viscosidade de cada fase; ∇p_i o gradiente de pressão; e $\nabla \mathbf{g}_i$ representa a força gravitacional definida por $\mathbf{g}_i = \rho_i \vec{g}$, sendo ρ_i a massa específica e $\vec{g}$ aceleração devido ao vetor gravidade.

Para fluxos bifásicos, é utilizada uma formulação a partir da pressão global que unifica o comportamento da pressão para as diferentes fases presentes no meio. Com isso, são definidos os conceitos de mobilidade total (λ) e velocidade total ($\vec{v}$), equações mais simples e com papel fundamental na simulação de meios porosos por simplificar o sistema de equações que originalmente apresenta forte acoplamento entre as equações de pressão e saturação, dados por (Peaceman, 1977; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$\lambda = \lambda_w + \lambda_o \quad \vec{v} = \vec{v}_w + \vec{v}_o \quad (2.20)$$

2.4 EQUAÇÃO DE PRESSÃO

A equação de pressão é obtida a partir do acoplamento da velocidade de Darcy (2.19) na equação de conservação da massa (2.16). Considerando o escoamento de um fluido newtoniano que ocupa todo o espaço vazio em um meio poroso sob as condições simplificadoras impostas, a velocidade de Darcy tem a seguinte forma:

$$\vec{v} = -K(\nabla p - \mathbf{g}) \quad (2.21)$$

Realizando o acoplamento das duas equações:

$$\frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho (-K(\nabla p - \mathbf{g}))] = q \quad (2.22)$$

A partir das hipóteses simplificadoras definidas no início da seção e com algumas manipulações algébricas, chegamos à seguinte forma para a equação de pressão para o fluxo monofásico:

$$\nabla \cdot [-K(\nabla p - \mathbf{g})] = Q \quad (2.23)$$

onde K é o tensor de permeabilidade absoluta do meio; ∇p o gradiente de pressão; $\mathbf{g}$ representa a força gravitacional; e Q a vazão volumétrica dada por $Q = q/\rho$.

Para o fluxo simultâneo de duas fases em um meio poroso onde os fluidos são imiscíveis e não há transferência de massa entre as fases, devemos adotar a formulação a partir da pressão global e realizar algumas considerações. A partir da equação (2.19) as velocidades das fases

água e óleo podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned}\vec{v}_w &= -\lambda_w K(\nabla p_w - \mathbf{g}_w) \\ \vec{v}_o &= -\lambda_o K(\nabla p_o - \mathbf{g}_o)\end{aligned}\tag{2.24}$$

Substituindo as equações acima na equação de velocidade total (2.20), temos o seguinte:

$$\vec{v} = -\lambda_w K(\nabla p_w - \mathbf{g}_w) - \lambda_o K(\nabla p_o - \mathbf{g}_o)\tag{2.25}$$

A diferença entre as pressões das fases do sistema é definida como a pressão capilar, que empiricamente é uma função da saturação da água (Chen; Huan; Ma, 2006; Bear; Cheng, 2010):

$$p_c = p_o - p_w\tag{2.26}$$

Sendo uma das simplificações adotadas que a pressão capilar é desconsiderada, temos que $p_o = p_w = p$. Aplicando o conceito de mobilidade total e realizando algumas manipulações algébricas, a velocidade de Darcy para fluxo bifásico torna-se:

$$\vec{v} = -\lambda K(\nabla p - \mathbf{G})\tag{2.27}$$

onde:

$$\mathbf{G} = \frac{\lambda_w \mathbf{g}_w + \lambda_o \mathbf{g}_o}{\lambda} \quad \text{com} \quad \lambda = \lambda_w + \lambda_o \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_i = \rho_i \vec{g}\tag{2.28}$$

Realizando o acoplamento da velocidade de Darcy com a equação de conservação da massa de cada fase, a partir da equação (2.18), devemos eliminar as derivadas da saturação. Assumindo que a porosidade ϕ é constante, somando as equações resultantes com $i = w, o$, aplicando o conceito definido em (2.4) e realizando algumas manipulações, a equação de pressão para fluxo bifásico adquire a seguinte identidade (Carvalho, 2005; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$\nabla \cdot [-\lambda K(\nabla p - \mathbf{G})] = Q\tag{2.29}$$

2.5 EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO

Para encontrarmos a equação de saturação, vamos adotar de forma aleatória a fase água como referência de acordo com exemplos da literatura. A equação de saturação mais significativa pode ser encontrada a partir da velocidade da fase água $\vec{v}_w$ em termos da velocidade total $\vec{v}$. Iniciamos, então, multiplicando as velocidades $\vec{v}_w$ e $\vec{v}_o$, descritas em (2.24), por λ_o e λ_w , respectivamente (Bear, 1972; Peaceman, 1977; Carvalho, 2005; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$\lambda_o \vec{v}_w = -\lambda_o \lambda_w K(\nabla p_w - \mathbf{g}_w)\tag{2.30}$$

$$\lambda_w \vec{v}_o = -\lambda_w \lambda_o K (\nabla p_o - \mathbf{g}_o) \quad (2.31)$$

Subtraindo a equação (2.30) da equação (2.31) e reorganizando os termos, chegamos à seguinte equação:

$$\lambda_w \vec{v}_o - \lambda_o \vec{v}_w = \lambda_w \lambda_o K [\nabla (p_w - p_o) + \mathbf{g}_o - \mathbf{g}_w] \quad (2.32)$$

Mais uma vez, sabendo que a pressão capilar é desprezada, ou seja, $p_o = p_w = p$, e substituindo a velocidade da fase óleo $\vec{v}_o$ a partir da relação $\vec{v}_o = \vec{v} - \vec{v}_w$:

$$\lambda_w (\vec{v} - \vec{v}_w) - \lambda_o \vec{v}_w = -\lambda_w \lambda_o K (\mathbf{g}_o - \mathbf{g}_w) \quad (2.33)$$

Rearranjando os termos da equação acima e multiplicando por (-1) ficamos com:

$$\vec{v}_w (\lambda_w + \lambda_o) = \lambda_w \vec{v} + \lambda_w \lambda_o K (\mathbf{g}_w - \mathbf{g}_o) \quad (2.34)$$

Aplicando a mobilidade total dada pela equação (2.20), e definindo o fluxo fracional de uma fase i como $f_i = \lambda_i / \lambda$, ficamos com a velocidade da fase água a partir da velocidade total (Carvalho, 2005; Chen; Huan; Ma, 2006):

$$\vec{v}_w = f_w \vec{v} + f_w \lambda_o K (\mathbf{g}_w - \mathbf{g}_o) \quad (2.35)$$

Substituindo a equação acima na lei de conservação de massa para um fluxo bifásico (equação (2.18)), considerando a fase água ($i = w$) temos:

$$\frac{\partial (\phi \rho_w S_w)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho_w (f_w \vec{v} + f_w \lambda_o K (\mathbf{g}_w - \mathbf{g}_o))] = q_w \quad (2.36)$$

Por fim, assumindo que os fluidos são incompressíveis, dividindo a equação (2.36) por ρ_w , assumindo que $Q_w = q_w / \rho_w$ e após manipulações algébricas, obtém-se:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) + Q_w \quad (2.37)$$

onde a função de fluxo hiperbólico $\vec{F}_w(S_w)$ é dada por:

$$F_w(S_w) = f_w \vec{v} + f_w \lambda_o K \mathbf{G} \quad \text{com} \quad \mathbf{G} = \mathbf{g}_w - \mathbf{g}_o \quad (2.38)$$

2.6 CONDIÇÕES INICIAIS E CONDIÇÕES DE CONTORNO

O problema matemático descrito pelas equações (2.28) e (2.37) não está completo até que seja definido um conjunto adequado de condições iniciais e de contorno que representem a

interação do meio poroso com o ambiente (Bear, 1972; Peaceman, 1977; Chen; Huan; Ma, 2006).

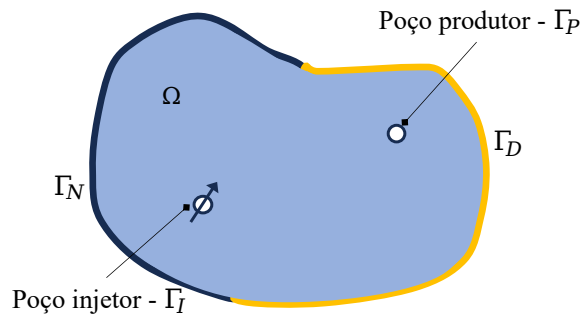
As condições de contorno para a equação de pressão podem ser definidas tanto para o contorno externo quanto para o contorno interno, onde o primeiro é constituído pelos contornos de Dirichlet Γ_D com pressão prescrita p_D e de Neumann Γ_N com fluxo prescrito q_N , de maneira que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ e $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$, e o segundo constituído pela pressão prescrita $p_{producao}$ no poço de produção Γ_P e vazão prescrita $q_{injecao}$ no poço de injeção Γ_I , conforme expresso abaixo e ilustrado na Figura 2 (Aziz; Settari, 1979; Helmig, 1997):

$$\begin{aligned} p(\vec{x}, t) &= p_D, \text{ em } \Gamma_D \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= q_N, \text{ em } \Gamma_N \\ p(\vec{x}, t) &= p_{producao}, \text{ em } \Gamma_P \\ \vec{v} \cdot \vec{n} &= q_{injecao}, \text{ em } \Gamma_I \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para a equação de saturação, é necessário definir a saturação da água nos poços de injeção ($\bar{S}_w$) para todo o período de simulação e também a saturação da água para todo o domínio Ω ($\bar{S}_w^0$) no primeiro passo de tempo ($t = t_0$), conforme o seguinte:

$$\begin{aligned} S_w(\vec{x}, t) &= \bar{S}_w \text{ em } \Gamma_I \\ S_w(\vec{x}, 0) &= \bar{S}_w^0 \text{ em } \Omega \end{aligned} \quad (2.40)$$

Figura 2 – Identificação das condições de contorno.



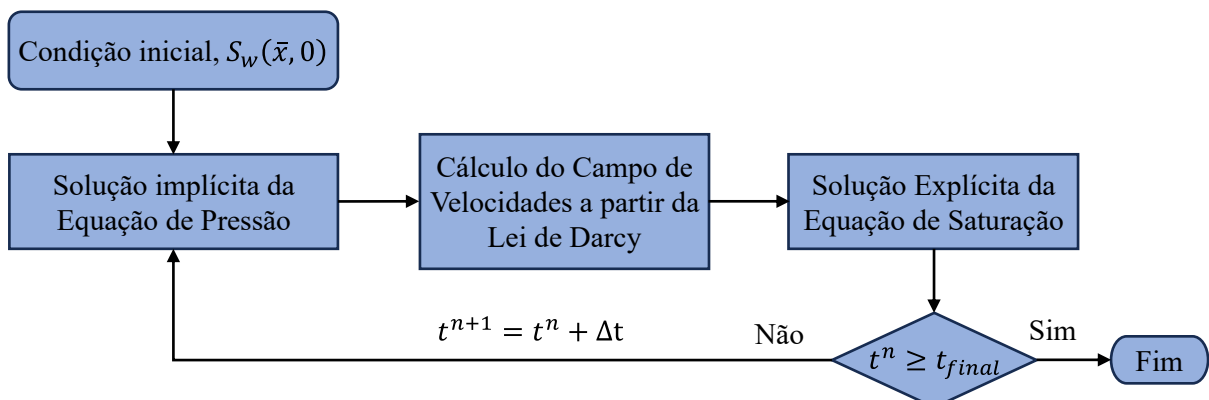
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3 MODELO NUMÉRICO

Neste capítulo, a formulação numérica empregada para solucionar as equações que regem o escoamento em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos é apresentada. O método dos volumes finitos é utilizado para discretizar as equações diferenciais parciais, assegurando a manutenção da massa em cada volume de controle, visto que sua origem está na interpretação física do problema (Carvalho, 2005; Souza, 2015; Moukalled; Mangani; Darwish, 2016). Serão abordados brevemente os princípios teóricos do método e a estratégia de aproximação através de múltiplos pontos, utilizando variados tipos de interpolação dos pontos auxiliares. Na equação de saturação, discretizou-se o termo temporal pelo método de Euler Explícito e o termo espacial pelo método *upwind*, levando em conta os fluxos gerados pela gravidade e pela pressão.

A metodologia de solução adotada fundamenta-se no método *Implicit Pressure Explicit Saturation* (IMPES), inicialmente proposto por Sheldon e Cardwell (1959) e Stone e Garder (1961). O princípio fundamental do método é desacoplar a solução da equação de pressão, tratada implicitamente por meio da combinação das equações de fluxo, da equação de saturação, que é resolvida explicitamente após a atualização do campo de pressão a cada passo de tempo (Aziz; Settari, 1979; Chen; Huan; Ma, 2006). Esse processo é repetido iterativamente até que se atinja o tempo final de simulação ou que algum critério de convergência previamente estabelecido seja violado, conforme ilustrado na Figura 3. O IMPES destaca-se na literatura pela sua eficiência computacional e simplicidade de implementação, sendo amplamente empregado em diversos simuladores comerciais voltados para a modelagem de escoamento em reservatórios de petróleo (Aziz; Settari, 1979; Ewing, 1983; Carvalho, 2005; Chen; Huan; Ma, 2006; Fanchi, 2006).

Figura 3 – Método IMPES.



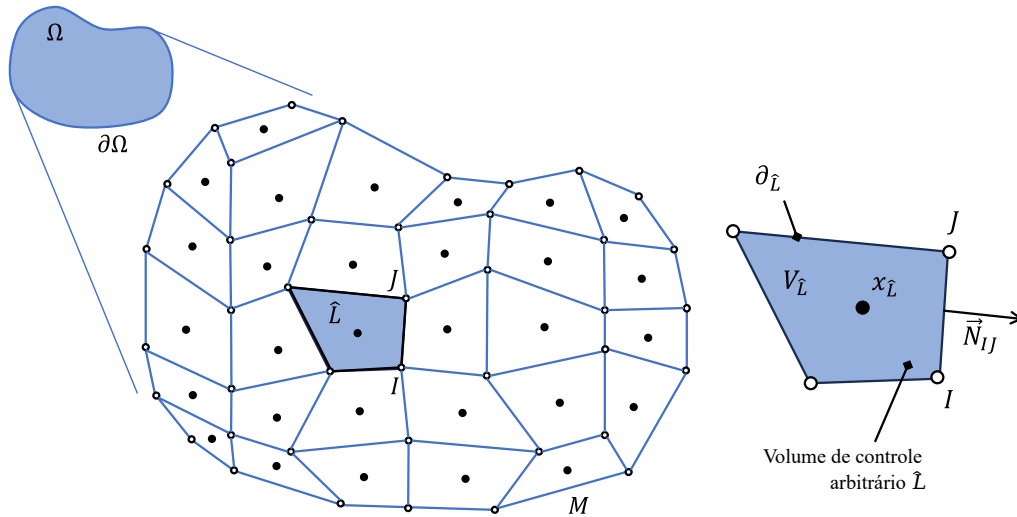
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.1 MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS CENTRADOS NA CÉLULA

As equações governantes enunciadas no capítulo anterior serão resolvidas utilizando métodos de volumes finitos não clássicos, que consistem em dividir o domínio contínuo Ω , em um conjunto de volumes de controle finito, onde a equação está definida, cujos pedaços são chamados de células ou elementos. Esse domínio discretizado envolve faces, centroides e volumes de controle poligonais tipo *star-shape*, conforme pode ser visto na Figura 4. Os conjuntos que caracterizam o domínio discreto são, então (Gao; Wu, 2013; Contreras *et al.*, 2016; Contreras; Lyra; Carvalho, 2019):

- $M = \{\hat{L}\}$ é o conjunto de volumes de controle, tal que $\bigcup_{\hat{L} \in M} \hat{L} = \Omega$
- $E = \{IJ\}$ é o conjunto das faces ou superfícies de controle. Em cada volume de controle $\hat{L} \in M$, existe um subconjunto de faces $E_{\hat{L}}$ tal que $\bigcup_{IJ \in E_{\hat{L}}} IJ = \partial \hat{L}$. O conjunto das faces internas e de contornos são representados respectivamente por $E^{int} = E \cap \Omega$ e $E^{ext} = E \cap \partial \Omega$, sendo o comprimento das faces calculados a partir da norma euclidiana $A_{IJ} = |IJ|$.
- $O = \{x_{\hat{L}}\}_{\hat{L} \in M}$ é o conjunto dos baricentros de cada volume de controle de Ω , onde todo $\hat{L} \in M$ possui um $x_{\hat{L}} \in \hat{L}$.

Figura 4 – Domínio discretizado e volume de controle arbitrário.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE PRESSÃO PELO MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

A partir da integração da equação de pressão dada em (2.19) sobre o domínio Ω , temos:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \int_{\Omega} Q \, dV \quad (3.1)$$

Dividindo o domínio contínuo Ω no domínio discreto M , podemos transformar a integral acima em um somatório de integrais em cada volume de controle, correspondendo a:

$$\sum_{\hat{L} \in M} \int_{\hat{L}} \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \sum_{\hat{L} \in M} \int_{\hat{L}} Q \, dV \quad (3.2)$$

Logo, considerando um volume de controle arbitrário $\hat{L}$ de M e aplicando o teorema da divergência ao termo do lado esquerdo da equação acima, ficamos com:

$$\int_{\partial \hat{L}} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_{\hat{L}} Q \, dV \quad (3.3)$$

Sabendo que o contorno $\partial \hat{L}$ é igual ao somatório de todas as faces IJ analisadas e aplicando o teorema do valor médio aos termos da equação, vamos transformar as integrais em somatórios conforme abaixo:

$$\sum_{IJ \in E_{\hat{L}}} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = \bar{Q}_{\hat{L}} V_{\hat{L}} \quad (3.4)$$

onde temos: $\vec{v}_{IJ}$ como a média da densidade de fluxo para a face IJ ; $\vec{N}_{IJ} = |IJ| \vec{n}_{IJ}$ sendo $\vec{n}_{IJ}$ o vetor unitário normal da face e $|IJ|$ o comprimento dela; $\bar{Q}_{\hat{L}}$ a média do termo fonte ou sumidouro; e $V_{\hat{L}}$ a magnitude do volume de controle analisado.

Na equação (3.4) a vazão $\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ}$ pode ser escrita como:

$$\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} = (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_p + (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_g \quad (3.5)$$

onde a vazão relativa ao campo de pressão através de IJ para o elemento $\hat{L}$ é aproximada pelo teorema do valor médio:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_p \cong \int_{IJ} (-K \nabla p) \cdot \vec{n}_{IJ} \, ds = -\nabla p \cdot K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} \quad (3.6)$$

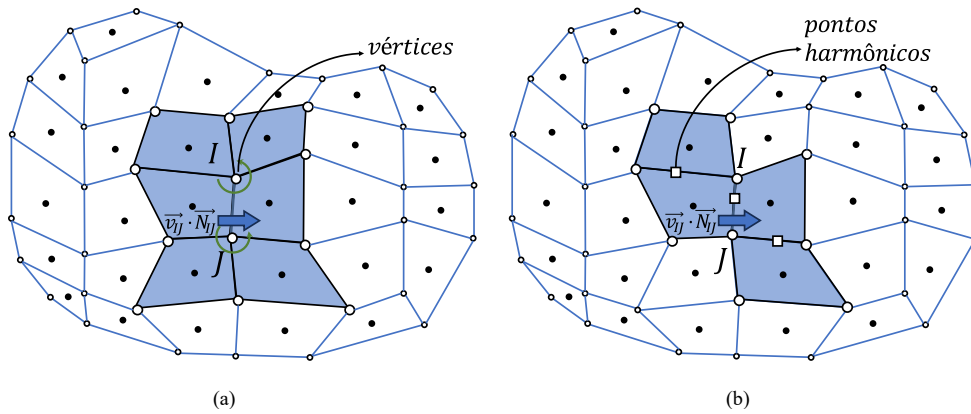
e vazão a respeito do termo gravitacional é dada por:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_g \cong \int_{IJ} (K \mathbf{g}) \cdot \vec{n}_{IJ} \, ds = \mathbf{g} \cdot K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ} \quad (3.7)$$

onde o vetor $K_{\hat{L}}^T \vec{n}_{IJ}$ é o vetor co-normal relativo à face IJ .

A vazão relativa ao campo de pressão, dada na equação (3.6), pode ser aproximada por diferentes métodos de volumes finitos, entre eles lineares e não lineares. Como citado na introdução, utilizamos dois métodos lineares, ambos de volumes finitos com aproximação por múltiplos pontos (MPFA), sendo que o primeiro utiliza o estêncil de diamante (MPFA-D) e o segundo utiliza a interpolação por pontos harmônicos (MPFA-H). Uma ilustração comparativa entre os estênceis dos dois métodos pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 – Representação do estêncil para o calculo do fluxo utilizando o MPFA-D (a) e utilizando o MPFA-H (b).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Algumas características que esses métodos compartilham são (Gao; Wu, 2010; Gao; Wu, 2014; Contreras, 2017):

- O método é localmente conservativo;
- É compatível com a utilização de tensores completos;
- Não depende de descontinuidades ou da topologia da malha;
- Apresenta precisão superior à primeira ordem para soluções suaves;
- Satisfaz o critério de preservação da linearidade.

Por outro lado, a vazão relativa ao termo gravitacional, dada pela equação (3.7), é negligenciada por grande parcela dos métodos numéricos implementados na maioria dos simuladores comerciais. As alternativas mais comuns para os simuladores são considerar o termo constante ou aproximar o fluxo causado por ele de maneira simples, geralmente através de uma aproximação por dois pontos. Nesse sentido, nosso trabalho visa aproximar o fluxo devido ao termo gravitacional de maneira consistente e também apresentar o termo aproximado por dois pontos.

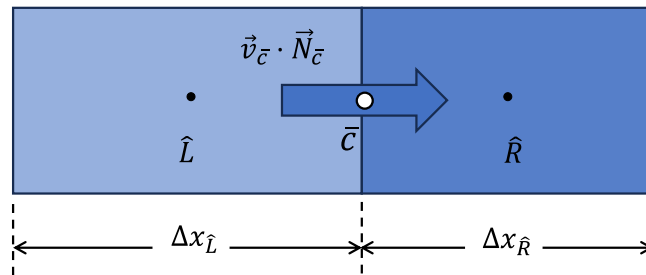
Nas subseções seguintes, descrevemos resumidamente os métodos utilizados para a aproximação tanto do termo devido ao gradiente de pressão quanto o termo devido à gravidade.

3.2.1 Discretização da vazão pelo método de aproximação de fluxo por dois pontos (TPFA)

O método de aproximação de fluxo por dois pontos (TPFA — *Two-Point Flux Aproximation*) foi apresentado a partir dos trabalhos de Aavatsmark *et al.* (1998) e Edwards e Rogers (1998) sobre discretização de escoamentos em meios porosos. Devido à sua simplicidade e baixo custo computacional, o TPFA, mesmo com suas limitações, continua sendo um dos métodos mais empregados em simulações de escoamento em reservatórios de petróleo e simulações de aquíferos.

As equações a seguir baseiam-se na apresentação simplificada da discretização pelo método TPFA, conforme desenvolvida por Souza (2015). Para compreender a formulação, tomamos como referência um domínio unidimensional discretizado por dois volumes de controle centrados na célula, conforme ilustrado na Figura 6. Assumimos, então, que o meio está totalmente saturado por apenas uma única fase e que cada volume de controle pode apresentar diferentes permeabilidades, logo, a permeabilidade na interface entre eles torna-se descontínua. Também, assume-se a existência de um gradiente de pressão que induz o escoamento do volume de controle à esquerda ($\hat{L}$) para o volume à direita ($\hat{R}$). Dessa forma, é importante definir o gradiente de pressão adequadamente, para garantir a continuidade do fluxo na interface entre os volumes vizinhos, assegurando a conservação de massa e a consistência do método numérico.

Figura 6 – Domínio unidimensional.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para isso, três etapas bem definidas são seguidas. Para calcular o fluxo na interface $\bar{c}$, é apresentada a equação para cada volume de controle que compartilha a interface, onde o gradiente da pressão é aproximado utilizando diferenças finitas atrasada, quando analisado o volume de controle da esquerda, e diferenças finita avançada, quando analisado o volume da direita. As equações podem ser observadas a seguir:

$$(\vec{v}_{\bar{c}} \cdot \vec{N}_{\bar{c}})_{\hat{L}} = -K_{\hat{L}} A_{\bar{c}} \left(\frac{p_{\bar{c}} - p_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}/2} \right); \quad (\vec{v}_{\bar{c}} \cdot \vec{N}_{\bar{c}})_{\hat{R}} = K_{\hat{R}} A_{\bar{c}} \left(\frac{p_{\hat{R}} - p_{\bar{c}}}{\Delta x_{\hat{R}}/2} \right) \quad (3.8)$$

onde $p_{\hat{L}}$ e $p_{\hat{R}}$ são as pressões nos pontos de colocação e $p_{\bar{c}}$ a pressão no ponto auxiliar

A segunda etapa acontece através da aplicação do princípio da continuidade, onde:

$$(\vec{v}_{\bar{c}} \cdot \vec{N}_{\bar{c}})_{\hat{L}} + (\vec{v}_{\bar{c}} \cdot \vec{N}_{\bar{c}})_{\hat{R}} = 0 \quad (3.9)$$

que substituindo os valores de (3.8) torna-se:

$$-K_{\hat{L}} A_{\bar{c}} \left(\frac{p_{\bar{c}} - p_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}/2} \right) = -K_{\hat{R}} A_{\bar{c}} \left(\frac{p_{\hat{R}} - p_{\bar{c}}}{\Delta x_{\hat{R}}/2} \right) \quad (3.10)$$

Com isso, vamos encontrar o valor da pressão no ponto auxiliar em função da pressão nos outros dois pontos, abordagem essa que pode também ser estendida para domínios bidimensionais:

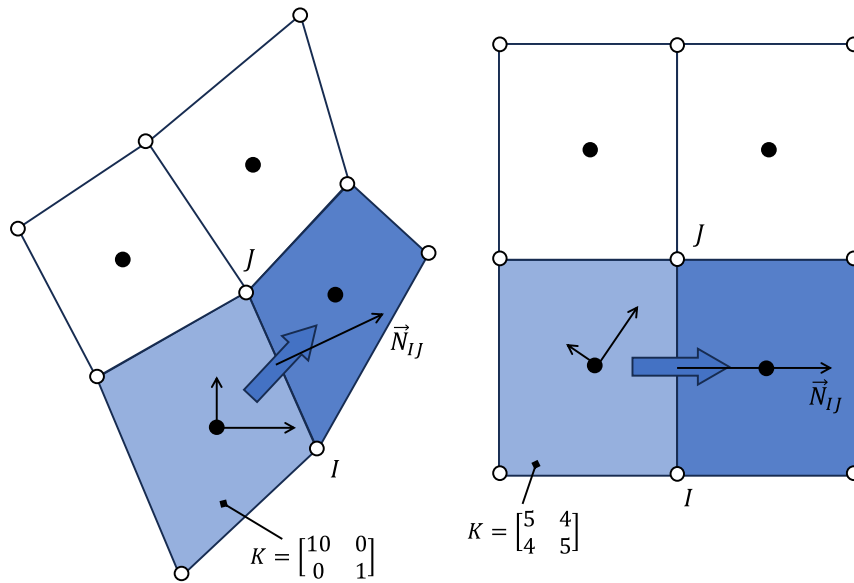
$$p_{\bar{c}} = \frac{\frac{p_{\hat{L}} K_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} + \frac{p_{\hat{R}} K_{\hat{R}}}{\Delta x_{\hat{R}}}}{\frac{K_{\hat{L}}}{\Delta x_{\hat{L}}} + \frac{K_{\hat{R}}}{\Delta x_{\hat{R}}}} \quad (3.11)$$

Por fim, substituímos a equação (3.11) em uma das equações de balanço de (3.8) e encontramos o fluxo único através da superfície avaliada.

$$(\vec{v}_{\bar{c}} \cdot \vec{N}_{\bar{c}}) = -\frac{2K_{\hat{L}} K_{\hat{R}}}{K_{\hat{L}} \Delta x_{\hat{R}} + K_{\hat{R}} \Delta x_{\hat{L}}} A_{\bar{c}} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}}) \quad (3.12)$$

Ainda que o método seja amplamente utilizado devido à sua eficiência, o TPFA apresenta limitações em meios altamente anisotrópicos ou com geometrias não estruturadas, onde a aproximação do fluxo baseada em dois pontos pode introduzir erros significativos (Figura 7).

Figura 7 – Erros de consistência do TPFA.



Fonte: Adaptado de Souza (2015).

Souza (2015) apresentou dois casos em que o método não produz soluções convergentes são quando o tensor de permeabilidade é diagonal mas não é alinhado com a orientação da

malha, e quando malha é cartesiana mas o tensor de permeabilidade não é diagonal, conforme apresentado na Figura 7. Nesses casos, métodos mais avançados, como a aproximação de fluxo por múltiplos pontos (MPFA), tornam-se necessários.

3.2.2 Discretização da vazão pelo método de aproximação de fluxo por múltiplos pontos com estêncil tipo diamante (MPFA-D)

O método Multi-Point Flux Approximation with Diamond Stencil (MPFA-D) foi originalmente desenvolvido com os esforços de Sheng e Yuan (2008), Wu *et al.* (2010) e Gao e Wu (2010), como uma alternativa aos esquemas tradicionais de duas variáveis, e uma generalização ainda maior para esquemas de nove variáveis. No contexto de simulação de reservatórios de petróleo Contreras (2012) e Contreras *et al.* (2016) se destacam como os trabalhos pioneiros. Sua principal motivação reside na necessidade de lidar com heterogeneidades complexas e anisotropia completa em meios porosos.

Para iniciarmos a construção do método, é enunciado o lema descrito em Gao e Wu (2010), Contreras (2012) e Contreras *et al.* (2016) que garante que as soluções obtidas para o campo de pressões sejam lineares por partes:

LEMA 1: Seja p uma função de pressão definida sobre o triângulo $\triangle IJ\hat{L}$ com vértices $I, J, \hat{L}$ ordenados em sentido anti-horário, temos:

$$\vec{\nabla} p \cong \frac{p_I - p_J}{|IJ|} \vec{IJ} + \frac{\Re \vec{IJ}}{|IJ|^2} [(p_J - p_I) \cotg \angle J\hat{L}I + (p_{\hat{L}} - p_I) \cotg \angle IJ\hat{L}] \quad (3.13)$$

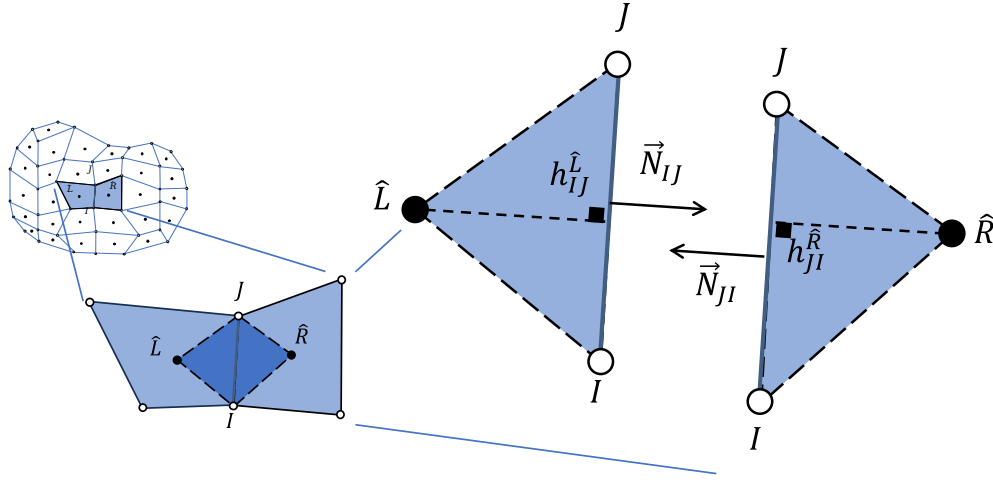
onde $\Re$ é uma matriz de rotação em 90° no sentido anti-horário, expressa para um espaço bidimensional por:

$$\Re = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad (3.14)$$

Na Figura 8 estão representados as células de diamante e outros parâmetros relevantes ao método que são definidos abaixo para um domínio bidimensional:

- $\hat{L}$ e $\hat{R}$ representam os elementos à esquerda e à direita da face analisada, respectivamente;
- $\vec{N}_{IJ} = \Re \vec{IJ}$, $\vec{N}_{JI} = \Re \vec{JI}$ e $\vec{N}_{IJ} + \vec{N}_{JI} = 0$, sendo esses os vetores áreas normais às faces;
- $h_{IJ}^{\hat{L}}$ e $h_{IJ}^{\hat{R}}$ representam as alturas dos triângulos da esquerda e da direita;
- $p_{\hat{L}}$ e $p_{\hat{R}}$ são as pressões nos baricentros das células $\hat{L}$ e $\hat{R}$, respectivamente; e
- p_I e p_J são as pressões nos vértices I e J .

Figura 8 – Volumes de controle da esquerda e da direita com os triângulos auxiliares em evidência.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Assim, podemos reescrever o lema para se adequar aos nossos parâmetros:

$$\vec{\nabla} p \cong \frac{\vec{N}_{IJ}}{|\vec{IJ}|} [(p_I - p_{\hat{L}}) \cotg \angle IJ\hat{L} + (p_J - p_{\hat{L}}) \cotg \angle \hat{L}IJ] + (p_J - p_I) \frac{\vec{IJ}}{|\vec{IJ}|} \quad (3.15)$$

Definimos que o tensor completo de permeabilidade K projetado na face IJ é uma combinação linear das permeabilidades normal e tangencial, como mostrado a seguir:

$$K_{IJ,\gamma} = K_{IJ,\gamma}^{(t)} \vec{IJ} + K_{IJ,\gamma}^{(n)} \vec{N}_{IJ} \quad (3.16)$$

onde γ representa os elementos $\hat{L}$ ou $\hat{R}$ e as permeabilidades são dadas após manipulações algébricas por:

$$K_{IJ,\gamma}^{(t)} = \frac{\vec{N}_{IJ}^T K_{IJ,\gamma} \vec{IJ}}{|\vec{IJ}|^2}; \quad K_{IJ,\gamma}^{(n)} = \frac{\vec{N}_{IJ}^T K_{IJ,\gamma} \vec{N}_{IJ}}{|\vec{IJ}|^2} \quad (3.17)$$

Ao analisar os triângulos da figura 8, podemos expressar as relações trigonométricas presentes em (3.15) por

$$\cotg \angle IJ\hat{L} = \frac{\vec{J\hat{L}} \cdot \vec{JI}}{|\vec{JI}| h_{IJ}^{\hat{L}}}; \quad \cotg \angle \hat{L}IJ = \frac{\vec{I\hat{L}} \cdot \vec{IJ}}{|\vec{IJ}| h_{IJ}^{\hat{L}}} \quad (3.18)$$

Com isso, utilizando a equação (3.6) e adicionando o termo do gradiente de pressão dado por (3.15) e realizando algumas manipulações algébricas, chegamos à expressão para o $\triangle IJ\hat{L}$:

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \cong K_{IJ,\hat{L}}^{(n)} ((p_I - p_{\hat{L}}) \cotg \angle IJ\hat{L} + (p_J - p_{\hat{L}}) \cotg \angle \hat{L}IJ) - K_{IJ,\hat{L}}^{(t)} (p_J - p_I) \quad (3.19)$$

que substituindo os valores obtidos de (3.17) a (3.18) se torna:

$$\frac{h_{IJ}^{\hat{L}}}{K_{IJ,\hat{L}}^{(n)}} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} \cong -\frac{1}{|\vec{IJ}|} \left((p_I - p_{\hat{L}}) \frac{\vec{J\hat{L}} \cdot \vec{JI}}{|\vec{IJ}|} + (p_J - p_{\hat{L}}) \frac{\vec{I\hat{L}} \cdot \vec{IJ}}{|\vec{IJ}|} \right) - (p_J - p_I) \frac{K_{IJ,\hat{L}}^{(t)}}{K_{IJ,\hat{L}}^{(n)}} h_{IJ}^{\hat{L}} \quad (3.20)$$

Ao realizarmos as mesmas operações para o $\triangle IJR$, alcançamos uma expressão semelhante:

$$\frac{h_{JI}^{\hat{R}}}{K_{JI,\hat{R}}^{(n)}} \vec{v}_{JI}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \cong -\frac{1}{|\vec{J}\vec{I}|} \left((p_J - p_{\hat{R}}) \frac{\vec{J}\vec{R} \cdot \vec{J}\vec{I}}{|\vec{J}\vec{I}|} + (p_I - p_{\hat{R}}) \frac{\vec{I}\vec{R} \cdot \vec{I}\vec{J}}{|\vec{J}\vec{I}|} \right) - (p_I - p_J) \frac{K_{JI,\hat{R}}^{(t)}}{K_{JI,\hat{R}}^{(n)}} h_{JI}^{\hat{R}} \quad (3.21)$$

Considerando a continuidade dos fluxos na face IJ , etapa necessária para garantir uma aproximação consistente do fluxo para o método dos volumes finitos, temos:

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{N}_{IJ} = -\vec{v}_{JI}^{\hat{R}} \cdot \vec{N}_{JI} \quad (3.22)$$

Por fim, através da equação (3.22), somando os dois fluxos dados pelas equações (3.20) e (3.21), chegamos à expressão do fluxo único através da face IJ :

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_p = -K_{IJ}^{(1)} |\vec{I}\vec{J}| \left[p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}} - D_{IJ}^{(1)} (p_J - p_I) \right] \quad (3.23)$$

onde as projeções nas direções normal e tangencial do tensor de permeabilidades, $K_{IJ}^{(1)}$ e $D_{IJ}^{(1)}$ respectivamente, são definidas como:

$$K_{IJ}^{(1)} = \frac{K_{IJ,\hat{L}}^{(n)} K_{JI,\hat{R}}^{(n)}}{K_{IJ,\hat{L}}^{(n)} h_{JI}^{\hat{R}} + K_{JI,\hat{R}}^{(n)} h_{IJ}^{\hat{L}}}; \quad D_{IJ}^{(1)} = \frac{\vec{\hat{L}}\vec{\hat{R}} \cdot \vec{I}\vec{J}}{|\vec{I}\vec{J}|^2} - \frac{1}{|\vec{I}\vec{J}|} \left(\frac{K_{IJ,\hat{L}}^{(t)}}{K_{IJ,\hat{L}}^{(n)}} h_{IJ}^{\hat{L}} + \frac{K_{JI,\hat{R}}^{(t)}}{K_{JI,\hat{R}}^{(n)}} h_{JI}^{\hat{R}} \right) \quad (3.24)$$

3.2.2.1 Tratamento dos Fluxos no Contorno

Para garantir um tratamento adequado das condições de contorno, onde os casos são expressos em (2.39), os fluxos devem ser determinados conforme o tipo de condição imposta em cada face do contorno. A expressão do fluxo para uma face sob a condição de Dirichlet, com pressões prescritas dadas por $u_D(I)$ e $u_D(J)$, é dada a partir da equação (3.20):

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_p = \frac{-K_{IJ}^{(n)}}{h_{IJ}^{\hat{L}} |\vec{I}\vec{J}|} \left((\vec{J}\vec{L} \cdot \vec{J}\vec{I}) u_D(I) + (\vec{I}\vec{L} \cdot \vec{I}\vec{J}) u_D(J) - |\vec{I}\vec{J}|^2 p_{\hat{L}} \right) - (u_D(J) - u_D(I)) K_{IJ}^{(t)} \quad (3.25)$$

De forma similar, a expressão de fluxo para uma face sob a condição de Neumann, com fluxo prescrito dado por u_N representando a velocidade normal da face IJ , é dada por:

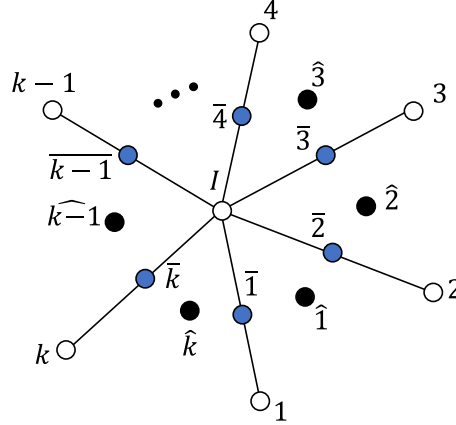
$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_p = u_N |\vec{I}\vec{J}| \quad (3.26)$$

3.2.2.2 Interpolação das Pressões nos Vértices

Nesta seção, mostramos brevemente como as pressões nos nós auxiliares, I e J , podem ser expressas através dos graus de liberdade do sistema, visto que a equação (3.23) depende

apenas dos dois nós. Assim, uma solução para o problema consiste em definir a pressão nos nós I e J como uma combinação linear das pressões das células adjacentes a esses nós, como é representada na Figura 9.

Figura 9 – Nós auxiliares na vizinhança de um vértice I .



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Gao e Wu (2010) propuseram dois algoritmos de interpolação de vértices que preservam a linearidade, onde será utilizado o segundo, nomeado como *Linearity- Preserving Explicit Weighted 2* (LPEW2). A interpolação acontece a partir de pesos que não dependem das descon- tinuidades do material e do tipo de malha, além de representar campos lineares exatamente por partes (Contreras *et al.*, 2016). Para o caso mais geral, para um vértice I com $n(I)$ elementos conectados, o peso w_k é atribuído à pressão de cada elemento p_k como mostra a equação (3.27):

$$p_I = \sum_{k=1}^{n(I)} w_k p_k \quad (3.27)$$

A expressão dos pesos para o LPEW2 é definida como:

$$w_k = \frac{\psi_k}{\sum_{k=1}^{n(I)} \psi_k} \quad (3.28)$$

onde as constantes são:

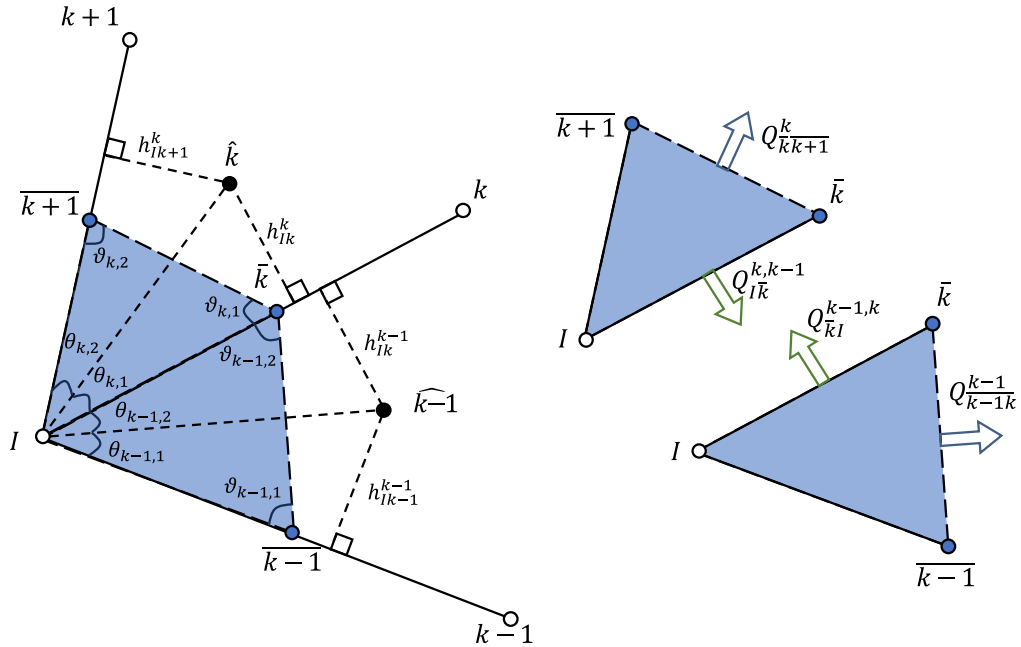
$$\begin{aligned} \psi_k &= K_{\hat{k},1}^{(n)} \eta_{k,1} \xi_k + \xi_{k+1} K_{\hat{k},2}^{(n)} \eta_{k,2}; \\ \xi_k &= \frac{\bar{K}_{k-1}^{(t)} - \bar{K}_k^{(t)} + \bar{K}_{k-1}^{(n)} \cotg \vartheta_{k-1,1} + \bar{K}_k^{(n)} \cotg \vartheta_{k,2}}{K_{k-1,2}^{(n)} \cotg \theta_{k-1,2} + K_{k,1}^{(n)} \cotg \theta_{k,1} - K_{k-1,2}^{(t)} + K_{k,1}^{(t)}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para sua determinação, consideram-se os parâmetros físico-geométricos ilustrados na Figura 10, onde $\hat{k}$ indica o centroide do volume de controle e $\bar{k}$ o centroide da face:

$$\begin{aligned} \eta_{k,1} &= \frac{|\vec{Ik}|}{h_{Ik}^k}; \quad \eta_{k,2} = \frac{|\vec{Ik+1}|}{h_{Ik+1}^k}; \quad K_{\hat{\alpha},i}^{(n)} = \frac{\vec{N}_{I\bar{t}}^T \lambda_{\hat{\alpha}} \vec{N}_{I\bar{t}}}{|\vec{I\bar{t}}|^2}; \quad K_{\hat{\alpha},i}^{(t)} = \frac{\vec{N}_{I\bar{t}}^T \lambda_{\hat{\alpha}} \vec{I\bar{t}}}{|\vec{I\bar{t}}|^2}; \\ \bar{K}_{\hat{\alpha}}^{(n)} &= \frac{\vec{N}_{\bar{\alpha}\alpha+1}^T \lambda_{\hat{\alpha}} \vec{N}_{\bar{\alpha}\alpha+1}}{|\vec{\bar{\alpha}\alpha+1}|^2}; \quad \bar{K}_{\hat{\alpha}}^{(t)} = \frac{\vec{N}_{\bar{\alpha}\alpha+1}^T \vec{\bar{\alpha}\alpha+1}}{|\vec{\bar{\alpha}\alpha+1}|^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $t = \alpha + i - 1$, $i = 1, 2$ e $\alpha = 1, 2, \dots, n(I)$

Figura 10 – Representação dos elementos geométricos e dos fluxos locais necessários para a derivação do LPEW-2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Os seguintes trabalhos apresentam maiores esclarecimentos sobre o método utilizado: Gao e Wu (2010), Contreras (2012), Queiroz *et al.* (2013), Contreras *et al.* (2016), Contreras, Lyra e Carvalho (2019), Contreras *et al.* (2021) e Contreras *et al.* (2023).

3.2.3 Discretização da vazão pelo método de aproximação de fluxo por múltiplos pontos baseado em pontos harmônicos (MPFA-H)

O método *Multi-Point Flux Approximation with Harmonic Points* (MPFA-H) teve seu início com Gao e Wu (2014), e seus estudos sobre problemas de difusão em meios heterogêneos e anisotrópicos sobre malhas poligonais quaisquer, e foi desenvolvido e aprimorado no contexto de

simulação de reservatórios de petróleo com Contreras (2017), Contreras *et al.* (2017), Contreras *et al.* (2023) e Silva *et al.* (2024).

As variáveis do método se localizam nos volumes de controle e fundamenta-se na preservação da linearidade e no uso dos pontos de média harmônica localizados nas superfícies de controle como pontos auxiliares. Os pontos harmônicos foram propostos inicialmente por Agélas, Eymard e Herbin (2009) e permitem que a expressão de fluxo processe um pequeno estêncil, visto que cada superfície de controle possui um ponto harmônico associado a ela.

Para iniciar a derivação do método, vamos enunciar um lema presente em Contreras (2017) que diz respeito ao vetor co-normal relativo à face IJ , presente nas equações (3.6) e (3.7):

LEMA 2: Para cada face $IJ \in E_L$, é sempre possível determinar dois pontos auxiliares $x_{L,i(IJ)}$ e $x_{L,j(IJ)}$, que não necessariamente pertencem à referida face, de modo que os vetores $\overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}}$ e $\overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}}$ sejam linearmente independentes. Isso resulta na existência de duas constantes $\alpha_{L,i(IJ)}$ e $\alpha_{L,j(IJ)}$, associadas a esses pontos auxiliares, tal que:

$$K_L^T \vec{n}_{IJ} = \alpha_{L,i(IJ)} \overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}} + \alpha_{L,j(IJ)} \overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}} \quad (3.31)$$

onde as constantes são dadas pelas razões dos produtos mistos conforme a seguir:

$$\alpha_{L,i(IJ)} = \frac{\left(K_L^T \vec{n}_{IJ}, \overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}}, \vec{e}_z \right)}{\left(\overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}}, \overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}}, \vec{e}_z \right)} \quad (3.32)$$

$$\alpha_{L,j(IJ)} = \frac{\left(K_L^T \vec{n}_{IJ}, \overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}}, \vec{e}_z \right)}{\left(\overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}}, \overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}}, \vec{e}_z \right)} \quad (3.33)$$

sendo $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ o produto misto dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$; e $\vec{e}_z$ o vetor unitário no eixo z .

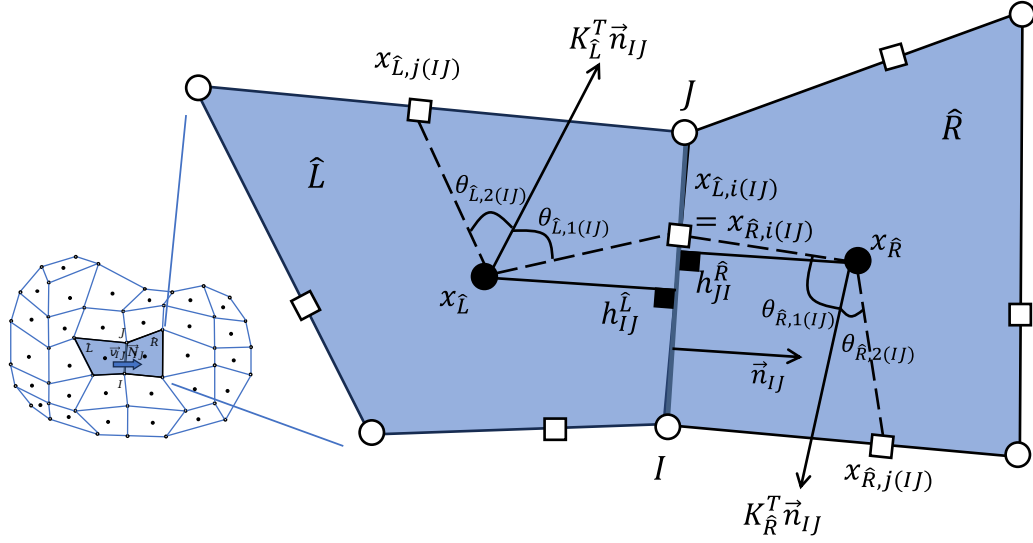
Os elementos geométricos do método podem ser visualizados na Figura 11. A fim de garantir que as constantes acima sejam não-negativas, ou seja $\alpha_{L,i(IJ)} \geq 0$ e $\alpha_{L,j(IJ)} \geq 0$, as condições a seguir precisam ser satisfeitas:

- **Condição 1:** Os ângulos $\theta_{L,1(IJ)}$, formado entre $K_L^T \vec{n}_{IJ}$ e $x_{L,i(IJ)}$, e $\theta_{L,2(IJ)}$, formado entre $K_L^T \vec{n}_{IJ}$ e $x_{L,j(IJ)}$, devem obedecer a $0 \leq \theta_{L,1(IJ)}, \theta_{L,2(IJ)} \leq \pi$ e $0 \leq \theta_{L,1(IJ)} + \theta_{L,2(IJ)} \leq \pi$
- **Condição 2:** O sinal positivo dos produtos vetoriais devem ser satisfeitos, $\overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}} \times K_L^T \vec{n}_{IJ} \geq 0$ e $K_L^T \vec{n}_{IJ} \times \overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}} \geq 0$.

Substituindo a equação (3.31) no termo difusivo da equação (3.6), obtemos:

$$\nabla p \cdot K_L^T \vec{n}_{IJ} = \alpha_{L,i(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_L x_{L,i(IJ)}} + \alpha_{L,j(IJ)} \nabla p \cdot \overrightarrow{x_L x_{L,j(IJ)}} \quad (3.34)$$

Figura 11 – Representação dos elementos físicos e geométricos do método MPFA-H.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O gradiente da pressão ∇p é aproximado utilizando diferenças finitas ao longo da direção dos vetores $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},i(IJ)}}$ e $\overrightarrow{x_{\hat{L}}x_{\hat{L},j(IJ)}}$, assim, escrevemos a expressão do fluxo para ambos os elementos que compartilham a face como:

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} = \lambda_{IJ} \left[\alpha_{\hat{L},i(IJ)} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},i(IJ)}) + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{L},j(IJ)}) \right] \quad (3.35)$$

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{n}_{IJ} = \lambda_{IJ} \left[\alpha_{\hat{R},i(IJ)} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{R},i(IJ)}) + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} (p_{\hat{R}} - p_{\hat{R},j(IJ)}) \right] \quad (3.36)$$

onde $p_{\hat{\gamma}}$ é o valor da pressão no baricentro $x_{\hat{\gamma}}$; e $p_{\hat{\gamma},i(IJ)}$ e $p_{\hat{\gamma},j(IJ)}$ os valores de pressão nos pontos harmônicos $x_{\hat{\gamma},i(IJ)}$ e $x_{\hat{\gamma},j(IJ)}$, respectivamente, com $\gamma = L, R$.

Com o intuito de simplificar a expressão, os fluxos unilaterais são reescritos como:

$$\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} = \lambda_{IJ} (A_{\hat{L}(IJ)} p_{\hat{L}} - D_{\hat{L}(IJ)}); \quad \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{n}_{IJ} = \lambda_{IJ} (D_{\hat{R}(IJ)} - A_{\hat{R}(IJ)} p_{\hat{R}}) \quad (3.37)$$

onde as constantes são dadas por:

$$A_{\hat{L}(IJ)} = (\alpha_{\hat{L},i(IJ)} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)}), \quad A_{\hat{R}(IJ)} = (\alpha_{\hat{R},i(IJ)} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)}) \quad (3.38)$$

$$D_{\hat{L}(IJ)} = (\alpha_{\hat{L},i(IJ)} p_{\hat{L},i(IJ)} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} p_{\hat{L},j(IJ)}), \quad D_{\hat{R}(IJ)} = (\alpha_{\hat{R},i(IJ)} p_{\hat{R},i(IJ)} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} p_{\hat{R},j(IJ)}) \quad (3.39)$$

De modo a garantir a conservação local, o fluxo único sobre a face IJ é definido como a combinação convexa dos fluxos unilaterais dados na equação (3.37), usando os pesos $w_{\hat{L}(IJ)}$ e $w_{\hat{R}(IJ)}$:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_p = w_{\hat{R}(IJ)} \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} - w_{\hat{L}(IJ)} \vec{v}_{IJ}^{\hat{R}} \cdot \vec{n}_{IJ} \quad (3.40)$$

Substituindo os valores e realizando algumas manipulações algébricas, assume-se a forma:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_p = \lambda_{IJ} |IJ| \left[\mathcal{A}_{\hat{L}(IJ)} p_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R}(IJ)} p_{\hat{R}} + \mathcal{D}_{IJ} \right] \quad (3.41)$$

com:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\hat{L}(IJ)} &= w_{\hat{R}(IJ)} A_{\hat{L}(IJ)} = w_{\hat{R}(IJ)} \left(\alpha_{\hat{L},i(IJ)} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \right) \\ \mathcal{A}_{\hat{R}(IJ)} &= w_{\hat{L}(IJ)} A_{\hat{R}(IJ)} = w_{\hat{L}(IJ)} \left(\alpha_{\hat{R},i(IJ)} + \alpha_{\hat{R},j(IJ)} \right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\mathcal{D}_{IJ} = \sum_{\gamma=i,j} \left(w_{\hat{L}(IJ)} \alpha_{\hat{R},\gamma(IJ)} p_{\hat{R},\gamma(IJ)} - w_{\hat{R}(IJ)} \alpha_{\hat{L},\gamma(IJ)} p_{\hat{L},\gamma(IJ)} \right) \quad (3.43)$$

3.2.3.1 Tratamento dos Fluxos no Contorno

Quando a face analisada pertence ao contorno de Dirichlet, o fluxo é aproximado pelo fluxo unilateral conforme a equação (3.37):

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_p = \vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ} \quad (3.44)$$

onde a pressão no ponto harmônico referente à IJ é conhecida e tem o valor prescrito dado por:

$$p_{\hat{L},i(IJ)} = u_D \quad \text{ou} \quad p_{\hat{L},j(IJ)} = u_D \quad (3.45)$$

No contorno de Neumann, o fluxo através de IJ tem valor prescrito e é dado por:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_p = u_N \left| \vec{IJ} \right| \quad (3.46)$$

3.2.3.2 Interpolação dos Pontos Harmônicos

Os pontos harmônicos são pontos auxiliares tal que, seja um ponto harmônico x_{IJ} pertencente à face IJ o valor da pressão nele pode ser expresso exclusivamente como uma combinação das pressões dos volumes vizinhos, $p_{\hat{L}}$ e $p_{\hat{R}}$. Definindo os componentes geométricos, sendo dois volumes de controle vizinhos, $\hat{L}$ e $\hat{R}$, que compartilham a face IJ , cujos tensores de permeabilidade são $K_{\hat{L}}$ e $K_{\hat{R}}$ e os baricentros desses volumes são $x_{\hat{L}}$ e $x_{\hat{R}}$, conforme ilustrado na Figura 11, os pontos harmônicos são calculados por (Agélas; Eymard; Herbin, 2009; Wu; Gao; Dai, 2012; Eymard; Guichard; Herbin, 2012; Gao; Wu, 2013; Contreras, 2017):

$$x_{\hat{L},i(IJ)} = \frac{h_{IJ}^{\hat{R}} K_{\hat{L}}^{(n)} x_{\hat{L}} + h_{IJ}^{\hat{L}} K_{\hat{R}}^{(n)} x_{\hat{R}} + h_{IJ}^{\hat{L}} h_{IJ}^{\hat{R}} (K_{\hat{L}}^T - K_{\hat{R}}^T) \vec{n}_{IJ}}{h_{IJ}^{\hat{R}} K_{\hat{L}}^{(n)} + h_{IJ}^{\hat{L}} K_{\hat{R}}^{(n)}} \quad (3.47)$$

onde $K_{\hat{L}}^{(n)} = \vec{n}_{IJ}^T K_{\hat{L}} \vec{n}_{IJ}$ e $K_{\hat{R}}^{(n)} = \vec{n}_{JI}^T K_{\hat{L}} \vec{n}_{JI}$

Complementar a isso, a pressão no ponto harmônico é dada por:

$$P_{IJ} = w_{\hat{L}(IJ)} P_{\hat{L}} + w_{\hat{R}(IJ)} P_{\hat{R}} \quad (3.48)$$

sendo:

$$w_{\hat{L}(IJ)} = \frac{h_{IJ}^{\hat{R}} K_{\hat{L}}^{(n)}}{h_{IJ}^{\hat{R}} K_{\hat{L}}^{(n)} + h_{IJ}^{\hat{L}} K_{\hat{R}}^{(n)}}; \quad w_{\hat{R}(IJ)} = 1 - w_{\hat{L}(IJ)} \quad (3.49)$$

3.3 DISCRETIZAÇÃO DO TERMO GRAVITACIONAL

A formulação do termo gravitacional, dado pela expressão $(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_{\mathbf{g}} \cong \int_{IJ} (K \mathbf{g}) \cdot \vec{n}_{IJ} ds$ (equação (3.7)), desempenha papel importante na modelagem do escoamento multifásico em meios porosos, influenciando na precisão das simulações. Nesta seção, são apresentadas duas abordagens para sua discretização: a formulação padrão, já utilizada na literatura (Verdon; Woods, 2007; Negara; Salama; Sun, 2015; Starnoni *et al.*, 2019; Fan; Salama; Sun, 2020), e a formulação consistente, desenvolvida neste trabalho para incorporar aos métodos de aproximação por múltiplos pontos, garantindo maior coerência entre os fluxos advectivos e gravitacionais.

Um ponto de destaque é que, como os valores escalares da gravidade são conhecidos para os vértices e os centróides, esse termo aproximado não afeta a matriz de transmissibilidade originada pela vazão relativa ao campo de pressão, apenas o vetor dos termos independentes. Os valores escalares da gravidade são definidos de tal forma que a seguinte condição seja satisfeita:

$$\mathbf{g} = -\nabla p \quad (3.50)$$

onde o campo de pressão é uma função potencial do campo gravitacional. A forma utilizada para encontrar a força gravitacional escalar está descrita no Apêndice A.

A seguir, serão apresentadas as expressões matemáticas utilizadas na discretização de cada abordagem do termo gravitacional.

3.3.1 Discretização padrão do termo gravitacional

A aproximação clássica para o fluxo causado devido ao termo gravitacional foi escrita e testada por Starnoni *et al.* (2019) e utiliza uma aproximação de dois pontos. Os parâmetros geométricos necessários para a aproximação podem ser vistos na Figura 12 e as equações são

definidas a seguir:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_{\mathbf{g}} = \bar{K}_{IJ} \bar{g}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} \quad (3.51)$$

onde $\bar{K}_{IJ}$ é a média harmônica ponderada entre os dois volumes de controle adjacentes, sendo ponderados pelas distâncias $d_{IJ,\hat{\gamma}}$ entre o centroide do volume de controle $x_{\hat{\gamma}}$ e o centroide da face x_{IJ} analisados, com $\gamma = \hat{L}, \hat{R}$, representados pelas seguintes equações:

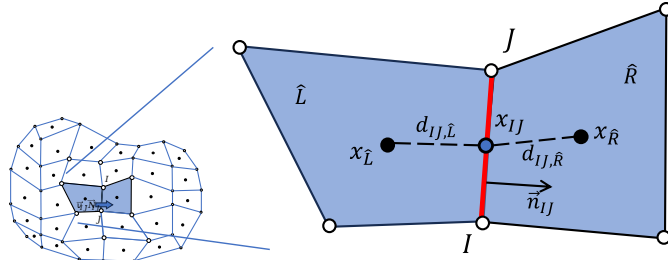
$$d_{IJ,\hat{\gamma}} = |x_{IJ} - x_{\hat{\gamma}}| \quad (3.52)$$

$$\bar{K}_{IJ} = (d_{IJ,\hat{L}} K_{\hat{L}}^{-1} + d_{IJ,\hat{R}} K_{\hat{R}}^{-1})^{-1} \quad (3.53)$$

e $\bar{g}_{IJ}$ a média aritmética ponderada do vetor gravidade entre os volumes de controle adjacentes dada por:

$$\bar{g}_{IJ} = d_{IJ,\hat{L}} \vec{g}_{\hat{L}} + d_{IJ,\hat{R}} \vec{g}_{\hat{R}} \quad (3.54)$$

Figura 12 – Parâmetros utilizados na discretização do termo gravitacional padrão.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

3.3.2 Formulação do termo gravitacional consistente

A formulação aqui empregada para a abordagem consistente segue um processo semelhante ao empregado na discretização do fluxo de pressão. A construção do termo é derivada a partir da interpolação das gravidades escalares associadas aos pontos auxiliares de cada método e suas devidas ponderações com os pesos e constantes que representam as características físicas e geométricas do meio computacional estudado.

3.3.2.1 Discretização do termo gravitacional utilizando o MPFA-D

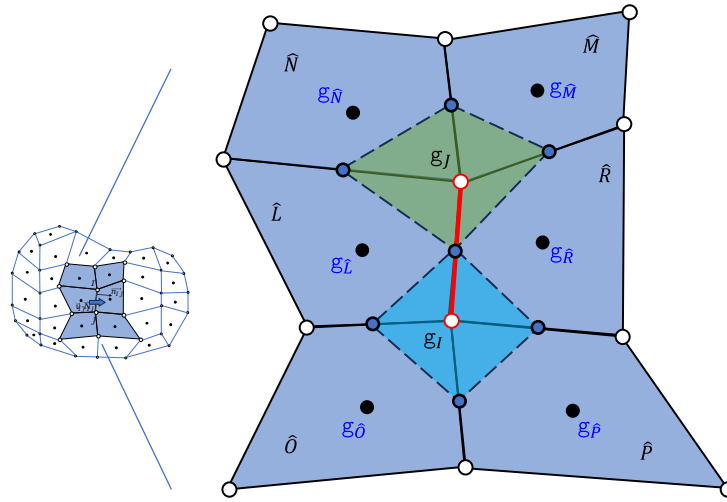
No método MPFA-D, os pontos auxiliares utilizados para o cálculo do fluxo gravitacional localizam-se nos vértices do estêncil. Embora os valores do campo gravitacional sejam previamente conhecidos nesses pontos, é necessário realizar uma interpolação para determinar sua

contribuição no cálculo do fluxo total. Essa interpolação é conduzida com base na estratégia *Linearity-Preserving Explicit Weighting* (LPEW), a qual assegura a preservação da linearidade da variável interpolada ao longo do domínio. As expressões correspondentes à interpolação são apresentadas a seguir:

$$g_I = \sum_{k=1}^{n(I)} w_k g_k \quad (3.55)$$

Essa formulação segue a mesma estrutura adotada para a interpolação da pressão, utilizando as mesmas constantes definidas nas Equações (3.29) e (3.30). A Figura 13 ilustra a área de influência associada a cada vértice envolvido no processo de interpolação.

Figura 13 – Parâmetros utilizados na discretização do termo gravitacional consistente para o método MPFA-D.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando a face analisada pertence ao contorno de Neumann, o fluxo através de IJ tem valor prescrito u_N e é dado por:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_{\mathbf{g}} = u_N \left| \vec{IJ} \right| \quad (3.56)$$

Por sua vez, se a face está submetida à condição de contorno de Dirichlet, o fluxo é aproximado conforme segue:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_{\mathbf{g}} = \left(\Re \vec{IJ} \cdot K_{\hat{L}} \right) \cdot g_{\hat{L}} \quad (3.57)$$

onde $\Re$ é a matriz de rotação definida em (3.14); $\vec{IJ}$ é o vetor que indica a face; $K_{\hat{L}}$ é a permeabilidade do elemento que pertence IJ ; e $g_{\hat{L}}$ é a gravidade no centroíde do elemento $\hat{L}$.

Para as faces no interior da malha, o valor do fluxo gravitacional é obtido de forma semelhante à equação (3.23):

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_{\mathbf{g}} = K_{IJ}^{(1)} \left| \vec{IJ} \right| \left[g_{\hat{R}} - g_{\hat{L}} - D_{IJ}^{(1)} (g_J - g_I) \right] \quad (3.58)$$

onde as projeções nas direções normal e tangencial do tensor de permeabilidades, $K_{IJ}^{(1)}$ e $D_{IJ}^{(1)}$ respectivamente, são definidas em (3.24); $g_{\hat{L}}$ e $g_{\hat{R}}$ são as gravidades conhecidas para os elementos da esquerda e direita de IJ ; e g_I e g_J são as gravidades conhecidas nos vértices de IJ .

Dessa forma, o fluxo total consistente dado na equação (3.5) para o método MPFA-D é:

$$\begin{aligned}\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} &= (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_p + (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_g \\ \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} &= -K_{IJ}^{(1)} \left| \vec{IJ} \right| \left[p_{\hat{R}} - p_{\hat{L}} - D_{IJ}^{(1)} (p_J - p_I) \right] + K_{IJ}^{(1)} \left| \vec{IJ} \right| \left[g_{\hat{R}} - g_{\hat{L}} - D_{IJ}^{(1)} (g_J - g_I) \right]\end{aligned}\quad (3.59)$$

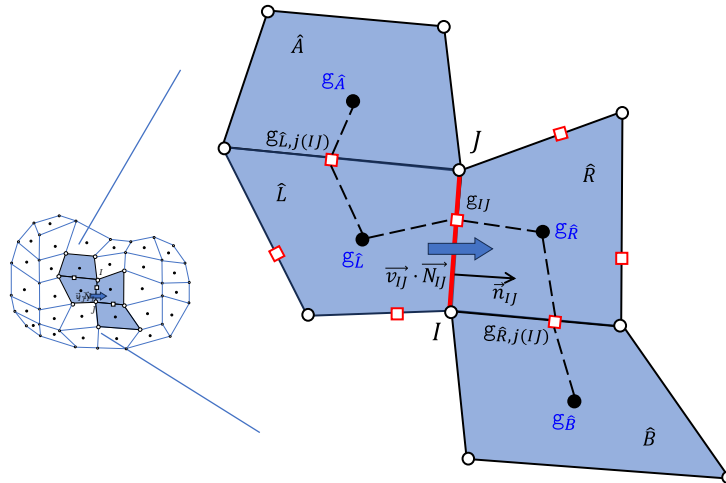
3.3.2.2 Discretização do termo gravitacional pelo método MPFA-H

Para o MPFA-H, os pontos auxiliares localizam-se nos pontos harmônicos. Dessa forma, é necessário calcular o valor da gravidade em cada um desses pontos analisados. Esse cálculo é realizado através da combinação convexa como segue:

$$\begin{aligned}g_{IJ} &= w_{\hat{L}(IJ)} g_{\hat{L}} + w_{\hat{R}(IJ)} g_{\hat{R}}, \quad g_{IJ} = g_{\hat{L},i(IJ)} = g_{\hat{R},i(IJ)} \\ g_{\hat{L},j(IJ)} &= w_{\hat{L},j(IJ)} g_{\hat{L}} + w_{\hat{A},j(IJ)} g_{\hat{A}}, \quad g_{\hat{R},j(IJ)} = w_{\hat{R},j(IJ)} g_{\hat{R}} + w_{\hat{B},j(IJ)} g_{\hat{B}}\end{aligned}\quad (3.60)$$

onde a localização de cada ponto g pode ser visualizada através da Figura 14; e os pesos da combinação são calculados como na equação (3.49).

Figura 14 – Parâmetros utilizados na discretização do termo gravitacional consistente para o método MPFA-H.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Quando a face analisada pertence ao contorno de Dirichlet, o fluxo é aproximado pelo fluxo unilateral de forma análoga à equação (3.37) para o fluxo devido à pressão:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_g = (\vec{v}_{IJ}^{\hat{L}} \cdot \vec{n}_{IJ})_g = \lambda_{IJ} \left(A_{\hat{L}(IJ)} g_{\hat{L}} - D_{g,\hat{L}(IJ)} \right) \quad (3.61)$$

onde $A_{\hat{L}(IJ)}$ é descrito em (3.38) e:

$$D_{\mathbf{g},\hat{L}(IJ)} = (\alpha_{\hat{L},i(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{L},i(IJ)} + \alpha_{\hat{L},j(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{L},j(IJ)}) \quad (3.62)$$

No contorno de Neumann, o fluxo através de IJ tem valor prescrito e é dado por:

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_{\mathbf{g}} = u_N |\vec{IJ}| \quad (3.63)$$

Para as faces internas, o fluxo gravitacional é obtido de forma semelhante à equação (3.41):

$$(\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{n}_{IJ})_{\mathbf{g}} = -\lambda_{IJ} |IJ| [\mathcal{A}_{\hat{L}(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R}(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{R}} + \mathcal{D}_{\mathbf{g},IJ}] \quad (3.64)$$

com $\mathcal{A}_{\hat{L}(IJ)}$ e $\mathcal{A}_{\hat{R}(IJ)}$ dados pelas equações descritas em (3.42) e:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{g},IJ} = \sum_{\gamma=i,j} \left(w_{\hat{L}(IJ)} \alpha_{\hat{R},\gamma(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{R},\gamma(IJ)} - w_{\hat{R}(IJ)} \alpha_{\hat{L},\gamma(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{L},\gamma(IJ)} \right) \quad (3.65)$$

Dessa forma, o fluxo total consistente dado na equação (3.5) para o método MPFA-H é:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} &= (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_{\mathbf{p}} + (\vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ})_{\mathbf{g}} \\ \vec{v}_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} &= \lambda_{IJ} |IJ| [\mathcal{A}_{\hat{L}(IJ)} p_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R}(IJ)} p_{\hat{R}} + \mathcal{D}_{IJ}] - \lambda_{IJ} |IJ| [\mathcal{A}_{\hat{L}(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{L}} - \mathcal{A}_{\hat{R}(IJ)} \mathbf{g}_{\hat{R}} + \mathcal{D}_{\mathbf{g},IJ}] \end{aligned} \quad (3.66)$$

3.4 MONTAGEM DO SISTEMA LINEAR

Os métodos apresentados nesse capítulo são resolvidos a partir de um sistema linear no qual o número de incógnitas e o número de equações são iguais. O Apêndice B descreve a construção do sistema que, resumidamente, é feita a partir das expressões de balanço de fluxo (vazão) para todas as células e as incógnitas são as pressões nos pontos de colocação delas. A solução do sistema representa o campo de pressões e tal sistema de equações lineares pode ser expresso como:

$$[\mathcal{M}][\underline{p}] = [\mathcal{J}] \quad (3.67)$$

sendo $\mathcal{M}$ a matriz de transmissibilidade; $\underline{p}$ o vetor de pressões do sistema; e $\mathcal{J}$ o vetor cujas entradas representam os termos independentes, mais os termos de fonte/sumidouro, condições de contorno e a contribuição do termo gravitacional.

3.5 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DE SATURAÇÃO

A partir da integração da equação de saturação dada em (2.37) no intervalo de tempo t_0 e t e sobre o domínio Ω , temos:

$$\int_{t_0}^t \int_{\Omega} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} dV dt = - \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) dV dt + \int_{t_0}^t \int_{\Omega} Q_w dV dt \quad (3.68)$$

Dividindo o domínio contínuo Ω no domínio discreto M , podemos transformar a integral acima em um somatório de integrais em cada volume de controle, assim como feito com a equação de pressão, que se torna:

$$\int_{t_0}^t \sum_{\hat{L} \in M} \int_{\hat{L}} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} dV dt = - \int_{t_0}^t \sum_{\hat{L} \in M} \int_{\hat{L}} \nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) dV dt + \int_{t_0}^t \sum_{\hat{L} \in M} \int_{\hat{L}} Q_w dV dt \quad (3.69)$$

Mais uma vez, considerando um volume de controle arbitrário $\hat{L}$ de M e aplicando o teorema da divergência para o primeiro termo do lado direito na equação acima, ficamos com:

$$\int_{t_0}^t \int_{\hat{L}} \frac{\partial S_w}{\partial t} dV dt = - \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\partial \hat{L}} \vec{F}_w(S_w) \cdot \vec{n} ds dt + \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\hat{L}} Q_w dV dt \quad (3.70)$$

Sabendo da propriedade do contorno $\partial \hat{L}$ apresentada no início do capítulo e aplicando o teorema do valor médio aos termos do lado direito da equação acima, vamos transformar as integrais em somatórios conforme a equação abaixo:

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\partial \hat{L}} \nabla \cdot \vec{F}_w(S_w) \cdot \vec{n} ds dt &= - \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \sum_{IJ \in E_{\hat{L}}} \vec{F}_w(S_w)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} dt \\ \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \int_{\hat{L}} Q_w dV dt &= \frac{1}{\phi} \int_{t_0}^t \bar{Q}_w dt \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde $\bar{Q}_w$ representa o valor médio do termo de fonte ou sumidouro para o volume de controle avaliado.

Agrupando os resultados da equação (3.71) na equação (3.70), resolvendo a equação de volume do termo do lado esquerdo da equação e reagrupando os termos, chegamos à seguinte expressão:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial S_w}{\partial t} dt = - \frac{1}{\phi V_{\hat{L}}} \int_{t_0}^t \sum_{IJ \in E_{\hat{L}}} \vec{F}_w(S_w)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} dt + \frac{1}{\phi V_{\hat{L}}} \int_{t_0}^t \bar{Q}_w dt \quad (3.72)$$

A equação acima representa a forma semi-discretizada da equação de saturação. Para discretizar o termo temporal da equação de saturação, será utilizado o método de aproximação do tipo Euler Explícito, por ser o principal método utilizado em simuladores comerciais que utilizam a estratégia IMPES. Dessa forma, aplicando ao lado esquerdo da equação (3.72) a aproximação de Euler Explícita e para todos os termos integrando no integrando entre o intervalo t e t_0 (Δt), chega-se a, após as devidas manipulações:

$$S_w^{n+1} = S_w^n - \frac{\Delta t}{\phi V_{\hat{L}}} \sum_{IJ \in E_{\hat{L}}} \vec{F}_w(S_w)_{IJ} \cdot \vec{N}_{IJ} + \frac{\Delta t \bar{Q}_w}{\phi V_{\hat{L}}} \quad (3.73)$$

Pelo fato da aproximação temporal realizada ocorrer na forma explícita, ou seja, o valor da saturação de água S_w^{n+1} é calculado a partir de informações já conhecidas no instante de tempo

atual ou da condição inicial ou de contorno impostas, o passo de tempo Δt deve satisfazer alguma condição de estabilidade.

No presente estudo, definimos um Δt inicial que é ajustado a cada cem passos de tempo utilizando a análise de estabilidade apresentada por Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) a partir de um número de Courant máximo ($\mathcal{C}_{max}$) definido para a simulação e um número de Courant máximo global de acordo com a condição CFL. Os autores demonstraram que, para que haja convergência de uma equação diferencial e sua equação diferencial parcial correspondente, o esquema numérico deve utilizar todas as informações contidas nos dados iniciais que influenciam essa solução. Para isso foram definidos os seguintes conceitos para o número de Courant ($\mathcal{C}$) (Ewing, 1983; Chen; Huan; Ma, 2006; Moukalled; Mangani; Darwish, 2016):

$$\mathcal{C} = \frac{\text{distância percorrida pelo fluxo numérico em cada passo de tempo}}{\text{tamanho da célula}} \quad (3.74)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \Delta t * \max \left[\max_{\hat{L} \in M} \left(\frac{\sum_{IJ \in E_{\hat{L}}} |\vec{F}_{w,IJ} \vec{N}_{IJ}|}{V_{\hat{L}}} \right), \max_{\hat{L} \in M} \left(\frac{\sum_{IJ \in E_{\hat{L}}} |\vec{F}_{o,IJ} \vec{N}_{IJ}|}{V_{\hat{L}}} \right) \right] \quad (3.75)$$

O número de Courant indica se a informação física está sendo propagada corretamente dentro de cada intervalo de tempo, e para que isso ocorra deve satisfazer a condição CFL onde $\mathcal{C} \leq 1$, logo, durante toda a simulação, o número de Courant não deve ultrapassar o valor 1.

A cada cem passos de tempo é verificado se o número de Courant atual é inferior ao limite estabelecido para simulação. Caso seja inferior, ou seja $(\mathcal{C}_{max}/\mathcal{C}) > 1$, o valor do passo de tempo Δt é aumentado de acordo com:

$$\Delta t_{new} = \Delta t_{old} * \min \left[\min \left(\frac{\mathcal{C}_{max}}{\mathcal{C}}, 1 + 0.1 * \frac{\mathcal{C}_{max}}{\mathcal{C}} \right), 1.2 \right] \quad (3.76)$$

caso contrário, o Δt não é modificado e verifica-se quanto ao máximo global da condição CFL, caso ultrapasse o máximo global a simulação é pausada.

3.6 APROXIMAÇÃO DAS MOBILIDADES

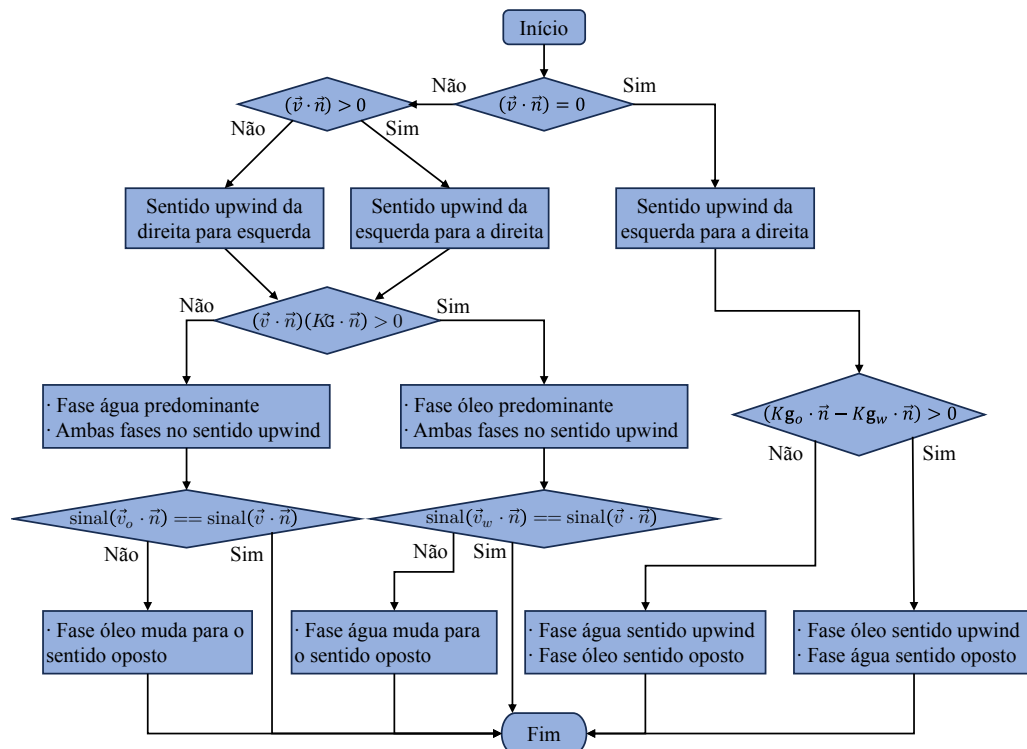
O cálculo das mobilidades nas faces é realizado utilizando o método discutido por Mikyška e Firoozabadi (2010), Moortgat, Sun e Firoozabadi (2011) e Starnoni *et al.* (2019), onde seu funcionamento está descrito abaixo e através do diagrama da Figura 15, considerando a fase o como a mais densa e a fase w como a menos densa:

1. Primeiramente, caso o fluxo total seja nulo, $(\vec{v} \cdot \vec{n}) \cong 0$, a mobilidade é determinada apenas verificando o fluxo gravitacional de cada fase. Se $(K\mathbf{g}_o \cdot \vec{n} - K\mathbf{g}_w \cdot \vec{n}) > 0$, a fase

predominante é a mais densa. O que significa dizer que, a mobilidade da fase mais densa será dada pelo sentido upwind. Caso contrário, $(K\mathbf{g}_o \cdot \vec{n} - K\mathbf{g}_w \cdot \vec{n}) < 0$, as mobilidades se invertem para as fases.

2. Caso haja fluxo total, $(\vec{v} \cdot \vec{n}) \neq 0$, identifica-se a fase cujo fluxo de fase possui o mesmo sinal do fluxo total. Para isso, verifica-se a relação com o termo gravitacional $(K\mathbf{G} \cdot \vec{n})$ da seguinte forma: quando $(\vec{v} \cdot \vec{n})(K\mathbf{G} \cdot \vec{n}) > 0$, a fase predominante é a mais densa; caso contrário, quando $(\vec{v} \cdot \vec{n})(K\mathbf{G} \cdot \vec{n}) < 0$, a fase predominante é a menos densa. O sinal dessa análise determina a mobilidade upwind da fase predominante.
3. Para a outra fase, há duas possibilidades. Inicialmente, assume-se que o fluxo da segunda fase apresenta o mesmo sinal do fluxo da primeira fase e do fluxo total. Com isso, determina a mobilidade upwind da fase não predominante, que será verificada na etapa seguinte.
4. Após essa atribuição, avalia-se o fluxos da fase não predominante, calculado a partir da equação (2.35), e verifica-se a consistência do resultado com a suposição adotada anteriormente. Se o sinal assumido inicialmente for confirmado, o processo é concluído. Caso contrário, realiza-se uma nova escolha upwind para a mobilidade no passo anterior.

Figura 15 – Método para determinação da mobilidade.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, nossos método numéricos serão testados utilizando problemas da literatura, com o objetivo de comparar sua robustez e acurácia. A comparação entre os resultados obtidos busca verificar as diferenças e vantagens das aproximações empregadas, assim como a influência do tratamento do termo gravitacional na precisão das soluções.

O desenvolvimento computacional dos métodos numéricos estão no ambiente MATLAB versão R2023a, acoplado ao pacote de códigos já existente do grupo de pesquisa. Esses métodos já foram implementados anteriormente para simular o fluxo de fluidos sem o termo gravitacional no contexto de simulação de reservatórios (Gao; Wu, 2010; Queiroz *et al.*, 2013; Contreras *et al.*, 2016; Silva *et al.*, 2024). Assim, como descrito no capítulo 3, nós acoplamos neles os termos gravitacionais e os resultados são comparados com os resultados do método MPFA-O. O método MPFA-O com termo gravitacional foi implementado no ambiente Python e utiliza a biblioteca PorePy (Keilegavlen *et al.*, 2021).

As simulações foram realizadas em dois ambientes computacionais distintos. A primeira parte, referente às simulações monofásicas com o termo padrão acoplado, foi executada em um computador com processador Intel Core i5-8265U com 1.6 GHz, 8 GB de memória RAM, sem uso de aceleração gráfica dedicada. Já a segunda parte, que representa às simulações monofásicas com o termo gravitacional consistente acoplado e as simulações bifásicas, foi conduzida em um equipamento equipado com processador AMD Ryzen 5 5600H com 3.3 GHz, 16 GB de memória RAM e unidade de processamento gráfico dedicada NVIDIA GeForce GTX 1650.

4.1 ESCOAMENTO MONOFÁSICO COM EFEITO GRAVITACIONAL NUM MEIO POROSO HOMOGÊNEO

Este problema foi adaptado de Starnoni *et al.* (2019) para testar a acurácia e robustez do método numérico proposto. Neste problema, assumimos que o escoamento é incompressível e o domínio quadrado de dimensões $[0, 1]^2$ com uma linha de descontinuidade $rx + sy = \delta$, onde $0 \leq r, s, \delta \leq 1$ e $r + s = 1$. A força gravitacional atuante no domínio é uma combinação linear entre uma função degrau $\vec{c}(x, y)$ através da linha de descontinuidade e uma função trigonométrica suave $\vec{d}(x, y)$, da seguinte forma:

$$\vec{g} = a_1 \vec{c}(x, y) + a_2 \vec{d}(x, y) \quad (4.1)$$

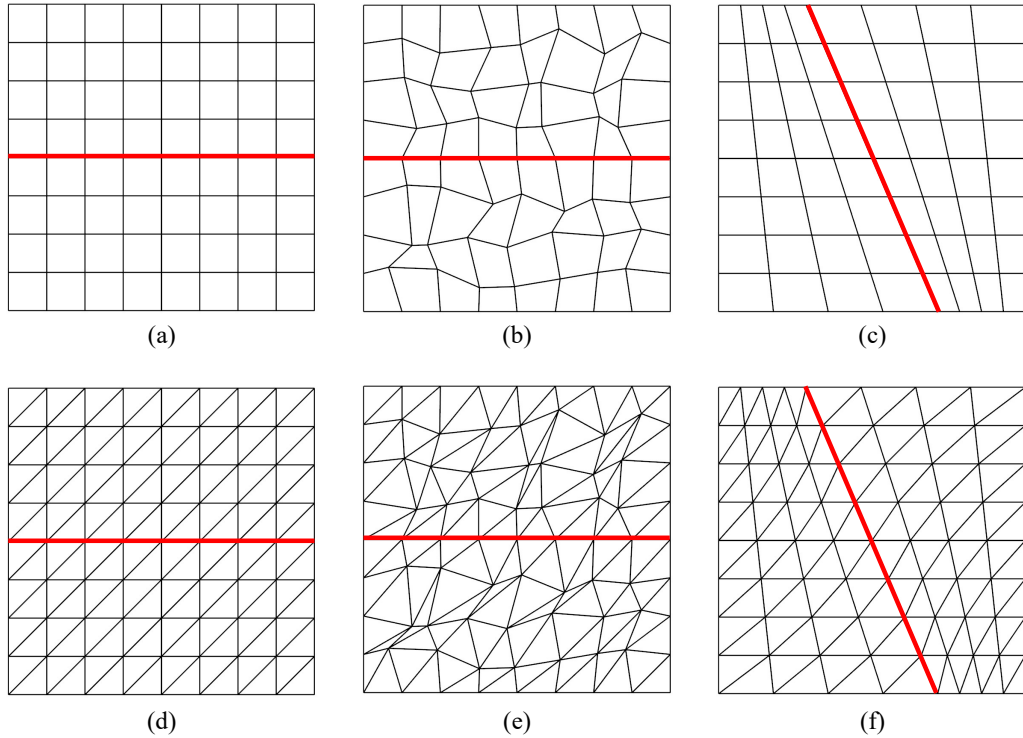
onde a_1 e a_2 são os coeficientes de ponderação para cada caso analisado e:

$$\begin{aligned}\vec{c}(x,y) &= -\frac{h(x,y)}{\sqrt{(r^2+s^2)}}(r\vec{e}_x + s\vec{e}_y) \\ \vec{d}(x,y) &= \cos(x)\cos(y)\vec{e}_x - \sin(x)\sin(y)\vec{e}_y\end{aligned}\tag{4.2}$$

sendo $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$ vetores unitários dos eixos x e y e h dada por $h(x,y) = \begin{cases} 10, & \text{se } (rx + sy) \geq \delta \\ 1, & \text{se } (rx + sy) < \delta \end{cases}$.

Os testes foram realizados utilizando malhas quadrilaterais e triangulares estruturadas e levemente distorcidas com linha de descontinuidade horizontal dada por $y = \delta = 0.5$ (logo $r = 0$ e $s = 1$), como mostrado nas Figuras 16 (a), (b), (d) e (e). Além disso, utilizamos malhas quadrilaterais e triangulares com linha de descontinuidade arbitrária sendo $r = 0.7$ e $s = 0.3$, dadas nas Figuras 16 (c) e (f). Todas as malhas utilizadas têm 7 graus de refinamento, iniciando com a forma 4x4 até a forma 256x256 elementos.

Figura 16 – Tipos de malhas utilizadas para as simulações do teste monofásico com refinamento 8x8: quadrilateral (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangular (d) estruturada, (e) distorcida e (f) diagonal



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para verificar a robustez e a acurácia dos métodos propostos, consideramos cinco casos. O primeiro caso representa um vetor gravitacional constante em todo o meio e os casos de 2 a 5 variam de acordo com os valores de a_1 e a_2 na equação 4.1. Os cenários para cada um desses casos estão expressos na Tabela 1.

Tabela 1 – Resumo dos valores dos coeficientes de ponderação que caracterizam cada caso.

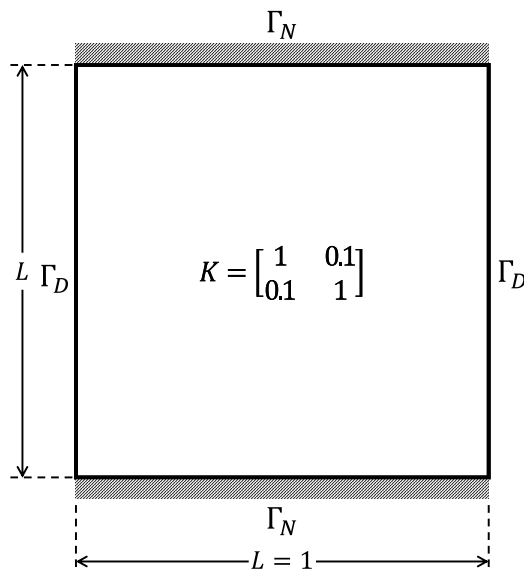
Casos	a_1	a_2
2	1	0
3	0	1
4	1	1
5	1	100

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

As condições de contorno para este problema são do tipo Dirichlet (Γ_D) para os lados com pressão prescrita dada pela solução analítica tal que $\vec{g} = -\nabla p$, e condição de Neumann (Γ_N) para o topo e o fundo com fluxo nulo. Por outro lado, devido à natureza da força gravitacional imposta, é esperado que o fluxo normal seja zero para toda a região. Para as malhas quadrilaterais e triangulares a pressão de referência, que é o valor definido para a constante de integração advinda da solução analítica da pressão, é dada por $u_0 = 1$ e para as malhas diagonais essa pressão é $u_0 = 10$. Por fim, o tensor de permeabilidade adotado é um tensor não diagonal homogêneo unitário, conforme esquematizado na Figura 17, definido por:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Figura 17 – Representação das condições de contorno e dos parâmetros físicos dos problemas monofásicos.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Nas subseções seguintes, será apresentada a forma utilizada para quantificar os erros utilizados na avaliação da precisão das soluções numéricas obtidas. Em seguida, serão descritos

os casos analisados, incluindo as configurações adotadas e os parâmetros relevantes para as simulações. No total, foram realizadas $5 \times 6 \times 7 \times 3 \times 2 = 2520$ simulações, cujos resultados correspondentes a cada caso são apresentados nas tabelas presentes no Apêndice B tanto para os resultados do erro de pressão ε_p e sua taxa de convergência assintótica $\mathcal{R}_p$ quanto para o erro de fluxo ε_q e sua taxa de convergência assintótica $\mathcal{R}_q$. Também, os resultados serão acompanhados de discussões sobre os comportamentos observados, sendo comparados os métodos aplicados, destacando as diferenças de desempenho e as possíveis vantagens de cada abordagem.

4.1.1 Erros e taxas de convergência

A fim de avaliar a acurácia do método, foram adotadas as seguintes métricas L_2 para o erro da pressão ε_p e para o erro do fluxo ε_q de acordo com Starnoni *et al.* (2019):

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= \frac{\sqrt{\sum_{\hat{L} \in M} V_{\hat{L}} (p_{\hat{L}} - p_{\hat{L}, exata})^2}}{\sqrt{\sum_{\hat{L} \in M} V_{\hat{L}} p_{\hat{L}, exata}^2}} \\ \varepsilon_q &= \sqrt{\sum_{IJ \in E} A_{IJ}^2 (q_{IJ} - q_{IJ, exato})^2}\end{aligned}\tag{4.4}$$

onde: $V_{\hat{L}}$ é a área de cada volume de controle $\hat{L}$, $p_{\hat{L}}$ é a pressão aproximada pelos métodos numéricos já citados anteriormente, $p_{\hat{L}, exata}$ é a pressão analítica calculada para cada volume de controle $\hat{L}$, A_{IJ} é o comprimento de cada face IJ dado pela norma $|IJ|$, q_{IJ} é o fluxo numérico dado por $q_{IJ} = -K(\nabla p - \nabla g)$ e $q_{IJ, exato}$ é o fluxo analítico em cada face IJ .

A taxa de convergência para os erros de pressão e para os erros de fluxo $\mathcal{R}_u$, com $u = p, q$ é obtida utilizando a seguinte expressão (Gao; Wu, 2010; Gao; Wu, 2013):

$$\mathcal{R}_u = \frac{\log(\varepsilon_u(h_2)/\varepsilon_u(h_1))}{\log(h_2/h_1)}\tag{4.5}$$

onde h_i e h_{i+1} representam o espaçamento ponderado de duas malhas sucessivas, enquanto $\varepsilon_u(h_i)$ são os erros de pressão ou de fluxo para o refinamento analisado.

4.1.2 Caso 1: Termo gravitacional constante em todo o domínio

Para o primeiro caso considera que a força gravitacional é constante em todo domínio analisado. O que significa dizer que para todas as malhas também possuem o mesmo campo de pressões, visto que não há linha de descontinuidade. O valor do campo gravitacional é dado

por:

$$\vec{g} = [0, -10] \quad (4.6)$$

Sabendo que o campo de pressões é uma função potencial de $\vec{g}$, então, a partir de $\vec{g} = -\nabla p$, obtém-se a distribuição da pressão e gravidade em todo o domínio:

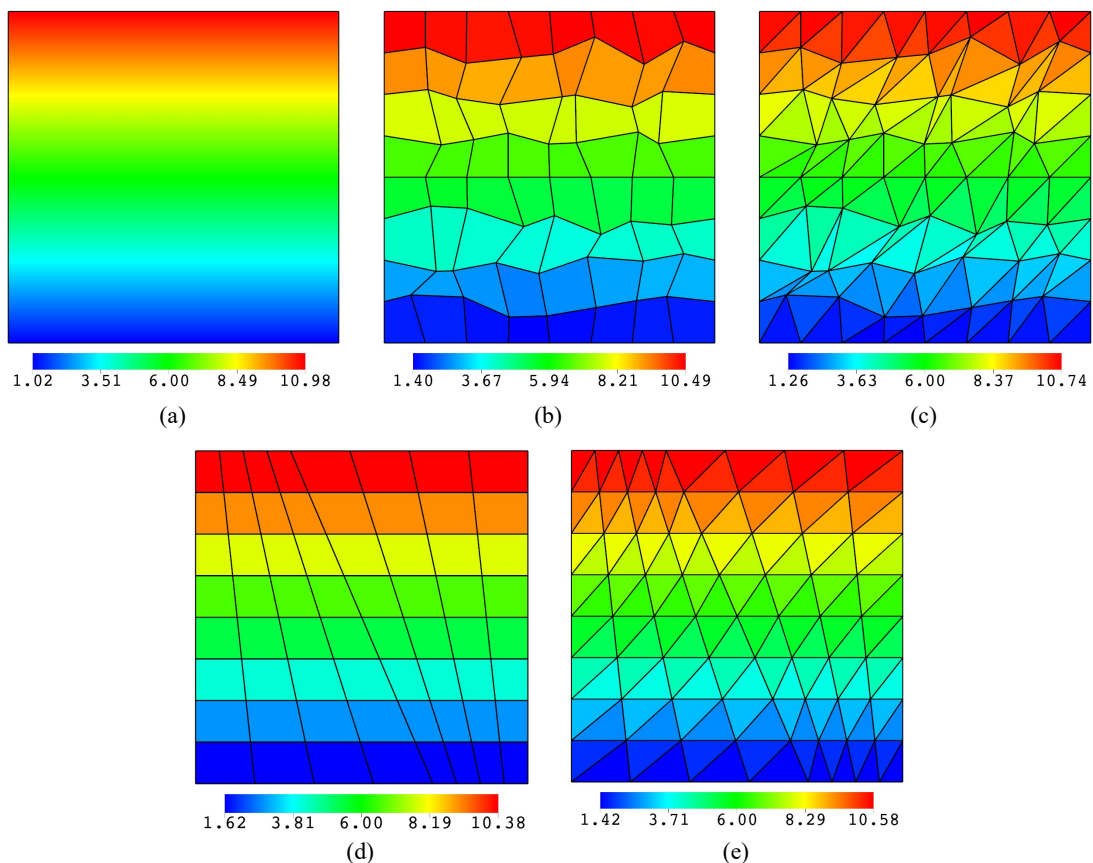
$$p = 10y + 1, \quad g = -10y - 1 \quad (4.7)$$

Os valores dos erros obtidos para o primeiro caso são apresentados nas tabelas B.1 a B.12, para todas as malhas e métodos analisados, permitindo uma análise detalhada do desempenho.

Nesse caso, a análise das taxas de convergência dos erros não se justifica, uma vez que todas as simulações são consideradas iguais às soluções analíticas. Os resultados indicam que os métodos utilizados reproduzem exatamente a solução analítica tanto para pressão quanto para o fluxo.

A Figura 18 mostra que, como esperado, o perfil dos campos de pressão tem um comportamento equivalente a solução analítica (Figura 18 a).

Figura 18 – Caso 1 – Campos de pressão: (a) solução analítica em malha estruturada (65.536 VCs) e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (d) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (e) triangular diagonal (128 VCs).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4.1.3 Caso 2: Termo gravitacional constante por partes

Para o segundo caso considera que as forças gravitacionais são constantes por partes, como mostrado nas equações (4.8) e (4.9), ou seja, influenciada somente pela função degrau ($a_2 = 0$). Para as malhas quadrilaterais e triangulares a linha de descontinuidade é horizontal e $y = \delta = 0.5$, substituindo os valores na equação (4.1) temos as forças gravitacionais dadas por:

$$\vec{g} = \begin{cases} [0, -10], & \text{se } y \geq 0.5 \\ [0, -1], & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \quad (4.8)$$

Considerando $\vec{g} = -\nabla p$ e após as devidas manipulações algébricas encontramos a distribuição da pressão e gravidade:

$$p = \begin{cases} 11 - 10y, & \text{se } y \geq 0.5 \\ 6.5 - 5.5y, & \text{se } y < 0.5 \end{cases}, \quad g = \begin{cases} 10y - 11, & \text{se } y \geq 0.5 \\ 5.5y - 6.5, & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \quad (4.9)$$

Na equação (4.9), observamos que a solução analítica é linear por partes.

Por outro lado, para as malhas diagonais, onde $r = 0.7$ e $s = 0.3$, temos a força gravitacional dada por:

$$\vec{g} = \begin{cases} \left[-\frac{7\sqrt{0.58}}{0.58}, -\frac{3\sqrt{0.58}}{0.58} \right], & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ \left[-\frac{0.7\sqrt{0.58}}{0.58}, -\frac{0.3\sqrt{0.58}}{0.58} \right], & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \quad (4.10)$$

onde a distribuição da pressão e gravidade no domínio, são dadas por:

$$p = \begin{cases} -\frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(7x + 3y - 5) + 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ -\frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(0.7x + 0.3y - 0.5) + 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \quad (4.11)$$

$$g = \begin{cases} \frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(7x + 3y - 5) - 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ \frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(0.7x + 0.3y - 0.5) - 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases}$$

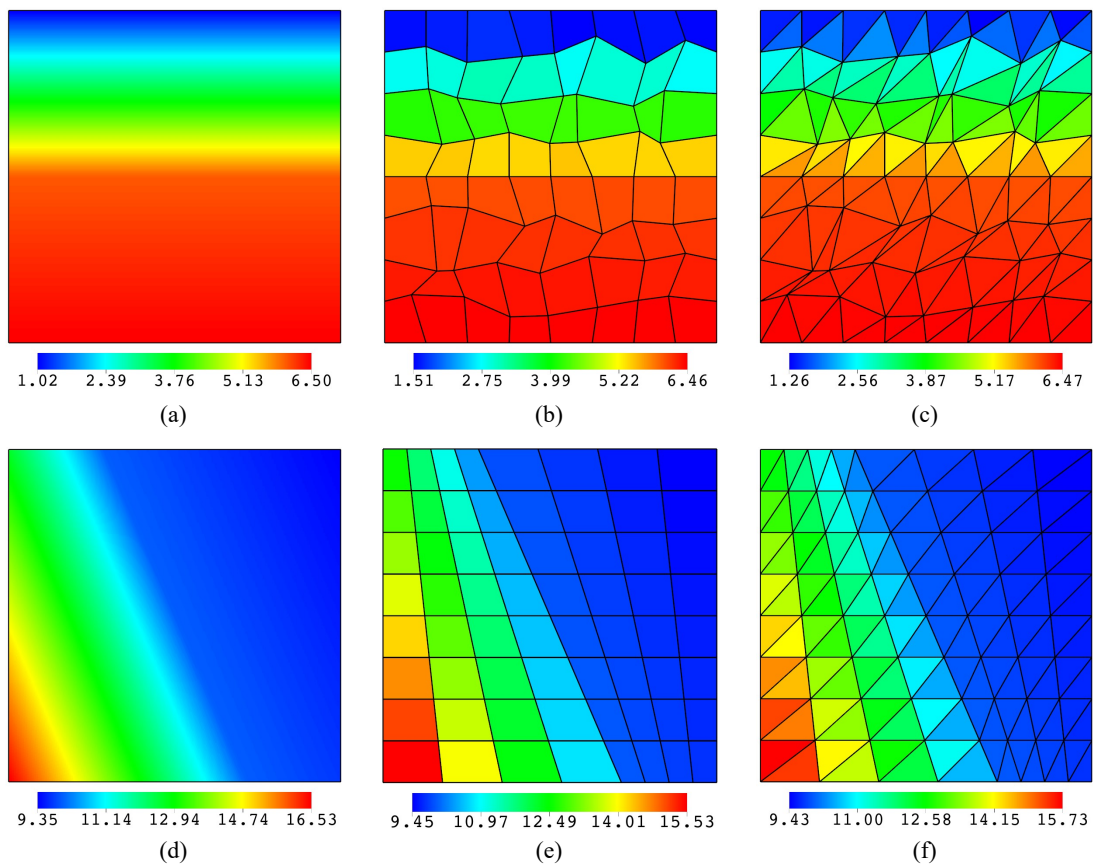
As Tabelas B.13-B.24 apresentam os valores dos erros obtidos na simulação do segundo caso. Esses resultados permitem uma análise detalhada do comportamento dos métodos numéricos adotados.

As formulações consistentes apresentaram soluções exatas por partes para a pressão e o fluxo em todas as malhas, com erro próximo à zero. Por sua vez, as formulações padrões para cada método não obtiveram o mesmo êxito. Isso ocorre, principalmente, pelo fato de não capturar bem os fenômenos físicos que acontecem nas descontinuidades da força gravitacional. Com

isso, em malhas não k-ortogonais, os resultados obtidos pela formulação padrão somente piora, como é mostrado nas tabelas.

Na Figura 19, apresentamos os campos de pressão para algumas malhas, tanto para a descontinuidade horizontal quanto para a descontinuidade diagonal. Percebemos que os resultados numéricos são equivalente a solução analítica dada nas Figuras 19 (a) e (d).

Figura 19 – Caso 2 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4.1.4 Caso 3: Termo gravitacional influenciado pela função suave

Para o terceiro caso, os componentes do termo gravitacional são dados pela função suave, não possuindo descontinuidade, isto é, $a_1 = 0$. Essa distribuição altamente heterogênea do termo gravitacional determina a variação da pressão em cada ponto do domínio computacional. Dessa forma, temos as mesmas expressões para todos os tipos de malhas analisados, diferenciando apenas o valor da pressão de referência u_0 , advinda da constante de integração (veja apêndice

A), substituindo os valores na equação 4.1 temos as forças gravitacionais dadas por:

$$\vec{g} = [\cos(x) \cos(y), -\sin(x) \sin(y)] \quad (4.12)$$

Após as devidas manipulações algébricas, encontramos a distribuição de pressões e gravidade em todo o domínio:

$$p = \sin(x) \cos(y) + 10, \quad g = -\sin(x) \cos(y) - 10 \quad (4.13)$$

Nas Tabelas B.25 a B.36, são apresentados os valores dos erros obtidos para o terceiro caso, considerando todas as malhas e métodos avaliados, possibilitando uma análise da robustez e acurácia das formulações numéricas.

As taxas de convergência para a norma discreta L_2 dos erros de solução são apresentadas graficamente nas Figuras 20 e 21 para a pressão e fluxo, respectivamente, utilizando gráficos log-log dos erros de solução em função do refinamento da malha. As ordens de convergência são definidas, também, pelas inclinações das curvas de erro obtidas experimentalmente e podem ser comparadas com as inclinações teóricas.

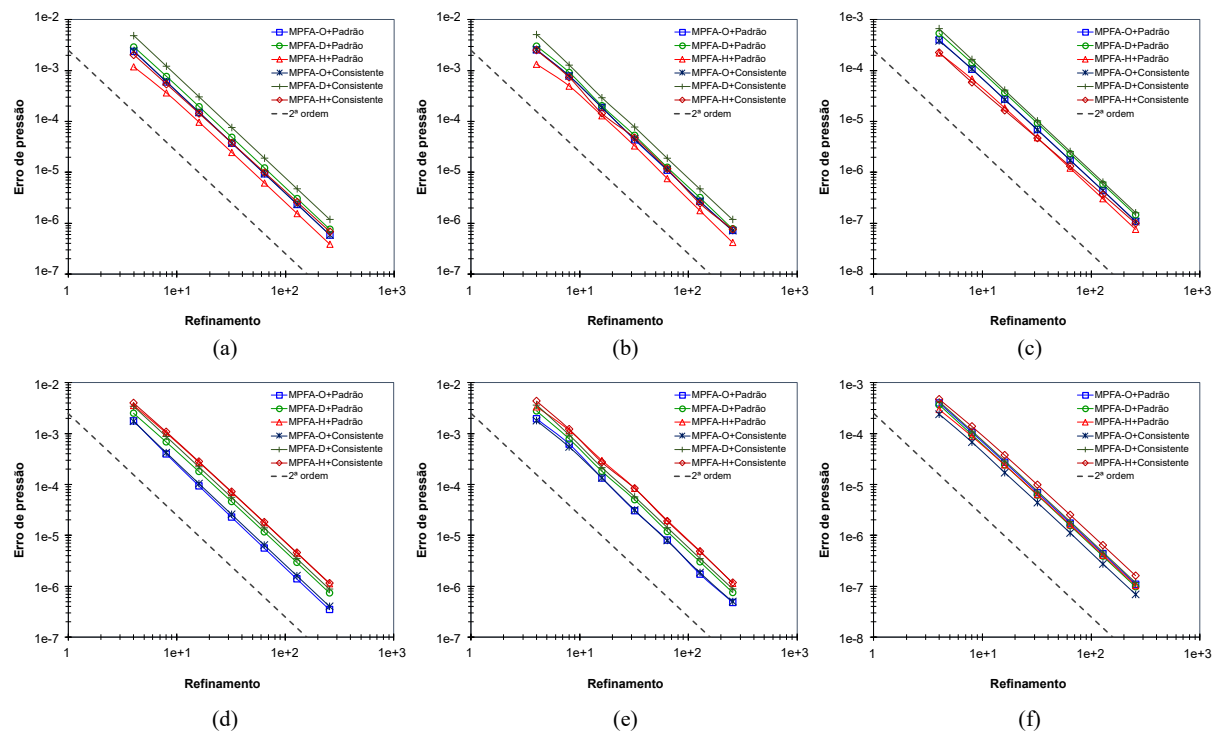
O estudo de convergência do MPFA em diferentes tipos de malha é amplamente abordado na literatura, evidenciando que sua precisão depende da regularidade e estrutura da discretização e confirmando que a escolha da malha influencia diretamente a precisão do método. Em malhas quadrilaterais estruturadas, a pressão frequentemente apresenta convergência próxima da segunda ordem em norma L_2 , atribuída à regularidade e ortogonalidade dos elementos. Por outro lado, até mesmo malhas triangulares estruturadas tendem a apresentar taxas de convergência mais baixas, geralmente entre a primeira e a segunda ordem, devido às restrições relacionadas à geometria triangular que dificultam a reconstrução dos gradientes de pressão. Para a velocidade, a convergência costuma ser superior à primeira ordem alcançando a segunda ordem em alguns estudos observados, embora a sua eficiência seja mais afetada em malhas não estruturadas (Eigestad; Klausen, 2005; Klausen; Winther, 2006; Aavatsmark *et al.*, 2007; Agelas; Masson, 2008; Klausen; Radu; Eigestad, 2008; Njifenjou; Kinfack, 2008; Bause; Hoffmann; Knabner, 2010).

Sabendo disso, conforme esperado, a formulação consistente apresentada manteve convergência de segunda ordem, ou muito próxima, para a pressão e o fluxo, mesmo com os diferentes tipos de malhas utilizadas.

Ainda de acordo com os dados apresentados, observamos que os erros de pressão são menores para o método MPFA-O em cinco das seis malhas analisadas, com exceção da malha

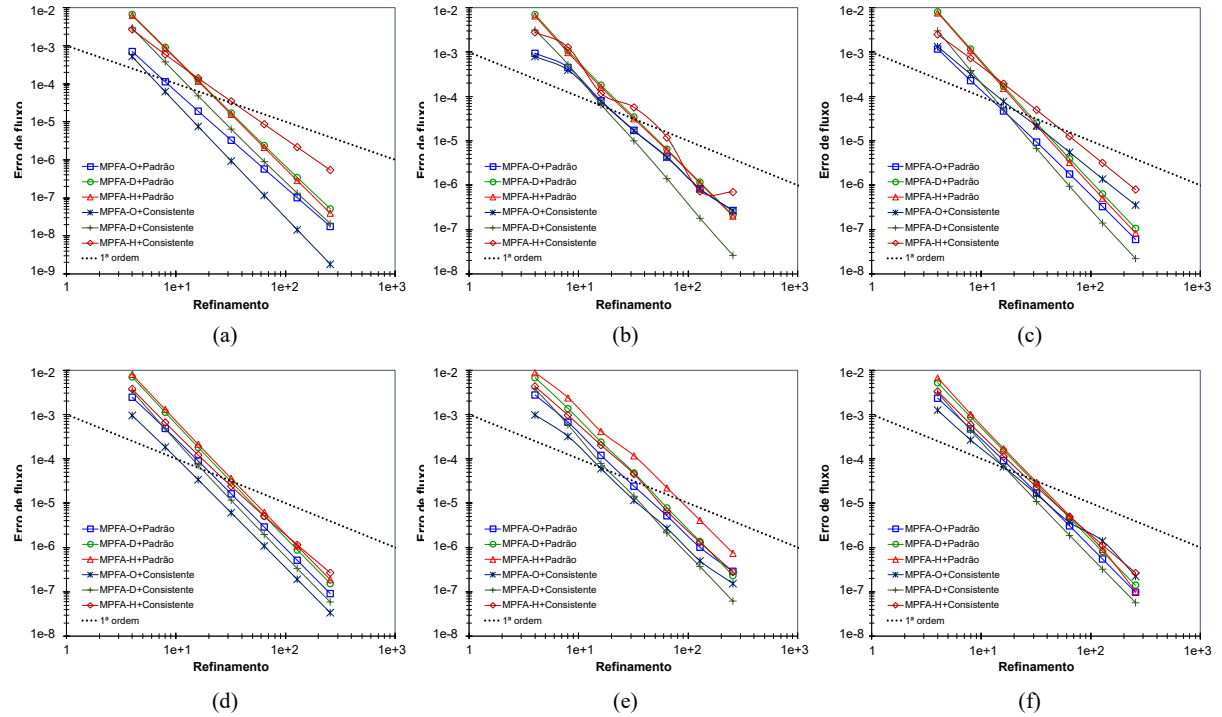
quadrilateral diagonal que o MPFA-H se sai melhor. No entanto, ao analisar os erros das velocidades, o MPFA-O manteve sua superioridade apenas nas malhas estruturadas, nas demais malhas o MPFA-D apresentou os menores erros para o caso analisado. Apesar disso, a diferença máxima entre os erros encontrados para a pressão ou fluxo não ultrapassa o valor de 1×10^{-6} ficando sempre na mesma ordem de grandeza e mostrando que os métodos estudados possuem comportamento similar nas simulações realizadas.

Figura 20 – Caso 3 – erro de pressão ε_p em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

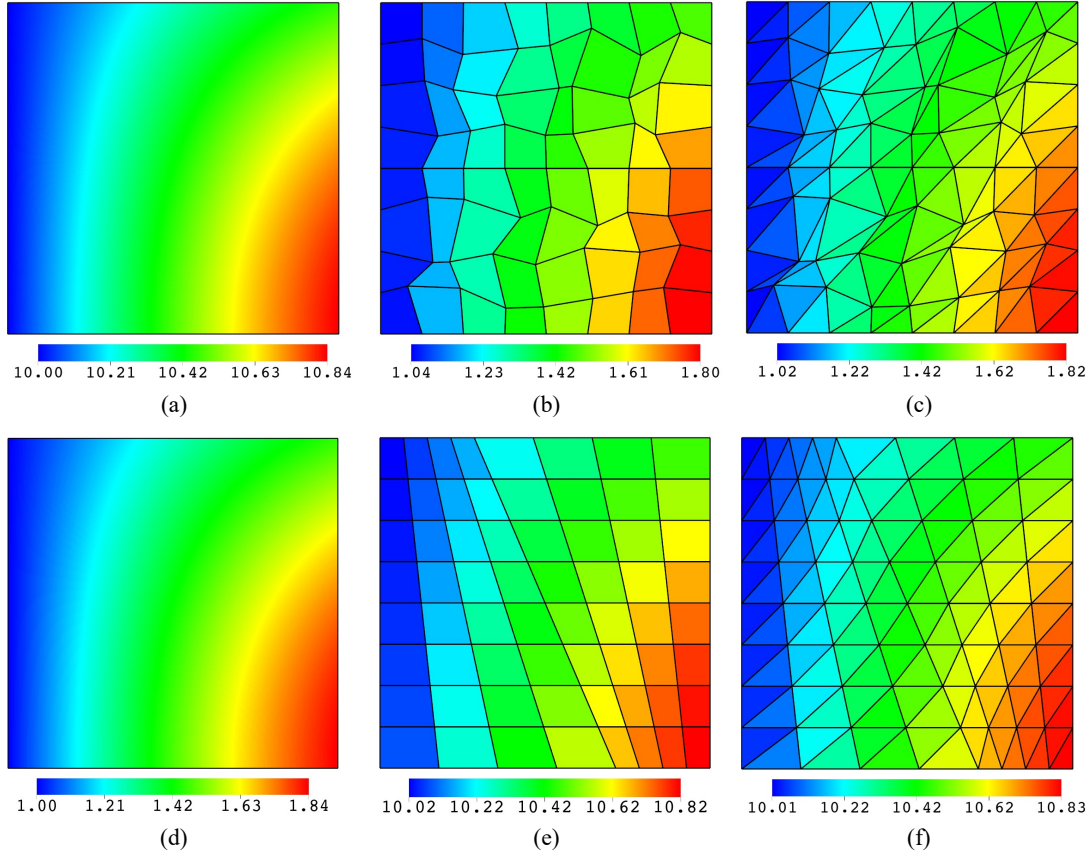
Figura 21 – Caso 3 – erro de fluxo ε_q em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na Figura 22, apresentamos os campos de pressão para algumas malhas e percebemos que os resultados numéricos representam o problema físico exposto através da solução analítica.

Figura 22 – Caso 3 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4.1.5 Caso 4: Termo gravitacional influenciado igualmente pela função degrau e pela função suave

Analisando o quarto caso há uma combinação dos dois tipos de funções, sendo o campo gravitacional influenciado igualmente pela função degrau e pela função suave, logo, $a_1 = a_2 = 1$. Com isso, as forças gravitacionais para as malhas quadrilaterais e triangulares são dadas por:

$$\vec{g} = \begin{cases} [\cos(x) \cos(y), -10 - \sin(x) \sin(y)], & \text{se } y \geq 0.5 \\ [\cos(x) \cos(y), -1 - \sin(x) \sin(y)], & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \quad (4.14)$$

Seguindo a formulação da função potencial com as manipulações adequadas, o campo de

pressões e a distribuição da gravidade é dado por:

$$\begin{aligned} p &= \begin{cases} 11 - 10y + \sin(x) \cos(y), & \text{se } y \geq 0.5 \\ 6.5 - 5.5y + \sin(x) \cos(y), & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \\ g &= \begin{cases} 10y - 11 - \sin(x) \cos(y), & \text{se } y \geq 0.5 \\ 5.5y - 6.5 - \sin(x) \cos(y), & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Para as malhas diagonais, as forças gravitacionais são:

$$\vec{g} = \begin{cases} \left[-\frac{7\sqrt{0.58}}{0.58} + \cos(x) \cos(y), -\frac{3\sqrt{0.58}}{0.58} - \sin(x) \sin(y) \right], & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ \left[-\frac{0.7\sqrt{0.58}}{0.58} + \cos(x) \cos(y), -\frac{0.3\sqrt{0.58}}{0.58} - \sin(x) \sin(y) \right], & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \quad (4.16)$$

De maneira análoga aos casos anteriores, a distribuição de pressões e gravidade são:

$$\begin{aligned} p &= \begin{cases} -\frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(7x + 3y - 5) + \sin(x) \cos(y) + 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ -\frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(0.7x + 0.3y - 0.5) + \sin(x) \cos(y) + 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \\ g &= \begin{cases} \frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(7x + 3y - 5) - \sin(x) \cos(y) - 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ \frac{\sqrt{0.58}}{0.58}(0.7x + 0.3y - 0.5) - \sin(x) \cos(y) - 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Nas Tabelas B.37 a B.48, são apresentados os valores dos erros obtidos para o quarto caso, considerando todas as malhas e métodos avaliados. Esses valores estão expressos graficamente nas Figuras 23 e 24.

A superioridade dos métodos consistente sobre o padrão é destacada quando o campo gravitacional é uma função descontínua suave. A formulação padrão para malhas não k-ortogonais não conseguiu atingir a segunda ordem de convergência, sendo o valor médio de 1.5 tanto para os erros de pressão quanto para o fluxo. Para a consistente, o método MPFA-D, mais uma vez, obteve os melhores resultados para taxa de convergência, sendo satisfatórios em todas as malhas analisadas com taxa de convergência igual ou superior a segunda ordem.

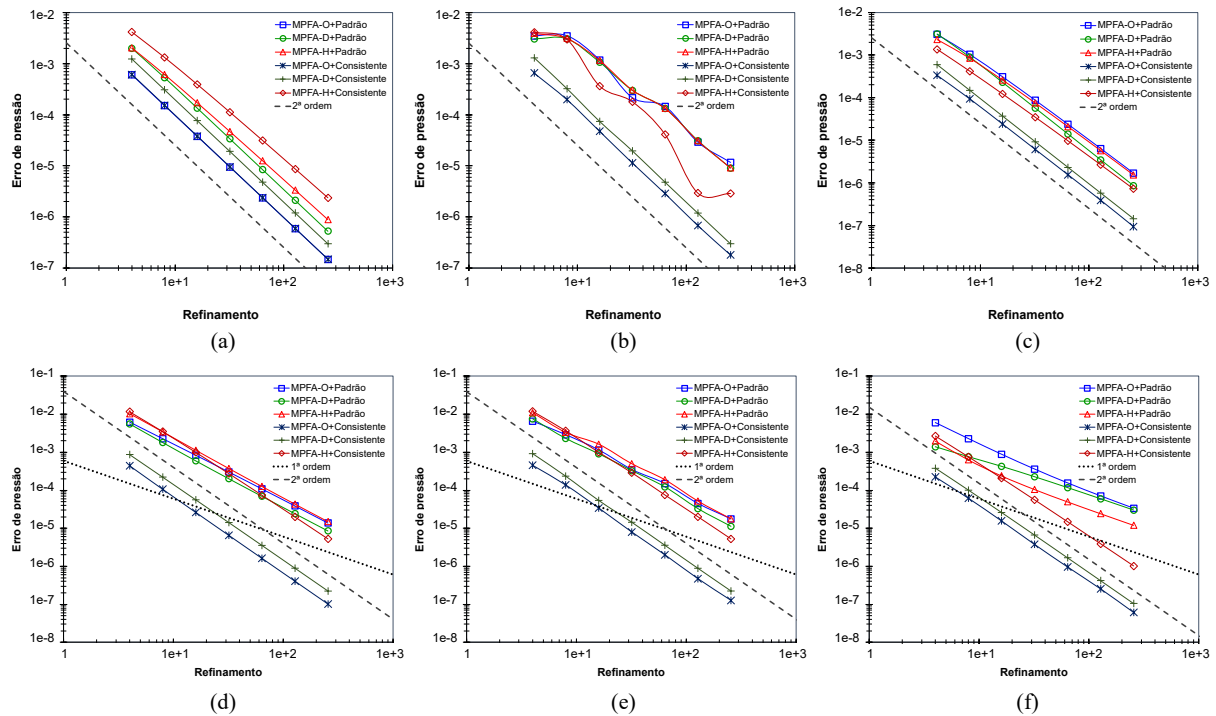
Também, de acordo com os dados apresentados, observamos que os erros de pressão são menores para o método MPFA-O em todas as malhas para esse caso. No entanto, mais uma vez, ao analisar os erros das velocidades, o MPFA-O manteve sua superioridade apenas nas malhas estruturadas, com o MPFA-D superando em malhas distorcidas e diagonais.

Por outro lado, para o MPFA-H, houve algumas oscilações na convergência para as malhas distorcidas mais refinadas, tanto para a pressão quanto para o fluxo, como pode ser observado nas Figuras 23 (b) e 24 (b). Esse fenômeno ocorre, principalmente, devido ao fato dos pontos

harmônicos não se localizarem na face analisada. Mesmo com isso, o método ainda apresentou taxa de convergência de segunda ordem na maioria das malhas analisadas.

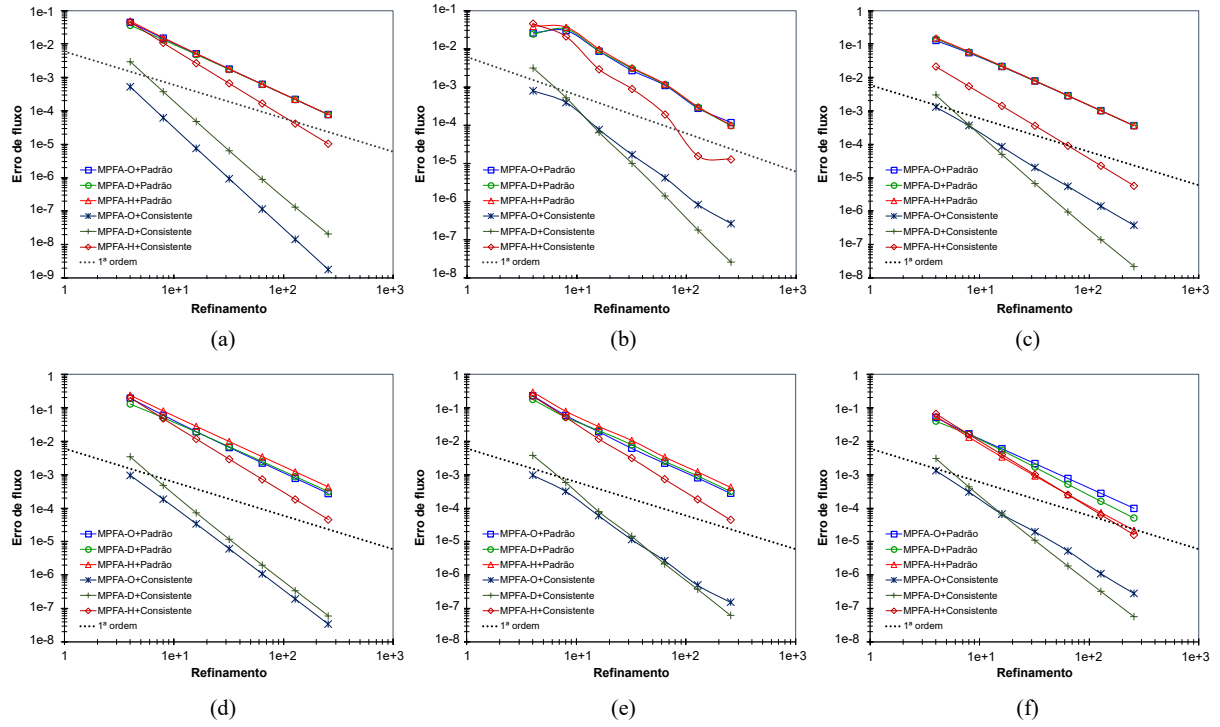
Mesmo diante disso, os valores absolutos dos erros são compatíveis com os erros de referência e as taxas de convergência se comportaram conforme esperado tanto para a formulação padrão quanto para a consistente. Em especial, para esse caso onde a função suave e a função degrau apresentam a mesma influência no campo gravitacional, os métodos MPFA-O e MPFA-D têm comportamentos similares para a norma de erro L_2 , como pode ser visto nas Figuras 23 e 24 um certo distanciamento entre as curvas desses métodos frente aos demais, com o MPFA-D levando vantagem ao analisar os erros de fluxo.

Figura 23 – Caso 4 – erro de pressão ε_p em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

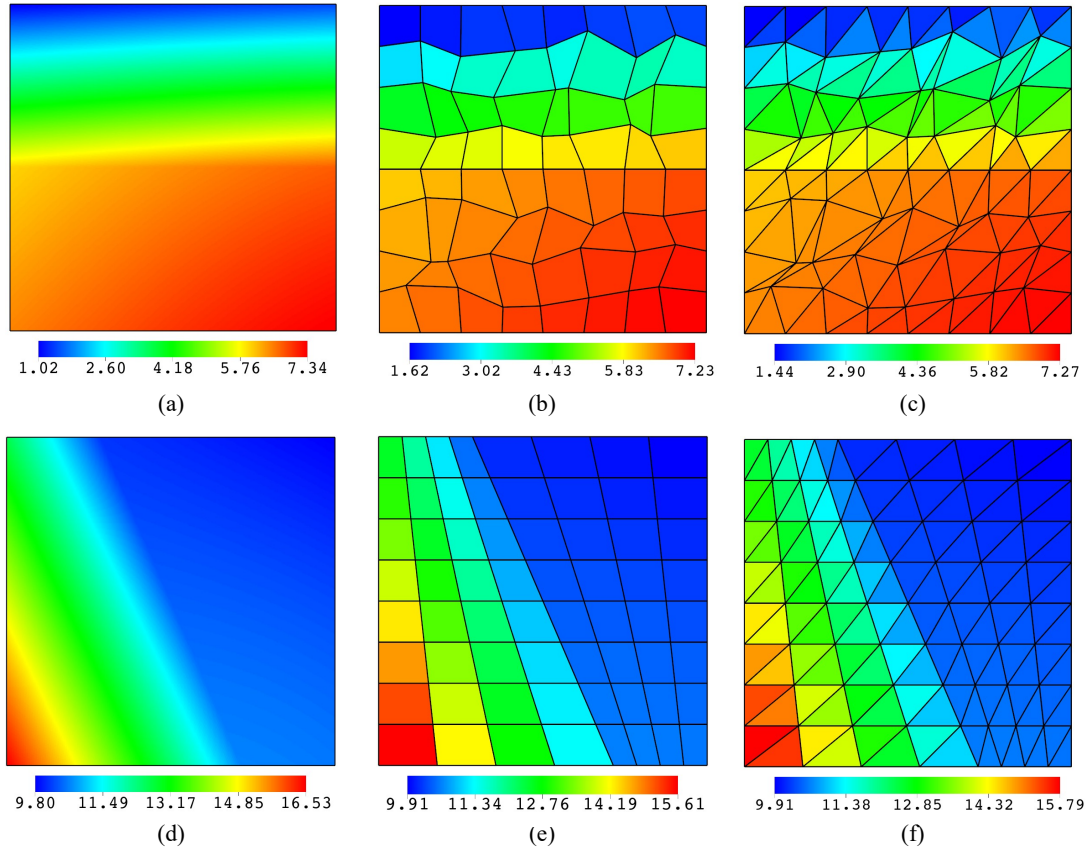
Figura 24 – Caso 4 – erro de fluxo ε_q em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A solução numérica encontrada para o campo de pressões utilizando o MPFA-D pode ser observada na Figura 25, para as descontinuidades horizontal e diagonal e comparadas com suas soluções analíticas apresentadas.

Figura 25 – Caso 4 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4.1.6 Caso 5: Termo gravitacional influenciado muito mais pela função suave do que pela função degrau

No quinto caso, temos um cenário de combinação das funções com uma influência muito maior da função suave do que da função degrau, definidos como $a_1 = 1$ e $a_2 = 100$. Com isso, as forças gravitacionais para as malhas quadrilaterais e triangulares são dadas por:

$$\vec{g} = \begin{cases} [100 \cos(x) \cos(y), -10 - 100 \sin(x) \sin(y)], & \text{se } y \geq 0.5 \\ [100 \cos(x) \cos(y), -1 - 100 \sin(x) \sin(y)], & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \quad (4.18)$$

Seguindo a formulação da função potencial com as manipulações adequadas, o campo de

pressões e a distribuição da gravidade é dado por:

$$\begin{aligned} p &= \begin{cases} 11 - 10y + 100 \sin(x) \cos(y), & \text{se } y \geq 0.5 \\ 6.5 - 5.5y + 100 \sin(x) \cos(y), & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \\ g &= \begin{cases} 10y - 11 - 100 \sin(x) \cos(y), & \text{se } y \geq 0.5 \\ 5.5y - 6.5 - 100 \sin(x) \cos(y), & \text{se } y < 0.5 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nas malhas diagonais, as forças gravitacionais são:

$$\vec{g} = \begin{cases} \left[-\frac{7\sqrt{0.58}}{0.58} + 100 \cos(x) \cos(y), -\frac{3\sqrt{0.58}}{0.58} - 100 \sin(x) \sin(y) \right], & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ \left[-\frac{0.7\sqrt{0.58}}{0.58} + 100 \cos(x) \cos(y), -\frac{0.3\sqrt{0.58}}{0.58} - 100 \sin(x) \sin(y) \right], & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \quad (4.20)$$

Por fim, a distribuição de pressão e de gravidade no domínio são:

$$\begin{aligned} p &= \begin{cases} -\frac{\sqrt{0.58}}{0.58} (7x + 3y - 5) + 100 \sin(x) \cos(y) + 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ -\frac{\sqrt{0.58}}{0.58} (0.7x + 0.3y - 0.5) + 100 \sin(x) \cos(y) + 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \\ g &= \begin{cases} \frac{\sqrt{0.58}}{0.58} (7x + 3y - 5) - 100 \sin(x) \cos(y) - 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y < 0.5 \\ \frac{\sqrt{0.58}}{0.58} (0.7x + 0.3y - 0.5) - 100 \sin(x) \cos(y) - 10, & \text{se } 0.7x + 0.3y \geq 0.5 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nas Tabelas B.49 a B.60, são apresentados os valores dos erros obtidos para o quinto caso, considerando todas as malhas e métodos avaliados. Esses valores estão expressos graficamente nas Figuras 26 e 27.

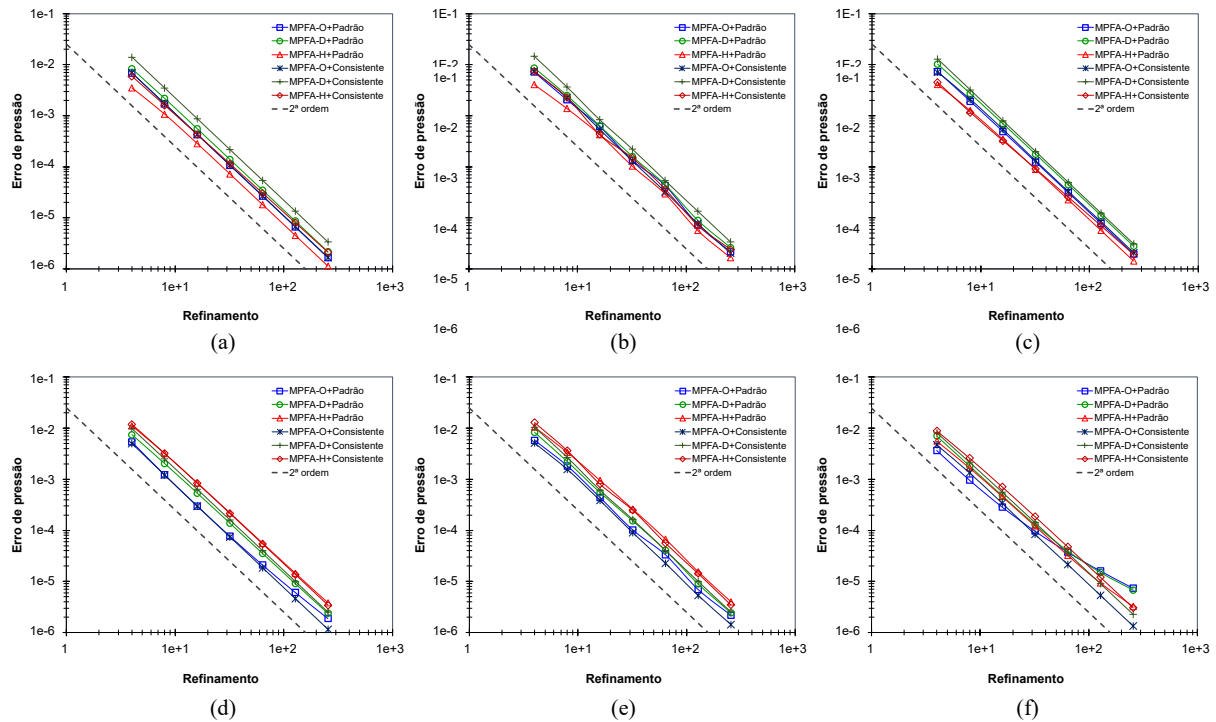
Assim como no caso anterior, o campo gravitacional é uma função descontínua suave. No entanto, a magnitude da parte suave é muito maior que a da parte descontínua, ou seja, $a_2 \gg a_1$. Nesse caso, a formulação padrão atinge taxa de convergência igual a 2 para o erro de pressão, apesar de em malhas mais refinadas o valor cair e ficar próximo a 1.5, enquanto para o fluxo nunca ultrapassa 1.5. Na formulação consistente, esse valor atinge a segunda ordem tanto para a pressão quanto para o fluxo, em especial no MPFA-D que mais uma vez se destaca.

Analisando os dados apresentados, observamos semelhanças no comportamento dos métodos com o observado no caso 3. Assim, para os erros de pressão, o MPFA-H se sai melhor para a malha quadrilateral diagonal, enquanto o MPFA-O se destaca nas demais malhas. Porém, para os erros das velocidades, o MPFA-D se destaca nas malhas distorcidas e diagonais, com o MPFA-O melhor nas estruturadas.

Outro ponto é que não é mais verificada a oscilação abrupta do MPFA-H para os erros de pressão, sendo apenas verificado no fluxo em malhas distorcidas com alto refinamento, como observado na Figura 27 (b).

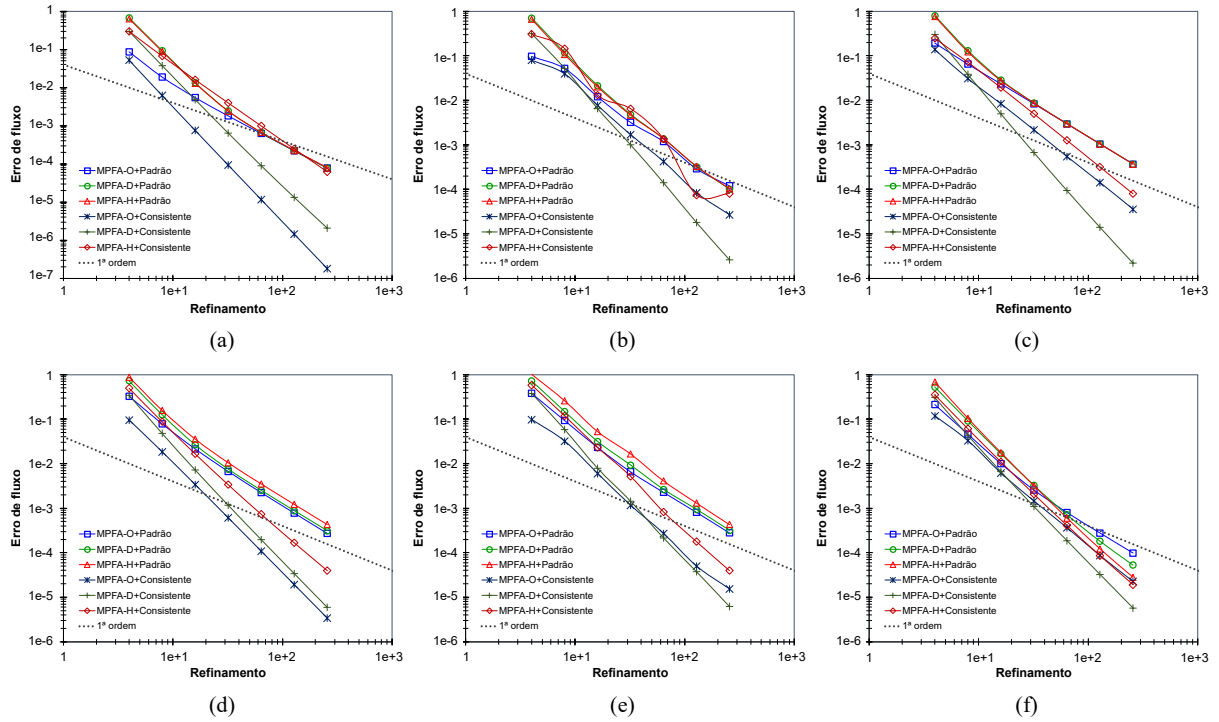
Também observamos que, a diferença máxima entre os erros encontrados para a pressão é relativamente muito pequena ficando sempre na mesma ordem de grandeza e mostrando que os métodos estudados possuem comportamento similar nas simulações realizadas, como podemos observar na Figura 26 com todos os métodos apresentando curva semelhante para todas as malhas. Quanto aos erros de fluxo, a diferença relativa é pequena, mas os métodos MPFA-O e MPFA-D apresentam comportamento melhor do que o MPFA-H, como observado na Figura 27.

Figura 26 – Caso 5 – erro de pressão ε_p em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

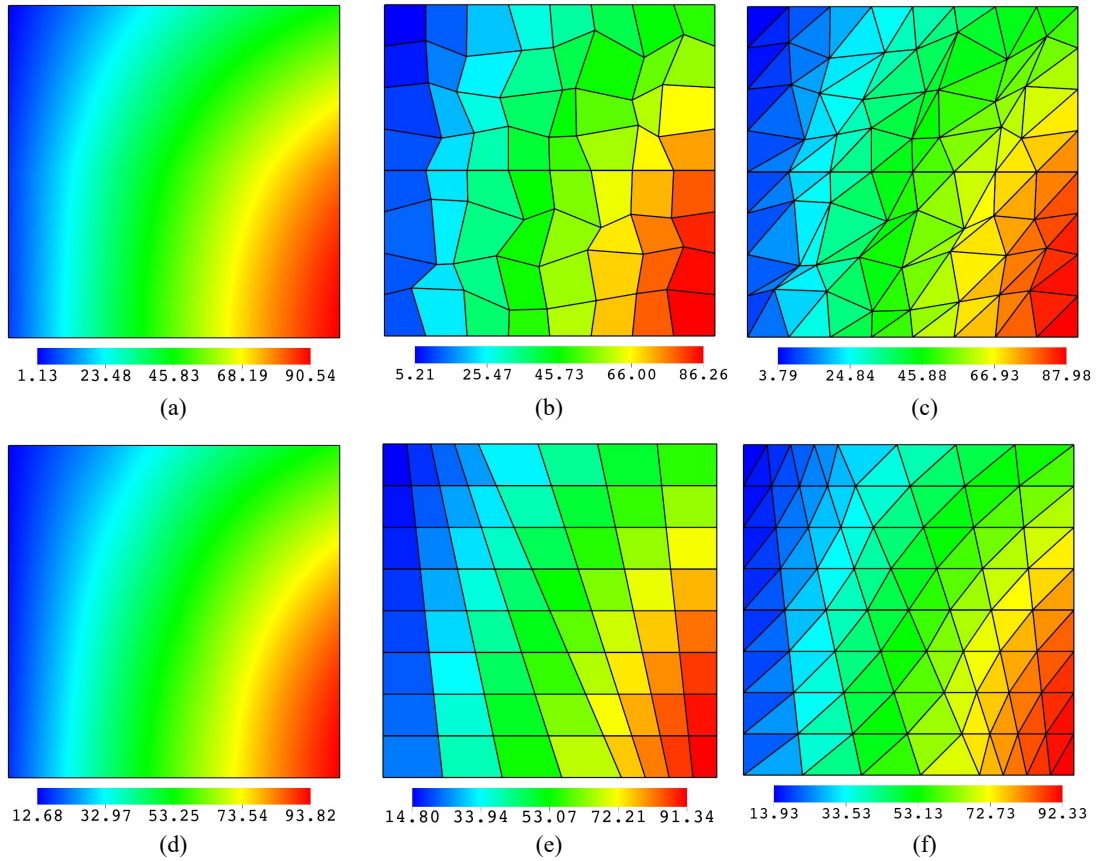
Figura 27 – Caso 5 – erro de fluxo ε_q em função do refinamento para malhas quadrilaterais (a) estruturada, (b) distorcida, (c) diagonal e triangulares (d) estruturada, (e) distorcida, (f) diagonal.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A solução numérica encontrada para o campo de pressões utilizando o MPFA-D pode ser observada na Figura 28, para as descontinuidades horizontal e diagonal e comparadas com suas soluções analíticas.

Figura 28 – Caso 5 – Campos de pressão: (a) e (d) soluções analíticas em malhas estruturada e quadrilateral diagonal (65.536 VCs); e soluções numéricas via MPFA-D para (b) malha quadrilateral distorcida (64 VCs), (c) triangular distorcida (128 VCs), (e) quadrilateral diagonal (64 VCs) e (f) triangular diagonal (128 VCs).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

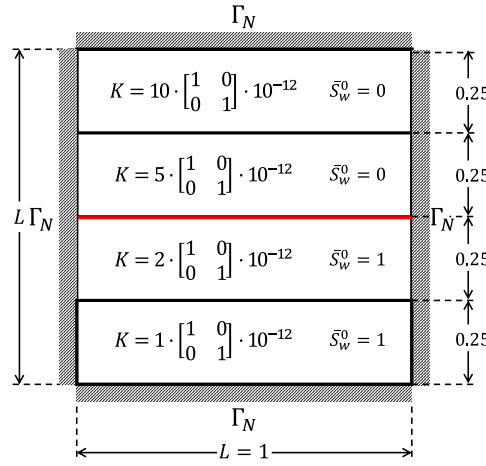
4.2 ESCOAMENTO BIFÁSICO EM MEIO POROSO HETEROGÊNEO COM EQUILÍBRIO VERTICAL

Esse caso foi adaptado de (Starnoni *et al.*, 2019), o domínio bidimensional é considerado um quadrado de dimensões unitárias, veja Figura 29. Neste problema, são considerados duas fases imiscíveis, de densidades diferentes, interagem em um meio incompressível e de permeabilidade heterogênea sob a influência da gravidade. O objetivo é que, com o passar do tempo, o sistema atinja o equilíbrio final, no qual as saturações e pressões se estabilizam, de modo que essa configuração represente o equilíbrio vertical, em que as fases se separam conforme suas densidades, com o fluido mais denso ocupando as regiões inferiores e o menos denso nas superiores. A condição de equilíbrio ocorre quando o gradiente de pressão hidrostática é exatamente contrabalançado pelo gradiente devido à força gravitacional, resultando em fluxos nulos e em

um estado estacionário governado exclusivamente pela gravidade.

A permeabilidade possui quatro camadas distintas divididas igual e verticalmente entre o domínio e é dada por $K = a_i \mathbf{I} K_0$, com a_i sendo coeficientes específicos para cada camada; $\mathbf{I}$ a matriz identidade 2×2 ; e $K_0 = 1000 \text{ mD} = 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2$. A porosidade $\phi = 0.2$ é homogênea em todo o domínio. Para os dois fluidos presentes, a fase menos densa possui densidade $\rho_w = 100 \text{ kg/m}^3$, enquanto a fase mais densa possui densidade $\rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3$. As viscosidade das duas fases são iguais com magnitude $\mu_w = \mu_o = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$. A força gravitacional atua no sentido vertical com valor $\vec{g} = [0, -10]$ agindo na redistribuição das fases ao longo do tempo.

Figura 29 – Propriedades, condições iniciais e de contorno.



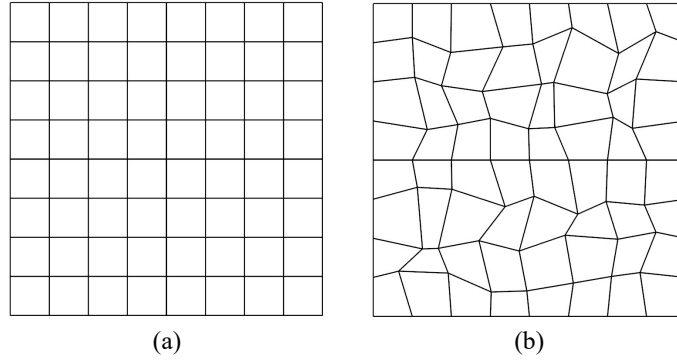
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

As condições iniciais do problema definem uma linha horizontal entre as duas fases. A região superior do domínio é completamente saturada com a fase mais densa ($\bar{S}_w^0 = 0$ e $\bar{S}_o^0 = 1$), enquanto a região inferior é completamente saturada com fase mais leve ($\bar{S}_w^0 = 1$ e $\bar{S}_o^0 = 0$). Para garantir que o sistema atinja o equilíbrio vertical com sua evolução dada apenas através da força gravitacional e das propriedades do meio, todas as condições de contorno são do tipo de Neumann com fluxo nulo, ou seja, $\vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{v}_w \cdot \vec{n} = \vec{v}_o \cdot \vec{n} = 0$. As características físicas do caso analisado estão expostas na figura 29.

O passo de tempo inicial é de $\Delta t = 5s$ podendo chegar até $\Delta t_{max} = 500s$ a fim de garantir a estabilidade do método utilizado, conforme equações (3.75) e (3.76). O tempo final da simulação é de $t_{final} = 1 \times 10^8 s$. Os testes foram realizados a partir das malhas quadrilaterais estruturadas e levemente distorcidas, mostradas na figura 30. Estas malhas têm 5 graus de refinamento, iniciando com a forma 4×4 até a forma 64×64 elementos. Os métodos adotados para as simulações com fluxo bifásico foram o MPFA-O, MPFA-D e o MPFA-H, todos apenas com

o acoplamento com o termo gravitacional padrão. Assim, o total de simulações realizadas no caso bifásico foi de $2 \times 5 \times 3 = 30$ simulações.

Figura 30 – Tipos de malhas utilizadas para as simulações do teste bifásico com refinamento 8x8: quadrilateral (a) estruturada e (b) distorcida.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para avaliar a acurácia do método, utilizamos uma métrica L_2 para o erro semelhante à utilizada no caso monofásico, com exceção de que a comparação é realizada a partir da solução exata na condição de equilíbrio final, ou seja, o erro calculado representa o quão distante está a solução numérica da condição de equilíbrio. O erro é dado por:

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{\sum_{\hat{L} \in M} V_{\hat{L}} (u_{\hat{L}} - u_{\hat{L}, \text{equilíbrio}})^2}}{\sqrt{\sum_{\hat{L} \in M} V_{\hat{L}} u_{\hat{L}, \text{equilíbrio}}^2}} \quad (4.22)$$

onde, $V_{\hat{L}}$ é a área de cada volume de controle $\hat{L}$, $u_{\hat{L}}$ é a pressão ou a saturação aproximada e $u_{\hat{L}, \text{equilíbrio}}$ é a pressão ou a saturação analítica calculada para cada volume de controle $\hat{L}$ na condição de equilíbrio do problema.

A simulação utilizando o termo padrão revela desafios importantes na modelagem de escoamentos bifásicos sob a influência da gravidade. Verifica-se que, embora as saturações das fases tendam ao estado de equilíbrio esperado, o campo de pressão apresenta divergências, resultando em uma instabilidades no fluxo total. Esse comportamento é atribuído à discretização do termo gravitacional na equação de pressão, que não equilibra corretamente as forças gravitacionais em meios heterogêneos, afetando a precisão global do modelo. Os erros de pressão e as taxas de convergência, apresentados na Tabela 2, mostram que o termo padrão apresenta convergência de primeira ordem, como pode ser verificado na Figura 32 (d) para as malhas quadrilaterais distorcidas.

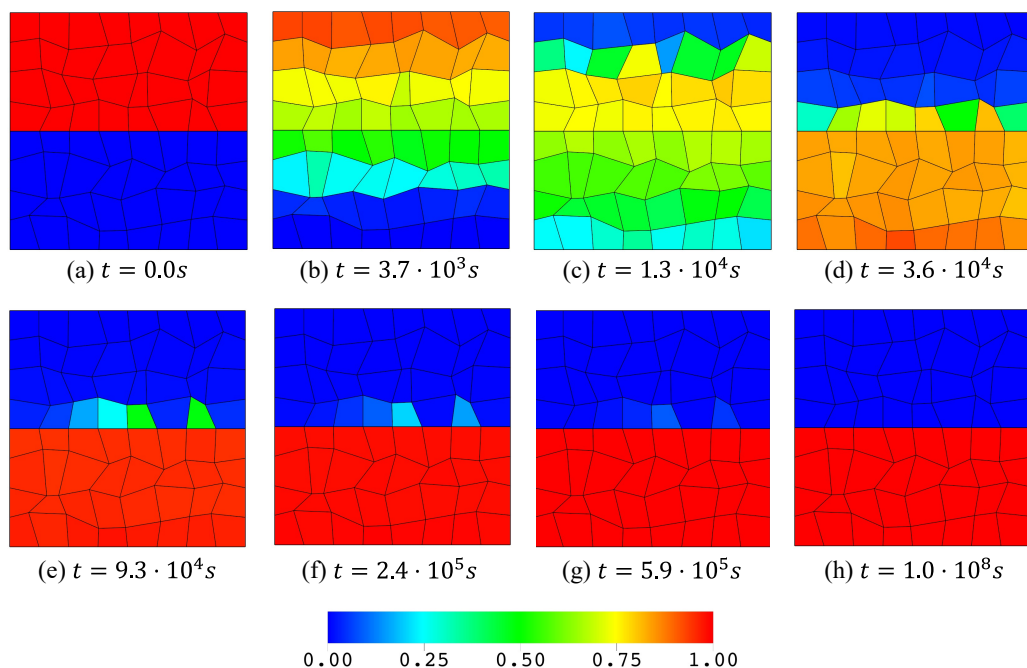
Tabela 2 – Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ no caso bifásico para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida.

Método		4	8	16	32	64
MPFA-O	ε_p	1.96e-01	1.07e-01	6.09e-02	3.35e-02	1.66e-02
	$\mathcal{R}_p$	-	0.88	0.81	0.86	1.01
MPFA-D	ε_p	2.08e-01	1.20e-01	6.02e-02	3.32e-02	1.67e-02
	$\mathcal{R}_p$	-	0.79	1.00	0.86	0.99
MPFA-H	ε_p	2.09e-01	1.23e-01	6.17e-02	3.41e-02	1.70e-02
	$\mathcal{R}_p$	-	0.77	0.99	0.86	1.01

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

A Figura 31 mostra a evolução temporal da saturação da fase óleo, que é a fase mais pesada. Observa-se que as saturações tendem a um estado estacionário, indicando que o modelo retrata de maneira apropriada o transporte de saturação ao longo do tempo. No entanto, os fluxos totais não se anulam completamente, como pode ser observado no gráfico da Figura 32 (b), resultando em variações de saturação ao longo da interface, de modo que uma mesma linha horizontal não apresente saturação uniforme, como pode ser visto nas Figuras 31 (e) e (f). Como consequência, surgem fluxos artificiais que impedem o equilíbrio hidrostático completo. Para ser evidenciado o comportamento dos fluxos artificiais, na Figura 31 foi utilizada uma malha de refinamento 8×8 .

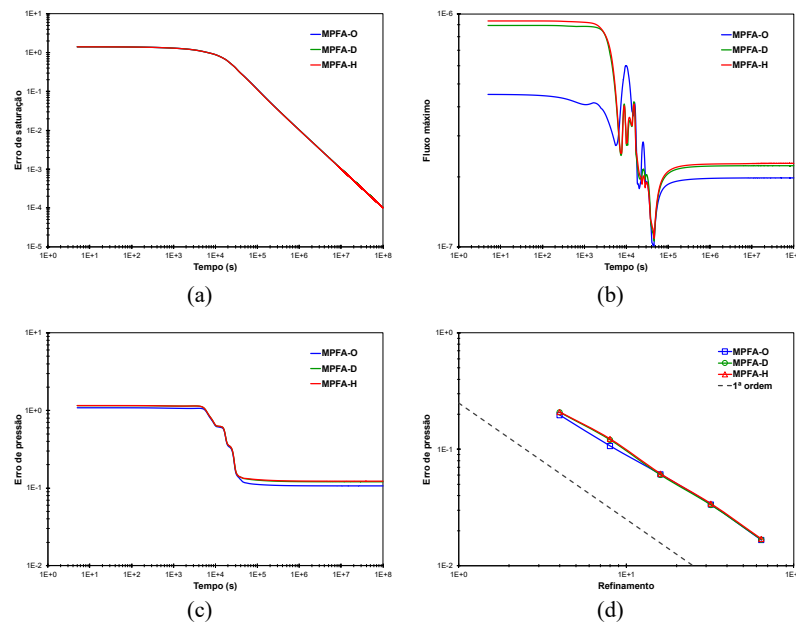
Figura 31 – Evolução temporal da saturação da fase óleo na malha quadrilateral distorcida com refinamento 8×8 utilizando o MPFA-D.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A análise dos gráficos presentes na Figura 32, mostra algumas limitações na modelagem utilizando o termo padrão para a gravidade. Nota-se que o fluxo máximo não se anula completamente no estado estacionário, indicando que o campo de pressão não atinge o equilíbrio hidrostático. Consequentemente, o erro de pressão permanece significativo ao longo do tempo, demonstrando a dificuldade da formulação em equilibrar corretamente as forças gravitacionais em um meio heterogêneo. Mesmo assim, o erro de saturação converge lentamente para o estado de equilíbrio esperado. Esse comportamento mostra que, embora o transporte de saturação seja razoavelmente bem representado, a precisão global é limitada pelas divergências na distribuição de pressão.

Figura 32 – Malha quadrilateral distorcida: Erros na saturação (a) e pressão (c) e o fluxo total máximo (b) em função do tempo para o refinamento 8x8 e os erros de pressão ε_p versus o refinamento (d).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A seguir, é apresentado os resultados anteriores agora para as malhas quadrilaterais estruturadas. A utilização desse tipo de malha proporciona um comportamento mais estável, visto que os elementos são organizados de forma regular. Com isso, as taxas de convergência também atingem a primeira ordem, como mostra a Tabela 3.

Tabela 3 – Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ no caso bifásico para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada.

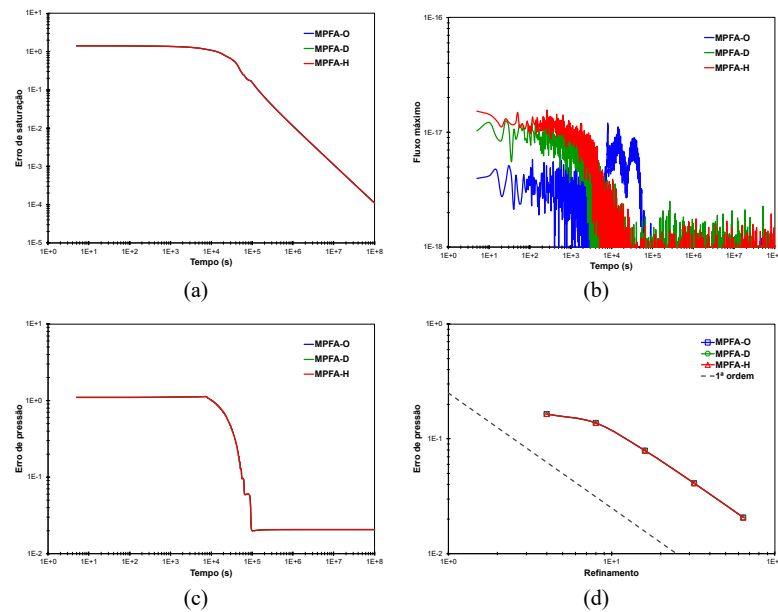
Método		4	8	16	32	64
MPFA-O	ε_p	1.65e-01	1.38e-01	7.90e-02	4.10e-02	2.06e-02
	$\mathcal{R}_p$	-	0.26	0.80	0.94	0.99
MPFA-D	ε_p	1.65e-01	1.38e-01	7.90e-02	4.10e-02	2.06e-02
	$\mathcal{R}_p$	-	0.26	0.80	0.94	0.99
MPFA-H	ε_p	1.65e-01	1.38e-01	7.90e-02	4.10e-02	2.06e-02
	$\mathcal{R}_p$	-	0.26	0.80	0.94	0.99

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Também, os fluxos máximos se anulam no estado estacionário, ou alcançam valores muito pequenos, indicando que o sistema atinge uma configuração mais estável em termos de movimento de fluido, como visto na Figura 33 (b). No entanto, mais uma vez, temos que o campo de pressão não atinge plenamente o equilíbrio, indicando que, mesmo em malhas estruturadas, o termo gravitacional padrão não equilibra perfeitamente as forças.

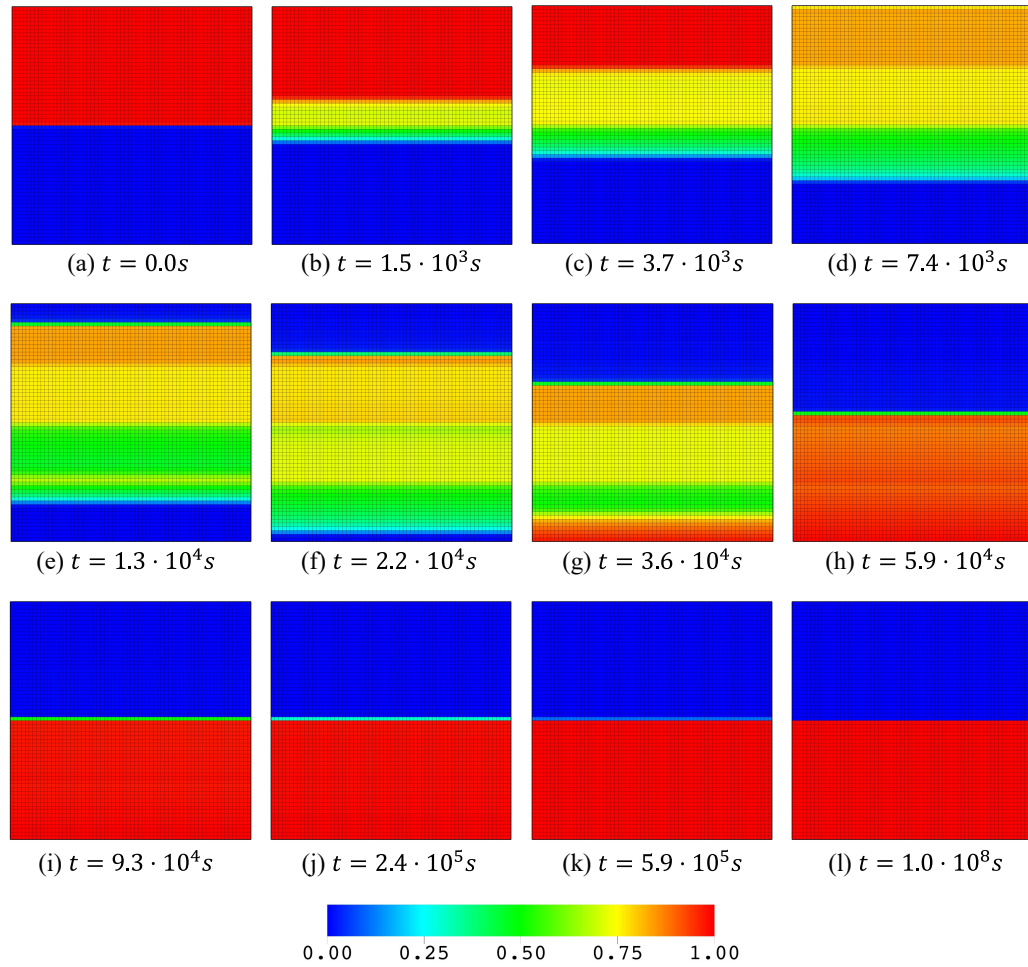
Nas malhas estruturadas, em especial mais refinada, a diferença de saturação observada para uma mesma linha horizontal não é mais percebida, como visualizado nas Figuras 34 (h), (i) e (j). Além disso, é observado claramente a influência de cada camada de permeabilidade, Figuras 34 (d), (e) e (f), onde essa variação não é tão bem captada pela discretização padrão do fluxo gravitacional.

Figura 33 – Malha quadrilateral estruturada: Erros na saturação (a) e pressão (c) e o fluxo total máximo (b) em função do tempo para o refinamento 64x64 e os erros de pressão ε_p versus o refinamento (d).



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 34 – Evolução temporal da saturação da fase óleo na malha quadrilateral estruturada com refinamento 64x64 utilizando o MPFA-D.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Diante disso, os resultados demonstram que o fenômeno físico é bem captado pelas formulações apresentadas, mas, também, reforçam a importância de investigar abordagens alternativas para melhorar a consistência e a convergência na modelagem de escoamentos multifásicos governados pela gravidade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foram desenvolvidas metodologias numéricas para a simulação do escoamento em meios porosos com a inclusão do termo gravitacional. A formulação proposta baseia-se no Método de Volumes Finitos com Aproximação por Múltiplos Pontos (MPFA) para resolver os termos de difusão e métodos *Upwind* de primeira ordem para os termos advectivos. No escoamento bifásico, a metodologia IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) foi empregada para resolver as equações governantes, desacoplando a solução da equação elíptica de pressão da equação hiperbólica de saturação.

O tratamento adequado do termo gravitacional foi um dos principais desafios abordados, visto que sua aproximação inconsistente pode resultar em imprecisões no comportamento de escoamentos em meios porosos complexos. A fim de avaliar a acurácia e a robustez da formulação proposta, foram realizados testes com diversos cenários encontrados na literatura, abrangendo até tensores de permeabilidade anisotrópica e uma distribuição do termo gravitacional heterogêneas no escoamento.

Algumas dificuldades foram encontradas especialmente relacionadas à necessidade de assegurar a conservação de massa local e global, enquanto se tratava rigorosamente o acoplamento do termo gravitacional discretizado nos métodos numéricos já implementado, também, quanto à estabilidade da solução no escoamento bifásico devido à nova abordagem para o tratamento das mobilidades. Além disso, algumas limitações foram observadas, como o aumento do custo computacional associado ao uso de malhas não estruturadas e a dificuldade do MPFA-H em gerar resultados consistentes em malhas com alto refinamento, devido aos pontos harmônicos localizarem-se fora do volume de controle analisado. Apesar disso, os benefícios em termos de acurácia superaram essas limitações, principalmente devido ao ganho de propriedades físicas dos problemas a partir do acoplamento do termo gravitacional.

A formulação numérica desenvolvida neste trabalho apresentou-se robusta na representação dos efeitos gravitacionais, preservando as propriedades físicas do sistema. Como observado, em testes com gravidade constantes ou constantes por partes, as formulações reproduzem soluções exatas quando utilizado a aproximação consistente do termo gravitacional. Nos demais testes, todas as malhas investigadas apresentaram taxa de convergência de segunda ordem ou um valor entre primeira e segunda ordem para o fluxo. Além disso, a utilização do método *Upwind* de

primeira ordem na discretização da equação de saturação garantiu a estabilidade numérica ao tratar o termo advectivo sob os efeitos da gravidade, visto que os resultados obtidos apontaram uma taxa de convergência de primeira ordem. Com isso, observamos que os testes de convergência indicaram comportamento compatível com o esperado para métodos de volumes finitos aplicados em malhas não estruturadas.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

Os avanços obtidos neste trabalho abrem possibilidades para investigações futuras no escoamento de meios porosos considerando os efeitos do termo gravitacional. As formulações numéricas desenvolvidas demonstraram potencial para serem expandidas e aplicadas a problemas mais complexos, estimulando a continuidade das pesquisas com o tema. Nesse contexto, algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas a seguir:

- Acoplar as formulações apresentadas em outros métodos de volumes finitos sejam lineares ou não-lineares;
- Acoplamento das formulações consistentes do termo gravitacional ao escoamento bifásico;
- Pesquisar e implementar formulações numéricas de alta ordem e de ótima ordem para a discretização da equação de saturação sob efeito de gravidade;
- Pesquisar e implementar a ação de poços injetores e produtores sob efeito de gravidade;
- Pesquisar e implementar o estudo do efeito da orientação de malha e os métodos verdadeiramente multidimensionais para escoamentos bifásicos sob efeito de gravidade;
- Construir uma formulação consistente a partir do vetor gravitacional;
- Investigar técnicas de paralelização para otimizar o desempenho computacional da metodologia implementada;
- Estender as formulações desenvolvidas para domínios tridimensionais e com propriedades físicas mais complexas.

REFERÊNCIAS

- AAVATSMARK, I. An introduction to multipoint flux approximations for quadrilateral grids. *Computational Geosciences*, Springer, v. 6, p. 405–432, 2002. doi:10.1023/A:1021291114475.
- AAVATSMARK, I.; BARKVE, T.; BØE, O.; MANNSETH, T. Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. part i: Derivation of the methods. *SIAM Journal on Scientific Computing*, SIAM, v. 19, n. 5, p. 1700–1716, 1998. doi:10.1137/S1064827595293582.
- AAVATSMARK, I.; EIGESTAD, G.; KLAUSEN, R.; WHEELER, M.; YOTOV, I. Convergence of a symmetric mpfa method on quadrilateral grids. *Computational geosciences*, Springer, v. 11, n. 4, p. 333–345, 2007. doi:10.1007/s10596-007-9056-8.
- AGÉLAS, L.; EYMARD, R.; HERBIN, R. A nine-point finite volume scheme for the simulation of diffusion in heterogeneous media. *Comptes Rendus. Mathématique*, v. 347, n. 11-12, p. 673–676, 2009. doi:10.1016/j.crma.2009.03.013.
- AGELAS, L.; MASSON, R. Convergence of the finite volume mpfa o scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes. *Comptes Rendus Mathematique*, Elsevier, v. 346, n. 17-18, p. 1007–1012, 2008. doi:10.1016/j.crma.2008.07.015.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamics: The basics with applications*. Nova York, EUA: Springer, 1995. v. 206. ISBN 0-07-001685-2.
- AZIZ, K.; SETTARI, A. *Petroleum reservoir simulation*. Londres, Reino Unido: Applied Science Publishers, 1979. v. 476. ISBN 0-85334-787-5.
- BAUSE, M.; HOFFMANN, J.; KNABNER, P. First-order convergence of multi-point flux approximation on triangular grids and comparison with mixed finite element methods. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 116, p. 1–29, 2010. doi:10.1007/s00211-010-0290-y.
- BEAR, J. *Dynamics of fluids in porous media*. Nova York, EUA: Dover Publications, 1972. ISBN 978-0-486-65675-5.
- BEAR, J.; CHENG, A. H.-D. *Modeling groundwater flow and contaminant transport*. Dordrecht, Países Baixos: Springer, 2010. v. 23. ISBN 978-1-4020-6681-8.
- BOUBACAR, A. B.; MOUSSA, K.; YALO, N.; BERG, S. J.; ERLER, A. R.; HWANG, H.-T.; KHADER, O.; SUDICKY, E. A. Characterization of groundwater–surface water interactions using high resolution integrated 3d hydrological model in semiarid urban watershed of niamey, niger. *Journal of African Earth Sciences*, Elsevier, v. 162, p. 103739, 2020. doi:10.1016/j.jafrearsci.2019.103739.
- BRUNNER, P.; SIMMONS, C. T. Hydrogeosphere: a fully integrated, physically based hydrological model. *Ground water*, Wiley, v. 50, n. 2, p. 170–176, 2012. doi:10.1111/j.1745-6584.2011.00882.x.
- BURDINE, N. Relative permeability calculations from pore size distribution data. *Journal of Petroleum Technology*, SPE, v. 5, n. 03, p. 71–78, 1953. doi:https://doi.org/10.2118/225-G.

- CARVALHO, D. K. E. *Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos*. Tese (Doutorado em Ciências de Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.
- CHEN, Z.; HUAN, G.; MA, Y. *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. Filadélfia, EUA: Society for industrial and Applied Mathematics, 2006. ISBN 0-89871-606-3.
- CHOWDHURY, A.; RAHNUMA, M. Groundwater contaminant transport modeling using modflow and mt3dms: A case study in rajshahi city. *Water Practice & Technology*, IWA Publishing, v. 18, n. 5, p. 1255–1272, 2023. doi:10.2166/wpt.2023.076.
- CLOUGH, R. W. Original formulation of the finite element method. *Finite elements in analysis and design*, Elsevier, v. 7, n. 2, p. 89–101, 1990. doi:10.1016/0168-874X(90)90001-U.
- CONTRERAS, F. R. L. *Um Método de volumes finitos centrado na célula para a simulação de escoamentos bifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópico*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2012.
- CONTRERAS, F. R. L. *Métodos de volumes finitos robustos para a simulação de escoamentos bifásicos de água e óleo em reservatórios de petróleo*. Tese (Doutorado em Ciências de Engenharia Mecânica) — Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2017.
- CONTRERAS, F. R. L.; CARVALHO, D. K. E.; GALINDEZ-RAMIREZ, G.; LYRA, P. R. M. A non-linear finite volume method coupled with a modified higher order muscl-type method for the numerical simulation of two-phase flows in non-homogeneous and non-isotropic oil reservoirs. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 92, p. 120–133, 2021. doi:10.1016/j.camwa.2021.03.023.
- CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. A new multipoint flux approximation method with a quasi-local stencil (mpfa-ql) for the simulation of diffusion problems in anisotropic and heterogeneous media. *Applied Mathematical Modelling*, v. 70, p. 659–676, 2019. doi:10.1016/j.apm.2019.01.033.
- CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; SOUZA, M. R. A.; CARVALHO, D. K. E. A cell-centered multipoint flux approximation method with a diamond stencil coupled with a higher order finite volume method for the simulation of oil–water displacements in heterogeneous and anisotropic petroleum reservoirs. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 127, p. 1–16, 2016. doi:10.1016/j.compfluid.2015.11.013.
- CONTRERAS, F. R. L.; OLIVEIRA, D. L. A.; LYRA, P. R. M.; ANTUNES, A. R. E.; CARVALHO, D. K. E. A multipoint flux approximation method based on harmonic points to simulate highly heterogeneous and anisotropic aquifers. In: *XLIV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering*. [S.l.: s.n.], 2023. v. 5, n. 05.
- CONTRERAS, F. R. L.; SOUZA, M. R. A.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. A mpfa method using harmonic points coupled to a multidimensional optimal order detection method (mood) for the simulation of oil-water displacements in petroleum reservoirs. *Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia*, v. 2, n. 21, p. 76–95, 2017. doi:10.26512/ripe.v2i21.21699.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 49, n. 1, p. 1–23, 1943.

DRUETTA, P.; TESI, P.; PERSIS, C. D.; PICCHIONI, F. Methods in oil recovery processes and reservoir simulation. *Advances in Chemical Engineering and Science*, p. 399–435, 2016. doi:10.4236/aces.2016.64039.

EDWARDS, M. G.; ROGERS, C. F. Finite volume discretization with imposed flux continuity for the general tensor pressure equation. *Computational geosciences*, Springer, v. 2, p. 259–290, 1998. doi:10.1023/A:1011510505406.

EIGESTAD, G.; KLAUSEN, R. On the convergence of the multi-point flux approximation o-method: Numerical experiments for discontinuous permeability. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, Wiley Online Library, v. 21, n. 6, p. 1079–1098, 2005. doi:10.1002/num.20079.

EWING, R. E. *The mathematics of reservoir simulation*. Filadélfia, EUA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983. ISBN 0-89871-192-4.

EYMARD, R.; GUICHARD, C.; HERBIN, R. Small-stencil 3d schemes for diffusive flows in porous media. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, EDP Sciences, v. 46, n. 2, p. 265–290, 2012. doi:10.1051/m2an/2011040.

FAN, X.; SALAMA, A.; SUN, S. A locally and globally phase-wise mass conservative numerical algorithm for the two-phase immiscible flow problems in porous media. *Computers and Geotechnics*, v. 119, p. 103370, 2020. doi:10.1016/j.compgeo.2019.103370.

FANCHI, J. R. *Principles of applied reservoir simulation*. Oxford, Reino Unido: Elsevier, 2006. ISBN 978-0-7506-7933-6.

FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational methods for fluid dynamics*. Nova York, EUA: Springer, 2002. ISBN 3-540-42074-6.

GAO, Z.; WU, J. A linearity-preserving cell-centered scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion equations on general meshes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 67, n. 12, p. 2157–2183, 2010. doi:10.1002/fld.2496.

GAO, Z.; WU, J. A small stencil and extremum-preserving scheme for anisotropic diffusion problems on arbitrary 2d and 3d meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 250, p. 308–331, 2013. doi:10.1016/j.jcp.2013.05.013.

GAO, Z.; WU, J. A linearity-preserving cell-centered scheme for the anisotropic diffusion equations. In: *Finite Volumes for Complex Applications VII-Methods and Theoretical Aspects: FVCA 7, Berlin, June 2014*. Suíça: Springer, 2014. p. 293–301. doi:10.1007/978-3-319-05684-5_28.

GODUNOV, S. K.; BOHACHEVSKY, I. Finite difference method for numerical computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Matematičeskij sbornik*, v. 47, n. 3, p. 271–306, 1959. HAL Id:hal-01620642.

HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, v. 49, p. 357–393, 1983. doi:10.1006/jcph.1997.5713.

- HE, H.; SHAN, H.; MO, D.; LIU, Y.; PENG, S.; CHENG, Y.; CHEN, M.; YAN, Z. Simulation study on the environmental impact of rare earth ore development on groundwater in hilly areas: a case study in nuodong, china. *Water*, MDPI, v. 15, n. 2, p. 263, 2023. doi:10.3390/w15020263.
- HELMIG, R. *Multiphase flow and transport processes in the subsurface: a contribution to the modeling of hydrosystems*. Berlim, Alemanha: Springer-Verlag, 1997. v. 1. ISBN 3-540-62703-0.
- HOGEWEG, S.; STROBEL, G.; HAGEMANN, B. Benchmark study for the simulation of underground hydrogen storage operations. *Computational Geosciences*, Springer, v. 26, n. 6, p. 1367–1378, 2022. doi:10.1007/s10596-022-10163-5.
- KEILEGAVLEN, E.; BERGE, R.; FUMAGALLI, A.; STARNONI, M.; STEFANSSON, I.; VARELA, J.; BERRE, I. Porepy: An open-source software for simulation of multiphysics processes in fractured porous media. *Computational Geosciences*, Springer, v. 25, p. 243–265, 2021. doi:10.1007/s10596-020-10002-5.
- KHALILI, Y.; AHMADI, M. Reservoir modeling & simulation: Advancements, challenges, and future perspectives. *Journal of Chemical and Petroleum Engineering*, University of Tehran, v. 57, n. 2, p. 343–364, 2023. doi:10.22059/jchpe.2023.363392.1447.
- KLAUSEN, R.; RADU, F.; EIGESTAD, G. Convergence of mpfa on triangulations and for richards' equation. *International journal for numerical methods in fluids*, Wiley Online Library, v. 58, n. 12, p. 1327–1351, 2008. doi:10.1002/fld.1787.
- KLAUSEN, R. A.; WINTHER, R. Convergence of multipoint flux approximations on quadrilateral grids. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, Wiley Online Library, v. 22, n. 6, p. 1438–1454, 2006. doi:10.1002/num.20158.
- KONIKOW, L. F.; GLYNN, P. D. Modeling groundwater flow and quality. In: *Essentials of Medical Geology: Revised Edition*. [S.l.]: Springer, 2012. p. 727–753. doi:10.1007/978-94-007-4375-5_33.
- KOSKINEN, L.; LAITINEN, M.; LÖFMAN, J.; MELING, K.; MESZAROS, F. Feflow: a finite element code for simulating groundwater flow, heat transfer and solute transport. *WIT Transactions on Ecology and the Environment*, WIT Press, v. 16, 1996. doi:10.2495/ENV960271.
- LAMINE, M. S. *Multi-dimensional higher resolution methods for flow in porous media*. Tese (Civil and Computational Engineering) — School of Engineering, University of Wales Swansea, Wales, United Kingdom, 2009.
- LEER, B. V. Towards the ultimate conservative difference scheme. v. a second-order sequel to godunov's method. *Journal of computational Physics*, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 101–136, 1979. doi:10.1016/0021-9991(79)90145-1.
- LIMA, P. G. de; BACELLAR, L. de A. P.; DRUMOND, F. N. Quantification by numerical simulation of the impact of gullies on the water budget of a basement area, southeastern brazil. *Hydrological Sciences Journal*, Taylor & Francis, v. 63, n. 12, p. 1804–1816, 2018. doi:10.1080/02626667.2018.1539231.

- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Florianópolis: Grupo Gen-LTC, 2004. ISBN 978-85-216-3335-8.
- MCDONALD, M. G.; HARBAUGH, A. W. *A modular three-dimensional finite-difference ground-water flow model*. U.S. G.P.O.: US Geological Survey, 1988. doi:10.3133/twri06A1.
- MIKYŠKA, J.; FIROOZABADI, A. Implementation of higher-order methods for robust and efficient compositional simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 8, p. 2898–2913, 2010. doi:10.1016/j.jcp.2009.12.022.
- MOORTGAT, J.; SUN, S.; FIROOZABADI, A. Compositional modeling of three-phase flow with gravity using higher-order finite element methods. *Water Resources Research*, Wiley Online Library, v. 47, n. 5, 2011. doi:10.1029/2010WR00980.
- MOREL, C. R. G.; GRAF, T. A benchmark for variably saturated variable-density variable-viscosity flow and solute transport in porous media. *Hydrogeology Journal*, Springer, v. 31, n. 7, p. 1903–1919, 2023. doi:10.1007/s10040-023-02673-y.
- MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. *Fluid mechanics and its applications the finite volume method in computational fluid dynamics*. Nova York, EUA: Springer Cham, 2016. ISBN 978-3-319-16873-9.
- NASROLLAHZADEH, B.; AMIRI, H. A. A.; GHABEZLOO, S. Field-scale fully coupled simulation of fluid flow and geomechanics: Gas storage/recovery process in a depleted sandstone reservoir. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, Elsevier, v. 200, p. 108423, 2021. doi:10.1016/j.petrol.2021.108423.
- NEGARA, A.; SALAMA, A.; SUN, S. Multiphase flow simulation with gravity effect in anisotropic porous media using multipoint flux approximation. *Computers & Fluids*, v. 114, p. 66–74, 2015. doi:10.1016/j.compfluid.2015.02.012.
- NJIFENJOU, A.; KINFACK, A. Convergence analysis of an mpfa method for flow problems in anisotropic heterogeneous porous media. *International Journal on Finite Volumes*, v. 5, n. 1, p. 1–40, 2008. HAL Id:hal-01120075v2.
- ODEN, J.; STROUBOULIS, T.; DEVLOO, P. Adaptive finite element methods for the analysis of inviscid compressible flow: Part i. fast refinement/unrefinement and moving mesh methods for unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 59, n. 3, p. 327–362, 1986. doi:10.1016/0022-460X(80)90652-5.
- PATWARDHAN, S. D.; BHORE, N.; BANERJEE, A.; KUMAR, G. S. Impact of dynamic slippage on productivity of shale reservoirs. *World Journal of Engineering*, Emerald Group Publishing Limited, v. 12, n. 5, p. 443–451, 2015. doi:10.1260/1708-5284.12.5.443.
- PEACEMAN, D. W. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Nova York, EUA: Elsevier, 1977. ISBN 0-444-41578-5.
- QUEIROZ, L. E. S.; SOUZA, M. R. A.; CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. de. On the accuracy of a nonlinear finite volume method for the solution of diffusion problems using different interpolations strategies. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 74, n. 4, p. 270–291, 2013. doi:10.1002/fld.3850.

SHAO, Q.; MATTHAI, S.; DRIESNER, T.; GROSS, L. Predicting plume spreading during co 2 geo-sequestration: benchmarking a new hybrid finite element–finite volume compositional simulator with asynchronous time marching. *Computational Geosciences*, Springer, v. 25, p. 299–323, 2021. doi:10.1007/s10596-020-10006-1.

SHELDON, J. W.; CARDWELL, W. T. One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium. *Transactions of the AIME, SPE*, v. 216, n. 01, p. 290–296, 1959. doi:10.2118/978-G.

SHENG, Z.; YUAN, G. A nine point scheme for the approximation of diffusion operators on distorted quadrilateral meshes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 30, n. 3, p. 1341–1361, 2008. doi:10.1137/060665853.

SILVA, P. C. G. D.; PACHECO, G. L. S. S.; ALBUQUERQUE, P. V. P.; SOUZA, M. R. A.; CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. A modified flux corrected transport method coupled with the mpfa-h formulation for the numerical simulation of two-phase flows in petroleum reservoirs using 2d unstructured meshes. *Computational Geosciences*, Springer, p. 1–25, 2024. doi:10.1007/s10596-024-10306-w.

SONG, K.; REN, X.; MOHAMED, A. K.; LIU, J.; WANG, F. Research on drinking-groundwater source safety management based on numerical simulation. *Scientific Reports*, Springer, v. 10, n. 1, p. 1–17, 2020. doi:10.1038/s41598-020-72520-7.

SOUZA, M. R. A. *Simulação Numérica de Escoamento Bifásico em reservatório de Petróleo Heterogêneos e Anisotrópicos utilizando um Método de Volumes Finitos “Verdadeiramente” Multidimensional com Aproximação de Alta Ordem*. Tese (Doutorado em Ciências de Engenharia Civil) — Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

STARNONI, M.; BERRE, I.; KEILEGAVLEN, E.; NORDBOTTEN, J. M. Consistent mpfa discretization for flow in the presence of gravity. *Water Resources Research*, v. 55, n. 12, p. 10105–10118, 2019. doi:10.1029/2019WR025384.

STARNONI, M.; BERRE, I.; KEILEGAVLEN, E.; NORDBOTTEN, J. M. Modeling and discretization of flow in porous media with thin, full-tensor permeability inclusions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 122, n. 17, p. 4730–4750, 2021. doi:10.1002/nme.6744.

STEFANSSON, I.; VARELA, J.; KEILEGAVLEN, E.; BERRE, I. Flexible and rigorous numerical modelling of multiphysics processes in fractured porous media using porepy. *Results in Applied Mathematics*, Elsevier, v. 21, p. 100428, 2024. doi:10.1016/j.rinam.2023.100428.

STEWART, J. *Cálculo – Volume II*. 7. ed. São Paulo, Brasil: Cengage Learning, 2013. ISBN 978-85-221-1259-3.

STONE, H. L.; GARDER, A. O. Analysis of gas-cap or dissolved-gas drive reservoirs. *Society of Petroleum Engineers Journal, SPE*, v. 1, n. 02, p. 92–104, 1961. doi:10.2118/1518-G.

SUN, N.-Z. *Mathematical modeling of groundwater pollution*. Nova York, EUA: Springer Science & Business Media, 1996. ISBN 978-1-4757-2560-5.

TREFRY, M. G.; MUFFELS, C. Feflow: A finite-element ground water flow and transport modeling tool. *Groundwater*, v. 45, n. 5, p. 525–528, 2007. doi:10.1111/j.1745-6584.2007.00358.x.

- TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956. doi:<https://doi.org/10.2514/8.3664>.
- VERDON, J.; WOODS, A. W. Gravity-driven reacting flows in a confined porous aquifer. *Journal of fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 588, p. 29–41, 2007. doi:[10.1017/S0022112007007069](https://doi.org/10.1017/S0022112007007069).
- WANG, H.; LI, H.; REN, Z. Modeling multiphase fluid flow and salt precipitation due to water vaporization in producing wells of underground gas storage. *Gondwana Research*, Elsevier, v. 122, p. 348–359, 2023. doi:[10.1016/j.gr.2022.12.010](https://doi.org/10.1016/j.gr.2022.12.010).
- WASIF, M. R.; HASAN, M. M. Modeling aquifer storage and recovery potential for seasonal water storage in the flemish alluvial plains of belgium using modflow. *Arabian Journal of Geosciences*, Springer, v. 13, n. 5, p. 234, 2020. doi:[10.1007/s12517-020-5190-6](https://doi.org/10.1007/s12517-020-5190-6).
- WU, J.; DAI, Z.; GAO, Z.; YUAN, G. Linearity preserving nine-point schemes for diffusion equation on distorted quadrilateral meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 229, n. 9, p. 3382–3401, 2010. doi:[10.1016/j.jcp.2010.01.007](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.01.007).
- WU, J.; GAO, Z.; DAI, Z. A stabilized linearity-preserving scheme for the heterogeneous and anisotropic diffusion problems on polygonal meshes. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 231, n. 21, p. 7152–7169, 2012. doi:[10.1016/j.jcp.2012.06.042](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2012.06.042).

APÊNDICE A – CONSTRUÇÃO DA FORÇA GRAVITACIONAL ESCALAR

Segundo Starnoni *et al.* (2019), o vetor gravitacional $\vec{g}$ está relacionado ao gradiente de pressão ∇p por meio da equação:

$$\vec{g} = -\nabla p \quad (\text{A.1})$$

Com isso, relembramos a definição de campo vetorial conservativo, conforme descrito por Stewart (2013), onde um campo vetorial $\vec{F}$ é considerado conservativo se existir uma função escalar f tal que $\vec{F} = \nabla f$. Nesse caso, f é chamada de função potencial de $\vec{F}$. Assim, nosso objetivo inicial é determinar a função potencial $p(x, y)$, a qual pode ser obtida por meio da integração direta das componentes de $\vec{g}$.

Sendo $\vec{g}(x, y)$ um campo vetorial com componentes g_x e g_y , a equação (A.1) determina que a função $p(x, y)$ deve satisfazer as equações diferenciais parciais:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g_x \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = g_y \quad (\text{A.2})$$

De acordo com Stewart (2013), para garantir que essa função potencial exista, é necessário que g_x e g_y tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio $\mathcal{D}$ e, que em todos os seus pontos, as derivadas cruzadas sejam iguais, isto é:

$$\frac{\partial g_x}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

Com essa condição satisfeita, primeiramente, integra-se a equação $\frac{\partial p}{\partial x} = g_x$ em relação a x , resultando em:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = g_x \Rightarrow \partial p = g_x \partial x \Rightarrow \int \partial p = \int g_x \partial x \Rightarrow p(x, y) = \int g_x \partial x + \kappa(y) \quad (\text{A.4})$$

onde $\kappa(y)$ é uma função arbitrária de y .

Para encontrar $\kappa(y)$, deriva-se $p(x, y)$ obtido em (A.4) em relação a y e iguala-se à equação $\frac{\partial p}{\partial y} = g_y$, tornando-se:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = g_y \Rightarrow \frac{\partial (\int g_x \partial x + \kappa(y))}{\partial y} = g_y \Rightarrow \frac{\partial \kappa(y)}{\partial y} = g_y - \frac{\partial}{\partial y} \int g_x \partial x \quad (\text{A.5})$$

Integrando (A.5) em relação a y , obtém-se a expressão da constante $\kappa(y)$, que é dada por:

$$\partial \kappa(y) = \left(g_y - \frac{\partial}{\partial y} \int g_x \partial x \right) \partial y \Rightarrow \kappa(y) = \int \left(g_y - \frac{\partial}{\partial y} \int g_x \partial x \right) \partial y + k_0 \quad (\text{A.6})$$

onde k_0 é uma constante arbitrária.

Substituindo essa expressão na forma geral de $p(x, y)$, dada em (A.4), obtém-se a expressão para a pressão analítica:

$$p(x, y) = \int g_x \partial x + \int \left(g_y - \frac{\partial}{\partial y} \int g_x \partial x \right) \partial y + k_0 \quad (\text{A.7})$$

Por fim, a gravidade escalar dada por g é igual a:

$$g = - \left[\int g_x \partial x + \int \left(g_y - \frac{\partial}{\partial y} \int g_x \partial x \right) \partial y + k_0 \right] \quad (\text{A.8})$$

Assim, o g e o k_0 são definidos com base em condições de contorno ou em considerações físicas do problema.

APÊNDICE B – TABELAS DE ERROS E TAXAS DE CONVERGÊNCIA PARA OS EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste apêndice são apresentadas as tabelas correspondentes aos erros numéricos e às taxas de convergência referentes aos resultados numéricos do Capítulo 4. Em cada tabela, os erros com fonte de cor vermelha representam os maiores erros, enquanto que os erros com fonte de cor azul representam os menores erros.

Tabela B.1 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	1.91e-16	5.50e-16	1.36e-15	6.70e-15	2.64e-14	1.37e-13	5.39e-13
	Consistente	2.01e-16	5.58e-16	1.36e-15	6.69e-15	2.64e-14	1.37e-13	5.39e-13
MPFA-D	Padrão	2.76e-16	5.87e-16	3.06e-15	1.26e-14	4.96e-14	2.02e-13	8.07e-13
	Consistente	1.96e-16	1.25e-15	5.73e-15	2.65e-14	1.11e-13	4.53e-13	1.86e-12
MPFA-H	Padrão	3.59e-16	1.57e-15	5.34e-15	1.93e-14	1.00e-13	3.87e-13	1.23e-12
	Consistente	8.33e-16	2.87e-15	1.08e-14	4.28e-14	2.17e-13	8.54e-13	2.78e-12

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.2 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	3.11e-15	2.95e-15	4.18e-15	5.98e-15	1.03e-14	2.42e-14	4.62e-14
	Consistente	3.11e-15	2.96e-15	4.18e-15	5.98e-15	1.03e-14	2.42e-14	4.62e-14
MPFA-D	Padrão	3.76e-15	4.56e-15	6.98e-15	1.32e-14	2.52e-14	5.05e-14	9.98e-14
	Consistente	2.81e-15	4.12e-15	8.66e-15	1.88e-14	3.83e-14	7.78e-14	1.59e-13
MPFA-H	Padrão	4.40e-15	7.53e-15	1.15e-14	2.06e-14	5.04e-14	9.58e-14	1.51e-13
	Consistente	5.69e-15	9.19e-15	1.61e-14	3.04e-14	7.51e-14	1.46e-13	2.38e-13

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.3 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	1.41e-16	3.11e-16	5.48e-16	1.48e-15	3.11e-15	1.03e-14	1.40e-14
	Consistente	1.32e-16	3.17e-16	4.94e-16	1.46e-15	3.11e-15	1.02e-14	1.40e-14
MPFA-D	Padrão	4.77e-16	5.38e-16	4.04e-16	8.90e-16	2.86e-15	2.35e-15	1.04e-14
	Consistente	3.81e-16	4.40e-16	8.94e-16	1.32e-15	8.89e-15	5.75e-15	1.61e-14
MPFA-H	Padrão	3.57e-16	3.30e-16	4.99e-16	1.32e-15	1.83e-15	7.40e-15	1.06e-14
	Consistente	3.82e-16	4.42e-16	7.50e-16	1.47e-15	3.82e-15	2.26e-14	1.32e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.4 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 a).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	2.66e-15	3.35e-15	3.53e-15	5.42e-15	5.62e-15	6.12e-15	8.01e-15
	Consistente	2.73e-15	3.18e-15	3.61e-15	5.43e-15	5.65e-15	6.12e-15	8.01e-15
MPFA-D	Padrão	4.75e-15	4.10e-15	2.86e-15	3.54e-15	3.95e-15	3.52e-15	3.98e-15
	Consistente	3.65e-15	3.53e-15	3.55e-15	3.49e-15	5.01e-15	3.94e-15	4.08e-15
MPFA-H	Padrão	5.26e-15	4.73e-15	4.08e-15	4.62e-15	4.90e-15	4.88e-15	5.21e-15
	Consistente	4.63e-15	3.67e-15	4.17e-15	4.72e-15	5.07e-15	6.38e-15	5.39e-15

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.5 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	2.54e-16	2.48e-16	1.01e-15	2.55e-15	1.70e-15	1.08e-14	3.61e-14
	Consistente	2.52e-16	2.71e-16	1.01e-15	2.55e-15	1.70e-15	1.08e-14	3.63e-14
MPFA-D	Padrão	4.71e-16	2.89e-16	5.17e-16	1.62e-15	1.33e-15	1.00e-14	7.04e-15
	Consistente	3.09e-16	4.39e-16	1.18e-15	2.95e-15	4.33e-15	2.24e-14	7.83e-15
MPFA-H	Padrão	4.41e-16	6.35e-16	5.52e-16	1.42e-15	2.22e-15	5.32e-15	1.58e-14
	Consistente	5.00e-16	7.04e-16	1.73e-15	2.33e-15	8.67e-15	9.22e-15	2.13e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.6 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	6.48e-15	6.76e-15	8.97e-15	1.21e-14	1.21e-14	1.49e-14	1.62e-14
	Consistente	6.24e-15	6.18e-15	8.91e-15	1.21e-14	1.20e-14	1.50e-14	1.62e-14
MPFA-D	Padrão	5.07e-15	3.78e-15	3.70e-15	4.00e-15	4.17e-15	5.12e-15	4.86e-15
	Consistente	4.55e-15	4.04e-15	3.84e-15	4.49e-15	4.63e-15	6.03e-15	5.06e-15
MPFA-H	Padrão	7.85e-15	7.91e-15	4.43e-15	5.41e-15	5.42e-15	5.60e-15	6.81e-15
	Consistente	4.70e-15	5.59e-15	5.44e-15	5.39e-15	7.23e-15	6.17e-15	6.75e-15

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.7 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	2.36e-16	6.24e-16	1.05e-15	6.99e-15	4.42e-15	4.28e-14	6.08e-14
	Consistente	2.36e-16	5.13e-16	1.07e-15	6.85e-15	4.41e-15	4.28e-14	6.08e-14
MPFA-D	Padrão	2.43e-16	1.08e-15	3.47e-15	3.90e-15	5.19e-14	1.16e-13	1.28e-13
	Consistente	5.79e-16	1.28e-15	4.99e-15	7.27e-15	9.98e-14	2.09e-13	1.65e-13
MPFA-H	Padrão	3.87e-16	2.03e-15	7.14e-15	8.04e-15	3.83e-14	2.01e-13	5.23e-13
	Consistente	6.83e-16	4.77e-15	1.75e-14	1.10e-14	7.18e-14	5.52e-13	1.02e-12

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.8 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	3.89e-15	6.07e-15	7.59e-15	1.29e-14	1.04e-14	1.68e-14	1.93e-14
	Consistente	3.98e-15	6.22e-15	7.64e-15	1.27e-14	1.04e-14	1.68e-14	1.93e-14
MPFA-D	Padrão	6.42e-15	1.04e-14	1.34e-14	1.15e-14	4.55e-14	6.92e-14	4.58e-14
	Consistente	7.39e-15	1.00e-14	1.32e-14	1.45e-14	5.98e-14	8.93e-14	5.39e-14
MPFA-H	Padrão	1.29e-14	1.84e-14	3.08e-14	2.49e-14	3.98e-14	1.06e-13	1.76e-13
	Consistente	1.29e-14	1.84e-14	3.08e-14	2.49e-14	3.98e-14	1.06e-13	1.76e-13

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.9 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	2.90e-16	4.30e-16	1.53e-15	4.55e-15	5.87e-15	1.94e-14	1.22e-14
	Consistente	3.05e-16	4.24e-16	1.54e-15	4.52e-15	5.85e-15	1.94e-14	1.22e-14
MPFA-D	Padrão	4.53e-16	8.14e-16	8.74e-16	2.70e-15	3.41e-15	7.05e-15	1.65e-14
	Consistente	3.94e-16	1.37e-15	1.39e-15	3.09e-15	1.10e-14	1.08e-14	2.64e-14
MPFA-H	Padrão	5.39e-16	9.53e-16	2.32e-15	4.28e-15	6.43e-15	7.94e-15	2.79e-14
	Consistente	4.56e-16	8.88e-16	4.76e-15	9.71e-15	6.28e-15	3.04e-14	9.97e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.10 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	4.50e-15	5.34e-15	8.64e-15	1.06e-14	1.15e-14	1.36e-14	1.37e-14
	Consistente	5.35e-15	5.62e-15	8.80e-15	1.07e-14	1.15e-14	1.36e-14	1.37e-14
MPFA-D	Padrão	1.08e-14	1.01e-14	8.77e-15	1.23e-14	1.08e-14	1.13e-14	1.19e-14
	Consistente	7.13e-15	1.24e-14	9.28e-15	1.09e-14	1.27e-14	1.21e-14	1.36e-14
MPFA-H	Padrão	1.36e-14	1.69e-14	1.73e-14	1.83e-14	1.90e-14	1.91e-14	2.09e-14
	Consistente	1.27e-14	1.89e-14	2.04e-14	2.33e-14	1.88e-14	2.24e-14	2.45e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.11 – Caso 1: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	4.16e-16	5.42e-16	9.26e-16	1.75e-15	5.40e-15	2.22e-14	1.91e-14
	Consistente	4.04e-16	5.07e-16	9.38e-16	1.77e-15	5.41e-15	2.21e-14	1.92e-14
MPFA-D	Padrão	4.78e-16	9.85e-16	1.44e-15	3.30e-15	4.47e-15	1.00e-14	2.23e-14
	Consistente	1.14e-15	6.06e-16	2.06e-15	2.80e-15	1.95e-14	3.10e-14	1.82e-14
MPFA-H	Padrão	6.50e-16	6.12e-16	7.39e-16	3.13e-15	6.96e-15	1.47e-14	1.29e-14
	Consistente	7.86e-16	8.94e-16	4.84e-15	3.59e-15	1.70e-14	3.57e-14	2.06e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.12 – Caso 1: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	1.38e-14	1.21e-14	1.45e-14	2.14e-14	2.26e-14	2.73e-14	2.66e-14
	Consistente	1.34e-14	1.15e-14	1.46e-14	2.12e-14	2.25e-14	2.72e-14	2.66e-14
MPFA-D	Padrão	1.19e-14	8.78e-15	9.18e-15	9.84e-15	9.29e-15	1.13e-14	1.13e-14
	Consistente	1.58e-14	7.83e-15	9.39e-15	9.19e-15	1.48e-14	1.47e-14	1.17e-14
MPFA-H	Padrão	1.39e-14	1.58e-14	1.26e-14	1.48e-14	1.65e-14	1.64e-14	1.60e-14
	Consistente	1.11e-14	1.13e-14	1.81e-14	1.54e-14	1.86e-14	2.00e-14	1.69e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.13 – Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	1.95e-16	3.77e-16	2.28e-15	8.88e-15	3.06e-14	1.34e-13	5.39e-13
	Consistente	1.95e-16	3.51e-16	2.28e-15	8.88e-15	3.06e-14	1.34e-13	5.39e-13
MPFA-D	Padrão	2.00e-03	5.35e-04	1.35e-04	3.39e-05	8.49e-06	2.12e-06	5.30e-07
	Consistente	3.36e-16	1.29e-15	6.40e-15	2.60e-14	1.06e-13	4.25e-13	1.69e-12
MPFA-H	Padrão	2.01e-03	6.08e-04	1.72e-04	4.75e-05	1.29e-05	3.46e-06	9.19e-07
	Consistente	7.97e-16	3.07e-15	1.25e-14	4.31e-14	2.26e-13	8.92e-13	2.76e-12

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.14 – Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	4.45e-02	1.49e-02	5.12e-03	1.79e-03	6.26e-04	2.21e-04	7.78e-05
	Consistente	2.13e-15	2.14e-15	3.72e-15	5.76e-15	8.87e-15	1.79e-14	3.54e-14
MPFA-D	Padrão	3.51e-02	1.33e-02	4.83e-03	1.73e-03	6.17e-04	2.19e-04	7.76e-05
	Consistente	2.88e-15	3.37e-15	7.27e-15	1.41e-14	2.79e-14	5.55e-14	1.10e-13
MPFA-H	Padrão	4.74e-02	1.54e-02	5.22e-03	1.80e-03	6.29e-04	2.21e-04	7.79e-05
	Consistente	4.09e-15	7.54e-15	1.42e-14	2.35e-14	5.98e-14	1.17e-13	1.80e-13

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.15 – Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	3.89e-03	3.86e-03	1.24e-03	2.27e-04	1.55e-04	3.16e-05	1.26e-05
	Consistente	1.96e-16	2.64e-16	7.57e-16	1.98e-15	3.35e-15	1.04e-14	1.25e-14
MPFA-D	Padrão	3.31e-03	3.38e-03	1.13e-03	3.20e-04	1.41e-04	3.36e-05	9.63e-06
	Consistente	5.75e-16	7.83e-16	5.19e-16	1.31e-15	5.90e-15	5.74e-15	2.18e-14
MPFA-H	Padrão	3.99e-03	3.40e-03	1.25e-03	3.28e-04	1.44e-04	3.36e-05	9.83e-06
	Consistente	5.30e-16	4.29e-16	1.19e-15	1.07e-15	2.26e-15	1.47e-14	1.14e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.16 – Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	2.61e-02	2.99e-02	8.65e-03	2.69e-03	1.10e-03	2.76e-04	1.17e-04
	Consistente	1.80e-15	2.18e-15	3.21e-15	4.18e-15	4.43e-15	4.91e-15	5.52e-15
MPFA-D	Padrão	2.37e-02	3.29e-02	8.80e-03	3.05e-03	1.15e-03	2.91e-04	9.69e-05
	Consistente	3.38e-15	3.78e-15	2.47e-15	2.99e-15	3.45e-15	2.93e-15	3.28e-15
MPFA-H	Padrão	3.65e-02	3.64e-02	9.81e-03	3.19e-03	1.19e-03	3.04e-04	1.00e-04
	Consistente	3.78e-15	4.03e-15	3.48e-15	3.44e-15	3.75e-15	4.18e-15	3.82e-15

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.17 – Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	3.40e-03	1.14e-03	3.34e-04	9.33e-05	2.53e-05	6.77e-06	1.79e-06
	Consistente	2.12e-16	5.07e-16	1.35e-15	2.08e-15	6.95e-15	1.55e-14	1.46e-14
MPFA-D	Padrão	3.37e-03	9.54e-04	2.42e-04	5.96e-05	1.46e-05	3.60e-06	8.90e-07
	Consistente	5.50e-16	6.72e-16	1.20e-15	2.57e-15	8.05e-15	1.48e-14	1.18e-14
MPFA-H	Padrão	2.48e-03	8.93e-04	2.73e-04	7.84e-05	2.18e-05	5.93e-06	1.59e-06
	Consistente	2.62e-16	4.26e-16	8.95e-16	2.57e-15	7.08e-15	8.19e-15	2.48e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.18 – Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	1.28e-01	5.50e-02	2.13e-02	7.87e-03	2.85e-03	1.02e-03	3.62e-04
	Consistente	5.05e-15	7.39e-15	8.36e-15	9.96e-15	1.27e-14	1.48e-14	1.50e-14
MPFA-D	Padrão	1.43e-01	5.61e-02	2.14e-02	7.88e-03	2.85e-03	1.02e-03	3.62e-04
	Consistente	8.27e-15	7.68e-15	5.80e-15	6.82e-15	8.26e-15	8.54e-15	8.78e-15
MPFA-H	Padrão	1.52e-01	5.90e-02	2.19e-02	7.98e-03	2.87e-03	1.02e-03	3.63e-04
	Consistente	7.58e-15	8.49e-15	8.07e-15	9.15e-15	1.03e-14	9.69e-15	1.05e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.19 – Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	6.46e-03	2.41e-03	8.92e-04	3.25e-04	1.17e-04	4.20e-05	1.49e-05
	Consistente	3.07e-16	1.53e-15	1.01e-15	1.85e-15	7.84e-15	2.42e-14	8.43e-14
MPFA-D	Padrão	5.73e-03	1.89e-03	6.29e-04	2.15e-04	7.47e-05	2.62e-05	9.22e-06
	Consistente	8.07e-16	6.67e-16	8.69e-15	1.36e-14	7.46e-14	1.38e-13	1.66e-13
MPFA-H	Padrão	1.03e-02	3.52e-03	1.18e-03	3.97e-04	1.35e-04	4.66e-05	1.62e-05
	Consistente	6.76e-16	3.41e-15	9.43e-15	8.72e-15	5.34e-14	3.21e-13	5.60e-13

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.20 – Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	1.95e-01	5.99e-02	1.93e-02	6.48e-03	2.23e-03	7.75e-04	2.72e-04
	Consistente	3.25e-15	7.16e-15	5.86e-15	6.73e-15	8.91e-15	1.04e-14	1.58e-14
MPFA-D	Padrão	1.29e-01	5.10e-02	1.89e-02	6.85e-03	2.45e-03	8.70e-04	3.08e-04
	Consistente	7.74e-15	5.97e-15	1.60e-14	1.55e-14	3.65e-14	4.73e-14	4.22e-14
MPFA-H	Padrão	2.38e-01	8.09e-02	2.81e-02	9.82e-03	3.45e-03	1.22e-03	4.30e-04
	Consistente	9.70e-15	1.61e-14	2.08e-14	2.04e-14	3.02e-14	9.77e-14	1.11e-13

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.21 – Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	6.92e-03	3.09e-03	1.22e-03	3.75e-04	1.61e-04	4.83e-05	1.89e-05
	Consistente	1.93e-16	5.63e-16	1.10e-15	3.10e-15	3.79e-15	1.43e-14	2.67e-14
MPFA-D	Padrão	7.81e-03	2.50e-03	9.65e-04	3.50e-04	1.31e-04	3.54e-05	1.21e-05
	Consistente	5.57e-16	1.66e-15	2.18e-15	3.03e-15	4.30e-15	2.30e-14	2.84e-14
MPFA-H	Padrão	1.11e-02	3.50e-03	1.71e-03	5.31e-04	2.02e-04	5.59e-05	1.90e-05
	Consistente	2.97e-16	1.39e-15	4.02e-15	5.22e-15	8.05e-15	1.99e-14	1.09e-13

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.22 – Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	2.31e-01	5.92e-02	1.94e-02	6.19e-03	2.21e-03	8.05e-04	2.78e-04
	Consistente	2.90e-15	5.60e-15	5.90e-15	8.19e-15	8.43e-15	1.03e-14	1.04e-14
MPFA-D	Padrão	1.76e-01	5.24e-02	2.09e-02	7.91e-03	2.53e-03	9.27e-04	3.16e-04
	Consistente	8.02e-15	9.11e-15	7.72e-15	8.06e-15	9.07e-15	1.09e-14	1.11e-14
MPFA-H	Padrão	2.92e-01	7.88e-02	2.76e-02	1.07e-02	3.38e-03	1.23e-03	4.24e-04
	Consistente	8.61e-15	1.64e-14	1.55e-14	1.44e-14	1.56e-14	1.57e-14	2.02e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.23 – Caso 2: Erro da pressão ε_p para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	6.16e-03	2.34e-03	9.09e-04	3.71e-04	1.60e-04	7.29e-05	3.45e-05
	Consistente	1.57e-16	4.46e-16	8.54e-16	2.52e-15	8.77e-15	1.09e-14	1.96e-14
MPFA-D	Padrão	1.35e-03	7.74e-04	4.38e-04	2.34e-04	1.21e-04	6.15e-05	3.10e-05
	Consistente	1.05e-15	1.02e-15	2.14e-15	1.69e-15	1.31e-14	2.11e-14	2.47e-14
MPFA-H	Padrão	2.11e-03	6.66e-04	2.51e-04	1.09e-04	5.16e-05	2.52e-05	1.24e-05
	Consistente	8.46e-16	1.28e-15	1.42e-15	2.25e-15	1.12e-14	2.57e-14	3.36e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.24 – Caso 2: Erro do fluxo ε_q para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional	4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	5.27e-02	1.69e-02	6.01e-03	2.16e-03	7.74e-04	2.76e-04	9.84e-05
	Consistente	2.40e-04	6.81e-05	1.71e-05	4.41e-06	1.11e-06	2.74e-07	6.93e-08
MPFA-D	Padrão	3.90e-02	1.60e-02	5.40e-03	1.69e-03	5.19e-04	1.60e-04	5.07e-05
	Consistente	2.26e-14	1.50e-14	1.57e-14	1.53e-14	1.94e-14	1.94e-14	2.02e-14
MPFA-H	Padrão	5.31e-02	1.29e-02	3.35e-03	9.07e-04	2.53e-04	7.30e-05	2.17e-05
	Consistente	2.07e-14	2.18e-14	2.07e-14	2.31e-14	2.75e-14	3.02e-14	2.94e-14

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.25 – Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	2.38e-03	5.97e-04	1.50e-04	3.74e-05	9.35e-06	2.34e-06	5.84e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	2.40e-03	6.02e-04	1.51e-04	3.77e-05	9.42e-06	2.35e-06	5.88e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-D	Padrão	ε_p	2.90e-03	7.65e-04	1.94e-04	4.88e-05	1.22e-05	3.05e-06	7.63e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.92	1.98	1.99	2.00	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	4.86e-03	1.22e-03	3.04e-04	7.60e-05	1.90e-05	4.75e-06	1.19e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	1.18e-03	3.64e-04	9.65e-05	2.45e-05	6.16e-06	1.54e-06	3.86e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.70	1.91	1.98	1.99	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	2.02e-03	5.38e-04	1.43e-04	3.77e-05	9.93e-06	2.61e-06	6.85e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.91	1.91	1.92	1.93	1.93	1.93

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.26 – Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	7.04e-04	1.13e-04	1.90e-05	3.28e-06	5.73e-07	1.01e-07	1.77e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.64	2.57	2.54	2.52	2.51	2.50
	Consistente	ε_q	5.25e-04	6.23e-05	7.57e-06	9.31e-07	1.15e-07	1.44e-08	1.79e-09
		$\mathcal{R}_q$	-	3.08	3.04	3.02	3.01	3.01	3.00
MPFA-D	Padrão	ε_q	6.65e-03	9.11e-04	1.24e-04	1.70e-05	2.38e-06	3.42e-07	5.13e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.87	2.88	2.87	2.84	2.80	2.74
	Consistente	ε_q	2.95e-03	3.74e-04	4.82e-05	6.41e-06	8.94e-07	1.32e-07	2.07e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.98	2.96	2.91	2.84	2.76	2.67
MPFA-H	Padrão	ε_q	6.25e-03	8.64e-04	1.17e-04	1.57e-05	2.11e-06	2.86e-07	3.95e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.85	2.89	2.90	2.90	2.88	2.86
	Consistente	ε_q	2.68e-03	5.92e-04	1.41e-04	3.46e-05	8.62e-06	2.15e-06	5.39e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.18	2.08	2.02	2.01	2.00	2.00

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.27 – Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	2.55e-03	7.85e-04	1.88e-04	4.35e-05	1.10e-05	2.69e-06	7.23e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.70	2.06	2.11	1.98	2.04	1.89
	Consistente	ε_p	2.59e-03	7.86e-04	1.89e-04	4.52e-05	1.14e-05	2.70e-06	7.17e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	2.06	2.06	1.99	2.08	1.91
MPFA-D	Padrão	ε_p	3.02e-03	9.16e-04	2.04e-04	5.34e-05	1.26e-05	3.21e-06	7.80e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	2.17	1.93	2.08	1.98	2.04
	Consistente	ε_p	5.10e-03	1.28e-03	2.93e-04	7.77e-05	1.89e-05	4.72e-06	1.19e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.99	2.13	1.91	2.04	2.00	1.99
MPFA-H	Padrão	ε_p	1.33e-03	4.93e-04	1.29e-04	3.30e-05	7.53e-06	1.77e-06	4.18e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.43	1.93	1.97	2.13	2.09	2.08
	Consistente	ε_p	2.51e-03	7.33e-04	1.45e-04	4.80e-05	1.18e-05	2.47e-06	7.61e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.78	2.34	1.59	2.03	2.25	1.70

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.28 – Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	9.37e-04	4.52e-04	7.98e-05	1.72e-05	4.32e-06	8.27e-07	2.68e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.05	2.50	2.21	2.00	2.38	1.62
	Consistente	ε_q	7.95e-04	3.93e-04	7.66e-05	1.69e-05	4.20e-06	8.31e-07	2.66e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.02	2.36	2.18	2.01	2.34	1.64
MPFA-D	Padrão	ε_q	7.01e-03	1.08e-03	1.80e-04	3.44e-05	6.48e-06	1.16e-06	2.12e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.71	2.58	2.39	2.41	2.48	2.46
	Consistente	ε_q	3.14e-03	5.23e-04	6.50e-05	1.00e-05	1.41e-06	1.79e-07	2.61e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.58	3.01	2.70	2.83	2.97	2.78
MPFA-H	Padrão	ε_q	6.53e-03	9.75e-04	1.62e-04	3.12e-05	6.14e-06	1.10e-06	2.00e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.74	2.59	2.37	2.35	2.48	2.46
	Consistente	ε_q	2.79e-03	1.28e-03	1.17e-04	5.65e-05	1.18e-05	7.21e-07	6.98e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.13	3.45	1.05	2.26	4.03	0.05

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.29 – Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	4.01e-04	1.06e-04	2.73e-05	6.93e-06	1.75e-06	4.38e-07	1.10e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.91	1.96	1.98	1.99	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	3.83e-04	1.08e-04	2.67e-05	6.81e-06	1.72e-06	4.36e-07	1.07e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.83	2.01	1.97	1.99	1.98	2.02
MPFA-D	Padrão	ε_p	5.39e-04	1.43e-04	3.66e-05	9.27e-06	2.33e-06	5.83e-07	1.46e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.92	1.96	1.98	1.99	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	6.67e-04	1.66e-04	4.13e-05	1.03e-05	2.57e-06	6.42e-07	1.60e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.01	2.01	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	2.22e-04	6.84e-05	1.85e-05	4.78e-06	1.21e-06	3.03e-07	7.58e-08
		$\mathcal{R}_p$	-	1.70	1.88	1.96	1.98	1.99	2.00
	Consistente	ε_p	2.26e-04	5.86e-05	1.65e-05	4.70e-06	1.32e-06	3.65e-07	1.00e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.95	1.83	1.81	1.83	1.85	1.87

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.30 – Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	1.17e-03	2.27e-04	4.70e-05	9.36e-06	1.78e-06	3.29e-07	5.97e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.37	2.27	2.33	2.39	2.44	2.46
	Consistente	ε_q	1.32e-03	3.18e-04	7.70e-05	2.15e-05	5.50e-06	1.38e-06	3.55e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.06	2.05	1.84	1.96	2.00	1.95
MPFA-D	Padrão	ε_q	8.08e-03	1.17e-03	1.69e-04	2.52e-05	3.92e-06	6.35e-07	1.06e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.79	2.80	2.74	2.68	2.63	2.58
	Consistente	ε_q	3.01e-03	3.83e-04	4.98e-05	6.69e-06	9.40e-07	1.40e-07	2.20e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.97	2.94	2.90	2.83	2.75	2.67
MPFA-H	Padrão	ε_q	7.62e-03	1.08e-03	1.51e-04	2.17e-05	3.24e-06	5.08e-07	8.30e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.81	2.84	2.80	2.74	2.67	2.61
	Consistente	ε_q	2.50e-03	7.26e-04	1.94e-04	4.98e-05	1.26e-05	3.18e-06	7.99e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.78	1.91	1.96	1.98	1.99	1.99

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.31 – Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	1.78e-03	3.99e-04	9.41e-05	2.29e-05	5.64e-06	1.40e-06	3.50e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.16	2.08	2.04	2.02	2.01	2.00
	Consistente	ε_p	1.75e-03	4.22e-04	1.04e-04	2.59e-05	6.45e-06	1.61e-06	4.03e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.05	2.02	2.01	2.00	2.00	2.00
MPFA-D	Padrão	ε_p	2.52e-03	6.87e-04	1.80e-04	4.63e-05	1.17e-05	2.95e-06	7.41e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.88	1.93	1.96	1.98	1.99	1.99
	Consistente	ε_p	3.45e-03	8.80e-04	2.23e-04	5.61e-05	1.41e-05	3.53e-06	8.82e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.97	1.98	1.99	1.99	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	3.56e-03	1.03e-03	2.72e-04	7.00e-05	1.77e-05	4.46e-06	1.12e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.80	1.91	1.96	1.98	1.99	2.00
	Consistente	ε_p	4.02e-03	1.09e-03	2.84e-04	7.25e-05	1.83e-05	4.61e-06	1.16e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.88	1.94	1.97	1.98	1.99	2.00

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.32 – Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	2.45e-03	4.85e-04	8.99e-05	1.63e-05	2.90e-06	5.16e-07	9.15e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.34	2.43	2.47	2.48	2.49	2.50
	Consistente	ε_q	9.51e-04	1.84e-04	3.38e-05	6.08e-06	1.08e-06	1.92e-07	3.40e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.37	2.45	2.48	2.49	2.49	2.50
MPFA-D	Padrão	ε_q	7.03e-03	1.11e-03	1.80e-04	3.00e-05	5.09e-06	8.78e-07	1.53e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.66	2.63	2.59	2.56	2.54	2.52
	Consistente	ε_q	3.45e-03	4.79e-04	7.24e-05	1.17e-05	1.97e-06	3.39e-07	5.92e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.85	2.73	2.63	2.57	2.54	2.52
MPFA-H	Padrão	ε_q	8.00e-03	1.30e-03	2.14e-04	3.61e-05	6.21e-06	1.08e-06	1.89e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.62	2.60	2.57	2.54	2.52	2.51
	Consistente	ε_q	3.77e-03	6.57e-04	1.22e-04	2.41e-05	5.10e-06	1.15e-06	2.69e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.52	2.43	2.34	2.24	2.15	2.09

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.33 – Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	1.96e-03	6.22e-04	1.34e-04	3.05e-05	8.06e-06	1.73e-06	4.81e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.65	2.21	2.13	1.92	2.22	1.85
	Consistente	ε_p	1.80e-03	5.47e-04	1.35e-04	3.16e-05	7.94e-06	1.86e-06	5.00e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	2.02	2.10	1.99	2.09	1.90
MPFA-D	Padrão	ε_p	2.79e-03	7.84e-04	1.82e-04	5.02e-05	1.19e-05	3.02e-06	7.53e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.83	2.11	1.86	2.07	1.98	2.00
	Consistente	ε_p	3.63e-03	9.33e-04	2.14e-04	5.70e-05	1.42e-05	3.51e-06	8.87e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.96	2.12	1.91	2.01	2.01	1.98
MPFA-H	Padrão	ε_p	3.35e-03	1.15e-03	2.97e-04	8.40e-05	1.96e-05	4.90e-06	1.14e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.54	1.95	1.82	2.10	2.00	2.10
	Consistente	ε_p	4.39e-03	1.23e-03	2.76e-04	8.43e-05	1.91e-05	4.87e-06	1.18e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.84	2.16	1.71	2.15	1.97	2.04

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.34 – Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	2.75e-03	6.69e-04	1.20e-04	2.41e-05	5.19e-06	1.02e-06	2.92e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.04	2.48	2.31	2.22	2.35	1.80
	Consistente	ε_q	9.73e-04	3.19e-04	5.99e-05	1.16e-05	2.70e-06	4.99e-07	1.53e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.61	2.41	2.37	2.10	2.43	1.70
MPFA-D	Padrão	ε_q	6.68e-03	1.35e-03	2.38e-04	4.81e-05	7.80e-06	1.37e-06	2.31e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.31	2.51	2.31	2.62	2.51	2.57
	Consistente	ε_q	3.77e-03	5.83e-04	7.88e-05	1.44e-05	2.14e-06	3.75e-07	6.21e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.69	2.89	2.46	2.74	2.51	2.60
MPFA-H	Padrão	ε_q	8.71e-03	2.36e-03	4.12e-04	1.16e-04	2.21e-05	4.09e-06	7.36e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.88	2.52	1.82	2.40	2.43	2.47
	Consistente	ε_q	4.28e-03	9.60e-04	2.03e-04	4.51e-05	6.59e-06	1.30e-06	2.80e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.16	2.24	2.17	2.78	2.34	2.22

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.35 – Caso 3: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	4.01e-04	1.06e-04	2.73e-05	6.93e-06	1.75e-06	4.38e-07	1.10e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.91	1.96	1.98	1.99	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	2.40e-04	6.81e-05	1.71e-05	4.41e-06	1.11e-06	2.74e-07	6.93e-08
		$\mathcal{R}_p$	-	1.82	2.00	1.95	1.98	2.02	1.98
MPFA-D	Padrão	ε_p	3.64e-04	9.46e-05	2.43e-05	6.17e-06	1.56e-06	3.91e-07	9.78e-08
		$\mathcal{R}_p$	-	1.95	1.96	1.98	1.99	1.99	2.00
	Consistente	ε_p	4.21e-04	1.12e-04	2.91e-05	7.42e-06	1.87e-06	4.71e-07	1.18e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.91	1.95	1.97	1.98	1.99	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	2.98e-04	8.87e-05	2.42e-05	6.33e-06	1.62e-06	4.09e-07	1.03e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.75	1.87	1.94	1.97	1.98	1.99
	Consistente	ε_p	4.76e-04	1.39e-04	3.79e-05	9.92e-06	2.54e-06	6.43e-07	1.62e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.77	1.88	1.93	1.97	1.98	1.99

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.36 – Caso 3: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	2.32e-03	4.71e-04	9.13e-05	1.70e-05	3.08e-06	5.52e-07	9.83e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.30	2.37	2.43	2.46	2.48	2.49
	Consistente	ε_q	1.25e-03	2.66e-04	6.66e-05	1.58e-05	3.66e-06	1.40e-06	2.25e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.23	2.00	2.07	2.11	1.39	2.63
MPFA-D	Padrão	ε_q	5.18e-03	8.80e-04	1.54e-04	2.69e-05	4.67e-06	8.13e-07	1.42e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.56	2.52	2.52	2.52	2.52	2.52
	Consistente	ε_q	3.07e-03	4.34e-04	6.64e-05	1.09e-05	1.86e-06	3.24e-07	5.70e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.82	2.71	2.61	2.55	2.52	2.51
MPFA-H	Padrão	ε_q	6.64e-03	1.00e-03	1.69e-04	2.94e-05	5.17e-06	9.06e-07	1.03e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.73	2.57	2.52	2.51	2.51	3.14
	Consistente	ε_q	3.30e-03	5.91e-04	1.12e-04	2.28e-05	4.93e-06	1.12e-06	2.66e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.48	2.40	2.30	2.21	2.13	2.08

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.37 – Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	6.05e-04	1.51e-04	3.78e-05	9.45e-06	2.36e-06	5.91e-07	1.48e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	6.10e-04	1.52e-04	3.81e-05	9.52e-06	2.38e-06	5.95e-07	1.49e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-D	Padrão	ε_p	1.99e-03	5.31e-04	1.35e-04	3.38e-05	8.47e-06	2.12e-06	5.30e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.90	1.98	1.99	2.00	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	1.23e-03	3.08e-04	7.69e-05	1.92e-05	4.80e-06	1.20e-06	3.00e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	2.03e-03	6.13e-04	1.72e-04	4.69e-05	1.26e-05	3.36e-06	8.89e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.73	1.84	1.87	1.89	1.91	1.92
	Consistente	ε_p	4.16e-03	1.32e-03	3.92e-04	1.12e-04	3.14e-05	8.65e-06	2.36e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.65	1.76	1.81	1.84	1.86	1.87

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.38 – Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	4.45e-02	1.49e-02	5.12e-03	1.79e-03	6.26e-04	2.21e-04	7.78e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.58	1.54	1.52	1.51	1.51	1.50
	Consistente	ε_q	5.25e-04	6.23e-05	7.57e-06	9.31e-07	1.15e-07	1.44e-08	1.79e-09
		$\mathcal{R}_q$	-	3.08	3.04	3.02	3.01	3.01	3.00
MPFA-D	Padrão	ε_q	3.62e-02	1.33e-02	4.84e-03	1.73e-03	6.17e-04	2.19e-04	7.76e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.44	1.46	1.48	1.49	1.49	1.50
	Consistente	ε_q	2.95e-03	3.74e-04	4.82e-05	6.41e-06	8.94e-07	1.32e-07	2.07e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.98	2.96	2.91	2.84	2.76	2.67
MPFA-H	Padrão	ε_q	4.87e-02	1.55e-02	5.22e-03	1.80e-03	6.29e-04	2.21e-04	7.79e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.65	1.57	1.53	1.52	1.51	1.50
	Consistente	ε_q	4.58e-02	1.08e-02	2.67e-03	6.67e-04	1.66e-04	4.16e-05	1.04e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.08	2.02	2.00	2.00	2.00	2.00

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.39 – Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	3.48e-03	3.49e-03	1.18e-03	2.15e-04	1.46e-04	2.92e-05	1.17e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	-0.01	1.57	2.45	0.56	2.32	1.32
	Consistente	ε_p	6.58e-04	1.99e-04	4.77e-05	1.14e-05	2.88e-06	6.82e-07	1.81e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	2.06	2.06	1.99	2.08	1.91
MPFA-D	Padrão	ε_p	3.04e-03	3.05e-03	1.07e-03	2.99e-04	1.33e-04	3.11e-05	9.00e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	-0.01	1.52	1.83	1.17	2.09	1.79
	Consistente	ε_p	1.29e-03	3.24e-04	7.40e-05	1.96e-05	4.78e-06	1.19e-06	3.00e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.13	1.91	2.04	2.00	1.99
MPFA-H	Padrão	ε_p	3.92e-03	3.14e-03	1.17e-03	3.06e-04	1.34e-04	3.12e-05	9.15e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	0.32	1.43	1.93	1.19	2.11	1.77
	Consistente	ε_p	4.11e-03	2.98e-03	3.63e-04	1.79e-04	4.12e-05	2.94e-06	2.89e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	0.46	3.03	1.02	2.12	3.81	0.03

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.40 – Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	2.61e-02	2.99e-02	8.66e-03	2.69e-03	1.10e-03	2.76e-04	1.17e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	-0.20	1.79	1.69	1.29	1.99	1.24
	Consistente	ε_q	7.95e-04	3.93e-04	7.66e-05	1.69e-05	4.20e-06	8.31e-07	2.66e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.02	2.36	2.18	2.01	2.34	1.64
MPFA-D	Padrão	ε_q	2.43e-02	3.30e-02	8.83e-03	3.05e-03	1.15e-03	2.91e-04	9.69e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	-0.44	1.90	1.53	1.41	1.98	1.59
	Consistente	ε_q	3.14e-03	5.23e-04	6.50e-05	1.00e-05	1.41e-06	1.79e-07	2.61e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.58	3.01	2.70	2.83	2.97	2.78
MPFA-H	Padrão	ε_q	3.86e-02	3.65e-02	9.83e-03	3.19e-03	1.19e-03	3.04e-04	1.00e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	0.08	1.89	1.62	1.42	1.97	1.60
	Consistente	ε_q	4.56e-02	2.10e-02	2.91e-03	8.88e-04	1.90e-04	1.55e-05	1.27e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.12	2.85	1.71	2.22	3.62	0.29

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.41 – Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	3.08e-03	1.05e-03	3.11e-04	8.71e-05	2.38e-05	6.38e-06	1.69e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.56	1.75	1.83	1.87	1.90	1.91
	Consistente	ε_p	3.37e-04	9.42e-05	2.41e-05	6.11e-06	1.55e-06	3.89e-07	9.38e-08
		$\mathcal{R}_p$	-	1.84	1.96	1.98	1.98	1.99	2.05
MPFA-D	Padrão	ε_p	3.15e-03	8.99e-04	2.30e-04	5.69e-05	1.40e-05	3.47e-06	8.60e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.81	1.97	2.01	2.02	2.02	2.01
	Consistente	ε_p	5.98e-04	1.49e-04	3.70e-05	9.23e-06	2.30e-06	5.76e-07	1.44e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.01	2.01	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	2.33e-03	8.46e-04	2.60e-04	7.50e-05	2.09e-05	5.69e-06	1.53e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.46	1.70	1.80	1.84	1.87	1.90
	Consistente	ε_p	1.36e-03	4.18e-04	1.22e-04	3.48e-05	9.72e-06	2.67e-06	7.29e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.70	1.77	1.81	1.84	1.86	1.88

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.42 – Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	1.28e-01	5.51e-02	2.13e-02	7.87e-03	2.85e-03	1.02e-03	3.62e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.22	1.37	1.44	1.47	1.48	1.49
	Consistente	ε_q	1.31e-03	3.65e-04	8.53e-05	2.04e-05	5.55e-06	1.42e-06	3.80e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.84	2.10	2.07	1.88	1.96	1.91
MPFA-D	Padrão	ε_q	1.42e-01	5.61e-02	2.14e-02	7.88e-03	2.85e-03	1.02e-03	3.62e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.34	1.39	1.44	1.47	1.48	1.49
	Consistente	ε_q	3.01e-03	3.83e-04	4.98e-05	6.69e-06	9.40e-07	1.40e-07	2.20e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.97	2.94	2.90	2.83	2.75	2.67
MPFA-H	Padrão	ε_q	1.51e-01	5.90e-02	2.19e-02	7.99e-03	2.87e-03	1.02e-03	3.63e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.36	1.43	1.46	1.48	1.49	1.49
	Consistente	ε_q	2.11e-02	5.46e-03	1.41e-03	3.58e-04	9.05e-05	2.28e-05	5.71e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	1.95	1.96	1.97	1.98	1.99	2.00

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.43 – Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	6.18e-03	2.27e-03	8.34e-04	3.03e-04	1.09e-04	3.90e-05	1.39e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	1.45	1.44	1.46	1.47	1.48	1.49
	Consistente	ε_p	4.43e-04	1.07e-04	2.63e-05	6.54e-06	1.63e-06	4.07e-07	1.02e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	2.05	2.02	2.01	2.00	2.00	2.00
MPFA-D	Padrão	ε_p	5.57e-03	1.81e-03	5.97e-04	2.02e-04	6.99e-05	2.44e-05	8.58e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.62	1.60	1.56	1.53	1.52	1.53
	Consistente	ε_p	8.74e-04	2.23e-04	5.63e-05	1.42e-05	3.56e-06	8.91e-07	2.23e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.97	1.98	1.99	1.99	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	1.03e-02	3.44e-03	1.13e-03	3.75e-04	1.27e-04	4.35e-05	1.51e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	1.58	1.61	1.59	1.57	1.54	1.53
	Consistente	ε_p	1.17e-02	3.53e-03	1.00e-03	2.77e-04	7.48e-05	1.99e-05	5.26e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.73	1.81	1.86	1.89	1.91	1.92

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.44 – Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	1.95e-01	5.99e-02	1.93e-02	6.48e-03	2.23e-03	7.75e-04	2.72e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.70	1.63	1.58	1.54	1.52	1.51
	Consistente	ε_q	9.51e-04	1.84e-04	3.38e-05	6.08e-06	1.08e-06	1.92e-07	3.40e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.37	2.45	2.48	2.49	2.49	2.50
MPFA-D	Padrão	ε_q	1.30e-01	5.11e-02	1.89e-02	6.85e-03	2.45e-03	8.70e-04	3.08e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.35	1.43	1.47	1.48	1.49	1.50
	Consistente	ε_q	3.45e-03	4.79e-04	7.24e-05	1.17e-05	1.97e-06	3.39e-07	5.92e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.85	2.73	2.63	2.57	2.54	2.52
MPFA-H	Padrão	ε_q	2.39e-01	8.10e-02	2.81e-02	9.82e-03	3.45e-03	1.22e-03	4.30e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.56	1.53	1.52	1.51	1.50	1.50
	Consistente	ε_q	2.03e-01	4.77e-02	1.17e-02	2.91e-03	7.25e-04	1.81e-04	4.53e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.09	2.03	2.01	2.00	2.00	2.00

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.45 – Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	6.55e-03	2.89e-03	1.15e-03	3.50e-04	1.50e-04	4.49e-05	1.76e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	1.18	1.33	1.71	1.22	1.74	1.35
	Consistente	ε_p	4.56e-04	1.38e-04	3.42e-05	7.98e-06	2.00e-06	4.71e-07	1.26e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	2.02	2.10	1.99	2.09	1.90
MPFA-D	Padrão	ε_p	7.54e-03	2.31e-03	9.09e-04	3.28e-04	1.23e-04	3.29e-05	1.12e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	1.71	1.34	1.47	1.42	1.90	1.55
	Consistente	ε_p	9.22e-04	2.36e-04	5.41e-05	1.44e-05	3.58e-06	8.86e-07	2.24e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.97	2.12	1.91	2.01	2.01	1.98
MPFA-H	Padrão	ε_p	1.10e-02	3.33e-03	1.63e-03	5.00e-04	1.90e-04	5.21e-05	1.77e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	1.03	1.70	1.40	1.87	1.55
	Consistente	ε_p	1.19e-02	3.68e-03	9.96e-04	2.89e-04	7.53e-05	2.00e-05	5.24e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.70	1.88	1.78	1.94	1.91	1.93

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.46 – Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	2.31e-01	5.93e-02	1.94e-02	6.19e-03	2.21e-03	8.05e-04	2.78e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.96	1.61	1.65	1.49	1.46	1.53
	Consistente	ε_q	9.73e-04	3.19e-04	5.99e-05	1.16e-05	2.70e-06	4.99e-07	1.53e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	1.61	2.41	2.37	2.10	2.43	1.70
MPFA-D	Padrão	ε_q	1.78e-01	5.25e-02	2.09e-02	7.91e-03	2.53e-03	9.27e-04	3.16e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.76	1.33	1.40	1.65	1.45	1.55
	Consistente	ε_q	3.77e-03	5.83e-04	7.88e-05	1.44e-05	2.14e-06	3.75e-07	6.21e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.69	2.89	2.46	2.74	2.51	2.60
MPFA-H	Padrão	ε_q	2.96e-01	7.91e-02	2.76e-02	1.07e-02	3.38e-03	1.23e-03	4.24e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.90	1.52	1.37	1.66	1.46	1.53
	Consistente	ε_q	2.24e-01	5.27e-02	1.18e-02	3.14e-03	7.37e-04	1.83e-04	4.48e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.09	2.16	1.91	2.09	2.01	2.03

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.47 – Caso 4: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	5.98e-03	2.27e-03	8.82e-04	3.60e-04	1.55e-04	7.07e-05	3.35e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	1.40	1.36	1.29	1.21	1.13	1.08
	Consistente	ε_p	2.25e-04	6.21e-05	1.57e-05	3.79e-06	9.64e-07	2.55e-07	6.12e-08
		$\mathcal{R}_p$	-	1.85	1.98	2.06	1.97	1.92	2.06
MPFA-D	Padrão	ε_p	1.39e-03	7.62e-04	4.26e-04	2.27e-04	1.17e-04	5.96e-05	3.00e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	0.87	0.84	0.91	0.95	0.98	0.99
	Consistente	ε_p	3.78e-04	1.01e-04	2.61e-05	6.65e-06	1.68e-06	4.22e-07	1.06e-07
		$\mathcal{R}_p$	-	1.91	1.95	1.97	1.98	1.99	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	1.99e-03	6.35e-04	2.41e-04	1.06e-04	5.00e-05	2.44e-05	1.21e-05
		$\mathcal{R}_p$	-	1.65	1.40	1.19	1.08	1.04	1.02
	Consistente	ε_p	2.68e-03	7.61e-04	2.08e-04	5.60e-05	1.48e-05	3.89e-06	1.01e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.82	1.87	1.90	1.92	1.93	1.94

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.48 – Caso 4: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	5.17e-02	1.68e-02	6.00e-03	2.16e-03	7.74e-04	2.76e-04	9.84e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.62	1.48	1.47	1.48	1.49	1.49
	Consistente	ε_q	1.33e-03	3.04e-04	6.60e-05	1.96e-05	5.23e-06	1.10e-06	2.81e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	2.13	2.20	1.75	1.91	2.25	1.96
MPFA-D	Padrão	ε_q	4.01e-02	1.62e-02	5.42e-03	1.69e-03	5.19e-04	1.60e-04	5.07e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.31	1.58	1.68	1.71	1.69	1.66
	Consistente	ε_q	3.07e-03	4.34e-04	6.64e-05	1.09e-05	1.86e-06	3.24e-07	5.70e-08
		$\mathcal{R}_q$	-	2.82	2.71	2.61	2.55	2.52	2.51
MPFA-H	Padrão	ε_q	5.58e-02	1.32e-02	3.38e-03	9.11e-04	2.54e-04	7.31e-05	2.18e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.08	1.96	1.89	1.84	1.80	1.75
	Consistente	ε_q	6.60e-02	1.60e-02	3.99e-03	1.00e-03	2.52e-04	6.30e-05	1.58e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.04	2.00	1.99	1.99	2.00	2.00

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.49 – Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	6.83e-03	1.71e-03	4.28e-04	1.07e-04	2.68e-05	6.69e-06	1.67e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	6.90e-03	1.72e-03	4.31e-04	1.08e-04	2.69e-05	6.74e-06	1.68e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-D	Padrão	ε_p	8.33e-03	2.19e-03	5.56e-04	1.40e-04	3.50e-05	8.74e-06	2.18e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.93	1.98	1.99	2.00	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	1.39e-02	3.48e-03	8.71e-04	2.18e-04	5.44e-05	1.36e-05	3.40e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	3.50e-03	1.07e-03	2.84e-04	7.23e-05	1.82e-05	4.55e-06	1.14e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.71	1.92	1.98	1.99	2.00	2.00
	Consistente	ε_p	5.91e-03	1.60e-03	4.29e-04	1.14e-04	3.04e-05	8.06e-06	2.13e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.89	1.90	1.91	1.91	1.92	1.92

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.50 – Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral estruturada (Figura 16 a).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	8.63e-02	1.89e-02	5.47e-03	1.82e-03	6.29e-04	2.21e-04	7.79e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.19	1.79	1.59	1.53	1.51	1.50
	Consistente	ε_q	5.25e-02	6.23e-03	7.57e-04	9.31e-05	1.15e-05	1.44e-06	1.79e-07
		$\mathcal{R}_q$	-	3.08	3.04	3.02	3.01	3.01	3.00
MPFA-D	Padrão	ε_q	6.68e-01	9.25e-02	1.34e-02	2.44e-03	6.63e-04	2.22e-04	7.77e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.85	2.79	2.46	1.88	1.58	1.51
	Consistente	ε_q	2.95e-01	3.74e-02	4.82e-03	6.41e-04	8.94e-05	1.32e-05	2.07e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	2.98	2.96	2.91	2.84	2.76	2.67
MPFA-H	Padrão	ε_q	6.33e-01	8.83e-02	1.29e-02	2.40e-03	6.64e-04	2.23e-04	7.80e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.84	2.78	2.42	1.85	1.57	1.51
	Consistente	ε_q	2.98e-01	6.71e-02	1.61e-02	3.97e-03	9.90e-04	2.47e-04	6.19e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.15	2.06	2.02	2.00	2.00	2.00

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.51 – Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	7.21e-03	2.06e-03	6.17e-04	1.34e-04	4.32e-05	7.28e-06	2.17e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.81	1.74	2.20	1.64	2.57	1.75
	Consistente	ε_p	7.43e-03	2.25e-03	5.41e-04	1.29e-04	3.26e-05	7.73e-06	2.05e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	2.06	2.06	1.99	2.08	1.91
MPFA-D	Padrão	ε_p	8.60e-03	2.50e-03	6.34e-04	1.59e-04	4.46e-05	8.96e-06	2.63e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.78	1.98	1.99	1.83	2.32	1.77
	Consistente	ε_p	1.46e-02	3.66e-03	8.38e-04	2.22e-04	5.42e-05	1.35e-05	3.39e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.00	2.13	1.91	2.04	2.00	1.99
MPFA-H	Padrão	ε_p	4.07e-03	1.39e-03	4.26e-04	1.03e-04	2.96e-05	5.69e-06	1.67e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.55	1.71	2.04	1.81	2.38	1.77
	Consistente	ε_p	7.40e-03	2.30e-03	4.37e-04	1.49e-04	3.65e-05	7.16e-06	2.40e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.69	2.40	1.55	2.03	2.35	1.58

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.52 – Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral distorcida (Figura 16 b).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	9.71e-02	5.21e-02	1.20e-02	3.20e-03	1.19e-03	2.89e-04	1.20e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	0.90	2.11	1.91	1.43	2.04	1.27
	Consistente	ε_q	7.95e-02	3.93e-02	7.66e-03	1.69e-03	4.20e-04	8.31e-05	2.66e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.02	2.36	2.18	2.01	2.34	1.64
MPFA-D	Padrão	ε_q	7.00e-01	1.16e-01	2.12e-02	4.79e-03	1.36e-03	3.19e-04	9.98e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.59	2.45	2.14	1.82	2.09	1.68
	Consistente	ε_q	3.14e-01	5.23e-02	6.50e-03	1.00e-03	1.41e-04	1.79e-05	2.61e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	2.58	3.01	2.70	2.83	2.97	2.78
MPFA-H	Padrão	ε_q	6.63e-01	1.07e-01	1.99e-02	4.63e-03	1.37e-03	3.27e-04	1.03e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.63	2.42	2.10	1.76	2.07	1.67
	Consistente	ε_q	3.06e-01	1.45e-01	1.31e-02	6.46e-03	1.35e-03	7.39e-05	7.99e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.08	3.47	1.02	2.26	4.19	-0.11

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.53 – Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	7.30e-03	1.91e-03	4.90e-04	1.24e-04	3.12e-05	7.84e-06	1.97e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.93	1.97	1.98	1.99	1.99	2.00
	Consistente	ε_p	7.12e-03	2.09e-03	5.40e-04	1.31e-04	3.29e-05	8.42e-06	2.08e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.77	1.95	2.04	1.99	1.97	2.02
MPFA-D	Padrão	ε_p	1.02e-02	2.70e-03	6.96e-04	1.77e-04	4.45e-05	1.12e-05	2.80e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.92	1.96	1.98	1.99	1.99	2.00
	Consistente	ε_p	1.29e-02	3.20e-03	7.95e-04	1.98e-04	4.95e-05	1.24e-05	3.09e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.01	2.01	2.00	2.00	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	4.09e-03	1.27e-03	3.45e-04	8.92e-05	2.26e-05	5.71e-06	1.43e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.69	1.88	1.95	1.98	1.99	1.99
	Consistente	ε_p	4.49e-03	1.16e-03	3.23e-04	9.15e-05	2.56e-05	7.07e-06	1.94e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.96	1.84	1.82	1.84	1.86	1.87

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.54 – Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha quadrilateral diagonal (Figura 16 c).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	1.94e-01	6.50e-02	2.34e-02	8.30e-03	2.93e-03	1.03e-03	3.65e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.58	1.48	1.49	1.50	1.50	1.50
	Consistente	ε_q	1.39e-01	3.08e-02	8.36e-03	2.16e-03	5.44e-04	1.41e-04	3.55e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.17	1.88	1.95	1.99	1.94	1.99
MPFA-D	Padrão	ε_q	7.90e-01	1.30e-01	2.84e-02	8.65e-03	2.96e-03	1.04e-03	3.66e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.61	2.19	1.72	1.55	1.51	1.50
	Consistente	ε_q	3.01e-01	3.83e-02	4.98e-03	6.69e-04	9.40e-05	1.40e-05	2.20e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	2.97	2.94	2.90	2.83	2.75	2.67
MPFA-H	Padrão	ε_q	7.62e-01	1.22e-01	2.74e-02	8.58e-03	2.96e-03	1.04e-03	3.66e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.64	2.16	1.68	1.54	1.51	1.50
	Consistente	ε_q	2.48e-01	7.24e-02	1.93e-02	4.98e-03	1.26e-03	3.18e-04	7.98e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.78	1.91	1.96	1.98	1.99	1.99

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.55 – Caso 5: Erro de pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	5.39e-03	1.23e-03	2.99e-04	7.72e-05	2.11e-05	6.13e-06	1.90e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.13	2.04	1.95	1.87	1.78	1.69
	Consistente	ε_p	5.00e-03	1.21e-03	2.98e-04	7.41e-05	1.85e-05	4.61e-06	1.15e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	2.05	2.02	2.01	2.00	2.00	2.00
MPFA-D	Padrão	ε_p	7.43e-03	2.03e-03	5.35e-04	1.38e-04	3.54e-05	9.11e-06	2.39e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.87	1.92	1.95	1.96	1.96	1.93
	Consistente	ε_p	9.87e-03	2.52e-03	6.38e-04	1.60e-04	4.03e-05	1.01e-05	2.52e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.97	1.98	1.99	1.99	2.00	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	1.11e-02	3.17e-03	8.45e-04	2.18e-04	5.61e-05	1.45e-05	3.82e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.80	1.91	1.95	1.96	1.95	1.92
	Consistente	ε_p	1.19e-02	3.22e-03	8.38e-04	2.14e-04	5.42e-05	1.36e-05	3.43e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.89	1.94	1.97	1.98	1.99	1.99

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.56 – Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular estruturada (Figura 16 d).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	3.27e-01	7.85e-02	2.15e-02	6.69e-03	2.25e-03	7.77e-04	2.72e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.06	1.87	1.68	1.58	1.53	1.51
	Consistente	ε_q	9.51e-02	1.84e-02	3.38e-03	6.08e-04	1.08e-04	1.92e-05	3.40e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	2.37	2.45	2.48	2.49	2.49	2.50
MPFA-D	Padrão	ε_q	7.31e-01	1.26e-01	2.67e-02	7.53e-03	2.51e-03	8.75e-04	3.09e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.54	2.24	1.82	1.59	1.52	1.50
	Consistente	ε_q	3.45e-01	4.79e-02	7.24e-03	1.17e-03	1.97e-04	3.39e-05	5.92e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	2.85	2.73	2.63	2.57	2.54	2.52
MPFA-H	Padrão	ε_q	8.75e-01	1.57e-01	3.57e-02	1.05e-02	3.51e-03	1.22e-03	4.30e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.48	2.14	1.77	1.58	1.52	1.51
	Consistente	ε_q	4.98e-01	8.81e-02	1.67e-02	3.39e-03	7.34e-04	1.68e-04	3.98e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.50	2.40	2.30	2.21	2.13	2.07

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.57 – Caso 5: Erro da pressão ε_p e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_p$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	5.78e-03	1.82e-03	4.40e-04	1.02e-04	3.33e-05	6.96e-06	2.19e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.67	2.05	2.11	1.61	2.26	1.67
	Consistente	ε_p	5.15e-03	1.57e-03	3.87e-04	9.03e-05	2.27e-05	5.33e-06	1.43e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.72	2.02	2.10	1.99	2.09	1.90
MPFA-D	Padrão	ε_p	8.31e-03	2.23e-03	5.54e-04	1.54e-04	4.08e-05	9.01e-06	2.44e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.90	2.01	1.85	1.92	2.18	1.88
	Consistente	ε_p	1.04e-02	2.67e-03	6.13e-04	1.63e-04	4.05e-05	1.00e-05	2.54e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.96	2.12	1.91	2.01	2.01	1.98
MPFA-H	Padrão	ε_p	1.05e-02	3.39e-03	9.51e-04	2.61e-04	6.73e-05	1.55e-05	3.98e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.64	1.83	1.87	1.95	2.12	1.96
	Consistente	ε_p	1.30e-02	3.65e-03	8.09e-04	2.49e-04	5.64e-05	1.44e-05	3.50e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.83	2.17	1.70	2.15	1.97	2.04

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.58 – Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular distorcida (Figura 16 e).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	3.82e-01	9.39e-02	2.32e-02	6.61e-03	2.28e-03	8.11e-04	2.80e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.02	2.02	1.81	1.53	1.49	1.54
	Consistente	ε_q	9.73e-02	3.19e-02	5.99e-03	1.16e-03	2.70e-04	4.99e-05	1.53e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.61	2.41	2.37	2.10	2.43	1.70
MPFA-D	Padrão	ε_q	7.21e-01	1.48e-01	3.14e-02	9.25e-03	2.63e-03	9.35e-04	3.17e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	2.29	2.24	1.76	1.81	1.49	1.56
	Consistente	ε_q	3.77e-01	5.83e-02	7.88e-03	1.44e-03	2.14e-04	3.75e-05	6.21e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	2.69	2.89	2.46	2.74	2.51	2.60
MPFA-H	Padrão	ε_q	1.02e+00	2.59e-01	5.26e-02	1.66e-02	4.12e-03	1.31e-03	4.32e-04
		$\mathcal{R}_q$	-	1.98	2.30	1.66	2.01	1.65	1.60
	Consistente	ε_q	5.79e-01	1.18e-01	2.31e-02	5.18e-03	8.25e-04	1.78e-04	3.98e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.29	2.35	2.16	2.65	2.21	2.16

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.59 – Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_p	3.67e-03	9.66e-04	2.87e-04	9.72e-05	3.75e-05	1.61e-05	7.40e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.93	1.75	1.56	1.37	1.22	1.12
	Consistente	ε_p	4.76e-03	1.35e-03	3.42e-04	8.40e-05	2.16e-05	5.36e-06	1.34e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.81	1.98	2.03	1.96	2.01	2.00
MPFA-D	Padrão	ε_p	7.06e-03	1.84e-03	4.81e-04	1.30e-04	3.98e-05	1.50e-05	6.78e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.94	1.94	1.89	1.71	1.40	1.15
	Consistente	ε_p	8.11e-03	2.16e-03	5.60e-04	1.43e-04	3.61e-05	9.08e-06	2.28e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.91	1.95	1.97	1.98	1.99	2.00
MPFA-H	Padrão	ε_p	5.63e-03	1.69e-03	4.62e-04	1.22e-04	3.25e-05	9.36e-06	3.24e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.74	1.87	1.92	1.91	1.80	1.53
	Consistente	ε_p	8.89e-03	2.61e-03	7.13e-04	1.87e-04	4.79e-05	1.21e-05	3.06e-06
		$\mathcal{R}_p$	-	1.77	1.87	1.93	1.96	1.98	1.99

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela B.60 – Caso 5: Erro do fluxo ε_q e sua taxa de convergência $\mathcal{R}_q$ para todos os métodos analisados em malha triangular diagonal (Figura 16 f).

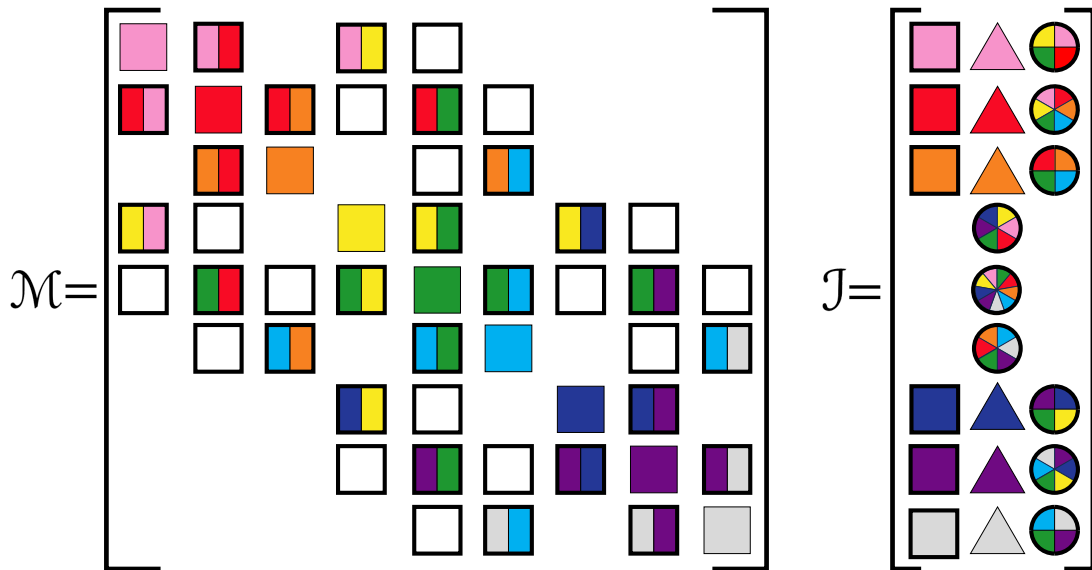
Método	Gravitacional		4	8	16	32	64	128	256
MPFA-O	Padrão	ε_q	2.13e-01	4.63e-02	1.01e-02	2.56e-03	8.00e-04	2.76e-04	9.79e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.20	2.20	1.97	1.68	1.53	1.50
	Consistente	ε_q	1.18e-01	3.28e-02	6.16e-03	1.45e-03	3.64e-04	8.65e-05	2.26e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	1.85	2.41	2.09	1.99	2.07	1.93
MPFA-D	Padrão	ε_q	5.25e-01	9.13e-02	1.67e-02	3.26e-03	7.13e-04	1.82e-04	5.30e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.52	2.45	2.36	2.19	1.97	1.78
	Consistente	ε_q	3.07e-01	4.34e-02	6.64e-03	1.09e-03	1.86e-04	3.24e-05	5.70e-06
		$\mathcal{R}_q$	-	2.82	2.71	2.61	2.55	2.52	2.51
MPFA-H	Padrão	ε_q	6.85e-01	1.04e-01	1.77e-02	3.19e-03	5.99e-04	1.21e-04	2.80e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.72	2.56	2.47	2.41	2.30	2.12
	Consistente	ε_q	3.55e-01	6.13e-02	1.10e-02	2.07e-03	4.10e-04	8.58e-05	1.90e-05
		$\mathcal{R}_q$	-	2.53	2.48	2.41	2.34	2.26	2.17

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

a partir delas, determina-se a contribuição para as equações de conservação de massa de cada elemento vizinho. Essas contribuições se refletem em coeficientes, que variam entre os dois métodos tratados, que são alocados nas posições correspondentes da matriz $\mathcal{M}$.

A diagonal da matriz, recebe os termos que representam a autocontribuição de cada elemento, que representa a soma dos fluxos que entram e saem da célula. Para as posições fora da diagonal, recebem tanto os termos de interação entre os elementos vizinhos, que são as contribuições devido à troca de fluxo através da face comum, quanto as contribuições indiretas mediadas pelos pontos auxiliares, os vértices das faces para o MPFA-D e os pontos harmônicos para o MPFA-H, que representa a interpolação das pressões nos elementos vizinhos nos pontos de auxiliares. Essas contribuições podem ser observadas nas Figuras C.2 e C.3 para os métodos MPFA-D e MPFA-H, respectivamente. As cores associadas a cada volume de controle estão indicadas na Figura C.1.

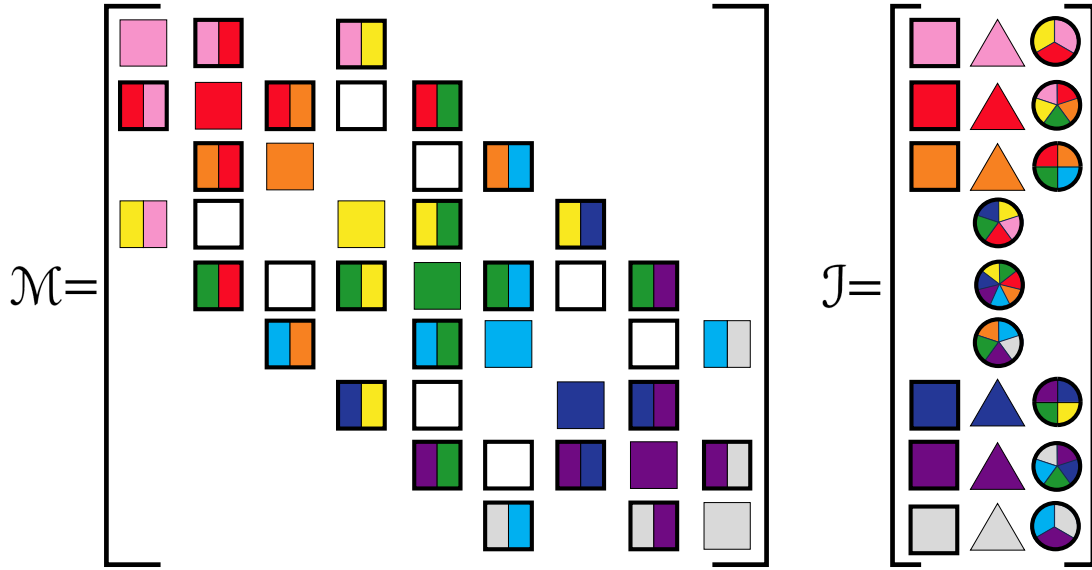
Figura C.2 – Montagem da matriz global $\mathcal{M}$ (esquerda) e do vetor de termos independentes $\mathcal{J}$ (direita) após a contribuição de todas as faces para o MPFA-D.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Na diagonal principal, cada posição apresenta uma única cor, pois corresponde à autocontribuição de cada elemento. Nas demais posições da matriz, os quadrados com duas cores indicam elementos que compartilham uma mesma face. Já os quadrados com contorno mais espesso representam contribuições associadas às interpolações realizadas nos vértices. Essas posições podem exibir apenas a cor branca quando não há compartilhamento de face com elementos vizinhos ou podem apresentar também duas cores quando a interpolação envolve elementos conectados por faces no somatório das matrizes locais de cada face analisada.

Figura C.3 – Montagem da matriz global $\mathcal{M}$ (esquerda) e do vetor de termos independentes $\mathcal{J}$ (direita) após a contribuição de todas as faces para o MPFA-H.



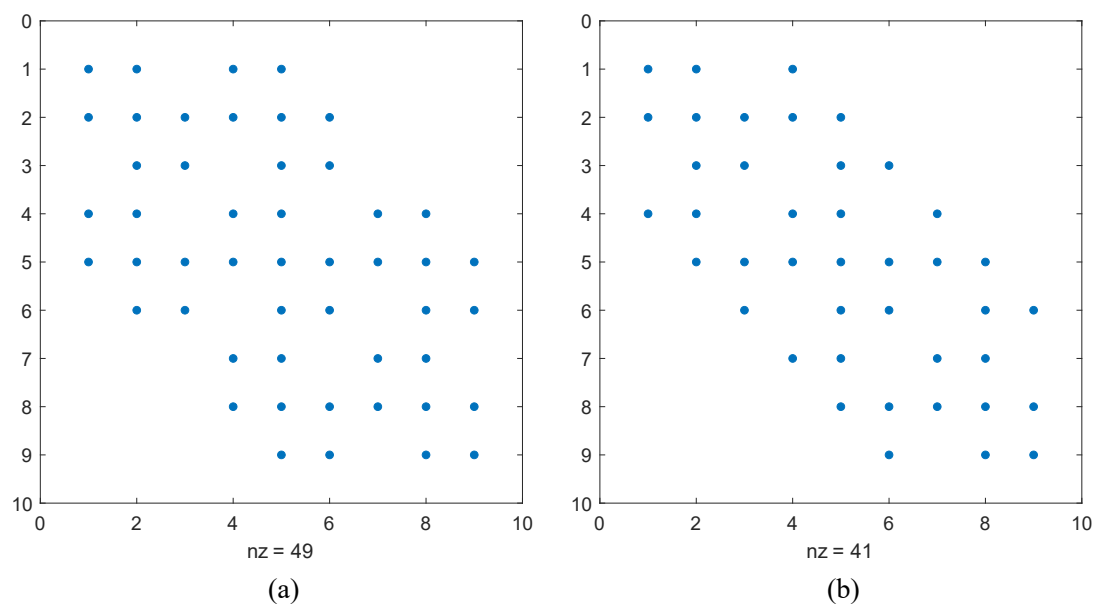
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

O tratamento das faces de contorno depende da condição adotada. As faces com condição de Dirichlet são substituídas diretamente o valor da pressão e termo gravitacional prescritos, transferindo a contribuição correspondente para o vetor $\mathcal{J}$. Já as faces com condição de Neumann, resultam em vazão nula, logo, sem contribuição à matriz ou ao vetor. Essas contribuições estão ilustradas nas Figuras C.2 e C.3 para o vetor $\mathcal{J}$, sendo o quadrado representando a influência da pressão e o triângulo representando a influência da gravidade.

Também, além dos termos de fonte/sumidouro que possam existir no domínio, o vetor $\mathcal{J}$ recebe as contribuições associadas ao termo gravitacional. Esse termo é avaliado explicitamente a cada face e sua influência é inserida no vetor de fonte utilizando a mesma estrutura empregada no cálculo das vazões. As Figuras C.2 e C.3 ilustram essas contribuições por meio de círculos, sendo que as cores indicam todos os elementos que influenciam diretamente no termo gravitacional da respectiva posição.

A estrutura final da matriz $\mathcal{M}$ é esparsa e simétrica, conforme esperada em formulações baseadas em volumes finitos centrados na célula (Contreras, 2012). A Figura C.4 corresponde à saída da função `spy` do MATLAB sobre a matriz montada $\mathcal{M}$ para os métodos MPFA-D e MPFA-H.

Figura C.4 – Função spy do MATLAB para uma malha quadrilateral de nove elementos com o método (a) MPFA-D e (b) MPFA-H.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).