UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

ISABELLA CARVALHO DA COSTA SILVA

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS:
da Análise Real aos livros didáticos

Caruaru
2025

ISABELLA CARVALHO DA COSTA SILVA

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS:

da Análise Real aos livros didáticos

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura, do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Área de concentração: Ensino (Matemática).

Orientadora: Profª. Drª. Maria do Desterro Azevedo da Silva

Caruaru

2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do programa de geração automática do SIB/UFPE

Silva, Isabella Carvalho da Costa.
Representação decimal dos números reais: da Análise Real aos livros didáticos / Isabella Carvalho da Costa Silva. - Caruaru, 2025.
84 p. : il.

Orientador(a): Maria do Desterro Azevedo da Silva
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Matemática - Licenciatura, 2025.
Inclui referências.

1. Análise Real. 2. representação decimal dos números reais. 3. livros didáticos. 4. educação matemática. I. Silva, Maria do Desterro Azevedo da. (Orientação). II. Título.

370 CDD (22.ed.)

ISABELLA CARVALHO DA COSTA SILVA

REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS:

da Análise Real aos livros didáticos

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática-Licenciatura, do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, na modalidade de monografia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovada em: 02/06/2025

BANCA EXAMINADORA

Profª. Drª. Maria do Desterro Azevedo da Silva (Orientadora)

Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Ewellen Tenório de Lima (Examinadora Interna)

Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Drª. Simone Moura Queiroz (Examinadora Interna)

Universidade Federal de Pernambuco

Dedico este trabalho às mulheres que me precederam na área e, em especial, àquela que também é o meu maior exemplo de força e determinação, a professora Joelma Carvalho, minha mãe. Dedico também este trabalho à memória de Armando Marques, meu padrasto, com eterna gratidão e saudade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por ter me sustentado e me dado clareza ao longo de todo o percurso da graduação. Sem Ele, nada disso seria possível! Além disso, também agradeço à Isabella do passado por ter feito essa escolha de curso tão incompreendida por muitos, mas tão genuína. Você foi muito forte durante todo o curso e eu estou extremamente orgulhosa da jornada que foi trilhada até esse momento. Eu não poderia ter feito escolha melhor.

À minha mãe, Joelma Carvalho, por ter sido o meu primeiro exemplo de professora de Matemática, profissão que passei a admirar. A senhora é a minha maior fonte de inspiração, de força e de resiliência. Eu não tenho palavras para agradecer por tudo o que a senhora abdicou para dar a melhor educação possível para mim e para o meu irmão. Gratidão por acreditar tanto em mim. Se hoje eu sou quem eu sou, devo à senhora. Eu te amo eternamente!

Ao meu irmão, João Henrique, por quem eu nutro uma profunda admiração. Obrigada por sempre me escutar, me apoiar e me ajudar quando necessário. Você me ensina e me inspira todos os dias. Eu te amo!

Ao meu namorado, George Vinícius, por ser o meu porto seguro. Ao longo de todos esses anos de relacionamento, você nunca deixou de estar ao meu lado, de me apoiar, de acreditar em mim mais do que eu mesma e de ser colo nos momentos em que eu precisei desabar para me reconstruir. Sem você, essa jornada teria sido muito mais difícil. Eu te amo!

À minha família, meus tios e primos, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando e me incentivando a alçar grandes voos. À família do meu namorado, Edileuza e Mannuella, que foram abrigo e acolhimento em Caruaru sempre que eu precisei.

À minha orientadora, Maria do Desterro, que foi uma profissional gigante em todo o processo. Uma grande mulher na Matemática! Alguém que me fez encontrar exatamente o que eu queria dentro do curso: uma professora com um grande aprofundamento teórico e com muita vontade de repassar os seus conhecimentos da melhor forma possível. A senhora é, com certeza, a pessoa que eu mais me inspiro profissionalmente. Obrigada por toda a troca e por todos os ensinamentos. Levarei para a vida!

Ao curso de Licenciatura em Matemática do CAA por ter me dado a oportunidade de conhecer caminhos tão belos dentro dessa profissão. O olhar humano, sensível e verdadeiro me fez ser uma professora melhor.

À minha querida banca avaliadora do TCC, as professoras: Maria do Desterro, Simone

Queiroz e Ewellen Tenório. Vocês são mulheres inspiradoras para mim e contribuíram fortemente com a minha formação no curso nas mais diversas áreas. Gratidão por tudo!

Aos professores que me marcaram ao longo da trajetória no curso de Licenciatura em Matemática no CAA: Maria do Desterro, Simone Queiroz, Ewellen Tenório, Luan Danilo, Lidiane Carvalho, Jaqueline Lixandrão, Naralina Viana, Janiely Siqueira, Jamille Oliveira, Luciana Cavalcanti, Cristiane Rocha, Edelweis Tavares, Luana Rafaela, Jean Felipe e Valter Rocha. Cada um me enriqueceu academicamente de uma forma diferente e eu não poderia ser mais grata pelo privilégio de ter sido aluna de vocês!

Ao “MALLIK”, Maria Luiza, Ana Clara, Lucas Verçosa, José Lucivaldo e Kalina Gouveia, meus amigos e meu grupo durante a graduação. Vocês foram a minha maior base no curso, fazendo dos dias mais difíceis, os melhores, com leveza e boas risadas. Amizade é sobre estar verdadeiramente feliz com o crescimento do outro e impulsioná-lo a ocupar o seu espaço, e que bom que eu tive vocês. Essa conquista é nossa!

Malu, foi uma honra ser tua dupla de graduação! Obrigada por sempre confiar em mim e me apoiar. A gente se parece muito! Dividimos momentos, opiniões, dores e alegrias. Você me mostrou, acima de tudo, a força da fé. A sua resiliência é admirável. Observei de perto você se reconstruir inúmeras vezes ao longo do curso. Dores, decepções, cansaço, nada te impediu. Você é exemplo e luz no meu caminho. Obrigada por tudo (de verdade)!!!

Clara, obrigada por ter sido tão parceira e por nunca ter me abandonado nessa jornada. Você foi, além de amiga, minha defensora e companheira. Ao longo do curso, você foi provando que é possível passar por grandes dores e dificuldades e continuar de pé e com foco no seu objetivo de vida. O seu crescimento é notável!

Lucas, que privilégio ter sido tua companheira de turma e de estudos (além de ser amiga). Foi muito especial ver de perto alguém com a tua história de vida se tornando um dos principais nomes da turma durante o curso. Quanta garra, determinação e foco. Você é o meu maior exemplo de força de vontade nesse curso e, se depender de mim, a sua história sempre será citada e comentada. Eu te admiro muito!

Lucivaldo, obrigada por trazer leveza e tranquilidade para os meus dias. Você foi o equilíbrio necessário em meio às excessivas cobranças que eu me fazia com o seu humor leve e a sua certeza que as coisas darão certo no final. E obrigada por ter nos dado o presente mais lindo de todos: ser titios da doce Maria Helena! Que Deus continue abençoando vocês.

Kalina, obrigada por me lembrar que amizade também é sobre fazer o outro não desistir. Que evolução! Como tu cresceu ao longo do curso! Espero que tenha enxergado a sua força e potência nesse processo. Você é gigante, menina! A sua determinação e o seu capricho (ou "perfeccionismo comedido", como preferir) te levarão longe, sei disso.

Agradeço à minha turma de Matemática - Licenciatura 2021.1, uma turma de pessoas com uma enorme capacidade e que, com certeza, terão um lindo futuro na área! Eu confio e acredito no potencial de cada um. Em especial, gostaria de agradecer, para além dos que já foram citados no parágrafo anterior, a José Warlyson, Malcolm Sedícias, Jennyfer Nunes, Fernanda Vasconcelos, Rayanne Lima e Gustavo Henrique. Vocês são incríveis!

Ao Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID) por ter me dado a oportunidade de experienciar os desafios da Educação Básica. Em especial, à supervisora, professora Janaína Vieira, por ter contribuído na minha formação e ao meu "grupo da sexta": Maria Luiza, José Warlyson, Malcolm Sedícias e Caio Rennan. Foi uma experiência ímpar vivenciar isso ao lado de vocês!

Ao meu professor do Ensino Fundamental, Jhonatan Cavalcanti, por quem eu nutro um profundo sentimento de admiração e respeito. Gratidão por sempre ter acreditado no meu potencial e me incentivado a sonhar alto.

Ao meu grupo do Ensino Médio, o eterno BDG: Anna Elloísa, Bianca Karina, George Vinícius, Débora Ruth e Waldênia Campos. Vocês são grandes inspirações para mim por tudo o que alcançaram e construíram/estão construindo. Nossa trajetória no IFPE - Campus Caruaru foi belíssima, e os caminhos trilhados por cada um são brilhantes (seja como médico, engenheiro ou professor). Gratidão, gratidão! Essa conquista também é nossa!

À minha amiga de infância, Paula Francielly, que me acompanha e está ao meu lado desde 2009. Você tem uma força e determinação que me inspiram e me fazem ter ânimo para seguir em busca dos meus sonhos. Obrigada por todo o apoio ao longo desses anos, você é gigante!

Por fim, agradeço a todo mundo que, de forma direta ou indireta, me auxiliou a chegar na conclusão do curso. Gratidão eterna!!!

"Diante do real, aquilo que cremos saber com clareza ofusca o que deveríamos saber".

(Bachelard, 1996, p. 18).

RESUMO

A disciplina Análise Real, obrigatória em vários cursos de Licenciatura em Matemática, gera diversas discussões acerca de quais conhecimentos são essenciais para a formação inicial do professor. Nesse contexto, esta pesquisa examina como as demonstrações matemáticas da Análise Real se relacionam com a abordagem da representação decimal nos livros didáticos do 9º ano. A escolha do tema justifica-se pela necessidade de investigar como se dá a articulação entre o conhecimento acadêmico e o ensino na Educação Básica. Em especial, a pesquisa integra aspectos teórico-pedagógicos, apoiando-se: nos Obstáculos Epistemológicos (Bachelard, 1996) para analisar desafios conceituais; no Conhecimento Matemático para o Ensino (Ball; Thames; Phelps, 2008) para discutir a prática docente; e na Teoria da Transposição Didática (Chevallard, 2000) para examinar a transformação do saber acadêmico em saber escolar. O estudo reflete sobre a importância da Análise Real na formação docente, sobretudo frente às dificuldades conceituais na introdução dos números irracionais na Educação Básica. Assim, o objetivo geral deste trabalho é analisar como o saber sábio, fundamentado na Análise Real, se relaciona ao saber a ser ensinado nos livros didáticos do 9º ano no que diz respeito à representação decimal dos números reais. Para isso, utilizamos uma metodologia com base na abordagem qualitativa. Inicialmente, desenvolvemos a demonstração matemática que fundamenta a representação decimal dos números reais, destacando as ferramentas da Análise Real utilizadas. Posteriormente, realizamos uma pesquisa bibliográfica em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental, descrevendo-os e analisando-os de modo a estabelecer conexões entre as demonstrações feitas anteriormente, além de pontuar alguns fenômenos da Transposição Didática. Concluímos que há relações entre as demonstrações matemáticas e os livros didáticos, mas a Transposição Didática tende a simplificar conceitos complexos, como os números irracionais. Isso reforça a necessidade do professor de Matemática compreender tais relações, a fim de realizar transposições conscientes que contribuam para a formação crítica dos estudantes.

Palavras-chave: Análise Real; representação decimal dos números reais; livros didáticos; educação matemática.

ABSTRACT

The discipline of Real Analysis, which is mandatory in several Mathematics Teaching Degree programs, gives rise to various discussions about which types of knowledge are essential for teachers' initial training. In this context, this research examines how mathematical proofs in Real Analysis relate to the treatment of decimal representation in 9th-grade textbooks. The choice of theme is justified by the need to investigate how academic knowledge is articulated with teaching practices in Basic Education. Specifically, the study integrates theoretical and pedagogical aspects, drawing on: Epistemological Obstacles (Bachelard, 1996) to analyze conceptual challenges; Mathematical Knowledge for Teaching (Ball; Thames; Phelps, 2008) to discuss teaching practice; and the Theory of Didactic Transposition (Chevallard, 2000) to examine the transformation of scholarly knowledge into school knowledge. The study reflects on the importance of Real Analysis in teacher education, especially in light of the conceptual difficulties surrounding the introduction of irrational numbers in Basic Education. Thus, the general objective of this work is to analyze how scholarly knowledge, grounded in Real Analysis, relates to the knowledge to be taught in 9th-grade textbooks, particularly regarding the decimal representation of real numbers. To this end, we adopted a qualitative methodological approach. Initially, we developed the mathematical proof that underpins the decimal representation of real numbers, highlighting the Real Analysis tools involved. Subsequently, we conducted a bibliographic study of 9th-grade textbooks, describing and analyzing them in order to establish connections with the previously developed proofs and to identify phenomena related to Didactic Transposition. We conclude that there are links between the mathematical proofs and textbook content, but the Didactic Transposition tends to simplify complex concepts, such as irrational numbers. This reinforces the need for Mathematics teachers to understand these relationships in order to carry out conscious transpositions that contribute to the students' critical mathematical development.

Keywords: Real Analysis; decimal representation of real numbers; textbooks; mathematics education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C.	antes de Cristo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAA	Centro Acadêmico do Agreste
CCK	Conhecimento Comum do Conteúdo
et al.	et alii (do latim, “e outros” ou “e outras”)
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
HCK	Conhecimento do Conteúdo no Horizonte
KCS	Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos
KCT	Conhecimento do Conteúdo e do Ensino
LD	Livros Didáticos
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNE	Plano Nacional de Educação
PPC	Projeto Pedagógico do Curso
PNLD	Programa Nacional do Livro e do Material Didático
SCK	Conhecimento Especializado do Conteúdo
TDE	Transposição Didática Externa
TDI	Transposição Didática Interna
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho versa sobre a relevância da disciplina Análise Real no entendimento da representação decimal dos números reais apresentada nos livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental. A Análise Real é uma das disciplinas mais abstratas do curso de Licenciatura em Matemática, marcada por seu alto nível de formalismo e rigor lógico. Sua importância nessa pesquisa se deve ao fato de que as demonstrações que fundamentam determinados conteúdos presentes nos livros didáticos têm origem nesse campo da matemática.

Até o 9º ano, apenas o conjunto dos números racionais foi apresentado aos estudantes, cuja representação decimal é finita ou infinita periódica. Porém, a partir do 9º ano, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) introduz formalmente o conjunto dos números irracionais por meio de sua representação decimal, conforme explicitado na habilidade EF09MA02: "reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica" (Brasil, 2017, p. 317).

Neste contexto, este trabalho aborda a representação decimal dos números reais presentes nos livros didáticos, destacando como os conhecimentos da disciplina Análise Real fundamentam a demonstração matemática dessa representação. Além disso, busca-se também defender a importância dessa disciplina na formação dos futuros professores de Matemática. Tal relevância se justifica pelo fato de que, ao estudá-la e estabelecer conexões com conteúdos matemáticos da Educação Básica, o futuro professor pode compreender melhor as definições e regras trabalhadas em sua prática docente. Ball, Thames e Phelps (2008) denominam esse saber como Conhecimento Especializado do Conteúdo, um conhecimento essencial para o professor de Matemática. A necessidade desse saber se evidencia, por exemplo, quando o professor apresenta alguma ideia matemática ou responde aos "porquês" de certos conceitos. Assim, de acordo com Dysman e Dysman (2021, p. 356 *apud* Camargo *et al.* 2023, p. 6),

> o fato de que, se por um lado tendemos a crer na importância do ensino de matemática (e da Análise na Licenciatura) por seu potencial emancipador, por outro lado, quando este ensino se transforma em imposição (de fórmulas, métodos, teoremas, demonstrações, etc.) legitimada com base em hierarquias (entre saberes ou sujeitos) que reproduzem a lógica colonial, esse mesmo ensino pode ser transformado em instrumento que contribui para a emergência da subumanidade moderna mencionada por Santos, instrumento que poda autoestima, sequestra autonomia e produz submissão. Eis o paradoxo da educação matemática formulado por Paul Ernest (2004): "a matemática é muito clara e coerente, porém quando o raciocínio não é entendido ela se torna o mais irracional e autoritário dos assuntos".

Ademais, relacionar conteúdos matemáticos da Educação Básica às suas demonstrações é uma das formas de se olhar para a Transposição Didática (Chevallard, 1985) dos conteúdos do meio científico (chamado saber sábio) para o meio educacional (intitulado saber a ser ensinado ou saber ensinado, a depender da etapa em que se encontra a transposição). Dessa forma, é possível observar as informações que foram suprimidas ou modificadas a fim de facilitar a compreensão, sem que isso acarrete erros ou imprecisões matemáticas. Além disso, o docente pode perceber quais pontos são relevantes e podem ser adicionadas no intuito de trazer uma matemática mais demonstrativa e persuasiva, que faça os estudantes entenderem os conceitos por meio da reflexão, e não apenas pela memorização mecânica. A partir disso, Lima (2017 *apud* Camargo *et al.* 2023, p. 7) destaca que

> provar e demonstrar, mesmo na Educação Básica, é uma forma de convencer pela razão ao invés de pela autoridade, mas [...] enfatiza que é preciso ter equilíbrio para provar e demonstrar respeitando o nível intelectual dos alunos, priorizando certos fatos matemáticos importantes, como por exemplo, o Teorema de Pitágoras, que possuam demonstrações fáceis e elegantes.

A Matemática não se resume a procedimentos mecânicos e repetitivos, mesmo que em algumas circunstâncias ela seja ensinada dessa maneira. Trata-se de uma área criativa, na qual a curiosidade e a reflexão são essenciais para a construção do conhecimento. Embora os processos mecânicos ajudem na consolidação do aprendizado, eles não devem ser a única forma de trabalhar a disciplina, pois isso prejudica a criatividade, uma característica fundamental para o pensamento matemático e a resolução autêntica de problemas.

A Análise Real pode contribuir para que o futuro professor aprofunde sua compreensão dos conteúdos do Ensino Básico e desenvolva um pensamento matemático mais rigoroso. Como destacam Camargo *et al.* (2023, p. 8), essa disciplina

> é fundamental para a formação inicial do professor de Matemática, para que ele possivelmente tenha segurança e convicção na arte de conceituar matematicamente, escrever as próprias ideias e construir demonstrações matemáticas. Não pretendemos dizer, com isso, que somente a presença da disciplina Análise Real no currículo obrigatório da licenciatura em Matemática e sua frequência por parte dos futuros professores, já garantam uma boa formação profissional em conceituação e demonstrações matemáticas. Porém, a Análise Real de alguma maneira fecha um ciclo de amadurecimento matemático.

Dessa forma, a presente pesquisa visa trazer à tona respostas para o seguinte problema de pesquisa: como o saber sábio, com o suporte da Análise Real, fundamenta o saber a ser ensinado nos livros didáticos do 9º ano no que diz respeito à representação decimal dos números reais?

A escolha desse tema tem raízes nas inquietações e reflexões que surgiram ao longo da minha formação enquanto estudante de Licenciatura em Matemática, além do amor ao ensino e à matemática como ciência. Essas inquietações me levaram a refletir sobre os objetivos do curso de Licenciatura em Matemática, especialmente quanto à articulação entre a Matemática e o Ensino de Matemática para a prática profissional.

Ao longo do meu percurso, os questionamentos sobre os fundamentos de diversos resultados utilizados na Educação Básica também foram constantes. Em especial, o contato com disciplinas abstratas, como Estruturas Algébricas e Análise Real, despertou ainda mais a minha atenção para os resultados estudados. Em Estruturas Algébricas, por exemplo, estudei características de conjuntos específicos, como anéis, corpos e grupos, sempre assumindo que o conjunto dos números reais é um corpo. Posteriormente, na Análise Real, pude explorar um pouco a construção dos conjuntos numéricos e a verificação de suas propriedades; agora, não mais assumimos as propriedades desses conjuntos, mas as demonstramos. Essas formalizações me permitiram aprofundar o conhecimento nas construções dos principais conjuntos numéricos e instigaram o meu desejo de compreender os fundamentos abstratos da matemática que fundamentam a Educação Básica.

Em minha jornada acadêmica, concluí que é essencial que o futuro docente possua domínio dos conteúdos matemáticos e das suas formalizações. Além disso, é necessário que ele desenvolva habilidades didáticas e aprofunde seus conhecimentos nas teorias sobre o ensino da Matemática, para que possa adaptar conhecimentos abstratos a diferentes níveis. A partir desta perspectiva, surgiu a ideia de produzir um trabalho que associasse conceitos acadêmicos da Matemática ao ensino dos conteúdos na Educação Básica.

A análise de livros didáticos também representa uma oportunidade de contribuição social. Espera-se que esta pesquisa auxilie licenciandos e professores a estabelecerem conexões mais claras entre a Análise Real e os conteúdos da Educação Básica, enriquecendo sua prática docente. Essa compreensão mais profunda é fundamental, pois permite que os docentes estejam preparados para esclarecer dúvidas e prevenir equívocos matemáticos em sala de aula.

Por fim, ressalta-se igualmente a relevância acadêmica da temática para o Ensino de Matemática, demonstrada pela consistente fundamentação teórica apresentada no capítulo "Um diálogo com a Educação Matemática", que inclui: a teoria dos Obstáculos Epistemológicos, formulada por Bachelard em 1938; o Conhecimento Matemático para o Ensino, desenvolvido por Deborah Ball e colaboradores nos anos 2000; e a Teoria da Transposição Didática, proposta em 1975 por Yves Chevallard. Elas são largamente utilizadas dentro do contexto de passagem do conhecimento entre as esferas acadêmica e educacional, seja pelos entraves criados nessa transmissão do conhecimento, pelos conhecimentos que o docente deve possuir ao ensinar ou pela modificação do conteúdo ao longo das etapas de transposição.

Com isso, o presente trabalho tem como objetivo geral analisar como o saber sábio, com o suporte da Análise Real, se relaciona ao saber a ser ensinado nos livros didáticos do 9º ano no que diz respeito à representação decimal dos números reais. Como objetivos específicos, tem-se: expor a demonstração matemática associada à representação decimal dos números reais para identificar quais conhecimentos específicos da Análise Real são essenciais para a compreensão da mesma; analisar como os livros didáticos do 9º ano apresentam a representação decimal dos números reais; estabelecer uma relação entre o que é apresentado nos livros didáticos do 9º ano sobre a referida representação decimal e a demonstração que justifica essa representação; e evidenciar alguns fenômenos da Transposição Didática que atuam no sistema supracitado.

Para tanto, a metodologia utilizada se caracteriza como qualitativa, ou seja, ela não se preocupa em quantificar dados, mas sim em dar significado às informações aqui trazidas, explorando os processos e fazendo interlocuções com teorias didáticas e trabalhos prévios, para possibilitar "um espaço de reflexão e de mudanças” (Mazzi, 2018, p. 82). Dessa forma, inicialmente será trazida a demonstração matemática associada à representação decimal dos números reais, elucidando quais tópicos da disciplina Análise Real foram necessários para o seu desenvolvimento. Posteriormente, ocorrerá a descrição e a análise de dois livros didáticos adotados em escolas públicas do Agreste Pernambucano acerca da representação decimal dos números reais, de modo a estabelecer conexões entre as informações trazidas nos livros com a demonstração feita anteriormente. Por fim, serão destacados alguns fenômenos da Transposição Didática que podem ser percebidos nos livros.

Este trabalho está dividido em capítulos. O primeiro é o que o leitor está lendo no momento. O segundo aborda a importância da disciplina Análise Real no curso de Licenciatura em Matemática, trazendo uma discussão acerca do quanto ela agrega para o seu aprofundamento acadêmico, a sua formação docente e a sua prática profissional.

No terceiro capítulo será realizado um aporte teórico, dando luz a teorias que dialogam com o objetivo do trabalho e que, de diferentes formas, auxiliarão na análise dos livros didáticos e na análise das demonstrações que serão realizadas, além de atuar no estabelecimento de conexões entre essas duas esferas. Para cada teoria abordada, haverá, inicialmente, uma conceitualização geral da teoria e, posteriormente, será feita uma conexão dela com o conteúdo abordado no trabalho, que é a representação decimal dos números reais. Dessa forma, ele inicia com a explicação da Teoria dos Obstáculos Epistemológicos, idealizada pelo francês Gaston Bachelard, com contribuições posteriores de Guy Brousseau, adaptando o conceito para a Matemática. Posteriormente, segue com a teoria do Conhecimento Matemático para o Ensino, formulada pela norte-americana Deborah Ball e colaboradores. O capítulo finaliza com as informações sobre a Teoria da Transposição Didática, formulada pelo francês Yves Chevallard, que será a principal base teórica do trabalho.

O quarto capítulo terá informações sobre os materiais que norteiam a educação brasileira. Inicialmente, será trazida uma breve contextualização dos documentos oficiais que organizam a Educação Básica no Brasil, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular e, posteriormente, serão trazidas informações acerca dos livros didáticos.

Na sequência, o quinto capítulo versará de modo detalhado sobre a metodologia empregada na pesquisa, especificando suas características em relação aos objetivos, procedimentos técnicos, forma de abordagem ao problema, entre outros aspectos.

O sexto capítulo se constitui como a parte matemática do trabalho. Inicialmente, serão apresentados axiomas, definições e proposições que auxiliarão na compreensão dos principais teoremas. Na sequência, demonstraremos o primeiro teorema principal, de modo que, a partir dele, poderá ser definida toda a representação decimal dos números reais. Com isso, será demonstrado que todo número racional possui representação decimal finita ou infinita periódica e, portanto, os números irracionais possuem representação decimal infinita e não periódica, concluindo a demonstração. Após isso, serão explicitados os conteúdos da disciplina Análise Real que foram abordados nessa teoria e, por fim, haverá uma contextualização com a teoria do Conhecimento Matemático para o Ensino, de Deborah Ball.

No sétimo capítulo, será feita a análise dos livros didáticos. Ele iniciará com uma breve introdução sobre livros didáticos e os Obstáculos Epistemológicos, de Bachelard. Posteriormente, traremos a descrição e a análise do primeiro livro, fazendo um paralelo com os fundamentos teóricos do capítulo anterior. Depois disso, serão apresentados alguns fenômenos da Transposição Didática. O processo será o mesmo para o segundo livro.

Por fim, o último capítulo aborda as considerações finais do trabalho, no qual os dois capítulos anteriores serão melhor relacionados, além de haver uma comparação mais direta entre as duas coleções de livros escolhidas para análise.

2 ANÁLISE REAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: IMPORTÂNCIA E CONTRIBUIÇÕES AO LICENCIANDO

Nos cursos de Licenciatura em Matemática existe um debate acerca da relevância de disciplinas da chamada "Matemática Pura" dentro do currículo, como Estruturas Algébricas e Análise Real. Essa discussão surge porque tais disciplinas apresentam um maior aprofundamento matemático e não são diretamente aplicadas na Educação Básica. Entretanto, é possível argumentar que esses conteúdos são indiretamente levados à Educação Básica, uma vez que as afirmações nela ensinadas derivam da transposição de conhecimentos matemáticos previamente estruturados no campo científico.

De acordo com Moreira e Vianna (2016), a opinião de matemáticos, educadores matemáticos, professores da Educação Básica e estudantes de licenciatura deve ser levada em consideração ao se realizar tal discussão.

> O desenvolvimento do debate sobre o conhecimento matemático que deve fazer parte da formação do professor de matemática da Educação Básica tem trazido à tona, especialmente a partir dos anos 1980, algumas questões teóricas que se referem às relações entre os saberes demandados pela prática docente escolar e os saberes trabalhados nos cursos de licenciatura (Shulman, 1986,1987; Tardif, 2002; Ball, Thames e Phelps, 2008 *apud* Moreira;Vianna, 2016, p. 516).

Discute-se, em especial, a contribuição dessas disciplinas para a prática dos futuros docentes que trabalharão na Educação Básica, visto que muitos dos conteúdos trazidos por elas envolvem uma matemática mais abstrata, de difícil assimilação pelos estudantes da Educação Básica.

> Na elaboração de novos projetos pedagógicos para os cursos de licenciatura em matemática, põe-se em questão a permanência de algumas disciplinas na grade curricular e torna-se necessária a explicitação do papel que estas efetivamente desempenham na preparação do licenciando para a futura prática profissional na escola básica. [...] pode-se perguntar: de quais tópicos deveria tratar a disciplina Análise Real e com que tipo de abordagem? Deveria ela ser obrigatória no curso de licenciatura? Por quê? (Moreira, Cury, Vianna, 2005, p.12-13 *apud* Moreira; Vianna, 2016, p. 517).

No estudo de Moreira e Vianna (2016), conduzido com educadores matemáticos sobre a importância da disciplina de Análise Real na licenciatura, 15 dos 18 educadores matemáticos entrevistados defenderam a sua manutenção como disciplina obrigatória. As justificativas para essa opinião foram divididas em duas categorias: a primeira, referente à importância do licenciando ter contato com a matemática superior/formal e, a segunda, referente à possibilidade de haver um maior aprofundamento matemático do que será lecionado pelo licenciando no futuro. Algumas das respostas coletadas foram:

> Acho fundamental para a apropriação de uma cultura matemática que o aluno tenha uma boa formação em Análise. A disciplina, em geral, é muito exigente, pois lida com grandes rupturas no pensamento matemático. Isso a meu ver é inevitável, pois sua raiz é epistemológica. Não é a toa que a formalização dos números reais, das noções de função, continuidade e limite exigiram tanto tempo na própria história da matemática (Respondente 2). A disciplina Análise Real traz ao licenciando uma fundamentação necessária a uma visão mais aprofundada do conhecimento matemático que se estuda na Educação Básica. Esse conhecimento é necessário para perceber problemas epistemológicos importantes nas abordagens que se dá a conceitos como números racionais e irracionais, sequências, funções, continuidade, por exemplo (Respondente 9) (Moreira; Vianna, 2016, p. 523-524).

Entretanto, esse mesmo trabalho (Moreira; Vianna, 2016) apresenta um estudo realizado com 52 professores israelenses, por Zazkis e Leikin (2010), que relata controvérsias sobre a temática. Nele, os professores, em geral, dizem que as disciplinas mais abstratas do curso de Licenciatura foram relevantes para a sua formação docente, dando confiança e segurança para trabalhar com alguns conteúdos, facilitando as conexões entre as temáticas e ajudando a produzir respostas para dúvidas específicas de alunos mais avançados. Porém, ao serem questionados sobre exemplos práticos do cotidiano docente nos quais essas situações ocorrem, a maioria não conseguiu responder e, os que conseguiram, trouxeram exemplos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, Estatística, entre outras, mas não de Análise Real.

Pode-se observar, assim, que muitos docentes reconhecem a relevância da disciplina, embora tenham dificuldade em identificá-la em sua prática profissional. Isso evidencia a necessidade de uma abordagem matemática mais construtivista na disciplina, que contemple, por exemplo, a construção dos conjuntos numéricos e a fundamentação das propriedades trazidas no ensino básico. Ou seja, é necessário que o licenciando tenha acesso a uma abordagem que vá além da axiomática, envolvendo a construção desses objetos do conhecimento e fazendo um paralelo com o que é abordado na Educação Básica, como é trazido por Oliveira (2017, p. 87) com relação ao contexto do Ensino Médio, mas que pode ser estendido também ao Ensino Fundamental:

> a disciplina de Análise Matemática não pode ser ensinada para licenciandos desvinculadas da maneira como certos assuntos vistos nessa disciplina são tratados por livros didáticos do ensino médio. Tais conceitos só podem ser compreendidos com profundidade com o conhecimento adquirido na disciplina de Análise Matemática, por meio do estudo da Análise Real.

Além disso, é necessário ter uma visão crítica quanto ao grupo de professores selecionados para as entrevistas trazidas nos trabalhos anteriormente citados, pois o foco deles foi entender a importância da Análise e matérias análogas para professores da Educação Básica. Entretanto, é relevante compreender que a licenciatura aborda uma gama de estudantes que não necessariamente desejam atuar apenas na Educação Básica. Alguns alunos possuem o desejo de lecionar, mas dentro das esferas de graduação e pós-graduação, seja no próprio curso de Licenciatura em Matemática ou em outros que possuam temáticas afins, como física ou as engenharias. Nesse caso, tais disciplinas se revelam ainda mais importantes, pois representam um meio de acesso aos objetivos acadêmicos e profissionais almejados por esses estudantes.

A fim de investigar a articulação proposta nas licenciaturas entre os conhecimentos científicos e os conteúdos da Educação Básica, realizamos uma breve análise do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Matemática-Licenciatura do Centro Acadêmico do Agreste da Universidade Federal de Pernambuco, instituição onde a autora realizou sua formação. O documento estabelece como objetivo geral:

> formar professores de Matemática para atuarem na Educação Básica, preparando-os para o exercício crítico e competente da docência, de modo a atender as especificidades dos alunos ao qual se destina e contribuir para a melhoria do ensino de matemática neste nível da escolaridade (Universidade Federal de Pernambuco, 2017, p. 24).

Entretanto, como já pontuado, há alunos que ingressam na licenciatura com o objetivo de lecionar em níveis diferentes ao da Educação Básica, como no ensino superior. Essa pluralidade de trajetórias profissionais convida a uma reflexão sobre o equilíbrio entre formação básica e acadêmica nos PPCs.

Em relação aos objetivos específicos, o PPC da Matemática-Licenciatura da Universidade Federal de Pernambuco (2017, p. 24-25) estabelece os seguintes itens:

- Garantir as condições necessárias para que os licenciandos em Matemática adquiram sólidos conhecimentos matemáticos e sobre os fundamentos do ensino dos conteúdos específicos desta disciplina, necessários para sua prática profissional;
- Proporcionar aos licenciandos a construção de uma base sólida de conhecimentos em Educação Matemática, na perspectiva de articulação com os conteúdos específicos de Matemática;
- Propiciar o Ensino de Matemática com o auxílio de recursos tecnológicos;

- Possibilitar a integração e a aplicação dos conhecimentos adquiridos ao longo do curso em situações reais de ensino, através da vivência dos estágios supervisionados e de outras ações complementares, como o Programa Institucional de Iniciação à Docência;
- Favorecer o desenvolvimento das atividades de ensino e de pesquisa em Matemática e Educação Matemática, em consonância com a evolução das pesquisas nestas áreas.

Observa-se, portanto, que os objetivos específicos dão margem a uma formação docente para além da Educação Básica, com ênfase também no desenvolvimento do perfil pesquisador do estudante, inclusive na área de Matemática. Além disso, é importante pontuar que tais objetivos também propõem que os conteúdos vistos no ensino superior sejam melhor articulados com o que é abordado na Educação Básica, o que contribui para fundamentar a prática pedagógica daqueles que seguirão carreira como docentes neste nível de ensino.

Com relação ao campo de atuação trazido neste documento, afirma-se que

> A área de atuação profissional **predominante** do egresso do curso de Matemática-Licenciatura é a docência na Educação Básica, nas séries finais do Ensino Fundamental e em todas as séries do Ensino Médio, tanto no setor público quanto no privado. No entanto, deve-se considerar que o Curso, deverá preparar profissionais aptos para atuarem em **diferentes segmentos do mundo do trabalho**: ensino não formal (educação à distância, centros e museus de ciências de divulgação científica), atividades em laboratórios de ensino e de pesquisa em Instituições de Ensino Superior (Universidade Federal de Pernambuco, 2017, p. 27, grifo nosso).

Isso sugere que a Instituição reconhece a diversidade de atuação, o que reforça a relevância da disciplina para a formação docente.

Além disso, também analisamos a ementa da disciplina Análise Real no curso supracitado. Os conteúdos que devem ser abordados são:

- **Conjuntos finitos e infinitos:** Teoria elementar dos conjuntos; Números Naturais; Princípio da Indução Matemática; Conjuntos finitos e infinitos; Conjuntos enumeráveis e não enumeráveis;
- **Números Reais:** Elementos de teoria de grupos; Corpos; Corpos ordenados; $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado; Desigualdades; Supremo e ínfimo de um conjunto; $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo;
- **Sequências de números reais:** Sequências de números reais; Limites de sequências; Operações com Limites; Seqüências Monótonas; O número e; Limites Infinitos; Teorema dos intervalos encaixantes; Seqüências de Cauchy; O Teorema de Bolzano-Weierstrass;

- **Séries numéricas reais:** Definição; Séries convergentes; Séries absolutamente convergentes; Testes de convergência; Séries alternadas; Operações com séries;

- **Noções topológicas na reta:** Topologia da reta; Conjuntos abertos; Conjuntos fechados; Pontos de acumulação; Pontos aderentes;

- **Funções reais e limites:** Limite de uma função; Propriedades de limite; Limites laterais; Limites infinitos e no infinito; Expressões indeterminadas;

- **Funções contínuas:** Conjuntos Compactos; Funções contínuas num Intervalo; O Teorema do Valor Intermediário; Funções contínuas em conjuntos compactos; Continuidade Uniforme;

- **Derivadas:** O conceito de derivada; Regras operacionais; Máximos e mínimos locais; Teorema do Valor Médio e suas aplicações; Fórmula de Taylor.

A ementa, com 60h de carga horária, concentra-se nos fundamentos teóricos. A articulação com a Educação Básica, quando ocorre, depende da abordagem do docente. Dessa forma, fica a cargo do professor da disciplina incluir ou não essas conexões e estimular a interlocução entre os níveis educacionais. Contudo, essa abordagem é fundamental para auxiliar os licenciandos a compreenderem a importância da disciplina e a desenvolverem a capacidade de trabalhar determinados conteúdos do ensino básico com maior clareza quanto ao seu formalismo matemático, evitando, assim, possíveis erros decorrentes da falta de domínio do tema.

Diante da relevância da Análise Real, é importante discutir o que a falta de conceitos bem estruturados dessa disciplina pode acarretar ao serem adaptados como conteúdos escolares para a Educação Básica. Em seu trabalho, Oliveira (2017, p. 87) traz que

> alguns conceitos e afirmações, por mais que fiquem velados para os alunos, por ainda não terem conhecimentos suficientes para entendê-los, podem ser trabalhados de melhor forma quando o professor compreende bem o que está nas entrelinhas e é capaz de transpor de maneira satisfatória os conhecimentos sobre os números reais, construídos ao longo da sua vida acadêmica, em particular na disciplina de Análise Matemática na reta.

Nessa perspectiva, serão apresentados alguns trabalhos que apontam para erros e dificuldades de conceitualização acerca do conjunto dos números reais, especialmente do conjunto dos números irracionais. Para iniciar, Boff (2007 *apud* Pommer, 2012, p. 38) relatou, a partir de uma análise de livros, que “muitos deles não atingem as mínimas recomendações expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais”. Ademais, analisando a estrutura da organização de livros didáticos, Souto (2010, p. 100 *apud* Pommer, 2012, p. 39) trouxe que "[...] a praxeologia relacionada às tarefas envolvendo os números irracionais e reais é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber-fazer" (os procedimentos mecânicos utilizados para resolver as questões), tendo em vista a elevada utilização de exemplos para abordar conceitos e propriedades, em vez de abordarem também os fundamentos teóricos que justificam essas técnicas. Além disso, Silva (2011a *apud* Pommer, 2012, p. 40) destaca que "os percursos expostos são cristalizados, não favorecendo a exploração de noções de densidade, incomensurabilidade, infinitude e completude dos números reais". Por fim, Oliveira (2017, p. 86), após fazer a análise de quatro coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) em 2015, concluiu que

> Sobre a impressão de que os livros didáticos analisados repassam, de que todos os números podem ser marcados facilmente na reta real, podemos afirmar que é falsa: vimos que alguns números não podem ser construídos geometricamente e, para explicar isso, usamos conhecimentos algébricos. Quanto ao estudo sobre a definição de completude dos números reais, chegamos à conclusão de que esse conceito poderia ser apresentado nos cursos de licenciatura em Matemática usando-se o TIE (Teorema dos Intervalos Encaixados). Dessa forma, a definição torna-se bem mais inteligível e não foge a conceitos abordados no Ensino Médio: Definição: o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE. Ao receber a definição de completude dessa forma, um aluno da licenciatura ficaria mais próximo do ambiente que encontrará mais tarde, que é a sala de aula e de seu material de trabalho, do qual faz parte o livro didático.

A análise dos trabalhos citados indica que em algumas obras didáticas são encontrados erros conceituais ou informações incompletas relacionadas aos conteúdos de números reais e, em especial, aos irracionais. Tal situação reitera a importância da disciplina Análise Real nas Licenciaturas, a fim de que o docente consiga identificar esses problemas e não reproduzi-los em sala de aula. Esse cenário evidencia a importância de se estabelecer conexões entre as demonstrações matemáticas e os livros didáticos. Para fundamentar adequadamente essa relação, é essencial apoiá-la em teorias educacionais amplamente reconhecidas e consolidadas. Na sequência, serão apresentadas três teorias da Didática da Matemática, interligadas entre si, que servirão de suporte à análise posterior: os Obstáculos Epistemológicos, o Conhecimento Matemático para o Ensino e a Teoria da Transposição Didática.

3 UM DIÁLOGO COM A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A educação matemática é um tema que, apesar de ter sua origem remontada nos questionamentos de filósofos e estudiosos da Grécia Antiga, se fortaleceu entre os séculos XIX e XX. O matemático D'Ambrósio (2004, p. 71-72), no texto elaborado por Miguel *et al.*, traz que

> embora já se identifiquem na antiguidade preocupações com o ensino da matemática, particularmente na República VII, de Platão, é na Idade Média, no Renascimento e nos primeiros tempos da Idade Moderna que essas preocupações são melhor focalizadas. [...] Mas é somente a partir das três grandes revoluções da modernidade – a Revolução Industrial (1767), a Revolução Americana (1776) e a Revolução Francesa (1789) – que as preocupações com a educação matemática da juventude começam a tomar corpo. [...] [Felix Klein] Afirma que o professor só terá sucesso se apresentar as coisas de uma forma intuitivamente compreensível. A consolidação da educação matemática como uma subárea da matemática e da educação, de natureza interdisciplinar, se dá com a fundação, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Roma, em 1908, da Comissão Internacional de Instrução Matemática, conhecida pelas siglas IMUK/ ICMI, sob liderança de Felix Klein.

Desse modo, o campo da Educação Matemática "se apresenta como área complexa de atuação, pois traz, de modo estrutural, em seu núcleo constitutivo, a Matemática e a Educação com suas especificidades" (Bicudo, 2013, p. 1). A partir dela, foram desenvolvidos subcampos, como a didática da matemática, que analisa o processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio de diversas teorias.

Assim, com a finalidade de fazer um paralelo com o objetivo desse trabalho, serão explicitadas algumas teorias da Educação Matemática que se relacionam com a temática. Percebe-se, inicialmente, que alguns conteúdos trazem obstáculos naturais de construção em um contato inicial, conceito conhecido como Obstáculo Epistemológico, estudado por Bachelard (1938). Isso pode ocorrer com assuntos que geram uma ruptura com o conhecimento estabelecido até então, que é o caso da chegada do conjunto dos números irracionais, que rompe com o que os estudantes estavam acostumados a lidar até aquele momento (o conjunto dos racionais). Ademais, no processo de ensino desses conteúdos na Educação Básica, é relevante que o docente possua uma certa maturidade matemática, a fim de conseguir auxiliar os estudantes a desenvolverem os conhecimentos. Dessa forma, ele deve estar preparado para possíveis questionamentos mais aprofundados dos alunos e deve ser capaz de estabelecer relações com conteúdos do passado e/ou do futuro, o que Deborah Ball e colaboradores (2008) definiram como competências pertencentes ao Conhecimento Matemático para o Ensino. Além disso, para que o conhecimento acadêmico chegue aos estudantes da Educação Básica de forma acessível, ele passa por diversas transformações, processo conhecido como Transposição Didática, trazido por Chevallard (1985). As três teorias citadas serão detalhadas a seguir.

3.1 OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS

Apresentamos, nesta seção, o conceito de Obstáculos Epistemológicos e como ele se articula com os objetivos desta pesquisa.

3.1.1 Conceitualização

A partir do seu interesse em entender o progresso do conhecimento científico, Gaston Bachelard, filósofo e professor francês, conceituou os Obstáculos Epistemológicos. Tal noção foi trazida e analisada em seu livro *La formation de L'esprit scientifique* (A Formação do Espírito Científico), em 1938. Nele, são apresentados fatos relacionados à evolução histórica da ciência, com a intenção de entender como essa evolução ocorreu. Ele observou que "o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos" (Bachelard, 1996, p. 17). Ou seja,

> a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos. Assim, esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento (Pais, 2002, p. 39).

Para alcançar o seu objetivo, ele analisa o desenvolvimento científico dos séculos XVIII e XIX e compara à ciência moderna, criticando o pensamento unificador existente na ciência mais primária, alegando que "o progresso científico efetua suas etapas mais marcantes quando abandona os fatores filosóficos de unificação fácil" (Bachelard, 1996, p. 20).

Gaston Bachelard, embora inserido no campo da pedagogia das ciências, sempre colocou um cunho pedagógico em suas reflexões, de modo a se preocupar não apenas com a forma de produzir o conhecimento científico, mas também com as dificuldades de ensino-aprendizagem associadas a esse conhecimento (Pais, 2002; Trindade, 1996).

Uma das principais ideias estudadas por Bachelard é o conceito de "ruptura", utilizado para indicar uma transformação ou descompasso entre o conhecimento comum e o científico, além de indicar dificuldades na elaboração de um conhecimento novo. De acordo com Bachelard

(1977 *apud* Trindade, 1996, p. 75), "[...] o conhecimento científico implica sempre ruptura com a experiência primeira e o conhecimento comum, ele é superação de obstáculos epistemológicos".

Além disso, ele especificou alguns obstáculos, como:

- **Experiência primeira:** se dá a partir do primeiro contato com um fenômeno empírico, sem ser estabelecida uma visão crítica e uma elaboração teórica adequada sobre ele, ou seja, não vai além da simples observação. Dessa forma, "essa observação primeira se apresenta repleta de imagens; é pitoresca, concreta, natural, fácil. Basta descrevê-la para se ficar encantado" (Bachelard, 1996, p. 25).

- **Generalizações precipitadas:** a crença em princípios gerais que inviabilizam a busca por uma compreensão mais aprofundada e crítica do conteúdo. Bachelard (1996, p. 69) afirma que "nada prejudicou tanto o progresso do conhecimento científico quanto a falsa doutrina do geral".

- **Verbal:** são hábitos de natureza linguística. O uso acrítico de palavras e expressões que, no geral, são tradicionais, mas cristalizam erros conceituais, dificultando a formulação de novas teorias. De acordo com Bachelard (1996, p. 27), é "a falsa explicação obtida com a ajuda de uma palavra explicativa".

- **Substancialismo:** envolve a explicação das propriedades pela substância. É uma tendência a explicar a natureza e os fenômenos com base em "substâncias" permanentes, que possuem qualidades fixas e imutáveis. Isso limita a compreensão de fenômenos mais abstratos, relacionais ou dinâmicos. De acordo com Bachelard (1996, p. 127),

  > a substancialização de uma qualidade imediata percebida numa intuição direta pode entravar os futuros progressos do pensamento científico tanto quanto a afirmação de uma qualidade oculta ou íntima, pois tal substancialização permite uma explicação breve e peremptória.

- **Animismo:** a atribuição de características humanas como vida, intenções ou forças vitais a objetos ou fenômenos, como se eles possuíssem uma alma ou uma intencionalidade própria. Isso ocorre porque "para o espírito pré-científico, a imagem animista é mais natural; logo, mais convincente. É evidentemente, porém, um falso esclarecimento" (Bachelard, 1996, p. 202). Tais atribuições impedem a compreensão de processos naturais.

A partir disso, Guy Brousseau, educador matemático francês, transferiu para a Matemática, por meio do texto *La problématique et l'enseignement des mathématiques* (A problemática e o ensino das matemáticas) publicado em 1976, o conceito de Obstáculo Epistemológico que Bachelard considerava aplicável aplicar apenas às ciências experimentais. De fato,

> embora tenha analisado alguns processos eminentemente matemáticos, como o conhecimento quantitativo, onde a busca do que chama um falso ou excessivo rigor pode tornar-se um obstáculo (Bachelard, 1993), comenta que suas considerações tratam do confronto com o mundo objetivo, excluindo portanto o conhecimento matemático (Bittencourt, 1998, p. 1).

Essa transposição conceitual por Brousseau revela-se pertinente quando consideramos que a Matemática, em sua apresentação formal, aparenta uma linearidade lógica perfeita. Contudo, essa estrutura coesa é o produto final de um processo histórico marcado por rupturas e reformulações, aspectos que são naturalmente omitidos na sistematização acadêmica, permanecendo apenas a cadeia dedutiva.

Nessa perspectiva, Brousseau aborda que o erro não necessariamente tem uma conotação negativa. Ele não deve ser visto apenas como fruto da ignorância ou do acaso, mas como consequência de conhecimentos prévios que antes eram válidos e agora são inadequados ou inadaptados à nova realidade. Esses erros, quando não são aleatórios ou imprevisíveis, evidenciam os obstáculos no processo de aprendizagem, apesar de não serem os únicos indicadores da existência deles.

Ademais, Brousseau afirma ter três origens básicas para os obstáculos encontrados na Matemática, que são: origem ontogenética, origem didática ou origem epistemológica, na qual esta última se refere a "obstáculos ligados à resistência de um saber mal adaptado, isto é, os obstáculos ao sentido de Bachelard. Àqueles que são historicamente atestados e participam a significação das noções as quais eles dizem respeito" (Trindade, 1996,p. 84).

De acordo com Bittencourt (1998, p. 4),

> o desenvolvimento da matemática revela momentos de incertezas e rupturas (como no caso do desenvolvimento do conceito de números irracionais), de resistências (como na acatação do conceito de limite) e inúmeros obstáculos que vão contra a idéia de evolução linear e cumulativa onde cada conhecimento se assenta perfeitamente sobre o anterior.

3.1.2 Obstáculos epistemológicos e a representação decimal dos números reais

A construção do conceito do conjunto dos números reais iniciada no 9º ano do Ensino Fundamental, a partir da união do conjunto dos irracionais com o conjunto dos racionais provoca uma instabilidade no que os estudantes entendiam como número até então, compreendendo-o basicamente como quantidades contáveis ou frações de inteiros. Essa ampliação gera uma dificuldade na elaboração conceitual dos números irracionais, pois os alunos tendem a generalizar propriedades dos números racionais, sem perceber as especificidades dos irracionais. Com o avanço dos estudos, eles começam a perceber que determinadas características observadas em todos os números que conheciam não se aplicam ao conjunto dos irracionais, como acontece com a representação decimal. Assim, esse conhecimento anterior cristalizado pode acabar se tornando um obstáculo epistemológico típico, o que exige maior atenção a esse tópico.

3.2 CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO

Nesta seção, exploramos o que se entende por Conhecimento Matemático para o Ensino e como ele se relaciona com esta pesquisa.

3.2.1 Conceitualização

Na história da educação foram estabelecidas diversas discussões sobre quais conhecimentos um docente de matemática deveria possuir. De acordo com Camargo *et al.* (2023, p. 8),

> por muito tempo, acreditou-se que o domínio do conteúdo a ser ensinado era o que bastava para o exercício da prática do professor. Assim, o conhecimento técnico do conteúdo era tido como necessário e suficiente para o bom desenvolvimento da profissão. No entanto, na metade da década de 1980, a pesquisa em educação foi marcada pelo início de um movimento que apontava para a importância de um tipo de conhecimento que vai além do domínio técnico do conteúdo.

A partir de uma perspectiva mais ampla sobre quais conhecimentos os docentes, de modo geral, devem possuir para ensinar, o psicólogo educacional Lee Shulman, em obras da década de 1980, traz que todo docente necessita de uma base de conhecimento que engloba tanto a parte técnica do conteúdo a ser ensinado quanto a parte pedagógica. Assim, Lima (2019) afirma que, segundo Shulman (1986), para além do domínio do conteúdo a ser ensinado, é indispensável que o professor conheça metodologias que facilitem a compreensão do conteúdo e o torne mais atrativo ao estudante. Dessa forma, Lima (2019, p. 75) traz que

> a partir desse pressuposto e das propostas para reformular o currículo, de modo que exista uma base de conhecimentos para o ensino, Shulman (1987, p. 4, tradução nossa), defende que essa base deve ser formada por "um conjunto

> codificado ou codificável de conhecimentos, habilidade, compreensão e tecnologia, de ética e disposição, de responsabilidade coletiva".

Portanto, Shulman propõe que todo docente deve possuir conhecimentos basilares compostos por sete categorias, são elas: conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento de alunos e suas características, conhecimento do contexto educacional e conhecimento das finalidades educacionais. Dessa forma, "as ideias de Lee Shulman quanto à compreensão da aprendizagem da docência tiveram, e têm, significativa importância na formação de professores" (Sousa; Oliveira, 2023, p. 187). Entretanto, como já mencionado, essa é uma perspectiva geral sobre a educação, sem especificar a área na qual o docente está desenvolvendo tais categorias.

A partir dos estudos de Shulman, "Ball e colaboradores introduziram a noção de Conhecimento Matemático para o Ensino [...], com o intuito de investigar os conhecimentos do professor de Matemática a partir da sua prática docente" (Ball; Thames; Phelps, 2008 *apud* Lima, 2019, p. 77). Pesquisadora na área de ensino da matemática, Deborah Ball fez diversos trabalhos com colaboradores trazendo a teoria generalista de Shulman para a matemática, de modo a especificar quais seriam os domínios do Conhecimento Matemático para o Ensino (*Mathematical Knowledge for Teaching*), relacionando o Conhecimento do Conteúdo com o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Assim, são apresentados seis domínios, sendo três relacionados ao Conhecimento do Conteúdo (*Subject Matter Knowledge*) de Shulman, a saber:

- Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) [*Common Content Knowledge*];
- Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK) [*Specialized Content Knowledge*];
- Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK) [*Horizon Content Knowledge*].

Os outros três se relacionam com o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (*Pedagogical Content Knowledge*) de Shulman, sendo eles:

- Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS) [*Knowledge of Content and Students*];
- Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) [*Knowledge of Content and Teaching*];
- Conhecimento do Conteúdo e do Currículo [*Knowledge of Content and Curriculum*].

A fim de dialogar com a presente pesquisa, serão detalhados dois desses conhecimentos que foram apresentados acima. Inicialmente, temos o Conhecimento Especializado do Conteúdo, "conhecimento que é usado exclusivamente em situações de ensino de conteúdos matemáticos e que o professor deve possuir" (Lima, 2019, p. 80). Com ele, o professor tem a capacidade de realizar uma espécie de descompactação da matemática, fazendo o discente entender os porquês da disciplina, indo além da simples resolução mecânica dos cálculos e se debruçando no entendimento das definições e estratégias utilizadas para se chegar a essa resolução. Alguns exemplos são:

> Apresentar ideias matemáticas; Responder aos "por quês?" dos alunos; Encontrar um exemplo para ilustrar um ponto matemático específico; Reconhecer o que está envolvido no uso de uma determinada representação; Relacionar representações a ideias subjacentes e a outras representações; Conectar um tópico ensinado a temas de anos anteriores ou futuros; [...] Avaliar a plausibilidade das afirmações dos alunos (frequentemente de forma rápida); Oferecer ou avaliar explicações matemáticas; Escolher e desenvolver definições utilizáveis; Usar notação e linguagem matemática e criticar seu uso; [...] Selecionar representações para propósitos específicos; Analisar equivalências (Ball; Thames; Phelps, 2008, p. 400, tradução nossa).

Ademais, é relevante entender o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, que, "segundo Ball, Thames e Phelps (2008), pode ser considerado como o conhecimento que o professor tem para perceber e compreender as relações existentes entre os campos matemáticos" (Lima, 2019, p. 83). Esse tipo de conhecimento faz com que o professor trabalhe dentro de uma cadência de informações, dando maior relevância a tópicos que, futuramente, serão cobrados novamente de maneira mais aprofundada ou com outra roupagem, ou fazendo conexões com conteúdos que já foram trabalhados. Ou seja, é um conhecimento acerca do todo na Matemática, uma visão que situa os conteúdos em um universo mais amplo, de modo a não olhar para eles de maneira isolada e sem conexões passadas ou futuras. Dessa forma, o HCK

> funciona como uma consciência da maneira como conteúdos matemáticos se relacionam uns com os outros no currículo escolar, bem como apresenta possibilidades de conexões com a Matemática Acadêmica. Conforme Ball e Bass (2009), o HCK diz respeito às relações entre o que está sendo ensinado no momento e um conhecimento mais profundo e amplo das estruturas, ideias e princípios matemáticos (Camargo *et al.*, 2023, p. 8).

Porém, é relevante entender que o fato do docente dominar conhecimentos mais avançados não quer dizer que ele vá passá-los para os seus estudantes de forma direta, pois não fazem parte do currículo da Educação Básica e também possuem um nível de complexidade muito elevado para esse público.

Dessa forma, percebe-se que a disciplina Análise Real se situa no horizonte do professor de Matemática e lhe dá artifícios que lhe permite responder aos "por quês?" dos estudantes da Educação Básica (a depender de como foi a dedicação do licenciado na disciplina durante a graduação e da forma como o professor responsável por ela a conduziu). Para que isto seja possível, essa disciplina deve ser estruturada de modo a

> estabelecer diálogos e interlocuções com conteúdos da Matemática Escolar, no sentido de procurar problematizar (formular e reformular problemas), dar outros significados aos conteúdos escolares, fazer e refazer conexões desses conteúdos, procurando promover transposições didáticas entre os conhecimentos sistemático e formal da Análise Real (Matemática Acadêmica) e os conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica (Matemática Escolar), em ações pedagógicas não dominadoras, mas solidárias, dos saberes acadêmicos (HCK) em relação aos saberes da prática escolar (SCK) (Camargo *et al.*, 2023, p. 10).

3.2.2 Conhecimento matemático para o ensino e a representação decimal dos números reais

O Conhecimento Matemático para o Ensino se faz relevante para o presente trabalho na medida em que são estabelecidas conexões entre a Matemática Acadêmica e a Matemática Escolar, de forma que o conteúdo ensinado na disciplina Análise Real serve de base teórica para a compreensão aprofundada da representação decimal dos números reais.

Nesse contexto, o docente pode desenvolver o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, o que lhe permite perceber e destacar os aspectos conceituais mais relevantes para a formação dos estudantes. Por exemplo, ao tratar da distinção entre representações decimais finitas, periódicas e não periódicas, compreendidas como as únicas possibilidades existentes, o professor pode evidenciar como essa diferenciação ajuda a consolidar a noção de racionalidade e irracionalidade.

O domínio do conteúdo teórico também contribui para que o professor desenvolva o Conhecimento Especializado do Conteúdo, isto é, a capacidade de lidar com questionamentos dos alunos de maneira segura e conceitualmente precisa. Isso inclui, por exemplo, ser capaz de explicar por que a representação decimal de um número racional é sempre finita ou periódica. Essa explicação pode ser feita de forma acessível a partir da análise de casos concretos.

A partir disso, pode-se argumentar que, sendo os irracionais definidos como os reais que não são racionais, suas representações decimais não podem ser finitas nem periódicas. Esse tipo de explicação, ainda que simplificada, permite ao docente apresentar pequenas demonstrações ou justificativas conceituais em resposta a questionamentos mais elaborados por parte dos estudantes.

3.3 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

3.3.1 Conceitualização

A fim de observar os processos de modificações pelos quais os conhecimentos matemáticos passam desde o meio científico até chegar à sala de aula da Educação Básica, Yves Chevallard, pesquisador e didata francês, aborda a Teoria da Transposição Didática. Esta foi enunciada inicialmente pelo sociólogo francês Michel Verret na sua tese de doutorado, *Les temps des études* (Tempos de Estudo) em 1975, e, posteriormente, ganhou robustez com Chevallard, em 1985, por meio do seu livro *La Transposition Didactique – Du savoir savant au savoir enseigné* (A Transposição Didática – Do saber sábio ao saber ensinado). Assim, como é trazido por Brittar e Freitas (2022, p. 1),

> na década de 1980 Yves Chevallard ficou conhecido por suas contribuições teóricas para a Didática da Matemática, particularmente pela teoria da transposição didática, a qual possibilita estudar as relações entre as diferentes formas de saber e transformações sofridas pelo saber sábio, em diversas instituições até tornar-se saber ensinado e saber aprendido. Para Chevallard o saber é fruto de produção humana e, por isso, seu uso e seu funcionamento dependem da instituição em que está vivendo, ou seja, o saber não existe no vácuo.

Chevallard (2000) compreende, então, que um saber se forma em um momento e contexto específicos, associado a uma ou mais instituições. Assim, "todo saber é o saber de uma instituição. A transposição didática permite, então, que o saber passe de uma a outra instituição. Cada uma delas, pelas suas próprias características, será responsável por dar a ele uma diferente ‘roupagem’"(Menezes, 2006, p. 73).

O conhecimento matemático, tal qual está posto na comunidade científica, possui, no geral, um alto nível de abstração e de formalização quanto à sua construção, envolvendo uma linguagem matemática mais específica e complexa, que não se faz acessível aos estudantes da Educação Básica. Existe, então, a necessidade de uma reformulação desse saber, de modo a enunciá-lo com uma roupagem menos técnica, sem perder o valor do seu conteúdo. A esse processo de reformulação é dado o nome de Transposição Didática, que “fornece explicações sobre o caminho realizado pelo saber desde sua elaboração científica até sua chegada em sala de aula como saber ensinado” (Neves; Barros, 2011, p. 103).

De acordo com Chevallard (1991), existem três tipos de saberes: o saber sábio/científico, o saber a ensinar e o saber ensinado, e a passagem do conhecimento entre esses saberes pode ser categorizada como Transposição Didática Externa (TDE) ou Interna (TDI). Detalharemos todos esses conceitos a seguir.

- **Saber sábio/científico:** produzido nos meios acadêmicos e científicos por meio de metodologias bem delimitadas e validadas. De modo geral, envolve anos de intensa pesquisa e uma equipe de trabalhadores até que o novo conhecimento seja formulado. Com isso, deve ser divulgado à comunidade acadêmica e passar pela análise e validação de outros cientistas para se tornar um conhecimento relevante à sociedade. Apesar disso, nenhuma conclusão científica é dada como imutável, pois pode sofrer melhorias ou até ser refutada após um tempo.

- **Saber a ser ensinado/saber a ensinar:** o conhecimento posto como adequado a ser ensinado a partir de diálogos de docentes, escritores de livros, pesquisadores, entre outros, e está alinhado aos interesses educacionais e sociais específicos daquela região e do momento histórico. Isso ocorre porque a esfera educacional é também uma das principais formas de manutenção do poder vigente, o que faz com que ela seja moldada a depender dos interesses socioeconômicos do sistema instaurado naquele período histórico. Bordet (1999, p. 46 *apud* Menezes, 2006, p. 73) traz que "o ensino de um saber, com efeito, é sempre a realização de um projeto social, mais ou menos largamente compartilhado, pertencente pelo menos a um certo grupo social". Com isso, esse saber é trazido nos projetos e programas escolares, currículos, livros didáticos, entre outros, que irão dizer quais conteúdos devem ser ensinados e de que forma eles devem ser abordados. Assim, "quando os saberes matemáticos chegam à escola, constituindo-se como objetos de ensino, todo o caminho de construção, desconstrução e reconstrução desse saber é, de certa forma, desconsiderado" (Beltrão, 2012, p. 136).

- **Saber ensinado:** aquele trazido pelo docente ao longo da aula, que envolve escolhas específicas do professor da turma, que podem ser influenciadas pela gestão ou coordenação escolar, bem como pela demanda dos próprios estudantes. Envolve o "como ensinar" na prática.

- **Transposição Didática Externa (TDE):** é a primeira etapa da Transposição Didática e ocorre fora das salas de aula. Ela se ocupa em realizar a passagem do saber sábio para o saber a ensinar. Isso traz um tratamento do conteúdo que antes estava colocado como estritamente científico, gerando uma espécie de "deformação" do conhecimento para torná-lo ensinável à Educação Básica, ou seja, "são selecionados os saberes que entrarão no jogo didático; onde o saber científico ganha a ‘roupagem didática’, a partir de currículos e programas de ensino” (Menezes, 2006, p. 34 *apud* Neves; Barros, 2011, p. 110). Esse processo é realizado pela noosfera que, de acordo com Chevallard (2000, p. 28, tradução nossa), consiste em

> todos aqueles que, ocupando os principais postos do funcionamento didático, se deparam com os problemas que surgem do encontro com a sociedade e suas exigências [...]. Toda uma atividade ordinária se desenvolve ali, [...], sob a forma de doutrinas propostas, defendidas e discutidas, de produção e de debates de ideias — sobre o que poderia ser modificado e sobre o que convém fazer. Em resumo, estamos aqui na esfera onde se pensa [...] o funcionamento didático.

- **Transposição Didática Interna (TDI):** é segunda etapa da Transposição Didática e ocorre dentro da sala de aula, realizando a passagem do saber a ensinar para o saber ensinado. Dessa forma, no “segundo momento da transposição didática, não mais a ‘noosfera’ se institui como elemento central dessa transformação, mas sim, o próprio professor, considerando a sua relação com o saber e com o aluno” (Menezes, 2006, p. 34 *apud* Neves; Barros, 2011, p.110).

De acordo com Menezes (2006), com a publicação dos saberes científicos, o pesquisador passa por duas etapas para que aquele conhecimento seja comunicado e compreendido socialmente, são elas: a descontextualização e a despersonalização. A descontextualização envolve a retirada daquele saber da situação que lhe originou, do problema de pesquisa original. Dessa forma, é possível trazer uma maior generalização ao mesmo. A despersonalização diz respeito à retirada das características específicas do pesquisador, como as suas motivações pessoais e ideológicas, além do processo pelo qual ele passou, como os seus erros, impasses e modificações ao longo da pesquisa, deixando apenas o caminho “correto” para se chegar à conclusão final.

Além disso, Verret (1975 *apud* Chevallard, 2000) traz que existem algumas exigências para que o saber se torne ensinável. São elas: dessincretização do saber, despersonalização do saber, programabilidade da aquisição do saber, publicidade do saber e o controle social das aprendizagens. Cada uma será melhor detalhada abaixo.

- **Dessincretização do saber:** o saber deixa de estar associado a outros e se divide em saberes parciais, ou seja, em campos de saberes delimitados que vão proporcionar aprendizagens especializadas.

- **Despersonalização do saber:** a separação do saber que está sendo produzindo daquele que o investiga e do contexto inicial no qual o conhecimento foi produzido.

- **Programabilidade da aquisição do saber:** diz respeito à maneira como ele se organiza, seguindo uma sequência racionalmente organizada de modo a permitir uma progressiva aquisição desse saber.
- **Publicidade do saber:** a definição explícita de qual saber deve ser ensinado.
- **Controle social das aprendizagens:** o controle exercido a fim de verificar se o conhecimento realmente se concretizou, ou seja, observar se o saber a ser ensinado de fato se transformou em saber ensinado.

Citados os principais conceitos basilares da teoria da Transposição Didática, vê-se que ela é fundamental ao se estudar a forma como um determinado conhecimento é produzido academicamente e a sua posterior modificação até chegar na Educação Básica.

3.3.2 Transposição Didática e a representação decimal dos números reais

Na Matemática, o conhecimento acadêmico é produzido e aprimorado ao longo dos anos por meio de axiomas, demonstrações, definições e outros. Por exemplo, a afirmação de que todo número real pode ser associado a uma sequência de dígitos possui uma demonstração rigorosa, que envolve conceitos da disciplina Análise Real e da Teoria de Conjuntos. Tal demonstração está detalhada no Capítulo 6.

Por envolver procedimentos técnicos mais avançados, a demonstração que fundamenta a existência de uma representação decimal única para cada número real não é apresentada como teorema na Educação Básica. Em seu lugar, os livros didáticos omitem as justificativas formais, limitando-se a utilizar os resultados já consolidados. Nesses materiais, afirma-se categoricamente que:

1. Os números racionais ($\mathbb{Q}$) possuem representação decimal finita ou periódica.
2. Os números irracionais ($\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$) apresentam representação decimal não-periódica.

Essas duas formas de representação são exaustivas (cobrem todos os reais) e funcionam como critério operacional para distinguir os elementos desses dois subconjuntos fundamentais dos números reais.

Para tornar esse conhecimento acessível aos estudantes, ocorrem processos de simplificação, como a programabilidade da aquisição do saber (com a estruturação sequencial do ensino) e a publicidade do saber (com a clara definição de quais conteúdos devem ser ensinados). Esses fenômenos, centrais para a construção conceitual no ensino básico, serão retomados no Capítulo 7, quando analisaremos como eles se manifestam nos livros didáticos analisados.

Ademais, diante das modificações e reformulações do saber científico em saber escolar, torna-se fundamental refletir sobre quais conhecimentos são essenciais ao professor que atuará na Educação Básica, de modo que ele consiga realizar a TDI de maneira eficaz. Para isso, é essencial que o docente desenvolva, por um lado, domínio do conteúdo técnico e específico de seu campo de estudo e, por outro, competências pedagógicas que possibilitem a mediação do saber. Tal ideia faz um paralelo entre a Transposição Didática e o Conhecimento Matemático para o Ensino.

4 MATERIAIS BASILARES DA EDUCAÇÃO BRASILEIRA

Para compreender como o conhecimento matemático é estruturado na Educação Básica, é essencial analisar os documentos oficiais e os livros didáticos. Esses materiais orientam o ensino e influenciam diretamente a forma que conceitos como os números reais são apresentados aos estudantes. Neste capítulo, abordamos esses materiais e suas implicações para o ensino da Matemática.

4.1 DOCUMENTOS OFICIAIS

Existem diversos documentos que norteiam a educação brasileira em seus diferentes níveis educacionais, trazendo informações que versam, a depender do documento, sobre as diretrizes educacionais, os conteúdos que devem ser vistos em cada etapa da escolarização, as competências a serem desenvolvidas pelos estudantes, entre outros tópicos.

Após o fim da Ditadura Militar (1985) e a implementação da Constituição de 1988, a educação brasileira passou a ser ainda mais repensada e, na década de 1990, alguns dos maiores avanços da nova reestruturação da educação começaram a surgir. Em 1996, é instituída a Lei nº 9.394/96, trazendo a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), que é a principal lei orientadora do sistema educacional brasileiro. Nela, são trazidas algumas informações, como os quinze princípios da Educação Nacional, entre eles: igualdade de condições para o acesso e permanência na escola; liberdade de aprender, ensinar, pesquisar e divulgar a cultura, o pensamento, a arte e o saber; respeito à liberdade e apreço à tolerância; valorização do profissional da educação escolar; garantia de padrão de qualidade e garantia do direito à educação e à aprendizagem ao longo da vida. Além disso, ela também aborda outras questões, como a educação básica obrigatória e gratuita ao estudante dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos, a divisão da educação básica em Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio e a organização geral da educação brasileira.

Por determinação desse documento, são publicados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) entre 1997 e 2000 e o primeiro Plano Nacional de Educação (PNE), que teve sua vigência entre 2001 e 2010. Os PCN são documentos orientadores, não possuindo um caráter obrigatório, que trazem propostas pedagógicas por área e ano escolar, respeitando a diversidade regional e cultural do país e objetivando construir escolas que formem cidadãos. Especificamente para Matemática,

> os Parâmetros Curriculares Nacionais propõem e explicitam algumas alternativas para que se desenvolva um ensino de Matemática que permita ao aluno compreender a realidade em que está inserido, desenvolver suas capacidades cognitivas e sua confiança para enfrentar desafios, de modo a ampliar os recursos necessários para o exercício da cidadania, ao longo de seu processo de aprendizagem (Brasil, 1998, p. 60).

O segundo documento, o PNE, traz 295 objetivos e metas que deveriam ser alcançadas até 2010, o que não ocorreu em sua plenitude. Em virtude disso, foi instituído o segundo PNE, com vigência entre 2014 e 2024 (com extensão até o final de 2025), o qual possui 20 metas que vão desde a Educação Infantil e o Ensino Fundamental até a Educação de Jovens e Adultos, passando também pela formação de professores e o Ensino Superior.

Posteriormente, também embasadas na LDB, surgem as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), que são documentos normativos para regulamentar o que deve constar nos currículos da Educação Básica, e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que define um conjunto de aprendizagens que todos os estudantes brasileiros devem adquirir ao longo da Educação Básica.

Abordando de maneira mais específica a BNCC, sabemos que ela tem caráter obrigatório e serve de base para o desenvolvimento dos currículos dos estados e municípios, definindo o "mínimo" a ser instituído por estes. Ela é organizada a partir das etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio) e traz 10 competências gerais, além de habilidades específicas que os alunos devem desenvolver em cada matéria de acordo com o ano escolar. Portanto, a BNCC

> é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (Brasil, 2017, p. 7).

Com isso, fazendo um paralelo com a temática do trabalho, temos que, de acordo com a BNCC (Brasil, 2017), alguns dos objetos de conhecimento que devem ser adquiridos pelos estudantes do 9º ano são: necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta; números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica; potências com expoentes negativos e fracionários; e números reais: notação científica e problemas. A partir disso, é necessário que os estudantes desenvolvam as seguintes habilidades, ou seja, sejam capazes de realizar as seguintes ações: reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade) - habilidade EF09MA01; reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica - habilidade EF09MA02; efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários - habilidade EF09MA03 e resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações - habilidade EF09MA04. Os dois primeiros objetos de conhecimento estão relacionados às duas primeiras habilidades, o terceiro objeto de conhecimento está atrelado à terceira habilidade e o quarto objeto de conhecimento está atrelado à quarta habilidade.

Portanto, percebe-se que a Educação Básica brasileira possui uma forte legislação que regulamenta, estrutura e organiza o seu funcionamento no país, trazendo, de forma explícita, a importância da elaboração do conhecimento acerca do conjunto dos números reais e da sua representação decimal.

4.2 LIVROS DIDÁTICOS

Os livros didáticos (LD) ocupam um espaço singular no processo de ensino e aprendizagem dos estudantes ao longo de toda a jornada acadêmica. Isso porque condensam os conhecimentos de forma estruturada e seguem uma lógica de progressão de conteúdos, o que os torna uma relevante fonte de conhecimento para os alunos e de organização e sistematização do conteúdo para os professores. Como afirma Rossini (2003 *apud* Macêdo; Brandão; Nunes, 2019, p. 71):

> o livro didático é uma obra destinada a uma sala de aula, ou seja, um manual de uso tanto por parte de professores quanto por parte de alunos, apresentando os conteúdos de forma organizada, sugestões didáticas, com a finalidade de auxiliar o professor em sua prática docente e os alunos no desenvolvimento de sua aprendizagem.

Dessa forma, apesar do livro didático não ser o único recurso empregado em sala de aula, ele é amplamente utilizado, como declaram Macêdo; Brandão; Nunes (2019, p. 71-72), ao abordarem que

> existem diversos recursos didáticos que podem ser utilizados ao se ensinar matemática na educação básica, como a aplicação de jogos, desafios matemáticos, recursos tecnológicos, entre outros. Porém, o principal instrumento de ensino do professor na educação básica permanece sendo o livro didático.

O livro didático é o recurso mais acessível às instituições escolares e aos estudantes, visto que existe o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), uma política pública executada pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), que garante a avaliação e a disponibilização de obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa às escolas públicas de educação básica, de forma sistemática, regular e gratuita (Brasil, 2018). Além disso, esse programa também oferece esse serviço a instituições sem fins lucrativos conveniadas ao Poder Público, o que garante que toda escola gratuita possua algum livro didático. Por outro lado, nem toda escola pública dispõe de laboratório de matemática e/ou acervo de jogos, ou laboratório de informática com computadores que funcionem e sirvam como recurso tecnológico. Assim, o livro didático se torna o recurso mais acessível a todas as realidades da Educação Básica.

Em virtude da ampla utilização dos livros didáticos, é relevante refletir acerca dos conteúdos que são expostos neles. Assim, Lajolo (1996 *apud* Santana, 2020, p. 70-71) traz

> a importância do LD no Brasil, onde o mesmo, muitas vezes, determina conteúdos e condiciona estratégias de ensino, marcando, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina. Para a autora [Lajolo], o LD, dependendo das condições sociais e materiais da escola, do professor e do aluno, pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado, muito embora ele não deva ser o único material que os professores e alunos disponham.

Portanto, é fundamental que a análise dos livros didáticos seja feita com rigor e atenção, considerando seu profundo impacto na educação. Isso porque ela pode nos revelar possíveis dificuldades e obstáculos que podem ser desenvolvidos pelos estudantes a depender da maneira como a exposição do conteúdo é feita. Dessa forma,

> se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o livro didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas. Não é a única, porém, como o LD é o principal material utilizado pelo professor no preparo de suas aulas, seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor (Bittar, 2017, p. 365 - 366).

Assim, ao investigar esses materiais, buscamos nesta pesquisa contribuir para que eles se tornem ainda mais eficazes na promoção de um aprendizado significativo, além de evidenciar aos docentes quais conhecimentos deixaram de ser incluídos na transposição e reformulação dos conteúdos nos respectivos livros.

5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Para atingir os objetivos supracitados, é importante delimitar o caminho metodológico que será percorrido a fim de garantir a confiabilidade e a relevância dos dados analisados ao longo do trabalho, tendo em vista que a pesquisa se constitui como

> o procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. [...] A pesquisa é desenvolvida mediante o concurso dos conhecimentos disponíveis e a utilização cuidadosa de métodos e outros procedimentos científicos (Gil, 2002, p. 17).

Portanto, a referida pesquisa caracteriza-se, com relação à abordagem ao problema, como qualitativa, pois busca destacar a importância da disciplina Análise Real no entendimento da demonstração matemática da representação decimal dos números reais. De acordo com Gerhardt e Silveira (2009, p. 33), a pesquisa qualitativa "não se preocupa com representatividade numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, etc", ou seja, centra-se "na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais" (Gerhardt; Silveira, 2009, p. 34). Esse tipo de pesquisa possui uma orientação centrada na subjetividade, de modo que a preocupação se dá, prioritariamente, com os processos, e não com os resultados. Entretanto,

> isso não quer dizer que todo e qualquer discurso elaborado em uma pesquisa deve ser aceito, devido à subjetividade. Espera-se que o pesquisador mantenha coerência em suas discussões, apoiando-se em teorias, de modo que tais discussões não se tornem vazias ou caiam no senso comum. Segundo Goldenberg (1999, p. 45), esse esforço se faz necessário para "[...] não fazer do objeto construído um objeto inventado" (Mazzi, 2018, p. 81).

Ademais, esta pesquisa classifica-se como básica, pois não gera conhecimentos para aplicações práticas, e também como descritiva, ao sistematizar e analisar comparativamente as características das abordagens observadas nos livros didáticos. Além disso, trata-se de uma pesquisa bibliográfica, pois ela é "desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos" (Gil, 2002, p. 44), uma vez que se fundamenta em obras didáticas e acadêmicas especializadas.

O *corpus* de análise compreende duas categorias principais de fontes: obras acadêmicas tanto de Análise Real como da construção dos conjuntos numéricos e livros didáticos do 9º ano.

No que tange ao material acadêmico, foi selecionada a consagrada obra "Curso de Análise", de Elon Lages Lima, volume 1, referência fundamental na disciplina de Análise Real.

Além disso, para abordar especificamente a representação decimal dos números reais a partir dos conceitos da Análise Real, optou-se pelo livro “A Construção dos Números”, de Jamil Ferreira.

No que concerne à escolha dos livros didáticos, priorizamos coleções do 9º ano aprovadas e distribuídas pelo PNLD, pois esse é o ano do Ensino Fundamental que, de acordo com a BNCC, é introduzido o conjunto dos números reais. Nesse contexto, realizamos uma pesquisa no *site* do Sistema de Controle de Materiais Didáticos do FNDE a fim de verificar as coleções utilizadas em cidades do Agreste Pernambucano. Com isso, foram selecionadas aquelas adotadas nas escolas públicas de dois municípios dessa região em 2025, a saber: Gravatá (cidade de origem da autora) e Pombos. Essa escolha não apenas contextualiza a pesquisa regionalmente, como permite examinar a forma como o conteúdo é tratado em realidades próximas à vivência da pesquisadora. As coleções são:

- “A Conquista Matemática”, de José Ruy Giovanni Júnior, adotada no município de Gravatá;
- “Teláris Essencial: Matemática”, de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, adotada no município de Pombos.

Este trabalho foi desenvolvido dentro das seguintes etapas:

1. Desenvolvimento da demonstração matemática que estabelece a representação decimal dos números reais, enfatizando quais conteúdos da disciplina Análise Real foram abordados e destacando sua relevância para a formação docente;
2. Descrição e análise de como os livros didáticos abordam a representação decimal do conjunto dos números reais, enfatizando as especificidades e diferenças entre os conjuntos dos números racionais e irracionais, de modo a estabelecer conexões entre o que é trazido nos livros e a demonstração feita anteriormente;
3. Destaque de alguns fenômenos da Transposição Didática que podem ser observados nos livros didáticos.

Com relação à Etapa 1, inicialmente foram trazidas algumas definições e proposições necessárias ao bom entendimento das posteriores demonstrações centrais. Com isso, foi trazido o Teorema 1, que estabelece a definição da representação decimal dos números reais não negativos e menores que 1. A partir disso, foi possível generalizar esse resultado para todos os reais utilizando uma das proposições citadas e outras informações. Posteriormente, demonstramos que os números racionais possuem representação decimal finita ou periódica. Essa característica, por exclusão, implica que os irracionais, que não podem ser expressos dessa forma, devem ter representação decimal não periódica, estabelecendo assim a distinção fundamental entre as expansões decimais dos dois conjuntos. Ainda na etapa 1, trouxemos quais informações da disciplina Análise Real foram utilizadas e, por último, foi feito um diálogo com as teorias trazidas no Capítulo 3.

Para garantir o rigor na análise da representação decimal dos livros didáticos (Etapa 2), foram adotados critérios específicos de avaliação que permitirão sistematizar as abordagens encontradas nos materiais didáticos, com foco em: (1) os métodos de introdução e justificativa das representações decimais infinitas; (2) o tratamento dado às diferenças entre as representações decimais de números racionais e irracionais; e (3) a relação existente entre o que é abordado no livro e a demonstração matemática. Essa sistematização permitirá avaliar criticamente os aspectos fundamentais da representação decimal no contexto da Educação Básica. Além disso, possibilitará compreender como a Análise Real constitui o fundamento teórico que embasa a demonstração rigorosa associada a essa representação.

Por fim, na etapa 3, foi possível destacar dois fenômenos da Transposição Didática ao final da análise de cada livro: a Programabilidade e a Publicidade do saber. Essa etapa tem como finalidade compreender a forma como esse conteúdo é levado para a Educação Básica.

6 REPRESENTAÇÃO DECIMAL DOS NÚMEROS REAIS

Neste capítulo, é apresentada uma demonstração que justifica a representação decimal dos números reais, fundamentada nas ideias presentes no livro *A Construção dos Números* de Jamil Ferreira. Para tanto, serão assumidas algumas propriedades fundamentais do conjunto dos números reais, introduzidas definições essenciais e estabelecidos alguns resultados, que, em geral, integram o conteúdo da disciplina de Análise Real.

6.1 NOÇÕES PRELIMINARES DE ANÁLISE REAL

Nesta seção, serão assumidas afirmações fundamentais, tanto para o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ quanto para o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Esses axiomas serão adotados como ponto de partida, pois o desenvolvimento teórico completo exigiria uma extensão maior, que foge ao escopo deste trabalho. Para um tratamento rigoroso dessas fundamentações, recomendamos a leitura de Lima (2008) e Ferreira (2022).

Inicialmente, apresentamos os axiomas que definem a estrutura de $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo.

Axiomas de Corpo. *O conjunto dos números reais é munido de duas operações binárias, adição e multiplicação, denotadas respectivamente pelos símbolos “$+$” e “$\cdot$”, que satisfazem as seguintes propriedades:*

Associatividade. *Para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *temos* $(x+y)+z = x+(y+z)$ *e* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$*;*

Comutatividade. *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$, *temos* $x + y = y + x$ *e* $x \cdot y = y \cdot x$*;*

Elementos neutros. *Existem em* $\mathbb{R}$ *dois elementos distintos, denotados por 1 e 0, tais que* $x+0 = x$ *e* $x \cdot 1 = x$, *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$*;*

Inversos. *Todo* $x \in \mathbb{R}$ *possui um número real, chamado inverso aditivo, denotado por* $-x$, *tal que* $x + (-x) = 0$. *Além disso, se* $x \neq 0$, *também existe um número real, chamado inverso multiplicativo, denotado por* x^{-1}, *que satisfaz* $x \cdot x^{-1} = 1$.

Distributividade. *Para quaisquer* $x, y, z \in \mathbb{R}$, *temos* $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Axiomas de Ordem. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *é munido de uma relação de ordem total, denotada por* $\leq$ *e lida como menor ou igual. Dados* $a, b, c \in \mathbb{R}$, *essa relação satisfaz as seguintes propriedades:*

Reflexividade. $a \leq a$

Antissimetria. *Se* $a \leq b$ *e* $b \leq a$, *então* $a = b$*;*

Transitividade. *Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$;*

Comparabilidade (ou totalidade). *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, ou $a \leq b$ ou $b \leq a$.*

Ao longo do texto, por efeito de simplicidade, dados $x, y \in \mathbb{R}$, definimos as operações

$$x - y := x + (-y)$$

e

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1},$$

sendo $y \neq 0$ apenas na segunda operação.

Antes de enunciar o axioma de completude, apresentaremos algumas definições fundamentais para sua compreensão.

Definição 1 *É dito que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é **limitado inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. Nesse caso, a é chamada uma **cota inferior** de X.*

Definição 2 *É dito que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é **limitado superiormente** quando existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Nesse caso, b é chamada uma **cota superior** de X.*

Definição 3 *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado inferiormente. É dito que $a \in \mathbb{R}$ é o **ínfimo** do conjunto X quando ele é a maior das cotas inferiores de X, e escrevemos $a = \inf X$. Quando $a \in X$, o número a é denominado **menor elemento** (ou **elemento mínimo**) de X.*

Definição 4 *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado superiormente. É dito que $b \in \mathbb{R}$ é o **supremo** do conjunto X quando ele é a menor das cotas superiores de X, e escrevemos $b = \sup X$. Quando $b \in X$, o número b é denominado **maior elemento** (ou **elemento máximo**) de X.*

Com isso, podemos enunciar o axioma de completude.

Axioma da Completude. *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado superiormente possui um supremo em $\mathbb{R}$.*

Apesar de não fazer menção ao ínfimo, o Axioma da Completude é equivalente à seguinte propriedade: todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ que é limitado inferiormente possui ínfimo em $\mathbb{R}$.

Além dos axiomas assumidos para o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, será também considerado o Princípio da Boa Ordem (PBO) para o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, enunciado a seguir.

Princípio da Boa Ordem. *Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.*

A partir dos axiomas assumidos, demonstraremos alguns resultados que decorrem deles. O primeiro deles é o conhecido Princípio da Indução Finita (PIF), que permite estabelecer a validade de afirmações formuladas para os números naturais.

Proposição 1 (Princípio de Indução Finita) *Se um subconjunto $X \subseteq \mathbb{N}^*$ é tal que $1 \in X$ e se a afirmação*

$$n \in X \;\Rightarrow\; n+1 \in X$$

for verdadeira para algum n natural não nulo, então $X = \mathbb{N}^*$.

Demonstração. Seja $X \subseteq \mathbb{N}^*$ um subconjunto que satisfaz as hipóteses da proposição. Suponha, por contradição, que $X \subsetneq \mathbb{N}^*$. O conjunto $A = \mathbb{N}^* \setminus X$ é, então, não vazio e, pelo Princípio da Boa Ordenação, admite um menor elemento, denotado por m. Como $1 \in X$, segue que $m > 1$, de modo que $m - 1 \in \mathbb{N}^*$. Pela minimalidade de m, temos $m - 1 \in X$. Assim, por hipótese, concluímos que $m = (m-1) + 1 \in X$, contradizendo o fato de $m \in A$. Portanto, $X = \mathbb{N}^*$. $\square$

A afirmação a seguir, demonstrada com base no Princípio da Indução Finita, será utilizada como resultado auxiliar na prova de um dos teoremas principais, permitindo que o foco permaneça nos aspectos essenciais, sem interrupções por cálculos indutivos.

Exemplo 1 *Considere o conjunto*

$$X := \left\{ n \in \mathbb{N} \middle| \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \right\}.$$

É sabido que $X = \mathbb{N}^*$. De fato, é imediato que $1 \in X$, pois

$$\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^1}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{10} = \frac{1}{10^1}.$$

Adimitamos, como hipótese de indução, que $k \in X$, ou seja,

$$\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^k} = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^k}\right).$$

Isso implica que

$$\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^k} + \frac{1}{10^{k+1}} = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^k}\right) + \frac{9}{9 \cdot 10^{k+1}} = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^{k+1}}\right),$$

garantindo que $k + 1 \in X$. Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, segue que $X = \mathbb{N}^*$.

Prosseguimos com a apresentação de outros resultados que serão úteis no desenvolvimento posterior.

Proposição 2 *O conjunto dos números naturais $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ não é limitado superiormente.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ é limitado superiormente. Nesse caso, dada a completude de $\mathbb{R}$, existe um número real $c = \sup \mathbb{N}$. Como $c - 1 < c$, então $c - 1$ não é uma cota superior de $\mathbb{N}$. Assim, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > c - 1$. Logo, $n + 1 > c$, o que é um absurdo, pois $n + 1 \in \mathbb{N}$ e c é cota superior de $\mathbb{N}$. Portanto, $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente. $\square$

Proposição 3 *Dado um número real não negativo β, existe um número natural, n_0, que é o maior número natural menor ou igual a β; em outras palavras, $n_0 \leq \beta < n_0 + 1$.*

Demonstração. Seja $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq \beta\} \subseteq \mathbb{N}$. O nosso objetivo é concluir que A possui um elemento máximo. Para isso, consideramos o conjunto complementar

$$\complement_{\mathbb{N}} A = \{p \in \mathbb{N} \mid p > \beta\} \subseteq \mathbb{N},$$

e concluímos que $\complement_{\mathbb{N}} A$ possui um elemento mínimo. De fato, pela Proposição 2, temos $\complement_{\mathbb{N}} A \neq \emptyset$. Se fosse o contrário, ou seja, se $\complement_{\mathbb{N}} A = \emptyset$, então teríamos $n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que significaria que $\mathbb{N}$ é limitado superiormente, uma contradição com o que afirma a referida proposição. Em virtude do Princípio da Boa Ordenação, $\complement_{\mathbb{N}} A$ possui um elemento mínimo, $p_0 \in \mathbb{N}$. Note que $p_0 \neq 0$, pois, caso contrário, $\beta < 0$, o que contraria o fato de β ser um número real não negativo. Pela minimalidade de p_0, temos $p_0 - 1 \notin \complement_{\mathbb{N}} A$ e, assim, como $p_0 - 1 \in \mathbb{N}$, concluímos que $p_0 - 1 \in A$. Afirmamos que $p_0 - 1$ é o elemento máximo de A. Com efeito, se existisse algum $n \in A$ tal que $p_0 - 1 < n$, então $p_0 - 1 < n \leq \beta$. Logo, $p_0 \leq n \leq \beta$. Isso contradiz o fato de $p_0 \in \complement_{\mathbb{N}} A$. Portanto, tal n não pode existir, e concluímos que $n_0 = p_0 - 1$ é o elemento máximo de A. Por fim, como consequência imediata, temos $n_0 \leq \beta < n_0 + 1$. $\square$

A seguir, serão definidas as sequências de números reais, objetos fundamentais da análise matemática que formalizam a ideia de listas ordenadas de elementos. Essa definição é especialmente relevante no contexto da representação decimal dos números reais, já que tais expressões são construídas a partir de sequências de dígitos.

Definição 5 *Uma **sequência de números reais** é uma função*

$$\begin{aligned} x : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto x(n) = x_n. \end{aligned}$$

O conjunto dos números naturais é usualmente considerado o domínio de uma sequência, chamado conjunto de índices, enquanto o conjunto dos números reais atua como contradomínio, representando os valores atribuídos a cada índice. O número real x_n é denominado o n-ésimo termo da sequência. Vale ressaltar que, se $X \subseteq \mathbb{N}$ é um subconjunto que está em bijeção com $\mathbb{N}$, então também é possível definir uma sequência com domínio X, preservando a estrutura sequencial.

Uma sequência pode ser representada por $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou, de forma mais geral, por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6.2 DEMONSTRAÇÕES DOS PRINCIPAIS TEOREMAS

No teorema a seguir, é demonstrada a correspondência biunívoca entre os números reais não negativos menores que 1 e certas sequências de dígitos, estabelecendo, assim, sua representação decimal. Em seguida, essa representação é estendida a todos os números reais.

Teorema 1 *Existe uma correspondência biunívoca entre números reais em* $[0, 1)$ *e certas sequências de dígitos, conforme descrito a seguir.*

1. *A cada número real* $\alpha \in [0, 1)$ *corresponde uma única sequência de dígitos* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$*, satisfazendo:*

   a) $0 \leq n_k \leq 9$ *para todo* $k \in \mathbb{N}^*$*;*

   b) $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *não possui infinitos dígitos consecutivos iguais a 9;*

   c) definindo, para cada $k \in \mathbb{N}^*$,

   $$S_k = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k}$$

   temos $\alpha = \sup S$*, no qual* $S = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$.

2. *Reciprocamente, a cada sequência de dígitos* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$*, satisfazendo a) e b), corresponde um único número real* $\alpha \in [0, 1)$*, que é o supremo do conjunto limitado superiormente* $S = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$*, em que cada* S_k *é dado conforme a definição apresentada em c).*

Demonstração. Dado $\alpha \in [0, 1)$, será construída indutivamente uma sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ que satisfaz *a), b)* e *c)*. Visando à clareza, a demonstração está organizada de acordo com a numeração dos itens do enunciado.

1. a) Pela Proposição 3, seja n_1 o maior número natural menor ou igual a 10α; em outras palavras,

$$n_1 \leq 10 \cdot \alpha < n_1 + 1.$$

Quando $\dfrac{n_1}{10} = \alpha$, é associado a α a sequência $(n_1, 0, 0, 0, \ldots)$. É imediato que essa sequência satisfaz as condições que se deseja ter. De fato,

$$0 \leq \frac{n_1}{10} = \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq n_1 < 10$$

e, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$S_k = \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} = \frac{n_1}{10} = \alpha.$$

Logo, $\alpha = \sup S$, no qual $S = \{S_k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$. Por outro lado, quando $\dfrac{n_1}{10} < \alpha$, seja n_2 o maior número natural menor ou igual a $10^2 \cdot \alpha - 10 \cdot n_1$; em outras palavras, $n_2 \leq 10^2 \cdot \alpha - 10 \cdot n_1 < n_2 + 1$. Isso implica que

$$\frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} \leq \alpha$$

e, assim,

$$\frac{n_2}{10^2} \leq \alpha - \frac{n_1}{10} < \frac{n_1 + 1}{10} - \frac{n_1}{10} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad n_2 < 10.$$

Portanto, $0 \leq n_2 \leq 9$. Quando $\dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2} = \alpha$, é associado a α a sequência $(n_1, n_2, 0, 0, \ldots)$. Daí,

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{n_1}{10}, \\ S_k = \dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2} + \cdots + \dfrac{n_k}{10^k} = \dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2} = \alpha, \quad \forall k \geq 2, \end{cases}$$

e, consequentemente, $\alpha = \sup S$. Por outro lado, quando $\dfrac{n_1}{10} + \dfrac{n_2}{10^2} < \alpha$, seja n_3 o maior número natural menor ou igual a $10^3 \cdot \alpha - 10^2 \cdot n_1 - 10 \cdot n_2$; em outras palavras,

$$n_3 \leq 10^3 \cdot \alpha - 10^2 \cdot n_1 - 10 \cdot n_2 < n_3 + 1.$$

Considere obtidos os números naturais $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_{k-1}$ tais que

$$\begin{cases} n_1 \leq 10 \cdot \alpha < n_1 + 1, \\ n_j \leq 10^j \cdot \alpha - \displaystyle\sum_{i=1}^{j-1} 10^{j-i} \cdot n_i < n_j + 1, \end{cases}$$

no qual $j \in \{2, \ldots, k-1\}$. A partir disso, obtemos n_k como o maior natural menor ou igual a $10^k \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i} \cdot n_i$; em outras palavras,

$$n_k \leq 10^k \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i} \cdot n_i < n_k + 1. \tag{6.1}$$

É imediato concluir que

$$\frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k} \leq \alpha.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} n_{k-1} \leq 10^{k-1} \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{(k-1)-1} 10^{(k-1)-i} \cdot n_i \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq 10^{k-1} \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{(k-1)-1} 10^{(k-1)-i} \cdot n_i - n_{k-1} \\ &\Rightarrow \quad 0 \leq 10^{k} \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{(k-1)-1} 10^{k-i} \cdot n_i - 10 \cdot n_{k-1} \\ &\Rightarrow \quad 0 < n_k + 1 \\ &\Rightarrow \quad -1 < n_k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 10^{k-1} \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{(k-1)-1} 10^{(k-1)-i} \cdot n_i < n_{k-1} + 1 \quad &\Rightarrow \quad 10^{k-1} \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{(k-1)-1} 10^{(k-1)-i} \cdot n_i - n_{k-1} < 1 \\ &\Rightarrow \quad 10^{k} \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{(k-1)-1} 10^{k-i} \cdot n_i - 10 \cdot n_{k-1} < 10 \\ &\Rightarrow \quad n_k < 10. \end{aligned}$$

Consequentemente, $0 \leq n_k \leq 9$. Associamos, então, à α a sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$.

c) O próximo passo é concluir que $\alpha = \sup S$, pois essa igualdade será essencial para demonstrarmos o item b). Por construção, α é cota superior de S. Suponha, por contradição, que exista $\beta \in \mathbb{R}$ uma cota superior de S de modo que $\beta < \alpha$. Pela Proposição 2, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\alpha - \beta} < l$. Seja $l = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0$, nos quais $k \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, com $a_{k-1} \neq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} l &= a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + a_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \cdots + a_0 \cdot 10^0 \\ &\leq 9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10^0 \\ &< \left(9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \cdots + 9 \cdot 10^0\right) + 1 \\ &= 10^k. \end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{1}{10^k} < \alpha - \beta$. Além disso, a partir da desigualdade apresentada em (6.1), obtemos que $\alpha - S_k < \dfrac{1}{10^k}$, pois

$$10^k \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{k-1} 10^{k-i} \cdot n_i < n_k + 1 \Rightarrow 10^k \cdot \left(\alpha - \sum_{i=1}^{k-1} 10^{-i} \cdot n_i - \frac{n_k}{10^k}\right) < 1 \Rightarrow 10^k \cdot (\alpha - S_k) < 1.$$

Como $\alpha - S_k < \dfrac{1}{10^k} < \alpha - \beta$, temos $\beta < S_k$. Tal conclusão contradiz o fato de β ser uma cota superior de S. Assim, segue que $\alpha = \sup S$.

b) Para demonstrar que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ não possui infinitos dígitos consecutivos iguais a 9, procedemos por contradição. Suponha, então, que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ seja uma sequência de dígitos tal que $n_k = 9$ para todo $k \geq N$, para algum $N \in \mathbb{N}^*$. Quando $k \leq N$, temos $S_k \leq S_N$. Agora, quando $k > N$, ou seja, $k = N + r$ com $r \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\begin{aligned} S_{N+r} &= S_N + \sum_{j=1}^{r} \frac{9}{10^{N+j}} \\ &= S_N + \frac{9}{10^N} \cdot \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^r} \right) \\ &= S_N + \frac{9}{10^N} \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^r} \right) \right] \\ &< S_N + \frac{1}{10^N}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_k < S_N + \frac{1}{10^N}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

ou seja, $S_N + \dfrac{1}{10^N}$ é uma cota superior de S. A seguir, será demonstrado que

$$\sup S = S_N + \frac{1}{10^N}.$$

Para isso, tomamos um número real qualquer menor que $S_N + \dfrac{1}{10^N}$ e mostramos que existe um elemento de S que é maior do que esse número. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que

$$S_k > \left(S_N + \frac{1}{10^N} \right) - \varepsilon.$$

De fato, a partir das análises anteriores, foi também concluído que

$$S_{N+r} = S_N + \frac{9}{10^N} \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^r} \right) \right] = S_N + \frac{1}{10^N} - \frac{1}{10^{N+r}}, \quad \forall r \in \mathbb{N}^*.$$

Repetindo os argumentos do final da demonstração do item *c)*, ao aplicar a Proposição 2 é possível concluir que existe $r_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\dfrac{1}{10^{r_0}} < \varepsilon$. Assim, em particular,

$$S_{N+r_0} = S_N + \frac{1}{10^N} - \frac{1}{10^{N+r_0}} > \left(S_N + \frac{1}{10^N} \right) - \varepsilon.$$

Logo, $S_N + \frac{1}{10^N}$ é a menor cota superior de S, isto é:

$$\alpha = \sup S = S_N + \frac{1}{10^N}.$$

A partir disso, finalmente, observemos que

$$\begin{aligned}
\alpha = S_N + \frac{1}{10^N} \quad &\Rightarrow \quad 10^N \cdot \alpha = 10^N \cdot S_N + 1 \\
&\Rightarrow \quad 10^N \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{N-1} 10^{N-i} \cdot n_i - n_N = 1 \\
&\Rightarrow \quad 10^N \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{N-1} 10^{N-i} \cdot n_i = n_N + 1.
\end{aligned}$$

Isso contradiz o fato de n_N ser o maior natural menor ou igual a $10^N \cdot \alpha - \sum_{i=1}^{N-1} 10^{N-i} \cdot n_i$. Portanto, a suposição de que existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de dígitos tal que $n_k = 9$ para todo $k \geq N$, não se sustenta. Finalmente, concluímos a demonstração do item 1.

2. Considere $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de dígitos, com $0 \leq n_k \leq 9$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, sem infinitos dígitos consecutivos iguais a 9. Seja S o conjunto definido conforme o enunciado. O Princípio de Indução Finita será utilizado para concluir que S é limitado superiormente e $0 \leq \sup S < 1$. A demonstração prosseguirá dividida em casos, e em ambos será aplicada a igualdade verificada no Exemplo 1. Como a sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ não possui infinitos dígitos consecutivos iguais a 9, em particular, existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_{k_0} < 9$.

1º Caso: se $k_0 > 1$, então, para todo $k \in \mathbb{N}^*$ satisfazendo $k \leq k_0 - 1$, temos

$$\begin{aligned}
S_k &\leq S_{k_0-1} \\
&= \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_{k_0-1}}{10^{k_0-1}} \\
&\leq \frac{9}{10} + \ldots + \frac{9}{10^{k_0-1}} \\
&= 9 \cdot \left[\frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^{k_0-1}}\right)\right] \\
&= 1 - \frac{1}{10^{k_0-1}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, quando $k = k_0 + r$, com $r \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}
S_{k_0+r} &= S_{k_0-1} + \frac{n_{k_0}}{10^{k_0}} + \frac{n_{k_0+1}}{10^{k_0+1}} + \cdots + \frac{n_{k_0+r}}{10^{k_0+r}} \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{10^{k_0-1}}\right) + \frac{8}{10^{k_0}} + \frac{1}{10^{k_0}} \cdot \left(\frac{n_{k_0+1}}{10} + \cdots + \frac{n_{k_0+r}}{10^r}\right) \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{10^{k_0-1}}\right) + \frac{8}{10^{k_0}} + \frac{1}{10^{k_0}} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^r}\right) \\
&< \left(1 - \frac{1}{10^{k_0-1}}\right) + \frac{8}{10^{k_0}} + \frac{1}{10^{k_0}} \\
&= 1 - \frac{1}{10^{k_0-1}} + \frac{9}{10^{k_0}} \\
&= 1 - \frac{1}{10^{k_0}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$S_k \leq 1 - \frac{1}{10^{k_0}} < 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

2º Caso: se $k_0 = 1$, então $S_1 = \dfrac{n_1}{10} < \dfrac{9}{10}$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}^*$, com $k \neq 1$, temos

$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \\
&\leq \frac{8}{10} + \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{k-1}} \right) \\
&= \frac{8}{10} + \frac{9}{10} \cdot \left[\frac{1}{9} \left(1 - \frac{1}{10^{k-1}} \right) \right] \\
&< \frac{8}{10} + \frac{1}{10} \\
&= \frac{9}{10}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$S_k \leq \frac{9}{10} < 1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Consequentemente, em ambos os casos, o conjunto S é limitado superiormente e, como $S_k \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}^*$, temos $\sup S \in [0, 1)$. Vale destacar que o supremo é único. De fato, para $S \subseteq \mathbb{R}$, se s_1 e s_2 são seus supremos, então $s_1 \leq s_2$ e $s_2 \leq s_1$ (por serem menores cotas superiores). Pela antissimetria da ordem, concluímos que $s_1 = s_2$ e, assim, encerramos a demonstração do item 2. □

Com isso, estamos agora em posição de formalizar o que será entendido por representação decimal de um número real.

Definição 6 *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um número real. Sua representação decimal é definida por casos da seguinte forma:*

1. *Se $0 \leq \alpha < 1$, seja $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ a sequência de dígitos correspondentes a α, sem infinitos noves consecutivos, construída na primeira parte do teorema acima. A expressão $0, n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots$ é definida como sendo a representação decimal de α.*

2. *Se $\alpha \geq 1$, seja n_0 o maior natural que é menor ou igual a α, dado na Proposição 3. Seja $0, n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots n_k \ldots$ a representação decimal de $\alpha - n_0$ definida em 1. Definimos a representação decimal de α como sendo a expressão $n_0, n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots n_k \ldots$.*

3. *Se $\alpha < 0$, definimos sua representação decimal como sendo $-r$, onde r é a representação decimal de $-\alpha$.*

Seja $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ a sequência de dígitos associada a $\alpha \in \mathbb{R}$ pela construção do Teorema 1. A representação decimal de α classifica-se em três categorias, conforme o comportamento da sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ que destacamos a seguir.

1. **Representação Finita**: a sequência de dígitos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ é *eventualmente nula*, ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $n_k = 0$ para todo $k > k_0$. Neste caso, a representação decimal é dada por

$$\alpha = n_0, n_1 n_2 \ldots n_{k_0},$$

   no qual $n_0 \in \mathbb{Z}$ é obtido conforme a Definição 6.

2. **Dízima Periódica**: a sequência de dígitos $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *não é eventualmente nula*, mas é *periódica* a partir de um índice $r \geq 0$, com período $s \in \mathbb{N}^*$ satisfazendo $n_{k+s} = n_k$ para todo $k > r$. Sua representação é dada por

$$\alpha = n_0, n_1 \ldots n_r \overline{n_{r+1} \ldots n_{r+s}},$$

   no qual $\overline{n_{r+1} \ldots n_{r+s}}$ denota o bloco periódico e $n_0 \in \mathbb{Z}$ é obtido conforme a Definição 6. Quando $r = 0$, tem-se uma dízima *puramente periódica*.

3. **Dízima Não Periódica**. A sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *não é eventualmente nula nem periódica*, com representação:

$$\alpha = n_0, n_1 n_2 n_3 \ldots,$$

   no qual $n_0 \in \mathbb{Z}$ é obtido conforme a Definição 6.

A representação decimal de um número real carrega informações importantes sobre sua natureza. No ensino básico, aprende-se que números racionais admitem representações decimais finitas ou periódicas, enquanto os irracionais possuem expansões decimais não periódicas. A seguir, enunciamos e demonstramos essa afirmação.

Teorema 2 *A representação decimal do número real α é finita ou periódica se, e somente se, α for um número racional.*

Demonstração. Vamos demonstrar, inicialmente, que representações decimais finitas ou periódicas correspondem a números racionais. Para isso, consideraremos o caso particular em que α é um número real tal que $0 \leq \alpha < 1$. Esse recorte é adotado por simplificar a notação e a exposição das ideias, mas os argumentos apresentados podem ser estendidos para qualquer número real. Partindo dessa hipótese, seja $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_n$ um número real com representação decimal finita. Então, temos:

$$10^n \cdot \alpha = 10^n \cdot \left(\frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \right) = a_1 \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot 10 + a_n = a_1 a_2 \ldots a_n \Rightarrow \alpha = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{10^n}.$$

Agora, consideremos $\alpha = 0, a_1 a_2 \ldots a_k \overline{b_1 b_2 \ldots b_m}$ um número real com representação decimal periódica (possui uma parte não periódica com k dígitos (talvez $k = 0$) e uma parte periódica de $m \geq 1$ dígitos). Multiplicando α por 10^k, obtemos

$$10^k \cdot \alpha = a_1 a_2 \ldots a_k, \overline{b_1 b_2 \ldots b_m},$$

onde observamos o deslocamento da vírgula até o início da repetição na representação decimal. Agora, multiplicando α por 10^{k+m}, obtemos

$$10^{k+m} \cdot \alpha = a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_m, \overline{b_1 b_2 \ldots b_m}.$$

De posse das duas expressões anteriores, temos

$$10^{k+m} \cdot \alpha - 10^k \cdot \alpha = a_1 a_2 \ldots a_k b_1 b_2 \ldots b_m - a_1 a_2 \ldots a_k = N,$$

no qual N é um número inteiro. Assim,

$$(10^{k+m} - 10^k) \cdot \alpha = N \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{N}{10^{k+m} - 10^k}.$$

Como N e $10^{k+m} - 10^k$ são inteiros, α é um número racional. Reciprocamente, todo número racional possui representação decimal finita ou periódica. De fato, seja $\alpha \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\alpha = \dfrac{b}{c}$ com $b, c \in \mathbb{Z}$ e $c \neq 0$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $b, c \in \mathbb{N}$ e $\alpha \geq 0$ (os demais casos seguem de forma análoga, e o caso $b = 0$ é trivial). Se b for múltiplo de c, ou seja, se $b = c \cdot n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $\alpha = n$ é um número inteiro e, assim, sua representação decimal é finita. Se b não for múltiplo de c, então, pelo Algoritmo da Divisão (ver Santos, 2024), existem inteiros q_0 e r_1 tais que

$$b = q_0 \cdot c + r_1, \text{ com } 0 < r_1 < c.$$

Isso fornece a parte inteira q_0 de α e o início do processo para obter a parte decimal, pois

$$\frac{b}{c} = q_0 + \frac{r_1}{c}.$$

Multiplicamos o resto r_1 por 10 e aplicamos novamente o Algoritmo da Divisão, agora com $10r_1$ e c. Repetindo esse processo sucessivamente, asseguramos a existência de inteiros q_i e

$r_i + 1$, com $i \in \mathbb{N}^*$, tais que

$$\begin{aligned}
10r_1 &= q_1 \cdot c + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < c,\\
10r_2 &= q_2 \cdot c + r_3, \text{ com } 0 \leq r_3 < c,\\
&\vdots\\
10r_k &= q_k \cdot c + r_{k+1}, \text{ com } 0 \leq r_{k+1} < c,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{r_1}{c} &= \frac{q_1}{10} + \frac{r_2}{10 \cdot c}, \text{ com } 0 \leq r_2 < c,\\
\frac{r_2}{10 \cdot c} &= \frac{q_2}{10^2} + \frac{r_3}{10^2 \cdot c}, \text{ com } 0 \leq r_3 < c,\\
&\vdots\\
\frac{r_k}{10^{k-1} \cdot c} &= \frac{q_k}{10^k} + \frac{r_{k+1}}{10^k \cdot c}, \text{ com } 0 \leq r_{k+1} < c,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

A cada etapa, o novo resto é sempre um número natural menor que c. Como há apenas $c - 1$ restos possíveis diferentes de zero, o Princípio da Casa do Pombos (ver Santos, 2024) garante que, após no máximo c etapas, algum resto irá se repetir. A partir do momento em que um resto se repete, toda a sequência de quocientes também se repetirá, gerando o bloco periódico da representação decimal de α. Portanto, a representação decimal de α será finita (caso o resto se anule em algum passo) ou periódica (caso algum resto se repita antes de se anular). □

6.3 A ANÁLISE REAL NA DEFINIÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DECIMAL DE UM NÚMERO REAL

A representação decimal dos números reais é um exemplo notável de como os fundamentos da Análise Real sustentam importantes conceitos do ensino básico. Embora a expressão de um número real por uma sequência infinita de dígitos pareça apenas uma convenção notacional, ela reflete uma construção rigorosa baseada em propriedades fundamentais dos números naturais e dos reais, em especial, o Princípio da Boa Ordem e o Axioma da Completude.

A cada número real $\alpha \in [0, 1)$, a construção indutiva dos dígitos n_k, com $k \in \mathbb{N}^*$, depende crucialmente do Princípio da Boa Ordem e do Axioma da Completude, que são aplicados de modo a assegurar a existência de um maior número natural menor ou igual a um número real fixado.

Cada novo dígito n_k é escolhido de modo que

$$S_k := \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Imediatamente, o conjunto formado por essas somas, $S := \{S_k;\, k \in \mathbb{N}^*\}$, é então um subconjunto não vazio dos reais e limitado superiormente. Nesse ponto, novamente, o Axioma da Completude entra em cena, assegurando que o conjunto S admite supremo em $\mathbb{R}$. Assim, o número real α pode ser recuperado como o supremo do conjunto S, isto é, $\alpha = \sup S$.

Outro aspecto técnico relevante diz respeito à unicidade da representação decimal. Para garanti-la, impõe-se a restrição de que a sequência $(n_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ não contenha infinitos dígitos consecutivos iguais a 9. Isso se deve ao fato de que certos números, como 1, admitem mais de uma representação decimal, por exemplo $1,000\ldots$ e $0,999\ldots$. A validade dessa restrição está ancorada nos fundamentos utilizados anteriormente: o Princípio da Boa Ordem, do qual decorre o Princípio da Indução Finita, e que foi aplicado para demonstrar que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, vale a identidade

$$\frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{10^n} = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10^n}\right).$$

Além disso, embora o Axioma da Completude não seja aplicado diretamente nessa etapa, ele está presente implicitamente no uso de que o conjunto dos números naturais não é limitado superiormente em $\mathbb{R}$.

Em síntese, o Princípio da Boa Ordenação e o Axioma da Completude se revelam como pilares centrais na fundamentação da representação decimal dos números reais. Mesmo quando não são explicitamente invocados, eles estão presente de forma implícita em diversas etapas do raciocínio. Essa análise evidencia como conceitos profundos, muitas vezes invisíveis no cotidiano escolar, sustentam práticas matemáticas elementares, reforçando a importância de uma base teórica sólida para a compreensão rigorosa dos números e de suas representações.

6.4 DEMONSTRAÇÕES MATEMÁTICAS: O CONHECIMENTO MATEMÁTICO PARA O ENSINO

As demonstrações apresentadas neste capítulo constituem parte do Conhecimento Matemático para o Ensino, teoria formulada por Deborah Ball e colaboradores (2008) e melhor explicitada no Capítulo 3. Associada aos conhecimentos específicos da disciplina Análise Real, ela contribui para ampliar o horizonte do professor de matemática, oferecendo uma compreensão mais aprofundada da representação decimal dos números reais. Nesse sentido, trata-se de um exemplo de Conhecimento do Conteúdo no Horizonte, pois estabelece uma ponte entre os conteúdos ensinados na Educação Básica e as estruturas matemáticas subjacentes a eles. Além disso, segundo a mesma teoria, esse conteúdo também se caracteriza como Conhecimento Especializado do Conteúdo, ao permitir que o professor justifique, mesmo de forma simplificada, o uso da representação decimal tanto para números racionais quanto irracionais.

É importante destacar que o conhecimento dessas demonstrações, por si só, não garante o sucesso do docente em sala de aula na Educação Básica. No entanto, ela representa uma importante base conceitual para aqueles que desejam aprofundar sua compreensão matemática e oferecer explicações mais precisas diante de dúvidas específicas dos estudantes. Com isso, os professores poderão interpretar com mais clareza o significado das representações decimais, evitando equívocos conceituais em suas aulas.

7 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático, como já mencionado no Capítulo 4, é o recurso mais acessível e o principal guia dos professores da Educação Básica, servindo como base para o desenvolvimento das suas aulas. Essa centralidade é reforçada por Sacristán (2000, p. 104-105 *apud* Lima, 2024, p. 2) ao afirmar que

> existe uma série de meios, [...], que costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, realizando uma interpretação deste. As prescrições costumam ser muito genéricas e, nessa mesma medida, não são suficientes para orientar a atividade educativa nas aulas. [...] O papel mais decisivo neste sentido é desempenhado, por exemplo, pelos livros-texto.

Para nossa análise, foram escolhidas duas coleções de livros didáticos utilizadas em 2025 nos municípios de Gravatá e Pombos, em Pernambuco. Nosso foco recai sobre a abordagem da representação decimal dos números reais nos livros do 9º ano, série em que o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$ (ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$) é introduzido.

É fundamental ressaltar que o conjunto dos números irracionais apresenta um Obstáculo Epistemológico natural, conforme apontado na Seção 3.1. Esse desafio conceitual surge porque os números irracionais rompem com a compreensão estabelecida pelos estudantes até então, restrita apenas aos números racionais. Mais especificamente, esse desafio está diretamente ligado à necessidade de superar a ideia intuitiva de que os números sempre correspondem à contagem de objetos ou a partes iguais de uma unidade (como frações). Dessa forma, os estudantes precisam compreender que existem grandezas, como a diagonal de um quadrado com lado unitário ou a circunferência de um círculo, cujas medidas não podem ser expressas como frações exatas, ou seja, não podem ser reduzidas a uma divisão racional. Essa mudança de paradigma provoca um processo de ruptura conceitual, durante o qual surgem dúvidas e questionamentos sobre a natureza dos números e, em especial, sobre as formas de representá-los. Dessa forma, para que os estudantes compreendam a representação decimal dos números reais de maneira consistente, é imprescindível que o livro didático traga, de forma clara e concisa, a definição do conjunto dos números irracionais, bem como sua distinção em relação ao conjunto dos racionais.

Na análise que segue, examinaremos os livros das coleções selecionadas, concentrando-nos exclusivamente na exposição do conteúdo e nos exemplos apresentados, sem abordar os exercícios propostos. A análise de cada coleção ocorrerá individualmente. Para compor esse processo, será feita a descrição dos capítulos sobre os números reais nos dois livros, realizando um paralelo com a demonstração trazida no Capítulo 6. Apesar do foco do trabalho ser a representação decimal dos números reais, iremos analisar todos os capítulos que trazem a definição e a conceitualização inicial desse conjunto, a fim de entender de maneira mais completa como essa representação é trabalhada ao longo deles. Ao final da descrição de cada livro, iremos trazer uma análise mais detalhada acerca dos fenômenos da Transposição Didática apresentados na Seção 3.3, mais especificamente: a programabilidade do saber e a publicidade do saber.

7.1 LIVRO 1 - A CONQUISTA MATEMÁTICA

A seguir, analisamos como a obra A Conquista Matemática apresenta os números reais e sua representação decimal.

7.1.1 Descrição do livro e relação com a demonstração

A primeira obra analisada é intitulada *A Conquista Matemática* (2022), da editora FTD, escrita por José Ruy Giovanni Júnior, licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP). Nela, a primeira unidade se chama "Números reais, potências e radicais" e inicia com uma breve contextualização sobre a história do número π, mas sem detalhar características específicas sua. É mencionado que existem registros do π desde o Papiro de Ahmes, em 1600 a.C., passando pelo estudioso Arquimedes (287 a.C.–212 a.C.), pelo matemático chinês Tsu Ch'ungchih (430–501) e pelo matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728–1777), até chegar à atualidade, na qual, em 2021, pesquisadores da Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden calcularam o valor de π com a aproximação de 62,8 trilhões de dígitos na parte decimal. Também é informado que o matemático Lambert foi o primeiro a provar que π é irracional. Até esse ponto, o conjunto dos números irracionais ainda não foi definido.

Após essa contextualização histórica, o livro propõe questionamentos introdutórios sobre a natureza desse número, com o objetivo de verificar se o estudante, de forma intuitiva, consegue identificar algum tipo de padrão. Veja a Figura 1.

A primeira pergunta já foi respondida na contextualização histórica, mas isso não garante a compreensão do aluno sobre o que significa π ser irracional. Além disso, não foram oferecidas ao estudante informações suficientes para ele possa identificar com facilidade outros números semelhantes ao π ou inferir a melhor forma de aproximá-lo. É importante pontuar que esse, em tese, é o primeiro contato do estudante com o conjunto dos números irracionais; portanto, a representação decimal de π pode ser desconhecida para ele.

Figura 1 – Questionamentos introdutórios

Agora, pense um pouco e responda no caderno.

- Como o número π não é um número natural, nem inteiro nem racional, ele faz parte de outro conjunto de números. Que outro número você imagina que possa fazer parte desse conjunto? Esse número deve ter alguma propriedade em comum com o número π?
- Como podemos obter uma aproximação para o número π?
- Em 2021, o número π foi escrito com 62,8 trilhões de dígitos na parte decimal. Como são muitos dígitos, não utilizamos todos sempre que precisamos fazer um cálculo matemático. Como fazer, então, para usar esse número nos cálculos?

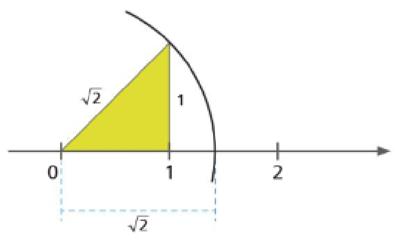
Fonte: A Conquista Matemática, 2022, p. 13.

Após essa introdução à Unidade 1, o livro inicia o Capítulo 1, intitulado "A geometria e a descoberta do número irracional". Esse capítulo começa com a ideia geométrica do Teorema de Pitágoras, focando na área dos quadrados formados a partir dos lados de um triângulo retângulo, com o apoio do plano cartesiano como recurso de visualização. Em seguida, enuncia o teorema (sem deixar claro que se tratava dele, já que esse não era o foco do capítulo). A partir disso, constrói alguns triângulos cujos os maiores lados são números irracionais, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, e mostra como localizá-los na reta, como segue abaixo.

Figura 2 – Localização do número $\sqrt{2}$ na reta

A seguir, vamos observar como localizar o número irracional $\sqrt{2}$ em uma reta numérica, por meio da construção de um triângulo retângulo isósceles. Acompanhe.

Vamos construir um triângulo retângulo isósceles cujos lados menores medem 1 unidade, com um dos catetos localizado sobre a reta numérica.



Já estudamos que o maior lado desse triângulo mede $\sqrt{2}$ unidade. O ponto correspondente a esse valor na reta numérica pode ser encontrado ao colocar a ponta-seca do compasso em 0 e tomar como raio a medida da hipotenusa. O ponto em que a ponta de grafite cruza a reta numérica corresponde a $\sqrt{2}$.

Fonte: A Conquista Matemática, 2022, p. 16.

Em nosso trabalho, não foi apresentado um detalhamento matemático sobre a localização dos números irracionais na reta real. Contudo, caso o leitor deseje se aprofundar na temática da construtibilidade dos números, pode consultar Oliveira (2017).

Em seguida, o livro afirma que 2 e 3 não são quadrados perfeitos e propõe encontrar valores aproximados para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ pelo método de tentativas. O cálculo para $\sqrt{3}$ é apresentado a seguir.

Figura 3 – Cálculo do valor aproximado de $\sqrt{3}$

2 O número 3 está entre os quadrados perfeitos 1 e 4, pois $1 = 1^2$ e $4 = 2^2$.

Para calcular um valor aproximado de $\sqrt{3}$, podemos fazer tentativas.

- $(1,1)^2 = 1,21$
- $(1,2)^2 = 1,44$
- $(1,3)^2 = 1,69$
- $(1,4)^2 = 1,96$
- $(1,5)^2 = 2,25$
- $(1,6)^2 = 2,56$
- $(1,7)^2 = 2,89$
- $(1,8)^2 = 3,24$

Desse modo, verificamos que $\sqrt{3}$ está entre 1,7 e 1,8.

Vamos continuar o cálculo:

- $(1,71)^2 = 2,9241$
- $(1,72)^2 = 2,9584$
- $(1,73)^2 = 2,9929$
- $(1,74)^2 = 3,0276$

Verificamos que $\sqrt{3}$ está entre 1,73 e 1,74.

Prosseguindo com o cálculo, temos:

- $(1,731)^2 = 2,996361$
- $(1,732)^2 = 2,999824$
- $(1,733)^2 = 3,003289$

Pelos últimos cálculos, verificamos que $\sqrt{3}$ está entre 1,732 e 1,733.

Então, podemos considerar que um valor aproximado para $\sqrt{3}$ é 1,732.

SAIBA QUE

Os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais, ou seja, têm representação decimal infinita e não periódica. Por isso, é possível calcular apenas um valor aproximado para esses números.

Fonte: A Conquista Matemática, 2022, p. 18.

Esse método de aproximação está relacionado às demonstrações do Capítulo 6, onde se estabelece uma correspondência única entre cada número real α e uma sequência de dígitos que compõem sua representação decimal, onde se estabelece que $\alpha = a_0, a_1a_2a_3\ldots$, em que $a_0 \in \mathbb{Z}$ e $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. O truncamento dessa expansão após n dígitos fornece uma aproximação racional, como por exemplo:

$$\alpha = a_0 + S_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k}$$

No livro didático, as aproximações de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são feitas por tentativas sucessivas, utilizando números que, elevados ao quadrado, se aproximam do valor desejado. A escolha dos valores iniciais baseia-se na Proposição 3, que garante que, para um número real não negativo β, existe um inteiro n_0 tal que $n_0 \leq \beta < n_0 + 1$. Assim, para $\sqrt{3}$, temos $1 \leq \sqrt{3} < 2$. A precisão aumenta ao considerar números com mais casas decimais.

Percebe-se que a Transposição Didática atuou partindo da generalização da representação decimal dos reais e aplicando-a de forma simplificada aos casos particulares de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Dessa forma, houve a modificação desse conhecimento inicial generalizado para dois exemplos que se mostram mais palpáveis ao entendimento dos estudantes da Educação Básica. A partir desses exemplos, os estudantes devem ser capazes de replicar esse conhecimento para quaisquer outros números reais aos quais forem expostos.

Além disso, do lado direito dos cálculos do valor aproximado de $\sqrt{3}$ existe um quadro informando que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números irracionais e afirmando que essa categoria de números possui uma representação decimal infinita e não periódica, o que justifica a busca pelo seu valor aproximado. Entretanto, em nenhum momento se esclarece que um número irracional não é racional, o que deixaria evidente que os conjuntos são disjuntos, e também não é feito um resgate da definição de número racional para servir como comparativo. Além disso, o referido quadro tem um destaque muito pequeno na folha, podendo, inclusive, passar despercebido pelos estudantes, o que não reflete a importância dessa afirmação. Isso porque essa é a característica que mais auxilia na identificação e compreensão dos números irracionais.

Essa identificação consiste em um dos resultados apresentados no Capítulo 6, segundo o qual todos os números irracionais são representados por dízimas não periódicas. Dessa forma, o livro didático analisado realiza uma Transposição Didática Externa ao simplificar o conteúdo teórico, preservando apenas a definição operacional de números irracionais como dízimas não-periódicas. Essa abordagem, embora matematicamente correta, omite a estrutura demonstrativa apresentada anteriormente, incluindo a relação com o Axioma da Completude. Após isso, o livro segue com a explicação do que seria o número π, fazendo uma relação com a abertura da unidade 1.

No Capítulo 2, intitulado “Os números reais”, ele inicia com a definição do conjunto dos números reais, como é mostrado a seguir.

Figura 4 – Definição do conjunto dos números reais no livro 1

Reunindo-se, em um mesmo conjunto, todos os números racionais e todos os números irracionais, formamos o **conjunto dos números reais**, representado por $\mathbb{R}$.

Exemplos de números reais:

$2 \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{6} \in \mathbb{R}$	$-0{,}48 \in \mathbb{R}$
$-5 \in \mathbb{R}$	$\pi \in \mathbb{R}$	$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$
$\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$	$1{,}25 \in \mathbb{R}$	$1{,}666\ldots \in \mathbb{R}$
$2{,}030030003\ldots \in \mathbb{R}$	$-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$	$-2{,}1333\ldots \in \mathbb{R}$

Os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, pois todos os elementos de cada um deles pertencem também a $\mathbb{R}$.

Fonte: A Conquista Matemática, 2022, p. 22.

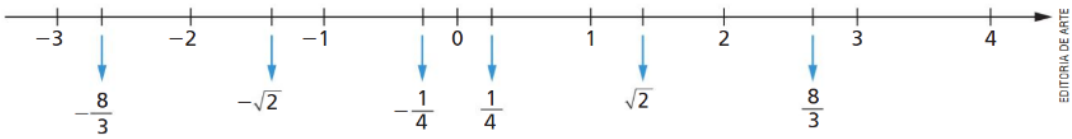
A definição e os exemplos trazidos na figura anterior contemplam o conceito dos números reais. Entretanto, logo abaixo do quadro, o livro traz que os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, mas não menciona o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{I}$), que também está nessa categoria de subconjunto dos reais. Tal fato pode não auxiliar na compreensão completa do conjunto de números irracionais para os estudantes que estão vendo ele pela primeira vez, pois não reforça sua inclusão nos reais.

Ademais, nos exemplos dados na Figura 5, existem mais números racionais do que irracionais. Isso pode causar uma impressão errônea para os alunos de que o conjunto dos números racionais é "maior" que o dos irracionais, quando na realidade é o inverso, informação que não é explicitada neste capítulo. Tal conceito é um dos principais trazidos pela disciplina Análise Real. Esse é um dos casos em que, como pontuado por Ball e colaboradores (2008), é importante o domínio do conteúdo de maneira um pouco mais aprofundada por parte do docente, a fim de que ele possua o Conhecimento do Conteúdo no Horizonte. Isso porque, nessa situação, seria possível trazer uma reflexão acerca da cardinalidade desses conjuntos, mesmo que nenhum estudante tenha levantado essa questão, já que é uma curiosidade válida a se pontuar para que ele não tenha interpretações equivocadas, além de ser acessível, se comentada de forma mais intuitiva.

Figura 5 – Representação dos números reais na reta real

Em uma reta numérica, podem ser representados todos os números racionais e todos os números irracionais, ou seja, podem ser representados todos os números reais; e cada ponto dessa reta pode ser associado a um número racional ou a um número irracional.

Essa reta é denominada **reta real**. Observe a representação de alguns números na reta.



Fonte: A Conquista Matemática, 2022, p. 22.

Em seguida, o livro aborda as operações com números reais, explicando que é possível realizar adição, subtração, multiplicação e divisão (exceto divisão por zero) com quaisquer números reais, bem como extrair a raiz quadrada de números reais não-negativos. Ou seja, no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, as únicas restrições operacionais são: (1) a divisão por zero não é definida, e (2) a raiz quadrada (e, por extensão, qualquer raiz de índice par) de números negativos não pertence a $\mathbb{R}$, embora valha destacar que raízes de índice ímpar (como $\sqrt[3]{x}$) são bem definidas para todo $x \in \mathbb{R}$.

7.1.2 Fenômenos da Transposição Didática

7.1.2.1 Programabilidade do saber

Neste livro, percebe-se que o conteúdo está organizado de maneira a trazer, inicialmente, uma provocação acerca do conteúdo para, posteriormente, apresentar as definições. Entretanto, esse processo é feito de uma forma que nem sempre enfatiza os aspectos mais centrais do conteúdo.

De início, no Capítulo 1, são trazidos exemplos de números irracionais a fim de despertar no estudante a percepção de que esses números, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π, possuem algumas características em comum. Para tanto, a argumentação geométrica foi amplamente utilizada, com o apoio da aritmética nas aproximações dos valores de raízes quadradas não exatas de números racionais. Assim, apenas após essa exemplificação, o livro traz a definição do conjunto dos números irracionais e da sua representação decimal, sem, contudo, estabelecer um paralelo direto com o conjunto dos números racionais para fins comparativos.

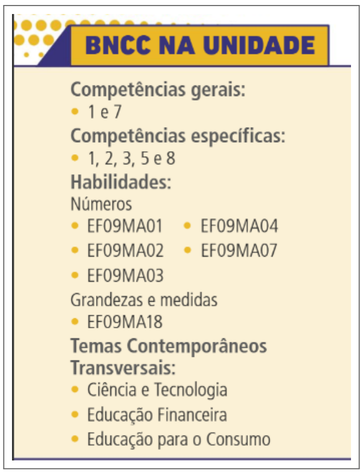
No capítulo seguinte, como o estudante já foi apresentado tanto ao conjunto dos números racionais (nas séries anteriores) quanto ao dos números irracionais (no capítulo anterior), o livro inicia com a definição do conjunto dos números reais, seguida de diversos exemplos desses números.

Por fim, para abordar as operações, o livro retoma todos os conjuntos estudados no Ensino Fundamental, destacando as operações que não podiam ser realizadas em cada um, e depois apresenta as possibilidades no conjunto dos irracionais, acompanhadas de exemplos.

7.1.2.2 Publicidade do saber

Na versão do Manual do Professor existem algumas informações mais específicas sobre como o autor pretende tornar esses conhecimentos públicos, acessíveis e comunicáveis, bem como nos documentos que embasaram essa construção. Ele afirma que o livro foi pensado de modo a estabelecer um elo entre a Educação Matemática e a formação do sujeito autônomo e consciente de seu papel. Isso porque as atuais diretrizes educacionais exigem a formação de um aluno crítico, que possua a capacidade de analisar, interpretar e participar ativamente da sociedade. Além disso, ele pretende contribuir para a construção de uma relação entre os estudantes e os conhecimentos matemáticos, baseada na curiosidade e reflexão. Ademais, na primeira página da Unidade 1, há um quadro que compila todas as competências e habilidades da BNCC abordadas, servindo de orientação para a seleção e organização dos tópicos. Veja o quadro abaixo.

Figura 6 – Elementos norteadores da publicidade do saber


BNCC NA UNIDADE

Competências gerais:
- 1 e 7

Competências específicas:
- 1, 2, 3, 5 e 8

Habilidades:

Números
- EF09MA01
- EF09MA02
- EF09MA03
- EF09MA04
- EF09MA07

Grandezas e medidas
- EF09MA18

Temas Contemporâneos Transversais:
- Ciência e Tecnologia
- Educação Financeira
- Educação para o Consumo

Fonte: A Conquista Matemática, 2022, p. 12.

Das habilidades pontuadas no quadro, as que se referem às partes destacadas neste trabalho são:

- **EF09MA01**. Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade);
- **EF09MA02**. Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica;
- **EF09MA03**. Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários;
- **EF09MA04**. Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

O detalhamento dos demais tópicos podem ser consultados em Brasil (2018). Dessa forma, fica evidente que os conteúdos trabalhados de fato contemplam as habilidades trazidas pela BNCC, além de abrangeram as competências descritas no quadro acima. Entretanto, nenhum dos temas contemporâneos transversais foi abordado nesses dois primeiros capítulos da Unidade 1.

7.2 LIVRO 2 - TELÁRIS ESSENCIAL: MATEMÁTICA

A seguir, analisamos como a obra Teláris Essencial: Matemática apresenta os números reais e sua representação decimal.

7.2.1 Descrição do livro e relação com a demonstração

A segunda obra analisada é intitulada *Teláris Essencial: Matemática* (2022), da editora Ática, escrita por Luiz Roberto Dante, doutor em Psicologia da Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP), e Fernando Viana, doutor em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB) e mestre em Matemática pela UFPB. O primeiro capítulo do livro se chama

“Números reais” e inicia com uma problematização associada à realidade no campo, como segue abaixo.

Figura 7 – Problematização inicial

Na fazenda de Pedro e Giovana, podemos concluir que a medida de comprimento do lado do terreno com a plantação de eucaliptos é 100 m, já que $100^2 = 10\,000$ e que o terreno tem o formato quadrado.

Contudo, não parece tão fácil determinar a medida de comprimento do lado do terreno com plantação de soja, que também tem o formato quadrado. Qual número elevado ao quadrado resulta em 8 500? Neste capítulo, vamos aprender que esse é um **número irracional** e vamos aprender maneiras de trabalhar com ele.

Fonte: Teláris Essencial: Matemática, 2022, p. 17.

Na imagem, é possível verificar que a primeira plantação tem área de 10000 metros quadrados e, sabendo que a área de um quadrado é determinada a partir do produto de seus lados (que possuem a mesma medida), o livro traz que é simples concluir que a medida de cada lado é 100 metros, ou seja, eles calcularam o valor de $\sqrt{10000}$, que é 100. Entretanto, para o segundo terreno, que também é quadrado, o valor do seu lado não é percebido de imediato, pois a sua área é de 8500 metros quadrados e esse valor não é um quadrado perfeito, ou seja, o valor de $\sqrt{8500}$ não é exato. A partir dessa problematização, o livro afirma que $\sqrt{8500}$ é um número irracional e que essa categoria de números será aprofundada ao longo do capítulo.

Na página seguinte, é feito um resgate do conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) associando-o a exemplos mais comuns para os estudantes, como uma fração de uma figura, manipulação financeira, receita culinária, medida de comprimento de um segmento de reta e o algoritmo da divisão. Nesses exemplos, o livro representa os números racionais em vários formatos diferentes, como: fracionário, inteiro, decimal finito e decimal infinito periódico. A partir disso, ele traz o conceito de número racional e a sua representação formal por meio da escrita de conjunto, como mostra a figura abaixo.

Figura 8 – Definição do conjunto dos números racionais

Todo número **racional** pode ser representado por uma **fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero**.

O conjunto dos números racionais é indicado por $\mathbb{Q}$.

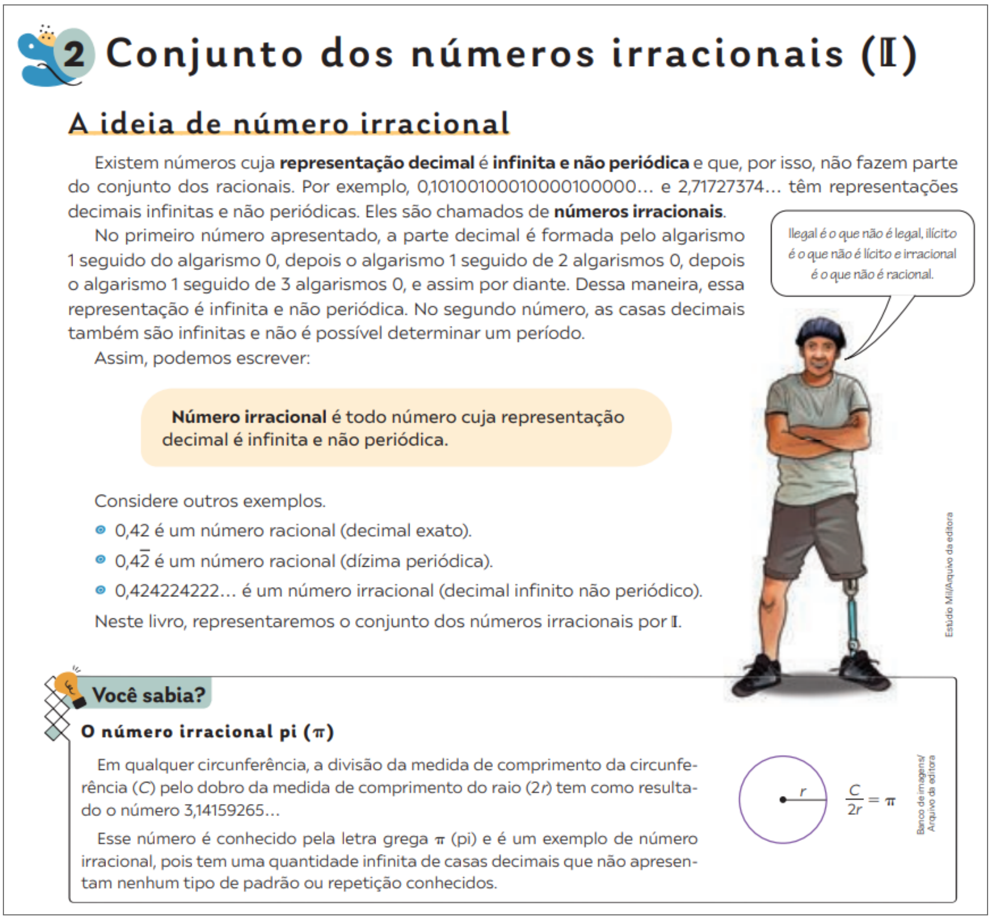
Representamos assim: $\mathbb{Q} = \left\{ x \text{ tal que } x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \text{ e } b \text{ números inteiros e } b \neq 0 \right\}$

Fonte: Teláris Essencial: Matemática, 2022, p. 18.

Posteriormente, o livro traz a definição do conjunto dos números irracionais, associando-a de modo direto à sua representação decimal. Além disso, ele também menciona que um número irracional é aquele que não é racional, deixando claro que os conjuntos são disjuntos, ou seja, $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

Em seguida, ele traz exemplos de números racionais com as suas duas representações decimais possíveis (finita e infinita periódica) e inclui um exemplo de número irracional com a sua representação decimal infinita e não periódica, fazendo com que o estudante consiga comparar de forma direta as três representações e consiga perceber as diferenças existentes entre elas. É importante pontuar que, no Manual do Professor, o livro afirma que não é possível saber se um número vai ter algum tipo de período após várias casas decimais. Entretanto, ele convenciona que, em seu livro, o número é considerado irracional a partir das casas decimais que foram apresentadas na referida dízima, ou seja, se tiver algum tipo de repetição de blocos de dígitos o número é uma dízima periódica e, caso contrário, é uma dízima não periódica. Para concluir esse trecho, ele traz uma breve explicação sobre o número π, qual o seu valor aproximado e afirma que o mesmo é um exemplo de número irracional. Veja a imagem abaixo.

Figura 9 – Definição do conjunto dos números irracionais



2 Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$)

A ideia de número irracional

Existem números cuja **representação decimal** é **infinita e não periódica** e que, por isso, não fazem parte do conjunto dos racionais. Por exemplo, 0,10100100010000100000... e 2,71727374... têm representações decimais infinitas e não periódicas. Eles são chamados de **números irracionais**.

No primeiro número apresentado, a parte decimal é formada pelo algarismo 1 seguido do algarismo 0, depois o algarismo 1 seguido de 2 algarismos 0, depois o algarismo 1 seguido de 3 algarismos 0, e assim por diante. Dessa maneira, essa representação é infinita e não periódica. No segundo número, as casas decimais também são infinitas e não é possível determinar um período.

Assim, podemos escrever:

Número irracional é todo número cuja representação decimal é infinita e não periódica.

Ilegal é o que não é legal, ilícito é o que não é lícito e irracional é o que não é racional.

Considere outros exemplos.

- 0,42 é um número racional (decimal exato).
- $0,4\overline{2}$ é um número racional (dízima periódica).
- 0,424224222... é um número irracional (decimal infinito não periódico).

Neste livro, representaremos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{I}$.

Estúdio Mil/Arquivo da editora

Você sabia?

O número irracional pi (π)

Em qualquer circunferência, a divisão da medida de comprimento da circunferência (C) pelo dobro da medida de comprimento do raio ($2r$) tem como resultado o número 3,14159265...

Esse número é conhecido pela letra grega π (pi) e é um exemplo de número irracional, pois tem uma quantidade infinita de casas decimais que não apresentam nenhum tipo de padrão ou repetição conhecidos.

r $\quad \frac{C}{2r} = \pi$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: Teláris Essencial: Matemática, 2022, p. 19.

Percebemos que, assim como no livro anterior, houve uma Transposição Didática Externa no conteúdo presente neste material didático. Ocorreu a simplificação do saber sábio, transformando-o em saber a ser ensinado sem apresentar equívocos conceituais sobre a representação decimal dos números reais. Dessa forma, ele apresenta, inicialmente, a representação decimal dos racionais e, em seguida, a dos irracionais.

Na sequência, o livro afirma que as raízes não exatas de números racionais também são números irracionais, a exemplo de $\sqrt{125}$. Posteriormente, ele afirma que, quando isso ocorre, é possível encontrar valores aproximados para essas raízes, fazendo o que ele chama de "aproximações sucessivas". Observe as figuras a seguir.

Figura 10 – Valor aproximado de $\sqrt{2}$ - parte 1

Aproximações para $\sqrt{2}$

Quando o valor de uma raiz é um número irracional, podemos obter uma aproximação desse valor fazendo **aproximações sucessivas**, de quantas casas decimais forem necessárias. Acompanhe o exemplo para $\sqrt{2}$.

Inicialmente, testamos 2 valores conhecidos.

$$\left.\begin{aligned} 1^2 &= 1 \text{ (menor do que 2)} \\ 2^2 &= 4 \text{ (maior do que 2)} \end{aligned}\right\} \text{Então, } \sqrt{2} \text{ está entre 1 e 2.}$$

Então, procuramos valores para limitar um intervalo mais próximo.

$$\left.\begin{aligned} (1{,}4)^2 &= 1{,}96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}5)^2 &= 2{,}25 \text{ (maior do que 2)} \end{aligned}\right\} \text{Então, } \sqrt{2} \text{ está entre 1,4 e 1,5.}$$

E assim sucessivamente.

$$\left.\begin{aligned} (1{,}41)^2 &= 1{,}9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}42)^2 &= 2{,}0164 \text{ (maior do que 2)} \end{aligned}\right\} \text{Então, } \sqrt{2} \text{ está entre 1,41 e 1,42.}$$

Fonte: Teláris Essencial: Matemática, 2022, p. 20.

Figura 11 – Valor aproximado de $\sqrt{2}$ - parte 2

Até que seja obtida uma aproximação satisfatória.

$$\left.\begin{aligned} (1{,}414)^2 &= 1{,}999396 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}415)^2 &= 2{,}002225 \text{ (maior do que 2)} \end{aligned}\right\} \text{Então, } \sqrt{2} \text{ está entre 1,414 e 1,415.}$$

Se continuarmos esse processo, não chegaremos a uma representação decimal exata nem a uma dízima periódica, pois $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Assim como $\sqrt{2}$, todos os outros valores de raízes quadradas não exatas de números racionais são exemplos de números irracionais: $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{30}$; $\sqrt{9,5}$; $\sqrt{120}$; entre outros. São também números irracionais os valores de raízes não exatas de números racionais, como $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[5]{10}$, $\sqrt[4]{49}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[5]{0,7}$.

Fonte: Teláris Essencial: Matemática, 2022, p. 21.

Como pontuado na Subseção 7.1.1, este método de aproximação está diretamente ligado à demonstração trazida no Capítulo 6 relacionada ao cálculo do supremo. Para que o texto não fique repetitivo, esta relação será omitida neste momento e fica a cargo do leitor voltar à subseção indicada e revisitar a relação estabelecida entre a demonstração matemática e o livro didático.

Após esse cálculo, o livro traz um pequeno contexto histórico afirmando que o valor aproximado para $\sqrt{2}$ já havia sido calculado pelos babilônios, que viveram entre o século XVIII e o século VI a.C., com precisão de até seis casas decimais. Além disso, os pitagóricos, que viveram entre 582 a.C. - 497 a.C, também o descobriram mas, nesse caso, atribuiu-se ao número uma conotação negativa, pois, em virtude deles terem uma visão filosófica e religiosa da matemática, as dízimas não periódicas foram alvo de muita rejeição e provocaram profundas crises na sociedade intelectual da época. Nota-se, portanto, que o primeiro livro analisado apresenta um contexto histórico sobre a origem do número π, enquanto o segundo traz informações históricas sobre $\sqrt{2}$. Vemos, então, que ambos os números são amplamente conhecidos na história da Matemática desde a Antiguidade e que foram precursores nas descobertas do conjunto dos números irracionais.

Posteriormente, como mostrado na Figura 12, o livro conceitua o conjunto dos números reais, afirmando que ele é a união entre o conjunto dos números racionais e irracionais, ou seja,

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$

Entretanto, ele deixa claro que, apesar de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ estarem incluídos em $\mathbb{R}$, esses dois primeiros conjuntos são disjuntos. Em seguida, o livro apresenta exemplos de números racionais e irracionais, detalhando melhor as relações de inclusão entre todos os conjuntos estudados no Ensino Fundamental.

Figura 12 – Definição do conjunto dos números reais no livro 2

3 Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Reunindo o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) com o conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}$), obtemos o **conjunto dos números reais** (**$\mathbb{R}$**).

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Lemos: união com.

Não existe um número que seja, ao mesmo tempo, racional e irracional; mas qualquer número racional ou irracional pode ser chamado de **número real**. Analise alguns exemplos.

- $\sqrt{7}$ é um número real irracional.
- $\frac{4}{7}$ é um número real racional.
- -4 é um número real racional.
- π é um número real irracional.

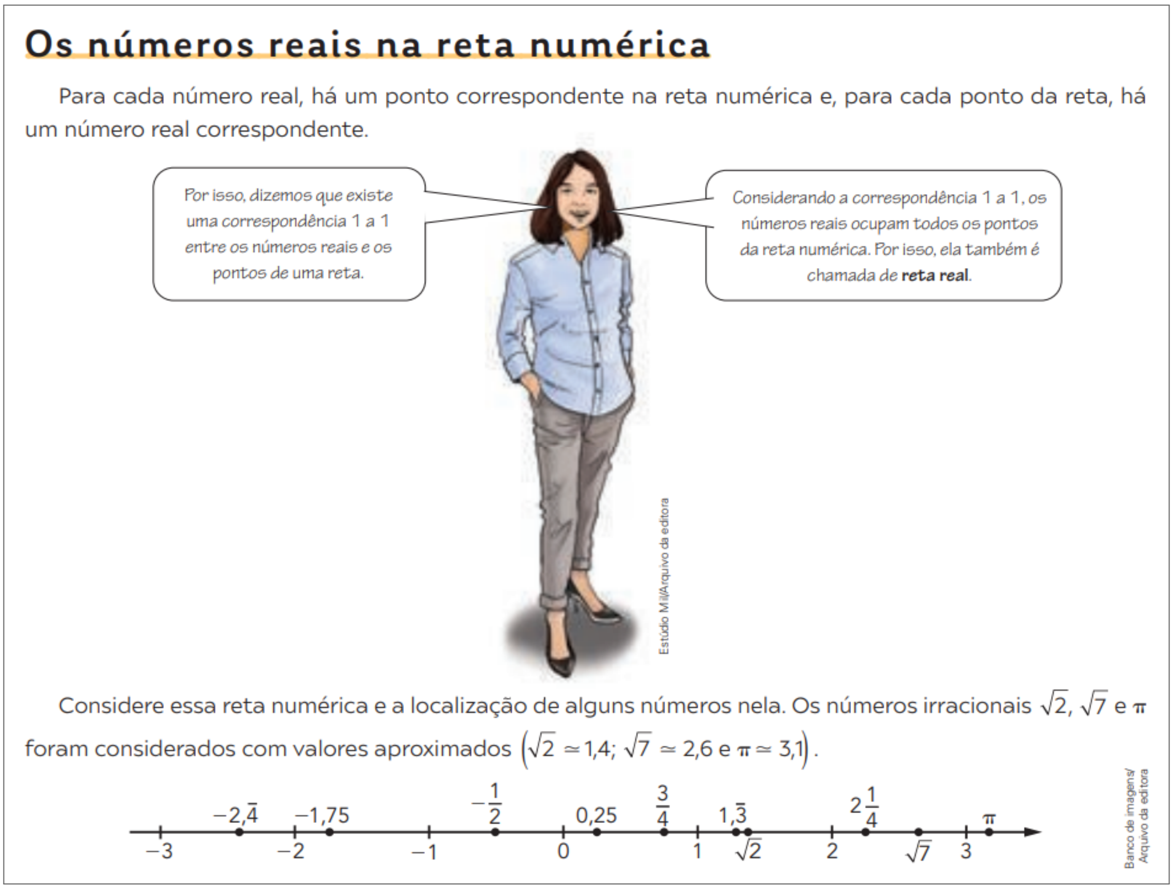
Podemos dizer que:

- Todo número natural ($\mathbb{N}$) está contido no conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$).
- Todo número inteiro ($\mathbb{Z}$) está contido no conjunto dos racionais ($\mathbb{Q}$).
- Nenhum número irracional ($\mathbb{I}$) está contido no conjunto dos racionais ($\mathbb{Q}$), e vice-versa.
- Todos os números racionais ($\mathbb{Q}$), e, portanto, os naturais ($\mathbb{N}$) e inteiros ($\mathbb{Z}$), bem como os irracionais ($\mathbb{I}$), estão contidos no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$).

Fonte: Teláris Essencial: Matemática, 2022, p. 23.

Por fim, o livro aborda que há uma relação biunívoca entre os números reais e os pontos da reta numérica. Tal relação matemática não foi aprofundada no presente trabalho, mas pode ser averiguada utilizando os conhecimentos de Análise Real, tendo como base Lima (2008). Depois, alguns exemplos de números reais são trazidos como pontos na reta numérica. Entretanto, é dada maior ênfase aos números racionais em detrimento dos irracionais. Esse fato, assim como pontuado na seção anterior, pode induzir o estudante à elaboração da construção de um conhecimento falho acerca da cardinalidade dos conjuntos, fazendo-o pensar que existem apenas alguns poucos números irracionais na reta quando, na realidade, eles são abundantes.

Figura 13 – Os números reais na reta numérica



Fonte: Teláris Essencial: Matemática, 2022, p. 23.

Seguindo o capítulo, o livro aborda as operações com raízes, trazendo de forma detalhada o processo de multiplicação, divisão, simplificação, adição e subtração de raízes, além de abordar a racionalização de denominadores. O capítulo finaliza, então, com o tópico sobre potenciação de base real.

7.2.2 Fenômenos da Transposição Didática

7.2.2.1 Programabilidade do saber

Percebemos, neste livro, que a disposição do conteúdo segue um caminho que, de modo geral, constrói os conceitos de maneira sólida, evidenciando as características de cada conjunto e estabelecendo comparações entre eles. Isso porque, inicialmente, é apresentado um problema associado ao saberes do campo, que pode despertar no estudante uma curiosidade a fim de entender como estabelecer os valores ali requisitados.

Após essa provocação inicial, o livro resgata o conceito de número racional e apresenta exemplos. Essa retomada é essencial, pois em seguida ele apresenta os números irracionais como aqueles cuja representação decimal possui um padrão distinto: é infinita e não-periódica. Esta é a única outra possibilidade de representação decimal possível, além das finitas ou periódicas que caracterizam os racionais. Os números que exibem esse padrão não-repetitivo infinito são precisamente os que denominamos irracionais. Nesse trecho, ele pontua exemplos de cada um desses conjuntos citados, a fim de facilitar a comparação do estudante entre eles. Somente após essa conceitualização inicial é que são apresentados os exemplos mais conhecidos, como o π e as raízes não exatas de números racionais, em específico, $\sqrt{2}$. Essa organização didática confere ao conceito um destaque estrutural no capítulo, criando uma relação de reforço mútuo entre a teoria e os exemplos apresentados.

Em seguida, o livro traz um breve contexto histórico sobre um dos números irracionais mais conhecidos, o $\sqrt{2}$. Posteriormente, ele une as definições de números racionais e irracionais a fim de gerar o conjunto dos números reais, trazendo exemplificações e as relações de inclusão possíveis entre os conjuntos conhecidos até esta etapa escolar. Depois de definir os números reais, o livro aborda a marcação destes na reta numérica.

Por fim, o capítulo segue com a explicação detalhada das operações com números reais.

7.2.2.2 Publicidade do saber

A partir do Manual do Professor, foi possível observar as intenções dos autores do livro e em quais documentos e normativas oficiais eles se apoiaram para elaborar a organização do conteúdo apresentada no tópico anterior. Na apresentação deste, os autores trouxeram que alguns conceitos e concepções foram basilares para o desenvolvimento do material, como o letramento matemático, a resolução e formulação de problemas, o pensamento computacional, a interdisciplinaridade, o raciocínio lógico-matemático, entre outros. Ademais, também afirmam que ele foi estruturado respeitando as diretrizes e normas oficiais da Educação, como a Base Nacional Comum Curricular. Há, de fato, um tópico no Manual do Professor destinado ao detalhamento das competências e habilidades previstas na BNCC e, ao longo do capítulo analisado, também são citadas as competências e habilidades específicas envolvidas na temática. Foram citadas:

- **Competências gerais:** 1, 2, 4, 6, 7 e 9.
- **Competências específicas:** 1, 3, 2, 4, 5, 6 e 8.
- **Habilidades:** EF09MA02, EF09MA03 e EF09MA04.
- **Temas contemporâneos transversais:** Trabalho, Saúde e Ciência e Tecnologia.

O detalhamento dos tópicos supracitados podem ser encontrados em Brasil (2018).

7.3 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS LIVROS DIDÁTICOS

Ao analisar comparativamente os livros didáticos adotados nos municípios de Gravatá e Pombos, identificamos uma diferença significativa na abordagem da Programabilidade do Saber, cujos aspectos serão detalhados a seguir.

- **Livro 1 - A Conquista Matemática**. Este livro inicia a sua organização com um pequeno contexto histórico sobre o número π e, posteriormente, segue com a construção geométrica de outros números, como $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. O leitor que já possui conhecimento acerca de conjuntos numéricos entende que esses números fazem parte do conjunto dos irracionais, e que, por isso, faz sentindo identificar seus valores aproximados, bem como as suas construções. Entretanto, para um estudante que está em contato com o conteúdo pela primeira vez, há uma longa contextualização geométrica até que seja apresentada a definição do conjunto com o qual os estudantes já estão trabalhando, tendo em vista que o termo "irracional" só aparece na quinta página do capítulo (sem considerar a contextualização histórica). Além disso, quando a definição aparece, tem pouco destaque, passando a impressão de que a definição da representação decimal dos números irracionais não é tão relevante. Também não é feita uma comparação direta com o conjunto dos números racionais, que poderia ser um elemento de apoio para os estudantes. Dessa forma, temos que esse livro, em alguns momentos, não dá o devido destaque a informações que são fundamentais para a compreensão do conteúdo, ficando, então, sob a responsabilidade do docente, ao realizar a Transposição Didática Interna, trazer um maior detalhamento desses tópicos. A abordagem geométrica é, de fato, um aspecto relevante a ser abordado, mas deve-se ter cautela quanto à falsa impressão de que todos os números reais são construtíveis, temática aprofundada por Oliveira (2017).

- **Livro 2 - Teláris Essencial: Matemática**. Este livro, ao contrário do anterior, inicia com uma problematização associada à realidade no campo. Posteriormente, realiza um resgate acerca do conjunto dos números racionais, com o intuito de servir como base comparativa para o conjunto que será abordado no capítulo. Nessa revisão, ele traz algumas possíveis representações dos números racionais, como a decimal e a fracionária, por meio de exemplos. Após isso, ele conceitualiza o conjunto dos números irracionais, evidenciando sua representação decimal e realizando comparações com os números racionais. Somente após essa etapa de definição, o livro apresenta exemplos e faz o cálculo das aproximações das raízes não exatas de números racionais. Ou seja, ele prioriza trazer a definição para depois trabalhar com os exemplos. Por outro lado, não é trazida a visualização geométrica desse conjunto com o auxílio do plano cartesiano, como ocorre na coleção anterior. Além disso, também não é feita a construção geométrica dos números irracionais na reta numérica, eles são plotados nela com base em suas aproximações decimais.

A partir dessa análise, concluímos que ambas as coleções poderiam ser aprimoradas a fim de obter um livro que trouxesse uma cadência lógica de conteúdos mais adequada à etapa escolar, dando destaque aos pontos principais do assunto, mas que também incorporasse abordagens diversificadas, a exemplo da problematização a partir do trabalho no campo e da abordagem geométrica.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta pesquisa, buscamos analisar algumas demonstrações matemáticas e livros didáticos do 9º ano no que diz respeito à representação decimal dos números reais, com especial atenção aos processos de Transposição Didática. Nossa investigação seguiu dois eixos complementares: o desenvolvimento de demonstrações rigorosas fundamentadas na Análise Real e o exame crítico das abordagens presentes nos materiais didáticos.

Um dos aspectos centrais dessa análise diz respeito ao método de aproximação decimal para números irracionais. Nos livros didáticos, esse conteúdo é geralmente apresentado de forma intuitiva, por meio de exemplos numéricos que ilustram como obter aproximações sucessivas (por falta e por excesso) de determinados números irracionais. Essa abordagem é pedagogicamente válida e a nossa investigação mostrou que ela encontra seus fundamentos teóricos mais profundos no Axioma da Completude, peça essencial da estrutura dos números reais.

Embora não demonstrado neste estudo, esse processo de aproximação bilateral por falta e por excesso também fundamenta-se no Teorema dos Intervalos Encaixantes (Lima, 2008), que trata de sequências de intervalos reais $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$ (onde cada intervalo está contido no anterior). Quando as diferenças $b_n - a_n$ se tornam arbitrariamente pequenas, esse teorema estabelece que:

1. existe um número real c comum a todos os intervalos simultaneamente $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [a_n, b_n] = c\right)$;
2. este número é único para a sequência dada.

Este resultado, que depende do Axioma da Completude, valida matematicamente o método de aproximações decimais. Assim, ainda que os livros não explicitem esses fundamentos teóricos, suas estratégias metodológicas refletem noções centrais da Análise Real.

Observamos que o processo de Transposição Didática atuou de maneira significativa, ao transformar o saber sábio em saber a ser ensinado, adequando-se ao nível de escolaridade dos estudantes do 9º ano. O saber sábio, entendido como o conhecimento produzido por matemáticos e pesquisadores, manifesta-se, neste trabalho, nas demonstrações apresentadas nos Teoremas 1 e 2, fundamentada em conteúdos da Análise Real, como o Princípio da Boa Ordem e os Axiomas de Corpo, de Ordem e da Completude, discutidos na Seção 6.1. Esses fundamentos permitiram definir a representação decimal dos reais e, consequentemente, caracterizar os racionais (representação finita ou periódica, dada sua definição como frações de inteiros) e os irracionais (representação não periódica).

O saber a ser ensinado, aquele considerado pela noosfera como apropriado para o ensino na Educação Básica, é, em grande parte, determinado pela BNCC, que se apoia em documentos anteriores, como os PCN, além da orientação pedagógica dos autores dos livros didáticos. Como resultado, a maior parte da formalização matemática desse conteúdo é suprimida, restringindo-se à definição de representação decimal. No 9º ano, por exemplo, não se problematiza a existência da relação biunívoca entre cada número real e uma determinada sequência de dígitos, conforme demonstrado no Capítulo 6, sendo essa correspondência apenas assumida. Da mesma forma, não se apresenta a justificativa conceitual para a diferença entre as representações decimais dos números racionais e irracionais, omitindo-se as razões pelas quais cada subconjunto apresenta uma estrutura específica.

Com isso, este trabalho propõe vislumbrar uma aproximação dos saberes da Análise Real com alguns conteúdos presentes em livros da Educação Básica, analisando como o distanciamento entre esses saberes pode influenciar o ensino e a aprendizagem dos conceitos matemáticos. Além do domínio técnico dos conteúdos, defendemos que a formação docente deve estimular uma reflexão crítica sobre os processos de transposição, transformação e ressignificação desses saberes no contexto escolar.

Como proposta para futuros trabalhos, sugerimos estender esta abordagem para outros conteúdos da Análise Real, mantendo a articulação entre as demonstrações matemáticas formais e a maneira como os conceitos correspondentes são apresentados nos livros didáticos. Além disso, a pesquisa poderia ser ampliada para incluir a análise de um maior número de coleções didáticas. Dessa forma, seria possível traçar uma relação ainda mais estreita e fidedigna entre o conhecimento acadêmico e sua transposição para a Educação Básica.

Que esta pesquisa possa fomentar novas perspectivas e desdobramentos, contribuindo para o debate sobre formação de professores e inspirando investigações futuras que busquem articular, com sensibilidade pedagógica e rigor crítico, os universos acadêmico e escolar.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In: HAREL, G.; DUBINSKY, E. (Ed.). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, DC: Mathematical Association of America, 1992. v. 25, p. 109–132.

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389–407, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>. Acesso em: 1 jun. 2025.

BELTRÃO, T. M. S. Uma análise da transposição didática externa com base no que propõem documentos oficiais para o ensino de gráficos estatísticos. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, v. 1, n. 1, p. 131–152, 2012.

BICUDO, M. A. V. Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento da educação matemática. In: FLORES, C. R.; CASSIANI, S. (Org.). *Um ensaio sobre concepções a sustentarem sua (da educação matemática) prática pedagógica e produção de conhecimento*. Campinas: Mercado de Letras, 2013. p. 17–40. Disponível em: <https: //www.researchgate.net/publication/298601843_EDUCACAO_MATEMATICA_Um_ensaio_sobre_concepcoes_a_sustentarem_sua_pratica_pedagogica_e_producao_de_conhecimento>. Acesso em: 1 jun. 2025.

BITTAR, M. A teoria antropológica do didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké*, Campinas, v. 25, n. 3, p. 364–387, set./dez. 2017. DOI: <https://doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648640>. Acesso em: 1 jun. 2025.

BITTENCOURT, J. Obstáculos Epistemológicos e a Pesquisa em Didática da Matemática. *Educação Matemática em Revista*. [S. L.], v. 5, n. 6, p. 13-17, 2018. Disponível em: <https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/view/1296>. Acesso em: 1 jun. 2025.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>.

BRASIL. Ministério da Educação. *Diretrizes curriculares nacionais gerais da educação básica*. Brasília: MEC; SEB; DICEI, 2013.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2025.

BRITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. Uma entrevista com Yves Chevallard sobre a Teoria Antropológica do Didático. *Revista Paranaense de Educação Matemática*. Campo Mourão, v. 11, n. 25, p. 11-22, mai./ago., 2022. DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.11-22>. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/7019>. Acesso em: 1 jun. 2025.

CAMARGO, Ligia Bittencourt Ferraz de; TARRAN, Marisa Martinez; SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores; POLEGATTI, Geraldo Aparecido. A disciplina Análise Real e o futuro professor de Matemática: um repensar. Zetetiké, Campinas, SP, v. 31, e023025, p. 1–21, 2023. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8667533>. Acesso em: 1 jun. 2025.

CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Tradução de Claudia Gilman. 3. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2000.

DANTE, L. R; VIANA, F. *Teláris Essencial: Matemática*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2022.

ERROBIDART, N. C. G.; GOBARA, S. T. Aspectos da transposição didática de ondas sonoras em livros didáticos de Física (PNLEM). In: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 8., 2011, Campinas. Anais [...]. Campinas: ABRAPEC, 2011. p. 1–12. Disponível em: <https://abrapec.com/atas_enpec/viiienpec/resumos/R1330-1.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2025.

FERREIRA, J. *A construção dos números*. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022. 139 p.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. *Métodos de pesquisa*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. 120 p. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/120664>. Acesso em: 1 jun. 2025.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002. 176 p.
GOMIDE, E. F. Apresentação. In: BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da Matemática. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. p. 17.

JÚNIOR, J. R. G. *A Conquista Matemática*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022.

LIMA, A. P. B. de. *Ações colaborativas em uma comunidade de prática e o fortalecimento de conhecimentos docentes de professores de matemática*. 2019. 220 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

LIMA, E. L. *Curso de análise*; v. 1. 12. ed. Funções de uma variável. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 189 p.

LIMA, E. T. de. Combinatória, probabilidade e suas articulações no currículo apresentado aos professores dos anos finais. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2024, Brasília. Anais [...]. Brasília: SBEM, 2024. p. 1–14. Disponível em: <https://proceedings.sbem.com.br/sipemat/article/view/742>. Acesso em: 1 jun. 2025.

MACÊDO, J. A.; BRANDÃO, D. P.; NUNES, D. M. Limites e possibilidades do uso do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. *Educação Matemática Debate*, Montes Claro, v. 3, n. 7, p.68-86, jan./abr., 2019. Disponível em: <https://www.redalyc.org/journal/6001/600166634004/html/>. Acesso em: 1 jun. 2025.

MACHADO, G. M. *Construção e propriedades dos números reais: uma abordagem axiomática*. Orientador: Luiz Hartmann. 2018. 102 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) — Universidade Estadual do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

MAZZI, L. C. *As demonstrações matemáticas presentificadas nos livros didáticos do ensino médio: um foco nos capítulos de geometria*. 2018. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/331357865>. Acesso em: 1 jun. 2025.

MENEZES, A. P. A. B. Contrato didático e transposição didática: inter-relações entre fenômenos didáticos na iniciação à álgebra na 6ª série do ensino fundamental. 2006. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

MIGUEL, A.; GARNICA, A. V. M.; D'AMBRÓSIO, S. B. C. I. U. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. *Revista Brasileira de Educação*, Rio de Janeiro, n. 27, p. 70-210, set./dez. 2004. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/rbedu/a/qHNhYPrDsjNSbGwhWHKPywt/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 1 jun. 2025.

MOREIRA, P. C.; VIANNA, C. R. Por que análise real na licenciatura? Um paralelo entre as visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. *Bolema - Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, v. 30, n. 55, p. 515- 534, ago. 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/ym8rLfsJxmX5cHHyqTnL5Fc/abstract/?lang=pt>. Acesso em: 1 jun. 2025.

NEVES, K. C. R.; BARROS, R. M. O. Diferentes olhares acerca da transposição didática. *Investigações em Ensino de Ciências*, v. 16, n. 1, p. 103-115, 2011. Disponível em: https://ienci.if.ufrgs.br/index.php/ienci/article/view/249. Acesso em: 1 jun. 2025.

OLIVEIRA, M. M. *A ideia de completude dos números reais: análise e abordagem no ensino médio e na licenciatura em matemática*. Orientador: Daniel Cordeiro de Morais Filho. 2017. 100 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2017.

PAIS, L. C.; *Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa*. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 128 p.

POMMER, W. M. *A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais*. Orientador: Nílson José Machado. 2018. 246 p. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

SANTANA, M. R. M. *Produções e usos de livros didáticos no ensino de probabilidade nos anos iniciais*. 2020. 238 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

SANTOS, J. P. O. *Introdução à Teoria dos Números*. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2024.

SOUSA, B. F.; OLIVEIRA, V. C. A.; Conhecimento Matemático para o Ensino e MTSK: uma revisão de literatura; *TANGRAM - Revista de Educação Matemática*, Mato Grosso do Sul, v. 06, n. 01, jan./mar., 2023. Disponível em: https://ojs.ufgd.edu.br/tangram/article/view/16921. Acesso em: 1 jun. 2025.

TRINDADE, J. A. O.*Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática*. 1996. 181 p. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Santa Catarina, [S. L.], 1996.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO. Centro Acadêmico do Agreste. Projeto Pedagógico do Curso de Matemática - Licenciatura. Caruaru: UFPE, 2017. Disponível em: <https://www.ufpe.br/documents/39114/0/PPC+-+MATEM%C3%81TICA_com_APS.pdf>. Acesso em: 1 jun. 2025.