



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO ACADÊMICO DO AGRESTE

NÚCLEO DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL



ERASMO JOSÉ GONÇALVES DOS SANTOS JÚNIOR

**ANÁLISE ESPECTRAL DA MATRIZ DE TRANSMISSIBILIDADE DE
FORMULAÇÕES MULTIESCALA EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
HETEROGÊNEOS**

Caruaru

2024

ERASMO JOSÉ GONÇALVES DOS SANTOS JÚNIOR

**ANÁLISE ESPECTRAL DA MATRIZ DE TRANSMISSIBILIDADE DE
FORMULAÇÕES MULTIESCALA EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
HETEROGÊNEOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de concentração: Estruturas e Materiais.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras

Coorientador: Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes

Caruaru

2024

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Santos Júnior, Erasmo José Gonçalves dos.

Análise espectral da matriz de transmissibilidade de formulações multiescala em reservatórios de petróleo heterogêneos / Erasmo José Gonçalves dos Santos Júnior. - Recife, 2024.
72 f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, 2024.

Orientação: Fernando Raul Licapa Contreras.

Coorientação: Alessandro Romário Echevarria Antunes.

Inclui referências bibliográficas.

1. Análise espectral; 2. Matriz de transmissibilidade; 3. Método dos volumes finitos multiescala; 4. Meios porosos heterogêneos; 5. Resolvedores de sistemas de equações lineares. I. Contreras, Fernando Raul Licapa. II. Antunes, Alessandro Romário Echevarria. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

ERASMO JOSÉ GONÇALVES DOS SANTOS JÚNIOR

**ANÁLISE ESPECTRAL DA MATRIZ DE TRANSMISSIBILIDADE DE
FORMULAÇÕES MULTIESCALA EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO
HETEROGÊNEOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental da Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil e Ambiental.

Área de concentração: Estruturas e Materiais.

Aprovado em: 06/08/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras (Orientador)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof. Dr. Jonathan da Cunha Teixeira (Examinador Externo)
Universidade Federal de Alagoas – UFAL

Prof. Dr. Gustavo Bono (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco - UFPE

Prof. Dr. Artur Castiel Reis de Souza (Examinador Externo)
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Caruaru

2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me proporcionar a vida, saúde e capacidade de lutar por meus objetivos.

Aos meus pais, Erasmo José e Nadiane Sete, por me guiarem e apoiarem, com muito amor e dedicação, fornecendo todo o suporte para meu crescimento pessoal e profissional.

A minha noiva, Maria Júlia Tabosa, companheira de todos os momentos, fonte de amor e inspiração, por me incentivar, apoiar e enfrentar os desafios juntos.

A minha avó Célia Gonçalves (*In memoriam*) por garantir, sem medir esforços, todo o suporte para que eu tivesse acesso ao que fosse necessário para ter a melhor educação possível e por estar sempre ao meu lado com amor.

Aos meus avós, Naércio Farias (*In memoriam*) e Ana Sete, por todo o amor e carinho para comigo e pelo exemplo de benevolência que me serve de referência.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Fernando Raul Licapa Contreras e Prof. Dr. Alessandro Romário Echevarria Antunes, pela amizade e paciência, pela oportunidade de executar este projeto e por todo o suporte e dedicação a este trabalho, além dos ensinamentos e da grande inspiração profissional.

A cada professor que contribuiu para a minha formação, sendo essencial para que hoje eu pudesse chegar até aqui.

A Dra. Lorena Monteiro Cavalcanti, pelo auxílio prestado durante o desenvolvimento desta pesquisa, por sua disposição em ajudar e repassar seu conhecimento de importância indescritível para o sucesso deste trabalho.

Aos grandes amigos que cultivei ao longo do curso e aos amigos de infância, por partilharmos momentos inesquecíveis e pela força compartilhada em superar cada desafio juntos.

Aos demais familiares que fazem parte da minha trajetória.

Agradeço à FACEPE (Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco) pela bolsa de estudos concedida durante o período de desenvolvimento desta pesquisa.

Agradeço a UFPE, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil e Ambiental, pela oportunidade de desenvolver essa pesquisa nessa instituição.

RESUMO

Em diversas áreas da engenharia existem problemas envolvendo múltiplas escalas, sendo estes, bastante complexos, como é o caso da simulação numérica de reservatórios de petróleo, que devido aos processos de formação e das condições que os cercam, resultam em heterogeneidade e anisotropia, dificultando a aplicação de métodos numéricos, principalmente considerando-se metodologias de transferência de escala. Estas dificuldades são refletidas diretamente na matriz global, que pode se tornar extremamente mal condicionada, onde resolvidores de sistemas de equações lineares estacionários clássicos encontram dificuldade de obter convergência. Assim, este projeto tem o objetivo de considerar diferentes resolvidores e pré-condicionadores de sistemas de equações lineares, e analisar a eficácia destes em função das propriedades espectrais da matriz de transmissibilidade, de modo a contribuir com a eficiência computacional dos resultados dos métodos de volumes finitos para a simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo, preservando suas informações e características gerais, prezando pela redução do custo computacional nas simulações e levando desenvolvimento tecnológico para este setor, identificando como a determinação do refinamento da malha de discretização do domínio influencia na convergência, controlando se as particularidades locais serão ou não percebidas na solução; apresentando a redução de custo computacional do Two-Stage Multiscale Algebraic Solver, descrito por Zhou (2010), aplicado ao Método Iterativo Multiescala para Volume de Controle Modificado (I-MMVCM), proposto por Barbosa (2017), quando comparado com resolvidores estacionários clássicos; e como o *Flow Based Upscaling* proposto por De Lima et al. (2021) é capaz de preservar as características do sistema original, trabalhando com um número reduzido de dados.

Palavras-chaves: Análise Espectral; Matriz de Transmissibilidade; Método dos Volumes Finitos Multiescala; Meios Porosos Heterogêneos; Resolvidores de Sistemas de Equações Lineares;

ABSTRACT

In many engineering fields, there are problems involving multiple scales, which are quite complex, as is the case with the numerical simulation of oil reservoirs. Due to the formation processes and the surrounding conditions, these reservoirs exhibit heterogeneity and anisotropy, complicating the application of numerical methods, particularly when considering scale transfer methodologies. These difficulties are directly reflected in the global matrix, which can become extremely ill-conditioned, where classical stationary linear equation system solvers struggle to achieve convergence. Therefore, this project aims to consider different solvers and preconditioners for linear equation systems and analyze their effectiveness based on the spectral properties of the transmissibility matrix. The goal is to contribute to the computational efficiency of finite volume methods for simulating flows in oil reservoirs, preserving their general information and characteristics, while aiming to reduce the computational cost of the simulations and bring technological development to this sector. The project also seeks to identify how the determination of mesh refinement in domain discretization influences convergence, controlling whether local particularities are perceived in the solution or not; presenting the computational cost reduction of the Two-Stage Multiscale Algebraic Solver, as described by Zhou (2010), applied to the Iterative Multiscale Method for Modified Control Volume (I-MMVCM), proposed by Barbosa (2017), when compared to classical stationary solvers; and how Flow Based Upscaling proposed by De Lima et al. (2021) is capable of preserving the characteristics of the original system while working with a reduced amount of data.

Keywords: Spectral Analysis; Transmissibility Matrix; Multiscale Finite Volume Method; Heterogeneous Porous Media; Solvers of systems of linear equations;

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Domínio Ω , malhas finas (Ω_f), malha grossa primal (Ω_{pc}), malha grossa dual (Ω_{dc}), e ponto de colocação da malha grossa primal (x_p).	26
Figura 2 - Representação da atuação dos operadores de Restrição (Ror) e Prolongamento (Pop) na transferência de informações entre as malhas	27
Figura 3 - Detalhamento esquemático do cálculo dos fluxos.	28
Figura 4 - Fluxograma do algoritmo dos solvers	35
Figura 5 - Representação do domínio discretizado para o problema de calor 1D	36
Figura 6 - Seção reta de um tubo	38
Figura 7 - Esquematização de um ponto qualquer e seus vizinhos em uma malha estruturada	39
Figura 8 - Exemplo do domínio discretizado em 357 pontos	41
Figura 9 - Aproximação inicial para os valores de x ($n=100$)	45
Figura 10 - Espectro das Matrizes de Iteração ($n=100$)	45
Figura 11 - Suavização do Erro com cada método	46
Figura 12 - Comparação do erro a cada iteração para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel ($n=100$)	47
Figura 13 - Aproximação inicial e Solução Jacobi ($n=16$)	48
Figura 14 - Valores e esquema de cores de Condições de Contorno e estimativa inicial (Domínio completo)	49
Figura 15 - Solução numérica e esquema de cores para o domínio completo em malha de 357 pontos	49
Figura 16 - Somatório dos resíduos do sistema a cada iteração	50
Figura 17 - Esquema de cores 3D para a solução SOR	50
Figura 18 - Autovalores da Matriz de Iteração para solver SOR do problema para o domínio completo com $\omega = 1.2$	51
Figura 19 – Erro relativo associado à solução a cada iteração	52
Figura 20 - Espectro da Matriz de Iteração para $\omega=2$	54
Figura 21 - Raio espectral e Taxa de convergência do método SOR em função do fator de relaxação ($n=357$)	54
Figura 22 - Raio espectral e Taxa de convergência do método SOR em função do fator de relaxação ($n=2091$)	55
Figura 23 - Espectro da Matriz de Iteração para $n=2091$ e $\omega=1.2$	56

Figura 24 - Condições de contorno do problema de pistão.	56
Figura 25 - Campo de permeabilidade do problema pistão 30x30	57
Figura 26 - Espectro da Matriz de transmissibilidade	57
Figura 27 - Espectro usando o pré-condicionador multiescala.....	58
Figura 28 - Espectro dos autovalores das matrizes de iteração geradas a partir de cada pré-condicionador: A) Jacobi; B) Gauss-Seidel; C) ILU; D) Multiescala + Jacobi; E) Multiescala + Gauss-Seidel; F) Multiescala + ILU	59
Figura 29 - Resíduo versus ln (iteração) para cada pré-condicionador	61
Figura 30 - Campo de permeabilidade Upscaling 6x6	63
Figura 31 - Espectro da matriz de transmissibilidade Flow Based Upscaling 6x6.....	64
Figura 32 – Espectro da matriz Flow Based Upscaling 6x6 pré-condicionada	64
Figura 33 - Resíduo Flow Based Upscaling 6x6 (Jacobi)	65
Figura 34 – Esquema de cores dos campos de pressão Multiescala (à esquerda) e Flow Based Upscaling (à direita)	66
Figura 35 – Pressão na linha média ($y=0.5$) para Multiescala e Flow Based Upscaling.....	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados referentes as soluções com diferentes fatores de relaxação para o problema de domínio completo discretizado em malha de 357 pontos.....	53
Tabela 2 - Eficiência da aplicação dos pré-condicionadores	62
Tabela 3 - Comparação dos resultados Flow Based Upscaling	62

SUMÁRIO

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS	13
1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA	13
1.2 PROPOSTA	15
1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO.....	16
1.3.1 Objetivo Geral:	16
1.3.2 Objetivos específicos:	16
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA / ESTADO DA ARTE	16
3. FORMULAÇÃO TEÓRICA	21
3.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA NA INDÚSTRIA DO PETRÓLEO.....	21
3.2 MÉTODOS ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES.....	22
3.3 FATORES QUE AFETAM A CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE DOS RESOLVEDORES ESTACIONÁRIOS	22
4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	24
4.1 MODELO MATEMÁTICO	24
4.2 EQUAÇÃO DE PRESSÃO DISCRETIZADA	25
4.3 FORMULAÇÃO MULTIESCALA	26
4.4 FORMULAÇÃO UPSCALING	28
5. METODOLOGIA	30
5.1 DESCRIÇÃO DOS RESOLVEDORES ESTACIONÁRIOS UTILIZADOS	30
5.2 PARÂMETROS UTILIZADOS PARA OS EXPERIMENTOS.....	36
5.2.1 Problema de calor unidimensional num meio homogêneo e isotrópico.....	36
5.2.2 Problema de calor bidimensional num meio homogêneo e isotrópico.....	38
5.2.3 Escoamento monofásico num reservatório de petróleo bidimensional, heterogêneo e anisotrópico.....	42
5.2.4 Uso do método <i>Flow Based Upscaling</i> para aumento de escala	44

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	44
6.1 PROBLEMA DE CALOR UNIDIMENSIONAL NUM MEIO HOMOGENEO E ISOTRÓPICO.....	44
6.2 PROBLEMA DE CALOR BIDIMENSIONAL NUM MEIO HOMOGENEO E ISOTRÓPICO.....	48
6.3 ESCOAMENTO MONOFÁSICO NUM RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO BIDIMENSIONAL E HETEROGÊNIO.....	56
6.4 USO DO MÉTODO <i>FLOW BASED UPSCALING</i> PARA AUMENTO DE ESCALA 62	
7. CONCLUSÃO.....	67
8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	70

1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS

1.1 JUSTIFICATIVA E RELEVÂNCIA

Problemas envolvendo múltiplas escalas aparecem em diversas áreas das ciências básicas e das engenharias, tais como, o estudo de: materiais compósitos, escoamentos em meios porosos, escoamentos turbulentos, ciências atmosféricas e oceânicas, dentre outras. Estes problemas caracterizam-se por apresentarem fenômenos em diferentes escalas espaciais e temporais, o que os torna difíceis de serem analisados. Um exemplo atual, e de grande significado para a indústria, é a simulação numérica de fluxos em reservatórios de petróleo muito heterogêneos, principalmente devido aos complexos processos deposicionais e deformações estruturais ao longo de eras geológicas, resultando em propriedades hidrogeológicas que apresentam, naturalmente, grande variabilidade espacial, tais como a permeabilidade absoluta que pode diferir em ordens de magnitude ao longo de pequenas distâncias, além da formação de canais e barreiras impermeáveis. Estes processos são refletidos diretamente nos operadores algébricos (mapeamentos algébricos) que podem tornar-se extremamente mal condicionados. Partindo desta ideia, o desenvolvimento tecnológico e o aprimoramento de métodos de simulação de reservatórios são pontos chave para a otimização dos processos, como este projeto, que analisa a eficácia dos resolvidores de sistemas de equações lineares em função das propriedades espectrais da matriz de transmissibilidade, para apresentar alternativas que exigem baixo custo computacional, se comparadas aos métodos clássicos.

Segundo dados da Agência Internacional de Energia (IEA), a demanda por petróleo se manteve crescente na última década, e mesmo após uma diminuição abrupta causada pela pandemia de *Covid-19*, essa demanda voltou a crescer a partir de 2021, ratificando a posição do petróleo como principal fonte de energia do mundo. Mesmo intensificando-se as discussões sobre transições para meios renováveis, estes ainda são caros e incapazes de se sobrepôr a logística estabelecida do petróleo em todo o mundo, não havendo previsão de mudança na distribuição da matriz energética mundial a curto prazo (SANTOS et. al., 2022). Trata-se de um produto influenciador de maneira direta dos mercados financeiros internacionais e do comércio exterior, onde o comportamento da economia mundial sofre fortes impactos com a oscilação dos seus preços (BAMANA, 2019). Tendo em vista o potencial de reservas da costa brasileira, o petróleo tende a ser uma grande alavanca comercial para a economia nacional, se explorado de forma adequada e otimizada.

A descoberta das reservas de petróleo do pré-sal, e sua consequente exploração, deram ao Brasil a possibilidade de obter uma especialização em commodities energéticas, o que tem efeitos positivos a longo prazo para a economia nacional, onde surge uma oportunidade de autossuficiência em petróleo com menor dependência de mercados internacionais, além de gerar emprego e renda (VERÍSSIMO, 2019).

A existência de geologias complexas no interior dos reservatórios, tais como falhas geológicas, variações de permeabilidade, camadas estratificadas e canais ou poços inclinados tendem a dificultar as análises matemática e numérica dos processos acerca de deslocamentos dos fluidos nesses meios (EWING, 1983; CARVALHO, 2005). Em estudos envolvendo modelagem e simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo, as caracterizações geológicas geralmente são discretizadas com um elevado número de elementos, onde a geometria complexa e a alta heterogeneidade presentes em reservatórios não convencionais elevam significativamente a complexidade das simulações, aumentando a demanda computacional, dificultando o uso de modelos geológicos de alta resolução o que compromete a precisão dessas simulações (ZHOU, 2010; SOUZA et al., 2020). Mesmo havendo simuladores capazes de processar dados na ordem de bilhões de células, a exigência de *hardware* se torna bastante considerável, sendo impraticável para estudos rotineiros. Assim surge a necessidade de se trabalhar esses dados de maneira eficiente, buscando o menor custo computacional com simplificações que facilitem a interpretação dos resultados. Nesse contexto, os métodos de transferência de escala são utilizados para poder tratar os dados em escalas mais grossas diminuindo os custos computacionais, e transferindo posteriormente esses resultados para as escalas mais refinadas dos modelos reais, de forma que os dois sistemas se comportem da maneira mais similar possível (QI; ZHANG, 2009; BARBOSA, 2017).

Segundo Barbosa et al. (2017), a resolução das escalas menores em problemas com múltiplas escalas demanda grande capacidade de processamento e memória computacional, o que torna a simulação direta desses problemas uma tarefa desafiadora. Por outro lado, aproximações numa única escala mais grossa podem ser ineficientes, por não considerar corretamente os principais efeitos das escalas mais finas. Assim, estudos que possam levar ao melhoramento dos resultados obtidos com os métodos que permitem a resolução dos problemas dessa natureza apresentam-se como campos de estudo muito valiosos e necessários.

Para a aplicação dos métodos multiescala, em geral, calculam-se os operadores de restrição e prolongamento (funções de base que permitirão a troca de informações entre as diferentes escalas trabalhadas). É determinada então a transmissibilidade nas malhas das

diferentes escalas, a partir da qual se pode calcular o campo de pressão, e obter os fluxos dos fluidos presentes no reservatório. Aplicando o método de transferência de escala, é possível projetar os resultados de uma escala para a outra, de modo a garantir um resultado satisfatório com o mínimo custo computacional possível. Dessa otimização dos operadores utilizados é que se pode garantir um resultado mais acurado (BARBOSA, 2017).

As pesquisas em “Simulação Numérica Computacional” são, em geral, de natureza multidisciplinar, envolvendo uma combinação de princípios de diversas áreas das engenharias, física, matemática, ciência da computação e de outras disciplinas. Neste contexto, a modelagem computacional, definindo matematicamente o objeto de estudo e estabelecendo as condições que regem o comportamento do modelo, viabiliza a aplicação prática de simulações do meio, com o uso dos métodos numéricos adequados, possibilitando o conhecimento do comportamento real do objeto de estudo, auxiliando na tomada de decisões e na elaboração de projetos econômicos e de alta confiabilidade.

Esta atividade é cada vez mais realizada, tornando-se imprescindível para a elaboração de projetos desafiadores que demandam novas tecnologias e prazos compatíveis com o ritmo da economia moderna. Nos dias de hoje, apesar do grande progresso atingido, tem-se a necessidade sempre crescente de previsões mais realistas, precisas e acuradas, em tempo real, o que leva a necessidade de adequar as ferramentas cada vez mais robustas à capacidade computacional disponível.

1.2 PROPOSTA

O trabalho desta pesquisa está centrado na investigação, avaliação e aplicação de métodos de transferência de escala, para simular fenômenos físicos envolvendo escoamentos em reservatórios de petróleo. E visa analisar diferentes resolvidores e pré-condicionadores de sistemas de equações lineares, entendendo a relação do refinamento da malha e da distribuição dos autovalores com a capacidade de convergência dos sistemas, avaliando sua eficácia com base nas propriedades espectrais da matriz de transmissibilidade para identificar métodos que aumentem a eficiência computacional nas simulações de escoamentos em reservatórios de petróleo, reduzindo custos e preservando informações essenciais. Abordando, em especial, a aplicação do Two-Stage Multiscale Algebraic Solver, conforme Zhou (2010) aplicado ao Método Iterativo Multiescala para Volume de Controle Modificado (I-MMVCM) de Barbosa (2017), em comparação com resolvidores clássicos. Por fim, avaliar o ganho de custo computacional com uma técnica de aumento de escala, como o Flow Based Upscaling, proposto

por de Lima et al. (2021) e como ela mantém as características do sistema original com menos dados processados.

1.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

1.3.1 Objetivo Geral:

Realizar análise espectral das matrizes de transmissibilidade de métodos multiescala, e das matrizes de iteração, considerando-se diferentes resolvidores de sistemas de equações lineares, provenientes da simulação numérica de escoamentos de fluxos em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos, utilizando método multiescala.

1.3.2 Objetivos específicos:

- 1.3.2.1 Realizar a análise detalhada da eficácia destes diferentes resolvidores de sistemas de equações lineares e pré-condicionadores, em função das propriedades espectrais da matriz de transmissibilidade.
- 1.3.2.2 Compreender, através de problemas de distribuição de calor, a relação entre o refinamento da malha de discretização do domínio e a convergência dos resolvidores aplicados aos sistemas lineares resultantes.
- 1.3.2.3 Entender a relação entre o espectro dos autovalores da matriz de transmissibilidade e a capacidade de convergência do sistema que descreve o objeto de estudo;
- 1.3.2.4 Avaliar a eficiência da adoção do Two-Stage Multiscale Algebraic Solver, descrito por Zhou (2010), aplicado ao Método Iterativo Multiescala para Volume de Controle Modificado (I-MMVCM), proposto por Barbosa (2017);
- 1.3.2.5 Verificar a eficiência do uso do *Flow Based Upscaling* proposto por De Lima et al. (2021) para resolução de problemas na escala grossa com interesse em redução de custo computacional.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA / ESTADO DA ARTE

Inicialmente, as tentativas de resolver problemas envolvendo múltiplas escalas foram baseadas em alguma técnica de homogeneização, utilizando os métodos de transferência de escala (upscaling), que se utilizam de médias dos parâmetros desejados em escalas mais finas para prover informações para as escalas maiores ou mais grossas de modo a reduzir o custo computacional da simulação (BARBOSA, 2017). Atualmente, o núcleo de todos os métodos

multiescala é a definição das chamadas funções de base, que são funções de interpolação com o objetivo de realizar a transferência de informações entre as diferentes escalas (EFENDIEV e HOU, 2009). Em malhas estruturadas, as funções de base são frequentemente mais fáceis de implementar e analisar devido à regularidade e simplicidade das malhas, o que facilita a interpolação e a transferência de informações. Segundo Zienkiewicz et al. (2005), a estrutura regular das malhas estruturadas permite um melhor gerenciamento da memória, resultando em menores custos computacionais. Por outro lado, malhas não estruturadas são mais flexíveis e podem se adaptar melhor a geometrias complexas e a áreas com alta variação de propriedades, porém a implementação de funções de base em malhas não estruturadas pode ser mais complexa devido à irregularidade das malhas, levando a necessidade de maiores custos computacionais. Além disso, a transferência de informações entre diferentes escalas pode se tornar mais desafiadora devido à variabilidade nas formas e tamanhos das células da malha. Souza (2022) aborda esta temática ao desenvolver técnicas para generalizar métodos de volumes finitos multiescala para malhas não estruturadas, apresentando soluções para uma aproximação consistente de fluxo ao propor o *Algebraic Multiscale Solver for Unstructured Grids*. Cavalcante et al. (2024) apresentam um avanço voltado para domínios mais complexos ao trabalhar um modelo de fratura discreta incorporada em malhas tetraédricas não estruturadas, possibilitando a simulação de formações geológicas altamente heterogêneas e anisotrópicas, melhorando a precisão na presença de fraturas condutivas e barreiras impermeáveis.

Um ponto ainda a se considerar na simulação de escoamentos em meios porosos é o efeito do desacoplamento dos subproblemas na malha grossa no cálculo do fluxo, com a utilização das condições de contorno reduzidas, que por não considerarem os fluxos normais às fronteiras, geram problemas de conservação nestas regiões. Como solução para esse cenário, Barbosa (2017) propõe a resolução de um problema de Neumann, que resulta em um campo de pressão conservativo, a partir do qual se obtém o campo de velocidades, localmente conservativo em todo o domínio.

De acordo com Saad e Van Der Vorst (2000), os métodos iterativos para a solução de sistemas de equações lineares tiveram sua origem com Carl Friedrich Gauss, no início do século XIX, que desde então passaram a se adaptar às necessidades dos problemas que surgiram, e aos grandes avanços tecnológicos que acompanharam o desenvolvimento da sociedade. Assim, a eliminação gaussiana tornou-se o tradicional método de resolução de sistemas lineares, passando por aprimoramentos para superar instabilidades numéricas.

Classicamente os resolvidores denominados estacionários, ou métodos de ponto fixo foram utilizados para resolver os grandes sistemas lineares com matrizes esparsas diagonalmente dominantes, nos diferentes ramos da engenharia e ciências. A necessidade de redução do custo computacional levou Jacobi, em 1846, a aplicar rotações planas nas matrizes buscando aumentar a diagonal-dominância. Em 1874 Seidel adotou a abordagem de atualizar as incógnitas de forma sequencial, que resulta em uma convergência mais rápida e permite que o método seja aplicado a sistemas onde a matriz de coeficientes não é estritamente diagonal dominante. Nas décadas de 1950 e 1960, nomes como Young, Frankel, Varga e Southwell introduziram os métodos de relaxação como medidas muito eficientes de acelerar a convergência e permitir a solução eficiente de problemas da ordem de 100 mil variáveis (SAAD e VAN DER VORST, 2000).

Neste sentido, métodos como Gauss-Jacobi, Gauss-Seidel e SOR (Successive Over-Relaxation) foram e ainda seguem sendo amplamente utilizados com êxito, sendo métodos iterativos que apresentam custo computacional baixo. Porém métodos estacionários apresentam a limitação de só apresentarem convergência quando o raio espectral da matriz dos coeficientes, em valor absoluto, é menor do que um (KELLEY, 1995, VAN DER VORST, 2003).

Na simulação de escoamentos em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos, as matrizes tendem a ficar muito mal condicionadas, e o raio espectral tende a assumir valores muito elevados com um espectro variando ordens de grandeza. Kaniel (1966) apresentou a dependência da convergência da solução de sistemas lineares com a distribuição dos autovalores da matriz. Nessas situações é preciso entender a natureza do mal condicionamento da matriz e encontrar soluções para contornar essas limitações, como a utilização de tratamentos prévios, ou de resolvidores que não apresentem as limitações dos métodos de ponto fixo, como por exemplo, os resolvidores baseados em subespaços de Krylov. Tais resolvidores são capazes de tratar com espectros variados, e por muitas vezes aproveitando-se destas variações para obter convergência acelerada, com o correto uso de pré-condicionadores (KELLEY, 1995; VAN DER VORST, 2003). Estes possuem alta complexidade de implementação, podendo sofrer de limitação de precisão e perda de desempenho com o aumento da dimensionalidade e aumento da variação de magnitude dos elementos da matriz, sendo altamente sensível à escolha correta do pré-condicionador, o que pode ser desafiador em muitas situações. Os resolvidores baseados nos subespaços de Krylov começaram a ganhar notoriedade com a criação do método dos gradientes conjugados por Hestenes e Stiefel (1952) e o algoritmo de redução de iterações em sistemas lineares de Lanczos (1952).

Saad e Schultz (1986) apresentam o método GMRES como meio de resolução de sistemas lineares não simétricos, que evitam determinadas instabilidades que se apresentavam à época, mas em contrapartida exigia um maior custo computacional. Ao longo do tempo, diversas publicações apresentaram melhorias no algoritmo GMRES e suas aplicações, como Xiaoquan et al. (2018), que propuseram um método direto implícito de Galerkin descontínuo para simular fluxos turbulentos compressíveis, melhorando a convergência com redução de custo computacional, e Zhang et al. (2023), que apresentam um algoritmo GMRES para resolver de forma eficiente as equações de Navier-Stokes compressíveis em malhas não estruturadas, de forma paralela, em diferentes plataformas, integrando deep learning para gerar estimativas iniciais mais eficazes para o GMRES, acelerando a convergência do algoritmo.

Saad e Van Der Vorst (2000) relatam que a década de 1990 foi muito importante para a área, onde muito se desenvolveu quanto ao uso eficiente de pré-condicionadores, trabalhando com sistemas equivalentes aos originais, com melhor condicionamento, dentre os quais, se destacam decomposições incompletas como LU ou Cholesky, controlando o descarte de elementos para reduzir o custo computacional, especialmente eficientes para matrizes esparsas. Jacobi e Gauss-Seidel, que utilizam informações da matriz, como diagonais ou elementos próximos para construir aproximações da inversa. Multigrid, explorando a hierarquia de malhas para suavizar erros em diferentes escalas. E o multiescala através de operadores de restrição e prolongamento, construindo o pré-condicionador a partir de uma decomposição do domínio, sendo útil para problemas com geometrias complexas.

Jenny et al. (2003) fizeram contribuições significativas ao desenvolvimento de métodos multiescala, ao desenvolver o Método dos Volumes Finitos Multiescala (MsFVM) para domínios bidimensionais e malhas estruturadas, focando principalmente na aplicação desses métodos para simulações de fluxos em meios porosos.

Diversos estudos recentes têm contribuído significativamente para a área. Castelletto et al. (2017) introduziram um método multiescala de elementos finitos para geomecânica elástica linear, melhorando a precisão e eficiência computacional aplicando um operador de suavização em escala fina, que é usado para atenuar os erros de alta frequência como segundo estágio de pré-condicionamento, resolvendo o sistema na escala grossa com um método direto, apresentando a ideia que a solução do sistema na escala grossa não precisa convergir até a precisão de máquina, uma vez que a segunda etapa do pré-condicionador atuará para manter a qualidade dos resultados.

Figueiredo (2019) apresenta o uso do método dos elementos finitos multiescala como pré-condicionador para sistemas de equações lineares e demonstra que a combinação aditiva de pré-condicionadores pode melhorar a velocidade das simulações em até 15%.

Gasparini et al. (2021) apresentaram uma estrutura híbrida paralela iterativa para resolver sistemas lineares esparsos em simulações geomecânicas e de fluxo de reservatórios. A abordagem integra solucionadores iterativos paralelos, incluindo métodos de Krylov e pré-condicionadores especializados, aprimorando a eficiência computacional e a escalabilidade para simulações de larga escala.

Ye et al. (2024) desenvolveram um pré-condicionador multiescala para resolver o fluxo de Darcy em meios porosos altamente heterogêneos, destacando a construção de subespaços encadeados utilizando funções associadas ao espectro dos autovalores, o que melhora a robustez e escalabilidade das simulações.

A importância da utilização de resolvidores eficientes em termos de acurácia e custo computacional, na simulação de fluxos em meios porosos, está no fato da necessidade de obtenção de um campo de velocidade acurado e localmente conservativo, o que é primordial para a solução da equação de saturação (equação de transporte advectivo), em problemas de escoamentos em reservatórios de petróleo.

Neste ponto entra a análise espectral das matrizes de transmissibilidade, tanto na malha fina quanto na malha grossa, a fim de direcionar o desenvolvimento dos métodos de modo a garantir um produto final mais eficiente, compreendendo, com a decomposição da matriz em autovalores e autovetores, seu comportamento quanto a possibilidade de margem de erro nas soluções e capacidade de convergência a cada passo do processo iterativo, ao permitir a identificação das frequências naturais do sistema, que podem ser utilizadas para simplificar a descrição do sistema e acelerar a simulação de fluxo. A análise espectral permite a identificação dos autovalores mais importantes, e seu consequente uso para reduzir o erro em cada passo da iteração, relacionando a solução do problema a uma malha mais adequada, evitando iterações excessivas e ineficientes sobre modos de oscilação menos importantes do sistema.

Benaych-Georges e Nadakuditi (2011) utilizam análise espectral ao correlacionar perturbações nos autovalores de matrizes aleatórias de posto reduzido com a sua capacidade de convergência, identificando um limite crítico para a perturbação dos autovalores.

Estudos recentes utilizam a decomposição espectral como ferramenta para entender o comportamento das soluções, explorando a aplicação de diversas técnicas para melhorar o desempenho computacional, como Kwok et al. (2021), que correlacionam a variação entre o

raio espectral e os demais autovalores da matriz com a convergência linear, avaliando a eficiência com que a informação é distribuída durante a solução, e Nguyen et al. (2022), que realizam uma análise espectral das matrizes associadas à discretização pelo método dos elementos finitos para problemas tridimensionais de elasticidade linear, e, ao propor métodos multigrid para otimizar as soluções, apresentam que o custo computacional para resolver o problema é linearmente proporcional à dimensão da matriz correspondente.

Assim, a decomposição e a análise espectral fornecem insumos para investigar como diferentes estruturas de matrizes impactam na distribuição dos autovalores e para identificar características como a estabilidade e a convergência dos algoritmos, bem como oportunidades de otimização dos processos envolvidos.

3. FORMULAÇÃO TEÓRICA

3.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA NA INDÚSTRIA DO PETRÓLEO

No processo de extração de petróleo, na denominada recuperação secundária, são definidos os locais para a instalação de poços onde ocorrem as operações de injeção de água e extração de óleo de modo a maximizar a produção de óleo. Assim, as simulações numéricas são fruto de um campo multidisciplinar, que abrange conhecimentos em geologia, geomecânica, engenharia de reservatórios, mecânica dos fluidos e programação computacional, desempenhando papel crucial, prevendo o comportamento do fluido no interior do reservatório. Essas previsões fornecem informações que ajudam na tomada de decisões para reduzir custos e maximizar a produção de óleo.

A quantidade de fluidos existente no meio poroso, bem como a sua distribuição, capacidade de movimentação e quantidade disponível para extração são determinadas por propriedades básicas do reservatório e dos fluidos em seu interior. Porosidade, compressibilidade, saturação, permeabilidade, mobilidade e regime de fluxo são algumas dessas propriedades. Segundo Menezes Filho (2009), dentre as propriedades petrofísicas sujeitas à transferência de escala, porosidade e permeabilidade são as mais importantes nas simulações petrolíferas, pois são as que mais impactam nas previsões de produção.

3.2 MÉTODOS ITERATIVOS PARA SOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES

Meios numérico-computacionais são utilizados como ferramentas de otimização de processos na solução de problemas matemáticos que seriam inviáveis de serem resolvidos analiticamente. São assim, agentes facilitadores do desenvolvimento de conhecimento, e promotores da evolução das ciências exatas e engenharias, e da sociedade de uma forma geral.

Os métodos iterativos como resolvidores de sistemas lineares de equações, são ferramentas matemáticas utilizadas para resolver sistemas de equações lineares, que são equações do tipo $Ax=b$, onde A é uma matriz de coeficientes, x é o vetor de incógnitas e b é o vetor de termos independentes ou carregamentos externos. Independentemente do método, o princípio é que o processo continue até que a solução convirja considerando-se uma determinada tolerância de erro aceitável.

Entre os métodos iterativos clássicos, destacam-se o método de Jacobi, o método de Gauss-Seidel e o método SOR. Esses métodos serão descritos na seção 5.1 e são aprofundados no livro "Iterative Methods for Sparse Linear Systems" de Saad (2003). Para sistemas lineares mais complexos, métodos modernos como GMRES (Generalized Minimal Residual) são amplamente utilizados. Esses métodos são mais sofisticados e podem lidar com matrizes não simétricas e mal condicionadas de maneira eficiente. A obra "Matrix Computations" de Golub e Van Loan (2013) oferece uma visão abrangente desse método e suas implementações. Métodos como Newton-Raphson e suas variantes são frequentemente utilizados para resolver sistemas não lineares. O método de Newton-Raphson é baseado na linearização do sistema não linear em torno de uma aproximação inicial e na solução iterativa dos sistemas lineares resultantes. Esses métodos são discutidos detalhadamente no livro "Nonlinear Systems: An Introduction" de Barreira e Valls (2006).

3.3 FATORES QUE AFETAM A CONVERGÊNCIA E ESTABILIDADE DOS RESOLVEDORES ESTACIONÁRIOS

Na análise numérica, o número de condicionamento ou número de condição de uma matriz é uma medida indicando se o problema tem "boas condições" para ser tratado numericamente através de um método iterativo, capaz de gerar uma sequência de aproximações convergente. Uma matriz com um número de condição baixo, é chamada de bem condicionada, enquanto que matrizes que possuem um número de condição elevado são denominadas mal condicionadas.

Uma matriz é dita bem condicionada quando pequenas alterações nos seus coeficientes não causam grandes alterações na solução, já numa matriz mal condicionada essas pequenas alterações nos coeficientes são responsáveis por mudanças bruscas na solução. O número de condicionamento da matriz A , denotado por $K(A)$, é um fator de amplificação que determina o impacto de alterações/erros nos coeficientes da matriz A , e do vetor b na solução do sistema, e é dado como o produto da norma da matriz A com a norma da matriz inversa de A . Por ser um amplificador que altera o resultado do sistema, quanto melhor for o condicionamento da matriz, mais próximo de 1 é seu número de condicionamento. Contudo, somente a matriz identidade tem condicionamento igual a 1. Em certos casos, por exemplo, quando o operador algébrico é simétrico e positivo definido, é possível mostrar que o número de condição da matriz é a razão entre o maior e o menor autovalor. Desta forma, fica evidente que na realidade, o número de condição de uma matriz é, fisicamente, uma razão entre o maior e o menor comprimento de onda representados no sistema. Desta forma, como a taxa de convergência é em função do condicionamento, sistemas, como os obtidos em meios heterogêneos e anisotrópicos, tendem a apresentar baixa taxa de convergência, visto que a anisotropia dos coeficientes dos operadores algébricos é reflexo das propriedades físicas do meio, que podem variar ordens de grandeza.

O conjunto dos autovalores de uma matriz, forma o denominado espectro da matriz, e o maior autovalor absoluto de um sistema determina o seu raio espectral. Um menor raio espectral indica um baixo número de condicionamento, o que indica que a margem de erro nas soluções do problema é menor e mais facilmente controlável.

A análise espectral da matriz de transmissibilidade envolve a decomposição da matriz em autovalores e autovetores. Os autovalores representam as frequências naturais do sistema, enquanto os autovetores descrevem os modos de fluxo correspondentes. A análise dos autovalores permite identificar as escalas de comprimento importantes para o fluxo no sistema, sendo a frequência natural associada a cada autovalor, dada por $f = 2\pi/\lambda$, onde λ é o autovalor correspondente. Portanto, quanto menor o valor absoluto do autovalor, maior será a frequência associada a ele. E isso afeta diretamente na determinação do refinamento ideal da malha para a discretização do problema, uma vez que o engrossamento da malha representará pontos mais espaçados, desconsiderando particularidades locais e pode ser adotado quando a solução do problema físico é suave, ou pouco oscilante em relação à escala da malha original (autovalores mais próximos de 1, com frequência mais baixa). Isso significa que o problema físico não tem

modos próprios de alta frequência que precisam ser capturados por uma malha mais refinada, o que culminaria em uma dificuldade de convergência.

4. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

4.1 MODELO MATEMÁTICO

São apresentadas a seguir as equações que regem o escoamento monofásico em um reservatório de petróleo, considerando escoamentos incompressíveis em meios porosos com porosidade constante. O modelo matemático é construído assumindo um escoamento monofásico, onde a partir de uma associação da lei de Darcy e da equação da conservação da massa, se obtém a equação de pressão. De modo análogo ao apresentado por Barbosa (2017), admite-se Ω como um domínio poligonal em 2D cuja fronteira é dada por $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, sendo Γ_N e Γ_D as porções do contorno onde são impostas às condições de Neumann e Dirichlet, respectivamente. Assim é possível escrever a conservação da massa, na forma da Equação (1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = Q \quad (1)$$

Onde $\vec{v}$ representa a velocidade de Darcy e Q representa um termo de fonte ou sumidouro.

Desprezando os efeitos capilares e gravitacionais, a velocidade de Darcy pode ser representada na forma da Equação (2):

$$\vec{v} = -\frac{\tilde{K}}{\mu} \nabla p \quad (2)$$

Sendo p , μ , e $\tilde{K}$, respectivamente, a pressão, a viscosidade do óleo e o tensor de permeabilidade absoluta da rocha, que, em duas dimensões, é representado por uma matriz 2x2, no caso bidimensional, dada pela Equação (3):

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

Cujos componentes satisfazem a condição de elipticidade, i.e., $K_{xx}K_{yy} \geq K_{xy}^2$. A fim de simplificar a notação, novamente, sem perda de generalidade, assume-se que a viscosidade é unitária, i.e., $\mu = 1$. Substituindo a velocidade de Darcy, apresentada na Equação (2), na Equação (1), se obtém a seguinte equação de pressão:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\tilde{K} \vec{\nabla} p) = Q \quad (4)$$

Para que a equação de pressão seja completamente determinada é necessário utilizar um conjunto apropriado de condições de contorno, determinados em função das características

geológicas das vizinhanças do reservatório. As condições de contorno, para a equação de pressão, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n} &= g_N, & \text{em } \Gamma_N \\ p &= g_D, & \text{em } \Gamma_D\end{aligned}\tag{5}$$

Onde, $\vec{n}$ é o vetor unitário normal a Γ_N , g_N , a vazão volumétrica prescrita em Γ_N e g_D é a pressão prescrita em Γ_D .

4.2 EQUAÇÃO DE PRESSÃO DISCRETIZADA

A solução aproximada da equação de pressão, utilizando o Método de Volumes Finitos, é alcançada ao integrar a Equação (1) sobre todo o domínio Ω , de modo que:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} Q d\Omega\tag{6}$$

Considerando $\hat{V}$, um volume de controle genérico, a partir do teorema da divergência de Gauss, se dá:

$$\int_{\Omega_{\hat{V}}} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega_{\hat{V}} = \int_{\Gamma_{\hat{V}}} \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma_{\hat{V}} = \int_{\Omega_{\hat{V}}} Q d\Omega_{\hat{V}}\tag{7}$$

Adotando uma superfície arbitrária e aproximando a Equação (7) utilizando o Teorema do Valor Médio, ela pode ser reescrita como:

$$\sum_{f \in \Gamma_{\hat{V}}} \vec{v}_f \cdot \vec{N}_f = \bar{Q}_{\hat{V}} \Omega_{\hat{V}}\tag{8}$$

Onde, $\vec{v}_f$ é a velocidade aproximada na superfície de controle formada por f , $\vec{N}_f$ é o vetor área, definido na face f , tendo o somatório realizado sobre todas as faces que compõem o volume de controle, e sendo $\bar{Q}_{\hat{V}}$, o termo fonte no volume de controle $\hat{V}$.

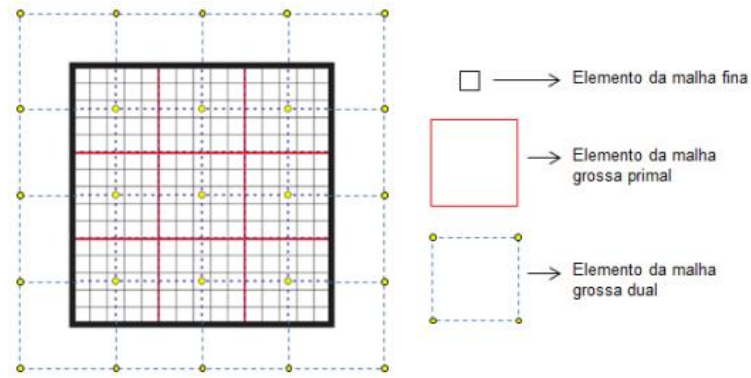
A montagem do sistema matricial na malha fina depende do método de discretização escolhido para aproximar o gradiente de pressão. No TPFA (*Two-Point Flux Approximation*), a permeabilidade é considerada constante nas direções ortogonais às faces dos volumes, sendo simples, mas inadequado para malhas distorcidas ou anisotrópicas. O MPFA (*Multi-Point Flux Approximation*), como o MPFA-QL, descrito por Contreras et al. (2019), utiliza múltiplos pontos para lidar com meios heterogêneos e anisotrópicos. Já os métodos não-lineares, usados em casos de anisotropia extrema, ajustam dinamicamente os pesos de interpolação, requerendo soluções iterativas.

4.3 FORMULAÇÃO MULTIESCALA

Neste trabalho, foi utilizada uma variante do método multiescala proposto por Barbosa (2017), chamada de Método Iterativo Multiescala para Volume de Controle Modificado (I-MMVCM), que corrige inconsistências físicas próprias dos métodos multiescala clássicos, levando a operadores multiescala mais acurados.

Para o desenvolvimento dos métodos multiescala, é preciso definir diferentes malhas, como é mostrado na Figura 1:

Figura 1 - Domínio Ω , malhas finas (Ω^f), malha grossa primal (Ω_p^c), malha grossa dual (Ω_d^c), e ponto de colocação da malha grossa primal (x^p).



Fonte: Barbosa (2017)

A malha fina (Ω^f) é a malha mais densa no domínio Ω , a malha grossa primal (Ω_p^c) é a malha criada a partir da malha fina, cujos volumes são construídos no espaço que representa uma determinada quantidade de volumes finos. Em seu centroide, está posicionado um ponto de colocação da malha grossa primal x^p , identificado pelo ponto amarelo. A malha grossa dual (Ω_d^c) é a malha cujos elementos são formados pela união dos centroides da malha grossa primal.

O campo de pressão é obtido através de uma metodologia multiescala, sendo o sistema na malha fina definido por:

$$\tilde{T}^f \tilde{P}^f = \tilde{Q}^f, \quad \forall \quad \tilde{P}^f \in \Omega^f \quad (9)$$

Onde $\tilde{P}^f$ é a solução na malha Ω^f , de dimensão n_f (número de volumes da malha fina), $\tilde{T}^f$ é a matriz de transmissibilidade da malha fina de dimensão $n_f \times n_f$, e $\tilde{Q}^f$ é o vetor com as informações de termos fonte e quantidades conhecidas das condições de contorno da malha fina, de dimensão n_f .

Definindo o problema elíptico na malha grossa:

$$\tilde{T}^c \tilde{P}^c = \tilde{Q}^c \quad \text{em } \Omega^c \quad (10)$$

Onde $\tilde{P}^c$ e $\tilde{T}^c$ são, respectivamente, o campo de pressão e a matriz quadrada de transmissibilidade, projetada para exibir diagonal dominância, no espaço Ω^c .

Usando os operadores de prolongamento, $\tilde{P}_{op}$, e de restrição $\tilde{R}_{or}$, conforme Barbosa (2017), obtém-se:

$$\tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op} \tilde{P}^c = \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (11)$$

Relacionando a Equação (10) com a Equação (11), são obtidas:

$$\tilde{T}^c = \tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op} \quad (12)$$

$$\tilde{Q}^c = \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (13)$$

Resolvendo a Equação (10), é obtida:

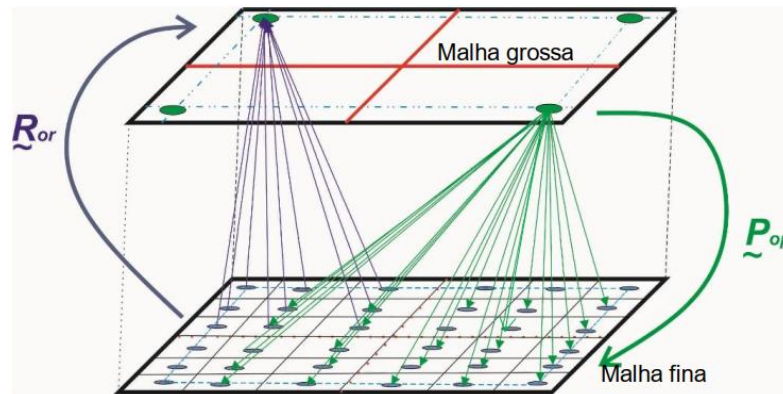
$$\tilde{P}^c = (\tilde{T}^c)^{-1} \tilde{Q}^c \quad (14)$$

Assim, o vetor de solução multiescala é dado:

$$\tilde{P}^{ms} = \tilde{P}_{op} (\tilde{T}^c)^{-1} \tilde{Q}^c = \tilde{P}_{op} [\tilde{R}_{or} \tilde{T}^f \tilde{P}_{op}]^{-1} \tilde{R}_{or} \tilde{Q}^f \quad (15)$$

Uma vez que esta solução dependerá da definição dos operadores de restrição e prolongamento, que são desenvolvidos com base em funções de base, as quais são soluções de problemas elípticos homogêneos em cada volume da malha grossa dual, essas funções capturam a variação das propriedades físicas relevantes do reservatório, incorporando essas informações aos operadores, assegurando a qualidade da solução multiescala (BARBOSA, 2017).

Figura 2 - Representação da atuação dos operadores de Restrição ($\tilde{R}_{or}$) e Prolongamento ($\tilde{P}_{op}$) na transferência de informações entre as malhas



Fonte: Barbosa (2017)

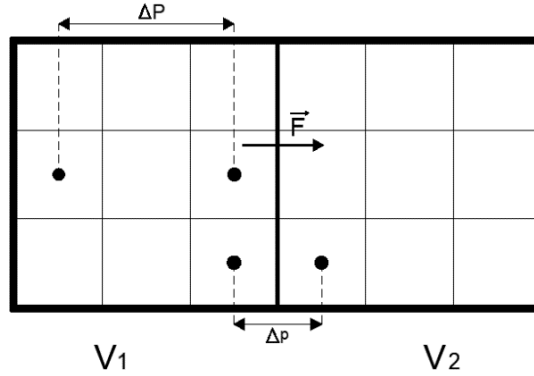
4.4 FORMULAÇÃO UPSCALING

O processo dos métodos *upscaling* é similar aos multiescala, sendo obtidas funções de base, com preservação das características do meio poroso, e obtendo um sistema linear de equações para a escala grossa, porém esse sistema é utilizado para se obter tanto permeabilidade quanto transmissibilidade na escala grossa, eliminando a necessidade da etapa de projeção de solução da escala grossa na malha fina (ILIEV; RYBAK, 2008).

Segundo Qi e Zhang (2009), a essência do *upscaling* é substituir uma unidade heterogênea por uma homogênea equivalente.

Com os dados do campo de pressão da malha fina, é possível encontrar a permeabilidade equivalente na malha grossa primal utilizando uma estratégia baseada nos fluxos nas faces dos volumes da malha grossa primal a partir dos valores de pressão nos volumes da malha fina em contato direto com estas faces, como mostra a Figura 3.

Figura 3 - Detalhamento esquemático do cálculo dos fluxos.



Fonte: De Lima et al. (2021)

Para a dedução da metodologia *Flow Based Upscaling*, parte-se da Equação (2), sob a forma unidimensional, representada por:

$$\frac{\vec{F}}{A} = -\frac{k_x}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (16)$$

Onde $\vec{F}$ é a vazão volumétrica, A é a área da seção transversal, k_x é a permeabilidade equivalente na direção x , e dp/dx é o gradiente de pressão multiescala na direção do fluxo.

Integrando a Equação (16) entre dois pontos, considerando-se um fluido incompressível, a vazão volumétrica, viscosidade e todas as propriedades do fluido constantes, tem-se a expressão dada por:

$$\frac{\vec{F}}{A} \int_{x_1}^{x_2} dx = -\frac{k_x}{\mu} \int_{p_1}^{p_2} dp \quad (17)$$

Integrando, obtém-se:

$$\frac{\vec{F}}{A}(x_2 - x_1) = \frac{k_x}{\mu}(p_1 - p_2) \quad (18)$$

Isolando o fluxo e adotando dx como a distância entre os centroides de dois elementos da malha fina consecutivos na direção x , obtém-se a expressão para o fluxo ($\vec{F}$) em cada interface entre elementos:

$$\vec{F} = \frac{k_x A(p_1 - p_2)}{dx} \quad (19)$$

Sendo k_x a permeabilidade na interface, obtida através de uma média harmônica entre os elementos da malha fina em contato direto com a linha de fronteira.

As pressões p_1 e p_2 , são as pressões associadas aos mesmos volumes de controle finos de onde são extraídas as informações de permeabilidade para a realização da média harmônica, são obtidas da solução multiescala de Barbosa (2017). Na Figura 3, é mostrada a maneira como a permeabilidade equivalente é obtida a partir dos fluxos nas interfaces dos volumes de controle da malha grossa, onde V_1 e V_2 são os volumes de controle da malha grossa, ΔP é o gradiente de pressão aproximado entre os equivalentes (médias aritméticas das pressões dos volumes de controle finos) das faces de entrada e de saída do mesmo volume de controle grosso, e Δp é o gradiente de pressão nos volumes de controle da malha fina. O fluxo total na interface dos volumes de controle grossos é dado pelo somatório dos fluxos na interface dos volumes de controle finos ao longo da interface entre volumes de controle grossos, como visto na Equação (20), apresentada por De Lima et al. (2021):

$$\vec{F}_{total} = \sum_{y_1}^{y_2} \frac{k_x A(p_1 - p_2)}{dx} \quad (20)$$

Onde y_1 e y_2 representam os valores na dimensão y , perpendicular ao fluxo, referentes aos vértices aos quais se liga a interface entre dois elementos grossos.

Com o fluxo total calculado, pode-se obter a permeabilidade equivalente:

$$K_e^x = \frac{\mu \vec{F}_{total} \Delta_x}{A (P_1 - P_2)} \quad (21)$$

Onde Δ_x é a distância no eixo x entre os pontos onde estão posicionadas as médias de pressão dos volumes de controle finos que compõem as fronteiras (P_1 e P_2) em cada volume de controle grosso. Os gradientes de pressão na malha grossa são obtidos a partir das médias dos valores das pressões nos volumes finos de fronteira fornecidos pela metodologia multiescala de Barbosa (2017), sendo A , neste caso, igual a Δ_y .

5. METODOLOGIA

5.1 DESCRIÇÃO DOS RESOLVEDORES ESTACIONÁRIOS UTILIZADOS

Considerando-se o sistema linear:

$$Ax = b \quad (22)$$

Os métodos aqui descritos funcionam de modo iterativo, onde a cada passo de solução, fornecem um valor para x , que se aproxima do valor exato até que se chegue a uma solução numérica satisfatoriamente próxima da solução exata.

Antes de iniciar a descrição dos métodos é importante destacar a importância do conhecimento do conceito do resíduo. O método iterativo consiste na repetição de um processo até que o valor obtido esteja tão próximo quanto for possível (ou aceitável) do valor exato da solução do problema, sendo esta diferença, o erro da solução. O problema é que a determinação do erro é tão difícil quanto a obtenção do valor exato, logo não é possível utilizar este como o critério de convergência, adotando-se então o resíduo, uma indicação de quão boa é a solução aproximada na resolução do sistema, sendo um indicativo mais claro da acurácia da solução aproximada.

Considerando x como a solução exata e $x^{(k)}$ como a solução aproximada na iteração k , o erro é dado por:

$$e^{(k)} = x - x^{(k)} \quad (23)$$

Sendo o resíduo dado por:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}, \quad (24)$$

E, aplicando o operador A nos dois lados da igualdade na Equação (23), se obtém:

$$Ae^{(k)} = Ax - Ax^{(k)} \quad (25)$$

Logo,

$$Ae^{(k)} = b - Ax^{(k)} \quad (26)$$

Então:

$$Ae^{(k)} = r^{(k)} \quad (27)$$

A Equação (27) é denominada de equação residual do erro, e mostra que o erro deve satisfazer o mesmo operador A , ou seja, as propriedades espectrais do operador determinam o decaimento do erro.

Ao utilizar métodos iterativos para resolver sistemas lineares, a cada iteração, a matriz de iteração é multiplicada pela solução anterior para obter uma nova aproximação. Matematicamente, isso pode ser representado de forma genérica pela seguinte equação, que se aproxima da formulação do método de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = M^{-1}(b - Nx^{(k)}) \quad (28)$$

Onde M é a matriz aproximada de A, com inversa mais simples e N é a matriz resultante das manipulações efetuadas em A. Essa expressão pode ser reescrita como:

$$x^{(k+1)} = -M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \quad (29)$$

Agora, chamando de erro (e) a diferença entre a solução exata x e a iteração $x^{(k+1)}$, se obtém:

$$e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} \quad (30)$$

Substituindo a expressão para $x^{(k+1)}$ na Equação (30):

$$e^{(k+1)} = x - (-M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b) \quad (31)$$

Simplificando com $B = -M^{-1}N$ e $g = M^{-1}b$,

$$e^{(k+1)} = x - (Bx^{(k)} + g) \quad (32)$$

Sendo

$$x = Bx + g \quad (33)$$

É possível expressar o erro na próxima iteração em termos do erro atual:

$$e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = Bx + g - (Bx^{(k)} + g) \quad (34)$$

Assim:

$$e^{k+1} = Be^{(k)} \quad (35)$$

$$e^{(k)} = Be^{(k-1)} \quad (36)$$

Substituindo a Equação (35) na Equação (38),

$$e^{(k+1)} = B(Be^{(k-1)}) \quad (37)$$

E assim sucessivamente,

$$e^{(k+1)} = B(B(Be^{(k-2)})) \quad (38)$$

Até que o erro na iteração (k+1) pode ser relacionado com o erro inicial

$$e^{(k+1)} = B^k e^{(0)} \quad (39)$$

Deste modo, é possível compreender como a matriz de iteração e a aproximação inicial impactam no decaimento do erro.

Como a matriz de iteração (assim como qualquer matriz diagonalizável) pode ser representada pela sua decomposição em termos de seus autovalores e seus autovetores,

$$B^k = P\Lambda^k P^{-1} \quad (40)$$

Assim, sendo Λ , a matriz diagonal dos autovalores de B, onde seu raio espectral, em valor absoluto, é dado por $|\rho(B)|$,

$$\text{Se } |\rho(B)| < 1 \rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (B)^k = 0 \quad (41)$$

Uma vez que o autovalor atuará como um amplificador do erro a cada iteração, onde quanto mais próximo de zero for seu valor, sendo menor que 1, mais rápido a solução irá convergir para a tolerância especificada. Por outro lado, se o raio espectral estiver fora do círculo unitário, as contribuições desse termo, assim como as dos demais autovalores na mesma situação, podem crescer exponencialmente com o número de iterações, aumentando o erro e levando à divergência do método iterativo.

Dentre os diversos métodos disponíveis para a resolução de sistemas de equações lineares, este trabalho aborda o método de Jacobi, que atualiza iterativamente os valores de x, partindo de uma estimativa inicial para todas as variáveis e utilizando, a partir de então, os valores obtidos nas iterações anteriores até que o erro relativo esteja em uma margem pré-determinada, ou chegue a um limite estipulado de iterações. Na forma analítica, a nova aproximação de cada variável é calculada subtraindo do termo independente, a soma dos produtos dos coeficientes das outras variáveis por seus valores obtidos na iteração anterior e, em seguida, dividindo esse resultado pelo coeficiente da diagonal principal correspondente da matriz dos coeficientes, ou seja:

$$x_i^{k+1} = \frac{(b_i - \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j^k)}{a_{i,i}} \quad (42)$$

Para garantir que a solução do sistema de equações lineares seja possível e que o método de Jacobi funcione corretamente, assim como os demais, a matriz deve ser não singular (invertível) e, idealmente, diagonalmente dominante para assegurar a convergência do método.

Além disso, para evitar problemas numéricos, a matriz não deve ter elementos nulos na diagonal principal, havendo a necessidade de realização de pivotamento para contornar o problema.

O método de Gauss-Seidel, que é similar ao de Jacobi, com a diferença de utilizar as variáveis mais atuais, fazendo com que, na maioria dos casos, a convergência seja mais rápida se comparado com o método anterior. No qual cada nova aproximação de cada variável é dada pela razão entre a subtração do somatório dos produtos dos coeficientes com as variáveis anteriores dessa iteração, e desse mesmo produto com as variáveis já calculadas dessa iteração com a imagem dessa linha pelo elemento da diagonal principal dessa linha, ou seja:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} - (a_{i,i} x_i^{(k)})}{a_{i,i}} \right) \quad (43)$$

Já o método de sobre-relaxação sucessiva (SOR) é uma extensão do método de Gauss-Seidel que permite acelerar a convergência. Ele introduz um parâmetro de relaxação ω , que controla a influência dos valores anteriores na atualização dos valores de x . De um modo geral, pode-se dizer que cada aproximação da variável é dada pela soma da mesma variável calculada na iteração anterior com um termo dado pela multiplicação do resíduo gerado através de valores mais atualizados com a inversa da diagonal principal da matriz dos coeficientes e um fator ω de relaxação.

$$x^{(k+1)} = x^k + \omega D^{-1} R^{(k)} \quad (44)$$

Onde o resíduo, $R^{(k)}$, na posição i é dado por:

$$R^{(k)}_i = b_i - a_{i,1} x_1^{(k+1)} - a_{i,2} x_2^{(k+1)} - \dots - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i} x_i^{(k)} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{i,n} x_n^{(k)} \quad (45)$$

E de acordo com o valor de ω , temos:

$$\begin{cases} 0 < \omega < 1 \rightarrow \text{Método sub-relaxado} \\ \omega = 1 \rightarrow \text{Método de Gauss-Seidel} \\ 1 < \omega < 2 \rightarrow \text{Método sobre-relaxado} \\ 0 \leq \omega \text{ ou } \omega \geq 2 \rightarrow \text{O Método diverge} \end{cases}$$

Desta forma, considerando o sistema $A_{n,n} \cdot x_n = B_n$, onde n é o número de divisões do domínio, o valor de x_i é aproximado por:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} - (a_{i,i} x_i^{(k)})}{a_{i,i}} \right) \quad (46)$$

Uma vez apresentadas as formulações analíticas propostas em cada método, é mais conveniente analisar a convergência dos métodos iterativos através de uma abordagem algébrica, definindo para cada método, a “matriz de iteração”, que gera a sequência de soluções aproximadas até a convergência.

Inicialmente, decompõe-se a matriz A na forma: $A = D - L - U$

Onde:

D = Matriz contendo a Diagonal principal de A

L = Matriz contendo a parcela triangular inferior de A

U = Matriz contendo a parcela triangular superior de A

De modo que se pode reescrever a Equação (22) como:

$$(D - L - U)x = b \quad (47)$$

E desenvolvê-la de modo que:

$$Dx - Lx - Ux = b \quad (48)$$

$$Dx - (L + U)x = b \quad (49)$$

$$Dx = (L + U)x + b \quad (50)$$

$$x = D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b \quad (51)$$

Até que a Equação (42) pode ser reescrita na forma:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}[b + (L + U)x^{(k)}] \quad (52)$$

Onde a Matriz da Equação (53) é a matriz de iteração de Jacobi.

$$B_J = D^{-1}(L + U) \quad (53)$$

De maneira análoga, para a representação matricial do método de Gauss-Seidel, partindo da Equação (47):

$$(D - L)x - Ux = b \quad (54)$$

$$(D - L)x = Ux + b \quad (55)$$

$$x = (D - L)^{-1}Ux + (D - L)^{-1}b \quad (56)$$

De modo que a Equação (43) fica representada na forma:

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b \quad (57)$$

Cuja matriz de iteração é dada pela parte:

$$B_{GS} = (D - L)^{-1}U \quad (58)$$

Com a adição do fator de relaxação nos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, se obtém os métodos de Jacobi com relaxação e SOR, respectivamente. Assim, de um modo geral, pode-se definir o algoritmo para resolução desses métodos da seguinte forma:

Determina-se uma estimativa inicial $x^{(k)}$, $k=0$, com base em uma aproximação de dados conhecidos para a variável x , como uma interpolação, por exemplo, ou valores genéricos caso não haja um devido conhecimento prévio, nesse caso adota-se comumente o valor zero a todas as variáveis desconhecidas.

Para $k=1$, acrescentando de 1 a cada iteração, até que se atinja o critério de convergência:

* Calcula-se:

$$r^{(k)} = b - Ax^{(k)}; \quad (59)$$

* Sendo:

$$Ae^{(k)} = r^{(k)}, \quad (60)$$

Onde aproxima-se:

$$e^{(k)} = Sr^{(k)} \quad (61)$$

* Então:

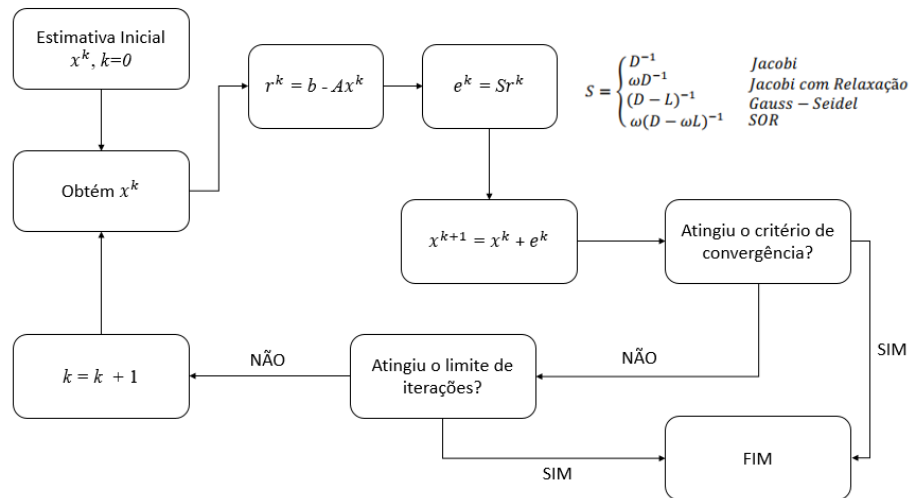
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + e^{(k)} \quad (62)$$

Sendo a determinação da matriz S , o que determina o método empregado, de modo que:

$$S = \begin{cases} D^{-1} & \text{Jacobi} \\ \omega D^{-1} & \text{Jacobi com Relaxação} \\ (D - L)^{-1} & \text{Gauss - Seidel} \\ \omega(D - \omega L)^{-1} & \text{SOR} \end{cases} \quad (63)$$

Como representado no fluxograma a seguir:

Figura 4 - Fluxograma do algoritmo dos solvers



Fonte: Autor (2024)

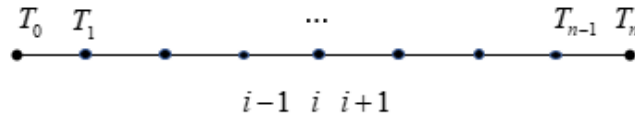
5.2 PARÂMETROS UTILIZADOS PARA OS EXPERIMENTOS

5.2.1 Problema de calor unidimensional num meio homogêneo e isotrópico

O problema representa um fenômeno difusivo unidimensional, onde o domínio de estudo é uma barra de espessura desprezível e coeficiente de difusividade igual a um, com valores de temperatura conhecidos e iguais a zero nas extremidades, para onde a temperatura final deve convergir em todos os pontos.

Para tal, inicialmente se considera uma barra unidimensional, homogênea, de comprimento “L” subdividida em “n” pontos, conforme a Figura 5:

Figura 5 - Representação do domínio discretizado para o problema de calor 1D



Fonte: Autor (2024)

Cada um dos pontos está associado a uma posição do vetor “x” denotada por x_i e a barra está submetida a condições de contorno de Dirichlet dadas por:

$$\begin{aligned} T_{(x=0)} &= 0 \\ T_{(x=L)} &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Onde T é a temperatura da barra no ponto x , cuja distribuição é dada por:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (65)$$

O objetivo deste problema é a identificação do comportamento dos métodos quanto à sua convergência, em função das frequências presentes no erro. Destaca-se aqui que este é um bom ponto de partida para análise do desempenho dos métodos, uma vez que a solução exata conhecida do problema é nulo, assim, os valores obtidos para as variáveis em cada iteração são considerados como o próprio valor do erro.

A solução do sistema é conhecida e dada por:

$$T(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad (66)$$

Para a execução dos testes, inicialmente são definidos o comprimento do domínio ($L=1$), o número de pontos (n), a tolerância de erro e o limite máximo de iterações.

Assim,

$$\Delta x = \frac{L}{n} \quad (67)$$

Montando o sistema de equações do problema, os nós 1 e n já estão definidos pela condição de contorno, como apresentado na Equação (64). Para o restante do domínio, a matriz dos coeficientes se mostra esparsa, apresentando 3 coeficientes não nulos por linha.

Como será melhor desenvolvido no item 5.2.2, discretizando o domínio usando o Método das Diferenças Finitas, descrito por Fortuna (2000), segue que para o nó i :

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_i = \frac{T_{i+1} - 2.T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2} = 0 \quad (68)$$

Deste modo, para o nó (2) até o nó ($n-1$), o sistema linear em sua forma matricial é dado por:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \dots & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \dots \\ T_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -T_n \end{bmatrix} \quad (69)$$

A vantagem do uso de métodos iterativos sobre métodos diretos está no fato de que eles armazenam e operam somente os coeficientes não nulos, ao passo que os métodos diretos armazenam e operam todos os coeficientes, reduzindo custo de processamento ao poupar memória.

É esperada uma convergência, segundo o teorema de equivalência de Lax-Richtmyer:

Um esquema de diferenças finitas consistente para uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem — cujo problema de valor inicial é bem-posto — é convergente se, e somente se, é estável (FERREIRA, 2021).

Ou seja, se um método numérico aproxima bem a equação diferencial de um problema de valor inicial que tenha solução única e continuamente dependente das condições de contorno, e se os erros numéricos não se amplificam durante o cálculo, então a solução numérica obtida irá convergir para a solução exata da equação diferencial.

De modo a promover a observação do comportamento de diferentes distribuições de frequência entre os resultados obtidos a cada passo de iteração, a aproximação inicial para os valores de x foi determinada por uma função periódica definida por uma série composta por um modo de alta frequência e um modo de baixa frequência. Assim, foi definida a seguinte estimativa inicial para os valores de x :

$$T_x = \sin(\pi x) + \sin(10\pi x) \quad (70)$$

É obtida a matriz dos coeficientes A do sistema linear do problema, decomposta em uma matriz diagonal, e nas matrizes triangular superior e inferior.

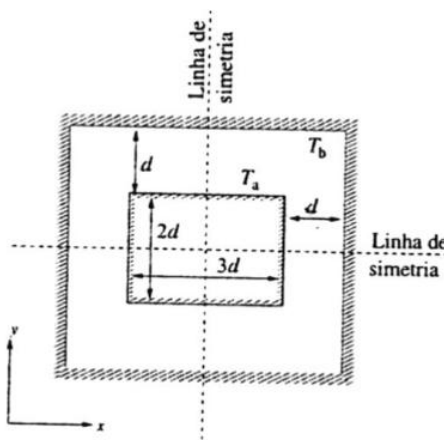
É calculada a matriz de iteração dos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel, e são obtidos o condicionamento da matriz, o espectro e o raio espectral das matrizes de iteração.

É iniciado um loop iterativo até que o erro seja menor que a tolerância estabelecida ($tol = 10^{-6}$) ou o número máximo de iterações ($max = 200$) seja atingido. A solução atualizada é calculada com base na matriz de iteração. Sendo calculado o erro e atualizado o vetor de variáveis. A cada 5 iterações, a solução é plotada.

5.2.2 Problema de calor bidimensional num meio homogêneo e isotrópico.

A Figura 6 mostra a seção reta de um tubo retangular onde as paredes internas e externas estão submetidas a uma condição previamente determinada. O objetivo com esse cenário é encontrar a distribuição de temperatura entre essas duas faces.

Figura 6 - Seção reta de um tubo



Fonte: Fortuna (2000)

O centro do dissipador está a uma temperatura $T_a = 100^\circ C$, sua superfície externa está a $T_b = 10^\circ C$, a distância d entre as paredes externa e interna do tubo vale $0,12\text{ m}$. Admite-se que o tubo tem comprimento infinito.

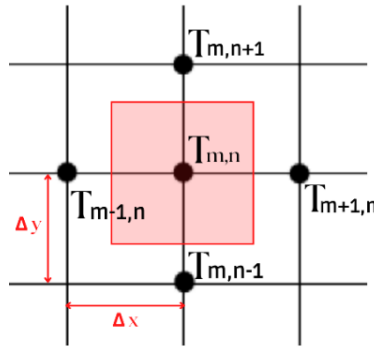
Partindo da ideia de que o objeto de estudo se trata de um problema em regime permanente, sem geração de calor, e sendo um tubo de comprimento infinito, em uma região interna, sem exposição à atmosfera e sem efeitos convecção de calor, cuja distribuição de calor é regida pela equação de Laplace. Então, para a seção reta da Figura 6, essa distribuição de temperatura é dada pela Equação (71),

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (71)$$

Inicialmente é realizada a discretização do domínio através de uma malha com $n=357$ pontos, aos quais estarão associados os valores referentes a temperatura (T), obtidos através da influência que cada ponto imediatamente próximo exerce sobre eles nas duas dimensões.

Conforme a Figura 7, discretiza-se a Equação (71) através do Método das Diferenças Finitas centradas de segunda ordem em duas dimensões, para que se obtenha uma formulação em que se possa associar valores pontuais à malha que representa o domínio. Vale ressaltar que quanto mais refinada a discretização do domínio, mais precisa se torna a aproximação.

Figura 7 - Esquematização de um ponto qualquer e seus vizinhos em uma malha estruturada



Fonte: Autor (2024)

A partir da definição de derivadas, obtemos as derivadas primeiras a esquerda e a direita do ponto, na direção x , conforme a Equação (72) e a Equação (73), respectivamente.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m,n} - T_{m-1,n}}{\Delta x} \quad (72)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} = \frac{T_{m+1,n} - T_{m,n}}{\Delta x} \quad (73)$$

De maneira análoga, encontramos as derivadas primeiras abaixo e acima para o ponto no eixo y , conforme a Equação (74) e a Equação (75), respectivamente.

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n-\frac{1}{2}} = \frac{T_{m,n} - T_{m,n-1}}{\Delta y} \quad (74)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n+\frac{1}{2}} = \frac{T_{m,n+1} - T_{m,n}}{\Delta y} \quad (75)$$

Uma vez encontradas as derivadas primeiras em cada direção, parte-se para a resolução das derivadas em segundo grau.

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m+\frac{1}{2},n} - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{m-\frac{1}{2},n}}{\Delta x} \quad (76)$$

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} = \frac{\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n+\frac{1}{2}} - \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{m,n-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \quad (77)$$

Aplicando a Equação (72) e a Equação (73) na Equação (76), se obtém:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} - 2.T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} \quad (78)$$

Aplicando a Equação (74) e a Equação (75) na Equação (77), se obtém:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{m,n} = \frac{T_{m,n+1} - 2.T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} \quad (79)$$

Agora, aplicando a Equação (78) e a Equação (79) na Equação (71), se obtém:

$$\frac{T_{m+1,n} - 2.T_{m,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} - 2.T_{m,n} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} = 0 \quad (80)$$

Deste modo, chegamos a equação de Laplace discretizada pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) em duas dimensões.

Reorganizando de modo a isolar $T_{m,n}$ na Equação (80), se tem:

$$\left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right) T_{m,n} = \frac{T_{m+1,n} + T_{m-1,n}}{\Delta x^2} + \frac{T_{m,n+1} + T_{m,n-1}}{\Delta y^2} \quad (81)$$

Para simplificar a notação, adota-se as constantes que multiplicam cada conjunto de termos como:

$$C_1 = \left(\frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right); \quad C_2 = \left(\frac{1}{\Delta x^2} \right); \quad C_3 = \left(\frac{1}{\Delta y^2} \right); \quad (82)$$

Substituindo as constantes da Equação (82) na Equação (81) e reorganizando-a, temos a forma analítica final da equação de Laplace discretizada em duas dimensões:

$$T_{m,n} = \frac{C_2}{C_1} (T_{m+1,n} + T_{m-1,n}) + \frac{C_3}{C_1} (T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) \quad (83)$$

E as condições de contorno do problema, dadas por:

$$\left. \begin{array}{l} T_a = 100^\circ C \\ T_b = 10^\circ C \end{array} \right\} \quad (84)$$

Desta forma, da Equação (83), se consegue a montagem do sistema de equações lineares, denotado por $Ax = b$.

Onde:

A = Matriz dos coeficientes

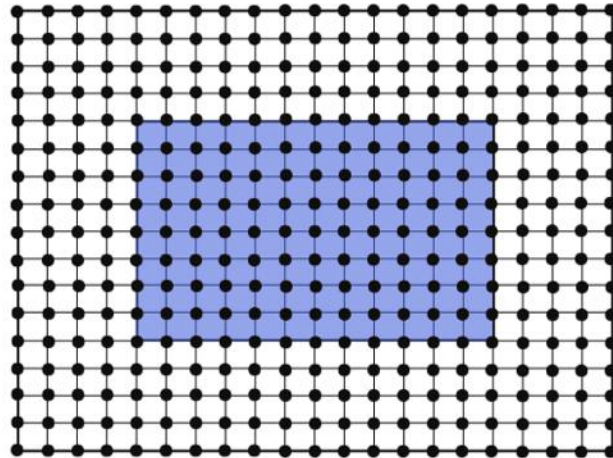
x = Solução do problema (valores de T em cada ponto do domínio discretizado)

b = Vetor que contém os valores de Condições de Contorno

Assim, inicialmente foi definida uma malha estruturada, com $\Delta x = \Delta y$. Em seguida, definidos os termos do vetor b , de modo que nas fronteiras externas do domínio, fossem associados os valores de $T_b = 10^\circ C$, e nas fronteiras internas, bem como no interior do dissipador, associados os valores de $T_a = 100^\circ C$. Aos pontos referentes as incógnitas, é atribuído o valor 0. Em todas as soluções foram atribuídos os valores de 0 como aproximação inicial de x , de modo a facilitar a comparação entre elas.

A Figura 8 representa o domínio discretizado em 357 pontos centrados no vértice como exemplo.

Figura 8 - Exemplo do domínio discretizado em 357 pontos



Fonte: Autor (2024)

Para a montagem da matriz dos coeficientes, $A_{n,n}$, inicialmente a todos os elementos da diagonal principal foi atribuído o valor de 1 e, nas colunas referentes aos elementos contribuintes, a devida relação entre os coeficientes, resultando em uma matriz pentadiagonal.

Uma vez definido o sistema linear, parte-se para a resolução deste através do método do sobre relaxação sucessiva (SOR).

Em seguida, é realizado um teste sobre o método de SOR, variando o fator de relaxação (ω), de modo a identificar para qual valor a convergência se dá de forma mais rápida.

É obtido então o raio espectral da matriz de iteração e este é plotado em função do fator de relaxação, cuja análise permite determinar o valor ótimo para o fator de relaxação que resulta em uma taxa de convergência otimizada.

5.2.3 Escoamento monofásico num reservatório de petróleo bidimensional, heterogêneo e anisotrópico

O objetivo deste problema é analisar a eficácia de diferentes resolvidores e pré-condicionadores de sistemas de equações lineares em função das propriedades espectrais das matrizes de transmissibilidade e de iteração para determinação de propriedades de escoamento em reservatórios de petróleo.

Assim, a base do método é similar à abordagem previamente descrita para problemas de transmissão de calor. A equação de pressão num reservatório de petróleo é discretizada utilizando o Método de Volumes Finitos Multiescala, e é obtido um sistema de equações lineares na forma matricial, de onde se extrai a matriz de transmissibilidade que será então tratada com o uso de pré-condicionadores para avaliação dos seus impactos.

Métodos de pré-condicionamento são utilizados para melhorar a convergência de solvers iterativos aplicados à resolução do sistema de equações lineares. Esses procedimentos buscam transformar a matriz original em uma matriz equivalente melhor condicionada, o que geralmente resulta em taxas de convergência mais elevadas, onde determina-se uma matriz P invertível (conhecida como matriz de pré-condicionamento) de forma que o sistema pré-condicionado $P^{-1}Ax = P^{-1}b$ seja melhor condicionado do que o sistema original $Ax = b$.

Avaliando diferentes técnicas de pré-condicionamento disponíveis na literatura, alguns foram considerados aqui, por exemplo, o método de pré-condicionamento de Jacobi, que é uma abordagem simples, de fácil implementação, que se dá dividindo a matriz A em uma matriz diagonal D e uma matriz fora da diagonal R , onde a matriz de pré-condicionamento P é a inversa da matriz diagonal D , ou seja, $P = D^{-1}$.

De outra parte, o método de pré-condicionamento de Gauss-Seidel é uma variação do método de Jacobi, onde a inversa da matriz triangular inferior L , é usada como matriz de pré-condicionamento. Analogamente, a matriz de pré-condicionamento P é a inversa da matriz triangular inferior L , ou seja, $P = L^{-1}$. Esta solução pode ter uma convergência melhor do que o pré-condicionamento de Jacobi em alguns casos, sendo mais eficiente para matrizes esparsas.

O método de pré-condicionamento ILU envolve uma decomposição LU incompleta da matriz A , onde os elementos abaixo ou acima de um certo limiar são ignorados evitando esforço computacional e economizando espaço. Sendo particularmente útil para matrizes esparsas,

melhorando significativamente a convergência para matrizes mal condicionadas. Neste método, a matriz de pré-condicionamento, P , é formada pela multiplicação de L e U .

A escolha do nível de eliminação de coeficientes pequenos na decomposição ILU pode afetar a eficácia do pré-condicionamento. Um equilíbrio deve ser encontrado entre a eliminação de coeficientes pequenos e a preservação da qualidade do pré-condicionamento.

Já o método de pré-condicionamento multiescala visa combinar informações de diferentes escalas de malha utilizando informações de malhas mais grossas para orientar o processo de resolução em malhas mais finas. Desta forma, a matriz de pré-condicionamento é dada por $P_{MS} = \tilde{P}_{op} (\tilde{R}_{or} A \tilde{P}_{op})^{-1} \tilde{R}_{or}$.

Aplicam-se os pré-condicionadores escolhidos em conjunto com solvers iterativos, a partir de onde se pode avaliar a melhoria na convergência comparada com a abordagem sem pré-condicionamento.

Sendo uma das principais dificuldades das metodologias multiescala, sua incapacidade de resolver erros de alta frequência no sistema em escala fina, pela limitação de posto (número de linhas linearmente independentes) da matriz imposta pelo número de nós da malha grossa, surge a necessidade de combinar o pré-condicionador multiescala com um pré-condicionador local capaz de resolver erros de alta frequência no sistema, constituindo assim o Two-Stage Algebraic Multiscale Solver (TAMS) descrito por Zhou (2010). Na primeira etapa, uma solução multiescala é construída de forma algébrica a partir da aproximação de volumes finitos do sistema linear de escala fina, utilizando o procedimento iterativo de Richardson com o pré-condicionador multiescala, que deve parar após uma iteração, por não haver redução no resíduo com o incremento das iterações. Neste cenário, não haverá convergência para a solução de escala fina porque o operador de prolongamento é construído com base em um sistema "reduzido" aproximado e os espectros da matriz de iteração do multiescala se concentram em torno de 0 e 1, onde os erros de alta frequência no sistema de escala fina não podem ser resolvidos. É neste ponto que se insere o segundo pré-condicionador, que visa corrigir esta deficiência, podendo ser escrito como:

$$P_{TAMS} = P_{MS} + P_{Local} - M_T P_{MS} P_{Local} \quad (85)$$

Onde:

P_{TAMS} é a matriz com dois estágios de pré-condicionamento;

P_{MS} é a matriz de pré-condicionamento multiescala;

P_{Local} é a matriz de pré-condicionamento local, podendo ser dada por Jacobi, Gauss-Seidel ou Fatoração ILU;

M_T é a matriz de transmissibilidade da malha fina;

A solução pode ainda ser acrescida de outras etapas, com aplicação de outros pré-condicionadores locais, caso haja a necessidade.

Por fim, a análise espectral é realizada para mostrar que o método de duas etapas pode resolver todos os espectros da matriz de escala fina e alcançar uma rápida convergência.

5.2.4 Uso do método *Flow Based Upscaling* para aumento de escala

A base do *Flow Based Upscaling* é utilizar a conservação do fluxo em um volume de controle para encontrar valores que representem a heterogeneidade das propriedades desse volume em uma escala mais grossa, preservando a capacidade de reprodução do comportamento no meio e reduzindo custo computacional.

Desta forma, foi utilizado o método *Flow Based Upscaling* apresentado por de Lima et al. (2021) para realizar o aumento de escala. Neste caso, foram realizados aumentos de escala do problema original de 900 volumes de controle de 100, 36, 25 e 9 volumes. Para cada um desses cenários, foram avaliados o raio espectral, o número de condicionamento, a variação dos resultados entre a projeção da pressão obtida da solução do *Flow Based Upscaling* na malha fina e a solução do método multiescala (BARBOSA, 2017), uma vez que este último foi utilizado como parâmetro de referência para a avaliação da eficiência do método *Flow Based Upscaling* em seu desenvolvimento. Em seguida foi aplicado o pré-condicionador de Jacobi para melhorar a condição de solução das matrizes de transmissibilidade resultantes em cada cenário e resolver o problema, comparando então a sua solução com a solução de referência e avaliando as possíveis vantagens e desvantagens da aplicação do método.

6. RESULTADOS E DISCUSSÕES

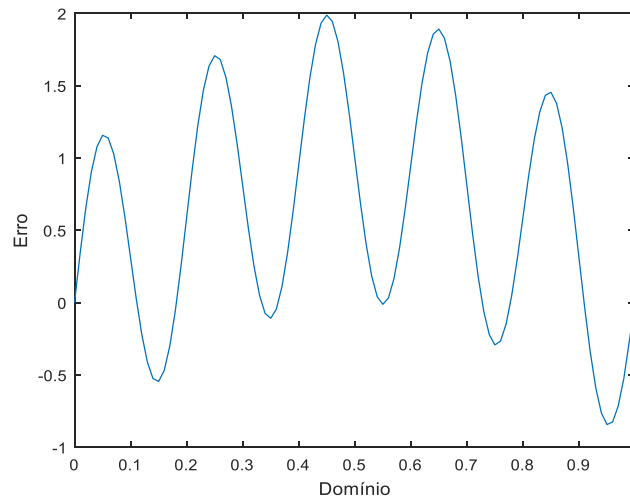
Nessa seção são abordados a análise dos resultados obtidos com os solvers estacionários envolvendo os cenários estudados e as relações entre os fatores que afetam a convergência e os indicadores de eficiência dos métodos.

6.1 PROBLEMA DE CALOR UNIDIMENSIONAL NUM MEIO HOMOGÊNEO E ISOTRÓPICO

Com a solução exata conhecida igual a zero, os valores obtidos para as variáveis a cada iteração são considerados como o próprio valor do erro. Partindo daí, observa-se a distribuição dos valores de x para a aproximação inicial da Equação (70), considerando-se $n=100$, e consequentemente, seu erro, ou afastamento do valor 0, como é possível observar na Figura 9.

Para este exemplo, foi obtido um número de condicionamento igual a 4.13×10^3 para a matriz A, indicando seu mal condicionamento. É de fácil identificação nesse exemplo, a influência dos modos oscilatórios de alta e baixa frequência.

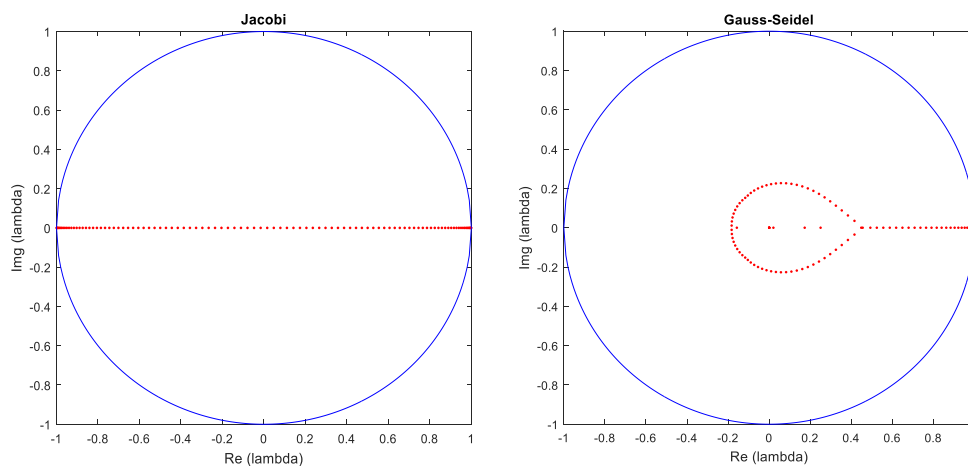
Figura 9 - Aproximação inicial para os valores de x (n=100)



Fonte: Autor (2024)

Respectivamente, observam-se os espectros das matrizes de iteração dos método de Jacobi e Gauss-Seidel na Figura 10, cujos raios espectrais são aproximadamente 0.999 e 0.998, onde é possível identificar a variação dos autovalores (λ), representados por pontos vermelhos, em diversas faixas no eixo real (Re) e imaginário (Img), contidos no círculo unitário, o que indica a variação na capacidade de convergência do método para cada variável em virtude da presença de modos oscilatórios de alta frequência, cuja taxa de convergência é mais alta, associados aos autovalores mais próximos de zero, e de baixa frequência, que por sua vez dificulta a convergência do método e que se associa aos autovalores mais elevados.

Figura 10 - Espectro das Matrizes de Iteração (n=100)

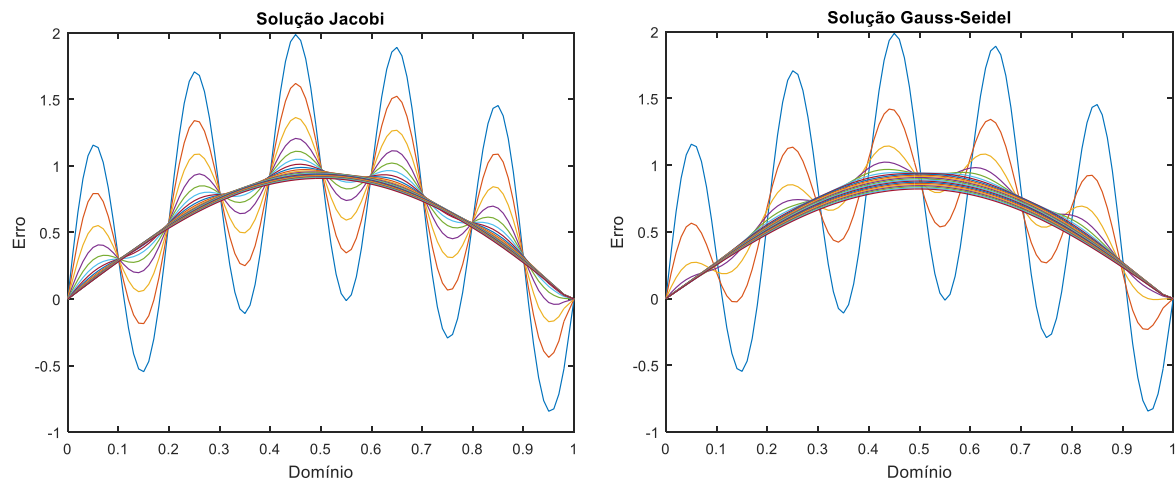


Fonte: Autor (2024)

Desta forma, identifica-se que, com a facilidade de convergência dos modos de alta frequência, e a dificuldade relacionada aos modos de baixa frequência, o erro se torna uma função suave pois ele converge para a curva da onda de baixa frequência e a partir deste ponto, para a malha adotada na identificação das variáveis, já não há eficiência em seguir com o método, como é possível observar na Figura 11, que mostra a evolução da solução a cada iteração, onde é possível perceber como a convergência ocorre mais rapidamente para o método de Gauss-Seidel, sob as mesmas condições, porém convergindo para a mesma função suave graças a presença do modo oscilatório de baixa frequência.

Sendo, a solução para todo o domínio, conhecida e igual a zero, linhas de diferentes cores representadas na Figura 11, exibem o valor obtido para cada variável (em uma mesma linha), em iterações diferentes (cores diferentes). Iniciando com um comportamento senoidal com dois modos de frequência evidentes, em função da estimativa inicial. Partindo desta ideia é fácil constatar experimentalmente a relação entre a frequência e o refinamento da malha considerando a capacidade de convergência.

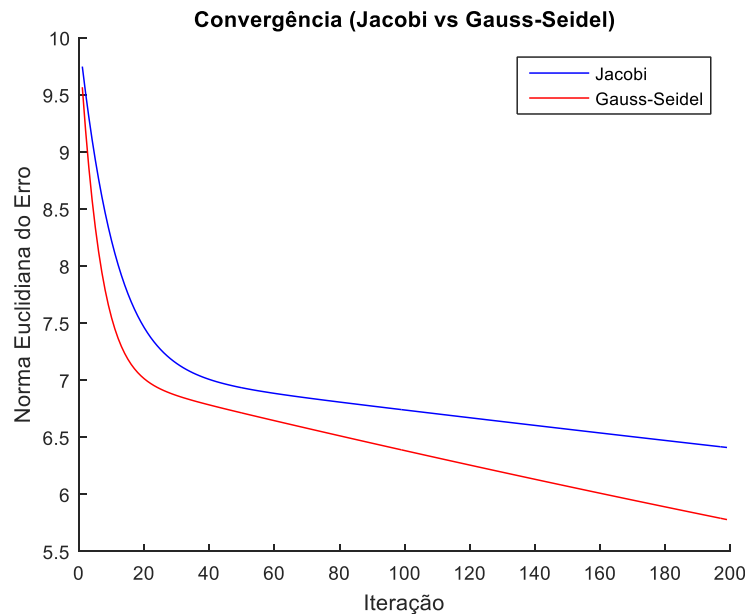
Figura 11 - Suavização do Erro com cada método



Fonte: Autor (2024)

A relação entre as convergências dos métodos pode ser melhor observada a partir da comparação do decaimento do valor da norma euclidiana do erro (afastamento da solução do valor exato 0) associado a cada um dos métodos em cada iteração, como mostra a Figura 12, evidenciando a maior velocidade de convergência de Gauss-Seidel sobre Jacobi.

Figura 12 - Comparação do erro a cada iteração para os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel (n=100)



Fonte: Autor (2024)

O número de onda (k) representa a taxa de variação espacial da fase de uma onda em relação à posição. Um número de onda maior indica uma variação espacial mais rápida da fase, o que geralmente está associado a uma frequência mais alta da onda. Este por sua vez, apresenta uma relação com o refinamento da malha adotada para o domínio. Neste exemplo, o número de subdivisões da barra. Caso o número de onda seja menor que $n/2$, tem-se um modo suave, ou de baixa frequência. Se este for maior que $n/2$, trata-se de um modo oscilatório, ou de alta frequência.

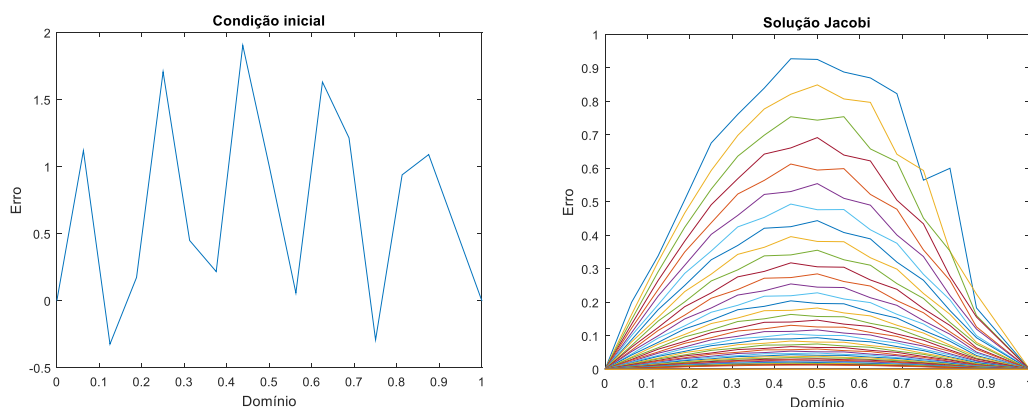
Segundo Oppenheim e Schafer (1975), o Teorema de Nyquist-Shannon afirma que uma função pode ser completamente representada se ela for amostrada a uma taxa superior ao dobro de sua maior frequência. Ou seja, se o número de subdivisões (n) do domínio for maior que o dobro do maior número de onda (k) no intervalo observado. Uma vez que, a função que descreve a estimativa inicial possui dois modos oscilatórios, ao reduzir o número de subdivisões do domínio ao ponto de a frequência mais alta não poder mais ser representada, o único modo oscilatório identificado pelo sistema passa a ser o de baixa frequência, e este passa a ter seus valores ajustados sem a interferência do modo oscilatório de maior frequência.

Deste modo, infere-se que modelos com discretizações mais refinadas vão representar mais fidedignamente o domínio e apresentar boa taxa de convergência para os modos oscilatórios das mais altas frequências, porém, com a sua aproximação convergindo para os modos suaves, não sendo a representação correta do comportamento da variável estudada no

meio. Já o tratamento com uma malha mais grossa pode não ter uma riqueza de informações no cenário micro, mas é capaz de fornecer os melhores resultados numa visão macro.

Na Figura 13, é possível observar a aproximação inicial e a evolução da solução a cada iteração para um grau de refinamento menor do domínio, com $n=16$.

Figura 13 - Aproximação inicial e Solução Jacobi ($n=16$)



Fonte: Autor (2024)

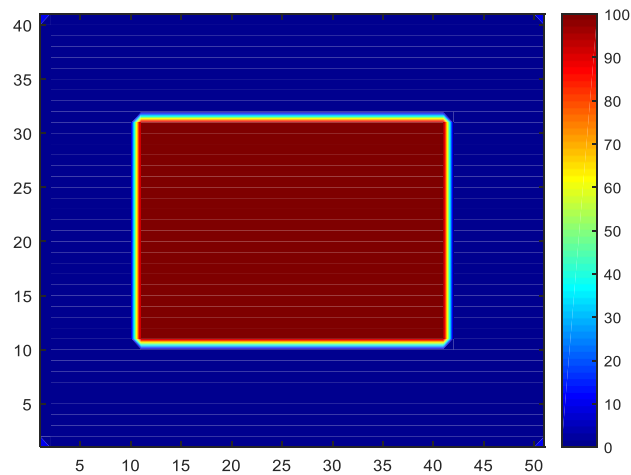
6.2 PROBLEMA DE CALOR BIDIMENSIONAL NUM MEIO HOMOGENEO E ISOTRÓPICO

Em um primeiro momento, considerando uma malha com refinamento resultando em 357 pontos, e sendo determinados a tolerância do erro ($tol = 10^{-3}$) e o número máximo de iterações ($max = 500$), foi resolvido o problema para toda a faixa de valores de sobre relaxação (ou seja: $1 < \omega < 2$) variando a cada 0,01, considerando para exemplificação do método, o fator arbitrário de relaxação de $\omega=1.2$.

A Figura 14 mostra um esquema de cores com a distribuição das condições de contorno e a estimativa inicial atribuída às incógnitas para o domínio completo. Para melhor entendimento da Figura 14 e da Figura 15, a escala à direita indica a temperatura em °C.

Nos esquemas de cores da Figura 14 e da Figura 15, o gradiente de cores que se apresenta nas fronteiras internas e a variação de tom nos quatro vértices externos não representam modificações nos valores fornecidos. Trata-se de uma particularidade no mecanismo de representação da ferramenta utilizada, que realiza uma interpolação dos valores em pontos próximos para suavizar a transição entre os pontos.

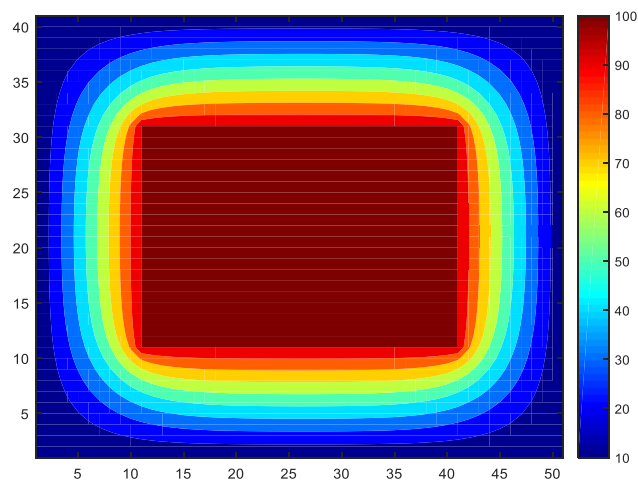
Figura 14 - Valores e esquema de cores de Condições de Contorno e estimativa inicial (Domínio completo)



Fonte: Autor (2024)

A Figura 15 representa a solução numérica para o domínio completo nas condições supracitadas com esquema de cores para representar os valores, com um mapa de calor.

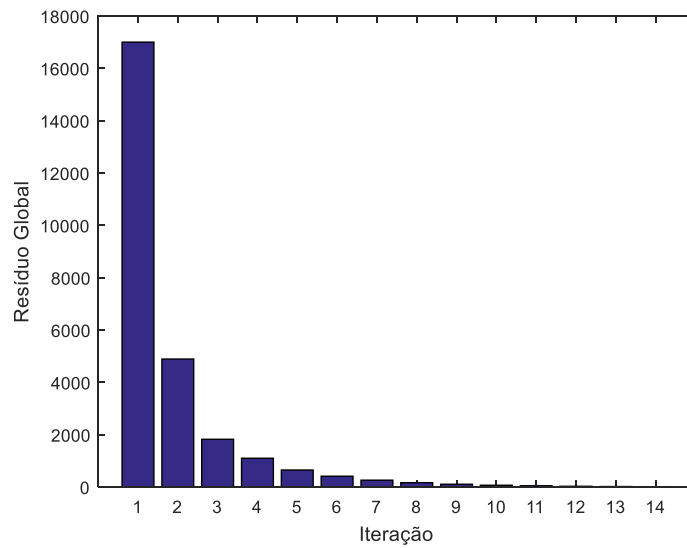
Figura 15 - Solução numérica e esquema de cores para o domínio completo em malha de 357 pontos



Fonte: Autor (2024)

Esta solução precisou de 14 iterações para atingir o critério de convergência de erro, $E \leq 0.001$. A Figura 16 exibe o somatório dos resíduos a cada iteração, denotando o comportamento do método aplicado quanto à convergência para a solução.

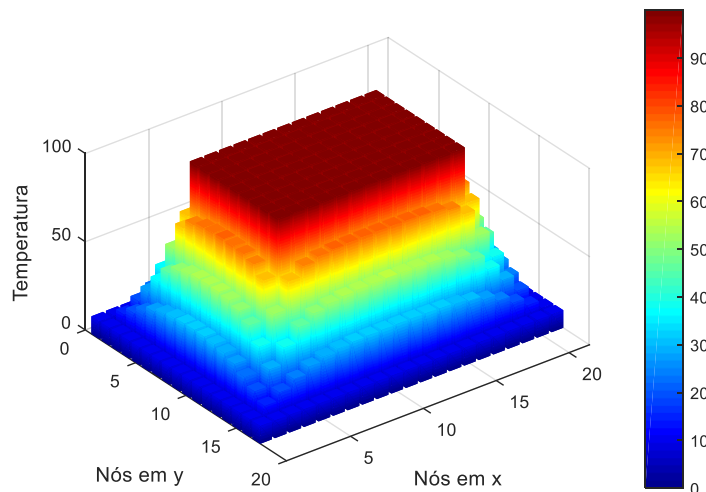
Figura 16 - Somatório dos resíduos do sistema a cada iteração



Fonte: Autor (2024)

Este comportamento se deve ao fato de a estimativa inicial não ser muito próxima dos valores exatos, mas que há uma convergência muito alta que reduz significativamente o resíduo logo nas primeiras iterações. Preservando-se as particularidades de cada caso, este foi um comportamento observado de maneira generalizada nos casos rodados.

Figura 17 - Esquema de cores 3D para a solução SOR



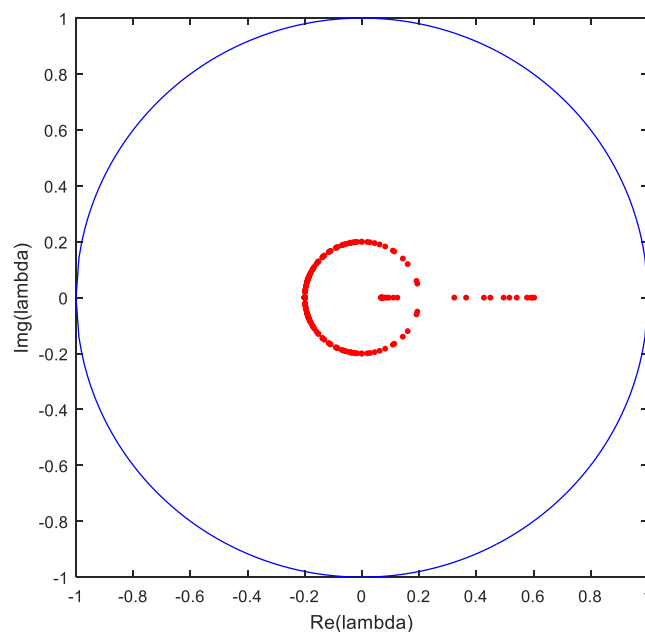
Fonte: Autor (2024)

Para as posições referentes as proximidades das fronteiras externas, o resíduo inicial é menor e cresce à medida que se aproximam das fronteiras internas, havendo em todos os casos, uma redução considerável logo nas primeiras iterações. As variáveis que estão próximas às fronteiras do sistema são mais sensíveis aos erros do que as variáveis que estão no centro do sistema, além de que, os valores das fronteiras internas divergem mais do comportamento do

resto do sistema na condição inicial. Isso ocorre porque as variáveis que estão próximas às fronteiras são iniciadas com valores de estimativas iniciais mais afastadas dos valores esperados para elas do que as variáveis que estão no centro do sistema, isso é refletido nos autovalores associados a esses pontos e consequentemente no afastamento desses valores da solução do problema.

Analisando-se os autovalores da matriz de iteração relativa ao problema em questão, podem-se inferir informações acerca de sua convergência e do erro associado às suas aproximações. Sendo o seu maior autovalor em valor absoluto, o seu raio espectral. Um menor raio espectral indica uma taxa de convergência possivelmente mais alta, o que indica que a margem de erro nas soluções do problema é menor e mais facilmente controlável. A Figura 18 exibe os autovalores calculados da matriz de iteração do problema descrito acima.

Figura 18 - Autovalores da Matriz de Iteração para solver SOR do problema para o domínio completo com $\omega = 1.2$



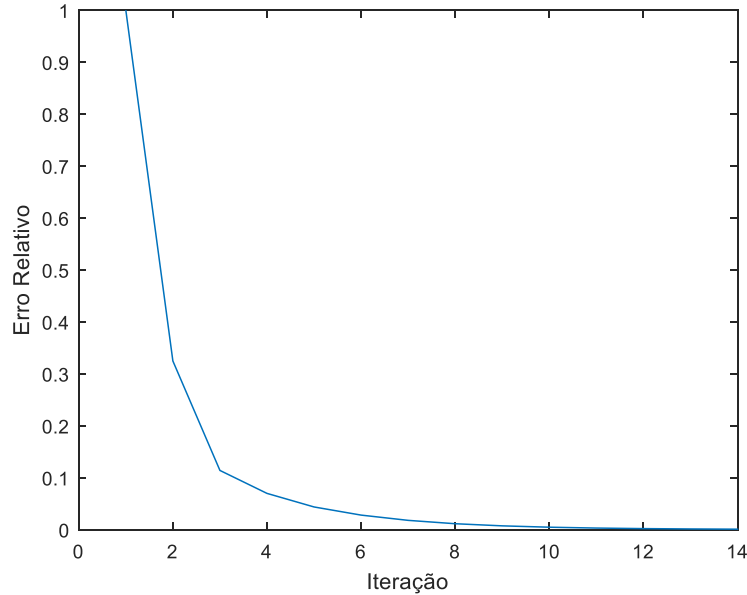
Fonte: Autor (2024)

Percebe-se que a matriz possui uma concentração de seus autovalores próximos a 0, sendo todos mantidos no interior do círculo unitário demarcado na imagem, o que transmite a ideia de que o método deve convergir rapidamente, sendo esta, uma clara limitação dos métodos estacionários de solução de sistemas lineares de equações.

Por fim, tendo atingido ao critério de convergência estipulado, observa-se a redução da estimativa do erro relativo associado à solução a cada etapa do processo iterativo. O erro

relativo é calculado comparando a diferença entre as soluções obtidas em duas iterações consecutivas, sendo essa diferença normalizada pela magnitude da solução atual, representado pela Figura 19.

Figura 19 – Erro relativo associado à solução a cada iteração



Fonte: Autor (2024)

A determinação do valor ótimo para o fator de relaxação permite otimizar a convergência do método SOR e dos métodos que utilizam este artifício. Uma vez que o valor ótimo do fator de relaxação não pode ser determinado de maneira genérica para todos os problemas, é possível estimar uma aproximação para o problema tratado através de uma equação baseada no raio espectral proposta por Young (1954), dada por:

$$\omega = 1 + \left[\frac{\rho}{1 + (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 \quad (83)$$

Uma vez que a matriz dos coeficientes suavizada possui raio espectral aproximado de $\rho(A) = 0,87$, o valor obtido para o fator ótimo de relaxação foi de $\omega=1,34$

Assim, foi realizado um experimento com o fator de relaxação, seu efeito sobre o espectro e seu impacto na taxa de convergência e consequentemente no número de iterações, tempo de processamento e custo computacional, de uma maneira geral.

A determinação do melhor fator de relaxação não é absoluta e varia de acordo com o problema abordado. Para diferentes situações, um valor maior ou menor pode impactar de diferentes formas na convergência do método.

Para o domínio completo discretizado em 357 pontos, foram analisados valores para o fator de relaxação variando de 1 a 2, a cada 0,01 e registrados os impactos dessas alterações na solução, registrando os valores a cada 0,10 e evidenciando o valor ótimo com precisão de duas casas decimais, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 - Dados referentes as soluções com diferentes fatores de relaxação para o problema de domínio completo discretizado em malha de 357 pontos

ω	Número de condicionamento κ	Raio espectral ρ	Taxa de Convergência γ	Erro Relativo	Número de Iterações	Tempo (s)
1	13.7444	0.74	0.2982	8.73E-04	19	2.4576
1.10	13.7444	0.68	0.3807	9.22E-04	16	2.6529
1.20	13.7444	0.60	0.5069	7.35E-04	14	2.3870
1.30	13.7444	0.45	0.7817	5.67E-04	12	2.4162
1.34	13.7444	0.34	1.0788	5.77E-04	11	2.1759
1.40	13.7444	0.40	0.9163	6.74E-04	10	2.2764
1.50	13.7444	0.50	0.6931	5.49E-04	13	2.7341
1.60	13.7444	0.60	0.5108	6.19E-04	17	2.4873
1.70	13.7444	0.70	0.3567	8.08E-04	24	2.6231
1.80	13.7444	0.80	0.2231	8.89E-04	41	3.0710
1.90	13.7444	0.90	0.1054	9.84E-04	83	5.0633
2	13.7444	1	-6.66E-15	1.9999	500	65.7216

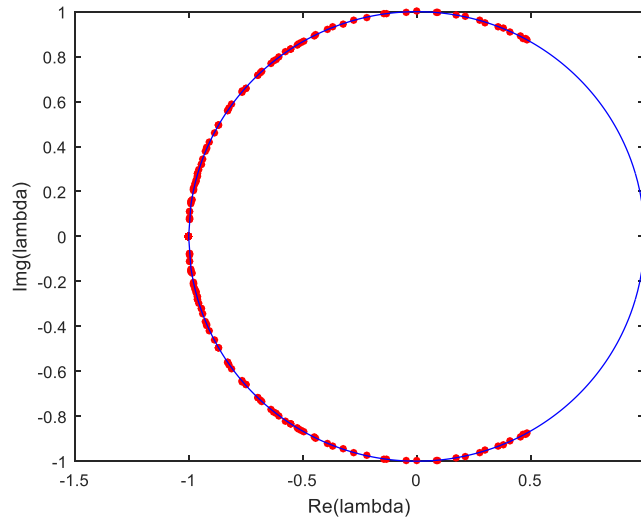
Fonte: Autor (2024)

Após a análise dos dados, nota-se que o melhor valor para o fator de relaxação para a solução deste problema, sujeito às condições apresentadas, foi de fato $\omega=1,34$, obtendo os menores autovalores para a matriz de iteração, consequentemente obteve o menor raio espectral, o que levou a uma taxa de convergência mais elevada, reduzindo o número de iterações necessárias para atingir o critério de convergência, consumindo um menor tempo de processamento.

Segundo Wandresen (1980 apud Pena, 2021), a convergência do método SOR é garantida por dois critérios: o teorema de Kahan, que estabelece que, se todos os elementos da diagonal da matriz de coeficientes A forem diferentes de zero, o método converge somente para $(0 < \omega < 2)$; e o teorema de Ostrowski, que afirma que, para sistemas de equações lineares em que a matriz de coeficientes A é positiva definida, o método SOR irá convergir para o intervalo $(0 < \omega < 2)$, independentemente da aproximação inicial de x .

Como esperado, para o valor de $\omega=2$, o sistema não foi capaz de obter a convergência. Evidencia-se o posicionamento de todos os autovalores de sua matriz de iteração nos limites do círculo unitário.

Figura 20 - Espectro da Matriz de Iteração para $\omega=2$



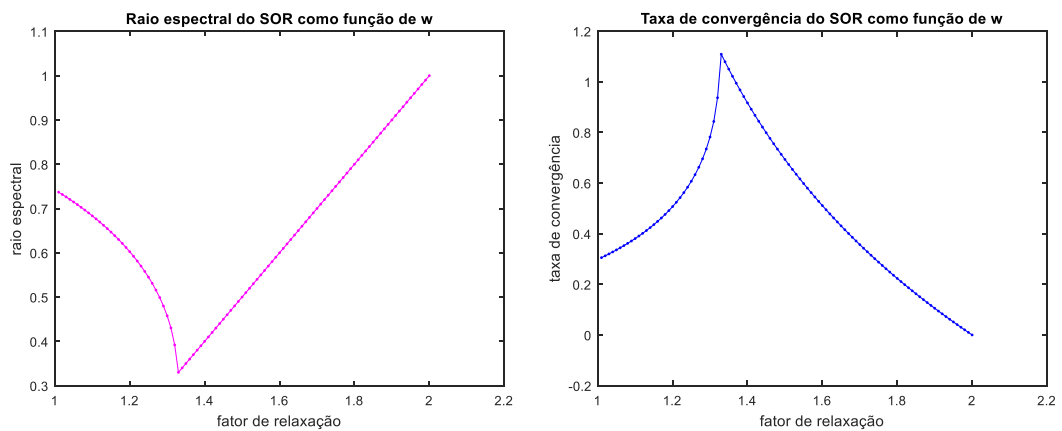
Fonte: Autor (2024)

Na Figura 21, observa-se na prática como se dá a relação entre o fator de relaxação empregado e a capacidade de convergência do método, dada por:

$$\text{Taxa de convergência} = -\log(\text{raio_espectral}) \quad (84)$$

Uma vez que o raio espectral e a taxa de convergência são inversamente proporcionais e o logaritmo é uma função monotonicamente crescente. Isso significa que um aumento de 1 na escala logarítmica corresponde a um aumento constante na escala original. No caso da convergência, um aumento de 1 na escala logarítmica corresponde a um aumento constante no número de iterações necessárias para atingir uma determinada precisão.

Figura 21 - Raio espectral e Taxa de convergência do método SOR em função do fator de relaxação ($n=357$)



Fonte: Autor (2024)

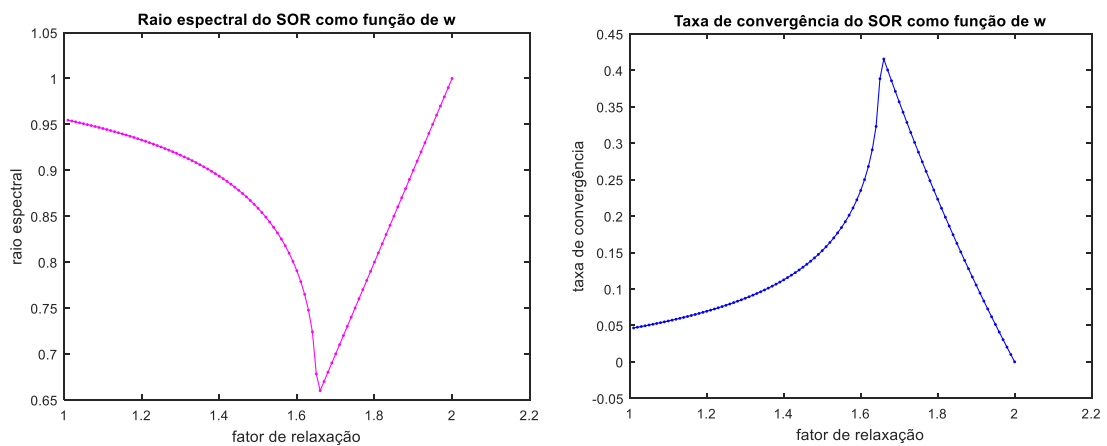
Foram realizados testes variando o refinamento da malha e a variação das condições de contorno, desta vez considera-se uma malha mais refinada, com 2091 pontos, mantendo-se o fator de relaxação de $\omega=1,2$.

Como já era de se esperar, o comportamento em todos os aspectos foi mantido, havendo apenas o aumento do número de dados no domínio, levando a uma distribuição mais densa de informações, no entanto, com o aumento do número de pontos, houve um aumento no condicionamento de 13.744 para 87.880, no raio espectral da matriz de iteração que passou de 0,602 para 0,933, levando a uma redução da taxa de convergência de 0,507 para 0,069, deixando de convergir em 14 iterações e passando para 53, de modo que se tornou mais custoso computacionalmente.

Outra observação interessante é que a mudança no refinamento da malha interfere na definição do fator de relaxação, cujo valor ótimo é obtido com $\omega =1,66$.

Estas alterações podem ser observadas na Figura 22 e com o raio espectral em função do fator de relaxação e taxa de convergência em função do fator de relaxação e espectro para $\omega =1,2$.

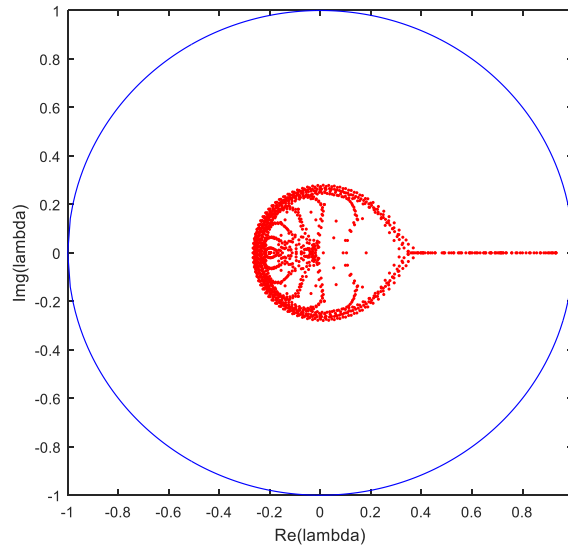
Figura 22 - Raio espectral e Taxa de convergência do método SOR em função do fator de relaxação (n=2091)



Fonte: Autor (2024)

O padrão do espectro dos autovalores da matriz de iteração se mantém igual nos dois cenários, como observado na Figura 23, havendo apenas um número consideravelmente maior de autovalores, em função do aumento do número de variáveis envolvidas na discretização do domínio.

Figura 23 - Espectro da Matriz de Iteração para $n=2091$ e $\omega=1.2$



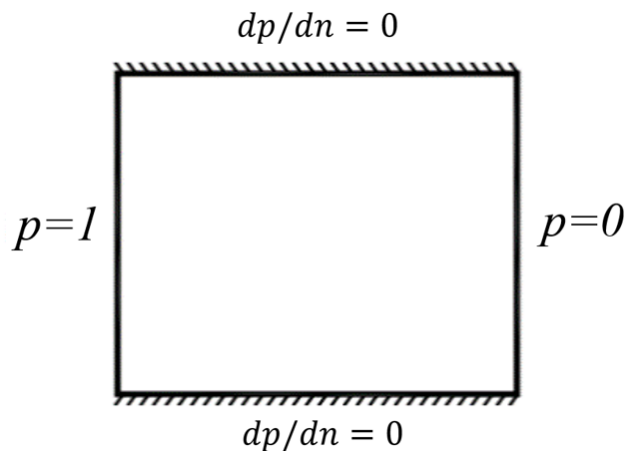
Fonte: Autor (2024)

Já a inversão das condições de contorno não provoca alterações tão significativas a não ser pelo aumento dos resíduos nas primeiras iterações quando a relação entre as temperaturas nas fronteiras interna e externa aumentam.

6.3 ESCOAMENTO MONOFÁSICO NUM RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO BIDIMENSIONAL E HETEROGÊNEO

Considerando aqui o modelo caracterizado como problema de pistão, com as condições de Neumann e Dirichlet impostas às fronteiras do domínio com fluxo nulo em $y=0$ e $y=1$ e pressões $p=1$ em $x=0$ e $p=0$ em $x=1$, conforme Figura 24:

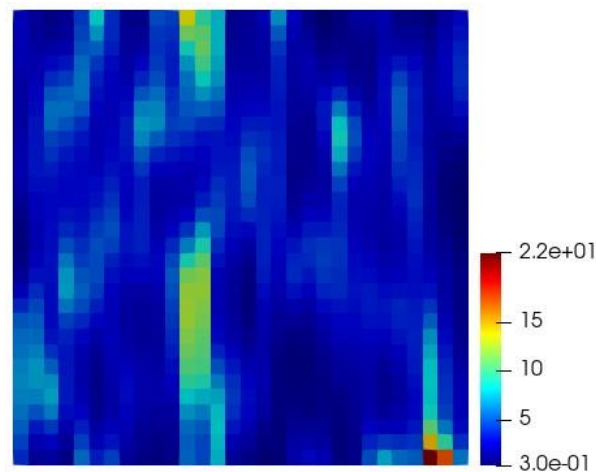
Figura 24 - Condições de contorno do problema de pistão.



Fonte: De Lima et al. (2021)

Com um campo de permeabilidade heterogênea previamente fornecido como dado de entrada, conforme a Figura 25, discretizado em 900 volumes de controle, em uma malha fina 30×30 e 9 blocos em uma malha grossa primal 3×3 para o processamento do método multiescala. Para os estudos desenvolvidos aqui, parte-se de valores de carregamentos externos e da matriz de transmissibilidades obtidos com o pré-processador do método multiescala de Barbosa (2017).

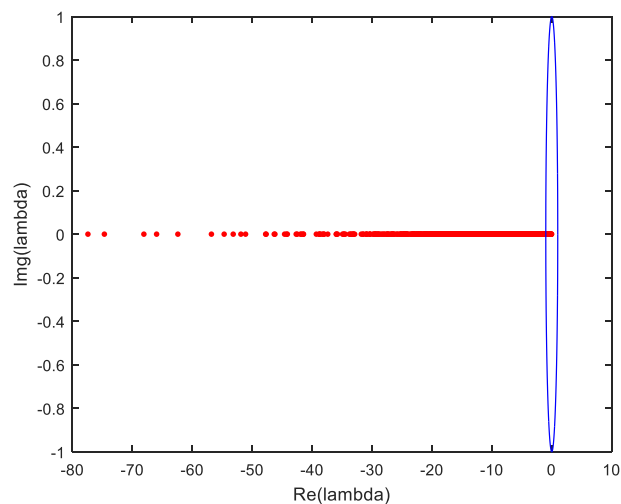
Figura 25 - Campo de permeabilidade do problema pistão 30×30



Fonte: Autor (2024)

Assim, o espectro da matriz de transmissibilidade obtida está representado na Figura 26, de onde é possível observar, pelos autovalores de módulo elevado, que a solução não deve apresentar tendência de convergir sem que seja aplicado um tratamento com pré-condicionadores.

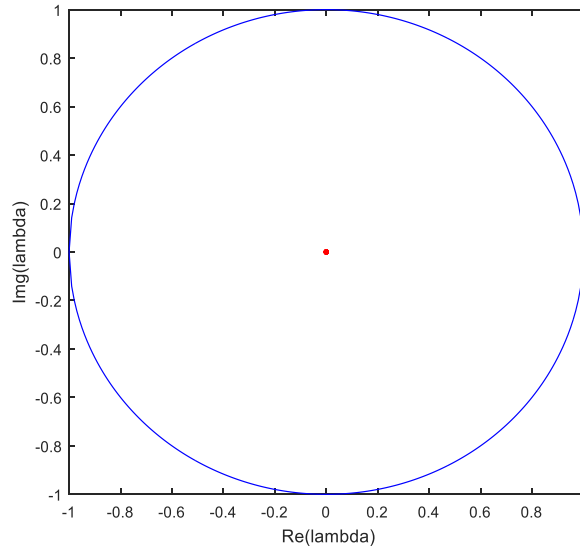
Figura 26 - Espectro da Matriz de transmissibilidade



Fonte: Autor (2024)

Em um primeiro momento, usando o próprio multiescala como pré-condicionador, é obtida a matriz de iteração cujo espectro está representado a seguir:

Figura 27 - Espectro usando o pré-condicionador multiescala

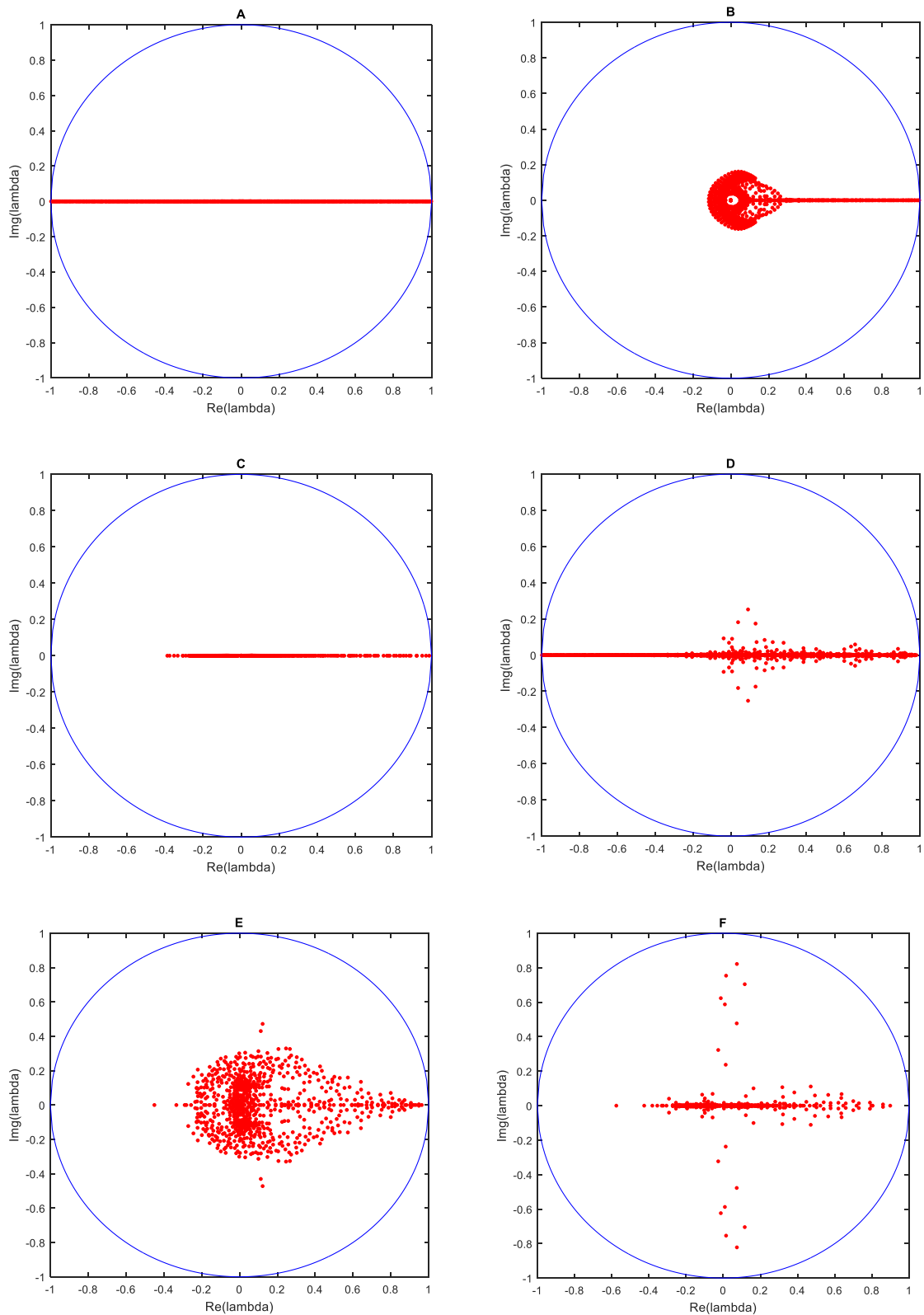


Fonte: Autor (2024)

Uma primeira observação da Figura 27 já indica que o sistema deverá divergir, uma vez que seu raio espectral encontra-se sobre a linha que marca o círculo unitário, em razão da maneira como se deu a redução da dependência linear, levando a um problema de posto reduzido, onde o sistema não pode ser completamente determinado, o que resulta em problemas na convergência do solver, levando ao comportamento observado na Figura 29, onde observa-se uma redução considerável no resíduo na primeira iteração, mas nenhuma alteração nas demais.

Uma consideração importante quanto ao uso do multiescala como pré-condicionador está relacionado com o fato de que a heterogeneidade e a anisotropia podem levar a problemas de mal condicionamento na matriz de transmissibilidade, especialmente em malhas mais refinadas, uma vez que as particularidades em escalas menores se tornam mais relevantes e percebidas somente na escala fina. Nesse cenário, a solução multiescala pode se apresentar como instável ou até mesmo divergente, uma vez que seu posto é limitado pelo número de nós da malha grossa, que não pode representar todas as soluções possíveis para o problema de escala fina, resolvendo assim, somente os erros de baixa frequência. Portanto, são necessários estágios locais adicionais para remover erros de alta frequência, os suavizadores. Erros que somente as funções de correção multiescala não são capazes de apresentar convergência (WANG 2015).

Figura 28 - Espectro dos autovalores das matrizes de iteração geradas a partir de cada pré-condicionador: A) Jacobi; B) Gauss-Seidel; C) ILU; D) Multiescala + Jacobi; E) Multiescala + Gauss-Seidel; F) Multiescala + ILU



Fonte: Autor (2024)

Desta forma, é importante considerar as implicações do pré-condicionamento aplicado, sendo necessário, nesses casos, realizar ajustes no pré-condicionador ou incorporar técnicas adicionais para reverter os problemas decorrentes da redução do posto. Destaca-se ainda, que nestes casos, foram utilizadas iterações de Richardson para obtenção das soluções aproximadas em cada iteração.

Os itens A, B e C, na Figura 28 representam os espectros dos autovalores das matrizes de iteração geradas a partir do uso dos pré-condicionadores de Jacobi, Gauss-Seidel e da fatoração LU incompleta, respectivamente.

Com o uso do método de Jacobi, é possível observar que o comportamento do espectro da matriz de iteração obtida segue o padrão já observado, com autovalores percorrendo toda a faixa contida no círculo unitário, com pontos que levam a convergência mais acelerada enquanto outros necessitam de um número consideravelmente alto de iterações para atingir a convergência.

O comportamento segue de maneira similar para o método de Gauss-Seidel, embora que seja perceptível uma concentração muito maior de valores inferiores a partir da observação de seu espectro, deixando um volume menor que necessita de um elevado número de iterações para convergir.

Mantendo a melhoria nos resultados dos métodos, apresenta-se a fatoração LU incompleta, onde na escolha do nível de eliminação de coeficientes pequenos, não foi adicionado nenhum preenchimento à matriz original, fatorando a matriz original como uma matriz triangular inferior e uma matriz triangular superior. É nítido que a concentração de autovalores próximos a zero é muito grande enquanto os valores mais próximos de 1 são cada vez menos representativos, o que já fornece uma informação de que se pode esperar uma convergência mais acelerada e menor custo computacional para obter a aproximação dos valores quanto aos módulos de frequência mais alta.

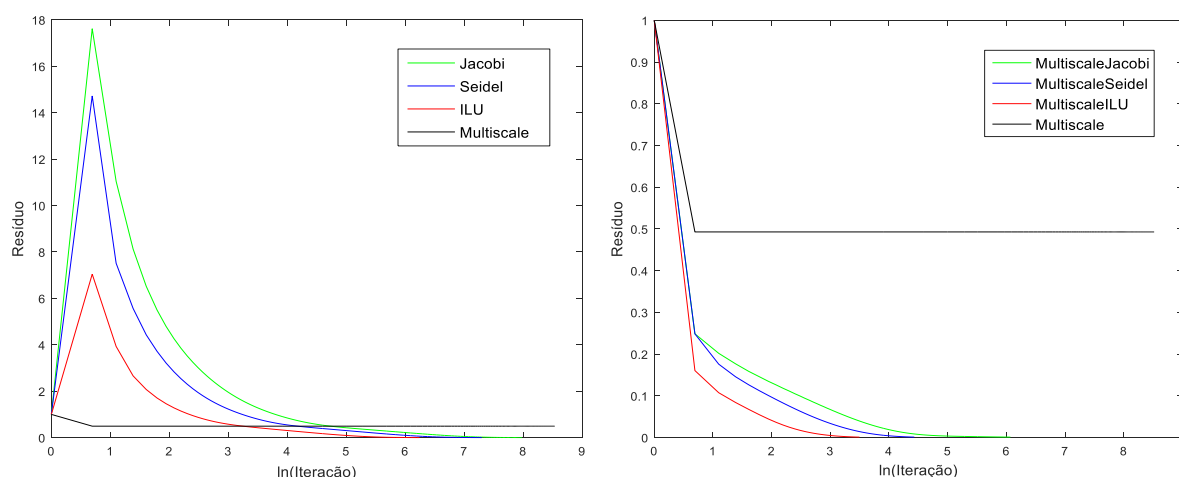
Combinando os pré-condicionadores multiescala e os demais apresentados aqui, é possível entender a partir do espectro obtido em cada uma das combinações, como os comportamentos são mesclados e o reflexo disso é a redução do custo computacional para atingir os critérios de convergência. Os itens D, E e F na Figura 28 representam o uso do TAMS combinando o multiescala com Jacobi, Gauss-Seidel e ILU, respectivamente. Onde claramente observa-se um comportamento similar ao dos métodos aplicados individualmente, com uma tendência maior de concentração dos valores mais próximos de zero e redução do módulo dos maiores autovalores.

A representação gráfica do decaimento do resíduo em função da escala logarítmica do número de iterações, na Figura 29, exemplificam os comportamentos descritos. Analisando o método de Jacobi, os modos de alta frequência convergem rapidamente, enquanto que os modos de baixa frequência necessitam de um custo muito elevado para atingir pequenas melhorias em sua convergência. Já no método de Gauss-Seidel, observa-se o reflexo de uma discreta, mas perceptível, concentração maior de autovalores de menor valor em módulo, e o resultado esperado, é observado ao analisar o decaimento do resíduo com as iterações, onde é clara a maior velocidade de convergência nas iterações iniciais e o menor número de iterações para se atingir um valor aceitável para os termos de autovalor mais elevado. E isso se intensifica à medida que esse padrão de comportamento vai se tornando mais evidente ao se trabalhar com a fatoração LU incompleta.

Com a observação dos resultados apresentados, identifica-se a excelente capacidade do método multiescala para superar os erros de alta frequência e sua deficiência quanto aos demais, ao passo que os outros métodos apresentam um comportamento mais desejável nesse ponto. Essa é a base da iniciativa da combinação do multiescala com mais um pré-condicionador para obter o melhor das duas abordagens.

Quanto ao decaimento observado do erro para a aplicação do TAMS, os resultados obtidos se mostraram muito superiores se comparados aos pré-condicionadores aplicados individualmente, com um decaimento mais acentuado nas primeiras iterações e um número muito menor de iterações para atingir a convergência. Assim como ILU desempenhou melhor que Gauss-Seidel, que por sua vez desempenhou melhor que Jacobi, nas suas associações com o Multiescala, o padrão se manteve.

Figura 29 - Resíduo versus $\ln(\text{iteração})$ para cada pré-condicionador



Fonte: Autor (2024)

A Tabela 2 resume os resultados obtidos com cada um dos pré-condicionadores, evidenciando a eficiência da aplicação de cada um deles, e atesta a vantagem computacional da fatoração incompleta aplicada isoladamente, e em dois estágios com o multiescala.

Tabela 2 - Eficiência da aplicação dos pré-condicionadores

Pré-Condicionador	Iterações	Resíduo	Raio Espectral	Posto	Condicionamento κ	Custo (s)
Jacobi	2924	9.98E-04	0.9979	900	1091.8	1.81
Gauss-Seidel	1480	9.99E-04	0.9957	900	407.0309	0.94
Multiescala	5000	4.93E-01	1	9	8.4501E+20	3.11
ILU(0)	514	9.97E-04	0.9877	900	152.2952	0.64
Multiescala + ILU	33	8.99E-04	0.8981	900	3594.8	0.07
Mutiescala + Jacobi	432	9.99E-04	0.9982	900	9839	0.61
Multiescala + Seidel	84	9.58E-04	0.9633	900	6566	0.11

Fonte: Autor

6.4 USO DO MÉTODO *FLOW BASED UPSCALING* PARA AUMENTO DE ESCALA

A ideia deste experimento é encontrar valores que representem a heterogeneidade das propriedades de todo o domínio em uma malha de menor refinamento, equivalente à malha grossa primal do multiescala, de modo a preservar as características originais do meio, reduzindo o custo computacional da solução.

Foram testadas malhas de 100, 36, 25 e 9 volumes de controle. E seus resultados estão representados na Tabela 3, sendo o raio espectral, o número de condicionamento (κ), a variação dos resultados entre a projeção da pressão obtida da solução do *Flow Based Upscaling* (DE LIMA et al., 2021) na malha fina e a solução do método multiescala (BARBOSA, 2017). Quanto às métricas relacionadas ao uso do pré-condicionador de Jacobi, adicionam-se o número de iterações, o número de graus de liberdade da matriz (POSTO) e o tempo de solução [CUSTO (s)].

Tabela 3 - Comparação dos resultados *Flow Based Upscaling*

MATRIZ DE TRANSMISSIBILIDADE	RAIO ESPECTRAL	κ	NORMA	ERRO FB-MS	PRECONDICIONADOR + SOLVER JACOBI					
					RAIO ESPECTRAL	κ	ITERAÇÕES	RESÍDUO	POSTO	CUSTO (s)
Problema Fino 30 x 30	77.404	2792.5	L ² INFINITO	- -	0.998	1091.8	2924	9.98E-04	900	1.81
FlowBased 10 X 10	38.513	157.9	L ² INFINITO	1.43% 4.08%	0.977	89.245	309	9.89E-04	100	7.38E-03
FlowBased 6 x 6	24.484	37.379	L ² INFINITO	1.91% 4.05%	0.935	30.952	116	9.74E-04	36	8.44E-04

FlowBased 5 X 5	22.708	24.772	L ²	3.81%	0.901	19.797	77	9.37E-04	25	5.16E-04
			INFINITO	6.56%						
FlowBased 3 X 3	17.803	8.087	L ²	3.81%	0.735	6.751	29	7.85E-04	9	2.15E-04
			INFINITO	9.00%						

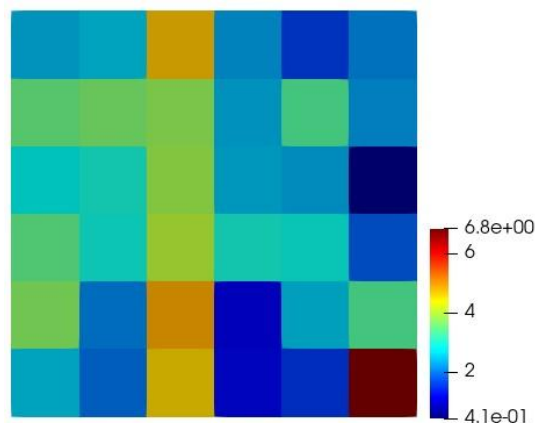
Fonte: Autor (2024)

Como esperado, de acordo com o aumento da escala, o raio espectral da matriz de transmissibilidade vai sendo reduzido, bem como o número de condicionamento, ao passo que o erro, ou a variação com relação a solução original, aumenta.

É possível simplificar a determinação do erro com o uso da norma euclidiana como uma medida que representa o comportamento genérico do afastamento entre os pontos equivalentes nas soluções, enquanto que a norma do infinito apresenta como erro a maior entre essas variações individualmente. E estas são boas medidas para servir de parâmetro principal na avaliação do engrossamento a se adotar a depender de qual seria a margem de erro aceitável em troca de uma redução de custo computacional.

Considerando a combinação dos fatores avaliados, especialmente valores baixos de erro relativo e a redução do número de iterações e do tempo de processamento, adotou-se como melhor exemplo o aumento de escala para a malha 6x6. Para este cenário, o campo de permeabilidade equivalente obtido com o *Flow Based Upscaling* está representado na Figura 30:

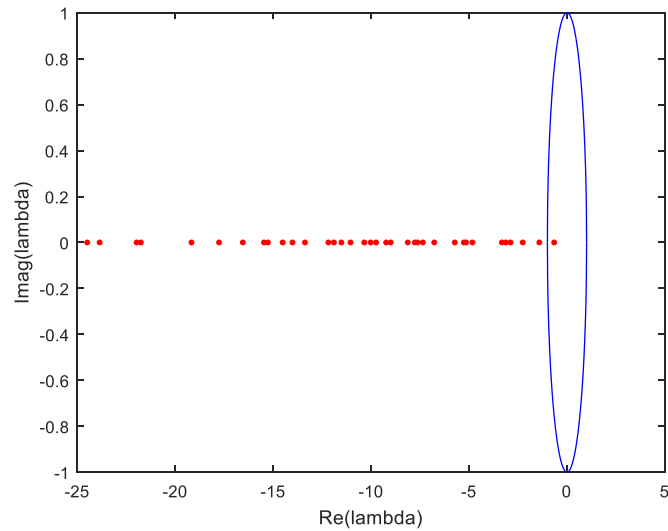
Figura 30 - Campo de permeabilidade Upscaling 6x6



Fonte: Autor (2024)

Sua matriz de transmissibilidade, cujo espectro está representado na Figura 31, projeta, com valores reduzidos, o espectro da matriz de transmissibilidade original.

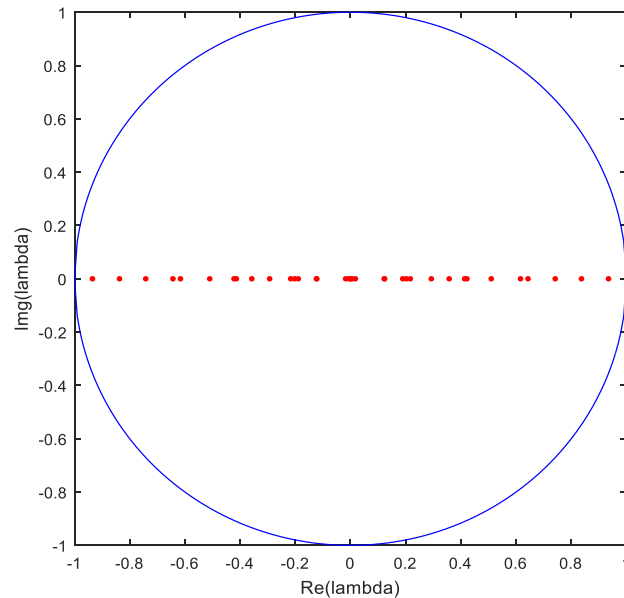
Figura 31 - Espectro da matriz de transmissibilidade *Flow Based Upscaling* 6x6



Fonte: Autor (2024)

O espectro da matriz de iteração, partindo da matriz de transmissibilidade pré-condicionada, de forma análoga ao que ocorre no problema fino, está contido e bem distribuído no intervalo unitário conforme representado na Figura 32.

Figura 32 – Espectro da matriz *Flow Based Upscaling* 6x6 pré-condicionada

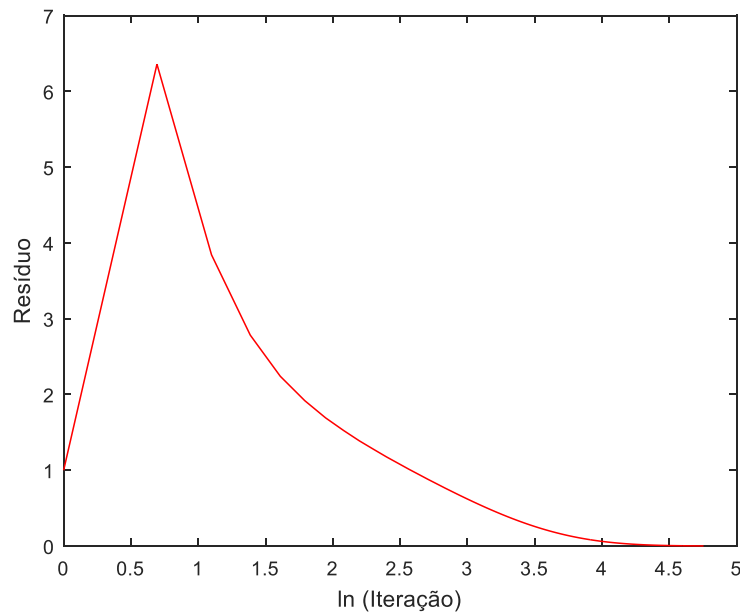


Fonte: Autor (2024)

Observando a redução do resíduo versus $\ln(\text{iteração})$, os resultados obtidos apresentam um comportamento similar ao percebido com a aplicação do solver no cenário original,

exigindo, neste caso, um número muito menor de iterações para atingir a convergência. De modo que a conclusão que se pode obter é que a aplicação dos solvers e pré-condicionadores vai projetar nos casos *Flow Based Upscaling*, o mesmo comportamento observado anteriormente, mantendo as proporções que a consequente redução do número de variáveis promove.

Figura 33 - Resíduo *Flow Based Upscaling* 6x6 (Jacobi)

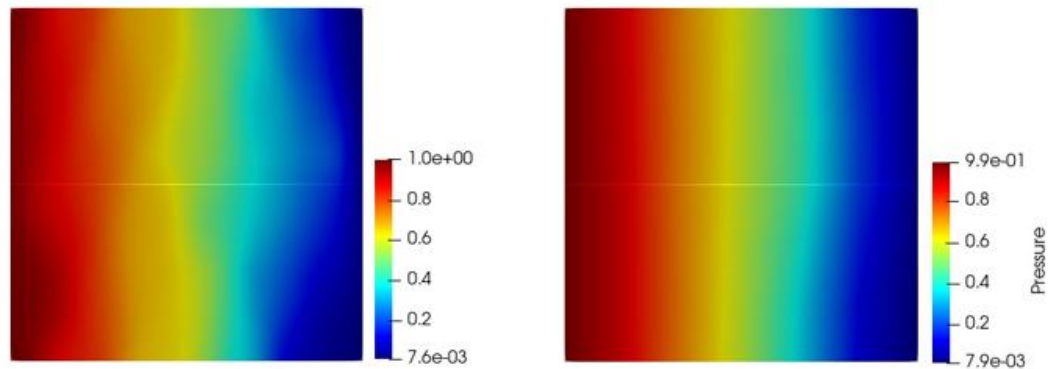


Fonte: Autor (2024)

Pode-se observar, comparando por inspeção visual, os campos de pressão calculados com os dados de permeabilidade original e equivalente, na Figura 34 e na Figura 35, que a acurácia dos resultados obtidos pela metodologia *Flow Based Upscaling* se mostra bastante próxima aos resultados obtidos pela metodologia multiescala de Barbosa (2017), destacando-se assim, por possibilitar melhoria no desempenho de simulações numéricas, conforme de Lima et al. (2021).

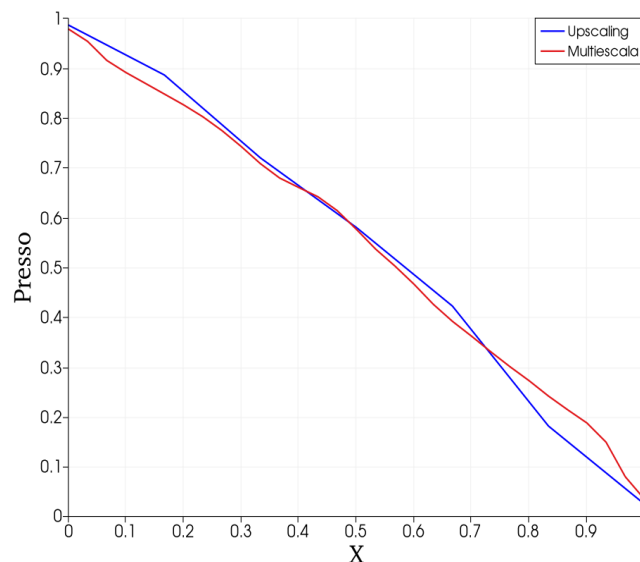
As imagens da Figura 34 representam a visão em área do campo de pressão cujos valores são representados em uma escala como mapa de cores. As linhas da Figura 35 representam os valores da pressão versus a posição em x na linha média ($y=0.5$) nas soluções Multiescala e *Flow Based Upscaling*.

Figura 34 – Esquema de cores dos campos de pressão Multiescala (à esquerda) e *Flow Based Upscaling* (à direita)



Fonte: Autor (2024)

Figura 35 – Pressão na linha média ($y=0.5$) para Multiescala e *Flow Based Upscaling*



Fonte: Autor (2024)

Dada a proximidade dos resultados obtidos com o método *Flow Based Upscaling* para com a solução de referência e a sua considerável redução em termos de custo computacional, é evidente que mantendo um controle cuidadoso da tolerância aceita na variação dos resultados quanto aos valores de referência, o uso da metodologia *Flow Based Upscaling* pode se apresentar muito vantajosa, principalmente em cenários com domínios muito grandes e altamente densos, heterogêneos e anisotrópicos, onde o uso correto dessa ferramenta, aliada à aplicação de solvers e pré-condicionadores adequados poderia ser a diferença entre ser ou não possível executar uma simulação.

7. CONCLUSÃO

A análise espectral das matrizes possibilitou o estudo das particularidades dos resolvidores e pré-condicionadores na solução de sistemas de equações lineares, por exemplo, entender os impactos do uso de diferentes fatores de relaxação quanto à capacidade de convergência do sistema, e a particularidade da escolha desse fator com cada caso de estudo. Identificar que há uma capacidade de convergência mais alta para modos oscilatórios de alta frequência, e que estes estão associados aos autovalores de menor valor absoluto, mais próximos de zero, onde evidencia-se que o refinamento da malha de discretização do domínio influencia diretamente no modo oscilatório que irá convergir. Quando o refinamento é alto, as particularidades locais são muito evidenciadas e impactam na solução do sistema, e quando o refinamento é baixo, as particularidades locais não são capturadas na malha e não são consideradas na solução.

Com isso, este estudo permite entender como o refinamento impacta no decaimento do erro no processo iterativo e como diferentes técnicas podem ser utilizadas para extrair o melhor resultado na solução dos sistemas, mostrando que o conhecimento dos autovalores da matriz de transmissibilidade influencia diretamente essa decisão, e propõe que o uso do do Two-Stage Multiscale Algebraic Solver, descrito por Zhou (2010), aplicado ao Método Iterativo Multiescala para Volume de Controle Modificado (I-MMVCM), proposto por Barbosa (2017) é uma abordagem vantajosa por resolver os modos oscilatórios de baixa frequência com a matriz pré-condicionada pelo método multiescala e os modos oscilatórios de alta frequência com a matriz pré-condicionada pelo método local, assim, combina a eficiência computacional com a precisão, permitindo a resolução de grandes problemas de maneira mais rápida e eficaz. Além disso, a capacidade de tratar separadamente modos de diferentes frequências garante que a solução final seja mais robusta e adaptada às características específicas do reservatório, resultando em melhores previsões de comportamento.

A heterogeneidade do meio poroso afeta fortemente a matriz de transmissibilidade e, consequentemente, a convergência dos resolvidores de sistemas de equações lineares. Com a utilização dos pré-condicionadores foi melhorada essa convergência dos resultados. Então, isso mostra a importância e o impacto da aplicação dos pré-condicionadores na solução do sistema de equações lineares, promovendo a acurácia da solução e reduzindo o custo computacional. Além disso, esses resultados aprimoram a compreensão detalhada do fluxo de fluidos no subsolo, o que pode contribuir na melhor tomada de decisões no setor de exploração e produção de petróleo.

Foi visto que o uso do multiescala como pré-condicionador é ineficiente com as variações das propriedades em escalas menores, isto é, a solução não converge com seu posto reduzido. Então, para vencer esta limitação, é necessária a aplicação de suavizadores para remover os erros de alta frequência, combinando assim um ou mais pré-condicionadores locais, como Jacobi, ILU ou Gauss-Seidel.

Após submeter a matriz de transmissibilidade obtida pelo método *Flow Based Upscaling* aos mesmos processos que a matriz de transmissibilidade original do problema fino, foi possível observar a relação entre os resultados obtidos em cada situação e compreender que o comportamento entre as duas é similar e o *Flow Based Upscaling* é capaz de reproduzir todas as propriedades, preservando suas características, com um número reduzido de dados, facilitando o processo de solução, reduzindo o custo computacional, de modo que se torna um método promissor para trabalhar com um número elevado de dados. Deixando a solução sobre a malha fina para ser aplicada sobre locais de interesse específico, como áreas próximas a poços injetores e produtores.

Com o avanço das tecnologias na indústria de petróleo, análises refinadas de suas etapas fornecem insumos para o desenvolvimento do setor, proporcionando uma visão cada vez mais precisa do comportamento do reservatório, permitindo a adaptação contínua das estratégias operacionais com base em dados em tempo real e modelagem preditiva. Onde, diante dos avanços da revolução tecnológica em curso, a investigação aprofundada sobre métodos numéricos avançados, aprimoramento da modelagem dos reservatórios e a busca por soluções eficientes para a resolução computacional são áreas que têm um enorme potencial a ser explorado com o início da era da inteligência artificial, a evolução e a facilidade de acesso ao *machine learning*, visando a constante otimização na recuperação de hidrocarbonetos.

Para aprofundar a compreensão e expandir os resultados obtidos neste estudo, como perspectivas para futuras pesquisas, sugere-se a extensão deste trabalho para a análise de meios anisotrópicos, o que permitirá avaliar a influência da anisotropia nas propriedades espectrais das matrizes de transmissibilidade e na convergência dos métodos iterativos. Além disso, a consideração de múltiplas fases de fluidos permitirá investigar o impacto da complexidade das relações constitutivas, das interações entre as fases e a relação entre as diferentes propriedades na eficiência dos métodos numéricos. Outra linha de investigação consiste na aplicação de solvers baseados em subespaços de Krylov, como GMRES, combinados com diferentes pré-condicionadores, visando explorar o potencial desses métodos para a solução de sistemas de grande porte provenientes da discretização de modelos geológicos complexos. A combinação

dessas abordagens permitirá aprofundar a compreensão dos mecanismos de transporte em meios porosos heterogêneos e anisotrópicos, contribuindo para o desenvolvimento de simuladores mais robustos e eficientes para a indústria do petróleo.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAMANA, Margareth Rosa da Silva. **O impacto do preço do petróleo: Análise da vulnerabilidade dos países exportadores de petróleo**. 2019. 99 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Gestão, Universidade Lusófona do Porto, Porto, 2019.

BARBOSA, L. M. C. **Investigação de Formulações Multi-Escala Localmente Conservativas para a Simulação de Reservatórios de Petróleo Muito Heterogêneos**. 2017. 157 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2017.

BARBOSA, L. M. C.; CARVALHO, D. K. E.; LYRA, P. R. M.; ANTUNES, A. R. E. Método de Volumes Finitos Multiescala Para Reservatórios Heterogêneos e Anisotrópicos. In: CILAMCE 2016, XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016, Brasília, DF. **Proceedings of the XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Brasília: ABMEC, 2016. p. 1-14.

BARREIRA, L.; VALLS, C. **Nonlinear Systems: An Introduction**. Springer, 2006. ISBN 978-1441918309.

BENAYCH-GEORGES, F.; NADAKUDITI, R. R. The eigenvalues and eigenvectors of finite, low rank perturbations of large random matrices. **Advances In Mathematics**, [S.L.], v. 227, n. 1, p. 494-521, maio 2011.

CARVALHO, D. K. E. **Uma Formulação do Método dos Volumes Finitos com Estrutura de Dados por Aresta para a Simulação de Escoamentos em Meios Porosos**. 2005. 185 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Centro de Tecnologia e Geociências, Universidade Federal de Pernambuco, Recife-PE, 2005.

CASTELLETTO, N.; HAJIBEYGI, H.; TCHELEPI, H.A. Multiscale finite-element method for linear elastic geomechanics. **Journal of Computational Physics**, v. 331, p. 337-356, 2017.

CAVALCANTE, T. M.; SOUZA, A. C. R.; HAJIBEYGI, H.; CARVALHO, D. K. E.; LYRA, P. R. M. Simulation of two-phase flow in 3D fractured reservoirs using a projection-based Embedded Discrete Fracture Model on Unstructured tetrahedral grids (pEDFM-U). **Advances in Water Resources**, v. 187, 2024.

CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. A New Multipoint Flux Approximation Method with a Quasi-Local Stencil (MPFA-QL) for the Simulation of Diffusion Problems in Anisotropic and Heterogeneous Media. **APPLIED MATHEMATICAL MODELLING**, v. 70, p. 659-676, 2019. ISSN 0307-904X.

DE LIMA, B. F. A.; DOS SANTOS JÚNIOR, E. J. G.; ANTUNES, A. R. E.; VILLELA, M. F. S.; BARBOSA, L. M. C. Upscaling numérico baseado em uma metodologia multiescala para a simulação de escoamentos em reservatórios de petróleo heterogêneos e anisotrópicos. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 9, p. 88667–88679, 2021.

DURLOFSKY, L. J. **Upscaling and Gridding of Fine Scale Geological Models for Flow Simulation**. 8th International Forum On Reservoir Simulation, Iles Borromees, Stresa, Italy, 20 jun. 2005.

EFENDIEV, Y.; HOU, T. Y. **Multiscale Finite Element Methods, Theory and Applications**. Springer Science and Business Media, LLC, 2009. ISBN: 978-0-387-09495-3.

EWING, R. E. **The mathematics of reservoir simulation**. New York: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1983. 198 p. ISBN 978-0-89871-662-7.

FERREIRA, P. C. V. S. **O teorema de equivalência de Lax-Richtmyer e sua aplicação**. 2021. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2021.

FIGUEIREDO, M. O. **Precondicionador multiescala aplicado à geomecânica**. 2019. 79 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Rio de Janeiro, 2019.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

GASPARINI, L.; RODRIGUES, J. R.P.; AUGUSTO, D. A.; CARVALHO, L. M.; CONOPOIMA, C.; GOLDFELD, P.; PANETTA, J.; RAMIREZ, J. P.; SOUZA, M.; FIGUEIREDO, M. O. Hybrid parallel iterative sparse linear solver framework for reservoir geomechanical and flow simulation. **Journal Of Computational Science**, [S.L.], v. 51, p. 101330, abr. 2021.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations**. 4th ed. Johns Hopkins University Press, 2013. ISBN 978-1421407944.

HESTENES, M.R.; STIEFEL, E.. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. **Journal Of Research Of The National Bureau Of Standards**, [S.L.], v. 49, n. 6, p. 409-435, dez. 1952.

JENNY, P; LEE, S.H; TCHELEPI, H.A. Multi-scale finite-volume method for elliptic problems in subsurface flow simulation. **Journal Of Computational Physics**, [S.L.], v. 187, n. 1, p. 47-67, maio 2003.

KANIEL, S. **Estimates for some computational techniques in linear algebra**. Math. Comp., v. 20, p. 369-378, 1966.

KWOK, Tsz Chiu; LAU, Lap Chi; RAMACHANDRAN, Akshay. Spectral Analysis of Matrix Scaling and Operator Scaling. **Siam Journal On Computing**, [S.L.], v. 50, n. 3, p. 1034-1102, jan. 2021.

KANIEL, Shmuel. Estimates for some computational techniques in linear algebra. **Mathematics Of Computation**, [S.L.], v. 20, n. 95, p. 369-378, 1966.

KELLEY, C. T. **Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1995.

LANCZOS, C.. Solution of systems of linear equations by minimized iterations. **Journal Of Research Of The National Bureau Of Standards**, [S.L.], v. 49, n. 1, p. 33, jul. 1952.

LEE, S. H.; ZHOU, H.; TCHELEPI, H. A. **An efficient multiscale finite-volume method for multiphase flow in porous media: Adaptive prolongation and restriction operations for pressure and saturation calculation**. Preprint submitted to J. Comp. Phys., 2008.

NGUYEN, Q. K.; SERRA-CAPIZZANO, S.; TABLINO-POSSIO, C.; WADBRO, E. Spectral Analysis of the Finite Element Matrices Approximating 3D Linearly Elastic Structures and Multigrid Proposals. **Mathematical And Computational Applications**, [S.L.], v. 27, n. 5, p. 78, 14 set. 2022.

OPPENHEIM, A. V.; SCHAFER, R. W. **Digital Signal Processing**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1975. ISBN 9780132146357, 0132146355.

PENA, F. S. **Informatizações on-line para a resolução de sistemas de equações lineares pelos métodos: Fatoração QR, S.O.R e Gradientes Conjugados**. 2021. 105 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Votuporanga, 2021.

QI, D.; ZHANG, S.. Major Challenges for Reservoir Upscaling. **Petroleum Science And Technology**, [S.L.], v. 27, n. 17, p. 1985-1992, 12 out. 2009.

SAAD, Y. **Iterative Methods for Sparse Linear Systems**. 2nd ed. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. ISBN 978-0898715347.

SAAD, Y; SCHULTZ, M. H. GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. **Siam Journal On Scientific And Statistical Computing**, [S.L.], v. 7, n. 3, p. 856-869, jul. 1986.

SAAD, Y.; VAN DER VORST, H. A. Iterative solution of linear systems in the 20th century. **Journal Of Computational And Applied Mathematics**, [S.L.], v. 123, n. 1-2, p. 1-33, nov. 2000.

SANTOS, C. M.; BRAGA, A. L. C.; SANTOS, J. M.; OLIVEIRA, M. B.; MADUREIRA, M. T. A indústria do petróleo e energia frente aos novos desafios de se inserir nos modelos da transição energética. **Research, Society And Development**, [S.L.], v. 11, n. 9, p. 1-12, 14 jul. 2022.

SOUZA, A. C. R.. **Conservative multiscale strategies for multiphase flow on highly heterogeneous petroleum reservoirs using fully unstructured grids**. 2022. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2022.

SOUZA, A. C. R.; BARBOSA, L. M. C.; CONTRERAS, F. R. L.; LYRA, P. R. M.; CARVALHO, D. K. E. A Multiscale Control Volume framework using the Multiscale Restriction Smooth Basis and a non-orthodox Multi-Point Flux Approximation for the simulation of two-phase flows on truly unstructured grids. **Journal Of Petroleum Science And Engineering**, [S.L.], v. 188, p. 106851, maio 2020.

VAN DER VORST, H. A. **Iterative Krylov Methods for Large Linear Systems**. Cambridge University Press, 2003.

VERÍSSIMO, Michele Polline. Exportações de petróleo e a hipótese da Maldição dos Recursos Naturais no Brasil. **Revista Brasileira de Inovação**, [S.L.], v. 18, n. 1, p. 63-88, Campinas-SP 2019.

WANG, Y. **Algebraic Multiscale Solver for Flow Problems in Heterogeneous Porous Media**. 2015. 127 f. Tese (Doutorado) - Doctor of Philosophy, Department of Energy Resources Engineering, Stanford University, Stanford, 2015.

XIAOQUAN, Yang; CHENG, Jian; LUO, Hong; ZHAO, Qijun. Robust Implicit Direct Discontinuous Galerkin Method for Simulating the Compressible Turbulent Flows. **Aiaa Journal**, [S.L.], v. 57, n. 3, p. 1113-1132, mar. 2019.

YE, C.; FU, S.; CHUNG, E. T.; HUANG, J. An efficient multiscale multigrid preconditioner for Darcy flow in high-contrast media. **ArXivLabs**, 2024.

YOUNG, D. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. **Transactions of The American Mathematical Society**, v. 76, n. 1, p. 92-111, 1954.

YE, C.; FU, S.; CHUNG, E. T.; HUANG, J. An efficient multiscale multigrid preconditioner for Darcy flow in high-contrast media. **arXiv**, [S.L.], v. 19342, n. 2403, p. 1-27, 2024.

YOUNG, D. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. **Transactions Of The American Mathematical Society**, [S.L.], v. 76, n. 1, p. 92-111, 1954.

ZHANG, Jian; DENG, Liang; LI, Ruitian; LI, Ming; LIU, Jie; DAI, Zhe. Achieving high performance and portable parallel GMRES algorithm for compressible flow simulations on unstructured grids. **The Journal Of Supercomputing**, [S.L.], v. 79, n. 17, p. 20116-20140, 9 jun. 2023.

ZHOU, H. **Algebraic Multiscale Finite-Volume for reservoir simulation**. Ph.D. Thesis, Stanford University, 2010.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITH, D. **The finite element method: its basis and fundamentals**. 6. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005.