



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
NÚCLEO DE FORMAÇÃO DOCENTE
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA

DÉRIC VINÍCIUS DOS SANTOS

ESTRUTURAS DE FUNÇÃO EXPONENCIAL:
um mapeamento a partir da Teoria dos Campos Conceituais

Caruaru

2025

DÉRIC VINÍCIUS DOS SANTOS

**ESTRUTURAS DE FUNÇÃO EXPONENCIAL:
um mapeamento a partir da Teoria dos Campos Conceituais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira

Coorientador: Prof. Dr. César Thiago José da Silva

Caruaru

2025

.Catalogação de Publicação na Fonte. UFPE - Biblioteca Central

Santos, Deric Vinicius dos.

Estruturas de função exponencial: um mapeamento a partir da Teoria dos Campos Conceituais / Deric Vinicius dos Santos. - Recife, 2025.

114f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, Centro Acadêmico do Agreste, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2025.

Orientação: Verônica Gitirana Gomes Ferreira.

Coorientação: César Thiago José da Silva.

Inclui referências.

1. Situação; 2. Vergnaud; 3. Invariante; 4. Conceito; 5. Representação. I. Ferreira, Verônica Gitirana Gomes. II. Silva, César Thiago José da. III. Título.

UFPE-Biblioteca Central

Déric Vinícius dos Santos

**ESTRUTURAS DE FUNÇÃO EXPONENCIAL:
um mapeamento a partir da Teoria dos Campos Conceituais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Educação em Ciências e matemática.

Aprovado em: 15/04/2025

BANCA EXAMINADORA

Profª. Dra. Verônica Gitirana Gomes Ferreira (Orientadora e Presidente)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. César Thiago José da Silva (Coorientador)
Universidade Federal de Pernambuco

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes (Examinador Interno)
Universidade Federal de Pernambuco

Profª. Dra. Clélia Maria Ignatius Nogueira (Examinadora Externa)
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Universidade Estadual do Paraná

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, provedor de todas as coisas, por toda sabedoria, discernimento e força que me proporcionou durante toda minha vida, sobretudo durante o curso de mestrado.

À minha família, por todo apoio e incentivo dados durante essa etapa de minha vida, em especial a minha noiva **Jéssica Nívia**, ao meu primo, **Petterson Rocha**, irmão de todas às horas, a minha irmã, **Fábia Beatriz** e a minha mãe, **Ana Maria**, por sempre me mostrarem que consigo mais, que a vida por mais que seja dura pode também ser feliz, a vocês que foram, durante esses anos, meu pilar emocional, meu muito obrigado!

Agradeço à minha orientadora, Prof. Dra. **Verônica Gitirana**, por estar comigo desde minha graduação até aqui e por ter abraçado a ideia e construído junto comigo esse tão sonhado trabalho. Muito obrigado por mostrar que a Universidade pública é um espaço de todos, inclusive meu. Obrigado por todas as orientações, sugestões, conselhos e parcerias estabelecidas durante os últimos anos, a senhora me ensinou não só como ser um pesquisador melhor, mas também um professor e um ser humano melhor, por isso, serei eternamente grato por tudo.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Dr. **César Thiago**, por nos ajudar na construção deste trabalho e por me guiar nas melhores escolhas durante o curso de mestrado. Obrigado por me ouvir, me aconselhar e acima de tudo, obrigado por me ensinar a ser um pesquisador e uma pessoa melhor. Gratidão, **César**.

Agradeço a todos que fazem o grupo **GERE** por toda ajuda e apoio desde minha inscrição no processo seletivo até a conclusão do curso de mestrado. A todos que fazem o **FrameAgrap** pelas contribuições dadas à minha investigação.

Agradeço ao meu eterno professor e amigo, **Luan Danilo**, por ter me mostrado que o mestrado era algo possível, por ter me orientado durante toda a graduação na busca dos melhores caminhos e por chegar até esta etapa comigo, muito obrigado, **Luan**.

Ao meu amigo de sempre, e companheiro de pesquisas, **Júlio César**, muito obrigado por dividir sonhos, conquistas e realizações comigo, obrigado por todo incentivo e ajuda prestados durante a construção deste trabalho.

Agradeço aos meus professores por mostrarem que apesar dos desafios à docência e a pesquisa podem ocorrer de forma leve e prazerosa. Em especial, agradeço às professoras Dra. **Kátia Calligaris** e Dra. **Tânia Bazante** e aos professores Dr. **José Ivanildo**, Dr. **Marcus Bessa** e Dr. **Marcos Barros**.

Agradeço aos meus colegas de turma por todo apoio e parceria durante esse período, em especial à **Mateus Maciel, Davi Nascimento, Mikaelly Andrade, Nikolas Nascimento e Marcella Senna.**

Agradeço à Profª. Dra. **Clélia Ignatius** e ao Prof Dr. **Marcus Bessa**, por terem aceitado compor minha banca de qualificação e por todas as sugestões e orientações dadas.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, **CAPES**, pelo financiamento estudantil.

Por fim, agradeço a todos que me ajudaram chegar até aqui, seja de forma direta ou indireta, e que não foram citados, gratidão.

RESUMO

Este trabalho se situa no tema da classificação para as situações de função exponencial propostas no Ensino Médio brasileiro. Esta investigação parte da ideia defendida por Vergnaud, que para a aprendizagem de um campo conceitual o estudante precisa enfrentar situações variadas com o conceito assumindo diferentes significados. O ponto de partida foi o nosso trabalho de conclusão de curso, Santos (2022), no qual buscamos uma classificação para as situações de função exponencial presentes em um livro do primeiro ano do Ensino Médio, com base na Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud. Nesta dissertação, objetiva-se ampliar as classes de situações encontradas, no intuito de expandir não só o número de classes, mas entender e mapear, com maior profundidade, os diferentes significados assumidos pela função exponencial, bem como possíveis invariantes e representações envolvidas. Metodologicamente, selecionamos três livros didáticos, aprovados no PNLD-2021 que apresentam situações contextualizadas de função exponencial. Esta escolha nos garante partir de situações realmente utilizadas no Ensino Médio brasileiro. Após a identificação de todas as situações relativas à função exponencial, as contextualizadas foram analisadas uma a uma. Com relação às análises, elas foram feitas com base em cinco critérios criados embasados na Teoria dos Campos Conceituais: estrutura do problema, significado da relação, elementos desconhecidos e elementos dados no problema. Além disso, incluímos a identificação do contexto do problema. Essa investigação mostrou que os livros didáticos possuem cerca de 80% de situações compostas, nas quais a exponencial é apenas parte de uma função maior, que essas composições acarretam em variações nos invariantes e ainda, que situações de função exponencial possuem cinco elementos que são característicos, sendo eles: I-A taxa multiplicativa, II-A imagem do zero, III-A imagem de valores intermediários, IV-A imagem de um valor genérico ou lei de formação e V-O valor do domínio de imagens intermediárias, esses elementos aparecem nas situações por meio de variadas combinações, seja como elementos pedidos ou como elementos dados.

Palavras-chave: Situação; Vergnaud; Invariante; Conceito; Representação.

ABSTRACT

This study focuses on classifying exponential function situations proposed in Brazilian high schools. This research is based on Vergnaud's idea about learning a conceptual field. Students must face varied situations with the concept assuming different meanings. The starting point was our undergraduate essay, Santos (2022), in which we sought a classification for the exponential function situations present in a first-year high school textbook, based on Vergnaud's Theory of Conceptual Fields. This dissertation aims to expand the classes of situations found in order to expand not only the number of classes but also to understand and map, in greater depth, the different meanings assumed by the exponential function, as well as possible invariants and representations involved. Methodologically, we selected three textbooks, approved by PNLD-2021, that present contextualized exponential function situations. This choice ensures that we start from situations used in Brazilian high schools. After identifying all situations related to the exponential function, the contextualized ones were analyzed individually. The analyses were based on five criteria created based on the Theory of Conceptual Fields: problem structure, meaning of the relationship, unknown elements and elements given in the problem. In addition, we included the identification of the context of the problem. Our investigation showed that textbooks have about 80% of compound situations in which the exponential is only part of a composition of functions. These compositions result in variations in the invariants and exponential function situations have five characteristic elements, namely: I-The multiplicative rate, II-The image of zero, III-The image of intermediate values, IV-The image of a generic value or formation law and V-The value of the domain of intermediate images, these elements appear in the situations through various combinations, either as requested elements or as given elements.

Keywords: Situation; Vergnaud; Invariant; Concept; Representation.

Lista de Figuras

Figura 1-	Problema proposto 34	21
Figura 2-	Tabela de resolução da Questão 34	22
Figura 3-	Problema posposto 36	23
Figura 4-	Tabela de resolução da Questão 34	23
Figura 5-	Problema teste 34	24
Figura 6-	Tabela de resolução do problema proposto 36.....	25
Figura 7-	Problema 30 da seção testes.....	26
Figura 8-	Tabela de resolução do problema 30	27
Figura 9-	Introdução à equação exponencial.....	28
Figura 10-	Diagrama 1 da função	44
Figura 11-	Diagrama 2 da função	45
Figura 12-	Composição de função	48
Figura 13-	Lista dos livros aprovados no PNLD do ano de 2021	59
Figura 14-	Situação 3 LD A.....	68
Figura 15-	Diagrama da função	69
Figura 16-	Situação 35 LD C	74
Figura 17-	Diagrama para a situação 35 LD C	75
Figura 18-	Reescrita da situação 35	76
Figura 19-	Situação 50 LD C.....	77
Figura 20-	Situação 7 LD B	77
Figura 21-	Situação 1, LD C	80
Figura 22-	Diagrama para situação 1 do LD C.....	81

Figura 23-	Diagrama 2 para situação 1 do LD C	82
Figura 24-	Situação 34 LD B	83
Figura 25-	Diagrama de solução situação 34	84
Figura 26-	Triângulo de Sierpinski	86
Figura 27-	Situação 2 LD C	88
Figura 28-	Situação 21 LD A.....	90
Figura 29-	Reescrita da situação 21, LD A.....	91
Figura 30-	Situação 55, LD A.....	92
Figura 31-	Situação 33 LD A.....	94
Figura 32-	Diagrama para a primeira parte da função	97
Figura 33-	Diagrama para a segunda parte da função	98
Figura 34-	Diagrama para a terceira parte da função.....	98
Figura 35-	Diagrama geral-quarta parte da função.....	99

Lista de Quadros

Quadro 1-	Classificação das situações de função exponencial	20
Quadro 2-	CrITÉrios de inclusão e exclusão.....	30
Quadro 3-	Organizao das pesquisas.....	32
Quadro 4-	Dimensões analisadas.....	57
Quadro 5-	Quantificao de situações por LD.....	59
Quadro 6-	Primeira Análise LD A.....	60
Quadro 7-	Contextos das situações LD A.....	62
Quadro 8-	Representações usadas nos enunciados do LD A.....	62
Quadro 9-	Classificao das situações LD B.....	63
Quadro 10-	Contextos das situações LD B.....	64
Quadro 11-	Representações usadas nos enunciados do LD B.....	64
Quadro 12-	Classificao das situações LD C.....	65
Quadro 13-	Contextos das situações LD C.....	66
Quadro 14-	Representações usadas nos enunciados do LD C.....	66
Quadro 15-	Levantamento de situações compostas.....	70
Quadro 16-	Significado dos elementos em cada classe	72
Quadro 17-	Combinações entre os elementos dados e solicitados	73

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	8
1.1 Objetivos.....	11
1.1.2 Objetivo geral.....	11
1.1.3 Objetivos específicos.....	11
1.2 Composição da dissertação.....	11
2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	12
2.1 Conceito.....	13
2.2 Situação.....	15
2.3 Invariantes operatórios.....	17
2.4 O Campo Conceitual de função exponencial.....	18
3 REVISÃO DE LITERATURA.....	30
4 FUNÇÕES.....	42
4.1 Abordagens históricas sobre o conceito de função.....	42
4.2 Função no contexto escolar atual.....	43
4.3 Composições de funções.....	47
4.4 Função exponencial: um isomorfismo de grupos.....	48
5 CONSOLIDAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO.....	51
5.1 O livro didático como recurso para sala de aula de matemática.....	53
6 METODOLOGIA.....	56
7 RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	58
7.1 Pré-análise.....	58
7.2 Classificação inicial das situações.....	60
7.2.1 Impactos da composição na função exponencial.....	67
7.2 Características novas encontradas nas situações.....	79
7.2.1 Situações em que os significados são reduzidos.....	89
7.3 Classe de situação - Taxa de Covariação.....	93
8 SÍNTESE DAS ANÁLISES.....	100
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	102
REFERÊNCIAS.....	105

1 INTRODUÇÃO

O estudo sobre funções tem se mostrado de grande importância para toda sociedade, tendo em vista que as pessoas lidam diariamente com situações que pedem, mesmo que de forma intuitiva, o conhecimento. As funções nos ajudam a relacionar grandezas de formas diversas com o uso de diferentes tipos de funções. Em nossa pesquisa resolvemos investigar um tipo: a função exponencial.

Nossa investigação faz parte de um estudo maior, ainda em andamento, intitulado FrameAGAP - *Framework*¹ para Acompanhamento e Gestão da Aprendizagem Personalizada. No FrameAGAP busca-se desenvolver um modelo de conhecimento matemático, baseado na TCC, que permita acompanhar o processo de desenvolvimento do conhecimento do estudante, com auxílio computacional. O FrameAGAP vem buscando desenvolver um mapeamento de situações, significados, representações, habilidades, maturidades exigidas pela situação e os recursos de forma articulada não só com relação à função exponencial, como também a outros Campos Conceituais (Lima; Gitirana, 2021). O intuito é proporcionar ao professor uma avaliação diagnóstica e formativa de seus estudantes. E a partir dela, ter como *feedback* do ambiente, sugestões de recursos e situações que possam ajudar na melhoria dos processos de aprendizagem de cada aluno, de acordo com as suas necessidades.

Essa investigação parte do nosso trabalho de conclusão de curso, Santos (2022), com ele conseguimos mapear alguns significados assumidos pela função exponencial nas situações presentes em um livro didático do primeiro ano do Ensino Médio; que serviram para o estabelecimento de classes de situações. No entanto, apesar de nossos esforços, não conseguimos fechar uma estrutura de classificação para todos os tipos de situações de função exponencial enfrentadas por estudantes brasileiros durante o Ensino Médio. Neste sentido, propomos aqui um aprofundamento nessa estrutura de classificação, que já foi anunciada em Santos (2022).

A estrutura de classificação se torna importante para que seja possível compreender os significados existentes para a função exponencial, proporcionando uma maior clareza no que se refere aos processos de ensino, aprendizagem e avaliação referentes ao Campo Conceitual. Uma estrutura de classificação para as situações que atribuem significado a um Campo

¹ O *Framework* é um método que busca a resolução de problemas com o auxílio de tecnologia. Disponível em: <https://www.pontotel.com.br/framework/#:~:text=Acompanhe%20o%20artigo!-,O%20que%20%C3%A9%20um%20framework%3Fresultados%20atrav%C3%A9s%20de%20abordagens%20prontas>, acessado em 23/02/2024 às 10:45.

Conceitual proporciona ao professor, autor de sua prática e de livros didáticos, uma melhor escolha de situações a serem propostas aos estudantes, tanto no sentido de favorecer o seu desenvolvimento, como para avaliá-lo.

Para Vergnaud (2013) professores são mediadores da aprendizagem. Neste sentido, a primeira ação que deve ser feita pelos professores, no intuito de potencializar a aprendizagem, é a seleção de situações a serem enfrentadas pelos seus estudantes. Porém, para fazer a seleção de situações, o professor precisa conhecer bem o Campo Conceitual em estudo, assim como as necessidades e limitações de seus estudantes, tendo em vista que “[...] esta escolha não pode ser adequada quando o professor não tem uma visão e compreensão razoáveis do Campo Conceitual envolvido” (Vergnaud, 2013, p. 13 trad. nossa).

Para Vergnaud, a mediação feita pelos professores não para na seleção de situações, isso porque,

[...] é preciso esclarecer objetivos e metas da atividade em questão, ajudar os alunos a antecipar e pensar, levar para si um pouco da atividade a fim de auxiliar os alunos e reduzir seu grau de incerteza. No entanto, o professor deve orientar os alunos na identificação de relações relevantes, bem como na elaboração de inferências que lhes permitam realizar a atividade (Vergnaud, 2013, p. 19 trad. nossa).

Neste sentido, para que o professor possa selecionar situações que potencializam a aprendizagem conceitual de um dado Campo, a exemplo a função exponencial, se faz preciso que ele conheça os diferentes conceitos que se relacionam com o Campo em estudo, os diferentes significados assumidos pelo objeto em estudo, as possíveis representações, e ainda, as diferentes classes de situações e contextos que o conhecimento em estudo pode proporcionar. Para isso, a classificação das situações torna-se indispensável.

Ao se referir à aprendizagem conceitual, Vergnaud (1990) enfatiza que o processo leva tempo e que durante o percurso se faz preciso que o estudante enfrente diferentes situações, que apresentem diferentes significados. Sendo assim, para a compreensão desses significados cabe não só a conclusão do mapeamento das classes de situações, como também um mapeamento das subclasses e, ainda, a identificação dos elementos envolvidos em cada tipo/subtipo de situação sobre as estruturas dos problemas, isso porque é preciso estabelecer o que cada tipo de problema possui de particular.

Na literatura, pouco se tem discutido sobre os diferentes significados da função exponencial, seguindo a TCC. Ao fazermos nosso levantamento bibliográfico notamos que poucos trabalhos associam a função exponencial à Teoria dos Campos Conceituais, isto mostra uma escassez em pesquisas que busquem investigar quais os significados assumidos pela função exponencial ou ainda, como esses significados chegam até à escola.

Dentre seus diversos estudos, Vergnaud mapeou os significados presentes em dois Campos Conceituais muito importantes, o aditivo (Vergnaud, 1982) e o multiplicativo (Vergnaud, 1983). O mapeamento das estruturas presentes nos dois Campos Conceituais, mostrou que os problemas que envolvem as operações matemáticas de adição e multiplicação, e as suas inversas, podem apresentar características diferentes à medida que se altera os seus elementos, os elementos dados e os elementos solicitados em cada situação, isso implica dizer que mesmo que duas situações possuam os mesmos elementos, isto é, os mesmos números, nada garante que possuam os mesmos significados. Isso porque, para resolver as situações, o aluno precisará mobilizar, por vezes, diferentes esquemas (Vergnaud, 1991) com o intuito de resolver a situação ou criar um esquema que o possibilite a resolução.

Sendo assim, na nossa investigação propomos algo semelhante ao que Vergnaud fez com os campos aditivo e multiplicativo, no entanto, nos dispomos a investigar outro Campo Conceitual, o da função exponencial.

Neste sentido, buscamos responder a seguinte questão: *Que tipos de situações dão sentido à função exponencial?* Para isso, buscamos investigar as situações por meio das quais o conceito de função, mais precisamente, função exponencial, vem sendo abordado no Ensino Médio. Para tanto utilizamos como fonte de situações livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD²), utilizados no Brasil. Com a nossa investigação buscamos uma classificação para as situações de funções exponenciais, por isso, pretendemos descrever as classes encontradas, no entanto, não é nosso objetivo principal apresentar um método de classificação.

A escolha de utilizar o livro como documento de nossa pesquisa, se dá pelo fato dele ser um documento da realidade escolar ou ainda, um forte recurso dentro da sala de aula (Carvalho *et al.*, 2010). Sendo assim, tivemos como hipótese que nele fosse possível

² De acordo com o MEC, o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, tais como livros didáticos e outros recursos. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/component/content/article?id=12391:pnld>, acessado em 30/03/2022, às 09:48.

encontrarmos diferentes situações, que realmente são trabalhadas durante o Ensino Médio brasileiro.

1.1 Objetivos

1.1.2 Objetivo geral

Elaborar e validar uma estrutura de classificação para as situações de função exponencial propostas no Ensino Médio.

1.1.3 Objetivos específicos

- I - Identificar subclasses das classes de situações sobre função exponencial já elencadas em Santos (2022);
- II - Expandir as classes de situações a partir das não incluídas em Santos (2022);
- III - Identificar conceitos e propriedades abordadas nas situações classificadas;
- V - Identificar as representações utilizadas nas situações propostas ou resolvidas;
- IV - Discutir os elementos dados e desconhecidos nas situações relativos à função exponencial.

1.2 Composição da dissertação

Organizamos nosso trabalho em nove capítulos, no primeiro é apresentada a introdução, os objetivos e a questão problema; no segundo discutimos a Teoria dos Campos Conceituais, no terceiro trouxemos a revisão de literatura. No quarto capítulo conceituamos o que é uma função exponencial partindo de um breve apanhado histórico, do conceito de função no contexto escolar, da ideia de composição e ainda, do isomorfismo. No quinto capítulo discutimos o livro didático e suas funções perante a sala de aula, no sexto capítulo apresentamos a metodologia, no sétimo os resultados, no oitavo as considerações finais e, por fim, no nono capítulo as referências.

2 TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), criada entre os anos de 1970 e 1980, foi desenvolvida pelo pesquisador francês Gérard Vergnaud (1989), com o objetivo de explicar como crianças e adolescentes adquirem conhecimentos matemáticos.

Vergnaud (1996) propõe que o conhecimento matemático seja ensinado em Campos Conceituais, em que o conhecimento é adquirido à medida que o conceito é construído, ao decorrer do tempo, com o enfrentamento de diferentes situações. Para ele, qualquer conceito é ensinado em campos de conceitos, representações e invariantes durante o enfrentamento das situações. Ele demonstrava que um conceito não existe isoladamente e por isso mesmo, é preciso fazer recortes. Nesse sentido, as classes de situações são unidades de estudos frutíferas capazes de dar sentido aos problemas e às observações feitas em relação à conceitualização (Santana *et al.*, 2015).

Gitirana *et al.* (2013), em texto de divulgação das estruturas aditivas e multiplicativas, corroboram com os resultados de Vergnaud argumentando que o conhecimento conceitual surge a partir da resolução de muitos problemas, fazendo com que um único conceito precise de inúmeras situações para ser construído pelo estudante. Sendo assim, um conceito precisa de diversas situações teóricas e práticas, que apresentem distintos significados, para ser compreendido. Pois, para Vergnaud (2009, p. 6) “[...] o significado de um conceito não vem de uma única situação, mas de uma variedade de situações, e que, reciprocamente, uma situação não pode ser analisada apenas com um conceito, mas sim com vários conceitos, formando sistemas”.

Para Vergnaud um Campo Conceitual é “[...] ao mesmo tempo um conjunto de situações e de conceitos ligados entre si” (2009, p. 6), e neste sentido, seria:

[...] um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, interligados durante o processo de aquisição (Vergnaud, 1982, p. 40, *apud* Santana *et al.*, 2015).

Moreira (2002) ressalta três argumentos principais que levaram Vergnaud ao conceito de Campo Conceitual:

1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre

concepções, entre procedimentos, entre significantes (Vergnaud, 1983, p. 393 trad. Moreira, 2002).

A conceituação se mostra como pilar central para Vergnaud, quando ele se refere ao processo de construção do conhecimento, sendo assim, explicaremos o que seria um conceito para Vergnaud.

2.1 Conceito

Para Vergnaud, um Campo Conceitual é suportado por três conjuntos, **S, I e R**, os quais dão sentido ao conceito. Conforme Moreira (2002, p. 4),

S é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) sobre os quais repousa a operacionalidade do conceito, ou o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, ou o conjunto de invariantes que podem ser reconhecidos e usados pelos sujeitos para analisar e dominar as situações do primeiro conjunto; R é um conjunto de representações simbólicas (linguagem natural, gráficos e diagramas, sentenças formais, etc.) que podem ser usadas para indicar e representar esses invariantes e, conseqüentemente, representar as situações e os procedimentos para lidar com elas.

Moreira (2002) traz que o conjunto das situações é o referente do conceito, o conjunto de invariantes é o significado do conceito, enquanto o conjunto de representações simbólicas é o significante. O autor ressalta, ainda, que para estudar o desenvolvimento e o uso de um conceito, deve-se considerar os três conjuntos simultaneamente. De modo que, (S) representa a realidade e (I e R) representam o que se pode considerar como dois conjuntos integrantes do pensamento, o significado (I) e o significante (R).

No que se refere a construção de um conceito, Vergnaud ressalta que um conceito, por mais simples que seja, precisa de várias situações, problemas e tarefas para ser compreendido. Ressalta, ainda, que uma situação apresenta a ligação entre inúmeros conceitos. Nenhum conceito ou situação podem ser vistos isoladamente e, por isso, é preciso apresentar situações com diversidade em significados para que o conceito seja realmente adquirido (Gitirana *et al.*, 2013).

Segundo Gitirana *et al.* (2013, p. 22), “ao descrever-se e analisar-se os avanços e as conquistas do aluno no seu processo de aprendizagem e desenvolvimento é preciso considerar as duas ferramentas essenciais que, juntas, formam as faces de uma mesma moeda: a competência e a concepção”, ou seja, não se pode falar em aprendizagem sem considerar tais relações.

A competência pode ser entendida, em geral, como “uma forma operatória do conhecimento que permite ao sujeito agir e atingir determinado objetivo, ser bem-sucedido, em uma dada situação” (Sarmuçay; Vergnaud, 2000 trad Gitirana *et al.*, 2013). Já a concepção se refere a capacidade do estudante mobilizar recursos para formular novos caminhos para obtenção de êxito nas situações. Desse modo, a competência é vista na ação do aluno diante da situação, como ao resolver questões.

Por outro lado, segundo Gitirana *et al.* (2013), Vergnaud faz o uso do conceito de esquema para melhor explicar o que seria a competência, para o autor, a competência pode ser entendida como sendo combinações distintas de esquemas. Isso porque, quando o aluno se depara com uma nova situação, ele precisa recombina os seus esquemas a fim de encontrar um novo esquema, que o ajude a resolver aquela dada situação.

Por sua vez, “Vergnaud traz que esquema diz respeito à forma como a pessoa (o aluno) organiza seus invariantes de ação para lidar com uma classe de situações” (Gitirana *et al.*, 2013, p. 23). Reforçando essa ideia, Vergnaud diz que esquema é a organização invariante do comportamento para uma dada classe de situações (Vergnaud, 1996).

Nesse sentido, os esquemas são unidades totalmente dinâmicas que podem ser sempre recombina dos pelo aluno com o intuito de encontrar um novo. Isso acontece porque quando o estudante se depara com uma nova situação, na qual não possui esquemas disponíveis para resolvê-la, ele precisa se desdobrar e encontrar um novo esquema para poder resolver a situação. Nesse sentido, um esquema é “[...] um instrumento não apenas para fazer e ter sucesso, mas também para experimentar o mundo e compreender mais sobre ele” (Vergnaud, 2013, p. 11 trad. nossa).

Para melhor entender a definição de esquema apresentada por Vergnaud, recorreremos a Moreira (2002), em que ele apresenta o que Vergnaud chama de definição analítica de um esquema:

1. metas e antecipações (um esquema se dirige sempre a uma classe de situações nas quais o sujeito pode descobrir uma possível finalidade de sua atividade e, eventualmente, submetas; pode também esperar certos efeitos ou certos eventos);
2. regras de ação do tipo "se ... então" que constituem a parte verdadeiramente geradora do esquema, aquela que permite a geração e a continuidade da sequência de ações do sujeito; são regras de busca de informação e controle dos resultados da ação;
3. invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação) que dirigem o reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação; são os conhecimentos contidos nos esquemas; são eles que constituem a base, implícita ou explícita, que permite obter a informação pertinente e dela inferir a meta a alcançar e as regras de ação adequadas;
4. possibilidades de

inferência (ou raciocínios) que permitem "calcular", "aqui e agora", as regras e antecipações a partir das informações e invariantes operatórios de que dispõe o sujeito, ou seja, toda a atividade implicada nos três outros ingredientes requer cálculos "aqui e imediatamente" em situação (Moreira, 2002, p. 7).

Nesse sentido, os esquemas se referem as classes de situações, que segundo Moreira (2002) Vergnaud distingue entre:

1. classes de situações em que o sujeito dispõe, no seu repertório, em dado momento de seu desenvolvimento e sob certas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
2. classes de situações em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que obriga a um tempo de reflexão e exploração, a hesitações, a tentativas frustradas, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso (Vergnaud, 1993, p. 2 apud Moreira, 2002, p. 7).

A ideia de esquema nos mostra que para que o aluno possa dominar o conceito, por vezes, ele precisará mobilizar e reorganizar o que já sabe, os esquemas que possui, com o intuito de encontrar outros novos esquemas, que o auxilie nas suas estratégias de resolução para que ele, o aluno, possa dominar os conceitos que se relacionam em uma dada situação. Neste sentido, julgamos necessário conceituar o que seria uma situação sobre o olhar da TCC.

2.2 Situação

A ideia de situação, abordada na Teoria dos Campos Conceituais, difere da definição de situação didática, presente na Teoria das Situações Didáticas (TSD)³. Isso porque, para a TCC a ideia de situação está ligada a ideia de problema, por isso, para Vergnaud o conceito de situação pode ser visto partindo da perspectiva psicológica (Vergnaud, 1990 *apud* Moreira, 2002).

Nesse sentido, é necessário oportunizar aos estudantes situações diversas, para que assim, ele possa ampliar seu repertório e domine cada vez mais os diferentes significados que um mesmo conceito pode assumir. Isso porque, como já foi dito anteriormente, uma única situação envolve inúmeros conceitos e um único conceito precisa de inúmeras situações para ser dominado. Além disso, ao se referir às situações, Vergnaud ressalta dois pontos essenciais: variedade e a história.

Vergnaud (1982), ao se referir a ideia de variedade, diz que

³ A TSD foi desenvolvida por Brousseau em 1986, no intuito de investigar a interação entre os indivíduos e o meio. Para o autor, a ideia de situação está ligada à interação do sujeito com um meio antagônico a ele. Sendo assim, a situação seria toda a organização feita pelo professor, incluindo os problemas, o meio, os instrumentos, os recursos e etc.

[...] em cada Campo Conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos estudantes são moldados pelas situações que, progressivamente, vão dominando. Dessa forma, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual (1982, p. 40 *apud* Santana *et al.*, 2015, p. 4).

As ideias de variedade e de história reforçam o fato de que um estudante leva tempo para adquirir um único conceito, e que um campo conceitual é formado pela união de muitos conceitos. Vergnaud afirma que, ao passo que o estudante vai se familiarizando com os conceitos e conseguindo resolver as situações, ele passa a dominar as classes de situações que envolvem aquele dado conceito. Essas classes variam de acordo com o seu grau de complexidade.

Vergnaud reforça, ainda, que para o aluno dominar essas classes de situação ele precisa passar por

[...] situações, palavras, algoritmos e esquemas, símbolos, diagramas e gráficos... e aprenderá, às vezes por descoberta, às vezes por repetição, às vezes representando e simbolizando, às vezes diferenciando, às vezes por redução de diferentes coisas para outras. Isso porque o panorama da aquisição do conhecimento é muito complexo [...] (Vergnaud, 1994, p. 46, trad. Santana *et al.*, 2015).

Sendo assim, nota-se que o processo de transição de uma classe para outra que seja mais complexa, leva tempo. Isto é, para que o aluno possa avançar e conseguir resolver classes de situações diferentes, ele irá passar por uma série de etapas e amadurecimento, para de fato adquirir os conceitos contemplados.

Vejamos aonde chegamos: a ideia de Campo Conceitual nos levou a definição de um campo conceitual, como sendo a união de três conjuntos (referente, significado e significante); a ideia de um conceito, nos levou a ideia de esquema, que como vimos são essenciais para os conceitos. No entanto, como são as situações que dão sentido aos conceitos, chegamos na definição de situação. Por outro lado, a ideia de esquema nos levará à definição de invariantes operatórios, a qual, veremos a seguir.

2.3 Invariantes operatórios

Designam-se pelas expressões "conceito-em-ação" e "teorema-em-ação" os invariantes contidos nos esquemas. Pode-se também designá-los pela expressão mais abrangente "invariantes operatórios" (Vergnaud, 1993, p. 4 *apud* Moreira, 2002, p. 8). “Esquema é a organização da conduta para uma certa classe de situações; teoremas-em-ação e conceitos-em-ação são invariantes operacionais, logo, são componentes essenciais dos esquemas” (Vergnaud, 1998 *apud* Moreira, 2002, p. 8).

Nesse sentido, os conceitos-em-ação não são conceitos científicos, mas sim, conceitos construídos ou observados nas ações dos alunos à medida que eles resolvem situações matemáticas.

Já no que se refere a ideia de teorema-em ação, Nunes *et al.* (2005, p. 47 *apud* Gonçalves, 2008 p. 89) ressalta que “Os teoremas-em-ação constituem o conhecimento matemático que as crianças desenvolvem em suas vidas diárias”, mostrando que tal conhecimento é construído ao passo que o aluno enfrenta as situações. No entanto, esses teoremas, não necessariamente, são teoremas matemáticos, que tenham sua aplicação ampla. Por exemplo, se tomarmos o conceito de multiplicação, ao pensarmos a multiplicação entre dois números naturais⁴, pegando um número qualquer e multiplicando por segundo número, maior que o primeiro, encontramos um terceiro número, também natural, porém maior ou igual que os dois anteriores. Isto é, $2 \times 3 = 6$, $1 \times 3 = 3$, ou ainda, $3 \times 4 = 12$.

Essa observação poderia levar o estudante a pensar que ao multiplicar dois números quaisquer, sempre encontramos um número maior ou igual aos fatores que compõem a multiplicação. Essa proposição é um teorema-em-ação; no entanto, não é um teorema matemático. Isso porque, não é uma verdade para qualquer conjunto numérico, visto que, se considerarmos outro conjunto numérico, a afirmação se torna falsa.

Nesse sentido, Gitirana *et al.* (2013, p. 30) afirmam que

[...] os teoremas-em-ação não são teoremas no sentido convencional do termo, porque a maioria deles não é explícita e muitos não tem validade matemática. Eles estão subjacentes (implícitos) ao comportamento dos alunos, aparecem de modo intuitivo na ação destes. Algumas vezes, seu domínio de validade é considerado verdadeiro apenas para um conjunto de problemas [...].

Moreira (2002), ao se referir aos invariantes operatórios, ressalta que a relação entre os conceitos-em-ação e teorema-em-ação é uma relação dialética. Isto é, existe uma estreita

⁴ Estamos aqui tomando o conjunto dos Números Naturais sem o zero.

sintonia entre o conceito-em-ação e teorema-em-ação, no entanto, eles se apresentam de formas diferentes. Conceitos não podem ter sua veracidade matemática testada, enquanto teoremas em ação, são afirmações passíveis de teste de veracidade.

2.4 O Campo Conceitual de função exponencial

O Campo Conceitual das funções exponenciais já possui alguns trabalhos, ora sem o uso da teoria como os estudos de Harel, Confrey e Nunes (1995), e do nosso trabalho de conclusão de curso (Santos, 2022).

Entre esses estudos (Harel *et al.*, 1995), resolvemos destacar o livro que “**The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics**”, que pode ser traduzido para: “O Desenvolvimento do Raciocínio Multiplicativo na Aprendizagem da Matemática” (Harel *et al.*, 1995), abordaremos especificamente o seu capítulo 8 que surgiu por meio de estudos relativos a função exponencial. Sendo assim, ele apresenta uma discussão sobre as estruturas multiplicativas e sua importância para as funções exponenciais.

As estruturas multiplicativas, assim como as aditivas, foram mapeadas pelo pesquisador Gérard Vergnaud durante a década de 1980. O pesquisador defendeu a ideia que as situações, apesar de tratarem de uma mesma operação matemática, poderiam envolver diferentes significados. Portanto, para um domínio completo, seria necessário o enfrentamento de situações que permitissem ao estudante o contato com uma diversidade de significados.

Harel *et al.* (1995) enfatizam que, por muito tempo, o ensino da multiplicação se fez, apenas, a partir da soma de parcelas repetidas de um mesmo valor, por exemplo, 8×3 , seria $8+8+8$ ou ainda, $3+3+3+3+3+3+3+3$. E, por isso, só após o desenvolvimento completo do campo aditivo é que o aluno seria capaz de entender os conceitos que permeiam o campo multiplicativo. No entanto, eles defendem que as crianças, por motivos sociais e culturais, se deparam com situações referentes às estruturas multiplicativas muito antes do contato na escola, defendem ainda, que reduzir a multiplicação apenas à soma de fatores repetidos seria um erro.

Os autores afirmam que, durante a infância, as crianças são rodeadas de pensamentos multiplicativos (envolvendo não só a multiplicação, como também a divisão). Por exemplo, é comum no dia a dia, as crianças dividirem o lanche, os brinquedos, ou ainda, se depararem com situações de compra, em que precisam saber quantos itens o dinheiro que possuem pode comprar, todas essas situações e tantas outras possuem ideias multiplicativas por trás.

Além disso, por meio da multiplicação os autores discutem um importante conceito para as funções exponenciais, o de taxa multiplicativa. Percebemos que a taxa multiplicativa, presente nas estruturas multiplicativas, também aparece nas estruturas de função exponencial, porém, com significados diferentes. Isso porque, enquanto que nas estruturas multiplicativas⁵ a taxa pode assumir, por exemplo, um significado comparativo ou, ainda, compor uma proporção; nas estruturas exponenciais, a taxa se comporta como uma taxa de variação, a qual se origina da taxa encontrada nas estruturas multiplicativas, o que permite por exemplo, que a função exponencial modele fenômenos de crescimento ou decrescimento cumulativos.

Outro ponto importante, observado pelos autores, é que as situações de função exponencial, em sua maioria, eram modeladas por funções compostas, sendo assim, nas situações a exponencial aparece composta com outra função.

Estas ideias nos deram base para mapear as estruturas de função exponencial, presentes em um LD em nosso trabalho de conclusão de curso, Santos (2022), que teve como título: **“Situações de Função Exponencial: um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais”**. Sendo assim, conseguimos encontrar algumas classes e subclasses de situações para as funções exponenciais embasados na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), levando em consideração problemas propostos, explicações e/ou exercícios contextualizados contidos em um livro didático do primeiro ano do ensino médio, que representassem situações do ponto de vista de Vergnaud (1990).

A pesquisa assumiu que as funções exponenciais possuem aplicações e significados diversos, sendo assim, seu estudo precisa ser feito em um campo de conceitos, conforme corrobora Vergnaud (1990). Para que o aluno domine um campo conceitual, ele precisa enfrentar diversas situações que englobam os diferentes significados (Santos, 2022). Portanto, é preciso investigar quais os tipos de situações, além dos mapeados em Santos (2022), são abordados nos livros didáticos.

Neste sentido, apresentamos de forma breve os resultados encontrados em nosso trabalho de conclusão de curso. O Quadro 1, organiza e quantifica as situações que foram selecionadas no livro didático analisado em classes, subclasses e identifica o contexto de cada problema.

⁵ Para maior aprofundamento no estudo das estruturas multiplicativas, recomendamos a leitura do livro *REPENSANDO MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais* (Gitirana *et al.*, 2014).

Quadro 1 – Classificação das situações de função exponencial

Classe	Subclasse	Contexto	Qtde
Taxa sobre taxa	Valorização/ crescimento ($a > 1$)	Censo populacional	9
		O número e	1
		Introdução à equação exponencial	1
		Área ocupada por algas	1
		Investimento	4
		Concentração de substância	1
		Aplicação de fertilizantes	1
	Depreciação/ Desvalorizaçã o ($0 < a < 1$)	Meia-Vida	9
		Desvalorização financeira	7
		Armazenamento de água na seca	1
		Trabalho industrial	1
		Decrescimento Populacional	1
		Dcaimento da espessura de um creme no café	1
		Esquecimento de informação	1
	Composição de duas taxas sobre taxa	Distância	1
		Jogo	1
Cisão	-----	Reprodução de bactéria	4
		Dobradura de folha	1
Corrente/reprodução	-----	Família (Ascendentes)	1
		Corrente/Pirâmide	1

Fonte: Adaptado de Santos (2022, p. 79).

A classe de situação taxa sobre taxa foi criada para englobar as situações que tratam de acúmulo de taxas. Sendo assim, foi dividida em três subclasses: a taxa sobre taxa com valorização/crescimento, a taxa sobre taxa com desvalorização/depreciação e composição de duas taxas sobre taxa. Tal distinção foi feita devido ao significado, na primeira a taxa é maior que 1, na segunda a taxa é maior que zero e menor que 1 e na terceira há uma combinação das

anteriores, isto é, situações que apresentam tanto uma valorização/crescimento quanto uma desvalorização/depreciação.

A subclasse valorização/crescimento representa situações como a encontrada no problema proposto 34 (Figura 1), no qual uma população de algas cresce de modo que a área coberta por ela aumenta em 75% ao ano.

Figura 1 - Problema proposto 34

34. Em uma região litorânea, a população de uma espécie de algas tem crescido de modo que a área da superfície coberta por elas aumenta 75% a cada ano, em relação à área coberta no ano anterior. Atualmente, a área da superfície coberta pelas algas é de, aproximadamente, 4000 m^2 . Suponha que esse crescimento seja mantido.



a) Faça uma tabela para representar a área coberta pelas algas daqui a um, dois, três, quatro e cinco anos, contados a partir desta data.

b) Qual é a lei da função que representa a área (y), em m^2 , que a população de algas ocupará daqui a x anos?

c) Esboce o gráfico da função obtida no item b).

Fonte: Iezzi *et al.* (2022, p. 203).

Na situação presente no problema 34 é apresentada uma espécie de alga, que ocupa inicialmente uma área de 4000 m^2 e aumenta sua população em 75% a cada ano. No item a do problema é pedido que se construa uma tabela com a área ocupada pela população de algas após um, dois, três, quatro e cinco anos. No item b, é pedida a lei de formação da função que modela o crescimento e no item c, o gráfico. Não exploraremos o que se pede no item c, tendo em vista que se trata de uma nova representação e não um novo significado para a função.

Com o intuito de dar suporte às nossas discussões, construímos a tabela solicitada no item a que se encontra na Figura 2.

Figura 2- Tabela de resolução da Questão 34

Temp (em anos)	Área coberta (m ²)	
x	h(x)	Dh
0	4000	
1	$4000 \times 0,75 + 4000 = 4000 \times 1,75$	75% a mais
2	$(4000 \times 1,75) \times 0,75 + (4000 \times 1,75) = 4000 \times (1,75)^2$	75% a mais
3	$(4000 \times 1,75)^2 \times 0,75 + (4000 \times 1,75)^2 = 4000 \times (1,75)^3$	75% a mais
4	$(4000 \times 1,75)^3 \times 0,75 + (4000 \times 1,75)^3 = 4000 \times (1,75)^4$	75% a mais
5	$(4000 \times 1,75)^4 \times 0,75 + (4000 \times 1,75)^4 = 4000 \times (1,75)^5$	75% a mais

Fonte: Santos (2022, p. 47).

Na Figura 2, destaca-se que a cada ano a população de algas cresce em 75%, algo ressaltado na terceira coluna, que explicita a razão entre dois valores da área, quando se adiciona uma unidade no domínio. No problema, a referência para esse crescimento é a população anterior, já que cada nova planta ou bulbo torna-se uma reprodutora. Isto é, algo iterativo, que é representado por uma taxa composta (taxa sobre taxa), caracterizando um crescimento exponencial. Nota-se que a taxa 75% é transformada em 1,75, passando a ser base da exponencial. Sendo assim, a construção da tabela permite a identificação dos valores de cada linha, possibilitando ao estudante a observação da repetição do valor 1,75 na obtenção do próximo elemento, que ao final torna evidente a lei de formação, que seria $f(x) = 4000 \times 1,75^x$, onde x seria medido em anos.

A subclasse de depreciação/desvalorização pode ser representada por problemas como o problema proposto 36 (Figura 3), no qual um conjunto de sofás tem o seu preço desvalorizado em 10% a cada ano após a compra.

Figura 3 - Problema posposto 36

36. Um conjunto de sofás foi comprado por R\$ 2 000,00. Com o tempo, por descuido do comprador, o sol foi queimando o tecido do sofá, que perdeu a cor original. Um comerciante do ramo informou ao comprador que em uma situação desse tipo, a cada ano o sofá perde 10% do valor que tinha no ano anterior.

a) Faça uma tabela para representar o valor do sofá depois de 1, 2, 3 e 4 anos da data de sua aquisição.

b) Sabendo que o comprador se informou com o comerciante 7 anos depois da compra, que valor o sofá teria nesta data, segundo o comerciante?

c) Qual é a lei da função que relaciona o valor (y), em reais, do conjunto de sofás e o tempo t, expresso em anos após a sua aquisição?



Fonte: Iezzi *et al.* (2022, p. 203).

Na situação presente no problema proposto 36 é pedido, no item a que se construa uma tabela com os valores do conjunto de sofá após 1, 2, 3 e 4 anos após a sua compra. No item b, pede-se que se descubra quanto valerá o conjunto de sofás após 7 anos de sua compra e, por fim, o item c pede a lei de formação da função, levando em consideração o valor de compra do conjunto de sofás. Com o intuito de melhorar nossas discussões construímos a tabela solicitada no item a (Figura 4) .

Figura 4 - Tabela de resolução do problema proposto 36

Temp (em anos)	Valor (reais)	Dh
x	h(x)	
0	2000	
1	$2000 - 2000 \times 0,1 = 2000 \times 0,9$	10 % a menos
2	$(2000 \times 0,9) - (2000 \times 0,9) \times 0,1 = 2000 \times (0,9)^2$	10 % a menos
3	$2000 \times (0,9)^2 - 2000 \times (0,9)^2 \times 0,1 = 2000 \times (0,9)^3$	10 % a menos
4	$2000 \times (0,9)^3 - 2000 \times (0,9)^3 \times 0,1 = 2000 \times (0,9)^4$	10 % a menos

Fonte: Adaptado de Santos (2022, p. 54).

Na Figura 4, é apresentada a desvalorização no valor inicial do conjunto de sofás, que é ressaltado na terceira coluna da tabela. Nesse sentido, cabe salientar que a desvalorização não ocorre de forma linear, isto é, com base apenas no valor inicial do conjunto de sofás e uma razão fixa. Ela acontece sempre com base no valor anterior, como é mostrado na segunda coluna da tabela. Sendo assim, essa desvalorização se caracteriza como uma desvalorização composta ou acumulada. Algo interessante é que ao desvalorizar-se 10%, o conjunto de sofás passará a valer 90% do que valia ou 0,9, se calcularmos a porcentagem.

Neste sentido, o 0,9 passa a ser a base de nossa exponencial como mencionado na segunda coluna da tabela da Figura 6. O modelo da função é determinado por $f(x) = 2000 \times 0,9^x$, onde x seria o tempo expresso em anos. Assim, para determinar o valor após 7 anos basta substituir x por 7, encontrando um valor aproximado de 957 reais.

A subclasse de situações de composição de duas taxas sobre taxa (taxa composta) com proporcionalidade simples pode ser representada pelo problema 34 da seção “teste” da obra analisada no trabalho de Santos (2022) (Figura 5). O problema apresenta a situação de um jogo pedagógico no qual inicialmente o aluno recebe 256 pontos e jogará 8 partidas, cada qual consiste em um problema a ser resolvido pelo aluno, que em caso de acerto, recebe 50% dos pontos que possuía e em caso de erro perde 50% dos pontos que possuía antes do erro. Além disso, ao final das 8 rodadas, o aluno deverá devolver os 256 pontos que ganhou inicialmente, sendo assim, sua pontuação seria os pontos restantes.

Figura 5 - Problema teste 34

- 34.** (Aman-RJ) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:
- Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
 - Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
 - Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se “lucrou” ou “ficou devendo”.
- O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de
- a) 6 acertos e 2 erros.
 - b) 5 acertos e 3 erros.
 - c) 4 acertos e 4 erros.
 - d) 3 acertos e 5 erros.
 - e) 2 acertos e 6 erros.

Fonte: Iezzi *et al.* (2022, p. 223).

Com o intuito de melhorar a compreensão, resolvemos trazer na Figura 6 uma Tabela que nos dará suporte para discutir a situação.

Figura 6 -Tabela com a resolução parcial do problema teste 34

Temp (em partidas)	Ganho	Perca	
x	$f(n)$	$g(x)$	
0	256	256	
1	$256 + 256 \times \frac{1}{2} = 256 (3/2)^1$		50% a mais
2		$256 (3/2)^1 - 256 (3/2)^1 (1/2)^1 = 256 (3/2)^1 (1/2)^1$	50% a menos
3	$256 (3/2)^1 (1/2)^1 + 256 (3/2)^1 (1/2)^1 = 256 (3/2)^1 (1/2)^1 (1 + 1/2)^1 = 256 (3/2)^2 (1/2)^1$		50% a mais
4		$256 (3/2)^2 (1/2)^1 - 256 (3/2)^2 (1/2)^1 (1/2)^1 = 256 (3/2)^2 (1/2)^1 (1/2)^1 = 256 (3/2)^2 (1/2)^2$	50% a menos
5	$256 (3/2)^2 (1/2)^2 + 256 (3/2)^2 (1/2)^2 = 256 (3/2)^2 (1/2)^2 (1 + 1/2)^1 = 256 (3/2)^3 (1/2)^2$		50% a mais

Fonte: Santos (2022, p. 57).

Nesta situação, os acertos são associados à taxa de valorização/crescimento, pois há em caso de acerto um ganho de 50% na pontuação, com relação a pontuação anterior. Em contrapartida, os erros são associados à taxa de depreciação/desvalorização, porque, em caso de erro, há uma perda de 50% na pontuação, calculada sempre com relação à pontuação anterior, como ressalta a quarta coluna. A tabela exemplifica parte de uma combinação possível, das muitas existentes, para calcular a pontuação final em função dos acertos e erros, em que ambos podem ser calculados por meio de uma função exponencial.

Pode-se notar, que a pontuação em função dos acertos pode ser expressa por $f(x) = (3/2)^x$ e a pontuação em função dos erros por $g(x) = (1/2)^{8-x}$. A pontuação final, em função da quantidade de acertos, pode ser calculada juntando as duas funções, que pode ser expressa por $h(x) = (3/2)^x (1/2)^{8-x}$, onde x representa o número de acertos. Por outro lado, é importante observar que a ordem em que ocorrem os acertos e os erros não importa, porque o que irá compor a pontuação final será a quantidade de erros e acertos cometidos e não a ordem em que ocorrem. Assim, por apresentar ambas as classificações de taxa sobre taxa com

proporção simples (valorização - taxa maior que 1 - e, depreciação - taxa entre 0 e 1), apresentadas até aqui, esse tipo de situação pode ser classificado como uma situação mista, que envolve a composição de duas taxas sobre taxa.

A classe de situações de cisão foi criada para englobar as situações que tratam da reprodução de bactérias e alguns microrganismos, em que a reprodução se dá partindo da cisão, neste tipo de reprodução cada indivíduo se divide e torna-se dois. A classe de cisão pode ser representada pelo problema 30, apresentado na Figura 7. O problema contém uma situação que fala sobre a reprodução da *Salmonella*, bactéria encontrada em alimentos que pode causar diversas doenças ou até a morte.

Figura 7 - Problema 30 da seção testes

30. (Acafe-SC) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a *Salmonella*. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados, ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3 200 indivíduos é:

- a) 1 h e 35 min.
- b) 1 h e 40 min.
- c) 1 h e 50 min.
- d) 1 h e 55 min.

Fonte: Iezzi *et al.* (2022, p. 222).

Na situação apresentada anteriormente é dito que a *Salmonella* se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos e o problema pede que seja determinado o tempo para que uma população, de inicialmente 100 microrganismos, atinja a marca de 3200. A Figura 8 apresenta um possível esquema de resolução para a situação.

Figura 8 - Tabela de resolução do problema 30

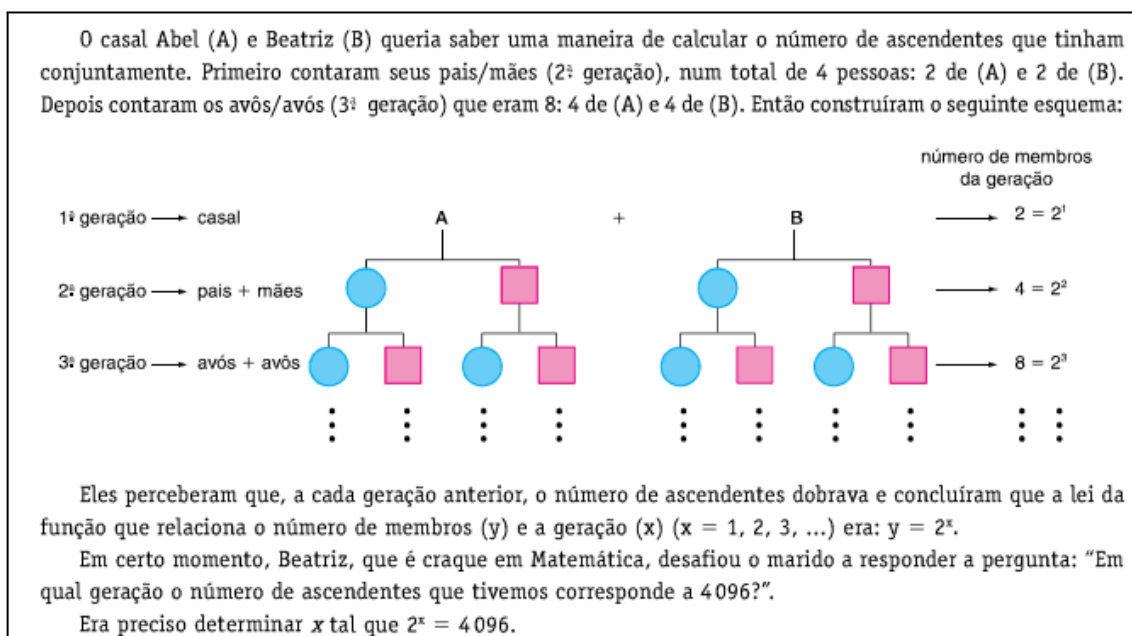
Temp (em	Quantidade de microrganismos $h(x)$	Ciclos de reprodução
x		
0	100	
20	$100 \times 2 = 200$	1°
40	$(100 \times 2) \times 2 = 100 \times (2)^2 = 400$	2°
60	$100 \times (2)^3 = 800$	3°
80	$100 \times (2)^4 = 1600$	4°
100	$100 \times (2)^5 = 3200$	5°

Fonte: Santos (2022, p. 61).

Na Figura 8, podemos observar que a população de bactérias é sempre o dobro do que era antes, a partir do ciclo de reprodução, o que garante que a população dobre a cada 20 minutos é a forma na qual esse microrganismo se reproduz (por cisão). Isto é, na reprodução cada microrganismo se divide em dois, e cada um desses dois se dividirão em outros dois e assim por diante. Sendo assim, os microrganismos não geram dois novos a cada reprodução, eles se dividem em dois. Essa divisão além de garantir que a população dobre a cada reprodução, caracteriza o crescimento exponencial. Além disso, garante, ainda, que a situação não se enquadre na primeira classe de situações por apresentar um significado diferente.

A classe de situações de corrente/reprodução surgiu após analisarmos um problema que traz uma espécie de árvore genealógica, na qual um casal apresenta os seus ascendentes (familiares em linha reta: pais, avós, bisavós, tataravós e etc); como pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 - Introdução à equação exponencial



Fonte: Iezzi *et al.* (2022, p. 205).

A representação do problema lista e quantifica os ascendentes do casal Abel (A) e Beatriz (B), assim como o número total de familiares de cada geração⁶. Na primeira geração existia apenas o casal, ou seja, 2 membros. Na segunda geração, existiam os pais e as mães do casal, ou seja, 4 membros. Na terceira geração, seus avós e suas avós, totalizando 8 membros. Assim, a quantidade de membros de uma dada geração é dada pelo modelo $y = 2^x$, como mencionado na situação.

Além disso, podemos notar que esta classe se diferencia muito da classe de cisão, devido a forma de reprodução. Na cisão, cada grandeza se divide em duas iguais a ela, já aqui não há esse tipo de divisão.

Essa situação evidencia o processo inverso da corrente, no entanto com o mesmo significado. Na corrente cada indivíduo atribui a outros as mesmas características que possui, na situação ocorre o oposto, cada indivíduo é gerado por outros dois com as mesmas características. Portanto, o significado da relação é o mesmo tanto na corrente, quanto neste tipo de reprodução, por isso, recebem a mesma classificação.

No nosso trabalho, encontramos, ainda, outras situações que apesar do LD reduzir a taxa sobre taxa, acreditamos que envolvam outros significados. No entanto, devido ao curto intervalo de tempo, não conseguimos encontrar uma classificação para elas, porque as

⁶ Essa modelagem não pode ser generalizada para toda e qualquer família, isso porque, se houvesse um casamento entre primos, por exemplo, a regra seria quebrada.

situações envolviam contextos e conceitos de outras áreas do conhecimento, a exemplo da Física. Neste sentido, em nossa dissertação propomos um aprofundamento da estrutura já anunciada em Santos (2022), no sentido de ampliar a classificação e detalhar as classes já encontradas.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Com o intuito de encontrarmos o que já foi publicado em relação ao nosso tema de pesquisa, como também nos aprofundarmos nos pressupostos teóricos, resolvemos fazer um levantamento bibliográfico. Inicialmente o levantamento foi feito na plataforma ERIC⁷, no dia 08/11/2023, escolhemos a plataforma como local de busca, por ela reunir diversas pesquisas sobre educação. Na plataforma, buscamos os termos “exponential function” e “conceptual field theory” (remetendo a funções exponenciais e Teoria dos Campos Conceituais). A busca foi feita sem filtragem de tempo, mas mesmo assim não foi encontrada nenhuma publicação que relacionasse os dois temas. Com isso, resolvemos fazer uma nova busca, ainda na plataforma ERIC, com os termos “exponential function” e “conceptual field” (remetendo a funções exponencial e campo conceitual), novamente sem limitação de tempo.

Da busca adveio um único resultado, um livro, que possui como título: “**The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics**”, que pode ser traduzido para: “O Desenvolvimento do Raciocínio Multiplicativo na Aprendizagem da Matemática” (Harel *et al.*, 1995). Do livro discutiremos o capítulo 8, que tem como título: “**Divisão, similaridade e taxa de variação: uma nova abordagem para divisão e função exponenciais**”.

No capítulo se discute sobre a divisão e a multiplicação e suas concepções ao longo do tempo. Segundo o texto, de início a multiplicação era vista como a adição repetitiva, já a divisão, como sua inversa. E, por isso, na escola as situações que envolviam a divisão e/ou a multiplicação deveriam ser vistas após o domínio da adição e da subtração. No entanto, os autores afirmam que a ideia de dividir é desenvolvida por crianças ainda muito cedo, por vezes, antes mesmo do domínio completo da adição e de sua inversa, por motivos sociais e culturais.

Entre tantos avanços relativos a estruturas multiplicativas (que envolvem tanto as situações de multiplicação quanto as de divisão), destacamos a ideia de taxa multiplicativa, apresentada pelos autores. Para eles, a taxa multiplicativa explica o crescimento ou decrescimento acelerado de uma constante, e neste sentido estaria diretamente ligada a função exponencial, uma vez que ela modela fenômenos com estas características.

Ainda sobre a função exponencial, o trabalho aponta para vasta quantidade de aplicações que ela pode ter e afirmam que a função serve para modelar fenômenos sociais e

⁷ A plataforma reúne uma ampla variedade de periódicos relacionados à educação. Disponível em <https://eric.ed.gov/?journals> e acessado em 11/08/2023.

científicos muito importantes para formação cidadã, a exemplo o crescimento bacteriano, a proliferação de vírus, o aquecimento global e etc. sendo assim, seu estudo se torna de grande necessidade para compreensão da sociedade e da natureza.

Ao apontar para as diferentes aplicações que a função exponencial pode ter, consideramos que os autores, mesmo que não propositalmente, apontam para os possíveis significados que possam ser assumidos pela função exponencial. Neste sentido, acreditamos que o trabalho aponta para a possibilidade da função assumir diferentes significados.

Como nossas buscas na plataforma ERIC resultaram em apenas um trabalho, decidimos fazer um novo levantamento, dessa vez na plataforma Google acadêmico⁸, a busca foi feita no dia 11/11/2023. Buscamos pelos mesmos termos usados na primeira busca feita na ERIC, porém em português, “funções exponenciais” e “Teoria dos Campos Conceituais” sendo encontradas, inicialmente, 103 publicações. Como foram encontradas muitas obras, resolvemos adotar critérios de seleção, com o intuito de selecionarmos aquelas obras que melhor se alinhassem com o objetivo do nosso trabalho, tais critérios encontram-se no Quadro 2, seguinte.

Quadro 2 - Critérios de inclusão e exclusão

Nº	Critério de inclusão	Critério de exclusão
C1	Trabalhos que tenham a função exponencial como foco.	Trabalhos que não tenham a função exponencial como foco.
C2	Trabalhos que tenham a Teoria dos Campos Conceituais como principal teoria.	Trabalhos que não tenham a Teoria dos Campos Conceituais como principal teoria.
C3	Trabalhos que não sejam revisões de literatura.	Trabalhos que sejam revisões de literatura.

Fonte: Autor (2025).

Após o estabelecimento dos critérios, passamos a seleção das obras. Inicialmente pela leitura do título, quando foram excluídas as obras que não tinham a função exponencial como foco principal, as que fossem uma revisão de literatura e as que não abordavam a Teoria dos Campos Conceituais. Sendo assim, foram excluídas 83 obras e ficamos apenas com 20. Na nova filtragem, passamos a leitura dos resumos, quando foram excluídas 12 obras, por

⁸ O Google Acadêmico é um local de busca que reúne a literatura acadêmica. Por meio dele é possível encontrar artigos científicos, trabalhos acadêmicos, publicações nacionais e internacionais, livros e resumos das mais diversas áreas. Disponível em: <https://doity.com.br/blog/google-academico/> acessado em 11/08/2023 às 08:38.

abordarem outras teorias ou outras funções como foco principal. Ficamos então, com 8 obras, as quais foram lidas na íntegra e serão discutidas a seguir. Cabe salientar, que para melhor compreensão resolvemos apresentar no Quadro 3 as obras, destacando o ano de sua publicação, o local, o tipo de trabalho e os autores.

Quadro 3 - Organização das pesquisas

(Continua)

Ordem	Título do trabalho	Ano de publicação	Autores(as)	Local de publicação	Classificação
Nº 1	A construção de conceitos em matemática: uma proposta usando tecnologia de informação	2006	Luís Alberto Prates Piccoli	Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (PUCRS)	Dissertação de mestrado.
Nº 2	Da interpretação à conceituação: uma sequência didática baseada no uso de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas	2012	Rodrigo Sychocki da Silva e Marcus Vinicius de Azevedo Basso	Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)	Artigo que divulga resultados de uma dissertação de mestrado.
Nº 3	O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica	2012	Marcus Vinicius de Azevedo Basso	Repositório Digital da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Lume-UFRGS)	Dissertação de mestrado.
Nº 4	Representações sobre função exponencial	2014	Rita Lobo Freitas e Saddo Ag Almouloud	Revista de Produção Discente (PUCSP)	Artigo que serviu como levantamento de dados e questionamentos para uma pesquisa de mestrado.

Ordem	Título do trabalho	Ano de publicação	Autores(as)	Local de publicação	Classificação
Nº 5	Um olhar para a conceitualização da Função Exponencial decorrente de uma Atividade de Modelagem Matemática	2020	Kleber Luciano Niro e Lilian Akemi Kato	Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana	Artigo.
Nº 6	Uma análise da importância de diagnósticos para a apropriação conceitual dos estudantes em atividade de ensino mediada pelo conceito de função	2019	Eliane Miotto Kamphorst e Cátia Maria Nehring	XXIV Jornada de Pesquisa (Evento que ocorreu de 21 a 24 de outubro de 2019)	Artigo com parte dos resultados de uma pesquisa de doutorado.
Nº 7	Ensino de funções exponenciais a partir de problemas, seguindo uma sequência didática	2018	Janice Valgoi Spinelli	Repositório Digital da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Lume-UFRGS)	Trabalho de Conclusão de Curso.
Nº 8	Situações de função exponencial: um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais	2022	Déric Vinícius dos Santos	Repositório Digital da Universidade Federal de Pernambuco (ATTENA)	Trabalho de Conclusão de Curso.

Fonte: Autor (2025).

O primeiro trabalho tem como título **“A construção de conceitos em matemática: uma proposta usando tecnologia de informação”** (Piccoli, 2006). A pesquisa foi realizada no ano de 2006, contando como participantes aproximadamente quarenta alunos de graduação, da Faculdade de Administração das Faculdades Porto-Alegrenses (FAPA).

O trabalho trata-se de uma dissertação, na qual o autor investiga a potencialidade de recursos tecnológicos (software - WINPLOT⁹) durante a construção conceitual de diferentes funções, entre elas a exponencial. Segundo o autor, com o uso do software foi possível não só transitar entre as representações, mas também compreender o Campo Conceitual das funções, a partir do tripé do Campo Conceitual $Cf = (S, I, R)$ ¹⁰, onde Cf é o Campo Conceitual das funções, S o conjunto das Situações, I dos Invariantes e R o conjunto das Representações simbólicas.

Corroborando com Vergnaud (1991), o autor ressalta que, durante o enfrentamento das situações, o aluno precisa dominar os conceitos que permeiam aquele conceito em estudo. Assim, é preciso oportunizar várias situações para que o aluno possa organizar o que sabe, com o intuito de construir novos conhecimentos. Além disso, partindo da observação dos alunos, durante a resolução de situações, o autor ressalta que pôde enxergar os invariantes utilizados pelos estudantes, bem com as representações, isso o possibilitou entender o percurso feito por eles durante o enfrentamento das situações.

Para a realização da investigação, o pesquisador apresenta aos alunos a possibilidade de construção e interpretação de gráficos de algumas funções, entre elas, algumas exponenciais, apresentando aos estudantes apenas a lei de formação da função, sem levar em consideração o significado da relação. Com isso, apesar de apresentar diversas funções, mudando alguns dos valores, elas não trazem um significado para o Campo Conceitual, apenas sua definição matemática. Assim, consideramos que as situações propostas na investigação limitem a aprendizagem dos estudantes, pois não permitem que eles busquem entender os fenômenos que as funções modelam.

Outros trabalhos que encontramos em nossa revisão investigam a construção do conceito da função exponencial, assim como Piccoli (2006), são eles: Silva *et. al.*, (2012), Silva (2012), Lobo e Almouloud (2014) e Kleber *et. al.*, (2020).

Com o título **“Da interpretação à conceituação: uma sequência didática baseada no uso de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas”** Silva *et al.* (2012)

⁹ O Winplot é um software que serve para plotar gráficos de curvas (Marinho, 2021).

¹⁰ Para Vergnaud (1991) as funções, assim como diversos conteúdos matemáticos, não podem ser estudadas de forma isolada, precisam ser estudados em campos de conceitos, que segundo ele, são formados por situações (S), invariantes (I) e representações simbólicas (R).

buscaram investigar os esquemas de solução de alunos do 1º ano do ensino médio do Instituto Federal do Rio Grande do Sul, acerca das funções exponenciais e logarítmicas.

A pesquisa se desenvolveu por meio de uma sequência didática, tendo como metodologia a engenharia didática. O trabalho aponta para a importância de se transitar entre as representações e se variar as situações durante o processo de ensino das funções, para que se tenha uma melhor aprendizagem. A pesquisa busca promover o estudo das funções por meio de situações do dia a dia, durante o processo enfatiza a necessidade de diferentes situações para o entendimento do conceito matemático.

O trabalho aponta para a importância de se trabalhar com situações que tragam diferentes significados à função, inclusive, significados que sejam próximos aos estudantes, proporcionando maior interesse, por parte deles, durante os processos de ensino e aprendizagem. Aponta, ainda, para a importância do professor ter em mente que o livro é um recurso e não um guia. Neste sentido, o professor pode apoiar-se nele para realizar o seu trabalho, porém, não deve segui-lo ao pé da letra.

Para a realização da investigação, os pesquisadores informaram aos estudantes que a função exponencial pode ser usada para modelar situações de crescimento, decrescimento e de juros compostos. E, dentre as situações apresentadas, discutem uma situação de crescimento populacional. Apesar disso, consideramos que não basta entender a relação assumida pela função (seja ela de crescimento ou decrescimento), para de fato dar conta do Campo Conceitual, para que o domínio aconteça é importante compreender o significado assumido pela função exponencial na relação e não apenas o seu comportamento.

Já Silva (2012) teve como título **“O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica”**. A pesquisa consiste em uma construção, experimentação e validação de uma sequência didática, na qual são tratadas as funções exponenciais e logarítmicas com base em situações problemas que permeiam o dia a dia. Teve como referencial a Teoria dos Campos Conceituais, justificando não só a variedade de situações como também os conceitos relacionados com a função. Além disso, a organização dos esquemas de resolução, com ênfase nos invariantes. Com relação à variedade, foram apresentadas situações de crescimento populacional, capitalização financeira e de decrescimento de medicação no organismo, o autor destaca que os problemas envolviam os conceitos de porcentagem, potência, proporção simples e outros. Isso mostra que o campo das funções exponenciais engloba conceitos diversos e, por isso, seu domínio pode levar tempo (Vergnaud, 1991).

Por outro lado, a pesquisa aponta, ainda, que a dificuldade encontrada no entendimento conceitual das funções, em matemática, advém, por vezes, da forma tradicional como são apresentados os conteúdos aos estudantes, em que o professor segue o livro didático como guia. Neste sentido, o trabalho corrobora com Vergnaud (1991), ao enfatizar a importância de oportunizar aos estudantes diversas situações, que deem conta de diferentes significados, algo que, por vezes, o livro didático não dá conta.

O trabalho nos remete a importância de ressaltarmos que a variedade de contextos, nos quais a função exponencial é apresentada, não garante, sozinha, a variação em significados assumidos pela relação (Vergnaud, 1991), isso porque o significado dependerá do esquema usado para a resolução da situação, ou ainda, da classe. Neste sentido, variar o contexto no qual a função é apresentada é relevante, no entanto, só essa ação não garante a variação de significados ou, ainda, o domínio conceitual.

Por sua vez, Lobo e Almouloud (2014) tem como título **“Representações sobre função exponencial”**, o trabalho trata-se de uma pesquisa realizada com graduandos da Universidade Federal da Bahia, acerca do conceito de função exponencial. A pesquisa consiste em uma sequência didática na qual os estudantes precisam resolver três situações sobre a função, no intuito de investigar quais esquemas de resolução são usados.

Na ocasião foi observado a dificuldade dos estudantes com relação ao enfrentamento de três situações envolvendo as funções, as quais tinham como contexto: o crescimento populacional e o crescimento geométrico. O trabalho aponta para a necessidade de se trazer para sala de aula diferentes situações com o objetivo de estimular os estudantes na (re)construção de seus esquemas, durante a construção conceitual. No entanto, não leva em consideração a importância destas situações apresentarem diferentes significados para a função exponencial.

Niro e Kato (2020), como o título **“Um olhar para a conceitualização da Função Exponencial decorrente de uma Atividade de Modelagem Matemática”**, apresentam dados de uma pesquisa realizada com alunos do curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná. No trabalho, buscou-se identificar os esquemas de resolução utilizados por dois grupos de estudantes ao resolverem uma situação problema, por meio da modelagem.

A situação consistia em determinar em que ano a população mundial atingiria a população máxima, com relação aos recursos naturais, indicados pelo IBGE. Foi constatado que os alunos mobilizaram o conceito de Progressão Geométrica e intuitivamente, o de função exponencial em suas respostas. Neste sentido, mostrou-se que o Campo Conceitual da função

exponencial envolve diversos conceitos matemáticos, como o de Progressão Geométrica e o de divisão proporcional.

Em suas discussões, os autores chamam atenção para a forma que é abordada a função nos livros didáticos, quer por meio de uma revisão de potenciação ou com o objetivo de introduzir sua inversa, a logarítmica, esquecendo-se, por vezes, da relevância e aplicabilidade desta função ao dia a dia e em outras ciências. Essa problemática, segundo os autores, pode dificultar o aprendizado conceitual.

O trabalho aponta para a importância de ver os conteúdos matemáticos em campos de conceitos, no qual os estudantes devem mobilizar os invariantes para (re)construir seus esquemas e com isso dar conta do Campo Conceitual em estudo.

Sendo assim, a construção do conceito de função exponencial pode ser feita de várias maneiras, como ressaltado pelos trabalhos apresentados até aqui. No entanto, algo que não se pode fugir é a necessidade de abordar o conceito em um Campo de Conceitos, como ressaltado por Vergnaud (1990). Isso porque, para enfrentar as situações que envolvem o conceito de função exponencial, os alunos precisam de outros conceitos, quer sejam matemáticos ou não.

No entanto, durante a construção conceitual não basta enxergar que um conceito precisa de outros para ser compreendido, é importante também proporcionar ao aluno o enfrentamento de diferentes situações (Vergnaud, 1990), que apresentem uma variedade em significados, para que ele possa não só reafirmar o que sabe, como também construir conhecimentos e estratégias novas. Com vistas a variação das situações encontramos três trabalhos, o de Kamphorst e Nehring (2019), o de Spinelli (2018) e o de Santos (2022).

O trabalho de Kamphorst e Nehring (2019) que teve como título **“Uma análise da importância de diagnósticos para a apropriação conceitual dos estudantes em atividade de ensino mediada pelo conceito de função”** foi realizado no ano de 2016 com um grupo de onze estudantes que cursavam os cursos de licenciatura em matemática, engenharia elétrica ou engenharia civil, estando no segundo ou quarto semestre de seus respectivos cursos, em uma Universidade do Rio Grande do Sul.

Na ocasião, foi proposto um problema, para que em grupos mistos (com participantes de diferentes cursos), os estudantes tentassem resolver. A pesquisa mostrou a importância de se trabalhar em campos de conceitos, seguindo a ideia de Vergnaud, tendo em vista que a situação de função exponencial remeteu a outros conceitos, como equação exponencial e logarítmica. No entanto, a falta de domínio desses conceitos dificultou a resolução da situação, que foi contornada após a busca pela compreensão.

Outro fato relevante enfatizado na pesquisa é a necessidade de se trazer diferentes situações para sala de aula (apesar de não deixar claro quais tipos existem e como diferenciá-las) e durante as resoluções acompanhar atentamente os esquemas, como também, os invariantes mobilizados em suas construções e as representações, com o intuito de proporcionar ao estudante a possibilidade de dominar o Campo Conceitual. Os autores reforçam que quando o acompanhamento não é feito corretamente e os feedbacks são dados de formas incompletas ou inconsistentes, pode o professor dificultar a formação conceitual, por isso, é preciso cuidado.

O trabalho de Spinelli (2018) trata-se de uma pesquisa de conclusão de curso e teve como título **“Ensino de funções exponenciais a partir de problemas, seguindo uma sequência didática”**. Na ocasião, a autora buscou lecionar funções exponenciais por meio de problemas utilizando-se de tabelas, a partir de uma sequência didática.

A sequência de aulas foi aplicada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, de uma escola pública do Rio Grande do Sul. A autora inicia sua investigação questionando o entendimento que os alunos possuem sobre o termo “funções”, neste momento ela tenta entender quais conhecimentos os alunos possuem, tendo em vista que os alunos já trabalharam outros tipos de funções, como a afim e a quadrática.

Após as discussões é iniciada a resolução de problemas, quando é proposta uma situação e sugerida, pela pesquisadora, a resolução com o auxílio de tabelas. Esse mecanismo, segundo ela, ajudou o entendimento da função. Após os momentos de investigação, foi proposta uma lista de atividades a qual a autora construiu escolhendo os problemas por “semelhança”.

Além das atividades, a autora buscou ressaltar um caminho de resolução para os possíveis tipos de problemas. Entendemos que essa abordagem apesar de bem-intencionada pode limitar o domínio conceitual, conduzindo os estudantes a uma redução de significados, por dois motivos: 1 - O que foi levado em consideração para determinar a semelhança dos problemas talvez não seja o suficiente para classificá-los como semelhantes (a autora traz, por exemplo, duas situações de crescimento - uma situação de crescimento de uma árvore e outra de reprodução/crescimento bacteriano e as classifica como semelhantes. Apesar de ambas serem modeladas por uma função exponencial, do tipo crescente, não são semelhantes, pois os fenômenos que são modelados representam significados distintos). 2 - não só existem os tipos de problemas sugeridos.

Sendo assim, é preciso, antes de classificar as situações em semelhantes, verificar cuidadosamente o significado assumido pela função, bem como, estar ciente da importância

de oportunizar aos alunos diferentes situações, com diversidade de significados para que de fato eles possam compreender, completamente, o Campo Conceitual.

Na abordagem utilizada pela pesquisadora em sua sequência didática, o professor resolve algumas situações e seleciona outras que julga semelhantes, para que o aluno possa treinar o caminho de resolução. Porém, essa generalização e por vezes limitação em apresentar os significados pode ser problemática para os alunos quando eles se deparam com significados novos.

Isso mostra que é relevante uma classificação das situações de função exponencial, para que se possa não só proporcionar ao professor, autor de sua prática como também de livros didáticos e materiais didáticos, conhecimento das diferentes classes e suas peculiaridades, como também auxiliá-lo na disponibilização de diferentes situações (que tragam diferentes significados) aos seus alunos durante os processos de ensino, aprendizagem e avaliação.

A necessidade de identificar a semelhança nas situações e classificá-las quanto ao significado assumido pela função, no intuito de auxiliar os professores a proporcionar aos seus estudantes, durante os processos que permeiam a aprendizagem, diferentes situações que tragam variedade em significados, nos leva ao nosso trabalho de conclusão de curso (Santos, 2022) que tem como título **“Situações de função exponencial: um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais”**.

No trabalho buscamos classificar as situações por meio da Teoria dos Campos Conceituais, enfatizando o significado que a função exponencial apresenta dentro da situação. Isso porque, por mais que tenhamos situações que sejam modeladas por funções crescentes ou decrescentes, precisamos de mais para definir se realmente são semelhantes. Precisamos entender o significado atribuído a função em cada situação.

Em Santos (2022), separamos essas semelhanças por classes de situações, levando em consideração o significado que a função apresenta para o estabelecimento de cada classe. No trabalho conseguimos estabelecer três classes de situações: **Taxa sobre Taxa**, classe de situação voltada às situações que tratam do crescimento ou decrescimento multiplicativo de uma grandeza a partir da aplicação de taxas de forma acumulativa (que se divide em três subclasses: crescimento/valorização, decrescimento/depreciação e mista). No intuito de uniformizarmos os termos, daqui em diante usaremos apenas o termo “Crescimento” para nomear a subclasse Crescimento/Valorização e o termo “Decaimento” para nomear a subclasse Decrescimento/Desvalorização.

Cisão, classe de situações inspirada inicialmente nas situações de reprodução de bactérias e microorganismos. Nesta classe, a função exponencial modela o crescimento ou a reprodução que acontece por meio da cisão, na qual cada indivíduo se divide em dois e esses dois, cada um, se dividem em outros dois e assim por diante. Trata-se de uma grandeza que se multiplica por cisão de si própria em duas grandezas de mesma natureza.

Corrente/Reprodução, classe que trata das situações em que acontecem um crescimento diferente do que é dado na classe de Taxa sobre Taxa e na de Cisão, aqui cada indivíduo gera uma quantidade fixa de outros indivíduos, quando trata-se de uma reprodução; ou alcança outros, quando trata-se de uma corrente (essas situações são bem comuns nos grupos virtuais).

O trabalho torna-se relevante para compreensão do Campo Conceitual da função exponencial, à medida que as classes de situações apontadas permitem que sejam mapeadas as estruturas por significados exercidos pela exponencial em cada situação. No entanto, apontamos em Santos (2022) a limitação de não conseguirmos mapear todas as situações encontradas, mostrando os significados que a função exponencial exerce por questão de tempo, sendo assim, não conseguimos classificar algumas das situações identificadas no livro didático investigado.

A pesquisa permite que seja pensado no Campo Conceitual da função exponencial com cuidado, olhando agora para a classificação das estruturas, mesmo que ainda incompleta. Esse olhar atento permitirá ao professor melhor clareza não só em suas aulas, como também na construção de materiais didáticos.

Nossa revisão aponta para a necessidade da conclusão do mapeamento das estruturas de função exponencial, à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Pois, por mais que se valorize a diversidade de situações, propostas aos estudantes nos momentos que permeiam a aprendizagem, encontramos, em nossa revisão, apenas o trabalho feito por Harel *et al.* (1995), que apesar de apresentar um avanço com relação às estruturas, não leva em consideração a TCC. E, Santos (2022), que levamos em consideração a TCC, no entanto, não conseguimos concluir a classificação das situações por significados.

Consideramos que a classificação das estruturas de função exponencial vai além de identificar as semelhanças dos problemas quanto ao crescimento ou decréscimo, ela busca mapear os significados para que se tenha maior clareza na elaboração tanto de livros didáticos quanto de aulas. Porque não basta proporcionar aos estudantes o enfrentamento de diversas situações, como ressaltado por diversos trabalhos, se estas apresentam o mesmo significado

para a função, é preciso variar além das situações, os significados, para que o aluno possa (re)construir esquemas que o ajude a dominar o Campo Conceitual.

4 FUNÇÕES

Dado que a função exponencial é o objeto de estudo de nossa investigação, resolvemos neste capítulo situar discutir, propriedades, teoremas e abordagens históricas, em torno deste conceito. No primeiro momento partiremos da origem do conceito de função, tendo como base a ideia de contagem e a relação feita entre os instrumentos utilizados e as quantidades. Em seguida, conceituamos o que seria uma função exponencial e elencamos suas propriedades. Logo adiante, iremos tratar sobre composições de funções para, por fim, abordarmos e conceituarmos, isomorfismos.

4.1 Abordagens históricas sobre o conceito de função

Estudos históricos mostram que o conhecimento matemático surge a partir da necessidade que se tinha de resolver situações simples ligadas ao dia a dia. Isso porque, desde os primórdios da sociedade, as pessoas sentiam a necessidade de compreender os processos ligados à natureza (Boyer, 1946).

O conhecimento acerca do conceito de função não foi diferente. Segundo Souza e Silva (2003, p. 1) "[...] quando o homem, levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional". Nesse sentido, mesmo que não houvesse de imediato a intenção, ele estava relacionando grandezas. E nesse sentido, a ideia de função surge da necessidade de contagem que se tinha. Essa necessidade fez com que fosse descoberto uma relação, que mais adiante seria ampliada para a ideia função.

Ifrah (2005) reforça que tudo começou com este artifício conhecido como correspondência um a um, pois ele tornou possível comparar com facilidade duas coleções, sejam elas compostas por quaisquer elementos, sem que houvesse a necessidade de recorrer à contagem abstrata.

No que se refere ao conceito de função, Eves (1995, p. 661) ressalta que

A palavra função, na sua forma latina equivalente, parece ter sido introduzida por Leibniz em 1694, inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva.

Observa-se que o conceito de função foi introduzido de forma muito diferente ao que encontramos hoje em livros didáticos de Matemática. Segundo Eves (1995), o conceito de

função sofreu muitas alterações no decorrer da história. Ele afirma, ainda, que muito tempo após a definição de Leibniz em 1694, Euler modificou a definição inicial, quando afirmou que uma função se caracterizava como uma equação ou fórmula qualquer, que relaciona variáveis e constantes.

No entanto, a ideia de variável era ainda uma ideia bastante complexa e distante no tempo.

Lejeune Dirichlet (1805- 1859) chegou à seguinte formulação: Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui um valor a x , corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y , então se diz que y é uma função (unívoca) de x . A variável x , à qual se atribuem valores à vontade, é chamada variável independente e a variável y , cujos valores dependem dos valores de x , é chamada variável dependente. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o campo de definição da função e os valores assumidos por y constituem o campo de valores da função (Eves, 1995 p. 662).

Essa definição apresentada por Lejeune Dirichlet mudou completamente o entendimento que antes se tinha sobre funções, assim como, mudou a forma de se apresentar o conceito. A ideia de variável ampliou muito o conceito de função tornando possível que ao longo do tempo fossem formuladas outras definições, próximas a que temos nos dias de hoje, uma definição mais clara e ampla sobre o conceito em questão.

4.2 Função no contexto escolar atual

Muitas pessoas defendem a ideia de que a Matemática possui uma linguagem própria, esse pensamento não surgiu nos dias de hoje. Isto é, desde o seu surgimento, muitas pessoas enxergam a matemática não só como ciência, mas, também, como uma forma de comunicação, como ressalta Menezes (2000, p. 4)

Sendo a matemática uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja pródiga em inúmeras facetas; uma delas é, precisamente, ser possuidora de uma linguagem própria, que em alguns casos e em certos momentos históricos se confundiu com a própria matemática.

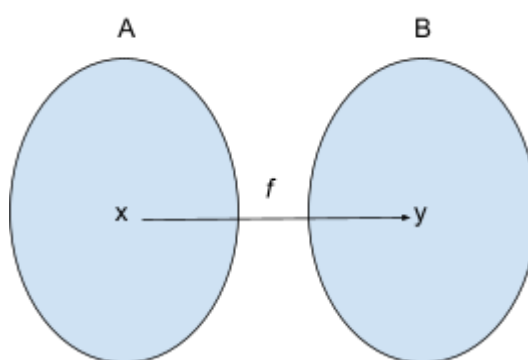
Nesse sentido, por um lado, a matemática se apresenta como uma ciência que pode proporcionar aos indivíduos um melhor entendimento do mundo que o cerca. Por outro lado, temos a forma na qual os conhecimentos são apresentados aos estudantes, no processo de ensino, conhecimentos, esses, que passaram por mudanças ao longo da história. Cabe ressaltar que há uma inversão do processo de construção de conhecimento com a construção de conceitos na escola – de um modo geral, é claro. Na construção de conhecimento, a

necessidade faz emergir o conhecimento que pode gerar um conceito. Já na escola, apresenta-se o conceito e solicita-se ao estudante que o aplique.

A definição geral de função anunciada pelos livros didáticos, segundo Roque (2012, p. 295-296), assume seguinte forma “Dados dois conjuntos X e Y , uma função $f : X \rightarrow Y$ é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento $y = f(x) \in Y$. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função”.

A faz menção a transformação que associa elementos de um conjunto a elementos de um outro conjunto, distinto ou não, do primeiro, essa transformação acontece por meio de uma função f . Tal definição foi criada por Nicolas Bourbaki em 1939. O diagrama a seguir ilustra uma função de A em B .

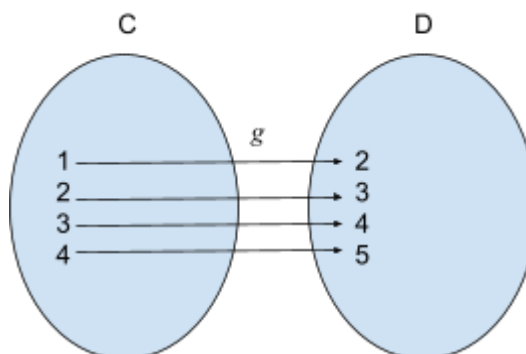
Figura 10 - Diagrama 1 da função



Fonte: Autor (2025).

Para melhorar a compreensão, podemos observar a representação de outra função, a função g , que associa os elementos do conjunto C aos elementos do conjunto D , como ilustrado na Figura 11.

Figura 11 - Diagrama 2 da função



Fonte: Autor (2025).

O exemplo citado, mostra a representação de uma função em que os elementos pertencentes a C são associados aos elementos pertencentes a D por meio de uma regra ou função g ¹¹.

Neste sentido, Eves (1995, p. 662) destaca que “[...] a teoria dos conjuntos propiciou ampliar o conceito de função de maneira a abranger relações entre dois conjuntos de elementos quaisquer, sejam esses elementos números ou qualquer outra coisa”.

Outrossim, ainda sobre a função, Iezzi *et al.* (2004) acrescenta que:

Em Matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência um único valor para y , dizemos que y é uma função de x . O conjunto D de valores que podem ser atribuídos a x é chamado de domínio da função. A variável x é chamada variável independente. O valor de y , correspondente a determinado valor atribuído a x , é chamado imagem de x pela função e é representado por $f(x)$. A variável y é chamada variável dependente, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x . O conjunto Im formado pelos valores que y assume, em correspondência aos valores de x , é chamado conjunto imagem da função (2004, p. 33).

Sendo assim, o conjunto que gera a função é chamado de conjunto domínio, o conjunto que contém os elementos de chegada dessa função, formam o conjunto contradomínio, já os elementos do contradomínio que se relacionam com os do domínio, compõem o conjunto imagem. Para cada x pertencente ao domínio, existe um único y pertencente ao contradomínio que se relaciona com x , por meio de uma função f . Nesse viés, quando se tem uma função, o elemento y que se relaciona com o elemento x , deixa de fazer parte apenas do conjunto contradomínio e passa a fazer parte do conjunto imagem.

¹¹ A função g associa os elementos de C aos elementos de D por meio de uma soma. Em que, o elemento $g(c) = c + 1$.

Além disso, cabe ressaltar que em matemática existem muitos tipos de funções, assim como, formas diferentes de representá-las. Sobre essas representações, Stewart (2013, p. 12) ressalta que uma função pode ser representada

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico ou diagramas)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Isso mostra que as funções possuem representações muito diversas, assim como, suas aplicações. De acordo com os PCNEM,

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (Brasil, 1999, p. 121).

No entanto, como são muitos os tipos de funções existentes, que na escola são nomeadas pelo tipo de equação que a representa, como função polinomial do 1º grau, ou por propriedades da função, como função afim. Neste trabalho, daremos ênfase às funções exponenciais, um tipo específico de função que associa a adição à multiplicação.

A função exponencial possui sua variável independente no expoente e, nesse sentido, diferencia-se das demais funções, como afirma Stewart (2013, p. 48),

[...] a função $f(x) = 2^x$ é chamada função exponencial, pois a variável, x , é o expoente. Ela não deve ser confundida com a função potência $g(x) = x^2$, na qual a variável é a base. Em geral, uma função exponencial é uma função da forma $f(x) = a^x$.

Ainda sobre as funções exponenciais, Elon *et al.* (1997) reforçam que

[...] seja a um número real positivo, que suporemos sempre diferente de 1. A função exponencial de base a , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$, deve ser definida de modo a ter as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

- 1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- 2) $a^1 = a$
- 3) $x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e
 $x < y \Rightarrow a^y > a^x$ quando $0 < a < 1$.
- 4) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = a^x$, é ilimitada superiormente.

- 5) A função exponencial é contínua.
 6) A função exponencial $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, é sobrejetiva.

Nesse sentido, a função exponencial se mostra como um tipo particular de função, que possui aplicações muito diversas dentro e fora da matemática. Sendo assim, importante seu estudo.

4.3 Composições de funções

Ao observarmos as funções exponenciais que modelam as situações em algumas situações, notamos que elas aparecem de forma diferente da definição de função exponencial, muitas vezes como: $f(x) = b \times a^{(cx+d)} + g$. Portanto, elas se comportam como funções compostas que têm a função exponencial como uma delas. Neste sentido, sentimos a necessidade de conceituar o que seria uma composição de função.

Duas funções podem ser combinadas com o intuito de gerar outra função. Dada uma função $f(x)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e uma outra função $g(x)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, são garantidas as operações: $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, ou ainda, f/g , neste último caso para os valores em que $g(x) \neq 0$. Essas relações se constituem “[...] de forma similar àquela pela qual somamos, subtraímos, multiplicamos e dividimos números reais” (Stewart, 2013, p. 38).

Segundo Stewart (2013, p. 38), além dessas formas vistas anteriormente,

Existe outra maneira de combinar duas funções para obter uma nova função.

Por exemplo, suponha que $y = f(u) = \sqrt{u}$ e

$u = g(x) = x^2 + 1$. Como y é uma função de u e u , por sua vez, é uma função de x , segue que, afinal de contas, y é uma função de x . Computamos isso pela substituição:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Essa forma de se encontrar uma nova função, partindo de duas outras funções já conhecidas, é chamada de composição de funções. Uma vez que a nova função é composta pelas outras duas funções, já existentes. Neste sentido, Iezzi *et al.* (2004, p. 214) traz maior precisão à definição apontando as restrições relativas ao domínio e ao contradomínio.

Seja f uma função de um conjunto A em um conjunto B e seja g uma função de B em um conjunto C . Chama-se de *função composta* de g e f à função h de A em C em que a imagem de cada x é obtido pelo seguinte procedimento:

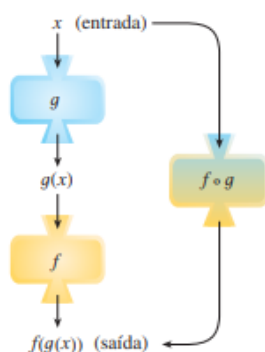
- 1) aplica-se a x a função f , obtendo-se $f(x)$
- 2) aplica-se a $f(x)$ a função g , obtendo-se $g(f(x))$

Nessa perspectiva Stewart (2013, p. 38) reforça que

Em geral, dadas quaisquer duas funções f e g , começamos com um número x no domínio de g e encontramos sua imagem $g(x)$. Se este número estiver no domínio de f , podemos calcular o valor de $f(g(x))$. Note que a saída de uma função é utilizada como entrada para a próxima função. O resultado é uma nova função $h(x) = f(g(x))$ obtida pela substituição de g em f . É chamada de composição (ou composta) de f e g e é denotada por $f \circ g$ (“ f bola g ”).

Essa ideia de aplicarmos uma função em outra, é muito bem explicitada na imagem a seguir.

Figura 12 - Composição de funções



Fonte: Stewart (2013, p. 38).

Nesta perspectiva, cabe salientar que o processo para encontrar um valor para imagem da função composta não é tão simples como o processo de encontrar a imagem de uma função que não seja composta. Isso porque, como dito por Iezzi *et al.* (2004), antes de encontrar a imagem da função composta, precisa-se encontrar a imagem de cada uma que compõem a lei de formação dessa função composta.

Iezzi *et al.* (2004) ressaltam, ainda, que a função composta pode ser representada de formas diversas, não se limitando apenas à representação algébrica. Nesse sentido, a função composta poderá ser representada em qualquer das representações de função já descritas neste texto.

4.4 Função exponencial: um isomorfismo de grupos

As funções exponenciais se comportam como estruturas nas quais o isomorfismo é garantido. No entanto, antes de apresentarmos a definição de isomorfismo de grupos, faz-se necessário entendermos o que seria um grupo. Em matemática existem diversas estruturas algébricas que possuem inúmeras aplicações, dentro e fora da própria matemática. Nesse sentido, segundo Gonçalves (1979), chamamos de grupo, o conjunto não vazio G , no qual está

definida uma operação entre pares de elementos do próprio conjunto e sua operação satisfaz algumas propriedades.

Sendo assim, para que um conjunto G possa ser considerado um grupo, é necessário que ele possa ser expresso por um par, ele e uma operação. Segundo Gonçalves (1979, p. 119), a operação entre um par de elementos de um conjunto é definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & *: G \times G \rightarrow G \\ & (x, y) \rightarrow x * y \end{aligned}$$

Neste sentido, se o conjunto G não for vazio, e os seus elementos satisfizerem a operação, para que o conjunto seja um grupo sua operação precisa, ainda, satisfazer três propriedades, que segundo Gonçalves (1979, p. 119) são:

$$\begin{aligned} & G1) a*(b*c) = (a*b)*c \quad \forall a, b, c \in G - \text{Associativa} \\ & G2) \exists e \in G \text{ tal que } a*e = e*a, \quad \forall a \in G - \text{Elemento neutro} \\ & G3) \forall a \in G, \exists b \in G \text{ tal que } a*b = b*a = e. - \text{Elemento inverso} \end{aligned}$$

A propriedade G1 se refere à associatividade, ela garante que ao pegar três elementos pertencentes a G , do tipo, a , b e c , ao operarmos a com b e em seguida com c , encontraremos o mesmo resultado de operarmos b com c e em seguida com a . Já a propriedade G2 nos garante a existência do elemento neutro, único à G . Já a propriedade G3 faz menção a existência de um elemento inverso, na operação $*$.

Nesse viés, “[...] sejam $(G, *)$ e $(H, \diamond)$ grupos. Dizemos que uma função $f: G \rightarrow H$ é um homomorfismo de grupos se $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \diamond f(g_2)$, para quaisquer g_1 e $g_2 \in G$ ” (COSTA, 2021, p. 0:27).

Cabe observar que nesta função f , o grupo G atua como domínio da função, em contrapartida, o grupo H desenvolve o papel de contradomínio. Outra observação relevante é que, para encontrar a imagem de g_1 operada com g_2 mediante a operação de G , podemos operar as imagens correspondentes a g_1 e a g_2 , no entanto, mediante a operação definida em H , já que estamos operacionalizando com valores pertencentes ao conjunto do contradomínio. Essa troca acontece com a finalidade de encontrarmos uma imagem, e como a imagem de f , se encontra no grupo H , que atua como contradomínio da função, a operação de G foi substituída pela operação de H .

Nesse sentido, o homomorfismo de grupo assegura a correspondência entre os elementos, no entanto, como esses elementos geram imagens que fazem parte de um outro conjunto, talvez até diferente do primeiro, garante a correspondência também entre as operações. Ela é trocada, garantindo, assim, que seja operada dentro do conjunto contradomínio de forma a manter a correspondência (Costa, 2021).

Segundo Kardec (2017), quando os dois grupos satisfazem a definição de homomorfismo e, além disso, possuem a mesma quantidade de elementos, tem-se um isomorfismo. Isto é, além da garantia da troca de operações se tem a mesma quantidade de elementos em ambos os grupos, deixando de ser apenas um homomorfismo para ser injetivo, portanto, um isomorfismo.

Kardec (2017) afirma, ainda, que quando não se tem a mesma quantidade de elementos nos grupos, ao excedente de elementos pode não serem válidas as trocas de operações garantidas no homomorfismo. Neste sentido, a grande vantagem do isomorfismo seria a garantia de troca de operações entre os grupos para todos os elementos, uma vez que ambos os grupos possuem a mesma quantidade de elementos. Garante-se assim a mesma estrutura nos dois grupos, qualquer operação realizada em um grupo vai equivaler à operação do outro grupo feita entre as imagens dos elementos do primeiro grupo.

Essas estruturas serviram para compreendermos as diferentes situações encontradas sobre funções exponenciais e como acontece a transição de uma operação para outra. Isso porque, a função exponencial se comporta como um isomorfismo entre $(\mathbb{R}, +)$ e $(\mathbb{R}, \times)^{12}$, tendo em vista que neles, por ser o mesmo conjunto $\mathbb{R}$, além da garantia de mesma quantidade de elementos, é garantida, ainda, a troca de operações, já que $f(x + y) = f(x) \times f(y)$, isso significa dizer que na função exponencial quando se procura uma imagem de um valor $x+y$, operação definida no domínio, esse valor corresponderá ao valor da imagem de x operada com o valor da imagem de y , mediante a operação do contradomínio, sendo assim, $f(x) \times f(y)$.

Para exemplificarmos tomemos a função $f(x) = 2^x$. Segundo a definição ao calcularmos, por exemplo, $f(2+3)$ encontraremos o mesmo se calcularmos $f(2) \times f(3)$, vejamos: $f(2) = 2^2 = 2 \times 2 = 4$; $f(3) = 2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$; e, $f(2+3) = f(5) = 2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$. Logo, se fizermos $f(2) \times f(3)$ teremos 4×8 o que vale 32, portanto a troca de operação é garantida. Se quisermos ser mais genéricos podemos tomar, por exemplo, $f(x) = a^x$, ao calcularmos $f(x)$ teremos a^x e ao calcularmos $f(y)$ teremos a^y , logo $f(x+y)$ teremos a^{x+y} , que pelas propriedades de potenciação podemos representar por $a^x \times a^y$, garantindo que a troca de operações ocorra para quaisquer valores.

¹² Aqui é considerado o conjunto dos números reais com exceção do zero, tendo em vista que o zero não garante a propriedade G3.

5 CONSOLIDAÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO

Neste capítulo discutimos sobre o livro didático (LD), partindo da sua origem até a sua evolução a recurso didático. Isso porque, muitos são os relatos sobre o surgimento do livro didático e sua consolidação como recurso na sala de aula. O LD passou por inúmeras transformações para chegar ao que é hoje e ter seu espaço garantido mesmo em meio tantas ferramentas tecnológicas, disponíveis para auxiliar os professores em suas aulas. Além disso, o LD é, ainda hoje, amplamente usado como recurso didático na sala de aula das mais diversas disciplinas, inclusive, em matemática.

Nesse viés, sendo o livro didático documento utilizado como fonte de situações que serão contempladas em nossas análises, consideramos necessário discutir sobre sua consolidação, tendo em vista que o livro, nem sempre foi construído como finalidade didática. Segundo Junior (2007), os livros didáticos se consolidam como instrumentos de registro que podem auxiliar na transmissão de conhecimento entre gerações.

A consolidação do livro enquanto forma de registro e organização do conhecimento é de fato muito antiga, Aleixo (2021, p. 18) ressalta que “[...] um grande exemplo desse fato é a obra Elementos de Euclides, escrito por volta de 300 a.C, que ainda possui influência no pensamento matemático nos dias de hoje”. Isso mostra que mesmo com os avanços digitais, o livro ainda se faz presente como fonte de registro do conhecimento.

No entanto, nem sempre o livro serviu como material didático, isto é, o livro era um instrumento usado como forma de organização e registro do conhecimento, mas não possuía uma linguagem clara e finalidades pedagógicas como possui hoje. Isso porque, “[...] os registros históricos sobre o livro didático apontam o seu surgimento no início de 1930 por meio de decretos, leis e medidas que regiam o país neste período” (Freitag; Motta; Costa, 1987 *apud* Antunes *et al.*, 2019, p. 4). Só após 1930 o livro deixa de ser um instrumento de registro e organização do conhecimento passando a se tornar também um material didático, e desde então, está presente nas mais diversificadas salas de aulas como um material de possível apoio ao professor.

Quanto a definição do LD, cabe salientar que

[...] o livro didático é uma literatura destinada a uma sala de aula, ou seja, um manual de uso tanto por parte de professores, quanto por parte de alunos, apresentando os conteúdos de forma organizada, sugestões didáticas, com a finalidade de auxiliar o professor em sua prática docente e os alunos no desenvolvimento de sua aprendizagem. (Rossini, 2003 *apud* Antunes *et al.*, 2019, p. 5).

Neste sentido, podemos dizer que o livro didático serve como um instrumento impresso, intencionalmente estruturado e com finalidade de favorecer o processo de aprendizagem.

Outro fato relevante é que o livro didático vem se mostrando muito presente na sala de aula desde sua implementação até os dias atuais, mesmo em meio a tantos avanços tecnológicos e implementação de tecnologias na sala de aula. Tal fato se dá, segundo Gonçalves (2007), porque a leitura vem se mostrando como principal fonte para se adquirir novos conhecimentos.

Sendo assim, o LD apresenta dentro da sala de aula não só a função de registro de conhecimento, mas, também, diversas outras. Choppin (2004) definiu quatro funções essenciais do livro didático, sendo elas: Função Referencial, Função Instrumental, Função Ideológica e Cultural e a Função Documental.

A função referencial, segundo Choppin (2004), é a mais lembrada quando nos referimos ao LD, isso porque, essa função diz respeito à organização curricular dos conteúdos, seja em tópicos ou mesmo em unidades, fazendo menção aos currículos e suas respectivas estruturas. Sobre isso, Choppin (2004) afirma ainda que “[...] ele constitui o suporte privilegiado dos conteúdos educativos, o depositário dos conhecimentos, técnicas ou habilidades que um grupo social acredita que seja necessário transmitir às novas gerações” (Choppin, 2004, p. 253).

A segunda função, a função estrutural se refere às metodologias, ou seja, como LD articula seus problemas e/ou exercícios a fim de favorecer a aprendizagem. Segundo Choppin (2004, p. 253), as metodologias “[...] visam a facilitar a memorização dos conhecimentos, favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, a apropriação de habilidades, de métodos de análise ou de resolução de problemas, etc”.

No entanto, em Matemática não basta memorizar, o aluno precisa de fato aprender os conteúdos. A necessidade de aprendizagem se intensifica à medida que os assuntos vão avançando, isso porque, um conteúdo necessita do outro, sendo assim, todos estão interligados e se o aluno não conseguir compreender um, poderá não avançar em outros.

A terceira função do LD, a função ideológica e cultural, faz menção à estruturação política que o livro possui, sendo assim, a função mais antiga atribuída ao LD. No entanto, essa função vem perdendo cada vez mais força, visto que, cada governo estabelece suas ideologias e, além disso, no século XXI, o professor vem perdendo muito seu espaço de fala. Sobre isso, Aleixo (2021, p. 20) ressalta que “No século XXI, essa capacidade vem diminuindo pela autonomia que o professor vem ganhando em sala de aula, porém é visível

que a cada mudança de governo os ideais mudam e as abordagens nos livros favorecem a narrativa de quem está no poder”.

Já a quarta e última função do livro didático é a função documental, essa função permite que o aluno tenha oportunidade de desenvolver seu senso crítico, mesmo sem que haja uma leitura mediada, isso acontece porque alguns livros podem fornecer ao aluno o acesso a documentos que tornem possível esse desenvolvimento. Essa função é nova e pode não ser encontrada em todos os livros. Neste sentido, cabe salientar que essa função será melhor desenvolvida em locais que favoreçam ao aluno sua autonomia, o que exige um grau elevado na formação dos professores (Choppin, 2004).

Essas funções delegadas ao LD, “[...] podem variar consideravelmente segundo o ambiente sociocultural, a época, as disciplinas, os níveis de ensino, os métodos e as formas de utilização” (Choppin, 2004, p. 253). Tal variação se dá devido às muitas possibilidades de uso que o livro didático possui, isto é, cada povo possui sua cultura, seu nível de escolarização e, por certo, um propósito particular para a utilização do LD.

5.1 O livro didático como recurso para sala de aula de matemática

Todos sabemos que cabe à escola, em especial ao professor, garantir o processo de ensino, como também acompanhar o processo de aprendizagem. “Nessa tarefa complexa, a grande maioria dos educadores atribui ao livro um papel destacado entre os recursos didáticos que podem ser utilizados” (Carvalho *et al.*, 2010, p. 15).

Esse fato se dá pelo LD propiciar ao professor maior segurança tanto em conduzir suas aulas, como também ao elaborá-las, isso porque:

O livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um personagem, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado – no nosso caso, a Matemática –; os métodos adotados para que os alunos consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade (Carvalho *et al.*, 2010, p. 15).

Esse auxílio que o LD pode proporcionar ao professor é de fundamental importância, tendo em vista que na formação inicial de muitos professores, por vezes, não se tem tanta ênfase nos conteúdos abordados na educação básica. Neste sentido, o LD pode tornar-se forte aliado do professor durante sua prática, uma vez que ele deve ser pensado como um recurso facilitador dos processos de ensino e aprendizagem, contendo sugestões de metodologias, de esquemas de resolução e etc (Carvalho *et al.*, 2010).

No entanto, é necessário ter cuidado quando se refere ao uso excessivo do LD como único recurso pedagógico na sala de aula, isso porque, o livro deve ser usado como um dos possíveis recursos, porém não como único, nesse sentido

[...] convém lembrar que, apesar de toda a sua importância, este livro não deve ser o único suporte do trabalho do professor. É sempre desejável buscar enriquecê-lo com outras fontes, a fim de ampliar ou aprimorar o conteúdo que ele traz e, acima de tudo, adequá-lo ao grupo de alunos que o utiliza (Carvalho *et al.*, 2010, p. 16).

Nesse sentido, “Um bom livro didático é uma fonte para o conhecimento da Matemática escolar. É nele que podemos nos familiarizar com a Matemática que devemos ensinar” (Carvalho *et al.*, 2010). Sendo assim, é de grande importância que os professores, juntamente com a escola, possam escolher livros que facilitem suas práticas, que possam ser de fato um recurso utilizado, podendo auxiliar tanto o processo de ensino, como o de aprendizagem.

Outro fato importante, ao falar em LD enquanto recurso, é que os livros didáticos, ao menos os nacionais, trazem os manuais do professor. Esses manuais servem de subsídio para os professores, visto que neles os professores podem encontrar sugestões e dicas que podem ajudar na condução de suas aulas, bem como, possam entender o que os autores querem com as atividades propostas, como enfatizado por Carvalho *et al.* (2010, p. 30),

[...] os manuais do professor evoluíram positivamente e alguns deles apresentam indicações detalhadas de como trabalhar as atividades do livro do aluno, além de trazerem boas sugestões didático-pedagógicas para o docente. Em particular, eles contribuem com considerações teóricas e práticas para a avaliação da aprendizagem do aluno [...].

Sendo assim, o LD se apresenta como um valioso recurso na sala de aula de matemática, podendo auxiliar o professor de formas muito diversas em suas práticas. Contudo, assim como todo e qualquer recurso, cabe ao professor avaliar a melhor maneira de se usar. Isso porque, o LD deve ser usado para a melhoria nas decisões didáticas do professor, bem como, “[...] para a construção da ética necessária ao convívio social democrático” (Verceze; Silvino, 2008, p. 3).

No entanto, é importante que o livro didático contenha uma variedade de situações, que apresente variados significados acerca do diferentes Campos Conceituais, contemplados em sua construção, tornando viável ao estudante o enfrentamento de situações diversas durante o processo de aprendizagem. Por outro lado, o papel do professor é indispensável para

que o processo de ensino ocorra bem, visto que cada povo possui sua cultura e muitas vezes o LD, não engloba situações e/ou problemas que satisfaçam o dia a dia daquele povo.

6 METODOLOGIA

Propomos nesta investigação um aprofundamento na classificação proposta em Santos (2022), na tentativa de concluir o mapeamento das estruturas de função exponencial. Neste sentido, temos como objetivo elaborar e validar uma estrutura de classificação para as situações de função exponencial propostas no Ensino Médio. Para isso, buscamos livros do Ensino Médio que apresentem situações de função exponencial e os utilizamos como documentos fonte de situações de função exponencial realmente vivenciada pelos estudantes brasileiros durante o Ensino Médio.

A escolha do livro didático como documento de nossa pesquisa se dá por ele, além de ser um documento da realidade escolar, conter situações e possíveis estratégias de resolução. Neste sentido, com a nossa investigação buscamos responder a seguinte questão: Que tipos de situações dão sentido à função exponencial?

Com o intuito de responder nossa questão problema e atingir nosso objetivo, elencamos os seguintes objetivos específicos:

- I. Identificar subclasses das classes de situações sobre função exponencial já elencadas em Santos (2022);
- II. Expandir as classes de situações a partir das não incluídas em Santos (2022);
- III. Identificar conceitos e propriedades abordadas nas situações classificadas;
- IV. Antecipar possíveis esquemas para a resolução das situações classificadas buscando teoremas-em-ação e conceitos-em-ação;
- V. Identificar as representações utilizadas nas situações propostas ou resolvidas;
- VI. Discutir os elementos dados e desconhecidos nas situações relativos à função exponencial.

No que se refere a escolha dos livros que analisados em nossa pesquisa, levamos em consideração dois critérios, o primeiro ter sido aprovado pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) do ano de 2021¹³, e o segundo conter situações contextualizadas de função exponencial, que explorem suas propriedades e aplicações. Como são muitos os livros que satisfazem essas condições, fizemos uma pré-análise, na qual buscamos por livros que tragam o maior número de situações contextualizadas e maior diversidade de contextos envolvendo o conceito de função exponencial e suas propriedades.

¹³ A escolha dessa edição do PNLD se deu porque ela estava sendo usada nas escolas públicas brasileiras durante a construção de nossa investigação, tendo em vista que cada versão possui utilização de 4 anos.

Com relação às nossas análises, elas foram feitas da seguinte forma: primeiro separamos os livros que satisfazem nossos dois critérios para em seguida realizarmos a pré-análise. Dos LD elegidos, buscamos quantificar os problemas contidos que envolviam a função exponencial e separamos as páginas onde se encontram os problemas. Em seguida, analisamos cada tipo de problema com o intuito de mapearmos os significados assumidos pela função exponencial, esse mapeamento segue a classificação contida em Santos (2022), buscando expandir, quando a mesma não for suficiente, por fim, construímos um quadro que organize e quantifique os problemas por classe, subclasse, significado, elementos dados e desconhecidos e LD a que pertençam.

A análise levará em consideração cinco critérios de análise, criados por Santos (2022) e embasados na TCC, conforme exibido no Quadro 4.

Quadro 4 - Dimensões analisadas

Ordem	Dimensões analisadas
1	Estrutura simples ou mista
2	Significado da relação
3	O contexto do problema
4	Elementos desconhecidos
5	Elementos dados

Fonte: Santos (2022, p. 43).

Algo relevante, segundo Santos (2022), é que a análise não leva em consideração as situações puramente matemáticas, pois buscam estabelecer classes e subclasses de situações que tragam um significado novo para a função exponencial, de acordo com a Teoria dos Campos Conceituais, e não problemas puramente matemáticos. Sendo assim, o contexto em que a situação apresenta a função se torna relevante para a classificação.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresentaremos a seguir os resultados encontrados em nossa investigação. Deste modo, partiremos da pré-análise, momento em que selecionamos os livros didáticos que foram usados como documentos para as nossas análises, até a análise propriamente dita, em que discutiremos as estruturas de função exponencial, ampliando a partir de Santos (2022). Portanto, iremos apresentar como foram selecionadas as obras analisadas, bem como, o processo de estabelecimento das classes e as subclasses de situações, partindo do mapeamento dos significados assumidos pela função exponencial nas diferentes situações, encontradas nos livros analisados.

7.1 Pré-análise

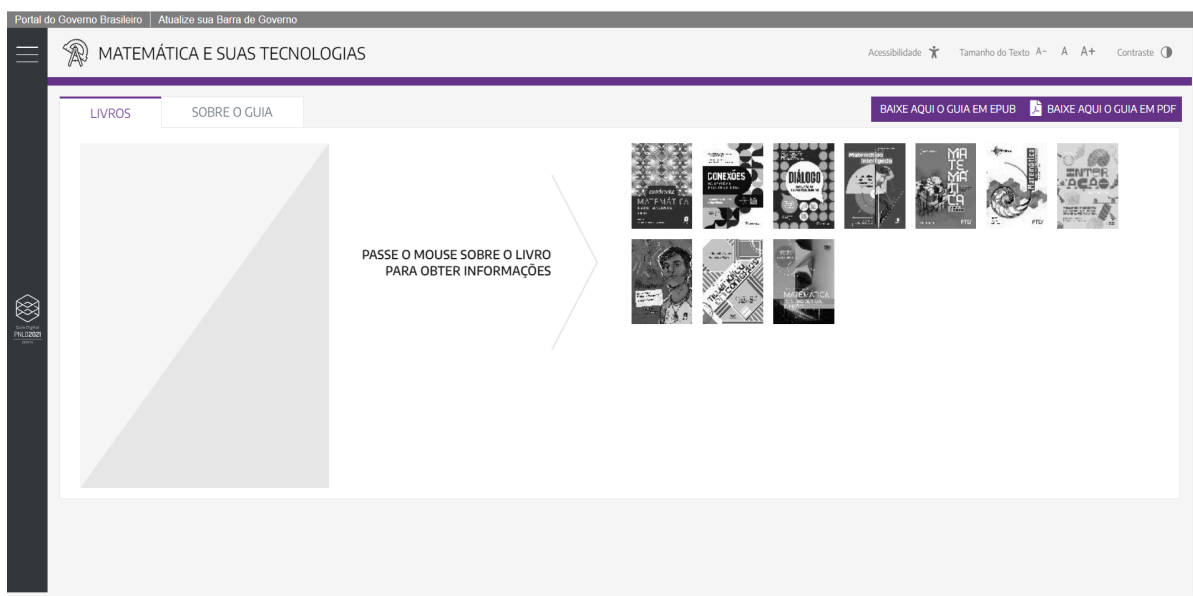
Com o intuito de selecionarmos situações de função exponencial realmente vivenciadas no Ensino Médio brasileiro, resolvemos buscar os livros aprovados no PNLD do ano de 2021, o motivo da escolha desta versão do programa deu-se devido às obras aprovadas, serem usadas desde o ano de 2021 até o momento atual, ano de 2024, nas diversas escolas brasileiras.

O conteúdo de função exponencial possui aplicações em diferentes disciplinas vivenciadas no Ensino Médio, a exemplo da Física, Matemática e Química; porém seu estudo é feito com maior atenção, durante o Ensino Médio, no objeto 2- matemática e suas tecnologias, contemplado pela disciplina de Matemática. Por isso, para nossas análises, buscamos os livros desta disciplina. Ao buscarmos pela listagem das obras aprovadas na versão 2021 do PNLD¹⁴, obtivemos um total de 10 resultados, como ilustrado na Figura 13, em que cada livro representa uma coleção diferente.

¹⁴ Disponível em:

https://pnld.nees.ufal.br/pnld_2021_didatico/componente-curricular/pnld-2021-obj2-matematica-e-suas-tecnologias

Figura 13 - Lista dos livros aprovados no PNLD do ano de 2021



Fonte: Brasil (2021).

Apesar da versão 2021 do PNLD contar com 10 obras aprovadas, conseguimos acesso apenas a 5 delas, as quais foram analisadas nesta primeira etapa no intuito de elegermos as 3 que possuíam maiores números de situações contextualizadas. O Quadro 5 mostra o número de situações encontradas em cada obra. Cabe salientar, que neste momento levamos em consideração apenas os livros usados no primeiro ano do Ensino Médio, tendo em vista que apenas estes continham o conteúdo de função exponencial.

Quadro 5 - Quantificação de situações por LD

Livro (Coleção)	Quantidade de problemas
Matemática em contextos	51
Matemática multiverso	29
Prisma	23
Matemática interligada	20
Quadrante	19

Fonte: Autor (2025).

Cabe salientar que, para a quantificação das situações, levamos em consideração apenas explicações, problemas propostos e problemas resolvidos, se estes apresentassem

contextualizações. Portanto, não consideramos situações puramente matemáticas, devido ao objetivo de nossa pesquisa. Portanto, os livros elegidos para as nossas análises pertencem às coleções: Prisma (de autoria de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Junior e Paulo Roberto Camara de Sousa), Matemática multiverso (de autoria de Joamir Roberto de Souza) e Matemática em contextos (de autoria de Luiz Roberto Dante e Fernando Viana). Além disso, para melhor articular nossas análises, chamaremos a partir daqui o livro da coleção Prisma de livro A, o da coleção Matemática multiverso de B e o da coleção Matemática em contextos de C.

7.2 Classificação inicial das situações

Para iniciar nossas análises, fizemos um estudo inicial nas situações de cada livro, no intuito de verificarmos quais poderiam ser classificadas de acordo com a classificação já elencada em Santos (2022) e quais poderiam gerar novas classes ou subclasses de situações. Fizemos ainda, um mapeamento em todas as situações com relação aos elementos dados e aos solicitados e, ainda, as representações usadas em cada situação e o contexto apresentado. Essa análise foi feita para separarmos os problemas que já possuem uma classificação, dos que ainda não possuem, bem como, para um estudo aprofundado de cada classe e subclasse de situação. No Quadro 6 encontra-se a análise inicial feita no LD A, com relação a classificação que propomos em Santos (2022).

Quadro 6 - Primeira Análise LD A

Classe	Num. de situações	Subclasse	Num. de situações
Taxa sobre taxa	18	Crescimento	6
		Decaimento	11
		Nenhuma	1
Cisão	2	—	—
Corrente/reprodução	0	—	—
Não classificadas	3	—	—

Fonte: Autor (2025).

Após essa análise inicial, das 23 situações contextualizadas de função exponencial, presentes no LD A, 20 se encaixam nas classes apresentadas por Santos (2022), sendo 18 situações classificadas em Taxa sobre taxa (das quais 6 pertencem a subclasse Crescimento, 11 à subclasse de Decaimento e uma, das 18, não se enquadra em nenhuma das subclasses), 2 situações pertencem a classe de Cisão e nenhuma, das 23 situações presentes no LD A foi classificada em Corrente/reprodução, como apresentado no Quadro 6.

Consideramos que a ausência de situações com a classificação “Corrente/reprodução” bem como, situações da classe “Taxa sobre taxa” pertencentes à subclasse de situações mistas, é algo preocupante, tendo em vista que isso pode acarretar em uma redução de significados que são apresentados aos estudantes, dificultando assim, o domínio do Campo Conceitual (Vergnaud, 1991).

Para além disso, é importante salientar que as situações, presentes no LD A, apresentam a função por meio de diferentes representações, bem como, em variados contextos. Sobre as representações, cabe ressaltar, que, segundo Stewart (2013, p. 12), uma função pode ser representada de quatro formas diferentes, sendo elas:

- verbalmente (descrevendo-a com palavras)
- numericamente (por meio de uma tabela de valores)
- visualmente (através de um gráfico ou diagramas)
- algebricamente (utilizando-se uma fórmula explícita)

Neste sentido, no Quadro 7 pode ser observado os contextos nos quais as situações apresentam a função exponencial e já no Quadro 8, seguinte, pode-se observar as representações que são usadas nos enunciados das situações, para representar as funções exponenciais.

Quadro 7 - Contextos das situações LD A

Contexto	Quantidade
Reprodução de Bactérias	5
Financeiro	4
Desintegração de substância	3
Decrescimento populacional	3
Diminuição de substância	1
Crescimento de planta	1
Meia-vida	1
Reprodução de Vírus	1
Resfriamento de um corpo	1

Fonte: Autor (2025).

Quadro 8 - Representações usadas nos enunciados do LD A

Representação	Quantidade
Algébrica	16
Verbal	3
Visual	2
Algébrica e visual	1
Numérica	1

Fonte: Autor (2025).

Das situações presentes no LD A, três não se enquadram na classificação que propomos anteriormente, em Santos (2022), elas serão analisadas posteriormente, na seção “discutindo características novas nas situações” e na seção “situações que reduzem o significado”, no intuito de entendermos quais significados a função exponencial assume dentro de cada situação. Além disso, a situação a 22, presente na página 68, apesar de ser classificada como Taxa sobre taxa, possui características diferentes das demais, inclusive das encontradas e discutidas em nosso trabalho de conclusão de curso (Santos, 2022), apresentando características distintas, resolvemos, no entanto, apresentá-la e discuti-la mais adiante.

Já com relação ao LD B, encontramos um total de 29 situações contextualizadas, destas, 16 se enquadram na classe de situação Taxa sobre taxa (das quais 10 são classificadas na subclasse crescimento e 6 na subclasse decaimento), 4 foram classificadas na classe de situações de Cisão e nenhuma das situações, assim como no LD A, foi classificada dentro da classe de situações de Corrente/reprodução e na subclasse mista, da classe Taxa sobre taxa, como pode ser observado no Quadro 9.

Quadro 9 - Primeira análise LD B

Classe	Num. de situações	Subclasse	Num. de situações
Taxa sobre taxa	16	Crescimento	10
		Decaimento	6
Cisão	4	—	—
Corrente/reprodução	0	—	—
Nenhuma	9	—	—

Fonte: Autor (2025).

Já no que se refere aos contextos e às representações utilizadas nas situações, assim como no LD A, o LD B apresenta uma variedade de contextos, bem como diferentes representações para a função a função exponencial nos enunciados, como podemos observar nos Quadros 10 e 11, seguintes.

Quadro 10 - Contextos das situações LD B

Contexto	Quantidade
Financeiro	7
Matético	5
Desintegração de substância	4
Meia-Vida	3
Reprodução de Bactérias	3
Industrial (Produção)	2
Divisão celular	1
Jogo	1
Diminuição de substância	1
Crescimento de árvore	1
Contaminação por vírus	1

Fonte: Autor (2025).

Quadro 11 - Representações usadas nos enunciados do LD B

Representação	Quantidade
Algébrica	14
Verbal	8
Algébrica e visual	2
Visual	3
Numérica	1

Fonte: Autor (2025).

Com relação ao LD C, foram encontradas um total de 50 situações contextualizadas, das quais 39 foram classificadas na classe de situação de Taxa sobre taxa (sendo 19 pertencentes à subclasse Crescimento, 16 à subclasse de Decaimento, 2 à subclasse mista, além de duas situações que não se encaixaram nas subclasses que propomos anteriormente, em Santos (2022).), 7 situações pertencentes a classe de Cisão e 3 a classe de Corrente/reprodução. Além disso, uma situação não se encaixou em nenhuma das classes já anunciadas, como pode ser observado no Quadro 12.

Quadro 12 - Primeira análise LD C

Classe	Num. de situações	Subclasse	Num. de situações
Taxa sobre taxa	39	Crescimento	19
		Decaimento	16
		Mista	2
		Nenhuma	2
Cisão	7	—	—
Corrente/reprodução	3	—	—
Não classificadas	2	—	—

Fonte: Autor (2025).

Com relação aos contextos e as representações usadas nos enunciados, o LD C, assim como os demais, traz variedade, abordando a função exponencial em diferentes contextos e por meio de variadas representações, como pode ser observado nos Quadros 13 e 14, seguintes.

Quadro 13 - Contextos das situações LD C

Contexto	Quantidade
Financeiro	14
Reprodução de Bactérias	10
Crescimento populacional	7
Jogo	5
Diminuição de substância	4
Desintegração de substância	4
Contaminação por vírus	4
Meia-Vida	3
Corrente eletrônica	3
Disseminação de informação	2
Carga de bateria	1
Dobradura de papel	1
Lançamento de uma moeda	1

Fonte: Autor (2025).

Quadro 14 - Representações usadas nos enunciados do LD C

Representação	Quantidade
Verbal	34
Algébrica	17
Numérica	5
Algébrica e visual	2
Visual	1

Fonte: Autor (2025).

A partir dessa análise, foi possível observarmos, ainda, que a função exponencial raramente aparece nas situações propostas nos livros didáticos do Ensino Médio, na forma que geralmente é definida nos livros, isto é, ela aparece como uma composição entre funções. Por isso resolvemos olhar as situações partindo da composição, como fizemos também em Santos (2022).

7.2.1 Impactos da composição na função exponencial

A função exponencial pode ser vista como uma relação unívoca que modela diferentes fenômenos, muitos deles comuns no dia a dia de algumas pessoas, por isso, o estudo dessa relação é feito na Educação Básica, com maior ênfase no Ensino Médio. Ela pode ser usada, por exemplo, para o cálculo da quantidade de bactérias em uma colônia, a desvalorização de um bem, ou ainda, para se expressar o crescimento de algumas espécies de árvores.

No geral, a função exponencial é definida por meio da expressão $f(x) = a^x$, ou $y = a^x$, sendo o “a” maior que zero e diferente de um (Stewart, 2013). Apesar disso, é comum que os estudantes ao enfrentarem as situações propostas nos livros didáticos encontrem funções que fujam a essa definição, isso acontece porque os estudantes, ao resolverem situações, raramente se deparam com fenômenos que são modelados por funções escritas dessa forma, ao invés disso, eles encaram composições entre funções, sendo a exponencial apenas parte de uma função principal.

Consideramos que quando não ampliada a definição, no intuito de alertar os estudantes sobre a existência de composições, podemos enfrentar dificuldades no que se refere à construção ou a variações dos esquemas. Isso porque, quando a função exponencial aparece de forma diferente da definição usada, a quantidade de elementos que podem ser dados e solicitados pode aumentar de forma considerável, bem como, pode acontecer alteração nas suas representações.

Para exemplificarmos o que chamamos de composição resolvemos apresentar a situação 3, presente na página 75 do LD A analisado. Na situação é apresentada uma expressão algébrica para uma função que modela o decaimento radioativo de uma amostra que possui inicialmente 16 gramas, em função do tempo em anos, e solicitado o valor em anos que fará com que a amostra atinja massa igual a 2^{-111} gramas, como pode ser observado na Figura 14.

Figura 14 - Situação 3 LD A

3. As substâncias radioativas, ao atingirem a meia-vida, têm as suas massas iniciais reduzidas pela metade. Tomemos hoje 16 gramas de uma substância radioativa, cuja meia-vida é de 5 anos. A massa dessa substância é uma função do tempo, contado a partir de hoje, dada por $M(n) = 16 \cdot 2^{\frac{-n}{5}}$. Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, qual o valor de n ?

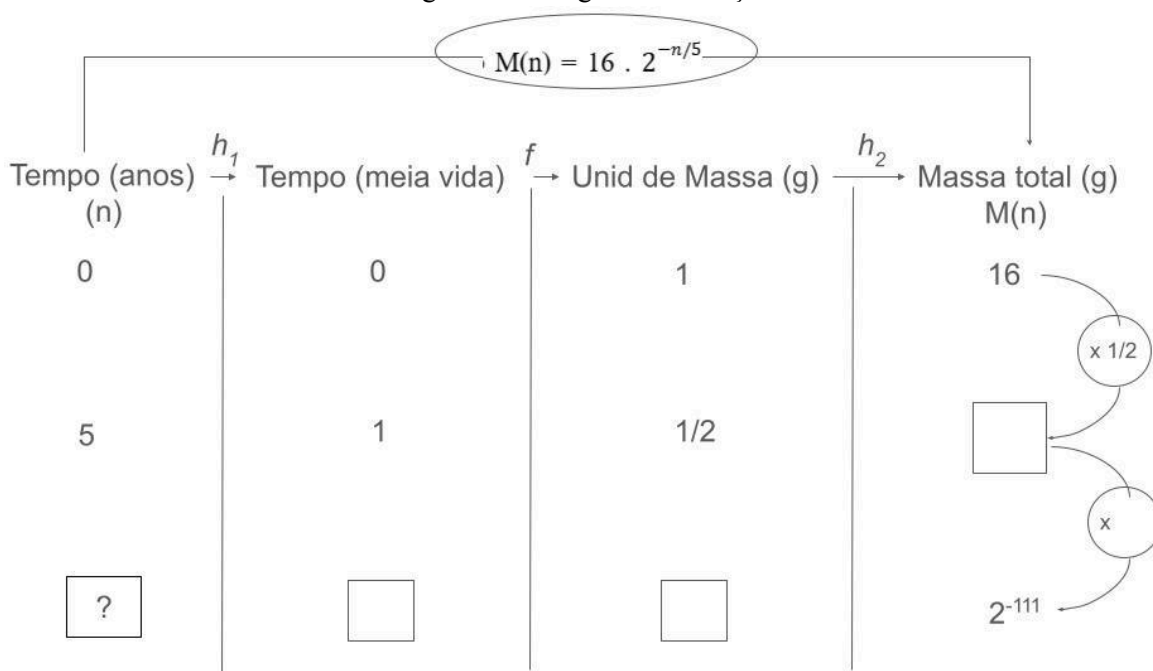
575 anos

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 75).

É importante observarmos que a função $M(n) = 16 \cdot 2^{-n/5}$, usada na situação para modelar o decaimento radioativo, não é uma função do tipo $f(x) = a^x$, aqui ocorrem composições e a exponencial é apenas parte da função geral. As funções com essas características, chamaremos daqui em diante de função do tipo exponencial (Lima *et al.*, 2005), isso porque apesar de apresentarem características da função exponencial fogem a definição inicial anunciadas em diversos livros didáticos para a função exponencial, o que pode gerar variação nos esquemas de resolução, nas representações e nas combinações entre os elementos dados e solicitados e, ainda, nas propriedades da função e nos invariantes do conceito.

Nesta situação encaramos duas composições, a primeira (h_1) que é dada na base da exponencial, isso porque podemos observar que o termo variável da função foi composto com uma função de mudança de unidade, compondo uma função de proporcionalidade simples (Gitirana *et al.*, 2017) entre diferentes unidades de tempo, matematicamente uma função linear. Como pode ser observado na Figura 15.

Figura 15 - Diagrama da função



Fonte: Autor (2025).

E, a segunda composição (h_2) é dada por outra função de comparação multiplicativa (Gitirana *et al.*, 2017) que, em termos algébricos, transforma a variável e é uma outra função, uma linear que compara de forma multiplicativa os que contam com os que ouvem. Com essas composições os invariantes da função exponencial mudam, isso porque a composição trará alterações para a estrutura funcional. Nesta situação podemos perceber, por exemplo, que a imagem do zero não será 1, como sempre ocorre na exponencial “pura”, isso nos leva a uma mudança nos invariantes válidos. Portanto, nas funções do tipo exponencial ocorrerá quebra de invariantes, isso porque esse invariante terá sua validade reduzida às funções exponenciais modeladas por $f(x) = a^x$, as quais colocamos aqui como puras.

Por outro lado, podemos perceber que a constante $1/5$ que aparece multiplicando a variável, transformando-a em uma função, gera também mudanças na estrutura. No entanto, nenhuma das composições alteram o significado assumido pela parte exponencial. Ao observarmos as situações percebemos que essa última composição, geralmente, advém de uma troca de unidade da variável, neste caso passamos da variável tempo em anos para a variável tempo em ciclos de meia vida de materiais radioativos. Nesta situação, por exemplo, é apresentado uma situação da classe de cisão, tendo como contexto a meia-vida, que geralmente é modelada por meio de ciclos, tendo uma quantidade de anos constante que mede a duração de cada ciclo, quando a função usa a unidade de tempo correspondente a cada ciclo

e não a quantidade de ciclos, ocorre uma composição de funções, e a mudança de variável passa a ser também uma função. Já o valor negativo que acompanha a variável advém da propriedade de potência, que nos diz que $\left(\frac{1}{a}\right)^n = a^{-n}$.

Cabe salientar que esta situação é apenas um exemplo, isso porque as possibilidades de compor as funções são muitas. Podemos compor funções exponenciais de formas muito variadas, seja com outras exponenciais, com funções de outros tipos. No entanto, ao analisarmos as situações encontradas nos livros analisados, percebemos que a forma mais comum de composição que pode ser encontrada nos problemas se dá pela a função exponencial composta com funções lineares, como é o caso da função apresentada anteriormente.

Ao perceber que as composições são comuns nos problemas propostos nos livros analisados, resolvemos trazer, no Quadro 15, um levantamento da quantidade de situações contextualizadas de cada livro que são modeladas por uma função do tipo exponencial, no intuito de melhorarmos nossas discussões.

Quadro 15 - Levantamento de situações compostas

Livro didático	Quant. de situações compostas	Percentual correspondente
LD A	19	83 %
LD B	24	83 %
LD C	42	84 %

Fonte: Autor (2025).

Observamos que em todos os livros analisados a quantidade de situações que apresentam ou são modeladas por uma função do tipo exponencial ultrapassa os 80 %, isso significa que a cada dez situações contextualizadas enfrentadas pelos estudantes, eles encontraram, no mínimo, oito que apresentam algum tipo de composição, levando em consideração que eles resolveram todas as situações propostas nos livros didáticos. Isso nos chama a atenção porque a definição inicial, não dá conta sequer de 20% das situações.

Apesar disso, entre os livros analisados apenas dois (o LD A e o LD B) ampliam a definição e apresentam a função exponencial como uma função composta, já nomeando como “função do tipo exponencial” a função modelada por $f(x) = b \cdot a^x + c$, em que a , b e c são constantes. Por isso, pensamos que seja relevante que os livros didáticos apresentem

também a função do tipo exponencial, uma vez que em seus problemas, em grande maioria, os estudantes se deparam com composições.

Para além disso, no intuito de entendermos melhor a estrutura exponencial e nos aprofundar nas classes de situações, passamos a realizar, ainda neste momento inicial de análise, um estudo sobre os elementos que são dados e solicitados nas situações dos livros didáticos analisados, no intuito de articular os elementos da situação com os elementos da função exponencial, bem como, identificar possíveis alterações que a composição pode acarretar na função ou ao significado assumido por ela dentro das situações.

No entanto, para nossa organização, partimos da definição inicial da função, no intuito de observarmos as possibilidades de elementos que as situações podem dar e solicitar ao aluno.

Observamos que quando a função do tipo exponencial é dada ou pode ser modelada por este formato, existe uma quantidade finita de formas de combinações de elementos que podem ser dados e solicitados nas situações, essas combinações irão ser compostas partindo de cinco elementos em termos algébricos, que são eles:

- I. A taxa multiplicativa,
- II. A imagem do zero,
- III. A imagem de valores intermediários,
- IV. A imagem de um valor genérico ou lei de formação,
- V. O valor do domínio de imagens intermediárias.

Esses elementos apresentam diferentes significados em cada classe de situações, por isso, resolvemos no Quadro 16 apresentar cada um em cada classe.

Quadro 16 - Significado dos elementos em cada classe

(Continua).

	Taxa sobre taxa	Cisão	Corrente/Reprodução
I	Taxa de crescimento/ decaimento	Quantidade de partições gerada na cisão	Quantidade de grandezas geradas a cada fase.
II	Quantidade ou valor inicial	Quantidade existente no primeiro ciclo	Quantidade existente no primeiro ciclo

	Taxa sobre taxa	Cisão	Corrente/Reprodução
III	Valor ou quantidade correspondente a um tempo ou ciclo intermediário	Quantidade correspondente a um ciclo intermediário dado	Quantidade correspondente a um ciclo intermediário dado
IV	Regra geral da relação	Regra geral da relação	Regra geral da relação
V	Tempo ou ciclo correspondente a um dado valor ou quantidade	Ciclo correspondente a uma quantidade de grandezas existentes	Ciclo correspondente a uma quantidade de grandeza gerada na fase.

Fonte: Autor (2025).

Esses elementos assumem diferentes significados em cada estrutura. Com relação à taxa multiplicativa, na classe de Taxa sobre taxa ela representa crescimento e/ou decaimento acumulativo. Na classe de Cisão, ela representa em quantas partes a grandeza inicial é dividida. Já na classe de Corrente/Reprodução, ela representa a quantidade de elementos gerados por cada elemento, quando ocorre uma corrente, ou a geração de sujeitos, quando ocorre uma reprodução, um processo é o inverso do outro, por isso o mesmo significado. Assim, a taxa multiplicativa assume diferentes significados em cada estrutura devido ao que ela modela e ao contexto da situação.

Já a imagem do zero, que é diferente da unidade apenas para o caso das funções do tipo exponencial, na classe Taxa sobre taxa representa quantidade ou valor inicial, em Cisão população ou quantidade inicial e em Corrente/Reprodução quantidade existente na primeira fase.

Em contrapartida, a imagem de valores intermediários representa na classe Taxa sobre taxa o valor intermediário, em Cisão e em Corrente/Reprodução população ou quantidade intermediária.

A imagem de um valor genérico representa a lei de formação ou regra matemática que permite que seja encontrado qualquer valor de imagem ou domínio intermediário, em todas as classes. Por fim, o valor de domínio de imagens intermediárias representará ciclos, em Taxa sobre taxa representa ciclo de crescimento e/ou decaimento acumulativo, em Cisão representa ciclos de subdivisões e, em Corrente/Reprodução representa ciclos de geração ou de envio. É importante ressaltar que os ciclos possuem grandezas próprias, o que acarreta, por vezes, em composições de funções.

As combinações de elementos, assim como a forma que esses elementos são representados pode sofrer alterações, variando dentro de cada situação, o que talvez faça com que o sujeito organize de diferentes formas os esquemas durante o enfrentamento das situações (Vergnaud, 1991), mesmo que estas pertençam à mesma classe ou subclasse de situações.

Sendo assim, podemos estipular combinações possíveis, partindo dos elementos que geralmente são dados e solicitados nos problemas propostos nos livros didáticos do Ensino Médio brasileiro. Neste sentido, o Quadro 17 apresenta algumas dessas possibilidades.

Quadro 17 - Combinações entre os elementos dados e solicitados

Elementos que podem ser dados	Elementos que podem ser solicitados
- Taxa multiplicativa; - Imagem do zero.	- Imagem de valores intermediários; - O valor do domínio de imagens intermediárias; - A imagem de um valor genérico; - Representações da função.
- Imagem do zero; - Imagem de um ciclo intermediário.	- Imagem de valores intermediários; - O valor do domínio de imagens intermediárias; - A imagem de um valor genérico; - Representações da função; - Taxa multiplicativa.
- A imagem de um valor genérico.	- Imagem do zero; - O valor do domínio de imagens intermediárias; - Taxa multiplicativa; - Imagens de valores intermediários; - Representações da função.

Fonte: Autor (2025).

Consideramosmos, no entanto, que esses elementos variam de classe para classe, por isso, resolvemos apresentar alguns exemplos, na tentativa de evidenciar esses diferentes elementos em cada classe de situação.

O primeiro exemplo que resolvemos trazer se encontra na página 45 do LD C. Na situação, é dito que José contou um segredo para quatro pessoas, na fase zero, e cada uma das pessoas que ouviram o segredo contaram para outras quatro pessoas, na Fase 1, seguindo esse comportamento nas fases seguintes, indefinidamente. É solicitado uma expressão que

expresse a quantidade de pessoas que ouviram o segredo em função da fase, como pode ser observado na Figura 16.

Figura 16 - Situação 35 LD C

35. (Fieb-SP) Considere a seguinte situação.

- Fase 0: José contou um segredo para 4 pessoas.
- Fase 1: Cada uma das pessoas que ouviu o segredo na fase anterior contou o mesmo segredo para outras 4 pessoas.
- Fase 2: Cada uma das pessoas que ouviu o segredo na fase anterior contou o mesmo segredo para outras 4 pessoas.
- Fase 3: ...
- ...

Considerando-se que as fases seguintes repetem o ocorrido na fase imediatamente anterior, se fizermos x representar o número associado a cada uma das fases, $S(x)$ representar o número de pessoas que ouviu o segredo na fase x e $\mathbb{N}$ representar o conjunto dos números naturais, então a função $S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que modelará essa situação poderá ser representada por: **Alternativa d.**

a) $S(x) = 4x$.

b) $S(x) = x^4$.

c) $S(x) = 4x + 1$.

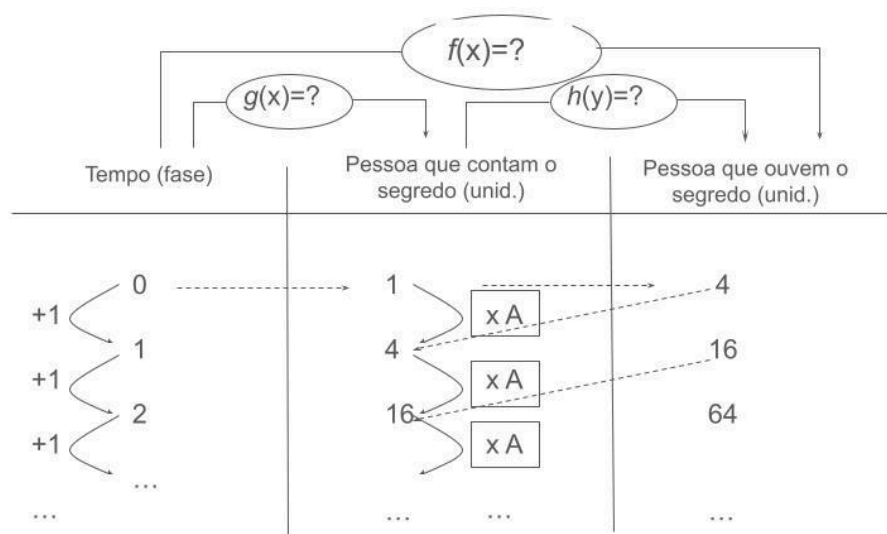
d) $S(x) = 4^{x+1}$.

e) $S(x) = 4^x$.

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 35).

Nesta situação, a função exponencial pura que a compõe é classificada como Corrente/Reprodução, na fase 0 (grandeza 1 - Tempo medido em fase/ciclos) somente José (grandeza reproduzida - Pessoas que contam o segredo) conta o segredo a 4 pessoas, que o ouvem (grandeza 3 - Pessoas que ouvem o segredo). Podemos observar que a imagem do tempo zero, representada por José (1), e compondo com a comparação entre as que contam e as que ouvem é 4 vezes maior. No entanto, as que ouvem na fase 0 são as que contam na fase 1. Isso ocorre a cada fase. Nessa situação, a taxa representa a quantidade de pessoas com quem cada uma das pessoas que ouviu o segredo compartilha na fase seguinte. Para melhor compreensão resolvemos construir um diagrama que sintetiza a situação, ele se encontra na Figura 17.

Figura 17 - Diagrama para a situação 35 LD C



Fonte: Autor (2025).

Podemos observar, partindo do diagrama e da situação, que inicialmente o segredo é contado (reproduzido) para quatro pessoas (na fase zero), que a cada fase o número de pessoas que ouvem o segredo cresce a uma taxa multiplicativa constante, igual a 4, e que cada uma das pessoas que ouviram o segredo na fase anterior passa a poder contar o segredo para mais quatro pessoas na fase posterior. As pessoas que ouvem é quatro vezes maior que as pessoas que contam em uma mesma fase. Sendo assim, podemos modelar a função

$$f(x) = 4 \times 4^x,$$

com x representando o tempo, em ciclos, e $f(x)$ as pessoas que ouvem o segredo a cada ciclo.

Como $4 \times 4^x = 4^{x+1}$, $f(x) = 4^{x+1}$.

Essa função apresenta uma peculiaridade, quando observadas as propriedades da função exponencial pura, principalmente aquela que diz que para toda exponencial a imagem do zero vale 1, visto que neste caso a propriedade não é válida. Aqui, a imagem do zero por f vale 4, como pode ser observado no diagrama. Mas como $f(x) = h(g(x))$, temos que o $g(0) = 1$ portanto, $f(0) = h(g(0)) = h(1) = 4$.

Com relação aos elementos, podemos observar que na situação é dada a imagem do zero, que é a quantidade de pessoas que José contou inicialmente o segredo, e a taxa multiplicativa, que pode ser encontrada ao observarmos o crescimento das pessoas que ouviram o segredo fase a fase. Além disso, é solicitado uma fórmula algébrica que possibilite calcular a quantidade de pessoas que ouviram o segredo, em função da fase, ou seja, o que se quer é a imagem de um valor genérico, a lei de formação.

Resolvemos reescrever a situação na tentativa de melhorar as nossas discussões, a reescrita encontra-se na Figura 18.

Figura 18- Reescrita da situação 35

35. (Fieb-SP) Considere a seguinte situação.

- Fase 0: José contou um segredo a uma quantidade de pessoas.
- Fase 1: Cada pessoa contou o segredo a mesma quantidade de pessoas.
- Fase 2: Cada pessoa que ouviu o segredo na fase anterior o contou a mesma quantidade de pessoas.
-
- Fase n: As pessoas que ouviram o segredo na fase anterior contaram o segredo a mesma quantidade de pessoas.
-

Considerando-se que as fases seguintes repetem o ocorrido na fase imediatamente anterior e que na fase 10, o número de pessoas que contaram o segredo foi 59.049. Determine a quantas pessoas cada pessoa contou o segredo em cada fase.

Fonte: Adaptado de Dante; Viana (2020, p. 35).

Agora, é apresentado que na fase inicial, José conta um segredo para uma certa quantidade de pessoas, essa quantidade, no entanto é desconhecida, e que a cada fase as pessoas que ouviram o segredo o conta a uma mesma quantidade de pessoas. Além disso, é posto que o número de pessoas que contaram o segredo na fase 10 foi de 59.049 e solicitado quantas pessoas contaram o segredo em cada fase.

Diferente da situação anterior, nesta reescrita não é dada a imagem da fase zero nem a taxa multiplicativa. O que é dado é que a quantidade de pessoas cresce a uma mesma taxa, sem que o seu valor seja dado, e a imagem de uma fase intermediária dada. Esta situação, ainda assim, é classificada em Corrente/Reprodução, devido ao significado assumido pela taxa exponencial. Assim, identificamos que é possível que haja a variação entre os elementos dados e solicitados sem que haja a variação de classe ou subclasse de situação, inclusive, consideramos que essa variação seja de grande ajuda para que o aluno possa vir a compreender as estruturas exponenciais. São as subclasses geradas em cada classe.

O segundo exemplo que resolvemos trazer encontra-se na página 52, também no LD C, nele é apresentada a desvalorização sofrida por um veículo em função dos anos de uso, como pode ser observado na Figura 19.

Figura 19 - Situação 50 LD C

50. Após 4 anos de uso, o valor de um veículo passou de R\$ 37.000,00 para R\$ 17.560,00. Qual foi a taxa anual de desvalorização desse veículo? **Aproximadamente 17% ao ano.**

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 52).

Esta situação é classificada na classe Taxa sobre taxa e na subclasse de Decaimento, tendo em vista que o veículo teve seu valor desvalorizado. Podemos observar que na situação é dado a imagem da fase zero, expressa por 37.000 reais, valor inicial do veículo, e a imagem de uma fase intermediária, expressa por 17.560 reais, valor do veículo após 4 anos de uso (na quarta fase), e solicitada a taxa multiplicativa (taxa de desvalorização).

Neste exemplo a taxa representa uma desvalorização cumulativa. Portanto, podemos observar que a taxa e a imagem da fase zero assumem grandezas e significados diferentes em cada classe de situação. Vale salientar que nesse tipo de situação, admite-se imagens de valores intermediários entre fases, a exemplo da desvalorização após um ano e meio. Estamos diante de situações em que a progressão geométrica (ou função exponencial definida nos Naturais) não dá conta de tratar o problema.

O terceiro exemplo que resolvemos apresentar encontra-se na situação 7, presente na página 81 do LD B. Na situação é apresentada a preocupação do governo de uma cidade com uma doença infectocontagiosa causada por um tipo de bactéria. É apresentada, ainda, a função que modela o crescimento da população de bactérias e solicitado que se estude o que acontecerá com a população de bactérias após 20 minutos da observação feita inicialmente, a qual deu origem ao modelo, como pode ser observado na Figura 20.

Figura 20 - Situação 7 LD B

7. (Enem/MEC) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será **alternativa d**

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| a) reduzida a um terço. | c) reduzida a dois terços. |
| b) reduzida à metade. | d) duplicada. |
| | e) triplicada. |

Fonte: Souza (2020, p. 81).

Esta situação é classificada na classe de cisão, pois ela apresenta uma função que modela a população de um tipo de bactéria, que se reproduzem, por cisão de si mesmas, como

visto anteriormente. Nesse tipo de situação a grandeza inicial (quantidade de bactérias inicial) deixa de existir, passando a existir a quantidade da fase seguinte, o que difere das situações do tipo reprodução. Podemos observar que na situação foram dadas a imagem de um tempo genérico, por meio da lei de formação, e a imagem do tempo inicial (o zero), por meio da população inicial de bactérias. E que é solicitado a imagem de um valor intermediário, pois para que se estude o que acontece com a população após 20 minutos é preciso saber qual a população que se terá após esse tempo. Nesta situação, diferente das encontradas nos exemplos apresentados até aqui, a imagem do zero representa a população inicial de bactérias, já a taxa multiplicativa, apesar de não explicitado na situação, representa a quantidade de indivíduos que cada bactéria gera a cada ciclo de reprodução.

É importante observarmos que em cada classe de situação os elementos variam. O zero da função representará grandezas diferentes, acarretando em mudanças nas grandezas da imagem e no domínio de valores intermediários, e ainda, que a taxa multiplicativa, assumirá um significado diferente em cada classe de situação, gerando mudanças na lei de formação. Por isso, olhar apenas para estrutura matemática usada para representar uma função exponencial não garante que o estudante consiga identificar o uso da função exponencial de uma classificação para a outra.

Quando analisamos a taxa multiplicativa, presente na exponencial nas classes de situações notamos, como evidenciado nos exemplos, que ela assume diferentes significados. Na classe de taxa sobre taxa, a taxa multiplicativa representará crescimento e/ou decaimento cumulativo, a depender da subclasse a quem pertença a situação. Na classe de cisão a taxa representa a quantidade em que se partem as grandezas, aqui, pela forma que surge a taxa, é garantido que cada parte gerada seja igual a geradora. Em Corrente/Reprodução a taxa representa a quantidade que é passada de uma fase para a outra. Portanto, os elementos da função exponencial apesar de serem os mesmos, assumirão diferentes grandezas e significados a depender da classe a qual a situação pertença.

Além disso, é possível observarmos que a forma que os elementos são dados e solicitados nos problemas pode variar, podendo fazer com que o aluno precise, mesmo que enfrente situações de mesma classe, reorganizar seus esquemas. Sendo assim, ponderamos que além da necessidade do professor proporcionar situações variadas, com diferentes significados, exista também a necessidade de seleção de situações que variem os elementos dados e solicitados, para que assim, seus estudantes possam melhor compreender as diferentes classes e subclasses de situações e por consequência o Campo Conceitual.

Dentro do campo das funções exponenciais, seja quando ela pode ser modelada por uma função exponencial pura ou por funções do tipo exponencial, as semióticas (gráficos, tabelas e diagramas) utilizadas podem também apresentar diversas variações nas situações variando de situação para situação. No entanto, em nossa pesquisa não aprofundaremos as variações advindas das representações.

Além disso, quando a função exponencial aparece a partir de uma composição entre funções as possibilidades de combinações entre os elementos dados e solicitados aumentam consideravelmente, a depender do tipo de composição que é feita, ou ainda, o fenômeno modelado pela função exponencial. Como existirão diferentes tipos de composição, bem como, diferentes processos ou fenômenos que são modelados por uma função do tipo exponencial, muitos deles não vivenciados durante o Ensino Médio, não listaremos todas as combinações.

Observamos, ainda, que em muitas situações, em que a função apresentada é uma função do tipo exponencial, a composição é usada como uma saída para que o estudante conheça contextos ou fenômenos exponenciais distantes do Ensino Médio.

No entanto, consideramos que os cinco elementos, mencionados acima, são característicos nas situações de função exponencial, aparecendo tanto na função exponencial pura, $y = a^x$, quanto nas composições, que advém da forma genérica, seja por meio dos elementos dados ou solicitados. Sendo assim, consideramos que esses elementos são característicos da função exponencial e nos ajudam a entender o significado assumido pela relação funcional em cada situação; além disso, podem ajudar os professores e autores de livros didáticos, na seleção situações que busquem variar as possibilidades de combinações, no intuito de oportunizar aos seus estudantes o enfrentamento de situações com combinações de diferentes elementos dados e solicitados.

7.2 Características novas encontradas nas situações

Resolvemos apresentar nesta subseção algumas situações encontradas nos livros didáticos analisados, sejam situações que pertencem às classes que evidenciamos em Santos (2022), ou não. Essas situações nos chamaram a atenção por apresentarem características diferentes das que já foram discutidas até aqui, seja devido ao contexto, a estrutura ou, ainda, ao fenômeno que modela. Elas nos ajudam nas explicações e definições de cada classe ou subclasse já estipulada, ou ainda, nos levam a uma nova classe ou subclasse de situação.

A primeira situação que resolvemos discutir foi a Situação 1, presente na página 34 do LD C. Nesta situação gostaríamos de evidenciar a forma em que se origina a taxa. A situação apresenta um exemplo de correntes de mensagens eletrônicas em que inicialmente uma pessoa envia uma mensagem para três outras, cada uma dessas três que recebem enviam para outras três, e cada uma das outras que recebem enviam para mais três e assim por diante.

Na situação é afirmado que, por vezes, essa ação trata-se de uma simples brincadeira, porém em outros casos o objetivo é a disseminação de informações. Ainda na situação, é dito que esse tipo de compartilhamento permite que o número de pessoas que recebem a mensagem cresça de forma exponencial em um curto intervalo de tempo, como se pode observar na Figura 21.

Figura 21 - Situação 1, LD C

Situação 1 Não escreva no livro.

Mensagens via aplicativo

Certamente você já deve ter recebido alguma corrente de mensagem via aplicativo de mensagens ou rede social, não é? Trata-se de mensagens que, ao final do conteúdo, pedem para serem enviadas para certa quantidade de contatos. Algumas são apenas uma brincadeira, enquanto outras pretendem espalhar uma *fake news* (notícia falsa). O maior objetivo das correntes de mensagens é que a quantidade de envios cresça de maneira muito rápida para alcançar muitas pessoas.

Vamos supor que uma corrente peça para ser enviada para outras 3 pessoas e você fará esse envio na 1ª hora. Depois, cada uma das pessoas que receberam a corrente de você farão o envio para 3 novas pessoas na 2ª hora.

a) Quantas novas pessoas recebem a mensagem na 1ª hora? E na 2ª hora? 3 pessoas.
9 pessoas.

b) Seguindo a mesma regularidade, quantas pessoas recebem a mensagem na 3ª hora? 27 pessoas.

c) De que maneira a quantidade y de novas pessoas que recebem a corrente pode ser escrita em **função** da quantidade x de horas após o início? Converse com os colegas e crie alguma forma de representar essa relação. Exemplo de resposta: $y = 3^x$

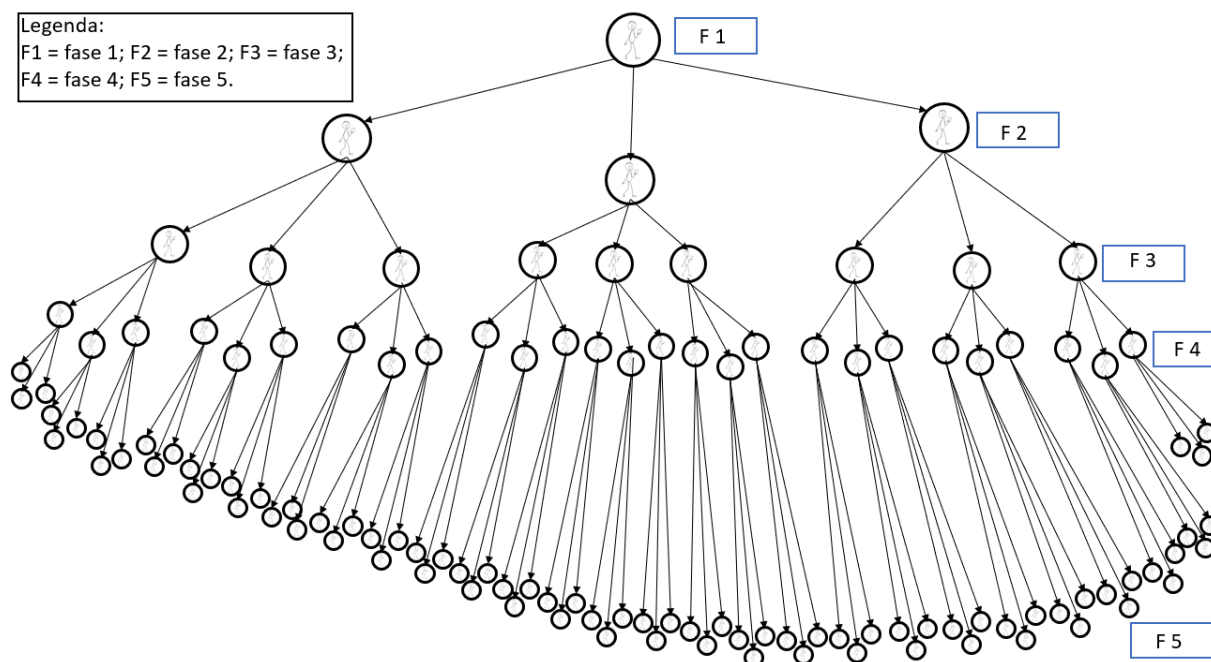


Os smartphones e os aplicativos de mensagens ampliaram as possibilidades de comunicação no século XXI. No entanto, aumentou também o compartilhamento de conteúdo falso, como notícias manipuladas ou dicas de saúde sem comprovação.

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 34).

No intuito de entendermos melhor como se dá o crescimento de pessoas que recebem a mensagem à medida que o tempo passa, resolvemos trazer, na Figura 22, um diagrama que ilustra esse crescimento.

Figura 22 - Diagrama para situação 1 do LD C



Fonte: Autor (2025).

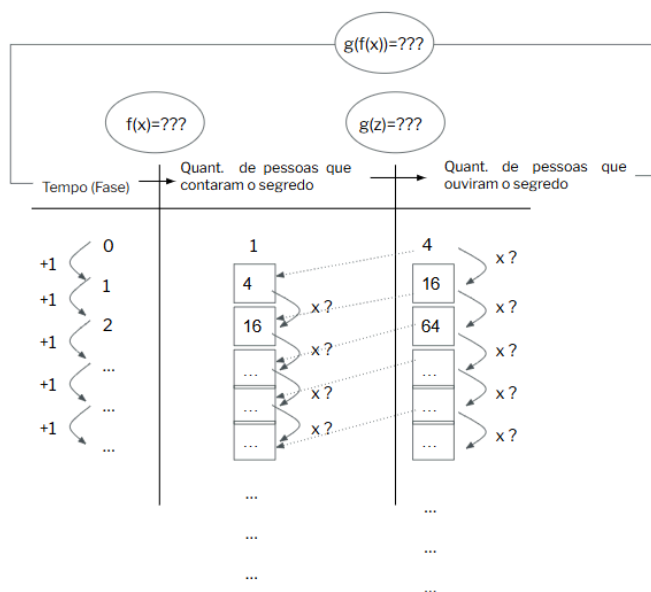
No diagrama da Figura 22, podemos observar que na fase 1, momento inicial, apenas uma pessoa possui a mensagem, ela envia a mensagem para mais 3, que ao receberem, na fase 2, enviam para outras três pessoas e esse ciclo continua, de modo que, sempre quem recebe a mensagem a envia para outras três pessoas. Neste sentido, classificamos essa situação, com base na classificação que propomos em Santos (2022), na classe de situação Corrente/reprodução.

Resolvemos trazê-la para discussão para que fosse possível evidenciar o significado que chamamos de corrente. Esse significado foi dado a partir das características que a função assume dentro da situação, ela é modelada partindo da taxa multiplicativa, que na situação não aparece de forma explícita. Além disso, podemos observar que a quantidade total de pessoas que recebem a mensagem se difere da quantidade de pessoas que recebem a mensagem em cada fase. Esta última pode ser calculada por meio da função exponencial (ou o termo de uma Progressão Geométrica), aquela, a primeira, por meio de uma soma das quantidades de pessoas de cada fase, matematicamente a soma da progressão geométrica¹⁵. Isso ocorre porque nesta classe de situação, as grandezas que geram novas não participam ou são contadas na fase posterior.

¹⁵ É uma sequência em que a razão entre dois termos consecutivos será sempre constante.

Por isso, é importante observar que nesta situação a taxa representa que a cada fase, cada pessoa que possuía a informação na fase anterior envia a mensagem para outras três. Neste sentido, o número de pessoas que recebem a mensagem pode ser calculado em função da fase. Para evidenciar a lei de formação desta função, construímos um diagrama, que se encontra na Figura 23.

Figura 23 - Diagrama 2 para situação 1 do LD C



Fonte: Autor (2025).

Podemos observar, partindo dos dois diagramas, que a cada pessoa que recebeu a mensagem passa a poder enviá-la, na fase posterior. Sendo assim, o número de pessoas que pode fazer o envio da mensagem será o número de pessoas que recebeu a mensagem na fase anterior, como evidenciado na Figura 23. Por isso, a quantidade de pessoas que recebem a mensagem a cada fase, sempre será o triplo da quantidade de pessoas que a receberam na fase anterior, levando em consideração a forma que se dá o crescimento. Portanto, a quantidade de pessoas que recebem a mensagem a cada fase pode ser modelada por uma função do tipo $f(x) = 3^x$, em que x representa a fase.

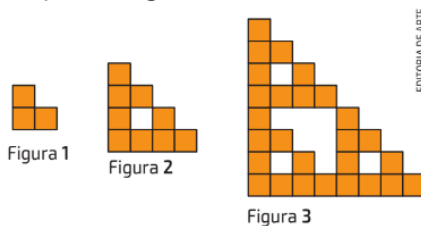
Cabe ressaltar que a função $f(x)$ representa a quantidade de pessoas que contam a mensagem a cada fase e não a quantidade de pessoas que recebem a mensagem. Esse total é representado pela função $g(z)$, que, no entanto, ainda não é a função que representa a quantidade de pessoas que ouvem o segredo em função do tempo (fases). Esse total é dado por meio de uma função composta, representada no diagrama pela função $g(f(x))$. Além disso, é importante observarmos que a função composta, que apresentamos não calcula o total

acumulado de pessoas que recebem a mensagem até uma dada fase, ela calcula o total de pessoas que receberam a mensagem na fase. O total acumulado pode ser calculado por meio da soma dos n termos da Progressão Geométrica formada pelos valores $g(f(0))$, $g(f(1))$, $g(f(2))$, ..., $g(f(n))$, em que n é a fase considerada.

A segunda, foi a situação 34 presente na página 85 do LD B, nela exploraremos um novo contexto, diferente daqueles que encontramos em Santos (2022). Esse contexto será a característica discutida. Na situação 34 é apresentada a representação de uma sequência de três figuras, que são compostas por quadradinhos idênticos, de cor laranja, e solicitado que se descubra qual a expressão relaciona a quantidade de quadradinhos como o número da figura, quantos quadradinhos terá a figura 4 e qual a figura contém um total de 720 quadradinhos, como ilustra a Figura 24.

Figura 24 - Situação 34 LD B

34. As figuras a seguir são compostas por representações de quadradinhos na cor laranja idênticos e correspondem aos primeiros termos de uma sequência de figuras. Analise.



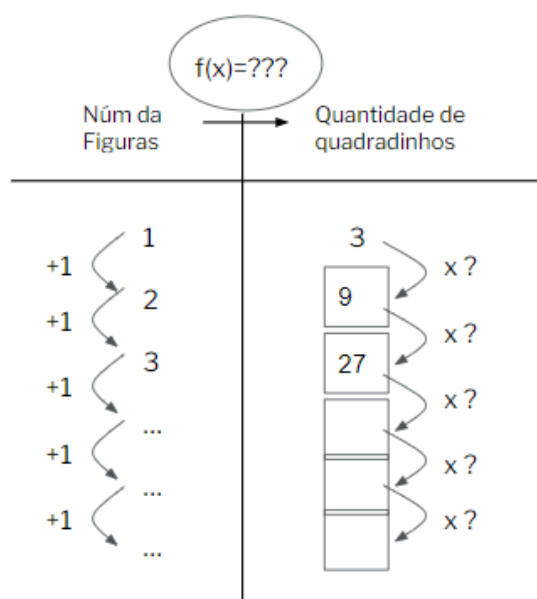
- a) Qual das funções a seguir expressa a quantidade de representações de quadradinhos na cor laranja da figura n dessa sequência? Justifique sua resposta. II
- I. $f(n) = 3n$
 - II. $f(n) = 3^n$
 - III. $f(n) = 3 + n$
- b) A Figura 4 dessa sequência é composta por quantas representações de quadradinhos na cor laranja? 81 representações de quadradinhos na cor laranja.
- c) Qual figura dessa sequência é composta por 729 representações de quadradinhos na cor laranja? Figura 6

Fonte: Souza (2020, p. 85)

Antes de iniciarmos, podemos pensar a situação observando que a segunda imagem é formada por 3 figuras iguais à primeira imagem. E que, a terceira imagem é formada por três figuras iguais a da segunda imagem. A cada fase a nova imagem é composta por 3 figuras iguais a da fase anterior.

No intuito de melhorarmos as discussões resolvemos modelar a situação por meio de um diagrama, no qual nomeamos a função que modela a relação existente entre a quantidade de quadradinhos e a ordem que possui a figura na sequência por $f(x)$. O diagrama se encontra na Figura 25.

Figura 25 - Diagrama de solução situação 34



Fonte: Autor (2025)

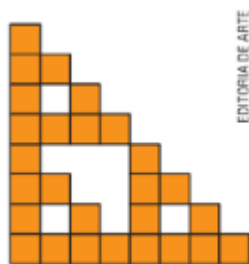
No diagrama, e na situação, podemos observar que a primeira imagem é composta por 3 quadradinhos,



enquanto a segunda figura é composta por 3 figuras iguais a primeira, totalizando $3 \times 3 = 9$ quadradinhos.



e a terceira imagem por 3 figuras iguais a da segunda imagem, totalizando $3 \times 9 = 27$.



Ou seja, na medida em que se avança em uma unidade a ordem da figura, partindo da primeira, a quantidade de quadradinhos que compõem a nova figura será o triplo da quantidade que compõem a figura anterior. E, neste sentido, podemos modelar a relação por meio de uma expressão matemática. Sendo assim, a quantidade de quadradinhos que compõem cada figura com relação a sua posição na sequência, pode ser calculada por meio da função $f(x) = 3^x$, em que x representa a posição da figura na sequência.

O que garante que a função seja modelada por esse formato é o fenômeno que ela modela, isso porque, apesar de não ser evidenciado na situação, as figuras representam um *fractal*. Os *fractais* são objetos que apresentam a auto-semelhança, em que as partes que o compõem são cópias de si mesmo (Valim; Colucci, 2012). Esse tipo de situação é novo e totalmente diferente dos que encontramos durante a construção do nosso trabalho de conclusão de curso, Santos (2022), tornando-se relevante no sentido de nos permitir repensar as classes de situação existentes.

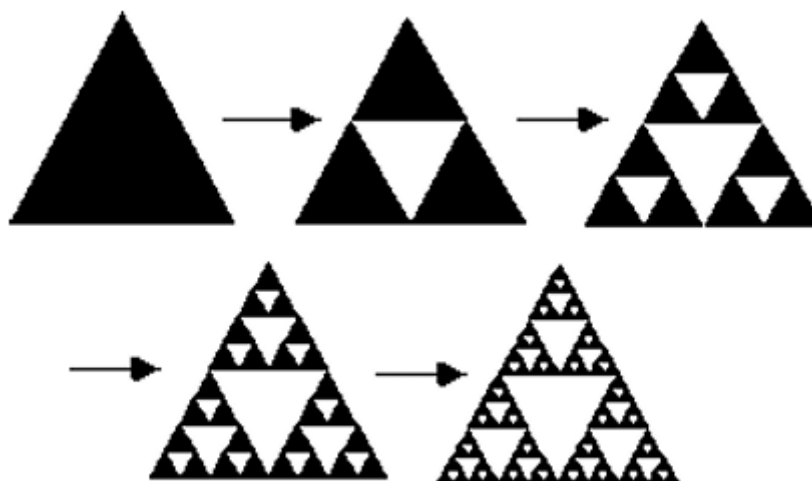
Além disso, algo curioso nesta situação é que cada figura é composta por exatamente três cópias da figura anterior, podemos encarar que cada quadradinho se transforma em três à medida que passamos de uma figura para a outra da sequência.

A classificação será dada a depender do esquema que o estudante desenvolva ao resolver a situação, por exemplo, por essa discussão que tivemos, usando o esquema que apresentamos, essa situação seria classificada na classe de Cisão. Porém, se alguém ao resolver essa situação pense que ao invés de cada quadradinho se dividir em 3, entenda que há a geração, em que cada figura gera outras com a mesma característica que possui, essa situação se enquadraria em Corrente/Reprodução. Isso evidencia que o esquema usado para resolver a situação está diretamente ligado ao significado atribuído à função.

Nesta situação houve um aumento no número de partes que compõem a figura, aumentando visualmente a área ocupada a cada figura da sequência. Existem ainda fractais que aumentam a quantidade de partes que compõem a figura, porém diminuem ou mantêm

visualmente a área ocupada, à medida que se avança na sequência, a exemplo o triângulo de Sierpinski¹⁶, apresentado na Figura 26.

Figura 26 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: Valim; Colucci (2012, p. 5).

Outro ponto interessante é que apesar desta situação ser modelada pela mesma expressão matemática que modela a situação 1 do LD A, a função exponencial assume significados distintos dentro de cada situação. Aqui a função exponencial modela a auto-similarança que dá origem a sequência, por meio da cisão, levando em consideração o esquema apresentado, na situação 1 a função assume outro significado, o de “corrente”, que levará o estudante à construção de esquemas diferentes, por isso, pertencem a classes distintas, mesmo que modeladas pela mesma expressão matemática. É importante ressaltar que essas observações reiteram os resultados de nossa revisão de literatura, de que não basta diferenciar as funções exponenciais em crescentes e decrescentes, se o objetivo for o ensino, a aprendizagem ou a avaliação, é preciso, para que esses processos ocorram de forma eficiente, que o professor conheça e entenda os significados assumidos pela relação funcional dentro de cada classe de situação, para que ele possa melhor selecionar as situações que os seus alunos enfrentarão.

¹⁶ O triângulo de Sierpinski é um *fractal* construído a partir de um triângulo equilátero, a construção é feita em interações, na primeira interação é feita a união dos pontos médios do triângulo original, encontrando-se três novos triângulos, também equilátero, internos ao primeiro. Esse processo pode ser repetido quantas vezes for desejado, conforme ressalta Da Silva, 2015. A partir de cada interação é encontrada uma nova figura, compostas de cópias da anterior, no entanto, internas a ela.

Cabe ressaltar, ainda, que essa situação foi classificada, de acordo com a classificação que propomos em Santos (2022), na classe de situação de Cisão, apesar de apresentar um contexto totalmente diferente das que encontramos anteriormente. Além disso, a situação nos ajuda a esclarecer a possibilidade de existência de outros fenômenos, modelados por uma função do tipo exponencial, que apresentem o significado de Cisão de forma diferente das situações encontradas e discutidas até aqui.

A classe de Cisão foi estipulada inicialmente para englobar as situações de reprodução de bactérias e microrganismos que se reproduzem por meio da cisão. Neste tipo de situação cada indivíduo se divide gerando cópias de si deixando de existir. Entendemos, porém, que os *fractais* nos permitem revisitar a definição dada inicialmente, no intuito de ampliarmos para uma definição mais geral, tendo em vista que esse processo pode ser visto não só em bactérias, mas também em outras grandezas, como é o caso do número de quadrados que forma o fractal de cada fase.

Neste sentido, a partir daqui, definiremos a classe de Cisão como o grupo de situações em que as grandezas crescem por meio da cisão dos indivíduos/objetos, gerando uma quantidade fixa de indivíduos/objetos com as mesmas características daquela que lhe gerou. Cabe salientar que a garantia das características pode ou não acarretar em cópias da anterior. Sendo assim, assumimos que a classe de Cisão passa a dar conta não só das situações que envolvem a cisão biológica, mas também, outras em que as grandezas cresçam por meio de cisão dos indivíduos/objetos considerados.

A terceira situação encontra-se na página 54 do LD C, ela apresenta a meia-vida¹⁷ de duas substâncias o etinilestradiol, com meia-vida de 25 horas, e o levonorgestrel, com meia-vida de 24 horas. É solicitado a quantidade de cada substância 24 horas após a pílula ser ingerida, no item a), e que seja determinada a quantidade de cada substância após 4 e 12 horas da segunda dose, no item b), como pode ser observado na Figura 27. Aqui retornamos a classe Taxa sobre taxa, no intuito de reforçarmos as subclasses.

¹⁷ A meia-vida é o período que uma amostra leva para diminuir à metade a sua concentração, nos elementos radioativos a meia-vida está relacionada a emissão de energia (Santos, 2022 *apud* Oliveira 2014).

Figura 27 - Situação 2 LD C

- 2.** O etinilestradiol é um tipo de estrogênio com meia-vida de aproximadamente 25 horas, e o levonorgestrel é um tipo de progesterona com meia-vida de 24 horas.

Considere a situação em que uma mulher ingeriu uma pílula com esses hormônios, pela primeira vez, em determinado horário do dia.

- a)** Após 24 horas, antes de tomar a próxima pílula, qual é o nível de cada um desses hormônios em relação à dosagem inicial?
- b)** Se a pílula não for tomada no horário correto, então qual será o nível desses hormônios 4 horas após o horário no qual deveria ter ocorrido a segunda dosagem? E 12 horas após esse horário?

Fonte: Dante; Viana (2020, p. 54).

Essa situação apresenta o comportamento de duas funções diferentes, uma para cada substância, que não estão associadas diretamente, isso porque, o comportamento de uma não altera o comportamento da outra, tendo em vista que são funções independentes. A função que modela a quantidade de etinilestradiol pode ser expressa por: $f(t) = Q \cdot (1/2)^{t/25}$, com t em horas e Q sendo a quantidade inicial da substância. Já a quantidade de levonorgestrel, pode ser expressa por $f(t) = Q \cdot (1/2)^{t/24}$, com t em horas e Q sendo a quantidade inicial da substância.

É importante observarmos que as duas funções apresentam o comportamento de taxa acumulada, com taxas entre 0 e 1, por apresentarem decrescimento, por isso podem ser classificadas como situação de Taxa sobre taxa, na subclasse de Decaimento. Essa situação apesar de apresentar duas funções, ambas pertencentes à classe de situações de Taxa sobre taxa, não é classificada na subclasse de situações mistas, isso porque as taxas são ambas de desvalorização/depreciação.

Neste sentido, essa situação se torna relevante para nossa análise no sentido de enfatizar o significado da subclasse de situação mista, que compõe a classe Taxa sobre taxa. Nela existem a junção de duas taxas para modelar uma situação de função exponencial, no entanto, uma maior que um, que expressa o crescimento ou a valorização, e outra entre zero e um, que expressa o decrescimento ou a desvalorização. Nesta situação, no entanto, ocorre a

junção de duas taxas de mesma natureza, ambas expressam o decrescimento da quantidade de substâncias.

Consideramos que esse esclarecimento seja de grande ajuda não só para quem busca selecionar situações de Taxa sobre taxa, a serem vivenciadas nos momentos que permitem a aprendizagem, como também para pesquisas futuras, uma vez que esclarece a classificação e os significados.

É importante ressaltar, que aqui não nos concentramos em resolver ou propor uma possível solução para as situações analisadas, tendo em vistas que nos preocupamos não com a solução, mas sim, com os significados assumidos pelas funções exponenciais em cada situação.

Neste viés, essas situações nos fizeram revisitar as classes e subclasses já estipuladas, no intuito de acrescentarmos ou esclarecermos às suas definições, porém, encontramos outras situações às quais a nossa classificação ainda não dá conta e outras que apesar de nossa classificação dá conta, a forma como elas foram escritas nos leva a uma classificação equivocada, a esse fenômeno damos o nome de redução de significados. Sendo assim, essas situações serão discutidas na sequência.

7.2.1 Situações em que os significados são reduzidos

A partir de nossas análises nos livros didáticos pudemos observar que algumas situações apresentam uma mudança de significados, ocasionada geralmente pela maneira em que são escritas, levando a uma outra classificação quando olhamos apenas para o enunciado da situação, sem buscar entender qual o significado da relação funcional no contexto. Apesar disso, acreditamos que em alguns casos a mudança seja relacionada a uma adaptação de situações que descrevem fenômenos modelados pela função exponencial, porém não estudados no Ensino Médio. Entretanto, em outros casos, essa mudança é preocupante, tendo em vista que pode levar o estudante a não expandir seus esquemas e, por vezes, não aproveitar a oportunidade para ampliação do campo conceitual dominado pelo estudante. Portanto, leva a uma abordagem que reduz os significados possíveis de serem abordados no Ensino Médio.

Essas reduções, na maioria dos casos, ocasionadas pela forma como a situação é apresentada, fazem com que as situações que não pertencem a classe situação de Taxa sobre taxa, sejam apresentadas como uma situação desse tipo. Consideramos que essas reduções, corroboram com o pensamento que as funções exponenciais possuem apenas uma

classificação, a de taxa sobre taxa, diferenciando-se em duas formas de se apresentar: uma que representa o crescimento e outra que representa o decrescimento, podendo causar uma barreira epistemológica¹⁸. Para melhor compreensão, resolvemos exemplificar algumas dessas reduções.

A primeira situação que resolvemos discutir é a situação 21, presente na página 68 do LD A. Nela é dito que um estudante se equivocou na hora de escrever uma função em seu caderno, a função modela o crescimento da população de bactérias em função do tempo, ao invés do estudante escrever $f(t) = 2^t$ (com t representando o tempo, em horas, e $f(t)$ a quantidade de bactérias, em milhares), ele escreveu $f(t) = 2t$. É solicitado que seja esboçado os gráficos das funções em um mesmo sistema de coordenadas, no item a); que após a construção do gráfico seja observado se alguma imagem é comum aos dois gráficos, no item b); que o estudante reflita sobre o crescimento das duas funções, no item c); e que se encontre a diferença das imagens, quando $t = 3$ horas, no item d); como pode ser observado na Figura 28, seguinte.

Figura 28 - Situação 21 LD A

- 21.** Durante a aula de Matemática, o professor comentava sobre uma função que representava o crescimento de uma determinada bactéria e escreveu na lousa $f(t) = 2^t$, para $t \geq 0$, em que t é dado em horas e $f(t)$ em milhares de bactérias.
- Um estudante distraído copiou $f(t) = 2t$ e, portanto, seus cálculos não deram certo.
- a) Esboce os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de coordenadas.
Ver as Orientações para o professor.
 - b) Observando os gráficos construídos no item a, existe algum valor de t para o qual as duas funções assumem valor igual?
Se sim, qual(is)? *sim, para $t = 1$ h e $t = 2$ h*
 - c) O que você pode concluir sobre o crescimento dessas duas funções?
Para $t > 2$, o crescimento da função 2^t é maior.
 - d) Para $t = 3$ h, qual é a diferença entre o número de bactérias nas duas funções?
2000 bactérias

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 68).

Essa situação, na forma que foi escrita, apesar de lidar com o crescimento de bactérias ao longo do tempo, não exige do estudante mobilizar esquemas ligados à reprodução

¹⁸ Entraves que dificultam o entendimento de conceitos científicos.

bacteriana em seus ciclos reprodutivos. O comportamento exponencial é apenas inserido por meio de fórmula, comparado ao comportamento de uma função linear, também dada por sua representação algébrica. O comportamento exponencial é valorizado, mas não o significado de cisão. Essa situação, ao não explicar como ocorre o processo de reprodução e apresentar apenas a lei de formação, pode nos levar a uma classificação equivocada.

Para melhor compreensão, resolvemos reescrever o enunciado da situação. A reescrita encontra-se na Figura 29, seguinte.

Figura 29 - Reescrita da situação 21, LD A

- 21** Durante a aula de matemática, o professor comentava sobre a função que representava o crescimento do número de bactérias de uma determinada colônia, explicando que a cada ciclo de reprodução cada bactéria se divide, dando origem a duas. Ele escreveu na lousa $f(t) = 2^t$, para $t \geq 0$, em que t é dado em horas e $f(t)$ milhares de bactérias.
um estudante distraído copiou a função $f(t) = 2t$ e, portanto, seus cálculos não deram certo.
- a)** Esboce os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de coordenadas.
Ver as Orientações para o professor.
- b)** Observando os gráficos construídos no item **a**, existe algum valor de t para o qual as duas funções assumem valor igual?
Se sim, qual(is)? *sim, para $t = 1$ h e $t = 2$ h*
- c)** O que você pode concluir sobre o crescimento dessas duas funções?
Para $t > 2$, o crescimento da função 2^t é maior.
- d)** Para $t = 3$ h, qual é a diferença entre o número de bactérias nas duas funções?
2 000 bactérias

Fonte: Adaptado de Bonjorno *et al.* (2020, p. 68).

Cabe observar que ao acrescentarmos a informação de como ocorre a reprodução bacteriana não mudamos o problema, não mudamos os elementos que são dados, nem os que se pedem, apenas deixamos claro o que a função modela. Consideramos que esse acréscimo de informação, seja de suma importância para o entendimento, a classificação e a resolução da situação. Isso porque, a função $f(t) = 2^t$, pode modelar diversos fenômenos, e estes, apresentarem diferentes significados, que neste caso, não é o de Taxa sobre taxa e sim o de Cisão, devido a forma na qual as bactérias se reproduzem. Essa discussão pode facilmente ser levantada na sala de aula, no intuito de expandir os esquemas dos estudantes, e por consequência, o domínio conceitual (Vergnaud, 1991).

Consideramos que essas duas situações reduzem à Taxa sobre taxa situações que apresentam significados que podem ser discutidos em sala de aula, significados possíveis de serem trabalhados durante o Ensino Médio. Neste sentido, cabe ao professor cautela durante a seleção de situações que irão compor os processos ligados à aprendizagem.

Por outro lado, existem outras situações, que são reduzidas a Taxa sobre Taxa, que apresentam funções exponencial para modelar fenômenos isolados, muitas vezes não discutidos durante o Ensino Médio. Para exemplificar, resolvemos apresentar a situação 55, presente no LD A. Na situação é apresentada uma função, do tipo exponencial, que modela o crescimento de uma planta em função do tempo. Como pode ser observado na Figura 30, seguinte.

Figura 30 - Situação 55, LD A

55. Um botânico anotou diariamente o crescimento de uma planta e verificou que esse crescimento obedecia de maneira aproximada à uma função exponencial dada por $h(t) = 2,52 + 0,04 \cdot 3^{0,14t}$, em que t representa o número de dias aferidos, a partir do primeiro registro, e $h(t)$ indica a altura, em centímetro, da planta no dia t .

- Elabore uma questão com base nos dados do enunciado acima, utilizando as expressões **tempo mínimo** ou **tempo máximo**. Depois, troque a atividade criada por você com um colega e responda à questão elaborada por ele. Juntos, confirmem as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 80).

Essa situação apresenta uma função, que acreditamos ter sido encontrada por meio da modelagem matemática¹⁹, o que talvez não seja possível ser feito durante o Ensino Médio. Esse tipo de situação costuma apresentar o modelo exponencial já pronto e solicitar que o aluno encontre imagens de termos intermediários ou o valor do domínio de uma imagem intermediária. No entanto, para nossa surpresa, esta situação pede que seja elaborado um problema, o que nos chamou a atenção, tendo em vista que, no geral, os livros didáticos apenas propõem a resolução de problemas, deixando de explorar a elaboração.

¹⁹ “[...] a modelagem consiste na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem do mundo real” (Bassanezi, 2002, p. 16 *apud* Jacobini e Wodewotzki, 2006, p. 8).

Consideramos que a ação de elaboração de situações pode se tornar uma excelente oportunidade para que os estudantes compreendam as possibilidades de aplicação que a função exponencial possui, ou ainda, de uma melhor compreensão acerca dos significados assumidos pela função dentro das situações, quando a elaboração é livre. Consideramos, ainda, que o ato de elaborar problemas pode levar para sala de aula situações próximas da realidade dos estudantes; algo que, por vezes, o livro didático não dá conta, o que pode proporcionar maior interesse durante o estudo.

Já com relação a exponencial, esse tipo de situação pode ser uma saída quando o professor busca trabalhar as propriedades da exponencial. No entanto, nada garante a classificação desta situação de forma antecipada a elaboração do problema, isso porque a classificação dependerá dos elementos que são dados e solicitados no problema, bem como, do contexto e do significado assumido pela função e do esquema de solução. É importante enfatizar, ainda, que é necessário cautela quando se propõem as situações. Isso porque se o estudante enfrenta apenas situações nas quais já é dada a fórmula para se encontrar a imagem de um valor genérico, quando ele se depara com situações que lhe peçam a elaboração da fórmula algébrica que a modela, ele não consiga resolvê-la. O domínio conceitual perpassa dois processos: a variedade (no sentido de variação de significados e formas que são propostas as situações) e história (no sentido de reconstrução de esquemas) (Vergnaud, 1991).

Neste sentido, enfatizamos a importância dos estudantes vivenciarem diferentes situações, que apresentem não só diversidade em significados, mas também, variem os elementos que são dados e solicitados em cada uma. Isso no intuito de oportunizar aos alunos a reorganização de seus esquemas, para que seja possível o domínio do Campo Conceitual (Vergnaud, 1991).

Olhando para as situações que apresentam redução de significados, encontramos duas situações com significados diferentes dos apresentados até aqui, essas situações deram origem à novas classes e serão discutidas à diante.

7.3 Classe de situação - Taxa de Covariação

A classe de situações de Taxa de Covariação surgiu após encontrarmos a situação 33, presente na página 78 do LD A. Nela é apresentada uma função do tipo exponencial que

modela o fenômeno de resfriamento ou perda de calor²⁰ de um corpo, como mostra a Figura 31.

Figura 31 - Situação 33 LD A

- 33.** (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t , dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18°C . Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0°C após 90 minutos e chegou a -16°C após 270 minutos.
- a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β . $\beta = -\frac{1}{90}$; $\alpha = 54$
- b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)^\circ\text{C}$ superior à temperatura ambiente. 360 minutos

Fonte: Bonjorno *et al.* (2020, p. 78).

A situação apresenta uma função do tipo exponencial como modelo para o processo de resfriamento de um corpo, que é descrita por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, em que α e β são constantes e T_A é a temperatura ambiente, supostamente constante. O modelo dado refere-se a um processo que é comumente estudado pela Física, em que um corpo, dependendo do ambiente no qual é posto ou do corpo com o qual entra em contato, de sua massa e, ainda, de suas propriedades físicas, terá uma função que modele o processo de resfriamento ou aquecimento sofrido.

Para a Física, o processo pode ser explicado por meio da Lei de resfriamento de Newton, que diz que “a taxa de variação temporal da temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio circundante” (Bronson, 2008, p. 64). Isso significa que se o corpo for posto em um ambiente que possui uma temperatura maior que a sua ele ganhará energia em forma de calor, elevando sua temperatura. No entanto, se sua temperatura for maior que a do meio ele perderá energia, diminuindo a sua temperatura até que se encontre um equilíbrio, o mesmo ocorre quando dois corpos são colocados em contato e há uma diferença de temperatura entre eles.

²⁰ O termo calor, que geralmente é confundido no dia a dia com a ideia de temperatura ou até mesmo com a de sensação térmica, refere-se à energia que é transferida entre um sistema e um corpo ou entre corpos, que são postos em contato, devido a uma diferença de temperatura (Halliday, 2012).

O processo pode ser descrito pela seguinte equação: $\frac{\Delta T}{\Delta t} = k(T_C - T_A)$, em que ΔT é a variação de temperatura sofrida pelo corpo, k representa o coeficiente de proporcionalidade, que dependerá da superfície exposta, isto é da área, do calor específico do corpo, da diferença de temperatura do corpo, do meio e também das características do meio em que o corpo é colocado, T_C é a temperatura do corpo, que varia em função do tempo, T_A é a temperatura ambiente e Δt é o intervalo de tempo que o corpo passa em contato com o meio (Teixeira, 2006).

Em um primeiro olhar, a equação Newtoniana nada se parece com a função exponencial apresentada na situação 33. No entanto ela apresenta a variação da temperatura em função da variação do tempo, por isso ela se caracteriza como uma Equação Diferencial Ordinária (EDO)²¹, que ao manipularmos por meio dos mecanismos do cálculo diferencial e integral encontraremos uma função do tipo exponencial.

Sendo assim, temos a equação 1), que ao dividirmos, ambos os lados por $(T_C - T_A)$, encontramos a equação 2).

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = k(T_C - T_A) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} : (T_C - T_A) &= k(T_C - T_A) : (T_C - T_A) \\ \frac{1}{(T_C - T_A)} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} &= k \end{aligned} \quad (2)$$

Partindo da equação 2), após multiplicarmos ambos os lados por Δt encontramos a equação 3).

$$\begin{aligned} \frac{1}{(T_C - T_A)} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} \cdot \Delta t &= k \cdot \Delta t \\ \frac{1}{(T_C - T_A)} \cdot \Delta T &= k \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (3)$$

Integrando ambos os lados, teremos a equação 4):

$$\int \frac{1}{(T_C - T_A)} \cdot \Delta T = \int k \cdot \Delta t \quad (4)$$

Ao resolvermos essa integral encontraremos:

$$\ln |T_C - T_A| = k \cdot t + c, \text{ em que } c \text{ é uma constante.}$$

Usando as propriedades de logaritmos, encontraremos a seguinte equação:

$$|T_C - T_A| = e^{k \cdot t + c}$$

²¹ Uma EDO é uma equação em que sua incógnita é uma função.

$$|T_C - T_A| = e^{k \cdot t} \cdot e^c$$

Assumindo que e^c é um valor constante, podemos chamar seu valor de α ou qualquer outra letra que desejarmos. Além disso, como o processo que estamos discutindo é o de resfriamento, assumimos que $T_A > T_C$, logo o módulo da diferença será a própria diferença, então:

$$T_C - T_A = e^{k \cdot t} \cdot \alpha$$

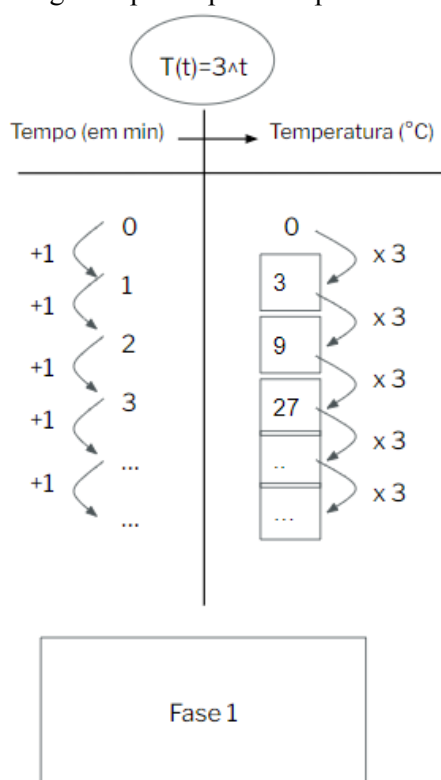
Adicionando T_A em ambos os lados da equação, encontramos que $T_C = e^{k \cdot t} \cdot \alpha + T_A$, como T_C expressa a temperatura do corpo, podemos concluir que a temperatura varia à medida que o tempo passa, por se tratar de um processo de resfriamento. Portanto, podemos escrever uma função do tipo: $T_C = e^{k \cdot t} \cdot \alpha + T_A$, em que T_C pode ser expresso como $T(t)$, uma vez que se refere à temperatura do corpo em função do tempo, k e c são constantes e T_A a temperatura do ambiente, supostamente constante. Assim, chegamos a uma função do tipo exponencial, semelhante à da situação 33, apresentada anteriormente.

Esse processo, por mais significativo que seja, por conseguir atribuir sentido à função exponencial que modela o processo de transferência de calor, não é visto no Ensino Médio, devido ao nível de escolarização dos estudantes. No entanto, não podemos perdê-lo de vista, uma vez que a função exponencial não surge de forma espontânea no problema, isso posto, precisamos conhecer o processo e entender o significado que a função assume no problema.

Em nossa pesquisa costumamos olhar para as funções exponenciais por meio da composição de funções. Sendo assim, resolvemos fazer isso com a função presente na situação 33, $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$. Para isso iremos assumir que além de α e β serem constantes, T_A também é constante, visto que se refere à temperatura ambiente, que possivelmente não sofrerá alteração. Para entendermos melhor, iremos separar a função e olhar para as partes (ou ainda, as funções menores) que a compõe.

Inicialmente, olharemos apenas a função $T(t) = 3^t$, em que $T(t)$ representa a temperatura em função do tempo e t o tempo. Para isso, resolvemos representar o comportamento da função por meio da Figura 32.

Figura 32 - Diagrama para a primeira parte da função

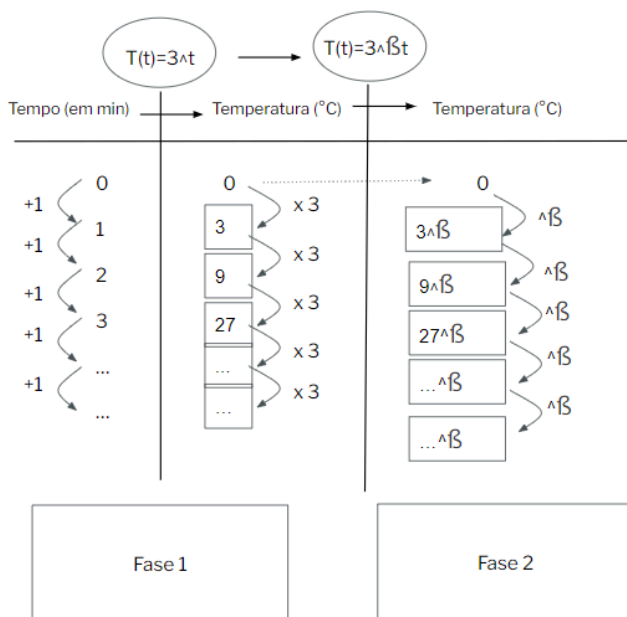


Fonte: Autor (2025).

A dificuldade na classificação de situações com funções compostas se dá pela necessidade de entendermos não só as partes que compõem cada função e classificá-las separadamente, mas compreendermos a alteração que cada parte proporciona ao significado da função maior, presente na situação. Não podemos perder de vista o significado, que advém da relação da função e do contexto, isso porque se olharmos apenas para o comportamento matemático assumido por essa parte da função, podemos de maneira equivocada classificá-la como Taxa sobre Taxa com proporcionalidade simples. Porém, não podemos perder de vista que essa função é apenas parte da função maior, com um contexto diferente, por isso, a situação presente no problema 33 não pode ser enquadrada na classe de Taxa sobre Taxa com proporcionalidade simples.

Olharemos agora para a primeira composição sofrida pela função, neste caso, a função analisada será $T(t) = 3^{\beta t}$, em que $T(t)$ representa a temperatura em função do tempo, t , e β é uma constante. Para isso resolvemos montar um outro diagrama, presente na Figura 33, que representasse o seu comportamento em função do tempo.

Figura 33 - Diagrama para a segunda parte da função

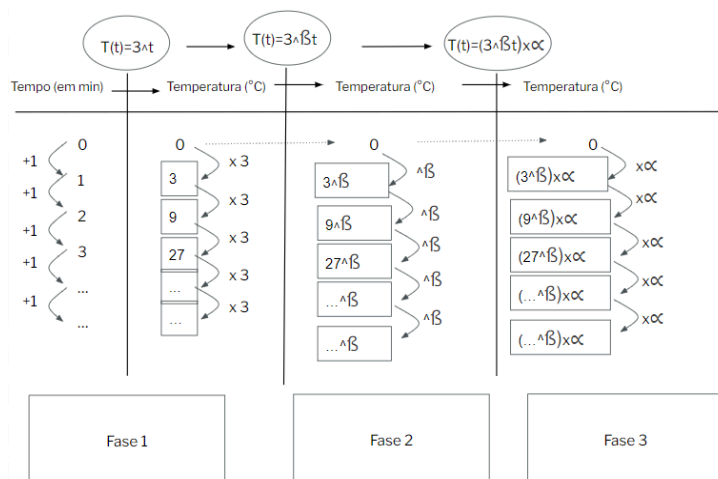


Fonte: Autor (2025).

Aqui, na Fase 2, conseguimos observar que os valores encontrados na Fase 1, são todos elevados à β , isso ocorre devido às propriedades de potenciação, porque quando temos $3^{\beta \cdot t}$ é o mesmo que termos $(3^t)^\beta$, neste sentido, teremos os valores correspondentes às imagens da função $T(t) = 3^t$ todos elevados à β . No entanto, não paramos, a composição apresentada no problema não acaba por aqui, temos ainda duas outras composições.

Analisaremos agora, o comportamento da função $T(t) = (3^{\beta t}) \cdot \alpha$, para isso iremos analisar a Figura 34, seguinte.

Figura 34 - Diagrama para a terceira parte da função

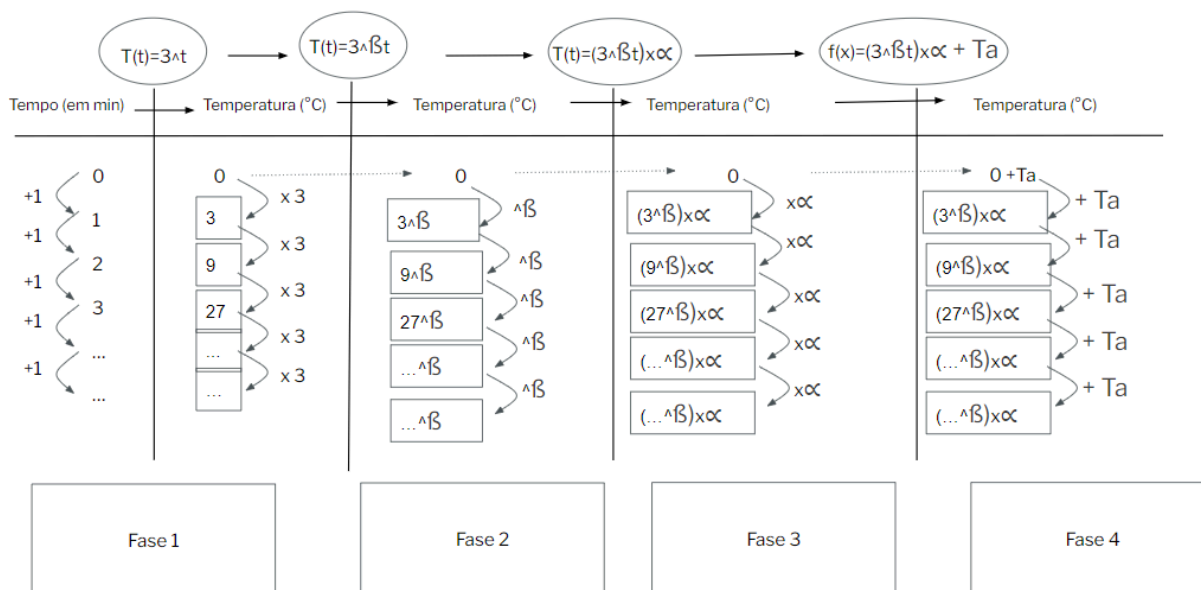


Fonte: Autor (2025).

De modo análogo ao que ocorreu na passagem anterior, podemos notar que agora toda a função, presente na Fase 2, será multiplicada por α , gerando uma nova função. Por fim, analisaremos a última composição, adicionando T_A à função, encontrando a função:

$T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, como pode ser observado na Figura 35, na Fase 4.

Figura 35 - Diagrama geral-quarta parte da função



Fonte: Autor (2025).

Na quarta e última fase obtemos a função anunciada na situação 33, por meio da composição de funções, esse processo mesmo que demorado se torna relevante à medida que evidencia que não é a composição que determina a classe de situação, mas sim o significado assumido pela função na situação. Porém, um olhar para a função exponencial por meio da composição entre funções pode potencializar o entendimento da situação, e por consequência o domínio conceitual.

Sendo assim, esta classe de situação surge no intuito de enquadrar as situações de função exponencial que são geradas por meio da taxa de variação, como visto no processo de resfriamento de um corpo, na situação 33 do LD A, por meio da lei de resfriamento de Newton, estudada pela Física.

Por fim, acreditamos que apesar de compor um livro do Ensino Médio, o significado assumido nesta situação pela função exponencial é um significado distante deste nível de escolaridade, por isso é preciso cautela ao propor que os estudantes façam o seu enfrentamento.

8 SÍNTESE DAS ANÁLISES

Essa investigação buscou elaborar e validar uma estrutura de classificação para as situações de funções exponenciais propostas em livros didáticos do Ensino Médio brasileiro. Uma estrutura de classificação nos permite maior clareza com relação aos processos que permeiam a aprendizagem, isso porque, não basta separarmos as situações em apenas dois grupos: um de funções crescentes e outro de funções decrescentes, não quando o objetivo é o domínio conceitual.

Esta investigação parte de nosso trabalho de conclusão de curso (Santos, 2022), na intenção de revisitar as classes e subclasses de situações existentes no intuito não só de ampliação de número de classes e subclasses, mas principalmente de aprofundamento de definições e estudos. Com isso chegamos a quatro classes de situações, sendo elas: Taxa sobre taxa, Cisão, Corrente/Reprodução e Taxa de Covariação.

Estipulamos em Santos (2022) a classe de situações Taxa sobre taxa no intuito de englobar as situações que tratam do crescimento e/ou decaimento cumulativo. Nesta classe, a taxa multiplicativa representa crescimento ou decaimento cumulativo. Essa classe de situações foi subdividida em três subclasses, de acordo com o significado da taxa multiplicativa: i-Crescimento, taxa maior zero e diferente de um; ii-Decaimento, taxa entre zero e um e, iii-Mista, situações que apresentam composições de duas taxas, sendo uma maior que zero e diferente de um e outra entre zero e um.

Estipulamos, também em Santos (2022), e reformulamos aqui, a classe de situações Cisão. A classe de Cisão engloba as situações em que as grandezas apresentadas crescem por meio da cisão de si em n partes, cada grandeza, nesta classe de situação, gera novas com as mesmas características que possui. Esta classe, engloba as situações de cisão biológica, de *fractais* e outras grandezas. Nela, a taxa multiplicativa representa divisão ou geração, garantindo que cada parte tenha as mesmas propriedades que a geradora, podendo ser igual ou não a ela.

A classe de Corrente/Reprodução foi estipulada, também em Santos (2022), para englobar situações que tratam sobre o compartilhamento, seja de forma direta (uma corrente) ou inversa (por meio da reprodução), essa nomenclatura adveio das situações encontradas em Santos (2022), durante a classificação. As situações que assumem o comportamento de corrente geralmente possuem o contexto eletrônico, podendo também aparecer em outros contextos como o caso da fofoca, apresentado anteriormente. Já o comportamento que chamamos de reprodução foi dado para as situações em que duas grandezas se unem para

formar uma só e, continuam a existir. Nos livros que analisamos, nesta investigação, não encontramos nenhuma situação com o comportamento inverso à corrente. Assim, nesta classe de situações a taxa multiplicativa representa compartilhamento, ou ainda, junção.

A partir de nossas análises surgiu uma quarta classe de situação, a classe taxa de covariação. Nesta classe, a taxa da exponencial surge por meio da covariação, o que irá gerar uma função do tipo exponencial. Essa classe surgiu, quando encontramos uma situação que apresenta uma função do tipo exponencial para modelar o processo de resfriamento de um corpo, processo explicado pela lei de resfriamento de Newton. Esta classe de situação nos leva a imaginar que existe a possibilidade de outras classes de situações, que por vários motivos não são vivenciadas durante o Ensino Médio, essas não serão investigadas aqui.

Notamos que nos livros didáticos mais de 80% das situações apresentam a função exponencial por meio da composição entre funções, nestas situações a exponencial assume parte da estrutura, o que nos leva a necessidade de ampliações das definições apresentadas nos livros didáticos. Isso porque, como discutido anteriormente, os invariantes e os elementos dados e solicitados podem sofrer variações.

Sobre os elementos dados e solicitados, nossa pesquisa evidencia a existência de elementos característicos para as situações de função exponencial. Observamos que existe, mesmo que perante a mesma estrutura, diversas combinações possíveis de elementos dados e solicitados, as quais geram subdivisões nas classes e subclasses de situações. O que nos permite inferir que não basta que o professor apresente diversidade de significados é importante, também, que haja variação nas combinações de elementos dados e solicitados, para que haja o domínio conceitual.

Outro ponto importante, é o cuidado que devemos ter quanto a simplificação da situação, isso porque, em alguns casos as situações podem apresentar reduções ou variação de significados, devido, principalmente, à forma como foi escrita.

Consideramos que este estudo servirá para que tenhamos maior clareza e cuidado durante a elaboração de materiais e livros didáticos, como também, de aulas. Isso porque, a estrutura de classificação que apresentamos, permite uma classificação das situações por significado, além da possibilidade de um olhar cuidadoso quanto aos elementos envolvidos nas situações.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As funções se mostram de grande ajuda para que as pessoas resolvam situações do dia a dia, seja de forma intencional ou não. Sendo assim, o seu estudo se torna relevante para a Educação Básica brasileira. Para que haja um ensino claro das funções se torna necessário um mapeamento dos significados assumidos por elas nas diferentes situações. Por isso, esse trabalho buscou elaborar e validar uma estrutura de classificação para as situações de função exponencial, vivenciadas pelos estudantes durante o Ensino Médio. Para isso, selecionamos três livros aprovados no PNLD do ano de 2021 para servir como documentos fonte de situações.

Para a classificação das situações levamos em consideração cinco critérios, criados embasados na Teoria dos Campos Conceituais, a saber: estrutura do problema, significado da relação, contexto do problema, elementos desconhecidos e elementos dados no problema. Essa classificação parte inicialmente do nosso trabalho de conclusão de curso (Santos, 2022) e de um projeto maior, ainda em andamento, o FrameAGAP.

Neste sentido, inicialmente fizemos um estudo das situações na tentativa de verificarmos quantas e quais situações já possuíam uma classificação, levando em consideração as classes já estipuladas em nosso trabalho de conclusão de curso. Neste momento de análise olhamos também para os contextos das situações, para os elementos dados e desconhecidos e para as estruturas envolvidas. Sendo assim, podemos separar as situações que já possuíam uma classificação, das que ainda não tinham.

Pudemos observar o aparecimento de situações com contextos e estruturas diferentes daquelas classificadas em Santos (2022) o que nos permitiu um alargamento tanto nas explicações como nas próprias definições das classes e subclasses de situações, por duas razões: encontramos situações que traziam um novo contexto e situações que traziam uma nova estrutura matemática para a função.

Com relação ao contexto ele nos permitiu, por exemplo, a ampliação da definição da classe de Cisão, essa classe foi pensada inicialmente para as situações que tratam da reprodução de bactérias e microrganismos, que se reproduzem por meio da cisão. Nesta definição inicial levamos em consideração apenas a cisão biológica, em que geralmente a cada ciclo de reprodução cada indivíduo se divide em dois, portanto teríamos a taxa como sendo sempre dois.

No entanto ao nos depararmos com uma situação que apresentava a construção de um *fractal*, observamos que a cada interação as partes que o compuseram se dividem em outras

partes com as mesmas características da anterior, isso nos levou a uma ampliação da definição da classe. Neste sentido, acreditamos que o *fractal* possa ser encarado como uma cisão de taxa “n”. O que nos mostra a possibilidade de existência de outros fenômenos que possam ser modelados por cisão.

Com relação às estruturas pudemos observar que nos três livros didáticos analisados a quantidade de situações que são modeladas por funções compostas ultrapassam 80% das situações contextualizadas. As funções que encontramos em maior parte das situações se apresentam como uma composição, seja entre a exponencial e outras funções ou a função exponencial e constantes, sendo a exponencial parte de uma função maior, essas apresentam a quebra de alguns invariantes do conceito, como por exemplo a imagem do zero. Em toda função exponencial simples a imagem do zero vale 1, nas compostas, nem sempre. Essas questões nos levaram a pensar qual o impacto que a composição gera na classificação das situações.

Concluimos que apesar de aparecer em maior parte das situações a composição não possui impacto direto no significado da relação, no entanto, pode afetar diretamente no esquema construído pelo estudante. Isso porque, nas situações compostas a quantidade de elementos que podem ser dados ou pedidos aumenta consideravelmente, quando comparado aos elementos da função exponencial pura. Consideramos que esse deva ser um ponto de atenção para os professores no momento de selecionar as situações que os estudantes irão enfrentar, e também, na construção de livros e materiais didáticos, isso porque quando a função exponencial é definida somente pela sua forma pura, pode o estudante enfrentar grandes dificuldades, visto que a definição não dará conta sequer de 20% das situações.

Esse olhar para as composições nos permitiu também, maior clareza no que se refere a definição da subclasse de situação mista, englobada pela classe Taxa sobre taxa. A subclasse foi estipulada para as situações que apresentam uma função do tipo exponencial com duas taxas, uma maior que 1 e outra entre 0 e 1. Essa classificação deve ser dada olhando apenas para as partes exponenciais que compõem a função geral, por isso, não levamos em consideração outros tipos de funções.

Esse olhar para as estruturas nos permitiu, ainda, notarmos que existem elementos que são dados ou pedidos com frequência, tanto nas funções puras, quanto nas compostas, sendo assim, os chamamos de elementos característicos da função exponencial, que são eles: I-A taxa multiplicativa, II-A imagem do zero, III-A imagem de valores intermediários, IV-A imagem de um valor genérico ou lei de formação e V-O valor do domínio de imagens intermediárias.

Consideramos que não basta que o aluno enfrente muitas situações, é preciso oportunizar situações que possuam variedade em significado e ainda, que estas diversifiquem as combinações geradas pelos elementos que são dados e elementos que são solicitados.

Para além disso, notamos que algumas situações reduzem a estrutura exponencial a classe Taxa sobre Taxa situações de outras classes, como por exemplo situações da classe de Cisão. Essa redução geralmente é ocasionada devido a forma como foi escrita da situação, seja pela omissão de informações relevantes ou estruturação da situação. Por vezes, essa a redução de significado é preocupante, por poder prejudicar a construção de esquemas dos estudantes, no entanto, em outros casos é bem intencionada, por apresentar em sua composição significados que os estudantes não estão prontos para vivenciar nesta etapa de escolarização.

O estudo dessas reduções nos levou a uma nova classe de situações, a classe Taxa de variação, ela foi estipulada para englobar situações que apresentam uma exponencial que é encontrada por meio de uma equação diferencial (EDO), partindo de uma situação que apresenta uma função que modela o resfriamento de um corpo. Essa classe de situações nos mostra que a redução de significados, em algumas situações se fazem necessárias, devido a complexidade dos fenômenos modelados pela exponencial.

As situações que apresentam esse segundo tipo de redução geralmente são encontradas por meio da modelagem matemática e talvez os estudantes não estejam prontos, nesta etapa escolar, para dominarem esses significados. Neste tipo de situação corriqueiramente se pede que o aluno encontre algum valor de uma imagem ou de uma constante ou ainda, transite entre as representações, não é pedido que o estudante encontre a lei de formação partindo de uma contextualização.

Neste sentido, nossa pesquisa abre margem para outra que busque entender os significados assumidos pelas estruturas exponenciais ou ainda, como os estudantes enfrentam os diferentes tipos de situações. Além disso, pode possibilitar ao professor, autor de sua prática e de livros e materiais didáticos um melhor direcionamento no que se refere a escolha de situações, que irão compor os momentos de ensino, aprendizagem e avaliação.

REFERÊNCIAS

- ALEIXO, Daniel Matheus Silva. **Álgebra linear no livro didático do ensino médio: uma discussão por meio da teoria dos registros de representação semiótica**. TCC (TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO) - Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), 2021.
- BARBOSA, Gerson Silva. Teoria das situações didáticas e suas influências na sala de aula. **VI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, v. 6, 2016.
- BASSANEZI, R.C. Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.
- BENEDITO, Leandro André Barrada; BERNARDES, Aline. Ensino de Funções e as Metarregras do Discurso: refletindo sobre a definição atual de função a partir de algumas definições históricas. **Revista de História da Educação Matemática**, v. 5, n. 2, p. 7-22, 2019.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.
- BROUSSEAU, Guy. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.
- CARVALHO, João. **Coleção Explorando o Ensino. Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica**, v. 17, p. 15-25, João Bosco Pitombeira de Carvalho e Paulo Figueiredo Lima, 2010.
- CHOPPIN, Alain. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. **Educação e Pesquisa**, vol. 30, nº. 3, p. 549 - 566, set/dez, 2004.
- DA SILVA, Ana Júlia dos Santos. Noções intuitivas do cálculo diferencial e integral no ensino médio: é possível?. 2015.
- DA SILVA LOBATO, Fabricio; DA SILVA, Euvaldo Soares; DE SÁ, Pedro Franco. A importância da história da matemática como metodologia no ensino de função. **Brazilian Journal of Development**, v. 7, n. 3, p. 25517-25539, 2021.
- LIMA, Joélia Santos de; GITIRANA, Verônica. FrameAGAP: um framework para auxiliar estudantes com dificuldades no estudo das cônicas. **Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 19, n. 2, p. 496-505, 2021.
- MACÊDO, Josué Antunes de; BRANDÃO, Daniel Pereira; NUNES, Daniel Martins. Limites e possibilidades do uso do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Debate**, v. 3, n. 7, p. 68-86, 2019.
- EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. Unicamp, 1995.
- FREITAG, Bárbara; MOTTA, Valéria Rodrigues; COSTA, Wanderley Ferreira. **O estado da arte do livro didático no Brasil**. Brasília: INEP, 1987

FREITAS, Rita Lôbo; ALMOULOU, Saddo Ag. Representações sobre função exponencial. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**, v. 3, n. 2, 2014.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar um Projeto de pesquisa**. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GITIRANA, Verônica. **Funções**: aprendizagem e representações. texto disponível on-line, 1999. Disponível em https://drive.google.com/file/d/1wupESEcINSJcdp8G2XN_IwCBrXdLsgKX/view?usp=sharing

GITIRANA, Verônica; MAGINA, Sandra; CAMPOS, Tânia; SPINILLO, Alina. **Repensando Multiplicação e Divisão**. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM Editora, 2014.

GITIRANA, Verônica.; BELLEMAIN, Paula Baltar; SANTOS, Ernani. Multiplicative situations in Brazilian Mathematics Textbooks approaches to decimal numbers In: **Anais do II International Confererence on Mathematics Textbooks Researches and Developments**, 2017, Rio de Janeiro. ICMT2 - Timetable & Abstracts. Rio de Janeiro: UFRJ, 2017, p.116 - 117

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. Rio de Janeiro, **Instituto de Matemática Pura e Aplicada**, 1979.

GONÇALVES, Heitor Antônio *et al.* **Educação matemática e cálculo mental: uma análise de invariantes operatórios a partir da teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud**. Tese (DOUTORADO EM EDUCAÇÃO) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro. 2008.

GONÇALVES, Ruth Grossmann. **O emprego do livro didático de Matemática no Ensino Fundamental da rede pública estadual**. Monografia (Especialização em Didática e Metodologia do Ensino Superior). Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma. 2007. 40f.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física**. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 2. Leis da.

HAREL, Guershon; CONFREY, Jere; NUNES, T. O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo na aprendizagem da matemática. **Estudos Educacionais em Matemática**, v. 29, n. 3, pág. 293-294, 1995.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática Ciência e Aplicações**. São Paulo: Atual Editora, 2004.

IEZZI, Gelson *et al.* **Conecte: Matemática Ciências e Aplicações**. São Paulo: Saraiva Editora, 2020.

IFRAH, Georges. **Os números**: história de uma grande invenção. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra; revisão técnica Antônio José Lopes, Jorge José de Oliveira. - 11 ed. - São Paulo: Globo, 2005.

JACOBINI, Otávio Roberto; WODEWOTZKI, Maria Lucia L. Uma reflexão sobre a modelagem matemática no contexto da educação matemática crítica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro-SP, v. 19, n. 25, p. 1-16, 2006.

JUNIOR SILVA, Clovis Gomes da. O Livro Didático de Matemática e o Tempo. **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.

KAMPHORST, Eliane Miotto; NEHRING, Cátia Maria. Uma Análise da Importância de Diagnósticos para a Apropriação Conceitual dos Estudantes em Atividade de Ensino Mediada pelo Conceito de Função. **Salão do Conhecimento**, 2019.

KARDEC, A. **Matemática Online - UNEMAT**, (2017) . Acesso em 15 de 04 de 2022, disponível em Matemática online:

<https://www.youtube.com/channel/UCn-wrX0Xg5MILGSWak1eE0g>

KARDEC, A. **Matemática Online - UNEMAT**, 2017. Acesso em 15 de 04 de 2022, disponível em Matemática online:

<https://www.youtube.com/channel/UCn-wrX0Xg5MILGSWak1eE0g>

KIKUCHI, Luzia Maya. **A Teoria dos Campos Conceituais e a análise dos invariantes operatórios no conteúdo de álgebra**. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 2019.

LIMA, Elon Lages *et al.* **A matemática do ensino médio**. SBM, 1997.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 8 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. v.1.

MARINHO, Janailson Silva. **O uso do winplot como software educativo no ensino da função quadrática**. (N. de páginas)p. 2021. Dissertação (Nome do curso). Nome da Universidade, Sigla da Universidade, Estado, 2021..

MENEZES, Luís. **Matemática, linguagem e comunicação**. Millenium, 2000.

MIRANDA, Clarice de Almeida. **Situações-problema que envolvem o conceito de função afim: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais**. Dissertação (Educação em ciências e matemática) Universidade do Oeste do Paraná, UNIOESTE, Paraná. 2019.

MOREIRA, Marco Antonio. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências**. Porto Alegre. Vol. 7, n. 1 (jan./mar. 2002), p. 7-29, 2002.

NIRO, Kleber Luciano; KATO, Lilian Akemi. Um olhar para a Conceitualização da Função Exponencial decorrente de uma Atividade de Modelagem Matemática. **EM TEIA-Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v. 11, n. 3, p. 1-21, 2022.

NUNES, T. *et al.* As estruturas aditivas: avaliando e promovendo o desenvolvimento dos conceitos de adição e subtração em sala de aula. In: **Educação Matemática: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez, 2005. 206 p., cap. 2, p. 45-81.

OLIVEIRA, S. L. **Elementos da Radioatividade a partir de primeiros princípios e aspectos ambientais no distrito Uranífero de Lagoa Real-BA**. 87 f. 2014. Dissertação (Ciências Ambientais). Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, UESB, Bahia, 2014.

PICCOLI, Luís Alberto Prates *et al.* A construção de conceitos em matemática: uma proposta usando tecnologia de informação. 2006.

PIVA, Anderson; MENONCINI, Lúcia; PEREIRA, Pedro Augusto. **APRENDIZAGEM CONCEITUAL DE FUNÇÕES**. Jornada de iniciação científica e tecnologia. Universidade Federal da Fronteira do Sul (UFFS), 2020.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática**. Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2012.

ROSSINI, Silvana Teresinha Coronel Medeiros. **A importância do livro didático na produção textual**. 2003. 139f. Monografia (Especialização em Língua Portuguesa e Textualidade). Universidade do Extremo Sul Catarinense. Criciúma.

SÁ, Pedro Franco de; SOUZA, Glageane da Silva; SILVA, Isaac Dayan Bastos da. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. **Traços**. Belém, v. 6, n.11, p. 123-140, 2003

SANTANA, Eurivalda; ALVES, Alex Andrade; NUNES, Célia Barros. A teoria dos campos conceituais num processo de formação continuada de professores. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 1162-1180, 2015.

SANTOS, Déric Vinicius. **Situações de função exponencial: um mapeamento das estruturas à luz da Teoria dos Campos Conceituais**. 2022. Trabalho de Conclusão de Curso.

SILVA, Rodrigo Sychocki da. O uso de problemas no ensino e aprendizagem de funções exponenciais e logarítmicas na Escola Básica. 2012.

SPINELLI, Janice Valgoi. **Ensino de funções exponenciais a partir de problemas, seguindo uma sequência didática**. TCC (TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DE GRADUAÇÃO) - Universidade Federal Do Rio Grande Do Sul (UFRJ), Departamento de Matemática Pura e Aplicada, Rio Grande do Sul, 2018.

STEWART, James. **Cálculo**. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

SYCHOCKI, Rodrigo; AZEVEDO, Marcus. Da interpretação à conceituação: uma sequência didática baseada no uso de problemas envolvendo funções exponenciais e logarítmicas. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Matemática**, v. 7, n. 2, p. 163-186, 2012.

SIAS, Denise Borges; TEIXEIRA, Rejane Maria Ribeiro. Resfriamento de um corpo: a aquisição automática de dados propiciando discussões conceituais no laboratório didático de Física no ensino médio. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 23, n. 3, p. 361-382, 2006.

VALIM, João César Maciel; COLUCCI, Viviane. Geometria Fractal no Ensino Fundamental e Médio. **Anais da XXII SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA**. Disponível: projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/13.pdf. Acesso em, v. 3, n. 10, 2012.

VERCEZE, Rosa M^a. Aparecida N.. SILVINO, Eliziane França M. O Livro Didático e suas implicações na prática do professor nas escolas públicas de Guajará Mirim. **Revista Práxis Educacional Vitória da Conquista**, v. 4, n. 4, p. 83-102 jan./jun. 2008.

VERGNAUD, G. A Classification of Cognitive Tasks and Operations of Thought Involved in Addition and Subtraction Problems. In. T. Carpenter; T. Romberg; J. Moser (Eds.). **Addition and Subtraction: a cognitive Perspective**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 1982. p. 39-59.

VERGNAUD, G. . **Multiplicative Structures**. Multiplicativo Estruturas. In Lesh R., Landau M.(Ed.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York: Academic Press, 1983.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget,1996. p. 155-191.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, Nº 4: 9-19, 1996.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 10, n. 23, p. 133-170, 1990

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field: what and why? In. Guershon, H. e Confrey, J. (Eds.). **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany: State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

VERGNAUD, G. Quelques problèmes théoriques de la didactique à propos d'un exemple: les structures additives. **Atelier International d'Été: Recherche en Didactique de la Physique**. La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho, 1983.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro, UFRJ, p. 1-26, 1993.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Publications mathématiques et informatique de Rennes**, n. S6, p. 47-50, 1989.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. **Desenvolvimento humano** , v. 52, n. 2, p. 83-94, 2009.

VILLaverde, A. *et al.* **Fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa em educação em ciências**. Editora Bagai, 2021.